CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del 10 al 14 de Julio

VIII CIBEM

Madrid 2017

LIBRO DE ACTAS

“ Miramos con ilusión
hacia el futuro
de la educación matemática “

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LIBRO DE ACTAS

Editado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
C/ H. Carvajal, 5. 23740 Andújar (Jaén) España

www.fespm.es

ISBN: 978-84-945722-3-4

VIII CIBEM

Madrid 2017

CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONFERENCIAS

CR-18

INSERINDO TECNOLOGIAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Claudia Lisete Oliveira Groenwald
claudiag1959@yahoo.com.br
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA - Brasil

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CR
Nivel educativo: 3. Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Tecnologias da Informação e Comunicação, SIENA, Ensino e Aprendizagem

Resumo

Em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à Educação Matemática. Assim, os computadores, os tablets, os smartfones são instrumentos pertinentes no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa. Esta conferência apresenta os resultados de pesquisa do projeto Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Tecnologias. A investigação está associada ao convênio firmado entre a Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha, com o grupo de Tecnologias Educacionais e a Universidade Luterana do Brasil, com o Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM). Apresenta-se o SIENA - sistema integrado de ensino e aprendizagem, que é um sistema inteligente para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer, para qualquer nível de ensino. O sistema SIENA permite estudos individualizados ou em grupos de estudos, possibilitando tanto a recuperação individualizada de conteúdos como a aprendizagem através da cooperação e colaboração entre os pares.

Inserindo tecnologias no currículo de Matemática

Esta conferência apresentará os resultados de pesquisa do projeto Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Tecnologias Digitais. A investigação está associada ao convênio firmado entre a Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha, com o grupo de Tecnologias Educacionais e a Universidade Luterana do Brasil, com o Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM), do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM).

ISBN 978-84-945722-3-4

Segundo Grossi (2008 apud Groenwald, Zoch, & Homa, 2009) os educadores têm como desafio, descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados, além disso, o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se em um contexto educacional definido. Para este autor, o professor além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando e demonstrar sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim, um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (Claudia Lisete Oliveira Groenwald & Ruiz, 2006).

Kampff et al. (2004), afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta perspectiva, o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) é um sistema inteligente que conforme Groenwald e Moreno (Claudia Lisete Oliveira Groenwald & Ruiz, 2006, p.26) é: capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos.

Ainda segundo Groenwald e Moreno (2006), este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos podendo proporcionar uma aprendizagem significativa.

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais (Novak & Gowin, 1988), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O grafo não ordena os conceitos segundo relações arbitrárias, os conceitos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

são colocados de acordo com a ordem lógica em que devem ser apresentados ao aluno. Portanto, o grafo deve ser desenvolvido segundo relações do tipo "o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B", começando pelos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os conceitos objetivos.

O Sistema SIENA está representado na figura 1.

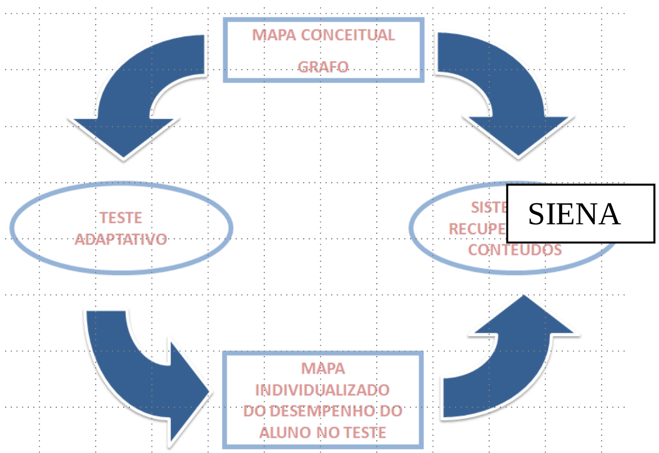


Figura 1- Esquema do Sistema SIENA
Fonte: SIENA

O sistema é composto por:

1) Um mapa conceitual de um conteúdo qualquer (atividade inicial em um projeto para delinear a temática a ser desenvolvida);

2) Um grafo com os conceitos a serem desenvolvidos, utilizando o *software Compendium;*

3) Testes adaptativos – cada conceito do grafo está ligado a um teste adaptativo. Das respostas obtidas de cada estudante se obtém um mapa conceitual personalizado que descreve o que cada aluno conhece *a priori* do conteúdo do grafo, o que gera o mapa individualizado das dificuldades do aluno;

4) Sequências didáticas eletrônicas - em cada conceito do grafo há sequências didáticas e que serão apresentadas ao aluno que tiver um resultado abaixo do esperado nos testes realizados.

Um Teste Adaptativo Informatizado (TAI) é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade do aluno. Segundo Costa (2009) um TAI procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo

ISBN 978-84-945722-3-4

é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequada à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (Sands, Waters, & Mcbride, 1996). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (Wainer, 2000).

No SIENA o teste adaptativo é realizado em cada conceito do grafo o qual está baseado nas Redes Bayesianas, devendo ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões dos mesmos, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em três ou mais níveis de dificuldades (fáceis, médias e difíceis), sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade; a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio do aluno sobre esse conceito; tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. O teste adaptativo estima o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante, se o aluno vai respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no grafo, e começa a avaliá-los, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo.

ISBN 978-84-945722-3-4

O sistema mostrará, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo na figura 2.

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.200
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.238
4	false	231	Se agruparmos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no ábaco?	0.281

Figura 2 - exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um conceito
Fonte: SIENA.

Todos os conceitos do grafo estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos conceitos em que apresenta dificuldades.
As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (Dolz & Schneuwly, 2004). Segundo Zabala (1998) as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.
O sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos do grafo e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos; a segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar.
Serão apresentados, também, resultados dos experimentos realizados no SIENA, que são:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Pensamento Estatístico; Números Decimais e o tema transversal trabalho e consumo; Números Naturais; Equação do 1º grau; Frações; Geometria Analítica. Todos os experimentos estão disponibilizados no servidor do PPGECIM, da ULBRA, no endereço: http://siena.ulbra.br.

Serão apresentados exemplos dos resultados já alcançados com o SIENA. Para exemplificar relata-se aqui o experimento com a aplicação das atividades desenvolvidas em uma escola municipal de Sapucaia do Sul/RS, com 10 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com média de idade de 14 anos. Com 5 encontros de 2 horas aulas, totalizando 10 horas aula, em horário extraclasse. O objetivo foi o de desenvolver uma sequência didática com os conceitos iniciais de Estatística, com atividades ligadas ao tema transversal Meio Ambiente.

O cenário de investigação do experimento, na plataforma SIENA, foi desenvolvido com as seguintes ações: grafo dos conceitos a ser trabalhado com Estatística, composto por 5 conceitos: introdução à Estatística, Tabelas, Gráficos, Medidas de Tendência Central e Resolução de problemas, conforme a figura 3; testes adaptativos no qual foram desenvolvidas 30 questões para cada conceito do grafo, sendo 10 fáceis, 10 médias e 10 difíceis; sequências didáticas para cada conceito do grafo, utilizando como base as orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), referentes ao tema.

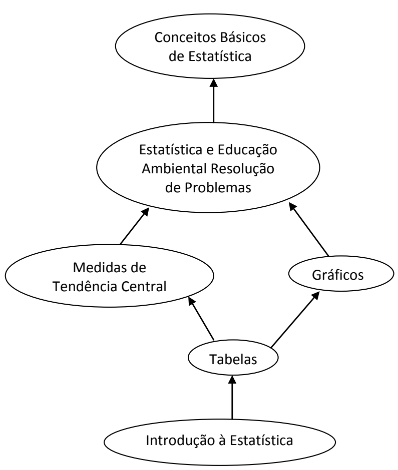


Figura 3 – Grafo com os conceitos de Estatística
Fonte: SIENA

ISBN 978-84-945722-3-4

Nas sequências didáticas foram utilizados os seguintes recursos informáticos: editor de apresentação gráfica (o editor utilizado nas sequências didáticas foi o Power Point da Microsoft, salvo em HTML); atividades lúdicas desenvolvidas no aplicativo JClic[1]; jogos online; sites informativos.

Em cada conceito do grafo há uma porta de entrada, com os *links* de cada atividade, que permite aos alunos estudarem conforme suas preferências, ou seguirem a ordem indicada, conforme se apresenta na figura 4, com os conceitos de Gráficos.

Figura 4 – Porta de entrada de gráficos
Fonte: SIENA

A figura5 mostra a apresentação, em HTML, do conceito de Tabelas.

Figura 5 - Apresentação em HTML do conceito de Tabelas
Fonte: SIENA

No SIENA os alunos estudaram os conceitos na sequência desenvolvida e, depois dos estudos, realizaram o teste. Quando não obtiveram a nota mínima de 0,6 (em uma escala de

[1] JClic é um programa para a criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídia, desenvolvido na plataforma Java, estas atividades podem ser textuais ou utilizar recursos gráficos, podendo incorporar também sons, animações ou sequências de vídeos digitais, esse *software* permite criar projetos que são formados por um conjunto de atividades com uma determinada sequência, que indica a ordem em que irão ser mostradas.

ISBN 978-84-945722-3-4

0,1 até 1) estudaram novamente e realizaram o teste novamente. Os trabalhos e testes foram realizados em duplas.

A Tabela 1 apresenta as notas dos testes realizados pelos alunos em cada conceito do grafo.

Tabela 1 – Notas dos alunos nos Testes Adaptativos Informatizados

Conceitos	1		2		3		4		5	
Alunos	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2
Aluno 1	0,200	0,766	0,200	0,996	0,610	-----	0,143	0,974	0,143	0,978
Aluno 2	0,200	0,766	0,200	0,996	0,610	-----	0,143	0,974	0,143	0,978
Aluno 3	0,999	-----	0,200	0,686	0,998	-----	0,143	0,995	0,978	-----
Aluno 4	0,999	-----	0,200	0,686	0,998	-----	0,143	0,995	0,978	-----
Aluno 5	0,686	-----	0,997	-----	1	-----	0,143	0,996	0,143	-----
Aluno 6	0,686	-----	0,997	-----	1	-----	0,143	0,996	0,143	-----
Aluno 7	0,610	-----	0,200	0,996	0,942	-----	0,907	-----	0,143	0,947
Aluno 8	0,610	-----	0,200	0,996	0,942	-----	0,907	-----	0,143	0,947
Aluno 9	0,143	0,701	0,385	0,701	0,200	0,610	0,100	0,593	-----	-----
Aluno 10	0,143	0,701	0,385	0,701	0,200	0,610	0,100	0,593	-----	-----
Média	0,528		0,445		0,750		0,287		0,352	

Fonte: Banco de dados do SIENA

De acordo com as médias do teste 1, pode-se concluir que os alunos apresentaram dificuldades na construção de tabelas, na determinação das medidas de tendência central e na resolução de problemas. Na resolução de problemas apenas uma dupla conseguiu nota superior a 0,6 no primeiro teste. A leitura, interpretação e construção de gráficos não apresentou problemas para os alunos participantes do projeto, a média nos testes foi de 0,750 e apenas uma dupla teve que realizar estudos de recuperação e realizar o segundo teste. Os alunos, nos conceitos introdutórios de Estatística, também apresentaram um rendimento satisfatório.

Referências bibliográficas

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC.

Costa, D. R. (2009). *Métodos Estatísticos em Testes Adaptativos Informatizados*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Dolz, J., & Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado das Letras.

Groenwald, C. L. O., & Ruiz, L. M. (2006). Formação de Professores de Matemática: uma

ISBN 978-84-945722-3-4

proposta de ensino com novas tecnologias. *Acta Scientiae*, *8*(2).

Groenwald, C. L. O., Zoch, L., & Homa, A. I. R. (2009). Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. *Bolema*, *22*(34), 27 – 56.

Kampff, A. J. C., Machado, J. C., & Cavendini, P. (2004). No Title. In *X Workshop de Informática na Escola e XXIII Congresso Da Sociedade Brasileira De Computação*. Bahia. Retrieved from http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1988). *Aprediendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Sands, W. A., Waters, B. K., & Mcbride, J. R. (1996). *Computerized Adaptive Testing : From Inquiry to Operation Edited by*. Washington: American Psychological Association.

Wainer, H. (2000). *Computerized Adaptive Testing: A Primer*. (H. Wainer, Ed.) (2nd ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

ISBN 978-84-945722-3-4

CP-20

LA MATEMAGIA EN MADRID, UNA HISTORIA CON MÁS DE 200 AÑOS

Fernando Blasco – Nelo Maestre
fernando.blasco@upm.es – nelomaestre@divermates.es
Universidad Politécnica de Madrid (España)- Divermates (España)

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CP
Nivel educativo: 7
Palabras clave: magia, matemáticas, multidisciplinariedad

Resumen

Juan Mieg (apodado "el tío Cigüeño") llegó a España en 1814 para ejercer como profesor de física del Real Gabinete. Escribió diferentes obras de carácter divulgativo pero una de ellas "El brujo en sociedad" está dedicada a la magia y los juegos de manos. La primera sección de este libro se dedica a la magia matemática y muchos de los ejemplos que aparecen en ella se remontan a "trucos" ya descritos por Fibonacci y Luca Pacioli. En esta charla haremos un recorrido por el uso educativo de la magia matemática tomando como referencia principal la obra de este profesor que desarrolló su trabajo en Madrid. Los juegos descritos en el libro siguen siendo de actualidad y la conferencia se plantea como un juego interactivo en el que los asistentes participarán de los juegos y aprenderán cómo incorporarlos en su día a día.

La obra de Juan Mieg.

Durante la reclusión de Fernando VII en el castillo de Valençay éste había oído hablar de Juan Mieg como alguien con muy buenas capacidades docentes y con habilidad para los "juegos de manos" (Reig, 2009). Cuando en 1814 Fernando VII regresa a España trae a Mieg a esta ciudad, con el objeto de que fundase la escuela Físico-química del Real Palacio de Madrid. Entre 1816 y 1820 se dedica a esta labor docente, que más tarde se vería culminada con la publicación de varios libros relacionados con la enseñanza de la física y la química. La utilización de técnicas de ilusionismo como instrumento didáctico no era un concepto novedoso, pero parece que sí efectivo.

Mieg se declara aficionado al ilusionismo en su libro *Noticias curiosas sobre el espectáculo de Mr. Robertson, los juegos de los indios, las maquinas parlantes, la fantasmagoría, y*

ISBN 978-84-945722-3-4

otras brugerías de esta naturaleza. Por un aficionado á la magia blanca, en el que comenta el espectáculo de Étienne-Gaspard Robert, conocido como Robertson. Robert se había especializado en óptica y galvanismo y pronunciaba conferencias públicas sobre fenómenos científicos que resultaban bastante curiosos. De algún modo Mieg trajo a Madrid ese interés por la ciencia y lo dejó patente en su libro *El Brujo en sociedad, ó sea breve instrucción para aprender a ejecutar con destreza muchos juegos de manos y otras varias suertes curiosas y divertidas; con cuatro láminas; por D. J. Mieg* (Mieg, 1840). El primer capítulo del libro lo dedica a las matemáticas, dividiendo el texto en *suertes aritméticas* y *suertes geométricas*. Los juegos y acertijos que aparecen en el libro no son, en general, originales suyos, sino que aparecen referidos también en libros anteriores. En cualquier caso, se puede consultar online gracias a la Biblioteca Nacional de España.

Podemos encontrar en este libro de Mieg, además de juegos de magia, algunos otros temas que aparecen recurrentemente en la matemática recreativa, como demostraciones del teorema de Pitágoras y métodos de construcción de cuadrados mágicos. También aparecen diagramas que pueden construirse con las baldosas de Sébastien Truchet y bastantes puzles topológicos, algunos con cuerdas y bolas (puzle africano) o con piezas de madera (cruz del leñador).

Si bien se considera *De Viribus Quantitatis*, de Luca Pacioli, como el primer libro donde se habla de un juego de magia con cartas, ya aparecen juegos numéricos incluso en el *Liber Abaci* de Fibonacci. Obviamente estos son juegos sencillos que no han perdido su valor para introducir a los estudiantes en el estudio de la prioridad de operaciones aritméticas, en el álgebra o en algunas de las principales propiedades de los números. Por ejemplo, el conocido juego de las tarjetas binarias de adivinación (ver, e.g., Maestre 2017, donde aparece el juego clásico de tarjetas mágicas y además otras versiones más sofisticadas del juego). Esto muestra que Mieg estaba al día en cuanto a ciencia recreativa: una de las referencias en las que aparece este juego tal como se presenta hoy en día es el libro *Recreations in mathematics and natural philosophy* de Charles Hutton. Pues bien, el juego no aparece de ese modo en la edición de 1803 (que en realidad es una reinterpretación de la edición que Montucla hizo sobre el libro de ciencia recreativa de Ozanam de 1694). Sí que

ISBN 978-84-945722-3-4

aparece en la forma actual en la edición del libro de Hutton de 1840 que, tras su fallecimiento, había compuesto Edward Riddle. Curiosamente el libro de Mieg se publica en 1839, con lo que podríamos encontrarnos ante una de los primeros textos donde se encuentra ese efecto mágico.

El profesor Alamberke

Es curioso encontrar el uso del juego matemático de las tarjetas de adivinación en una publicación que en realidad se trata de un folleto publicitario (Alamberke, 1880). Lo incluimos como ejemplo que puede inspirar al docente a preparar un juego similar.

Josep Estalella Graells

Para muchos docentes es conocido como autor de un libro de ciencia recreativa (Estalella, 1918) que se estuvo editando continuamente hasta 1973 y que otra vez volvio a aparecer en 2008, junto con un volumen de comentarios y actualización. El número de ediciones de su obra nos dice algo sobre este profesor que fue director de los estudios de física y química en el Instituto-Escuela de Madrid, entre 1919 y 1921, en medio de un potente movimiento de renovación pedagógica impulsado por la Institución Libre de Enseñanza de Francisco Giner de los Ríos.

El libro de Estalella presenta una extensa colección de problemas y experimentos recreativos de matemáticas, física y química, junto con algunos problemas de ingenio, geografía, historia natural, papiroflexia… En definitiva, muchos recursos que puede utilizar un docente. Aunque no hay referencias a la presentación en clase como juego de magia, la gran cantidad de experimentos visuales y sorprendentes deja clara una intención de llegar a los alumnos a través de la fascinación. Uno de los juegos que aparecen en el libro es otro de nuestros juegos favoritos, en el que interviene el número cíclico 142857 (que es el periodo de la fracción 1/7 cuando se pasa a número decimal). Se pueden encontrar muchas presentaciones de este juego que hacen que el estudiante quiera conocer cuáles son las razones que hacen que el juego funcione (Blasco, 2016).

Pedro Puig Adam

No es necesario presentar a Pedro Puig Adam como un referente de la educación matemática en el ámbito de habla hispana. Ejerció como catedrático del Instituto San Isidro entre 1926 y 1960. Era aficionado a las artes y son conocidas algunas de sus composiciones

ISBN 978-84-945722-3-4

musicales si bien es menos conocida su afición por la magia, probada tanto por tener en su colección de libros varios sobre ilusionismo como por algunas de sus publicaciones sobre didáctica de la matemática (Puig, 1957).

Presentamos aquí un juego, ideado por Nelo Maestre, e inspirado en Pedro Puig Adam.

<u>Efecto:</u> En este experimento van a participar dos espectadores, uno elegirá un número a través de un ritual mágico-matemático, y el otro será capaz de adivinar dicho número con la ayuda de un pequeño paquete de cartas, en el que tenemos nueve cartas, del as al nueve.

Para comenzar le pedimos al espectador que ejercerá de adivino que corte y complete su paquete tantas veces como quiera. Cuando esté satisfecho le rogaremos que vuelva y mire el número de la carta que quedó en la posición superior, y que lo recuerde, pues este número será la “clave adivinadora” (supongamos, para este ejemplo, que es un 7). Después debe dejar esa carta de nuevo sobre el paquete.

A continuación indicaremos al segundo espectador que elija un número, pero debe hacerlo mediante este procedimiento: tiene que sacar su teléfono móvil, abrir la calculadora y que se fije en como los números del 1 al 9 están colocados formando un cuadrado. Lo primero que hará es elegir cualquier fila, columna o diagonal de dicho cuadrado, y formar un número de 3 cifras con los 3 guarismos que aparecen en ella (supongamos que, en este ejemplo, elige la fila inferior y escribe, por tanto, el número 231).

Ahora tiene que multiplicar ese número que está en la pantalla por otro formado de la misma manera, es decir, escribiendo en cualquier orden los 3 dígitos situados en cualquier fila, columna o diagonal del teclado de la calculadora (supongamos que elige en este caso la segunda columna y escribe el número 582). A continuación le pediremos que presione la tecla igual para que se muestre en pantalla el resultado. Éste será un número de 5 o 6 dígitos (en nuestro ejemplo es 134 442).

De esos 6 dígitos debe elegir uno, distinto de cero, que será su número secreto, y para terminar el proceso debe sumar todos los demás (supongamos que decide que su número secreto es el 3, suma los demás y resulta 1+4+4+4+2=15). Nos dice el resultado (en este caso 15). Se le explica que en numerología cada número se corresponde también con la suma de sus dígitos, por tanto 15 es equivalente a 6 (1+5).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Llega el momento de la adivinación. Pedimos al adivinador que tome su paquete y que pase de arriba abajo (siempre con el paquete dorso al techo), tantas cartas como el número que nos acaba de dar el segundo espectador, en nuestro ejemplo 6. Ahora vuelve la siguiente carta, pero no coincide con el número pensado…

Decimos: “Claro, es que nos falta utilizar tu clave adivinadora, ¿Cuál era?”

Como la clave era 7 le pedimos que pase 7 cartas más de arriba abajo, y vuelva la siguiente, y ahora sí tendremos que la carta mostrada es un 3, el número seleccionado por el espectador.

Secreto: El juego funciona de manera prácticamente automática, teniendo en cuenta un par de ideas:

La elección del número: Por la forma de elegir los números, el resultado de la multiplicación será un número múltiplo de 9. Cualquier número formado por los 3 guarismos que aparecen en la misma fila, columna o diagonal de una calculadora será un número múltiplo de 3 (esto es un buen ejercicio para llevar a cabo en el aula). Al multiplicar por tanto dos números múltiplos de 3 el resultado será un número múltiplo de 9. Ahora pedimos al espectador que elija una cifra del resultado (que sea distinta de cero), y al sumar el resto nos quedará su complemento a 9. Esto es fácil de deducir aplicando el criterio de divisibilidad entre 9.

La adivinación: Como cuenta Pedro Puig Adam en “La matemática y su enseñanza actual”, si tomamos un montón de 9 cartas bien ordenado, nos puede servir como una calculadora de “complemento a 9”. Inicialmente colocamos el montón ordenado, de forma que la carta que quede en la cara sea el 1 y la que quede en el dorso sea el 9. Si dejamos ahora el montón cara abajo en la mano izquierda y pasamos de arriba abajo N cartas, la carta quedará como superior del montón (tendrás que volverla para verla) será la de valor (9-N).

Para ocultar un poco más el secreto le pedimos al espectador “adivinador” que corte tantas veces como quiera y se fije en la primera carta. En ese momento, si pasamos tantas cartas de arriba abajo como el número que muestra esa carta, sería como reiniciar nuestra máquina de calcular “complemento a 9”, es decir, el montón quedaría colocado con el 1 en la cara y el 9 en el dorso. Comprueba esto con las cartas en la mano.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Como la suma es conmutativa, podemos pedir primero al espectador que nos dé el resultado de la suma de los dígitos no elegidos, y después hacer el proceso de pasar la "clave adivinadora", e igualmente llegaremos a la carta que muestra el número seleccionado por el espectador.

Martin Gardner

De todos los personajes que hemos mencionado es el único que no ha visitado Madrid, pero quizá es el que más directamente ha influido en todos los que, ahora, en esta ciudad, relacionamos magia y matemáticas. A través de sus libros y de sus columnas en *Investigación y Ciencia* muchos fuimos los que descubrimos unas matemáticas diferentes, con conexiones con otras ramas de la ciencia y el arte. Se dice de él que fue capaz de convertir a miles de niños en matemáticos y a miles de matemáticos en niños y, en efecto, fue capaz tanto de hacer que los matemáticos profesionales jugaran (convirtiéndose en niños) como de que muchos jóvenes lectores de sus columnas de juegos matemáticos terminasen estudiando matemáticas más profundas. Él siempre había mostrado interés por la ciencia pero nunca consiguió un grado en matemáticas ni en otra disciplina científica. Sin embargo, es una referencia fundamental en el mundo de la educación matemática por todos los libros que ha escrito sobre el tema, incluso cuando tenía más de 90 años.

Matemáticas, magia y misterio (Gardner, 1956) es una obra fundamental de consulta que sigue vigente hoy en día. Los juegos que aparecen en ese libro no son originales de Martin Gardner, pero sí que constituyen una magnífica selección donde iniciarse en esta materia. Incluso Puig Adam llegó a conocer la obra de Gardner (Sales, 2000). En abril de 2014 la *Mathematical Association of America* dedicó su "mes de la conciencia matemática" a una serie de actividades que precisamente llevaban el título del libro de Gardner de 1956 y pueden mostrar al docente cómo desarrollar estos contenidos en el aula. En la página web correspondiente (ver referencias) aparecen vídeos que simplifican esa tarea.

En los juegos de Gardner aparecen deletreos (juegos en los que hay que contar el número de letras de una palabra), calendarios, juegos en los que se usan múltiplos de 9, códigos secretos, paradojas y trucos geométricos, cuestiones topológicas y un sinfín de actividades.

ISBN 978-84-945722-3-4

Cada año, desde su fallecimiento en 2010, le recordamos en el evento *Martin Gardner's Celebration of Mind*, que se desarrolla en paralelo en todo el mundo. Seguro que hay uno en el ámbito geográfico del lector y allí puede ponerse en contacto con otros magos matemáticos, que seguro estarán encantados de colaborar para difundir esta maravillosa materia.

Referencias bibliográficas

- Alamberke (1880) Cálculo matemático para adivinar el nombre y la edad de una persona. http://bdh-rd.bne.es/viewer.vm?id=0000082768 Consultado 24/05/2017.

- Blasco, F. (2016) *Matemagia. Los mejores trucos para entender los números.* Barcelona: Ariel.

- Celebration of mind. http://www.celebrationofmind.org/ Consultado 24/05/2017

- Estalella, J. (1918) *Ciencia Recreativa*. Barcelona: Gustavo Gili.

-Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Nueva York: Dover.

- Maestre, N. Tarjetas mágicas. http://divermates.es/blog/tarjetas-magicas/ Consultado 24/05/2017

- Mathematical Association of America. Mathematics, magic and mystery http://www.mathaware.org/mam/2014/ Consultado 24/05/2017

-Mieg, J (1840). El brujo en sociedad. http://bdh-rd.bne.es/viewer.vm1id=0000082676 Consultado 24/05/2017.

- Puig Adam, P. (1957) Un juego de adivinación de carácter matemático. Gaceta Matemática, 1a serie, 8 (6-7).

- Puig Adam, P. (1960) *La matemática y su enseñanza actual.* Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

-Reig-Ferrer, A. (2009). El profesor y naturalista Don Juan Mieg (1780-1859) en el 150 aniversario de su fallecimiento (I). Argutorio, 23, 9-17.

- Sales Rufí, J. (2000) Pedro Puig Adam, maestro. Suma, 34, 9-20.

ISBN 978-84-945722-3-4

CP-22

PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO A PARTIR DO TRABALHO NA SALA DE AULA

João Pedro da Ponte
jpponte@ie.ulisboa.pt
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidade: CP
Nível educativo: 7
Palavras-chave: Raciocínio matemático, Representação matemática, Prática de ensino

Resumo

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos constitui um objetivo fundamental do ensino desta disciplina escolar. Em Matemática, o raciocínio assume caraterísticas particulares dada a natureza própria dos objetos desta ciência, como entidades abstratas construídas a partir de experiências do mundo real ou de experiências com outras entidades matemáticas já previamente conhecidas. Tendo por base trabalhos recentes de investigação em educação matemática de diversos países e recorrendo a exemplos ilustrativos, procuro caraterizar as principais formas de raciocínio, nomeadamente indutivo, dedutivo e abdutivo, e analisar o seu papel no ensino-aprendizagem da Matemática. Analiso, também, diversos processos-chave de raciocínio usados em Matemática como a formulação de estratégias de resolução de problemas, a generalização e a justificação, dando atenção à relação do raciocínio com outros processos matemáticos essenciais tais como representar e dar significado. Finalmente, analiso as ações do professor promotoras do raciocínio em diversos níveis de escolaridade.

Introdução

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar. Quais os aspetos fundamentais dessa capacidade? De que modo pode o professor na sala de aula promover esse desenvolvimento? São questões que me proponho analisar conjugando perspetivas teóricas e exemplos concretos.

Raciocínio e representação

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

É um lugar-comum dizer que “a Matemática requer raciocínio” e também que “desenvolve o raciocínio”. Mas o termo “raciocínio” é polissémico, como se vê pelos vários sentidos que lhe são dados pelo dicionário:

> Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. ratiocinári) (Dicionário Porto Editora)

Depreender, julgar, compreender, pensar de forma lógica, apresentar razões, ponderar, refletir… São muitos significados que estão longe de coincidir! Desde logo, coloca-se a questão se “raciocinar” será o mesmo que “pensar” ou será, de modo mais específico, “pensar de certa maneira”. Na verdade, considero que se deve atribuir a “raciocinar” um significado mais preciso que “pensar”. Nesta perspetiva, raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação, fazendo-o por um processo justificado. Este entendimento está em consonância com outro dicionário, que diz que raciocinar é estabelecer inferências ou conclusões a partir de factos conhecidos ou assumidos como verdadeiros. Acrescento apenas que isso deve ser feito de forma fundamentada, e não mais ou menos ao acaso. Se, em resposta a uma questão, uma pessoa diz a primeira coisa que lhe ocorre sem analisar toda a informação pertinente, não está a raciocinar, está simplesmente a formular palpites. Deste modo, todo raciocinar é pensar, mas existe pensamento que não chega a ser raciocínio. É o que acontece quando descrevemos um objeto, quando relatamos um acontecimento, quando exprimimos um sentimento ou quando formulamos um desejo.

Existe raciocínio em Matemática e também noutros domínios do conhecimento bem como na vida do dia-a-dia. Coloca-se, naturalmente, a questão: será que o raciocínio em Matemática é diferente do raciocínio noutros campos, será que tem alguma coisa de específico? Vejamos então alguns aspetos gerais do raciocínio tal como ele se desenvolve nos mais diversos domínios. O estudo do raciocínio é um campo da Filosofia, com as suas raízes na Grécia antiga, nomeadamente com a sua formalização nas regras da Lógica. Aristóteles é o primeiro grande teórico que estabelece esta disciplina e, já no século XX, o desenvolvimento da Lógica Matemática levou a grandes desenvolvimentos e aplicações

ISBN 978-84-945722-3-4

práticas, nomeadamente nos computadores. Para o que nos interessa aqui, limitar-me-ei a notar que existem essencialmente três tipos de raciocínio: o dedutivo, o indutivo e o abdutivo.

O raciocínio dedutivo é característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental. Nesta ciência, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas afirmações válidas (teoremas). Assim, "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (Ponte, Branco & Matos, 2008, p. 89). Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7). Como refere Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo constitui "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (p. 178), sendo através dele que se validam as afirmações matemáticas. A sua importância é de tal ordem que Davis e Hersh (1995) afirmam mesmo que a dedução é o selo da Matemática.

O papel fundamental do raciocínio dedutivo é sobretudo de validação do conhecimento. No entanto, as novas descobertas, na maior parte dos casos, não surgem através de raciocínios dedutivos mas sim de outros tipos de raciocínio, nomeadamente de raciocínios indutivos e abdutivos. George Pólya (1990) valorizou de forma eloquente o papel do raciocínio indutivo. Como indica, a indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Já a abdução é um processo de inferência que parte de um facto invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência. O grande teórico do raciocínio abdutivo é Charles Sanders Peirce (1931–1958), que afirma que "[a] abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese" (Vol. 7, p. 219).

É verdade que o raciocínio dedutivo tem um lugar fundamental na validação das afirmações matematicamente válidas, mas é o raciocínio indutivo e abdutivo que leva à descoberta dessas afirmações. Deste modo, os alunos devem aprender a raciocinar dedutivamente em Matemática mas devem igualmente aprender a raciocinar indutiva e abdutivamente (Rivera & Becker, 2009). Assim, é de grande importância saber como pode o professor, na sala de aula de Matemática, contribuir para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocínio. Para isso centrar-me-ei em dois processos fundamentais: generalizar, um

ISBN 978-84-945722-3-4

processo fundamental do raciocínio indutivo e abdutivo, e justificar, um processo fundamental do raciocínio dedutivo.

É de notar que é impossível aceder diretamente ao raciocínio matemático dos alunos – para o conhecer é necessário que estes o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações. Por isso, somente “ao observar as suas representações [dos alunos], os professores podem conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos” (NCTM, 2007, p. 76). Para além de permitirem dar a conhecer o raciocínio, as representações são um suporte essencial para a realização desse mesmo raciocínio. Sem representar de alguma maneira os conceitos matemáticos é impossível fazer inferências sobre eles.

Como indica Bruner (1999), estas representações podem ser ativas (objetos como materiais manipuláveis ou ações como “contar pelos dedos”), icónicas (imagens, figuras e diagramas) ou simbólicas (símbolos matemáticos, outros símbolos e linguagem natural). As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem pois, como refere o NCTM (2007), “quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (p. 75).

Modelos para o estudo do raciocínio na sala de aula

Durante muito tempo, os estudos em educação matemática sobre os processos de raciocínio centravam-se exclusivamente no raciocínio dedutivo (Balacheff, 1888; Galbraith, 1995; Hanna, 2002). A maior parte destes estudos tendiam a ver os raciocínios indutivo e abdutivo como obstáculos ao raciocínio matemático. Mais recentemente, registou-se uma grande mudança a este respeito – em vez de serem vistos como estando em conflito, estas diferentes formas de raciocínio passaram a ser vistas como complementares.

Assim, Lannin, Ellis e Elliot (2011) desenvolveram um modelo no qual a “ideia central” é que “raciocinar matematicamente é um processo dinâmico envolvendo conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver a avaliar argumentos” (p. 12) Neste modelo destacam-se três polos, sendo o primeiro “conjeturar e generalizar”, o segundo “investigar porquê” e o terceiro “justificar ou refutar”. Trata-se de um modelo que combina aspetos dedutivos e com aspetos indutivos e abdutivos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Um outro modelo é de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e procura enquadrar o raciocínio com dois outros processos fundamentais, representar e dar significado (figura 1). Deste modo, os autores procuram vincar que o raciocínio matemático apoia-se necessariamente em representações e requer atribuição de significados aos objetos e ações envolvidos. Este modelo tem por base todo o processo de realização de uma investigação ou resolução de um problema matemático, começando pela formulação de questões, passando para a formulação de conjeturas e estratégias de resolução (generalização), indo à aplicação dessas estratégias e teste das conjeturas, até ao processo de validação (através da justificação). Deste modo, a generalização e a justificação destacam-se como aspetos essenciais do raciocínio matemático.

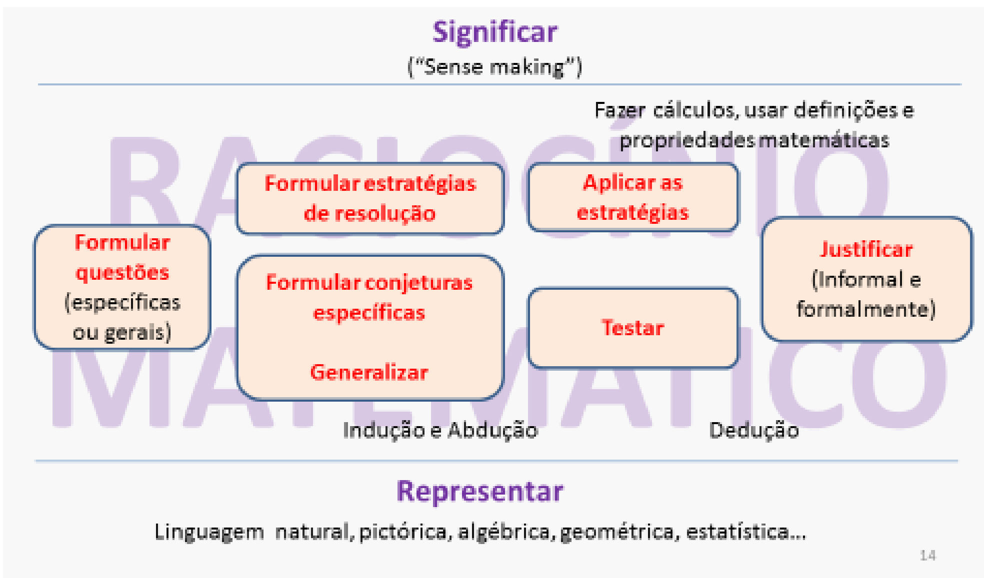


Figura 1 – Quadro conceptual para analisar o raciocínio matemático de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013).

Análise do raciocínio dos alunos

O raciocínio dos alunos pode ser comunicado oralmente ou por escrito. Vejamos alguns exemplos de raciocínios que se evidenciam em respostas escritas dos alunos a tarefas matemáticas. Assim, a figura 2 evidencia uma justificação por contraexemplo, um importante processo de justificação matemática. O aluno indica que a resposta à questão é negativa porque um caso pode ser dado em que a afirmação é falsa. É interessante notar que o aluno efetuou diversas mudanças de representação para dar a sua resposta. Primeiro,

ISBN 978-84-945722-3-4

converteu as frações ($\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$) para quocientes (7:4 e 5:2) e depois estes para numerais decimais (1,75 e 2,5). É nesta representação que o aluno considera que a justificação se torna convincente dado que 1,75 é sem qualquer dúvida menor que 2,5.

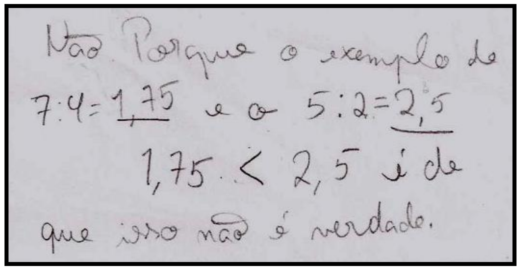
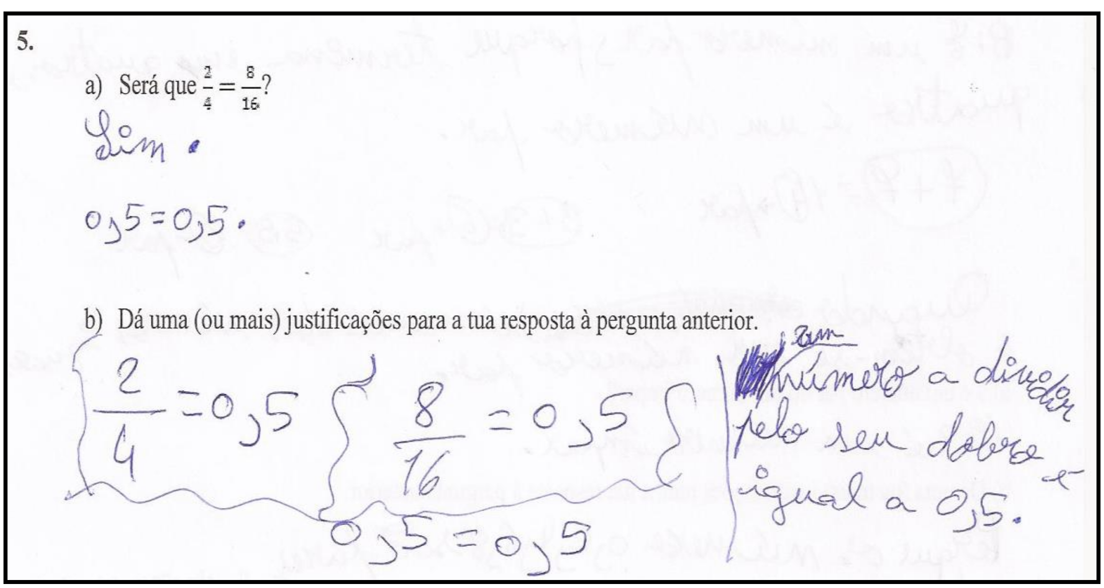


Figura 2 – Resposta de Marco (5.º ano) à questão “Se uma fração tem numerador e denominador maiores que uma outra fração, será necessariamente maior que esta segunda fração?”

Um outro exemplo de raciocínio dos alunos é dado nas respostas indicadas na figura 3. À primeira questão a aluna responde afirmativamente e, sem que tal lhe tenha sido perguntado, avança de imediato com uma justificação, baseada numa mudança de representação – $\frac{2}{4}$ é igual a 0,5 e $\frac{8}{16}$ é igual a 0,5, logo $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{8}{16}$, uma vez que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si. Na resposta à segunda questão, a aluna detalha mais a sua justificação e apresenta uma curiosa generalização: “Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5”.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3 – Justificação e generalização de Catarina.

Papel do professor

O professor, dando atenção aos processos de raciocínio subjacentes à resolução de tarefas matemáticas, pode dar contributos importantes para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Por exemplo, nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (1.º ao 6.º ano de escolaridade), pode pedir aos alunos para formularem e testarem conjeturas relativas a situações matemáticas simples bem como para explicarem ideias e processos e justificarem resultados matemáticos. Pode tornar explícito o uso de exemplos e contraexemplos e recorrer à análise exaustiva de casos como processo de justificação. Isso pode ser feito, por exemplo, através de ações como:

- Pedir a explicação de raciocínios matemáticos oralmente e por escrito.
- Solicitar exemplos, contraexemplos e analogias.
- Propor a investigação de regularidades e relações numéricas em tabuadas.
- Usar tabuadas para a formulação e teste de conjeturas.
- Perguntar, *Como fizeste? Porque consideras que o que fizeste está certo*?
- Perguntar, *O que acontecerá se...? Isto verificar-se-á sempre?*
- Solicitar a apresentação de argumentos assim como exemplos e contraexemplos.
- Através da apresentação de exemplos e de outros casos particulares e de perguntas como, *O que acontecerá a seguir? Será que isto é válido para outros os casos?*, pode procurar que os alunos façam generalizações.

Mais adiante na escolaridade, no 3.º ciclo (7.º ao 9.º ano) e no ensino secundário (10.º ao 12.º ano), o professor pode realizar essas mesmas ações e outras como:

- Pedir aos alunos para identificarem casos particulares, formularem generalizações e testarem a validade dessas generalizações.
- Proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjeturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjeturas).
- Salientar o papel das definições na dedução de propriedades, por exemplo no estudo dos quadriláteros.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Colocar questões que conduzam à redução ao absurdo como método de demonstração.
- Pedir a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos, ou a sua negação através de contraexemplos.

Conclusão

Para promover o raciocínio matemático dos alunos, o professor tem de conduzir uma prática onde surjam amplas oportunidades nesse sentido. Essas oportunidades dependem, no essencial, de dois aspetos: das características das tarefas propostas na sala de aula e do modo como essas tarefas são exploradas em diferentes momentos de trabalho. Relativamente às tarefas, estas, para além de pedirem explicitamente a realização de generalizações e a justificação de respostas ou processos de resolução, podem assumir natureza diversa e terem diferentes graus de desafio. Para isso o ensino deve valorizar tarefas que incluam questões de exploração e problemas, ou seja, questões para as quais os alunos não dispõem de um método de resolução imediato. Para favorecer o confronto entre diferentes estratégias e representações, é útil propor tarefas com questões que permitam uma variedade de processos de resolução. A aula exploratória (Ponte, 2005), onde predominam tarefas deste tipo, permite aos alunos grande protagonismo na realização das tarefas e na expressão dos seus raciocínios. Nesta aula o professor começa por propor uma tarefa (introdução), seguindo-se um período em que os alunos trabalham em grupo, em pares ou individualmente (trabalho autónomo), e culminando com um momento coletivo de apresentação e justificação de resultados (discussão). Assim, valorização explícita do raciocínio matemático na sala de aula pode ser feita naturalmente a partir deste tipo de trabalho. Trata-se, sobretudo, de introduzir uma nova ênfase no trabalho em Matemática, que pode levar os alunos não só a desenvolver o seu raciocínio mas também a assumir uma perspetiva muito mais positiva sobre o que é a Matemática como atividade humana.

Referências

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modélisation et simulation* (Tese de doutoramento, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I).

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 75-104). Lisboa: SPCE.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Peirce, C. S. (1931–1958) *Collected papers* (8 vols). In C. Hartshorne, P. Weiss & A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (edição original de 1954, Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4), 213-221*.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-31

CONHECIMENTOS DIDÁTICOS MATEMÁTICOS E TECNOLÓGICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UM DESAFIO PERMANENTE

Carmen Teresa Kaiber
carmen_kaiber@hotmail.com
Universidade Luterana do Brasil - Brasil

Núcleo temático: Formação do profesorado em Matemática
Modalidade: CB, CP, CR
Nível educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Formação de Professores, Conhecimentos do Professor de Matemática, Enfoque Ontosemiótico, Aprendizagem do Professor

Resumo

Inquietações e reflexões em torno dos conhecimentos matemáticos, didáticos e tecnológicos necessários ou pertinentes de serem do domínio dos professores que ensinam Matemática, em todos os níveis de ensino, têm levado a busca de conhecimentos sobre a questão amparado em investigações e constructos teóricos que emergem das mesmas. No que se refere a formação de professores que ensinam Matemática, tanto inicial como continuada, no contexto brasileiro, a mesma tem sofrido constantes transformações em termos de legislação, porém, nem sempre com reflexos no âmbito dos cursos de formação e mesmo no desenvolvimento na ação docente. Assim, busca-se, aqui, discutir e refletir sobre a visão da Matemática, seu ensino e aprendizagem, apontada no Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática proposto pelo grupo de investigação liderado por Juan Godino e a visão do conhecimento do professor apresentada por Cochran-Smith e Lytle (1999), buscando uma articulação que coloque em destaque o protagonismo dos professores formadores, professores em processo de formação e professores em atuação nas escolas no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos didáticos e tecnológicos a serem levados para às salas de aula nos diferentes níveis de ensino.

Introdução

Godino (2009) apresenta a proposta de um sistema de categorias de análise do que denomina de conhecimentos didáticos e matemáticos do professor, fundamentada no EOS - Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática. De acordo com o autor, tal sistema de categorias de análise foi proposta no sentido de integrar, organizar e estender modelos de conhecimentos do professor por ele revisitados, como os de Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps, (2008) e Hill, Ball e Schilling, (2008), além da noção de

ISBN 978-84-945722-3-4

proficiência no ensino da Matemática apresentada em Schoenfeld e Kilpatrick (2008 *apud* Godino, 2009).

O autor destaca o pioneirismo do modelo de Shulman (1986) na abordagem específica sobre o conhecimento do conteúdo para o ensino (conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) e conhecimento curricular) e o importante papel dessa proposta no que se refere ao desenvolvimento, a partir de então, de investigações e implementações curriculares destinadas à formação de professores. Aponta, também, a categorização do conhecimento matemático para o ensino (MKT) apresentado em Ball, Thames e Phelps, (2008) e Hill, Ball e Schilling (2008), a qual prevê o conhecimento do conteúdo (conhecimento comum e especializado) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (conhecimento do currículo e dos alunos, do conteúdo e do ensino, do currículo), e que está alinhada ao pensamento de Shulman (1986,1987).

Por fim, o autor põe em destaque a noção de proficiência no ensino da Matemática de Schoenfeld e Kilpatrick (2008 *apud* Godino, 2009), onde a expressão "proficiência" pode ser interpretada como um indicativo dos conhecimentos e competências que deveriam ter os professores para um ensino de qualidade (Godino, 2009).

Porém, mesmo considerando a relevância do conhecimento do conteúdo, Godino (2009) julga pertinente que o professor seja capaz de organizar o ensino, desenvolver tarefas de aprendizagem, utilizar adequadamente os recursos didáticos, além de compreender as condições necessárias que possibilitem o ensino e aprendizagem, o que, modelos de conhecimento matemático para o ensino que incluem categorias muito gerais, não permitem analisar detalhadamente, razão pela qual propõe o sistema de categorias de análise dos *conhecimentos didáticos e matemáticos do professor*, com o que se concorda.

Conhecimentos Didáticos e Matemáticos do Professor na perspectiva do EOS

O modelo dos *conhecimentos didáticos e matemáticos do professor* apresentado em Godino (2009), baseia-se na aplicação do "Enfoque Ontosemiótico – EOS" [grifo do autor] sobre o conhecimento e a instrução matemática. No que se refere ao EOS Godino, Batanero, & Font (2008, p.12) apontam que o ponto de partida do EOS "é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática: como

ISBN 978-84-945722-3-4

atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado."

Ainda, segundo os autores, as noções teóricas do EOS podem servir tanto como ferramenta de análise e reflexão de uma proposta educativa, como para a orientação e a elaboração da mesma podendo, ainda, serem utilizadas, pelo professor, na própria prática docente, além de consideradas como instrumento de pesquisa.

Godino (2009) explicita aspectos do Enfoque Ontosemiótico, ressaltando que o mesmo é um marco que inclui diferentes pontos de vista sobre o conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem e tem suas bases estruturadas nos seguintes modelos: um modelo epistemológico sobre a Matemática, baseado em pressupostos antropológicos e socioculaturais; um modelo de cognição matemáticas sobre bases semióticas; um modelo instrucional de base socioconstrutivista e, ainda, um modelo sistêmico-ecológico que relaciona as dimensões anteriores entre si e com fundo biológico, material e sociocultural em que tem lugar a atividade de estudo e comunicação matemática.

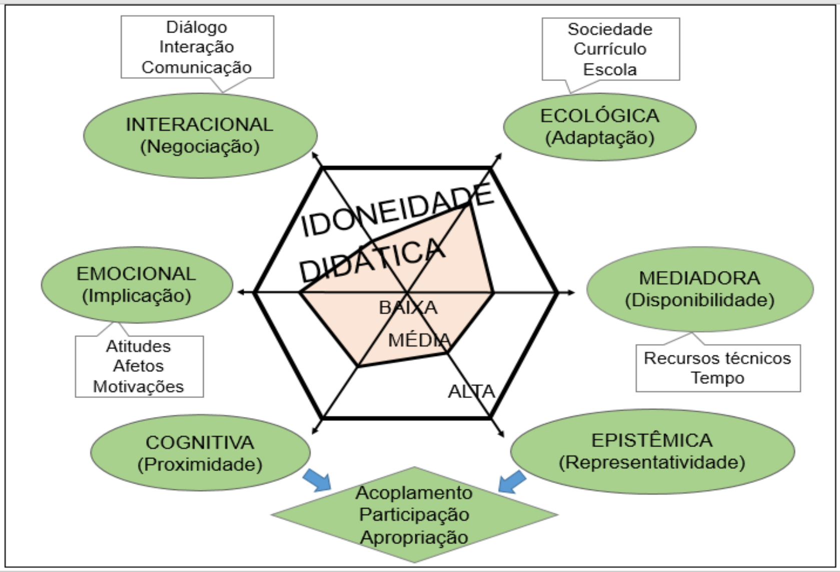
No âmbito do EOS são propostos cinco níveis de análise (sistema de práticas, configuração de objetos e processos matemáticos, trajetórias didáticas, dimensão normativa e idoneidade didática) e seis dimensões (epistêmica, cognitiva, mediacional, interacional, afetiva e ecológica) que podem ser interpretadas como categorias ou componentes do conhecimento do professor (conteúdo matemático e didático), sendo que as dimensões mencionadas podem estar presentes nos distintos níveis de análise (Godino, Font & Wilhelmi, 2007; Godino, 2009; Font, Planas & Godino, 2010).

Segundo Godino, Font & Wilhelmi (2007), enquanto que os quatro primeiros níveis de análise caracterizam-se por serem ferramentas descritiva-explicativas, a idoneidade didática é uma ferramenta de análise e síntese didática que permite emitir um juízo de valor sobre um processo de estudo, o que leva à passagem a uma didática normativa, orientada para a ação na sala de aula.

Godino (2011), aponta que a idoneidade didática de um processo de instrução matemática refere-se à articulação coerente e harmônica de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. Tais dimensões interagem entre si e podem ser percebidas a partir de distintos graus de adequação (alta, média, baixa), o que pode ser visto na Figura 1.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1 - Dimensões da Idoneidade Didática



Fonte: Godino (2011, p.6)

O diagrama destaca as principais características que compõem a idoneidade didática. O hexágono regular representa um processo de estudo pretendido ou planejado, onde se supõe um grau máximo das idoneidades parciais e, o hexágono irregular interno, corresponde as idoneidades efetivamente alcançadas (Godino, 2011). O autor argumenta que a idoneidade didática, é um nível do EOS que se constitui em uma ferramenta própria para análise, reflexão e síntese didática, que possibilita orientar o trabalho docente com relação à Matemática e apontar a melhoria na qualidade das atividades docentes, o que a torna útil, também, na elaboração dos programas de formação de profesores, com o que se concorda.

Particularmente no que se refere a dimensão mediadora, que diz respeito a recursos técnicos e temporais, destaca-se, a visão da importancia dos recursos tecnológicos como mediadores, especialmente recursos tecnológicos digitais. Na educação brasileira a questão do acesso e utilização das tecnologias digitais ainda necesita ser discutida e investigada, sendo que os professores em processo de formação e em atuação tem muito a contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos nesta área.

Por fim, Godino (2009) pondera que, apesar das seis dimensões da idoneidade didática serem, em certa medida, similares às dimensões da proficiência e às dimensões do conhecimento matemático para o ensino (MKT), as noções de configurações de objetos e processos, tanto na versão institucional como pessoal, e a configuração didática,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

proporcionam uma separação operativa de tais dimensões necessária para a organização de processos formativos e sua avaliação (Godino, 2009).

Assim, concordando-se com o autor, aponta-se para a importância de um modelo que envolva ferramentas de análise e reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, que permita a análise e compreensão sistemática, en distintos níveis de profundidade, dos aspectos envolvidos em tais processos. Nesse sentido, entende-se pertinente que este modelo sirva tanto para a elaboração e avaliação de processos formativos, como também seja objeto de aprendizagem de professores e futuros professores de Matemática. Em Godino (2009, 2011) pode ser encontrada uma caracterização detalhada dos níveis e dimensões apresentados, bem como um aprofundamento do modelo do conhecimento didático e matemático dos profesores.

Reflexões em torno da Aprendizagem dos Professores

O modelo dos conhecimentos didáticos e matemáticos do professor apresentado em Godino (2009), e aqui destacado, constitui-se, como já apontado, em um modelo o qual entende-se pertinente de ser de domínio dos professores de Matemática ou que a ensinam. O que se questiona é em quais condições professores já em atuação, ou futuros professores, podem se apropriar do conjunto de noções advindas do EOS de tal modo que possam se utilizar do mesmo para seu trabalho docente.

Sobre essa questão toma-se como referência o que Cochran-Smith e Lytle (1999) apresentam sobre o significado dos professores "saberem mais" e "ensinarem melhor". As autoras discutem sobre a aprendizagem dos professores apontando três diferentes concepções, tomando como base a prática profissional e as relações com os contextos intelectuais, sociais e organizacionais, a saber: conhecimento para prática, conhecimento na prática, conhecimento da prática. No que segue apresenta-se o que as autoras destacam nas três concepções.

Na primeira concepção, designada de "conhecimento para prática", o conhecimento formal e as teorias que os pesquisadores universitários desenvolvem são utilizadas pelos professores das escolas, os quais não são considerados capazes de gerar conhecimentos sobre a rotina de sua prática (Cochran-Smith; Lytle, 1999). Assim, de acordo com as autoras, os pesquisadores acadêmicos teorizam para resolver problemas de ordem didática,

ISBN 978-84-945722-3-4

de gestão da sala, do domínio do conteúdo, do contexto social e cultural da escola. O entendimento de aprendizagem dos professores e futuros professores nesta concepção está atrelada a uma concepção relacionada à ideia de que conhecer mais as teorias educativas, a pedagogia, os conteúdos e as estratégias de ensino conduz diretamente a uma prática mais eficaz, ao que, via de regra, é chamado de conhecimento formal (Cochran-Smith; Lytle, 1999)

A segunda concepção, nomeada de "conhecimento na prática", considera o conhecimento prático, adquirido através da prática educativa, mediada pelo processo reflexivo e investigativo sobre a prática, sendo considerada uma via de aprendizagem nas interações que se estabelecem com os mais experientes e/ou especializados ou nas relações de aprendizagem em sala de aula. Esta visão de aprendizagem, está atrelada à suposição de que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem emerge e é incorporado da prática de professores experientes. Segundo as autoras, essa visão tem seus pressupostos baseados em uma concepção construtivista do conhecimento, e põe em evidencia como os bons professores analisam situações, fazem julgamentos e tomam decisões, como conceituam e descrevem as situações e dilemas pertinentes à sala de aula e como pensam e melhoram sua atuação profissional (Cochran-Smith; Lytle, 1999).

Já a terceira concepção, "conhecimento da prática", destaca que o conhecimento que os professores precisam para ensinar bem é gerado quando os professores tomam suas salas de aula como laboratório e investigam os problemas que surgem, colocando em prática as teorias produzidas por pesquisadores, mas, também, gerando conhecimento. As autoras apontam que, nesta perspectiva, tanto a geração como o uso de conhecimentos são problemáticas inerentes. A tomada de conhecimento é entendida como um ato pedagógico construído no contexto do uso, intimamente ligado ao conhecedor e embora aplicável a situações imediatas, está também relacionado a um processo de teorização, ganhando uma forma conceitual, passando a ser tomado como referência, pelos professores, para teorizar a prática, fazer julgamentos, dirigir seu trabalho para questões não só intelectuais, mas sociais, culturáis e políticas (Cochran-Smith; Lytle, 1999).

Com apoio na terceira concepção, Cochran-Smith e Lytle (1999) elaboraram uma visão da aprendizagem do professor, considerando as conexões que podem existir entre pesquisa, conhecimento e prática docente, apontando para o que denominam de "investigação como

ISBN 978-84-945722-3-4

postura” (*inquiry as stance*). Segundo a concepção de “investigação como postura”, os professores e os futuros professores investigam em comunidades para gerar conhecimento local, investigar sua prática, interpretar e investigar o que os outros estão construindo e serve, também, para compreensão do papel social e político individual e coletivo dos professores.

Por fim, as autoras ponderam que essa terceira visão de aprendizagem ou conhecimento do professor não deve ser tomada como uma síntese das anteriores. Destacam que a mesma é baseada em ideias fundamentalmente diferentes, a de que a prática é mais do que prática, que a investigação é mais do que uma rendição ao conhecimento prático dos professores e que a compreensão das necessidades do ensino transcende a ideia de que a prática abarca todos os tipos de conhecimento. No cenário brasileiro as concepções apresentados em Cochran-Smith e Lytle (1999) têm sido foco de estudos, principalmente pelo grupo de pesquisa liderado por Dario Fiorentini, cujo trabalho é destacado em Fiorentini (2010).

Em busca de uma articulação

Buscou-se, aqui, por uma lado destacar a visão do *conhecimento didático e matemático do professor*, proposto em Godino (2009), a qual apresenta uma categorização que, partindo de uma visão do conhecimento matemático defendida no âmbito do EOS, propone níveis e dimensões que devem ser levados em consideração quando se faz referência ao conhecimento matemático e didático que deve ser de domínio dos professores em sua ação docente. Por outro lado, se teve a intenção de refletir como os professores podem se apropriar desses conhecimentos, defendendo-se a visão proposta em Cochran-Smith e Lytle (1999), de que os professores não podem se limitar a serem consumidores e reprodutores de um conhecimento produzido na academia, ou mesmo focar seu trabalho somente em torno de sua prática. Defende-se aqui, concordando com as autoras, que o conhecimento prático deve ir além da prática, que as teorias educativas não devem ser simplesmente consumidas e aplicadas, que a reflexão não fique restrita a um indivíduo, mas sim que o conhecimento e aprendizagem do professor transcenda a estes, de modo que o professor passe a ser, também, um produtor de conhecimentos, a partir de comunidades de investigação e aprendizagem.

ISBN 978-84-945722-3-4

Nesse contexto, procurando responder o questionamento posto sobre as condições para que professores já em atuação, ou futuros professores, possam se apropriar do conjunto de noções advindas do EOS de tal modo que possam se utilizar do mesmo para seu trabalho docente, apontam-se processos formativos que tomem como referência a terceira concepção de aprendizagem dos professores preconizadas por Cochran-Smith e Lytle (1999). Assim, o trabalho formativo a ser desenvolvido deve considerar os professores como produtores de conhecimento, não se tratando apenas de fazer chegar aos mesmos um conhecimento já formalizado.

Destaca-se também a relevância de, nos processos formativos, lançar mão da mediação possibilitada pelas tecnologias digitais, como aponta a dimensão mediacional da idoneidade didática, abrindo espaço para um conhecimento didático matemático e tecnológico a ser produzido por professores em formação e em atuação. Investigações nesse sentido tem sido produzidas, já apresentando resultados promissores como pode ser visto em Lemos e Kaiber (2016) e Soares e Kaiber (2016).

Referências

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education***.** v. 59, n. 5, pp. 389-407. <http://harringtonmath.com/wp-content/ uploads/2013/11/ Content-knowledge-for-teachers.pdf.> /Consultado 15/02/2016

Cochran-Smith, M.; Lytle; S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, USA, n. 24, n. 1, p. 249-305.

Fiorentini, D. (2010).Desenvolvimento profissional e comunidades investigativas. In Dalben, A. et al. (Org.). *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente:* educação ambiental, educação em ciências, educação em espaços não-escolares, educação matemática, pp. 570-590. Belo Horizonte: Ática.

Godino, J. D. (2009). Categorias de Análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática***.** Granada. n. 20. <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino20Union_020%202009.pdf.> Consultado 13/02/2016

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidade didáctica de procesos de ensenanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Internacional de Educação Matemática* (CIAEM – IACME). Recife (Brasil). http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233/Consultado 13/02/2016

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2008). Um Enfoque Onto-Semiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática. *Acta Scientiae.* Universidade Luterana do Brasil, v. 10, n.2, pp.7 – 37.

ISBN 978-84-945722-3-4

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis Didáctico de Procesos de Estudio Matemático Basado en el Enfoque OntoSemiótico. Versión revisada da la Conferencia invitada en el *IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. ULBRA, Brasil. 25 - 27 out.

Hill, H. C.; Ball, D. L.; Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teacher's Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*. v. 39, n. 4, pp. 372-400. http://www.ugr.es/~pflores/2008_9/Master_Conocim/textos%20JP/%5B1%5D_Hill-Ball-Schilling-JRME2008-07.pdf. Consultado 13/02/2016

Lemos, A. V.; Kaiber, C.T. (2016). Reflexões Sobre a Utilização de uma Sequência Didática. *Educação Matemática em Revista-RS*, v. 3, pp. 75-87.

Shulman, L. (1986).Those Who Understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, n.15, pp. 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review***,** n. 57, pp. 1-22.

Soares, M. E. S.; Kaiber, C.T. (2016). Conhecimentos Didático-Matemáticos Mobilizados por Professores dos Anos Iniciais: uma Análise sob a Perspectiva do Enfoque Ontosemiótico. *Revista Acta Scientiae*, v. 2, p. 435-455.

Apoio: FULBRA - Fundação ULBRA

CR-33

FORMACIÓN DE CONJETURAS Y SU VALIDACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Profesor Ángel Homero Flores Samaniego
ahfs@unam.mx

Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM

Modalidad: CR

Nivel educativo: Todos

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Palabras clave: Argumentación matemática, Formación de conjeturas, Esquemas de argumentación, Validación del conocimiento escolar.

Resumen

La creación de conocimiento y su validación es una actividad social que involucra, en primer término, a la comunidad interesada en tal conocimiento. En el caso de la matemática, un cierto conocimiento es validado por la comunidad de matemáticos interesados en él; en su caso, son también los encargados de rechazarlo o de poner en duda su validez.

En este proceso de creación y de validación de conocimiento, la argumentación juega un papel central; entenderemos por argumentación la serie de razonamientos o hechos encaminados a explicar un resultado o con el propósito de persuadir a otros de su validez o de la certeza de una conjetura.

Con respecto a la matemática escolar, ¿cómo se valida el conocimiento matemático que se genera en el aula?, ¿qué papel juega la argumentación matemática en el aprendizaje del estudiante?, ¿qué tipo de argumentación utilizan los estudiantes cuando justifican resultados en resolución de problemas?

En la presente plática se abordarán estos temas y algunos otros relacionados con la formación de conjeturas matemáticas desde la perspectiva de una enseñanza-aprendizaje centrada en el estudiante.

Introducción

Es posible encontrar a la matemática en cualquier actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Así pues, resulta importante desarrollar en los individuos los aspectos básicos de la matemática que permitirán

ISBN 978-84-945722-3-4

desempeñarse satisfactoriamente tanto en contextos académicos y científicos como en sociales y laborales.

Para entender la naturaleza de la matemática y la manera en que se construye el conocimiento matemático, hay que reflexionar sobre la forma en que se genera y se valida el conocimiento matemático, proceso muy parecido al que sigue la validación del conocimiento científico en general.

Básicamente, los resultados que un matemático obtiene de sus investigaciones aparecen, en primer término, como una serie de conjeturas que debe validar. Es muy probable que una conjetura se forme a partir de una serie de hechos aislados, siguiendo un proceso abductivo (Pierce, 2014). Si las evidencias obtenidas convencen al matemático de su plausibilidad (proceso inductivo), es decir, si hay un proceso de auto convencimiento de la veracidad de sus hallazgos, entonces se aventura a buscar una demostración matemática, basada en procesos deductivos. Una vez que tiene la demostración de su conjetura, la somete a la revisión y al escrutinio de sus colegas, dando inicio, así, a un proceso de persuasión sobre su validez. Si los resultados son lo suficientemente interesantes o relevantes para el conocimiento y la teoría matemática, es posible que la revisión de la demostración lógica de la conjetura se haga de tal manera que se dé una serie de pruebas y refutaciones hasta que sea aceptada o rechazada por la comunidad (Lakatos, 1976).

Si la conjetura es aceptada como válida, entonces adquiere el estatus de teorema; si no, la conjetura puede utilizarse con las reservas del caso. En ambos casos, teorema y conjetura, vienen a formar parte del conocimiento matemático.

Lo interesante de este proceso de formación de conjeturas y su validación, es que el pensamiento reflexivo juega un papel importante. Esto es, el investigador, siguiendo más o menos en el mismo orden los pasos lógicos del pensamiento reflexivo definidos por Dewey (1989), percibe que algo puede ser importante; ubica ese algo y lo define o trata de definirlo; sugiere posibles explicaciones en forma de una conjetura; razona de manera lógica sobre la validez de su conjetura; y busca mayores evidencias de ésta, hasta que termina por aceptarla o rechazarla. Ahora bien, este conocimiento se da en el seno de una comunidad, por ello la necesidad de someterlo a su escrutinio; esta misma necesidad de que

ISBN 978-84-945722-3-4

el resultado sea reconocido como válido por la comunidad, hace que el investigador se someta a una serie de reglas establecidas tanto en la disciplina misma como por la comunidad en la que se desenvuelve. En este caso, hablamos del respeto a las reglas matemáticas y la honestidad en los planteamientos.

En una didáctica matemática centrada en el aprendizaje (Juárez, 2015), es posible reproducir en buena medida el proceso de creación de conjeturas y su validación. Esto en un proceso que implica el desarrollo del pensamiento reflexivo por parte del estudiante. En el presente texto haré una reflexión sobre la adquisición de conocimiento matemático en una didáctica centrada en el aprendizaje. La disquisición se hará alrededor de la respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo se valida el conocimiento matemático que se genera en el aula?, ¿qué papel juega la argumentación matemática en el aprendizaje del estudiante?, ¿qué tipo de argumentación utilizan los estudiantes cuando justifican resultados en resolución de problemas?

Matemática, pensamiento matemático y educación matemática

Iniciaré mi reflexión definiendo lo que se entenderá por estos tres términos, fundamentales en nuestro ámbito de conocimiento.

Por matemática me referiré al cuerpo de conocimiento sobre entes abstractos como números, cuerpos geométricos, ecuaciones, etcétera, y las relaciones que tienen entre sí. Como cuerpo de conocimiento, la matemática es única, por tanto, en mi concepción, no hay muchas matemáticas o las matemáticas. La matemática tiene características especiales que hacen que se le pueda utilizar como un lenguaje para comunicar ideas; como una herramienta para resolver problemas de toda índole; como una ciencia que facilita el entendimiento de fenómenos naturales o no; y como una disciplina que se estudia a los entes matemáticos mismos (en este sentido la matemática es una meta-ciencia; SUMEM, 2014).

Hacer matemática implica una forma de razonamiento propia del pensamiento reflexivo definido por Dewey (1989) como una concatenación de ideas de las cuales una es conclusión lógica de la anterior. Por tanto, por pensamiento matemático se entenderá como el pensamiento reflexivo aplicado a la resolución de problemas matemáticos y a la

ISBN 978-84-945722-3-4

validación de conjeturas nacidas durante el proceso de hacer matemática. Por consiguiente, en mi concepción no existen conceptos tales como pensamiento algebraico, geométrico o variacional. En todo caso serían manifestaciones del pensamiento matemático cuando se abordan problemas o se hace investigación en alguna de las ramas en que la matemática se ha dividido para su estudio.

Finalmente, la educación matemática es el bagaje de conocimientos matemáticos que posee un individuo y el uso más o menos efectivo que hace de él en situaciones cotidianas o escolares. Por tanto, la didáctica matemática se encargará de propiciar y mejorar la educación matemática de nuestros estudiantes, es decir, su conocimiento matemático y sus aplicaciones.

Ahora bien, la didáctica como parte de la pedagogía que se encarga de la metodología de los procesos de aprendizaje puede estar centrada en la enseñanza o en el aprendizaje. Si la centramos en la enseñanza, entonces el profesor adquiere un papel relevante como diseñador y administrador del proceso y el estudiante es el recipiente del conocimiento que se le quiere enseñar. Éste es el enfoque que tradicionalmente ha tenido la docencia; el profesor enseña el cúmulo de conocimientos y procesos que quiere que sus estudiantes aprendan, pero no siempre tiene control sobre lo que realmente el estudiante ha aprendido y el instrumento por excelencia para medir ese conocimiento, el examen, no siempre arroja resultados realistas. La otra posibilidad, una didáctica centrada en el aprendizaje, toma en cuenta las maneras en que los estudiantes pueden aprender mejor los conceptos y los procedimientos, y le da un papel protagónico en la construcción del conocimiento. Mucha veces el aula se convierte en una comunidad de aprendizaje en la que todos sus integrantes tienen un objetivo común: el aprendizaje del conocimiento necesario para desempeñarse eficientemente dentro y fuera de la comunidad.

En este tipo de ambiente es el estudiante quien tiene que validar el conocimiento que ha adquirido, y el proceso de validación puede ser muy parecido al que sigue un científico cuando intenta validar los resultados de sus investigaciones. En el caso del aprendizaje de la matemática, se trata de validar conjeturas haciendo uso de la teoría que ya se conoce, usando su pensamiento reflexivo y sus esquemas de argumentación; es decir, su capacidad de persuasión.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El papel de la argumentación matemática en el aprendizaje

Si el aprendizaje es el proceso de adquisición de un conocimiento, ¿cómo saber si uno a adquirido un cierto conocimiento? En el ámbito escolar ¿cómo sabe el profesor que uno de sus estudiantes a aprendido?

Es posible detectar que un estudiante a aprendido un concepto por la manera en que lo usa y por la forma en que habla de él. Es decir, la acción y el discurso son factores que dan fe de la efectividad del aprendizaje.

Cuando la didáctica está centrada en el aprendizaje del estudiante, és este quien debe persuadir al profesor y a sus compañeros que ha aprendido el conocimiento pretendido. Debe argumentar a favor de ese aprendizaje. En matemática, la argumentación implica un razonamiento lógico que persuada al interlocuror de que el conocimiento adquirido es válido. En la mayoría de las veces, un argumento, o parte de él, se fundamenta con la manipulación de los objetos matemáticos. Es decir, en matemática, la argumentación implica tanto el discurso como la acción.

A manera de ejemplo hablaré de una situación que se dio en uno de mis grupos de matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades, nivel pre universitario. A la sazón estábamos haciendo ejercicios y exploraciones con un software de geometría dinámica. La consigna pedía explícitamente que se explicaran los resultados sin recurrir a las herramientas de medición del software.

En específico, en el ejercicio en cuestión se pide a los estudiantes que construyan un cuadrado y sus diagonales. La pregunta es, ¿cómo son los triángulos que se forman entre sí? Explica tu respuesta.

Una de las parejas construyó el cuadrado y sus diagonales y el círculo con centro en la intersección de las diagonales que pasa por uno de los vértices del cuadrado.

La argumentación que dieron para concluir que los triángulos internos son congruentes fue en los siguientes términos:

El cuadrado tiene sus cuatro lados congruentes, por tanto los triángulos tienen

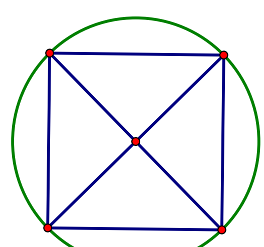


Figura 1. Cuadrado y sus diagonales. Fuente propia.

ISBN 978-84-945722-3-4

un lado con la misma longitud. Si trazamos una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y que pase por uno de los vértices, nos damos cuenta que pasa también por los otros vértices. Entonces los otros lados de los triángulos son congruentes entre sí porque son radios del mismo círculo y deben ser iguales. Los triángulos son congruentes.

El análisis de la situación se puede hacer con respecto a la argumentación misma y con respecto a la interacción entre los estudiantes: me centraré en la primera:

Los estudiantes construyeron el cuadrado trazando primero un lado y rotándolo después dos veces usando un ángulo recto. Es decir, los estudiantes conocían la definición de cuadrado y sabían cómo manipular el software. También usaron su conocimiento sobre círculos y circunferencias para inferir que los lados del triángulo son congruentes entre sí. Los estudiantes actuaban sobre los objetos matemáticos al tiempo que iban construyendo su argumentación: discurso y acción.

Es posible que la formación de sus argumentos haya seguido un proceso de pensamiento reflexivo, más o menos en los términos siguientes:

a) Después de construir el cuadrado y sus diagonales, observaron que los triángulos parecían ser congruentes. Esto da lugar a un razonamiento de tipo abductivo: si los triángulos fueran congruentes, entonces medirían lo mismo. Su conjetura fue comprobada midiendo: esta comprobación obedece a un razonamiento inductivo.
b) Lo anterior los convenció de que su conjetura (los triángulos son congruentes entre sí) es verdadera. Pero como no podían medir para justificarla, tenían que buscar otra manera de hacerlo. Entonces se decidieron por utilizar la definición de cuadrado. Ésta les asegura que al menos los triángulos tienen un lado correspondiente congruente.
c) Ahora el problema es justificar que los lados que faltan también son congruentes entre sí. Aquí se da otro razonamiento de tipo abductivo: si los lados fueran congruentes, entonces una circunferencia con centro en el centro del cuadrado debe pasar por los extremos de los lados, pues serían radios de esa circunferencia. La comprobación de la conjetura se hace de nuevo usando un razonamiento inductivo.

ISBN 978-84-945722-3-4

d) Finalmente, los argumentos anteriores llevan a la pareja de estudiantes a concluir que su conjetura inicial es válida: los triángulos internos formado por las diagonales de un cuadrado son congruentes entre sí.

Idealmente (Peirce, 2014), el proceso hubiera sido primero un razonamiento abductivo que establece una conjetura; después, un procedimiento inductivo para comprobar la conjetura (en nuestro caso sólo era necesario probar una instancia); finalmente, un razonamiento deductivo que estableciera la validez general de la conjetura. En nuestra situación, este último paso no se cumplió, pues los estudiantes mideron los lados con una circunferencia como herramienta (razonamiento inductivo). Esto impidió que hicieran una demostración matemática.

Así pues, ejercicios como éste, de exploración y de justificación de resultados, en cualquiera de las ramas de la matemática (o materias) propician la puesta en marcha de esquemas de argumentación que, a su vez, fomentan el conocimiento matemático.

Aún más, la argumentación puede usarse como una ventana al conocimiento adquirido y una herramienta de evaluación.

Esquemas de argumentación

En la argumentación anterior es posible encontrar dos tipos de esquemas (Flores, 2007), un esquema analítico: *Si los triángulos se forman usando los lados del cuadrado como uno de sus lados, entonces esos lados son congruentes entre sí, puesto el en el cuadrado sus cuatro lados son congruentes.* Y un esquema empírico: *Al trazar la circunferencia, nos damos cuenta de que los cuatro lados son radios de una misma circunferencia.*

En algunas investigaciones hechas en niveles básicos (Santamaría 2013, Bravo 2015), además de los esquemas mencionados se han encontrado otros. Los esquemas de argumentación más utilizados son los siguientes:

- Autoritarios, cuando se apela a una autoridad.
- Fácticos, cuando la justificación es una relación de hechos o pasos que llevan al resultado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Empríricos, cuando se recurre a mediciones, a la simple observación de una figura o a relaciones observables a simple vista.
- Analíticos, cuando la justificación descanza totalmente en razonamientos deductivos.

Las investigaciones hechas y la experiencia nos dicen que los estudiantes pueden pasar de una manera más o menos natural de los esquemas empíricos a los analíticos; estos últimos son la antesala de la demostración matemática.

Así, en una didáctica centrada en el aprendizaje, es posible, mediante el fomento de de esquemas de argumentacón a través de actividades de formación conjeturas y validarlas, que el estudiante adquiera conocimientos matemáticos más sólidos y aumente su capacidad para resolver problemas y argumentar no sólo en el ámbito del aprendizaje de la matemática sino de cualquier materia.

Referencias

Aberdein, A. (2005). The Uses of Argument in Mathematics, OSSA Conference Archives. University of Windsor. Recuperado el 27 de julio de 2016 de http://scholar.uwindsor.ca/ossaarchive/OSSA6/papers/.

Bravo, Y. (2015). *La argumentación de resultados en la resolución de problemas matemáticos.* Trabajo de obtención de grado. Maestría en Educación Básica, Universidad Pedagógica Veracuzana. México.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo, Paidós, Barcelona, España.

Flores, H. (2007). *Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato,*Tesis de doctorado. Cinvestav-IPN.

Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje: apuntes para una pedagogía persuasiva.* México. UPN: Horizontes Educativos.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the logic of mathematical Discovery***.** EUA: Cambridge University Press**.** DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781316286425

ISBN 978-84-945722-3-4

Peirce, C. S. (2014). *Illustrations of the logic of science,* by de Waal, Cornelis, Peirce, Charles Sanders. Open Court.

Santamaría, M. (2013). *La resolución de problemas multiplicativos como estrategia para favorecer la argumentación.* Trabajo de obtención de grado. Maestría en Educación Básica, Universidad Pedagógica Veracuzana. México.

SUMEM. (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* Falconi, M., Flores, A. H., Hernández, M. (eds.) México: UNAM.

APRENDER PARA ENSINAR MATEMÁTICA FORA DA SALA DE AULA

Isabel Vale
isabel.vale@ese.ipvc.pt
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo e CIEC, Portugal

Núcleo temático: Tópico II – La Resolución de Problemas en Matemáticas
Modalidad: CR
Nivel educativo: Formação e atualização de ensino
Palabras clave: Contextos não formais; Trilhos Matemáticos; Resolução e Formulação de Problemas; Formação Inicial de Professores.

Resumen

A sala de aula é apenas uma das "casas" onde a educação tem lugar. O recurso a contextos não formais de ensino, como seja o meio envolvente, constitui-se como um ambiente educativo que pode promover nos alunos atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática. O ensino deve ser enriquecido com tarefas desafiadoras, que conduzam à compreensão de conceitos matemáticos estruturantes, que visem o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como a resolução e a formulação de problemas, e que também incentivem o pensamento criativo. Assim surgem os trilhos, que consistem numa sequência de paragens com tarefas que os alunos têm de resolver, ao longo de um percurso pré-planeado. Os trilhos oferecem experiências de aprendizagem para qualquer conceito do currículo, permitindo criar um espaço informal de aprendizagem. Neste processo, a formação de professores tem um papel determinante, proporcionando aos (futuros) professores as mesmas vivências que se espera venham a propor aos seus próprios alunos. Os trilhos constituem-se com grande potencial para a formulação de problemas por parte dos (futuros) professores e de resolução de problemas para os alunos que vivenciam os trilhos.

Nesta conferência serão apresentadas algumas das potencialidades dos trilhos desenvolvidos no âmbito da formação inicial de professores.

Introdução

Grande parte dos fracassos matemáticos têm origem no ambiente afetivo que se cria e que pode comprometer as expectativas e motivações iniciais dos alunos. (e.g. Hannula, 2004). Nesse sentido, numa tentativa de inverter a situação, e uma vez que os professores têm um papel fundamental no que acontece na sala de aula, a formação de professores deve promover uma nova visão sobre a natureza da matemática e do seu ensino, permitindo que os futuros professores experienciem novas abordagens que se espera que usem com os seus

ISBN 978-84-945722-3-4

próprios alunos. A aprendizagem matemática deve incluir mais do que tarefas rotineiras, deve ser enriquecida com tarefas desafiadoras, como a resolução e a formulação de problemas, que conduzam à compreensão de conceitos matemáticos estruturantes e contribuíram para o desenvolvimento do pensamento criativo. Dentro desta perspetiva surge a aprendizagem fora da sala, recorrendo a contextos não formais, como seja o meio envolvente às escolas, onde privilegiamos os trilhos matemáticos. Por outro lado, os nossos alunos passam largas horas sentados dentro da sala de aula, com todas as implicações que têm, em particular, ao nível da atenção, pelo que é pertinente dar-lhes oportunidades de sair do espaço formal da sala de aula, de se envolverem e de experimentar a matemática à sua volta relacionando-a ou levando-a para a sala de aula. Simultaneamente tem oportunidade de conhecer o património histórico, arquitetónico, cultural e natural das localidades onde se insere a escola. Assim, depois de uma breve contextualização teórica, apresenta-se um estudo baseado num projeto, mais amplo em desenvolvimento, no âmbito da formação de professores e de alunos do ensino básico (3-12 anos), onde se pretende compreender o impacto, ao nível das atitudes e dos conhecimentos em matemática, da realização de tarefas/trilhos no ensino e aprendizagem da matemática, como contextos não formais de ensino e aprendizagem fora da sala de aula.

Aula de matemática - aprender para ensinar

As pessoas presentemente já não são recompensadas apenas por aquilo que sabem - o Google sabe mais cada dia que passa - mas por aquilo que conseguem fazer com o que sabem. Partindo desta ideia a educação hoje tem de fazer muito mais do que apenas transmitir conteúdos, tem de ajudar os alunos: a trabalhar em grupo, para desenvolver as suas capacidades de comunicação e colaboração; a desenvolver as suas habilidades dos para serem criativos, pensar criticamente, resolver problemas e tomar decisões (Schleicher, 2016). Para aprender matemática é necessário compreender conceitos matemáticos, estratégias e procedimentos e utilizá-los para resolver uma diversidade de problemas, simples ou complexos, rotineiros ou não. Deste modo, muita da investigação é orientada para desenvolver capacidades de resolução de problemas nos alunos desde muito cedo, contudo a realidade nas nossas escolas ainda não é a desejada, pelo que temos de procurar novas perspetivas sobre o seu ensino.

ISBN 978-84-945722-3-4

A finalidade básica de uma aula de matemática é que os alunos tenham uma aprendizagem significativa e para a atingir o professor deve promover um ensino eficaz. Este deve envolver os alunos em aprendizagens significativas, através da vivência de experiências individuais e colaborativas, que promovam as suas capacidades de dar sentido às ideias matemáticas. Ou seja, deve envolver-se os alunos na resolução e na discussão de tarefas que desenvolvam o raciocínio matemático e a resolução de problemas, que tenham múltiplas abordagens e diversas estratégias de resolução (NCTM, 2014). A aprendizagem da matemática depende fundamentalmente do que acontece dentro da sala de aula, i.e., como os professores e alunos interagem ao longo do currículo. Espera-se que os professores coloquem tarefas que envolvam e estimulem os alunos a estabelecer conexões matemáticas, e analisem as aprendizagens dos alunos a partir das tarefas utilizadas de modo a tomar decisões ao longo da sua aprendizagem. Assim, sendo os professores os principais agentes de mudança, é importante que desenvolvam determinado tipo de capacidades, nomeadamente criativas, baseadas em conhecimentos matemáticos e didáticos sólidos, que lhes permitam construir ou adaptar e explorar boas tarefas matemáticas, pois o que os alunos aprendem é largamente influenciado pelas tarefas que lhes são dadas (e.g. Smith & Stein, 2011). Assim o NCTM (2014) destaca três aspetos essenciais sobre a utilização das tarefas matemáticas: (1) nem todas as tarefas oferecem as mesmas oportunidade para as aprendizagens dos alunos; (2) a aprendizagem é maior quando as tarefas, encorajam de maneira consistente, o pensamento e o raciocínio de nível elevado, mas é menor se as tarefas são habitualmente rotineiras e procedimentais; e (3) as tarefas que implicam grande exigência cognitiva são as mais complicadas de implementar de forma correta, e, muitas vezes, convertem-se noutras, de menor exigência, durante a sua utilização no ensino. Por outro lado, os professores devem incorporar elementos relacionados com os contextos, cultura e linguagem na criação de tarefas, pois o envolvimento dos alunos nas suas resoluções estará mais ligado com o seu sentido de identidade, conduzindo a um aumento do empenho e de motivação. Assim, valorizam-se as tarefas desafiantes pois suscitam curiosidade, requerem imaginação e apelam à criatividade, tornando-se interessantes e agradáveis de resolver, o que só faz sentido num ensino exploratório onde o professor é o orquestrador da atividade na sala de aula (Smith & Stein, 2011). Logo, deve ser dada uma atenção especial à formação de professores, pois deve, em particular, proporcionar

ISBN 978-84-945722-3-4

experiências que permitam aos professores adquirir um conhecimento profundo da matemática a ensinar e como ensinar, pois, só assim poderão estabelecer conexões entre temas, e destes com os alunos, realçando a compreensão concetual e considerando a resolução de problemas como aspeto fulcral no ensino da matemática. Neste sentido é fundamental que os (futuros) professores durante a exploração de uma tarefa possam tirar proveito de todo o seu potencial e, para isso, precisam de oportunidades para as explorar e resolver da mesma forma que o irão fazer com os seus próprios alunos.

As tarefas centradas na resolução e/ou formulação de problemas podem contribuir para a aquisição de conhecimentos matemáticos, mas também para o desenvolvimento de outras capacidades (e.g. comunicar, raciocinar, argumentar, representar, criticar). A formulação de problemas pode ser uma estratégia poderosa para desenvolver capacidades de resolução de problemas e de ter bons resolvedores de problemas, por outro lado, a formulação de problemas matemáticos é necessária para se ser um bom resolvedor de problemas. Ao aprender com a resolução de problemas, os alunos têm inúmeras oportunidades para estabelecer conexões entre ideias matemáticas e desenvolver a sua compreensão conceptual (Vale, Barbosa & Pimentel, 2015).

O processo de criação (invenção, formulação) de problemas tem sido definido de várias formas, mas, na essência, os autores referem-se quase sempre aos mesmos aspetos. Ou seja, a formulação de problemas implica gerar novos problemas ou reformular um determinado problema, com base no conhecimento e experiência matemática e das interpretações pessoais das situações (e.g. Silver, 1997; Stoyanova, 1998). Brown e Walter (2005) propõem duas estratégias de formulação de problemas que os alunos podem usar. A primeira é *aceitando os dados*, quando os alunos partem de uma situação estática (e.g. expressão, tabela, imagem, frase, cálculo, conjunto de dados) a partir da qual formulam questões de modo a ter um problema, sem mudar a situação de partida. A segunda, *E se em vez de*, consiste em estender uma dada tarefa alterando o que é dado. A partir da informação contida num problema, identifica-se qual é a questão, o que é conhecido, o que é pedido e quais as limitações que a resposta ao problema envolve. Modificando um ou mais destes aspetos ou questões, podem gerar-se novas e mais questões (Vale et al, 2015). Por outro lado, os professores têm um papel crucial no desenvolvimento do potencial criativo dos alunos, proporcionando-lhes experiências de aprendizagem adequadas, como sejam a

ISBN 978-84-945722-3-4

resolução e formulação de problemas (e.g., Freiman et al., 2009; Leikin, 2009; Silver, 1997). Este potencial criativo não se desenvolve apenas dentro da sala de aula, podendo este trabalho ser complementado em outros ambientes educativos, como os contextos de aprendizagem não formais.

A aprender e ensinar fora da sala de aula

Apesar de já haver um corpo de conhecimento substancial sobre a resolução de problemas, temos de revisitar e atualizar as nossas perspetivas sobre o seu ensino e aprendizagem: de como chegar ao conteúdo matemático de modo mais eficaz e de ter alunos com mais sucesso a resolver problemas. Contudo, aprender a resolver problemas da vida real tem-se revelado uma tarefa mais difícil do que resolver os tradicionais problemas-tipo das aulas e dos livros de texto. Uma aprendizagem eficaz fora da sala de aula mobiliza capacidades de resolução de problemas, cooperação e comunicação interpessoal: todas elas capacidades essenciais para os jovens de hoje. Aprender e ensinar fora da sala de aula tem como finalidade contribuir para o sucesso dos alunos em matemática, através de práticas que favorecem o recurso a contextos fora da sala de aula, e por outro lado, contribui para que os alunos de hoje não passem demasiado tempo sentados. Assim cada aluno deve experimentar o mundo para além da sala de aula como uma parte essencial da aprendizagem e desenvolvimento pessoal, independentemente da sua idade, habilidade ou circunstâncias vivenciando experiências de aprendizagem significativas, pois a sala de aula é apenas uma das casas onde a educação tem lugar (e.g., Kenderov, Rejali, Bartolini, Bussi et al., 2009). Grande parte dos fracassos matemáticos têm origem no ambiente afetivo (e.g. atitudes, conceções, sentimentos) que se cria, e este pode comprometer seriamente as suas expectativas e motivações iniciais, uma vez que esta influência todo o processo de ensino e aprendizagem (e.g. Hannula, 2004). A aprendizagem fora da sala de aula pode promover nos alunos atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática pois permite-lhes compreender a sua aplicabilidade, mas também desenvolver capacidades e conhecimentos matemáticos associados a todos os temas do currículo, ao mesmo tempo que permitem estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e outras áreas disciplinares. Para além de criar uma atmosfera de aventura e exploração; criar oportunidade para a resolução (e formulação) de problemas em contexto real; mobilizar aprendizagens de

ISBN 978-84-945722-3-4

dentro para fora da sala de aula e vice-versa; facilitar a aprendizagem experimental; constrói pontes entre a teoria e a realidade r as escolas e as comunidades. Dentro das várias possibilidades de aprendizagem em contextos fora de sala de aula privilegiamos os trilhos matemáticos, considerados como uma sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planeado, (com início e fim), constituído por um conjunto de postos nos quais os alunos resolvem tarefas matemáticas no ambiente que os rodeia (Cross, 1997; Vale et al, 2015). Deste modo os contextos fora da sala de aula podem constituir um espaço informal de aprendizagem matemática mais motivador, onde os alunos tenham oportunidade de resolver problemas, estabelecer conexões, comunicar e aplicar conhecimentos e capacidades num contexto significativo.

O estudo e alguns resultados

De acordo com os objetivos atrás referidos, no âmbito deste projeto realizou-se um estudo exploratório de natureza qualitativa e interpretativa (Denzin & Lincoln, 2000) cujos participantes são futuros professores de matemática do ensino básico (3-12 anos). A recolha de dados recorre a documentos, sobretudo as produções dos futuros professores - tarefas/trilhos, observações, questionários e entrevistas. A análise dos dados é de natureza indutiva com base em categorias de acordo com os objetivos definidos, realizada conjuntamente pelas duas professoras da unidade curricular supracitada, de acordo com alguns critérios como sejam a criatividade, diversidade, natureza e conteúdos matemáticos. Um trabalho que estes alunos, em pares, realizam é a conceção de um Trilho Matemático, que envolve a criação de um conjunto de tarefas sequenciadas e organizadas sob a forma de um percurso/roteiro, previamente definido quer no meio urbano quer no meio escolar, que constitui o trilho e que numa fase final será concretizado com alunos do ensino básico. As várias tarefas, devem ser adequadas ao ensino básico, e que tenham por base elementos característicos do meio (e.g. janelas, edifícios, monumentos, espaços verdes, pavimentos). Deste modo, para poderem resolver algumas das tarefas dos trilhos, os alunos necessitam recolher informação *in loco*; no entanto, isto não acontece necessariamente com todas as tarefas dos trilhos: noutras tarefas, a informação necessária para a sua resolução, que deve estar em estreita relação com os elementos do meio considerados no design da tarefa, já se

ISBN 978-84-945722-3-4

encontra disponível no enunciado da própria tarefa (Barbosa, Vale & Tomás Ferreira, 2015).

A Figura 1 (Anexo) ilustra quatro exemplos de tarefas construídas pelos alunos, futuros professores do ensino básico – as duas primeiras num contexto urbano e as duas últimas em contexto escolar (e.g. Castro, 2015; Vale et al, 2015). Muitas das tarefas propostas são questões de conhecimentos de fatos específicas (e.g. "descobre os polígonos que identificas na janela", "Que tipos de triângulos identificas nas marcas do chão") ou de problemas rotineiros (e.g. que envolvem perímetros, áreas, ...), onde a única diferença para as tarefas de sala de aula, é serem realizadas fora da sala de aula e onde os alunos têm de eventualmente efetuar medições necessárias para responder às questões, como ilustra a tarefa, 3. Contudo também surgiram tarefas matematicamente mais interessantes que foram ao encontro do espírito dos trilhos matemáticos (e.g. tarefas 1,2,4). A apresentação do trilho ficou ao critério de cada grupo, o que faz com que surjam formatos bastante diferentes que variam entre mapas e panfletos e com o apoio de material, como mostra a Figura 2. (Anexo). As Figuras 3 e 4 (Anexo) ilustram os alunos do ensino básico, supervisionados pelos futuros professores a realizar um trilho em dois contextos diferentes um no meio escolar e outro um meio urbano.

A partir dos dados dos questionários, podemos constatar que a construção de trilhos matemáticos permitiu aos futuros professores perspetivarem a matemática e a sua aprendizagem de uma forma mais dinâmica e motivadora em relação às suas próprias experiências como alunos: "Nunca tinha tido a ideia ou sequer pensado que a matemática podia ser tão aplicável ao meio que nos rodeia". Além disso, "Os trilhos obrigaram-nos a pensar na matemática de uma forma menos formal e mais criativa". Os futuros professores tornaram-se gradualmente mais conscientes e mais atentos à matemática que os rodeia, tendo servido para que desenvolvessem o seu *olho matemático*, tecendo comentários como "nunca olharei da mesma maneira para uma janela ou para um pavimento" ou até mesmo "gostaria de ter aprendido este tipo de matemática" (Barbosa et al, 2015).

Considerações Finais

O trabalho que temos vindo a desenvolver, no âmbito da formação inicial de professores, indica que trabalhar a matemática noutros contextos fora da sala de aula têm sido

ISBN 978-84-945722-3-4

gratificante, pois os futuros professores ficam motivados para darem corpo a uma proposta exigente que é construir tarefas matemáticas baseadas no meio ambiente, que lhes era desconhecida até então. Assim, pelos relatos destes alunos podemos afirmar que este trabalho contribuiu para que os nossos futuros professores evidenciassem uma atitude mais positiva em relação à matemática e para que adquirissem uma visão mais ampla das possíveis conexões que podem ser estabelecidas entre a matemática e o mundo que nos rodeia. Os trilhos construídos constituíram um modo de conhecer melhor o meio envolvente, quer dentro dos espaços escolares quer na vila ou cidade, analisando-a através de um "olho matemático", mas também para conhecer um pouco mais da sua história e arquitetura. (Vale et al, 2015). A concepção das tarefas não foi um processo fácil, a diferentes níveis, nomeadamente do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos envolvidos, quer do grau de desafio e exigência, quer também da diversidade na tipologia das tarefas. A estratégia de formulação de problemas mais utilizadas pelos alunos foi *E se em vez de* (Brown & Walter, 2005). Globalmente, os alunos identificaram os conceitos matemáticos mais óbvios aquando da formulação dos problemas, estando principalmente relacionados com a geometria elementar. Ao contrário do que se pretende com um trilho matemático foram incluídas algumas tarefas para as quais o contexto real serviu, supostamente de base à criação da tarefa, se revelou irrelevante, i.e., não era preciso estar no local para resolver a tarefa, ou mesmo irrealista. A experiência realizada mostrou-se com potencialidades para os futuros professores, em particular, no trabalho com a formulação de problemas em associação com a reflexão sobre diferentes tipos de tarefas matemáticas e sobre o papel dos contextos, assim como no trabalho com a criatividade, i.e., quer quando as formulam quer no potencial que estas têm para potenciar nos alunos do ensino básico o desenvolvimento da sua criatividade matemática (Barbosa et al, 2015).

Referências bibliográficas

Barbosa, A., Vale, I. & Tomás Ferreira, R. (2015). Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade dos futuros professores. *Educação & Matemática*, *135*, 57-64

Brown, S. & Walter, M. (2005). The art of problem posing. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Castro, L. (2015). Trilho matemático: uma experiência fora da sala de aula com uma turma do 5º ano de escolaridade. *Relatório de Mestrado 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. IPVC-Escola Superior de Educação.

ISBN 978-84-945722-3-4

Cross, R. (1997). Developing Maths Trails. *Mathematics Teaching*, *158*, 38–39.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (2000). Handbook of Qualitative Research. Newbury Park: Sage

Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning*. Turku: Turun Yliopisto.

Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom—Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – New ICMI Study Series 12*, (pp. 53-96). Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles To Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.

Schleicher, A. (2016), *Teaching Excellence through Professional Learning and Policy Reform: Lessons from Around the World*, International Summit on the Teaching Profession. Paris: OECD Publishing.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75-80.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University: MASTEC.

Vale, I., Barbosa, A. & Pimentel, T. (2015). Math trails a rich context for problem posing - an experience with pre-service teachers. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *25* (2), 221-227.

ANEXO

Tarefa 1.	**Tarefa 3**
Olha à tua volta e procura o sinal com o nome da rua em que te encontras. Tira uma fotografia.  Se colocares as letras num saco, qual será a letra mais provável que podes tirar? E a menos provável?	Os caixotes do lixo da escola estão bastante degradados, e a direção da escola decidiu pintar todo o ferro vermelho de azul.  1.Calcula um valor aproximado da área de ferro a pintar. 2. Sabe-se que há 3 latas de tinta azul que dá para pintar 3 metros quadrados e a escola dispõem de 12 caixotes do lixo deste tipo. Verifica e as três latas de tinta serão suficientes para pintar todos os caixotes. Justifica**.**

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Tarefa 2	**Tarefa 4**
 Vai até à Praça da República. Lá, vais encontrar um chafariz. 1. Sabendo que a menina que está na borda do chafariz mede 1,55m, faz uma estimativa da altura do chafariz. 2. Como poderias medir o perímetro do chafariz. Explica.	Todos estes postos são cubos, nos quais as faces estão representadas 5 ninhos de quadrados pintados alternadamente.  1. Imagina que tinhas um cubo com 50 ninhos de quadrados, de que cor seria o 17ª quadrado? 2. A escola vai transformar estes postos em floreiras. Cada posto terá 8 pés de rosas e 8 pés de lírios. Desenha no teu bloco vários modos de dispor as flores, de acordo com um padrão e sem sobrar nenhuma planta. 3. Gastou-se 75,60 euros em flores para cada posto. Se cada rosa custa 3,50 euros e cada lírio custa mais 70 cêntimos, calcula quantos pés de cada flor terá cada floreira.

Figura 1. Exemplos de tarefas dos trilhos

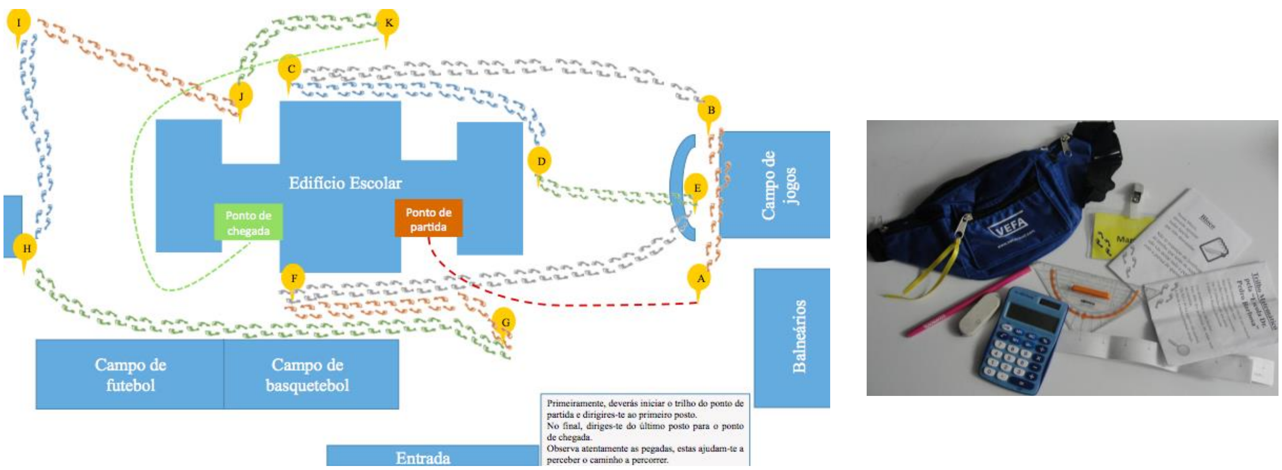


Figura 2. Material de apoio ao trilho

VIII CONGRES… O DE ACTAS.
ISBN 978-84-9…

Figura 3. Alunos concretizando um trilho no meio escolar

Figura 4. Alunos concretizando um trilho no meio urbano

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-67

UMA ABORDAGEM DISCURSIVA PARA A MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Jonei Cerqueira Barbosa
jonei.cerqueira@ufba.br
Universidade Federal da Bahia, Brasil

Núcleo temático: IV – Formación del professorado en Matemáticas
Modalidad: CP/CR
Nivel educativo: Formação do Professorado em particular
Palabras clave: Professores, Formação, Ensino, Discurso

Resumo

Nas últimas décadas, estabeleceu um reconhecimento da especificidade da matemática mobilizada pelos professores nas suas tarefas de ensino, o que foi associado ao que se convencionou chamar de "conhecimento matemático para o ensino" ou simplesmente "matemática para o ensino". Pode-se identificar uma forte componente cognitivista no debate sobre o tema. Em contraposição, apresento uma abordagem discursiva para a matemática para o ensino, caracterizando-a em termos da heterogeneidade de formas de realização de um conceito matemático. Para organização sistemática, sustento a viabilidade da construção de um modelo teórico da matemática para o ensino de um determinado conceito matemático, com o propósito de oferecer quadros analíticos, bem como subsidiar práticas profissionais. Utilizando-me do estudo do conceito, proposto por B. Davis e M. Renert, mostro metodologicamente como a diversidade de formas de realizar um conceito matemático pode ser organizado em panoramas e implicações.

Introdução

Antes de mais nada, devo assinalar que o presente texto é uma síntese, devido às limitações de espaço, de uma perspectiva teórica para a *matemática para o ensino*, tradução livre de *mathematics for teaching*. Por esta razão, muitas ideias são mencionadas resumidamente, de modo que sugiro ao/à leitor/a consultar as fontes mencionadas, caso deseje aprofundar.

Inicialmente, remeto-me ao trabalho clássico de Shulman (1986), o qual sugere que o ensino desenvolvido pelo professor possui uma base profissional muito específica. Este entendimento teve repercussões teóricas na Educação Matemática sobre a forma de compreender as ações dos professores no ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Para citar apenas um dos desenvolvimentos que nos interessa aqui, menciono a noção de *conhecimento matemático para o ensino* - tradução livre de *mathematical knowledge for teaching* - tal como apresentado por Ball, Thames e Phelps (2008), para denominar o

ISBN 978-84-945722-3-4

conhecimento da matemática necessário para o desenvolvimento do ensino. Ribeiro (2012), por exemplo, argumenta que a noção de conhecimento matemático para o ensino possui a potencialidade de mobilizar diferentes significados para um conceito matemático.

Adler, Hossain, Stevenson, Clarke, Archer e Grantham (2014), por sua vez, preferem a expressão *matemática para o ensino*, sob a influência da perspectiva sociológica de Basil Bernstein. Com base nesse teórico, Adler et al. (2014) assinalam a natureza controlada, em termos da comunicação pedagógica, sobre o que é considerado legítimo na identificação da matemática para o ensino.

Como sugerido por Davis e Renert (2014), a própria noção de conhecimento matemático para o ensino está assentada no pressuposto de que o indivíduo é o *locus* de um tal "conhecimento". Corroborando os autores, sustento aqui que a noção de conhecimento matemático para o ensino traz uma compreensão excessivamente focalizada no indivíduo, o que colide com perspectivas que não separam as pessoas do contexto social em que participam. Se, por exemplo, tomarmos a teoria de Basil Bernstein, citada por Adler et al. (2014), a comunicação legítima somente pode ser entendida à luz dos princípios que regulam a prática pedagógica. Harré e Tissaw (2005), com base em L. Wittgenstein, apontam que os significados das palavras estão atrelados às diferentes formas compartilhadas de organizar nossas experiências, as quais são nomeadas pelo filósofo como formas de vida.

Se considerarmos as perspectivas sócio-discursivas, tais como as mencionadas acima, decorre a necessidade de redefinirmos a noção de matemática para o ensino. Tomemos aqui duas questões orientadoras. A primeira é apresentada por Harré e Tissaw (2005), como decorrência da obra Investigações Filosóficas de L. Wittgenstein: como reescrevemos nossos conceitos se abolirmos a separação teórica entre instância interna (cognição) e instância externa (situação social) ao focalizar os indivíduos? A segunda questão é apresentada por Bernstein (2000): de que maneira formas de poder e controle se convertem em princípios para a comunicação pedagógica considerada como legítima?

Orientado por ambas questões, movo-me, neste artigo, a apresentar uma perspectiva sócio-discursiva sobre a noção de matemática para o ensino que traga visibilidade sobre suas formas de controle. Por perspectiva discursiva, entendo aquela que concebe o fenômeno como de natureza comunicacional. Por assim dizer, a comunicação não é reflexo, retrato, de

ISBN 978-84-945722-3-4

nada; é ela mesmo o objeto. Já por formas de controle, refiro-me aos princípios que regularam o que é mais ou menos legítimo ou ilegítimo comunicar em cada contexto, neste caso, o contexto pedagógico. Desta forma, espero agregar novas teorizações à agenda de pesquisa denominada genericamente como *matemática para o ensino*. No presente texto, apresento uma síntese de desenvolvimentos já realizados em estudos conduzidos com colegas do grupo de pesquisa que coordeno (Coutinho & Barbosa, 2016; Santos & Barbosa, 2016).

Inicialmente, caracterizo matemática escolar como uma prática pedagógica da qual participam professores e alunos. Defino *matemática no ensino* como a forma pela qual os professores comunicam os conceitos na interação pedagógica. A seguir, *matemática para o ensino*, por sua vez, é entendida como qualquer *re-presentação* da *matemática no ensino*. E, por fim, destaco a possibilidade da matemática para o ensino ser apresentada como um modelo teórico.

Matemática escolar e a matemática no ensino

Podemos falar em diferentes matemáticas (sim, no plural!) (Knijnik, 2014). Em outras palavras, há diferentes práticas que reconhecemos como matemáticas. Esta ideia não é nova, pois, desde os anos 80, o próprio Programa Etnomatemática relaciona práticas matemáticas a diferentes grupos sociais, de modo que a matemática acadêmica é uma etnomatemática praticada pelo grupo cultural dos matemáticos e a matemática escolar, pelo grupo que habita as instituições escolares.

Inspirado em Bernstein (2000), considero a matemática escolar como uma prática pedagógica, da qual participam, pelo menos, aqueles encarregados de ensinar (professores) e aqueles encarregados de aprender (alunos). Isto não quer dizer que, ao ensinar, o professor não aprende e, ao aprender, o aluno não ensina. A definição acima serve ao propósito de assinalar que, na relação pedagógica, há posições socialmente definidas, de modo que as ações de seus ocupantes são funções das primeiras. Ainda consoante com Bernstein (2000), a matemática escolar não se realiza do mesmo modo em diferentes contextos. Mesmo que possamos encontrar características comuns entre diferentes turmas, escolas e países, ocorrem especificidades sobre como se seleciona, sequencia, avalia, etc.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

É, portanto, na matemática escolar que aqueles que ocupam a posição social de ensinar, os professores, desenvolvem a tarefa de ensino. Segundo Bernstein (2000), todo contexto pedagógico é evocativo sobre os princípios que regulam a comunicação legítima. Assim, ao participar de determina prática de matemática escolar, o/a professor/a reconhece certas regras que orientam sua comunicação na relação pedagógica. Estas são chamadas de regras de reconhecimento (Bernstein, 2000). Delas decorrem as regras sobre como realizar a comunicação legítima, as regras de realização (Bernstein, 2000). A comunicação ocorre por meio de textos, que são entendidos como qualquer comunicação, tal como fala, escrita, gesto, disposição de objetos, etc. Inspirados em L. Wittgesntein, Harre e Tissaw (2005) não separam pensamento e comunicação, de modo que a primeira pode ser vista como uma comunicação consigo mesmo.

A comunicação estabelecida entre professores e alunos é controlada – o que não quer dizer determinada – pelas regras de reconhecimento e realização (Bernstein, 2000). Este *framework* explica, por exemplo, a razão de um mesmo professor estabelecer formas de comunicação distintas em turmas diferentes. No caso da matemática escolar, grande parte da comunicação estabelecida com os alunos dá-se em torno de conceitos matemáticos, entendidos aqui como conjuntos de textos que são associadas ou podem ser associadas às palavras que os designam. Considere, por exemplo, o texto $y = ax + b$. Este pode ser associado ao conceito de função. Porém, dependendo da situação, pode ser associado ao conceito de variável. Ou ainda, pode ser visto como uma simples expressão algébrica. Conforme nos ensina Harré e Tissaw (2005), o significado somente saberemos no uso, pela sua função das palavras ou, como diria Bernstein (2000), em um sentido mais amplo, dos textos.

Ao analisarmos qualquer prática de matemática escolar, podemos identificar a maneira como professor participa dela, ou seja, a forma como comunica e, portanto, como realiza, os conceitos matemáticos. À participação na matemática escolar por quem ocupa a posição social do ensino em termos da comunicação dos conceitos, darei o nome de *matemática no ensino*. Resumidamente, a expressão *matemática escolar* refere-se à prática pedagógica, enquanto *matemática no ensino* à participação do professor na primeira por meio da comunicação dos conceitos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Como a matemática no ensino é dependente das regras que regulam a matemática escolar, por conseguinte, da própria relação pedagógica, é imprevisível sua forma de realização. Podemos tomar a noção de emergência proposta por Davis e Renert (2014), para pontuar o caráter dinâmico, tácito e em desenvolvimento, conforme a situação, da matemática escolar. Pode-se ver isto claramente quando um professor discute a realização de um conceito com um aluno, recorrendo a exemplos e analogias que emergem em resposta à interação comunicativa. Portanto, somente podemos identificar e caracterizar a matemática no ensino na sua própria realização na prática pedagógica; em outras palavras, observando os professores nas interações com os alunos.

A noção de matemática para o ensino

Se *matemática no ensino* refere-se à forma como o professor participa da matemática escolar em termos da comunicação dos conceitos, podemos, agora, chamar de *matemática para o ensino* à *re-presentação* daquela primeira em qualquer espaço social que não seja a prática pedagógica propriamente dita da qual o professor participa como aquele que ensina. Destaco o prefixo "re" no termo *re-presentação*, para denotar que não se trata de um retrato da coisa em si, mas um deslocamento que implica na transformação do conteúdo da comunicação.

Considere, por exemplo, um grupo de professores discutindo, em um curso de formação continuada, as formas de comunicar o conceito de função na educação básica. Podemos esperar que seja operado um deslocamento de textos da matemática escolar para o contexto de formação. Segundo Bernstein (2000), toda vez que textos são deslocados de um contexto para outro, ocorre um processo de seleção e refocalização. Isto ocorre devido ao fato de diferentes contextos pedagógicos serem operados por diferentes princípios. Assim, as discussões produzidas por um grupo de professores se referem à matemática no ensino, mas não revelam sua realização propriamente dita na interação com os alunos, a qual é emergente somente na prática pedagógica.

Recordo uma discussão com um grupo de professores de escolas públicas do estado da Bahia, Brasil. Houve um debate se toda função é definida por lei matemática. Em grande medida, os professores se remetiam aos livros didáticos, utilizados nas aulas, cujos exemplos de funções sempre apresentavam leis matemáticas. A discussão foi acalorada e,

ISBN 978-84-945722-3-4

após revisitar as regras de univalência e dependência nas realizações de função, foi possível que o grupo reformulasse o entendimento anterior. De alguma maneira, portanto, esta discussão se remete ao que ocorre ou pode ocorrer na matemática no ensino. Entretanto, jamais podemos esperar que o debate ocorrido entre os professores desloque-se tal como ocorreu para a sala de aula, de modo que certamente opera-se um processo de seleção e refocalização para a interação com os alunos.

Um outro exemplo de matemática para o ensino é o próprio livro didático, entendido como um texto produzido por um autor ou um conjunto de autores e, portanto, seguindo regras desse grupo social. Nele, encontramos determinadas maneiras de abordar os conceitos matemáticos (seleção, sequenciamento, tipos de atividades, critérios de avaliação, etc.), o que não quer dizer que se realiza tal como previsto pelo autor na aula. Trata-se, portanto, de uma *re-presentação* da matemática no ensino; assim, podemos dizer que os livros didáticos comunicam uma matemática para o ensino de conceitos.

A *matemática para o ensino* pode ser mais ou menos isolada da *matemática no ensino*. O termo *isolamento* é uma tradução livre para o português de *insulation*, que significa o grau de diferença entre, no caso, práticas discursivas (Bernstein, 2000). Uma questão de análise que se levanta é como uma determinada matemática para o ensino está isolada de uma matemática no ensino. Uma outra problemática que se levanta é que formas de matemática para o ensino possui o potencial de subsidiar a matemática no ensino.

Davis e Renert (2014) têm utilizado a estratégia chamada de estudo do conceito, como uma forma de trabalho com professores. Trata-se de discussões, em torno de um determinado conceito matemático, que buscam organizar suas *realizações* em categorias mais amplas chamadas de *panoramas*, bem como identificar as *implicações* de cada panorama. Além disto, os autores preveem a combinações entre diferentes panoramas, o que foi nomeado de *combinações*. Conforme Davis e Renert (2014) mostram, estas quatro ênfases – realizações, panoramas, implicações e combinações – tiveram o potencial de reorganizar a matemática para o ensino do conceito de multiplicação compartilhada por um grupo de professores. Usando o estudo do conceito como inspiração, Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015) também mostraram a potencialidade dessa estratégia em um grupo colaborativo de professores discutindo o conceito de número racional. Assim, podemos dizer que há evidências sobre a potencialidade do estudo do conceito como estratégia para reorganizar a

ISBN 978-84-945722-3-4

matemática para o ensino, em um grupo de professores, com vistas a subsidiar a matemática no ensino.

Matemática para o ensino como um modelo teórico

Uma das possibilidades da matemática para o ensino de um conceito matemático se apresentar é através de uma descrição sistemática, estruturada e rigorosa das formas de comunicar/realizar. Trata-se, assim, de aplicarmos parâmetros de cientificidade para produzir e apresentar uma matemática para o ensino. Neste caso, esta cumpre o papel de um modelo teórico, ou seja, *re-presenta* de modo estruturado e analítico a matemática no ensino de um conceito matemático.

A matemática no ensino envolve muitos conceitos matemáticos, no sentido que defini acima, ou seja, conjuntos de textos (realizações) que podem ser associadas ao nome que os designa. Analiticamente, pode ser mais útil construir modelos teóricos de matemáticas para o ensino de conceitos que possuem uma grande heterogeneidade nas realizações ou que são estruturantes na matemática escolar, como números, funções, proporcionalidade, área, etc. Santos e Barbosa (2016), por exemplo, escolheu construir um modelo teórico da matemática para o ensino de função, identificando sete categorias de realizações: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. Por usa vez, em Coutinho e Barbosa (2016), é apresentado um modelo teórico da matemática para o ensino de combinação simples, identificando as seguintes categorias de realizações: formalista, instrumental, ilustrativa e comparativo.

Nos estudos de Coutinho e Barbosa (2016) e Santos e Barbosa (2016), o estudo do conceito tal como apresentado por Davis e Renert (2014) foi convertido em uma estrutura analítica para a construção dos modelos teóricos. Partiu-se de fontes diversas, nas quais se encontram diversas realizações do conceito matemático, como revisão de literatura, livros didáticos, documentos curriculares, avaliações em larga escala e/ou discussão de um grupo de professores. A partir de um *corpus* determinado de fontes, que pode ser uma ou uma combinação de alguns tipos, parte-se para a modelagem teórica, ou seja, a construção do modelo teórico, o qual é apresentado em termos de panoramas, implicações e, se for o caso, combinações. Por exemplo, em Santos e Barbosa (2016), o panorama tabular do conceito de função é caracterizado através da disposição dos dados de entradas e os correspondentes

ISBN 978-84-945722-3-4

de saída, em linhas ou colunas. Sobre as vinculações, os autores identificaram que esta realização dá visibilidade às variáveis dependentes e independentes, permite perceber a variação e permite reconhecer relações funcionais proporcionais direta e indireta, mas também pode levar a caracterizar incorretamente o tipo de relação funcional.

O uso de modelos teóricos da matemática para o ensino de conceitos pode ser muito útil para subsidiar ações profissionais, como aquelas relativas à formação de professores, a elaboração de materiais didáticos e a forma como o professor toma parte da prática pedagógica. Além disto, pode servir como estruturas analíticas para pesquisas em focalizem processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Considerações finais

Neste artigo, apresentei uma versão simplificada de uma perspectiva sócio-discursiva sobre matemática para o ensino, que tem orientado pesquisas no grupo de pesquisa que coordeno na Universidade Federal da Bahia, Brasil. Sua gênese deve-se ao desconforto com entendimentos de vieses cognitivistas, as quais tiveram/possuem um papel muito importante na apresentação de novos insights, mas que requerem releituras à luz de perspectivas sócio-discursivas. Como nos ensina Bernstein (2000), as Ciências Humanas constitui-se em campo com estruturas horizontais de conhecimento; ou seja, a emergência de uma perspectiva não substitui outras, mas abre novas possibilidades de compreensão. E esta é minha intenção aqui: agregar novos entendimentos a esta importante agenda de pesquisa, a matemática para o ensino.

Referências bibliográficas:

Adler, J., Hossain, S., Stevenson, M., Clarke, J., Archer, R., & Grantham, B. (2014). Mathematics for teaching and deep subject knowlege: voices of Mathematics Enhancement Course students in England. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 129-148.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity*: theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389–407.

Coutinho, J. L. E. & Barbosa, J. C. (2016). Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. *Educação Matemática Pesquisa (Online)*, 18, 783-808.

ISBN 978-84-945722-3-4

Davis, B. & Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know*: profund understanding of emergent matematics. New York: Routledge.

Harré H. R. & Michael, T. (2005). *Wittgenstein and Psychology*. Basingstoke, UK: Ashgate.

Gelsa, K. (2014). Juegos de lenguaje matemáticos de distintas formas de vida: contribuciones de Wittgenstein y Foucault para pensar la educación matemática. *Educación Matemática*, 25, 146-161.

Rangel, L. G., Giraldo, V. & Maculan Filho, N. (2015). Conhecimento de Matemática para o Ensino: um estudo Colaborativo sobre Números Racionais. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8, 42-70.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e conhecimento matemática para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 26, 535-557.

Santos, G. L. D. & Barbosa, J. C. (2016). Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Unión (San Cristobal de La Laguna)*, 48, 143-167.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.

ISBN 978-84-945722-3-4

PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS COM O GEOGEBRA, DESAFIOS E PROBLEMAS EM ABERTO.

Ana Maria d'Azevedo Breda, José Manuel Dos Santos Dos Santos
Universidade de Aveiro, Instituto GeoGebra Portugal
ambreda@ua.pt, dossantosdossantos@gmail.com

Núcleo temático:
Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Comunicación y divulgación matemática.
Modalidad: Conferência
Nivel educativo: Universitário y Bachillerato
Palabras clave: Geometria esferica, pavimentaciones espaciales, GeoGebra.

Resumen

La teoría de las pavimentaciones esféricas ha sido un campo interesante y fructífero atrayendo, entre otros, varios matemáticos. Es un tópico transversal a varias áreas de la matemática como la geometría, el álgebra, la topología y la teoría de los números, pero también es objeto de interés para otros campos científicos como sean en química, física, arte y arquitectura. En este conferencia, vamos a utilizar GeoGebra para describir algunas pavimentaciones esféricas monohedrales, así como para inferir algunas conjeturas acerca de algunas preguntas abiertas en esta área.

INTRODUÇÃO

A eficiência de arranjos e padrões (empacotamentos, coberturas e pavimentações) têm sido objeto de estudo de muitas e muitas gerações de matemáticos. Na verdade já Euclides e Arquimedes se interessavam por este tipo de questões. As pavimentações esféricas lado a lado por polígonos congruentes (monoédricas) têm sido extensivamente estudadas, estando o caso triangular completamente classificado (Sommerville, 1924; Ueno & Agaoka, 2002).

O nosso objetivo é usar o GeoGebra para gerar e visualizar, numa primeira fase, uma qualquer pavimentação esférica triangular regular, seguindo-se uma outra etapa que é a de considerar um outro tipo de polígono esférico, não necessariamente convexo, para protótipo da pavimentação.

Numa primeiro momento veremos como usar as ferramentas do GeoGebra relacionadas com as transformações geométricas do espaço que preservam a esfera, para obter pavimentações monoédricas da esfera. Iremos também descrever como obtivemos novas ferramentas do GeoGebra para o desenvolvimento da geometria esférica.

PAVIMENTAÇÃO OCTAÉDRICA DA ESFERA NO GEOGEBRA E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ESPAÇO.

Usando parametrizações podemos colorir os oito octantes que correspondem aos oito triângulos esféricos que constituem a pavimentação monoédrica octaédrica da esfera. (veja-se a figura 1). Uma das possibilidades é usar o comando superfície lateral, de várias formas usando oito vezes este comando e colorindo os triângulos esféricos com diferentes cores.

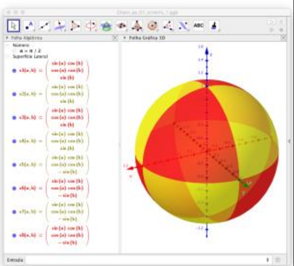
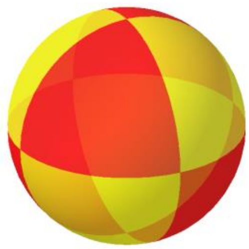
Representação	**Comandos**
	α= π / 2 s1=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, 0, α, b, 0, α] s2=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, π + α, π + 2α, b, 0, α] s3=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, π, π + α, b, 0, α] s4=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, α, π, b, 0, α] s5=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), -sin(b), a, 0, α, b, 0, α] s6=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), -sin(b), a, π + α, 2π, b, 0, α] s7=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), -sin(b), a, π, π + α, b, 0, α] s8=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), -sin(b), a, α, π, b, 0, α]

Figura 1. Pavimentação octaédrica da esfera definida com o comando superfície lateral.

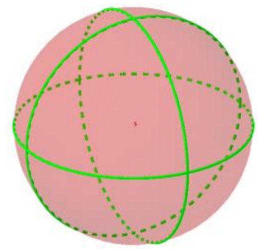
Uma outra forma de construir a aplicação da figura 1 é utilizar isometrias esféricas. Para tal usámos duas cores diferentes para o primeiro e segundo triângulos esféricos e construímos os restantes por rotações e rotoreflexões dos dois triângulos esféricos (figura 2a).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



α= π / 2
s1=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, 0, α, b, 0, α]
s2=SuperfícieLateral[sin(a) cos(b), cos(a) cos(b), sin(b), a, π + α, π + 2α, b, 0, α]
s3=Rotação[s1, 2α, EixoOz]
s4=Rotação[s2, 3α, EixoOz]
s5=Rotação[Reflexão[s1, z=0], α, EixoOz]
s6=Rotação[Reflexão[s2, z=0], α, EixoOz]
s7=Rotação[Reflexão[s1, z=0], 3 α, EixoOz]
s8=Rotação[Reflexão[s2, z=0], 3 α, EixoOz]

Figura 2a - Pavimentação da esfera invariante pelo grupo de rotorreflexão de ângulo π / 2 num equador.



α= π / 2
s=Esfera[(0,0,0),1]
a1=ArcoCircular[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)]
a2=ArcoCircular[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)]
a3=ArcoCircular[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, -1)]
F1={a1,a2,a3}
Arestas=Sequência[Rotação[F1, k α, EixoOz], k, 0, 4]

Figura 2b - Pavimentação da esfera invariante pelo grupo de simetrias do octaedro regular.

Figura 2. Pavimentações octaédricas, semelhanças e diferenças.

Na figura 2b, observamos a esfera dividida por três grandes círculos da esfera. Na geometria esférica estes três círculos correspondem a três retas esféricas que se intersectam segundo ângulos retos. A esfera encontra-se dividida em oito triângulos esféricos congruentes, equiláteros e de ângulos retos. As representações da figura 2 de pavimentações da esfera são distinguíveis pelos seus grupos de simetria. Para estudar as pavimentações da esfera é importante reconhecer alguns elementos da geometria esférica para além de interpretar o efeito das transformações geométricas do espaço que são isometrias da esfera, assunto que abordaremos de seguida de modo sumário.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA E NOVAS FERRAMENTAS NO GEOGEBRA

Na geometria esférica os elementos primitivos "ponto" e "reta" são modelados, respetivamente, por pontos da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e círculos obtidos pela interseção de S com planos que passam por (0,0,0).

ISBN 978-84-945722-3-4

Para obtermos os pontos esféricos podemos usar a ferramenta ponto  e os comandos *A=PontoEm[S]*. Dados dois pontos distintos, não antípodas, *A* e *B*, sobre uma esfera[2], *S*, existe um e um único grande círculo, *r*, que os contêm, no GeoGebra a representação da reta *AB* será dada por:

r=Circunferência[Centro[S],A,Plano[Centro[S],A,B]].

Se quisermos representar o segmento esférico AB a sua representação seria:

AB=ArcoCircular[Centro[S],A,B,Plano[Centro[S],A,B]].

Um polígono esférico corresponde a uma região da superfície esférica delimitada por segmentos esféricos, podendo estes ser côncavos ou convexos.

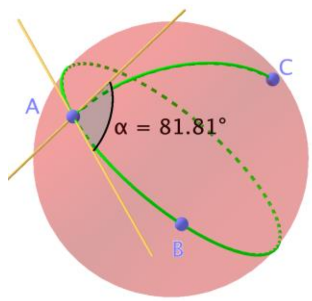


Figura 3. Pontos, retas, segmentos de reta e ângulos em geometria esférica.

Um outro elemento importante na geometria esférica são os ângulos entre segmentos esféricos. Dados três pontos *A*, *B* e *C* sobre a esfera o ângulo *BAC* corresponde ao ângulo formado pela tangentes ao segmento esférico *AB* e ao segmento esférico *AC* no vértice *A*. No caso da aplicação que ilustramos na figura 3, o ângulo foi encontrado usando o comando:

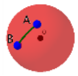
α=Ângulo[Tangente[A,ArcoCircular[Centro[S],A,C,Plano[Centro[S],A,C]]],Tangente[A, Circunferência[Centro[S], A, Plano[Centro[S], A, B]]]] .

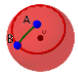
Seguindo esta lógica de construção de objetos criámos uma série de ferramentas no GeoGebra que nos permitem de um modo rápido criar segmentos, medir distâncias e ângulos sobre a esfera de modo a poder construir diferentes configurações para posterior estudo (ver figura 4).

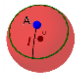
---

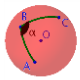
[2] Vamos assumir sem perca de generalidade que a nossa esfera, S, tem raio unitário e é centrada na origem do referencial, no GeoGebra iniciamos as nossas aplicações usando o comando *S=Esfera[(0,0,0),1]*.

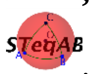
ISBN 978-84-945722-3-4

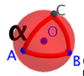
 , **SphereSegment[A, B, O, r]**

 **, SphereEquidistantPoints[A, B, O, r]**

 **, SphereCompass[A, l, O, r]**

 **, SphereSegmentsAngle[A, B, C, O, r]**

 , **STeqAB[A, B, O, r]**

 **STABα[α, A, B, O, r]**
STABαβ[A, B, α,β, O, r]

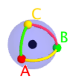
 **STαβγ[P, A, α,β,γ,** O, r**]**

Figura 4. Ferramentas e comandos[3] para a geometria esférica no GeoGebra.

ISOMETRIAS DA ESFERA

As isometrias esféricas são transformações da esfera na esfera que preservam a distância esférica (distância induzida na esfera pela distância euclidiana em $\mathbf{R}^3$).

As isometrias esféricas são rotações em torno de um eixo que passe pelo seu centro (fig. 5a); reflexões em plano que passem pelo seu centro (fig. 5b), composições de uma reflexão num plano que passe pelo seu centro seguida de uma rotação em torno de um eixo perpendicular a este plano que passe pelo centro (fig. 5c) e uma qualquer composição das isometrias já referidas.

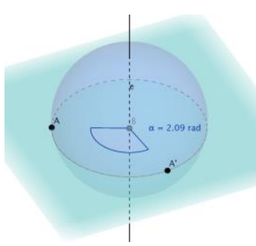


Figura 5a - Rotação

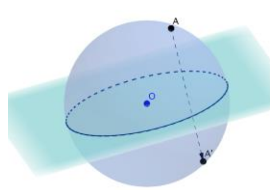


Figura 5b - Reflexão

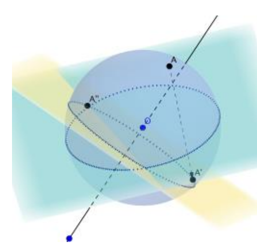


Figura 5c - Rotorreflexão

Figura 5. Isometrias da esfera.

[3] Os comandos foram criados na versão inglesa. Caso estes prototipos passem a versão oficial poderão pasar a figurar em diversos idiomas.

ISBN 978-84-945722-3-4

A imagem *A'*, *B'*, *C'* de *3* pontos esféricos, *A*, *B*, *C* não pertencentes a um mesmo grande círculo determinam univocamente uma isometria esférica, *f*, que satisfaz, *f(A)=A'*, *f(B)=B'*, *f(C)=C'*.

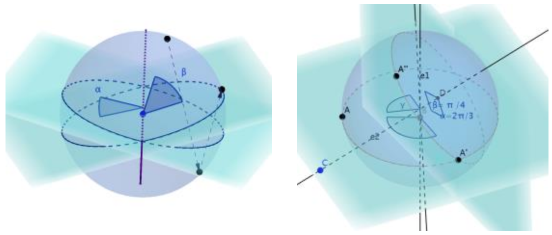


Figura 6. Composição de duas reflexões em planos que passem pelo centro da esfera.

Como podemos observar, na figura 6, a composição de duas reflexões em planos que passem pelo centro da esfera é uma rotação em torno da reta obtida pela interseção dos dois planos de reflexão.

LUGARES GEOMÉTRICOS EM GEOMETRIA ESFÉRICA COM A FERRAMENTA COMPASSO ESFÉRICO

Na geometria euclidiana as construções com régua e compasso desempenham um lugar de destaque. Com a ferramenta compasso esférico podemos explorar na geometria esférica, situações análogas.

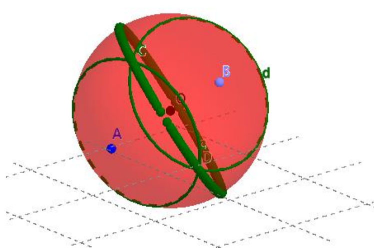


Figura 7a - Mediatriz de um segmento esférico.

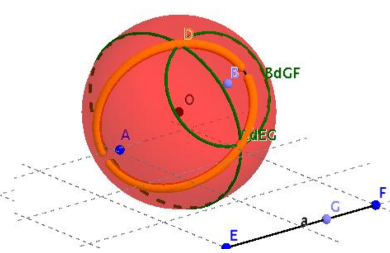


Figura 7b - Elipse esférica.

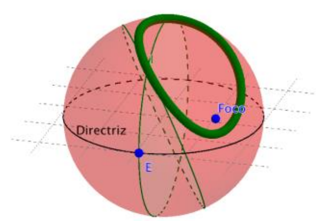


Figura 7c - Parábola esférica.

Figura 7. Aplicações da ferramenta compasso esférico.

Uma das construções mais simples da geometria euclidiana corresponde à mediatriz de um "segmento de reta". Na esfera, de cento *O* e raio *r*, com a ferramenta compasso esférico, podemos fazer o mesmo tipo de construção. Assim, considerando dois pontos *A* e *B* sobre a

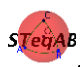
ISBN 978-84-945722-3-4

esfera e dada uma distancia l, a partir de um seletor, definindo o ponto P com o comando *Interceção[SphereCompass[A, l, O, r], SphereCompass[B, l, O, r]]*, P corresponde ao conjunto de todos os pontos esféricos equidistantes de A e de B, que é precisamente o grande círculo perpendicular ao segmento esférico AB (ver a figura 7a) que passa pelo ponto médio de AB.

De modo análogo, dados dois pontos A e B, sobre a esfera, e uma distância adequada l, podemos utilizar a ferramenta compasso esférico para construir o conjunto dos pontos P, sobre a esfera, tais que $d_e(P, A) + d(P, B) = l$. Este conjunto de pontos corresponde à "*elipse esférica*" que se ilustra na figura 7b.

As noções de retas e parábolas (curvas não limitadas no aberto $\mathbf{R}^2$) e a utilização da ferramenta compasso esférico permitem facilmente visualizar as noções equivalentes, no compacto $\mathbf{S}^2$, que correspondem a curvas fechadas sobre a esfera.

DA FERRAMENTA *STeqAB[A, B, O, R]* ÀS PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS REGULARES

Uma das aplicações da ferramenta 

, ou do comando **STeqAB[A, B, O, r]**, é explorar pavimentações esféricas por triângulos equiláteros. Um dos problemas clássicos é a pavimentação da esfera por triângulos congruentes, que se justapõem lado a lado.

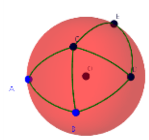
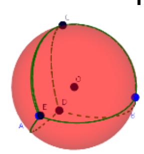
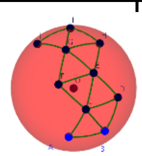
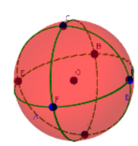
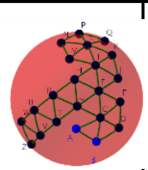
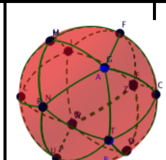
N.º de triângulos equiláteros	Num hemisfério	Comprimento do segmento AB	Fecho sobre a esfera	Comprimento do segmento AB
3		1,05 rad		1,908 rad (v.a.) $arcos(\frac{-1}{3})$ ou $2arctan(\sqrt{2})$ (v.e.)
8		0,64 rad		1,574 rad (v.a.) $\frac{\pi}{2}$ (v.e.)
20		0,40 rad		1,107 rad (v.a.) $2arcsin(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}})$(v.e.)

Figura 8. Configurações de triângulos esféricos congruentes

ISBN 978-84-945722-3-4

De facto diversas destas configurações, num hemisfério, por aumento do comprimento do seu lado, podem originar fechos que originam pavimentações esféricas regulares. A figura 8 ilustra este processo, onde se demonstra a mais-valia da utilização da ferramenta, pois permite uma exploração simples e eficiente das pavimentações esféricas regulares.

PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS COMO AÇÃO GLOBAL OU LOCAL DE GRUPOS DE SIMETRIAS ESFÉRICAS

Nas seções anteriores mostramos como podemos obter pavimentações regulares da esfera, vejam-se as figuras 2b e 8, estas estão relacionadas com poliedros regulares e com os seus grupos de simetria. Nestes casos a partir de um triângulo esférico e pela ação global de um grupo de simetrias podemos obter toda a pavimentação.

Vejamos um outro exemplo de uma ação global de um grupo de simetrias sobre um triângulo esférico e a pavimentação obtida. Consideremos: i) um eixo, e, da esfera S; ii) um ponto A_1, tal que $A_1 \in S$ e $A_1 \notin e$; iii) escolha-se um dos pontos P, tal que $P \in e \cap S$; iv) o ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}, n \in \mathbf{N}$ e $n > 3$; v) seja $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a órbita do ponto A_1 obtida pela ação do grupo das rotações da esfera de ângulo α em torno ao eixo e. Nestas condições, obtemos uma pavimentação da esfera constituída por um *n-gono* esférico e n triângulos esféricos congruentes cujo protótipo é $[A_1A_2P]$. Esta pavimentação é gerada pelo grupo cíclico de ordem n. No caso da figura 9 temos como grupo de simetrias o grupo cíclico de ordem 8, C_8 , sendo a pavimentação esférica constituída por nove polígonos esféricos, um octógono e oito triângulos, esta pavimentação está associada a uma pirâmide octogonal reta.

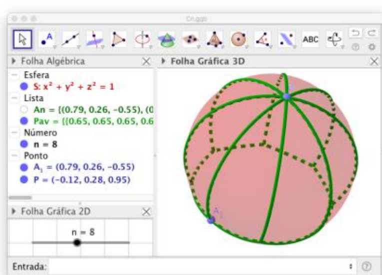


Figura 9. Aplicação de GeoGebra para obter uma pavimentação da esfera invariante por um grupo cíclico de ordem igual ao valor do seletor *n*.

A ideia base para a construção deste tipo de pavimentações é usar o comando sequência para modelar a órbita de pontos. Assim, para modelar a órbita de A_1 usamos uma sequência de comandos com uma sintaxe semelhante a:

An=Sequência[Rotação[A_1, 2π i / n, Reta[Centro[S], P]], i, 0, n, 1]

ISBN 978-84-945722-3-4

Por outro lado, para obtermos os segmentos esféricos, que constituem os lados dos polígonos da pavimentação, usamos a lista:

PAV={Sequência[ArcoCircular[Centro[S], Elemento[An, i], Elemento[An, i + 1]], i, 1, n, 1], Sequência[ArcoCircular[Centro[S], Elemento[An, k], P], k, 1, n, 1]}.

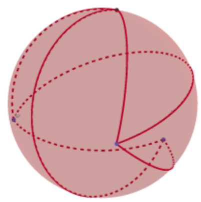


Figura 10a - Pavimentação com 4 triângulos congruentes e não convexos.

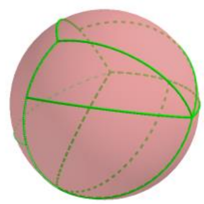


Figura 10b - Pavimentação com 8 triângulos que se agrupam dois a dois.

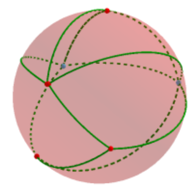


Figura 10c- Pavimentação obtida com a ferramenta STABαβ com seis triângulos, um quadrilátero, e dez ângulos distintos.

Figura 10. Outras Pavimentações esféricas.

Existem muitas outras pavimentações esféricas que podem ser "*encontradas*" pela análise da ação local de (sub)grupos de isometrias esféricas. Estas pavimentações são menos conhecidas e muitas estão ainda por estudar.

As pavimentações por polígonos esféricos não convexos (Fig. 10a) é um dos casos ainda pouco estudados. As pavimentações que podem integrar mais do que um tipo de polígono esféricos (não necessariamente regulares (Fig. 10c) e não necessariamente convexos) é outro caso ainda pouco explorado. As aplicações do GeoGebra, até agora construídas, permitem a visualização e o estabelecimento de relações que, em muito, podem contribuir na investigação nesta área. É nesta grande variedade de configurações/relações, que acreditamos que o GeoGebra pode dar um contributo substancial na descrição e construção de pavimentações esféricas ainda não exploradas, para além de ser um recurso de grande utilidade no estudo da geometria esférica em geral.

AGRADECIMENTOS

Trabalho realizado no campo de ação da Linha Temática Geometrix, com apoio parcial de fundos Portugueses através do CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações, e da Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT), no âmbito do projeto UID/MAT/04106/2013.

REFERÊNCIAS

Sommerville, D. M. Y. (1924). VI.—Division of Space by Congruent Triangles and Tetrahedra. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 43, 85-116.

Ueno, Y., & Agaoka, Y. (2002). Classification of tilings of the 2-dimensional sphere by congruent triangles. Hiroshima Mathematical Journal, 32(3), 463-540.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-103

¡TÓCALA OTRA VEZ, SAM!

José Muñoz Santonja – Antonio Fernández-Aliseda Redondo – Juan Antonio Hans Martín
josemunozsantonja@yahoo.es – aliseda3.0@gmail.com – juanantonio.hans@gmail.com
IES Macarena – IES El Majuelo – CC. Sta. Mª de los Reyes; Sevilla; España

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la educación matemática
Modalidad: CR
Nivel educativo: Secundario
Palabras clave: Matemáticas, música, recursos, divulgación

Resumen

La música y la matemática son hermanas: le ocurre a todos los que tienen el mismo padre, en este caso Pitágoras. Basta comenzar a investigar un poco en música para encontrarnos que las simples notas están relacionadas con las fracciones. Se han hecho muchos estudios para relacionar la composición musical con las matemáticas, pero en esta charla queremos afrontar esa relación desde otro punto de vista. Vamos a realizar un recorrido por la música moderna y veremos de qué formas pueden aparecer las matemáticas: en las letras de las canciones, por ejemplo, en una declaración de amor; en canciones dedicadas a personajes matemáticos, como Fibonacci; o a resultados matemáticos como el Teorema de Pitágoras; se pueden usar también las canciones como regla nemotécnica para recordar las cifras de pi; o para proponer problemas; o enseñar operaciones y multitud de otros aspectos. Algunos de ellos los mostraremos en esta conferencia.

Introducción.

El título de esta conferencia suele relacionarse con la película Casablanca, protagonizada por Humphrey Bogart e Ingrid Bergman, pero los aficionados al cine saben que esa frase nunca se pronuncia en la película. Por eso, esta conferencia no va a ir dedicada al cine, como algunos podían pensar.

Vamos a hablar de la relación de las matemáticas con la música actual. No nos pararemos en los procesos matemáticos profundos que relacionan la matemática con la música, pues hay grandes expertos en el tema que nos ilustran y asombran con sus páginas, por ejemplo en la revista SUMA de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, o en las páginas del portal Divulgamat, en su sección de música y matemáticas.

Nuestra pretensión es mostrar cómo actualmente es posible encontrar matemáticas diversas en las canciones modernas e incidir en cómo esas composiciones se pueden utilizar como recurso didáctico en el aula para presentar conceptos de una forma más lúdica.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Las matemáticas del amor.

Un primer lugar, inesperado, donde podemos hallar matemáticas son las canciones de amor, en las que los sentimientos se mezclan con elementos matemáticos. Lo llamativo es que las encontramos en cantantes sin ninguna relación con las matemáticas, pero que se sienten inspirados por ellas para cantarle a su amor.

Eso ocurre en la canción “Quien te quiera como yo” del grupo formado por el cubano Donato y el colombiano Estéfano, y que podemos escuchar en la siguiente dirección https://www.youtube.com/watch?v=Hzf5I7xVH6s.

Otro ejemplo sería la canción “Geometría polisentimental” del grupo español Fangoria, donde se citan muchos objetos geométricos. Su vídeo oficial lo podemos ver en https://www.youtube.com/watch?v=CnyuKIV8J_M.

Incluso podemos encontrar canciones dedicadas a teoremas matemáticos, como el de Pitágoras, en la canción “Pitagora” original del compositor italiano Adriano Celentano y de la que se realizaron muchas versiones, en particular, en España, por varios grupos de los años 60 del siglo pasado. La original la podemos encontrar en https://www.youtube.com/watch?v=d0lOlFwQgTU.

Imagen 1

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En diversos países iberoamericanos hay canciones con el título de “Amor Matemático” en las que se expresa el amor utilizando conceptos matemáticos. Una de ellas es del grupo colombiano Darwin y la Gente del Yembe, que podemos escuchar en la siguiente dirección https://www.youtube.com/watch?v=T7vfXVe7LqI. Está, también, la canción “Matemáticas” del grupo brasileño Restart que va contando y hablando de operaciones relacionándolas con el amor, con lo que las matemáticas están presentes en toda la canción https://www.youtube.com/watch?v=xCt0VIZKjZk.

También se puede hacer humor cantando elementos matemáticas. Un ejemplo lo muestra el actor y humorista argentino José Carlos Guridi, conocido como Yago, que en el programa *Sin codificar* creó una supuesta banda que cantaba cumbias dedicados a temas diversos, por ejemplo el Papa, la filosofía, la gramática o esta “Cumbia matemática”, https://www.youtube.com/watch?v=nzBkGgP_2i0, con la que podemos mover el esqueleto. Otro ejemplo es el homenaje a la geometría del matemático y pintor italiano del siglo XV Piero della Francesca que le hizo el cantautor español Javier Krahe al dedicarle la canción, que no podía llamarse de otra forma, “Piero della Francesca”, con su introducción aquí https://www.youtube.com/watch?v=uBD3I5BG4cg y la canción en https://www.youtube.com/watch?v=1tzotQRTFpA.

Canto a las matemáticas.

Ya vimos anteriormente la canción de Adriano Celentano donde se enunciaba un teorema básico de la enseñanza secundaria, pero podemos encontrar otras canciones dedicadas a términos y resultados matemáticos. Por ejemplo las dedicadas al número Pi, en muchas de las cuáles se van citando las primeras cifras del desarrollo decimal del número irracional. Una que nos gusta, especialmente por su vídeo de presentación, es “Feliz día Pi” del grupo alemán Paradox y que podemos ver en https://www.youtube.com/watch?v=icrjzF3zl5A.

Entre los aficionados a la música moderna muchas veces se plantea la discusión sobre qué es más importante, si la letra o la música. Pero la cuestión se puede complicar, ¿qué ocurre cuando no hay letra, sino sólo números? ¿Pueden ser los números la letra? ¿Por qué no? El caso de Kate Bush y su canción "π", del disco *Aerial*, es un ejemplo parcial, ya que la canción trata sobre un hombre obsesionado con pi y donde la presencia de cifras decimales del desarrollo de pi no sigue exactamente el orden real de las primeras cifras al faltar

ISBN 978-84-945722-3-4

algunos dígitos. El caso más literal de números formando la letra de una canción lo tenemos en "El Rap de nunca acabar" del grupo español Los Mojinos Escozíos. La canción está dividida en cuatro partes que se van intercalando entre otras canciones del disco *Más de 8 millones de discos vendidos* donde salió publicada. La podemos escuchar en el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=xvH6qR4MIxc.

Parodias matemáticas.

Un amplio conjunto de canciones, que pueden encontrarse en los repositorios de internet, suelen estar dedicadas a parodias de canciones conocidas en las que las letras se han modificado refiriéndolas a las matemáticas. Una de las que más nos gusta es una versión de la canción "Sobreviviré" de Gloria Gaynor de la que podemos disfrutar en la siguiente dirección https://www.youtube.com/watch?v=aXAqGH7VXtU.

Hay otra canción parodiando al grupo Queen en su canción "Rapsodia Bohemia" y que está muy conseguida https://www.youtube.com/watch?v=WlOBtnLMTWM.

Dentro de las múltiples canciones dedicadas al número Pi, para nosotros tiene especial gracia esta versión de la canción "American Pie" de Don McLean en la que se habla de muchas propiedades e historias del número y que es conocida como "Mathematical Pi Song", https://www.youtube.com/watch?v=hJJJmQojcLM.

Si uno viaja por YouTube se puede encontrar multitud de parodias realizadas por alumnos en las que muestran conceptos matemáticos o hablan sobre matemáticas. Muchos de ellos son trabajos para alguna asignatura y, en general, tienen una calidad bastante pobre, sin embargo se pueden encontrar a veces buenos trabajos, como el siguiente que parodia con precisión el vídeo de la canción "Lazy Song" del cantante estadounidense Bruno Mars y con él repasamos los productos notables https://www.youtube.com/watch?v=SxCBCaoKoUQ.

En este bloque queremos incluir unas versiones matemáticas realizadas por los propios autores de las canciones. En el año 2011, una de las cadenas de la televisión en España, la Sexta, presentó un programa llamado "Nada que ganar, mucho que perder" en donde se realizaban varias pruebas. Una de ellas consistía en hacer una operación mentalmente y el enunciado de esa operación compuesta se presentaba en forma de canción. Lo llamativo era que cantantes famosos versionaban sus propias canciones para plantear el problema. En la

ISBN 978-84-945722-3-4

siguiente dirección tenemos una propuesta del cantante catalán Juan Magán, https://www.youtube.com/watch?v=PTiZAUYegJQ.

Lo más curioso es que la banda británica-irlandesa One Direction tiene una canción matemática donde hacen algo similar. Podemos escucharla y verla subtitulada en el siguiente vídeo https://www.youtube.com/watch?v=iU3524jnRX4.

Canciones para aprender matemáticas.

Hemos visto cómo en una de las parodias anteriores se repasaban los tres principales productos notables, pero se pueden encontrar muchos ejemplos de canciones creadas para aprender matemáticas, sobretodo en la escuela infantil y primaria. Canciones que pueden llegar a tener mucho éxito, como ocurrió en España a finales de los años 70 con la pareja española Enrique y Ana y su disco *Multiplica con Enrique y Ana*, con letras escritas por la poetisa española Gloria Fuertes o más tarde con *Miliki y las tablas de multiplicar* que compuso el compositor y payaso sevillano Miliki, es decir Emilio Aragón componente de los famosos Payasos de la Tele. Aquí tenemos una de sus tablas que se presentó en 2005 https://www.youtube.com/watch?v=gFfekeqMrU4.

Hay un compositor muy interesante, Colin Dodds, que se define a sí mismo como un entusiasta de la canción educativa y que tienen multitud de vídeos muy atractivos para enseñar conceptos matemáticos. En el siguiente trata el cálculo de la pendiente de una recta https://www.youtube.com/watch?v=qE463XcV1Ro.

No podemos olvidar la genialidad realizada en 1971 por el grupo argentino Les Luthiers con el Teorema de Thales, ponerle música a todo un teorema: https://www.youtube.com/watch?v=OXrYNPJQoTA.

Vídeos en los que se demuestran teoremas, normalmente el de Pitágoras, hay muchos. Hemos encontrado esta composición de Roberto Rosendo, de quien no hemos conseguido más información aunque creemos que es un compositor brasileño, y que nos presenta una atractiva melodía cantándonos el Teorema de Pitágoras en portugués https://www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w.

Si se quiere ver multitud de canciones para aprender matemáticas se puede consultar la siguiente página en donde se citan muchos álbumes discográficos, de diversos autores, donde aparecen canciones matemáticas. Aunque están en inglés, se puede ser consciente de

ISBN 978-84-945722-3-4

la variedad de opciones que podemos encontrar, por ejemplo, para la enseñanza bilingüe http://www.songsforteaching.com/mathsongs.htm.

Series de números.

A veces nos encontramos canciones compuestas por profesores para presentar conceptos matemáticos curiosos, no propiamente para enseñar matemáticas, tal como hemos visto. Esto suele ser corriente en casos en que se muestran series de números como por ejemplo las cifras del número Pi. En YouTube se pueden encontrar varias composiciones dedicadas a números irracionales. Y aquí tenemos otra dedicada a la proporción áurea, https://www.youtube.com/watch?v=nBgQPSUTWVM, o número de oro.

No podíamos dejar de citar en esta charla a unos de los mejores y más polifacéticos, profesores de matemáticas del mundo iberoamericano. Nos referimos al profesor chileno Danny Perich Campana, ganador de multitud de premios a la excelencia educativa. Sin embargo, para nosotros es reconocido por ser el creador de la imprescindible página Sector Matemática[i] donde se recogen cantidad de recursos matemáticos de todo tipo. El profesor Perich es además un excelente compositor de canciones, algunas de ellas educativas. Como ya hemos hablado mucho de Pi, veamos una dedicada al número e, https://www.youtube.com/watch?v=nd3VLIWCDRA, en donde en una composición para guitarra recita las primeras 159 cifras de su desarrollo decimal.

A veces, nos podemos encontrar melodías creadas directamente con series. Por ejemplo, en el siguiente vídeo https://www.youtube.com/watch?v=LCWglXljevY podemos ver gráficas que representan series numéricas incluidas en la base Enciclopedia Online de Sucesiones Enteras (OEIS, Online Encyclopedia of Integer Sequences en sus iniciales en inglés). En concreto muestra gráficos de los primeros 1000 términos de 1000 sucesiones, con la banda sonora de los *Números de Recamán*, serie creada por el matemático colombiano Bernardo Recamán Santos. Esta sucesión parte del 1 y el término general es $a_n = a_{n-1} - n$ si el valor resultante es positivo y no figura ya en la sucesión, y vale $a_n = a_{n-1} + n$ en caso contrario.

Para terminar podemos escuchar al piano la sucesión de Fibonacci siguiendo las notas las secuencias correspondientes https://www.youtube.com/watch?v=2pbEarwdusc.

Investigaciones matemáticas.

Los últimos vídeos son experimentos matemáticos utilizando series numéricas, pero en este bloque de experimentación con las matemáticas debemos reseñar al ingeniero y compositor

ISBN 978-84-945722-3-4

griego Iannis Xenakis (1922-2001), considerado como uno de los grandes compositores de la música contemporánea. Trabajó en el estudio de arquitectura de Le Corbusier, fue pionero en el uso de la computadora en la composición musical aleatoria para la que propuso el uso de modelos matemáticos, utilizando teoría de probabilidades, de juegos, de grupos y álgebra booleana en sus composiciones. He aquí una de sus obras, “Metástasis”, https://www.youtube.com/watch?v=SZazYFchLRI, compuesta durante 1953 y 1954. Xenakis aplicó la concepción de El Modulor de Le Corbusier: la sucesión de intervalos temperados es una progresión geométrica; las duraciones de las dinámicas y timbres, también lo son.

La experimentación matemática no es algo del siglo XX o XXI, sino que se remonta a siglos atrás. Ya en el XVIII Wolfang Amadeus Mozart compuso la obra titulada “Musikalisches Würfelspiel” (Juego de los dados musicales), que en realidad era una regla para componer valses utilizando el azar. Mozart creó 176 compases que repartió en una tabla donde relacionaba los posibles resultados obtenidos al sumar los valores de lanzar dos dados.

ZAHLENTAFEL.

TABLE de CHIFFRES.

Erster Theil. Premiere Partie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Zweiter Theil. Seconde Partie.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Imagen 2

Con el número del 2 al 12, obtenido al sumar lo que aparecía en los dos dados, se toman los ocho primeros compases, del A al H correspondientes al número aparecido y después hacía lo mismo en la segunda tabla y ya estaba compuesto el vals.

ISBN 978-84-945722-3-4

En internet hay un programa informático que genera aleatoriamente estas composiciones. Veamos una de ellas orquestada, ya que las de Mozart eran sólo para piano, https://www.youtube.com/watch?v=YcQDmxCD-ns.

Portada de discos.

Otro lugar donde encontrar matemáticas es la carátula de los discos, una imagen que generalmente está muy cuidada y que algunas veces presenta formas geométricas, que pueden dar pie a trabajar conceptos matemáticos en clase.

Ya hemos nombrado el disco "Pitagora" de Adriano Celentano. Su portada tiene una particularidad y es que la representación gráfica del teorema no está hecha con cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa, sino sobre rectángulos, suponemos que semejantes: lo que representa uno de los casos de generalización de este teorema.

Por poner solo un par de ejemplos más: podemos encontrar desde muestras de simetrías, hasta permutaciones, como en el disco *Ummagumma* (1969) de Pink Floyd, en el que los componentes cambian entre sí sus puestos en las distintas imágenes que van formando la carátula.

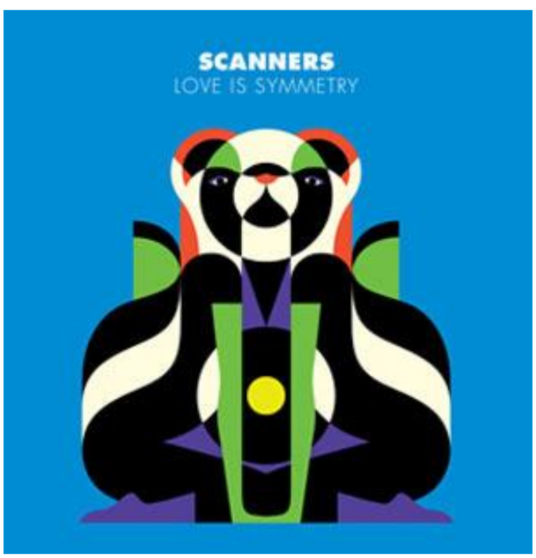


Imagen 3

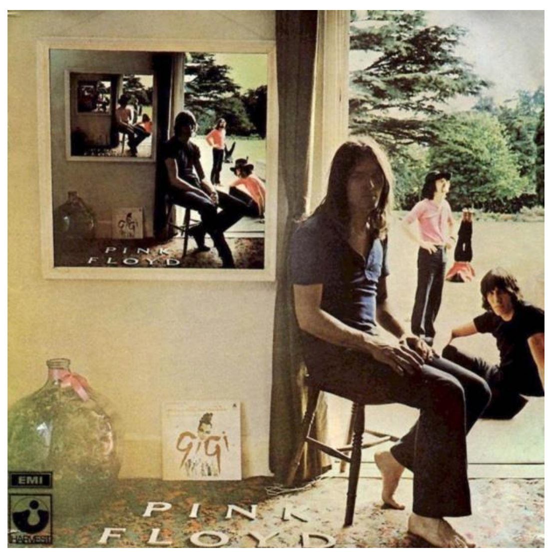


Imagen 4

Esto no es el final.

ISBN 978-84-945722-3-4

La limitación de espacio en estas páginas nos impide desarrollar más cosas que se nos quedan en el tintero y que sin embargo aparecerán en la charla correspondiente.

Por citar algunas de ellas, hablaremos de la danza para mostrar aspectos matemáticos y como realizar una actividad con los alumnos para representar, mediante el baile, funciones de distinto tipo, o de cómo se pueden crear letras de canciones utilizando las matemáticas y una hoja de cálculo, o incluso cómo se pueden crear fórmulas matemáticas para ver si una canción es pegadiza, de esas que se te quedan en la cabeza y no puedes dejar de repetirla.

Como nosotros pertenecemos a Andalucía, no se nos olvidará incluir canciones de nuestra tierra como chirigotas de los carnavales de Cádiz, fandangos de Huelva o sevillanas.

Pero todo eso queda para el espectáculo en riguroso directo.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-114

¿CÓMO HACER LA REVOLUCIÓN EN LAS MATEMÁTICAS DE UN PAÍS LATINOAMERICANO?

Angel Ruiz
ruizz.angel@gmail.com
Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática, Costa Rica

Modalidad: Conferencia regular
Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: currículo, innovación educativa, reforma, Costa Rica

Resumen

En mayo del 2012 Costa Rica aprobó un nuevo currículo de Matemáticas, que empezó a instalarse en el 2013 en un proceso gradual nunca visto en ese país (y en pocos); entre el 2016 y 2017 toda la educación preuniversitaria estará siguiendo este currículo. Se trata de una reforma radical con base en investigación y experiencias en la Educación Matemática internacional y pero tallada a una realidad nacional. Invoca el uso de problemas para desencadenar la construcción de aprendizajes en las lecciones (resolución de problemas), contextos reales (modelación), uso intenso de tecnologías, historia de las matemáticas, actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas. Todos los ingredientes con una receta original. El país ha invertido en creación de recursos y vanguardistas modalidades de capacitación docente (presenciales, bimodales, MOOCs, Mini MOOCs) para apoyar la instalación y también recientemente para la preparación directa de estudiantes en pruebas nacionales. Dos gobiernos de signos políticos contrarios han acuerpado ya esta reforma y en su desarrollo se han involucrado el Estado y el Sector Privado mediante asociaciones empresariales y ONGs. Una experiencia única en América Latina. Una auténtica revolución. ¿Cómo se ha cocinado todo esto? ¿Hasta dónde podrá llegar? ¿Lecciones?

A finales del 2010 el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) abrió una ventana política decisiva: ofreció la oportunidad de diseñar una reforma curricular en las Matemáticas a un colectivo de investigadores de universidades públicas y docentes en servicio de primaria y secundaria. El nuevo currículo fue aprobado oficialmente por el Consejo Superior de Educación de ese país en mayo del 2012, y se está instalando de manera progresiva en las aulas desde el 2013. Esencialmente el mismo grupo humano ha conformado el principal instrumento que se ha dado Costa Rica para implementar este currículo: *Proyecto de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (2012-2019,

ISBN 978-84-945722-3-4

www.reformamatematica.net). Este proyecto contó en una primera etapa (2012-2015) con el apoyo financiero de una ONG: *Fundación para la Cooperación Costa Rica Estados Unidos* (CRUSA, http://www.crusa.cr). Y en una segunda (2016-2019) con el aporte de la *Asociación Empresarial para el Desarrollo* (AED, http://www.aedcr.com) y de la misma CRUSA. Para este segundo periodo, y asegurar compromisos institucionales, se firmó un convenio entre MEP, AED y CRUSA para sostener este proyecto y dar continuidad a la reforma. En las dos etapas el Ministerio de Educación Pública ha aportado una contrapartida importante aunque solamente en términos de logística así como de 4 o 5 docentes en servicio que han laborado directamente en el equipo central de este proyecto.

¿Qué aprobó Costa Rica?

El enfoque principal del nuevo currículo es un estilo de lección que sus autores llaman "Resolución de problemas con énfasis en contextos reales": en esencia una organización precisa de la acción de aula para construir y movilizar aprendizajes por medio de problemas cuidadosamente seleccionados. Su énfasis no es la adición o sustracción de contenidos. Constituye una ruptura con el estilo educativo de enseñanza de las Matemáticas en el que se inicia la lección por medio de teoría, y continúa con ejemplos, práctica rutinaria y en ocasiones un problema desafiante o contextualizado.

Este estilo de lección se fundamenta en varias fuentes teóricas también cultivadas en Costa Rica (Ruiz, 2000, 2011, 2013). Otras ideas incluyen elementos del marco teórico de las pruebas PISA, de la corriente de Educación Matemática Realista fundada por Freudenthal (1973, 1983, 1991), de la experiencia de Japón y otros países asiáticos, así como de la escuela francesa de didáctica de las Matemáticas. En relación con el estilo de la lección que propone el currículo un referente teórico fue un análisis sobre los resultados de tres estudios comparativos internacionales realizados con videos por TIMSS en 1995 y 1999, y desde el 2005 otro encabezado por D. Clarke, C. Keitel, Y. Shimizu, E. Jablonka, J. Emanuelsson y I.A.C. Mok (Ruiz, 2011). Aquí, entre otras experiencias, se sintetizaron resultados sobre las lecciones en Japón.

El nuevo paradigma se ve fortalecido con énfasis curriculares que *declaran explícitamente* y *operacionalizan* la promoción de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas, el uso intenso de tecnologías digitales (aunque de manera gradual y adecuada), y el uso de la historia de las Matemáticas. Se trata de un currículo integrado desde el primer año de la

ISBN 978-84-945722-3-4

Primaria hasta el último de la Secundaria y organizado en cinco áreas matemáticas: Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Algebra, y Estadística y Probabilidad.

El currículo de Matemáticas se separó de los currículos anteriores que estuvieron basados esencialmente en conocimientos y objetivos alrededor de ellos; estos objetivos incluían el desarrollo de habilidades siempre relacionadas con conocimientos específicos. Se propone crear capacidades cognitivas superiores en los estudiantes (competencias transversales) y dominio de capacidades específicas asociadas a conocimientos matemáticos, a través de una mediación pedagógica adecuada donde intervienen tareas matemáticas de complejidad creciente y la realización de actividades transversales (que designan como "procesos matemáticos"). Esta decisión se enmarca en una tendencia internacional que existe desde hace décadas a incluir capacidades matemáticas y no sólo contenidos. En esa dirección están las competencias matemáticas diseñadas por M. Niss y colaboradores en Dinamarca a finales del siglo pasado y que han sido cruciales para el marco teórico en Matemáticas de las pruebas PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) desde el año 2000 (Niss, 2015).

En el currículo se establecieron cinco capacidades cognitivas "superiores" asociadas a cinco procesos matemáticos: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar, representar (MEP, 2012, pp. 25-29). Estas son transversales a las áreas matemáticas; aunque se plantean a partir de conocimientos específicos en un nivel educativo, son independientes de esas circunstancias. Estos procesos-capacidades se enmarcan dentro de una perspectiva para la formación escolar: desarrollar una competencia matemática general, concebida como una colección de condiciones para comprender y usar las Matemáticas en diversos contextos individuales y sociales.

Implementación e innovación educativa

La aprobación formal del currículo se inscribía en una visión reformadora más amplia: no se trataba de hacer un currículo *in vitro* que luego debía verse cómo implementarse en la realidad educativa del país; detrás había lo que se ha conceptualizado como una "perspectiva de la praxis". Por eso se elaboraron recursos para los docentes dentro del mismo: desde un comienzo, cada pedazo curricular fue tamizado para intentar apoyar su implementación; se incluyeron más de 1600 "indicaciones puntuales". Con esa perspectiva se integró una batería de múltiples acciones muy innovadoras: gradualidad con programas

ISBN 978-84-945722-3-4

transitorios (lo que nunca había sucedido), documentación de apoyo, planes piloto diagnósticos, cursos presenciales, bimodales y totalmente virtuales (Ruiz, 2013, 2015).

Los modelos nacionales de capacitación docente en Matemáticas que se ofrecían en ese país fueron trastocados drásticamente con una visión que hizo de las tecnologías de la comunicación un aliado poderoso. En Costa Rica, en 2011-2013 y 2016, se ofrecieron cursos mitad presenciales y mitad en línea usando la plataforma Moodle (también se desarrollarán entre 2017 y 2019). Esto ya era novedoso en la capacitación ofrecida por el Ministerio de Educación Pública, donde no existía una tradición, continuidad ni plan comprehensivo de acciones de preparación docente, ni siquiera de tipo presencial (Morales-López, 2017). Las acciones reformadoras fueron más lejos: en 2014 y 2015 se ofrecieron cursos plenamente virtuales con la modalidad MOOC (de sus siglas en inglés *Massive Open Online Courses*), mediante la plataforma open edX .

Pero las acciones siguieron: en el 2016 se creó REduMate, una *App* que permite conectar con todas las actividades de la reforma. Y ese mismo año se desarrollaron MOOCs para que los estudiantes de la educación secundaria prepararan la prueba nacional de Matemáticas (más de 7000 se matricularon). En el 2017: se ofrecieron MOOCs para poblaciones estudiantiles en modalidades abiertas para apoyarles también con la prueba nacional de Bachillerato ("por madurez" y " a tu medida"). Nada de esto tenía precedentes en el país.

La innovación no se ha detenido: en la primera parte del 2017 se empezó a ofrecer una modalidad virtual aun más atrevida: colecciones de Mini MOOCs, conjuntos de cursos compactos cortos que poseen las características de los MOOC pero que multiplican sus posibilidades de impacto colectivo. Un *Mini MOOC* es una unidad de aprendizaje relativamente pequeña, compacta, interactiva, dinámica, y diseñada para desarrollarse enteramente dentro de un entorno virtual. Los *Mini MOOC* tienen las mismas ventajas de los MOOC (*Massive Open Online Courses*): abiertos a todos los interesados, gratuitos, se pueden desarrollar con flexibilidad en el lugar y momento más convenientes para el participante.; incluyen diversos elementos multimediales, con un especial énfasis videos. Su propósito es el aprendizaje y el desarrollo de habilidades y competencias. Los *Mini MOOC* avanzan la estrategia: son c*oncisos, breves,* a*utosuficientes y versátiles*, están organizados en *colecciones* por temas y propósitos educativos (http://minimoocs.reformamatematica.net).

ISBN 978-84-945722-3-4

Para que este proceso haya sido posible se ha requerido de la voluntad de dos administraciones gubernamentales (2010-2014 y 2014-2018): la primera abrió la ventana histórica para que entrara esta oportunidad, la segunda amplió significativamente el apoyo para que se avanzara a un ritmo más rápido y con mayor solidez.

La Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica no fue un acto casual o un disparo accidental de un ministro, sino un propósito rigurosamente pensado en sus componentes intelectuales más generales desde hace mucho tiempo. Por supuesto, no fue sino hasta el periodo que va de octubre del 2010 a mayo del 2012 que se decantaron los centenares de ideas y detalles que finalmente integraron el currículo (un proceso de elaboración colectiva con un insumo relevante de la comunidad nacional de enseñanza de las matemáticas). De igual forma: las estrategias específicas de documentación o recursos de apoyo así como la naturaleza de todos los cursos (el extraordinario papel de las TICs) fueron diseñadas, ajustadas y rediseñadas desde el 2011 en un dinámico proceso, viviente, que aun no termina.

¿Lecciones para América Latina y países en desarrollo?

En países en desarrollo la oportunidad política es tal vez más decisiva: se requiere de la voluntad de autoridades gubernamentales de alto nivel para echar a andar un proceso de reforma. No es un proceso automático que nace de la evolución natural del mismo sistema educativo y sus instituciones. En segundo lugar: el tiempo y el ritmo de las reformas son muy rápidos en sus primeras fases, pues se debe aprovechar la voluntad política positiva para poder realizar los cambios. Un cambio de gobierno puede detener o hacer retroceder de manera definitiva una reforma. Esto es así pues suele haber poca continuidad de políticas públicas. Para los reformadores la presión es muy fuerte para lograr que se llegue a un "punto de no retorno" antes de que cambie un gobierno que ha sido positivo. Es decir un punto en que no resulte políticamente rentable volver hacia atrás.

De manera complementaria, tampoco es inusual la existencia de grupos de poder local en el sistema educativo que ven como amenaza los cambios curriculares que no han sido propuestos por ellos. Por eso, directrices de las autoridades políticas superiores no necesariamente se ejecutan. Y las posibilidades de reacciones negativas de estos feudos son inversamente proporcionales al tiempo que resta de gobierno; conforme se acerca el cambio de gobierno el protagonismo de estos grupos se hace más fuerte. Para los

ISBN 978-84-945722-3-4

reformadores esto también tiene implicaciones: por un lado, aprovechar el tiempo en que los feudos locales negativos tienen menos fuerza. En segundo lugar, se debe buscar una base social de docentes y funcionarios que se comprometan con la reforma educativa. Esto último es esencial para buscar un equilibrio de las fuerzas a favor del cambio.

Una reacción fuerte a los cambios por parte de los maestros es también algo normal. No solo por una condición general de miedo ante lo novedoso. Hay otros factores: i) es predominante en estos países una preparación inicial muy débil de los docentes de primaria y secundaria, y ii) también es común que no haya muchos espacios en las jornadas laborales para procesos de capacitación en servicio (casi toda la jornada del maestro es de horas contacto en el aula sin otros tiempos para capacitación, investigación o construcción colectiva de mejores lecciones). Estos dos elementos vuelven difícil la implementación y un apoyo unánime a cambios educativos, en especial si éstos son profundos.

A eso se debe añadir que existen sindicatos y asociaciones de profesores que no apoyan el cambio curricular, pues en estos contextos nacionales estos organismos raramente tienen motivaciones académicas o pedagógicas, y suelen limitarse a luchas de tipo reivindicativo (por salarios o condiciones laborales).

Incertidumbre política, feudos, burócratas y sindicatos adversos, maestros atemorizados y con mala preparación académica y pocos espacios de capacitación en servicio, aparte de pocos recursos materiales y humanos adecuados, constituye sin duda una realidad compleja para intentar realizar una reforma educativa. Un primer objetivo, sin embargo, debe ser obtener que un sector significativo de docentes apoye el cambio, para generar una base social para una reforma educativa. Si esta base se logra articular con suficiente fuerza, será posible avanzar algunos pasos. Esto requiere que el diseño curricular sea atractivo, estimulante y que aunque desafiante se vea posible de implementar por los profesores. No cualquier currículo serviría a ese propósito. El currículo atractivo para los estudiantes debe contener suficientes indicaciones para el maestro. También es necesario muy rápidamente proporcionar a los docentes recursos que les permitan visualizar la reforma y apoyar directamente su acción de aula. En ausencia de colecciones de textos adecuados o de una cultura educativa para su uso (que es usual), que luego podrían ser elaborados y usados como medios centrales en las escuelas, es necesario que haya documentos específicos que incluyan los nuevos elementos curriculares dirigidos a la práctica de aula. Y es esencial que

ISBN 978-84-945722-3-4

se desarrollen procesos de capacitación en servicio en la misma y llegarle a la mayor cantidad de personas en el más breve plazo. El uso de TICs es un imperativo.

Para asegurar el futuro de la reforma se requiere que las instituciones que proporcionen la formación inicial de los maestros ajusten sus programas a los cambios curriculares. Si la reforma logra llegar políticamente a un "punto de no retorno", o si además se consigue una nueva voluntad política gubernamental positiva, los cambios educativos podrían entonces contar con un apoyo adicional valioso procedente de las instituciones formadoras de profesores. Pero no se puede esperar a que las instituciones formadoras se reformen a sí mismas o que produzcan nuevos maestros antes de iniciar una reforma educativa general.

Balance

La reforma matemática en Costa Rica ha caminado dentro de un escenario donde el resultado de sus acciones ha dependido no solo del deseo y la habilidad de sus catalizadores, también de las circunstancias institucionales y sociales existentes, aportando un rostro de realidad a cada una de ellas. El contexto de un país en vías de desarrollo, con cuellos de botella diversos, jalona inevitablemente los propósitos originales, los remodela. Pero dentro de este abigarrado proceso: el avance reformador ha sido notorio.

La reforma en Costa Rica debe verse en un plazo de largo aliento. Y eso tiene consecuencias. Algo menos complejo y exigente socialmente, más breve, habría sido más fácil. En un camino largo inevitablemente algunos de sus protagonistas salen del proceso, otros modifican su papel. Enemigos acérrimos del cambio se han ido o se irán, lo que es bueno, pero todo tiene su contraparte: también lo han hecho y harán personas muy valiosas que han aportado mucho a esta reforma tan demandante. Algunos nuevos ingresarán tratando de empujar sus propias ideas o agendas, que podrían potenciar la reforma, lo que será bueno, pero también hay contraparte: podrían debilitarla. Esa es la consecuencia de que ya no se trata de un conjunto de ideas y propósitos de un grupo de personas, sino una realidad propia que ha mordido el tejido histórico de la sociedad.

Las acciones realizadas hasta ahora han cambiado las condiciones en las que se desarrolla la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ese país: currículo, capacitaciones, uso de TICs. Este escenario empuja a las universidades que preparan maestros a ajustar sus programas de formación inicial en sintonía con la reforma, pero tomará varios años hasta que eso tenga un impacto en las aulas. Esta reforma ha abierto una nueva etapa de la

ISBN 978-84-945722-3-4

Educación Matemática en Costa Rica. Sin embargo, en medio de un país en vías de desarrollo no se puede asegurar su éxito de una manera absoluta. Hay todavía un nivel importante de incertidumbre.

La experiencia en este país ya puede resultar útil para otros contextos nacionales o regionales en el mundo que tengan características socioeconómicas y culturales similares, y si los reformadores en Costa Rica logran tener éxito esta experiencia podría convertirse en un modelo de estudio obligado para desarrollar una revolución en las matemáticas escolares.

Referencias bibliográficas

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. & Mok, I. (Eds.). (2006). *Making connection: Comparing mathematics classrooms around the world.* The Netherlands: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En A. Ruiz, (Ed.), *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela*. Switzerland: Springer International Publishing.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (eds.), *Assessing Mathematical Literacy*, DOI 10.1007/978-3-319-10121-7_235.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las Matemáticas*. Heredia, Costa Rica: EUNA. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/wordpress/?page_id=348

Ruiz, A. (2011, julio). La lección a través de estudios comparativos internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número 8, Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6950

Ruiz, A. (2013, julio). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número

ISBN 978-84-945722-3-4

especial, Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1518

Ruiz, A. (2015, abril). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número 13. Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1866

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-115

ROL DE LA UNIVERSIDAD EN LOS CAMBIOS METODOLÓGICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Natividad Adamuz-Povedano
nadamuz@uco.es
Universidad de Córdoba, España

Núcleo temático: 1. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CR
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: Formación continua, cambio metodológico

Resumen

Por todos es sabido que la universidad, como institución, juega un rol fundamental en la formación del capital humano que componen la sociedad. En campos como la medicina, la electrónica o la agroalimentación, las universidades tienen un papel muy activo abanderando cambios importantes, justo lo que se puede esperar de ellas. En cambio, en campos como el de la Educación parece que no ocurre lo mismo, la investigación educativa, que en España la sustentan las universidades, y la práctica educativa, no navegan en el mismo barco.

Por otro lado, la introducción de nuevas metodologías en la escuela, sin ser impuestas por la administración, es una tarea complicada. Requiere de mucho esfuerzo y compromiso por parte de los docentes. Desde la Facultad de Ciencias de la Educación, en concreto a través de la participación del Aula de Mejora Educativa y de departamentos como el de Didáctica de la Matemática se viene trabajando muy estrechamente con el Centro de Formación de Profesorado apoyando las iniciativas de muchos docentes en activo. En concreto, mostraremos cómo se está trabajando en el cambio metodológico centrado fundamentalmente en lo relativo a la aritmética escolar en la Educación Infantil y Primaria.

Introducción

Según se recoge en la Ley Orgánica de Universidades (BOE, 2001) las funciones de las Universidades son:

a) La creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica y de la cultura.
b) La preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos y para la creación artística.
c) La difusión, la valorización y la transferencia del conocimiento al servicio de la cultura, de la calidad de la vida, y del desarrollo económico.

d) La difusión del conocimiento y la cultura a través de la extensión universitaria y la formación a lo largo de toda la vida (p.13).

Vemos, que además de estar presente en la formación inicial para la preparación de actividades profesionales, las Universidades deben tener un papel fundamental en la transferencia del conocimiento al servicio de la sociedad y en formación a lo largo de toda la vida.

Desde la normativa esas funciones están muy claras, aunque en la realidad esa transferencia y formación continua no es tan evidente, según el ámbito en el que nos encontremos.

Centrándonos en el ámbito educativo, tradicionalmente, parece haber un divorcio entre la práctica educativa y la investigación educativa, por lo que no hay una transferencia directa de los avances encontrados en el ámbito de la investigación educativa a la práctica. Por otro lado, según la estructura del sistema educativo en los distintos países, la formación continua no siempre está en manos de las universidades. En países como Reino Unido, la formación continua del profesorado depende tanto de los centros educativos, que tienen independencia para la contratación y la formación del su personal docente, como de las Universidades, que ofertan distintos cursos de formación continua, dando la posibilidad de especializarse en distintas áreas.

En nuestro país, la formación continua del profesorado no es igual en todo el territorio nacional puesto que las competencias en educación están delegadas a las comunidades autónomas. En el caso de Andalucía, esta formación continua está a cargo de los Centros de Formación de Profesorado (CEP).

Los distintos centros educativos están organizados por zonas, de forma que cada centro, independientemente del nivel educativo que se imparta, tienen un CEP de referencia, al que puede demandar qué tipo de formación continua necesita el centro, en qué materias quieren formarse el curso próximo o en qué metodologías quiere profundizar. En función de estas demandas, los CEP organizan su oferta formativa para el siguiente curso.

Con este esquema de funcionamiento el CEP Luisa Revuelta de Córdoba programa acciones formativas en el área de matemática centradas en el uso de materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la implementación de la resolución de problemas como piedra angular del aprendizaje matemático, así como en el uso de nuevas metodologías que favorecen el aprendiza, como es el caso de la Aprendizaje Basado en Proyectos.

Los antecedentes de la demanda formación en el uso de materiales manipulativos en los primeros años de aprendizaje se encuentran en un Proyecto de Investigación Educativa coordinado por la maestra M Teresa García, en el que colaboraron tanto el CEP como el área de Didáctica de la Universidad de Córdoba (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul, & García-Pérez, 2011). Este proyecto se desarrolló desde el año 2009 hasta el año 2011 obteniéndose unos resultados muy positivos en relación al índice de competencia matemática del alumnado, así como en la motivación tanto del profesorado como del alumnado participantes en el proyecto (Bracho-López et al., 2011).

Desde el curso 2015-2016 se ha avanzado en la formación continua con la creación de una Comisión de Trabajo de Seguimiento de los Rendimientos Escolares, compuesta por representantes de inspección, formación, orientación y dirección de centros educativos de la zona. Esta comisión ha elaborado un estudio de los resultados educativos de los centros que pertenecen al CEP Luisa Revuelta, concluyendo que era necesario incidir en tres aspectos

ISBN 978-84-945722-3-4

concretos en los centros de Educación Primaria que pertenecen a su ámbito de acción: absentismo, competencia lingüística y competencia matemática en los centros de Primaria. Los objetivos planteados son:

- Reducir el porcentaje de absentismo escolar en las enseñanzas básicas.
- Reducir el porcentaje de alumnado de 2º de educación primaria que globalmente alcanza un dominio bajo en la competencia clave de comunicación lingüística.
- Reducir el porcentaje de alumnado de 2º de educación primaria que globalmente alcanza un dominio bajo en la competencia clave de razonamiento matemático.

En lo relativo a la mejora del rendimiento en el área matemáticas se está trabajando en el Diseño de un Itinerario formativo en el área de Matemáticas con el objetivo general de mejorar la competencia matemática de los docentes. Para ello se propone a los centros con rendimiento más bajo la incorporación de un Proyecto Matemático de Centro (PMC) donde se ponga de relieve la importancia del uso de materiales manipulativos en los primeros años de aprendizaje matemático, del cálculo escrito y mental para el desarrollo del razonamiento matemático o el trabajo en resolución de problemas como eje vertebrador del aprendizaje matemático.

La incorporación de este proyecto matemático irá acompañada de una serie de acciones apoyadas por los servicios de inspección, orientación y formación. Estas acciones son:

1. Continuar con la formación en desarrollo del sentido numérico y resolución de problemas a través del uso sistemático de materiales manipulativos y formación en algoritmos ABN.
2. Continuar con el apoyo de la Universidad en el itinerario formativo matemático del CEP, a través de cursos de formación y del acompañamiento en los centros educativos.
3. Formación en competencia matemática al profesorado e implicación de las familias en estos procesos.
4. Formación inclusiva en aprendizaje dialógico, aprendizaje basado en proyectos, aprendizaje cooperativo, tertulias dialógicas, grupos interactivos, como metodologías propulsoras del aprendizaje a través de la resolución de problemas y facilitadoras para superar las dificultades en el razonamiento matemático.

La introducción de un Proyecto Matemático de centro se hará de forma paulatina, concretándose en tres fases:

- Fase de Pre-sensibilización: El primer paso es que haya una demanda por parte del centro para mejorar su rendimiento en el área de matemáticas. Tras esa demanda se les da a conocer experiencias de éxito que se están desarrollando en otros centros. Para ello se organizarán unas jornadas que permitan difundir estas experiencias.
- Fase de Sensibilización. Año 0. En esta fase los docentes del centro se forman en diferentes aspectos relacionados con el cambio metodológico propuesto, esta formación es muy necesaria para que finalmente, puedan tomar una decisión conociendo lo que implicaría. Esta fase de formación está a cargo de profesorado del área de Didáctica de la Matemática, así como de maestras y maestros con dilatada experiencia en la materia.
- Fase de Implementación del proyecto. Año 1: Si el centro, finalmente, decide dar el paso en este cambio metodológico, seguirá contando con los recursos formativos

ISBN 978-84-945722-3-4

que facilita el CEP, así como con el acompañamiento del profesorado de la Universidad de Córdoba.

Acompañamiento en los centros

Este primer año de puesta en marcha de su Proyecto Matemático de Centro, empiezan con el cambio metodológico toda la etapa de infantil y el primer curso de Educación Primaria. Por tanto, la formación y el acompañamiento ahora se centra solo en el profesorado implicado. Se hacen reuniones periódicas con el profesorado en el que se habla de cómo va el proceso de implementación, qué dificultades se están encontrando, cómo está evolucionando el alumnado. También se planifica el trabajo en el aula hasta la siguiente reunión.
En otras ocasiones el profesorado acompañante de la Universidad visita las aulas para hacer una observación de las dinámicas de clase, en reuniones posteriores se comenta los aspectos reseñables durante la observación.

Conclusiones

Hasta ahora disponemos solo de evidencias parciales, como es el caso del empleo de los materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico en el primer ciclo de Educación Primaria (Bracho-López et al., 2011) o del uso de los algoritmos ABN en primero de Educación Primaria (Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano, & Jiménez-Fanjul, 2014), el uso de algoritmos flexibles como forma de inclusión social (Adamuz-Povedano & Bracho-López, 2014; Albanese, Adamuz-Povedano, & Bracho-López, 2015).
Durante el actual curso académico pretendemos terminar con la recopilación de datos en un centro, cuya primera promoción implicada en el cambio se encuentra en tercer curso de Educación Primaria. Se trata de un estudio longitudinal llevado a cabo durante 5 años. En el estudio se han recogido tanto datos cuantitativos, que nos permitan medir el índice de competencia matemática del alumnado, como datos cualitativos, con los que podamos analizar la motivación y opinión del alumnado, profesorado y familias ante esta transformación metodológica. Creemos que con este estudio, tendremos información global de la implementación del cambio así como de la funcionalidad del acompañamiento o asesoramiento que se está dando desde la Universidad.

Referencias bibliográficas

Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación Para La Justicia Social (RIEJS)*, *3*(1), 37–53.

Albanese, V., Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2015). Algoritmos alternativos y cálculo mental en las comunidades gitanas. In M. I. Amor, J. L. Luengo, & M. Martínez (Eds.), *Educación Intercultural: metodología de aprendizaje en contextos bilingües* (pp. 55–59). Granada: Atrio.

BOE. Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades. (2001). España.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M., Adamuz-Povedano, N., & Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto Escolar de la Metodología Basada en Algoritmos ABN en Niños y Niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *29*, 97–109.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., & García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28*, 41–60.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-116

LA ARITMÉTICA DEL SIGLO XXI: EVALUACIÓN DE UNA PROPUESTA DE TRANSFORMACIÓN METODOLÓGICA EN PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Rafael Bracho-López
rbracho@uco.es
Universidad de Córdoba, España

Núcleo temático: 1. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CR
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: Sentido numérico, aritmética escolar, algoritmos tradicionales, algoritmos transparentes

Resumen

En una sociedad como la nuestra ¿es necesario que sigamos empleando tanto tiempo en la escuela en la enseñanza de los algoritmos de lápiz y papel?
La respuesta a esta cuestión se tiene bastante clara en el campo de la investigación en Educación Matemática, desde hace más de 40 años. Numerosos autores han discutido durante este tiempo sobre la conveniencia, o no, de seguir enseñando los algoritmos tradicionales en la escuela tal y como se viene haciendo, coincidiendo en que no es necesario, sino que es mucho más conveniente abordar el cálculo dentro de un aspecto mucho más amplio que implique un conocimiento profundo del sistema de numeración, de las propiedades de los números y de las operaciones, de tal forma que nos permita hacer un uso flexible y conveniente de los números. Esto es lo que entendemos, a grandes rasgos, por sentido numérico.
En esta conferencia reflexionaremos sobre cuál debe ser el planteamiento de la aritmética escolar del S. XXI y se presentará la evaluación de una propuesta metodológica concreta llevada a cabo con niños y niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria en el ámbito del Sistema Educativo Español.

Introducción

La aritmética es: “la parte de las matemáticas que estudia los números y las operaciones hechas con ellos” (RAE, 2014).
El estudio de las operaciones implica conocer conceptualmente cada operación, sus propiedades, las relaciones entre ellas, etc. Esto es fundamental para la adquisición del sentido numérico y en definitiva para el desarrollo de la Competencia Matemática.
La metodología de enseñanza de las operaciones aritméticas se ha centrado desde hace décadas en el estudio, memorización y práctica de una serie de algoritmos, que podríamos llamar tradicionales, los cuáles, según Martínez (2010), no contribuyen realmente a la

ISBN 978-84-945722-3-4

mejora del desarrollo sentido numérico: “El gran enemigo a destruir son las cuentas, que es la tarea que se lleva más tiempo, a la que se dedican más esfuerzos, y cuya utilidad, con su actual enfoque, es bastante nula” (p. 7).

Operación y algoritmos son dos conceptos diferentes. Sin embargo, la forma en la que se enseñan las operaciones, al estar ligadas siempre a un algoritmo, nos hace pensar que son lo mismo y que ese algoritmo es único. Así sería normal que, si se pregunta a alguien, ya sea joven o adulto, ¿qué es sumar?, conteste con el algoritmo, sin saber realmente lo que es conceptualmente la suma, ni sus propiedades y relaciones.

Pero como nos dice Gómez (1998): ”la enseñanza de los algoritmos aritméticos ni es inmutable, ni ha estado siempre bajo la misma filosofía, ni bajo la misma manera de presentación” (p. 1). Más tarde, este autor intenta dar respuesta a la pregunta: ¿debemos seguir enseñando los algoritmos. Si es así, ¿por qué y cómo? Su respuesta es que sí, pero efectuando un cambio que ponga el énfasis en el cálculo variado que tenga en cuenta: el cálculo escrito, estimado, mental y con calculadora según convenga (Gómez, 1999).

Desde este punto de vista, es necesario un cambio en el tratamiento de las matemáticas en la Educación Primaria (Adamuz-Povedano y Bracho-López, (2014). En los primeros años de aprendizaje, en los que nos centramos en este trabajo, entendemos que este cambio debe sustentarse en dos ejes: por un lado en el uso de materiales manipulativos, ya que en ese momento la experiencia física desempeña un papel crucial en el desarrollo global y especialmente en el desarrollo lógico-matemático (Lerner, 1999), y por otro lado, en la forma de abordar las reglas de cálculo, puesto que los algoritmos tradicionales son insensibles a objetivos particulares o trayectorias personalizadas (Gallego-Espejo, 2013).

Pues bien, en la presente conferencia describiremos a grandes rasgos una alternativa metodológica concreta llevada a cabo en el Primer Ciclo de la Educación Primaria y analizaremos el impacto escolar de la misma (Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano y Jiménez-Fanjul, 2014)

2. Evaluación de una propuesta de tratamiento de la aritmética escolar en Primer Ciclo de Educación Primaria

2.1. Metodología

El objetivo de la investigación es analizar el grado de desarrollo del sentido numérico alcanzado por niños y niñas al final de segundo ciclo de educación primaria tras la utilización de la metodología basada en los denominados algoritmos ABN.

A partir de este objetivo, la hipótesis de trabajo es que la utilización de la metodología basada en el uso de algoritmos ABN en los primeros años de aprendizaje matemático mejora significativamente el grado de desarrollo del sentido numérico en general, adaptándose de manera flexible y satisfactoria a la diversidad del alumnado.

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas. Desde un enfoque empírico analítico se trata de una investigación cuantitativa con un diseño cuasi-experimental donde se ha realizado un estudio descriptivo e inferencial con dos grupos no equivalentes.

La muestra está formada por sendos grupos de estudiantes de Educación Primaria de dos colegios de la provincia de Córdoba. Ambos centros tienen características parecidas y pertenecen a entornos socioeconómicos similares, aunque difieren en que no están en el mismo ámbito urbano, uno pertenece a Córdoba capital y otro a un pueblo de esta misma provincia.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta muestra ha sido configurada de manera no probabilística y no aleatoria, es decir, hemos realizado la elección de estos grupos de estudiantes por el acceso que tenemos a ellos, ya que la participación es voluntaria y sujeta a la predisposición de estos.
El alumnado de uno de los centros siguió durante el primer ciclo de Educación Primaria la metodología basada en los algoritmos ABN, mientras que el alumnado del otro colegio utilizó los algoritmos de cálculo tradicionales, por lo que el primer grupo ha sido considerado grupo experimental y el segundo grupo de control.
La interpretación de los datos se ha basado en la realización del test de competencia matemática básica, desarrollado por Ginsburg y Baroody y adaptado al medio español por Núñez y Lozano (2007).
La variable dependiente que se ha analizado ha sido el sentido numérico del alumnado, y para cuantificar esta variable nos hemos ayudado de una serie de variables específicas, como son el índice de competencia matemática (en adelante ICM), la puntuación directa (PD), el percentil, la edad y el curso equivalentes, variable ítem i (i € [1,72]), además de los conocimientos matemáticos formales e informales de cada discente, que se desglosan en los aspectos que se describen más tarde en la tabla 3. Como variable independiente tenemos la variable grupo que clasifica al alumnado del estudio en grupo de control y grupo experimental.
2.2. Análisis de resultados
En la Tabla 1 se ofrecen los rangos, las medias y las desviaciones típicas de las puntuaciones estándar de los Índices de Competencia Matemática:
Tabla 1. Estadísticos descriptivos del Índice de Competencia Matemática en ambos centros

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
Grupo Experimental					
Índice de competencia	20	75	137	**111,25**	17,559
Grupo de Control					
Índice de competencia	26	64	116	**96,08**	16,287

Como puede observarse a primera vista, la media del ICM del grupo experimental es bastante superior; no obstante, debemos comprobar si dicha diferencia es significativa. Por otro lado, se aprecia una dispersión considerable, lo que es indicativo de una gran diversidad entre el alumnado de ambos grupos a pesar de haber excluido en esta comparación al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo.
Al aplicar la prueba de Kolmogorov-Asimov a los datos del ICM de los dos colegios se comprobó que en ambos casos existía aproximación a la distribución normal, por lo que tiene sentido aplicar la prueba paramétrica de T de Student. La hipótesis nula, H0, sería que no tenemos evidencias de que las diferencias entra las medias del ICM sean significativas, mientras que la H1 sería que habría evidencias de que sí lo son.
El resultado de la prueba T de Student (0,004) es menor que la significación que asumimos para el estudio (0,05), por lo que aceptamos la hipótesis alternativa (H1), es decir, tenemos evidencias de que hay diferencias significativas entre las medias del ICM de ambos centros.
Si nos centramos en la interpretación del ICM por niveles, obtenemos los siguientes resultados:
Tabla 2. Datos del Índice de Competencia Matemática por niveles

ISBN 978-84-945722-3-4

	Grupo Experimental		Grupo de Control	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Muy superior > 130	2	10%	0	0%
Superior [121, 130]	7	35%	0	0%
Por encima [111, 120)	1	5%	6	23,1%
Medio [90, 110)	8	40%	12	46,2%
Por debajo [81, 90)	1	5%	3	11,5%
Pobre [70, 80)	1	5%	2	7,7%
Muy pobre < 70	0	0%	3	11,5%
Total	20	100,0	26	100,0

Observamos que los mayores porcentajes de alumnos en uno y otro caso (40% y 46,2% respectivamente) obtienen un ICM medio, que podemos considerar adecuado a su edad. Sin embargo, en el caso del grupo de control, el 30,7% tiene valores inferiores y el 23,1% superiores, mientras que, en el experimental, tan solo encontramos a 2 alumnos con niveles inferiores a los considerados medios y la mitad del grupo obtienen niveles superiores a estos. También llama la atención el hecho de que el 45% del alumnado del grupo que siguió la metodología ABN obtuvo niveles de competencia matemática superiores o muy superiores, mientras que ningún niño o niña del grupo de control consiguió alcanzar estos valores.

Más allá de los aspectos generales analizados hasta ahora, nos parece interesante ofrecer información acerca del nivel de desarrollo específico en lo referente a los aspectos fundamentales de la matemática formal e informal. En la Tabla 4 se presentan los aspectos concretos que hemos estudiado dentro de estos dos grandes apartados, con indicación de los ítems dedicados a cada uno de ellos:

Tabla 3. Aspectos analizados en el estudio realizado

Matemática informal		Matemática formal	
Numeración	23 ítems	Convencionalismo	8 ítems
Comparación	6 ítems	Hechos numéricos	9 ítems
Cálculo informal	8 ítems	Cálculo formal	9 ítems
Conceptos	4 ítems	Conceptos formales	5 ítems
Total: 72 ítems			

Podemos observar que existen diferencias significativas entre las medias de las variables numeración, cálculo informal, convencionalismos y conceptos formales, pero no en las otras cuatro variables (Tabla 4).

Tabla 4. Test de diferencias de los estadísticos descriptivos para las variables de matemática informal y formal

Componentes del TEMA-3	Grupo Experimental		Grupo Control			
	X	s	X	s	t	p
Numeración	22,45	0,759	21,88	0,766	U de M-W[5]	**0,008 d.s.[6]**
Comparación	5,55	0,510	5,31	0,549	U de M-W	0,143 d.n.s[3]
Cálculo Informal	6,70	1,261	5,62	0,941	U de M-W	**0,004 d.s.[2]**
Conceptos Informales	3,75	0,550	3,46	0,582	U de M-W	0,054 n.d.s.[7]
Convencionalismos	7,9	0,308	7,5	0,762	U de M-W	**0,028 d.s. [2]**
Hechos Numéricos	6,3	2,577	4,42	1,793	2,780	0.09 d.n.s[3]
Cálculo Formal	6,70	2,430	5,62	2,418	1,505	0,139 d.n.s[3]
Conceptos Formales	3,05	1,099	1,81	0,939	U de M-W	**0,000 d.s. [2]**

Aunque en conjunto no se hayan observado diferencias significativas entre los grupos en las preguntas relacionadas con cálculo formal, analicemos los datos relativos a este aspecto, ya que pensamos que se podrían observar cuestiones de interés.

Tabla 5. Items respondidos correctamente sobre cálculo mental

	Cálculo formal (9 ítems)		
	Items respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje
Grupo Experimental	1	1	5
	2	1	5
	4	2	10
	5	1	5
	6	3	15
	7	2	10
	8	4	20
	9	6	30
	Total	20	100
Grupo de control	2	5	19,2
	3	1	3,8
	4	3	11,5
	5	2	7,7
	6	4	15,4
	7	4	15,4
	8	4	15,4
	9	3	11,5
	Total	26	100

El 30% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems que evalúan esta variable, mientras que este porcentaje se reduce a un 11,5% en el caso del alumnado del grupo de control. En este colegio el mayor porcentaje de alumnos (19,2%) tan solo responde correctamente a dos ítems de este apartado.
Por otro lado, en las preguntas que se corresponden con meros cálculos algorítmicos sencillos no se aprecian grandes diferencias, pero las diferencias de rendimiento son más evidentes en las sumas y restas con llevada y en los ítems 54, 59, 62 y 63 que se corresponden con situaciones problemáticas que conllevan cálculos mentales.

Conclusiones

En términos generales y a la vista de los resultados obtenidos, se puede determinar que la competencia matemática desarrollada por el grupo de alumnos y alumnas del grupo experimental es superior a la desarrollada por el grupo de control.
Creemos que nuestra hipótesis de trabajo, a saber: la metodología basada en un aprendizaje profundo del Sistema de Numeración Decimal, en el conocimiento y utilización de las propiedades de los números y de las operaciones, el fomento del cálculo mental y la utilización de los algoritmos ABN mejora significativamente el DSN en los primeros años de aprendizaje matemático, se ha visto cumplida.
Centrándonos en el bloque de cálculo, tanto formal como informal, los resultados del grupo experimental han sido notablemente superiores en general, y de manera particular en lo que respecta al cálculo mental y a los cálculos asociados a situaciones problemáticas concretas, hecho que apoya los resultados obtenidos en su día por el propio Martínez (2011), creador de los algoritmos ABN. Especial significado por su relevancia como eje vertebrador del conocimiento matemático, tienen los resultados relativos a las destrezas en la resolución de problemas, donde se pone de manifiesto la importancia de abordar los cálculos de manera comprensiva en el contexto de la situación problemática, ya que si se utilizan técnicas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

sistemáticas alejadas de la realidad del problema se corre el riesgo de perderse en el proceso.

Referencias bibliográficas

Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación Para La Justicia Social (RIEJS)*, *3*(1), 37–53.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M., Adamuz-Povedano, N., & Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto Escolar de la Metodología Basada en Algoritmos ABN en Niños y Niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *29*, 97–109.

Ginsburg, H., & Baroody, A. J. (2007). Tema-3: test de competencia matemática básica. (M. Núñez del Río & T. Lozano Guerra, Eds.). Madrid: TEA ediciones.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *UNO*, *22*, 20–27.

Lerner, D. (1999). Reflexiones sobre: Uso del Material concreto en Matemáticas. Problemas de la Vida cotidiana. Quehacer Educativo, 34, 56–60.

Martínez, J. (2010). Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). Bordón, 63(4), 95–110.

RAE. (2014). *Real Academia de la Lengua Española*. Retrieved June 25, 2017, from http://www.rae.es/

ISBN 978-84-945722-3-4

CP-127

LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA Y LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Cecilia Crespo Crespo
crccrespo@gmail.com
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”. Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico- UTN. Buenos Aires, Argentina

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas
Modalidad: CP
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: profesor, investigación, matemática educativa

Resumen

La presencia en la formación profesional del profesor de matemática tanto de la lectura y escritura científica como de la investigación es reconocida como importante en la actualidad. Las características de las instituciones educativas de nuestro siglo, producto de los constantes cambios ocurridos en la sociedad, provocan interrogantes e inquietudes en los profesores que se han reflejado en el surgimiento de grupos de investigadores que intentan en los últimos tiempos dar respuestas a los mismos, creando distintos marcos teóricos para interpretar la realidad del aula de matemática en reuniones y publicaciones en las que compartimos opiniones, realidades y propuestas. Asimismo, la conciencia de que la manera en la que se construye el conocimiento en la actualidad, difiere de la que caracterizaba a la escuela de hace un tiempo, hace que los profesores se acerquen a la investigación en matemática educativa en búsqueda de respuestas y estrategias para lograr mejoras en su labor cotidiana. El acercamiento de los docentes a la investigación en el área de matemática educativa, presenta, sin embargo, ciertas dificultades y características interesantes para realizar una reflexión sobre ellas.

El profesor de matemática y su contacto con la investigación

En la formación de base del profesor de matemática, a partir de las reformas educativas que se vienen dando en los últimos tiempos en distintos países, se reconoce la importancia de la presencia de la lectura y la escritura científica, consideradas como sustento para lograr una profesionalización de la carrera docente. La matemática educativa centra sus intereses en lo que ocurre en el aula de matemática, tratando de describir y explicar los aspectos y relaciones que se manifiestan en la dinámica de los fenómenos relacionados con la construcción del conocimiento matemático.

ISBN 978-84-945722-3-4

En Argentina, el Plan Curricular Institucional de la carrera de Profesorado de Matemática (2015) del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de la Ciudad de Buenos Aires, en la descripción del perfil del egresado, hace mención de una orientación en investigación, que refiere tanto a los procedimientos de construcción del campo disciplinar como a la dinámica de actualización de las prácticas de enseñanza. Se afirma que el Profesor de Matemática al finalizar su carrera, estará formado para participar en proyectos de investigación e integrar equipos de investigación educativa, pudiendo "realizar actividades de investigación y divulgación científica en las áreas involucradas en su formación con los fines de producir artículos científicos contribuir a la construcción y a la difusión del saber matemático y a su enseñanza" (p.24).

Sin embargo, durante sus estudios de grado, el contacto de los estudiantes con la investigación en matemática educativa, se restringe a la lectura de algunas, muchas veces pocas, publicaciones de esta disciplina, que se analizan desde su contenido y no desde la realización de las investigaciones correspondientes. Si bien se ha producido un acercamiento a la matemática educativa y a la investigación en esta área, en relación a los planes curriculares anteriores, aún no es suficiente. Al finalizar la carrera, los egresados ven a la investigación educativa como algo alejado de su realidad cotidiana y no consideran que sea posible para ellos la integración de grupos de investigación educativa ni la escritura de artículos.

Algunos profesores inician después de egresados estudios de posgrado o postítulos que se orientan en algunos casos a la matemática, en otros a la matemática educativa. Muchos de ellos, aunque poseen un buen desempeño durante el período de cursada de materias, pero no finalizan sus estudios abandonando en el momento de escribir su tesis (Crespo Crespo y Lestón, 2016). Resulta interesante centrarse en la iniciación a la investigación en matemática educativa intentando caracterizar este proceso y la manera en la que lo realizan los profesores de matemática que se acercan formalmente a la matemática educativa como disciplina científica.

La matemática educativa como disciplina científica

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Con el surgimiento de las ciencias sociales, la sociedad científica debe reconocer la posibilidad de producción de conocimiento sobre seres humanos y sociedad. La legitimación de sus conocimientos y el reconocimiento como disciplinas científicas de las mismas no fueron sencillos, basando las críticas por falta de cientificidad en la baja capacidad predictiva y objetividad en el intento de regirse por la definición dominante de ciencia hasta entonces.

La matemática educativa si bien se basa en inquietudes antiguas relacionadas con el aprendizaje de la matemática, es recientemente reconocida como disciplina científica. Es indudable su crecimiento en las últimas décadas en todo el mundo. Las actividades asociadas a ella son variadas y manifestadas por medio de trabajos de distinta naturaleza. Se consolidó cuando la comunidad educativa comprendió que no era suficiente centrarse en sólo la matemática, ni sólo en la didáctica general y que para comprender los fenómenos que se llevan a cabo en el aula durante la construcción del conocimiento matemático, no basta con pensar enfoques novedosos para presentar conceptos matemáticos.

La matemática educativa ha sufrido una serie de cambios de enfoque en su evolución. Es importante hacer notar que esta evolución implica la existencia de etapas sucesivas desde el punto de vista cronológico, sino que se trata de enfoques que coexisten temporalmente en muchas oportunidades tanto en el pasado como en la actualidad, poniendo de manifiesto posiciones de los investigadores en cuanto a su visión y su posición epistemológica frente a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El primer enfoque de la matemática educativa, denominado una didáctica sin alumnos (Cantoral y Farfán, 2003) muestra investigaciones que se enfocan hacia los modelos teóricos centrando la atención en la actividad matemática. Esto se orienta a la consideración del conocimiento matemático con carácter universal, ofreciendo esquemas explicativos de las construcciones a través de los objetos matemáticos. Estas investigaciones originan diseños de presentaciones del contenido escolar orientadas a lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes, en comparación con las presentaciones tradicionales, no teniendo en cuenta cuestiones relacionadas con la naturaleza cognitiva o afectiva ni socioculturales. Por otra parte, surgen estudios acerca de la naturaleza cognitiva que consideran el aprendizaje del alumno como factor central del diseño de actividades, pero no tienen en cuenta a la escuela como institución en la que se lleva a cabo este proceso y que influye en lo que ocurre en el aula.

ISBN 978-84-945722-3-4

Se construyen así epistemologías modelizadas por la actividad matemática que orientan el entendimiento del conocimiento matemático como producción hecha por el ser humano. Bajo esta visión, la matemática escolar es interpretada por medio de la búsqueda en las representaciones escolares de un reflejo de la actividad de los matemáticos: de su interpretación de la realidad o de la verbalización de nociones cognitivas y significados preexistentes. La idea conductora de estas investigaciones es que a partir de estos estudios es posible lograr una explicación de la manera en que se aprende la matemática que constituiría la base de diseños curriculares. Pero además, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática deben ser reconocidas como actividades humanas, es con carácter de construcción social y cultural que se construye el conocimiento. Este hecho obliga a la incorporación de la escuela como institución en la que se reconocen categorías del conocimiento matemático relacionadas a las reconstrucciones de significados de la matemática considerada no ya con un carácter universal, sino sustentado por la actividad social del hombre. Surge de esta manera un enfoque caracterizado como didáctica en la escuela pero sin escenarios socioculturales. La matemática educativa se ocupa en estas investigaciones de la problemática de la enseñanza de la matemática identificando una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, distintas en naturaleza y función. Estas diferencias deben ser tenidas en cuenta al analizar mecanismos de construcción y reconstrucción dentro de la organización social. No se trata únicamente de secuenciar y temporalizar contenidos, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. En el cuarto enfoque se realizan aproximaciones sistémicas tendientes a explicar fenómenos didácticos considerando distintos elementos en juego: el saber, el docente, el alumno y las relaciones entre ellos. Asimismo, se estudia la manera en la que se construye el conocimiento matemático, el significado que se le da en sus orígenes. A partir de estas ideas, los investigadores ponen mayor atención en aspectos socioculturales, comprendiendo que debe reformularse la visión epistemológica centrándose en el ser humano más que en el conocimiento y viendo a su producción como una producción sociocultural. Esta línea de investigación no considera solamente las epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática, sino a través de la actividad humana. La visión originada, puede identificarse como una didáctica en escenarios socioculturales, que tiene en cuenta cuatro

ISBN 978-84-945722-3-4

componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. Esta aproximación, intenta articular las componentes social y epistemológica, buscando explicaciones de la actividad humana, en este caso matemática, como resultado de la organización social. De esta manera es posible tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple e integral.

En la actualidad las investigaciones miran dentro del aula, se cuestionan acerca de cómo se construye el conocimiento, cómo se transforma el saber sabio en saber enseñado, cómo se transforma el discurso matemático en el discurso matemático escolar, qué interacciones se realizan durante la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y analizan cómo entran al aula influencias externas y cómo influyen en las actividades que se llevan a cabo en el aula.

Dificultades de los profesores al realizar una investigación

Uno de los desafíos para los programas de formación inicial y permanente de profesores consiste en integrar el conocimiento propio de matemática y el conocimiento de contenido pedagógico específico, de lograr en el docente la participación en la práctica de enseñar matemática con la de la continua reflexión sobre ella para comprenderla y enriquecerla día a día. En esta reflexión interviene la realización de investigaciones. No es fácil articular nuestras actuaciones como profesores y como investigadores, ya que la inercia lleva, a menudo, a mezclar criterios de racionalidad (Flores, 2007).

Los profesores que recién se están iniciando en la investigación, muestran dificultades en diferenciar marcos teóricos de marcos conceptuales, en las maneras en que pueden organizar de datos empíricos que obtienen y en el análisis de la información. A los profesores de matemática les cuesta asumir que la matemática educativa es una ciencia social e intentan obtener a partir de sus observaciones y datos recabados conclusiones con características similares a si se tratara de una ciencia exacta. Esto ocasiona que al menos en el comienzo, se les dificulte la realización de análisis cualitativos, ya que sienten que sus conclusiones están poco fundamentadas, prefiriendo los análisis cuantitativos en sus

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

trabajos. Otra de las dificultades es la aceptación de que en ciencias sociales, los saberes teóricos están sometidos a revisiones y discusiones ideológicas o epistemológicas.

En nuestra experiencia con profesores que se acercan a la matemática educativa a través de estudios de postítulo (Crespo Crespo y Lestón, 2016) a partir de las dificultades que se fueron identificando, se diseñaron actividades y tareas para las distintas asignaturas de esta carrera tendientes a familiarizar a los profesores con investigaciones realizadas e irlos involucrando en la realización de las mismas para facilitarles la realización de sus propias experiencias de investigación. En algunos casos, se les propone "reproducir" investigaciones, debiendo realizar el análisis y organización de datos obtenidos y posteriormente identificación de diferencias con las investigaciones originales y las dificultades que encontraron en este proceso. También como tareas de algunas asignaturas, deben escribir artículos, tanto de manera grupal e individual. Como trabajo final de la carrera se exige la realización de una investigación y la escritura de un trabajo al estilo tesis. Tomando como base algunos trabajos realizados e incluso el trabajo final, los estudiantes realizan reportes de investigación orales que presentan en jornadas y congresos de la disciplina y escritos que envían a revistas para su publicación.

Describamos someramente cuáles son las etapas por las que pasa un investigador cuando realiza una investigación en matemática educativa. A la hora de realizar su propia investigación, los profesores deben ser cuidadosos en la selección de tema, ya que a partir de la identificación de alguna situación didáctica presente en sus clases, deben formular preguntas de investigación e hipótesis adecuadas. Otra etapa fundamental en este proceso y que se lleva a cabo de manera casi simultánea es la búsqueda de estado del arte, en el que identifican qué investigaciones relacionadas con la que se proponen realizar existen, a qué conclusiones han llegado, desde qué visiones teóricas y con qué metodología se han realizado. El estado del arte debe dar a los investigadores herramientas para poder distinguir su investigación de las ya realizadas, identificando qué aportes programan hacer en su trabajo. La selección de un marco teórico desde el que se encara la investigación y de los elementos conceptuales que permiten interpretar la información que se releve, es otra de las etapas importantes, ya que determinará la metodología de investigación y el diseño de herramientas adecuadas de recolección de datos. En este punto, el investigador está en condiciones de organizar los núcleos de la investigación, diseñando una especie de

ISBN 978-84-945722-3-4

esquema que describe las distintas partes de su investigación y la manera en la que se relacionan entre sí. Una vez puesta en práctica de la herramienta diseñada, el investigador debe organizar datos obtenidos y leerlos desde los elementos que el marco teórico le otorga. Todo este proceso debe plasmarse por escrito en un informe de investigación que culminará con las conclusiones extraídas, pudiendo abrir o perfilar nuevos temas de investigación.
La complejidad de este proceso justifica las dificultades que hemos mencionado en relación al acercamiento de profesores de matemática al mismo. Sin embargo, cuando logran transitarlo, reconocen su importancia para la reflexión acerca de lo que ocurre en su propia aula durante la construcción de conocimientos matemáticos por parte de sus estudiantes.

Intereses de los profesores de matemática en relación a las investigaciones

Para lograr que las investigaciones lleguen a los profesores y aprovechen sus resultados en su práctica, es importante conocer los intereses y opiniones de los profesores al respecto y la manera en las que estos se reflejan a la hora de realizar sus propias investigaciones.
A continuación se comentan algunas de ellas que fue posible identificarlas a través de entrevistas llevadas a cabo con profesores de nivel medio y superior que cursan postítulos relacionados con la matemática educativa.
Los profesores ven alejadas de su realidad las investigaciones teóricas. Consideran que muchas veces los estudios teóricos carecen de una aplicabilidad directa al aula y por eso no los valoran suficientemente. Reconocen, sin embargo, el valor de las investigaciones situadas en el aula, en las que identifican situaciones similares a las que se les presentan en su realidad cotidiana. A partir de ellas, pueden cambiar la mirada del aula pudiendo centrarse en los problemas actuales y resignificar y rediseñar el discurso matemático escolar.
En el momento de seleccionar tema de investigación, las temáticas elegidas suelen estar originadas en experiencias docentes propias, por medio de la descripción de situaciones que se repetían en sus aulas a través del tiempo. El trabajo de campo prefieren realizarlo en el aula propia, si bien en algunos casos si es necesario, lo realizan en la de colegas de su institución. En muchas de las investigaciones se pone de manifiesto una gran sensibilidad

ISBN 978-84-945722-3-4

por lo social y su influencia en el aula, reconociendo la importancia de factores sociales en los intereses y motivaciones de sus alumnos que influyen en la construcción de saberes.

En muchos casos, los profesores al comenzar una investigación, descreen inicialmente de sí mismos para realizarla y solo una vez que la terminan se dan cuenta de lo que son capaces y de la manera en la que la investigación les permite profundizar la reflexión acerca de sus cursos, reconociendo que realmente les permite modificar positivamente su visión del aula por medio de la comprensión de la manera en la que sus alumnos aprenden y de las razones por las que se manifiestan errores en sus respuestas durante la clase o al momento de la evaluación.

Algunos comentarios finales

A través de la investigación, los profesores se convierten en profesionales prácticos y reflexivos que adquieren hábitos (Perrenoud citado por Flores, 2007) que les permiten percibir situaciones del entorno que requieren una actuación racional de su parte, distanciarse de ellas para poder analizar sus elementos, explicitar y examinar elementos que condicionan esas situaciones, incluidos los derivados de sus creencias o esquemas implícitos y recurrir a otras fuentes para buscar maneras de interpretar las situaciones y de responder a las mismas. De esta manera, la investigación se pueda caracterizar como una investigación sobre la práctica formativa (Ponte, 2008).

Resulta importante para lograrlo, acercar a los profesores de matemática investigaciones cercanas a su realidad cotidiana, involucrarlos en investigaciones centradas en sus aulas que les permitan cambiar la mirada del aula, centrándose en los problemas actuales para así resignificar y rediseñar el discurso matemático escolar

A partir de nuestra experiencia con profesores que se están acercando a la investigación en matemática educativa, se reconoce la importancia del acompañamiento a quienes se inician en la investigación, haciéndolos partícipes de la comunidad de matemática educativa en la que se reconozcan como parte integrante con posibilidad de aportar sus reflexiones y propuestas y de asumir una mirada distinta hacia el aula, pudiendo interpretar concientemente su dinámica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6 (1), 27-40.

Crespo Crespo, C y Lestón, P. (2016). Dificultades de los profesores de matemática al iniciarse en la investigación y escritura científica. E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*, 1247-1255. Clame, México.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA* 1(4), 139-158.

Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (2015). *Plan Curricular Institucional del Profesorado de Educación Superior en Matemática* Res 2014/3931-MEGC. Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA, 2*(4), 153-180.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-144

ELEMENTOS PARA FORMACIÓN DE MAESTROS DE MATEMÁTICAS DESDE LA ETNOMATEMÁTICA

Hilbert Blanco-Álvarez – Alicia Fernández-Oliveras – María Luisa Oliveras
hilbla@udenar.edu.co – alilia@ugr.es – oliveras@ugr.es

Universidad de Nariño, Colombia y Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la Educación Matemática.
Modalidad: CR
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación de Maestros, Etnomatemática, Currículo Cultural, Evaluación

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación doctoral, que tenía como objetivo identificar elementos para el diseño de programas de formación de maestros de matemáticas desde la etnomatemática. Se hizo uso de una metodología cualitativa interpretativa, y el diseño metodológico se basó en el estudio de caso. El caso estudiado fue un programa de formación de maestros de matemáticas, que se realizó en Tumaco, Colombia entre junio y octubre de 2012. El conjunto de los datos estaba conformado por tareas escritas de los maestros, entrevistas grupales, vídeos del desarrollo de clases con niños y la evaluación de dichas clases por parte de los maestros. El análisis de los datos utilizó el modelo teórico MEDIPSA para fundamentar la investigación y se dividió en seis estudios.

Finalmente se identificaron once elementos que presentamos apoyándonos en cuatro categorías: a) Elementos Internos al aula y relativos a los sujetos humanos protagonistas del aprendizaje y la enseñanza; b) Elementos Internos al aula y relativos a los mediadores del discurso, como los recursos, las normas institucionales y el currículum; c) Elementos externos al aula y relativos al sistema educativo; d) Elementos externos al aula y relativos al sistema social.

1. Introducción

Nuestro objetivo es socializar los resultados de la investigación doctoral: Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática, que se planteó responder la pregunta ¿*Qué elementos deben ser considerados en el diseño de un programa de formación de maestros de matemáticas en ejercicio, orientado desde la Etnomatemática*? Para esto se realizó una investigación cualitativa, de carácter interpretativo. El método de investigación fue el estudio de casos. El caso estudiado fue un curso de formación para maestros en ejercicio, diseñado desde la Etnomatemática por los autores de este trabajo y

ISBN 978-84-945722-3-4

realizado en el municipio de Tumaco, Colombia entre julio y octubre de 2012. El curso tuvo una duración de 111 horas y participaron 28 maestros de la educación básica primaria y secundaria. Los datos se recolectaron por medio de entrevistas grupales, observación participante y pasiva, grabación de audio y vídeo, fotografías, reflexiones escritas de los maestros y formato de evaluación del curso. El análisis de los datos se realizó tomando como referente el modelo MEDIPSA (Oliveras, 1996) que recoge diferentes enfoques teóricos. Se actualizaron las referencias de dicho modelo en varias de sus componentes como la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2014), la Filosofía del lenguaje (Wittgenstein, 1999), el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2013). Además, se incorporaron varios enfoques metodológicos para el análisis de los datos como la teoría fundamentada, evaluación de programas, la investigación documental y el análisis de contenido.

2. Los resultados de la investigación

Los elementos encontrados los organizamos y presentamos apoyándonos en cuatro categorías: a) Elementos Internos al aula y relativos a los sujetos humanos protagonistas del aprendizaje y la enseñanza; b) Elementos Internos al aula y relativos a los mediadores del discurso, como los recursos, las normas institucionales y el currículum; c) Elementos externos al aula y relativos al sistema educativo; y d) Elementos externos al aula y relativos al sistema social.

2.1 Elementos Internos al aula y relativos a los sujetos humanos protagonistas del aprendizaje y la enseñanza

2.1.1 Las posturas epistemológicas de los maestros sobre las matemáticas[ii]

Los resultados obtenidos nos permitieron observar diferentes posturas epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas, permitiéndonos advertir, en varios maestros, una postura de superioridad cuando se habla, desde las matemáticas escolares, sobre las matemáticas extraescolares, pero también a señalar otras posturas distintas, donde las matemáticas extraescolares están al mismo nivel epistemológico que las matemáticas escolares. Plantear la discusión de la pluralidad epistemológica ofrecerá a los maestros la oportunidad de reconocer pensamientos matemáticos diversos y pensar currículos multiculturales, en contra de los currículos monoculturales y la matemática escolar como conocimiento matemático hegemónico.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la tabla 1, planteamos una tipología para reconocer posturas epistemológicas de los maestros sobre las matemáticas a partir de su práctica educativa en el aula.

Tipologías epistemológicas	**Formas de trabajo**
Formalista	Trabaja solo matemáticas escolares en el aula, ya que no considera conocimiento las matemáticas extraescolares.
Falso etnomatemático	Incluye matemáticas extraescolares en el aula, por otras razones diferentes a pensar que son matemáticas, por ejemplo elemento motivador o curioso.
Cuasi-etnomatemático	Aunque reconoce la existencia y la importancia de las matemáticas extraescolares, no las incluye en el aula, por diferentes razones: falta de materiales, currículo inflexible, presión de los directivos etc.
Etnomatemático	Trabaja tanto las matemáticas escolares como las matemáticas extraescolares, en el aula, reconociendo la importancia y el papel formador de ambas.

Tabla 1- Tipologías epistemológicas de los maestros, a partir de sus formas de trabajo

2.1.2 Aprendizaje situado

Un resultado importante surgió de las reflexiones presentadas por los maestros sobre la frase: *Fuera de la escuela no se aprenden matemáticas*. Los maestros reconocen la existencia de juegos de lenguaje en formas de vida distintas a la forma de vida escolar y reflexionan sobre la poca o ninguna atención que a estos juegos del lenguaje se les presta en la escuela y sobre la habilidad de cálculo mental de los niños por fuera del aula. Encontramos, aquí, la imperativa necesidad de tener en cuenta el contexto y las matemáticas extraescolares en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estas reflexiones señalan una limitación en la escuela actual, puesto que en ésta se presenta una ruptura con el entorno cotidiano del estudiante.

2.1.3 El conocimiento didáctico-matemático de los maestros[iii]

A partir de una amplia revisión de la literatura internacional sobre la formación de maestros desde la Etnomatemática, construimos un perfil del conocimiento didáctico matemático de éste. Utilizamos el modelo: Conocimiento Didáctico Matemático-CDM, que establece varias dimensiones y características del conocimiento didáctico (Pino-Fan y Godino, 2015), ver la Tabla 2.

Dimensión Matemática	
Característica 1	Estudiar las etnomatemáticas de diversas culturas, en la búsqueda del desarrollo de una conciencia de las matemáticas como un producto sociocultural.
Característica 2	Promover en el profesor un espíritu de indagación y brindarle la formación necesaria para que sea un profesor-investigador de las etnomatemáticas, presentes entre sus estudiantes y/o en la comunidad.
Dimensión Didáctica: Faceta ecológica y faceta cognitiva	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Característica 3	Colocar el énfasis en los estudiantes, en sus conocimientos previos, en su cultura y en las formas de legitimar sus conocimientos en el aula, así como tender puentes entre los aprendizajes escolares y los extraescolares.
Característica 4	Propiciar experiencias al estudiante para que constate que estos conceptos siguen vivos y plenamente contextualizados en las sociedades de hoy en día, además que valore el conocimiento extraescolar, en muchos casos oral, de los adultos mayores y encuentre un mayor vínculo de las matemáticas con la vida cotidiana.
Característica 5	Escuchar al otro, el profesor debe estar disponible para escuchar a los estudiantes y abrir su mente hacia la diferencia del pensamiento matemático del otro.
Característica 6	Brindar herramientas que le ayuden al profesor a establecer conexiones entre las matemáticas escolares y otras áreas.
Característica 7	Ampliar el currículo de formación de profesores de matemáticas, yendo más allá de la literatura en educación matemática, incorporando la Antropología, la Sociología, la Psicología, entre otras disciplinas.
Característica 8	Re-pensar la escuela como un lugar de encuentro de saberes matemáticos, de culturas, donde se respete la diferencia y se promueva la equidad y la formación de una nueva ciudadanía y no solo como un espacio para la transmisión de conocimientos.
Dimensión Didáctica: Faceta mediacional	
Característica 9	Ofrecer al profesor herramientas teóricas y metodológicas que le ayuden a integrar los resultados de la investigación etnomatemática en el diseño de actividades, material didáctico y textos escolares.
Dimensión meta didáctico-matemática	
Característica 10	Formar a los profesores como profesionales reflexivos sobre su propia práctica, sobre las necesidades emocionales e intelectuales de los estudiantes y sobre las funciones sociales de la educación y así lograr transformaciones en su acción educativa.

Tabla 2 – Características del conocimiento didáctico-matemático del profesor desde la Etnomatemática

2.2 Elementos Internos al aula y relativos a los mediadores del discurso, como los recursos, las normas institucionales y el currículo

2.2.1 El currículo[iv]

El currículo escolar visto desde la Etnomatemática, debe contemplar las características que se presentan en la tabla 3:

Característica 1	Reconocer las matemáticas como una construcción humana, social y cultural.
Característica 2	Admitir que además del pensamiento matemático occidental, del cual históricamente se reconoce su surgimiento en Grecia, existe una amplia diversidad de pensamientos matemáticos en el mundo y otras racionalidades o multimatemáticas en el sentido de Oliveras (1996).
Característica 3	Acrecentar el conocimiento matemático al incorporar matemáticas extraescolares al aula y conocimientos previos de los estudiantes.
Característica 4	Aceptar la existencia de prácticas matemáticas transculturales, como contar, medir, diseñar, localizar, jugar y explicar.
Característica 5	Incorporar actividades a partir de las experiencias culturales de los estudiantes y de la comunidad.
Característica 6	Promover el respeto, la tolerancia y la equidad a partir del estudio y la reflexión

ISBN 978-84-945722-3-4

	sobre las etnomatemáticas de diversas culturas.
Característica 7	Reconocer a los estudiantes como recreadores y reconstructores de los conocimientos culturales.

Tabla 3 – Características del currículo escolar orientado desde la Etnomatemática

2.2.2 Las evaluaciones estandarizadas[v]

Los maestros se resisten a integrar la Etnomatemática en el currículo escolar, pues sienten que dicha integración no es tenida en cuenta en las evaluaciones nacionales estandarizadas, entonces éstos prefieren enseñar solo los contenidos de las matemáticas escolares y tener buenos resultados en las evaluaciones. Esto ejerce mucha presión en los maestros, porque los bajos resultados en dichas pruebas tienen consecuencias económicas y sociales para la institución educativa y el maestro.

2.2.3 Los niveles de integración de la Etnomatemática en el currículo[vi]

De acuerdo a Vilela (2006) la integración de la Etnomatemática al aula, se ha realizado en buena medida con un interés cognitivo, es decir, utilizando la Etnomatemática como un elemento motivador para luego entrar al tema de matemáticas de forma monocultural. Nuestra propuesta es pasar del interés cognitivo a un interés amplificador donde además de aprender las matemáticas escolares se estudie paralelamente en el aula las etnomatemáticas de la comunidad. Luego, pasar al interés político entendido como la reivindicación de dichos saberes de la comunidad. Esta propuesta permite pensar en posibilidades equitativas y con valor de reivindicación social de una integración de las etnomatemáticas, a largo plazo, en el currículo escolar.

2.2.4 Indicadores de idoneidad desde la Etnomatemática[vii]

Un resultado que apoyará el trabajo del maestro que decida orientar sus clases de matemáticas desde la Etnomatemática, serán los nuevos indicadores de idoneidad didáctica que proponemos adicionar a los presentados por Godino (2013), con el objetivo de contar con un instrumento con el cual se particularice en el análisis de clases, materiales, propuestas curriculares, textos escolares, etc., que se hayan diseñado bajo una perspectiva etnomatemática. En la tabla 4 presentamos los indicadores propuestos.

Componentes	Indicadores
Faceta 1: Idoneidad ecológica (sociedad, escuela, currículo)	
Adaptación al currículo	Se adecúan los contenidos a los fines de la etnoeducación, educación intercultural bilingüe, educación indígena o para las relaciones étnico-raciales. Se adecúan los contenidos a currículos propios locales o proyectos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	institucionales comunitarios
Tiende a la innovación didáctica	Se promueve la reflexión sobre las etnomatemáticas de diversas culturas
Educación en valores	Se explicita una postura política hacia las matemáticas, las ciencias experimentales y la educación que tenga en cuenta la valoración del pensamiento etnomatemático, la equidad, la inclusión social, el respeto por la diferencia, los problemas de género, la democracia
Conexiones intra e interdisciplinares	Se hacen conexiones de las matemáticas con las ciencias experimentales, la antropología, la historia, la sociología, etc.
Interacción con la comunidad	Se tiene en cuenta a la comunidad al diseñar la clase (proyectos educativos)
Faceta 2: Idoneidad epistémica (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos)	
Naturaleza o postura filosófica	Se hace alusión a las matemáticas como productos culturales
Situaciones problema	Se hacen explícitos los objetos matemáticos extraescolares o etnomatemáticos en las situaciones problema. Se resuelven situaciones problema usando diferentes procedimientos, algoritmos escolares y extraescolares
Reglas	Se presentan procedimientos, definiciones, representaciones de objetos matemáticos extraescolares
Argumentos	Se valoran y respetan argumentos basados en lógicas distintas a la occidental
Relaciones	Se establecen comparaciones, relaciones entre los procedimientos, definiciones, representaciones de objetos matemáticos escolares y extraescolares
Faceta 3: Idoneidad interaccional (diálogo, interacción, comunicación)	
Interacción docente-discente-comunidad	Se favorece la participación de la comunidad en la gestión de la clase o de proyectos
Faceta 4: Idoneidad mediacional (recursos técnicos, tiempo)	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	Se usa material didáctico contextualizado, textos escolares diseñados desde una perspectiva etnomatemática o herramientas diseñadas por la comunidad para resolver problemas matemáticos, (el quipu, la yupana).
Metodologías	Se hace uso de Microproyectos (Oliveras, 2005), basados en signos culturales de la comunidad
Faceta 5: Idoneidad afectiva (actitudes, emociones)	
Emociones	Se favorece la motivación de los estudiantes, que se interesen y participen Se mejora su autoestima al estudiar contenidos etnomatemáticos relacionados con su comunidad, con su cultura, con su cosmovisión
Faceta 6: Idoneidad cognitiva (aprendizajes)	
Conocimientos previos	Se tienen en cuenta: los saberes matemáticos previos de los estudiantes, relacionados con su cultura, las formas de razonamiento y argumentación características de su cultura para legitimar su conocimiento en el aula
Aprendizaje	La evaluación contempla los conocimientos matemáticos escolares y extraescolares

Tabla 4 - Indicadores adicionales para evaluar la idoneidad didáctica desde la Etnomatemática

2.3 Elementos externos al aula y relativos al Sistema Educativo

2.3.1 Interés en cambios curriculares[viii]

Un elemento a tener en cuenta, y que pocas veces es analizado, es el interés de los directivos docentes o la administración educativa a la hora de realizar cambios curriculares.

ISBN 978-84-945722-3-4

Una posible explicación es que también se sientan presionados por las pruebas nacionales o por la dificultad que presenta el control y guía de lo diverso, frente a la simplicidad de lo estandarizado.

2.3.2 Fases de un curso de formación de maestros orientado desde la Etnomatemática[ix]

Después de haber analizado diferentes estructuras de cursos de formación de maestros, proponemos una estructura flexible, en términos de las acciones de cada fase, que a su vez sirve para el diseño de nuevos cursos de formación de maestros desde la Etnomatemática, que mostramos en la tabla 5:

Fase	Descripción[x]
Estudio teórico	En esta fase se estudian los fundamentos de la Etnomatemática, se reflexiona sobre la naturaleza de las matemáticas, se leen artículos de investigación en Etnomatemática, artículos sobre la integración de la Etnomatemática al aula escolar, artículos sobre currículo cultural de matemáticas, etc.
Estudio de elementos de la cultura	En esta fase es posible indagar directamente en la comunidad sobre sus prácticas culturales, o recopilar los saberes que cada uno tenga sobre la cultura de su comunidad o de otra. También se puede hacer uso de estudios antropológicos, históricos, arqueológicos, etc.
Diseño de actividades	Se analiza la información recolectada en función de su potencial matemático. Se realiza un análisis didáctico y una transposición didáctica y se diseñan las actividades, microproyectos, o proyectos.
Implementación en el aula escolar	Se implementan las actividades con los estudiantes, prestando especial interés a la motivación que generan, a los procesos cognitivos y matemáticos puestos en juego y al valor político (en términos de legitimación de saberes) de la actividad.
Evaluación de la implementación	Se realiza una evaluación de lo sucedido en el aula al poner en juego la actividad o microproyecto, en términos de los objetivos propuestos, las dificultades de los estudiantes y del valor político de la actividad.
Evaluación del curso	Se realiza una evaluación general del curso que contemple la visión de las matemáticas de los profesores, el desarrollo del curso, el proceso del diseño de actividades y la implementación.

Tabla 5- Propuesta de estructura de un curso de formación de maestros desde la Etnomatemática

2.3.3 La evaluación de cursos de formación[xi]

Otro elemento que proponemos tener en cuenta en el diseño de programas de formación tiene que ver con la evaluación externa de los cursos, entendida como el "proceso sistemático, diseñado intencional y técnicamente, de recogida de información rigurosa, orientado a evaluar la calidad y los logros de un programa, como base para la toma de decisiones de mejora tanto del programa como del personal implicado" (Pérez Juste, 2006, p. 550), que se realiza en tres etapas: Planificación, Implementación y Resultados. Nosotros evaluamos el curso de formación realizado aplicando 46 indicadores tomados de Caraballo (2014), de los que se cumplieron 44. Estos resultados manifiestan un alto grado de: a) Pertinencia en el diseño y planificación; b) Eficiencia en el uso de los recursos, y c)

ISBN 978-84-945722-3-4

Eficacia al haber alcanzado los objetivos propuestos. Adicionalmente, aportamos al modelo un indicador nuevo (indicador 47), que hemos creado para evaluar las dificultades en el logro de los objetivos, surgidas en la implementación del programa formativo, que son debidas a múltiples causas externas (y no son efectos del programa).

2.4 Elementos externos al aula y relativos al Sistema Social

2.4.1 Los conflictos intergeneracionales[xii]

Una limitación, para la integración de la Etnomatemática al currículo, que surge de los estudiantes, es que ellos consideran los conocimientos de sus abuelos o padres como anticuados y sus conocimientos como modernos. La influencia de los medios de comunicación en esta valoración negativa de lo tradicional es innegable, la psicología social puede explicar el influjo de ciertas valoraciones para producir agrupamientos, por ejemplo, por edad o por microcultura tecnológica, que generan sentido de la identidad en niños y jóvenes. Es necesario plantear la cultura ancestral de forma no opuesta a lo moderno o actual, que es lo que los jóvenes buscan como signo cultural identitario.

3. Reflexiones finales

Hemos presentado once elementos, a tener en cuenta para formar al profesorado, como resultado de la investigación doctoral, que no pretendemos sean los únicos, y alentamos a los formadores de maestros a tenerlos en cuenta en el diseño de cursos de formación orientados desde la Etnomatemática.

Referencias

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., y Oliveras, M. L. (2017a). Evaluación de un curso de formación continua de maestros orientado desde una perspectiva etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, en evaluación.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., y Oliveras, M. L. (2017b). Formación de profesores de matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, en prensa.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., y Oliveras, M. L. (2017c). Medidas de capacidad volumétrica no convencionales: aportes a la Educación Primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, En prensa.

Blanco-Álvarez, H., y Oliveras, M. L. (2016). Ethnomathematics: A political tool for Latin America. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, *6*(1), 112–126.

Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas. Una experiencia con profesores*. Universidad de Granada, Granada.

D'Ambrosio, U. (2014). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y

ISBN 978-84-945722-3-4

aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111–132.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas: formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M. L., y Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las etnomatemáticas en el aula de matemáticas: posibilidades y limitaciones. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 455–480.

Peña-Rincón, P., y Blanco-Álvarez, H. (2015). Reflexiones sobre cultura, currículo y etnomatemáticas. In K. de la Garza y R. Cortina (Eds.), *Educación, pueblos indígenas e interculturalidad en América Latina* (pp. 213–246). Quito: Ediciones Abya-Yala.

Pérez Juste, R. (2006). *Evaluación de programas educativos*. Madrid: La Muralla.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87–109.

Vilela, D. S. (2006). Reflexão filosófica acerca dos significados matemáticos nos contextos da escola e da rua. In *Anais III Seminário Internacional de Pesquisa em Educacão Matemática*. Águas de Lindóia: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Wittgenstein, L. (1999). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Ediciones Altaya.

Notas

ISBN 978-84-945722-3-4

CP-146

ADIÓS A LA CABRA, A LA COL Y A LA BARCA
MANIFIESTO POR UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y ACTUAL

Claudi Alsina

Claudio.alsina@upc.edu

Modalidad: Conferencia plenaria

Nivel educativo: Todos los niveles

Palabras clave: Realismo, aplicaciones actuales, nuevos temas

Resumen

El objetivo de esta conferencia es hacer una defensa apasionada de la necesidad de suprimir de la educación matemática temas obsoletos y falsos realismos para dar paso a temáticas nuevas y realidades actuales. Se presentará un manifiesto concreto para lograr estos objetivos.

Dedicada in memoriam a mis admirados amigos Luis A. Santaló y Gonzalo Sánchez Vázquez recordando su apuesta por el primer CIBEM en 1990

Queremos que esta conferencia sea un emotivo acto de despedida a cosas obsoletas y ficciones surrealistas que todavía forman parte de la educación matemática y de las que podríamos prescindir. No es la primera vez que trato este tipo de tema pero convencido del poco efecto que he tenido en el pasado no pienso renunciar a seguir clamando por la despedida de ciertos elementos educativos precisamente para dar entrada a otros. La aceleración de los cambios sociales actuales justifica hoy más que nunca esta revisión.

Lo que el viento no se llevó

Escarlata: ¡Oh Red! Nuestro mundo se hunde. Tantas reformas ... ¿y los grandes cálculos? ¿Dónde están ahora? ¿Quien los hace? ... Las grandes divisiones, las raíces cuadradas y las cúbicas hechas a mano ... Todas estas cosas imprescindibles para ir por la vida ¿quien las enseña? ...

ISBN 978-84-945722-3-4

Red: Las grandes operaciones, querida, afortunadamente el viento se las esta llevando!

Escarlata: ¡Oh Red! Lo han destruido todo. No saben bien las tablas, no saben dividir sumas de grandes fracciones, no conocen lo que es el esfuerzo. Y para colmo ni tan siquiera están de moda aquellos bonitos problemas de barcas , coles y cabras o de maridos celosos y sus señoras cruzando el rio... ¿a donde iremos a parar?

Red: Peor que nosotros no creo que salgan Escarlata. Nosotros no aprendimos nada de verdad. Fuimos cotorras de tablas, listas y memorizamos lo que no entendíamos...pero nada más.

Escarlata: ¡Oh Red! Pero sabíamos los postulados de Euclides de memoria, podíamos dividir por cuatro cifras y sacar las raíces, supimos usar las tablas de logaritmos y podíamos hacer geometría esférica esencial en nuestro mundo redondo ... ¿no sería el momento de volver a todo aquello?

Red: Siempre eres sorprendente querida, ¿qué valor tuvo para nosotros saber que para sumar fracciones se suman los numeradores y se divide por la suma de los denominadores?

Escarlata: ¡Oh Red! Claro que tuvo valor. Nosotros sabíamos que para sumar fracciones se suman los numeradores y se suman los denominadores pero los otros no lo sabían y lo hacían de una forma más complicada. Y esto marcaba la diferencia entre los que fuimos a una escuela de calidad y los que no fueron educados en la matemática tradicional.... no intentes confundirme. A Dios pongo por testigo que esto va a terminar con un regreso a lo de siempre, que ponga las cosas en su sitio.

¡*Fuera lo obsoleto en educación matemática!*

Aplicando el método riguroso que nos caracteriza empezaremos por definir que entendemos por "obsoleto en educación matemática":

> DEFINICIÓN: *Las cosas obsoletas en educación matemática son aquellas cosas anticuadas, que el tiempo ha superado, pasadas de uso o de moda aplicado a métodos, algoritmos, conceptos, problemas, historias, personajes y también metodologías.*

En otros terrenos lo obsoleto ya no está en el mercado ni en la memoria colectiva. Pero, desgraciadamente, en matemáticas hay cosas muy, muy obsoletas que todavía son bien presentes. En otro caso ya ni hablaríamos de ellas, habrían desaparecido del mapa y de las clases, nadie las enseñaría ni nadie se vería obligado a aprenderlas. La supervivencia de lo obsoleto no suele basarse en la mala fe de los que lo explican sino que en la mayoría de los

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

casos todavía se incluyen por la fatal creencia de que: << Esto me lo contaron a mí (y no me ha ido tan mal) >>.

Una cuestión a plantear que resulta a menudo sobrecogedora es: << ¿Cuál fue la última vez que esto lo usó en su vida fuera de clase? >>. En lugar de respuestas acostumbra haber un largo silencio. Hay dos categorías de cosas obsoletas:

1. Cosas obsoletas en vías de extinción pero que todavía hay algunos profesores o programas o libros que las consideran. Cabe la esperanza de que dentro de poco con un nuevo cambio curricular, con un nuevo proyecto editorial o con unas jubilaciones adecuadas desaparecerán del todo.

2. Cosas obsoletas absolutamente boyantes, que todavía hace todo el mundo y están presentes en todas partes. Mucha gente *puede creer que no lo son o no atreverse a dejarlas de lado*, por convencimiento personal o presiones familiares, directivas o institucionales.

Hay que remarcar que el carácter de obsoleto puede tener un factor cultural. Una determinada tradición de un sitio puede mantener viva alguna cosa educativa que en otros lugares ya ha desaparecido. Este hecho nos ayudará, como veremos, a listar muchas cosas obsoletas prescindibles precisamente por el argumento: << Si esto ya no se hace casi en ninguna parte: porque lo seguimos haciendo aquí? >>

El abandono de lo que es obsoleto no sólo es una actitud educativamente sabia sino que es una necesidad para actualizar la educación y para dar paso a lo nuevo. El tema no es neutral:<< Mientras explica esto no explica lo otro >>.

Quizás la razón principal sea que son transmitidas de generación en generación, forman parte de la formación del profesorado y forman un apartado en la memoria de muchos padres y madres. ¡ Y la administración lo recoge !. La renuncia a estas cosas, la elección crítica de lo que ya no es necesario, es posiblemente el obstáculo más duro para las reformas. Por un lado, decir adiós a lo que te sabías bien. Por otra, superar la inseguridad frente a lo nuevo que hay que incluir. Y el esfuerzo de auto-formación que todo ello implica dada la falta de formación permanente efectiva.

He aquí 10 ejemplos de cosas obsoletas pero vigentes en la práctica:

* Operaciones rutinarias extraordinariamente repetidas
* Hacer raíces cuadradas a mano
* Calcular con fracciones poco corrientes, como las torres de fracciones
* Usar las tablas de logaritmos

ISBN 978-84-945722-3-4

* Cálculos relativos a partes de la esfera
* Fórmulas de los volúmenes de figuras truncadas
* Axiomática geométrica en el modelo euclidiano
* Unidades de medidas inusuales
* Funciones sofisticadas al servicio del cálculo infinitesimal
* Cálculos estadísticos hechos a mano con unos pocos datos

Me parece oportuno citar aquí algunos apartados del manifiesto promovido hace 20 años por el grupo canario de Antonio Martín:*<<Manifiesto en contra de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada (atoa)>>:*

1º) La Enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos TRADICIONALES DE LAS operaciones aritméticas (ATOA) ha dejado de ser útil para la sociedad mundial del siglo XXI

4567 + 789 + 6.908 + 12.345 + 34 = 67987-8899 =
23.456 x 78 = 789342: 67 =
657,89 x 34,5 = 6789,78: 34,5 = Raíz cuadrada de 899,8

En la actualidad, ninguno de estos procedimientos se hace fuera de los Centros escolares, y no aportan ni desarrollan ninguna habilidad cognitiva que mejore el razonamiento lógico-matemático, siendo esto último el objetivo fundamental que debería predominar en todas las acciones que hacemos los educadores matemáticos con nuestros alumnos ... .En definitiva, deben morir, no son útiles. Son parte del portal Historia de la Pedagogía ....

2º) Los ATOA fuerzan a las niñas y niños a renunciar a su propio pensamiento. Cuando los alumnos se las anima a inventar sobre Propios Procedimientos, su pensamiento va en una dirección diferente a la de los ATOA que se las enseña ......

3º) Los estudiantes NECESITAN conocerlos, pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a los estudiantes a tener "éxito" en escuela. Es decir, son destrezas para la supervivencia escolar de los alumnos. Al estudiante que no sabe hacer divisiones o multiplicaciones se le considera un fracasado en la escuela ... ..

4º) A comienzos del siglo XXI, no tiene sentido dedicar mayor parte del tiempo de la clase de matemáticas a adiestrar a los alumnos en los ATOA. En el pasado FUE imprescindible sacrificar tiempo y energía al impartir destrezas de cálculo numérico. Hoy no tiene nada que ver con formación matemática el adiestrar seres humanos para hacer lo que las calculadoras pueden hacer mucho mejor...

No necesitamos loros

Aficionados a la repetición, los profesores loros y nostálgicos son amantes de las rutinas que explican avalados por una tradición histórica del <<así se ha hecho siempre>>. No tienen conciencia del tiempo en que viven. Si en lugar de ser profesores hubiesen elegido ser actores su ideal hubiese sido actuar en Londres en el teatro donde se representa desde hace décadas *La ratonera* de Agatha Christie. Se trata de personas eternamente preocupadas por las leyes y decretos que viven con una añoranza enfermiza de los tiempos en que los gobiernos publicaban los programas oficiales de las asignaturas. De mirada fija,

ISBN 978-84-945722-3-4

carecen de espíritu crítico, no tienen ni despiertan la curiosidad y a pesar de mirar tanto no ven lo que tienen delante, sin atender por tanto a aspectos emocionales. A menudo son obsesivos por los exámenes y la <<decimalitis>> derivada. Todos ellos actúan de forma grupal evitando que intrusos creativos puedan alterar los brillantes resultados de su actuación avalada por la repetición de lo mismo. Algunos loros lo disimulan apareciendo en la clase como *Pavos Reales y* exhibiendo su enorme capacidad que tanto contrasta, según ellos, con la pobre situación del aula. Su objetivo es demostrar cada día el teorema <<yo soy mejor que todos ustedes>>. Acostumbran a ser tremendamente aburridos.

La familia es a veces la culpable

Una llamada telefónica:

--Quisiera hablar con el director de la escuela…Bien gracias, espero…

Realmente nunca pensé que tendría que plantearme este cambio de escuela pero el desastre de la que tienen ahora me obliga a dar el paso…

--Si, gracias por atenderme. Seré breve. Mire yo soy un padre de familia con un chico de 9 y una chica de 14 escolarizados en una escuela que ha demostrado ser muy deficiente y le llamo para ver la posibilidad de que el próximo curso pudieran venir a su centro..

---Pues mire la cosa empezó mal cuando mi señora y yo empezamos a notar que los dos iban a clase de matemáticas con interés, sacaban notas muy altas , hacían restas de una forma rara y eran totalmente dependientes de una calculadora. Lo comentamos en casa y para nosotros como padres fue un gran disgusto: a los dos nunca nos interesaron las matemáticas, como es normal, siempre sacamos malas notas y nunca dependimos de las pilas de una máquina…

--Exacto ya me lo habían comentado y por esto le llamo. Me ha interesado que sea el último centro donde aún hacen la raíz cúbica a mano, que exijan la prueba del nueve en todas las operaciones y usen los Elementos de Euclides como libro de texto. Esto es lo que queremos. Habilidad manual , memoria y temas de los de siempre. Pues ya tiene dos nuevos alumnos para el curso que viene. Gracias por atenderme y por conservar lo que nunca debió perderse.

¡Fuera el falso realismo!

ISBN 978-84-945722-3-4

También cabe despedir de las clases los malditos problemas sin sentido, puestos para la pura aplicación "ad hoc" de algo que a menudo ya es obsoleto. Entre las diversas categorías de falsas realidades que rodean muchos problemas citemos algunas de escandalosas: *Realidades falseadas, manipuladas, inusuales, caducadas ,inventadas…*Recuerden el curioso problema inglés*: . Si Enrique VIII tuvo 6 esposas ¿Cuántas tuvo Enrique IV?*
Son situaciones "aparentemente" realistas (presentados con palabras y datos de uso cotidiano) pero deformadas o cambiadas para poder dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios. Ya basta de barcas cruzando ríos, prisioneros mentirosos, castillos rodeados de agua, trenes que se cruzan, botas de vino, aleaciones, jarros traspasando líquidos, tableros rotos de ajedrez, repartos entre herederos sinvergüenzas, viajantes desorientados, maridos celosos, etc., etc., etc. Para colmo se califican estos temas como recreativos. ¡Que cinismo!

El cambio es posible

No podemos confiar que los cambios sean fijados por ley a través de los currículos oficiales como ya evidenció en una ocasión G. Howson.

Como hemos dicho en otras ocasiones se trata de ser activos y positivos e indicar lo que se podría hacer de más siempre que se deje de hacer lo que ya no sirve:

MENOS....	MÁS......
• Explicaciones magistrales	Guiar
• Trabajo individual	Cooperación
• Temas sin contexto	Modelización
• Axiomas y postulados	Descubrimientos
• Memorización	Comprensión
• Algoritmos	Razonamiento
• Evaluación rutinaria	Evaluación formativa
• Simbolismo matemático	Usar varios lenguajes
• Actividades cerradas	Actividades abiertas
• Trabajo abstracto	Conexiones

Y también podemos pensar en una práctica más intensiva de centros de interés motivadores y ligados a temas actuales. Por ejemplo:

- Mecanismos tecnológicos, máquinas, robots, ...
- Codificación, códigos de barras, claves secretas, ...
- Economía virtual
- Democracia y sistemas electorales
- Evaluaciones de relaciones sociales (felicidad)
- Internet, algoritmos de Google
- Uso de las redes sociales en la educación

ISBN 978-84-945722-3-4

- Recogida de datos, encuestas, opiniones, ...
- Tratamiento de la información, visualización, ...
- Formas artísticas: técnicas, representaciones, ...
- La suerte en el juego, apuestas, pérdidas, ...
- La predicción de la vida, esperanza de vida, parámetros de salud, ...
- El consumo familiar, facturas, créditos, cocina, alimentos ...
- El medio ambiente, muestras, datos, intervenciones, modelos...
- Videojuegos y creatividad musical tecnológica
- Objetos de diseño geométrico
- Fotocopiadoras 3D

Y todos aquellos temas que son de actualidad en cada momento. Referentes en innovaciones del estilo que estamos apuntando los hay y con contribuciones de gran calado: George Pólya con sus propuestas sobre resolución de problemas y razonamiento plausible, Hans Freudenthal sobre los procesos de modelización y aplicaciones y educadores de hoy como Mogens Niss, Jan de Lange, Tom Romberg, Werner Blum, Joe Malkevitch, Sol Garfunkel,...

La investigación en Educación Matemática ha probado, por ejemplo, que los estudiantes aprenden mejor en contexto y ello indica que temas actuales son mejor opción educativa. Pero también quisiera llamar la atención a contribuciones de otros campos que igualmente nos pueden inspirar acciones. Interesante es tener en cuenta. L*a ley de Reg Revans* (1907-2003) dice :

<<Para sobrevivir, una organización o una persona, tiene que aprender al menos con la misma rapidez con que cambia el entorno>>.

El filósofo y pedagogo José Antonio Marina está realizando un notable labor en favor de un cambio radical de la educación en general. Me permito seleccionar de una entrevista reciente que le hicieron cuatro de sus afirmaciones:

- *El mundo entero está en estado de emergencia educativa*
- *Hemos entrado en la "era del aprendizaje", y todos vamos a tener que aprender continuamente a lo largo de toda la vida.*
- *El 60%de los puestos de trabajo actuales serán ocupados por máquinas*
- *El gran reto educativo es generar talento que es el buen uso de la inteligencia y el conocimiento*

Manifiesto por una educación matemática realista y actual

1. El uso social de los recursos matemáticos delimita las cosas obsoletas que deben dejar de enseñarse.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. No hay que confundir el interés formativo de los conceptos con los procesos rutinarios suprimibles asociados a los mismos.
3. Todo el tiempo lectivo recuperado al desplazar apartados obsoletos debería permitir desarrollar nuevos conceptos y aplicaciones que son de interés actual.
4. Es preciso interesar y motivar a los alumnos a partir de nuevas acciones de aprendizaje, de problemas actuales del mundo global que es el nuestro.
5. Los nuevos currículos competenciales en matemáticas deberían ser sensibles a su constante actualización. Los currículums estáticos son ya historia.
6. Resolver problemas, modelizar y aplicar son actividades básicas para aprender matemáticas pero enlazando con temáticas y problemáticas actuales.
7. El buen uso de las TIC ha de ser esencial en el proceso educativo pues aporta hoy un valor añadido fundamental.
8. Debemos preparar los alumnos para su adaptabilidad a los cambios acelerados de la sociedad actual, para ser competentes en la era de la revolución del conocimiento.
9. Resulta imprescindible una formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas para asegurar su actualización.
10. La brújula de la educación matemática debe indicar el camino y acompañar hacia el futuro previsible.

Para después del manifiesto...

A través de esta conferencia he intentado defender apasionadamente la necesaria modernización de la educación matemática a la cual hemos juzgado críticamente pero para la que hemos formulado, en positivo, un Manifiesto. Desearía que, al menos, se lleven el Manifiesto como recuerdo del VIII CIBEM y en caso de compartir las ideas aquí “manifestadas” que animen a otros profesores a comprometerse a superar el pasado, a apostar por una educación de calidad hoy y por una matemática interesante para el futuro. Gracias por su atención y por su trabajo.

Y como siempre:

LA MATEMÁTICA RIGUROSA SE HACE CON LA MENTE,

LA MATEMÀTICA HERMOSA SE ENSEÑA CON EL CORAZÓN

ISBN 978-84-945722-3-4

Inauguración del XXIV CIBEM 2117

En esta inauguración virtual del XXIV CIBEM del 2117, retransmitida desde Madrid en 3D a toda Iberoamérica, hemos querido proyectar la que fue, ahora hace 100 años una conferencia, muy típica de aquella lejana época, con músicas del siglo anterior y un powerpoint sin efectos 3D. El conferenciante Claudi Alsina, que murió años después, le puso entusiasmo e imaginación y toda la carga utópica que siempre le caracterizó. Nunca hemos podido saber hasta que punto Alsina confiaba en que algo de lo que decía influiría en alguien, a pesar de que de su discurso se desprende una sincera confianza (al menos aparente). Lástima que en vida Alsina no pudo ver asumidas la mayoría de afirmaciones de su Manifiesto. Pero años después sí que los temas evolucionaron. Su impacto fue a más largo plazo, no durante su vida.

Desgraciadamente, hoy, pasados cien años, seguimos teniendo, trasladado en el tiempo, el mismo problema que Alsina trató: mucha gente ahora en el siglo XXII hace lo que Alsina apuntó como innovación, dejando de hacer cosas que en los últimos cincuenta años han aparecido y merecerían más atención. Desapareció lo obsoleto del siglo XX pero ha quedado todo lo obsoleto del siglo XXI. Ojalá en el CIBEM del 2217 tengamos mejores noticias.

Muchas gracias por su atención. ¡Sean felices!

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-150

LA VIDA COTIDIANA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

José María Sorando Muzás
matematicasmundo@gmail.com
IES Élaios. Zaragoza. España.

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CR
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: vida cotidiana, recursos, problemas

Resumen

Se revisan diversas expresiones y causas de los divorcios entre buena parte de la población y las matemáticas, por una parte; y entre las matemáticas escolares y la vida cotidiana del alumnado, por otra. Se concluye la necesidad de integrar elementos de esa vida cotidiana en el aprendizaje matemático, a través de la resolución de problemas. Asimismo, se analiza la dificultad de determinar qué es la vida cotidiana, cambiante en la geografía y en el tiempo, pero incluso en el contexto próximo y sobre todo en la percepción del individuo, siendo bien diferente en los niveles personal, familiar o social.

Por último, se ejemplifican las ideas anteriores con algunas situaciones cotidianas que pueden ser tratadas matemáticamente en el aula, aportando modalidades para su integración en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

"*La ciencia sin vida lo vuelve a uno arrogante. La vida sin ciencia lo hace a uno inútil*"

Isidoro de Sevilla (560-636)

Abstracción y vida cotidiana

Según la RAE, alienación es el "estado de ánimo en el que el individuo se siente ajeno a su trabajo". ¿No es ese el sentir de muchos alumnos en clase de Matemáticas? Ante algunas encrucijadas, conviene al docente seguir este consejo: "Recuerda el alumno que eras". Permitidme hacerlo. En los años 70 del siglo pasado, al terminar el Bachillerato decidí estudiar la licenciatura en Ciencias Matemáticas. Lo hice, como casi todos mis nuevos compañeros, sin saber qué me esperaba en la universidad. Era una elección basada, por una parte en el prestigio que entonces tenían los estudios científicos; y, por otra, en la habilidad y el gusto por calcular derivadas e integrales, desarrollados en el Curso de Orientación Universitaria. De forma imprecisa, pensábamos que estudiar Ciencias Matemáticas sería un gran "festival de acertijos con símbolos matemáticos".

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En aquella universidad y en aquel momento se impartía una matemática bourbakista, alejada de cualquier intuición, referencia histórica o aplicación. El impacto fue brutal y algunos abandonaron pronto. Una materia se llevaba la palma en cuanto a abstracción e impenetrabilidad, el Álgebra. Salvo algunas referencias aritméticas iniciales, pronto transitamos por estructuras que no podíamos ver ni tocar, etéreos arcanos que solo habitaban en las mentes privilegiadas. Había sido educado en la obediencia, así que, aunque no supiera de qué se trataba aquello, yo estudiaba y promocionaba de curso con buenas calificaciones. Pero, al llegar a tercer curso, un día, me atreví a formular una pregunta a mi profesor de Álgebra durante tres cursos consecutivos, con énfasis especial en la Teoría de Grupos Finitos, su tema de investigación. Era una pregunta sencilla: "*Profesor, esto de los grupos, ¿de dónde viene? y ¿para qué sirve?*".

Yo esperaba una respuesta rápida y consoladora, pero la respuesta que obtuve (su ausencia más bien) iba a ser inquietante a corto plazo e iluminadora en mi futuro profesional. Me respondió el profesor, en un rasgo de sinceridad que primero me enojó pero aún hoy le sigo agradeciendo: "*Pues no sé decirte. Ya me informaré y te digo*".

En aquella pobre respuesta de quien hasta entonces yo veía como un sabio tuve la plasmación del viejo cuento chino titulado *El cazador de dragones*. Aquel cuento que habla de un aventajado alumno de la "Escuela de cazadores de dragones" que, al terminar brillantemente sus estudios y no encontrar dragón alguno que cazar, decidió ganarse la vida… enseñando a cazar dragones.

Mi decepción inicial dio paso a una búsqueda que todavía no ha terminado, intentando saber de dónde viene, dónde está y para qué nos sirve esta prodigiosa construcción del intelecto humano llamada matemáticas. Busqué entonces, siendo estudiante, porque necesitaba encontrar un sentido a tantas horas de estudio. Busqué luego, siendo profesor de Secundaria, porque me propuse no ser otro maestro de la caza de dragones, sino de un pensamiento matemático que pueda ser útil a mis alumnos en el objetivo común a todos los humanos, conseguir una vida mejor. Sigo buscando ahora, inmerso en tareas de divulgación [Ver Sorando (2004-2017)], para mostrar a quienes ya no son estudiantes que, aunque ignoradas, las matemáticas siguen en sus vidas y les pueden proporcionar claves valiosas ante los problemas cotidianos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Con respecto a la teoría de grupos, con el tiempo fui sabiendo de los tres problemas clásicos griegos, pendientes de solución por muchos siglos; de la búsqueda de solución de las ecuaciones mediante radicales, con el atasco en la de quinto grado; de la historia del joven Evariste Galois que murió antes de cumplir los 21 años, en un duelo al amanecer, tras garabatear con prisas en una carta póstuma su geniales ideas que habían de cambiar el destino del Álgebra, con las que otros zanjaron aquellos antiguos problemas pendientes e irresolubles; de los17 grupos de simetría y su presencia en la cristalografía, en la mecánica cuántica, en los mosaicos de la Alhambra o en el arte mudéjar aragonés; del teorema de clasificación de grupos finitos, que consta de más de 15.000 páginas y fue fruto del trabajo de más de 100 investigadores entre 1955 y 1983; etc. Una sola de esas referencias hubiera calmado mi inquietud universitaria, pero aquel profesor no pudo ofrecerme lo que no conocía.

Sirva este largo recuerdo personal para extraer esta conclusión: Las matemáticas debieran ser presentadas como obra cultural y humana. Conocer su historia y sus conexiones es fundamental para conseguir en los estudiantes un verdadero respeto (no temor) y un fundado aprecio (no prestigio vago) hacia ellas. Sobre ese respeto y ese aprecio será posible, con mayor solvencia, llegar a la abstracción. Y de todas las conexiones, las más efectivas para esos fines son las que se refieren a la vida cotidiana, al ser reconocibles y vividas por cada estudiante, ya que estamos hablando de una educación para todas las personas y no para futuros matemáticos.

Desencuentros

Es necesario poner en valor ese carácter universal y democrático del pensamiento matemático, aplicable a toda situación y, en distintos grados, accesible a todas las personas. Necesidad que surge del evidente desencuentro entre una gran parte de la población y las matemáticas, transmitido al alumnado por las familias, el vecindario o los medios de comunicación. Un desencuentro que se expresa en tantos anuncios, concursos de TV, comentarios de calle e incluso declaraciones de personajes públicos que despreocupadamente reconocen su incompetencia matemática, esto último sorprendente en quienes tanto cuidan su imagen en otros aspectos superficiales. Cuántas veces habremos oído frases como "*Las matemáticas son para gente muy inteligente*" o "*Después de estudiarlas, nunca las utilicé*" o *"¿Para qué sirve estudiarlas si ya hay calculadoras y*

ISBN 978-84-945722-3-4

ordenadores?". Y, sabiéndolo, no faltan quienes aprovechan comercialmente ese anumerismo de muchos consumidores.

Otra evidencia del desencuentro está en la anulación del sentido común que parte del alumnado experimenta en clase matemáticas, como si lo que allí se trata fuera ajeno al mundo real. Puede expresarse en repartos donde una sola de las partes es mayor que el total a repartir, medidas inmensas para pequeños objetos, precios descabellados, etc. ¿Por qué ofrecen resultados absurdos que en la vida real jamás aceptarían? Porque se entienden las matemáticas como aplicación mecánica de algoritmos y nada más (típica pregunta en Primaria: *"¿Es un problema de dividir o de multiplicar?*") y la algorítmica no es terrestre, está en otro planeta del que hay que escapar cuanto antes dando un resultado, el que sea.

Como docentes conviene que revisemos de qué modos estamos abonando esas actitudes de distanciamiento y desafecto. Identifico varios:

- Excesivo énfasis en el cálculo primero (Primaria) y en el álgebra después (Secundaria), como rutinas justificadas en si mismas.
- Confusión entre problemas y ejercicios repetitivos, a favor de estos últimos.
- Presentación de los "problemas" al final de cada tema, a modo de justificación de los conceptos y sus propiedades. La construcción del conocimiento ha seguido el camino inverso, de la resolución de un problema y su generalización surgió la teoría.
- Rigidez del profesorado para aceptar soluciones alternativas a la prevista. En ocasiones, la principal pregunta que se plantea el alumnado es "*¿Qué quiere este profesor que le responda?*".
- Falsa realidad. Utilizar elementos cotidianos no conduce a situaciones de vida cotidiana. ¿Alguien averiguó la edad de una persona mediante ecuaciones? ¿Algún granjero hizo recuento de sus cerdos y sus gallinas contando previamente cabezas y patas? Por algo decía Charlie Brown: *"Solo en un problema de matemáticas puedes comprar 60 melones sin que nadie se pregunte qué diablos te pasa".*

Frente a esas prácticas propongo para nuestras clases: menos prisas, menos definiciones, menos apuntes, menos tiempo dedicado a cálculos y ecuaciones; pero más situaciones reales, más formular preguntas, más sorpresas, más búsquedas de información, más ensayos de estrategias y más intercambio de ideas en grupo. Resolvamos verdaderos problemas obtenidos de la vida cotidiana… al menos de vez en cuando.

ISBN 978-84-945722-3-4

Vida cotidiana y resolución de problemas

Según Kant, persona es quien ante una situación examina lo que puede hacer, analiza qué debe hacer y después lo hace. La educación entendida como desarrollo personal debiera cultivar la mirada comprensiva sobre la realidad y la toma de decisiones reflexiva; es decir, la resolución de problemas, donde las matemáticas proporcionan conceptos, instrumentos y método. Pero, como queda dicho, ese aporte educativo esencial no puede realizarse desde la abstracción, como promesa a largo plazo; y menos en un mundo cambiante donde reina la inmediatez. Hoy resulta arduo esperar del alumnado un acto de fe sobre los beneficios futuros de un aprendizaje matemático que perciben como algo ajeno. Para despertar su interés conviene integrar en él elementos curiosos, inesperados o cotidianos. ¿Cómo? Puede ser a través de simples comentarios o con ejercicios en contexto (un profesor francés usó la celebración de los goles del delantero Pogba para plantear ejercicios del Teorema de Pitágoras y, para el mismo fin, yo mismo utilicé una escena de la película *Misión Imposible III*). Pero esa integración de elementos variados es más rica y efectiva cuando nos lleva a plantear y resolver problemas que conciernen a nuestra vida cotidiana.

En este punto quiero resaltar la importancia de articular un relato próximo y creíble. Porque los profesores somos contadores de historias… sí, también los de Matemáticas. Y el que no lo sea tal vez debiera empezar por ahí el análisis de las causas de la apatía de sus alumnos. Un problema de matemáticas cotidianas puede empezar por: "*Esta mañana, al venir al instituto he visto…*" o *"¿Sabéis que dijeron ayer en la televisión?*" o "*Han estrenado una película donde…*". La primera tarea en una situación adornada por anécdotas y vivencias será formular buenas preguntas; luego, separar la información relevante de la que no lo es; a continuación, diseñar un modelo matemático de la situación… una tabla, un gráfico, una notación adecuada, etc.; después, razonar sobre él, haciendo conjeturas y diseñando búsquedas; y al final, solo al final, realizar los cálculos pertinentes, para los cuales usemos los medios tecnológicos a nuestro alcance. El objetivo es pensar matemáticamente, no hacer cuentas.

¿Qué es la vida cotidiana?

Esa pregunta no es tan obvia como a primera vista pueda parecer. Se puede responder algo como: "*Mi vida cotidiana es todo lo que vivo y lo que me importa*". Nuestra labor como

ISBN 978-84-945722-3-4

docentes de matemáticas consiste en mostrar que existe una mirada matemática eficaz en la gestión de esas vivencias e intereses.

Cuando en la primera clase de cada curso, buscando conocer a mis alumnos, les pregunto "*Escribe algo que sea importante para ti*" suelen repetirse estas respuestas: "*Mi familia*", "*mis amigos*", "*sacar buenas notas y pasar de curso*", "*las redes sociales*", "*los videojuegos*", "*el deporte que practico*", "*mi mascota*" y "*mi pueblo*" (bastantes familias de mis alumnos, aunque viviendo en la ciudad, tienen sus raíces en un pueblo al que regresan en días festivos y vacaciones). En otro lugar y tiempo tal vez las respuestas fueran otras porque las urgencias cotidianas lo son (por ejemplo, el camino a la escuela puede ser una cómoda rutina en una moderna ciudad o una aventura con riesgos en un medio rural del Tercer Mundo).

Cualquiera de esos núcleos de vivencias e intereses del alumnado son fuentes prioritarias de situaciones a explorar pues, además de acercar las matemáticas a sus vidas, conllevan autoestima ("*soy importante*") y cercanía afectiva con el profesorado ("*le importo*").

Pero los docentes, como observadores externos, podemos advertir otros elementos cotidianos que influyen en la vida del alumnado y que les pasan inadvertidos por su edad e inexperiencia. Nuestra misión como educadores incluye abrir sus ojos a esa realidad ignorada, lo que conlleva a menudo sensibilizarles hacia lo familiar y lo social. Puede ser el caso del sistema de transportes que usan a diario, el reparto de las tareas domésticas en su casa, la pensión de sus abuelos, las noticias de fraude y corrupción, los sistemas electorales, los datos de desigualdad social, el recibo de la luz, las ofertas comerciales, el etiquetado de los productos que consumimos, etc.

Quedan, además, aquellos elementos cotidianos que no afectan a nuestras vidas pero pueden llegar a interesarnos movidos por una actitud de curiosidad sobre lo cercano (hallazgos y sucesos destacables, lugares y edificios del barrio, horarios comerciales, reciclaje de residuos, geometría de envases y de logotipos, tareas del campo, regulación del tráfico, etc.). Pero también pueden interesarnos por una interiorización de hechos y contextos externos, incluso de ficción, que entran en nuestras casas a través del televisor e Internet (una teleserie de éxito, sorteos de la Champions League, una campaña publicitaria, las clasificaciones deportivas, etc.). En unos y otros, el profesor compartirá su propia mirada matemática y además deberá "estar al día", porque lo que ayer era cotidiano hoy no

ISBN 978-84-945722-3-4

lo es (¿quién se acuerda de Tuenti?) y quién sabe cuánto durará lo más actual, que no por fugaz carece de potencial matemático (el pasado verano leía el interesante artículo "*Aprende matemáticas con Pokemon Go*" de Clara Grima).

Unas y otras fuentes pueden cruzarse y complementarse. Pocas cosas hay tan complejas de definir como "la realidad". Para sus investigadores, algo tan abstracto como el Teorema de Clasificación de Grupos Finitos era un elemento central de su realidad. Quizás por ello este sea el momento de dejar bien claro que las matemáticas no se justifican solo en sus aplicaciones, existiendo motivaciones intrínsecas como la superación de un reto intelectual ("*Porque está ahí*", que dijera George L. Mallory ante el Everest) y otras de tipo estético, que defendía G. H. Hardy. Además, como escribiera Pedro Puig Adam: "*El único conocimiento que nunca se aplica es el que no se tiene*".

Esta ponencia no está proponiendo una enseñanza exclusivamente utilitarista, sino dar cabida en ella a situaciones cotidianas que, de forma para mí incomprensible, a menudo están ausentes en una educación que se dice comprensiva. Veamos ejemplos.

La pensión de la abuela

En enero de 2017, la abuela recibe una carta del Ministerio de Empleo y Seguridad Social donde se le informa de una subida del 0,25% de su pensión que, a partir de ahora será de 637,70 € mensuales. Al mismo tiempo, los noticiarios informan de que el IPC interanual ha subido un 3%. Se estima que en el próximo lustro el IPC subirá, por término medio, un 1,8% anual y que las pensiones lo seguirán haciendo en un 0,25%.

¿Realmente han mejorado con esa subida las condiciones económicas de la abuela? Calcula año a año, durante el próximo lustro, la evolución de la pensión y la del IPC; también, la variación del poder adquisitivo. Exprésalas algebraicamente y mediante gráficas como funciones. Compara las situaciones actual y a cinco años vista.

Grandes sueldos y grandes fraudes

En T.V. he escuchado: "*Messi duplicará su salario fijo, de los 22,8 millones actuales a los 39,4 de la temporada que viene*" (La Sexta 09/03/2016). ¿Qué te parece? Y también he leído esto sobre quien fue Ministro de Economía y Hacienda, Vicepresidente del Gobierno de España y luego Presidente del Fondo Monetario Internacional: "*Rodrigo Rato defraudó 6,8 millones entre 2004 y 2015, según la policía antifraude*" (El País 09/02/2017). ¿Cuántas pensiones de la abuela se pueden pagar con el próximo sueldo de Messi?

ISBN 978-84-945722-3-4

¿Durante cuánto tiempo se podría pagar la pensión de la abuela con el dinero que, según la policía, ha defraudado ese exministro?

Camino de clase

Describe cuál es tu camino diario de casa a clase. Haz estimaciones razonadas de la distancia que recorres, por diversos métodos. Obtén con Google Maps la distancia exacta que recorres. ¿Qué errores absolutos y relativos has cometido en cada estimación? Analiza las causas de esas diferencias.

Si vienes caminando: ¿Qué tiempo tardas? ¿Cuál es tu velocidad media? Estima razonadamente el número de pasos que das.

Si vienes en el autobús urbano: ¿Qué frecuencia tiene? ¿Cuál es la probabilidad de que al llegar a la parada debas esperar menos de 3 minutos?

Matrículas

Ayer observé aparcados ante mí cinco coches con estas matrículas (se muestra la fotografía): 6008 BDC; 1229 GPV; 1823 BDT; 8240 BJT; 2093 DCZ. ¿Observas en ellas algo especial? ¿Cuál es la probabilidad de que esto haya ocurrido por azar?

Recreamos la historia de las matemáticas en lo cotidiano

Sobre el plano de la ciudad podemos adaptar el clásico problema de los puentes de Königsberg, que tratado por Euler dio paso a la topología. Igualmente con dados, los problemas de apuestas, origen del cálculo de probabilidades con Pascal y Fermat.

Atletismo

En la clase hay tres compañeros que practican el atletismo. Uno de ellos, Juan, corre los 400 m lisos. Este sábado le hice una foto en la salida.

Unos corredores están más adelantados que otros. ¿Por qué motivo? ¿Cuál es la compensación que se debe dar al corredor de la calle 2 con respecto al que de la calle 1? Busca los datos necesarios. Para el resto de las calles, ¿hay siempre la misma compensación o es diferente? Razónalo sin necesidad de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

calcularlas una a una.

Analiza matemáticamente estas ofertas

¿Quitar el 21% del precio final es quitar el IVA? ¿Qué porcentaje habría que quitar para conseguirlo? ¿Es mejor o peor para el cliente? ¿Es mejor un descuento de 21 € o del 21%? ¿Qué % de descuento se aplica en la segunda foto? ¿Qué opinas?

Referencias

OEI. Portal *Iberoamérica divulga*. Sección *Matemáticas para la vida cotidiana*. goo.gl/NbdmmZ Consultada 24/02/2017.

RSME (2004-2017). Portal *Divulgamat.* Centro virtual de divulgación de las matemáticas. http://www.divulgamat.net/ Consultada 03/01/2017.

Sorando, J.M. (2004-2017). Web *Matemáticas en tu mundo*. http:// http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/ Consultada 03/01/2017.

VV.AA. (1988-2017). *Suma, revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* FESPM.

VV.AA. (1994-2017). *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Barcelona. Graó.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-162

MATEMÁTICAS ACCESIBLES, MATEMÁTICAS PARA TODOS. EXPLORANDO LENGUAJES VISUALES

Irene TusetRelaño
irenetuset@gmail.com
IES Francisco Giner de los Ríos, Madrid, España

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática
Modalidad:Conferencia (CP / CR / MR)
Nivel educativo: 1. Nivel educativo inicial (3 a 5 años)
Palabras clave: síndrome de Down, subitización, leguajes aumentativos, inclusión

Resumo
¿Cómo introducir los primeros conceptos matemáticos en niños que por su características cognitivas tienen un importante retraso en la adquisición del lenguaje? ¿Existen caminos alternativos que nos permitan enseñarles a pesar de sus dificultades? ¿Qué son los lenguajes aumentativos aplicados a la enseñanza de las matemáticas? ¿Podemos conseguir que las matemáticas sean más accesibles para el alumnado con problemas de aprendizaje? Tras varios años investigando metodologías para desarrollar el pensamiento lógico-matemático de 16 niños con síndrome de Down de entre 4 y 7 años, se presentan los primeros resultados y conclusiones. Diseñamos una secuencia didáctica a partir de la observación y el conocimiento de sus características, de sus puntos fuertes y de sus dificultades. Encontramos que el papel de la subitización, el cuidado en la introducción de la terminología, el uso de lenguajes aumentativos, la utilización de materiales bien diseñados y las nuevas tecnologías, pueden tener un papel fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje. Existen pues maneras de sortear algunas de sus limitaciones. Debemos acompañar este esfuerzo metodológico con una intervención social que acabe con las bajas expectativas sobre sus capacidades por parte de la comunidad educativa y su entorno familiar.

Introducción

Partiremos de una premisa incuestionable: ***todos los niños pueden y deben aprender matemáticas***. Ningún niño debe verse excluido de este aprendizaje. Sin embargo no siempre sabemos cómo lograrlo. Necesitamos encontrar el camino adecuado.

Los niños que son dictaminados como Alumnos Con Necesidades Educativas Especiales(ACNEE) y que están escolarizados en centros de integración o inclusión educativa, comparten aula y parte del currículo con el resto, y no es extraño que se les excluya de las tareas matemáticas por la dificultad que encuentra el docente para enseñarle al mismo ritmo que a sus compañeros. Es entonces el Psicólogo Terapeuta (PT) el encargado de introducirle en los primeros conceptos, normalmente fuera del aula. La enseñanza de las matemáticas se convierte, en ocasiones, en un camino que el niño recorre sin sus compañeros, con actividades diferentes al resto de su clase y a menudo con unas expectativas muy bajas sobre sus posibilidades de aprendizaje. Además, es habitual que se invierta mucho más esfuerzo en que el niño desarrolle la lecto-escritura que la competencia matemática, por lo que suele recibir mucha menos formación en este área. Probablemente porque los métodos de enseñanza de la lectura están más desarrollados que en matemáticas para niños con ACNEE. Indica Geary (2005) que a pesar de los avances de los últimos años, con respecto al conocimiento aritmético de personas con dificultades de aprendizaje en matemáticas, queda mucho por hacer, en especial, con respecto a las problemas aritméticos más complejos e incluso en otros dominios de las matemáticas. La insuficiente investigación sobre las dificultades en matemáticas de los niños con problemas de aprendizaje provoca que los PT no tienen suficientes recursos para formarse y especializarse. El resultado es que existe un grave déficit de competencia matemática en los alumnos con ACNEE que a la larga ve mermada seriamente su autonomía personal para desenvolverse en una sociedad tan matematizada como la nuestra. Además están siendo excluidos del aula con la consiguiente pérdida de socialización y autoestima.

Debemos pues intentar que **todos los niños aprendan juntos en el aula**, con los apoyos pertinentes, pero utilizando lenguajes y materiales que sean accesibles a todos y diseñando actividades que puedan flexibilizarse para que desarrollen todo el abanico de capacidades presentes en el aula.

¿Es posible? No es un reto sencillo, no es un camino que lleve años explorándose, pero es ineludible. En esta conferencia trataremos de dar un enfoque inclusivo a la manera de enseñar matemáticas a partir de una experiencia con niños síndrome de Down de entre 3 y 8 años escolarizados en aulas ordinarias.

ISBN 978-84-945722-3-4

¿Qué estamos enseñando?

Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) subrayan que la investigación realizada sobre la enseñanza de matemáticas para alumnos con ACNEE ha puesto de manifiesto que éstos deben aprender con los mismos principios de enseñanza que el resto del alumnado. En concreto:

- Aprender con comprensión implica conectar u organizar el conocimiento.
- El aprendizaje se construye sobre lo que ya se conoce.
- La instrucción formal de la escuela debe construirse a partir del conocimientomatemático informal.

El aprendizaje de los alumnos con ACNEE, muchas veces no tiene en cuenta estos principios, en especial, el apoyar la introducción de las ideas matemáticas basadas en el conocimiento informal. En ocasiones las expectativas sobre sus capacidades son tan bajas que no se espera de ellos que aprendan más que a mecanizar ciertos procesos aritméticos. Sin embargo un proceso de enseñanza – aprendizaje bien diseñado que tenga en cuenta sus características cognitivas y sociales, puede desarrollar sus capacidades desde el descubrimiento, desde el enfoque constructivista, formando saberes estables que pueda conectar con su entorno. Parafraseando a Brosseau (1986):

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje”.

Debemos pues dejar que el alumno aprenda en su medio natural, el aula, diseñando **metodologías inclusivas** que favorezcan el desarrollo integral del niño.

Lenguajes

Las razones por las que un niño tiene retraso en la adquisición del lenguaje pueden ser de diferente naturaleza pero siempre tiene un impacto en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Trataremos de de potenciar, aumentar esos canales de comunicación a fin de

ISBN 978-84-945722-3-4

que cada niño encuentre el modo de acceder a la información, comprenderla, formular sus descubrimientos, expresar sus dudas o compartir sus experiencias.

- Una dificultad derivada de los problemas de lenguaje la encontramos en las **tareas de conteo**. Los problemas de memoria auditiva, de articulación de sonidos o de motricidad pueden hacer que el niño tenga errores de manera tan frecuente que no se lleguen a aposentar los principios de conteo. Por este motivo el niño tarda mucho en adquirir el concepto de cardinal de un conjunto. Para poder favorecer el proceso de cuantificación, se puede desarrollar de manera específica la capacidad de subitización (cuantificación de un golpe de vista) como patrón visual de la cantidad ordenada. Así, el niño dispone de diferentes herramientas a la hora de cuantificar y puede desarrollar estrategias que le permitan detectar sus errores (ordenar en el conteo los objetos en una disposición conocida).


Figura1:Dedimat


Figura2: Numicon

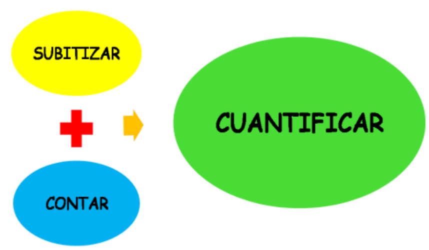


Figura3: Esquema de cuantificación

- **Otro problema es la introducción de los conceptos matemáticos y su lenguaje asociado (oral, simbólico y escrito). Para los niños con dificultades de lenguaje, expresiones como "ordena de menor a mayor" pueden ser altamente complejas de asimilar y, en ocasiones, se da por sentado que el niño no ha adquirido el conocimiento cuando en realidad lo que no comprende es la instrucción. Por eso es importante encontrar canales que mejoren esa comprensión y comunicación.**

Figura4: Pantalla del Pictotraductor

ISBN 978-84-945722-3-4

Los lenguajes aumentativos son aquellos diseñados para aumentar el canal de comunicación habitual (oral y escrito) frente a los alternativos (braille, lengua de signos) que los sustituye.La plataforma ARASAAC (portal aragonés de la comunicación alternativa y aumentativa) Ha creado multitud de material en forma de pictogramas que son de muy fácil acceso (http://www.arasaac.org).

Existen incluso traductores (www.pictotraductor.com) on-line que se pueden utilizar en el aula de manera habitual.

Igualmente existen diccionarios de lenguaje bimodal, basado en gestos que acompañan al lenguaje oral.

Así, cada vez que queremos incorporar un nuevo concepto en clase sería fundamental relacionarlo con un pictograma, un gesto y una situación de contexto para que el niño conecte las tres expresiones y las pueda fijar y trasladar a nuevas situaciones.

Figura5: Incorporación de lenguajes aumentativos

Materiales

Es fundamental también una buena selección de materiales que se adapten a la motricidad de cualquier niño, de fácil manipulación, que pueda utilizar en diferentes contextos y que potencie la subitización y visualización de los objetivos.

Figura6: Combinación del material Numicon con otros materiales

Figura7: Material Dedimat

Materiales como Numicon (distribuido por la Editorial Oxford) o Dedimat (disponible en www.spuzzles.es) son especialmente adecuados y han sido

ISBN 978-84-945722-3-4

probados con niños con ACNEE (Wing, yTacon, 2007).

Tablet

Existen aplicaciones de tablet, como Todomath (www.enuma.com), especialmente diseñadas para superar las barreras del lenguaje, pues necesitan poca instrucción. Utilizando un lenguaje visual y dinámico, potencian la motivación y la autonomía de trabajo del alumno ya que es autocorrectiva.

Figura8: Pantalla de Todomath

Variables didácticas y diseño de situaciones de aprendizaje en el aula.

Además de los lenguajes y materiales, es fundamental que el niño se sienta integrado en las actividades de aula.

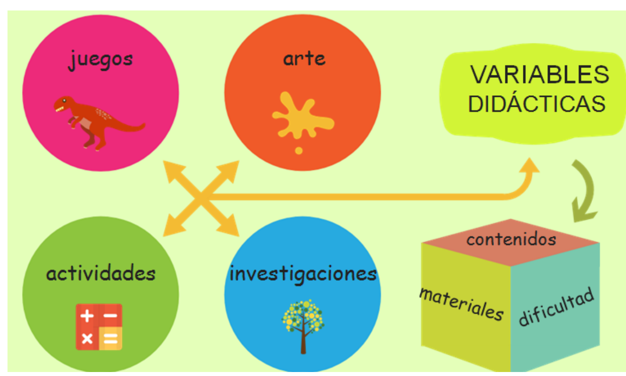


Figura9: Esquema diseño de actividades

Según Brousseau (1986) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

situación. Debemos pues plantear un diseño acertado y manejar de forma adecuada las variables didácticas para poder variar los contenidos, los materiales utilizados y la dificultad de los objetivos planteados.

En esta conferencia se presentan varias actividades (situaciones de diferente naturaleza, como el juego simbólico, el juego lúdico, investigaciones, canciones, etc.) analizando las variables didácticas que podemos manejar para cubrir todo el abanico de necesidades del aula.

Por último se presentan resultados preliminares sobre **dos niños** con síndrome de Down de 6 y 7 años participantes de una investigación más amplia que está realizando con 12 niños con síndrome de Down (3 y los 7 años). Esta investigación hasta el momento ha constado de las siguientes fases de desarrollo:

1º. Evaluación inicial de los niños sobre su conocimiento numérico temprano.

2º. Formación a los docentes a cargo de los niños (tutores y PT) y entrega de la documentación necesaria para implementar una secuencia didáctica encaminada a desarrollar la capacidad de subitización de los niños, las relaciones de orden, la cardinalidad, la composición, la descomposición y los hechos numéricos.

3º. Desarrollo y seguimiento de la implementación de la secuencia didáctica.

4º. Evaluación intermedia del proceso.

Se continuará con el desarrollo de la secuencia didáctica y se realizará la evaluación final.

La evaluación intermedia ya realizada de los sujetos citados anteriormente, permite observar que han adquirido la capacidad de subitizar de manera ágil tanto la disposición de los puntos el dado (hasta el 6) como la disposición binaria (hasta el 10). Además se observa una mejora con respecto al inicio de la experiencia en los siguientes aspectos:

- Flexibilidad en las estrategias de cardinalidad (contar, agrupar, subitizar)
- Capacidad para producir cantidades
- Capacidad para expresar resultados y formular dudas
- Estrategias para detectar y corregir errores

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Relaciones de mayor, menor y orden
- Capacidad para estimar cantidades
- Capacidad para comprender la composición y descomposición en contexto.
- Adquisición de los primeros hechos numéricos
- Iniciativa y seguridad a la hora de aplicar los conocimientos en su vida diaria
- Mejora del lenguaje matemático correspondiente a su etapa
- Predisposición positiva ante cualquier actividad matemática.

Los resultados positivos encontrados invitan a seguir trabajando en esta dirección para facilitar el aprendizaje a todos los niños, no solo con síndrome de Down, que puedan verse beneficiados de este enfoque metodológico. Además, esta metodología y muchas de las actividades propuestas no son incompatibles con su aplicación en el aula inclusiva con todos los niños del aula, puesto que aumentar las estrategias y los canales de comunicación no pueden más que mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Aguilar, Ciudad, Lainez, Tobaruela (2010). *Construir, jugar y compartir. Un enfoque constructivista de las matemáticas en la educación infantil.*
Enfoques educativos S.L. (Ed)

Brousseau G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática,Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Geary, D. (2005). Learning disabilities in arithmetic and Mathematics. EnCampbell, J. (Ed.), *Handbookof mathematical cognition* (253-267). New York and Hove: PsychologyPress.

Kilpatrick, J. Swafford, J. Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. NationalAcademicPress. Washington, DC.

LOMCE (2013).Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE 295, Martes 10 de diciembre de 2013.

Wing, T. y Tacon, R. (2007). Teaching number skills and concepts with Numicon materials.*Down SyndromeResearch and Practice, 12(1), 22-26.*

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-165

A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENTRE REFLEXÃO E PRÁTICA

José Manuel Matos
jmm@fct.unl.pt
Universidade Nova de Lisboa, Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento, Portugal[4]

Núcleo temático: Seleccionar uno de los núcleos propuestos
Modalidad: CB, T, MC, P, F, CP, CR
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palavras chave: educação matemática, história da educação matemática, teoria da educação matemática, design research

Resumo

A Educação Matemática é simultaneamente uma área de estudo e de prática e a forma de articular estas duas vertentes atravessa todo o percurso da constituição deste campo. Esta conferência procura mapear os distintos modos como desde a fundação da Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM ou ICMI) até aos nossos dias a intervenção sobre os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática tem entendido a relação entre a prática e a reflexão sobre essa prática.

Os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática requerem simultaneamente uma atenção à prática, mas também uma reflexão sobre essa prática. A Educação Matemática, o campo que se dedica ao estudo e à intervenção nos problemas relacionados com o ensino e a aprendizagem da matemática, é hoje pois simultaneamente um espaço de estudo e de prática e é fundamental encontrar formas de articular estas duas vertentes.

Esta conferência procura mapear os distintos modos como desde a fundação da *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM ou ICMI) até aos nossos dias a intervenção sobre os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática tem entendido a relação entre a prática e a reflexão sobre essa prática.

Nascimento do campo de educação matemática

A preocupação com a prática — métodos de ensino, materiais, programas, tópicos curriculares — esteve presente pelo menos desde a fundação da *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM ou ICMI) em 1908. Datam desse tempo os primeiros levantamentos dos sistemas de ensino da matemática em diversos países, bem

[4] Conferência apoiada por fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016.

ISBN 978-84-945722-3-4

como as primeiras reformas internacionais (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). Por exemplo, realiza-se em 1914 uma *Conference internationale de l'enseignement mathématique* organizada pela CIEM em Paris que debateu precisamente o andamento das reformas do ensino da análise em curso em diversos países (Zuccheri e Zudini, 2014).

Será apenas a partir da segunda metade dos anos 1960, após a vaga das grandes alterações curriculares da Matemática Moderna que a comunidade de educadores matemáticos começou a prestar mais atenção à dimensão de reflexão (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). Embora seja desta época o alargamento do âmbito das intervenções curriculares, por exemplo ao pré-escolar e à educação profissional e de adultos, deixou de ser suficiente construir argumentos alicerçados apenas em teorias apelativas, relatar casos favoráveis de alunos nos quais as intervenções curriculares surtiam efeito ou omitir muitas das dimensões psicológicas e sociais que teimavam em perturbar a aplicação de métodos de ensino que se tinham como exemplares, isto é, passou a ser necessário fundamentações mais fortes. Consequentemente, o foco passou de questões de programas e sua aplicação para um estudo amplo de várias dimensões da educação matemática.

Esta reflexão sobre o papel e os métodos de ensino da matemática que vai conduzir a uma gradual insatisfação com a mera experimentação de alterações curriculares coincide com uma alteração de fundo na relação entre matemáticos e educadores matemáticos que vinha germinando desde os anos 1950 (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013). O afastamento entre as duas áreas tornou-se público quando Hans Freudenthal, então Presidente da ICMI, *International Commision in Matematics Instruction*, decide em 1968 lançar a revista *Educational Studies in Mathematics*, focada na publicação de artigos de investigação — e que espoletou a criação de outros jornais similares — e organiza em 1969 o primeiro *International Congress on Mathematics Education* (ICME), iniciativas tomadas sem dar conhecimento à *International Mathematical Union* de quem a ICMI dependia.

Sabemos hoje que os matemáticos e os educadores matemáticos olham para a matemática de forma diferente (Kilpatrick, 2008). Enquanto que para os primeiros ela é uma ciência da quantidade, do espaço, da estrutura e da mudança, para os segundos a matemática é sobretudo um campo de prática. Esta distinção levou tempo a sedimentar e só a partir dos anos 1960, no contexto das grandes reformas curriculares da Matemática Moderna, se tornou claro que os problemas de ensino e aprendizagem da matemática envolvem muitas dimensões para além das estritamente matemáticas — na época pensava-se sobretudo nas dimensões psicológicas e de política educativa.

Tornou-se também claro, especialmente a partir de meados dos anos 1960, a importância de adotar métodos de investigação que sustentassem as propostas curriculares em curso. O desconforto com a ausência desta reflexão é sintetizada por Edward Begle, então na Universidade de Stanford, precisamente durante o primeiro ICME. Referindo-se às discussões sobre os trabalhos apresentados, declara que:

> "A dimensão factual foi gravemente negligenciada em todas as nossas discussões e (...) a maioria das respostas que foram fornecidas tiveram geralmente pouca justificação empírica. Duvido se não será o caso de que muitas das respostas dadas às nossas perguntas sobre educação matemática estão completamente erradas. Em vez disso

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

acredito que estas respostas eram geralmente demasiado simplistas e que os comportamentos matemáticos e realizações de estudantes reais são muito mais complexos do que as respostas nos querem fazer crer.” (Begle, 1969, p. 233)

A educação matemática como campo académico

Esta mudança do final dos anos 1960 é determinada por uma crescente necessidade de os especialistas em educação matemática serem reconhecidos e respeitados na academia como cientistas (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013) e deverem, pois, adotar métodos de investigação “mais científicos”. Sintomaticamente, o primeiro ICME de 1969 propõe que deve ser dado um lugar adequado à nova ciência da educação matemática nos departamentos de matemática das universidades ou dos institutos de pesquisa e as Resoluções do Congresso assumem que a educação matemática estava a tornar-se numa ciência de direito próprio, com seus próprios problemas relacionados com conteúdo matemático e pedagógico.

Seguindo estas tendências, diversas organizações de pesquisa que combinam a prática em escolas com a investigação teórica são fundadas em países europeus. Na Alemanha Ocidental, em 1968 o *Zentrum für Didaktik der Mathematik* (Centro para a Didática da Matemática) em Karlsruhe por Hans Georg Steiner e Heinz Kunle, e o *Institut für Didaktik der Mathematik* (Instituto para a Didática da Matemática) em Bielefeld por Steiner, Michael Otte e Heinrich Bauersfeld. Em França são fundados a partir de 1969 os primeiros IREMs, *Instituts de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques* (em Lyon, Paris, Estrasburgo). No início dos anos 1970 é criado em Southampton o *Collaborative Group for Research in Mathematics Education* com Geoffrey Howson e Bryan Thwaites. Em 1971 Hans Freudenthal fundou o IOWO, *Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs* (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013).

Não foram apenas tendências internas que pressionaram mudanças na educação matemática. Em meados da década de 1970 uma colaboração entre a *International Commision on Mathematical Instruction* e a UNESCO foi um passo importante para aprofundar a discussão de questões já levantadas. O objetivo era preparar a elaboração do quarto volume da série de livros *New trends in mathematics teaching* (Steiner e Christiansen, 1979). Pretendia-se não apenas identificar os principais problemas no campo da educação matemática, mas também orientar e monitorar a direção e a intensidade das mudanças ocorridas no campo.

Como consequência desta abordagem aprofundada, o quarto volume das *New Trends* continha capítulos dedicados à discussão de questões curriculares em vários níveis — incluindo a educação de adultos, o ensino universitário e o uso da tecnologia. O livro também continha um capítulo sobre a vida profissional dos professores de matemática e outro que discutia metas e objetivos para a educação matemática da autoria de Ubiratán D’Ambrósio que prepara o seu trabalho posterior no âmbito das dimensões sociais e culturais da matemática (Furinghetti, Matos e Menghini, 2013).

No cerne do campo de Educação Matemática vai então passar a estar a sua vertente de investigação. Jeremy Kilpatrick (1992) define-a como um questionamento disciplinado (disciplined inquiry). É um questionamento (ou um exame) porque responde a questões específicas, não é especulação vazia nem discussões centradas em si próprias. É

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

disciplinado porque é guiado por conceitos e métodos de diversas disciplinas, e é divulgado de modo a ser examinado e verificado. Não precisa de ser baseado em hipóteses testadas empiricamente, mas deve ser académico, público e aberto à crítica e a possíveis refutações.
Em sentido semelhante, Alan Bishop aponta três componentes para que um estudo se qualifique como de investigação em Educação Matemática (1992):

> "• Inquirição (enquiry), que se refere à razão para a atividade de investigação. Representa a busca sistemática de conhecimento, a procura da compreensão, e dá o dinamismo à atividade. Uma investigação deve ser uma inquirição *intencional*.
>
> • Evidência (evidence), que é necessária para manter a investigação relacionada com a realidade da situação de educação matemática em estudo, seja ela aulas, programas, livros de texto, ou documentos históricos. A evidência seleciona a realidade sobre a qual a teorização se foca.
>
> • Teoria (theory), que reconhece a existência de valores, suposições e relações generalizadas. É a forma pela qual representamos o conhecimento e a compreensão que provem de qualquer estudo de investigação em particular. A teoria é o produto essencial da atividade de investigação e a teorização é, portanto, o seu objectivo essencial." (Bishop, 1992, p. 711, itálico no original)

Diversidade em educação matemática

Seria no entanto errado supor que existe uma uniformidade no conceito de investigação em uso pelos pesquisadores em educação matemática. Ao contrário de outros campos, tais como as ciências naturais e físicas, a educação matemática apoia-se em métodos de outros domínios de estudo como a psicologia, sociologia, a antropologia, estudos históricos culturais, o que a lança em direções multidisciplinares e desconhecidas quer do ponto de vista teórico, com os seus paradigmas por vezes em conflito, quer do ponto de vista da articulação de distintas metodologias de investigação, com pressupostos por vezes em oposição.

> "Embora isso tenha contribuído para a complexidade inerente a um campo que lida com a cognição e sujeitos socialmente situados dentro dos maiores contextos de instituições e cultura, também deu motivo para celebrar a natureza multidisciplinar da educação matemática." (Sriraman e Nardi, 2013, p. 304)

Na tentativa de caracterizar essa diversidade, Bishop desenvolveu o conceito de *tradições de investigação*. Diferentemente dos paradigmas de investigação, as tradições são o

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

resultado da “criação [*upbringing* no original], educação, base cultural e formação em investigação” (Bishop, 1992, p. 712). Ao estudar as atas do primeiro ICME, ele fez emergir três diferentes tradições. Uma é tradição do pedagogo, que valoriza o papel dos professores que refletem sobre sua prática, sendo a experiência e a observação os componentes-chave da pesquisa. A tradição empírica-cientista estava refletida na posição de Begle, e acredita que a chave para o conhecimento e o processo de investigação se foca na atenção sobre os métodos de obtenção de elementos de prova e analisa-os, muitas vezes quantitativamente. Em terceiro lugar, encontrou a tradição escolástica-filosófica, que se baseia na análise, na teorização racional e na crítica. A realidade do ensino é aqui uma manifestação imperfeita destas propostas teóricas.

O caso português

Em Portugal antes de meados dos anos 1980 encontramos muitas experiências pedagógicas e grupos de reflexão sobre métodos de ensino da matemática, em especial desde a época da experiência da Matemática Moderna (Matos, 2009). No entanto, as investigações, no sentido de questionamento disciplinado proposto por Kilpatrick (1992), são muito escassas (ver Ponte, Matos e Abrantes, 1998 para uma análise destes poucos trabalhos).

As condições para o desenvolvimento de reflexões académicas sobre o tema apenas são criadas no princípio dos anos 1970 quando a formação de professores de matemática para o ensino pós-primário passou a estar centrada nas universidades, obrigando à constituição de um corpo de especialistas em ensino da matemática. No entanto, apenas a partir de meados dos anos 1980 ocorre a formação de uma comunidade de educadores matemáticos acompanhando um período de grande dinamismo em que se congregam diversos grupos de professores de matemática de diversos graus de ensino e de professores universitários e em que se funda a Associação de Professores de Matemática (Matos, 2008).

Os primeiros trabalhos de investigação começam pois a ser publicados a partir de 1985, num contexto de forte oposição à Matemática Moderna e à tradição de investigação francófona que, na mente dos atores da época, a ela estava associada (Matos, 2011). Não será pois de admirar que, incorporando a formação anglo-saxónica da maior parte dos seus membros, as primeiras pesquisas em educação matemática assumam já uma valorização do confronto empírico na formulação das suas conclusões. Contrariamente, no entanto, à tendência corrente no mundo anglo-saxónico da época, em que raras vezes a pesquisa incluía referências a abordagens teóricas (Kilpatrick, 1992), boa parte dos trabalhos assumem uma ligação a teorias, sobretudo a de Jean Piaget (mas não só, por exemplo, van Hiele também é referido).

Em conclusão

Temos vindo a assistir a um aumento significativo da complexidade do campo da educação matemática. Por um lado, e do ponto de vista da teoria, a compreensão e melhoramento dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática apenas podem ser abordados recorrendo a uma multiplicidade de disciplinas e de paradigmas que incorporem inúmeros fatores envolvendo pessoas, conteúdos, contextos, história, políticas e valores. Esta interligação entre áreas científicas obriga a que os educadores matemáticos sejam capazes de apreciar construtiva e criticamente contribuições com uma origem por vezes distante das suas referências habituais e, em particular, conheçam alternativas metodológicas que eventualmente habilitem ao esclarecimento de aspetos do seu objeto de pesquisa que

ISBN 978-84-945722-3-4

tenham estado impermeáveis ao questionamento ou que iluminem zonas já bem trabalhadas, mas que agora adquirem novos significados e induzem portanto novas consequências.

Por outro, e do ponto de vista da prática, o tradicional afastamento entre o investigador e o objeto de investigação tem vindo a ser questionado. Discute-se, em particular, a validade de propostas de intervenção elaboradas sem a participação dos intervenientes, especialmente nos campos do desenvolvimento curricular, em que o saber especializados dos professores é fundamental para garantir a adequação das propostas e no da formação de professores, em que desde há bastante tempo se compreendeu as limitações decorrentes de intervenções que não contemplem espaços para uma reflexão profissional e que não contenham explorações de intervenções em aula.

Referencias bibliográficas

Begle, E. G. (1969). The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 232–244.

Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 710-723). Nova Iorque: Maxwell Macmillan.

Furinghetti, F., Matos, J. M. e Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. Em A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). Nova Iorque: Springer.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Maxwell Macmillan.

Kilpatrick, J. (2008). The development of mathematics education as an academic field. Em M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi e F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education* (pp. 25-39). Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. *Investigación en Educación Matemática XII*, 141-158.

Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. Em K. Bjarnadóttir, F. Furinguetti e G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education, Garđabær, Iceland, June 20-24 2009*. Reikyavik: University of Iceland.

Matos, J. M. (2011). Identity of mathematics educators. The Portuguese case (1981 - 1990). Em M. Pytlak, T. Rowland e E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1740-1749). Rzeszów, Polónia: University of Rzeszów.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Sriraman, B. e Nardi, E. (2013). Theories in Mathematics Education: Some Developments and Ways Forward. Em A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e F. Leung (Ed.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 303-325). Nova Iorque: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

Steiner, H. G. e Christiansen, B. (Eds.). (1979). *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV). Paris, France: UNESCO.

Zuccheri, L. e Zudini, V. (2014). History of Teaching Calculus. Em A. Karp e G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 493-513). Londres: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-172

FRANCISCO VERA EN COLOMBIA Y LA PROFESIONALIZACION DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Luis Carlos Arboleda
luis.carlos.arboleda@gmail.com
Universidad del Valle, Cali - Colombia

Núcleo temático: Tema VIII
Modalidad: Conferencia
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: Historia de la educación matemática, Francisco Vera, Universidad Nacional de Colombia

Resumen

Se mostrará que la historia de la educación matemática ofrece lecciones interesantes sobre la construcción de escuelas de pensamiento matemático en nuestros países. Situada debidamente en una perspectiva pedagógica, esta historia puede igualmente contribuir a enriquecer los enfoques de formación de docentes en nuestros contextos sociales y culturales. Nos centraremos en la transición de las matemáticas del ingeniero a las matemáticas profesionales en los años 1940-1950, periodo en el cual empezaron a introducirse en el país las primeras formas de institucionalización y profesionalización de las matemáticas universitarias como práctica independiente de la formación de ingenieros. El caso de estudio es el impacto que habrían tenido en esta transición los cursos y conferencias en matemáticas y historia de las matemáticas impartidos por el matemático e historiador de las matemáticas español Francisco Vera (1888-1967) durante su exilio en Colombia (1941-1944).

Recepción de la Teoría de Conjuntos en Colombia

En la “Advertencia al Lector” de su obra *Introducción a la Teoría de Conjuntos* (Vera, 1948), Vera informa que elaboró este libro a partir de las notas del curso que dictó sobre estas materias en septiembre y octubre de 1942 en Bogotá por encargo de la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Vera recuerda que alcanzó a publicar las dos primeras lecciones durante su estadía en Colombia, pero que tuvo que suspenderlas por “las dificultades tipográficas con que tropecé, unidas a mi desplazamiento a la Argentina”. Estas lecciones preliminares aparecieron en la revista de la Academia Colombiana de Ciencias (Vera, 1942). Si se compara este trabajo con la versión final publicada en Buenos Aires (Vera,

ISBN 978-84-945722-3-4

1948), se reconoce evidentemente el atraso del medio local bogotano en cuanto a capacidades y técnicas de impresión de signos y símbolos lógicos del lenguaje conjuntista, que dificultaban la empresa de difusión y apropiación de las matemáticas modernas entre quienes empezaban a interesarse por ellas.

De acuerdo con (Sánchez y Albis, 2009), la introducción de la teoría de conjuntos en Colombia empezó con este ciclo de seis conferencias de Vera. El primer capítulo trata de las nociones preliminares de conjuntos (cardinal y ordinal, el principio de Schröder, las operaciones entre conjuntos); el segundo se refiere a la caracterización del continuo matemático (el principio de la diagonal, la continuidad de la recta real, la comparación de infinitos). En los capítulos siguientes se exponen, respectivamente, los problemas de la teoría de la dimensión, las propiedades de los conjuntos ordenados y bien ordenados, la hipótesis del continuo, los fundamentos de la aritmética transfinita y se concluye con las paradojas del transfinito.

Aunque el carácter general del libro es divulgativo, Vera incluye numerosas referencias bibliográficas en notas de pie de página sobre la producción especializada en conexión con distintos temas de su tratado de matemática conjuntista. Las evidencias disponibles no son suficientes para documentar el impacto en Bogotá de los cursos impartidos por Vera, es posible imaginar que el verdadero propósito de estas referencias de mostrar la relevancia y fecundidad investigativa de los nuevos temas de la matemática conjuntista, no pudo pasar desapercibido de sus oyentes y lectores. El testimonio de uno de ellos, Mario Laserna, comprueba esta afirmación.

Con una inclinación particular hacia las ciencias y las matemáticas desde sus estudios de bachillerato, Laserna se sintió tan atraído por los cursos y conferencias de Vera que tomó clases particulares con él entre 1942 y 1944. Esta experiencia lo persuadió de que era necesario promover el desarrollo de las matemáticas avanzadas en el país. Decidió entonces viajar a adelantar estudios de matemáticas y física en la Universidad de Columbia en Nueva York. En 1948 retornó al país con el proyecto de crear la Universidad de los Andes (1949) que adoptaba en sus programas académicos el modelo norteamericano del ciclo básico en matemáticas y humanidades (Albis y Sánchez, 2012).

ISBN 978-84-945722-3-4

Seis años después de que Vera introdujera en sus conferencias y publicaciones las bases generales de la teoría de conjuntos y la geometría de espacios abstractos, su discípulo de entonces, Laserna, facilitaba con la visita al país de von Neumann y Lefschetz en 1950 la cualificación en el nivel de divulgación de tales bases. No se conocen los contenidos y el nivel de las conferencias, pero es posible inferir algunos elementos al respecto por la correspondencia que Laserna sostuvo con ambos matemáticos en la preparación de su visita, y por las noticias de prensa anunciando el acontecimiento (Ortiz Guzmán, 2011).

Según la correspondencia se sabe que uno de los temas de las charlas acordados inicialmente con von Neumann era “el álgebra de campos de números y constructibilidad geométrica”, el cual se impartiría de acuerdo con el libro *What is Mathematics* de (Courant y Robbins,1941). Pero este acuerdo no pudo concretarse y la parte matemática del curso de von Neumann se orientó finalmente hacia la Teoría de Integración, siendo esta tal vez la primera ocasión en que se divulgó en el país la integral de Lebesgue antes del curso de 1952 sobre Teoría de la medida impartido por Horváth en la Universidad Nacional con base en el correspondiente fascículo de Bourbaki (Horváth, 1993).

En una de sus cartas a Laserna, von Neumann sugiere incluso el título de una de sus charlas: “El método axiomático y de la teoría de conjuntos ejemplificado por el tratamiento axiomático de la teoría de números”. En otra carta, después de ponerse de acuerdo en hablar sobre teoría de integración, insiste en que “también podría hablar sobre teoría elemental de conjuntos, esto es, sobre conceptos de G. Cantor de órdenes de infinitud y su tratamiento matemático¨. Por su parte, Lefschetz dictó varias conferencias sobre las bases de la teoría de conjuntos, la topología de posición y los métodos del álgebra. (Ortiz Guzmán, 2011).

Este enfoque difiere claramente del que Vera empleó años atrás en su ciclo de conferencias sobre los conjuntos. En primer lugar, su presentación de la teoría de conjuntos parece entonces más orientada a las necesidades de fundamentar el análisis infinitesimal en el continuo real que a relacionar los conjuntos con las estructuras algebraicas. A Vera le interesa sobre todo destacar el origen histórico de la noción de grupo en los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones, y sus aplicaciones a los grupos de transformaciones. En varias obras divulgativas sobre las matemáticas Vera se refiere

ISBN 978-84-945722-3-4

episódicamente al álgebra moderna y a los grupos como teorías de gran trascendencia en su época. Por ejemplo, en sus *Veinte matemáticos célebres* (Vera, 1961), publicación tardía de otro ciclo de conferencias históricas que dictó en Bogotá, ahora en el marco de un programa de divulgación científica auspiciado por el Ministerio de Educación Nacional.

En la *Introducción* (Vera, 1948) no se establece ninguna conexión entre conjuntos y estructuras algebraicas. En otras obras eventualmente sí se establece esta conexión, pero desde el punto de vista de la genealogía de las ideas o como mención del estado del arte de las investigaciones sin avanzar en su tematización matemática. Así, en la *Breve historia de las matemáticas*, al presentar “las tres piedras angulares de la matemática contemporánea” (funciones, grupos y conjuntos), Vera se refiere simplemente a la teoría abstracta de los grupos como uno de los campos de investigación más fecundos de los últimos tiempos, y menciona al azar los nombres de Sophus Lie, Cremona, Clifford, Noether y Cartan (Vera, 1946).

Un procedimiento parecido se emplea en el capítulo de su *Breve historia de la Geometría* bajo el título “La geometría y la teoría de grupos”, donde informa sobre los tres grupos fundamentales de la geometría: métrica, proyectiva y topología (Vera, 1944). En el capítulo II de su *Matemática para ingenieros* dedicado al Análisis combinatorio, se introduce la noción de grupo de acuerdo con el enfoque histórico de su génesis en el análisis matemático (como grupos de sustituciones entre n elementos y n combinaciones lineales) y no como estructura algebraica (Vera, 1950-53). Incluso se definen las operaciones de isomorfismo y simetría entre grupos, pero no se avanza más allá en un tratamiento algebraico abstracto de los grupos. Tampoco lo hace en el capítulo III sobre los números reales. A pesar de que construye los reales y establece sus operaciones fundamentales mediante las cortaduras de Dedekind, Vera insiste en mantener la interpretación intuitiva del principio de continuidad de los reales en términos de la biyección entre números y puntos de la recta geométrica.

Es interesante retomar algunas informaciones sobre el estado de la institucionalización de las matemáticas en Bogotá que aparecen en los prólogos de dos de las obras antes mencionadas. En el prólogo de (Vera, 1948) se recuerda que este ciclo de conferencias era parte de una estrategia de la Sociedad de Ingenieros para divulgar la matemática pura,

ISBN 978-84-945722-3-4

"puesto que la que se explicaba en la Universidad Nacional tenía más carácter concreto que abstracto, ya que entonces no existía aún en Colombia la Facultad de Ciencias creada recientemente". Efectivamente esta Facultad se creó en 1946 con el claro propósito de proporcionarle el espacio institucional adecuado a la formación científica y matemática de los estudiantes de la Universidad Nacional (Sánchez y Albis, 2012). Con esta apreciación se muestra que Vera seguía con atención desde su exilio en Argentina, un proceso del cual él había sido pieza clave durante su estancia en Bogotá, y que apuntaba a establecer un clima más favorable para el estudio de las matemáticas abstractas, lo cual pasaba por transformar la tradición de enseñanza de las matemáticas clásicas en la profesión de ingeniero.

El prólogo de (Vera, 1961) contiene un aparte que sumado a las informaciones aportadas por (Cobos y Vallejo, 2014), arroja luz sobre las representaciones del ambiente cultural de Bogotá a las que se enfrentó Vera en su enseñanza de las matemáticas modernas. Como ya de dijo, el libro es la publicación tardía de las conferencias de Vera bajo el mismo título (*Veinte matemáticos célebres*). En este aparte Vera defiende la estrategia comunicativa "de espaldas al pizarrón y de cara al público", que él empleaba en sus charlas, como la más apropiada para la popularización de la ciencia. En (Cobos y Vallejo, 2014) se publican dos textos ilustrativos de las tensiones locales en cuanto a esta estrategia.

El primero es una nota del periódico estudiantil *Alpha* de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería. En ella se cuestiona la enseñanza de Vera como nebulosa y peripatética, empleando un tono irreverente frente a España y los medios académicos españoles. Se afirma que es un sofisma contratar a alguien con una mentalidad sub realista para impartir el curso de Aritmética Analítica del primer año de la carrera, en tanto que en la Facultad de Ingeniería "el todo (de la enseñanza) es el tablero".

El segundo texto es el comentario de uno de los profesores más destacados de la Facultad (Ruiz Wilches) sobre este mismo asunto. El profesor critica a las directivas por emplear a profesores invitados del nivel de Vera en la enseñanza de cursos de la carrera de Ingeniería que los alumnos no están en capacidad de comprender. La alternativa que recomienda es proponerle a Vera que se dedique más bien a impartir seminarios y conferencias semanales sobre distintos temas puros o prácticos de su especialidad.

ISBN 978-84-945722-3-4

La diferenciación entre matemáticas técnicas y matemáticas abstractas en la formación del ingeniero.

Es interesante preguntarse por las ideas de Vera sobre el carácter más abstracto que concreto de las matemáticas que debían impartirse al ingeniero y que muy seguramente expuso en sus cursos y conferencias en Bogotá, en particular en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería. A partir de 1950 empiezan a publicarse en Buenos Aires los tres volúmenes de curso *Matemática para Ingenieros*, un curso universitario en tres volúmenes con un enfoque moderno de los contenidos que se requerían en los programas de las Escuelas y Facultades de Ingeniería sobre Análisis algebraico, Cálculo diferencial y Cálculo integral, respectivamente. En el prólogo, Vera afirma lo siguiente con respecto a este enfoque (Vera, 1950-1953, vol. 1):

"El ingeniero de hoy no puede limitarse a la Matemática euleriana, sino que necesita de las teorías que nacieron a lo largo del siglo XIX y lo que va corrido del XX si quiere contribuir al progreso de la ciencia y, como corolario, a hacer más amable la vida de los hombres."

Un aspecto interesante que distingue el enfoque de Vera comparado con los tradicionales textos de matemáticas para el ingeniero, es su manera de presentar los fundamentos del análisis. Es cierto que en el segundo volumen de su tratado emplea los infinitésimos para introducir a los alumnos en representaciones intuitivas de los conceptos básicos del cálculo diferencial. Pero ya en el primer volumen sobre Análisis Algebraico, el lector ha sido prevenido que en cuanto al continuo real, se trata no solo de percibir sus propiedades mediante técnicas empíricas, sino de caracterizar teóricamente a los reales como campo numérico. De manera que en el capítulo tercero procede a definir las cortaduras de Dedekind sobre R, y pasa luego a estudiar las propiedades algebraicas de las operaciones sobre el campo.

Vera reafirma su posición de que la garantía de la conceptualización matemática es la formalización de las ideas y que un curso para los ingenieros no podría limitarse a su representación técnica o perceptual. Utiliza para ello la distinción entre matemática de "precisión" y matemática de "aproximación" (Vera, 1950-1953, vol. 1, 110):

"Aquella es la que facilita el desarrollo de ésta, la cual sólo interviene en las aplicaciones prácticas, de tal modo que las necesidades de la técnica quedan satisfechas siempre que se

ISBN 978-84-945722-3-4

alcance un límite de exactitud no superable por medios físicos; la matemática de precisión exige, en cambio, plena satisfacción lógica.”

Para aclararnos el uso de los infinitésimos en Vera, recordemos que Duhamel introdujo el clásico *Principio de Substitución* (PS) que permite reemplazar un infinitésimo por otro a condición de que el cociente de ambos tenga como límite la unidad. Con este principio Duhamel había pretendido fundar sobre una misma base racional tanto el Análisis como sus aplicaciones a la Mecánica (Schubring, 2005). Las distintas formulaciones conceptuales del PS han permitido a los historiadores de la matemática fijar criterios epistemológicos para examinar las transformaciones de los textos de cálculo con respecto al proceso de fundamentación del análisis en los siglos XIX y XX. La tipología más reconocida es la de M. Zerner y se puede resumir en los siguientes términos (Arboleda, 2002), (Schubring, 2005) y (Arbeláez, 2012):

Si la formulación del PS en términos del límite de una suma de infinitésimos, involucra o no el concepto de convergencia uniforme, se dice que el texto es de tercera o de segunda generación respectivamente. Así, el cálculo de Sturm, un texto ampliamente utilizado en la formación de profesores e ingenieros en Colombia en la primera mitad del siglo XX, es de segunda generación. En ausencia de una construcción de los reales para sustentar el cálculo, Sturm apela a una presentación completa de las propiedades de los infinitesimales de diferentes órdenes, en particular a través del PS, el cual será empleado posteriormente en la demostración de teoremas sobre continuidad, derivadas y diferenciales. Por el contrario, en un texto de tercera generación como el de Humbert, con una presentación moderna de los fundamentos del análisis, el uso del PS se expresa rigurosamente en términos del concepto de convergencia uniforme.

Este es el patrón empleado en (Vera, 1950-1953), concretamente cuando introduce los infinitésimos y el PS en el volumen 2 del cálculo diferencial como base para su estudio de las series numéricas y de la diferencial de un arco de curva plana. Además, el tratamiento del concepto de convergencia uniforme en conexión con el PS no es operatorio ni episódico. Este concepto es tratado de manera coherente a lo largo del volumen, principalmente en los apartes consagrados a la teoría de series de potencias y series de funciones de una y varias variables.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En fin, otra característica que permite considerar al tratado de Vera como una obra de tercera generación, se encuentra en el tercer volumen. El primer parágrafo sobre los "Fundamentos del cálculo integral" empieza ilustrando el concepto de integral por medio de la noción de área bajo una curva. Sin embargo, siguiendo el patrón de los textos de tercera generación, rápidamente abandona el tratamiento de los infinitésimos para formalizar el concepto de integral definida como el límite de las sumas de Riemann y luego procede a demostrar su existencia como un teorema (p. 14). Observamos que la función sobre la cual Vera establece la integral está definida y acotada en un intervalo, pero no necesariamente es continua en ese intervalo. Según Vera, se trata así de corregir una "petición de principio" que se podría haber deslizado en la presentación de la integral definida como área bajo la curva, al limitar el concepto de integral a la clase de funciones suaves, es decir continuas y diferenciables en el intervalo salvo en puntos aislados.

Referencias

Albis, V. S. y Sánchez, C. H. (2009). La introducción de la teoría de conjuntos y la matemática moderna en Colombia. Primera parte: el aporte de los extranjeros. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Ideas Matemáticas, III*, 4, 265-293.

Arbeláez, G. I. y Recalde, L. C. (2012). El desarrollo del análisis matemático en Colombia (1850-1950). *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(3), 363-394.

Arboleda, L. C. (2002). Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951): Sturm, Humbert y los otros. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 26*, 533-543.

Cobos Bueno, J. (2004). España: ciencia y exilio. *Ábaco* (CICEES), 2ª época, *42*, 157-171.

Cobos Bueno, J. M. y Vaquero Martínez, J. M. (1999). Matemáticas y exilio: la primera etapa americana de Francisco Vera. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y las Técnicas, 20*, 507-528.

Cobos Bueno, J. M. y Vallejo Villalobos, J. R. (2014). Francisco Vera Fernández de Córdoba. Crónica de su exilio y recuperación de su memoria. Manuscrito.

Courant, R. y Robbins, H. (1941). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* New York: Oxford University Press.

Horváth, J. (1993). Recuerdos de mis años en Bogotá. *Lecturas Matemáticas* (SCM), 14, 119-128.

Ortiz Guzmán, F. (2011). La visita de John von Neumann y Solomon Lefschetz a la Universidad de los Andes en 1950. Bogotá: Ediciones Uniandes.

Sánchez, C. H. y Albis, V. S. (2012). Historia de las matemáticas en Colombia: De Mutis al siglo XXI. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*, 1, 109-157.

ISBN 978-84-945722-3-4

Schubring, G. (2005). Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany. New York: Springer.

Vera, F. (1941). *Tratado de geometría proyectiva.* La Habana: Cultural.

Vera, F. (1942). Teoría de Conjuntos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 5(18), 230-240.

Vera, F. (1943). *Principios fundamentales de geometría*. La Habana: Cultural.

Vera, F. (1943). *Historia de las ideas matemáticas*. Sociedad Colombiana de Ingenieros. Bogotá: Editorial Centro.

Vera, F. (1944). *Breve historia de la geometría*. Buenos Aires: Losada.

Vera, F. (1946). *Breve historia de las matemáticas*. Buenos Aires: Losada.

Vera, F. (1948). Introducción a la teoría de conjuntos. Buenos Aires: Coepla.

Vera, F. (1950-1953). *Matemáticas para ingenieros*. Vol. 1 (1950), vol. 2 (1951), vol. 3(1953). Buenos Aires: Ediar Editores.

Vera, F. (1961). *Veinte matemáticos célebres*. Buenos Aires: Compañía Fabril Editora.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-174

MÉTODO ABN. EL CÁLCULO DEL SIGLO XXI.

Jaime Martínez Montero. Número de inscripción: 302.
Jmartinez1949@gmail.com

Inspector de Educación jubilado.

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB, CP, CR
Nivel educativo: Educación Infantil y Educación Primaria.
Palabras clave: Cálculo Abierto. Cálculo Basado en Números.

Resumen

El método de cálculo ABN (Abierto, Basado en Números) supone un cambio radical en el proceso de enseñanzaaprendizaje de la matemática. En nueve años de existencia ha logrado una gran difusión en España y comienza a tener sus primeros seguidores en Iberoamérica. Los cuatro pilares en que se asienta son:

Un cálculo basado en números con significado, lo que implica un conocimiento exhaustivo de la numeración, el uso del valor posicional de las cifras y el procesamiento de los cálculos, en todos los casos, de izquierda a derecha.

Un cálculo abierto significa la adaptación a las características de cada sujeto, ofreciendo unos formatos que permiten que las operaciones se puedan realizar en un número diferente de pasos, en función del nivel del sujeto.El método ABN se acoge al enfoque realista, en el que el principal material matemático es la realidad que rodea al niño.Finalmente, frente al predominio procedimental de los actuales métodos de cálculo, el ABN adopta un enfoque conceptual.

DESARROLLO.

ISBN 978-84-945722-3-4

Introducción.

El método de cálculo abierto basado en números (ABN en adelante) ha irrumpido con fuerza y, tras los dos primeros años de ensayo, se ha propagado con gran rapidez, ha involucrado a docentes muy valiosos, ha originado diversos trabajos de investigación y, sobre todo, ha cambiado radicalmente la forma de aprender matemáticas de los niños de Educación Infantil y Primaria. En la presente exposición analizaremos alguna de las dimensiones de ese cambio y cuáles son los factores que han podido propiciarlo.

Las manifestaciones externas del cambio.

¿Qué cambios se aprecian en el alumnado que trabaja ABN respecto a aquellos que no lo trabajen? Nos centraríamos en seis aspectos.

El primero de ellos es que no aparecen los niños negados para las matemáticas. Todos los alumnos son capaces de desarrollar, en mayor o menor medida, su competencia matemática. No quiere decir esto que todos alcancen los mismos niveles o que no haya diferencias en la cantidad y en la profundidad de los aprendizajes. Pero sí quiere decir que cada uno aprende matemáticas según sus posibilidades, y que las diferencias entre los que obtienen mejores rendimientos y los que los obtienen menos buenos son inferiores a las que se observan en los aprendizajes propios de cálculo tradicional.

El segundo es muy observable: al sujeto le encanta aprender matemáticas. Pasa a ser una de sus asignaturas favoritas, si no la preferida. No se da cuenta de que el tiempo pasa y el cambio de clase le produce contrariedad. Para ellos la tarea matemática es una actividad en la que se desenvuelven con naturalidad y les ofrece la oportunidad de desarrollar su capacidad intelectual, con retos adecuados y con técnicas y procedimientos que están al alcance de sus posibilidades.

El tercero no es más que el efecto de los dos anteriores. Si el sujeto rinde con normalidad y, además, le gusta lo que hace, obtiene buenas calificaciones. La materia pasa a ser, de las que más suspendía, a la que más aprueban, de una muy difícil y temida a, casi, lo que en el argot se denomina una "maría". Son muy raros los suspensos y tan solo un tipo de alumno se ha revelado como resistente al método ABN: el absentista.

El cuarto efecto es que se rompen las barreras que impedían que ciertos contenidos de aprendizaje pasaran de un nivel a otro o de una etapa a otra. Parecía que en Infantil los niños sólo podían aprender los números hasta el nueve. Con nosotros lo hacen hasta el cien

ISBN 978-84-945722-3-4

y muchos lo sobrepasan. Aprenden antes a operar, y con mayor complejidad. Hemos observado aprendizajes que se han adelantado hasta cuatro años con respecto al momento habitual de abordarlos. Se ha demostrado que el momento de abordar cada uno de los contenidos depende más de la calidad del trabajo con los conceptos anteriores necesarios que con lo establecido por la tradición y la rutina.

El quinto efecto es el cambio radical de la cualidad del aprendizaje. Se pasa de un aprendizaje procedimental, de memorización y de reglas de aplicación, a un aprendizaje conceptual. El sujeto entiende lo que hace, se eleva por encima de la anécdota para aterrizar en la categoría. Se mueve dentro de estructuras, y no en las partes separadas de las mismas. No se trata, por tanto, de que el alumno haga cosas distintas de las que desarrolla el alumno del método tradicional. Es que lo que hace el alumno tradicional lo hace él también, pero mejor y entendiéndolo.

El sexto efecto ha consistido en constatar que los alumnos poseen potencialidades con las que hasta ahora no se había contado. Por ejemplo, hay sujetos que llaman la atención por la gran memoria de trabajo que poseen, que rompen los límites que hasta ahora se habían establecido. También alcanzan tal desarrollo en el cálculo que personas poco avisadas llegan a pensar que hay trampa, que todo está amañado, que no es posible que los alumnos hagan eso que muestran. Su nivel de intuición es tal que aprendizajes matemáticos que antes llevaban mucho tiempo y esfuerzo ahora prácticamente los adquieren los niños solos, sin necesidad de proceso alguno de enseñanza. Por ejemplo, las operaciones con decimales, el manejo de números enteros, las potencias, etc.

La renovación profunda que trae consigo el método ABN.

Es evidente que los efectos que hemos descrito en el apartado anterior exigen unas causas que han de ser profundamente diferentes a las que operan en los aprendizajes tradicionales del cálculo y de los conceptos que tienen detrás. A falta de trabajos de investigación, que ahora están en marcha, debemos basarnos en nuestras propias observaciones e intuiciones para profundizar en este campo. No parece descabellado adjudicar a los cambios estructurales de la metodología seguida los efectos, también estructurales, que se manifiestan en los aprendizajes del alumnado.

Los cambios estructurales, que significan una muy profunda renovación metodológica, son variados y se pueden considerar desde puntos de vista diferentes. Pero teniendo en cuenta

ISBN 978-84-945722-3-4

las limitaciones con que se cuenta en esta exposición los sintetizaremos centrándonos en los tres siguientes: el enfoque en una matemática realista, la distinta naturaleza del cálculo, acorde con el anterior enfoque, y el carácter de abierto con que se reviste el cálculo. Derivado de todo lo anterior surgen muchos pequeños cambios, aspectos que se derivan de los anteriores, detalles que confirman y apuntalan la nueva dirección. Pero las tres columnas que soportan todo el edificio del ABN son las anunciadas.

El enfoque realista en matemáticas.

Los alumnos ABN parten siempre de la realidad, operan con la realidad, no realizan actividades en el vacío, no desarrollan unos conceptos construidos sobre formalismos. Cuentan todo lo que cae a su alcance, les aplican mecanismos de simplificación, aprenden a representar las realidades numéricas de diversos modos, operan sobre aspectos concretos. ¿Y la abstracción, se nos podrá argüir? Partimos de una aseveración que es fruto del más puro sentido común. A la abstracción se llega desde la realidad, se construye a partir de ella. Cuando se manipulan realidades se intuyen los modelos formales que están operando y las similitudes o identidades que se producen. Cuando conozco a fondo una realidad la puedo interiorizar y representarla simbólicamente, de una forma más o menos relacionada con su apariencia o configuración. Pero ya estoy abstrayendo, suprimiendo lo accesorio, centrándome en lo fundamental. Lo que es un disparate, si se me permite la expresión, es comenzar por la abstracción, como si esta fuera una isla separada del continente de la realidad. Pongamos algunos ejemplos.

¿Se pueden o no extraer decimales de un resto para apurar la división? Pues depende. Nuestros alumnos refieren las divisiones a unas realidades concretas, y en función de las mismas continúan o no la operación. Así, si el problema va de repartir personas en autobuses, no cabe la partición del resto. Si lo que reparten es dinero, saben que pueden aproximar hasta los céntimos. Si trabajan con longitudes, pueden llegar hasta las milésimas. ¿Dónde queda, con este sistema, la abstracción? Pues bien a la vista: se domina el proceso y se sabe en qué grado hay que aplicarlo en función del tipo de naturaleza a la que se le aplique.

Finalmente pondremos el ejemplo de la representación numérica de cardinales de distintas colecciones o conjuntos. Se opera como si en a realidad solo aparecieran unidades, decenas, centenas, etc. Y no es así. Si tenemos 28€ en un billete de veinte, uno de cinco, una moneda

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de euro y cuatro monedas de cincuenta céntimos, en ninguna parte aparecen las dos decenas y las ocho unidades. A la inversa, el número 24 referido a huevos se puede concretar en cuatro cajas de seis huevos cada una. Por ello, nuestro trabajo didáctico en el método ABN consiste en enseñarle a los niños que realidades diferentes se representan de una única manera (¿de cuántas formas diferentes se pueden tener 28€?), y que una misma representación puede aparecer en la realidad encarnada en configuraciones y agrupaciones muy diferentes. En definitiva, el proceso de abstracción ha de ir más por conectar la realidad con su representación, que no por actuar con la representación como si esta n tuviera que ver nada con la realidad.

En la resolución de problemas, el cálculo ABN permite una interacción entre el texto del problema y las operaciones que lo resuelven, lo que evita la comisión de muchos errores. Los niños ABN no están vacunados contra el disparate o la concepción errónea de la solución de un problema. Pero si cuando comienza a operar el desajuste se pone de manifiesto, es más probable que el alumno se dé cuenta y rectifique. A un niño de 2º del método tradicional le decimos que nos resuelva el siguiente problema: "Mi abuelo tiene 56 años, y tiene 23 años más que mi padre. ¿Cuántos años tiene mi padre?" Enseguida montan la suma, la resuelven y nos dicen el resultado: 79. El alumno ABN hace igual, solo que al iniciar la primera agregación ("*A los 56 años de mi abuelo le sumo 20 y mi padre ya tiene 76… ¡Pero cómo va a tener mi padre más años que mi abuelo!*") se da cuenta del error y rectifica.

El cálculo basado en números. Un proceso radicalmente distinto al seguido en el tradicional.

Tal vez sea el presente sea el cambio estructural más radical, el que mejor define la transformación que supone el nuevo método. El cálculo tradicional, en sus operaciones básicas, no es más que la plasmación de los cálculos de ábaco en otro formato: el de las cifras y su valor posicional. Utilicemos como modelo en esta primera aproximación la operación de sumar. En efecto, cada orden de unidades se corresponde con una varilla del ábaco. El alumno comienza la suma por la derecha, y cuando agrega las fichas correspondientes y llega o se pasa de diez, como no caben más debe poner una en la varilla siguiente y vaciar la columna de ese orden. Ahí está el origen de la llevada. A continuación

ISBN 978-84-945722-3-4

hace igual en la segunda varilla, y luego en la tercera. Y esta es la clave del cálculo tradicional: opero de derecha a izquierda, orden de magnitud a orden de magnitud, y actuando en cada orden como si fueran números dígitos. Y esto es lo que eliminamos de golpe en nuestro método. Sustituimos el ábaco por la recta numérica y el tablero del cien, es decir, por el conocimiento profundo y estructurado de la numeración, de sus periodicidades. Y las consecuencias son claras. Enumeradas brevemente, las más importantes son:

EXISTEN MÚLTIPLES COMPOSICIONES Y DESCOMPOSICIONES. Y no sólo en órdenes de magnitud. Y cuando un número se descompone en órdenes de magnitud no se hace con las limitaciones que impone el ábaco. Utilizamos por tanto dos tipos de descomposiciones, que son las que llamamos *arbóreas* y *de la casita*. Las primeras son horizontales, no toman en consideración los órdenes de unidades, sino que hace de un número otros más pequeños. Así, el 328 puede ser el 300-28, o 314-14, o 130-130-68 o…Las composiciones de este tipo de números están en el origen de la sumas, y las descomposiciones en el de las restas. Las descomposiciones de la casita son verticales y respetan el orden de magnitud, pero al no estar sometidos al tamaño de las varillas, se pueden transformar sin límites. Así, 328 puede ser 3C 2D y 8U, pero también 2C 2D y 108U, o 22D y 108U, o 20D y 128U, etc. La composición de números que previamente se han descompuesto de este modo da lugar a muy interesantes operaciones y procesos mentales, que se mueven en la frontera entre ejercicios de numeración y operación.

SE ROMPE LA OBLIGACIÓN DE OPERAR POR ÓRDENES DE MAGNITUD. En una suma tradicional de tres sumandos se ha de operar por órdenes de magnitud. No se puede desdoblar ningún cálculo dentro de un orden, ni incluir en un mismo cálculo distintos órdenes. No es nuestro caso. Naturalmente los niños pueden operar por órdenes, pero también pueden desdoblar cálculos, y, claro, incluir en un mismo cálculo diversos órdenes, bien total o parcialmente.

EL FIN DE LAS LLEVADAS. El dominio de la numeración evita este efecto no deseado y engorroso de las operaciones. Cuando un niño, en la recta numérica, parte del número 28 y cuenta 15 hacia adelante, ¿dónde se lleva o dónde se deja de llevar? ¿Y si lo hace en la tabla del cien? La llevada es un problema ligado expresamente a la naturaleza de los algoritmos tradicionales. Cambiada esa naturaleza, se acaba el problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

CÁLCULO DE IZQUIERDA A DERECHA. Porque así el cerebro lo procesa con mayor rapidez, con lo que se gana en significado y, por tanto, en sentido. Si hay algo que enseguida se nota en la apariencia externa de los cálculos de los alumnos ABN es lo poco que se preocupan de colocar los números en columnas. Lo anterior no debe entenderse de manera errónea. En la suma 368 + 179 podemos comenzar añadiendo las unidades. Pero se le añaden al número 368, no al 8, y el resultado (377) se escribe de izquierda a derecha.

SIEMPRE SE SUMAN NÚMEROS. Y no cifras, como repetidamente hemos señalado. Lo ideal es que el alumno realice el cálculo de una vez. Pero si los números con los que ha de operar son grandes o muy complejos, entonces debe descomponerlos en otros más pequeños, pero siempre con significado. Pongamos un ejemplo: "**Hay en el patio del colegio 223 alumnos, y quieren entrar otros 189. Una vez que pasen todos, ¿cuántos niños y niñas habrá en el patio?**" Se busca que el alumno haga el cálculo de una vez, pero si no pudiera, fracciona uno de los números en diversas partes y las va añadiendo. Supongamos que el niño suma primero 100, luego 70, luego 7 y finalmente los 12 restantes. Lo que va sumando son niños, hasta que hace que todos entren en el patio. Dice así: "Primero entran cien niños. Ya hay en el patio 323. Después pasan 70, y se juntan en el patio 393. Ahora entran 7, y tenemos 400. Por último, pasan los doce que quedan y tenemos la solución, porque en el patio hay 412 niños y niñas y fuera no queda ninguno"

Carácter abierto del cálculo.

Es otra de las señas de identidad y la primera característica que refleja el nombre del método. Ya se va viendo como más corriente que se puedan desarrollar los mismos cálculos en pasos diferentes y con elementos distintos, pero cuando empezábamos a difundir el método esta forma de trabajar causaba cierta perplejidad. Sin embargo, si se medita un poco, lo que debería causar extrañeza es la mecánica del cálculo tradicional, que obliga a que sujetos muy diferentes, con muy distintos niveles, hagan todo igual. No causaba sorpresa que el cálculo fuera la única tarea escolar en la que se exigía a todos los alumnos una identidad en los procedimientos realmente poco natural.

El carácter abierto del cálculo se deriva tanto de la concepción del mismo, que nace de la estructura de la numeración y no de unos factores posicionales, cuanto de las posibilidades que ofrecen los formatos en que se plasman los algoritmos. Los formatos son muy simples y extraordinariamente flexibles, permiten una gran transparencia, lo que ayuda al docente a

ISBN 978-84-945722-3-4

seguir con facilidad el razonamiento del alumno y descubrir las estrategias que emplea. Es evidente que si las composiciones y descomposiciones pueden ser múltiples, múltiples y diferentes pueden ser las operaciones que los niños reflejen. Pero ello sólo es posible con unos formatos que acompañen.

Cuando hablamos de "abierto" solemos referirnos también a aspectos más complejos. No es que permita sólo reflejar las diversas posibilidades, sino también alternativas que en principio no se consideraban, a variantes que afectan al sentido profundo de la misma.

Conclusión.

En el noveno curso de aplicación del método ABN en las aulas de muchos centros podemos calibrar con bastante exactitud el cambio, la profunda renovación que supone aplicar este nuevo método, que no sólo afecta a la pura mecánica, sino que va más allá: el cálculo ha adquirido un nuevo valor, las operaciones básicas se han convertido en cuasi heurístiscos, han saltado por los aires muchas de las tradiciones y rutinas que han pesado como losas en el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, han ganado protagonismo los alumnos y los docentes en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. **Pero tal vez la renovación más importante ha sido demostrar** que se puede cambiar de verdad y no solo con palabras, que se puede hacer con nuestros maestros y maestras, con los niños y niñas, y que es posible realizarlo sin grandes alharacas, con apenas materiales y con independencia de la extracción social de los mismos. ¿Puede haber mayor renovación en una materia que, tradicionalmente, suscita prevención o si no directamente miedo?

Referencias bibliográficas

Martínez Montero, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Madrid: Wolters Kluwer S.A.

Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). Bordón. Revista de Pedagogía, 63 (4), 95-110.

ISBN 978-84-945722-3-4

Martínez Montero, J. y Sánchez Cortés (2011). *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en educación infantil*. Madrid: Wolters Kluwer S.A.

Martínez Montero, J. y Sánchez Cortés (2013). *Resolución de problemas y cálculo ABN*. Madrid: Wolters Kluwer S.A.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-196

O PROJETO MATDANCE — A DANÇA COMO CONTEXTO PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Ana Paula Canavarro — Mercedes Prieto
apc@uevora.pt — merce.prieto@sapo.pt
Universidade de Évora e Unidade de Investigação e Formação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Modalidad: Conferência regular (CR)
Nivel educativo: Primário e médio
Núcleo temático: As matemáticas e a sua integração com outras áreas
Palavras-chave: Matemática no 1º ciclo, Dança, Conexões.

Resumo

O projeto MatDance corresponde a uma experiência de ensino realizada no 1º ciclo do ensino básico em Portugal, numa turma de 3º ano de escolaridade (alunos com 9 anos). Esta experiência surge no âmbito de uma investigação desenvolvida sob a modalidade de design-research por uma equipa interdisciplinar, com o objetivo global de compreender o potencial do estabelecimento de conexões entre a Matemática e a Dança para a aprendizagem dos alunos. Descrevemos a experiência de ensino realizada, os seus fundamentos e tarefas propostas aos alunos, envolvendo a combinação de atividades de Dança e de Matemática. Apresentamos exemplos de conexões estabelecidas com conteúdos matemáticos diversos, nomeadamente da geometria. A análise da resposta a um questionário revela que os alunos atribuíram uma grande importância às relações que estabeleceram entre os conteúdos matemáticos e as danças, o que potenciou a compreensão dos conceitos e a percepção da sua aplicação. Revela-se também a satisfação das crianças com o enriquecimento do seu património cultural e com o facto de terem conseguido aprender a dançar com confiança e prazer, num ambiente emocionalmente positivo.

Introdução

No projeto MatDance valorizamos o estabelecimento de conexões entre a Matemática e as outras áreas de conhecimento, contrariando a ideia de uma escola “aos quadradinhos” em que os saberes surgem desagregados, de forma escolarizada, artificial e desligados do mundo da vida real. Este projeto oferece uma oportunidade para concretizar pressupostos que priorizamos na aprendizagem da Matemática: queremos que esta seja experienciada

ISBN 978-84-945722-3-4

pelos alunos como uma disciplina com sentido, útil para conhecer, compreender e intervir sobre a realidade e na qual todos os alunos podem, de alguma forma, participar e ser bem sucedidos (Abrantes, 2001).

Porquê a Dança? A Dança faz parte da componente curricular de Expressão Físico-Motora no programa oficial português do 1.º ciclo em vigor (ME, 2004), sendo considerada no bloco 6 de conteúdos. No entanto, ela tem vindo a ter muito pouco espaço efetivo no currículo praticado nas escolas, que cada vez dá mais importância às disciplinas tradicionalmente valorizadas, como a Matemática (Leandro, 2015). Este cenário constitui um problema numa sociedade em que cada vez mais a vida das pessoas se tem progressivamente sedentarizado. Muitas crianças crescem e terminam o 1º ciclo em completo estado de analfabetismo motor, não sendo capazes de ter um bom domínio sobre o próprio corpo nem de ter um controlo motor coordenado. A Dança educativa contribui para o desenvolvimento da criatividade e das capacidades motoras que os alunos necessitam, sendo reconhecido o seu potencial para o crescimento harmonioso das crianças assim como para o seu desenvolvimento global (Laban, 1978; Monteiro, 2007). A prática da dança, em especial da dança tradicional, proporciona também aos dançarinos o sentimento de pertença a um grupo social identitário de uma cultura e uma escola democrática deve oferecer uma educação cultural, dando aos alunos a oportunidade de, conhecer o património imaterial e valorizar a diversidade (Alves, 2013). Além disso, esta dança transmite valores como o respeito, a solidariedade, a tolerância e a união (Nbusi, 2011). Assim, a dança constitui uma oportunidade para o desenvolvimento de atitudes muito relevantes na atual sociedade, consignadas em diversos perfis de competências esperados para os alunos do século XXI (por exemplo em Portugal, ME, 2017).

Outra vantagem importante em possibilitar aos alunos a aprendizagem da Dança tem a ver com o reconhecimento de inteligências múltiplas do ser humano (Gardner, 2000). A Dança é um espaço por excelência para o desenvolvimento da inteligência corporal-cinestésica, abrindo a muitos alunos a porta de uma escola que se quer mais inclusiva. Acresce que a experiência de dançar convoca, em geral, sentimentos positivos que predispõem bem os alunos para a aprendizagem, o que pode mobilizar-se a favor da Matemática, disciplina em que os factores afetivos podem obstaculizar (Hannula, 2006).

ISBN 978-84-945722-3-4

Além do valor que a Dança tem *per si*, ela oferece um contexto particularmente fértil ao estabelecimento de conexões com a Matemática. Estudos realizados neste domínio, embora ainda escassos, revelam de forma consistente que a Dança favorece de forma positiva as aprendizagens da Matemática pelos alunos (Moore & Linder, 2012).

Neste texto apresentamos o MatDance e analisamos como as crianças que participaram no projeto percepcionaram a mobilização de conhecimentos matemáticos em situações de dança e o desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas e a capacidade de usar diferentes representações matemáticas (NCTM, 2014). Analisamos ainda outras dimensões que as elas mais valorizaram.

Apresentação geral do projeto MatDance

Este projeto concretizou-se através de uma experiência de sala de aula realizada em 2015/16, numa turma de 24 alunos do 3º ano (alunos com 9 anos) do 1º ciclo de escolaridade, numa Escola Básica do ensino público português, situada em Évora. A direção da escola e o professor da turma acolheram muito bem a nossa[5] proposta, e criaram as condições logísticas possíveis para a realização das atividades físicas. A biblioteca da escola, com as estantes dos livros recolhidas junto às paredes, assim arrumada especialmente durante o tempo semanal dedicado ao MatDance, pois não existia nenhum espaço coberto próprio para prática desportiva.

O professor da turma foi sempre consultado a propósito dos temas matemáticos que queria abordar nas sessões e da adequação das tarefas matemáticas que foram preparadas por nós. Além disso, acompanhou a realização de todas as atividades de dança e de matemática, sendo da sua responsabilidade a condução da discussão das resoluções dos alunos às tarefas matemáticas em sala de aula, previamente antecipada connosco.

O projeto desenrolou-se em duas fases. A primeira teve por base a realização de atividades de dança na Biblioteca a que se seguiam a exploração de tarefas de Matemática correspondentes na sala de aula normal — e por isso as denominamos de MAT+DANÇA. Estas sessões duravam duas horas, sendo uma hora para cada parte. As danças eram escolhidas e adaptadas de modo a poderem fazer emergir os conceitos matemáticos requeridos pelo professor. Na parte da Dança, os alunos aprendiam efetivamente a dançar,

---

[5] A equipa era constituída pelas duas autoras deste texto e quando se iniciou o projeto contava também com Ana Cruz, professora de Didática da expressão motora na Universidade de Évora.

ISBN 978-84-945722-3-4

após os períodos de aquecimento em que, entre outras coisas, aprendiam alguns passos básicos da dança. De seguida, os alunos seguiam para a sala de aula normal na qual trabalham em tarefas matemática sobre a dança acabada de dançar. Tratavam-se de tarefas desafiantes, com apelo a representações múltiplas e suas conexões, que eram resolvidas a pares ou pequenos grupos, sendo posteriormente discutidas em plenário na turma, numa prática que se pretendia de ensino exploratório da Matemática (Canavarro, 2011). Esta fase durou três meses, desde Outubro a Dezembro, concretizando-se nela 12 sessões nas quais os alunos aprenderam diversas danças tradicionais e executaram outras danças espontâneas, que serviram de contexto à abordagem de temas diversos da matemática da área da Geometria (como sentido espacial, orientação espacial, figuras geométricas, posições relativas de objetos no espaço), da área dos Números e Operações (como relações numéricas, sequências numéricas, factorizações de números, sentidos da multiplicação, quartos de volta e seus múltiplos), e também da área da Medida (relativa a tempo e a comprimento). Em simultâneo, a resolução das tarefas implicava o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais, como a resolução de problemas que se colocaram em diferentes danças e a representação matemática de coreografias, exigindo relacionar as representações ativas (relativas aos movimentos dos corpos dos alunos) com as representações icónicas (que traduziam por imagens posições-chave e deslocações efetuados nas danças).

A segunda fase do projeto realizou-se entre Abril e Junho e foi composta por 7 sessões também com a duração de duas horas. Nesta fase procurámos reforçar a integração da Matemática e da Dança, acabando um aluno por oferecer o nome para esta nova dinâmica: MatDance. Todo o trabalho era desenvolvido na Biblioteca, e as tarefas matemáticas surgiam entrelaçadas com as de dança. A Matemática era chamada em duas situações. Uma era para caracterizar estruturas, formas e padrões rítmicos presentes nas danças, dando resposta a problemas concretos que se colocavam ao dançar. São exemplos como fazer uma vénia diante de um parceiro de modo a ficar na posição correta (exigia análise da simetria) ou como percorrer um dado trajeto de modo a acompanhar o ritmo da música e parar no momento certo e na posição certa. A outra situação era para criar ou recriar novas danças, apelando à criatividade dos alunos, o que requeria a representação escrita de forma precisa com vista a poderem ser partilhadas e reproduzidas de forma ativa posteriormente com outras pessoas.

Nesta fase, as danças continuaram a ser escolhidas com os mesmos critérios e as tarefas matemáticas eram elaboradas com as mesmas intenções matemáticas, embora optássemos por incluir textos menos longos e pedíssemos registos escritos mais completos, prescindindo de discussões coletivas muito extensas. Os alunos aprenderam quatro novas danças, tendo decidido, por sua iniciativa, preparar a sua preferida desta fase (a Troika, dança tradicional russa) para dançar na festa de final de ano da escola, o que envolveu vários ensaios extra-aula. Nesta fase foi possível explorar de forma bastante aprofundada as simetrias de reflexão e de rotação, no plano e no espaço, bem como o sentido de espaço e de volume de 1 m^3 e seus submúltiplos. Em simultâneo, os alunos tiveram oportunidade de resolver mais problemas, como por exemplo, um problema que se coloca efetivamente na dança a nível profissional, relativo à feitura de marcações escritas no chão com vista a servirem de referências das posições corretas que os dançarinos devem assumir com vista a se obter uma coreografia mais perfeita.

A dança do "Malhão": um exemplo da 1.ª fase do MatDance

A escolha do Malhão visou proporcionar aos alunos um primeiro contacto com uma dança tradicional portuguesa simples, de modo a estes poderem experimentar o universo coreográfico das danças tradicionais, desenvolvendo em simultâneo a sua linguagem específica e a aprendizagem de passos base, como o passo do Malhão (1, 2, 3, hop). A coreografia original do Malhão foi simplificada atendendo ao reduzido nível de desenvolvimento motor dos alunos. O aquecimento combinou movimentos criativos e livres e movimentos mais estruturados em que os alunos rodavam sobre si mesmos com a amplitude de um quarto de volta ou seus múltiplos e em diferentes sentidos, concluindo sobre as orientações resultantes. Desde logo manifestaram muita alegria. A maioria cantava e dançava ao som da música, enquanto batia palmas ao ritmo da música, mas também se verificaram atitudes de vergonha e resistências, em especial por parte de alguns rapazes como o Américo[6], muito bom aluno a Matemática, segundo o professor. No entanto, um dos rapazes sinalizado como tendo muitas dificuldades de aprendizagem (Nuno), revelou-se

[6] A divulgação das imagens foi autorizada mas optámos por usar nomes fictícios para as crianças.

ISBN 978-84-945722-3-4

rapidamente feliz e com muita apetência para a dança. Globalmente, foi notória a descoordenação motora da turma, as suas dificuldades de orientação e de articulação com o ritmo da música (Fig.1). De seguida, os alunos resolveram uma tarefa de matemática, já na sala de aula, onde o Nuno continuou a dançar com os braços (rodeado a branco, Fig. 2), sendo correspondido por outros colegas.

Figura 1: Alunos aprendem dança do Malhão

Figura 2: Alunos resolvem tarefa matemática relativa a dança do Malhão na sala de aula

A tarefa explorava os movimentos no Malhão e as posições assumidas pelos dançarinos, com foco no desenvolvimento do sentido espacial. Em particular, os alunos tiveram oportunidade de perceber os seus alinhamentos na dança como retas e estabelecer relações entre as posições relativas das retas entre as quais se transita com um número ímpar de quartos de volta (perpendiculares) ou um número par de quartos de volta (paralelas). Além disso, a tarefa permitiu reconhecer e realizar representações icónicas associadas às representações ativas realizadas na dança, em especial relativas às posições e deslocamentos, negociando-se o significado de símbolos que ficaram para futuro uso (triângulos para posição de dançarinos, setas para os seus movimentos).

A dança do "Vira da Elvira": um exemplo da 2.ª fase do MatDance

Trata-se de uma dança tradicional portuguesa que se dança em quadrilhas, ou seja, em grupos de quatro dançarinos posicionados nos vértices de um quadrado, que interagem com uns com os outros aos pares alternados. Constituíram-se na turma seis quadrilhas. Esta dança ocupou três sessões, em Abril, primeiro dançando só e depois trabalhando simultaneamente matemática e dança, sempre no espaço da biblioteca. Do ponto de vista da dança, pretendíamos proporcionar aos alunos: conhecer danças em quadrilhas, realizar trajetórias curvas e lineares com dada duração temporal articulada com o ritmo da música, coordenar movimentos individuais com os dos parceiros da própria quadrilha e das outras quadrilhas e realizar posturas e gestos simétricos aos pares. A maioria dos alunos conseguiu executar esta dança, que tem alguma complexidade, de forma bastante razoável

ISBN 978-84-945722-3-4

(Fig. 4), embora persistissem algumas dificuldades. Do ponto de vista da Matemática, para além desta dança permitir compreender e executar simetrias de reflexão e simetrias de rotação no espaço, ela deu oportunidade ao aparecimento de um problema: “Como marcar o chão para conseguir dançar com posições rigorosas?” Os alunos apresentaram propostas que foram discutidas entre todos, sendo eleita a que lhes pareceu mais eficaz. Esta foi reproduzida no chão com a colaboração de todos, o que obrigou a definir uma estratégia concertada para lidar com o chão nas suas dimensões reais. Como a disposição das quadrilhas era simétrica, começaram por definir o meio da sala de modo a haver espaço para as seis quadrilhas. A figura 3 mostra o esquema feito no chão com fita autoadesiva verde (sublinhado a branco na figura para melhor percepção visual). Cada quadrilha tinha um quadrado para dançar e os seis quadrados da turma estavam alinhados em duas partes (três mais três em cada metade da sala). Os lados dos quadrados foram divididos ao meio para marcar os dois passos entre vértices consecutivos e as diagonais assinaladas para orientar movimentos dos pares.

Figura 3: Alunos marcam o chão da Biblioteca

Figura 4: Alunos dançam sobre as marcações

Resultados da participação no MatDance

No quadro 1 apresentamos o resultados da análise de conteúdo a uma questão aberta que incluímos num questionário anónimo que os alunos responderam no final do ano.

Quadro 1: Análise da questão aberta do questionário respondido pelos alunos

Ideias-chave	Nº referências	Exemplos de excertos dos textos dos alunos
Conexões Dança–Matemática	27 no total 12 - Geometria 6 - Cálculo 9 - Sem referência a conteúdos matem. específicos	*As atividades estão muito bem relacionadas, como por exemplo: o malhão malhão é uma dança com quartos de volta, voltas e meias voltas.* *Aprendi com as sardinhas a fazer melhor as contas.* *Consegui aprender mais matemática com a dança em todas as danças*
Conhecer	21 no total	*Conhecer novas músicas e danças*

ISBN 978-84-945722-3-4

músicas e danças que desconheciam	15 referem a dança "Troika"	*(…) não sabia dançar as danças que aprendi até hoje* *O mais importante foi a Troika porque foi a dança que mais gostei e a dança que acho ter dançado melhor*
Divertir!	10	*Eu aprendi com a dança muitas coisas divertidas e também com a matemática*
Aprender a dançar com confiança	9	*Senti-me bem ao dançar* *Esta experiência foi muito importante para mim porque (...) aprendi a dançar*
Estar bem em grupo, participar, colaborar	8	*O mais importante para mim foi que estávamos todos juntos e ninguém se chateava* *Para mim o mais importante foi aprendermos a trabalhar em grupos*
Relação com Mercedes	7	*A minha professora Mercedes é muito querida* *A professora ensinava muito bem*

Os alunos atribuíram uma enorme importância ao MatDance enquanto possibilidade de estabelecer conexões entre a Matemática e a Dança e alguns referem esta ideia mais do que uma vez e com exemplos concretos de conteúdos que compreenderam melhor, nomeadamente da Geometria mas não só. No que diz respeito ao uso de representações múltiplas, os alunos não as referem de forma explícita. No entanto, um aluno incluiu na sua resposta um esquema relativo a uma dança, o que nos leva a conjeturar que os alunos consideraram o uso de representações icónicas como uma das formas de relacionar os conteúdos. Muito forte foi também a importância que atribuíram a alargar o seu património cultural com danças que desconheciam e de as aprender a dançar, havendo referências explícitas que valorizam ter aprendido a dançar com confiança e prazer, num ambiente emocionalmente positivo.

Do nosso ponto de vista, sublinhamos o destaque que as crianças atribuíram às conexões que estabeleceram entre a Dança e a Matemática, o que lhes permitiu aprofundar a compreensão dos conceitos e perceber a sua utilidade e relevância. Este estudo encoraja ao desenvolvimento coletivo de projetos interdisciplinares que envolvam a Matemática.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 125-143.

Alves, M. (2013). Fundamentals of traditional dance: similarities and differences from international folk dances. In S. Lira, R. Amoêda, & C. Pinheiro (Eds.), *Proceedings*

ISBN 978-84-945722-3-4

of the 3rd International Conference on Intangible Heritage. Sharing Cultures 2013, 325-335.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação Matemática, 115,* 11-17.

Hannula, M. (2006). Motivation in Mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63,* 165–178

Laban, R. (1978). *Danza educativa moderna*. Buenos Aires: Paidós.

Leandro, C. (2015). *A dança criativa e a aprendizagem no 1º ciclo do ensino básico: contributos de uma abordagem interdisciplinar no estudo do meio, no português, na matemática e na atitude criativa* (Dissertação de doutoramento). Faculdade de Motricidade Humana, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Monteiro, E. (2007). Experiências criativas do movimento: Infinita curiosidade. In M. Moura & E. Monteiro (Eds.), *Dança em contextos educativos* (pp.179-191). Cruz Quebrada: Edições FMH.

Mbusi, N. (2011). *An investigation into the use of traditional Xhosa dance to teach mathematics: A case study in a Grade 7 class* (Doctoral dissertation). Rhodes University, Rhodes, South Africa.

Moore, C.& Linder, S. (2012) Using Dance to Deepen Student Understanding of Geometry, *Journal of Dance Education, (12)*3, 104-108.

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gardner, H. (2000). *Inteligências múltiplas, a teoria na prática*. Rio de Janeiro: Porto Alegre.

ME (2017). *Perfil dos alunos para o século XXI. Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Noticias_Imagens/perfil_do_aluno.pdf

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-264

Título: Tecnología y gestión de la construcción del pensamiento matemático, utilizando la conexión inalámbrica, sin wifi, de Hp Prime.

Nombre: Eduardo Mancera Martínez

e mail: mancera.eduardo@gmail.com

Institución: Comité Interamericano de Educación Matemática

Modalidad: Taller (T)

Nivel educativo: No específico

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras claves: Tecnología, gestión, calculadora, inalámbrico

Resumen:

En la actualidad se puede atender con tecnología a los alumnos de lugares sin acceso a internet, pero con los recursos de comunicación inalámbrica sin wifi, a fin de que vivan la experiencia del uso de redes, aplicaciones específicas para la enseñanza aplicar encuestas y evaluaciones, enviar mensajes y participar en clase con la supervisión del maestro sin cambiar de lugares o "pasar al pizarrón", Las calculadoras de última generación poseen esas cualidades y han servido para desarrollar la enseñanza de la ciencias con módulos creados para la construcción del conocimiento, sensores, animaciones interacciones entre maestro y alumnos a partir del uso de tecnología reciente. En las actividades consideradas en esta presentación se abordarán diversos temas de matemáticas para usar geometría dinámica, diversas representaciones de los objetos matemáticos y otros recursos de varios contenidos del currículo de matemáticas para secundaria y bachillerato, enfatizando las habilidades y competencias que se desarrollan a lo largo de la actividad y dando un lugar especial a la resolución de problemas como estrategia didáctica.

Introducción

ISBN 978-84-945722-3-4

La tecnología juega un papel muy importante en la construcción del pensamiento matemático porque ayuda a analizar en menos tiempos regularidades o similitudes en diversas situaciones similares, también permite hacer variaciones de la información de entrada y conocer el efecto que tienen en la salida, después de aplicar uno o varios procesos, entre otros aspectos importantes en la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, los avances tecnológicos han abarcado otros aspectos de la enseñanza de las matemáticas, posibilidades de discutir algunos contenidos entre varias personas que integran una red, intercambiar información por medio de ésta, analizar el trabajo individual o de un subgrupo, entre otros aspectos.

Pero un problema importante son los costos, pues los dispositivos a veces requieren de actualizaciones constantes, de condiciones ambientales particulares, de instalaciones seguras, entre otros aspectos que pueden limitar sacar provecho de las tecnologías.

En este taller vamos a compartir el trabajo que se puede realizar en un aula dotada de ciertos dispositivos tecnológicos que han mostrado servir para enriquecer los procesos de enseñanza con un costo razonable y útiles para vivir la experiencia de trabajo en redes sin requerimientos de wifi o instalaciones especiales.

Agradecemos a Hewlett Packard por apoyar el uso de de calculadoras HP Prime y el dispositivo Conectivity Kit, así como el software necesario para el trabajo de este taller.

De la experimentación a las relaciones formales

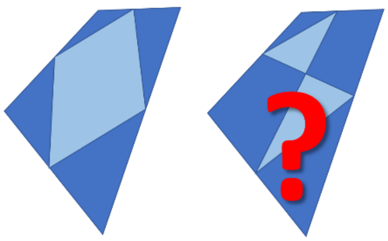
Un problema frecuente en matemáticas es la presentación y análisis de un solo caso para establecer resultados generales, incluso cuando media algún proceso deductivo. Esto sucede frecuentemente en Geometría.

Por ejemplo, considérese un cuadrilátero “cualquiera” y desde los puntos medios de cada lado se forma otro cuadrilátero. Se afirma que dicho cuadrilátero será un paralelogramo.

ISBN 978-84-945722-3-4

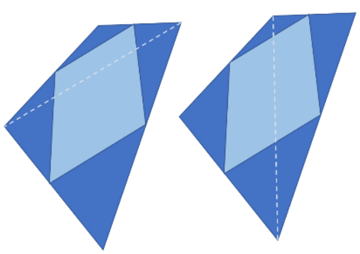
Se procede a trazar el cuadrilátero y después se ubican los puntos medios para trazar en otro cuadrilátero.

Primero hay que saber si se eligió bien el cuadrilátero que se traza a partir de los puntos medios. Esto puede advertir de requerimientos adicionales en la situación.

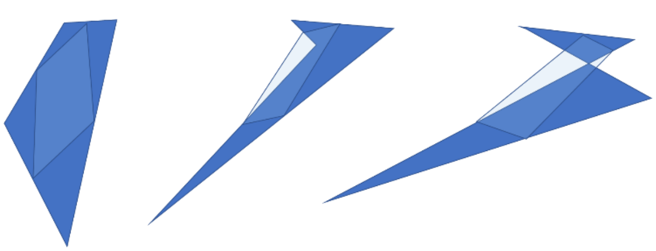


Discusiones sobre la pertinencia de un caso u otro y la pertinencia de las condiciones dadas pueden ser muy importantes en el salón de clase.

Luego bajo presunciones de un buen manejo de las demos traciones se pueden hacer trazos auxiliares y aprovechar contenidos sobre semejanza de triángulos para hacer la demostración correspondiente.



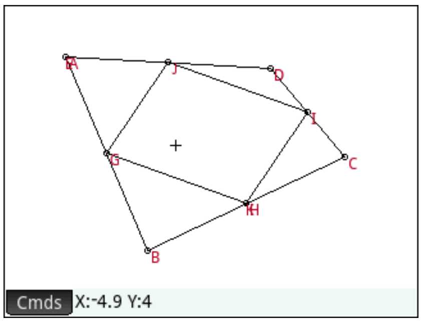
Al terminar, a partir de un solo caso establecemos una propiedad general de los cuadriláteros y quedamos satisfechos con este tipo de “inducción inmediata”. Pero ¿qué sucede si partimos de otro cuadrilátero? ¿El resultado será válido?

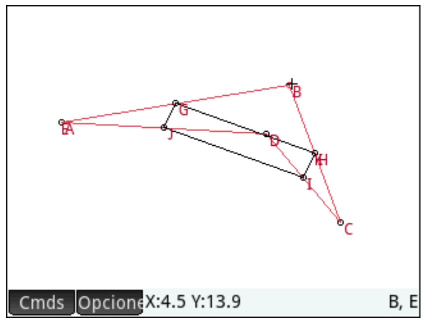


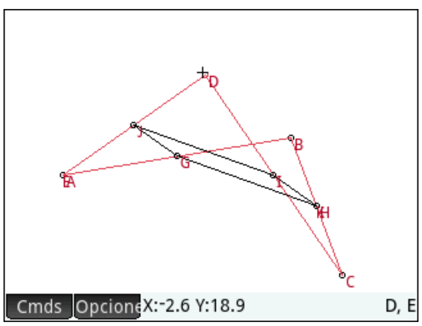
ISBN 978-84-945722-3-4

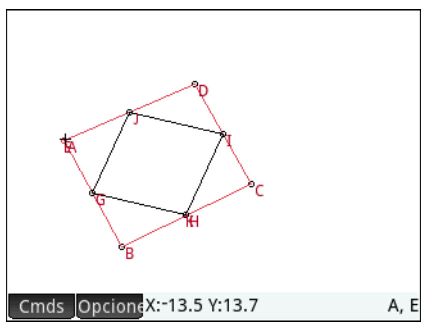
Ayudaría mucho en este tipo de actividades que se tuvieran habilidades relacionadas con el dibujo y la precisión en los trazos, aspecto que, en ocasiones, los propios docentes no tienen, pero por más esfuerzos que se hagan la cantidad de casos por analizar podrían se demasiados hasta que alguien se percatara que hay muchos casos similares y se repitiera la "demostración" en cada uno de ellos.

Utilizando tecnología podremos hacer plausible el resultado sin requerir demostración:







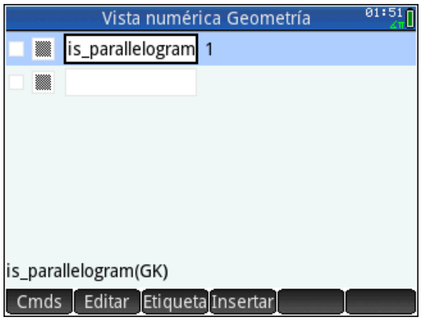


Esto cambia también la secuencia didáctica pues primero se puede pedir que se trace un cuadrilátero, después el cuadrilátero formado con los puntos medios de cada lado y ensayar todas las posibilidades. Después se puede pedir que los estudiantes señalen regularidades y enuncien, con sus propias palabras lo que sucede y establezcan el enunciado de una parte del teorema conocido como "teorema de Varignon"

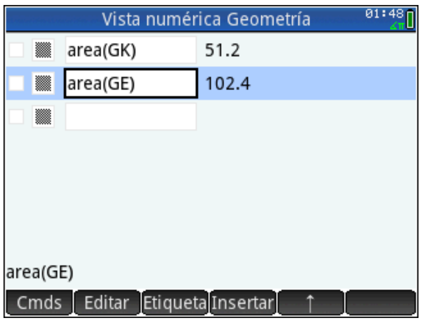
En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo (a dicho paralelogramo se le acostumbra denominar "paralelogramo de Varignon")

Lo cual también se puede probar utilizando el recurso de "prueba" del dispositivo.

ISBN 978-84-945722-3-4



Otra parte importante del Teorema de Varignon, es la relación entre las áreas de los cuadriláteros:



Con lo que se puede establecer que:

En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original

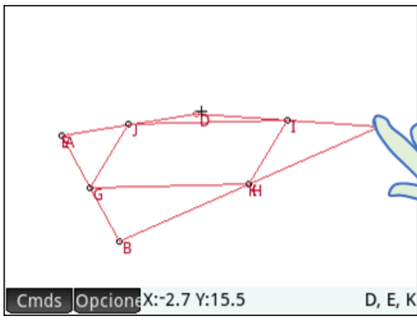
También se pueden explorar otras consecuencias:

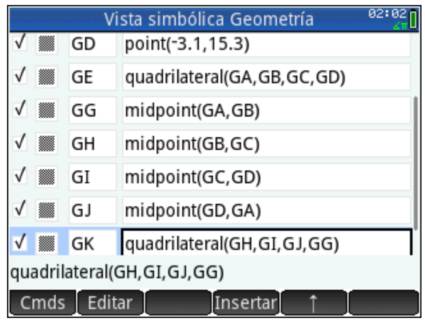
a) El perímetro del paralelogramo de Varignon es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.
b) El paralelogramo de Varignon es un rombo si y sólo si las diagonales del cuadrilátero tienen la misma longitud.
c) El paralelogramo de Varignon es un rectángulo si y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.
d) El paralelogramo de Varignon es un cuadrado si y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares y tienen la misma longitud.

ISBN 978-84-945722-3-4

O intentar generalizar el resultado a otros polígonos irregulares de más de cuatro lados.

Aquí el proceso de demostración también se puede "intuir" de la manipulación que se hace con los cuadriláteros y en el dispositivo que se usa es posible hacerlo con facilidad porque es totalmente táctil su pantalla, se puede usar el modo simbólico para escribir lo que se desea hacer si estar buscando acomodar el dedo en la pantalla o manipular el "jostick" o "mouse" de la calculadora.





Hay muchas experiencias similares donde la calculadora permite avanzar paulatinamente con mayor comprensión en el contenido matemático antes de trabajar los procedimientos formales con los que se inicia en las tendencias de enseñanza tradicionales.

Otra forma de gestión de la clase

El dispositivo que se utiliza tiene la posibilidad de armar una red de intercomunicación entre las calculadoras y la computadora del maestro sin uso de wifi.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esto permite conocer lo que están haciendo cada uno de los estudiantes, que planteen sus dudas con mensajes a sus compañeros o al maestro, que se apliquen evaluaciones diagnosticas o formativas, conociendo los resultados inmediatamente en la medida que se van respondiendo los ítems, dar la palabra a los alumnos o equipos de trabajo para que expongan sus resultados, entre muchas otras posibilidades, pero sin requerimientos de wifi.

Cometarios finales

El uso de las calculadoras se ha ido extendiendo pues los salones de cómputo tienen costos altos y una vigencia corta, además de requerir mantenimiento e incrementan el consumo de energía. También la problemática de la cobertura que puede dar un salón de computación en menor de la que se puede obtener con otras tecnologías, por no hablar de los problemas de seguridad para el resguardo de equipos.

Las tablets se han ido incorporando a las escuelas con la esperanza de reducir costos pero requieren de wifi también, como las computadoras y eso implica enfrentar otras problemáticas de recursos económicos y de servicios que deben obtener las escuelas lo cual implica caminos engorrosos que no siempre llevan a resultados óptimos.

La calculadora tiene mayor presencia por los costos al alcance de las escuelas o de los propios estudiantes y los pocos requerimientos para su uso y su mayor vigencia de funcionamiento. Pero, las limitaciones de resolución de pantalla, manejo de colores, interacción por otras posibilidades más allá del teclado, la facilidad de uso, la interacción entre diferentes posibilidades para la enseñanza como las representaciones de los objetos matemáticos, alejaron estos dispositivos de las aulas, pero los desarrollos recientes han permitido incrementar las posibilidades de uso en la educación de las calculadoras. La siguiente tabla resume algunos datos comparativos entre computadoras, tablets y calculadoras.

ISBN 978-84-945722-3-4

	Calculadora	Computador	Tablets
Pueden usarse sin instalaciones especiales	si	no	si
Movilidad de varios equipos	si	Generalmente no	si
Evitan costo de mantenimiento	si	no	si
Transportabilidad personal	si	Depende del modelo	Depende del peso y accesorios
Actualizaciones gratuitas	Si	No	si
Funcionamiento amigable del software	si	Depende del software	Depende del sistema
Interactividad al gusto del usuario	Si	Depende del software	si
Interactividad entre módulos	si	Depende del software	Depende del software
Evita la distracción por uso de internet	si	no	no
Conectividad directa entre alumnos	si	Depende del equipo	Depende
Conectividad con el maestro	si	si	no
Libre de programas maliciosos	si	no	Depende del sistema
Interactividad con la computadora	si	No aplica	si
Posibilidad del uso de sensores	si	si	no
Resolución de pantalla	Buena	Excelente	Muy buena
Vigencia más de 10 años	si	no	no

Tanto las computadoras, como las tablets también son efectivas en la enseñanza, pero no siempre se pueden interconectar a los estudiantes y en localidades sin servicios de internet o de energía eléctrica, son poco factibles de usar. Una calculadora como la que se ha utilizado sirve en todas las localidades y representa un costo menos. Se ha utilizado en zonas rurales en subsistemas como telesecundaria o telebachillerato, donde el acceso a internet o buen flujo de energía eléctrica es mínimo.

Es importante señalar que el uso de tecnologías en el aula requiere de una planeación didáctica más cuidadosa que solamente hacer actividades, la intervención del docente es fundamental en este tipo de situaciones y sobre todo requiere invertir las etapas de una clase tradicional y cambiar concepciones acera de la matemática y su utilidad, no sólo en la vida cotidiana, como se acostumbra planear, sino también en la formación del pensamiento matemático.

Es fundamental que se vaya más allá de poner datos y obtener resultados, el docente debe indicar que se hace con distintos tipos de procedimientos y datos para resaltar regularidades que pueden ayudar a los estudiantes para dar sentido a las ideas matemáticas, antes de trabajar las técnicas.

La tecnología avanza más rápido que el desarrollo de procedimientos educativos con el uso de diferentes tecnologías y solamente las calculadoras pueden tener cierta estabilidad en el uso de todos los niveles educativos, esto requiere también cambiar las perspectivas de las autoridades educativas para aceptar que los estudiantes están ante formas de trabajo diferentes que el uso del papel y lápiz.

Con los recursos que se pueden tener con las calculadoras de reciente generación como las que se utilizarán en el taller se obliga a avanzar en otras vías para el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas cambiando el papel del docente en el aula, pero también el de los estudiantes.

Bibliografía

Basurto, E. & Mancera, E. (2015). Hp Prime for Dummies. Planeta,. España.

Mancera, E. & Basurto, E. (2015). *Errar es un placer. el papel de los errores en la enseñanza de las matemáticas*. SIRVE SA de CV. México

Mancera, E. & Basurto, E. (2016). Saber matemáticas es saber resolver problemas. SIRVE SA de CV. México

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-319

A CONSTRUÇÃO DE OBJETOS MATEMÁTICOS POR MEIO DOS REGISTROS DE COMANDO DO GEOGEBRA

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
abarcaap@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Núcleo temático: V
Modalidade: CP
Nível educativo: 5
Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica. Educação Matemática. GeoGebra

Resumo: ***O tema desta conferência trata da construção de objetos Matemáticos por meio dos registros de comando do GeoGebra. Com o advento de softwares dinâmicos alguns comandos não são evidentes nas ferramentas disponíveis no menu do programa e requer ou um registro algébrico ou um comando na Entrada para que possa ser obtido. O objetivo é refletir se tais registros de comandos podem ser considerados como Registros de Representação Semiótica segundo Duval. Tal teoria prioriza, para a aprendizagem matemática, operações entre as representações semióticas de um mesmo objeto matemático, com prioridade para a operação de conversão. É sabido que o GeoGebra permite que um objeto matemático tenha sua representação em sistemas semióticos distintos como simbólico, gráfico e discursivo que são evidenciados principalmente nas janelas de visualização e algébrica. É possível, com a utilização do GeoGebra, registros de comando e as respectivas conversões para os registros algébrico e gráfico ocorrer a aprendizagem de alguns objetos matemáticos? É possível que o professor ou aluno seja capaz de identificar o objeto matemático a ser obtido por meio de registros de comandos na caixa de Entrada? Foram desenvolvidas algumas atividades por um grupo de professores na tentativa de obter indícios de respostas a essas questões.***

1. Introdução

Para refletir sobre as diferentes possibilidades e caminhos nos quais o GeoGebra pode ser utilizado e investigado, apresentamos resultados de propostas de atividades desenvolvidas por professores de Matemática, construídas com pressupostos de teorias que indicam a importância da dimensão semiótica para a apropriação de objetos matemáticos e que podem contribuir e auxiliar para a compreensão da prática docente.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A utilização do *software* GeoGebra não é apenas mais um recurso tecnológico, mas, sim, um recurso que colabora no desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma vez que, por si só, o *software* não *faz Matemática*. Além desse aspecto, os recursos apresentados pelos *softwares* dinâmicos permitem a institucionalização do conhecimento de objetos matemáticos ao serem explorados pelos diferentes registros que são apresentados visualmente na tela do computador, como considera Duval.

Esperamos colaborar para o aprimorando dos estudos e das pesquisas no que diz respeito à tecnologia no contexto da Educação Matemática explorando o recurso de alguns comandos do GeoGebra, inseridos exclusivamente na janela de Entrada e que consideramos como registros de escrita simbólica na perspectiva de Duval (2009).

2. Sobre os Registros de Representação Semiótica

De acordo com Duval (2009) para a compreensão da Matemática é necessário estudar o funcionamento dos sistemas cognitivos que propiciam o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, considerando, ainda, quais são os sistemas cognitivos necessários e se são próprios da atividade Matemática.

Para o funcionamento da atividade cognitiva requerida pela Matemática, que é diferenciada de outros domínios do conhecimento, a representação semiótica é uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático por duas razões: em primeiro lugar - as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado. Em segundo lugar - a existência de grande variedade de representação semiótica utilizada em Matemática como figuras geométricas, as escritas algébricas, representações gráficas e a língua natural. (Duval, 2009).

Com a presença dos softwares de Geometria Dinâmica, em especial o GeoGebra, os aspectos considerados por Duval podem ser explorados nas diferentes janelas que são exibidas e permitem a construção de um objeto matemático.

Segundo Duval (2009), existem dois tipos de transformações dos registros de representação semiótica: conversão e tratamento representando os diferentes signos utilizados em Matemática, tais como figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural e registro numérico.

Uma conversão é uma transformação de uma representação, mudando de um registro para outro. Por exemplo, ao utilizar um gráfico cartesiano para representar um

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

sistema de equações realiza-se uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Em nossa proposta utilizaremos os comandos oferecidos pelo GeoGebra em uma escrita simbólica própria, inseridos na respectiva Entrada e que permitem a construção de objetos matemáticos, ocorrendo aí uma conversão do registro da escrita simbólica para os registros gráficos e algébricos.

O tratamento é uma operação efetuada dentro de um mesmo registro de representação, por exemplo, ao multiplicar uma equação do sistema por um número real diferente de zero para escaloná-lo, realiza-se um tratamento desse registro algébrico. Em nosso caso ocorre o tratamento ao serem utilizadas diferentes escritas simbólicas na Entrada tendo como resultado o mesmo objeto Matemático.

Quando se utiliza um *software* de geometria dinâmica, efetua-se um tratamento no registro gráfico ao movimentar a figura ou, aplicado um tratamento na língua natural, quando se reescreve o enunciado de uma atividade de outra forma.

A proposta apresentada nas atividades foi orientada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009)

3. Procedimentos Metodológicos

As atividades a seguir procuram explorar registros que podem ser considerados como *escritas simbólicas* de acordo com Duval. Tais comandos estão presentes no *software* GeoGebra e quando utilizados geram registros gráficos na janela de visualização e os respectivos registros na janela de álgebra.

Muitas construções que são exploradas no GeoGebra não são obtidas diretamente pelas ferramentas e ícones disponibilizados nos menus do *software* e o acesso a tais comandos de escrita simbólica, em geral não muito utilizados, são necessários e podem trazer dificuldades para o seu reconhecimento e identificação.

Conjecturamos que, se os professores, tendo conhecimento destas possibilidades, terão melhor suporte para a utilização do GeoGebra pelas muitas opções que tais comandos permitem.

As seguintes questões podem ser colocadas:

- É possível que os professores identifiquem os comandos necessários de escrita simbólica para algumas representações de objetos matemáticos?

- Quais possibilidades e limites podem emergir com a utilização destes registros?

ISBN 978-84-945722-3-4

Para tentar responder as questões acima apresentamos, inicialmente, propostas inspiradas em outras atividades comumente desenvolvidas com as ferramentas presentes no menu do GeoGebra e, em seguida, com atividades que requerem os comandos de escrita simbólica para sua representação.

No software GeoGebra pode ser exibida a janela de **Entrada**, uma caixa de texto em que podemos digitar comandos para construir objetos, executar transformações, obter medidas, entre outras possibilidades. À direita da janela de Entrada existem dois ícones, um para inserção de símbolos especiais e outro para abrir a **Janela Ajuda** de comandos.

Para o desenvolvimento das atividades, por meio de comandos inseridos na janela de entrada, orientamos os professores para configurar inicialmente as ferramentas do GeoGebra, deixando visíveis apenas as janelas de **Álgebra** e de **Visualização**, a **Entrada** e as seguintes ferramentas: **Ponto** , **Texto** ABC **Mover** e **Mover Janela de Visualização** e em opções do menu deixar o **Rotular** A A em modo automático.

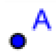
A sintaxe de um comando diz respeito a como ele deve ser escrito, incluindo os parâmetros necessários, para que o comando execute sua função.

O objetivo dessa configuração é inserir os professores na dimensão da instrumentalização da Gênese Instrumental de Rabardel (1995), caracterizada como um processo pelo qual o sujeito personaliza o artefato de acordo com as suas necessidades. É importante observar que, ao limitarmos o uso de ferramentas, exige-se do professor o conhecimento matemático dos objetos matemáticos e suas etapas de construção por meio de comandos na escrita simbólica inseridos na Entrada.

Seguindo na mesma atividade orientamos os professores para que desenvolvessem as construções utilizando apenas as ferramentas disponíveis, de acordo com a configuração solicitada inserindo comandos na Entrada. O objetivo de cada atividade é inserir os professores na dimensão da instrumentação da Gênese Instrumental de Rabardel (1995), que é o processo pelo qual as ações do sujeito para resolver um dado problema são condicionadas pelas especificidades e potencialidades de um artefato.

Atividade 1. Construção de um quadrado e de um triângulo equilátero.

ISBN 978-84-945722-3-4

Levando-se em consideração as propriedades matemáticas e as ferramentas disponíveis, uma das possíveis soluções para a construção de um quadrado seria a inserção do Comando **Polígono[<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>].** Para isso é preciso criar antecipadamente dois pontos A e B na janela de visualização utilizando a ferramenta Ponto 

. Em seguida digitar na Entrada **Polígono[A, B, 4]**. O mesmo comando para a construção do triângulo equilátero **Polígono[A, B, 3]**.

Uma segunda possibilidade é a construção do quadrado e do triângulo equilátero, passo a passo, fazendo uso de suas propriedades e digitando na Entrada os comandos como segue

1. Criar dois pontos A e B
2. Digitar na Entrada os seguintes comandos:

a. **Segmento[<Ponto>, <Ponto>]** - Segmento[A, B]

b. **Perpendicular[<Ponto>, <Segmento>]** - Perpendicular[A,f] e Perpendicular[B, f] obtendo as retas g e h.

c. **Círculo[<Ponto>, <Ponto>]** - Círculo[A,B] e Círculo[B,A] obtendo as circunferências c e d.

d. **Interseção[<Objeto>, <Objeto>]** - Interseção[g,d] e Interseção[h,c] obtendo 4 pontos C, D, E, F.

e. **Segmento[<Ponto>, <Ponto>]** - Segmento[C, E] ou Segmento[D, F]

f. **Polígono[<Ponto>, ..., <Ponto>]** - Polígono[A, B, E, C] ou Polígono[A, B, F, D] obtendo os quadrados solicitados. A construção deve ficar semelhante à Figura 1.

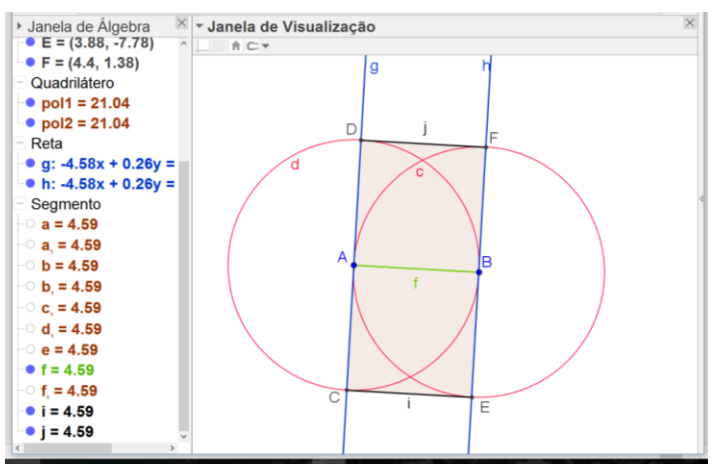


Figura 1: Possibilidade de construção de quadrado

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A construção garante que a figura é um quadrado pois os lados são congruentes, uma vez que os raios das circunferências possuem a mesma medida do segmento com extremos em A e B.

Na mesma construção obter um triângulo equilátero

g. **Interseção[<Objeto>, <Objeto>]** - Interseção[c, d]

h. **Polígono[<Ponto>, ..., <Ponto>]** - Polígono[A, B, H] ou Polígono[A, B, G] obtendo dois triângulos equiláteros como apresentados na figura 2.

Na mesma construção digitar **Comprimento[<Objeto>]** substituindo <Objeto> por A. O que significa o número obtido na janela de Álgebra?

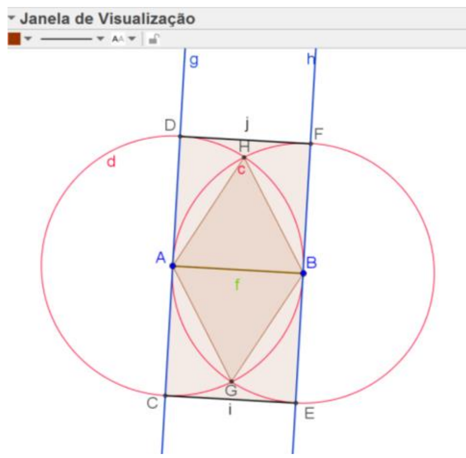


Figura 2: Possibilidade de construção de triângulo equilátero

Qual ou quais comandos na Entrada podem ser utilizados para determinar a área dos triângulos equiláteros? Experimente o comando Área[<Ponto>, ..., <Ponto>]

Tal construção garante que a figura seja um triângulo equilátero porque os lados são congruentes, uma vez que os raios das circunferências possuem a mesma medida do segmento com extremos em A e B.

Também dizemos que quando uma figura pode ser movimentada sem perder suas características é uma construção *robusta*. Identifique os objetos que podem ser movimentados na construção e movimente-os. A construção é robusta? Por que não é possível movimentar outros objetos?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

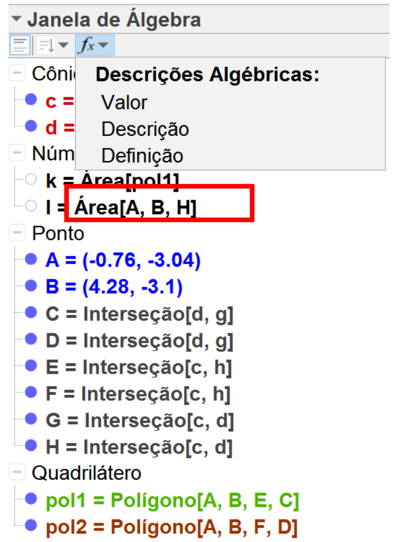


Figura 3: Definição das descrições algébricas

Na Janela de Álgebra podemos observar que tanto nas duas equações das "cônicas" como nas duas equações das "retas" há alguns parâmetros com o mesmo valor numérico. Justificar geometricamente o significado dessas igualdades.

Também na janela de Álgebra e em Descrições Algébricas, ao clicar em Definição, **cada comando utilizado será descrito nesta janela identificado pela escrita simbólica utilizada, como se observa na Figura 3. Podem ser utilizados outros comandos de escrita simbólica para obter os mesmos objetos?**

É importante compreender o emprego de outros registros, pois de acordo com Duval (2009), as atividades precisam ser desenvolvidas em diferentes registros, visto que possibilita ao participante refletir, comparar e analisar resultados.

Na proposta das atividades que se seguiram reforçamos que no GeoGebra à direita da janela de Entrada existem dois ícones, um para inserção de símbolos especiais e outro para abrir a janela de comandos.

Clicando no ícone **Janela Ajuda** é aberta uma listagem de comandos do software. Cada um dos itens da lista de comandos corresponde a uma categoria que reúne uma outra lista de comandos. E, clicando no sinal ao lado do título do tópico abre-se uma nova janela com os comandos relacionados àquele tópico.

Ao escolher uma categoria nesta janela de ajuda, clicando em + surgem vários itens desta categoria e pode ser escolhido um dos itens. Devem ser observados os comandos deste

ISBN 978-84-945722-3-4

item. Por exemplo, se escolhermos **Álgebra** e depois clicamos em **Máximo**. Os seguintes comandos estarão disponíveis:

Máximo[<Intervalo>]

Máximo[<Lista>]

Máximo[<Número>, <Número>]

Máximo[<Lista de Dados>, <Lista de Frequências>]

Máximo[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]

Os seguintes comandos podem ser utilizados na janela de Cálculos Simbólicos (CAS):

Máximo[<Lista>]

Máximo[<Número>, <Número>]

Atividade 2. **Conjecture sobre que objetos matemáticos serão obtidos ao digitar os comandos abaixo e em seguida verifique se suas conjecturas estão corretas na janela de visualização ou na janela de álgebra. Primeiramente, em cada caso, obter os comandos e objetos matemáticos que são necessários e estão especificados entre colchetes. Tais objetos também devem ser obtidos por meio de comandos na Entrada a menos da ferramenta** Ponto.

a. **CírculoInscrito[<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>]**

b. **Comprimento[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]**

c. **Comprimento[<Função>, <Ponto Inicial>, <Ponto Final>]**

d. **Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]**

e. **Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]**

f. **Girar[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]**

Especifique seus passos em cada caso e o objeto matemático obtido.

4. Resultados obtidos e Considerações Finais

Participaram dessa pesquisa quatro professores em duas duplas e que já possuíam conhecimento prévio sobre a utilização do GeoGebra mas desconheciam a possibilidade de obter objetos matemáticos por meio dos comandos disponibilizados.

Os professores ficaram surpresos com algumas construções obtidas e colocaram algumas questões como o cuidado na escolha dos objetos iniciais, dificuldade em encontrar o comando para reta paralela Reta[<Ponto>, <Reta Paralela>], a ordem dos pontos na

ISBN 978-84-945722-3-4

construção de um polígono e também a ordem dos objetos para obter um objeto como intersecção.

Para finalizar foi solicitado que criassem uma proposta e uma dupla de participantes criou o comando para obter os centros de um triângulo Ortocentro, Incentro, Baricentro e Circuncentro com o respectivo registro: Sequência[CentroDoTriângulo[A,B,C,n], n, 1, 4] **e em seguida verificaram que era preciso identificar cada um dos pontos obtidos na lista de pontos na janela algébrica como indica a Figura 4 a seguir.**

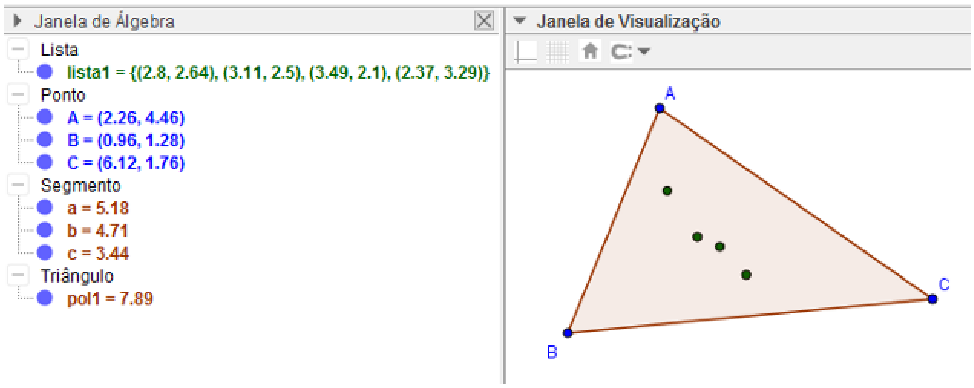


Figura 4: Construção Centros de um Triângulo

Consideramos que, se a proposta de desenvolver atividades por meio de registros de comandos revela, por um lado, alguma dificuldade para o reconhecimento dos objetos matemáticos, por outro lado, permite o conhecimento de outra possibilidade de investigação destes mesmos objetos, no GeoGebra, com a utilização de apenas algumas ferramentas presentes no menu.

Referências bibliográficas

Duval, R. (2009) ***Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais*****. (Fascículo 1). Livraria da Física, São Paulo.**

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

ISBN 978-84-945722-3-4

CP-349

DEVAGAR SE VAI AO LONGE: O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS MAIS COMPLEXOS DESDE O INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO

Rute E. S. R. Borba
resrborba@gmail.com
Universidade Federal de Pernambuco – Brasil

Resumo

Alguns conceitos matemáticos mais complexos podem ser trabalhados desde cedo na escola, a partir de situações mais simples e por uso de recursos adequados, proporcionando oportunidades para as crianças construírem ideias iniciais, as quais servirão de base para desenvolvimentos conceituais posteriores. A partir desses desenvolvimentos, raciocínios matemáticos diversos poderão ser ampliados. Ressalta-se, nesse trabalho de desenvolvimento de conceitos, o importante papel das representações simbólicas (Nunes, 1997; Vergnaud, 1987; Duval, 2012) e, para exemplificar, apresentarei resultados de pesquisas quanto a conhecimentos iniciais, por parte de crianças novas, de números inteiros, de situações probabilísticas e combinatórias, a partir do uso de registros de representação por elas construídos ou aprendidos. Também discutirei implicações educacionais – tais como a necessidade de maior articulação do trabalho entre os professores de distintos níveis de ensino e a necessidade de formação adequada dos professores (Ball, 1993), considerando-se o desenvolvimento de conceitos ao longo da escolarização básica.

Introdução

O objetivo maior da Educação Matemática, a meu ver, é o desenvolvimento de modos de raciocinar. Mais do que o aprendizado de conteúdos matemáticos específicos, a finalidade é desenvolver nos estudantes seus raciocínios aritmético, relacional, algébrico, proporcional, probabilístico, combinatório, estatístico e geométrico, dentre outros. Defendo, assim, junto a outros educadores matemáticos, que trabalhar na escola com conteúdos matemáticos específicos não é um fim em si mesmo, mas deve ter como objetivo maior o desenvolvimento de variadas formas de raciocínio matemático.

Diversas teorias da Educação Matemática reforçam a visão do desenvolvimento de raciocínios no ensino e na aprendizagem da Matemática. Dentre essas, ressalto a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996) e a dos Conhecimentos Docentes (Ball, 1993). Ao tratar do desenvolvimento conceitual de estudantes e do aprimoramento dos conhecimentos

ISBN 978-84-945722-3-4

de conteúdo e pedagógico de professores, essas teorias implicam que o aprendizado matemático vai além da aprendizagem de conceitos isolados, envolvendo conceitos articulados e o estímulo, ao longo do período de escolarização básica, ao desenvolver de formas de raciocínio.

Vergnaud (1996) aponta que os conceitos se originam e se desenvolvem em campos conceituais e, baseando-se nesse pressuposto, há necessidade de se lidar com múltiplos conceitos, em estreita articulação, nas atividades matemáticas propostas pelas escolas. A ideia de campo conceitual – além de remeter à articulação entre conceitos estruturalmente e cognitivamente próximos – também implica em considerar o desenvolvimento conceitual ao longo de toda a escolarização. O que inicialmente é tratado com noções intuitivas possuídas pelos estudantes, pode (e deve) voltar a ser trabalhado em sucessivos níveis de maior complexidade, ampliando, a cada revisita de um conceito, o entendimento do campo conceitual ao qual ele pertence e, assim, desenvolvendo formas de raciocinar.

Ao longo desse texto, e apresentação no evento, explorarei alguns conceitos matemáticos, indicando possíveis articulações entre conteúdos e possíveis caminhos de aprofundamento com o passar dos anos escolares – possibilitando ampliação de modos de raciocínio. Serão tomados como exemplos: números inteiros, a probabilidade e a combinatória, evidenciando ideias matemáticas inicialmente possuídas pelas crianças e a partir das quais poderão desenvolver, por meio de representações simbólicas adequadas, seus raciocínios relacional, probabilístico e combinatório.

Ao discutir os exemplos, ressaltarei o papel das representações simbólicas, considerando que um conceito não deve ser confundido com sua representação e, para tal, distintos registros devem ser trabalhados no ensino (Duval, 2012), e, ao mesmo tempo, defenderei como o desenvolvimento conceitual tem forte influência dos registros utilizados (Nunes, 1997). Pensar sobre um mesmo conceito utilizando representações simbólicas diferenciadas – como o registro escrito e o uso de cálculo oral, por exemplo – possibilita o pensar sobre o conceito em distintas formas, evitando confundir o conceito com sua representação, e estimulando múltiplos olhares a um mesmo conceito.

Na visão de desenvolvimento de raciocínios, as escolas, e seus professores, precisam estar preparados para o trabalho que tenha esse desenvolver como objetivo principal. Nesse

ISBN 978-84-945722-3-4

sentido, a articulação entre conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos (Ball, 1993) se faz necessário para, amparado no domínio dos conteúdos matemáticos, desenvolver propostas pedagógicas cujo alvo maior seja o desenvolvimento de modos de raciocinar. Dentre os conhecimentos apontados por Ball e colaboradores, tem-se o *conhecimento do horizonte do conteúdo*, ou seja, ter em mente o desenvolvimento de conteúdos ao longo de períodos escolares ou, melhor ainda, no percurso de toda a escolarização básica. Assim pedagogos (que ensinam Matemática nos anos iniciais de escolarização) e licenciados em Matemática (que lecionam nos anos posteriores) necessitam estar conectados em prol do desenvolvimento matemático dos estudantes. O desenvolvimento de raciocínios matemáticos é, portanto, corresponsabilidade dos professores dos distintos níveis de ensino e isso implica em valorização mútua do trabalho realizado por cada um. Para o alcance dessa conexão maior entre professores dos diferentes níveis da educação básica, sugiro maior integração destes em programas de formação inicial e formação continuada.

Os exemplos de conceitos matemáticos aqui explorados serão discutidos à luz de um olhar de seus horizontes – sempre buscando entender: Como atender ao dito popular 'Devagar se vai ao longe' no ensino e na aprendizagem da Matemática? Como trabalhar a complexidade conceitual crescente ao longo da escolarização? Como melhor auxiliar os estudantes a desenvolverem modos de raciocínio matemático que lhes sejam úteis, ampliando suas formas de raciocinar e alargando suas compreensões do mundo que os cerca?

Desenvolvendo o raciocínio relacional de crianças novas

Em estudo de tese de doutorado (Borba, 2002), observei o desempenho de crianças de 7 e 8 anos de idade ao responderem, em contexto de jogo (pinball), questões referentes a números inteiros (positivos e negativos). Ressalta-se que esse conteúdo é, geralmente, inicialmente trabalhado na escola quando os estudantes estão com 12 ou 13 anos de idade.

A motivação do estudo se deu a partir da observação de resultados de estudos anteriores os quais, por um lado, indicavam que crianças novas já demonstravam compreensões de números negativos e outros estudos, por outro lado, evidenciavam dificuldades de adolescentes ao tratarem números inteiros em seus aprendizados escolares.

ISBN 978-84-945722-3-4

Em uma análise atenta desses estudos anteriores, à luz da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996), observei que o significado de número negativo enquanto *medida* já é entendido por grande parte das crianças, mas o significado de *relação* ainda precisa ser desenvolvido e a escola tem importante papel nesse desenvolvimento. Também a escola deve atentar para o papel da explicitação de representações simbólicas, em particular no que diz respeito ao uso do sinal '-' (menos), com seus múltiplos significados, tais como transformação negativa, subtração (resultando em um resto ou diferença), medida negativa, relação negativa, oposto de um número negativo e oposto de uma transformação negativa.

Apresentarei, em minha fala, resultados do levantamento efetuado que evidenciam a influência dos distintos significados, propriedades e representações na compreensão do número inteiro. Esses resultados reforçam que é importante o desenvolvimento de raciocínio relacional (*quanto a mais* ou *quanto a menos*), amparado em representação simbólica explícita compreensível, e que esse modo de pensar pode ser base de outros raciocínios, tal como o algébrico. Compreender desde cedo, por exemplo, que, em um jogo, ganhar 7 pontos (representado por fichas verdes) e perder 9 (representado por fichas amarelas) significa possuir '2 pontos a menos' (as duas fichas amarelas restantes da comparação entre fichas verdes e amarelas), independente de quanto era a pontuação inicial, é um raciocínio relacional útil também à construção e desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Dessa forma, crianças em início de escolarização têm condições de começar o desenvolvimento de raciocínios relacionais, tais como os contidos em situações que envolvem números positivos e negativos. Não se trata de formalização ainda dos registros de números negativos, mas o estímulo ao pensar em situações que envolvem *medidas*, *relações* e *transformações* negativas. Esse trabalho requer dos professores a compreensão de como iniciar a discussão sobre números negativos e de como aprofundar o entendimento desse conceito ao longo da escolarização.

Desenvolvendo o raciocínio probabilístico desde o início da escolarização

Bryant e Nunes (2012) apontam quatro compreensões necessárias à aprendizagem da probabilidade: da *aleatoriedade*, de *espaço amostral*, da *quantificação* e *comparação de*

ISBN 978-84-945722-3-4

probabilidades e de *correlação*. Essas compreensões não se apresentam de forma desarticulada em situações probabilísticas, mas podem ser analisadas isoladamente.

Em situações de jogo, Batista da Silva (2016) observou que crianças de 7 a 11 anos possuem noções intuitivas que têm potencial para o desenvolvimento de seus raciocínios probabilísticos. Para as crianças do estudo, aleatoriedade estava associada à sorte ou ao azar e elas eram muitas vezes corretas em seus julgamentos de eventos pouco prováveis (a obtenção de resultado 2 na soma de dois dados lançados, por exemplo) e de eventos impossíveis (obtenção da soma 1 no lançamento de dois dados). As crianças evidenciaram fragilidades no julgamento de eventos independentes, cometendo erro de *recência positiva* (acreditando que, se no lançamento de um dado, deu 2 repetidas vezes, daria 2 no lançamento seguinte) ou erro de *recência negativa* (julgando que não daria 2 no próximo lançamento). Embora as crianças fossem bem-sucedidas no levantamento de alguns elementos do espaço amostral, falharam em perceber que, no lançamento de dois dados, obter 3 em um dado azul e 5 em um dado vermelho é diferente de obter 3 em um dado vermelho e 5 em um dado azul.

O estudo de Batista da Silva mostrou que, apesar de algumas limitações, o contexto de jogos (envolvendo dados e moedas) pode ser favorável ao desenvolvimento de raciocínios probabilísticos de crianças novas, levando-as a refletirem sobre demandas cognitivas necessárias à compreensão da probabilidade. Assim, de modo lúdico, as reflexões iniciais a respeito da probabilidade poderão ser exploradas posteriormente de outras formas – em experimentações, por exemplo – possibilitando um mais amplo desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Outros estudos (Santana, 2011; Campos e Pietropaolo, 2013; Bernabeu, Torres, Garcia e Batanero, 2015) apontam para a fragilidade de conhecimentos probabilísticos de professores. Essa fragilidade nos alerta sobre a necessidade de melhor formação docente, em particular no que diz respeito ao trabalho integrado de professores de início de escolarização com professores de anos posteriores na abordagem da probabilidade.

Desenvolvendo o raciocínio combinatório da Educação Infantil ao Ensino Médio

Um terceiro exemplo de desenvolvimento de raciocínio matemático, a ser tratado do início ao final da escolarização básica, é o envolvido em situações combinatórias. Em texto

ISBN 978-84-945722-3-4

anterior (Borba, 2010), apontei que as variadas situações (basicamente *produtos de medida*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*) podem ser abordadas da Educação Infantil ao Ensino Médio, levando em consideração invariantes de *escolha* e de *ordenação* das distintas situações. Há princípios comuns em problemas combinatórios e também aspectos diferenciadores no que diz respeito a como os elementos são escolhidos e se a ordem dos elementos caracteriza, ou não, possibilidades distintas. Assim, as semelhanças e diferenças precisam ser abordadas no trabalho com situações combinatórias.

Para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, os estudantes, ao longo da escolarização, podem (e devem) ser levados a refletir sobre a necessidade de levantar todos os elementos do espaço amostral das referidas situações e também a pensarem em como determinar todas as possibilidades sem ter que contá-las uma a uma. Assim, a gradativa complexidade das situações combinatórias trabalhadas na escola pode possibilitar um amplo desenvolvimento conceitual dos estudantes – articulando também seus raciocínios combinatório e probabilístico. Como apontam Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), esses dois modos de raciocínio se articulam estreitamente, pois, para a construção de todos os possíveis eventos de determinado espaço amostral, uma construção combinatória se faz necessária.

Um possível caminho no *horizonte do ensino de Combinatória* seria: trabalho inicial com materiais manipuláveis e desenhos; seguido de listagens e árvores de possibilidade; e posteriores trabalhos com expressões numéricas, princípio multiplicativo e fórmulas. Esse conjunto de usos de representações simbólicas diversificadas, certamente auxilia no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os materiais podem ser livremente manipulados pelas crianças, possibilitando verificar as distintas possibilidades de combinações. Os desenhos por elas produzidos, principalmente antes do domínio da escrita, também são formas das crianças representarem os problemas combinatórios. Ao listarem as combinações ou ao construírem árvores de possibilidades, os estudantes também levantarão o espaço amostral e poderão refletir, como apontam Azevedo, Borba e Bittar (2016), sobre como desses registros pode-se chegar a expressões numéricas e ao princípio multiplicativo. Todas essas construções anteriores poderão auxiliar na compreensão das fórmulas

ISBN 978-84-945722-3-4

introduzidas no Ensino Médio – não deixando para esse nível de ensino a responsabilidade de todo (ou de maior parte) do estudo de situações combinatórias.

Rocha (2011) aponta que, à semelhança dos estudantes, professores de todos os níveis de ensino, possuem dificuldades na compreensão do invariante da ordenação – em particular na diferenciação entre *arranjos* e *combinações*. Essa autora também observou que escolhas didáticas, no ensino de Combinatória, variam em função da formação inicial e experiências de ensino dos professores – o que reforça o aqui defendido de que as trocas entre professores de diferentes níveis de ensino é necessária e pode ser muito benéfica. O estudo de Rocha, assim, ressalta a necessidade de maior aprofundamento de conhecimentos docentes (específicos de conteúdo, de ensino e de aprendizagem de alunos, dentre outros) para que seja realizado na escola um efetivo trabalho de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Considerações

Finalizo apresentando algumas questões que resultam do que foi aqui discutido.

Defendo um início mais precoce de trabalho na escola com conceitos matemáticos mais complexos, tais como os conceitos de número negativo e os envolvidos em situações probabilísticas e combinatórias. Usualmente esses conteúdos são trabalhados mais tarde na escola, mas defendo que atividades adequadas podem ser desenvolvidas, com o intuito de iniciar, desde cedo, o desenvolvimento de formas de raciocínio, tais como o relacional, o probabilístico e o combinatório.

Assim, acredito que pesquisar o que crianças de início de escolarização já conhecem ou podem vir a conhecer a respeito de conceitos matemáticos precisa ser uma das prioridades em estudos da Educação Matemática. Isso está de acordo com o crescente interesse mundial de pesquisas na área realizadas com crianças novas (Elia e Mulligan, 2016), situada dentro de uma discussão mais ampla a respeito da idade que se deve começar a trabalhar conceitos matemáticos específicos na escola e quais conceitos devem ser inicialmente trabalhados.

Outro ponto resultante das discussões aqui levantadas diz respeito a como a defesa de um trabalho mais precoce com conceitos matemáticos mais complexos se ampara em resultados de pesquisa que trazem evidências de compreensões inicias a respeito desses

ISBN 978-84-945722-3-4

conceitos. Assim, defendo que não se deve menosprezar conhecimentos já em processo de construção, pois o trabalho mais precoce pode propiciar desenvolvimentos mais amplos.

Ressalta-se que esse trabalho mais precoce necessita se amparar em formas de representação simbólica adequadas a crianças mais novas. E esse cuidado ressalta o muito importante papel que as representações simbólicas possuem no aprendizado matemático, no desenvolvimento de formas de raciocinar.

As defesas aqui efetuadas implicam na necessidade de uma maior articulação na formação inicial e continuada de professores de diferentes níveis de ensino, pois, para o desenvolvimento de raciocínios matemáticos ao longo da escolarização, os professores devem se entender como uma equipe trabalhando em um *continuum*. Dessa forma, cabe pensar em como fomentar mais trabalho conjunto entre professores de diferentes níveis de ensino e como integrar mais processos de formação (tais como eventos científicos e cursos de formação continuada) de professores que atuam no início da escolarização e os que atuam em anos posteriores. Um trabalho mais articulado entre professores de distintos anos escolares pode possibilitar maior desenvolvimento do conhecimento docente *do horizonte*, ou seja, dos conhecimentos já trabalhados, sendo trabalhados e ainda a serem trabalhados.

E, para finalizar, ressalto que as discussões aqui efetuadas implicam em repercussões junto aos que formulam e desenvolvem políticas públicas, aos que elaboram materiais didáticos e aos que planejam programas de formação de professores. Se vamos ter como foco principal o desenvolvimento de formas de raciocínio matemático ao longo de toda a escolarização básica, é preciso ter-se políticas públicas que tenham essa prioridade e que possibilitem a sua realização.

Referencias bibliográficas

Azevedo Montenegro, J,; Borba, R.; Bittar, M. (2016). A identificação de conversões em situações combinatórias por alunos de anos iniciais. In *Anais do X Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, Campo Grande.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397.

Batista da Silva, R. C. (2016). É a moeda que diz não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. *Dissertação de Mestrado*. Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bernabeu, C. B.; Torres, E.; Gómez Garcia, J. M. C.; Batanero, C. D. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratório. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p. 11-34.

Borba, R. (2002) The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers. *Tese de Doutorado.* Oxford Brookes University.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Bahia.

Bryant, P.; Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability:* a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 22.09.2014.

Campos, T. M.; Pietropaolo, R. C (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In Borba, R. & Monteiro, C. (Orgs). *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática.* Recife: Ed. Universitária UFPE.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297.

Elia, I.; Mulligan, J. (2016). *Abstract of TSG 1:* Early childhood mathematics education (up to age7). Disponível em: http://www.icme13.org/topic_study_groups

Navarro-Pelayo, V.; Batanero, M. C.; Godino, J. Díaz. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, v. 8(1), p. 26-39.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. In T. Nunes and P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (pp. 29-44). Hove (UK): Psychology Press.

Rocha, C. A. (2011). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. *Dissertação de Mestrado*. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife.

Santana, M. O acaso, o provável e o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife.

Vergnaud, G. (1987). "Conclusion". In C. Javier (Ed.) *Problem of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hove (UK): Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Vergnaud, G. (1996) A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CR-519

LA MODELIZACIÓN COMO RECURSO PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS ALGEBRAICAS

María Teresa Navarro Moncho
Teresa.Navarro-Moncho@uv.es
IES Veles e Vents Torrent.
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València. España

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CR
Nivel educativo: Secundaria. Bachillerato
Palabras clave: modelización, función, transformaciones algebraicas, parámetro.

Resumen

El proceso de modelización (PM) es un proceso de resolución de problemas (RP) con características específicas. La RP es el lugar para la constitución de los conceptos por parte de los alumnos, para que los doten de significado y puedan extender su significado al usarlos en nuevas situaciones. Los conceptos y objetos matemáticos se elaboran en la historia como medios de organización de fenómenos. El PM pretende organizar algún fenómeno mediante algún concepto u objeto matemático en el que no se elabora ningún concepto u objeto nuevo, sino que se selecciona uno ya existente, que se considera idóneo para organizar el fenómeno en cuestión.

Por los estudios realizados en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la UV sabemos que para realizar un PM son necesarias competencias en: análisis cualitativo del fenómeno, propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles, sus formas canónicas, significados de los parámetros en estas formas, efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas, transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica y análisis cualitativo de las limitaciones del modelo. Las transformaciones algebraicas tienen sentido en el PM en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica.

1.- Introducción

Las habilidades que en la actualidad se requieren de los ciudadanos se basan en la aplicación de sus conocimientos a situaciones reales. En estas situaciones, cada vez más se precisa de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, cualitativos, espaciales, probabilísticos, relaciones… Por tanto, es lógico pensar que cada vez tendrán más importancia las matemáticas del entorno y de la vida cotidiana.

ISBN 978-84-945722-3-4

Las matemáticas se consideran una de las disciplinas esenciales en la formación del ciudadano. De ellas se espera que sean útiles para describir, analizar, interpretar y entender el mundo que nos rodea.

La resolución de problemas y la resolución de problemas de modelización matemática es una herramienta muy útil para aproximar las matemáticas del mundo real a los estudiantes. Con la modelización matemática se establecen vínculos de unión entre las distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas, sin abandonar el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Como afirma Blomhøj (2008) "La modelización matemática, sin embargo, puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos. Además, las competencias para establecer, analizar y criticar procesos de modelización y el posible uso de los modelos es una meta educativa, por derecho propio, de la enseñanza de la matemática en la educación general."

2.- La modelización matemática. Marco teórico

2.1. Antecedentes

Durante los años sesenta, matemáticos como Morris Kline o George Polya fueron protagonistas de la reforma de la educación matemática, defendieron un estilo heurístico de la enseñanza de las matemáticas frente al formalismo de las llamadas "Matemáticas Modernas". En la década de los setenta, Freudenthal impulsó la Educación Matemática Realista (EMR). Según Heuvel-Panhuizen (2009) la EMR es una teoría local para la educación de las matemáticas basada en la idea de Freudenthal de las matemáticas como una actividad humana. Si las matemáticas han de tener un valor humano, deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad. Para Freudenthal, la mejor manera de aprender matemáticas no es como un sistema cerrado, sino como un proceso de resolución de problemas: "*el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas"* (Freudenthal, 1969, p.7).

Inmediatamente surgen movimientos de renovación educativa que preocupados por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizarán situaciones más o menos reales en el

ISBN 978-84-945722-3-4

desarrollo curricular: Shell Centre, NCTM, etc. En España, emergieron grupos de profesores como el Grupo Cero en la Comunidad Valenciana, el grupo Zero a Cataluña, el Grup de Reforma de la C.V, las sociedades de profesores como Thales en Andalucía, Newton en Canarias, Societat d'Educació Matemàtica de la C.V. "Al-Khwārizmī, etc.

2.2. ¿Qué entendemos por modelización?

La modelización matemática es el proceso de formular en términos matemáticos un fenómeno del mundo real, obteniendo resultados en el mundo de la Matemática que permitan evaluar e interpretar matemáticamente el fenómeno del mundo real.

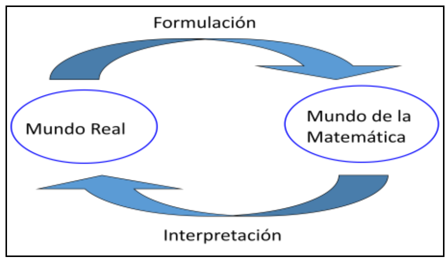


Figura 1. Esquema modelización.

En el proceso de modelización se pueden distinguir diversos pasos:

1. Identificar un problema real.
2. Identificar factores importantes del problema para buscar un modelo del mundo real.
3. Representar el modelo del mundo real en términos matemáticos.
4. Usar métodos matemáticos para obtener resultados.
5. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos.
6. Analizar cómo afectan las conclusiones al fenómeno estudiado del mundo real.

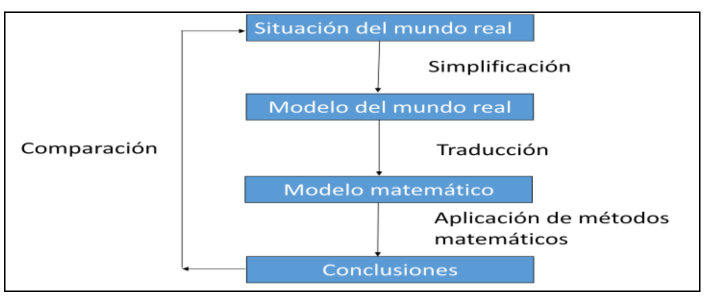


Figura 2. Esquema proceso de modelización.

Ahora bien, buscar un modelo matemático no es siempre una tarea fácil, pero encontrar un buen modelo en ocasiones es muy complicado. Para Stephen Hawking y Leonard Mlodinow *"Un modelos es satisfactorio si: 1) Es elegante. 2) Contiene pocos elementos*

ISBN 978-84-945722-3-4

arbitrarios o ajustables. 3) Concuerda con las observaciones existentes y proporciona una explicación sobre de ellas. 4) Realiza predicciones detalladas sobre observaciones futuras que permitirán refutar o falsar el modelo si no son confirmadas." (Hawking, S. y Mlodinov, L., 2010, pp.36)

2.3. La modelización en la resolución de problemas

El proceso de modelización es un proceso de resolución de problemas con algunas características específicas. Ahora bien, eso no quiere decir que no tengamos que prestar atención a las características específicas que tiene el proceso de resolución de problemas cuando el problema que se trata de resolver es un problema de modelización. Una de las funciones de la resolución de problemas en la enseñanza es ser el lugar para la constitución de los conceptos por parte de los alumnos, para que los alumnos los doten de significado y puedan extender su significado al usarlos en nuevas situaciones. En el caso particular de los problemas de modelización, la modelización tampoco está después de los conceptos como aplicación de éstos sino que la resolución de problemas de modelización es también el lugar para la constitución de conceptos, su dotación de significado y la extensión de su significado.

Que la resolución de problemas de modelización cumple estas funciones estaba ya claramente indicado en los trabajos de la escuela holandesa desde finales de los setenta. Jan de Lange (1987) subraya este papel de la resolución de problemas de modelización en el currículo, desarrollado en la década de los ochentas, para los últimos años de la secundaria en Holanda al decir que una parte importante de los materiales diseñados para la enseñanza persiguen que los alumnos se embarquen en un trabajo de matematización "conceptual".

En este sentido, el marco teórico de PISA 2015 considera siete capacidades matemáticas fundamentales en las que incluye la matematización. "Matematización: la competencia matemática puede suponer transformar un problema definido en el mundo real en una forma estrictamente matemática (esto puede suponer la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones y/o formulación de un modelo) o la interpretación o valoración de un resultado o modelo matemático con relación al problema original. El término matematización se utiliza para describir las actividades matemáticas fundamentales implicadas". (OECD, 2016, p. 78).

2.4. La modelización como recurso para desarrollar competencias algebraicas

ISBN 978-84-945722-3-4

Luis Puig y Onofre Monzó, desde hace ya bastante tiempo, y yo más recientemente, estamos trabajando en el desarrollo de materiales de enseñanza y su experimentación en los que el centro de atención es la modelización con datos reales.

Este trabajo se sitúa en la tradición que se inició en los años setenta y recoge elementos de la investigación en resolución de problemas y el desarrollo curricular basado en la resolución de problemas, la teoría y metodología para la investigación de los Modelos Teóricos Locales[7], y la investigación en didáctica del álgebra.

Por estos trabajos[8] (Puig y Monzó, 2007, 2008, 2010, 2011, 2012; Puig y Monzó, 2013; Monzó, Puig y Navarro, 2015, 2016) sabemos que para realizar un proceso de modelización son necesarias competencias en: propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles, análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, formas canónicas de los tipos de funciones, significados de los parámetros en las formas canónicas[9], efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas, transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica y análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

También sabemos que los análisis cualitativos del fenómeno y del comportamiento de las familias de funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización. Dicho de otra forma, y contestando de otra manera a la indicación de Maaß (2006) sobre que la competencia no se limita a "seguir los pasos" de un método, la competencia incluye ser un buen gestor del proceso de modelización, y el elemento clave de la buena gestión del proceso es el conocimiento cualitativo de los fenómenos y los modelos funcionales y el uso de este conocimiento cualitativo para tomar decisiones, controlar y organizar el conjunto del proceso.

Las transformaciones algebraicas tienen sentido en el proceso de modelización en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica.

3. Modelo de enseñanza

---

[7] Una descripción detallada sobre los MTL se encuentra en el libro *Educational Algebra*. (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

[8] Estos trabajos son el resultado de los proyectos de investigación financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación (EDU2009-10599) y el Ministerio de Economía y Competitividad (EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R) de España.

[9] Se estudia la forma canónica $y = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ en la que a dilata la gráfica en la dirección del eje OY, respecto de la recta $y = d$; b dilata la gráfica en la dirección del eje OX, respecto de la recta $x = c$; c traslada la gráfica en la dirección del eje OX hacia la derecha, si $c > 0$, o hacia la izquierda, si $c < 0$; d traslada la gráfica en la dirección del eje OY hacia arriba, si $d > 0$, o hacia abajo, si $d < 0$.

ISBN 978-84-945722-3-4

La idea central de nuestro modelo de enseñanza es que este produce una comprensión rica de los conceptos de familia de funciones y desarrolla la competencia en la transformación de expresiones algebraicas ya que las dota de significado. En nuestro modelo de enseñanza, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen directamente propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

Las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales. Su significado está ligado al proceso de traducción entre ellas, las tablas numéricas y las representaciones gráficas cartesianas, que, con el soporte de la calculadora gráficas se realizan de forma automática, interviniendo, en su caso, decisiones del usuario de la calculadora sobre la ventana con la que se mira la gráfica, el tamaño del incremento y la longitud de la tabla, o la expresión algebraica concreta elegida para representar la relación funcional.

Se utiliza un entorno interactivo de aprendizaje (Calculadoras gráficas simbólicas, ordenadores, tabletas…) que dispone de cálculo simbólico, representación en tablas y gráficas y tratamiento estadístico de datos, se plantea el estudio de la forma canónica de familias de funciones prestando especial atención al significado de los parámetros y la interrelación entre sus cambios, los de la gráfica correspondiente y los del fenómeno que modelizar; y se plantean situaciones problemáticas en las que se realizan experimentos para obtener datos reales de fenómenos que se modelizan con estas familias de funciones.

3.1. ¿Qué fenómenos elegir?

La modelización matemática debe contribuir a la comprensión de los fenómenos reales, pero los fenómenos reales son complejos, por ello, es importante a la hora de la elección tener en cuenta algunas consideraciones como identificar las variables que intervienen en el fenómeno, identificar y entender las leyes conocidas del fenómeno, identificar las preguntas que se desea responder y revisar los datos obtenidos. Para modelizar un fenómeno real será necesario simplificar tanto como sea posible dicho fenómeno y tener en consideración qué es lo más importante. En muchas ocasiones se tendrá que modelizar idealizaciones o abstracciones de los fenómenos.

En la Física, en la Química, etc, dado su componente experimental y los modelos matemáticos de sus leyes, se pueden encontrar buenos ejemplos para modelizar.

Estos aspectos sobre los fenómenos, el estudio de las familias de funciones y las transformaciones algebraicas, y las características de los entornos interactivos; son

ISBN 978-84-945722-3-4

elementos fundamentales en el diseño de nuestros materiales. Los datos experimentales de estos materiales se han obtenido a través de la fotografía (datos estáticos), de la edición de video (datos dinámicos) o del uso de sensores.

3.2. Un par de ejemplos.

3.2.1. Intercambio de calor: Enfriamiento/Calentamiento de un cuerpo

La intención de este material es doble. Por una parte, el estudio de dos fenómenos inversos, el enfriamiento y el calentamiento de un cuerpo, que la intuición conduce a pensar que se trata de fenómenos fisicoquímicos inversos y por tanto se modelizarán mediante funciones inversas. El análisis simultáneo con datos reales evidencia que se trata de un único fenómeno, el intercambio de calor, que se modeliza con la función exponencial.

Por otra parte, en el entorno interactivo utilizado, la calculadora ClassPad, no dispone de uno de los parámetros que se necesita para modelizar el fenómeno, por lo que es necesario transformar las expresiones algebraicas para poder utilizar los parámetros disponibles en la calculadora.

3.2.2. Reloj analógico.

En este material se estudia, a partir del video de un reloj analógico de un minuto de duración, la relación entre la altura de la manecilla segundera del reloj y el ángulo que forma con el eje de abscisas cuando situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia.

Como en el ejemplo anterior, este material tiene una doble intención. En primer lugar, sabemos desde los estudios de Janvier (1978), que "muchos alumnos, incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base" (Janvier, 1978, p. 47). En la situación que hemos elegido evitamos que esto suceda, pues se modeliza con la función seno pero la manecilla se mueve sobre una circunferencia.

Por otra parte, esta actividad pone de manifiesto que en muchas ocasiones lo que vemos no es lo que realmente ocurre, es decir, aunque podemos analizar la altura de la manecilla en función del tiempo, la magnitud de la que depende la altura no es el tiempo sino el ángulo que forma la manecilla con el eje de abscisas. De hecho, tras marcar una serie de puntos en el video, la calculadora proporciona de manera automática las coordenadas de los puntos en una tabla que incluye también el tiempo. A partir de estos datos, la calculadora nos permite

ISBN 978-84-945722-3-4

realizar tres nubes de puntos distintas; la relación entre abscisa y ordenada; la relación entre el tiempo y la abscisa; y la relación entre el tiempo y la ordenada (altura de la manecilla del reloj). Las transformaciones algebraicas son necesarias para obtener la función que modeliza la altura de la manecilla en función del ángulo que esta forma con el eje de abscisas y tomando la longitud de dicha manecilla como la unidad.

Referencias bibliográficas

Blomhøj, M (2008). Modelización Matemática- Una Teoría para la Práctica. Revista de Educación Matemática de la FAMAF, pp. 20-35.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meanin: Teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. Utrecht: OW & OC.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Emperical Approach.* New York: Springer

Freudenthal, H. (1969). Realistic models in probability. En I. Lakatos (ed.) Problems in inductive logic, pp. 1-14. Amsterdam: North Holland.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencias? *ZDM*, 38, 113-142.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2015). Un estudio sobre el proceso de modelización en el entorno informático de las tabletas. En Frontera, G., Perelló, J. y Ruiz-Aguilera, D. (Eds). Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Societat Balear de Matemàtiques SMB-XEIX.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2016). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 72, pp. 67-74.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. Veintidós Séptimos, núm. 24, pp. 26-29.

Mozó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. En actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (CD3, T05-01). Badajoz: Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Monzó, O. y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. Veintidós Séptimos, núm. 26, pp. 4-6.

Monzó, O. y Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (vol. I, pp. 167-185). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Monzó, O. y Puig, L. (2012). Familias de funciones. En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas, pp. 103-133. Sevilla: SAEM "Thales" y División didáctica CASIO-Flamagas.

Navarro, T., Puig, L y Monzó, O. (2015). Un estudio sobre modelización en la iniciación de la función seno en secundaria. En 17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015. Federación Española de Sociedades de Mtemáticas,

ISBN 978-84-945722-3-4

FESPM. Sociedad de Educación de la Región de Murcia, SEMRM. Consultable en http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n128.pdf.

OECD. (2016). PISA Assessment and Analytical Framework Science: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy, PISA. París: OECD Publishing. Disponible en http://dx.doi.org/10.1787//9789264255425-en.

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana, pp. 142-158. Castellón: SEMCV.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas, pp. 9-35.México: Trillas.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. En Frontera, G., Perelló, J. y Ruiz-Aguilera, D. (Eds). Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Societat Balear de Matemàtiques SMB-XEIX.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Correo del Maestro, 160, 36-44.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-760

O PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA COMO CAMPO DE ESTUDO: MAPEAMENTO, ESTADO DO CONHECIMENTO E TENDÊNCIAS

Dario Fiorentini
dariofiore@terra.com.br
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil

Núcleos temáticos: IV - Formación del Profesorado en Matemáticas
VII - Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CP ou CR
Nivel educativo: Ensino Superior
Palabras clave: Professor de matemática, Mapeamento de pesquisas, Estado da arte da pesquisa, Formação do professor.

Resumo

O professor que ensina matemática (PEM) tem se tornado, no Brasil, um vasto campo de estudo, tendo como principal foco de análise sua formação, aprendizagem docente e desenvolvimento profissional. Entretanto, mais recentemente, tem crescido significativamente o número de estudos que têm também como foco analítico: a prática e os conhecimentos profissionais; as concepções/crenças/representações sociais; as instituições e programas formativos; a identidade e a profissionalidade docente; a história/trajetória profissional; e o formador do PEM. Trata-se de um campo complexo que, para compreendê-lo e transformá-lo, requer, geralmente, uma abordagem multidisciplinar ou multirreferencial. Para caracterizar esse campo de estudos, no Brasil, 36 pesquisadores da SBEM, envolvendo todas as regiões do Brasil, desenvolveram um Projeto de "Mapeamento e Estado da Arte da Pesquisa sobre o PEM", produzidas nos últimos 12 anos, em Programas de Pós-Graduação Stricto Sensu. Foi a partir deste mapeamento que constituímos um corpus com 858 trabalhos, sendo 178 de doutorado, 584 de mestrado acadêmico e 96 de mestrado profissional. Pretendemos, nesta conferência, discutir e problematizar epistemológica e metodologicamente este campo de estudo, trazer alguns resultados, descrevendo aspectos físicos, tendências temáticas e teórico-metodológicas e alguns resultados sobre os estudos acerca do desenvolvimento e do conhecimento profissional do PEM.

Introdução

O professor que ensina matemática (PEM) tem se tornado, no Brasil, um vasto campo de estudo, tendo como principal foco de análise seus processos de formação e desenvolvimento profissional. O número de investigações deste campo, nos últimos dez anos tem crescido exponencialmente, sobretudo em trabalhos de dissertação de mestrado e tese de doutorado. Entretanto, ainda persiste uma indefinição conceitual e epistemológica nesse campo de estudo, sendo frequente dificuldades em relação à problematização e à construção do objeto de estudo das pesquisas, o que compromete os processos de análise e de produção de conhecimento do campo.

Além disso, o campo da formação do PEM é complexo, requerendo, para sua compreensão e transformação, uma abordagem multidisciplinar ou multirreferencial e a realização de pesquisas do tipo *revisão sistemática* dos estudos desse campo. Para enfrentar esse problema, um grupo de 32 pesquisadores de todas as regiões do Brasil, vinculados ao GT de formação de PEM da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) desenvolveram um projeto de pesquisa financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) intitulado "Mapeamento e Estado da Arte da Pesquisa Brasileira sobre o Professor que Ensina Matemática". O objetivo principal deste projeto foi "mapear, descrever, sistematizar as pesquisas brasileiras produzidas no âmbito dos programas de Pós-Graduação *stricto sensu* das áreas de Educação e Ensino da CAPES, no período de 2001 a 2012, que tem como foco de estudo o professor que ensina matemática.

Neste texto, pretendo, primeiramente, discutir a delimitação do campo de estudo do PEM e seu objeto de investigação, destacando os possíveis focos temáticos de análise desse objeto. A seguir, apresentar e discutir alguns resultados deste projeto, descrevendo suas duas fases, sendo a primeira de mapeamento da pesquisa brasileira sobre o PEM e a segunda de realização de estudos de revisão sistemática das pesquisas desse campo de estudo, sobretudo nas modalidades estado da arte da pesquisa, metanálise e metassíntese.

O professor que ensina matemática como campo de estudo

Até o ano 2000, costumávamos denominar nosso campo de estudo de "f**ormação de professores de matemática**". A partir de um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira sobre esse campo (Fiorentini et al. 2002), realizado pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática (GEPFPM), passamos a denomina-lo de "**formação de professores que ensinam de matemática**", de modo a incluir também estudos relativos à formação de professores dos anos iniciais de escolarização que, embora

ISBN 978-84-945722-3-4

não se identifiquem como professores de matemática, tem a função de ensiná-la, requerendo, portanto, uma formação especializada em educação matemática. Entretanto, a partir do ano 2000, vimos crescer significativamente o número de estudos que têm também como foco analítico: a prática e os conhecimentos profissionais; as concepções, crenças e representações sociais; as instituições e programas formativos; a identidade e a profissionalidade docente; a história/trajetória profissional; e o formador do PEM. Isso nos levou a ampliar o campo de estudo para simplesmente o "**professor que ensina matemática**", incluindo também investigações que não analisam diretamente a formação docente, mas contribuem para compreender este profissional que ensina matemática. A Figura 1, a seguir, apresenta um mapeamento desse campo de estudo (elipse central) e seus nove focos temáticos possíveis de estudo.

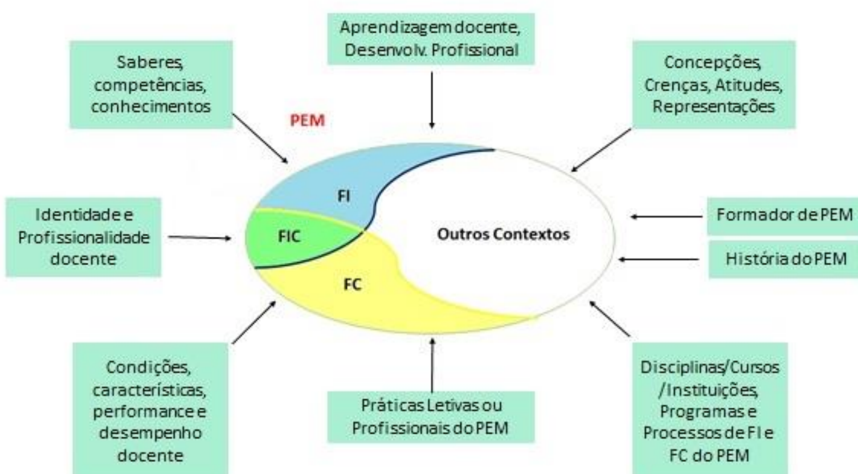


Figura 1: O PEM como campo de estudo – formação inicial (FI), formação continuada (FC); formação inicial e continuada (FIC); e Outros contextos e aspectos – e seus focos de estudo.
Fonte: Fiorentini et al. (2016, p. 27)

Configuramos o PEM como campo emergente de estudo, tendo por base Marli André (2010) e Marcelo Garcia (1999), que definem o campo de pesquisa da formação de professores a partir de cinco indicadores de constituição de um campo de estudos: existência de um objeto de estudo singular; utilização de metodologias e modelos próprios de prática e de pesquisa; existência de uma comunidade de pesquisadores envolvidos e centrados na investigação desse objeto de estudo; incorporação ativa dos sujeitos da pesquisa (professores) no desenvolvimento da pesquisa, assumindo progressivamente parceria, protagonismo e autoria nos estudos produzidos; reconhecimento da formação de

ISBN 978-84-945722-3-4

professores como um elemento fundamental na qualidade da ação educativa, por parte dos administradores, políticos e pesquisadores.

Primeira fase: O mapeamento da pesquisa brasileira sobre o PEM (2001-2012)

A 1ª fase do Projeto "Mapeamento e Estado da Arte da Pesquisa Brasileira sobre o Professor que Ensina Matemática", consistiu na realização de um trabalho de levantamento e mapeamento das pesquisas brasileiras produzidas no âmbito dos programas de Pós-Graduação *stricto sensu* das áreas de Educação e Ensino da CAPES, no período de 2001 a 2012, que tem como foco de estudo o professor que ensina matemática. Foram encontradas, fichadas e mapeadas 858 pesquisas acadêmicas sobre o professor que ensina matemática, produzidas entre os anos de 2001 e 2012, sendo 96 dissertações de mestrado profissional, 584 dissertações de mestrado acadêmico e 178 teses de doutorado. Cada região ou estado realizou seu próprio mapeamento e ao final do *ebook* foi feito um mapeamento síntese relativo a toda a produção nacional no período. Os resultados desse mapeamento foram publicados em ebook (FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016). A seguir, destacamos alguns resultados desse mapeamento.

Na configuração desse *corpus* de 858 trabalhos, cabe destacar alguns problemas tais como: falta de acesso às teses e dissertações via banco de dados da Capes; não disponibilização digital do trabalho completo, sobretudo no período de 2001 a 2005; restrição à consulta pública de alguns trabalhos. Outros fatores que dificultaram a constituição do *corpus*, agora de ordem metodológica, referem-se aos títulos, aos objetivos e aos procedimentos metodológicos pouco claros, que não informavam a natureza do estudo e não permitiam confirmar se ele fazia parte do *corpus* da pesquisa sobre o PEM. Ou seja, embora o objetivo, resumo ou palavras-chave indicassem tratar-se de uma pesquisa sobre o PEM, o professor que ensina matemática, na verdade, não foi, ao longo da pesquisa, foco de análise ou de produção de conhecimento. Assim, de um levantamento inicial de 1074 estudos, reduzimos o corpus a 858 estudos, sendo 584 dissertações de mestreado acadêmico (MA), 96 dissertação de mestrado profissional (MP) e 178 teses de doutorado (DO). Veja, no Quadro 1, a distribuição regional.

Quadro 1: Distribuição regionais de dissertações e teses brasileiras sobre o PEM (2001 a 2012)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	SP	Sul	Nor-deste	Centro Oeste	Rio/ES	Minas	Norte	Total
MA	202	100	76	82	40	35	49	**584**
MP	37	10	13	0	17	17	2	**96**
DO	110	21	21	4	14	8	0	**178**
Total	**349**	**131**	**110**	**86**	**71**	**60**	**51**	**858**

Fonte: Fiorentini et al. (2016) (Codigo: MA/: Mestrado acad~emico; MP: Mestrado Profissional

A seguir, no Gráfico 1, apresentamos dados referentes aos estudos nacionais, distribuídos por ano e modalidade de trabalho, afim de tecer algumas análises que contribuam para compreender diacronicamente o panorama das pesquisas sobre o PEM.

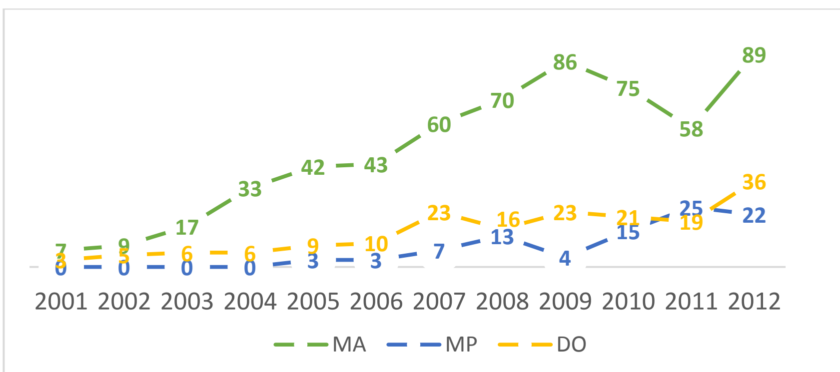


***Gráfico 1*: Distribuição nacional dos trabalhos, por modalidade/ano (2001-2012)**

Conforme Gráfico 1, a quantidade de pesquisas sobre o PEM, no período, embora com pequenos pontos de inflexão, apresenta um crescimento contínuo e expressivo, tendo saltado de 10 trabalhos (em 2001) para 147 (em 2012). Esse crescimento acompanhou o aumento da quantidade de programas de pós-graduação. Na área da Educação, no período de 2000 a 2013, o número de programas mais que dobrou, passando de 54 a 121 programas (62 mestrados e doutorados, 50 mestrados e 9 mestrados profissionais). Na área de Ensino, no mesmo período, os programas passaram de 7, em 2001, para 104 programas, em 2012,

ISBN 978-84-945722-3-4

sendo 21 mestrados e doutorados, 3 somente doutorados, 20 somente mestrados acadêmicos e 60 mestrados profissionais.

Em relação aos contextos e aos focos temáticos de estudo do PEM (Figura 2), no período de abrangência desta pesquisa, convém destacar, em relação aos estudos anteriores, a emergência de outros subcampos sobre o PEM que não tinham como

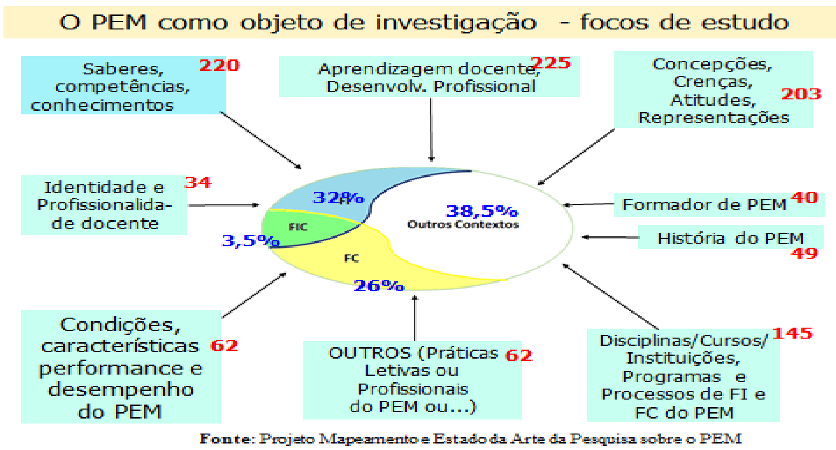


Figura 2: Distribuições das pesquisas em relação ao campo de estudo e seus focos de análise.

contexto ou problemática de investigação a formação inicial e/ou continuada do PEM. Embora a FI do PEM ainda seja o campo privilegiado de estudo (32% do total), foi surpreendente para a comunidade de pesquisadores brasileiros, o fato de que 38.5% dos estudos do *corpus* tiveram, como foco prioritário de análise do PEM, contextos e aspectos não relacionados à FI e/ou FC. E a primeira pergunta que surgiu no grupo foi: o que essas pesquisas trazem de conhecimento novo para a compreensão do PEM?

A figura 2 nos mostra também que os principais focos temáticos de análise, dentre os nove destacados previamente pelo projeto, foram: aprendizagem docente e desenvolvimento profissional do PEM (225 estudos); saberes, competências e conhecimentos profissionais do PEM (220); Crenças, concepções, atitudes e representação sociais do PEM (203). Embora com número menor de trabalhos, chama atenção também novas temáticas de estudo como é o caso de estudo sobre: formadores de professores que ensina matemática (40 trabalhos); História (oral ou de vida) do professor que ensina matemática (40); e Identidade e profissionalidade docente (34). O que nos revelam esses novos focos de estudo? Essas novas tendências temáticas de pesquisa instigaram os 32 pesquisadores a

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

projetar e desenvolver, estudos de revisão sistemática de parte desse corpus, o qual passo a destacar a seguir.

Segunda fase do projeto: Estudos de revisão sistemática de pesquisas do PEM

A segunda fase do projeto consistiu no desenvolvimento de estudos de revisão sistemática de parte dos estudos do *corpus* de pesquisa do projeto, sobretudo nas modalidades de estado da arte da pesquisa (ou estado do conhecimento); metanálise e metassíntese. Nesta fase, surgiram 16 propostas de estudos (alguns concluídos e outros em desenvolvimento), as quais foram inicialmente discutidas no 3º seminário nacional do projeto pelos próprios participantes e por três convidados externos (Maria de Lurdes Serrazina, Miguel Ribeiro e Laurizete Passos).

Três desses trabalhos tomaram como foco de análise as novas temáticas, anteriormente destacadas: formadores de professores que ensina matemática; História (oral ou de vida) do PEM; Identidade profissional do PEM. Quatro analisaram estudos sobre a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática na infância e nos primeiros anos de escolarização. Um sobre estudos de mestrado profissional que têm o PEM como objeto de estudo. Um sobre aprendizagem e desenvolvimento profissional do PEM em contextos de grupos colaborativos. Um sobre as disciplinas de formação matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática. Um sobre o papel e as contribuições da didática da matemática para a formação do PEM. Um sobre as pesquisas de abordagem quali-quantitativa. Um sobre estágio supervisionado em matemática. Um sobre o professor na fase inicial da docência. Um sobre estado da arte de pesquisas da própria prática; Um sobre saberes e conhecimentos profissionais do PEM no contexto da formação continuada. Há também um 17º trabalho que não foi discutido no 3º seminário, mas que é decorrente do projeto e que faz uma discussão teórico-metodológica sobre os estudos de revisão sistemática em suas modalidades: mapeamento, estado da arte da pesquisa (ou estado do conhecimento); metanálise e metassíntese.

Para ilustrar um dos estudos da segunda fase do Projeto, trago aqui o trabalho desenvolvido por Fiorentini e Crecci (2017) e que teve por objetivo "compreender o modo como as pesquisas brasileiras sobre formação continuada concebem e investigam os saberes e

ISBN 978-84-945722-3-4

conhecimentos profissionais de professores que ensinam matemática e sua relação com as práticas profissionais". Após mapear os focos temáticos de estudo de 46 teses de doutorado sobre formação continuada relativas ao Projeto, no período 2001-2012, encontram 13 que abordavam os conhecimentos e saberes profissionais do professor que ensina matemática e que passaram a constituir o *corpus* da revisão sistemática. Para cada um desses trabalhos foi produzida uma síntese interpretativa, seguida de sínteses integrativas de três conjuntos de trabalhos afins. Ao final do estudo foi feito um balanço síntese, onde são discutidos os principais resultados obtidos, evidenciando, possibilidades, limites e desafios à pesquisa acadêmica sobre a relação entre os conhecimentos profissionais do PEM e as demandas das práticas letivas.

Os autores concluem, a partir desta metassíntese, que há muito ainda a se conhecer quanto à natureza e a especificidade dos saberes e conhecimentos profissionais mobilizados e investigados pelas teses de doutorado, no contexto da formação continuada do PEM, sobretudo em contextos de prática escolar, seja inovadora ou vigente nas escolas. Entendem, ainda, que a especificidade, priorizada pelos estudos específicos do conhecimento matemático do professor, pode ficar fragilizada se limitar a uma perspectiva estritamente disciplinar ou acadêmica e não situar essa especificidade em um contexto mais amplo – não disciplinar ou interdisciplinar – das práticas pedagógicas, como foi evidenciado em alguns estudos.

Considerações finais

Embora a análise dos estudos desse *corpus* de 858 pesquisas sobre o PEM ainda não esteja finalizada, é possível apresentar, conforme Fiorentini et al. (2016), algumas considerações e conclusões parciais acerca do mapeamento das pesquisas brasileiras produzidas no âmbito dos programas de pós-graduação *stricto sensu* nas áreas de Educação e Ensino, no período de 2001 a 2012. Dentre outros aspectos, destacamos a relevância da tentativa de caracterizar, problematizar, sistematizar e compreender o PEM como campo emergente de investigação. A presente pesquisa de mapeamento e de estudo do estado da

ISBN 978-84-945722-3-4

arte da pesquisa pode, portanto, contribuir para caracterizar e configurar melhor este campo de estudo.

Nesse processo colaborativo de desenvolvimento da pesquisa e de definição e construção coletivas desse *corpus*, ganham relevância não apenas os resultados deste empreendimento, mas, como pudemos perceber, a aprendizagem dos participantes em relação ao modo de investigar os diferentes aspectos e processos do PEM. Nesse contexto não são apenas os mestrandos e os doutorandos que aprendem sobre essa prática de pesquisa, mas, principalmente, os formadores de pesquisadores que atuam em programas de pós-graduação *stricto sensu*.

Nesse sentido, ter envolvido pesquisadores de todas as regiões do Brasil foi estratégico e relevante para o desenvolvimento da comunidade nacional de pesquisadores que têm o PEM como campo de estudo. Esse processo, portanto, pode ajudar a minimizar a alta concentração atual de estudos sobre o PEM na região sudeste, sobretudo estado de São Paulo. Além disso, pode diminuir a dispersão de programas que têm o professor como objeto de estudo, pois, como este mapeamento deixou evidente, esse capo de estudo ainda continua desarticulado e sem identidade própria.

Referencias bibliográficas

Fiorentini, D., Passos, C. L. B &Lima, R. C. R. (Org.). (2016a) *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: Período 2001 a 2012*. Campinas: FE-Unicamp. https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf

Fiorentini, D., Grando, R.C., Miskulin, R.G.S., Crecci, V.M., Lima, R.C.R. & Costa, M.C. (2016b). O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: Fiorentini, Passos & Lima, R. C. R. (Org.). (2016a)

Fiorentini, D. & Crecci, V.M. (2017). Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Zetetiké*, v. 25, n. 1.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-931

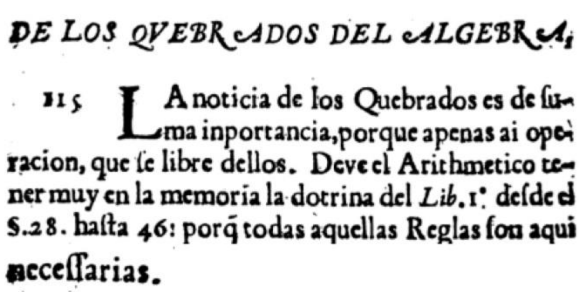
MODELOS DE ENSEÑANZA DE FRACCIONES
EN LOS SIGLOS XVI A XVIII:
EL CASO DE LA ARITHMETICA UNIVERSAL DE JOSÉ ZARAGOZA

Olimpia Figueras
figuerao@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Núcleo temático: VIII. Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica
Modalidad: CR
Nivel educativo:
Palabras clave: Modelos de enseñanza, fenomenología de las fracciones, aritméticas antiguas, historia de la enseñanza de las matemáticas

Resumo
Un proyecto de investigación centrado en la caracterización de modelos de enseñanza de las fracciones estructurados antes de implantarse el sistema métrico decimal, de la formalización de la aritmética y del uso del modelo del pastel o la recta numérica como recursos didácticos se ha estado llevando a cabo. Entre los propósitos del estudio de casos implementado se encuentran: (1) identificar sistemas de cantidades cuyo uso coadyuvó a la constitución de magnitudes, y que están asociados con fenómenos para los cuales las fracciones actúan como medios de organización; y (2) determinar fenómenos empleados por los autores en libros escritos durante los siglos XVI a XVIII. Una de esas obras redactadas con intención didáctica es Arithmetica Universal de José Zaragoza publicado en 1669 en Valencia. La caracterización del modelo de enseñanza de los quebrados que subyace en el libro de ese matemático, considerado representante neto del siglo XVII, y uno de los iniciadores del grupo de novatores valenciano, es el resultado principal del estudio de caso descrito en este artículo. Dicha caracterización se hace teniendo en cuenta un marco de referencia teórico estructurado por Real y Figueras (2015) a partir del ejemplo de fenomenología didáctica de las fracciones elaborado por Freudenthal (1983).

Un conocimiento complejo pero necesario


DE LOS QVEBRADOS DEL ALGEBRA.

115 LA noticia de los Quebrados es de suma inportancia, porque apenas ai operacion, que se libre dellos. Deve el Arithmetico tener muy en la memoria la dotrina del *Lib.* 1.° desde el §.28. hasta 46: porq̃ todas aquellas Reglas son aqui necessarias.

Zaragoza, 1669, pág. 324

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Podría pensarse que se ha han hecho un gran número de estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y que las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprenderlas son bien conocidas. Siegler y Lortie-Forgues (2017) dan cuenta de escollos asociados a dos fuentes: los inherentes al aprendizaje de esos números y los de origen cultural. Sin embargo, ellos mismos muestran que un porcentaje grande de alumnos han tenido y siguen teniendo bajo desempeño en tareas vinculadas con su uso.

Siegler et al. (2012) han identificado los conocimientos de los estudiantes, al terminar la primaria, acerca de la división y de las fracciones como precursores únicos de su desempeño en álgebra y en matemáticas en general hasta cinco o seis años después.

En el siglo XVII, Zaragoza estaba convencido de la importancia que juegan los conocimientos acerca de los quebrados en el dominio del álgebra. En la cita con la que se inicia este apartado se puede ver cómo el transmitió esa convicción a sus lectores. La idea de Zaragoza (1669) de que los quebrados son mucho más que números de la forma numerador/denominador, se puede apreciar en el texto siguiente (pág. 325):

> A dos especies podemos reduzir los Quebrados que en esta materia se ofrecen: la primera es, quando solo el numero, que acompaña a los *Caracteres*, y *Raizes* forma el Quebrado: como $\frac{2}{3} z^1$, y $\frac{4}{5} y^3$, y $\sqrt{2.} \frac{8}{13}$ y $\sqrt{3.} \frac{5}{7}$ &c. La segunda, quando el Quebrado se forma de los *Caracteres*, y *raizes*: como $\frac{15z^3}{4z^1}$, y $\frac{8x^2+6}{5z^1+4}$ y $\frac{\sqrt{2.}\,20}{\sqrt{3.}\,8}$ y $\frac{\sqrt{2.}\,(6+\sqrt{2.}\,3)}{\sqrt{2.}\,5}$ &c. *Todos observan las reglas del Libro 1º y las de los Capitulos antecedentes, cada uno segun su especie.*

El uso de quebrados en el álgebra queda expuesto en este texto del matemático español que considera dos ‘especies’ de quebrados, una se refiere a las fracciones y la otra a expresiones racionales tan usuales en el álgebra y en las matemáticas en general.

Ser un usuario competente de los quebrados para tener éxito con el álgebra subyace en las citas de Zaragoza y lograr que los estudiantes de hoy en día lo sean es uno de los propósitos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de un proyecto global de investigación de la autora de este documento. Dicho proyecto se organiza por medio de estudios encadenados con la idea de estructurar un modelo de enseñanza desde preescolar hasta la secundaria.

Para estructurar modelos de enseñanza con los cuales favorecer la constitución de mejores objetos mentales de los alumnos se requiere contar con una fenomenología didáctica rica del concepto fracción, en el sentido de Freudenthal (1983). Uno de los elementos que contribuyen a alcanzar ese objetivo es la identificación de los fenómenos para cuya organización se creó el concepto. Por ello se inició un estudio para: (1) identificar sistemas de cantidades cuyo uso coadyuvó a la constitución de magnitudes que están asociados con fenómenos para los cuales las fracciones actúan como medios de organización; y (2) determinar fenómenos empleados por los autores en libros durante los siglos XVI a XVIII. "Esas ideas pueden servir para concretar situaciones útiles para la enseñanza de estos números ya que se estaba en una etapa en la cual las fracciones eran quebrados y no números racionales, todavía no se construían las cadenas fenómenos/medios de organización en el sentido de Puig (1997) que dieron origen a los números racionales y todavía no competían con los decimales" (Figueras, 2017, pág. 7). En este artículo se describen resultados del estudio del libro de José Zaragoza (1669).

Un marco teórico a partir de la fenomenología didáctica de Freudenthal

Dos son los marcos teóricos y metodológicos que han servido para sustentar los estudios diseñados para el proyecto global de investigación mencionado anteriormente; uno es la construcción recursiva de Modelos Teóricos Locales (MTLs) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) y el otro la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983).

Para la construcción de MTLs se requiere la formación de cuatro componentes, uno de ellos es el de Modelos de competencia formal que versa sobre el conocimiento matemático poniendo énfasis en la estructura y propiedades del concepto en estudio como objeto matemático. La construcción de este componente para fracciones y números racionales y hecha por Real y Figueras (2015) a partir del ejemplo de fenomenología didáctica elaborado por Freudenthal (1983) ha servido como herramienta metodológica para caracterizar distintos Modelos de enseñanza -otro de los componentes de los MTLs- (ver por ejemplo Real, Gómez y Figueras, 2013). En particular, ese marco se usa también para

ISBN 978-84-945722-3-4

estudiar los modelos de enseñanza estructurados por autores de los libros de los siglos XVI a XVIII (ver Figueras, 2016). En el siguientes apartado se hace una descripción breve de este marco de referencia.

Procesos/clases de fenómenos

Como se menciona en Real y Figueras (2015) el ejemplo de fenomenología didáctica elaborado por Freudenthal fue reinterpretado identificando clases de fenómenos: descripción y comparación de cantidades, valores de magnitud u objetos; división de sustancias medidas por magnitudes; distribución de cantidades; medición y números como parte de sistemas numéricos. Para cada una de ellas se identificaron nociones y aspectos de la fracción y se vincularon con cinco procesos matemáticos: describir, comparar, dividir, distribuir y medir. Una sexta clase, la fracción como número, se determinó con aquellos fenómenos vinculados con las construcciones de los números racionales y su formalización. Esas clases y sus características se estructuraron por medio de una red de nociones, conceptos y procesos que comprende desde el uso de primeras ideas en el lenguaje cotidiano hasta las fracciones como números racionales, es decir, como elementos de clases de equivalencia de un campo totalmente ordenado. Con la red se muestran interrelaciones entre procesos y diferentes aspectos de la fracción considerados por Freudenthal.

Una breve reseña de los procesos/clases de fenómenos se incluye en los párrafos siguientes con el objeto de identificar aspectos relevantes para el estudio del modelo de enseñanza que Zaragoza construyó en su aritmética (las frases usadas en la descripción se tomaron de su libro). En Real y Figueras (2015) hay una descripción más detallada.

Describir. 'La mitad de una libra'; 'media vara'; 'dale una vuelta y media al tornillo'; 'dos quintos de libra por cada media vara' son expresiones del lenguaje cotidiano, en las cuales la fracción se usa para describir: una cantidad o un valor de magnitud por medio de otra cantidad o valor de magnitud; una medida; procesos cíclicos o periódicos, y razones. Ese tipo de expresiones asociadas con el proceso describir se vinculan con cuatro tipos de fenómenos en los cuales la fracción actúa como descriptor.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Comparar. Tres tipos de fenómenos asociados con el proceso comparar en los cuales la fracción actúa como comparador fueron identificados por Freudenthal. Las fracciones en el lenguaje cotidiano se usan para hablar de una comparación entre dos cantidades o valores de magnitud; éstas aparecen en frases que incluyen números multiplicativos, por ejemplo "las décimas segundas disminuyen en décupla proporción". Con frecuencia esos números se cambian por la frase 'veces menor que', como por ejemplo en la expresión: "las décimas segundas son diez veces menor que las décimas primeras". Ambas frases revelan una comparación de dos cantidades; comparación relacionada con un primer nivel de abstracción. En un segundo nivel se incorporan diversos aspectos de la fracción: el operador fracturante, la relación de fractura, la relación razón, el operador razón y el de transformador. Aquí se hará referencia sólo al operador razón y a la relación razón. El operador razón actúa sobre una cantidad o valor de magnitud transformándola en otra cantidad o valor de magnitud; por ejemplo, al encontrar el valor de 5/6 de libra sabiendo que una libra es igual a 20 sueldos (Zaragoza, 1669, pag. 30). La fracción aparece en una relación razón al establecer una proporción, por ejemplo, "2/4 es igual a 3/6 porque 2 es a 4 tiene la misma proporción que 3 a 6" (Ibid, pág. 25).

Dividir. Al dividir sustancias medidas por magnitudes, el todo se fragmenta en partes iguales y se relaciona con una o más de esas partes. En este sentido, las fracciones representan relaciones parte-todo y actúan como fracturadores. Los sistemas de cantidades para constituir magnitudes son un ejemplo de las relaciones que se pueden obtener al dividir un todo en partes iguales: un carga se divide en 3 quintales, cada quintal representa 1/3 de una carga; 1 quintal se divide en 4 arrobas, 3 arrobas representa 3/4 de 1/3 de una carga, y así para las demás subunidades del sistema de cantidades (onza, quartos, adarmes y granos) (Ibid, pág. 8). Hay diferentes métodos de partir un todo en partes iguales: de manera reversible o irreversible y de forma simbólica. El todo puede ser continuo o discreto, definido o indefinido, estructurado o sin estructura. Las partes pueden ser conexas o no estar conectadas entre si.

Distribuir. El proceso distribuir está asociado con tres tipos de fenómenos en los cuales se reparten pequeñas o grandes cantidades. Una vez que la distribución se llevó a cabo, la

ISBN 978-84-945722-3-4

fracción representa el resultado del proceso, o bien lo que le corresponde a cada objeto o persona de la cantidad repartida. En este fenómeno la fracción actúa como descriptor. La distribución de grandes cantidades se puede hacer usando el algoritmo de la división; dos casos son posibles: el residuo es cero o distinto de cero. Cuando el residuo es cero, el proceso ha terminado y se asocia con el Modelo del conjunto finito. Mientras que, si el residuo es diferente de cero, podría seguirse distribuyendo según el tipo de objetos, la unidad puede ser indivisible. Sin embargo, cuando se distribuyen por ejemplo 4 botellas de aceite entre tres compañeros, se hace uso del Modelo de magnitud para repartir el contenido de la botella restante considerando el volumen de aceite total.

Medir. Tres tipos de fenómenos en los que se usa una unidad de medida para compararla con el objeto a medir se asocian al proceso medir y la fracción actúa como mensurador. Cada uno de los fenómenos se diferencia por la naturaleza de la unidad de medida -no convencional, convencional o un segmento de la recta numérica usado en la construcción de instrumentos de medición empleando diferentes escalas, entre ellas la decimal-.

Modelos de enseñanza, elemento principal del marco conceptual del estudio

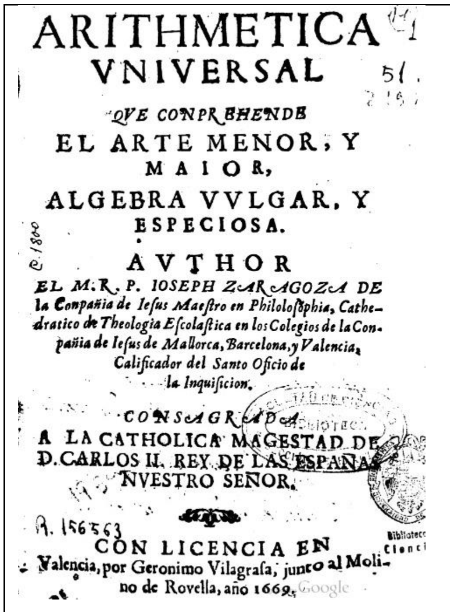
Para Puig (2010) "Un modelo de enseñanza es una secuencia de textos que se toman como espacios textuales para su lectura/transformación en otros espacios textuales al crear sentido los alumnos en sus lecturas" (pág. 6). En este contexto, los datos para el estudio de casos de las aritméticas escritas durante los siglos XVI a XVIII son los textos matemáticos que los autores de las aritméticas antiguas produjeron en su momento como un medio para favorecer la producción de significado y sentido de los lectores.

Para analizar esos modelos de enseñanza se consideraron cuatro elementos: (1) Los aspectos de las fracción, los fenómenos para los cuales es medio de organización y los procesos incluidos en la secuencia de textos; (2) El tratamiento didáctico estructurado para favorecer un proceso de abstracción gradual y de constitución de mejores objetos mentales en el sentido de Freudenthal (1983, págs. 31-33); (3) los Sistemas Matemáticos de Signos (SMSs) utilizados en la secuencia de textos; (4) Las características de un usuario competente del concepto en situaciones problemáticas en las que aparecen fenómenos para los cuales ese es un medio de organización. Naturalmente existen relaciones inherentes entre los cuatro elementos anteriores.

ISBN 978-84-945722-3-4

Estudio de caso: Arithmetica Universal de José Zaragoza

La labor científica y didáctica de Zaragoza (1627-1679) influyó decisivamente en la introducción en las “academias” o tertulias de cuestiones científicas, siendo su obra el punto de partida del grupo de novatores valencianos de finales del siglo XVII.


ARITHMETICA
VNIVERSAL
QVE CONPREHENDE
EL ARTE MENOR, Y
MAIOR,
ALGEBRA VVLGAR, Y
ESPECIOSA.
AVTHOR
EL M. R. P. IOSEPH ZARAGOZA DE
la Compañia de Iesus Maestro en Philolosphia, Cathedratico de Theologia Escolastica en los Colegios de la Compañia de Iesus de Mallorca, Barcelona, y Valencia, Calificador del Santo Oficio de la Inquisicion.
CONSAGRADA
A LA CATHOLICA MAGESTAD DE
D. CARLOS II. REY DE LAS ESPAÑAS
NVESTRO SEÑOR.
CON LICENCIA EN
Valencia, por Geronimo Vilagrasa, junto al Molino de Rovella, año 1669.

A la izquierda se muestra la portada de la obra sobre aritmética y álgebra de José Zaragoza que fue publicada en Valencia en el año 1669 y es el objeto de estudio para caracterizar el modelo de enseñanza de las fracciones estructurado por el autor.

El primer escrutinio de este libro se hizo en un ejemplar consultado en la Biblioteca Histórica de la Universidad de Salamanca; posteriores revisiones se han hecho en dos copias digitales de la biblioteca de Google Books, de una de ellas se ha copiado la imagen de la portada.

Figura 1. Portada del libro de José Zaragoza impreso en 1669

A Zaragoza se le reconoce más por sus aportaciones a la Astronomía, en particular por sus observaciones de los cometas en 1664 y 1667. Empero sus obras matemáticas, en particular aquella cuya portada está en la Figura 1 responden en general a una intención didáctica y supuestamente están escritas teniendo en mente una postura comprometida en la introducción de lo racional y lo empírico en la enseñanza, quitándole peso a la memorización (http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=zaragoza-jose).

Por cuestiones de espacio solamente se expondrán en este artículo resultados relacionados con el primer elemento de la caracterización del modelo de enseñanza de las fracciones de la aritmética de Zaragoza mencionando alguna característica de otros.

Primer elemento del modelo de enseñanza

Los aspectos de fracción considerados por Zaragoza son descriptor, comparador, relación razón, mensurador, pero sobre todo el que aparece con mucha frecuencia es el operador

ISBN 978-84-945722-3-4

razón. Por ejemplo, la mitad, tercio, ‘quarto’, quinto y sexto aparecen por primera vez en el texto en fenómenos asociados al proceso dividir y actúan como operador razón transformando una cantidad en otra (ver Texto 1 en el Anexo). Zaragoza se refiere a formar el quebrado del resto de una división cuyo denominador es el partidor y el numerador es el resto (ver Textos II y III en el Anexo), en este fenómeno asociado al proceso dividir, la fracción incluida en el cociente de la división aparece como descriptor del número de veces que el partidor está contenido en la cantidad.

Al definir el autor la igualdad entre quebrados usa la proporción, por ello la fracción aparece en una relación razón asociada con el proceso comparar (ver Texto IV en el Anexo). Este aspecto de la fracción se encuentra en las secuencias de textos sobre razón, proporción, composición de proporciones y regla de tres (ver Texto V, en el Anexo).

Zaragoza le decida un capítulo a las partes décimas que corresponden a las fracciones decimales. Las partes décimas son medios de organización de fenómenos vinculados con los quebrados que le sirven para hacer cálculos más complejos, quizá esto se debe a su experiencia en Astronomía en donde se requieren operaciones largas, así como con la construcción de instrumentos matemáticos, -el sugiere usar escalas decimales-. En el Texto VI incluido en el Anexo, el lector puede apreciar el SMS que introduce para operar con las fracciones decimales.

Por último es importante mencionar que el uso de sistemas de cantidades dan pie a proporcionar ejemplos de particiones de particiones en las cuales las relaciones entre ellas permiten darles sentido a las fracciones y las partes de partes, así como usar estas relaciones en los cálculos.

Nota. La primera revisión del libro de José Zaragoza se hizo en la Biblioteca Histórica de la Universidad de Salamanca durante un receso sabático en 2015 en el cual la autora trabajó en la Universidad de Valencia. El proyecto global forma parte de las actividades académicas de investigación que la autora lleva a cabo tanto en su institución, como con las vinculadas con el proyecto EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) de la institución valenciana.

Referencias bibliográficas

Figueras, O. (2016). Modelos de enseñanza de las fracciones en los siglos XVI a XVIII: El caso del Dorado Contador. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiañez, J.F. Ruiz y M. Torralbo

ISBN 978-84-945722-3-4

(.). Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico, pp. 3-12. Granada: Comares.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). Educational algebra. A theoretical and empirical approach. Nueva York: Springer

Freudenthal, Hans (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord). La educación matemática en la escuela secundaria, pp. 61-94. Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. (2010). Researching (Algebraic) Problem Solving from the Perspective of Local Theoretical Models. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 3-16.

Real, R. y Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts, and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of didactical phenomenology. En K. Krainer; N. Vondrová (Eds). Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp. 346-353. Recuperado en https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281861/

Real, R., Gómez, B. y Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Epsilón*, 30 (3), 21-36.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckwort, K., Classens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. y Chen, M. (2012). Early predictors of high mathematics achievement. *Psychology Science*, 23, 691-697.

Siegler, R. S. y Lortie-Fogues, H. (en prensa). Hard lessons. Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*. Fecha de publicación anticipada: 2017.

Zaragoza, Iosep (1669). *Arithmetica Universal que comprehende El arte menor, y maior, algebra vulgar, y especiosa*. Valencia: Gerónimo Vilagrasa, junto al Molino de Rovella.

Anexo

En este anexo se incluyen partes de los textos matemáticos del libro de José Zaragoza (1669) que permiten poner en contexto los resultados del análisis descritos en los apartados anteriores.

Texto I, Zaragoza, 1669, pag. 15

ISBN 978-84-945722-3-4

Partir por 2. es ſacar la mitad del numero de arriba, y ſe haze aſsi. La mitad de 4. es 2. la de 6 es 3. la de 3 es 1. y ſobra 1. que es dezena reſpeto del que ſe ſigue: y aſsi dirè la mitad de 15 es 7, y ſobra. 1. la de 17 es 8, y ſobra 1. la mitad de 16 es 8. Partir por 3. es ſacar el tercio. El tercio del 6 es 2. el de 7 es 2, y ſobra 1. el de 17 es 5, y ſobran 2. el de 24 es 8. el de 5 es 1, y ſobran 2. el de 21. es 7. de la meſma ſuerte ſe ſacarà el quarto, para partir por 4, y el quinto por 5, y el ſexto por 6.

Cantidad. 463576
Mitad. 231788

Cantidad. 677451
Tercio. 225817

Los quebrados mitad, tercio, cuarto, quinto y sexto aparecen por primera vez en el Libro I, Capítulo V Del partir (la división) asociados al proceso dividir y actúan como operador razón, transformando una cantidad en otra cantidad: el quebrado mitad transforma la cantidad 463,576 en la cantidad 231,788. El contexto es numérico, por lo que la fracción se puede asociar a la clase fracción como número.

Texto II, Zaragoza, 1669, pag. 15

18 Quando ſe haze particion maior ſiempre el *Quociente* ſe eſcrive a mano drecha: Partaſe 5968. por. 9. digo 9. en 59 cabe 6 vezes, porq̃ 6 vezes 9 sõ 54, y ſobrã 5. eſcrivo

00
052 (1
Cant. 5968 | 663 $\frac{1}{2}$
Part. 999

La fracción aparece en la expresión del cociente asociado al proceso partir y expresa el número de veces que el partidor se contiene en la cantidad, por ello en este contexto numérico actúa como descriptor y se relaciona con la fracción como número.

Texto III, Zaragoza, 1669, pag. 15

ISBN 978-84-945722-3-4

el 2. y eſte 1. que ſobra ſeñaloſe con un parenteſis. Y deſpues ſe haze quebrado de lo que ſobra, poniendolo ſobre una linea, y el partidor debaxo, conque el *Quociente* ſera $663\frac{1}{9}$

Observar como subyace de forma natural la expresión ‘1/9 de vez’ en el cociente de la división debido a la definición que Zaragoza ha dado de la división: “Partir es sacar un número de otro número quantas vezes se contiene en el … al número que se parte llamaré Cantidad; aquel por quien se part Partidor, y lo que sale de la partición Quociente, porque denota quantas vezes se contiene el Partidor en la Cantidad” (pág. 14). Es la primera vez que aparece la palabra quebrado en el libro.

Texto IV, Zaragoza, 1669, pags. 16-17

30 De donde ſe ſigue, que ſi en los quebrados iguales, ſe multiplicã en cruz, el Numerador del uno, por el Denominador del otro, ſeràn los Productos iguales. Como $\frac{2}{4} \times \frac{3}{6}$ 2. vezes 6. 12. y 3 vezes 4. es 12. y ſi multiplicando en cruz ſalen los Productos iguales, ſeràn los quebrados iguales: como ſe vee en los meſmos. La razon es, porque los quatro numeros ſon proporcionales. Por la p. 19. l. 7. de Euclides.

En esta definición de igualdad entre quebrados, y en la caracterización del criterio de igualdad la fracción está en una relación razón, una relación estática en un contexto numérico asociada a la clase fracción como número.

Texto V, Zaragoza, 1669, pag. 50

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

do, tomado los de la mano drecha por Numerador, y los de la hizquierda por Denominador: como se vee ò al contrario.

Para las queſt. de 5. num. ſera el Quebra. $\frac{3^{o}\,4^{o}\,5^{o}}{6^{o}\,1^{o}\,2^{o}}$ o $\frac{6^{o}\,1^{o}\,2^{o}}{3^{o}\,4^{o}\,5^{o}}$.

Para las de 7. numeros. $\frac{4^{o}\,5^{o}\,6^{o}\,7^{o}}{8^{o}\,1^{o}\,2^{o}\,3^{o}}$ o $\frac{8^{o}\,1^{o}\,2^{o}\,3^{o}}{4^{o}\,5^{o}\,6^{o}\,7^{o}}$

Para las de 9. numeros. $\frac{5^{o}\,6^{o}\,7^{o}\,8^{o}\,9^{o}}{10^{o}\,1^{o}\,2^{o}\,3^{o}\,4^{o}}$ o $\frac{10^{o}\,1^{o}\,2^{o}\,3^{o}\,4^{o}}{5^{o}\,6^{o}\,7^{o}\,8^{o}\,9^{o}}$

Zaragoza usa relaciones razón para mostrar como resolver problemas de proporción compuesta o múltiple. Los quebrados en relaciones razón son una herramienta fundamental con la cual el autor de la aritmética explica la resolución de casos en los cuales se combinan proporciones directas, proporciones inversas y directas y proporciones inversas. Los números que aparecen en los quebrados representan los términos de las proporciones que Zaragoza ha insistido en que se pongan en un orden establecido para poder hacer los cálculos correspondientes.

Texto VI, Zaragoza, 1669, págs. 44-45

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

59 Para ſacar eſtas meſmas cuentas por las decimas; porque los 3 palmos, y 3. quartos ſon $\frac{15}{16}$. de vara, les reduzire a decimas por el §. 52. añadiendo 4. zeros al 15. ſerà 150000. y partido por 16. ſeran 9375(4. y juntandole las varas a mano hizquierda ſeran 30,9375.(4. las 2. lib. 15 ſuel. ſon 55. ſueldos, y los 7. dineros ſon $\frac{7}{12}$ reduzidos a decimas por el §. 52. añadiendo. 4. zeros al 7. ſera 70000, y partido por 12. ſeran 5834(4: y con los 55. ſueldos ſeran 55,5834(4: Hecha la multiplicacion ſalen 1719. ſueldos, y para reduzir las decimas a dineros, baſta multiplicar las 4. primeras letras, que es 6114. por 12. ſale 73368. que es 7. dineros $\frac{3368}{10000}$.

Canti.	30,9375(4
Multip.	55,5834(4
Produ.	1719,61143750(8
Redu.	1719. *ſuel.* 7. *din.* 33(4

En este proceso el autor no necesita reducir las varas a dineros, sino que las expresa con la parte entera 30 varas y la parte decimal 9375(^{4} que en nuestra notación sería 0.9375, el resultado de la división de 15 entre 16. Pero también se enfrenta con la división de 7 entre 12 cuyo resultado es una expresión decimal periódica, la cual Zaragoza aproxima a cuatro cifras, ya que hace ‘Quartas’ y en lugar de 5833 escribe 5834. Al final al convertir la parte decimal de los sueldos a dineros hace una aproximación tomando solamente las primeras cuatro cifras decimales.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-1.083

10 AÑOS DE PLAN CEIBAL

Yacir Testa
prof.yacirtesta@gmail.com,
Plan Ceibal- Consejo de Formación en Educación

Recursos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática
CR
No especifico

Tecnologías digitales, Plan Ceibal, proyecto socioeducativo, educación matemática

Resumo
El Plan Ceibal es un proyecto uruguayo, cumple 10 años, que ha entregado de forma gratuita una computadora portátil (tableta o laptop) a todos los estudiantes y docentes de Educación Primaria y Media Pública de todo el país, así como conexión a Internet en Centros Educativos y sociales. Los principios estratégicos del Plan Ceibal los principios son: la equidad, igualdad de oportunidades para todos los niños y todos los jóvenes, democratización del conocimiento, y la disponibilidad de útiles para aprender y de un aprendizaje, no sólo en lo que respecta a la educación que se les da en la Escuela, sino en aprender ellos mismos a utilizar una tecnología moderna. El Presidente de Uruguay Vázquez (2009), plantea que "el objetivo a largo plazo del Plan Ceibal es promover la justicia social mediante la promoción de la igualdad de acceso a la información y herramientas de comunicación para todo nuestro pueblo". Presentamos aspectos generales de este proyecto socioeducativo, y distintas acciones que se están llevando adelante en relación a la Enseñanza y al Aprendizaje de la Matemática, como ser Plataforma Adaptativa de Matemática, Robótica Educativa, capacitaciones a Estudiantes y Profesores de Matemática, entre otros.

Introducción

El Plan Ceibal está llevando adelante diferente proyectos relacionados a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática como ser proyectos de Laboratorios Tecnológicos que incluyen robótica, sensores, impresoras 3D, video juegos, proyectos de formación y difusión de aplicaciones matemáticas como ser GeoGebra, DragonBox Algebra, entre otros. En este articulo nos enfocaremos en la PAM ya que, por las condiciones que desarrollaremos, su implementación a nivel nacional es un caso único a nivel mundial.

Educación en Uruguay

ISBN 978-84-945722-3-4

Uruguay es un país Suramericano cuya población es de 3.500.000 habitantes aproximadamente y una superficie de 176.215 km². El Sistema Educativo Uruguayo abarca Educación en la Primera Infancia e Inicial, Primaria, Media Básica y Media Superior, Terciaria (Universitaria y no Universitaria), en todos estos niveles existen Centros Públicos (laicos y gratuitos) y desde Inicial (a partir de 3 años) a Media Básica (aproximadamente 15 años) además son obligatorios. El nivel de cobertura presentado por el Ministerio de Educación y Cultura (MEC, 2016) en julio del 2016 indica "una importante escolarización (68.1%) entre los niños de 3 años. En la franja de 4 a 14 años se consolida una participación superior al 90%" y agrega "Mientras que a partir de los 15 años, la cobertura disminuye conforme aumenta la edad. En tanto que la asistencia para los niños entre 6 a 11 años al ciclo primario se encuentra cercana al 100%".

Los porcentajes de estudiantes que asisten a Centros Educativos Públicos sobre la matrícula general (públicos y privados) son del 82,6 % en Educación Primaria y 86% en Educación Media Básica (MEC, 2016). Estos estudiantes y sus docentes son, entre otros casos muy específicos, los considerados *usuarios Ceibal*. Este alto porcentaje de cobertura a nivel país es que pone de relevancia la importancia de realizar investigaciones en Matemática Educativa de los materiales, programas y plataformas que Plan Ceibal pone a disposición de dichos estudiantes y docentes.

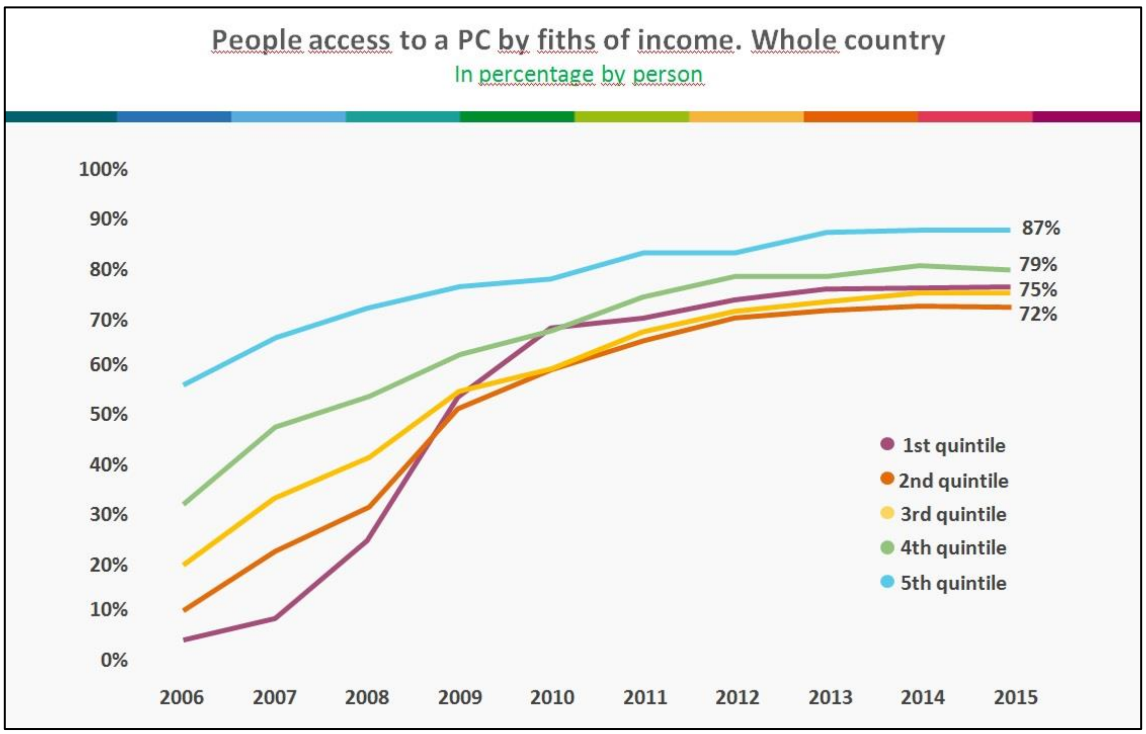
El Plan Ceibal

A partir del 2006, con el anuncio de la puesta en marcha del Plan Ceibal todos los estudiantes y docentes de la Educación Pública de todo el país recibieron de forma gratuita una computadora portátil (tableta o laptop) a la que nos referiremos como *Ceibalita*. Con esta iniciativa se pone en marcha éste proyecto socioeducativo, que convierte a Uruguay en un país vanguardista en la reducción de la brecha digital en la sociedad, la inclusión y la equidad en el acceso a la información. A mediados del 2009 el Plan Ceibal llega a todo el país teniendo 707.000 beneficiarios al 2016. En este momento Uruguay es el único país en el mundo que ha entregado a cada docente de Educación Primaria (6 a 11 años) y Media (12 a 14) pública (obligatoria y gratuita), así como a sus estudiantes, una laptop o tablet para su uso personal, tanto en el aula como fuera de ella.

ISBN 978-84-945722-3-4

Además se ha brindado conectividad a todos los Centros Educativos, así como a plazas y distintos puntos centrales. El siguiente mapa muestra la distribución de dicha conectividad a mediados del 2015.

El impacto en la población con la entrega de estos dispositivos se ve reflejado en la siguiente gráfica en la cual queda de manifiesto la disminución la brecha existente entre los distintos quintiles del acceso a un microcomputador en 2006 (comienzo del Plan Ceibal) a fines del 2014.



Source: Data 2006-2015 self made. Monitoring and Evaluation Dept. - Plan Ceibal in base of microdata from ECH-INE.

Como se plantea en las bases del Plan Ceibal los principios estratégicos que encierra son: la equidad, igualdad de oportunidades para todos los niños y todos los jóvenes, democratización del conocimiento,y la disponibilidad de útiles para aprender y de un aprendizaje, no sólo en lo que respecta a la educación que se les da en la Escuela, sino en

ISBN 978-84-945722-3-4

aprender ellos mismos a utilizar una tecnología moderna. Vázquez (2009), en un artículo publicado en Americas Quarterly (Estados Unidos), plantea que "el objetivo a largo plazo del Plan Ceibal es promover la justicia social mediante la promoción de la igualdad de acceso a la información y herramientas de comunicación para todo nuestro pueblo".

En sus objetivos generales está: contribuir a la mejora de la calidad educativa mediante la integración de tecnología al aula, al centro escolar y al núcleo familiar, promover la igualdad de oportunidades para todos los alumnos de Educación Primaria, dotando de una computadora portátil a cada niño y maestro, desarrollar una cultura colaborativa en cuatro líneas: niño-niño, niño-maestro, maestro-maestro y niño-familia-escuela, promover la literacidad y criticidad electrónica en la comunidad pedagógica atendiendo a los principios éticos. (Plan Ceibal, 2015)

En sus objetivos específicos: promover el uso integrado del computador portátil como apoyo a las propuestas pedagógicas del aula y del centro escolar, lograr que la formación y actualización de los docentes (tanto en el área técnica como en la pedagógica) posibiliten el uso educativo de los nuevos recursos, producir recursos educativos con apoyo en la tecnología disponible, propiciar la implicación y apropiación de la innovación por parte de los docentes, generar sistemas de apoyo y asistencia técnico-pedagógica específica destinada a las experiencias escolares asegurando su adecuado desarrollo, involucrar a los padres en el acompañamiento y promoción de un uso adecuado y responsable de la tecnología para el beneficio del niño y la familia, promover la participación de todos los involucrados en la producción de información relevante para la toma de decisiones, propiciar la creación y desarrollo de nuevas comunidades de aprendizaje promoviendo niveles de autonomía. (Plan Ceibal, 2015).

A 10 años del comienzo del Plan Ceibal éste se ha desmarcado de otros proyectos de entregas de computadoras en aspectos ya mencionados, como la cobertura total en la entrega de dispositivos, el acceso a la conectividad, el acompañamiento y capacitación a docentes y la relación con la Administración Nacional de Educación Pública (representada en todos sus subsistemas en el Directorio del Plan Ceibal).

Una Plataforma Adaptativa de Matemática: PAM

PAM es una plataforma adaptativa de matemática a la que se debe acceder en línea, tiene una lógica de trabajar en Series de actividades: los estudiantes realizan dichas Series y en ellas, como detallamos más adelante, aparecen links a los que el estudiante puede acceder con aspectos teóricos, ejemplos, pistas. Además de su soporte técnico, la propuesta en PAM se diferencia de una clase tradicional en la cual primero se presentan los conceptos teóricos y luego las actividades prácticas, en que se invierte esta forma de trabajo, el disparador son las actividades y luego la formalización (adecuada a cada nivel) de dichos conceptos surge en el marco de la realización de la Serie de actividades. Esto se pone en evidencia en que el acceso siempre es a la Serie de actividades y en cada actividad se puede ingresar a los link ya mencionados relacionados con aspectos más teóricos.

Testa (2013) explica de manera general que la PAM es un software que consta de un conjunto de más de 100.000 actividades que forman las distintas Series sobre temas que abarcan los conceptos del currículo de 3to de Educación Primaria a 4to de Educación Secundaria Media (8 a 15 años). Cuenta además con materiales teóricos, ejemplos contraejemplos y no-ejemplos de los conceptos matemáticos involucrados, en la cual se trabaja a partir de Series de actividades, no sobre actividades "sueltas". El docente tiene cargados en su aula virtual a todos sus estudiantes de su curso, y a su disposición todas las actividades que existen en PAM, más allá de las correspondientes a dicho, y todos los estudiantes, en forma independiente a lo que realice su docente pueden acceder a todas las Series de PAM.

Desde las posibilidades del docente en PAM puede elegir la Serie de actividades a *asignar* a sus estudiantes, pudiendo asignarlas a todo el grupo así o a algún (algunos) estudiante en particular, lo cual no es visible para los demás estudiantes. El docente tiene la posibilidad de asignarles Series ya creadas en PAM o Series creadas por él con las actividades disponibles en PAM. Desde el ingreso de PAM a la aulas Plan Ceibal ha brindado numerosos cursos a docentes, tanto con perfiles instrumentales como matemático educativo, pero cada docente, al igual de lo que reportan los estudios de Drijvers, Kieran y

ISBN 978-84-945722-3-4

Mariotti (2010), la utiliza a “su forma”, teñido por sus hábitos y su punto de vista sobre la enseñanza de la Matemática.

PAM genera, y pone a disposición del docente, distintos tipos de reportes que van desde lo que cada estudiante realizó en cada actividad hasta reportes generales del grupo, las cinco actividades con mayor error de las realizadas en la semana, entre otros.

Cuando el estudiante ingresa a PAM le aparecen indicadas las Series que le asignó su docente, pero también puede elegir realizar libremente cualquier Serie sobre distintos temas, de su curso u otros. Estas características permiten que el estudiante, independientemente de su docente, aborde los temas que él desee en el nivel que elija. En este sentido los datos de Ceibal dan muestra que los estudiantes de Educación Primaria realizan Series de actividades no indicadas por su docente de cursos posteriores al que pertenecen mientras que los de Educación Media de cursos anteriores.

Al trabajar en la Serie PAM le brinda en cada actividad una retroalimentación sobre lo realizado, tanto si fue asignada por su docente o elegida libremente por él. En caso de cometer errores sistemáticos, PAM les sugiere *zonas a mejorar*, que son otras Series de PAM que buscan retomar, ya sea el concepto en el cual el estudiante ha cometido errores, o conceptos previos básicos de él. Este aspecto de la PAM es el concepto de plataforma *adaptativa* en lo macro. En lo micro le brinda una retroalimentación inmediata, si realiza correctamente una actividad se lo indica y le propone la siguiente actividad, si comete un error se lo indica dándole la posibilidad de volver a realizar la actividad, y en caso que nuevamente cometa un error en esa actividad antes de pasar a la siguiente le muestra una posible solución acompañada de una explicación. En cada actividad el estudiante puede acceder a *pistas*, en general dadas en lenguaje coloquial, y al material de *consulta* (libro virtual que se abre exactamente en el tema relacionado con las actividad en cuestión). Si el estudiante accede a la pista o a la consulta esto no queda registrado en el aula del docente, ni le *quita puntos* al estudiante de la Serie en cuestión. Este consultar que acompaña a las actividades no se diferencia sustancialmente de un libro de texto convencional, pero el

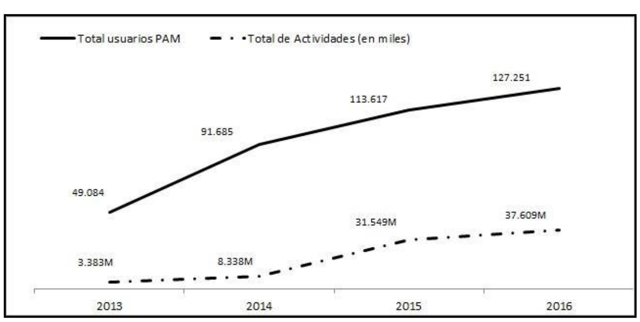
ISBN 978-84-945722-3-4

lugar al que se accede es el pre seleccionado según la relación con la temática abordada en la actividad en cuestión.

Ceibal brinda desde el Área de Formación diferentes cursos sobre PAM que van desde lo instrumental a lo didáctico matemático, han incorporado aspectos tendientes a fomentar la autorregulación del estudiante de su proceso de aprendizaje, en busca de un equilibrio entre el acompañamiento de su docente y el desarrollo de su capacidad construcción autónoma del conocimiento guiado y apoyado en PAM, así como *la personalización del proceso de enseñanza* ya que el docente rápidamente puede asignar distintas Series a distintos estudiantes a la luz de los reportes que le brinda y del conocimiento que él tiene de cada estudiante. Otros autores hablan de *enseñanza individualizada*:

> Ésta (la enseñanza individualizada) surge tras un proceso de clasificación que identifica las necesidades específicas del estudiante y ofrece diferentes posibilidades de instrucción. (…) Aunque en principio las estrategias eficaces de enseñanza individualizada se centran en el estudiante y no en la tecnología, este enfoque puede aprovechar de manera significativa las tecnologías como herramientas de apoyo. (Corbo, 2016, p. 140)

A fines del 2016 comenzó una investigación tendiente a analizar el impacto en el aprendizaje de la Matemática que generó PAM en estos años de implementación. Hasta ahora los datos que tenemos son de carácter cuantitativo, no cualitativo. Se presenta el incremento desde julio del 2013 a noviembre del 2016 en usuarios de PAM, número de actividades realizadas, y promedio de actividades por usuario:



	2013	2014	2015	2016
Total usuarios PAM	49084	91685	113617	127251
Total de Actividades (en m	4383	8338	31549	37609
Promedio de Actividades	89	91	278	296

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La cobertura por departamento del Uruguay está dada en la Figura 1.

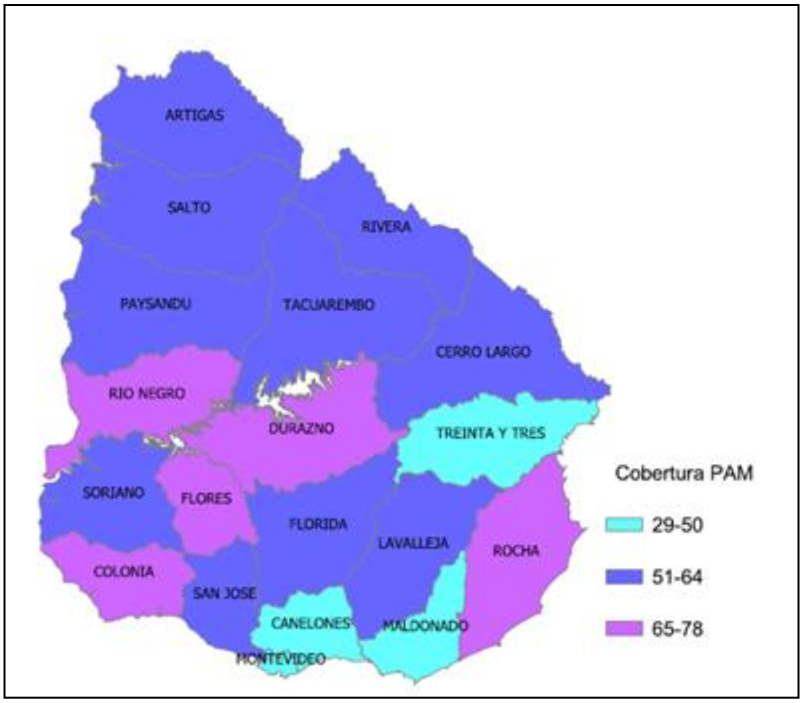


Figura 1

Dado el notorio aumento de usuarios, frecuencia de uso y cobertura es que consideramos sumamente necesario investigaciones, de corte Matemático Educativo, que brinden elementos sobre cómo se usa, cuándo, con qué objetivos, qué tipo de conocimiento desarrolla, cómo aprenden Matemática los estudiantes con PAM, qué tipo de Matemática fomenta, cuáles son sus potenciales y limitaciones entre otros.

El proyecto de PAM en Uruguay comparte con los reportados por Sinclair, Arzarello, Trigueros y Lozano (2010) en que la propuesta se presenta dentro del currículo, las actividades acompañan los contenidos del programa y deja abierta la posibilidad al docente de combinar esta herramienta con otras, así como la posibilidad de no usarla. Pero la diferencia más potente está en la propiedad de ser adaptativa, que se pueden generar (por parte del docente y del propio estudiante) distintos trayectos individualizando el proceso de

ISBN 978-84-945722-3-4

enseñanza. Cobo (2016) destaca la importancia del desarrollo del modelo 1:1 hacia una enseñanza (más) individualizada.

Referencias Bibliográficas

Cobo, C. (2016). La Innovación Pendiente. Reflexiones (y Provocaciones) sobre educación, tecnología y conocimiento. Colección Fundación Ceibal/ Debate: Montevideo.

Drijvers, P., Kieran, C., y Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoylesy J.-B. Lagrange (Eds.), Mathematics education and technology—rethinking the terrain. pp. 89–132. New York: Springer.

MEC (2016). Investigación y estadística http://educacion.mec.gub.uy/mecweb/container.jsp?contentid=927&site=5&chanel=mecweb&3colid=927 Consultado 1/4/17

Ministerio de Educación y Cultura (2015). Panorama de la Educación 2014 http://educacion.mec.gub.uy/innovaportal/file/927/1/panorama-de-la-educacion-2014.pdf Consultado 1/4/17

Plan Ceibal (2015). Objetivos. http://www.ceibal.edu.uy/art%C3%ADculo/noticias/institucionales/Objetivos Consultado 1/4/17

Sinclair, N., Arzarello, F., Trigueros, M. y Lozano, M.D. (2010). Implementing Digital Technologies at a National Scale. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study*. Berlin: Springer.

Testa, Y. (2013). Matemática en Plan Ceibal. En Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática ISSN 2301-0797

Vázquez, T. (2009). Digital Democracy. Quarterly Américas. http://www.americasquarterly.org/node/370 Consultado 1/4/17

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-1.416

El cambio en la enseñanza de las matemáticas: es posible

Daniel Ruiz Aguilera
daniel.ruiz@uib.es
Universitat de les Illes Balears, Palma, Mallorca

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CR
Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente
Palabras clave: formación continua, redes sociales, aprendizaje colaborativo, cambio metodológico

Resumen
La educación matemática está experimentando grandes cambios en los últimos años, desde la aparición de herramientas inimaginables hace décadas a la presentación de modelos sobre el aprendizaje que representan un nuevo paradigma, pasando por la implantación de metodologías de enseñanza más eficaces. De todas maneras, quien puede llevar a cabo de forma efectiva todos estos cambios es el docente, que necesita de una renovación y adaptación constantes. Dicha adaptación genera un proceso importante de reflexión que conduce a una gran cantidad de dudas y sensaciones diversas. En esta conferencia se tratarán los aspectos que se generan en el proceso de cambio, y que son esenciales para seguir profundizando en la mejora de nuestra labor docente. Además, se presentarán diferentes vías de formación y redes de trabajo colaborativo, que hacen que el trabajo de docente se convierta en una actividad apasionante y totalmente estimulante.

1. La necesidad de cambio: "¿queremos seguir así?"

En los últimos años está apareciendo una gran necesidad de cambiar nuestra forma de comprender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Son multitud de materiales, recursos, metodologías y métodos que tenemos a nuestro alcance que pueden ayudarnos a mejorar nuestra labor docente. Entre muchos otros, las propuestas del NCTM es de los más completos que existen hasta la fecha (NCTM, 2000).

Después de analizar y reflexionar sobre la educación matemática, muchos docentes determinan que hay que hacer cambios, o bien que hay que introducir modificaciones siguiendo las ideas propuestas en diferentes publicaciones.

De todas maneras, es en el momento de actuar en el que aparecen las dudas y los miedos.

ISBN 978-84-945722-3-4

2. La primera reacción: "luchemos contra nuestros temores"

La necesidad de cambio provoca toda clase de sentimientos que hay que gestionar para llegar a buen puerto. La primera reacción que puede provocar el poner en duda nuestro modelo de enseñanza-aprendizaje es la de rechazo. Negar que es posible hacerlo es una reacción natural. Más adelante, después de cierto tiempo, seguimos reflexionando y nuevas dudas y temores aparecen. A continuación, se mencionan algunos comentarios habituales que pueden surgir en el momento de plantear cambios:

- "Yo no sé, no tengo preparación".
- "Mis alumnos no están preparados, no serán capaces".
- "A mis alumnos no les gustan las matemáticas".
- "Es que mis compañeros de departamento/ciclo/claustro no me dejarán".
- "Es que cuando vayan a la siguiente etapa (primaria, instituto, universidad) le van a pedir (...) y si no lo saben hacer yo seré el culpable".

Algunos de estos comentarios reflejan un temor interior a luchar contra la inercia, contra aquello que hemos aprendido y, sobre todo, cómo hemos aprendido. Será necesario, entonces, superar estas ideas que entorpecen nuestro camino y analizarlas críticamente. Algunas preguntas que nos podemos plantear son:

- ¿Y qué puedo hacer para mejorar mi preparación?
- ¿Puedo ayudar a mis alumnos a ser capaces?
- ¿Seguro que no le gustan las matemáticas? ¿Han *hecho* matemáticas alguna vez?
- ¿Tus compañeros entran a hacer tus clases?
- ¿Nuestra labor docente es hacer lo que otra etapa o curso quiere, o lo que necesitan nuestros alumnos?

3. Un análisis realista: "no todo lo que hemos hecho hasta ahora está mal"

Una de las conclusiones después de un análisis reflexivo de nuestra realidad de aula puede llevarnos a la conclusión de que la metodología que usábamos no era la más adecuada, o que una nueva forma de enseñar es *el método* y que, por tanto, hay que cambiar radicalmente nuestra forma de trabajar. En muchos casos se tiende a pensar que hay que empezar de cero, y todo aquello que hacíamos anteriormente hay que erradicarlo y que hay que hacer justamente lo contrario de lo que hacíamos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ahora bien, si somos realistas, nuestras capacidades y nuestro bagaje es el que es, y muchos de nosotros hemos aprendido matemáticas mediante la mecanización y el estructuralismo. Quizás es necesario reconocerlo para avanzar y extraer lo positivo de aquellos aprendizajes. Por otra parte, hay que hacer una evaluación completa de nuestra práctica docente y extraer aquellos puntos de los que estamos contentos, aquellas sensaciones positivas que queremos preservar.

4. La necesidad de la reflexión: "dudar es necesario y bueno"

Tenemos certezas de aquello que no nos ha ido bien, y que puede servir como criterio para elegir aquello que queremos introducir. Poco a poco vamos descubriendo aquello que es más efectivo dentro del aula, más adecuado al desarrollo de la competencia matemática de nuestros alumnos.

Dudar significa que te importa tu labor, que te preocupas, que te autoevalúas, que quieres lo mejor para tus alumnos… Dudar en positivo ayuda a la mejora de la formación del profesor.

5. La creación de las redes: "no estamos solos"

Un punto importante al que nos debemos enfrentar es la necesidad de crear una red profesional de compañeras y compañeros con los que podamos compartir reflexiones, impresiones, recursos, experiencias… Hoy en día, con la potencia de las herramientas de comunicación, la creación de estas redes es mucho más asequible.

a) Redes de compañeros de trabajo. En este caso se puede establecer a partir de las experiencias del centro unas redes con compañeros que puedan compartir

b) Redes de proyectos globales. Uno de los movimientos más destacables es el liderado por Antonio Martín "Otros Algoritmos de las Operaciones Aritméticas" quien, en su afán de conectar maestros y profesores con iniciativas de cambios metodológicos en matemáticas, creó un grupo de *Whatsapp* que tuvo que emigrar a *Telegram* al llegar al límite de usuarios por grupo. Actualmente supera los 420 usuarios, docentes de diferentes lugares de todo el mundo.

c) Redes sociales abiertas. A diferencia de las redes sociales cerradas (como *facebook*), las redes abiertas como *twitter* permite crear la red de contactos de forma libre y abierta. Es

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ingente la cantidad de información que se comparte, ya sean materiales elaborados por maestros, imágenes de las clases que se desarrollan o de las producciones de los alumnos... Los comentarios que se pueden generar nos pueden ayudar a introducir nuevas ideas en el diseño de las actividades, generando así un punto muy positivo para una formación en red.

d) Otra: crear un grupo de maestros preocupados o interesados de manera libre, con el único interés de compartir experiencias y formación conjunta.

6. La formación constante: "aprender para ser mejor docente"

Que en el proceso de transformación en el que estamos inmersos la formación juega un papel fundamental parece evidente. De todas formas, nuestro tiempo es limitado y hay que saber elegir bien cómo y en qué formarnos.

Hay una serie de referentes en la didáctica de la matemática a los que es necesario conocer y aprender de ellos. Personas con grandes conocimientos y experiencia que ya han transitado el camino de la innovación y que nos pueden dar un testimonio muy valioso.

Por otra parte, la formación a la que se puede acceder hoy en día es muy variada y completa: desde cursos presenciales de duración corta ofrecidos por los centros de profesores, hasta postgrados o másteres presenciales.

7. Disfrutar del aprendizaje con los alumnos

Una de las ideas aún hoy en día revolucionarias es la de que el docente no enseña. No transmite conocimientos, o hace aprender algoritmos, sino que sugiere, propone problemas y situaciones que los alumnos deben explorar y solucionar con sus propias ideas.

Según el Grupo Cero (1983), "La vitalidad de una clase de matemáticas está en que los alumnos actúen como matemáticos. Pero es imposible si el profesor se limita a aceptar el credo de que los profesores son los que enseñan. Es perfectamente posible, sin embargo, si el profesor y los alumnos se comportan como matemáticos en que crean situaciones (o las recrean), las cambian, las desarrollan, toman direcciones equivocadas que más tarde tienen la satisfacción de rectificar, tienen confianza en su propia capacidad, se apasionan por lo que hacen".

ISBN 978-84-945722-3-4

Para acabar, recordaremos las palabras de María Antònia Canals "*Los maestros han de ser felices haciendo matemáticas, de ese modo los alumnos también lo serán*".

Referencias bibliográficas

Grupo Cero (1983). *Es posible.* Valencia: Instituto de Ciencias de la Educación.

The National Council of Teachers of Mathematics - NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

ISBN 978-84-945722-3-4

CR-1.428

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS DOCENTES EN SITUACIÓN DE INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Leonard Sánchez Vera(1); Fabrice Vandebrouck(2); Maha Abboud(3)

leonardsanchez@gmail.com; vandebro@univ-paris-diderot.fr; maha.abboud-blanchard@univ-paris-diderot.fr

(1) UNEFM–Venezuela / Universidad Paris Diderot, Francia; (2)(3) Universidad Paris Diderot, Francia

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Nivel : Formación y actualización docente

Modalidad : Conferencia regular (CR)

Palabras claves : prácticas, integración de tecnologías, GeoGebra.

Resumen

Para mejor comprender las prácticas docentes en matemáticas es necesario considerar al profesor como individuo que está sometido a restricciones impuestas por el ejercicio de su oficio (Robert, 2004; Roditi, 2005). Se considera la práctica de enseñanza en un sentido amplio como lo que hace (pero también lo que no hace) el profesor en situación de enseñanza. En esta propuesta de conferencia se pretende, en un primer tiempo, explicar las herramientas teóricas que la didáctica francesa ha desarrollado para el análisis de prácticas docentes en matemáticas en sala ordinaria (sin tecnología), a saber, el enfoque Didáctico – Ergonómico (Robert, 2008a). En un segundo tiempo, se presentará su articulación con un marco teórico desarrollado para el análisis de prácticas docente; específicamente, en situación de integración de tecnologías digitales en el aula de matemáticas, a saber, la Génesis de uso de tecnologías en la enseñanza (Abboud-Blanchard, 2013). Para ilustrar la puesta en funcionamiento de estas herramientas se presentará el análisis de una sesión de clase en sala informática integrando GeoGebra para la enseñanza de la geometría en el segundo año de educación media en Venezuela (grado 8).

Introducción

En didáctica de las matemáticas el análisis de prácticas y la formación docente está ocupando cada día un lugar importante en la agenda de los investigadores de esta área. Líneas de investigación en didáctica tienen como problema de interés el análisis de

ISBN 978-84-945722-3-4

prácticas ordinarias (en pizarra, lápiz y papel) del docente de matemáticas, pero, y debido a la fuerte demanda político - institucional, los investigadores se han visto interesados a comprender lo que pasa cuando el profesor de matemáticas introduce las tecnologías digitales en el aula.

En el seno de la comunidad francesa en didáctica de las matemáticas se han llevado a cabo estudios cuyo interés es analizar la actividad tanto del alumno como del profesor en situación de uso de tecnologías digitales de distinta naturaleza en el quehacer matemático, tales como la recientemente realizada por ((F. Vandebrouck & Robert, 2017) en el cual se estudia la actividad del alumno resolviendo tareas matemáticas en un medio de geometría dinámica.

Es preciso destacar que nosotros llamaremos aquí simplemente "tecnologías digitales" a lo que se conoce como las tecnologías de la información y comunicación en la enseñanza (denotadas con el acrónimo TICE), las cuales están conformadas por un conjunto de recursos y particularmente de ordenadores, programas y redes necesarios para manipular la información; es decir, para convertirla, guardarla y transmitirla de acuerdo a (J. B. Lagrange, 2013).

Conseguimos así, por ejemplo, estudios que van desde el uso de artefactos que fueron concebidos originalmente para el desarrollo de actividades matemáticas en el aula, tales como las calculadoras simbólicas (Trouche, 2003), los programas de geometría dinámica tales como Cabri o Casyopée (Laborde, Clarou, & Caponni, 2001; Mariotti, 2013), las bases de ejercicios en línea en matemáticas (Bueno-Ravel & Gueudet, 2013) y las pizarras digitales interactivas (Train, 2013); hasta aquellos artefactos que, no habiendo sido concebidos para la enseñanza, han permeado el campo de la enseñanza de las matemáticas por las potencialidades que ofrece, tales como la hoja de cálculo (Haspekian, 2005) y los sistemas de cálculo algebraico (Artigue, 2002).

Nos proponemos en este conferencia a analizar la práctica de un profesor de secundaria integrando en el aula el programa de geometría dinámica GeoGebra en una actividad de conjetura, ajustándonos a la definición de práctica establecida por (Robert & Hache, 2013), dada como la toma en cuenta global del trabajo del docente antes, durante y después de la clase.

ISBN 978-84-945722-3-4

Problemática de estudio

Investigaciones sobre la integración de tecnologías tales como las realizadas por (Abboud-Blanchard, 2013; Acosta, 2010) revelan que tal integración de tecnologías en el aula de matemáticas es un proceso complejo, en el cual los profesores enfrentan dificultades y limitaciones para llevar a cabo, lo más efectivo posible, tal integración de tecnologías digitales en el aula, y en particular los programas de geometría dinámica

Partimos de la hipótesis de que el proceso complejo de integración de tecnologías digitales en el aula puede ser la causa de que dicha integración quede al margen de las demandas sociales y muy particularmente de las institucionales según las políticas de muchos países.

En este orden de ideas, (J. B. Lagrange, 2013) establece que el discurso político e institucional que sostiene la demanda de integración de tecnologías digitales en el aula carece de un estudio preciso que revele las condiciones en las cuales las tecnologías digitales pueden ser utilizadas en la realidad. Además, según (Robert, 2013), esta demanda de integración de orden político e institucional, no se apoya en algún estudio serio y preciso sobre el impacto en el aprendizaje de los alumnos que pueden tener la integración de las tecnologías digitales en el aula; ni tampoco se establecen prescripciones del cómo hacerlo, muchas veces siendo la fuente de desánimo en los docentes. Todo se pasa como si la demanda de integración de tecnologías en la escuela se hicieran con un pretexto de modernidad que respondiese a las demandas sociales de la era digital y no a los efectos de las tecnologías en los aprendizajes (Bihouix & Mauvilly, 2015).

Así, esta falta de precisiones y de prescripciones sobre la integración de tecnologías digitales ha llevado a los investigadores en didáctica y formadores de profesores de matemática a invertir el camino metodológico tradicional seguido en didáctica: ir del estudio de los programas oficiales al análisis de las prácticas. Para (Robert, 2013) desde que una herramienta digital entra al aula es necesario primera analizar lo que pasa dentro del aula, completar los análisis con lo que pasa fuera de ella, para luego despejar elementos que sirvan de base para la investigación y la formación del profesorado en cuanto a la integración de tecnologías se refiera.

En este estudio es de interés analizar la práctica de una profesora de educación media en Venezuela integrando el programa GeoGebra como una herramienta de conjetura en geometría con alumnos de segundo año de educación media (grado 8). Para realizar este

ISBN 978-84-945722-3-4

análisis, correspondiente a una sesión de clases (a nivel local), ponemos en funcionamiento una parte de las herramientas ofrecidas por un marco teórico más amplio conocido como el doble enfoque: Didáctico – Ergonómico . Completamos dichos análisis con las herramientas del marco teórico de la Génesis de uso de tecnologías, en el cual se considera la génesis instrumental del profesor en un sentido más amplio, donde participan otras génesis ligadas a la actividad del docente en diferentes esferas de su actividad: fuera del contexto de enseñanza, para la clase y durante la clase.

Complementariedad de dos marcos teóricos para el análisis de prácticas en Educación Matemática.

Para el análisis de prácticas docentes ponemos en funcionamiento las herramientas del marco teórico conocido como el doble enfoque Didáctico – Ergonómico (Robert & Rogalsky, 2002). Teniendo una fuerte influencia de la escuela rusa Vitgotskiana de la Teoría de la actividad y de la Psicología ergonómica, este marco nos ofrece herramientas para analizar, por una parte, la actividad del alumno tal que es provocada por la actividad del profesor; y por otra parte, para comprender mejor lo que hace el profesor se toman en consideración las condiciones de trabajo a las cuales éste se encuentra sometido. El doble enfoque establece el estudio de la práctica docente a través del corte de la práctica docente – considerada a priori como un sistema complejo – en cinco componentes de prácticas: dos componentes de tipo didáctico: llamadas *cognitiva* y *mediativa*, y tres componentes de tipo ergonómico: llamadas *personal, institucional y social*. Esta recomposición se hace en tres niveles donde se organiza la actividad docente: *micro, local y macro.*

A partir de una sesión de clase, analizada desde un punto de vista didáctico en relación con las actividades posibles de los alumnos, ponemos en perspectiva los indicadores que revelan las dos primeras componentes de practicas, a saber, las componentes *cognitiva y mediativa.*

La componente *cognitiva* traduce lo que corresponde a las decisiones y a las anticipaciones que el profesor hace con respecto a los contenidos, las tareas y las sub-tareas, su organización, su cantidad, su orden, su complejidad, su inserción dentro de una progresión más amplia, así como las previsiones de la gestión de la tarea durante la sesión. Esta

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

componente permite acceder al “itinerario cognitivo” elegido por el profesor para la enseñanza de una noción matemática (Masselot & Robert, 2007).

Las decisiones tomadas por el profesor durante el desarrollo de la sesión de clase, las improvisaciones, los discursos, los procesos de devolución e institucionalización (en el sentido de (Brousseau, 1998), el acompañamiento que el profesora hace a los alumnos durante la realización de la tarea: ayudas, los modos de validación, los momentos de exposición de conocimientos, entre otros, nos permiten acceder a la componente Mediativa. El análisis de lo mediativo se basa en la distinción entre la actividad posible y efectiva de los alumnos que es provocada por el docente. Hacemos entonces un análisis de la tarea en términos de la actividad posible o potencial de los alumnos para resolverla, destacando los conocimientos a poner en juego y que, por tanto, nos sirve de referencia para analizar la actividad efectiva de los alumnos en clase eventualmente influenciada por las intervenciones del profesor.

Debido a que en este marco teórico se considera al profesor como un individuo en situación de trabajo, las otras tres componentes, llamadas *personal, institucional y social*, corresponden a determinantes del oficio docente, fuertemente asociadas al contexto donde se ejerce la práctica. La componente personal traduce las representaciones y creencias del profesor más u menos relacionadas con su experiencia, los riesgos de los cuales él (o ella) es consciente y de las necesidades de confort “laboral” sentidas. Como individuo en situación de trabajo el profesor responde a demandas y está sometido a restricciones que le impone la institución; por ello en la componente institucional consideramos la toma en cuenta de la naturaleza de las matemáticas a enseñar, los programas, los horarios, ciertos recursos como los libros de textos, la existencia de una administración, de supervisiones. No obstante, el profesor no es un individuo aislado en su establecimiento de trabajo, él (o ella) está sometido a exigencias de los colegas, de los padres de alumnos, a restricciones impuestas por el contexto y la composición social de la clase; de allí la consideración de la componente social.

Para complementar nuestro análisis de la práctica de un profesor integrando tecnologías digitales en el aula, evocamos las herramientas ofrecidas por el marco de Génesis de uso de tecnologías (Abboud-Blanchard, 2013). En este marco se sostiene que el proceso de apropiación de un artefacto y su eventual conversión en instrumento de trabajo por el

ISBN 978-84-945722-3-4

profesor, es decir la génesis instrumental del profesor, está inscrita en dinámicas más globales donde se desarrollan conocimientos y competencias, en el cual interactúan fenómenos de instrumentación que se inscriben en diversos contextos de la actividad de enseñanza. Las dinámicas son relativas a una génesis de uso incluyendo dos dimensiones: personal y profesional. En la figura siguiente ilustramos este modelo:

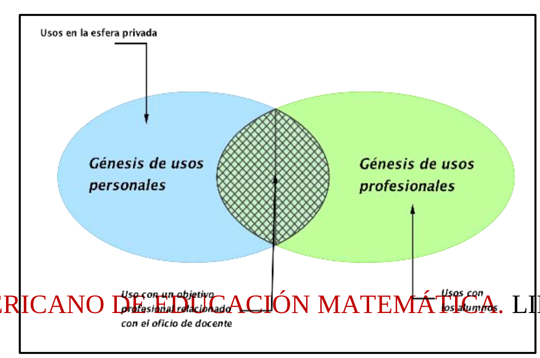


Figura 1. Génesis de uso de tecnologías (Abboud-Blanchard, 2013)

En este estudio analizamos la actividad del alumno tal que ella es provocada por la actividad del docente durante una sesión de clase. Nuestros análisis se basan en el análisis de elementos observables (directa) durante la sesión de clase: tareas y subtareas propuestas, naturaleza y forma de trabajo de los alumnos, las ayudas ofrecidas por el docente durante el desarrollo de la actividad (*su cantidad, naturaleza y tipo*), las interacciones docente – alumno, alumno – ordenador, producción de los alumnos, gestión del tiempo; todo esto a través de la transcripción de videos de la sesión.

Seguidamente estos análisis son complementados con el análisis en base a criterios que son interpretables (de manera indirecta): programas oficiales, libro de texto utilizado, así como el perfil personal y profesional del profesor, y para comprender mejor sus decisiones, su relación con respecto a las tecnologías digitales con lo cual tenemos acceso a las diferentes génesis de uso del profesor vía cuestionarios y entrevistas realizadas después de la sesión de clase observada.

Análisis de una sesión de clase

Ponemos en funcionamiento las herramientas de análisis del marco teórico del

ISBN 978-84-945722-3-4

doble enfoque para analizar la práctica – a nivel local – correspondiente a una sesión de clase de una docente Venezolana utilizado el GeoGebra con sus alumnos de 8vo grado como una herramienta para la conjetura de la propiedad de la mediana de un triángulo cualquiera. Analizamos solo la componente mediativa y ponemos en relación los resultados de este análisis con la Génesis de uso Personal y Profesional de tecnologías de la docente observada y a la cual hemos accedido a través de una encuesta y entrevista realizada a la docente antes y después de la sesión de clase.

Como lo hemos señalado, el análisis de la componente mediativa es precedido de un Análisis de tarea en términos de los conocimientos que los alumnos deben movilizar para resolver la(s) tarea(s). No obstante, y como lo señala (Robert, 2008b) en el caso de sesiones de clase en medio ambiente tecnológico aparecen nuevas tareas así como nuevas actividades que les son asociadas.

En este orden de ideas, el análisis de la tarea debe tomar en cuenta el medio tecnológico, en este caso GeoGebra, que complejiza o simplifica la tarea y modifica la actividad posible del alumno. Detallamos y diferenciamos en la medida de lo posible los conocimientos tantos matemáticos como instrumentales, así como sus eventuales adaptaciones, siguiendo la metodología de análisis de tareas propuestas por (Robert, 2008b; Robert, Penninckx, & Lattuati, 2012) para tareas matemáticas en lápiz – papel, y que luego (Abboud-Blanchard & Chappet-Pariès, 2009) adaptaron a ambientes tecnológicos.

Seguidamente en el análisis del desarrollo de la sesión ponemos en evidencia una modificación parcial de las tareas y subtareas, y muy especialmente de la tarea final de conjetura. Esta evidencia se sostiene en base a episodios cruciales identificados en la transcripciones de la sesión y en los cuales detallamos los intercambios e interacciones entre los Alumnos-Profesora, Alumnos–GeoGebra, así como las ayudas ofrecidas por la profesora durante la sesión (a titulo constructivo, procedural e instrumental), las cuales quedan insuficientes para emitir la conjetura en cuestión. Es a través de este análisis donde mostramos la actividad efectiva (o real) de los alumnos provocada por la actividad de la profesora y las retroalimentaciones del programa GeoGebra., así como su discrepancia con respecto al análisis de tarea establecido a priori.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por cuestiones de espacio no exponemos en este documento ni el análisis de tarea ni de las episodios claves de la sesión respectiva grabada y transcrita. Estos elementos serán abordados con detalle durante la presentación oral de la conferencia.

Refrencias Bibliográficas

Abboud-Blanchard, M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants Synthèses et nouvelles perspectives*. Note d'habilitation à diriger recherches. Université Paris 7.

Abboud-Blanchard, M., & Chappet-Pariès, M. (2009). L'enseignant dans une séance de géométrie dynamique - Comparaison avec une séance papier - crayon. En F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des èléves et pratiques des enseignants* (Octarès, pp. 261-291). Toulouse.

Acosta, M. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente. *Tecné, Episteme y Didaxis*, *28*, 57-72.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(July 2001), 245-274.

Bihouix, P., & Mauvilly, K. (2015). *Le Desastre de l'école numérique. Plaidoyer pour une éducation sans écrans* (Seuil). Paris.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* (La pensée Sauvage). Grenoble.

Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2013). L'approche instrumentale des genèses d'usages: le cas des bases d'excercices en ligne. En J.-B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement: usages, dispositifs et genéses* (Octarès, pp. 55-70). Toulouse.

Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Études du cas des tableurs*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Laborde, C., Clarou, P., & Caponni, B. (2001). *Géométrie avec cabri. Scénarios pour le lycée* (CNDP). Grenoble: CNDP de l'académie de Grenoble.

Lagrange, J. B. (2013). Les usages des TICE: problématiques, cadres théoriques et consécuences pour le dévelopment professionnel. En J. B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement: usages, dispositifs et genéses* (Octarès, pp. 163-180). France.

Mariotti, M. . (2013). Le potential sémiotique de Casyopée. En R. Halbert, J.-B. Lagrange, C. Le Bihan, B. Le Feuvre, M.-C. Manens, & X. Meyrier (Eds.), *Les fonctions: comprendre la notion et résoudre des problèmes, de la 3ème à la terminale* (pp. 77-82). Rennes: Edition de l'IREM de Rennes, Université Rennes 1.

Masselot, P., & Robert, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et formation*, (56), 15-31.

Robert, A. (2004). Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants? Quelles analyses menos-nous? En M.-L. Peltier-Barbier (Ed.), *Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Dur d'enseigner en ZEP* (La Pensée sauvage, pp. 15-32).

ISBN 978-84-945722-3-4

Grenoble.
Robert, A. (2008a). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants des mathématiques. En F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des èléves et pratiques des enseignants* (Octarès, pp. 59-68). Toulouse.
Robert, A. (2008b). Sur les apprentissages des élèves: une problematique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. En F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des èléves et pratiques des enseignants* (Octarès, pp. 33-68). Toulouse.
Robert, A. (2013). Quand la charrue est mise avant les boeufs, quelle peut être la récolte? En J.-B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement: usages, dispositifs et genéses* (Octarès, pp. 181-184). Toulouse.
Robert, A., & Hache, C. (2013). Pourquoi, comment comprendre ce qui se joue en classe de Mathématiques. *Cahier du laboratoire de didacique André Revuz*, (5), 25-86.
Robert, A., Penninckx, J., & Lattuati, M. (2012). De l'importance des analyses des déroulements en classe aux pratiques enseignants en passant par les activités des élèves. En A. Robert, J. Penninckx, & M. Lattuati (Eds.), *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyse de vidéos* (Presses Universitaires Franche comte, pp. 93-116). Besançon.
Robert, A., & Rogalsky, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Scienses, des Mathematiques et des Technologies*, *2*(4), 505-528.
Roditi, E. (2005). *Les pratique enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique* (Harmattan). Paris.
Train, G. (2013). *Le tableau blanc interactif, un outil pour la classe de mathématiques?* Thèse de doctorat. Université Paris 7.
Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Thèse de cotorat. Université Paris 7.
Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). *Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. Vers une theórie didactique de l'activité (TDA)*. Cahier du laboratoire de didacique André Revuz nº 17. Paris.

ISBN 978-84-945722-3-4