

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Matheus Vítor de Andrade Pedrosa

**INVARIÂNCIA POSITIVA DE DOMÍNIOS  
POLIÉDRICOS PARA SISTEMAS LINEARES NA  
PERSPECTIVA DO OPERADOR DELTA**

Florianópolis  
2018



Matheus Vítor de Andrade Pedrosa

**INVARIÂNCIA POSITIVA DE DOMÍNIOS  
POLIÉDRICOS PARA SISTEMAS LINEARES NA  
PERSPECTIVA DO OPERADOR DELTA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

**Orientador:** Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto, Universidade Federal de Santa Catarina.

**Coorientador:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pedrosa, Matheus Vítor de Andrade  
Invariância Positiva de Domínios Poliédricos para  
Sistemas Lineares na Perspectiva do Operador Delta  
/ Matheus Vítor de Andrade Pedrosa ; orientador,  
Eugênio de Bona Castelan Neto , coorientador,  
Carlos Eduardo Trabuco Dórea , 2018.  
85 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas,  
Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

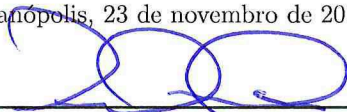
1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2.  
Operador delta. 3. Conjuntos poliédricos. 4.  
Invariância positiva. 5. Controle sob restrição. I. ,  
Eugênio de Bona Castelan Neto. II. , Carlos Eduardo  
Trabuco Dórea. III. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas. IV. Título.

Matheus Vítor de Andrade Pedrosa

**INVARIÂNCIA POSITIVA DE DOMÍNIOS  
POLIÉDRICOS PARA SISTEMAS LINEARES NA  
PERSPECTIVA DO OPERADOR DELTA**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 23 de novembro de 2018.



---

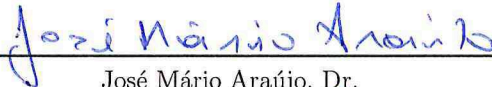
Prof. Werner Kraus Junior, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas

**Banca Examinadora:**



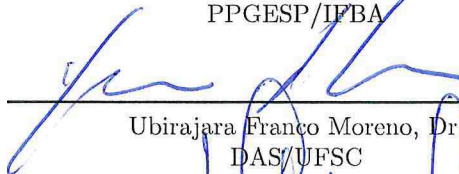
---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Presidente



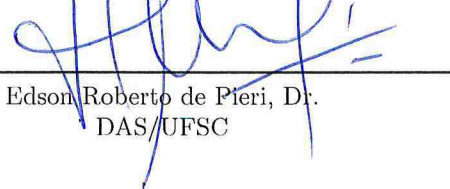
---

José Mário Araújo, Dr.  
PPGESP/IFBA



---

Ubirajara Franco Moreno, Dr.  
DAS/UFSC



---

Edson Roberto de Pieri, Dr.  
DAS/UFSC



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão por serem meu sentido. À família, sobretudo meus avós Juarez e Avani e minha tia Lúcia, e aos amigos por serem parte essencial no meu desenvolvimento.

À Jaízia por todo o carinho.

Aos colegas do mestrado por terem tornado essa etapa tão marcante, em especial a Feres e Deinis.

A Stephanie pelas parcerias.

Aos colegas da Cheesecake Labs e da Khomp pelo crescimento profissional.

Aos membros da banca pelas recomendações para que esse trabalho fosse aprimorado.

A Enio, secretário do PPGEAS, pelo pronto suporte e solicitude.

Agradeço ao meu orientador Eugênio pela confiança, pela mentoria, pelo conhecimento repassado, por todo o excepcional apoio e pela amizade que extrapolou os muros acadêmicos. Ao meu coorientador Carlos por ser minha principal fonte de inspiração e um ser essencial para que eu conseguisse essa realização. Aos dois por serem parte fundamental das minhas conquistas e da minha carreira acadêmica.





“La lutte elle-même vers les sommets suffit à remplir un cœur d’homme. Il faut imaginer Sisyphe heureux.”

(Albert Camus)



## RESUMO

Na literatura, são disponíveis métodos para obter conjuntos positivamente invariantes para sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto usando o operador avanço. No entanto, não foram encontradas referências mostrando como desenvolver métodos usando o operador delta nas principais bases de dados científicas. As propriedades de invariância positiva são usadas para, no sistema de malha fechada, respeitar as restrições nos estados do sistema e nas entradas de controle. Nesta dissertação, relações de invariância positiva de conjuntos poliédricos são propostas no contexto do modelo de operador delta para sistemas lineares de tempo discreto. A abordagem do operador delta é conhecida por ser de interesse quando se usam altas taxas de amostragem e também permite unificar conceitos e resultados em tempo discreto e em tempo contínuo. Neste contexto, as relações de invariância positiva do operador delta propostas, que são obtidas a partir dos resultados do operador avanço clássico, também mostram recuperar as relações de invariância de tempo contínuo quando o período de amostragem tende a zero. Mostra-se por meio de simulações que o desempenho do sistema de malha fechada em tempo discreto melhora à medida em que o período de amostragem diminui para o operador delta, diferentemente do operador avanço. Uma abordagem de programação linear também é proposta no contexto do operador delta para resolver o Problema de Regulação Linear sob Restrições em tempo discreto. Dois exemplos numéricos são explorados para mostrar que a solução do operador delta proposta se aproxima da solução de tempo contínuo quando o período de amostragem é pequeno. Além disso, apresenta uma análise e síntese de controladores em sistemas lineares discretos com o operador delta sujeitos a atuadores saturados.

**Palavras-chave:** Operador delta. Conjuntos poliédricos. Invariância positiva. Problema de Regulação Linear sob Restrições. Saturação.



## ABSTRACT

In the literature, methods are available to obtain positively invariant sets for continuous-time and discrete-time systems using the shift operator. However, it was not found references showing how to develop methods using the delta operator in the main scientific databases. The positive invariance property is used to, in the closed-loop system, enforce the constraints in the system's states and in the control inputs. In this dissertation, positive invariance relations of polyhedral sets are proposed in the context of the delta operator model for linear discrete-time systems. The delta operator approach is known to be of interest when using high sample rates and it also allows to unify discrete-time and continuous-time concepts and results. In this context, the proposed delta operator positive invariance relations, which are obtained from the classical shift operator results, are also shown to recover the continuous-time invariance relations when the sample period approaches zero. It is shown by simulations that the performance of the discrete-time closed-loop system improves as the sampling period decrease for the delta operator, differently from the shift operator. A linear programming optimization approach is also proposed in the context of the delta operator to solve a discrete-time Linear Constrained Regulation Problem. Two numerical examples are exploited to show that the proposed delta operator solution closely follows the continuous-time one when the sampling period is small. Also, it presents a analysis and synthesis of controllers in delta operator linear discrete systems subject to saturated actuators.

**Keywords:** Delta operator. Polyhedral sets. Positive invariance. Linear Constrained Regulation Problem. Saturation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama do controle discreto de sistemas físicos amostrados. ....	30
Figura 2	Distribuição espacial no plano complexo da região espectral de $A_\delta$ para três diferentes períodos de amostragem. ....	34
Figura 3	Exemplo de poliedro convexo no $\mathbb{R}^2$ . ....	36
Figura 4	Exemplo de poliedro simétrico convexo no $\mathbb{R}^2$ . ....	37
Figura 5	Regiões de estabilidade no plano complexo. ....	47
Figura 6	Inclusão de conjuntos $S(G, \omega) \subseteq S(F_\delta, \bar{u})$ . ....	51
Figura 7	Relação entre as funções objetivo para diferentes períodos de amostragem. ....	53
Figura 8	Trajetórias dos estados no tempo para $T = 10^{-5}$ . ....	57
Figura 9	Trajetórias das ações de controle no tempo para $T = 10^{-5}$ . ....	58
Figura 10	Trajetórias no espaço de estados para $T = 10^{-5}$ . ....	58
Figura 11	Região que limita a derivada de $x(t)$ ou a diferença $\Delta x_k$ . ....	60
Figura 12	Campo vetorial da derivada de $x(t)$ para o reator. ....	62
Figura 13	Diagrama de fase do reator. ....	64
Figura 14	Trajetórias do reator. ....	65
Figura 15	Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com $\beta = 20$ . ....	71
Figura 16	Trajetória para o exemplo 5.1 com $\beta = 20$ . ....	72
Figura 17	Entrada do sistema para exemplo 5.1 com $\beta = 20$ . ....	72
Figura 18	Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com $\beta = 50$ . ....	75
Figura 19	Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com $\beta = 10$ . ....	75





## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Autovalores encontrados resolvendo o LCRP para diferentes períodos de amostragem. ....	54
Tabela 2	Representação do sistema discretizado com $T = 10^{-5}$ para o exemplo de avaliação da proposta. ....	55
Tabela 3	Matrizes obtidas com $T = 10^{-5}$ para o exemplo de avaliação da proposta. ....	56
Tabela 4	Resultados do LCRP para o modelo do reator discretizado. ....	62
Tabela 5	Resultados comparativos para o exemplo 5.1 com diferentes valores de $\beta$ . ....	74



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FAA	Filtro <i>anti-aliasing</i>
LCRP	<i>Linear Constrained Regulation Problem</i>
PL	Programação linear
SOZ	Segurador de ordem zero



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\triangleq$	Definição
$\approx$	Valor aproximado
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$x$	Vetor de estados
$u$	Vetor de entradas de controle
$y$	Vetor de saídas
$t$	Instante de tempo contínuo
$T$	Período de amostragem
$0$	Vetor nulo ou matriz nula de dimensão apropriada
$I_n$	Matriz identidade de dimensão $n$
$z_i$	Elemento $i$ de um vetor $z$
$Z_{ij}$	Elemento da linha $i$ e coluna $j$ de uma matriz $Z$
$Z_{(i)}$	Linha $i$ de uma matriz $Z$
$Z \geq 0$	Indica que uma matriz $Z$ é não negativa
$Z^T$	Transposta de uma matriz $Z$
$ a $	Valor absoluto de um escalar $a$
$ Z $	Matriz formada pelos valores absolutos de uma matriz $Z$
$\ z\ _\infty$	Norma infinito de um vetor $z$
$\ Z\ _\infty$	Norma infinito de uma matriz $Z$
$\sigma(Z)$	Espectro de uma matriz $Z$
$\mu_\infty(Z)$	Medida infinito de uma matriz $Z$
$\dot{z}(t)$	Derivada de $z(t)$ definida $\frac{dz(t)}{dt}$
$\text{Co}\{z_j\}$	Envoltória convexa definida pelos vértices $z_j$
$\text{diag}(z)$	Matriz diagonal formada pelos elementos de um vetor $z$

$posto(Z)$  Posto de uma matriz  $Z$

$sat(z)$  Saturação do sinal  $z$

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	23
1.1	OBJETIVOS .....	25
1.1.1	Objetivo Geral .....	25
1.1.2	Objetivos Específicos .....	25
1.2	ORGANIZAÇÃO .....	26
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	29
2.1	DISCRETIZAÇÃO USANDO <i>SAMPLE AND HOLD</i> ...	30
2.2	O OPERADOR $\delta$ .....	31
2.3	INVARIÂNCIA DE CONJUNTOS POLIÉDRICOS ...	35
2.3.1	Relações de Invariância para Sistemas Li- neares Discretos .....	37
2.3.2	Relações de Invariância para Sistemas Li- neares Contínuos .....	38
<b>3</b>	<b>INVARIÂNCIA POSITIVA SOB O CONTEXTO DO OPERADOR <math>\delta</math></b> .....	41
3.1	CASO GERAL .....	41
3.2	POLIEDROS SIMÉTRICOS .....	43
3.2.1	Algumas Considerações sobre o Caso de Poliedros Simétricos .....	45
<b>4</b>	<b>REGULAÇÃO LINEAR SOB RESTRIÇÕES NA PERS- PECTIVA DO OPERADOR <math>\delta</math></b> .....	49
4.1	$\delta$ -LCRP .....	49
4.2	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	53
4.2.1	Avaliação da Proposta .....	53
4.2.2	Modelo de um Sistema Real .....	59
<b>5</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM SATURAÇÃO NA PERSPECTIVA DO OPERADOR <math>\delta</math></b> .....	67
5.1	EXEMPLO NUMÉRICO .....	70
5.1.1	Síntese .....	70
5.1.2	Análise .....	71

<b>6 CONCLUSÃO</b> .....	77
6.1 PRODUÇÃO ACADÊMICA.....	78
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	79
<b>APÊNDICE A - Inclusão de Poliedros</b> .....	85



## 1 INTRODUÇÃO

Conjuntos positivamente invariantes desempenham um papel fundamental na teoria e em aplicações de sistemas de controle, formulando condições de estabilidade, controle e preservação de restrições de sistemas dinâmicos (HORVÁTH et al., 2017). Um conjunto no espaço de estados é positivamente invariante se, dado que em um instante de tempo seus estados estão contidos no conjunto, no próximo instante todos os estados continuarão dentro da região limitada por esse conjunto. Em uma visão geométrica, a trajetória dos estados sempre permanece dentro do conjunto invariante quando os estados iniciais pertencem a esse conjunto. Métodos para caracterizar algebricamente a invariância positiva de conjuntos poliédricos simétricos e assimétricos, denominadas relações de invariância, foram desenvolvidas para sistemas lineares em tempo contínuo (CASTELAN; HENNET, 1993; KIENDL et al., 1992) e sistemas lineares em tempo discreto descritos através do operador avanço (HENNET, 1995; DOREA; HENNET, 1999).

O uso de modelos de tempo contínuo é útil para uma análise teórica, enquanto sua implementação computacional é permitida de maneira mais fácil por meio de modelos em tempo discreto (YUZ; GOODWIN, 2014). Estes são usualmente obtidos a partir da discretização do sistema contínuo com o operador avanço. Porém, para sistemas dinâmicos que requerem um pequeno período de amostragem, a representação neste operador apresenta algumas desvantagens, como polos atraídos para a borda do círculo unitário em altas frequências de amostragem, além de erros de truncamento e arredondamento (YANG et al., 2012).

A fim de contornar esses problemas, o operador delta, podendo também ser chamado de operador  $\delta$ , foi inicialmente proposto por Middleton e Goodwin (1986). Ele tenta unificar as abordagens em tempo contínuo e em tempo discreto, apresentando um comportamento no sistema em tempo discreto que tende à dinâmica do sistema contínuo à medida em que o período de amostragem diminui. Além disso, com o aumento da frequência de amostragem, os polos e zeros do sistema com esse operador se aproximam aos polos e zeros do sistema contínuo, enquanto os zeros introduzidos pelo amostrador tendem a menos infinito (YANG et al., 2012). Ou seja, a sua representação com esse domínio se torna mais próxima ao modelo físico.

Controladores em domínios positivamente invariantes podem ser construídos através de algoritmos disponíveis que são baseados em Pro-

gramação Linear (PL), os quais permitem realizar a inclusão de restrições, ou baseados na alocação de auto-estrutura (HENNET, 1995). Tais algoritmos podem ser estendidos para sistemas discretos na perspectiva do operador delta. Um exemplo da alocação de auto-estrutura para sistemas com operador delta pode ser visto em Singh et al. (1996).

Na literatura, estudos sobre as relações entre o operador  $\delta$  e o operador avanço (NEUMAN, 1993b; KALMAN; BERTRAM, 1993), a formulação, propriedades e aplicações do operador  $\delta$  em sistemas físicos (NEUMAN, 1993a), e muitas outras aplicações, incluindo em sistemas sujeitos a saturação no atuador e modelos incertos (SOH, 1991; YANG et al., 2015) podem ser encontradas. No entanto, estudos concisos investigando as propriedades e as relações do conceito de invariância positiva em sistemas dinâmicos lineares sob a perspectiva do operador  $\delta$  não podem ser encontradas nas bases de dados IEEE Xplore, SciELO, Science Direct e Google Scholar ao se pesquisar pelos termos “delta operator” e “invariance”. Tal estudo seria útil para implementação em dispositivos físicos de sistemas sob restrições que precisam de taxas de amostragem mais rápidas.

Um sistema sujeito a restrições em seu vetor de estados e/ou nas entradas de controle pode ser estabilizado através de uma lei de regulação de realimentação de estados. Ela mantém os valores dos estados do sistema dentro de um conjunto positivamente invariante incluído em um domínio admissível de estados iniciais. O Problema de Regulação Linear sob Restrições, do inglês *Linear Constrained Regulation Problem* (LCRP), consiste em encontrar uma lei de controle de realimentação de estados que estabiliza um sistema linear sob restrições de estados e/ou de controle. Este problema já foi intensivamente estudado com resultados sólidos clássicos em, por exemplo, Vassilaki et al. (1988), Castelan e Hennes (1993), Hennes (1995). Resultados mais recentes, entretanto, expandem esse conceito inicial para casos de convergência para um ponto de equilíbrio situado no limite da região factível (BITSORIS; OLARU, 2013; BITSORIS et al., 2014), extensões para sistemas sujeitos a restrições físicas e de informação (WANG et al., 2016) e síntese de controladores de realimentação de estado baseados em conjuntos positivamente invariantes dependentes do atraso (BENSALAH, 2015).

Outro tipo de problema comum em sistemas de controle é a saturação de atuadores, já que a ação de controle é usualmente limitada por restrições físicas ou de segurança. A presença da saturação insere uma não linearidade no sistema em malha fechada, mesmo que ele seja considerado linear. Se por um lado os problemas de controle que apresentam não linearidades duras, como é o caso da saturação, são difíceis

de lidar, por outro ignorar a saturação pode levar a uma elevada deterioração na performance do sistema em malha fechada ou até, em casos extremos, à perda da estabilidade (HU; LIN, 2001). Modelos politópicos para os sistemas saturados podem ser usados para a análise e síntese de controladores com saturação, uma vez que a representação politópica elimina as não linearidades duras do sistema (TARBOURIECH et al., 2014). Assim, inclusões diferenciais politópicas conseguem garantir que a região de estabilidade esteja incluída na região de validade do modelo, porém representando os sistemas saturados com validade local. Em particular, o sistema em malha fechada pode ser reescrito com a saturação substituída por uma não linearidade de zona morta e condições de setor podem ser usadas para relaxar as condições de estabilidade e estabilização (TARBOURIECH et al., 2014).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo geral formular as propriedades de invariância positiva de conjuntos poliédricos para sistemas lineares discretos na representação do operador  $\delta$ .

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho consistem em:

- Formular as relações de invariância de sistemas discretos com o operador  $\delta$  para conjuntos poliédricos em geral e para o caso particular de poliedros simétricos;
- Apresentar a associação entre as relações de invariância no operador  $\delta$  com as referentes a sistemas contínuos e a sistemas discretos com operador avanço;
- Formular o Problema de Regulação Linear sob Restrições no contexto do operador  $\delta$ , apresentando os problemas de otimização relativos a esse problema;
- Apresentar e analisar aplicações do Problema de Regulação Linear sob Restrições no contexto do operador  $\delta$ , mostrando a efetividade das relações de invariância formuladas;

- Formular o problema de estabilização de sistemas lineares com saturação no atuador na perspectiva do operador  $\delta$ , juntamente com o problema de otimização não linear associado a ele;
- Realizar a análise e síntese de controladores para sistemas saturados no contexto do operador  $\delta$ .

## 1.2 ORGANIZAÇÃO

A composição deste trabalho se apresenta como segue:

- O Capítulo 2 apresenta conceitos teóricos que servem como base para a realização do objetivo geral dessa dissertação. Primeiramente, uma revisão sobre a discretização de sistemas lineares contínuos é apresentada, onde o modelo discreto é representado pelo operador avanço. Logo depois, a descrição de sistemas lineares em tempo discreto com o operador  $\delta$  é feita. Por fim, é apresentada a definição algébrica de conjuntos poliédricos positivamente invariantes, seguida de uma revisão teórica sobre as relações de invariância para sistemas discretos com o operador avanço e para sistemas contínuos.
- O Capítulo 3 formula as relações de invariância propostas para o caso discreto com o operador  $\delta$ , tanto para o caso de conjuntos poliédricos em geral, quanto para o caso de poliedros simétricos. Além disso, mostra a conexão entre essas relações com as conhecidas para sistemas contínuos.
- Uma descrição do Problema de Regulação Linear sob Restrições no contexto do operador  $\delta$  com os problemas de otimização associados, bem como observações referentes a como tais problemas estão relacionados ao contexto do operador avanço e do tempo contínuo são apresentadas no Capítulo 4. Dois exemplos numéricos são analisados, verificando-se a efetividade da proposta deste trabalho quando o período de amostragem é pequeno.
- No Capítulo 5 é formulado o problema de estabilização de sistemas lineares com saturação no atuador no contexto do operador  $\delta$ . Além disso, realiza-se ainda a análise e síntese de controladores para um exemplo numérico através de um problema de otimização que lida com bilinearidades em suas variáveis.

- Por último, o Capítulo 6 contém as conclusões sobre os resultados desta pesquisa, apresentando sugestões para trabalhos futuros. As publicações fruto deste mestrado também são mostradas.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta três conceitos fundamentais no desenvolvimento das condições algébricas que garantem a propriedade de invariância positiva para um conjunto poliédrico dado em relação a sistemas com operador  $\delta$ , detalhadas no próximo capítulo. Primeiramente, a discretização de sistemas lineares em tempo contínuo será abordada, em que os sistemas discretos são dados através do operador avanço, como normalmente tratada na literatura. As relações entre esses dois modelos também serão dadas.

Os sistemas físicos são modelados matematicamente através dos modelos dinâmicos em tempo contínuo. Entretanto, a leitura das variáveis desses sistemas reais é realizada por dispositivos digitais, as quais são coletadas apenas em instantes de tempo específicos. Da mesma forma, para que uma ação seja aplicada à planta real, os controladores digitais só podem atuar em certos instantes de tempo. Como consequência, a amostragem se torna um problema importante na teoria de controle (YUZ; GOODWIN, 2014).

Em seguida, iremos abordar uma representação de sistemas discretos alternativa à com operador avanço. Esta representação é dada através do operador  $\delta$ , em que o período de amostragem se torna explícito nas propriedades do sistema, bem como sua relação com sistemas em tempo contínuo.

Sistemas no operador delta podem unificar alguns resultados dos sistemas em tempo contínuo e em tempo discreto por apresentar explicitamente em sua estrutura o tempo de amostragem. Sua semelhança com o modelo físico aumenta à medida em que o período de amostragem diminui, sendo menos sensíveis do que os sistemas com o operador avanço em altas frequências de amostragem (YANG et al., 2012). Além disso, quando a taxa de amostragem é alta, os polos e zeros do sistema se aproximam dos polos e zeros do sistema contínuo, enquanto os zeros introduzidos pelo circuito *sample and hold* tendem a menos infinito, segundo Yang et al. (2012).

Por fim, o conceito de conjuntos poliedrais e o significado algébrico de sua invariância positiva serão mostrados. Serão tratadas também as condições necessárias e suficientes para que haja a invariância positiva de um determinado conjunto poliédrico, seja em sistemas em tempo discreto ou em tempo contínuo. A invariância positiva de conjuntos é fundamental na síntese de seguidores de referência e controladores preditivos, por exemplo, com garantia de invariância, estabilidade e propri-

idades de convergência, apresentando um papel fundamental na teoria de controle (RAKOVIĆ et al., 2005).

Para os resultados desta dissertação, definimos para sistemas discretos:

$$x_k = x(kT) \quad (2.1)$$

com  $k \in \mathbb{N}$  sendo o instante discreto no tempo e  $T \in \mathbb{R}_+$ , o período de amostragem.

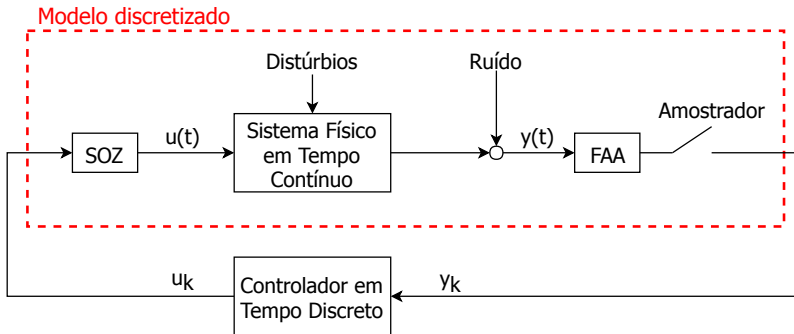
## 2.1 DISCRETIZAÇÃO USANDO *SAMPLE AND HOLD*

A Figura 1 esquematiza o processo de um controlador digital atuando em um sistema físico, que é descrito por equações diferenciais lineares ou não lineares. Neste, podem estar presentes distúrbios e/ou ruídos, e a sua saída  $y(t)$ , antes de ser amostrada, pode passar por um filtro *anti-aliasing* (FAA). O controlador discreto recebe a saída do amostrador  $y_k$  e aplica a entrada de controle  $u_k$  num segurador, usado para converter a entrada discreta em contínua. Geralmente é usado o segurador de ordem zero (SOZ), onde:

$$u(t) = u_k \text{ para } kT \leq t < (k+1)T,$$

no qual  $t \in \mathbb{R}_+$  é o instante de tempo.

Figura 1: Diagrama do controle discreto de sistemas físicos amostrados.



Distúrbios, ruídos e filtrações de sinais serão desconsiderados nesta dissertação, e a discretização através do amostrador e do segurador de ordem zero resulta no circuito *sample and hold*.

O modelo de um sistema linear invariante no tempo em tempo



contínuo é representado em espaço de estados como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Outra forma de ver o modelo é através da sua representação discretizada em espaço de estados quando a entrada do sistema em tempo contínuo é gerada usando um SOZ, em que esse modelo é dado em tempo discreto. Classicamente na literatura, a dinâmica do sistema é descrita via o operador avanço  $q$  que, quando aplicado a uma variável dinâmica discreta  $x_k$ , realiza a transformação  $qx_k = x_{k+1}$ . Os sistemas com a discretização clássica via operador avanço são dados por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k \end{cases} \quad (2.3)$$

onde:

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A(T-s)} B ds \quad \text{e} \quad C_d = C.$$

Nesse caso, quando o período de amostragem tende a zero, seu comportamento difere do modelo original em tempo contínuo:

- $\lim_{T \rightarrow 0} A_d = I_n$
- $\lim_{T \rightarrow 0} B_d = 0$

e, considerando seu espectro  $\sigma(A_d) = \{\lambda_i^d, i = 1, \dots, n\}$ , em que  $\lambda_i^d = e^{\lambda_i T}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , temos que:

- $\lim_{T \rightarrow 0} \lambda_i^d = 1.$

## 2.2 O OPERADOR $\delta$

O operador  $\delta$  é definido como segue (MIDDLETON; GOODWIN, 1986; YUZ; GOODWIN, 2014):

**Definição 1.** *O operador delta em tempo discreto é definido como:*

$$\delta = \frac{q - 1}{T} \quad (2.4)$$

onde  $q$  é o operador avanço que realiza a transformação  $qx_k = x_{k+1}$ , e  $T \in \mathbb{R}_+$  é o período de amostragem (em segundos) usado para discretizar, com um segurador de ordem zero (SOZ), o sistema contínuo (2.2).

Efetivamente, o operador  $\delta$  realiza uma diferença incremental em uma variável dinâmica, resultando em:

$$\delta x_k = \begin{cases} \dot{x}(t), & \text{se } T = 0 \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{T}, & \text{se } T \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Dessa forma, os sistemas lineares invariantes no tempo representados através do operador  $\delta$  são dados por:

$$\begin{cases} \delta x_k = A_\delta x_k + B_\delta u_k \\ y_k = C_\delta x_k \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $k \in \mathbb{N}$  é o instante discreto no tempo,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle e  $y_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída, com matrizes associadas  $A_\delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_\delta \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C_\delta \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$  e  $\delta x_k$ .

Uma observação importante é que o operador delta nada mais é do que uma forma de reparametrizar sistemas em tempo discreto através da transformada (2.4), e o modelo no domínio avanço pode ser convertido na forma delta e vice-versa. Esta reparametrização, porém, tem a vantagem de fazer uma ligação direta entre sistemas em tempo discreto e sistemas em tempo contínuo, diminuindo ainda erros numéricos de truncamento e arredondamento. Vale ressaltar, todavia, que ela não está relacionada à integração de Euler (YUZ; GOODWIN, 2014).

Isso significa que o sistema (2.3) juntamente com o (2.6) representam o mesmo sistema discretizado obtido a partir do contínuo (2.2). Esses dois modelos em tempo discreto são relacionados através das seguintes equações:

$$A_d = I_n + T A_\delta, \quad (2.7)$$

$$B_d = T B_\delta, \quad (2.8)$$

$$\lambda_i^d = 1 + T \lambda_i^\delta, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Por construção, de (2.5), as matrizes do sistema com operador delta (2.6) são relacionadas àquelas do sistema contínuo (2.2) por meio

das equações:

$$A_\delta = \frac{e^{AT} - I_n}{T}, \quad (2.10)$$

$$B_\delta = \frac{1}{T} \int_0^T e^{A(T-s)} B ds, \quad (2.11)$$

$$C_\delta = C. \quad (2.12)$$

A proximidade entre esses dois sistemas aumenta à medida em que o período de amostragem se torna menor. Observe que, quando o período de amostragem tende a zero, temos:

- $\lim_{T \rightarrow 0} \delta x_k = \dot{x}(t)$  já que, por definição,  $x_k = x(kT)$ ;
- $\lim_{T \rightarrow 0} A_\delta = A$ ;
- $\lim_{T \rightarrow 0} B_\delta = B$ .

Além disso, se o espectro das matrizes  $A$  e  $A_\delta$  são, respectivamente,  $\sigma(A) = \{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$  e  $\sigma(A_\delta) = \{\lambda_i^\delta, i = 1, \dots, n\}$ , então:

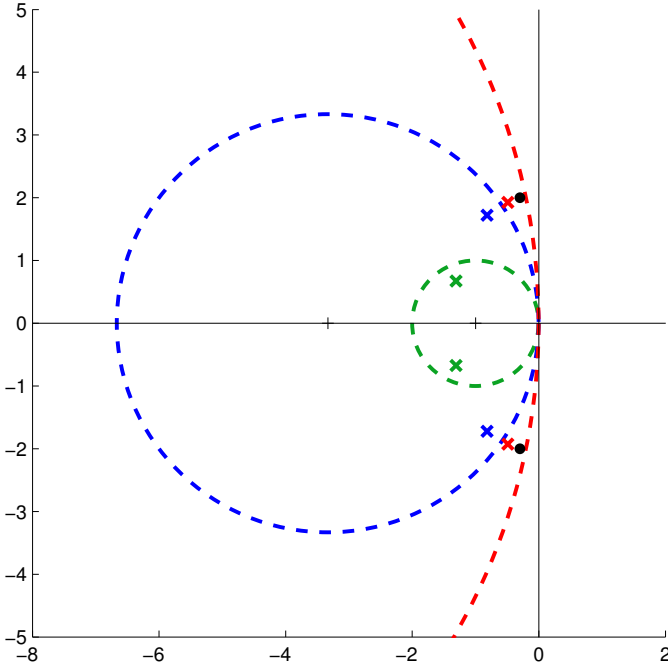
$$\lambda_i^\delta = \frac{e^{\lambda_i T} - 1}{T}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

que implica  $\lim_{T \rightarrow 0} \lambda_i^\delta = \lambda_i$ .

A equação (2.13) indica que os autovalores de  $A_\delta$  pertencem a um círculo de raio  $\frac{1}{T}$  e centrado, para todo caso, em  $-\frac{1}{T}$  (veja Yuz e Goodwin (2014), Neuman (1993a), Middleton e Goodwin (1986)). Para ilustrar esse conceito, a Figura 2 mostra a localização dos autovalores de  $A_\delta$  obtidos a partir de  $A = \begin{bmatrix} -0.3 & 2 \\ -2 & -0.3 \end{bmatrix}$  para três diferentes períodos de amostragem:  $T = 1$  (círculo verde),  $T = 0.3$  (círculo azul) e  $T = 0.1$  (círculo vermelho). Os autovalores de  $A$  estão representados por pontos pretos. Observe que, à medida em que  $T$  diminui, os autovalores de  $A_\delta$  vão se aproximando dos de  $A$ . Ainda, o círculo que contém seu espectro vai ocupando cada vez mais o lado esquerdo do plano complexo, região de estabilidade dos sistemas contínuos (2.2).

Dessa forma, o modelo com o operador  $\delta$  além de ser ideal para lidar com baixos períodos de amostragem, também permite unificar os conceitos de tempo discreto e tempo contínuo, conforme (2.4) e (2.14)

Figura 2: Distribuição espacial no plano complexo da região espectral de  $A_\delta$  para três diferentes períodos de amostragem.



abaixo.

$$(A_\delta, B_\delta, \lambda_i^\delta) = \begin{cases} (A, B, \lambda_i), & \text{quando } T \rightarrow 0 \\ (A_d - I_n, B_d, \lambda_i^d - 1), & \text{quando } T \rightarrow 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

De acordo com Yang et al. (2012), se destacam como aplicações importantes do operador delta em problemas de controle: controle em modos deslizantes, problemas de atraso, filtros, frequência finita e sistemas de controle em rede.

## 2.3 INVARIÂNCIA DE CONJUNTOS POLIÉDRICOS

A definição de invariância positiva apresentada por Horváth et al. (2017) introduz esse conceito como:

**Definição 2.** *Para um dado sistema dinâmico, um subconjunto do seu espaço de estados é dito ser um conjunto positivamente invariante se, contendo o estado do sistema em determinado instante de tempo, todos os estados seguintes ao longo do tempo permanecem contidos nesse conjunto positivamente invariante.*

Considere agora um sistema multivariável no tempo discreto dado por:

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

com  $w_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$  e  $f(\cdot)$  sendo uma função que mapeia  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{W}$  em  $\mathbb{R}^n$ . Um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio positivamente invariante do sistema (2.15) se e somente se:

$$f(\Omega, \mathcal{W}) \subset \Omega \quad (2.16)$$

Ou seja, no caso dos sistemas discretos, a invariância de  $\Omega$  é obtida se:

$$x_k \in \Omega \implies x_{k+1} \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

Equivalentemente, um sistema contínuo multivariável representado pela seguinte equação em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.18)$$

com  $w(0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(t) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$  e  $f(\cdot)$  uma função mapeando  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{W}$  em  $\mathbb{R}^n$ , apresenta um domínio positivamente invariante  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se e somente se (2.16) é satisfeito (HENNET, 1995).

Em particular,  $\Omega$  pode ser um poliedro convexo, que é definido em espaço de estados como:

**Definição 3.** *Um poliedro convexo não vazio de  $\mathbb{R}^n$  é definido por:*

$$R[Q, \rho] = \{x \in \mathbb{R}^n; Qx \leq \rho\} \quad (2.19)$$

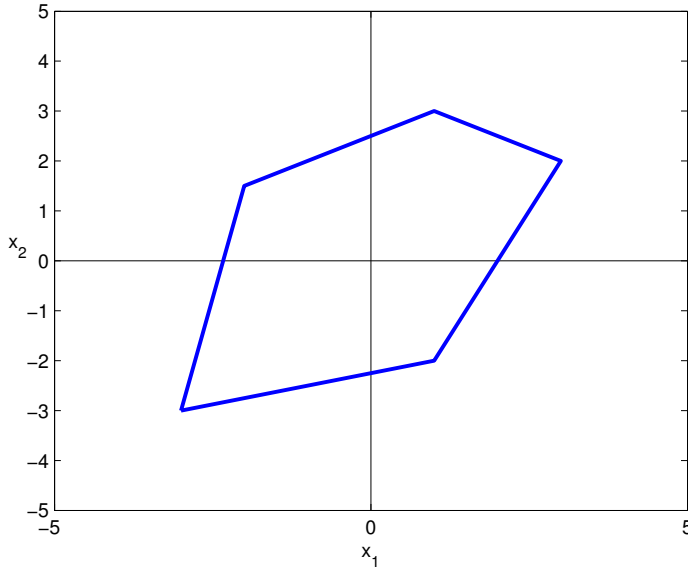
com  $Q \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^r$ , e  $r, n \in \mathbb{N}^*$ .

*Exemplo.* Para visualização geométrica do poliedro, considere o

caso no  $\mathbb{R}^2$  em que  $Q = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -4.5 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\rho = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 10.5 \end{bmatrix}$ . A Figura 3

apresenta o poliedro convexo restringindo o domínio dos estados que satisfazem  $R[Q, \rho]$ . O poliedro é resultado da intersecção das regiões definidas por cada uma das linhas da inequação  $Qx \leq \rho$ . Este poliedro será invariante com relação a um sistema dinâmico se, para qualquer ponto inicial pertencente ao seu interior, a trajetória deste sistema não sair dele.

Figura 3: Exemplo de poliedro convexo no  $\mathbb{R}^2$ .



Um caso especial é quando este domínio poliédrico é simétrico em torno do ponto de origem, apresentado a seguir.

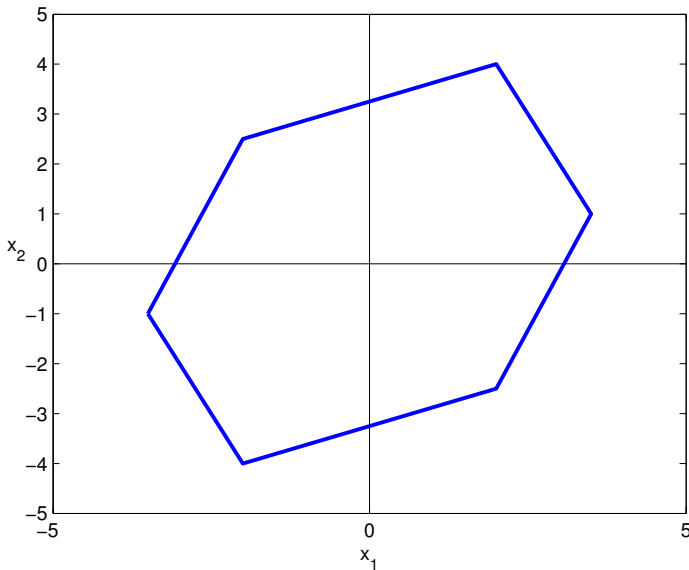
**Definição 4.** Um poliedro simétrico convexo em torno da origem  $S(G, \omega)$  é definido por:

$$S(G, \omega) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\omega \leq Gx \leq \omega\} \quad (2.20)$$

com  $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ,  $s \leq n$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^s$ ,  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ .

*Exemplo.* No caso de termos, também no  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1.5 & -4 \\ -3 & -11 \end{bmatrix}$  e  $\omega = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 21.5 \end{bmatrix}$ , o domínio simétrico do conjunto  $S(G, \omega)$  está mostrado na Figura 4.

Figura 4: Exemplo de poliedro simétrico convexo no  $\mathbb{R}^2$ .



### 2.3.1 Relações de Invariância para Sistemas Lineares Discretos

As relações algébricas que caracterizam a invariância positiva dos conjuntos poliédricos (2.19) e (2.20) para sistemas lineares discretos com o operador avanço podem ser obtidas aplicando-se, por exemplo, o Lema de Farkas para a relação (2.17) (ver Apêndice A). Elas serão usadas para obter as relações de invariância positiva para sistemas com o operador  $\delta$  no próximo capítulo.

Os próximos dois resultados estão relacionados a um sistema

autônomo com o operador avanço (ver Hennet (1995)):

$$x_{k+1} = A_d x_k \quad (2.21)$$

com  $x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Sabemos que o poliedro convexo  $R[Q, \rho]$  é invariante para o sistema (2.21) se e somente se:

$$Qx_k \leq \rho \implies Q A^p x_k \leq \rho, \forall x_k \in R[Q, \rho], \forall p, k \in \mathbb{N} \quad (2.22)$$

Aplicando o Lema de Farkas Estendido em (2.22) como apresentado em Hennet (1995), obtemos a proposição a seguir.

**Proposição 1.** *O conjunto poliédrico  $R[Q, \rho]$  é um conjunto positivamente invariante de (2.21) se e somente se existe uma matriz não negativa  $\mathcal{H}_d \in \mathbb{R}^{r \times r}$  tal que:*

$$\mathcal{H}_d Q = Q A_d \quad (2.23)$$

$$\mathcal{H}_d \rho \leq \rho \quad (2.24)$$

Uma matriz  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é não negativa, representada por  $Z \geq 0$ , quando todos os seus elementos são não negativos, ou seja, se  $Z_{ij} \geq 0, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$ .

Analogamente, para o conjunto poliédrico simétrico  $S(G, \omega)$  ser invariante para (2.21), considere a proposição abaixo.

**Proposição 2.** *Uma condição necessária e suficiente para que o poliedro simétrico  $S(G, \omega)$  ser invariante com relação a (2.21) é a existência de uma matriz  $H_d \in \mathbb{R}^{s \times s}$  tal que:*

$$H_d G = G A_d \quad (2.25)$$

$$|H_d| \omega \leq \omega \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Relações de Invariância para Sistemas Lineares Contínuos

Considere para o caso contínuo (ver Castelan e Hennet (1993)):

**Proposição 3.**  *$R[Q, \rho]$  é positivamente invariante para  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  se e somente se existe uma matriz essencialmente não negativa  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{r \times r}$*



tal que:

$$\mathcal{H}Q = QA \quad (2.27)$$

$$\mathcal{H}\rho \leq 0 \quad (2.28)$$

Definimos que uma matriz  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é essencialmente não negativa se todos os seus elementos fora da diagonal principal são não negativos, ou, equivalentemente,  $Z_{ij} \geq 0 \forall i \neq j, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$ .

De Castelan e Hennes (1993), podemos verificar que:

$$e^{\mathcal{H}T}Q = Qe^{AT}.$$

Comparando essa igualdade com (2.23), notamos que a matriz  $\mathcal{H}_d$  da Proposição 1 se relaciona com  $\mathcal{H}$  através da igualdade:

$$\mathcal{H}_d = e^{\mathcal{H}T}. \quad (2.29)$$

A próxima proposição trata das relações com poliedros simétricos para sistemas contínuos (ver Castelan (1992)):

**Proposição 4.**  $S(G, \omega)$  é positivamente invariante para  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  se e somente se existe uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{s \times s}$  tal que:

$$HG = GA \quad (2.30)$$

$$\hat{H}\omega \leq 0 \quad (2.31)$$

onde  $\hat{H} = \begin{cases} H_{ij}, & \text{se } i = j \\ |H_{ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, s.$

Igualmente de Castelan e Hennes (1993), observamos que:

$$H_d = e^{HT}. \quad (2.32)$$

Tendo conhecimento dos conceitos apresentados nesse capítulo, as relações de invariância para sistemas discretos representados pelo operador delta podem ser formuladas no próximo capítulo.



### 3 INVARIÂNCIA POSITIVA SOB O CONTEXTO DO OPERADOR $\delta$

Este capítulo apresenta a formulação das relações de invariância propostas para um sistema em tempo discreto com o operador  $\delta$  para poliedros convexos gerais e, em caso particular, para poliedros convexos simétricos. Também apresenta suas conexões com o sistema dinâmico em tempo contínuo.

#### 3.1 CASO GERAL

Considere o seguinte sistema autônomo com o operador  $\delta$ :

$$\delta x_k = A_\delta x_k \quad (3.1)$$

com  $x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $A_\delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e o conjunto poliédrico

$$R[Q, \rho] = \{x \in \mathbb{R}^n; Qx \leq \rho\} \quad (3.2)$$

com  $Q \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^r$ , e  $r, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Teorema 1.** *O conjunto poliédrico  $R[Q, \rho]$  (3.2) é um conjunto positivamente invariante com relação a (3.1) se e somente se existir uma matriz essencialmente não negativa  $\mathcal{H}_\delta \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , com  $\mathcal{H}_{\delta ii} \geq -\frac{1}{T} \forall i = 1, \dots, r$ , tal que:*

$$\mathcal{H}_\delta Q = QA_\delta \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}_\delta \rho \leq 0 \quad (3.4)$$

A matriz  $\mathcal{H}_\delta$  ser essencialmente não negativa significa que  $\mathcal{H}_{\delta ij} \geq 0 \forall i \neq j, \forall i = 1, \dots, r, \forall j = 1, \dots, r$ .

*Demonstração.* A partir de (2.7), podemos reescrever (2.23) como  $\mathcal{H}_\delta Q = Q(TA_\delta + I_r)$ . Então,  $(\frac{\mathcal{H}_\delta - I_r}{T})Q = QA_\delta$  e, definindo

$$\mathcal{H}_\delta \triangleq \frac{\mathcal{H}_\delta - I_r}{T}, \quad (3.5)$$

obtemos (3.3).

A partir dessa definição (3.5), podemos também reescrever (2.24) como  $(T\mathcal{H}_\delta + I_r)\rho \leq \rho$ . Assim,  $\mathcal{H}_\delta \rho \leq 0$ , obtendo a relação (3.4).

Devido ao fato da matriz  $\mathcal{H}_d$  ser não negativa, isto é,  $\mathcal{H}_{dij} \geq 0$ ,  $\forall i, j$ , a partir da Proposição 1 e de (3.5), também temos que  $\mathcal{H}_d = I_r + T\mathcal{H}_\delta \geq 0$ . Portanto,  $\mathcal{H}_\delta \geq -\frac{1}{T}I_r$ . É então requerido de (3.4) que  $\mathcal{H}_\delta$  seja uma matriz essencialmente não negativa respeitando:

$$\mathcal{H}_{\delta ii} \geq -\frac{1}{T} \quad (3.6)$$

□

Uma hipótese que será usada ao longo dessa dissertação é que a origem está no interior do poliedro (3.2). Com isso,  $Q0 < \rho \Leftrightarrow \rho > 0$ . Assim, pela inequação (3.4) e sabendo que  $\mathcal{H}_\delta$  é essencialmente não negativa, teremos:

$$-\frac{1}{T} \leq \mathcal{H}_{\delta ii} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

A partir do Teorema 1, podemos encontrar as relações de invariância para sistemas contínuos estabelecidas em Castelan e Hennem (1993) quando o período de amostragem tende a zero, conforme a proposição abaixo e sua prova mostram.

**Proposição 5.** *As relações (3.3) e (3.4) do Teorema 1 possuem equivalência com as relações (2.27) e (2.28) da Proposição 3, respectivamente, quando  $T \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathcal{H}_d = e^{T\mathcal{H}}$ , a partir de (3.5), quando o tempo de amostragem vai a zero, temos

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\mathcal{H}T} - I_r}{T} \right).$$

Pela expansão em série de Maclaurin,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{(I_r + \mathcal{H}T + \mathcal{H}^2T^2/2! + \dots) - I_r}{T} \right).$$

Assim,  $\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta = \mathcal{H}$ .

Note que, quando  $T$  tende a zero na imposição (3.6),

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta ii} \geq \lim_{T \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{T} \right)$$

implica  $\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta ii} \geq -\infty$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Portanto,  $\mathcal{H}_\delta$  se torna

uma matriz essencialmente não negativa sem limitações em seus elementos da diagonal principal.  $\square$

### 3.2 POLIEDROS SIMÉTRICOS

As relação de invariância positiva para o conjunto poliédrico simétrico

$$S(G, \omega) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\omega \leq Gx \leq \omega\} \quad (3.7)$$

com  $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ,  $s \leq n$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^s$ ,  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ , são dadas pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.** *Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto poliédrico simétrico  $S(G, \omega)$  (3.7) seja positivamente invariante para o sistema (3.1) é a existência de uma matriz  $H_\delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ , tal que:*

$$H_\delta G = GA_\delta \quad (3.8)$$

$$\hat{H}_\delta \omega \leq 0 \quad (3.9)$$

$$\bar{H}_\delta \omega \geq -\frac{2}{T} \omega \quad (3.10)$$

com:

$$\hat{H}_\delta = \begin{cases} H_{\delta ij}, & \text{se } i = j \\ |H_{\delta ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, s, \quad (3.11)$$

$$\bar{H}_\delta = \begin{cases} H_{\delta ij}, & \text{se } i = j \\ -|H_{\delta ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, s. \quad (3.12)$$

*Demonstração.* Como  $A_d = TA_\delta + I_s$ , a partir de (2.25) temos  $H_d G = G(TA_\delta + I_s)$ , que é equivalente a  $\left(\frac{H_d - I_s}{T}\right) G = GA_\delta$ . Então, obtemos (3.8) definindo:

$$H_\delta \triangleq \frac{H_d - I_s}{T}. \quad (3.13)$$

Também, a partir da definição (3.13) acima, a inequação (2.26) pode ser reescrita como  $|TH_\delta + I_s|\omega \leq \omega$ . Assim,  $\left|H_\delta + \frac{I_s}{T}\right| \omega \leq \frac{1}{T}\omega$ . Para cada linha, esta inequação fica na forma:

$$\left|H_{\delta ii} + \frac{1}{T}\right| \omega_i \leq \frac{1}{T}\omega_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s |H_{\delta ij}| \omega_j,$$

a qual é equivalente a:

$$-\frac{1}{T}\omega_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s |H_{\delta ij}| \omega_j \leq H_{\delta ii} \omega_i + \frac{1}{T} \omega_i \leq \frac{1}{T} \omega_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s |H_{\delta ij}| \omega_j. \quad (3.14)$$

Para o lado direito da inequação (3.14), podemos ver que

$$H_{\delta ii} \omega_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s |H_{\delta ij}| \omega_j \leq 0,$$

obtendo assim (3.9). No caso do lado esquerdo de (3.14), temos:

$$H_{\delta ii} \omega_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s |H_{\delta ij}| \omega_j \geq -\frac{2}{T} \omega_i,$$

o que nos faz obter (3.10). □

As relações de invariância positiva para o caso conhecido em tempo contínuo também são verificadas para o Teorema 2 quando o período de amostragem tende a zero.

**Proposição 6.** *Quando  $T \rightarrow 0$ , as relações do Teorema 2 tendem às relações da Proposição 4.*

*Demonstração.* Quando o período de amostragem tende a zero, da definição (3.13), temos que  $\lim_{T \rightarrow 0} H_\delta = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{H_d - I_s}{T} \right)$ . Mas, como  $H_d = e^{TH}$ , pela expansão em série de Maclaurin, obtemos

$$\lim_{T \rightarrow 0} H_\delta = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{(I_s + HT + H^2 T^2 / 2! + \dots) - I_s}{T} \right) = H.$$

Ou seja,  $\lim_{T \rightarrow 0} H_\delta = H$ .

Observe para a inequação (3.10) que, quando  $T \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{T \rightarrow 0} (\bar{H}_\delta \omega) \geq \lim_{T \rightarrow 0} \left( -\frac{2}{T} \omega \right) = -\infty.$$

Então,  $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{H}_\delta \omega \geq -\infty$ , restando apenas a relação (3.9) no Teorema 2, similar ao caso da Proposição 4. □

### 3.2.1 Algumas Considerações sobre o Caso de Poliedros Simétricos

Cinco observações são importantes a respeito do Teorema 2. Antes de fazê-las, vamos definir

$$W = \text{diag}(\omega)$$

como sendo uma matriz diagonal positiva formada a partir do vetor  $\omega$ , em que  $W_{ii} = \omega_i$ . Considere também a norma infinito de uma matriz  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , definida por:

$$\|Z\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \sum_{j=1}^n |Z_{ij}| \right\}$$

e a medida infinito (ou norma logarítmica), definida por (KIENDL et al., 1992):

$$\mu_\infty(Z) = \max_{i=1, \dots, m} \left\{ Z_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |Z_{ij}| \right\}.$$

- (i) Temos que (3.9) e (3.10) são equivalentes a  $\left| H_\delta + \frac{I_s}{T} \right| \omega \leq \frac{1}{T} \omega$ , podendo ser reescrita, para um escalar não negativo  $\epsilon_\delta \leq 1$ , como:

$$\left\| W^{-1} H_\delta W + \frac{I_s}{T} \right\|_\infty \leq \frac{\epsilon_\delta}{T} \quad (3.15)$$

Então, a partir de (3.15), temos que os autovalores da matriz  $H_\delta$  pertencem a um círculo centrado em  $-\frac{1}{T}$  com raio igual a  $\frac{\epsilon_\delta}{T}$ . A Figura 5c ilustra esse círculo e a região à qual pertencem os autovalores de  $H_\delta$  em cinza.

- (ii) Quando  $\epsilon_\delta < 1$ , a seguinte função de Lyapunov associada ao conjunto positivamente invariante  $S(G, \omega)$ :

$$V(x_k) = \|Gx_k\|_\infty = \max_{i=1, \dots, s} |G_{(i)}x_k| \quad (3.16)$$

é decrescente ao longo da trajetória dos sistemas discretos (2.21) ou (3.1), onde  $G_{(i)}$  representa a  $i$ -ésima linha da matriz  $G$  (HENNET, 1995).

- (iii) Quando  $T \rightarrow 0$ , (3.9) e (3.10) ou, equivalentemente, (3.15), se reduzem a  $\hat{H}\omega \leq 0$ , esta podendo ser reescrita, para algum escalar não negativo  $\epsilon$ , como segue:

$$\hat{H}\omega \leq -\epsilon\omega \Leftrightarrow \mu_\infty(W^{-1}HW) \leq -\epsilon$$

Assim, para um  $\epsilon > 0$ , pode ser deduzido que os autovalores de  $H$  terão parte real menor ou igual a  $\epsilon$ . A Figura 5a apresenta a região do espectro de  $H$  em cinza.

- (iv) Já para  $0 \leq \epsilon_d \leq 1$ , no caso do operador avanço, temos:

$$|H_d|\omega \leq \epsilon_d\omega \Leftrightarrow \|W^{-1}H_dW\|_\infty \leq \epsilon_d$$

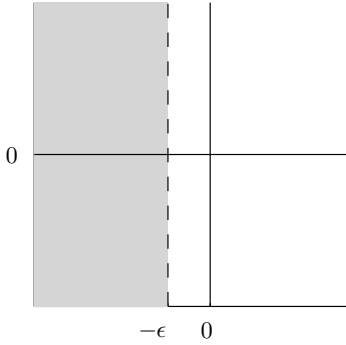
e, portanto, quando  $\epsilon_d < 1$ , o espectro de  $H_d$  pertence a um círculo centrado na origem com raio  $\epsilon_d$  interno ao círculo unitário, como mostra a Figura 5b, na qual a área cinza contém os autovalores de  $H_d$ .

- (v) Se as relações (3.9) e (3.10) forem satisfeitas com  $\text{posto}(G) = n$ , o sistema em malha fechada será estável. Além disso, se  $\text{posto}(G) = n$  e  $\omega > 0$ , a estabilidade assintótica do sistema é garantida pela contratividade do poliedro simétrico (3.7) com respeito às trajetórias do sistema em malha fechada (SANTOS, 1996; HENNET, 1995).

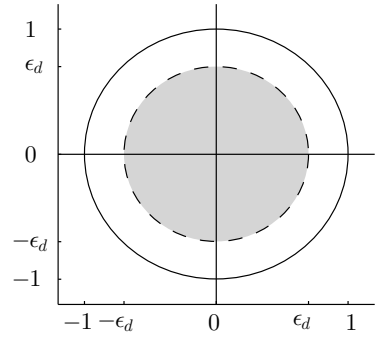


Figura 5: Regiões de estabilidade no plano complexo.

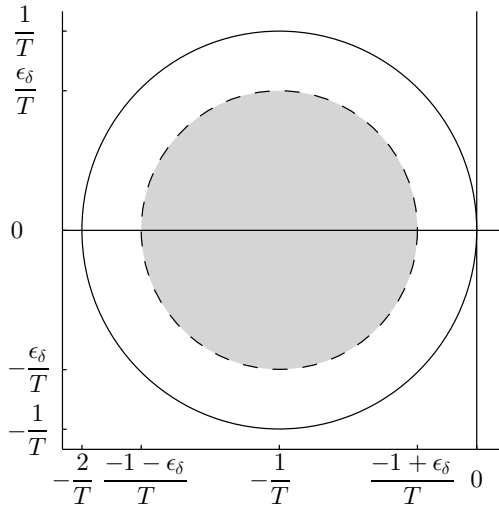
(a) Para o caso contínuo.



(b) Para o operador avanço.



(c) Para o operador delta.





## 4 REGULAÇÃO LINEAR SOB RESTRIÇÕES NA PERSPECTIVA DO OPERADOR $\delta$

A fim de ilustrar o uso dos resultados propostos para a síntese de controladores em tempo discreto, vamos considerar o Problema de Regulação Linear sob Restrições (do inglês *Linear Constrained Regulation Problem*, ou LCRP) clássico a ser aplicado no modelo discreto com o operador  $\delta$  (veja, por exemplo, Bitsoris e Olaru (2013), Hennes (1995), Vassilaki et al. (1988), Santos (1996)).

### 4.1 $\delta$ -LCRP

Para apresentar a formulação do  $\delta$ -LCRP, vamos recapitular o sistema discreto dado na representação  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta x_k = A_\delta x_k + B_\delta u_k \\ y_k = C_\delta x_k \end{cases} \quad (4.1)$$

e a definição do poliedro simétrico  $S(G, \omega)$ :

$$S(G, \omega) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\omega \leq Gx \leq \omega\} \quad (4.2)$$

com  $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^s$ ,  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ .

Para o sistema (4.1), considere que os estados são todos mensuráveis, ou seja,  $C_\delta = I_n$ , considere um poliedro simétrico  $S(G, \omega)$  (4.2) que restringe a região a que deve pertencer os estados do sistema, e que as entradas de controle  $u_k \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  são simetricamente limitadas por:

$$\mathcal{U} = \{u_k \in \mathbb{R}^m; -\bar{u} \leq u_k \leq \bar{u}\} \quad (4.3)$$

com  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$  e  $\bar{u} > 0$ . O Problema de Regulação Linear sob Restrições clássico adaptado para a representação do sistema discretizado sob o operador  $\delta$  é dado como segue:

**Definição 5 ( $\delta$ -LCRP).** *Encontre uma lei de controle de realimentação de estados*

$$u_k = F_\delta x_k, \quad F_\delta \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.4)$$

*tal que as trajetórias do sistema em malha fechada*

$$\delta x_k = (A_\delta + B_\delta F_\delta) x_k \quad (4.5)$$

iniciando no interior de  $S(G, \omega)$  converjam para a origem respeitando as restrições de controle (4.3).

Como citado por Hennet (1995), Vassilaki et al. (1988), podemos encontrar soluções para o LCRP impondo a invariância positiva para  $S(G, \omega)$  e a inclusão de conjuntos

$$S(G, \omega) \subseteq S(F_\delta, \bar{u}) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; -\bar{u} \leq F_\delta x_k \leq \bar{u}\},$$

o que caracteriza uma solução em que se deseja evitar a saturação (ou *saturation avoidance*, em inglês) (TARBOURIECH et al., 2014). Uma ilustração de como se dá a inclusão do poliedro invariante na região não saturada está na Figura 6. Nela, também estão representadas trajetórias do sistema para qualquer ponto inicial interno a  $S(G, \omega)$ .

As soluções podem ser obtidas computacionalmente através do problema de otimização linear abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -\epsilon_\delta \\ & H_\delta, F_\delta, M \end{array} \quad (4.6a)$$

$$\text{sujeito a } H_\delta G = GA_\delta + GB_\delta F_\delta, \quad (4.6b)$$

$$\hat{H}_\delta \omega \leq -\epsilon_\delta \omega, \quad (4.6c)$$

$$\bar{H}_\delta \omega \geq -\frac{2}{T} \omega, \quad (4.6d)$$

$$MG = F_\delta, \quad (4.6e)$$

$$|M|\omega = \bar{u}, \quad (4.6f)$$

$$0 \leq \epsilon_\delta < \frac{1}{T}. \quad (4.6g)$$

com:

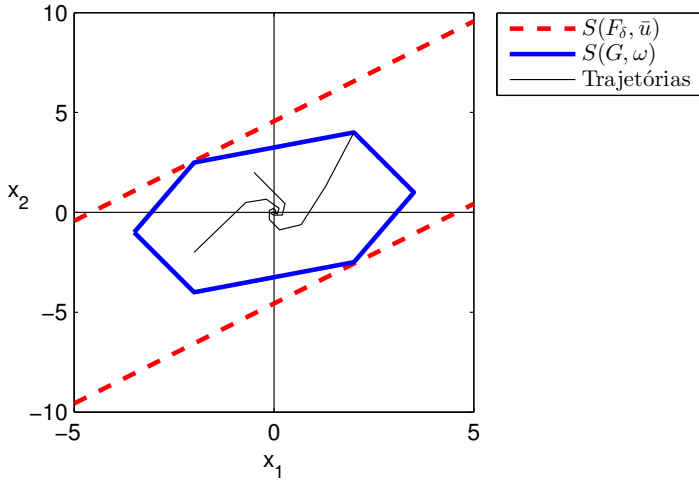
$$\hat{H}_\delta = \begin{cases} H_{\delta ij}, & \text{se } i = j \\ |H_{\delta ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, s, \quad (4.7)$$

$$\bar{H}_\delta = \begin{cases} H_{\delta ij}, & \text{se } i = j \\ -|H_{\delta ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, s. \quad (4.8)$$

No problema de otimização (4.6) acima, as restrições (4.6b), (4.6c) e (4.6d) garantem a invariância positiva em malha fechada de  $S(G, \omega)$ , enquanto (4.6e) e (4.6f) garantem a inclusão de conjuntos exigida (ver Apêndice A para mais informações sobre a inclusão de poliedros).

A minimização da função objetivo (4.6a) posiciona os autovalores

Figura 6: Inclusão de conjuntos  $S(G, \omega) \subseteq S(F_\delta, \bar{u})$ .



de  $(A_\delta + B_\delta F_\delta)$  no menor círculo centrado em  $-\frac{1}{T}$ , como ilustrado pela Figura 5c. Além disso, a partir das observações (i) e (iii) da Sessão 3.2.1 anterior, temos que:

1. Quando  $T \rightarrow 0$ , obtemos a solução para o LCRP em tempo contínuo (ver, por exemplo, Bitsoris et al. (2014)), dada por:

$$\underset{H, F, M}{\text{minimize}} \quad -\epsilon \quad (4.9a)$$

$$\text{sujeito a} \quad HG = GA + GBF, \quad (4.9b)$$

$$\hat{H}\omega \leq -\epsilon\omega, \quad (4.9c)$$

$$MG = F, \quad (4.9d)$$

$$|M|\omega = \bar{u}, \quad (4.9e)$$

$$\epsilon \geq 0. \quad (4.9f)$$

$$\text{em que } \hat{H} = \begin{cases} H_{ij}, & \text{se } i = j \\ |H_{ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

2. Fazendo  $T = 1$ , o problema de otimização corresponde à solução proposta para o operador avanço em Vassilaki et al. (1988), dada

por:

$$\underset{H_d, F_d, M}{\text{minimize}} \quad \epsilon_d \quad (4.10a)$$

$$\text{sujeito a} \quad H_d G = G A_d + G B_d F_d, \quad (4.10b)$$

$$|H_d| \omega \leq \epsilon_d \omega, \quad (4.10c)$$

$$M G = F_d, \quad (4.10d)$$

$$|M| \omega = \bar{u}, \quad (4.10e)$$

$$0 \leq \epsilon_d < 1, \quad (4.10f)$$

porém aplicada ao sistema deslocado  $x_{k+1} = (A_d - I_n)x_k + B_d u_k$ ;

3. A minimização de  $-\epsilon$  em (4.9a), ou seja, encontrar o  $\epsilon^*$  ótimo, implica  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon_d = 0$ , já que:

$$\epsilon_d(\epsilon^*, T) = e^{-\epsilon^* T} \quad (4.11)$$

Também que  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon_\delta = -\frac{1}{T}$ , pois temos:

$$\epsilon_\delta(\epsilon^*, T) = \frac{e^{\epsilon^* T} - 1}{T} \quad (4.12)$$

4. De forma análoga, temos as relações:

$$\epsilon(\epsilon_d^*, T) = -\frac{1}{T} \ln(\epsilon_d^*) \quad (4.13)$$

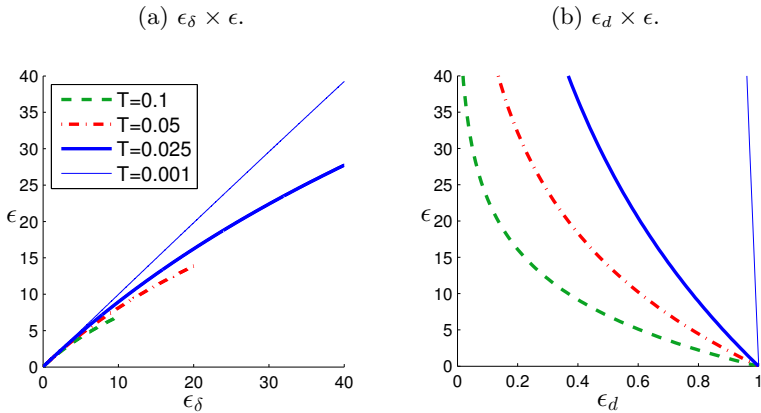
$$\epsilon(\epsilon_\delta^*, T) = \frac{1}{T} \ln(T\epsilon_\delta^* + 1) \quad (4.14)$$

**Proposição 7.** *Quando o período de amostragem tende a zero, a função objetivo da otimização no operador  $\delta$  (4.6a) se iguala à do problema de otimização contínuo (4.9a).*

*Demonstração.* Temos a partir de (4.12) que  $\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon_\delta = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon T} - 1}{T}$ . Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos  $\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon_\delta = \epsilon$ .  $\square$

Além disso, de (4.11), temos  $\lim_{T \rightarrow 0} \epsilon_d = \lim_{T \rightarrow 0} e^{-\epsilon T} = 1$ . Os gráficos para as equações (4.13) e (4.14) para diferentes valores de  $T$  estão presentes na Figura 7a e na Figura 7b, respectivamente.

Figura 7: Relação entre as funções objetivo para diferentes períodos de amostragem.



## 4.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir, dois exemplos numéricos serão abordados a fim de ilustrar a resolução do LCRP usando o operador  $\delta$ . O primeiro deles tem o intuito de avaliar a efetividade do método proposto neste trabalho, enquanto o segundo traz a modelagem de um sistema real que exige uma alta taxa de amostragem.

### 4.2.1 Avaliação da Proposta

Considere o seguinte sistema linear em tempo contínuo emprestado e adaptado de Castelan e Henet (1993):

$$A = \begin{bmatrix} 9.10 & 0.47 & -6.33 \\ 7.62 & 0.00 & 7.56 \\ 2.62 & -3.28 & 9.91 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.82 & 3.61 \\ 1.24 & -3.77 \\ -4.91 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

Em malha aberta, este sistema é instável, tendo como autovalo-

res:

$$\begin{cases} 9.5036 \\ 4.7532 \pm j3.8786 \end{cases}$$

As restrições simétricas no vetor de estados e na entrada de controle são definidas por:

$$G = \begin{bmatrix} 5.69 & 1.97 & -1.68 \\ 2.24 & -1.68 & 5.59 \\ 2.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad e \bar{u} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 5.00 \end{bmatrix}.$$

Foram obtidas soluções para o LCRP através do problema de otimização (4.6) para três diferentes períodos de amostragem:  $T = 10^{-1}$ ,  $T = 10^{-3}$  and  $T = 10^{-5}$ . Na Tabela 1, podemos comparar os autovalores obtidos com a abordagem do operador  $\delta$  (4.6) àquelas obtidas usando os problemas de programação linear (4.9) e (4.10). Pode ser observado que o espectro do sistema em malha fechada via operador  $\delta$  tende ao do sistema contínuo enquanto os autovalores do sistema representado pelo operador avanço tendem a um.

Tabela 1: Autovalores encontrados resolvendo o LCRP para diferentes períodos de amostragem.

$T$	$\sigma(A + BF)$	$\sigma(A_d + B_d F_d)$	$\sigma(A_\delta + B_\delta F_\delta)$
$10^{-1}$	-1.4405 -9.9005 -19.2494	0.8588 $0.1974 + 0.0305i$ $0.1974 - 0.0305i$	-1.4118 $-5.1042 + 0.0840i$ $-5.1042 - 0.0840i$
$10^{-3}$	-1.4405 -9.9005 -19.2494	0.9986 0.9920 0.9828	-1.4395 -10.4697 -18.5197
$10^{-5}$	-1.4405 -9.9005 -19.2494	1.0000 0.9999 0.9998	-1.4405 -10.0209 -23.3593

Para  $T = 10^{-5}$ , a representação do sistema discretizado com os operadores avanço e delta são dadas pelas matrizes da Tabela 2, enquanto a Tabela 3 apresenta a comparação entre as matrizes de realimentação de estados encontradas no tempo contínuo e no operador delta, as quais apresentam valores próximos.

As Figuras 8 e 9 mostram o comparativo entre as trajetórias dos



Tabela 2: Representação do sistema discretizado com  $T = 10^{-5}$  para o exemplo de avaliação da proposta.

<b>Operador Avanço</b>	$A_d = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0.0000 & -0.0001 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0001 \end{bmatrix}$ $B_d = \begin{bmatrix} 0.1820 \times 10^{-4} & 0.3610 \times 10^{-4} \\ 0.1240 \times 10^{-4} & -0.3770 \times 10^{-4} \\ -0.4910 \times 10^{-4} & 0.0000 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$
<b>Operador Delta</b>	$A_\delta = \begin{bmatrix} 9.1003 & 0.4701 & -6.3306 \\ 7.6204 & -0.0001 & 7.5601 \\ 2.6201 & -3.2802 & 9.9103 \end{bmatrix} \approx A$ $B_\delta = \begin{bmatrix} 1.8202 & 3.6102 \\ 1.2399 & -3.7699 \\ -4.9102 & 0.0001 \end{bmatrix} \approx B$

estados e das ações de controle, iniciando de

$$x_0 = \{0.5000, -1.2839, -0.4073\}$$

na borda do poliedro  $S(G, \omega)$ , quando  $T = 10^{-5}$ . As entradas dos sistemas discretos foram aplicadas no sistema contínuo com um segurador de ordem zero em sua saída. Vemos que o sistema com o operador  $\delta$  em malha fechada mostrou ser efetivamente mais próximo do modelo contínuo quando comparado à resposta do sistema discreto com operador avanço. A Figura 10 contém as trajetórias no espaço de estados. As restrições foram respeitadas, pois foi verificado, considerando  $(W^{-1}G)_{(i)}$  a linha  $i$  da matriz  $W^{-1}G$ , que:

$$\max_{i=1,2,3} \{(W^{-1}G)_{(i)}x(t)\} = \max_{i=1,\dots,3} \{(W^{-1}G)_{(i)}x_k\} = 1.$$

Tabela 3: Matrizes obtidas com  $T = 10^{-5}$  para o exemplo de avaliação da proposta.

<b>Tempo Contínuo</b>	$\epsilon = 1.4405$ $F = \begin{bmatrix} -0.6193 & -1.6387 & 4.1544 \\ -6.6861 & 0.5058 & -1.4632 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} -0.2663 & 0.6632 & -0.2948 \\ 0.0451 & -0.2482 & -3.1932 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} -7.1756 & 3.2956 & -2.4395 \\ 1.4810 & -17.1445 & -14.2229 \\ -2.5993 & -2.2306 & -6.2704 \end{bmatrix}$
<b>Operador Avanço</b>	$\epsilon_d = 0.9999$ $F_d = \begin{bmatrix} -1.3295 & -1.5554 & 3.7567 \\ -7.0733 & 0.5509 & -1.3814 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} -0.2911 & 0.5846 & -0.4914 \\ 0.0926 & -0.2193 & -3.5547 \end{bmatrix}$ $H_d = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.9998 & -0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.9999 \end{bmatrix}$
<b>Operador Delta</b>	$\epsilon_\delta = 1.4405$ $F_\delta = \begin{bmatrix} -0.3657 & -1.7650 & 4.5497 \\ -7.2093 & 0.6924 & -2.1043 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} -0.2714 & 0.7323 & -0.2308 \\ 0.0409 & -0.3641 & -3.3133 \end{bmatrix}$ $H_\delta = \begin{bmatrix} -7.3389 & 3.2311 & -2.6672 \\ 1.5528 & -20.5775 & -17.5841 \\ -2.6480 & -2.8159 & -6.9044 \end{bmatrix}$

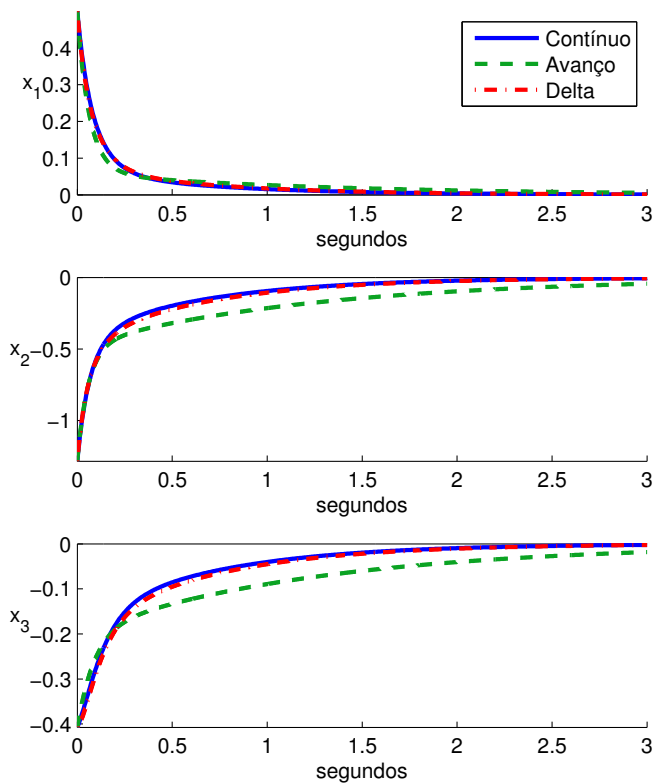
Figura 8: Trajetórias dos estados no tempo para  $T = 10^{-5}$ .

Figura 9: Trajetórias das ações de controle no tempo para  $T = 10^{-5}$ .

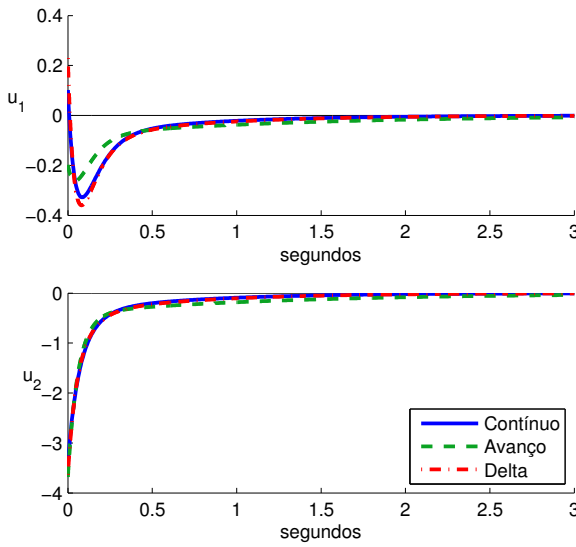
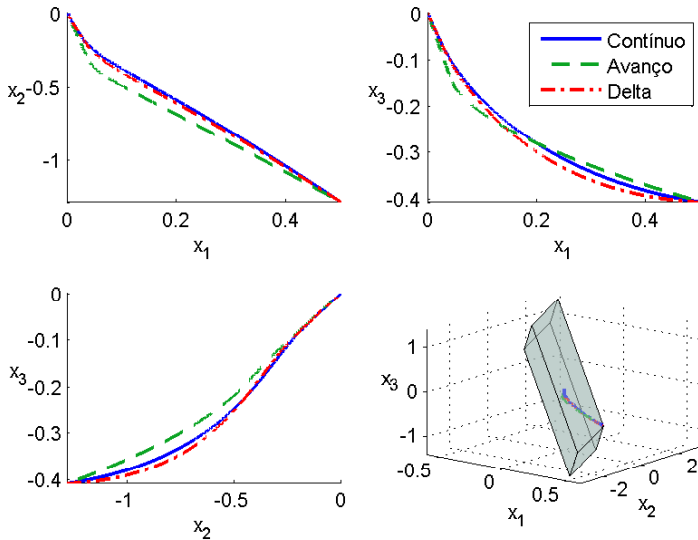


Figura 10: Trajetórias no espaço de estados para  $T = 10^{-5}$ .



## 4.2.2 Modelo de um Sistema Real

A fim de ilustrar a proposta em um sistema real que exige uma alta frequência de amostragem, considere o modelo de um reator nuclear apresentado em Dong e Yang (2008):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\varphi x_1(t) + \varphi x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\beta}{\Lambda} x_1(t) - \frac{\beta}{\Lambda} x_2(t) + \frac{1}{\Lambda} u(t) \end{aligned}$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são, respectivamente, a concentração dos precursores e a densidade de neutrons normalizadas.  $u$ ,  $\varphi$ ,  $\beta$  e  $\Lambda$  são, nessa ordem, a reatividade, a constante de decaimento dos precursores, o rendimento dos neutrons com atraso e o tempo de geração de neutrons. Os parâmetros assumem os valores  $\varphi = 0.001$ ,  $\beta = 0.0064$  e  $\Lambda = 0.08$ . Este sistema é marginalmente estável em malha aberta, com autovalores iguais a  $\{0, -0.08100\}$ . Consideraremos também:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \bar{u} = 0.05.$$

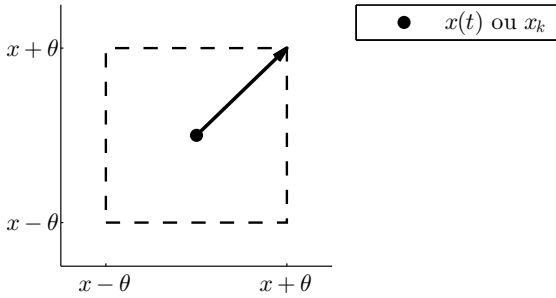
Sistemas com dinâmica rápida podem sofrer alterações bruscas na variação dos estados de um ponto a outro, eventualmente excedendo a limitação física de um sistema. Para fins de desenvolvimento teórico da técnica, iremos adicionar mais uma restrição nesse exemplo, além daquela nos estados e na entrada de controle: uma limitação na variação dos estados, de modo que  $\dot{x}(t)$ ,  $\delta x_k$  e  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  estejam simetricamente confinados em um valor limitante  $\theta$ . Isto é, teremos as relações:

$$\begin{aligned} -\theta \leq \dot{x}(t) \leq \theta &\Leftrightarrow S(A + BF, \theta), \\ -\theta \leq \delta x_k \leq \theta &\Leftrightarrow S(A_\delta + B_\delta F_\delta, \theta), \\ -\theta \leq \Delta x_k \leq \theta &\Leftrightarrow S(A_d + B_d F_d - I_n, \theta). \end{aligned}$$

Geometricamente, os poliedros formados por  $S(A+BF, \theta)$ ,  $S(A_\delta+B_\delta F_\delta, \theta)$  e  $S(A_d+B_d F_d - I_n, \theta)$  consistem na região formada por todos os pontos que apresentam derivada ou diferença discreta confinadas num quadrado de lado  $2\theta$ , conforme mostra a Figura 11, onde o vetor representa a derivada ou a diferença discreta.

Portanto, os problemas de otimização conterão ainda as inclusões de conjunto a seguir:

Figura 11: Região que limita a derivada de  $x(t)$  ou a diferença  $\Delta x_k$ .



$$(a) \ S(G, \omega) \subseteq S(A + BF, \theta);$$

$$(b) \ S(G, \omega) \subseteq S(A_\delta + B_\delta F_\delta, \theta);$$

$$(c) \ S(G, \omega) \subseteq S(A_d + B_d F_d - I_n, \theta).$$

A adição dessas inclusões se traduzem na resolução dos seguintes problemas de otimização:

$$\underset{H_\delta, F_\delta, M, P}{\text{minimize}} \quad \epsilon_\delta \quad (4.15a)$$

$$\text{sujeito a} \quad H_\delta G = GA_\delta + GB_\delta F_\delta, \quad (4.15b)$$

$$\left| H_\delta + \frac{I_s}{T} \right| \omega \leq \frac{1}{T} \epsilon_\delta \omega, \quad (4.15c)$$

$$MG = F_\delta, \quad (4.15d)$$

$$|M|\omega = \bar{u}, \quad (4.15e)$$

$$PG = A_\delta + B_\delta F_\delta, \quad (4.15f)$$

$$|P|\omega = \theta, \quad (4.15g)$$

$$0 \leq \epsilon_\delta < 1. \quad (4.15h)$$

$$\underset{H_d, F_d, M, P}{\text{minimize}} \quad \epsilon_d \quad (4.16a)$$

$$\text{sujeito a} \quad H_d G = G A_d + G B_d F_d, \quad (4.16b)$$

$$|H_d| \omega \leq \epsilon_d \omega, \quad (4.16c)$$

$$M G = F_d, \quad (4.16d)$$

$$|M| \omega = \bar{u}, \quad (4.16e)$$

$$P G = A_d + B_d F_d - I_n, \quad (4.16f)$$

$$|P| \omega = \theta, \quad (4.16g)$$

$$0 \leq \epsilon_d < 1, \quad (4.16h)$$

$$\underset{H, F, M, P}{\text{minimize}} \quad -\epsilon \quad (4.17a)$$

$$\text{sujeito a} \quad H G = G A + G B F, \quad (4.17b)$$

$$\hat{H} \omega \leq -\epsilon \omega, \quad (4.17c)$$

$$M G = F, \quad (4.17d)$$

$$|M| \omega = \bar{u}, \quad (4.17e)$$

$$P G = A + B F, \quad (4.17f)$$

$$|P| \omega = \theta, \quad (4.17g)$$

$$\epsilon \geq 0. \quad (4.17h)$$

em que  $\hat{H} = \begin{cases} H_{ij}, & \text{se } i = j \\ |H_{ij}|, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, \dots, s$ . A otimização (4.15) é uma outra forma de solucionar o problema para o caso  $\delta$ .

Discretizando o modelo para  $T = 0.05$ , o mesmo período de amostragem original do artigo Dong e Yang (2008), que aborda sistemas com alta taxa de amostragem, e aplicando (4.15), (4.16) e (4.17) com

$$\theta = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.005 \end{bmatrix}, \text{ encontramos para o modelo contínuo}$$

$$F = \begin{bmatrix} -6.39787 \times 10^{-3} & 6.16667 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

e os resultados presentes na Tabela 4. A título de ilustração, a Figura 12 apresenta as regiões delimitadas por  $S(A + B F, \theta)$  e  $S(G, \omega)$ , bem como o campo vetorial formado pelas velocidades  $\dot{x}(t)$ . Os vetores foram aumentados 100 vezes para melhor visualização. O poliedro

$S(A + BF, \theta)$  restringe os vetores que apresentam tamanho em cada coordenada menor ou igual a  $\theta$ .

Figura 12: Campo vetorial da derivada de  $x(t)$  para o reator.

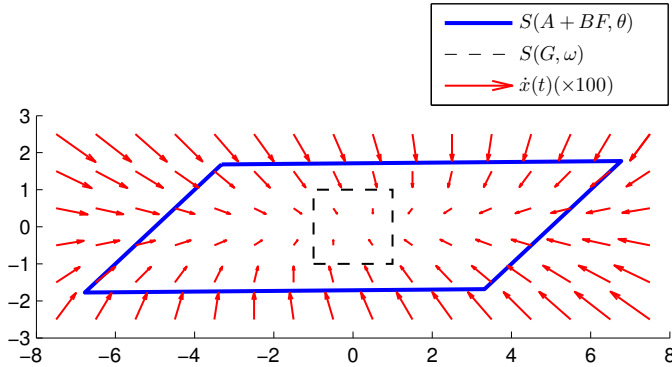


Tabela 4: Resultados do LCRP para o modelo do reator discretizado.

<b>Operador Avanço</b>	$A_d = \begin{bmatrix} 0.99999 & 0.00005 \\ 0.00399 & 0.99601 \end{bmatrix}$ $B_d = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.62375 \end{bmatrix}$ $F_d = \begin{bmatrix} -6.35291 \times 10^{-3} & 0.65086 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$
<b>Operador Delta</b>	$A_\delta = \begin{bmatrix} -0.00100 & 0.00100 \\ 0.07984 & -0.07984 \end{bmatrix}$ $B_\delta = \begin{bmatrix} 0.00031 \\ 12.47503 \end{bmatrix}$ $F_\delta = \begin{bmatrix} -6.41324 \times 10^{-3} & 6.20822 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$

Para efeito de comparação entre os três modelos, o sistema contínuo foi controlado pela matriz  $F$ , por  $F_d$  e por  $F_\delta$ , sendo estas duas aplicadas ao sistema contínuo com um segurador de ordem zero em sua



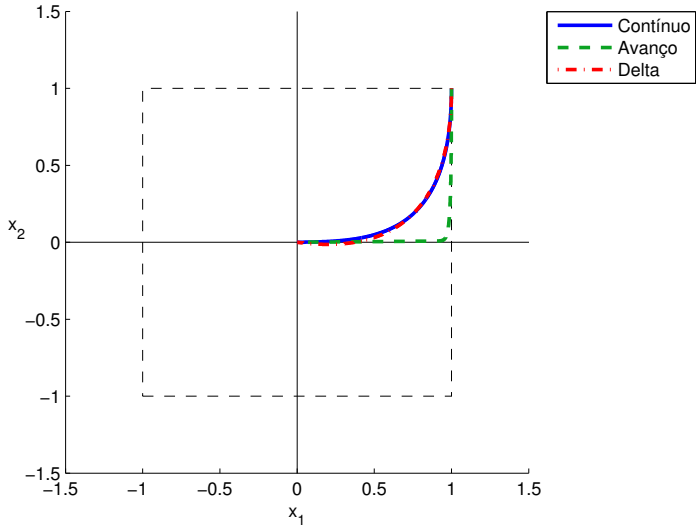
saída. Foi escolhido o ponto inicial  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , na borda do poliedro  $S(G, \omega)$ . O diagrama de fase encontrado pode ser visto na Figura 13, onde que a região tracejada corresponde às restrições dos estados, e as linhas azul, vermelha e verde correspondem às trajetórias do sistema contínuo, discreto em  $\delta$  e discreto em avanço, respectivamente.

O controle do sistema através do controlador encontrado para o operador delta obteve uma resposta muito próxima à do sistema contínuo controlado, em que todas as restrições impostas foram garantidas. Por outro lado, a resposta através da matriz de controle para o operador avanço, apesar de ter respeitado as restrições sobre a variação dos estados, apresentou uma resposta mais próxima do limite da restrição com maior esforço de controle. Desse modo, o controle com o operador delta apresentou resposta mais próxima à do modelo físico respeitando as restrições.

Vale notar que a restrição sobre a variação dos estados em sistemas discretos é realizada de maneira ingênua através da limitação de  $\Delta x_k$ , sob a ótica do operador avanço. Entretanto, o modelo físico apresenta restrições sobre  $\dot{x}(t)$ . Tratando essas restrições no tempo discreto através do operador delta, com limitação sobre  $\delta x_k$ , teremos maior aproximação dessas restrições com as do sistema físico real.

Figura 13: Diagrama de fase do reator.

(a) Visão geral.



(b) Destaque para as trajetórias.

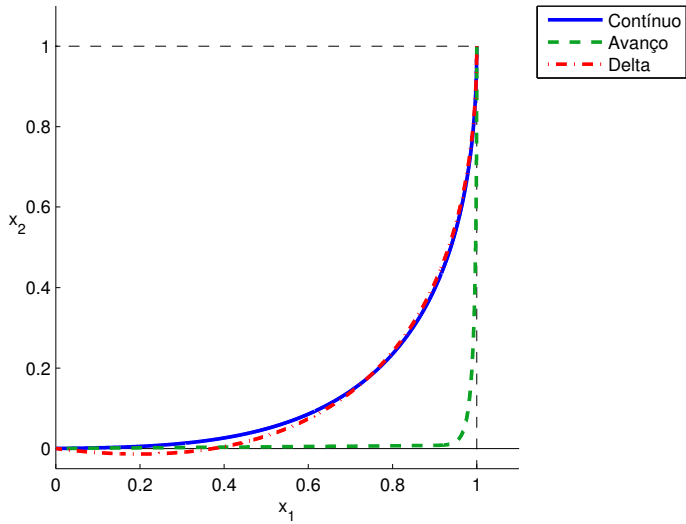
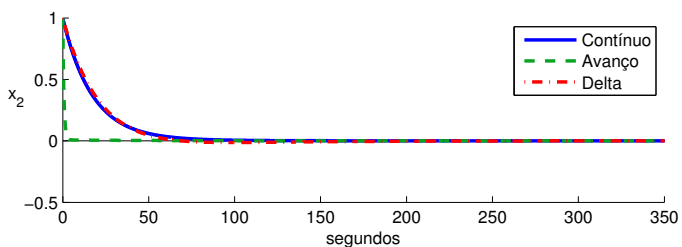
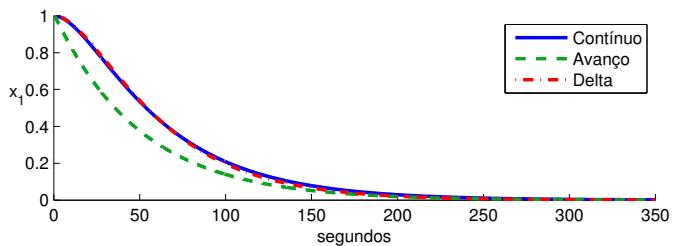
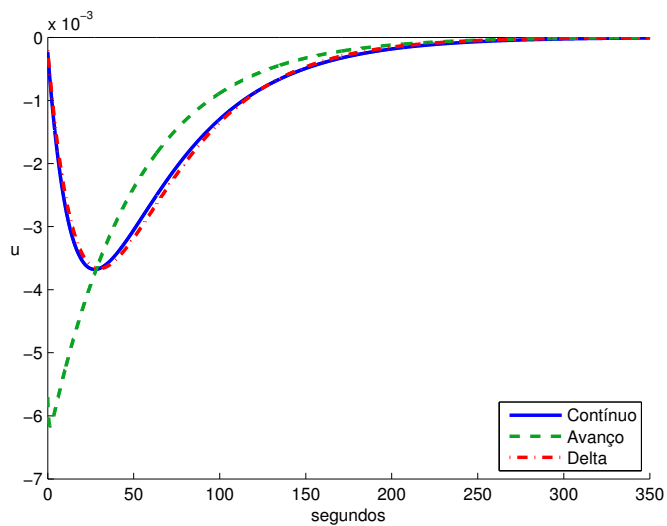


Figura 14: Trajetórias do reator.

(a) Estados.



(b) Entrada.





## 5 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM SATURAÇÃO NA PERSPECTIVA DO OPERADOR $\delta$

Os sistemas em malha fechada na presença de saturação podem ser representados através de inclusões diferenciais politópicas. Mais especificamente, iremos abordar o modelo politópico em que o termo de saturação é tratado através de uma não linearidade de zona morta.

Neste capítulo, consideraremos os sistemas discretos saturados em malha fechada no operador  $\delta$  dados por:

$$\delta x_k = A_\delta x_k + B_\delta \text{sat}(F_\delta x_k) \quad (5.1)$$

com  $A_\delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_\delta \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $F_\delta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ . Nesse caso, a entrada de controle  $u_k$  é dada como a saturação do sinal  $\nu_k = F_\delta x_k$  que é enviada ao saturador. Consideraremos o caso da saturação simétrica, definida como:

$$\text{sat}(\nu_i) = \begin{cases} \bar{u}_i, & \text{se } \nu_i > \bar{u}_i \\ \nu_i, & \text{se } -\bar{u}_i \leq \nu_i \leq \bar{u}_i \\ -\bar{u}_i, & \text{se } \nu_i < -\bar{u}_i \end{cases} \quad (5.2)$$

para  $\bar{u}_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

O desenvolvimento dos conceitos que seguem foram baseados em Tarbouriech et al. (2014). Para isso, considere o conceito de envoltória convexa:

**Definição 6.** *A envoltória convexa (ou fecho convexo)  $\text{Co}\{v, k\}$ , para dois escalares  $v$  e  $k$ , é definida como:*

$$\text{Co}\{v, k\} = \alpha v + (1 - \alpha)k$$

para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Lema 1.** *Sejam dois vetores  $\nu \in \mathbb{R}^m$  e  $\kappa \in \mathbb{R}^m$  tais que  $|\kappa_i| \leq \bar{u}_i$ ,  $\bar{u}_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Então:*

$$\text{sat}(\nu) \in \text{Co}\{\Gamma_j^+ \nu + \Gamma_j^- \kappa, j = 1, \dots, 2^m\} \quad (5.3)$$

onde  $\Gamma_j^+$  é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal assumem valores 1 ou 0 combinados de forma diferente para cada  $j = 1, \dots, 2^m$  e  $\Gamma_j^- = I_m - \Gamma_j^+$ .

Por exemplo, para  $m = 2$ , as matrizes  $\Gamma_j^+$  e  $\Gamma_j^-$  são definidas por:

$$\Gamma_1^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3^+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_4^+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1^- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3^- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_4^- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do lema acima, com  $\nu_k = F_\delta x_k$ , e considerando uma matriz  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de modo que

$$\forall x_k \in S(K, \bar{u}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\bar{u} \leq Kx \leq \bar{u}\},$$

temos:

$$\text{sat}(F_\delta x_k) \in \text{Co}\{\Gamma_j^+ F_\delta x_k + \Gamma_j^- Kx_k, j = 1, \dots, 2^m\}.$$

Dessa forma,  $\delta x_k$  pode ser definido através do modelo politópico abaixo:

$$\delta x_k = \sum_{j=1}^{2^m} h(x_k)(A_\delta + B_\delta \Gamma_j^+ F_\delta + B_\delta \Gamma_j^- K) \quad (5.4)$$

com  $\sum_{j=1}^{2^m} h(x_k) = 1$ ,  $0 \leq h(x_k) \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, 2^m$  e  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Com todo esse respaldo teórico e considerando o conjunto poliédrico

$$S(G, \omega) = \{x \in \mathbb{R}^n; -\omega \leq Gx \leq \omega\} \quad (5.5)$$

com  $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ,  $s \leq n$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^s$ ,  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, s$ , a Proposição 8 pode ser estabelecida.

**Proposição 8.** *O conjunto poliédrico  $S(G, \omega)$  (5.5) será uma região de estabilidade assintótica do sistema (5.1) se existirem matrizes  $H_{\delta i} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $M \in \mathbb{R}^{m \times s}$  tais que:*

$$H_{\delta i} G = G(A_\delta + \Gamma_i^+ B_\delta F_\delta + \Gamma_i^- B_\delta K) \quad (5.6)$$

$$\left| H_{\delta i} + \frac{I_s}{T} \right| \omega \leq \frac{1}{T} \omega \quad (5.7)$$

$$MG = K \quad (5.8)$$

$$|M| \omega = \bar{u} \quad (5.9)$$

para  $i = 1, \dots, 2^m$ .

As relações (5.6) e (5.7) garantem a invariância positiva do conjunto  $S(G, \omega)$  a ser determinado, enquanto (5.8) e (5.9) garantem a inclusão desse conjunto invariante na região de validade do modelo sob saturação, ou seja,  $S(G, \omega) \subseteq S(K, \bar{u})$ .

De modo menos conservador que as soluções que evitam a saturação, como é o caso do  $\delta$ -LCRP, por exemplo, estamos interessados em encontrar soluções que permitem a saturação (*saturation allowance* em inglês), onde as não linearidades do sistema em malha fechada são consideradas. Ademais, diferentemente do  $\delta$ -LCRP, em que o poliedro  $S(G, \omega)$  é dado, iremos encontrar a matriz de controle estabilizante calculando o máximo poliedro invariante que considera regiões com saturação, num problema de otimização não linear com bilinearidades em suas variáveis. Para isso, considerando  $\omega$  o vetor unitário de dimensão  $s$ , um escalar  $\epsilon_\delta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \epsilon_\delta \leq 1$ , e um vetor  $\beta \in \mathbb{R}^n$ , com  $\beta_i > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , seja a otimização:

$$\underset{H_{\delta i}, G, F_\delta, K, M, P_q, P_Q}{\text{minimize}} \quad \xi \quad (5.10a)$$

$$\text{sujeito a} \quad H_{\delta i} G = G(A_\delta + \Gamma_i^+ B_\delta F_\delta + \Gamma_i^- B_\delta K), \quad (5.10b)$$

$$\left\| H_{\delta i} + \frac{I_s}{T} \right\|_\infty \leq \frac{\epsilon_\delta}{T}, \quad (5.10c)$$

$$MG = K, \quad (5.10d)$$

$$\|M\|_\infty = \bar{u}, \quad (5.10e)$$

$$P_q I_n = G, \quad (5.10f)$$

$$\|P_q\|_\infty = \xi, \quad (5.10g)$$

$$P_Q G = I_n, \quad (5.10h)$$

$$\|P_Q\|_\infty \leq \beta, \quad (5.10i)$$

$$0 \leq \epsilon_\delta \leq 1, \quad (5.10j)$$

$$0 \leq \xi < 1. \quad (5.10k)$$

Este problema encontra o maior quadrado  $S(I_n, \xi^{-1})$  que pode existir dentro de  $S(G, \omega)$  respeitando as condições impostas pela Proposição 8. Os termos (5.10f) e (5.10g) do problema de otimização respondem por esta inclusão.

Devido aos problemas de controle geralmente apresentares restrições em seus estados, também estamos considerando que  $S(G, \omega)$  é limitado pelo quadrado  $S(I_n, \beta)$ , com  $\beta$  dado. Essa inclusão corresponde aos termos (5.10h) e (5.10i).

## 5.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Iremos tratar um exemplo retirado de Tarbouriech et al. (2014) e descrito por:

$$A = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.50 \\ -0.40 & 1.20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \text{e } \bar{u} = 7.$$

Discretizando esse sistema para  $T = 0.1$ , obtemos as matrizes:

$$A_\delta = \begin{bmatrix} 0.8219 & 0.5524 \\ -0.4420 & 1.2638 \end{bmatrix}, \quad \text{e } B_\delta = \begin{bmatrix} 0.0267 \\ 1.0621 \end{bmatrix}.$$

### 5.1.1 Síntese

No caso desse sistema em que  $m = 1$ , temos que  $\Gamma_1^+ = 1$ ,  $\Gamma_1^- = 0$ ,  $\Gamma_2^+ = 0$  e  $\Gamma_2^- = 1$ . Considerando  $G$  uma matriz quadrada ( $s = n = 2$ ),  $\epsilon_\delta = 1$  e  $\beta = 20$ , foram encontrados:

$$\begin{aligned} \xi &= 0.1862, \\ H_{\delta 1} &= \begin{bmatrix} -9.9996 & 9.9988 \\ 2.8481 & -2.8969 \end{bmatrix}, \\ H_{\delta 2} &= \begin{bmatrix} -0.0554 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0213 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 0.0722 & -0.1127 \\ 0.0435 & 0.0333 \end{bmatrix}, \\ F_\delta &= \begin{bmatrix} 3.3202 & -13.2328 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} 0.5002 & -0.7787 \end{bmatrix}, \\ M &= \begin{bmatrix} 6.9779 & 0.0228 \end{bmatrix}, \\ P_q &= \begin{bmatrix} 0.0723 & -0.1127 \\ 0.0435 & 0.0330 \end{bmatrix}, \\ P_Q &= \begin{bmatrix} 4.4985 & 15.5009 \\ -5.9310 & 9.8732 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

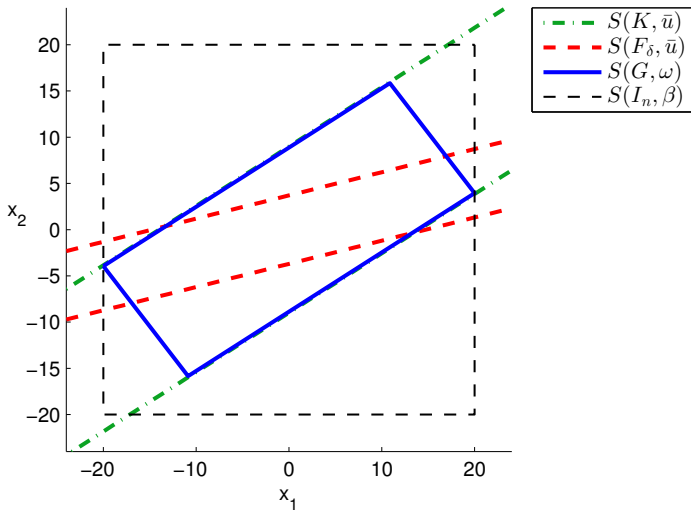
Para a síntese do controlador, resolvemos o problema de otimização (5.10) utilizando o *solver* não linear Knitro, que permite lidar com as bilinearidades do nosso problema e encontra soluções ótimas locais (BYRD et al., 2006). Para melhores resultados, quatro *threads*



calcularam soluções em paralelo e a melhor delas foi considerada. *Solvers* não lineares globais, como o BARON (SAHINIDIS, 1996), poderiam ser utilizados, porém o tempo de resolução do problema pode aumentar exponencialmente dependendo do seu tamanho.

A Figura 15 apresenta o poliedro  $S(G, \omega) \subseteq S(K, \bar{u})$  encontrado, assim como a região de linearidade  $S(F_\delta, \bar{u})$ .

Figura 15: Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com  $\beta = 20$ .



A trajetória do sistema para o ponto inicial  $x_0 = \{1.76, 10.00\}$  na borda do poliedro  $S(G, \omega)$  pode ser vista na Figura 16, cujo gráfico da entrada de controle  $\nu = F_\delta x_k$  e do atuador saturado  $u = \text{sat}(\nu)$  é mostrado na Figura 17.

### 5.1.2 Análise

Para uma comparação e análise de resultados, a otimização (5.10) foi resolvida para o parâmetro de restrição sobre os estados  $\beta$  assumindo outros dois valores distintos: um reduzindo as restrições com  $\beta = 50$  e outro aumentando as restrições assumindo  $\beta = 10$ . Os resultados comparativos podem ser vistos na Tabela 5. A Figura 18 apresenta o resultado para  $\beta = 50$ , enquanto a Figura 19, para  $\beta = 10$ .

Verificamos que, à medida em que a restrição sobre os estados

Figura 16: Trajetória para o exemplo 5.1 com  $\beta = 20$ .

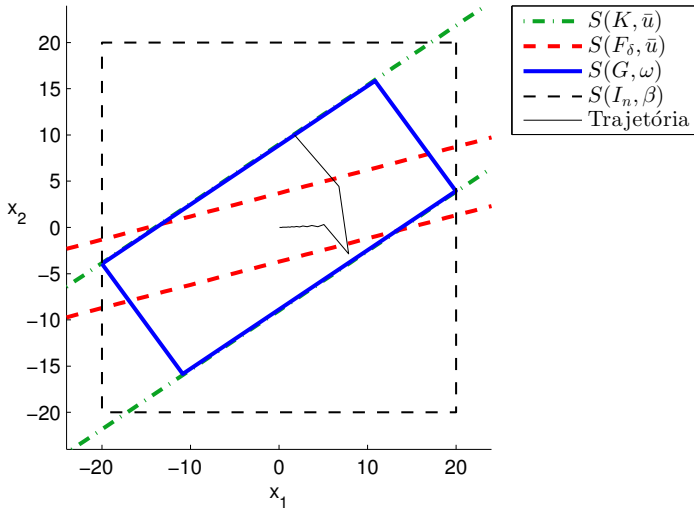
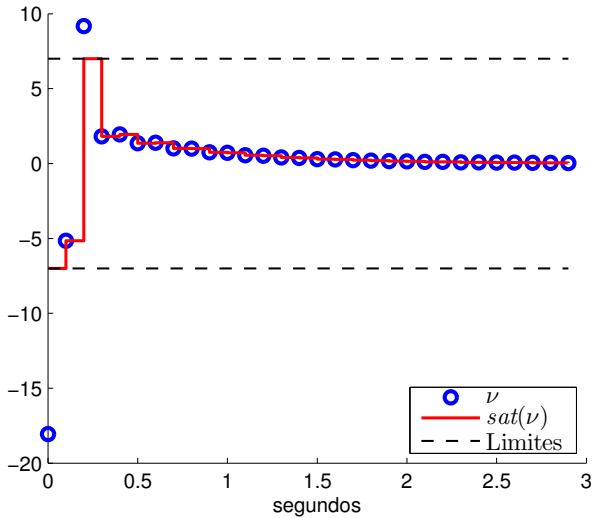


Figura 17: Entrada do sistema para exemplo 5.1 com  $\beta = 20$ .



diminui, a função objetivo  $\xi$  se tornou menor, aumentando dessa maneira o quadrado  $S(I_n, \xi^{-1})$  interno a  $S(G, \omega)$ . Além disso, a região  $S(K, \bar{u})$  aumentou, já que o problema de otimização prima por encontrar o máximo conjunto invariante. Assim, o poliedro  $S(G, \omega)$  preencheu cada vez mais a área de  $S(I_n, \beta)$ .

Quando a restrição sobre os estados aumentou com  $\beta = 10$ , todo o poliedro invariante pertenceu a uma região de linearidade, enquanto a diminuição na restrição sobre os estados aumentou a ocupação do poliedro  $S(G, \omega)$  na região de validade não linear  $S(K, \bar{u})$ .

Ainda, não houve relação direta entre a região de validade  $S(K, \bar{u})$  e a região de linearidade  $S(F_\delta, \bar{u})$ , demonstrando que essa abordagem apresenta resultados menos conservadores do que modelos politópicos em que há uma relação direta entre essas regiões.

Tabela 5: Resultados comparativos para o exemplo 5.1 com diferentes valores de  $\beta$ .

$\beta$	Resultados
50	$\xi = 0.0241$ $G = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0233 \\ -0.0206 & -0.0007 \end{bmatrix}$ $F_\delta = \begin{bmatrix} -2.3582 & -4.6455 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} -0.0918 & -0.0641 \end{bmatrix}$
20	$\xi = 0.1862$ $G = \begin{bmatrix} 0.0722 & -0.1127 \\ 0.0435 & 0.0333 \end{bmatrix}$ $F_\delta = \begin{bmatrix} 3.3202 & -13.2328 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} 0.5002 & -0.7787 \end{bmatrix}$
10	$\xi = 0.9993$ $G = \begin{bmatrix} 0.2448 & 0.3665 \\ 0.7258 & 0.2667 \end{bmatrix}$ $F_\delta = \begin{bmatrix} -13.2144 & -10.0459 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} -1.4018 & -2.3634 \end{bmatrix}$

Figura 18: Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com  $\beta = 50$ .

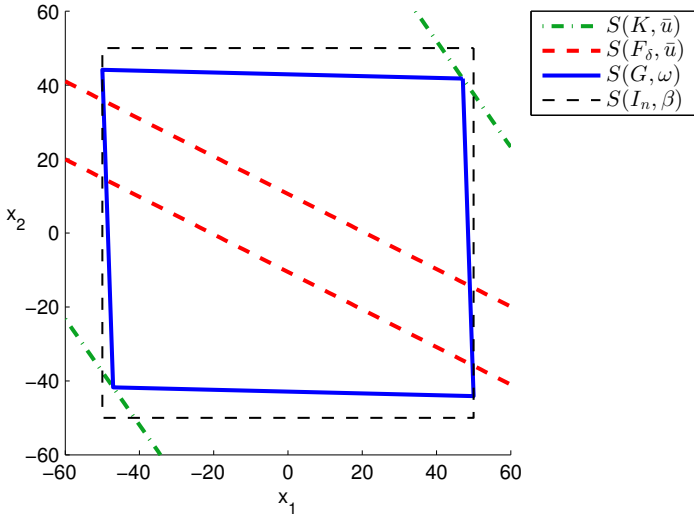
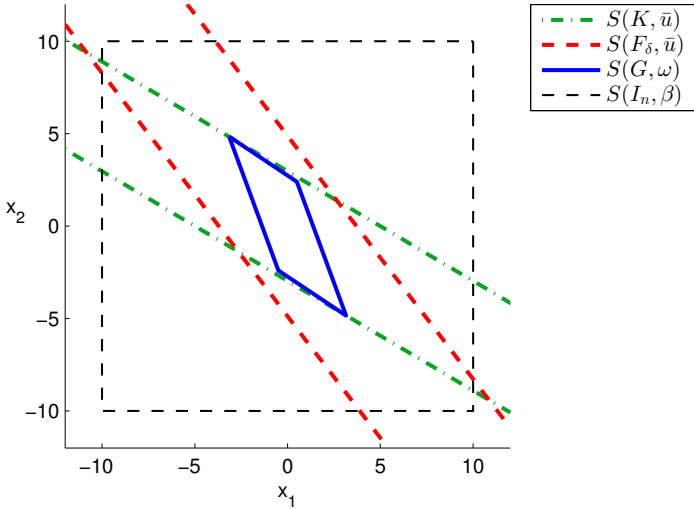


Figura 19: Poliedro encontrado para o exemplo 5.1 com  $\beta = 10$ .





## 6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, a invariância positiva de conjuntos poliédricos foi considerada usando a representação de sistemas lineares em tempo discreto com o operador  $\delta$ . O principal interesse em deduzir as relações de invariância nesse contexto é que a abordagem com o operador  $\delta$  permite unificar os sistemas em tempo discreto com os sistemas em tempo contínuo quando o período de amostragem tende a zero, além de contornar erros numéricos de truncamento e arredondamento. Outro ponto relevante é que, quando o período de amostragem é pequeno, o controle de sistemas em malha fechada sujeitos a restrições através dessa abordagem apresenta um desempenho mais próximo do esperado para o sistema físico em comparação com o do operador avanço clássico, como pôde ser visto nos resultados.

Inicialmente, foi feita uma revisão sobre a discretização de sistemas contínuos, apresentada a representação de sistemas discretos com o operador delta e lembradas as relações que tornam um poliedro invariante para sistemas autônomos contínuos e discretos com o operador avanço. Esses três conceitos formaram os pilares sobre os quais foram formuladas as propriedades de invariância positiva de conjuntos poliédricos para sistemas lineares na representação do operador  $\delta$ .

Em seguida, foram deduzidas as relações de invariância na perspectiva do operador delta, objetivo principal desse trabalho, tanto para o caso geral, quanto para o caso particular de poliedros simétricos. Foi mostrado que essas relações se transformam nas relações de invariância de sistemas contínuos quanto o período de amostragem tende a zero. Para o caso de poliedros simétricos, observou-se que a região espectral do sistema autônomo pode ser reduzida por um fator que torna a dinâmica do sistema mais rápida. Ainda, foi mostrada a condição para ocorrer a contratividade do poliedro simétrico, garantindo, assim, a estabilidade assintótica do sistema.

Duas classes de problemas foram formuladas utilizando o método proposto: o LCRP na perspectiva do operador delta, nomeado  $\delta$ -LCRP, e o problema de estabilização de sistemas lineares com saturação no atuador na perspectiva do operador  $\delta$ . Para o primeiro caso, o problema de otimização linear associado foi apresentado e foi mostrado que sua solução converge para a do problema de otimização do LCRP para sistemas contínuos quando o período de amostragem tende a zero. O exemplo inicial comprovou as considerações teóricas de que, à medida em que o período de amostragem diminui, os autovalores e as matrizes

do sistema em malha fechada na perspectiva do operador  $\delta$  se aproximam dos seus respectivos valores para o caso contínuo. O segundo exemplo partiu de um modelo real simplificado e mostrou ainda a formulação de restrições sobre a variação dos estados do sistema. Nos dois cenários, quando a taxa de amostragem foi alta, as soluções com o operador  $\delta$  se assemelharam mais às respostas de tempo contínuo do que as soluções com o operador avanço e as trajetórias respeitaram as restrições impostas.

Para o problema de estabilização com saturação no atuador, uma condição de estabilidade assintótica local do sistema com saturação, bem como um problema de otimização bilinear associado levando em consideração restrições sobre os estados, foram apresentados. Foi realizada a síntese de controladores para sistemas saturados no contexto do operador  $\delta$  através do *solver* Knitro, que lida com bilinearidades de modo eficiente.

Trabalhos futuros podem expandir os resultados teóricos dessa dissertação no operador  $\delta$  para uma classe maior de problemas de controle, por exemplo: considerar a determinação de conjuntos invariantes controlados, encontrar a lei de controle com realimentação de saída, problemas de sistemas sujeitos a perturbações ou o caso de sistemas incertos. Ainda, estudos com aplicações práticas em sistemas reais podem ser viabilizados.

## 6.1 PRODUÇÃO ACADÊMICA

O resultado principal dessa dissertação resultou na publicação do artigo "Positive Invariance of Polyhedral Sets and Linear Constrained Regulation Problem in the Context of the Delta Operator" no XXII Congresso Brasileiro de Automática (PEDROSA et al., 2018).

Durante os estudos do mestrado, participei também como coautor da publicação dos artigos Brião et al. (2018a) e Brião et al. (2018b). Este último foi agraciado com o prêmio "Best Student Paper Award" do XXIII Congresso da Associação Chilena de Controle Automático.



## REFERÊNCIAS

- BENSALAH, H. **Invariance positive et observateur intervalles appliqués aux systèmes linéaires à retards sous contraintes**. Tese (Doutorado) — Ecole Polytechnique de Montreal, Canadá, 2015.
- BITSORIS, G.; OLARU, S. Further results on the linear constrained regulation problem. In: **21st Mediterranean Conference on Control and Automation**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 824–830.
- BITSORIS, G.; OLARU, S.; VASSILAKI, M. On the linear constrained regulation problem for continuous-time systems. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 47, p. 4004–4009, 2014.
- BRIÃO, S. L.; CASTELAN, E. B.; PEDROSA, M. V. A. Uma abordagem por restrição de posto para estabilização e computação explícita de ganhos de controle. In: **XXII Congresso Brasileiro de Automática**. João Pessoa: [s.n.], 2018.
- BRIÃO, S. L.; PEDROSA, M. V. A.; CASTELAN, E. B.; CAMPONOGARA, E.; ASSIS, L. S. Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral Lyapunov functions. In: **IEEE International Conference on Automation / XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (IEEE ICA-ACCA)**. Concepción: [s.n.], 2018.
- BYRD, R. H.; NOCEDAL, J.; WALTZ, R. A. Knitro: An integrated package for nonlinear optimization. In: **Large-scale nonlinear optimization**. [S.l.]: Springer, 2006. p. 35–59.
- CASTELAN, E.; HENNET, J. On invariant polyhedra of continuous-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38(11), p. 1680–1685, 1993.
- CASTELAN, E. B. **Sur l'invariance positive et la commande sous contraintes de systèmes linéaires multivariables**. Tese (Doutorado) — Université Paul Sabatier de Toulouse, França, 1992. Disponível em: <<http://www.theses.fr/1992TOU30079>>.
- DONG, J.; YANG, G.-H.  $H_\infty$  control for fast sampling discrete-time singularly perturbed systems. **Automatica**, v. 44, n. 5, p. 1385 – 1393, 2008. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109807004463>>.

- DOREA, C.; HENNET, J. (A,B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 103(3), p. 521–542, 1999.
- HENNET, J. Discrete-time constrained linear systems. **Control and Dynamic Systems**, v. 71, p. 157–213, 1995.
- HORVÁTH, Z.; SONG, Y.; TERLAKY, T. A novel unified approach to invariance conditions for a linear dynamical system. **Applied Mathematics and Computation**, v. 298, p. 351–367, April 2017.
- HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design**. Boston: Springer, 2001.
- KALMAN, R.; BERTRAM, J. Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 38(5), p. 803–807, 1993.
- KIENDL, H.; ADAMY, J. ; STELZNER, P. Vector norms as Lyapunov functions for linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 6, p. 839–842, June 1992. ISSN 0018-9286.
- MIDDLETON, R.; GOODWIN, G. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 31(11), p. 1015–1021, 1986.
- NEUMAN, C. Properties of the delta operator model of dynamic physical systems. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v. 23(1), p. 296–301, 1993.
- NEUMAN, C. Transformations between delta and forward shift operator transfer function models. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v. 23(1), p. 295–296, 1993.
- PEDROSA, M. V. A.; CASTELAN, E. B.; DOREA, C. E. T.; BRIÃO, S. L. Positive invariance of polyhedral sets and linear constrained regulation problem in the context of the delta operator. In: **XXII Congresso Brasileiro de Automática**. João Pessoa: [s.n.], 2018.
- RAKOVIĆ, S. V.; KERRIGAN, E. C.; KOURAMAS, K. I.; MAYNE, D. Q. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 3, p. 406–410, March 2005. ISSN 0018-9286.

SAHINIDIS, N. V. Baron: A general purpose global optimization software package. **Journal of global optimization**, Springer, v. 8, n. 2, p. 201–205, 1996.

SANTOS, M. M. D. **Regulação Linear sob Restrições com Alocação de Polos: Abordagem por Invariância Positiva e Programação Linear**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

SINGH, H.; NAIDU, D. S.; PETERSON, J. N. Eigenvalue assignment of unified systems with slow and fast modes. In: **IEEE International Conference on Control Applications / IEEE International Symposium on Intelligent Control**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 285–290.

SOH, C. Robust stability of discrete-time systems using delta operators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 36(3), p. 377–380, 1991.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; DA SILVA JR, J. M. G.; QUEINNEC, I. **Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators**. Londres: Springer, 2014.

VASSILAKI, M.; HENNET, J.; BITSORIS, G. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. **International Journal of Control**, v. 47(6), p. 1727–1735, 1988.

WANG, Y.; OZBAY, B.; SHARIF, M.; SZNAIER, M. A convex optimization approach to design of information structured linear constrained controllers. In: **IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 5335–5341.

YANG, H.; LI, Z.; HUA, C.; LIU, Z. Stability analysis of delta operator systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function. **Circuits, Systems and Signal Process**, v. 34, p. 971–986, 2015.

YANG, H.; XIA, Y.; SHI, P.; ZHAO, L. **Analysis and Synthesis of Delta Operator Systems**. Berlin: Springer, 2012.

YUZ, J.; GOODWIN, G. **Sampled-Data Models for Linear and Nonlinear Systems**. Berlin: Springer, 2014.



## APÊNDICE A - Inclusão de Poliedros



A inclusão de domínios poliédricos pode ser caracterizada a partir do Lema de Farkas Estendido (HENNET, 1995).

Um poliedro convexo de  $\mathbb{R}^n$  pode ser definido por um conjunto de inequações lineares descrito por

$$Qx \leq \rho$$

com  $Q \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $\rho \in \mathbb{R}^r$ , e representado por  $R[Q, \rho]$ .

A inclusão desse conjunto poliédrico em  $R[P, \psi]$ , definido pelas inequações

$$Px \leq \psi$$

com  $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $\rho \in \mathbb{R}^p$ , significa que todo e qualquer ponto de  $R[Q, \rho]$  também pertence a  $R[P, \psi]$ .

O Lema de Farkas Estendido para o caso de matrizes não homogêneas garante um conjunto de condições necessárias e suficientes para as quais

$$R[Q, \rho] \subseteq R[P, \psi].$$

**Lema 2** (Lema de Farkas Estendido). *O sistema  $Px \leq \psi$  é satisfeito por qualquer ponto do conjunto poliédrico convexo não vazio definido pelo sistema  $Qx \leq \rho$  se e somente se existe uma matriz dual não negativa  $U \in \mathbb{R}^{p \times r}$ , tal que:*

$$UQ = P$$

$$U\rho \leq \psi.$$

*Demonstração.* Para  $i = 1, \dots, p$ , considere a linha  $P_{(i)}$  da matriz  $P$  e seu componente associado  $\psi_i$  do vetor  $\psi$ . Pelo Lema de Farkas, e assumindo  $R[Q, \rho] \neq \emptyset$ , é necessário e suficiente que  $\exists U_{(i)} \in \mathbb{R}^q$ ,  $U_{(i)}^T \in \mathbb{R}^q$ ,  $U_{ij} \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  tal que:

$$U_{(i)}Q = P_{(i)}$$

$$U_{(i)}\rho \leq \psi_i.$$

□