

Luiz Henrique Suzana

A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild

Florianópolis

2019

Luiz Henrique Suzana

A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Bacharel em Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Orientador: Dr. Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

2019

Dedicado a P. B.

Agradecimentos

Este trabalho é resultado do esforço conjunto de tantas pessoas que sou incapaz de mencionar todas elas aqui. Ainda assim, gostaria de registrar meus sinceros agradecimentos a todos e todas que à sua maneira contribuíram para a concretização dele. Nas linhas que seguem, destaco aqueles que julgo os principais responsáveis pelo trabalho.

Aos meus pais Marta e Mauro, agradeço por estarem sempre ao meu lado, me apoiando e me incentivando sempre quando precisei. Agradeço por todos os conselhos e orientações, pela paciência que sempre tiveram comigo, pelo suporte financeiro e emocional e, claro, por esses vinte e um anos que passamos juntos. Vocês foram essenciais para minha formação pessoal e acadêmica!

À minha irmã Ana, agradeço pelos ótimos momentos que tivemos juntos nesses treze anos, pelas brincadeiras, pelas conversas, pelos filmes que assistimos juntos e, sobretudo, por simplesmente me ter feito companhia em todo esse tempo. Espero que tenha as mesmas oportunidades que eu tive e que, como eu, possa escolher fazer o que gostar quando crescer.

A todos os meus primos, tios e avós (alguns dos quais, infelizmente, sequer podem presenciar essa conquista) por me proporcionarem, junto aos meus pais e irmã, o aconchego da família.

À minha companheira Julia, pela paciência e tolerância que teve comigo quando da escrita do trabalho, pelo carinho e pelas conversas que me incentivaram a finalizá-lo e, bem, pela ótima companhia que você tem sido pra mim nos últimos dois anos. Seu amor nos momentos mais difíceis foi fundamental para que eu seguisse em frente.

A todos os meus amigos de infância e adolescência pelas companhias nas aulas, nos treinos de futebol, nas viagens de turma e nos momentos de descontração. Agradeço especialmente a: Alessandra, Aurélio, Bianca, Marcos e Weslim pela longa amizade que construímos e pela companhia em minha cidade natal principalmente nos períodos de férias acadêmicas dos últimos anos; João Gris, pela grande amizade que possuímos e fortalecemos constantemente, ainda que às vezes por meios eletrônicos, e também pela companhia nos períodos de recesso escolar; Bárbara, Luísa, Sofia, Pop (Luís?), Biro (talvez “Rafael”) e Richard pela amizade que mantemos desde o ensino médio, pelo apoio, pelas conversas e pelos “rolês” que juntos fizemos. Particularmente ao Richard, agradeço também por nosso “casamento”, que já dura quatro anos desde quando nos mudamos para Florianópolis, pelas aventuras, experiências e aprendizados que compartilhamos morando juntos.

A todos os meus professores e professoras do ensino fundamental ao ensino médio. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Cauê Roratto por todas as conversas, conselhos e excelentes aulas de matemática ao longo de 2013. Além de intensificar meu interesse pela disciplina, eu devo a você minha escolha pelo curso de matemática.

Aos meus grandes amigos João Ruiz e Mateus Spezia. Conheci vocês dois em 2016.1 assim que entramos na graduação e, desde então, uma amizade incrível e impulsionada pelo interesse comum em matemática tem se revelada. Resolver questões desafiadoras de cálculo 1 na cantina do EFI regados a torta de chocolate era um dos nossos passatempos preferidos e, ainda hoje, me reunir com vocês para discutir matemática e/ou estudar para uma prova na sala de monitoria do departamento tem a mesma magia que tinha há anos atrás. Agradeço a vocês pelos momentos de descontração, pelos bares¹, pelos churrascos, pelos piqueniques, pelas trilhas e praias, pelas divertidas reuniões e limpezas do CALMA e pelas eternas visitas ao cartório. Enfim, agradeço a vocês, pindukeiros, por todos os nossos momentos juntos e pelo apoio que fornecemos uns aos outros nesses anos, tornando minha graduação muito mais agradável.

Estendo meus agradecimentos a todos os amigos que fiz nesses anos de graduação. Em especial, a Gabriel e Henrique agradeço pelos ótimos momentos de descontração, pelos ótimos churrascos que fizemos e também pela exímia companhia para estudar algumas disciplinas da graduação.

Aos professores do departamento de matemática da UFSC por facilitarem o aprendizado das abstratas disciplinas da matemática. Agradeço em especial os professores Raphael, por ter sido meu primeiro orientador de iniciação científica, e Ivan, pela ótima orientação neste trabalho de conclusão de curso e por ter sido o professor mais frequente nas disciplinas que cursei ao longo de toda minha graduação, a quem devo grande parte de meu conhecimento matemático.

A todos os servidores e funcionários terceirizados da UFSC. Especialmente, agradeço à coordenação dos cursos de matemática, pela atenção e eficiência em lidar com os assuntos pertinentes, e aos funcionários do Restaurante Universitário, principais responsáveis por minha alimentação nesses anos.

¹ Se não fosse por vocês, como poderia eu continuar comendo fritas sem me questionar sobre a procedência das batatas?!

Resumo

O espaço-tempo de Schwarzschild foi a primeira solução exata e não-trivial para a equação de campo de Einstein. Quase cinquenta anos depois, outra solução foi encontrada e chamada de “espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal”, que incorpora a solução anterior resultando numa variedade Lorentziana inextensível. Neste trabalho, nosso objetivo é definir os dois modelos matemáticos correspondentes aos espaços-tempos citados e estudar suas geometrias em detalhes, fornecendo sempre que possível as interpretações físicas apropriadas. Inicialmente, definimos os conceitos básicos da geometria semi-Riemanniana e estudamos detalhadamente a teoria dos *produtos torcidos*. No apêndice, tratamos dos *produtos escalares*, que são uma generalização de produto interno.

Palavras-chave: Espaço-tempo de Schwarzschild, espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal, geometria Lorentziana.

Abstract

The Schwarzschild space-time was the first exact non-trivial solution of the Einstein's field equation. Almost fifty years later, another solution was found, the so-called "Schwarzschild-Kruskal space-time", which extends the previous solution to an inextendible Lorentzian manifold. In this work, our goal is to define the two mathematical models corresponding to the mentioned space-times and study their geometries in details, providing the appropriate physical interpretations whenever possible. Initially, we define the basic concepts of semi-Riemannian geometry and study in detail the theory of the *warped products*. In the appendix, we treat the *scalar products*, which generalize the inner products.

Keywords: Schwarzschild space-time, Schwarzschild-Kruskal space-time, Lorentzian geometry.

Sumário

	Introdução	11
1	PRECISAMOS FALAR SOBRE GEOMETRIA	15
1.1	Tensor métrico	15
1.2	Isometrias	17
1.3	A conexão de Levi-Civita	18
1.4	Transporte paralelo	23
1.5	Geodésicas	26
1.6	Curvatura	28
1.6.1	Curvatura seccional	30
1.6.2	Tensor de Ricci e curvatura escalar	31
1.7	Alguns operadores diferenciais	33
1.8	Subvariedades semi-Riemannianas	34
1.9	Campos de Killing	38
1.10	A geometria da esfera	43
1.11	Orientação temporal em variedades Lorentzianas	45
1.12	Observadores, partículas e regiões estacionárias	47
2	GEOMETRIA DE PRODUTOS TORCIDOS	53
3	O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD-KRUSKAL	79
3.1	O modelo de Schwarzschild	81
3.2	O plano de Kruskal	92
3.3	O espaço-tempo de Kruskal	100
3.4	Geodésicas em Kruskal	103
3.4.1	A equação da energia	104
3.4.2	Orientação temporal em K e o buraco negro de Schwarzschild-Kruskal	105
3.4.3	Análise qualitativa das geodésicas temporais em K	109
3.4.4	Análise qualitativa das geodésicas luminosas em K	121
3.5	Considerações físicas adicionais	124
A	ESPAÇOS VETORIAIS SEMI-EUCLIDEANOS	133
A.1	Produtos escalares	133
A.2	Espaços vetoriais de Lorentz	139
A.3	Cones temporais e orientação temporal em espaços vetoriais de Lorentz	141

Referências 147

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar em detalhes a geometria dos espaços-tempos exterior e interior de Schwarzschild e do espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal, bem como apresentar ao leitor as devidas interpretações físicas dos resultados geométricos que serão obtidos. Esses modelos matemáticos, além de possuírem interesse geométrico intrínseco, são de grande importância para a física, e especialmente para a Relatividade Geral.

Em 1915, Albert Einstein (1879-1955) publicou o artigo que apresentava ao mundo sua mais importante descoberta científica: a *teoria da Relatividade Geral*, que nada mais é do que uma teoria *geométrica* para a gravitação, ainda mais precisa que a gravitação clássica desenvolvida nos séculos XVII e XVIII, e que explica alguns fenômenos que eram inexplicáveis com a teoria aceita até então, como a precessão do periélio de Mercúrio. A Relatividade Geral descreve o universo através de uma estrutura geométrica chamada *espaço-tempo*, que intuitivamente pode ser pensada como o conjunto de todos os eventos físicos, e que atribui a cada um de seus pontos quatro coordenadas: a primeira delas dita “temporal” e as demais ditas “espaciais”, que estão no entanto indissociavelmente relacionadas entre si.

Para compararmos as teorias da gravitação, tomemos como exemplo o sistema solar. A gravitação clássica (também chamada de *gravitação Newtoniana*) diria que os planetas se mantêm em órbita em torno do Sol devido a uma “força de atração gravitacional” que existe devido às massas dos planetas e do Sol. Enquanto isso, a Relatividade Geral explica o movimento planetário argumentando que o Sol, por ser uma estrela consideravelmente massiva, deforma (curva) o espaço-tempo e os planetas então se movem conforme esta curvatura. Portanto, na Relatividade Geral a gravidade não é mais considerada uma força de atração entre dois corpos como era para a mecânica Newtoniana; *gravidade passa a ser entendida como o efeito que a curvatura do espaço-tempo tem sobre os corpos!*

Nessa nova concepção de gravidade, até mesmo objetos sem massa (como a luz) podem sofrer efeitos gravitacionais, já que estes efeitos não mais decorrem da atração de duas massas. Na prática, isso significa que, ao passar suficientemente próximo de uma estrela massiva, a luz percorre uma trajetória curva e não mais retilínea, num fenômeno conhecido como *deflexão gravitacional da luz*.

Einstein, ainda em seu artigo de 1915, tornou pública aquela que logo ficou conhecida como *a equação de Einstein*:

$$Ric_g - \frac{1}{2} S_g \cdot g + \Lambda \cdot g = 8\pi T_g,$$

onde g , Ric_g , S_g , Λ e T representam², respectivamente, a métrica, o tensor de Ricci, a curvatura escalar, a constante cosmológica e o tensor de energia-momento de um espaço-tempo qualquer. Fisicamente, soluções dessa equação representam possíveis modelos matemáticos para a descrição de como a matéria/energia e o campo gravitacional interagem num universo com uma dada distribuição de matéria que é codificada no tensor de energia-momento T .

Ainda que Einstein tenha publicado essa equação, ele não foi - e de fato duvidava que alguém fosse - capaz de encontrar uma solução exata para ela. No entanto, foram necessárias apenas algumas semanas para que, ainda em 1915, o físico alemão Karl Schwarzschild (1873-1916) encontrasse a primeira solução exata da equação de Einstein, com constante cosmológica $\Lambda = 0$ e tensor de energia-momento $T = 0$. Tal solução passou a ser conhecida como *o espaço-tempo (exterior) de Schwarzschild* e é um dos objetos centrais deste trabalho.

Fisicamente, o espaço-tempo (exterior) de Schwarzschild é o modelo mais simples do campo gravitacional externo a uma distribuição de massa estática e esfericamente simétrica, que é assumida como única fonte de gravidade. Ainda que essas condições sejam idealizadas e de difícil verificação devido à presença de outros corpos celestes no universo, o modelo de Schwarzschild pode ser aplicado com sucesso para regiões próximas a estrelas que sejam aproximadamente estáticas e esfericamente simétricas.

Citamos aqui apenas duas aplicações do modelo de Schwarzschild: na primeira delas, a massa que deforma o espaço-tempo é a Terra, que é aproximadamente esférica³, e sua rotação não afeta seu campo gravitacional apreciavelmente, de modo que ela pode também ser considerada estática para esse fim. Sem levar em consideração os efeitos relativísticos temporais previstos pela solução de Schwarzschild, por exemplo, a precisão dos aparelhos de GPS utilizados hoje em dia seria impossível, pois estes utilizam relógios atômicos de alta precisão capazes de detectar esses efeitos. Na segunda aplicação, consideramos o Sol como a estrela massiva e isso nos permite explicar, por exemplo, a precessão do periélio de Mercúrio, já mencionada, e a mudança na posição aparente das estrelas devido à deflexão de sua luz ao passar perto do Sol, detectada pela primeira vez em 1919, por uma equipe que veio a Sobral, no Ceará, liderada pelo grande astrônomo britânico A.S. Eddington (1882-1944).

Os fenômenos de deflexão da luz e precessão do periélio de Mercúrio, juntamente com o efeito de *desvio gravitacional da luz para o vermelho*, constituem o que chamamos de *testes clássicos* da Relatividade, pois sua ocorrência na natureza e a precisão com que são obtidos como consequências da nova teoria da gravitação confirmam, de certa forma,

² O significado matemático desses objetos será discutido ao longo do trabalho, especialmente nos capítulos 1 e 3.

³ Ainda que alguns sujeitos obscurantistas por aí tentem argumentar o contrário!

a teoria de Einstein. Esses efeitos - com exceção do último - não serão discutidos neste trabalho, mas podem ser encontrados nas seções “avanço do periélio” e “órbitas luminosas” do capítulo 13 de O’Neill (1983).

Quando Schwarzschild encontrou a primeira solução exata para a equação de Einstein, o que ele encontrou de fato foi o que chamaremos no capítulo 3 de “espaço-tempo exterior de Schwarzschild”, que fisicamente corresponde às interpretações dadas nos parágrafos anteriores. A parte “interior” foi devidamente anexada por diversos cientistas posteriormente e nos fornece o modelo mais simples de um *buraco negro* estático (o primeiro modelo matemático para um buraco negro em rotação só foi descoberto em 1963 pelo matemático Roy Kerr).

Agora, considere a situação em que temos no universo apenas um buraco negro estático. A parte externa dele é precisamente descrita pelo espaço-tempo exterior de Schwarzschild, enquanto que o buraco negro em si é descrito pelo espaço-tempo interior de Schwarzschild. No entanto, nenhum desses dois modelos matemáticos faz qualquer menção à fronteira entre as regiões externa e interna ao buraco negro, conhecida como *horizonte de eventos*. Apenas no ano de 1960 essa região foi formalmente definida e incorporada ao modelo de Schwarzschild por Martin Kruskal e George Szekeres, dando origem ao *espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal*, que é o último dos dois modelos que estudaremos aqui.

Finalmente, antes que a motivação apresentada fique tão longa a ponto de se tornar uma desmotivação, vamos à organização do trabalho. Ele é dividido em três capítulos e um apêndice, e a disposição lógica das partes é a seguinte: apêndice A seguido dos capítulos 1, 2 e 3. No apêndice, apresentamos de forma sucinta uma discussão sobre os produtos escalares num espaço vetorial, que são basicamente uma generalização de produto interno, e em seguida particularizamos a discussão para o caso de índice 1 (Lorentziano), que será aqui o caso mais interessante.

No capítulo 1 desenvolveremos os conceitos básicos da geometria semi-Riemanniana que constituem o plano de fundo de todo este trabalho. No final dele, dedicamos as três últimas seções para alguns tópicos específicos que nos serão particularmente úteis: geometria da esfera, orientação temporal em variedades Lorentzianas e uma discussão sobre observadores. No capítulo 2, estudaremos em detalhes a geometria dos produtos torcidos de variedades semi-Riemannianas, tendo em vista que os modelos de Schwarzschild e Schwarzschild-Kruskal serão ambos definidos como produtos torcidos e diversos resultados geométricos iniciais deles serão consequências imediatas da discussão geral deste capítulo. Por fim, no capítulo 3 vamos definir os dois modelos matemáticos mencionados anteriormente e obter todos os resultados geométricos que lhes convêm. Ao longo desse capítulo (e sempre que possível), procuramos apresentar as consequências físicas da discussão matemática precisa e formal dada, especialmente nas duas últimas seções.

Antes de iniciar a leitura e para que esta seja o mais agradável possível, recomendamos fortemente ao leitor noções básicas da teoria das variedades diferenciáveis e da álgebra tensorial em tais variedades (que podem ser encontradas em Lee (2002) e O’Neill (1983), respectivamente).

As figuras deste trabalho, ainda que autorais, foram inspiradas em figuras do livro O’Neill (1983) e damos ao autor todos os créditos por elas.

1 Precisamos falar sobre geometria

Neste capítulo, trataremos brevemente de alguns conceitos básicos de geometria semi-Riemanniana imprescindíveis para o entendimento pleno deste trabalho, tais como tensor métrico, conexão, transporte paralelo, geodésicas, curvatura, subvariedades semi-Riemannianas e campos de Killing. Para que o trabalho não se torne demasiadamente longo e tendo em vista que a discussão destes conceitos não é nosso foco principal, precisaremos tratá-los de forma rápida e objetiva, atendo-nos principalmente à interpretação das definições e aos exemplos. As demonstrações são, em sua grande maioria, apenas remetidas à nossa referência principal O’Neill (1983), exceto aquelas que não estão presentes naquele livro.

Dedicamos uma seção separada ao estudo da geometria da esfera \mathbb{S}^2 , tendo em vista sua presença constante ao longo do capítulo 3. Encerramos o capítulo com duas seções dedicadas especificamente às variedades Lorentzianas, especialmente à noção de orientação temporal numa tal variedade, cuja utilidade e interpretação física se revelarão conforme avançamos no capítulo 3.

Assumimos serem conhecidos aspectos básicos de variedades diferenciáveis e álgebra tensorial em uma variedade diferenciável, que compõem a base de toda a nossa discussão e que não serão aqui abordadas (o leitor pode consultar Lee (2002) para a teoria das variedades e O’Neill (1983) para os tensores). É necessário também uma compreensão sobre o que chamamos de “produto escalar”, uma generalização de produto interno num espaço vetorial, cujos aspectos essenciais estão descritos no apêndice desta obra.

1.1 Tensor métrico

Neste capítulo, $M = M^n$ denotará uma variedade diferenciável (sempre de classe C^∞) de dimensão finita $n \geq 1$.

Definição 1.1. *Um tensor métrico g em M é um $(0, 2)$ -tensor simétrico, não-degenerado e de índice constante em M .*

Em outras palavras, um tensor métrico g (também chamado simplesmente de *métrica*¹) associa suavemente a cada ponto $p \in M$ um produto escalar g_p em seu espaço tangente T_pM , tal que² $\text{ind } g_p = \text{ind } g_q$, para quaisquer $p, q \in M$. Denotaremos esse índice por $\text{ind } g$, $\text{ind } M$ ou ainda ν , quando a métrica ficar subentendida e não houver risco de confusão. Note que $0 \leq \nu \leq n$.

¹ Não confundir com a noção de métrica em espaços métricos.

² Veja seção A.1 para definição de índice de uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.2. *Uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) onde g é uma métrica em M .*

Dizemos que (M, g) é *Riemanniana* quando g tem índice 0, ou seja, quando g_p é um produto interno em $T_pM, \forall p \in M$. Quando g tem índice 1, dizemos que (M, g) é *Lorentziana*. Frequentemente, e quando não houver risco de confusão, omitiremos a menção à métrica g e diremos simplesmente que M é uma variedade semi-Riemanniana.

Nesse mesmo espírito, eventualmente denotamos g por \langle, \rangle de forma que, dados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, temos $g(V, W) = \langle V, W \rangle$. Para uma carta local $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M , definimos as funções

$$g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle \in C^\infty(\mathcal{U}), \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

de forma que

$$g|_{\mathcal{U}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \cdot dx^i \otimes dx^j. \quad (1.3)$$

Dado um $p \in M$, como g_p é não-degenerado, a matriz $(g_{ij}(p))_{i,j=1}^n$ é invertível. As entradas da matriz inversa são denotadas por $g^{ij}(p)$, de forma que ficam bem definidas as funções $g^{ij} \in C^\infty(\mathcal{U})$ e temos $g_{ik} \cdot g^{kj} = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, onde um somatório em k é omitido via a *convenção de Einstein* (Lee, 2002), que usaremos no resto do trabalho sem comentários. O símbolo δ_{ij} denota o delta de Kronecker. Como g é simétrico, temos $g_{ij} = g_{ji}$ e $g^{ij} = g^{ji}$.

Como cada espaço tangente é um espaço vetorial semi-Euclidiano, fica bem definido (veja seção A.1) o *caráter causal* de um vetor $v \in T_pM$, assim como sua *norma* e a noção de ortogonalidade (para vetores tangentes em um mesmo ponto p). Para uma curva³ $\alpha : I \rightarrow M$ [campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$], dizemos que α [resp. X] é:

1. *temporal* quando $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ [resp. $X_p \in T_pM$] é temporal $\forall t \in I$ [resp. $\forall p \in M$];
2. *espacial* quando $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ [resp. X_p] é espacial $\forall t \in I$ [resp. $\forall p \in M$];
3. *luminosa* quando $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ [resp. X_p] é luminosa $\forall t \in I$ [resp. $\forall p \in M$];
4. *causal* quando $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ [resp. X_p] é causal $\forall t \in I$ [resp. $\forall p \in M$].

A categoria (1, 2 ou 3) acima à qual α [resp. X] pertence é dita ser o *caráter causal* de α [resp. X]. Observe que, enquanto num espaço semi-Euclidiano todo vetor tem um caráter causal definido, uma curva [resp. um campo vetorial] não precisa necessariamente

³ A menos de menção explícita em contrário, a suavidade de curvas ou demais aplicações deve sempre ser assumida ao longo deste trabalho.

satisfazer nenhuma das condições acima⁴. No entanto, veremos que as geodésicas (seção 1.5) possuem sempre um caráter causal definido.

Exemplo 1.4. (As métricas g_ν em \mathbb{R}^n)

Considere as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^n . Dado um número natural $\nu \in \{0, 1, \dots, n\}$, defina a métrica g_ν pondo

$$(g_\nu)_{ij} := \varepsilon_i \cdot \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

onde $\varepsilon_i = -1$, para $1 \leq i \leq \nu$, e $\varepsilon_i = 1$ para $\nu + 1 \leq i \leq n$. g_ν é então definida pela equação 1.3. Nesse caso, em cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$, os vetores $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ formam uma base ortonormal, na qual $\partial_1|_p, \dots, \partial_\nu|_p$ são temporais e $\partial_{\nu+1}|_p, \dots, \partial_n|_p$ são espaciais. Portanto, g_ν é uma métrica em \mathbb{R}^n de índice ν .

Note que se $v_p = v^i \partial_i|_p$ e $w_p = w^j \partial_j|_p$ são vetores tangentes a \mathbb{R}^n em p , temos

$$(g_\nu)_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot v^i w^i = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^n v^i w^i.$$

\mathbb{R}^n munido com a métrica g_ν é denotado por \mathbb{R}_ν^n . Note que se $\nu = 0$ nós resgatamos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n$ usual. Para $n \geq 2$ e $\nu = 1$, o espaço \mathbb{R}_1^n é chamado de *n-espaço de Minkowski*. Em particular, \mathbb{R}_1^4 fornece o modelo mais simples de um *espaço-tempo relativístico*, ambiente natural para a teoria da Relatividade Restrita.

Um *referencial ortonormal* num aberto $\mathcal{U} \subseteq M$ é uma coleção de campos vetoriais $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tais que $(E_1(q), \dots, E_n(q))$ é base de $T_q M$ para cada $q \in \mathcal{U}$ e $\langle E_i, E_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$, onde $\varepsilon_i = -1$ para $1 \leq i \leq \nu$ e $\varepsilon_i = 1$ para $\nu + 1 \leq i \leq n$, com $\nu = \text{ind } g$.

Lema 1.5. *Sejam (M^n, g) variedade semi-Riemanniana, $p \in M$ e $(e_1, \dots, e_n) \subseteq T_p M$ base ortonormal. Então, existem $\mathcal{U} \subseteq M$ aberto contendo p e $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ referencial ortonormal em \mathcal{U} satisfazendo $E_i(p) = e_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Pode ser encontrada na página 85 de O'Neill (1983). □

1.2 Isometrias

Para a teoria de variedades diferenciáveis, os difeomorfismos representam os “isomorfismos” entre variedades, de forma que duas variedades difeomorfas são indistinguíveis do ponto de vista diferenciável. Nesta seção, estudaremos o análogo dos difeomorfismos para as variedades semi-Riemannianas.

⁴ Por exemplo, uma curva pode ter alguns vetores tangentes temporais, outros luminosos e outros ainda espaciais.

Definição 1.6. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades semi-Riemannianas. Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ é dito ser uma isometria quando $\phi^*h = g$.*

Em outras palavras, um difeomorfismo ϕ como na definição acima é uma isometria quando, para todo $p \in M$, a aplicação $d\phi_p : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ é uma *isometria linear* no sentido da seção A.1, ou seja,

$$h_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(w)) = g_p(v, w), \quad \forall v, w \in T_pM.$$

O conjunto $Iso(M, g) := \{\phi : M \rightarrow M : \phi \text{ é isometria}\}$ se torna um grupo com a operação de composição e é chamado de *grupo das isometrias de (M, g)* . Se existe uma isometria entre duas variedades semi-Riemannianas M e N , dizemos que elas são *isométricas* e escrevemos $M \simeq N$. Duas variedades semi-Riemannianas isométricas são indistinguíveis do ponto de vista geométrico, como veremos nas seções a seguir.

1.3 A conexão de Levi-Civita

O objetivo desta seção é definir um tipo de “derivada direcional” de caráter geométrico, chamada de *derivada covariante*. Especificamente, dados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, queremos definir um novo campo $\nabla_V W \in \mathfrak{X}(M)$ de forma que, em cada ponto $p \in M$, o valor de $\nabla_V W$ em p seja a “derivada” de W na direção de V_p .

Definição 1.7. *Uma conexão em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_V W \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo:*

1. $\nabla_{fV+W}(U) = f \cdot \nabla_V U + \nabla_W U$, para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, ∇ é $C^\infty(M)$ -linear na primeira entrada;
2. $\nabla_V(U + \lambda W) = \nabla_V U + \lambda \cdot \nabla_V W$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, ∇ é \mathbb{R} -linear na segunda entrada;
3. $\nabla_V(fW) = f \cdot \nabla_V W + (Vf) \cdot W$, para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Esta definição pode ser elucidada por meio de um exemplo:

Exemplo 1.8. *(A conexão plana em \mathbb{R}^n)*

Considere $M = \mathbb{R}^n$ com as coordenadas cartesianas u^1, \dots, u^n . Por meio da identificação natural de espaços vetoriais $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$, os campos $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ podem ser identificados⁵ com as funções $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Assim, uma conexão em \mathbb{R}^n se torna uma aplicação

⁵ Via isomorfismo de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulos.

$\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo as condições 1, 2 e 3 da definição 1.7. Podemos então definir a conexão natural⁶ ∇^{flat} em \mathbb{R}^n , pondo:

$$(\nabla_V^{flat} W)(p) := DW_p(V_p), \quad \forall V, W \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \forall p \in \mathbb{R}^n,$$

onde D denota a derivada total de funções (escalares ou vetoriais). O leitor pode verificar que ∇^{flat} satisfaz as condições da definição 1.7 e é, pois, uma conexão em \mathbb{R}^n . Fica evidente que esta definição captura - ao menos neste contexto - a expectativa intuitiva sobre conexões descrita no início desta seção.

Escrevendo a função $V = (V^1, \dots, V^n)$ como o campo⁷ $V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ e analogamente para $W = (W^1, \dots, W^n)$, temos então

$$\nabla_V^{flat} W = \sum_{i=1}^n V(W^i) \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad (1.9)$$

que é a expressão usualmente utilizada para definir a conexão *flat* de \mathbb{R}^n .

A propriedade 1 da definição de uma conexão ∇ em M nos garante que, dados $v \in T_p M$ e $W \in \mathfrak{X}(M)$, fica bem definido o vetor $(\nabla_v W)(p) \in T_p M$, definido como $(\nabla_V W)(p)$, onde $V \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer campo tal que $V_p = v$. Isso é algo bastante razoável de se esperar, haja vista a interpretação de v como o vetor que nos dá a direção em que tomamos a derivada de W .

Por outro lado, o fato de ∇ ser apenas \mathbb{R} -linear na segunda entrada nos permite apenas concluir que o valor $(\nabla_v W)(p)$ depende do comportamento local de W e não apenas do vetor W_p . Novamente, isso já era esperado, pois o valor da derivada de algum objeto num ponto deve depender do comportamento desse objeto em uma vizinhança do ponto.

Observação 1.10. Os dois parágrafos acima têm a seguinte consequência: *uma conexão ∇ pode restringir-se para atuar sobre campos vetoriais apenas localmente definidos em M . De fato, para um aberto $\mathcal{U} \subseteq M$, fica bem definida a restrição de ∇ para \mathcal{U} pondo*

$$((\nabla_{\mathcal{U}})_V W)(p) := (\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W})(p), \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}), \forall p \in \mathcal{U},$$

onde $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $\tilde{V}|_{\mathcal{V}} = V|_{\mathcal{V}}$ e $\tilde{W}|_{\mathcal{V}} = W|_{\mathcal{V}}$, para algum $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ aberto contendo p . O fato de $\nabla_{\mathcal{U}}$ ficar bem definida (isto é, independente das escolhas de $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathfrak{X}(M)$) como acima segue das propriedades de ∇ e da existência de tais extensões \tilde{V} e \tilde{W} por meio de funções “bump”. Facilmente se prova que $\nabla_{\mathcal{U}}$ é uma conexão em \mathcal{U} , que será denotada simplesmente por ∇ de agora em diante.

Uma variedade M munida de uma conexão ∇ é chamada de *variedade afim*. Boa parte das definições apresentadas nas próximas seções poderiam ser feitas apenas para variedades afins, sem a necessidade da presença de uma métrica. No entanto, eventualmente

⁶ O nome “flat” (em português, “plano”) justificar-se-á quando da definição de curvatura.

⁷ Por sinal, esse é o isomorfismo de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -módulos entre as funções $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e os campos $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

precisaríamos introduzir uma métrica para continuar nosso estudo em geometria. Sendo assim, definiremos as noções de transporte paralelo, geodésica e curvatura no contexto de uma variedade semi-Riemanniana, apenas. Nesse caso, uma conexão especial se revelará: a *conexão de Levi-Civita*. Para encontrarmos-la, o seguinte lema é necessário:

Lema 1.11. *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana. A aplicação $\# : V \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \#V \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por⁸*

$$(\#V)(W) := \langle V, W \rangle, \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$$

é um isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos chamado de isomorfismo musical.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 60 de O'Neill (1983). \square

Um campo vetorial e a 1-forma correspondente via $\#$ são ditos *metricamente equivalentes*. Em coordenadas, dado um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ que se escreve como $V = V^i \partial_i$, temos $\#(V) = g_{ij} V^i dx^j$. Reciprocamente, dada uma 1-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ que se escreve como $\theta = \theta_i \cdot dx^i$, o campo $V := \#^{-1}(\theta)$ metricamente equivalente a θ é dado por $V = g^{ij} \theta_j \partial_i$.

Definição 1.12. *Dada uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos o gradiente de f como o campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ que é metricamente equivalente ao diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. Em coordenadas, temos*

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

É de se notar que, no caso $(M, g) = \mathbb{R}_\nu^n$, temos $\nabla f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_i$. Mais particularmente, se $\nu = 0$, resgatamos a fórmula usual para o gradiente de uma função: $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_i$.

Finalmente, temos o *teorema fundamental da geometria semi-Riemanniana* (O'Neill, 1983):

Teorema 1.13. *Dada uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão ∇^g em M satisfazendo, $\forall X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

4. $[V, W] = \nabla_V^g W - \nabla_W^g V$;
5. $X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X^g V, W \rangle + \langle V, \nabla_X^g W \rangle$.

∇^g é chamada de *conexão de Levi-Civita de (M, g)* e é caracterizada pela fórmula de Koszul:

$$2\langle \nabla_V^g W, X \rangle = V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle [V, W], X \rangle + \langle [W, X], V \rangle + \langle [X, V], W \rangle.$$

⁸ Utilizamos aqui a identificação dos tensores do tipo $(0, 1)$ com 1-formas (vide capítulo 2 de O'Neill (1983)), e o $C^\infty(M)$ -módulo de 1-formas está sendo denotado aqui por $\mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 61 de O'Neill (1983). \square

A conexão de Levi-Civita de (M, g) é a conexão especial que consideraremos a partir de agora em M . A menos de menção contrária, ela será a única conexão numa variedade semi-Riemanniana de interesse neste trabalho, e a denotaremos apenas por ∇ se não houver risco de confusão.

Vale observar que quando restringimos g para um aberto \mathcal{U} , obtemos uma conexão de Levi-Civita associada em \mathcal{U} , digamos $\nabla^{g|_{\mathcal{U}}}$, que em princípio não precisaria ser igual a ∇^g restrita a campos localmente definidos em \mathcal{U} (observação 1.10), denotada provisoriamente por $\nabla_{\mathcal{U}}^g$. Mas, de fato, isto é o que ocorre:

$$\nabla_{\mathcal{U}}^g = \nabla^{g|_{\mathcal{U}}}.$$

Utilizaremos essa identificação sem mais comentários no que segue.

Definição 1.14. *Se $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ é um sistema de coordenadas em (M, g) , definimos os símbolos de Christoffel para esse sistema de coordenadas como as funções $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\mathcal{U})$ dadas por:*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Pela observação 1.10, ∇ satisfaz as condições 4 e 5 do teorema 1.13 em \mathcal{U} e, como $[\partial_i, \partial_j] = 0$, segue que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Chamamos então a propriedade 4 de *simetria* da conexão. A propriedade 5 é chamada de *compatibilidade com a métrica* por motivos evidentes.

Os símbolos de Christoffel descrevem como atua a conexão ∇ sobre o aberto \mathcal{U} . Como ∇ é determinada pela métrica g , é de se esperar que possamos calcular os Γ_{ij}^k a partir da métrica. Esse é o conteúdo do próximo lema.

Lema 1.15. *Dada uma carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, temos:*

1. $\nabla_{\partial_i} \left(\sum_{j=1}^n W^j \partial_j \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial W^j}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k W^j \right] \partial_k;$
2. $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mk} \left[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right].$

Demonstração. Pode ser encontrada na página 62 de O'Neill (1983). \square

Lema 1.16. *A conexão ∇^{flat} é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}_\nu^n, \forall 0 \leq \nu \leq n$. Em relação às coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n , temos*

1. $g_{ij} = \varepsilon_i \cdot \delta_{ij}$, onde $\varepsilon_i = -1$, para $1 \leq i \leq \nu$, e $\varepsilon_i = 1$, para $\nu + 1 \leq i \leq n$;
2. $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 62 de O'Neill (1983). \square

Definição 1.17. Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante ∇_V é a única derivação de tensores em M tal que

$$\nabla_V(f) = Vf, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

e $\nabla_V W$ é a conexão de Levi-Civita calculada em V e W , para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.18. O diferencial covariante de um (r, s) -tensor A é o $(r, s + 1)$ -tensor ∇A dado por

$$(\nabla A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s),$$

para quaisquer $X_i, V \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$.

O diferencial covariante ∇A é uma maneira de coletar todas as derivadas $\nabla_V A$ num único tensor, de forma que $\nabla_V A = 0, \forall V \in \mathfrak{X}(M) \iff \nabla A = 0$. Vamos agora definir o análogo de uma isometria para variedades afins.

Definição 1.19. Dadas duas variedades afins (M, ∇^M) e (N, ∇^N) , um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ é dito uma transformação afim quando, para quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos⁹

$$\nabla_{\phi_* X}^N \phi_* Y = \phi_* (\nabla_X^M Y).$$

As propriedades que dependem apenas da conexão (transporte paralelo, geodésicas e curvatura) permanecem inalteradas mediante transformações afins, como veremos nas seções a seguir.

Definição 1.20. Dadas variedades semi-Riemannianas (M, g) e (N, h) , um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ é dito uma homotetia quando existe $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\phi^* h = c \cdot g$. Dizemos que c é a constante de homotetia.

Lema 1.21. Seja $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma homotetia. Então, considerando as conexões de Levi-Civita ∇ e ∇^h de M e N , respectivamente, ϕ é uma transformação afim.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 92 de O'Neill (1983), lema 3.64. \square

Corolário 1.22. Se $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é uma isometria, então ϕ é transformação afim.

Demonstração. Como $\phi^* h = g$, ϕ é uma homotetia com constante de homotetia 1. O resultado decorre então do lema 1.21. \square

⁹ Aqui, a aplicação linear $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ é dada por $(\phi_* X)_{\phi(q)} = d\phi_q(X_q), \forall q \in M$, e é chamada de *pushforward* de ϕ .

Dessa forma, pelo lema 1.21 segue que toda propriedade que depende única e exclusivamente da presença de uma conexão na variedade é preservada por homotetias (e isometrias, corolário 1.22).

1.4 Transporte paralelo

Dada uma curva¹⁰ $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$, definimos os *campos vetoriais sobre α* como o conjunto

$$\mathfrak{X}(\alpha) := \{Z : I \longrightarrow TM : Z \text{ é suave e } Z(t) \in T_{\alpha(t)}M, \forall t \in I\}.$$

É imediato verificar que $\mathfrak{X}(\alpha)$ é um $C^\infty(I)$ -módulo com as operações usuais de soma e multiplicação por funções. Como exemplos de campos sobre α , temos $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e, se $V \in \mathfrak{X}(M)$, $V_\alpha := V \circ \alpha \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Nesta seção, nos ocuparemos em estender a noção de derivada covariante para campos em $\mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposição 1.23. *Seja $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma curva numa variedade semi-Riemanniana (M, g) . Então, existe uma única aplicação $\frac{D}{dt} = ()' : \mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$, chamada de derivada covariante (induzida por ∇), tal que*

1. $\frac{D}{dt}$ é \mathbb{R} -linear;
2. $(hZ)' = h' \cdot Z + h \cdot Z'$, para $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e $h \in C^\infty(I)$;
3. $(V_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}V$, para $V \in \mathfrak{X}(M)$ e $t \in I$.

Além disso, como ∇ é compatível com g , temos:

4. $\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$, para $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 65 de O'Neill (1983). □

A demonstração da proposição 1.23 deixa claro que, num sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ e para $t \in I$ de forma que $\alpha(t) \in \mathcal{U}$, escrevendo $Z(t) = Z^i(t)\partial_i|_{\alpha(t)}$ temos

$$Z'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt}(t)\partial_i|_{\alpha(t)} + \sum_{i=1}^n Z^i(t)\nabla_{\alpha'(t)}\partial_i.$$

Expandindo o termo $\nabla_{\alpha'(t)}\partial_i$ em símbolos de Christoffel, ficamos com

$$Z'(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{dZ^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t) Z^j(t) \right] \cdot \partial_k|_{\alpha(t)}. \quad (1.24)$$

¹⁰ O intervalo I pode ser aberto, fechado ou semi-aberto.

Definimos a *aceleração* de α como o campo $\alpha'' := \frac{D}{dt}(\alpha')$. É de se notar que enquanto a velocidade α' depende apenas da estrutura diferenciável de (M, g) , a aceleração α'' requer o uso de g (via sua conexão de Levi-Civita) para ser definido. De fato, utilizando a equação 1.24, para $\alpha(t) \in \mathcal{U}$ temos:

$$\alpha''(t) = \sum_{k=1}^n \left[(x^k \circ \alpha)''(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \circ \alpha(t) \cdot \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t) \cdot \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}(t) \right] \cdot \partial_k|_{\alpha(t)}. \quad (1.25)$$

Note que no caso $(M, g) = \mathbb{R}_v^n$, resgatamos a fórmula usual para a aceleração de uma curva da geometria diferencial elementar, pois $\Gamma_{ij}^k = 0$ nesse caso (lema 1.16).

Um campo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é dito ser *paralelo* (ou *transportado paralelamente*) se $Z' = 0$. Da equação 1.24, segue que encontrar campos $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelos se reduz ao problema de resolver um sistema linear de EDO's de primeira ordem. Sendo assim, o teorema de existência e unicidade de EDO's nos fornece o seguinte resultado:

Lema 1.26. *Dada uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$ e dados $a \in I$ e $z \in T_{\alpha(a)}M$, existe um único campo paralelo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $Z(a) = z$.*

Definição 1.27. *Dados $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva e $a, b \in I$, o transporte paralelo entre a e b associado à curva α é a aplicação $P_{a,b} : T_{\alpha(a)}M \rightarrow T_{\alpha(b)}M$ definida da seguinte forma: dado $v \in T_{\alpha(a)}M$, considere o campo paralelo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ com $V(a) = v$ (lema 1.26) e ponha $P_{a,b}(v) := V(b)$.*

O transporte paralelo $P_{a,b}$ é a maneira que temos para comparar vetores tangentes a pontos diferentes da variedade (contanto que os pontos estejam conectados por uma curva).

Proposição 1.28. *Na notação da definição acima, temos:*

1. $P_{a,b}$ é uma isometria linear;
2. $\forall t, t', t'' \in I$, vale $P_{t',t''} \circ P_{t,t'} = P_{t,t''}$. Em particular, $P_{t,t'} = P_{t',t}^{-1}$;
3. Se $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e $t_0 \in I$, temos:

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{t_0+s, t_0}(X(t_0+s)) - X(t_0)}{s}.$$

Demonstração. Para o item 1, veja O'Neill (1983) na página 66. Para o item 2, tome $v \in T_{\alpha(t)}M$ e $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo tal que $V(t) = v$. Daí, pela definição 1.27, $P_{t,t'}(v) = V(t')$. Note que, novamente pela definição 1.27, $P_{t',t''} \circ P_{t,t'}(v) = P_{t',t''}(V(t')) = V(t'')$, pois V é um campo paralelo sobre α e V coincide com $V(t')$ em t' . Como $P_{t,t''}(v) = V(t'')$, segue o item 2.

Para o item 3, fixe (e_1, \dots, e_n) base ortonormal de $T_{\alpha(t_0)}M$. Considere $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelos tais que $E_i(t_0) = e_i$. Pelo item 1, $(E_1(t), \dots, E_n(t))$ é base ortonormal¹¹ de $T_{\alpha(t)}M$ para qualquer $t \in I$. Logo, X se escreve como

$$X(t) = X^i(t)E_i(t), t \in I.$$

Como temos então $X^i = \varepsilon_i \langle X, E_i \rangle$, onde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, segue $X^i \in C^\infty(I)$. Por um lado, da equação acima e usando que $DE_i/dt = 0$, já que E_i é paralelo, temos

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{dX^i}{dt}(t_0)e_i.$$

Por outro lado, usando $X = X^i E_i$ e $P_{t_0+s, t_0}(E_i(t_0 + s)) = E_i(t_0) = e_i$, segue que $P_{t_0+s, t_0}(X(t_0 + s)) = X^i(t_0 + s)e_i$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{t_0+s, t_0}(X(t_0 + s)) - X(t_0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n (X^i(t_0 + s) - X^i(t_0))e_i}{s} = \sum_{i=1}^n \frac{dX^i}{dt}(t_0)e_i,$$

o que prova o item 3 e encerra a demonstração. \square

Como exemplificamos anteriormente, para um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$, $V \circ \alpha$ é um campo sobre α . A pergunta natural que surge é se um dado campo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ também pode ser visto dessa maneira, pelo menos localmente. Esse é o conteúdo do próximo lema.

Lema 1.29. *Sejam α uma curva numa variedade (M, g) e $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Então,*

1. *se $\alpha'(t_0) \neq 0$, então existe $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\tilde{Z}_{\alpha(t)} = Z(t)$, para t numa vizinhança J de t_0 . Em particular, fazendo $Z = \alpha'$ nos dá que α é localmente uma curva integral;*
2. *na hipótese do item anterior, $Z'(t) = \nabla_{\alpha'(t)} \tilde{Z}$, para $t \in J$;*
3. *se α é curva integral de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $Xf \circ \alpha = (f \circ \alpha)'$, para qualquer $f \in C^\infty(M)$.*

Demonstração. Para o item 1, tome $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ carta de M em $\alpha(t_0)$ e seja $J \subseteq I$ intervalo aberto contendo t_0 tal que, $\forall t \in J$, $\alpha(t) \in \mathcal{U}$ e $\alpha'(t) \neq 0$. Escreva $Z|_J = Z^i \partial_i \circ \alpha|_J$. Considere a curva $\beta := \varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a função $\Xi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Xi(t) := (Z^1(t), \dots, Z^n(t))$. Note que

$$\beta'(t) = d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)),$$

donde $\beta'(t_0) \neq 0$. Usando a forma local das imersões para a curva β e diminuindo $J \ni t_0$ se necessário, encontramos¹² uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave tal que $F \circ \beta(t) = \Xi(t), \forall t \in J$.

¹¹ Já que $E_i(t) = P_{t_0, t}(E_i(t_0)) = P_{t_0, t}(e_i)$.

¹² Pela forma local das imersões, considere $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\beta(J) \subseteq \mathcal{V}$ (a menos de diminuir e renomear J), $\varepsilon > 0$, $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ aberto contendo $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^{n-1}}$ e $\xi : \mathcal{V} \rightarrow (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathcal{W}$ difeomorfismo tal que $\xi \circ \beta(t) = (t, \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{n-1}})$. Defina $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pondo $F := \Xi \circ \pi_1 \circ \xi$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada. Estendendo F por função “bump” para \mathbb{R}^n e diminuindo J nos dá o resultado.

Escreva $F = (F^1, \dots, F^n)$ e defina $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ pondo

$$\tilde{Z}_q := \sum_{i=1}^n F^i \circ \varphi(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q.$$

Daí, para $t \in J$ temos

$$\tilde{Z}_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n F^i \circ \varphi \circ \alpha(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n F^i \circ \beta(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n Z^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} = Z_{\alpha(t)}.$$

Daí, basta estender o campo \tilde{Z} para M inteira (via função “bump”, por exemplo) e diminuir J , se necessário.

Para o item 2, considere $t \in J$. Daí, das propriedades da derivada covariante sobre uma curva (induzida por uma conexão na variedade) temos:

$$\nabla_{\alpha'(t)} \tilde{Z} = \frac{D(\tilde{Z} \circ \alpha)}{dt}(t) = \frac{DZ}{dt}(t) = Z'(t).$$

Finalmente, para o item 3, dado t no domínio da curva α , como $X_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$ temos:

$$(Xf)(\alpha(t)) = X_{\alpha(t)}f = (\alpha'(t))f = (f \circ \alpha)'(t),$$

como queríamos. □

1.5 Geodésicas

Definição 1.30. *Se $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é curva, dizemos que α é geodésica se o campo aceleração α'' é identicamente nulo. Em outras palavras, α é geodésica quando α' é paralelo.*

Uma curva constante é, trivialmente, uma geodésica. Uma vez que estas não têm nenhum interesse geométrico, a menos de menção em contrário “geodésica” sempre significará “geodésica não-constante”.

Da equação 1.25 segue que α é geodésica se, e somente se, para qualquer sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, valem as *equações geodésicas*:

$$(x^k \circ \alpha)'' + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \circ \alpha \cdot \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.31)$$

Para $(M, g) = \mathbb{R}_v^n$ (exemplo 1.4), como em coordenadas cartesianas u^1, \dots, u^n temos $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k$ (lema 1.16), as geodésicas de \mathbb{R}_v^n são as curvas α que satisfazem $(u^k \circ \alpha)'' = 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, aquelas para as quais existem $p, v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t) = t \cdot v + p$ para todo $t \in I$. Isso mostra que as geodésicas de \mathbb{R}_v^n são as retas e, portanto, podemos pensar que as geodésicas de (M, g) são uma generalização das retas de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.32. (*Caráter causal de geodésicas*)

Como vimos na seção 1.1, uma curva não precisa ter um caráter causal definido. No entanto, vamos mostrar que isso ocorre quando $\alpha : I \rightarrow M$ é geodésica. Com efeito, usando a proposição 1.23 temos

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle' = 2\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$$

já que $\alpha'' = 0$. Daí, a função $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ é constante em I , donde segue que uma geodésica (não-constante) α tem caráter causal definido.

Proposição 1.33. *Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ satisfazendo:*

1. $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$;
2. I_v é maximal, no sentido de que, se $\alpha : I \rightarrow M$ é geodésica com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então $I \subseteq I_v$ e $\alpha = \gamma_v|_I$.

A geodésica γ_v é dita ser maximal ou inextensível.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 68 de O'Neill (1983). □

Em particular, dada uma geodésica $\alpha : I \rightarrow M$ qualquer com $0 \in I$, tomando $p := \alpha(0)$ e $v := \alpha'(0)$ segue que existe (única) geodésica maximal γ_v que *estende* a geodésica α , ou seja, $I \subseteq I_v$ e $\alpha = \gamma_v|_I$.

Uma geodésica maximal é dita *completa* quando seu domínio é \mathbb{R} . (M, g) é dita *geodesicamente completa* quando todas as suas geodésicas (maximais) são completas.

Como exemplo, considere as geodésicas de \mathbb{R}_ν^n . Vimos que estas são retas e, portanto, podem ser definidas em toda a reta real. Isto prova que \mathbb{R}_ν^n é *geodesicamente completo* para todo $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Mais ainda, note que as geodésicas de \mathbb{R}_ν^n são as mesmas independentemente de ν . Isso evidencia que a noção de geodésica depende apenas da conexão na variedade e não necessariamente da métrica. De fato, todos os \mathbb{R}_ν^n têm a mesma conexão “flat” como sua conexão de Levi-Civita, para qualquer ν (lema 1.16).

Para uma curva $\alpha : I \rightarrow M$, definimos uma *reparametrização* de α como uma curva $\beta := \alpha \circ \zeta$, onde $\zeta : J \rightarrow I$ é difeomorfismo.

Lema 1.34. *Sejam $\alpha : I \rightarrow M$ uma geodésica (não-constante) e $\beta := \alpha \circ \zeta : J \rightarrow M$ uma reparametrização de α . Então, β é geodésica se, e somente se, ζ é da forma $\zeta(t) = at + b$ para constantes $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pode ser encontrada na página 69 de O'Neill (1983). □

Como a noção de geodésica depende apenas da presença da conexão, vamos agora mostrar que transformações afins preservam geodésicas.

Lema 1.35. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades semi-Riemannianas com conexões de Levi-Civita dadas por ∇^g e ∇^h . Então, se $\phi : M \rightarrow N$ é transformação afim e $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva, temos que α é geodésica (em M) se, e somente se, $\phi \circ \alpha$ é geodésica (em N). Em particular, M é geodesicamente completa se, e somente se, N o é.*

Demonstração. Vamos mostrar localmente. Para tanto, fixe $t_0 \in I$, $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ carta em $\alpha(t_0)$ e defina $\mathcal{V} := \phi(\mathcal{U})$ e $y^j := x^j \circ \phi^{-1}|_{\mathcal{V}}$, de forma que temos a carta $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \ni \phi \circ \alpha(t_0)$ em N . Denote por Γ_{ij}^k [resp. $\hat{\Gamma}_{ij}^k$] os símbolos de Christoffel de ∇^g [resp. ∇^h] em \mathcal{U} [resp. \mathcal{V}]. Daí, para $t \in I$ perto de t_0 (isto é, onde $\alpha(t) \in \mathcal{U}$) e escrevendo $\beta = \phi \circ \alpha$, da definição das funções y^j e de¹³ $\hat{\Gamma}_{ij}^k \circ \beta(t) = \Gamma_{ij}^k \circ \alpha(t)$, temos

$$\begin{aligned} \beta''(t) &= \sum_{k=1}^n \left[(y^k \circ \beta)''(t) + \sum_{i,j=1}^n \hat{\Gamma}_{ij}^k \circ \beta(t) \cdot (y^i \circ \beta)'(t) (y^j \circ \beta)'(t) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{\beta(t)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(x^k \circ \alpha)''(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \circ \alpha(t) \cdot (x^i \circ \alpha)'(t) (x^j \circ \alpha)'(t) \right] \cdot d\phi_{\alpha(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\alpha(t)} \right) \\ &= d\phi_{\alpha(t)} (\alpha''(t)), \end{aligned}$$

donde segue $\beta''(t_0) = 0 \iff \alpha''(t_0) = 0$ pois $d\phi_{\alpha(t_0)}$ é isomorfismo linear. Daí, como t_0 é arbitrário, segue $\beta'' = 0 \iff \alpha'' = 0$, de onde segue o resultado. \square

1.6 Curvatura

Nesta seção, definiremos o tensor de curvatura para uma variedade semi-Riemanniana (M, g) de dimensão $n \geq 2$. O caso unidimensional não é de interesse neste contexto, pois o tensor R da definição 1.36 abaixo se anula identicamente para $\dim M = 1$.

Definição 1.36. *Para uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , definimos o tensor de curvatura como $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por¹⁴*

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Não é imediato que essa combinação peculiar da conexão de Levi-Civita ∇ com o colchete de Lie $[,]$ (ambos não-tensoriais) produza algo tensorial. O leitor pode consultar

¹³ Segue de ϕ ser afim: denotando $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\hat{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial y^i}$, temos $\hat{\Gamma}_{ij}^k \hat{\partial}_k = \nabla_{\hat{\partial}_i}^h \hat{\partial}_j = \nabla_{\phi_* \partial_i}^h \phi_* \partial_j = \phi_* \nabla_{\partial_i}^g \partial_j = \phi_* (\Gamma_{ij}^k \partial_k) = \Gamma_{ij}^k \circ \phi^{-1} \cdot \hat{\partial}_k$.

¹⁴ Não há convenção universalmente aceita sobre o sinal da curvatura, embora a que adotamos aqui seja a mais comum. O livro O'Neill (1983), por exemplo, tem convenção oposta à nossa. Apesar disso, os sinais de curvatura seccional, tensor de Ricci e curvatura escalar não serão afetadas por essa escolha.

O'Neill (1983) na página 74 para a prova de que no entanto isto é precisamente o que ocorre.

Como R é $C^\infty(M)$ -trilinear, ele pode atuar pontualmente: para um $p \in M$, fica bem definido o operador linear $R_p : T_p M^3 \longrightarrow T_p M$ dado por $R_p(x, y)z := (R(X, Y)Z)(p)$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $X_p = x, Y_p = y$ e $Z_p = z$.

Lema 1.37. (*Simetrias do tensor R*)

Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, valem:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
3. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$;
4. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 76 de O'Neill (1983). □

Uma variedade (M, g) é dita ser *plana* quando seu tensor de curvatura R é identicamente nulo.

Exemplo 1.38. (\mathbb{R}_V^n é plano)

Considere em \mathbb{R}_V^n a conexão ∇^{flat} dada pela equação 1.9. Como já comentamos acima, o lema 1.16 mostra que ∇^{flat} é precisamente a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_V^n . Como R é tensorial, para estabelecer que é identicamente nulo basta mostrar que R se anula nos campos coordenados de \mathbb{R}^n (com relação às coordenadas cartesianas u^1, \dots, u^n). Para tanto, denotando $\nabla = \nabla^{flat}$ temos

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k = 0$$

já que $[\partial_m, \partial_l] = 0$ e $\nabla_{\partial_m}\partial_l = 0, \forall m, l$, pois as componentes do campo ∂_l são constantes (veja equação 1.9). Isso mostra $R = 0$, como queríamos. Este, claro, é o motivo pelo qual chamamos a conexão deste exemplo de conexão “flat”!

Lema 1.39. Para uma carta (\mathcal{U}, φ) de (M, g) , escreva as componentes de R como $R_{jkl}^i \in C^\infty(\mathcal{U})$, onde

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \sum_{i=1}^n R_{jkl}^i \partial_i.$$

Então, as componentes são dadas por

$$R_{jkl}^i = -\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \sum_{m=1}^n \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m + \sum_{m=1}^n \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

Demonstração. Pode ser encontrada na página 76 de O'Neill (1983) (lembrando que definimos o tensor R com o sinal trocado em relação ao livro). \square

Corolário 1.40. *Seja $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ uma transformação afim considerando as conexões de Levi-Civita. Então, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\phi_* R^M(X, Y)Z = R^N(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z,$$

onde R^M e R^N denotam os tensores de curvatura de M e N , respectivamente.

Demonstração. A demonstração segue imediatamente das definições 1.19 e 1.36. \square

O tensor R é demasiado complicado para ser interpretado diretamente de sua definição. Dessa forma, nosso objetivo agora é obter tensores mais simples a partir de R dos quais é possível extrair-se informações geométricas de forma mais simples.

1.6.1 Curvatura seccional

Num primeiro curso de geometria diferencial, nos deparamos com a definição de *curvatura gaussiana* para uma superfície de \mathbb{R}^3 a qual prova-se ser invariante por isometrias (teorema *egregium*), ou seja, é uma propriedade puramente geométrica (depende apenas da métrica). Vamos agora definir o análogo da curvatura gaussiana para variedades de dimensões quaisquer e que não estejam necessariamente mergulhadas em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^k .

Definição 1.41. *Dados $p \in M$ e Π plano não-degenerado¹⁵ em p , fica bem definido o número*

$$Sec(\Pi) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{Q(v, w)},$$

onde $\{v, w\}$ é base qualquer de Π e¹⁶ $Q(v, w) := \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$. $Sec(\Pi)$ é chamado de curvatura seccional de Π .

Veja que Sec é uma função real no conjunto de todos os planos tangentes não-degenerados. O caso mais interessante ocorre quando Sec é constante em cada ponto $p \in M$, ou seja, $Sec(\Pi)$ associa o mesmo valor para todo Π plano não-degenerado em p . Nesse caso, Sec fica bem definida como uma função em M :

Proposição 1.42. *Assuma que para cada $p \in M$, Sec é constante em p , ou seja, $Sec(\Pi)$ é constante para todo Π plano não-degenerado em p . Então, a função $Sec : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave e vale*

$$R(X, Y)Z = Sec \cdot [\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y], \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

¹⁵ Ou seja, Π é subespaço de $T_p M$ de dimensão 2 e não-degenerado.

¹⁶ O fato de $Q(v, w)$ ser não-nulo segue de Π ser não-degenerado em $T_p M$ e a prova de que $Sec(\Pi)$ fica bem definido pode ser encontrada na página 77 de O'Neill (1983).

Ademais, se M é conexa e $n \geq 3$, então a função Sec é constante em M , isto é, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$R(X, Y)Z = C \cdot [\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y], \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.43)$$

Demonstração. A primeira igualdade segue como na demonstração do corolário 3.43 de O'Neill (1983) na página 80. A suavidade de Sec segue da primeira igualdade tomando campos X, Y, Z e W para serem campos de um referencial ortonormal local de M e escrevendo

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = Sec \cdot [\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle].$$

Basta isolar então a função Sec na equação acima (lembrando que temos um referencial ortonormal). A segunda parte é mais complicada, e a omitimos, já que depende de uma identidade para a curvatura chamada de *segunda identidade de Bianchi*, que não discutiremos aqui (ver O'Neill (1983) para maiores detalhes). \square

Veja que a primeira hipótese da proposição acima é automaticamente satisfeita para superfícies semi-Riemannianas (ou seja, variedades bidimensionais). Uma variedade semi-Riemanniana (M, g) para a qual a equação 1.43 vale para algum $C \in \mathbb{R}$ é dita ser uma *variedade de curvatura (seccional) constante*.

1.6.2 Tensor de Ricci e curvatura escalar

Outros operadores construídos a partir do tensor de curvatura R , mas que são mais simples e maleáveis, são o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Definição 1.44. (*Tensor de Ricci*) Para uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , definimos o tensor de Ricci como o $(0, 2)$ -tensor Ric pondo¹⁷, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e (\mathcal{U}, φ) carta qualquer,

$$Ric(X, Y)|_{\mathcal{U}} := \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \langle R(\partial_k, Y)X, \partial_l \rangle,$$

onde ∂_i denota o i -ésimo campo coordenado de (\mathcal{U}, φ) .

Quando $Ric = 0$ dizemos que (M, g) é *Ricci-plano*. Para um referencial ortonormal $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, se $\varepsilon_i := \langle E_i, E_i \rangle$ temos

$$Ric(X, Y)|_{\mathcal{U}} := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R(E_i, Y)X, E_i \rangle.$$

Note que Ric é simétrico e, como é tensorial, podemos defini-lo pontualmente: dado um $p \in M$, $Ric_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica.

¹⁷ A prova que Ric fica bem definido é bastante simples e não a incluímos aqui.

Definição 1.45. Para uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , definimos a curvatura escalar como a função suave $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S = \text{tr Ric}$, ou seja, para cada $p \in M$,

$$S_p = \text{tr}_{g_p} \text{Ric}_p,$$

onde $\text{tr}_{g_p} \text{Ric}_p$ denota o traço¹⁸ da forma bilinear simétrica Ric_p .

Em coordenadas, temos

$$S = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \text{Ric}(\partial_k, \partial_l)$$

e, para um referencial ortonormal $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$,

$$S|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \text{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle R(E_j, E_i)E_i, E_j \rangle.$$

Em particular, segue que se $\text{Ric} = 0$, então $S = 0$.

Lema 1.46. Seja $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma isometria. Se Ric^M e Ric^N denotam, respectivamente, os tensores de Ricci de (M, g) e (N, h) , então temos

$$\phi^* \text{Ric}^N = \text{Ric}^M.$$

Demonstração. Fixe $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ carta local em M . Considere a carta $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ de N dada por $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{U})$ e $y^j := x^j \circ \phi^{-1}$. Vamos mostrar que $\phi^* \text{Ric}^N(X, Y)|_{\mathcal{U}} = \text{Ric}^M(X, Y)|_{\mathcal{U}}$ (donde $\phi^* \text{Ric}^N(X, Y) = \text{Ric}^M(X, Y)$ pela arbitrariedade de \mathcal{U} e estamos feitos pois X e Y são quaisquer). Para tanto, como X e Y são combinações (por funções suaves) de $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\phi^* \text{Ric}^N$ e Ric^M são tensoriais, basta mostrarmos que $\phi^* \text{Ric}^N(\partial_i, \partial_j) = \text{Ric}^M(\partial_i, \partial_j)$. Daí, denotando $\frac{\partial}{\partial y^j}$ por $\hat{\partial}_j$ e g_{kl} e h_{kl} os coeficientes de g e h nas cartas, utilizando o corolário 1.40 temos

$$\begin{aligned} \phi^* \text{Ric}^N(\partial_i, \partial_j) &= \text{Ric}^N(\phi_* \partial_i, \phi_* \partial_j) \circ \phi \\ &= \left(\sum_{k,l=1}^n h^{kl} \langle R^N(\hat{\partial}_k, \phi_* \partial_j) \phi_* \partial_i, \hat{\partial}_l \rangle \right) \circ \phi \\ &= \left(\sum_{k,l=1}^n h^{kl} \langle R^N(\phi_* \partial_k, \phi_* \partial_j) \phi_* \partial_i, \phi_* \partial_l \rangle \right) \circ \phi \\ &= \left(\sum_{k,l=1}^n h^{kl} \langle \phi_* R^M(\partial_k, \partial_j) \partial_i, \phi_* \partial_l \rangle \right) \circ \phi \\ &= \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \langle R^M(\partial_k, \partial_j) \partial_i, \partial_l \rangle \\ &= \text{Ric}^M(\partial_i, \partial_j), \end{aligned}$$

o que encerra a prova. □

¹⁸ Veja seção A.1.

1.7 Alguns operadores diferenciais

Na seção 1.3, definimos o gradiente $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ para uma função $f \in C^\infty(M)$ (definição 1.12). Vamos agora definir a Hessiana e o Laplaciano de uma função.

Definição 1.47. Para uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos a Hessiana de f como o $(0, 2)$ -tensor simétrico¹⁹ dado por

$$Hess_f(X, Y) := \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle.$$

Para um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, temos

$$Hess_f(\partial_i, \partial_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Como $Hess_f$ é tensorial, em cada ponto $p \in M$ temos uma forma bilinear simétrica em $T_p M$, o que nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 1.48. Para uma função $f \in C^\infty(M)$, definimos seu Laplaciano como a função suave $\Delta f := tr Hess_f$, ou seja, $(\Delta f)(p) = tr_{g_p} Hess_f(p)$.

Para um referencial ortonormal $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, temos

$$\Delta f|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot Hess_f(E_i, E_i).$$

Para um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ temos a fórmula

$$\Delta f|_{\mathcal{U}} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right],$$

que em \mathbb{R}_v^n se reduz para a fórmula usual do Laplaciano

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}.$$

Para uso posterior, enunciamos o seguinte lema:

Lema 1.49. Sejam $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ uma isometria e $\eta \in C^\infty(M)$. Então, temos

$$\phi_* \nabla^M \eta = \nabla^N (\eta \circ \phi^{-1}).$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer. Então,

$$\langle \phi_* \nabla^M \eta, \phi_* X \rangle = \langle \nabla^M \eta, X \rangle \circ \phi^{-1} = d\eta(X) \circ \phi^{-1} = d(\eta \circ \phi^{-1})(\phi_* X) = \langle \nabla(\eta \circ \phi^{-1}), \phi_* X \rangle$$

Como $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$ é isomorfismo linear, segue que $\langle \phi_* \nabla^M \eta, Z \rangle = \langle \nabla(\eta \circ \phi^{-1}), Z \rangle, \forall Z \in \mathfrak{X}(N)$, donde $\phi_* \nabla^M \eta = \nabla^N (\eta \circ \phi^{-1})$. \square

¹⁹ A simetria é provada na página 86 de O'Neill (1983).

1.8 Subvariedades semi-Riemannianas

Nesta seção, vamos estudar condições para que subvariedades (imersas ou mergulhadas) de uma variedade semi-Riemanniana (\bar{N}^{n+k}, \bar{h}) fixada, onde $n+k = \dim \bar{N}$ e $n, k \geq 1$, possam “herdar” uma métrica da variedade ambiente.

Definição 1.50. *Seja N uma subvariedade (imersa ou mergulhada) de (\bar{N}, \bar{h}) e denote por $i : N \hookrightarrow \bar{N}$ a inclusão. Então, N é dita subvariedade semi-Riemanniana de \bar{N} se $i^*\bar{h}$ é uma métrica em N , isto é, se $(N, i^*\bar{h})$ é uma variedade semi-Riemanniana.*

Quando \bar{h} é definida (positiva ou negativa), todas as subvariedades de \bar{N} são semi-Riemannianas e de mesmo índice de \bar{h} . No entanto, esse não precisa ser o caso se \bar{h} é indefinida, como veremos na seção 3.2. Para o restante da seção, fixe $(N^n, i^*\bar{h}) \subseteq (\bar{N}, \bar{h})$ subvariedade semi-Riemanniana de \bar{N} de dimensão $n \geq 1$.

Para cada $p \in N$, o espaço $di_p(T_p N) \subseteq T_p \bar{N}$ é não-degenerado em $T_p \bar{N}$ e isométrico a $T_p N$. Do lema A.5 segue a decomposição

$$T_p \bar{N} = di_p(T_p N) \oplus di_p(T_p N)^\perp. \quad (1.51)$$

Em particular, note que $\text{ind } i^*\bar{h} \leq \text{ind } \bar{h}$. Defina os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(i) &:= \{X : N \longrightarrow T\bar{N} : X \text{ é suave e } X_p \in T_p \bar{N}, \forall p \in N\} \\ \mathfrak{X}^\parallel(i) &:= \{X \in \mathfrak{X}(i) : X_p \in di_p(T_p N), \forall p \in N\} \\ \mathfrak{X}^\perp(i) &:= \{X \in \mathfrak{X}(i) : X_p \in di_p(T_p N)^\perp, \forall p \in N\} \end{aligned}$$

dos campos *sobre i* , *tangentes sobre i* e *normais sobre i* , respectivamente. Por exemplo, se $X \in \mathfrak{X}(N)$, temos que $di(X) \in \mathfrak{X}^\parallel(i)$ e se $Z \in \mathfrak{X}(\bar{N})$, $Z \circ i \in \mathfrak{X}(i)$. Os conjuntos acima definidos se tornam $C^\infty(N)$ -módulos com as operações usuais de soma e multiplicação ponto a ponto, com $\mathfrak{X}^\parallel(i)$ e $\mathfrak{X}^\perp(i)$ sub-módulos de $\mathfrak{X}(i)$.

Proposição 1.52. *A aplicação $di : \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^\parallel(i)$ é um isomorfismo de $C^\infty(N)$ -módulos.*

Demonstração. Que di é morfismo injetor de $C^\infty(N)$ -módulos é imediato de sua definição. Para a sobrejetividade, tome $V \in \mathfrak{X}^\parallel(i)$. Daí, para cada $p \in N$, $V_p \in di(T_p N)$. Como di_p é injetora (i é imersão), existe único $X_p \in T_p N$ tal que $di_p(X_p) = V_p$. Fica então bem definido o campo vetorial X sobre N . Uma vez que mostremos sua suavidade, é imediato que $di(X) = V$, donde seguirá a sobrejetividade. A suavidade de X decorre de uma análise em coordenadas para uma carta (\mathcal{U}, φ) qualquer de \bar{N} e a carta induzida em N correspondente. \square

Motivados pela decomposição em soma direta da equação 1.51, provamos o seguinte:

Proposição 1.53. $\mathfrak{X}(i) = \mathfrak{X}^{\parallel}(i) \oplus \mathfrak{X}^{\perp}(i)$, onde \oplus denota a soma direta de espaços vetoriais.

Demonstração. Que $\mathfrak{X}^{\parallel}(i) \cap \mathfrak{X}^{\perp}(i)$ é trivial segue de $di_p(T_p N) \cap di_p(T_p N)^{\perp}$ ser trivial, para cada $p \in N$. Daí, basta mostrarmos que $\mathfrak{X}(i) \subseteq \mathfrak{X}^{\parallel}(i) + \mathfrak{X}^{\perp}(i)$. Fixe $V \in \mathfrak{X}(i)$ e, para cada $p \in N$, escreva $V_p = X_p + Z_p$, onde $X_p \in di_p(T_p N)$ e $Z_p \in di_p(T_p N)^{\perp}$. Ficam bem definidos os campos vetoriais X e Z . Uma vez que forem suaves, $X \in \mathfrak{X}^{\parallel}(i)$ e $Z \in \mathfrak{X}^{\perp}(i)$, donde segue então $V \in \mathfrak{X}^{\parallel}(i) + \mathfrak{X}^{\perp}(i)$. Para a suavidade, fixe $p \in N$, $\mathcal{U} \subseteq N$ aberto contendo p e campos²⁰ $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n+k} \in \mathfrak{X}(i|_{\mathcal{U}})$ ortonormais tais que²¹ $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$ são paralelos e $\bar{E}_{n+1}, \dots, \bar{E}_{n+k}$ são normais. Dessa forma,

$$V|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n+k} V^i \bar{E}_i,$$

onde $V^i \in C^{\infty}(\mathcal{U})$ (pois $V^i = \langle V, \bar{E}_i \rangle \langle \bar{E}_i, \bar{E}_i \rangle$). Da escolha dos campos \bar{E}_i segue $X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n V^i \bar{E}_i$ e $Z|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=n+1}^{n+k} V^i \bar{E}_i$, donde segue a suavidade de $X|_{\mathcal{U}}$ e $Z|_{\mathcal{U}}$. Como $p \in \mathcal{U} \subseteq N$ é arbitrário, $X \in \mathfrak{X}^{\parallel}(i)$ e $Z \in \mathfrak{X}^{\perp}(i)$ e encerramos a prova. \square

Devido à proposição 1.52, dado um $V \in \mathfrak{X}(i)$, escrevemos V^{\parallel} e V^{\perp} para as partes tangente e normal de V , respectivamente. Vamos denotar também as conexões de Levi-Civita de N e \bar{N} respectivamente por ∇ e $\bar{\nabla}$.

Definição 1.54. A conexão induzida sobre i (por $\bar{\nabla}$) é a aplicação $D : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(i) \longrightarrow \mathfrak{X}(i)$ que satisfaz²²:

1. D é $C^{\infty}(N)$ -linear na primeira entrada;
2. D é \mathbb{R} -linear na segunda entrada;
3. $D_X(fV) = (Xf)V + f \cdot D_X V$, para $f \in C^{\infty}(N)$, $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $V \in \mathfrak{X}(i)$;
4. $D_{X_p}(Z \circ i) = \bar{\nabla}_{di_p(X_p)} Z$, para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(N)$, $Z \in \mathfrak{X}(\bar{N})$ e $p \in N$.

Teorema 1.55. Existe uma aplicação $\mathbf{\Pi} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\perp}(i)$ $C^{\infty}(N)$ -bilinear e simétrica que satisfaz, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$:

$$D_X di(Y) = di(\nabla_X Y) + \mathbf{\Pi}(X, Y),$$

ou seja, $di(\nabla_X Y) = (D_X di(Y))^{\parallel}$ e $\mathbf{\Pi}(X, Y) = (D_X di(Y))^{\perp}$. A aplicação $\mathbf{\Pi}$ é chamada de shape tensor ou tensor de segunda forma fundamental.

²⁰ $\mathfrak{X}(i|_{\mathcal{U}})$ são os campos suaves $Y : \mathcal{U} \longrightarrow T\bar{N}$ com $Y_q \in T_q \bar{N}, \forall q \in \mathcal{U}$.

²¹ Tome $(e_1, \dots, e_n) \subseteq T_p N$ base ortonormal, $\mathcal{U} \subseteq N$ aberto contendo p e $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ ortonormais tais que $E_i(p) = e_i, i \in \{1, \dots, n\}$ (lema 1.5). Tome $(\bar{e}_{n+1}, \dots, \bar{e}_{n+k}) \subseteq T_p \bar{N}$ base ortonormal de $di_p(T_p N)^{\perp}$ e $F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{X}(\bar{N})$ tais que $F_i(p) = \bar{e}_{n+i}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Aplicando o método de Gram Schmidt para os campos $di(E_1), \dots, di(E_n), F_1 \circ i, \dots, F_k \circ i$ e reduzindo \mathcal{U} se necessário, obtemos campos $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n+k} \in \mathfrak{X}(i|_{\mathcal{U}})$ ortonormais, de forma que $\bar{E}_i = di(E_i), i \in \{1, \dots, n\}$. Daí, $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$ são paralelos e, portanto, $\bar{E}_{n+1}, \dots, \bar{E}_{n+k}$ são normais.

²² A existência de tal aplicação é provada em O'Neill (1983) nas páginas 98 e 99.

Demonstração. Pode ser encontrada nas páginas 99 e 100 de O’Neill (1983), nos lemas 4.3 e 4.4. \square

Como $\mathbf{\Pi}$ é $C^\infty(N)$ -bilinear, ele pode ser definido pontualmente: se $p \in N$, $\mathbf{\Pi}_p : T_p N \times T_p N \longrightarrow di_p(T_p N)^\perp$ é \mathbb{R} -bilinear. O *shape tensor* relaciona a geometria da subvariedade N e da variedade \overline{N} ambiente. Por exemplo, consideramos um cilindro (mergulhado) em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_0^3$. Ainda que não tenhamos provado, o cilindro tem curvatura (seccional, por exemplo) nula, pois cada ponto seu está contido em um aberto isométrico ao plano Euclidiano \mathbb{R}^2 . Entretanto, o cilindro “parece curvo”. Esse fenômeno se deve ao *shape tensor* do cilindro, que é não-nulo.

A discussão do parágrafo anterior pode se tornar bastante mais precisa e geral por meio da *equação de Gauss* e da *equação de Codazzi*, que relacionam os tensores de curvatura de \overline{N} e de N (o leitor interessado pode consultar O’Neill (1983) nas páginas 100, 101, 114 e 115). Neste trabalho, entretanto, vamos nos contentar com apenas estudar o comportamento de curvas numa subvariedade semi-Riemanniana:

Lema 1.56. *Seja $\alpha : I \longrightarrow N$ curva qualquer. Então, temos*

$$(i \circ \alpha)''(t) = di_{\alpha(t)}(\alpha''(t)) + \mathbf{\Pi}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)), \quad \forall t \in I,$$

onde $(i \circ \alpha)''$ é o campo aceleração da curva $i \circ \alpha : I \longrightarrow \overline{N}$ em \overline{N} e α'' é a aceleração de α em N .

Demonstração. Pode ser encontrada na página 103 de O’Neill (1983). \square

Na notação do lema acima, segue que α é geodésica em N se, e somente se, $(i \circ \alpha)''$ é sempre normal a N , ou seja, $(i \circ \alpha)''(t) \in (di_{\alpha(t)}(T_{\alpha(t)}N))^\perp, \forall t \in I$.

Definição 1.57. *A subvariedade semi-Riemanniana N é dita ser totalmente geodésica se $\mathbf{\Pi} = 0$.*

Se N é totalmente geodésica, pelo lema 1.56 uma curva $\alpha : I \longrightarrow N$ é geodésica em N se, e somente se, é geodésica em \overline{N} (isto é, $i \circ \alpha : I \longrightarrow \overline{N}$ é geodésica). De fato, vale também a recíproca:

Proposição 1.58. *Para uma subvariedade semi-Riemanniana N de \overline{N} , são equivalentes:*

1. N é totalmente geodésica;
2. se $\alpha : I \longrightarrow N$ é geodésica em N , então α é geodésica em \overline{N} ;
3. se $p \in N$ e $v_0 \in T_p N$, definindo $v := di_p(v_0) \in T_p \overline{N}$ segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{\gamma}_v|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = i \circ \gamma_{v_0}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)},$$

ou seja, $\overline{\gamma}_v$ fica inicialmente em N .

Demonstração. Pode ser encontrada na página 104 de O'Neill (1983). \square

Corolário 1.59. *Sejam N subvariedade semi-Riemanniana de \bar{N} totalmente geodésica e $\alpha : I \rightarrow \bar{N}$ geodésica em \bar{N} tal que $p := \alpha(0) \in N$ e $\alpha'(0)$ é tangente a N (ou seja, $\alpha'(0) \in di_p(T_p N)$). Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos $\alpha(t) \in N$. Além disso, $\alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ é geodésica em N .*

Demonstração. Como $v := \alpha'(0)$ é tangente a N , escreva $v = di_p(v_0)$, com $v_0 \in T_p N$. Pelo item 3 da proposição anterior, tome $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ e

$$\bar{\gamma}_v|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = i \circ \gamma_{v_0}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}.$$

Daí, pela definição de $\bar{\gamma}_v$, segue que

$$\alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = \bar{\gamma}_v|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = i \circ \gamma_{v_0}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)},$$

ou seja, $\alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ fica em N . Além disso, a função $\alpha|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ coincide com $\gamma_{v_0}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ e, portanto, é geodésica em N , como queríamos. \square

Usando os dois últimos resultados, é muito simples verificar-se que subespaços vetoriais não-degenerados de dimensão $n < n + k$ de \mathbb{R}_v^{n+k} , ou mais geralmente as subvariedades afins de \mathbb{R}_v^{n+k} paralelas a tais subespaços (no sentido geométrico usual), são exemplos de subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}_v^{n+k} , uma vez que contêm todas as suas retas tangentes.

Para um ponto $p \in N$, denotando $h := i^* \bar{h}$ a métrica em N , definimos o *vetor curvatura média* em p pondo

$$\vec{H}_p := \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^n h^{kl}(p) \cdot \mathbf{\Pi}(v_k, v_l) \in di_p(T_p N)^\perp, \quad (1.60)$$

onde $(h_{kl}(p))_{k,l=1}^n = (h(v_k, v_l))_{k,l=1}^n$ e $(v_1, \dots, v_n) \subseteq T_p N$ é base. Uma conta simples mostra que \vec{H}_p fica bem definido. Fica também bem definido²³ o *campo curvatura média* de N como o campo $\vec{H} \in \mathfrak{X}^\perp(i)$ dado pontualmente pela equação acima.

Vamos agora definir uma noção mais fraca sobre uma subvariedade do que ser totalmente geodésica, mas que também será bastante útil para nossos propósitos.

Definição 1.61. *Um ponto $p \in N$ é dito ser umbílico se existe $z \in di_p(T_p N)^\perp$ tal que $\mathbf{\Pi}_p(v, w) = \langle v, w \rangle \cdot z, \forall v, w \in T_p N$. Quando todo ponto $p \in N$ é umbílico, então N é dita ser totalmente umbílica.*

²³ A suavidade de \vec{H} segue de uma análise simples em coordenadas.

Note que se N é totalmente geodésica, então claramente N é também totalmente umbílica. Além disso, quando $p \in N$ é umbílico, se $(e_1, \dots, e_n) \subseteq T_p N$ é base ortonormal, $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ e $z \in di_p(T_p N)^\perp$ é como na definição 1.61, temos

$$\vec{H}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \mathbf{\Pi}(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \langle e_i, e_i \rangle \cdot z = z,$$

ou seja, um ponto $p \in N$ é umbílico se, e somente se, $\mathbf{\Pi}(v, w) = \langle v, w \rangle \cdot \vec{H}_p, \forall v, w \in T_p N$. Daí, N é totalmente umbílica se, e somente se, $\mathbf{\Pi}(V, W) = \langle V, W \rangle \cdot \vec{H}, \forall V, W \in \mathfrak{X}(N)$. Em particular, N é totalmente geodésica se, e somente se, $\vec{H} = 0$.

Quando $f : \bar{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $c \in \mathbb{R}$ é valor regular de f , temos que $N := f^{-1}(c)$ é subvariedade (mergulhada) de codimensão 1 de \bar{N} . Que hipóteses sobre f devemos fazer para que N seja subvariedade semi-Riemanniana de \bar{N} ? Bem, se $i : N \hookrightarrow \bar{N}$ é a inclusão, sabemos que $i^* \bar{h}$ é $(0, 2)$ -tensor simétrico em N . Precisamos garantir então que $i^* \bar{h}$ seja não-degenerado em N e tenha índice constante. Como para um $p \in N$ temos²⁴

$$T_p N = Ker(df_p) = (\mathbb{R} \cdot (\nabla f)(p))^\perp,$$

$T_p N$ é não-degenerado se, e somente se²⁵, $\mathbb{R} \cdot (\nabla f)(p)$ é não-degenerado, ou seja, ou $(\nabla f)(p)$ é temporal ou espacial. Quando $(\nabla f)(p)$ é temporal, temos $ind T_p N = ind \bar{N} - 1$. Quando $(\nabla f)(p)$ é espacial, temos $ind T_p N = ind \bar{N}$. A fim de que o índice de $i^* \bar{h}$ seja constante em N , é necessário e suficiente que $\langle \nabla f, \nabla f \rangle$ seja sempre positivo em N ou sempre negativo em N . Fica assim provada a seguinte proposição:

Proposição 1.62. *Se $f : \bar{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $N := f^{-1}(c)$, com $c \in \mathbb{R}$ valor regular de f , então N é subvariedade semi-Riemanniana de codimensão 1 de \bar{N} se, e somente se, ou $\langle \nabla f, \nabla f \rangle|_N > 0$ ou $\langle \nabla f, \nabla f \rangle|_N < 0$. No primeiro caso, temos $ind N = ind \bar{N}$ e no segundo caso temos $ind N = ind \bar{N} - 1$.*

Na notação da proposição acima e para $ind \bar{N} = 1$, quando $\langle \nabla f, \nabla f \rangle|_N < 0$ dizemos que N é subvariedade *espacial* de \bar{N} (já que $ind N = 0$) e, quando $\langle \nabla f, \nabla f \rangle|_N > 0$, dizemos que N é subvariedade *temporal* (já que $ind N = 1$). Finalmente, quando $\langle \nabla f, \nabla f \rangle|_N = 0$, N é dita subvariedade *luminosa* e não é uma subvariedade semi-Riemanniana de \bar{N} !

1.9 Campos de Killing

Nossos próximos objetos de interesse estão associados a *simetrias* da geometria, intimamente relacionados a isometrias.

²⁴ A primeira igualdade é corriqueira na teoria de variedades diferenciáveis. Para a segunda, dado um $v \in T_p \bar{N}$, $v \in Ker(df_p) \iff df_p(v) = 0$. Como, pela definição 1.12, $df_p(v) = \langle (\nabla f)(p), v \rangle$, a igualdade segue.

²⁵ Lema A.5.

Definição 1.63. Dada uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing se $\mathcal{L}_X g = 0$, onde \mathcal{L}_X denota a derivada de Lie²⁶ de tensores.

Escrevemos $Kill(M, g) := \{X \in \mathfrak{X}(M) : X \text{ é de Killing}\}$ e é imediato verificar que esse conjunto é um subespaço vetorial²⁷ de $\mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.64. Dado $X \in \mathfrak{X}(M, g)$, são equivalentes:

1. X é de Killing;
2. $\langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle = 0, \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$;
3. para qualquer carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ de M , valem as equações de Killing:

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} g_{ki} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.65)$$

onde um somatório em k é omitido (notação de Einstein) e $X|_{\mathcal{U}} = X^i \partial_i$.

Demonstração. A equivalência entre os itens 1 e 2 é provada na proposição 9.25 de O'Neill (1983), página 251. A equivalência entre os itens 1 e 3 é imediata da expansão de $\mathcal{L}_X g$ em suas componentes na carta (\mathcal{U}, φ) , dadas por $\mathcal{L}_X g(\partial_i, \partial_j)$, que são justamente o lado esquerdo da equação 1.65. \square

É de se notar que, embora o espaço vetorial $\mathfrak{X}(M)$ tenha dimensão infinita, o espaço vetorial dos campos de Killing $Kill(M, g)$ tem dimensão finita quando M é conexa, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.66. Seja (M, g) variedade semi-Riemanniana conexa de dimensão $n \geq 1$. Então, o espaço vetorial $Kill(M, g)$ tem dimensão de, no máximo, $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 253 de O'Neill (1983). \square

Exemplo 1.67. (Campos de Killing em \mathbb{R}_0^n)

Considere em \mathbb{R}^n as coordenadas cartesianas u^1, \dots, u^n e os campos coordenados $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$. Para vermos que ∂_i é de Killing, basta notar que

$$\langle \nabla_V \partial_i, W \rangle + \langle \nabla_W \partial_i, V \rangle = 0,$$

²⁶ \mathcal{L}_X é a única derivação de tensores que satisfaz $\mathcal{L}_X(f) = Xf$ e $\mathcal{L}_X(V) = [X, V]$, para $f \in C^\infty(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(M)$.

²⁷ Podemos dizer até mais: $Kill(M, g)$ é uma sub-álgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$, mas omitimos a prova por não ser necessária para o trabalho. O leitor interessado pode consultar O'Neill (1983) na página 252.

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. De fato, como a equação acima é tensorial em V e em W , basta mostrarmos para quando $V = \partial_j$ e $W = \partial_k$, o que é imediato do lema 1.16. Agora, para $1 \leq i < j \leq n$, considere o campo vetorial

$$X_{ij} := u^j \partial_i - u^i \partial_j.$$

Para ver que os campos X_{ij} são de Killing, pelos lemas 1.15 e 1.16 temos

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\partial_k} (u^j \partial_i - u^i \partial_j), \partial_l \rangle + \langle \nabla_{\partial_l} (u^j \partial_i - u^i \partial_j), \partial_k \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial u^j}{\partial u^k} \partial_i - \frac{\partial u^i}{\partial u^k} \partial_j, \partial_l \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u^j}{\partial u^l} \partial_i - \frac{\partial u^i}{\partial u^l} \partial_j, \partial_k \right\rangle \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial u^k} \delta_{il} - \frac{\partial u^i}{\partial u^k} \delta_{jl} + \frac{\partial u^j}{\partial u^l} \delta_{ik} - \frac{\partial u^i}{\partial u^l} \delta_{jk} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para quaisquer $k, l \in \{1, \dots, n\}$ (uma análise em casos pode ser útil). Daí, segue que

$$\langle \nabla_V (u^j \partial_i - u^i \partial_j), W \rangle + \langle \nabla_W (u^j \partial_i - u^i \partial_j), V \rangle = 0,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, o que mostra que $X_{ij} \in \text{Kill}(\mathbb{R}_0^n)$. Além disso, é imediato verificar que os campos $\partial_1, \dots, \partial_n$ e X_{ij} , para $1 \leq i < j \leq n$, são linearmente independentes em $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, o que mostra que $\dim \text{Kill}(\mathbb{R}_0^n) \geq \frac{n(n+1)}{2}$. No entanto, como \mathbb{R}^n é conexo, pela proposição 1.66 segue que $\dim \text{Kill}(\mathbb{R}_0^n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e que os campos $\partial_1, \dots, \partial_n$ e X_{ij} formam uma base para $\text{Kill}(\mathbb{R}_0^n)$.

Quando $\dim \text{Kill}(M, g) = \frac{n(n+1)}{2}$, dizemos que M é *maximalmente simétrica*. Sendo assim, o exemplo 1.67 mostra que \mathbb{R}_0^n é maximalmente simétrico. Nas seções 3.1 e 3.2 veremos exemplos de variedades M que satisfazem $\dim \text{Kill}(M, g) < \frac{n(n+1)}{2}$.

Enunciamos agora diversos outros resultados sobre campos de Killing que serão particularmente úteis para este trabalho.

Lema 1.68. *Seja $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma isometria. Então, um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é de Killing (em M) se, e somente se, $\phi_* X$ é campo de Killing (em N).*

Demonstração. Suponha que X seja campo de Killing. Então, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, como toda isometria também é transformação afim, temos:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\phi_* V}^N \phi_* X, \phi_* W \rangle_N + \langle \nabla_{\phi_* W}^N \phi_* X, \phi_* V \rangle_N \\ &= \langle \phi_* \nabla_V^M X, \phi_* W \rangle_N + \langle \phi_* \nabla_W^M X, \phi_* V \rangle_N \\ &= \langle \nabla_V^M X, W \rangle_M + \langle \nabla_W^M X, V \rangle_M = 0. \end{aligned}$$

Daí, como $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ é isomorfismo linear e pelo lema 1.64, segue que $\phi_* X$ é de Killing.

Suponha agora que $\phi_* X$ seja de Killing. Então, como ϕ^{-1} também é isometria, do que provamos acima segue que $X = (\phi^{-1})_*(\phi_* X)$ é de Killing, o que encerra a prova. \square

Proposição 1.69. *Se $X \in \text{Kill}(M, g)$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é geodésica, então a função $\langle X_{\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle$ é constante em I .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em O'Neill (1983) na página 252. \square

Proposição 1.70. *Sejam (M, g) variedade semi-Riemanniana conexa e $X \in \text{Kill}(M, g)$. Se existir $p \in M$ tal que $X_p = 0$ e $(\nabla X)_p = 0$, então $X = 0$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em O'Neill (1983) na página 252. \square

Corolário 1.71. *Se $X, Y \in \text{Kill}(M, g)$, com (M, g) conexa, e existe $\mathcal{U} \subseteq M$ aberto com $X|_{\mathcal{U}} = Y|_{\mathcal{U}}$, então $X = Y$.*

Demonstração. O resultado segue da proposição 1.70 se provarmos que $\nabla X = \nabla Y$ em \mathcal{U} . De fato, dados $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(\nabla X)(\theta, V) = (\nabla_V X)(\theta) = \theta(\nabla_V X)$$

e $(\nabla Y)(\theta, V) = \theta(\nabla_V Y)$. Como $X|_{\mathcal{U}} = Y|_{\mathcal{U}}$, segue $(\nabla_V X)|_{\mathcal{U}} = (\nabla_V Y)|_{\mathcal{U}} \implies (\theta(\nabla_V X))|_{\mathcal{U}} = (\theta(\nabla_V Y))|_{\mathcal{U}}$, ou seja, $(\nabla X)(\theta, V)|_{\mathcal{U}} = (\nabla Y)(\theta, V)|_{\mathcal{U}}$. Como θ e V são arbitrários, segue que $(\nabla X)|_{\mathcal{U}} = (\nabla Y)|_{\mathcal{U}}$. \square

Lema 1.72. *Sejam $(N, i^*\bar{h})$ subvariedade semi-Riemanniana de (\bar{N}, \bar{h}) e $Z \in \mathfrak{X}(\bar{N})$ de Killing.*

1. *Se $Z \circ i \in \mathfrak{X}(i)$ é tangente e escrevemos $Z \circ i = di(X)$, com $X \in \mathfrak{X}(N)$, então X é de Killing em $(N, i^*\bar{h})$;*
2. *Se N é totalmente geodésica, então, escrevendo $(Z \circ i)^\parallel = di(X)$, temos que $X \in \mathfrak{X}(N)$ é de Killing em $(N, i^*\bar{h})$.*

Demonstração. Suponha que $Z \circ i \in \mathfrak{X}^\parallel(i)$ e escreva $Z \circ i = di(X)$. Dados $V, W \in \mathfrak{X}(N)$, vamos mostrar que

$$\langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle = 0$$

em N , o que implica que X é de Killing. Temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle &= \langle di(\nabla_V X), di(W) \rangle + \langle di(\nabla_W X), di(V) \rangle \\ &= \langle D_V di(X), di(W) \rangle + \langle D_W di(X), di(V) \rangle \\ &= \langle D_V(Z \circ i), di(W) \rangle + \langle D_W(Z \circ i), di(V) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{di(V)} Z, di(W) \rangle + \langle \bar{\nabla}_{di(W)} Z, di(V) \rangle \end{aligned}$$

$$= 0,$$

onde a última igualdade decorre de Z ser de Killing. Isso prova o item 1. Para o item 2, sejam novamente $V, W \in \mathfrak{X}(N)$. Daí, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle &= \langle D_V di(X), di(W) \rangle + \langle D_W di(X), di(V) \rangle \\ &= V \langle di(X), di(W) \rangle - \langle di(X), D_V di(W) \rangle + \\ &+ W \langle di(X), di(V) \rangle - \langle di(X), D_W di(V) \rangle \\ &= V \langle Z \circ i, di(W) \rangle + W \langle Z \circ i, di(V) \rangle - \\ &- \langle di(X), D_V di(W) + D_W di(V) \rangle \\ &= \langle D_V(Z \circ i), di(W) \rangle + \langle Z \circ i, D_V di(W) \rangle + \\ &+ \langle D_W(Z \circ i), di(V) \rangle + \langle Z \circ i, D_W di(V) \rangle - \\ &- \langle di(X), D_V di(W) + D_W di(V) \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{di(V)} Z, di(W) \rangle + \langle \bar{\nabla}_{di(W)} Z, di(V) \rangle + \\ &+ \langle Z \circ i - di(X), D_V di(W) + D_W di(V) \rangle \\ &= 0 + \langle (Z \circ i)^\perp, D_V di(W) + D_W di(V) \rangle, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de Z ser campo de Killing. Agora, como N é totalmente geodésica, $D_V di(W)$ e $D_W di(V)$ são campos paralelos sobre i . Já que $(Z \circ i)^\perp$ é normal, concluímos das contas acima que

$$\langle \nabla_V X, W \rangle + \langle \nabla_W X, V \rangle = 0$$

e, portanto, X é de Killing, como queríamos. \square

Terminamos esta seção com o seguinte importante fato sobre os campos de Killing em uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , tornando preciso o que quisemos dizer sobre campos de Killing estarem relacionados a simetrias da métrica. Mais detalhes e provas estão no capítulo 9 de O'Neill (1983). Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing *completo*, isto é suponha que cada uma de suas curvas integrais maximais está definida em todo \mathbb{R} . Nesse caso, seu fluxo $\phi : (t, p) \in \mathbb{R} \times M \mapsto \phi_t(p) \in M$ está globalmente definido e satisfaz

$$\phi_{t+s}(p) = \phi_t(\phi_s(p)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall p \in M.$$

Além disso, cada ϕ_t é uma isometria de (M, g) . Dizemos que $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ define um *subgrupo a um parâmetro de isometrias*, e que X é um *gerador infinitesimal* de tal subgrupo. Na linguagem de ação de grupos de Lie, ϕ é uma *ação isométrica do grupo abeliano* $(\mathbb{R}, +)$ em (M, g) ²⁸.

²⁸ Há uma descrição similar, mas ligeiramente mais complicada, se X não é completo, mas não nos interessará aqui.

1.10 A geometria da esfera

Nesta seção, vamos obter resultados geométricos sobre a esfera \mathbb{S}^2 a fim de que possamos utilizá-los no capítulo 3. Primeiramente, definimos o conjunto:

$$\mathbb{S}^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}.$$

Definindo a função $\Xi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Xi(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2$, temos Ξ submersão, donde $\mathbb{S}^n = \Xi^{-1}(1)$ é subvariedade mergulhada de \mathbb{R}^{n+1} . Para o restante da seção, denotamos por $i_n : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão de \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} e, em especial, $i := i_2 : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Da discussão anterior, temos que i_n é mergulho. Denotamos também por δ_{n+1} a métrica euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} , ou seja, $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{n+1}) = \mathbb{R}_0^{n+1}$ (exemplo 1.4). Em especial, escrevemos $\delta := \delta_3$ para métrica de \mathbb{R}_0^3 .

Como \mathbb{R}_0^{n+1} é Riemanniano, o tensor $\omega_n := i_n^* \delta_{n+1}$ em \mathbb{S}^n é tensor métrico Riemanniano, donde (\mathbb{S}^n, ω_n) é variedade Riemanniana de dimensão n e é subvariedade Riemanniana de $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{n+1})$ chamada de *(n)-esfera redonda*. Estamos interessados especificamente na conexão, geodésicas, curvatura, curvatura seccional e campos de Killing de (\mathbb{S}^2, ω_2) , ainda que as proposições 1.73, 1.74 e 1.75 a seguir possuam generalizações imediatas para (\mathbb{S}^n, ω_n) , como é feito em O'Neill (1983).

Primeiramente, considere as coordenadas geográficas em \mathbb{S}^2 dadas por

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Escrevendo as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 como x, y, z , os campos coordenados da carta φ^{-1} são dados por

$$\begin{aligned} \partial_\theta &= \cos \theta \cos \phi \cdot \partial_x + \cos \theta \sin \phi \cdot \partial_y - \sin \theta \cdot \partial_z \\ \partial_\phi &= -\sin \theta \sin \phi \cdot \partial_x + \sin \theta \cos \phi \cdot \partial_y, \end{aligned}$$

donde

$$(\omega_2)_{11} = \omega_2(\partial_\theta, \partial_\theta) = 1, \quad (\omega_2)_{12} = \omega_2(\partial_\theta, \partial_\phi) = 0, \quad (\omega_2)_{22} = \omega_2(\partial_\phi, \partial_\phi) = \sin^2 \theta.$$

Escrevendo ds^2 como o elemento de linha de ω_2 , temos $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2$. Segue então que $(\omega_2)^{11} = 1, (\omega_2)^{12} = (\omega_2)^{21} = 0$ e $(\omega_2)^{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$. Pelo item 2 do lema 1.15, seguem os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta.$$

Vamos denotar por ∇ a conexão de Levi-Civita de (\mathbb{S}^2, ω_2) , de forma que temos

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = 0, \quad \nabla_{\partial_\theta} \partial_\phi = \nabla_{\partial_\phi} \partial_\theta = \cot \theta \cdot \partial_\phi, \quad \nabla_{\partial_\phi} \partial_\phi = -\sin \theta \cos \theta \cdot \partial_\theta + \cot \theta \cdot \partial_\phi.$$

Para as geodésicas de (\mathbb{S}^2, ω_2) , note que toda curva constante é geodésica (como ocorre em qualquer variedade semi-Riemanniana). Para as geodésicas $\gamma(t)$ não-constantes, temos²⁹ $\gamma'(t) \neq 0, \forall t$, e:

Proposição 1.73. *As geodésicas de (\mathbb{S}^2, ω_2) não-constantes são precisamente as parametrizações de velocidade constante dos círculos máximos³⁰ de \mathbb{S}^2 . Além disso, (\mathbb{S}^2, ω_2) é geodesicamente completa e suas geodésicas são periódicas.*

Demonstração. Pode ser encontrada na página 103 de O'Neill (1983), corolário 4.11. \square

Explicitamente, para um subespaço Π de \mathbb{R}^3 de dimensão 2, tome $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de Π . “A” geodésica correspondente³¹ via proposição 1.73 é a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2.$$

A prova de que γ é geodésica em \mathbb{S}^2 e que é parametrização de $\Pi \cap \mathbb{S}^2$ pode ser encontrada na referência da proposição 1.73. Claramente, as geodésicas de \mathbb{S}^2 são completas e periódicas.

Proposição 1.74. \mathbb{S}^2 tem curvatura seccional $Sec_p = 1, \forall p \in \mathbb{S}^2$.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 113 de O'Neill (1983), proposição 4.29 item (1), já que, no nosso caso e na notação do autor, $\mathbb{S}_\nu^n(r) = \mathbb{S}^2$ pois $n = 2, \nu = 0$ e $r = 1$. \square

Da proposição 1.42, segue que o tensor de curvatura R de \mathbb{S}^2 é descrito por

$$R(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2).$$

Finalmente, vamos estudar os campos de Killing em \mathbb{S}^2 . Sabemos do exemplo 1.67 que os campos de Killing de (\mathbb{R}^3, δ) são:

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, x\partial_y - y\partial_x, x\partial_z - z\partial_x, y\partial_z - z\partial_y.$$

Afirmamos que os campos $x\partial_y - y\partial_x, x\partial_z - z\partial_x$ e $y\partial_z - z\partial_y$ são tangentes a \mathbb{S}^2 , ou seja, ficam bem definidas suas restrições para \mathbb{S}^2 , denotadas doravante por X_1, X_2 e X_3 , respectivamente, de forma que $X_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2), i \in \{1, 2, 3\}$.

Com efeito, façamos para o campo $x\partial_y - y\partial_x$ e a prova para os demais é totalmente análoga. Defina, em \mathbb{R}^3 , o campo posição dado por $\vec{P} := x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Assim, para $p \in \mathbb{S}^2$, temos que³² $T_p\mathbb{S}^2 = (\mathbb{R} \cdot \vec{P}_p)^\perp$. Como temos

$$\langle x\partial_y - y\partial_x, \vec{P} \rangle = xy - xy = 0,$$

²⁹ Se existe t_0 tal que $\gamma'(t_0) \neq 0$, ou seja, γ é não-constante, como γ é geodésica, γ' é paralelo em γ . Daí, pela definição do transporte paralelo e pelo item 1 da proposição 1.28, segue $\gamma'(t) \neq 0, \forall t$.

³⁰ Ou seja, subconjuntos da forma $\Pi \cap \mathbb{S}^2$, onde $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ é subespaço vetorial de dimensão 2.

³¹ As demais geodésicas não-constantes de \mathbb{S}^2 que têm imagem $\Pi \cap \mathbb{S}^2$ são reparametrizações afins de γ .

³² Essa igualdade é a menos de isomorfismo de espaços vetoriais, a saber a identificação de $T_p\mathbb{S}^2$ com $di_p(T_p\mathbb{S}^2) \subseteq T_p\mathbb{R}^3$ via di_p .

segue que para qualquer $p \in \mathbb{S}^2$, $(x\partial_y - y\partial_x)(p) \in (\mathbb{R} \cdot \vec{P}_p)^\perp = T_p\mathbb{S}^2$, o que prova a afirmação desejada. O item 1 do lema 1.72 nos garante então que X_1, X_2 e X_3 são campos de Killing em \mathbb{S}^2 . Além disso, como X_1, X_2 e X_3 são linearmente independentes, a proposição 1.66 nos garante que eles formam uma base para $Kill(\mathbb{S}^2, \omega_2)$. Isso prova a seguinte proposição:

Proposição 1.75. *As restrições dos campos vetoriais $x\partial_y - y\partial_x$, $x\partial_z - z\partial_x$ e $y\partial_z - z\partial_y$ para \mathbb{S}^2 formam uma base para o espaço vetorial $Kill(\mathbb{S}^2, \omega_2)$. Em particular, (\mathbb{S}^2, ω_2) é maximalmente simétrica.*

1.11 Orientação temporal em variedades Lorentzianas

Nesta seção, particularizamos o estudo para as variedades Lorentzianas, ou seja, $n = \dim M \geq 2$ e $\text{ind } M = 1$. Na seção A.3 definimos uma orientação temporal num espaço vetorial de Lorentz como sendo a escolha de um de seus cones causais, que passa a ser chamado de cone (causal) futuro (vide definição A.18). Se temos agora uma variedade Lorentziana (M, g) de dimensão $n \geq 2$, cada espaço tangente é um espaço vetorial de Lorentz, para o qual se aplica pois a definição A.18. Fazer uma escolha de cone causal em cada T_pM significa “orientar temporalmente” a variedade M . No entanto, não só queremos escolher um cone causal em cada espaço tangente, mas também queremos que essa escolha seja feita de forma “contínua”, em termos que se tornam precisos na próxima definição.

Definição 1.76. *Fixe (M, g) uma variedade Lorentziana de dimensão n . Uma orientação temporal em M é uma função τ em M que associa a cada $p \in M$ um cone causal τ_p de T_pM satisfazendo a seguinte condição: para cada $p \in M$, existem $\mathcal{U} \subseteq M$ aberto com $p \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ temporal tais $Y_q \in \tau_q, \forall q \in \mathcal{U}$. Quando M admite uma orientação temporal ela é dita temporalmente orientável e, quando fixamos uma orientação temporal em M , ela é dita temporalmente orientada.*

Em particular, note que se M (na notação da definição acima) possui um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ temporal, então M é temporalmente orientável. De fato, dado um $p \in M$, defina τ_p para ser o cone causal de Y_p . Dado então um $q \in M$, na notação da definição 1.76 tome $\mathcal{U} = M$ e então o campo Y satisfaz $Y_q \in \tau_q, \forall q \in M$. Por exemplo, considere a variedade de Lorentz \mathbb{R}_1^n , para $n \geq 2$ (veja exemplo 1.4). O campo $\partial_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^n)$ é temporal e, portanto, \mathbb{R}_1^n é temporalmente orientável.

Definição 1.77. *Um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana (M, g) conexa e temporalmente orientada.*

Um espaço-tempo pode ter qualquer dimensão (≥ 2). Contudo, por motivos físicos, os casos de maior interesse se dão em dimensão 4, como veremos no capítulo 3 do trabalho.

Definição 1.78. *Sejam (M, g) variedade Lorentziana e τ uma orientação temporal em M . Um campo causal $Y \in \mathfrak{X}(M)$ (respectivamente uma curva causal suave por partes $\alpha : I \rightarrow M$) é dito futuro-dirigido se $Y_p \in \tau_p, \forall p \in M$ (respectivamente, $\alpha'(t) \in \tau_{\alpha(t)}, \forall t \in I$).*

Proposição 1.79. *Uma variedade Lorentziana (M, g) é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ temporal. Em caso afirmativo, para qualquer escolha de orientação temporal em M existe um campo vetorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ temporal e futuro-dirigido.*

Demonstração. Se existe tal campo Y , segue que M é temporalmente orientável como no caso de \mathbb{R}_1^n . Reciprocamente, suponha que M seja temporalmente orientável e fixe τ uma orientação temporal. Da definição 1.76 segue que existe uma cobertura aberta $\mathcal{X} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tal que, para cada $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{X}$, existe $Y_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_\alpha)$ temporal com $Y_\alpha(q) \in \tau_q, \forall q \in \mathcal{U}_\alpha$. Considere $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição suave da unidade subordinada a $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (veja Lee (2002) página 54), ou seja, cada f_α é uma função suave em M e satisfaz:

1. $0 \leq f_\alpha \leq 1, \forall \alpha \in A$;
2. $\text{supp } f_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha, \forall \alpha \in A$;
3. a coleção dos suportes $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita;
4. $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$.

Considere os campos da forma $f_\alpha Y_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_\alpha)$. Podemos pensar que tais campos estão definidos em M e que, para $q \notin \mathcal{U}_\alpha$, $f_\alpha(q)Y_\alpha(q) = 0$. Essas extensões são suaves³³ pois $\text{supp } f_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ e é fechado, ou seja, mostramos que $f_\alpha Y_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$. Defina o campo $Y := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha Y_\alpha$. O fato de Y ficar bem definido e ser suave segue de $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ser localmente finita. Com efeito, dado um aberto $\mathcal{V} \subseteq M$, apenas uma quantidade finita de $\text{supp } f_\alpha$ intersecta \mathcal{V} . Logo, a soma $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha Y_\alpha$ é essencialmente finita em \mathcal{V} , o que mostra $Y|_{\mathcal{V}}$ bem definido e suave. Além disso, dado um $p \in \mathcal{V}$, $Y_p = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p)Y_\alpha(p)$ é uma combinação linear (finita) dos vetores temporais $Y_\alpha(p) \in T_p M$ por coeficientes $f_\alpha(p)$ não-negativos (item 1) e não todos nulos que somam 1 (item 4). Como $Y_\alpha(p) \in \tau_p, \forall \alpha \in A$, Y_p é temporal e $Y_p \in \tau_p$ (pois os cones temporais são convexos, veja seção A.3). Como o aberto \mathcal{V} é arbitrário, isso mostra que $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é temporal e $Y_p \in \tau_p, \forall p \in M$, ou seja, $Z := Y$ é futuro-dirigido, o que encerra a prova. \square

Quando uma variedade (M, g) de Lorentz é temporalmente orientável, surge a seguinte pergunta: quantas são as possíveis orientações temporais em M ? A resposta depende apenas da quantidade de componentes conexas de M , como mostra o seguinte lema:

³³ De fato, $(f_\alpha Y_\alpha)|_{\mathcal{U}_\alpha}$ é suave pois $f_\alpha \in C^\infty(M)$ e $Y_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_\alpha)$. Além disso, como $\text{supp } f_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ e é fechado, seu complementar é aberto e nele o campo $f_\alpha Y_\alpha$ é identicamente nulo, logo suave.

Lema 1.80. *Uma variedade de Lorentz (M, g) conexa e temporalmente orientável possui exatamente duas orientações temporais.*

Demonstração. Como M é temporalmente orientável, fixe uma orientação temporal τ em M . Para cada $p \in M$, defina $-\tau_p$ como sendo o cone causal oposto a τ_p . Para ver que $-\tau$ é uma orientação temporal, dado um $p \in M$, tome $\mathcal{U} \subseteq M$ aberto e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ temporal tal que $Y_q \in \tau_q, \forall q \in \mathcal{U}$. Daí, o campo $Z := -Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ satisfaz $Z_q \in -\tau_q, \forall q \in \mathcal{U}$, o que mostra que $-\tau$ é uma orientação temporal em M . Isso mostra que existem, pelo menos, duas orientações temporais em M .

Suponha agora que ν seja uma orientação temporal em M . Vamos mostrar que ou $\nu = \tau$ ou $\nu = -\tau$. Para tanto, fixe $p \in M$. Daí, como $T_p M$ possui exatamente dois cones causais, ou $\nu_p = \tau_p$ ou $\nu_p = -\tau_p$. Sem perda de generalidade, suponha $\nu_p = \tau_p$. Defina o conjunto $A := \{q \in M : \nu_q = \tau_q\}$. Note que $p \in A$ e, portanto, $A \neq \emptyset$. Vamos mostrar que A é aberto e fechado em M . Como M é conexa, seguirá que $A = M$ e, portanto, $\nu = \tau$.

Tome $q \in A, \mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq M$ abertos com $q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ e $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ temporais tais que $Y_{q'} \in \tau_{q'}, \forall q' \in \mathcal{U}$ e $Z_{q'} \in \nu_{q'}, \forall q' \in \mathcal{V}$. Considere a função suave $\langle Y, Z \rangle : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Como $q \in A$, seque que $\langle Y, Z \rangle(q) < 0$ (já que Y_q e Z_q estão no mesmo cone causal, a saber $\tau_q = \nu_q$. Veja proposição A.16). Como $\langle Y, Z \rangle$ é contínua, existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ aberto, com $q \in \mathcal{W}$, tal que $\langle Y, Z \rangle|_{\mathcal{W}} < 0$. Isso significa que, para todo $q' \in \mathcal{W}$, $Y_{q'}$ e $Z_{q'}$ estão no mesmo cone causal, ou seja, $\tau_{q'} = \nu_{q'}$, o que mostra $q \in \mathcal{W} \subseteq A \implies A$ é aberto.

Para mostrar que A é fechado, basta mostrar que $M \setminus A$ é aberto. Isso é feito de forma totalmente análoga à demonstração de que A é aberto. Isso encerra a prova. \square

Lema 1.81. *Sejam (M, g) variedade de Lorentz conexa e τ uma orientação temporal em M . Suponha que existem $Y \in \mathfrak{X}(M)$ [curva $\alpha : I \rightarrow M$] causal e $p \in M$ [resp. $t_0 \in I$] tal que Y_p [resp. $\alpha'(t_0)$] é futuro-dirigido. Então, Y [resp. α] é futuro-dirigido.*

Demonstração. Pela proposição 1.79, a mera existência de τ implica que podemos fixar $Z \in \mathfrak{X}(M)$ temporal e futuro-dirigido. Considere a função suave $\langle Y, Z \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$. Essa função nunca pode zerar, pois nenhum vetor causal pode ser ortogonal a um temporal (veja seção A.2). Como M é conexa, segue então que $\langle Y, Z \rangle > 0$ ou $\langle Y, Z \rangle < 0$. Mas, por hipótese de Y_p ser futuro-dirigido, segue que $\langle Y, Z \rangle_p < 0$. Logo, $\langle Y, Z \rangle$ é sempre negativa, o que mostra que Y_p e Z_p estão sempre no mesmo cone causal, ou seja, Y é futuro-dirigido. A prova para curvas causais é inteiramente análoga. \square

1.12 Observadores, partículas e regiões estacionárias

Fixamos, nesta seção, um espaço-tempo (M, g) (definição 1.77) de dimensão $n \geq 2$ e seja τ sua orientação temporal. A característica fundamental da Relatividade Geral é que esta

descreve o campo gravitacional por meio da geometria de um tal espaço-tempo (M, g) , como exemplificaremos em maiores detalhes no capítulo 3. A orientação temporal, nesse contexto, é uma maneira matematicamente precisa de distinguir localmente o passado e o futuro, algo que os físicos chamam de *seta do tempo*.

Nesta seção, descrevemos o modelo matemático para os *observadores* e *partículas materiais* da física. Essa descrição será importante para extrair significado físico da geometria de Schwarzschild no capítulo 3. Uma justificativa plena de porquê tais definições “realmente” fornecem representações adequadas desses conceitos requereria uma longa discussão sobre os aspectos físicos gerais da Relatividade que estão fora de nosso escopo. Nos contentaremos aqui, portanto, em apenas descrever o modelo e fazer alguns breves comentários sobre seu significado físico, sem tentar justificá-lo em detalhes.

Definição 1.82. *Um observador instantâneo em $p \in M$ é um vetor temporal $v \in T_pM$, unitário e futuro-dirigido.*

Um observador é uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ temporal, futuro-dirigida e com velocidade unitária, ou seja, $\gamma'(t)$ é observador instantâneo em $\gamma(t)$, para qualquer $t \in I$. γ está em queda livre se γ é geodésica. Do contrário, γ é dito ser acelerado.

A ideia física por trás dessa definição é simples: a curva correspondente a um observador descreve seu “movimento” através do espaço-tempo. O uso de vetores temporais é a versão matematicamente precisa do fato de que “nenhum observador pode viajar a velocidades iguais ou maiores que a da luz”. A razão da norma unitária é a seguinte. Sejam $p, q \in M$ e suponha que existe um observador $\gamma : I \rightarrow M$ para o qual $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, com $a < b$ em I . Nesse caso, o *comprimento de arco Lorentziano* da curva $\gamma|_{[a,b]}$ é

$$L(\gamma|_{[a,b]}) := \int_a^b \sqrt{|g(\gamma'(t), \gamma'(t))|} dt = b - a$$

e mede o *tempo próprio do observador γ entre os eventos p e q* . Fisicamente, a Relatividade postula que esse é o tempo efetivamente medido por um relógio ideal carregado pelo observador. Note que esse tempo medido entre p e q depende do observador tanto quanto de p e q , e é nesse sentido que o “tempo é relativo” na Relatividade³⁴. Um observador é *definido* de modo que diferenças de parâmetro ao longo da curva correspondente meçam o tempo próprio entre os respectivos eventos.

Definição 1.83. *Seja $m > 0$ um número real. Uma partícula (material) de massa m é uma curva temporal futuro-dirigida $\alpha : I \rightarrow M$ tal que*

$$g(\alpha', \alpha') = -m^2.$$

³⁴ Esta é também a origem do famoso “paradoxo” dos gêmeos: imagine dois gêmeos, definindo curvas (observadores) diferentes, que separam-se em p , e que se reencontram em q . Dependendo de suas respectivas trajetórias, eles já não terão a mesma idade! Isto é claro, não representa um paradoxo em sentido lógico algum, apenas desafia nossa intuição sobre a natureza do tempo. No entanto, trata-se um fato com ampla verificação experimental!

A reparametrização α_r de α dada por

$$\alpha_r(t) := \alpha(t/m), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ com } t/m \in I$$

é, portanto, um observador associado dito em comovimento, solidário ou em repouso com respeito à partícula α . O momento linear de tal partícula é definido como $P_\alpha := m \cdot \alpha'_r \in \mathfrak{X}(\alpha_r)$.

Um fóton ou raio de luz³⁵ é uma geodésica tipo-luz futuro-dirigida $\beta : I \rightarrow M$.

Uma quantidade de grande importância em qualquer sistema físico é sua *energia*. Para partículas relativísticas, a versão de interesse é a seguinte. Seja $\beta : I \rightarrow M$ um fóton ou uma partícula de massa $m > 0$, e $\gamma : J \rightarrow M$ um observador. Suponha que para algum $p \in M$ tenhamos $s_0 \in I$ e $t_0 \in J$ para os quais $\gamma(t_0) = \beta(s_0) = p$, isto é, que fisicamente a partícula (fóton) β “encontre” o observador γ em p . Definimos a *energia de β com respeito a γ em p* como

$$E_p^{\beta, \gamma} := -\langle \beta'(s_0), \gamma'(t_0) \rangle. \quad (1.84)$$

Note que uma vez que γ e β são ambas futuro-dirigidas, essa energia é sempre um número real positivo (proposição A.16). Em particular, se β é uma partícula de massa m , $\gamma = \beta_r$ é seu observador em comovimento e $s_0 = t_0/m$, então a equação 1.84 nos dá

$$E_p^{\beta, \gamma} = m.$$

Esta, de fato, pode ser interpretada como a mais famosa equação da física: $E = mc^2$ (em unidades para as quais a velocidade da luz no vácuo é $c = 1$). Significa que a massa de uma partícula e sua energia medida em repouso são uma e a mesma coisa.

Finalmente, introduzimos também um modelo ideal para descrever uma *família* apropriada de observadores (por exemplo, observadores em repouso em pontos de um laboratório).

Para um aberto $\mathcal{U} \subseteq M$, um campo $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ é um *campo de observadores* se, para qualquer $p \in \mathcal{U}$, U_p é observador instantâneo (em p). Equivalentemente, U é campo de observadores quando suas curvas integrais são observadores.

Um campo de observadores $U \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ é *geodésico* se suas curvas integrais são observadores em queda livre, ou seja, são geodésicas. Equivalentemente, U é geodésico quando³⁶ $\nabla_U U = 0$.

³⁵ Mais geralmente, essa mesma descrição serve para qualquer partícula “de massa de repouso zero” na física. Antigamente se acreditava que os *neutrinos* eram partículas desse tipo, mas agora verificou-se que estes têm uma pequena massa.

³⁶ Se $\nabla_U U = 0$, suas curvas integrais certamente são geodésicas (item 3 da proposição 1.23). Reciprocamente, vamos mostrar que $\nabla_{U_p} U = 0, \forall p \in \mathcal{U}$ se as curvas integrais de U são geodésicas. Para tanto, fixado $p \in \mathcal{U}$ seja $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$ curva integral de U com $\alpha(0) = p$. Daí, $\nabla_{U_p} U = \nabla_{\alpha'(0)} U = \frac{D(U \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{D\alpha'}{dt}(0) = \alpha''(0) = 0$.

Um aberto $\mathcal{U} \subseteq M$ é *região estacionária* de M se existe um campo de Killing, temporal, futuro-dirigido e completo³⁷ $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Nesse caso, o campo de observadores $U_X := \frac{X}{\|X\|} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ é o *campo de observadores estacionários associado a X* .

Para entender fisicamente o significado desta última definição, considere uma tal região estacionária $\mathcal{U} \subseteq M$ com campo de Killing associado X . Fixe $p \in \mathcal{U}$ e considere a curva integral maximal $\beta_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ de X começando em p . Defina a função $h_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_p(s) := \int_0^s |X \circ \beta_p(\lambda)| d\lambda, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.85)$$

Ora, $h'_p = |X \circ \beta_p| > 0$, portanto h_p é um difeomorfismo crescente sobre sua imagem $I_p \subset \mathbb{R}$, e $h_p(0) = 0$. Defina então $\gamma_p := \beta_p \circ h_p^{-1} : I_p \rightarrow \mathcal{U}$. Então, $\gamma_p(0) = p$, e um cálculo simples mostra que

$$\gamma'_p(t) = U_X(\gamma_p(t)), \quad \forall t \in I_p.$$

Em outras palavras, γ_p é precisamente a curva integral maximal³⁸ de U_X começando em p . Em particular, γ_p é um observador estacionário. Os observadores estacionários, portanto, têm trajetórias coincidindo com as curvas integrais de X .

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \langle X \circ \beta_p, X \circ \beta_p \rangle'(s) &= 2 \langle (X \circ \beta_p)'(s), (X \circ \beta_p)(s) \rangle \\ &= 2 \langle (\nabla_{(\beta_p)'(s)} X)(\beta_p(s)), (X \circ \beta_p)(s) \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_X X, X \rangle(\beta_p(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos o lema 1.64, item 2, para obter a última igualdade. Concluimos que

$$|X \circ \beta_p(s)| = |X(p)| = \text{constante} > 0.$$

Portanto, substituindo em (1.85), vem

$$h_p(s) = |X(p)| s, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.86)$$

Em particular, $I_p = h_p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, onde segue que U_X é temporal, unitário, futuro-dirigido e completo.

Agora, uma vez que $X(p) \neq 0$, podemos escolher (lema 1.57 de O'Neill (1983)) uma carta local $(\mathcal{V}, (x^1, \dots, x^n))$ com $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $x^i(p) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) e

$$X = \partial/\partial x^1. \quad (1.87)$$

A equação 1.87 tem duas consequências. A primeira é que as equações de Killing 1.65 com respeito a esse sistema de coordenadas implicam que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.88)$$

³⁷ Ou seja, suas curvas integrais maximais estão definidas em toda a reta real.

³⁸ O fato de ser maximal virá a seguir.

A segunda é que como β_p é curva integral de X teremos

$$(x^1 \circ \beta_p)(s) = s \quad \text{e} \quad (x^i \circ \beta_p)(s) = 0 \quad \text{para } i > 1. \quad (1.89)$$

Usando a definição de γ_p e as equações 1.86 e 1.89, temos finalmente

$$(x^1 \circ \gamma_p)(t) = \frac{t}{|X(p)|} \quad \text{e} \quad (x^i \circ \gamma_p)(t) = 0, \quad \text{para } i > 1. \quad (1.90)$$

Uma vez que um observador é parametrizado por seu tempo próprio, a equação 1.90 mostra que a coordenada x^1 mede, ao longo de γ_p , o tempo próprio re-escalado por $|X(p)|$. Entretanto, esse re-escalamento depende de qual observador estacionário estamos considerando³⁹. Utilizando as equações 1.88 e 1.90, podemos finalmente concluir que

$$(g_{ij} \circ \gamma_p)' = 0 \implies g_{ij} \circ \gamma_p = \text{constante},$$

o que se interpreta fisicamente dizendo-se *em uma região estacionária, os observadores estacionários não medem variações temporais no campo gravitacional*.

O último efeito associado a uma região estacionária que discutiremos é um efeito relativístico notável: o *desvio gravitacional* da frequência da luz. Ainda com a notação acima, considere agora dois observadores estacionários distintos γ_p e γ_q e vamos imaginar que um fóton é emitido de um ponto e sobre a imagem de γ_p e captado sobre um ponto r da imagem de γ_q . Se representamos o fóton por uma geodésica luminosa futuro-dirigida $\alpha : I \rightarrow M$, podemos então escrever $\alpha(u_e) = e$ e $\alpha(u_r) = r$. Usando a equação 1.84 concluimos, após um cálculo simples, que as energias do fóton α medidas por γ_p e γ_q em e e r são, respectivamente

$$E_e^{\alpha, \gamma_p} = -\frac{\langle \alpha'(u_e), X(e) \rangle}{|X(e)|} \quad \text{e} \quad E_r^{\alpha, \gamma_q} = -\frac{\langle \alpha'(u_r), X(r) \rangle}{|X(r)|}.$$

Mas pela proposição 1.69, como X é de Killing e α é geodésica,

$$\langle \alpha'(u_e), X(e) \rangle = \langle \alpha'(u_r), X(r) \rangle.$$

Como energias são sempre positivas, podemos então concluir que

$$\frac{E_e^{\alpha, \gamma_p}}{E_r^{\alpha, \gamma_q}} = \frac{|X(r)|}{|X(e)|}. \quad (1.91)$$

De acordo com a mecânica quântica, a energia E do fóton é proporcional à sua frequência (angular) ω pela *fórmula da Planck*

$$E = \hbar \cdot \omega,$$

³⁹ Às vezes os livros de física se referem a x^1 como uma “coordenada temporal”, ainda que em geral esta não corresponda por si só a um intervalo de tempo *comum* aos membros de nenhuma família de observadores.

onde \hbar é uma constante positiva fundamental, a *constante de Planck*. Definimos o *desvio para o vermelho* (*redshift*) do fóton entre os eventos e e r por

$$z_{e,r} := 1 - \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (1.92)$$

Este nome é apropriado, pelo seguinte. Se as frequências do fóton ao ser emitido e ao ser recebido são iguais, o desvio para o vermelho é zero. Se a frequência emitida é maior que a recebida, a luz (se visível) parece “mais vermelha”, que é menos energética, e $z_{e,r} > 0$. Finalmente, se a frequência recebida é maior que a emitida, o desvio para o vermelho é negativo e a luz visível parecerá mais “azulada”, que é mais energética. Por isso também se diz que nesse caso houve *desvio para o azul*.

A equação 1.91 juntamente com a fórmula de Planck nos dará

$$z_{e,r} = 1 - \frac{|X(e)|}{|X(r)|}. \quad (1.93)$$

Esta equação extraordinária será utilizada no capítulo 3.

2 Geometria de produtos torcidos

Neste capítulo, desenvolveremos em detalhes a teoria dos *produtos torcidos*, que nada mais são do que a “colagem” de duas variedades semi-Riemannianas para formar uma nova. Essa colagem é feita via o produto cartesiano das duas variedades originais. Nos resta a pergunta de qual será a métrica particularmente interessante neste produto cartesiano.

O interesse em estudarmos esse tipo especial de variedade é que os espaços-tempos de Schwarzschild e de Schwarzschild-Kruskal, que construiremos ao longo do capítulo 3, serão ambos definidos como produtos torcidos. As características dos objetos geométricos naturais em tais modelos, como conexão, curvatura e o tensor de Ricci serão consequências imediatas da teoria que aqui desenvolveremos, ainda que por si só sejam resultados de interesse, com ampla aplicabilidade em diversos contextos.

A menos de menção contrária, nesse capítulo (B, g_B) e (F, g_F) representarão variedades semi-Riemannianas de dimensões (finitas) m e n respectivamente e suas métricas serão eventualmente denotadas também por $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Além disso, denotaremos por π e σ as projeções canônicas de $B \times F$ em B e F , respectivamente.

Lema 2.1. *Seja $(p, q) \in B \times F$ e considere as aplicações lineares $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(B \times F) \longrightarrow T_p B$ e $d\sigma_{(p,q)} : T_{(p,q)}(B \times F) \longrightarrow T_q F$. Então, a função $\Phi : T_{(p,q)}(B \times F) \longrightarrow T_p B \times T_q F$ dada por*

$$\Phi(v) := (d\pi_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(v))$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. É óbvio que Φ é linear. Basta então mostrar que Φ transforma uma base de $T_{(p,q)}(B \times F)$ em uma base de $T_p B \times T_q F$. Considere cartas $p \in (\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \subseteq B$, $q \in (\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \subseteq F$ e a respectiva carta para $B \times F$: $(p, q) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{V}, (z^1, \dots, z^{m+n}))$. Fixe, por hora, $i \in \{1, \dots, m\}$. Daí, temos

$$d\pi_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (\varphi \circ \pi \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))^j}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Mas a função $\varphi \circ \pi \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}) : \varphi(\mathcal{U}) \times \psi(\mathcal{V}) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U})$ mapeia (x, y) em x e, portanto,

$$\frac{\partial (\varphi \circ \pi \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))^j}{\partial u_i} = \delta_{ij} \implies d\pi_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (\dagger)$$

Além disso, para σ vale

$$d\sigma_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\psi \circ \sigma \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))^j}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q.$$

Dessa vez, a função $\psi \circ \sigma \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}) : \varphi(\mathcal{U}) \times \psi(\mathcal{V}) \longrightarrow \psi(\mathcal{V})$ mapeia (x, y) em y e, como $i \in \{1, \dots, m\}$, segue

$$\frac{\partial (\psi \circ \sigma \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))^j}{\partial u_i} = 0, \forall j \implies d\sigma_{(p,q)} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \mathbb{O}_{T_q F}. \quad (\dagger\dagger)$$

Das equações (\dagger) e $(\dagger\dagger)$ segue que

$$\Phi \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \mathbb{O}_{T_q F} \right). \quad (2.2)$$

Analogamente, para $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$ temos

$$\Phi \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right) = \left(\mathbb{O}_{T_p B}, \frac{\partial}{\partial y^{i-m}} \Big|_q \right). \quad (2.3)$$

Mostramos, pois, que Φ transforma a base $\left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p,q)} \right)_{i=1}^{m+n}$ na base formada pelos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \mathbb{O}_{T_q F} \right)_{i=1}^m$ e $\left(\mathbb{O}_{T_p B}, \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q \right)_{j=1}^n$, e logo é isomorfismo, como afirmado. \square

Lema 2.4. *Dadas variedades semi-Riemannianas (B, g_B) e (F, g_F) e uma função $f \in C^\infty(B)$ positiva, temos que*

$$g := \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \cdot \sigma^*(g_F)$$

é métrica em $B \times F$ cujo índice é a soma dos índices de B e F . Explicitamente, dados $(p, q) \in B \times F$ e $v, w \in T_{(p,q)}(B \times F)$, temos

$$g_{(p,q)}(v, w) = (g_B)_p (d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(w)) + f(p)^2 \cdot (g_F)_q (d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(w)).$$

Demonstração. Segue imediatamente da definição que g é um $(0, 2)$ -tensor simétrico. Para mostrar que é não-degenerado e tem índice constante em $B \times F$, fixe $(p, q) \in B \times F$ e sejam $(e_1, \dots, e_m) \subseteq T_p B$ e $(e_{m+1}, \dots, e_{m+n}) \subseteq T_q F$ bases $(g_B)_p$ e $(g_F)_q$ ortonormais, respectivamente. Então, via o isomorfismo dado pelo lema 2.1, considere os vetores $(e_1, \mathbb{O}_{T_q F}), \dots, (e_m, \mathbb{O}_{T_q F}), (\mathbb{O}_{T_p B}, \frac{1}{f(p)} e_{m+1}), \dots, (\mathbb{O}_{T_p B}, \frac{1}{f(p)} e_{m+n})$ em $T_{(p,q)}(B \times F)$. Segue diretamente da definição de g que esses $m+n$ vetores formam uma base ortonormal de $T_{(p,q)}(B \times F)$, donde segue $g_{(p,q)}$ não-degenerado e com índice¹ $ind g_B + ind g_F$, o que encerra a prova pois $(p, q) \in B \times F$ é arbitrário. \square

Os lemas 2.1 e 2.4 são a base para o desenvolvimento da teoria deste capítulo.

¹ Já que há $ind g_B$ vetores temporais entre os $(e_i, \mathbb{O}_{T_q F})$ e $ind g_F$ entre os vetores $(\mathbb{O}_{T_p B}, e_j)$

Definição 2.5. Na notação do lema 2.4, definimos o produto torcido de (B, g_B) e (F, g_F) com função de *warping* f , que será denotado doravante por $B \times_f F$, como a variedade $B \times F$ munida com a métrica g definida no lema 2.4. Dizemos que (B, g_B) é a base e (F, g_F) é a fibra do produto torcido $B \times_f F$. Quando f é constante e igual a 1, denotamos $B \times_f F$ simplesmente por $B \times F$ e o chamamos de produto de variedades semi-Riemannianas.

Os produtos torcidos são bastante comuns. De fato, diversas variedades bem conhecidas podem ser apresentadas dessa forma, como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 2.6. $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ como produto torcido

Aqui, mostraremos que a variedade Riemanniana $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \delta) = \mathbb{R}_0^{n+1} \setminus \{0\}$ (veja exemplo 1.4) pode ser escrita como um produto torcido. Para tanto, considere as variedades Riemannianas² $B := ((0, \infty), d\rho^2)$ e $F := (\mathbb{S}^n, \omega_n)$ e a função suave e positiva $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\rho) = \rho$. Vamos mostrar que $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \delta) \simeq B \times_f F$. Para tanto, defina a função $\chi : (0, \infty) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por $\chi(\rho, y) = \rho \cdot y$. χ é claramente suave, pois se escreve como a restrição de uma função suave definida em $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$ (dada pela mesma fórmula). A função inversa de χ é $\chi^{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{S}^n$ dada por $\chi^{-1}(x) = (\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$, que é suave pois a função $\eta : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\eta(x) = (\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$ é suave e $(0, \infty) \times \mathbb{S}^n$ é subvariedade mergulhada de $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+1}$ (veja corolário 8.25 da página 191 de Lee (2002)). Dessa forma, χ é difeomorfismo.

A fim de que χ seja isometria, vamos calcular $\chi^*\delta$ e mostrar que esta se iguala à métrica de³ $B \times_f F$: $d\rho^2 + \rho^2 \cdot \omega_n$. Sejam, pois, (u^1, \dots, u^{n+1}) as coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $(\mathcal{U}, \varphi = (\xi^1, \dots, \xi^n))$ uma carta qualquer em \mathbb{S}^n , $((0, \infty), \mathbf{1} = (\rho))$ coordenada cartesiana em $(0, \infty)$ e considere a respectiva carta $((0, \infty) \times \mathcal{U}, (\rho, \xi^1, \dots, \xi^n))$ para $(0, \infty) \times \mathbb{S}^n$. Vamos denotar os campos coordenados desta última carta por⁴ $\frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ de forma que, utilizando o lema 2.1, temos

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \mathbf{0} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \left(\mathbf{0}, \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right).$$

Para um ponto arbitrário de $(0, \infty) \times \mathcal{U}$ (que será omitido para simplificar a notação), temos

$$d\chi \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial (\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}))^j}{\partial u_1} \circ (\mathbf{1} \times \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

² $d\rho^2$ denota aqui a métrica Euclideana usual de \mathbb{R} restrita a $(0, \infty)$.

³ Tal notação é uma forma abreviada de escrever a métrica g definida no lema 2.4 e bastante sugestiva: $d\rho^2$ considera as primeiras componentes de vetores tangentes enquanto que ω_n considera as segundas.

⁴ Essa notação é coerente com a futura notação utilizada para levantamento de campos da base e da fibra.

Note que a função $\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}) : (0, \infty) \times \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ mapeia (s, x) em $s \cdot \varphi^{-1}(x)$ e, portanto, temos $(\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}))^j(s, x) = s \cdot (\varphi^{-1})^j(x) = s \cdot (y^j \circ \varphi^{-1})(x)$, onde y^j denota a restrição de u^j para \mathbb{S}^n , e ⁵

$$\frac{\partial (\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}))^j}{\partial u_1} = y^j \circ \varphi^{-1},$$

donde

$$d\chi \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} y^j \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}. \quad (*)$$

Além disso, temos

$$d\chi \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \xi^i} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial (\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}))^j}{\partial u_{i+1}} \circ (\mathbf{1} \times \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Desta vez,

$$\frac{\partial (\chi \circ (\mathbf{1} \times \varphi^{-1}))^j}{\partial u_{i+1}} \circ (\mathbf{1} \times \varphi) = \rho \cdot \frac{\partial (\varphi^{-1})^j}{\partial u_i} \circ \varphi = \rho \cdot \frac{\partial (y^j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \circ \varphi = \rho \cdot \frac{\partial y^j}{\partial \xi^i}$$

donde

$$d\chi \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \xi^i} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \rho \cdot \frac{\partial y^j}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}. \quad (**)$$

Estamos prontos para calcular $\chi^* \delta$. Primeiramente, utilizando a equação (*)

$$(\chi^* \delta) \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho}, \frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho} \right) = \delta \left(d\chi \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho} \right), d\chi \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho} \right) \right) = \sum_{k,l=1}^{n+1} y^k y^l \cdot \delta \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \sum_{k,l=1}^{n+1} y^k y^l \delta_{kl},$$

donde

$$(\chi^* \delta) \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho}, \frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} (y^k)^2 = 1. \quad (*)$$

Usando as equações (*) e (**) temos

$$(\chi^* \delta) \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \rho}, \frac{\widetilde{\partial}}{\partial \xi^i} \right) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \rho y^k \cdot \frac{\partial y^l}{\partial \xi^i} \cdot \delta \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \rho \sum_{k=1}^{n+1} y^k \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} = 0, \quad (**)$$

pois $\sum_{k=1}^{n+1} (y^k)^2 = 1 \implies 2 \sum_{k=1}^{n+1} y^k \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} = 0$. Finalmente, usando a equação (**) segue

$$(\chi^* \delta) \left(\frac{\widetilde{\partial}}{\partial \xi^i}, \frac{\widetilde{\partial}}{\partial \xi^j} \right) = \rho^2 \sum_{k,l=1}^{n+1} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^l}{\partial \xi^j} \cdot \delta \left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) = \rho^2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^j}.$$

Se $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ denota a inclusão, temos que $\omega_n = i^* \delta$ (por definição de ω_n) e

$$di \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial (i \circ \varphi^{-1})^k}{\partial u_j} \circ \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial (y^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^j} \cdot \frac{\partial}{\partial u^k},$$

⁵ Há um abuso de notação a seguir: $y^j \circ \varphi^{-1}(s, x) := y^j \circ \varphi^{-1}(x)$ e também $y^j(s, x) := y^j(x)$.

donde

$$\omega_n \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right) = \delta \left(di \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \right), di \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \right) \right) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^l}{\partial \xi^j} \cdot \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^k}{\partial \xi^j},$$

o que prova

$$(\chi^* \delta) \left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial \xi^i}}, \widetilde{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \right) = \rho^2 \cdot \omega_n \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right). \quad (\star \star \star)$$

As equações (\star) , $(\star \star)$ e $(\star \star \star)$ mostram, pois, que $\chi^* \delta = d\rho^2 + \rho^2 \cdot \omega_n$, que é justamente a métrica do produto torcido $(0, \infty) \times_f \mathbb{S}^n$ restrita a $(0, \infty) \times \mathcal{U}$. Como a carta $(\mathcal{U}, \varphi) \subseteq \mathbb{S}^n$ é arbitrária, isso prova que χ é isometria.

Exemplo 2.7. (*\mathbb{S}^n sem os polos é um produto torcido*)

Considere a esfera redonda (\mathbb{S}^n, ω_n) (seção 1.10). Defina P_S e P_N como os polos sul e norte de \mathbb{S}^n , respectivamente, ou seja,

$$P_S = (0, \dots, 0, -1) \quad \text{e} \quad P_N = (0, \dots, 0, 1).$$

Vamos mostrar neste exemplo que $\mathbb{S}^n \setminus \{P_S, P_N\}$ pode ser vista como um produto torcido. Para tanto, considere $(B, g_B) := ((0, \pi), d\chi^2)$, onde $d\chi^2$ é a métrica Euclideana de \mathbb{R} restrita a $(0, \pi)$, e $(F, g_F) := (\mathbb{S}^{n-1}, \omega_{n-1})$. Considere $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\chi) = \sin \chi > 0$. Defina também a função $F : (0, \pi) \times_f \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{P_S, P_N\}$ dada por

$$F(\chi, y) := (\sin \chi \cdot y, \cos \chi).$$

Contas semelhantes às do exemplo 2.6 mostram que F é difeomorfismo e $F^* \omega_n = d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot \omega_{n-1}$, que é precisamente a métrica do produto torcido $(0, \pi) \times_f \mathbb{S}^{n-1}$, ou seja, F é uma isometria. Isso mostra que $\mathbb{S}^n \setminus \{P_S, P_N\}$ pode ser vista como um produto torcido de variedades Riemannianas.

Exemplo 2.8. (*Espaço hiperbólico sem um ponto como produto torcido*)

Considere a variedade Lorentziana \mathbb{R}_1^{n+1} (exemplo 1.4) e a aplicação $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ suave dada por

$$\mathcal{Q}(u) = \langle u, u \rangle = -(u^1)^2 + \sum_{i=2}^{n+1} (u^i)^2,$$

para $u = (u^1, \dots, u^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. O número $-1 \in \mathbb{R}$ é valor regular de \mathcal{Q} , de forma que o conjunto $\mathcal{Q}^{-1}(-1)$ é uma subvariedade mergulhada de \mathbb{R}^{n+1} de dimensão n . Note que $u \in \mathcal{Q}^{-1}(-1)$ se, e somente se,

$$u^1 = \sqrt{1 + (u^2)^2 + \dots + (u^{n+1})^2} > 0 \quad \text{ou} \quad u^1 = -\sqrt{1 + (u^2)^2 + \dots + (u^{n+1})^2} < 0,$$

o que mostra que $\mathcal{Q}^{-1}(-1)$ possui duas componentes conexas. Daí, definimos o (n) -espaço hiperbólico como a componente conexa de $\mathcal{Q}^{-1}(-1)$ dada por $u^1 > 0$ na equação acima. Da definição 1.12, para coordenadas cartesianas u^1, \dots, u^{n+1} em \mathbb{R}^{n+1} temos

$$\nabla \mathcal{Q} = 2 \left(u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + u^{n+1} \frac{\partial}{\partial u^{n+1}} \right) = 2\vec{P},$$

onde $\vec{P} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ é o campo vetorial definido pela expressão entre parênteses acima e chamado de *campo posição*. Daí,

$$\langle \nabla \mathcal{Q}, \nabla \mathcal{Q} \rangle = 4 \langle \vec{P}, \vec{P} \rangle = 4\mathcal{Q},$$

donde segue $\langle \nabla \mathcal{Q}, \nabla \mathcal{Q} \rangle|_{\mathbb{H}^n} = -1 < 0$. Pela proposição 1.62, segue que \mathbb{H}^n é subvariedade Riemanniana de \mathbb{R}^{n+1} . Passamos a denotar a métrica em \mathbb{H}^n por σ_n , ou seja, $\sigma_n = i^* \delta_{n+1}$, para $i : \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão.

Defina o ponto $\mathcal{P} := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$. Vamos mostrar que a variedade Riemanniana $\mathbb{H}^n \setminus \{\mathcal{P}\}$ se escreve como um produto torcido. Com efeito, considere $(B, g_B) := ((0, \infty), d\rho^2)$, com $d\rho^2$ denotando a restrição de δ_1 para $(0, \infty)$, $(F, g_F) := (\mathbb{S}^{n-1}, \omega_{n-1})$ e $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\rho) := \sinh \rho > 0$. Assim sendo, a função $F : (0, \infty) \times_f \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n \setminus \{\mathcal{P}\}$ dada por $F(\rho, y) := (\cosh \rho, \sinh \rho \cdot y)$ é difeomorfismo e satisfaz $F^* \sigma_n = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \cdot \omega_{n-1}$ (contas análogas às do exemplo 2.6), que é precisamente a métrica do produto torcido $(0, \infty) \times_f \mathbb{S}^{n-1}$, o que prova que F é isometria.

Exemplo 2.9. (*Espaço-tempo generalizado de Robertson-Walker*)

Para um intervalo (a, b) (possivelmente infinito), definimos $(B, g_B) := ((a, b), -dt^2)$, onde dt^2 é a métrica Euclideana em (a, b) , $f : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ é qualquer função suave e (F, g_F) é qualquer variedade Riemanniana conexa. Um *espaço-tempo⁶ generalizado de Robertson-Walker* é um produto torcido da forma $(a, b) \times_f F$. Quando $(F, g_F) = \mathbb{R}_0^n$, (\mathbb{S}^n, ω_n) ou (\mathbb{H}^n, σ_n) , dizemos que $(a, b) \times_f F$ é um *espaço-tempo de Robertson-Walker*. As variedades da forma $(a, b) \times_f F$ são modelos geométricos frequentemente utilizados na cosmologia.

Nosso objetivo agora é explorar a geometria de $B \times_f F$ e relacioná-la às geometrias de B e F . Observe que, dado $q \in F$, o conjunto $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ é subvariedade (mergulhada) de $B \times_f F$ e é dito ser uma *folha* (do produto torcido). Analogamente, dado $p \in B$, $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ é subvariedade (mergulhada) de $B \times_f F$ chamada de uma *fibra* (do produto torcido). Vamos relacionar a geometria das folhas e das fibras do produto torcido com a geometria de B e F , respectivamente.

Primeiramente, temos o isomorfismo de espaços vetoriais $T_{(p,q)}(B \times \{q\}) \simeq (T_p B) \times \{\mathcal{O}_{T_q F}\}$. De fato, lembre que $T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ pode ser identificado com um subespaço de $T_{(p,q)}(B \times F)$, que por sua vez é isomorfo (lema 2.1) a $(T_p B) \times (T_q F)$. Dessa forma, $T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ pode ser identificado com um subespaço de $(T_p B) \times (T_q F)$. Nos resta mostrar que este subespaço é precisamente $(T_p B) \times \{\mathcal{O}_{T_q F}\}$. Ora, se $v \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$,

$$d\sigma_{(p,q)}(v) = d\sigma_{(p,q)}|_{T_{(p,q)}(B \times \{q\})}(v) = d(\sigma|_{B \times \{q\}})_{(p,q)}(v) = 0,$$

⁶ Tecnicamente, pela definição 1.77 precisamos ainda munir $(a, b) \times_f F$ com uma orientação temporal, que é feita exigindo que o campo $\tilde{\partial}_t \in \mathfrak{X}((a, b) \times_f F)$, que é temporal, seja futuro-dirigido. $\tilde{\partial}_t$ denota o levantamento horizontal de $\partial_t \in \mathfrak{X}(a, b)$, que será definido logo após a definição 2.11.

pois $\sigma|_{B \times \{q\}}$ é constante e igual a q . Analogamente, $T_{(p,q)}(\{p\} \times F) \simeq \{\mathbf{O}_{T_p B}\} \times T_q F$, pois se $w \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$, então $d\pi_{(p,q)}(w) = 0$.

Definição 2.10. (*Campos vetoriais horizontais e verticais*)

Dado $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$, dizemos que Z é:

1. horizontal se Z é tangente às folhas, isto é, se $\forall (p, q) \in B \times_f F$, temos $Z_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$;
2. vertical se Z é tangente às fibras, isto é, se $\forall (p, q) \in B \times_f F$, temos $Z_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$.

Segue da definição 2.10 que Z é horizontal se, e somente se, Z é σ -relacionado⁷ com $\mathbf{O} \in \mathfrak{X}(F)$ e Z é vertical se, e somente se, Z é π -relacionado com $\mathbf{O} \in \mathfrak{X}(B)$.

Observe agora que, se $i_q : B \times \{q\} \hookrightarrow B \times_f F$ é a inclusão, dados $v, w \in T_{(p,q)}(B \times \{q\})$,

$$\begin{aligned} (i_q^*(g))_{(p,q)}(v, w) &= g_{(p,q)}(d(i_q)_{(p,q)}(v), d(i_q)_{(p,q)}(w)) \\ &= (g_B)_p(d\pi_{(p,q)} \circ d(i_q)_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)} \circ d(i_q)_{(p,q)}(w)) + \\ &\quad + f(p)^2 (g_F)_q(d\sigma_{(p,q)} \circ d(i_q)_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)} \circ d(i_q)_{(p,q)}(w)) \\ &= (g_B)_p(d(\pi \circ i_q)_{(p,q)}(v), d(\pi \circ i_q)_{(p,q)}(w)) \\ &= (g_B)_p(d(\pi|_{B \times \{q\}})_{(p,q)}(v), d(\pi|_{B \times \{q\}})_{(p,q)}(w)) \\ &= [(\pi|_{B \times \{q\}})^*(g_B)]_{(p,q)}(v, w), \end{aligned}$$

de onde segue que $i_q^*(g) = (\pi|_{B \times \{q\}})^*(g_B)$. Como $\pi|_{B \times \{q\}}$ é um difeomorfismo, o cálculo acima mostra que as folhas de $B \times_f F$ são subvariedades semi-Riemannianas⁸, isométricas a (B, g_B) .

Analogamente, um cálculo semelhante ao anterior mostra que, se $i_p : \{p\} \times F \hookrightarrow B \times_f F$ é a inclusão, então $i_p^*(g) = f(p)^2 \cdot (\sigma|_{\{p\} \times F})^*(g_F)$. Como $\sigma|_{\{p\} \times F}$ é um difeomorfismo, isso mostra que as fibras de $B \times_f F$ são subvariedades semi-Riemannianas, homotéticas a (F, g_F) , com constante de homotetia⁹ $(f \circ \pi)^2 > 0$.

Segue de $T_{(p,q)}(B \times \{q\}) \simeq (T_p B) \times \{\mathbf{O}_{T_q F}\}$ e $T_{(p,q)}(\{p\} \times F) \simeq \{\mathbf{O}_{T_p B}\} \times T_q F$ que¹⁰ $(T_{(p,q)}(B \times \{q\}))^\perp = T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$. Por conta disso, dizemos que as folhas e as fibras de $B \times_f F$ são *ortogonais*. Além disso, como são subespaços não-degenerados de $T_{(p,q)}(B \times F)$

⁷ Dada uma função suave $\chi : M \rightarrow N$ e campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, dizemos que X e Y são χ -relacionados se $Y_{\chi(p)} = d\chi_p(X_p), \forall p \in M$.

⁸ Já que $(\pi|_{B \times \{q\}})^*(g_B)$ é métrica em $B \times \{q\}$, pois $\pi|_{B \times \{q\}}$ é difeomorfismo.

⁹ $(f \circ \pi)^2$ é constante em cada fibra.

¹⁰ Da definição de g , segue que esses espaços tangentes são mutuamente ortogonais. O fato de um ser o “perp” do outro segue de suas dimensões serem complementares em relação à dimensão de $T_{(p,q)}(B \times F)$ (veja lema A.4).

(já que as folhas e as fibras são subvariedades semi-Riemannianas), temos a seguinte decomposição em soma direta:

$$T_{(p,q)}(B \times F) = (T_{(p,q)}(B \times \{q\})) \oplus (T_{(p,q)}(\{p\} \times F)).$$

Definimos, pois, as projeções *horizontal* e *vertical*:

$$\begin{aligned} hor : T_{(p,q)}(B \times F) &\longrightarrow T_{(p,q)}(B \times \{q\}), \\ ver : T_{(p,q)}(B \times F) &\longrightarrow T_{(p,q)}(\{p\} \times F). \end{aligned}$$

Definição 2.11. (*Levantamento de campos vetoriais*)

Sejam $B \times F$ um produto de variedades, $X \in \mathfrak{X}(B)$, $W \in \mathfrak{X}(F)$. Definimos o levantamento de X e W como o único campo vetorial $Z_{XW} \in \mathfrak{X}(B \times F)$ π -relacionado com X e σ -relacionado com W . Explicitamente, se $(p, q) \in B \times F$, $Z_{XW}(p, q) := (X_p, W_q)$.

Uma vez provada a suavidade de Z_{XW} , são imediatas a existência e unicidade de tal campo via lema 2.1. Para ver que o campo Z_{XW} é suave, tome cartas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \subseteq B$ e $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \subseteq F$ e considere a carta $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi = (z^1, \dots, z^{m+n}))$ de $B \times F$. Note que

$$z^i = \begin{cases} x^i \circ \pi, & i \in \{1, \dots, m\} \\ y^{i-m} \circ \sigma, & i \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases}$$

Escreva também

$$Z_{XW}|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{m+n} Z^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad W|_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^n W^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

Se $i \in \{1, \dots, m\}$, escrevendo, por hora, $Z := Z_{XW}$, temos $Z^i(x, y) = Z_{(x,y)}(z^i) = Z_{(x,y)}(x^i \circ \pi) = d\pi_{(x,y)}(Z_{(x,y)})(x^i) = X_x(x^i) = X^i \circ \pi(x, y)$, ou seja, $Z^i = X^i \circ \pi \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Analogamente, se $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$, $Z^i = W^{i-m} \circ \sigma \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Isso mostra a suavidade de Z_{XW} .

Dado $X \in \mathfrak{X}(B)$, podemos também definir o *levantamento (horizontal) de X* como o único campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(B \times F)$ π -relacionado com X e σ -relacionado com $\mathbf{0} \in \mathfrak{X}(F)$. Analogamente, dado $W \in \mathfrak{X}(F)$, o *levantamento (vertical) de W* é o único campo $\tilde{W} \in \mathfrak{X}(B \times F)$ π -relacionado com $\mathbf{0} \in \mathfrak{X}(B)$ e σ -relacionado com W .

Observe que, na notação das cartas acima, $\frac{\partial}{\partial z^i}$ é o levantamento de $\frac{\partial}{\partial x^i}$, se $i \in \{1, \dots, m\}$, e é o levantamento de $\frac{\partial}{\partial y^{i-m}}$, se $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$, como explicitam as equações 2.2 e 2.3.

Apesar de as projeções *hor* e *ver* serem até então definidas apenas pontualmente, elas se estendem naturalmente para atuarem sobre campos vetoriais.

Proposição 2.12. (*Projeções horizontal e vertical de campos vetoriais*)

Dado $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$, definimos $hor(Z)$ e $ver(Z)$ pondo:

$$\begin{aligned} hor(Z)(p, q) &:= hor(Z_{(p,q)}), \\ ver(Z)(p, q) &:= ver(Z_{(p,q)}). \end{aligned}$$

Dessa forma, $hor(z)$ e $ver(Z)$ são campos vetoriais suaves em $B \times_f F$ e temos $Z = hor(Z) + ver(Z)$, onde $hor(Z)$ é horizontal e $ver(Z)$ é vertical. Além disso, essa é a única forma de decompor Z como uma soma de um campo horizontal e um vertical.

Demonstração. Para mostrar a suavidade de $hor(Z)$ e $ver(Z)$, tome cartas $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \subseteq B$ e $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \subseteq F$ e considere a carta $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi = (z^1, \dots, z^{m+n}))$ de $B \times F$. Daí, se $Z|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{m+n} Z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$, temos:

$$hor(Z)|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^m Z^i \frac{\partial}{\partial z^i} \quad \text{e} \quad ver(Z)|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=m+1}^{m+n} Z^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

já que o campo $\frac{\partial}{\partial z^i}$ é levantamento de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (respectivamente $\frac{\partial}{\partial y^{i-m}}$) para $i \in \{1, \dots, m\}$ (respectivamente $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$) e, portanto, horizontal (respectivamente vertical). Isso mostra a suavidade de $hor(Z)$ e $ver(Z)$ e também que $hor(Z)$ é horizontal e $ver(Z)$ é vertical. Que $Z = hor(Z) + ver(Z)$ é imediato da definição das projeções hor e ver pontualmente (ou seja, em cada espaço tangente), bem como a unicidade dessa decomposição. \square

Observe que da definição 2.11 segue que, se $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $W \in \mathfrak{X}(F)$, então \tilde{X} é horizontal e \tilde{W} é vertical. Uma pergunta que surge naturalmente é se todo campo horizontal/vertical é o levantamento horizontal/vertical de algum campo vetorial. A resposta é *não*. O leitor pode se convencer disso observando o comportamento do campo $y \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$. Ainda assim, o lema 2.13 a seguir garante uma condição bastante conveniente para que isso ocorra, e terá diversas aplicações no trabalho.

Lema 2.13. *Sejam $B \times_f F$ um produto torcido, $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ horizontal e $(p, q) \in B \times_f F$. Então, existem $\mathcal{A} \subseteq B \times_f F$ aberto, com $(p, q) \in \mathcal{A}$, $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(B)$ e $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(B \times_f F)$ tais que*

$$Z|_{\mathcal{A}} = \left(\sum_{i=1}^m f_i \cdot \tilde{X}_i \right) \Big|_{\mathcal{A}}.$$

Demonstração. Sejam $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \ni p$ e $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \ni q$ cartas em B e F respectivamente. Escreva $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi = (z^1, \dots, z^{m+n}))$ a respectiva carta em $B \times_f F$. Como Z é horizontal, $Z|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^{m+n} Z^i \frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_{i=1}^m Z^i \frac{\partial}{\partial z^i}$. Sejam $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ aberto contendo (p, q) , $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ aberto contendo p e $h \in C^\infty(B \times_f F)$ e $g \in C^\infty(B)$ tais

que $h|_{\mathcal{W}} = 1$, $\text{supp}(h) \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $g|_{\tilde{\mathcal{U}}} = 1$ e $\text{supp}(g) \subseteq \mathcal{U}$. Defina, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\tilde{Z}^i := Z^i \cdot h \in C^\infty(B \times_f F)$ e, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $X_j := g \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(B)$.

Note que $\tilde{Z}^i|_{\mathcal{W}} = Z^i|_{\mathcal{W}}$ e $X_j|_{\tilde{\mathcal{U}}} = \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\tilde{\mathcal{U}}}$. Defina $\mathcal{A} := \mathcal{W} \cap (\tilde{\mathcal{U}} \times F)$. Daí, se $(x, y) \in \mathcal{A}$, então:

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(x,y)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \mathbf{O}_{T_y F} \right) = (X_i(x), \mathbf{O}_{T_y F}) = \tilde{X}_i(x, y),$$

e, portanto,

$$Z_{(x,y)} = \sum_{i=1}^m Z^i(x, y) \frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(x,y)} = \sum_{i=1}^m \tilde{Z}^i(x, y) \tilde{X}_i(x, y) = \left(\sum_{i=1}^m \tilde{Z}^i \tilde{X}_i \right) (x, y).$$

Como $(x, y) \in \mathcal{A}$ é arbitrário, isso encerra a demonstração. \square

Observação 2.14. *Um resultado análogo vale no caso de $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ ser vertical, com demonstração similar. Usaremos isto sem maiores comentários no que se segue.*

Vamos agora analisar como as estruturas diferenciável e geométrica de $B \times_f F$ se relacionam com as respectivas estruturas em B e em F . Mais precisamente, vamos calcular colchetes de Lie, conexão de Levi-Civita, tensor de curvatura, campos de Killing e as geodésicas de $B \times_f F$, partindo do pressuposto de que conhecemos esses objetos em B e em F . Isso é o que usualmente ocorre nas aplicações: tomamos duas variedades semi-Riemannianas conhecidas e buscamos obter informações sobre o produto delas com alguma função de *warping* conveniente.

Lema 2.15. *Sejam $B \times F$ produto de variedades, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$. Então,*

1. $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é o levantamento de $[X, Y]_B$;
2. $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$;
3. $[\tilde{V}, \tilde{W}]$ é o levantamento de $[V, W]_F$.

Demonstração. Basta notar que, pela definição 2.11, como \tilde{X} é π -relacionado com X e \tilde{Y} é π -relacionado com Y , $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é π -relacionado com $[X, Y]_B$ (vide O'Neill (1983), Lema 1.22). Analogamente, como \tilde{X} e \tilde{Y} são σ -relacionados com $\mathbf{O} \in \mathfrak{X}(F)$, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é σ -relacionado com $\mathbf{O} \in \mathfrak{X}(F)$. Ora, o levantamento de $[X, Y]_B$ é definido como o único campo vetorial em $B \times F$ que é π -relacionado com $[X, Y]_B$ e σ -relacionado com $\mathbf{O} \in \mathfrak{X}(F)$. Segue então que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é o levantamento de $[X, Y]_B$, o que mostra o item 1). Os demais itens são análogos. \square

Note que, combinando os lemas 2.13 e 2.15, sabemos calcular o colchete de Lie de quaisquer dois campos vetoriais em $B \times_f F$. De fato, dados $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$, escreva

$Z_i = \text{hor}(Z_i) + \text{ver}(Z_i)$. Daí, como o colchete de Lie é \mathbb{R} -bilinear, para calcularmos $[Z_1, Z_2]$, basta que saibamos calcular o colchete de Lie em campos vetoriais horizontais e verticais. Para tanto, usando o lema 2.13 e sabendo que $[,]$ depende apenas do comportamento local dos campos vetoriais (pois é \mathbb{R} -bilinear), é suficiente que saibamos calcular $[,]$ em levantamentos horizontais e verticais. Isso, por sua vez, é precisamente o conteúdo do lema 2.15.

O argumento apresentado no parágrafo anterior é importantíssimo ao longo do trabalho, pois reduz o esforço de calcularmos um ente geométrico ou diferenciável em todos os campos vetoriais para o cálculo apenas em campos vetoriais que são levantamentos horizontais ou verticais. *Em vista disso, os resultados que se seguem serão enunciados apenas para estes tais campos vetoriais.*

Lema 2.16. *Sejam $B \times_f F$ um produto torcido, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$. Então, valem:*

1. $g(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g_B(X, Y) \circ \pi$;
2. $g(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0$;
3. $g(\tilde{V}, \tilde{W}) = (f \circ \pi)^2 \cdot g_F(V, W) \circ \sigma$.

Demonstração. Vamos verificar as três igualdades localmente. Sejam $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ e $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ cartas em B e F respectivamente. Escreva $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi = (z^1, \dots, z^{m+n}))$ a respectiva carta em $B \times_f F$. Escreva também

$$X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Daí, pelos comentários que seguem a definição 2.11, temos:

$$\tilde{X}|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^m X^i \circ \pi \cdot \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \tilde{Y}|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^m Y^i \circ \pi \cdot \frac{\partial}{\partial z^i},$$

de onde segue que:

$$g(\tilde{X}, \tilde{Y})|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i,j=1}^m (X^i Y^j) \circ \pi \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right).$$

Basta, pois, verificarmos que $g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = g_B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \circ \pi, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$. De fato, se $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ arbitrário,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right)(p, q) &= g_{(p,q)}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\Big|_{(p,q)}, \frac{\partial}{\partial z^j}\Big|_{(p,q)}\right) \\ &= (g_B)_p\left(d\pi_{(p,q)}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\Big|_{(p,q)}\right), d\pi_{(p,q)}\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\Big|_{(p,q)}\right)\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f(p)^2 \cdot (g_F)_q \left(d\sigma_{(p,q)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial z^i} \right|_{(p,q)} \right), d\sigma_{(p,q)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial z^j} \right|_{(p,q)} \right) \right) \\
& = (g_B)_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = g_B \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \circ \pi(p, q),
\end{aligned}$$

já que $\frac{\partial}{\partial z^i}$ é o levantamento de $\frac{\partial}{\partial x^i}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
g(\tilde{X}, \tilde{Y})|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} & = \sum_{i,j=1}^m (X^i Y^j) \circ \pi \cdot g_B \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \circ \pi \\
& = \left[\sum_{i,j=1}^m (X^i Y^j) \cdot g_B \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right] \circ \pi \\
& = g_B(X, Y) \circ \pi.
\end{aligned}$$

Isso mostra $g(\tilde{X}, \tilde{Y})|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = g_B(X, Y) \circ \pi|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}}$, de onde segue o item 1). Os demais itens são análogos. \square

Segue imediatamente do item 2) do lema 2.16 que campos horizontais são ortogonais a campos verticais. Frequentemente, vamos precisar mostrar que um dado campo $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ é horizontal (respectivamente vertical). Para tanto, basta mostrarmos que Z é ortogonal a todo campo vertical (respectivamente horizontal). O lema 2.13 garante ainda que é suficiente mostrarmos que $g(\tilde{V}, Z) = 0$, para todo campo $V \in \mathfrak{X}(F)$ (respectivamente $V \in \mathfrak{X}(B)$).

Lema 2.17. *Sejam $B \times_f F$ um produto torcido, $h_1 \in C^\infty(B)$, $h_2 \in C^\infty(F)$, $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F)$. Então,*

1. $\tilde{X}(h_1 \circ \pi) = (Xh_1) \circ \pi$ e $\tilde{X}(h_2 \circ \sigma) = 0$;
2. $\tilde{V}(h_2 \circ \sigma) = (Vh_2) \circ \sigma$ e $\tilde{V}(h_1 \circ \pi) = 0$;
3. $\nabla(h_1 \circ \pi)$ é o levantamento de $\nabla^B h_1$. Em particular, $\nabla(h_1 \circ \pi)$ é horizontal;
4. $(f \circ \pi)^2 \cdot \nabla(h_2 \circ \sigma)$ é o levantamento de $\nabla^F h_2$. Em particular, $\nabla(h_2 \circ \sigma)$ é vertical;

Demonstração. Dado $(p, q) \in B \times_f F$, temos que

$$\tilde{X}(h_1 \circ \pi)(p, q) = \tilde{X}_{(p,q)}(h_1 \circ \pi) = d\pi_{(p,q)}(\tilde{X}_{(p,q)})(h_1) = X_p(h_1) = (Xh_1) \circ \pi(p, q).$$

Similarmente, $\tilde{X}(h_2 \circ \sigma)(p, q) = d\sigma_{(p,q)}(\tilde{X}_{(p,q)})(h_2) = 0$, o que prova o item 1). O item 2) é análogo ao primeiro.

Para o item 3, note primeiramente que $\nabla(h_1 \circ \pi)$ é horizontal. De fato, pelo item 2), $\langle \nabla(h_1 \circ \pi), \tilde{V} \rangle = \tilde{V}(h_1 \circ \pi) = 0$. Pelo lema 2.13, como a métrica g é tensorial, segue que $\langle \nabla(h_1 \circ \pi), Z \rangle = 0, \forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ vertical. Daí, $\nabla(h_1 \circ \pi)$ é horizontal.

Agora, note que

$$\langle \nabla(h_1 \circ \pi), \tilde{X} \rangle = \tilde{X}(h_1 \circ \pi) = (Xh_1) \circ \pi = \langle \nabla^B h_1, X \rangle_B \circ \pi = \langle \widetilde{\nabla^B h_1}, \tilde{X} \rangle.$$

Novamente, pelo lema 2.13, segue que $\langle \nabla(h_1 \circ \pi), Z \rangle = \langle \widetilde{\nabla^B h_1}, Z \rangle$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ horizontal. Combinando isso ao fato de que $\nabla(h_1 \circ \pi)$ é horizontal, segue que, $\forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla(h_1 \circ \pi), Z \rangle &= \langle \nabla(h_1 \circ \pi), \text{hor}(Z) + \text{ver}(Z) \rangle = \langle \nabla(h_1 \circ \pi), \text{hor}(Z) \rangle = \\ &= \langle \widetilde{\nabla^B h_1}, \text{hor}(Z) \rangle = \langle \widetilde{\nabla^B h_1}, \text{hor}(Z) + \text{ver}(Z) \rangle = \langle \widetilde{\nabla^B h_1}, Z \rangle. \end{aligned}$$

Como a métrica g é não-degenerada, segue que $\nabla(h_1 \circ \pi) = \widetilde{\nabla^B h_1}$, o que prova o item 3). A prova do item 4) é análoga à do item 3). \square

Proposição 2.18. (*Conexão de Levi-Civita em um produto torcido*)

Em um produto torcido $B \times_f F$, se $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$, então valem:

1. $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ é o levantamento de $\nabla_X^B Y \in \mathfrak{X}(B)$;
2. $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} = \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} = \left(\frac{Xf}{f} \right) \circ \pi \cdot \tilde{V}$;
3. $\text{hor} \left(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W} \right) = \mathbf{\Pi}(\tilde{V}, \tilde{W}) = -\frac{1}{f \circ \pi} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot \nabla(f \circ \pi)$, onde $\mathbf{\Pi}$ é o “shape tensor” de cada fibra;
4. $\text{ver} \left(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W} \right)$ é o levantamento de $\nabla_V^F W$.

Demonstração. Para mostrar o item 1), mostraremos inicialmente que $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ é horizontal. Pela fórmula de Koszul (veja teorema 1.13), temos:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{V} \rangle &= \tilde{X} \langle \tilde{Y}, \tilde{V} \rangle + \tilde{Y} \langle \tilde{V}, \tilde{X} \rangle - \tilde{V} \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle - \\ &\quad - \langle [\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{V} \rangle + \langle [\tilde{Y}, \tilde{V}], \tilde{X} \rangle + \langle [\tilde{V}, \tilde{X}], \tilde{Y} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelos lemas 2.15, 2.16 e 2.17. Pelo lema 2.13, segue que $2\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, Z \rangle = 0$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ vertical, ou seja, $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ é horizontal. Além disso, se $Z \in \mathfrak{X}(B)$, novamente pela fórmula de Koszul e pelos lemas 2.16 e 2.17, segue que $2\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = 2\langle \widetilde{\nabla_X^B Y}, \tilde{Z} \rangle$. Daí, pelo lema 2.13, segue que $\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, Z \rangle = \langle \widetilde{\nabla_X^B Y}, Z \rangle$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ horizontal. Combinando isso com o fato de $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ ser horizontal, segue que, $\forall Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, Z \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \text{hor}(Z) + \text{ver}(Z) \rangle = \langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \text{hor}(Z) \rangle = \langle \widetilde{\nabla_X^B Y}, \text{hor}(Z) \rangle = \\ &= \langle \widetilde{\nabla_X^B Y}, \text{hor}(Z) + \text{ver}(Z) \rangle = \langle \widetilde{\nabla_X^B Y}, Z \rangle, \end{aligned}$$

de onde segue o item 1). Para o item 2), a primeira igualdade segue de $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$ (lema 2.15) e de ∇ ser simétrica (veja teorema 1.13). Para a segunda igualdade, observe que:

$$\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle = \tilde{X} \langle \tilde{V}, \tilde{Y} \rangle - \langle \tilde{V}, \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} \rangle = 0,$$

pelo lema 2.16 e pelo item 1) acima. Daí, pelo lema 2.13 segue que $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}$ é vertical. Mais ainda, por Koszul e pelos lemas 2.15, 2.16 e 2.17, temos que:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V}, \tilde{W} \rangle &= \tilde{X} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \tilde{X} ((f \circ \pi)^2 \cdot \langle V, W \rangle_F \circ \sigma) \\ &= 2(f \circ \pi)(Xf) \circ \pi \cdot \langle V, W \rangle_F \circ \sigma = 2 \cdot \frac{Xf}{f} \circ \pi \cdot \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle. \end{aligned}$$

O item 2) segue então do lema 2.13. Para a primeira igualdade do item 3), sejam $p \in B$, $i : \{p\} \times F \hookrightarrow B \times_f F$ a inclusão, $\bar{V} := \tilde{V}|_{\{p\} \times F}$, $\bar{W} := \tilde{W}|_{\{p\} \times F}$, $\bar{\nabla} :=$ “conexão de Levi-Civita de $\{p\} \times F$ ”, $D :=$ “conexão induzida sobre i por ∇ ” e $\bar{\mathbb{I}} :=$ “shape tensor de $\{p\} \times F$ ”. Então, da definição de $\bar{\mathbb{I}}$, temos:

$$D_{\bar{V}}(di \circ \bar{W}) = di(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{W}) + \bar{\mathbb{I}}(\bar{V}, \bar{W}).$$

Note que, pela definição de D , temos $D_{\bar{V}}(di \circ \bar{W}) = (\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W})|_{\{p\} \times F}$. De fato, se $q \in F$, a menos de isomorfismos de espaços tangentes (lema 2.1),

$$\begin{aligned} (D_{\bar{V}}(di \circ \bar{W})) (p, q) &= D_{\bar{V}(p, q)}(di \circ \bar{W}) = D_{\bar{V}(p, q)}(\tilde{W} \circ i) = \\ &= \nabla_{di(p, q)(\bar{V}(p, q))} \tilde{W} = \nabla_{\tilde{V}(p, q)} \tilde{W} = (\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) (p, q), \end{aligned}$$

como queríamos. Daí, se $q \in F$,

$$\begin{aligned} (\text{hor}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W})) (p, q) &= \text{hor}((\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W})(p, q)) = \text{hor}(D_{\bar{V}}(di \circ \bar{W})(p, q)) = \\ &= \bar{\mathbb{I}}_{(p, q)}(\bar{V}_{(p, q)}, \bar{W}_{(p, q)}) = [\bar{\mathbb{I}}(\tilde{V}, \tilde{W})] (p, q), \end{aligned}$$

o que conclui a primeira igualdade. Além disso, segue dos lemas 2.16, da compatibilidade de ∇ com g e do item 2) acima que:

$$\begin{aligned} \langle \text{hor}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}), \tilde{X} \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}, \tilde{X} \rangle = \tilde{V} \langle \tilde{W}, \tilde{X} \rangle - \langle \tilde{W}, \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} \rangle = -\langle \tilde{W}, \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} \rangle = \\ &= -\frac{Xf}{f} \circ \pi \cdot \langle \tilde{W}, \tilde{V} \rangle = -\frac{1}{f \circ \pi} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \langle \nabla(f \circ \pi), \tilde{X} \rangle. \end{aligned}$$

Como de costume, o item 3) segue então do lema 2.13 e do fato de g ser não-degenerada. Finalmente, se $Z \in \mathfrak{X}(F)$, como $\langle \text{ver}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}), \tilde{Z} \rangle = \langle \nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}, \tilde{Z} \rangle$, temos

$$\begin{aligned} 2\langle \text{ver}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}), \tilde{Z} \rangle &= \tilde{V} \langle \tilde{W}, \tilde{Z} \rangle + \tilde{W} \langle \tilde{V}, \tilde{Z} \rangle - \tilde{Z} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad - \langle [\tilde{V}, \tilde{W}], \tilde{Z} \rangle + \langle [\tilde{W}, \tilde{Z}], \tilde{V} \rangle + \langle [\tilde{Z}, \tilde{V}], \tilde{W} \rangle \\ &= \tilde{V} ((f \circ \pi)^2 \cdot \langle W, Z \rangle_F \circ \sigma) + \tilde{W} ((f \circ \pi)^2 \cdot \langle V, Z \rangle_F \circ \sigma) \\ &\quad - \tilde{Z} ((f \circ \pi)^2 \cdot \langle V, W \rangle_F \circ \sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (f \circ \pi)^2 [-\langle [V, W], Z \rangle_F + \langle [W, Z], V \rangle_F + \langle [Z, V], W \rangle_F] \circ \sigma \\
& = (f \circ \pi)^2 [V \langle W, Z \rangle_F + W \langle V, Z \rangle_F - Z \langle V, W \rangle_F - \langle [V, W], Z \rangle_F \\
& \quad + \langle [W, Z], V \rangle_F + \langle [Z, V], W \rangle_F] \\
& = 2(f \circ \pi)^2 \cdot \langle \nabla_V^F W, Z \rangle_F \circ \sigma \\
& = 2 \langle \widetilde{\nabla_V^F W}, \widetilde{Z} \rangle.
\end{aligned}$$

O item 4) segue então do lema 2.13. \square

Corolário 2.19. *Num produto torcido $B \times_f F$, as folhas são totalmente geodésicas e as fibras são totalmente umbílicas. Além disso, dado $p \in B$, $\{p\} \times F$ é totalmente geodésica se, e somente se, $(\nabla^B f)(p) = 0$.*

Demonstração. Intuitivamente, é de se imaginar que o resultado se deva aos itens 1 e 3 da proposição acima. Para sermos formais, considere inicialmente uma folha $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ e $i : \sigma^{-1}(q) \hookrightarrow B \times_f F$ a inclusão. Vamos mostrar que o *shape tensor* de $\sigma^{-1}(q)$ é nulo mostrando que se \bar{X} e \bar{Y} são campos na folha e D é a conexão induzida por ∇ em i , então $D_{\bar{X}} di(\bar{Y})$ é campo paralelo sobre i .

Para tanto, considere $X := d(\pi|_{\sigma^{-1}(q)})(\bar{X})$ e $Y := d(\pi|_{\sigma^{-1}(q)})(\bar{Y})$ campos sobre B . Daí, vale que $\tilde{X} \circ i = di(\bar{X})$ e $\tilde{Y} \circ i = di(\bar{Y})$. De fato, se $p \in B$, temos:

$$d\pi_{(p,q)}(di_{(p,q)}\bar{X}_{(p,q)}) = d(\pi \circ i)_{(p,q)}(\bar{X}_{(p,q)}) = d(\pi|_{\sigma^{-1}(q)})_{(p,q)}(\bar{X}_{(p,q)}) = X_p$$

e

$$d\sigma_{(p,q)}(di_{(p,q)}\bar{X}_{(p,q)}) = d(\sigma \circ i)_{(p,q)}(\bar{X}_{(p,q)}) = 0,$$

pois $\sigma \circ i$ é constante. As duas equações acima nos dizem que $di_{(p,q)}(\bar{X}_{(p,q)}) = (X_p, \mathbf{0}_{T_q F}) = \tilde{X}_{(p,q)}$, de onde segue que $\tilde{X} \circ i = di(\bar{X})$ e, analogamente, $\tilde{Y} \circ i = di(\bar{Y})$. Então, do item 1 da proposição 2.18 temos:

$$D_{\bar{X}} di(\bar{Y}) = D_{\bar{X}} (\tilde{Y} \circ i) = \nabla_{di(\bar{X})} \tilde{Y} = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) \circ i = \widetilde{\nabla_{\bar{X}}^B Y} \circ i,$$

que é um campo paralelo sobre $\sigma^{-1}(q)$, o que mostra que as folhas são totalmente geodésicas.

Fixe agora $p \in B$ e considere a fibra $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times F$. Sejam $\bar{V}, \bar{W} \in \mathfrak{X}(\pi^{-1}(p))$, $V := (\sigma|_{\pi^{-1}(p)})_* \bar{V}$ e $W := (\sigma|_{\pi^{-1}(p)})_* \bar{W}$. Sejam também $j : \{p\} \times F \hookrightarrow B \times_f F$ a inclusão, \hat{D} a conexão induzida na fibra e $\mathbf{\Pi}$ o *shape tensor*. Como anteriormente, $\tilde{V} \circ j = dj(\bar{V})$ e $\tilde{W} \circ j = dj(\bar{W})$ (a demonstração é análoga). Pelos itens 3 e 4 da proposição 2.18 segue, como no caso das folhas, que:

$$\hat{D}_{\tilde{V}} dj(\bar{W}) = (\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) \circ j = \left(-\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \cdot \widetilde{\nabla^B f} \right) \circ j + \left(\widetilde{\nabla_V^F W} \right) \circ j.$$

Como, por definição, $\mathbf{\Pi}(\overline{V}, \overline{W})$ é a parte normal de $\hat{D}_{\overline{V}} dj(\overline{W})$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(\overline{V}, \overline{W}) &= \left(-\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \cdot \widetilde{\nabla^B f} \right) \circ j = \\ &= -\frac{\langle \widetilde{V} \circ j, \widetilde{W} \circ j \rangle}{f(p)} \cdot \widetilde{\nabla^B f} \circ j \\ &= -\frac{\langle dj(\overline{V}), dj(\overline{W}) \rangle}{f(p)} \cdot \widetilde{\nabla^B f} \circ j \\ &= \langle \overline{V}, \overline{W} \rangle_{\pi^{-1}(p)} \cdot \left(-\frac{\widetilde{\nabla^B f} \circ j}{f(p)} \right), \end{aligned}$$

o que prova que $\pi^{-1}(p)$ é totalmente umbílica. Note que $\pi^{-1}(p)$ é totalmente geodésica se, e somente se, $\widetilde{\nabla^B f} \circ j = 0$. Mas, dado $q \in F$, temos que

$$\widetilde{\nabla^B f} \circ j(p, q) = ((\nabla^B f)(p), \mathbf{O}_{T_q F}).$$

Logo, $\widetilde{\nabla^B f} \circ j = 0$ se, e somente se, $(\nabla^B f)(p) = 0$, de onde segue o resultado desejado. \square

Da demonstração do corolário acima, segue que, para um dado $p \in B$, o campo curvatura média de $\{p\} \times F$ é

$$\vec{H} = -\frac{(\widetilde{\nabla^B f}) \circ j}{f(p)}.$$

Lema 2.20. *Sejam $B \times_f F$ um produto torcido, $h \in C^\infty(B)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$. Então,*

1. $Hess_{(h \circ \pi)}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = Hess_h^B(X, Y) \circ \pi$;
2. $Hess_{(h \circ \pi)}(\widetilde{X}, \widetilde{V}) = 0$;
3. $Hess_{(h \circ \pi)}(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = \frac{\langle \nabla^B h, \nabla^B f \rangle_B}{f} \circ \pi \cdot \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle$;

Demonstração. Em geral, os itens seguem da proposição 2.18 e do item 3) do lema 2.17. Por exemplo, para o item 3) temos:

$$Hess_{(h \circ \pi)}(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = \langle \nabla_{\widetilde{V}} \nabla(h \circ \pi), \widetilde{W} \rangle = \langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{\nabla^B h}, \widetilde{W} \rangle = \frac{(\nabla^B h)f}{f} \circ \pi \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle,$$

o que prova o item, pois $(\nabla^B h)f = \langle \nabla^B h, \nabla^B f \rangle_B$. \square

Proposição 2.21. *(Tensor de curvatura em um produto torcido)*

Sejam R tensor de curvatura em um produto torcido $B \times_f F$ e R^B e R^F os tensores de curvatura de B e F . Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$, então:

1. $R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}$ é o levantamento de $R^B(X, Y)Z$;

2. $R(\tilde{V}, \tilde{X})\tilde{Y} = -\frac{\text{Hess}_f^B(X, Y)}{f} \circ \pi \cdot \tilde{V} = R(\tilde{V}, \tilde{Y})\tilde{X};$
3. $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{V} = 0 = R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{X};$
4. $R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W} = -\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \cdot \nabla_{\tilde{X}} \nabla(f \circ \pi) = R(\tilde{X}, \tilde{W})\tilde{V};$
5. $R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U} = R^F(\tilde{V}, \tilde{W})U + \frac{\langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle_B}{f^2} \circ \pi \cdot [\langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W} - \langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V}].$

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 2.18 e da definição do tensor de curvatura. Para exemplificar, tomemos o item 2):

$$\begin{aligned}
R(\tilde{V}, \tilde{X})\tilde{Y} &= \nabla_{\tilde{V}} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{X}} \nabla_{\tilde{V}} \tilde{Y} - \nabla_{[\tilde{V}, \tilde{X}]} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{V}} \widetilde{\nabla_{\tilde{X}}^B Y} - \nabla_{\tilde{X}} \left(\frac{Yf}{f} \circ \pi \cdot \tilde{V} \right) = \\
&= \frac{(\nabla_{\tilde{X}}^B Y) f}{f} \circ \pi \cdot \tilde{V} - X \left(\frac{Yf}{f} \right) \circ \pi \cdot \tilde{V} - \frac{Yf}{f} \circ \pi \cdot \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} = \\
&= \left[\frac{\langle \nabla^B f, \nabla_{\tilde{X}}^B Y \rangle}{f} - \frac{X(Yf)}{f} + \frac{(Xf) \cdot (Yf)}{f^2} - \frac{Xf}{f} \cdot \frac{Yf}{f} \right] \circ \pi \cdot \tilde{V} \\
&= \frac{1}{f \circ \pi} \cdot [\langle \nabla^B f, \nabla_{\tilde{X}}^B Y \rangle - X \langle \nabla^B f, Y \rangle] \circ \pi \cdot \tilde{V} = -\frac{\text{Hess}_f^B(X, Y)}{f} \circ \pi \cdot \tilde{V},
\end{aligned}$$

como queríamos. O item 4), no entanto, pode ser feito de uma maneira ligeiramente mais econômica: primeiro, note que $R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}$ é horizontal, pois, pelas simetrias da curvatura e pelo item 3), $\langle R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}, \tilde{U} \rangle = \langle R(\tilde{W}, \tilde{U})\tilde{X}, \tilde{V} \rangle = 0$. O lema 2.13 garante então que $R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}$ é horizontal. Além disso, pelo item 2) temos:

$$\begin{aligned}
\langle R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}, \tilde{Y} \rangle &= \langle R(\tilde{V}, \tilde{X})\tilde{Y}, \tilde{W} \rangle = -\frac{\text{Hess}_f^B(X, Y)}{f} \circ \pi \cdot \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \\
&= -\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \langle \nabla_{\tilde{X}} \nabla(f \circ \pi), \tilde{Y} \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, utilizando o lema 2.13 e o fato de $R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}$ ser horizontal, para qualquer $Z \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$ segue

$$\begin{aligned}
\langle R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}, Z \rangle &= \langle R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W}, \text{hor } Z \rangle \\
&= -\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \langle \nabla_{\tilde{X}} \nabla(f \circ \pi), \text{hor } Z \rangle \\
&= -\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \langle \nabla_{\tilde{X}} \nabla(f \circ \pi), Z \rangle,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de $\nabla_{\tilde{X}} \nabla(f \circ \pi)$ ser horizontal (item 3 do lema 2.17 e item 1 da proposição 2.18). Como Z é qualquer e \langle, \rangle é não-degenerado, segue o item 4. \square

Observação 2.22. Tendo em mãos a proposição 2.12 e o lema 2.13, a proposição 2.21 nos permite calcular o tensor R em quaisquer três campos vetoriais em $B \times_f F$.

Proposição 2.23. (*Tensor de Ricci de um produto torcido*)

Em um produto torcido $B \times_f F$, com $n = \dim(F) > 1$, sejam Ric , Ric^B e Ric^F os tensores de Ricci de $B \times_f F$, B e F respectivamente. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$, então:

1. $Ric(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(Ric^B(X, Y) - \frac{n}{f} \cdot Hess_f^B(X, Y) \right) \circ \pi$;
2. $Ric(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0$;
3. $Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) = Ric^F(V, W) \circ \sigma - \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot \left(\frac{\Delta^B f}{f} + (n-1) \frac{\langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle}{f^2} \right) \circ \pi$.

Demonstração. Basta usarmos a proposição 2.21. Para tanto, sejam $\mathcal{U} \subseteq B$ e $\mathcal{V} \subseteq F$ abertos, $E_1, \dots, E_m \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ frame g_B -ortonormal e $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ frame g_F -ortonormal. Sejam $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle_B$ e $\xi_j = \langle F_j, F_j \rangle_F$ e, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, defina $\bar{F}_j := \frac{\tilde{F}_j}{f \circ \pi}$. Daí, $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m, \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ é frame g -ortonormal.

Para o item 1), prosseguindo com os cálculos apenas em $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, temos:

$$\begin{aligned}
Ric(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle R(\tilde{E}_i, \tilde{Y})\tilde{X}, \tilde{E}_i \rangle + \sum_{j=1}^n \xi_j \langle R(\bar{F}_j, \tilde{Y})\tilde{X}, \bar{F}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle \widetilde{R(E_i, Y)X}, \tilde{E}_i \rangle + \frac{1}{(f \circ \pi)^2} \sum_{j=1}^n \xi_j \langle R(\tilde{F}_j, \tilde{Y})\tilde{X}, \tilde{F}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle R(E_i, Y)X, E_i \rangle_B \circ \pi - \frac{Hess_f^B(X, Y)}{f^3} \circ \pi \sum_{j=1}^n \xi_j \langle \tilde{F}_j, \tilde{F}_j \rangle \\
&= Ric^B(X, Y) \circ \pi - \frac{Hess_f^B(X, Y)}{f} \circ \pi \sum_{j=1}^n \xi_j \langle F_j, F_j \rangle_F \circ \sigma \\
&= Ric^B(X, Y) \circ \pi - \frac{n}{f \circ \pi} Hess_f^B(X, Y) \circ \pi,
\end{aligned}$$

como queríamos. Para o segundo item, temos:

$$Ric(\tilde{X}, \tilde{V}) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle R(\tilde{E}_i, \tilde{V})\tilde{X}, \tilde{E}_i \rangle + \sum_{j=1}^n \xi_j \langle R(\bar{F}_j, \tilde{V})\tilde{X}, \bar{F}_j \rangle = 0,$$

pois ambos os somatórios são 0. De fato, basta notar que

$$\langle R(\tilde{E}_i, \tilde{V})\tilde{X}, \tilde{E}_i \rangle = \langle R(\tilde{X}, \tilde{E}_i)\tilde{E}_i, \tilde{V} \rangle = \langle \widetilde{R^B(X, E_i)E_i}, \tilde{V} \rangle = 0$$

e que, pelo item 3) da proposição 2.21, $\langle R(\bar{F}_j, \tilde{V})\tilde{X}, \bar{F}_j \rangle = \frac{1}{f \circ \pi} \langle R(\tilde{F}_j, \tilde{V})\tilde{X}, \tilde{F}_j \rangle = 0$.

Finalmente, para o item 3), segue-se que:

$$Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle R(\tilde{E}_i, \tilde{W})\tilde{V}, \tilde{E}_i \rangle + \sum_{j=1}^n \xi_j \langle R(\bar{F}_j, \tilde{W})\tilde{V}, \bar{F}_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle \nabla_{\widetilde{E}_i} \nabla(f \circ \pi), \widetilde{E}_i \rangle + \frac{1}{(f \circ \pi)^2} \sum_{j=1}^n \xi_j \langle R(\widetilde{F}_j, \widetilde{W}) \widetilde{V}, \widetilde{F}_j \rangle \\
&= -\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left\langle \widetilde{\nabla_{E_i} \nabla^B f}, \widetilde{E}_i \right\rangle + \frac{1}{(f \circ \pi)^2} \sum_{j=1}^n \xi_j \left[\left\langle R^F(F_j, W) V, F_j \right\rangle + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle}{f^2} \circ \pi \cdot \left(\langle \widetilde{F}_j, \widetilde{V} \rangle \langle \widetilde{W}, \widetilde{F}_j \rangle - \langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \rangle \langle \widetilde{F}_j, \widetilde{F}_j \rangle \right) \right] \\
&= -\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{f \circ \pi} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla^B f, E_i \rangle_B \right) \circ \pi + \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \langle R^F(F_j, W) V, F_j \rangle_F \right) \circ \sigma + \\
&\quad + \langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle \circ \pi \cdot \sum_{j=1}^n \xi_j \left[\langle F_j, V \rangle \langle W, F_j \rangle - \langle W, V \rangle \langle F_j, F_j \rangle \right] \circ \sigma \\
&= -\frac{\Delta^B f}{f} \circ \pi \cdot \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle + Ric^F(V, W) \circ \sigma + \frac{\langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle}{f^2} \circ \pi \cdot (1-n) \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle \\
&= Ric^F(V, W) \circ \sigma - \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle \cdot \left(\frac{\Delta^B f}{f} + (n-1) \frac{\langle \nabla^B f, \nabla^B f \rangle}{f^2} \right) \circ \pi,
\end{aligned}$$

como queríamos. \square

Proposição 2.24. *Considere $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F)$. Então,*

1. *V é de Killing em F se, e somente se, \widetilde{V} é de Killing em $B \times_f F$;*
2. *se \widetilde{X} é de Killing em $B \times_f F$, então X é de Killing em B ;*
3. *se $Xf = 0$ e X é de Killing em B , então \widetilde{X} é de Killing em $B \times_f F$.*

Demonstração. Antes de tudo, note que tanto o item 1 quanto o item 3 tratam de provar que um certo campo J é de Killing em $B \times_f F$, o que é equivalente a

$$\langle \nabla_{Z_1} J, Z_2 \rangle + \langle \nabla_{Z_2} J, Z_1 \rangle = 0, \quad (\Delta)$$

para quaisquer $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(B \times_f F)$. No entanto, como a equação acima é tensorial em Z_1 e em Z_2 e usando o lema 2.13, basta provarmos a igualdade para o caso em que Z_1 e Z_2 são levantamentos.

Dito isso, para o item 1, suponha V campo de Killing. Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, W \in \mathfrak{X}(F)$. Da proposição 2.18, temos então:

$$\langle \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}, \widetilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\widetilde{Z}} \widetilde{V}, \widetilde{Y} \rangle = 0 + 0 = 0$$

e

$$\langle \nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle + \langle \nabla_{\widetilde{W}} \widetilde{V}, \widetilde{Y} \rangle = \frac{Yf}{f} \circ \pi \cdot \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle - \frac{\langle \nabla(f \circ \pi), \widetilde{Y} \rangle}{f \circ \pi} \cdot \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle = 0,$$

pois $\langle \nabla(f \circ \pi), \widetilde{Y} \rangle = \langle \widetilde{\nabla^B f}, \widetilde{Y} \rangle = \langle \nabla^B f, Y \rangle_B \circ \pi = (Yf) \circ \pi$. Note que a equação (Δ) é simétrica em Z_1 e Z_2 , de forma que com $J = \widetilde{V}$ nos resta ainda mostrá-la apenas para

o caso de levantamentos verticais. Finalmente, a utilíssima proposição 2.18 ainda nos fornece

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{U}} \tilde{V}, \tilde{W} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{W}} \tilde{V}, \tilde{U} \rangle &= \langle \widetilde{\nabla_U^F V}, \tilde{W} \rangle + \langle \widetilde{\nabla_W^F V}, \tilde{U} \rangle = \\ &= (f \circ \pi)^2 \cdot (\langle \nabla_U^F V, W \rangle_F + \langle \nabla_W^F V, U \rangle_F) \circ \sigma = 0, \end{aligned}$$

pois V é de Killing, o que prova a equação (Δ) para $J = \tilde{V}$ e, portanto, \tilde{V} é de Killing. Reciprocamente, assuma \tilde{V} de Killing. Dados $U, W \in \mathfrak{X}(F)$, pela equação acima temos:

$$(\langle \nabla_U^F V, W \rangle_F + \langle \nabla_W^F V, U \rangle_F) \circ \sigma = \frac{1}{(f \circ \pi)^2} \left[\langle \nabla_{\tilde{U}} \tilde{V}, \tilde{W} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{W}} \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \right] = 0,$$

pois \tilde{V} é de Killing. Isso mostra $\langle \nabla_U^F V, W \rangle_F + \langle \nabla_W^F V, U \rangle_F = 0$ e, portanto, V é de Killing. Para o item 2, suponha agora que \tilde{X} seja de Killing. Pela proposição 2.18 temos então

$$(\langle \nabla_Y^B X, Z \rangle_B + \langle \nabla_Z^B X, Y \rangle_B) \circ \pi = \langle \widetilde{\nabla_Y^B X}, \tilde{Z} \rangle + \langle \widetilde{\nabla_Z^B X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = 0,$$

pois \tilde{X} é de Killing. Segue então que X é de Killing.

Finalmente, para o item 3, suponha X de Killing e $Xf = 0$. Novamente, para que \tilde{X} seja de Killing, basta provarmos que a equação (Δ) é válida para $J = \tilde{X}$ e Z_1 e Z_2 levantamentos. Dados $Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, W \in \mathfrak{X}(F)$, pela proposição 2.18 temos então:

$$\langle \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = \langle \widetilde{\nabla_Y X}, \tilde{Z} \rangle + \langle \widetilde{\nabla_Z X}, \tilde{Y} \rangle = (\langle \nabla_Y^B X, Z \rangle_B + \langle \nabla_Z^B X, Y \rangle_B) \circ \pi = 0,$$

pois X é de Killing e

$$\langle \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}, \tilde{U} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{U}} \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = 0.$$

Finalmente, ainda pela proposição 2.18 segue que

$$\langle \nabla_{\tilde{U}} \tilde{X}, \tilde{W} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{W}} \tilde{X}, \tilde{U} \rangle = 2 \cdot \frac{Xf}{f} \circ \pi \cdot \langle \tilde{U}, \tilde{W} \rangle = 0,$$

pois $Xf = 0$ por hipótese. Daí, \tilde{X} é de Killing, o que encerra a prova. \square

É importante observarmos que o item 3 da proposição acima é falso se retirarmos a hipótese $Xf = 0$. De fato, considere $(F, g_F) = (\mathbb{S}^2, \omega_2)$ e defina

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Considere em B a estrutura diferenciável usual e defina a métrica

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2$$

e a função $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ como a projeção na primeira coordenada, isto é, $f(x, y) := x$. Seja então o produto torcido $M := B \times_f \mathbb{S}^2$. O campo $\partial_x \in \mathfrak{X}(B)$ é de Killing em B , pois satisfaz a equação de Killing

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} g_{ki} = 0,$$

já que tanto as componentes do campo ∂_x como as componentes da métrica são funções constantes. No entanto, $\tilde{\partial}_x$ não é de Killing em M , pois dados $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ com $\langle V, W \rangle_{\mathbb{S}^2} \neq 0$, pela proposição 2.18 temos:

$$\langle \nabla_{\tilde{V}} \tilde{\partial}_x, \tilde{W} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{W}} \tilde{\partial}_x, \tilde{V} \rangle = 2 \cdot \frac{\partial_x f}{f} \circ \pi \cdot \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle = \frac{2}{f \circ \pi} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \neq 0.$$

Vamos agora investigar as geodésicas num produto torcido. Note que, dada uma curva $\gamma(t)$ em $B \times_f F$, podemos escrever $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, onde $\alpha(t)$ é curva em B e $\beta(t)$ é curva em F são as projeções via π e σ , respectivamente. A menos de isomorfismo de espaços tangentes (lema 2.1), temos que $\gamma'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t))$, pois

$$d\pi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = d\pi_{\gamma(t)} \left(d\gamma_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \right) = d(\pi \circ \gamma)_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = d\alpha_t \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \alpha'(t),$$

e, analogamente, $d\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \beta'(t)$.

Proposição 2.25. *Uma curva $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $t \in I$, em $B \times_f F$ é geodésica se, e somente se*

1. $\alpha''(t) = \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_F \cdot f(\alpha(t)) \cdot (\nabla^B f)(\alpha(t))$, $\forall t \in I$;
2. $\beta''(t) = \frac{-2}{f(\alpha(t))} \cdot (f \circ \alpha)'(t) \cdot \beta'(t)$, $\forall t \in I$.

Demonstração. Assuma primeiramente que γ é geodésica. Vamos mostrar as equações 1 e 2 para todo $t \in I$. Para tanto, basta fixarmos um $t_0 \in I$ e mostrarmos que 1 e 2 valem para t_0 , de onde um dos lados da equivalência almejada segue então pela arbitrariedade na escolha de t_0 .

Faremos em três casos: *Caso 1: $\gamma'(t_0)$ não é vertical nem horizontal.* Nesse caso, $\alpha'(t_0)$ e $\beta'(t_0)$ são não-nulos. Pelo lema 1.29, segue que existem campos $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F)$ e intervalo aberto J , com $t_0 \in J \subseteq I$, tais que se $t \in J$ então $X_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$ e $V_{\beta(t)} = \beta'(t)$. Daí, como em J temos que $\tilde{X}_{\gamma(t)} = (X_{\alpha(t)}, \mathbf{O}_{T_{\beta(t)}F}) = (\alpha'(t), \mathbf{O}_{T_{\beta(t)}F})$ e $\tilde{V}_{\gamma(t)} = (\mathbf{O}_{T_{\alpha(t)}B}, V_{\beta(t)}) = (\mathbf{O}_{T_{\alpha(t)}B}, \beta'(t))$, segue que $\gamma'(t) = (\alpha'(t), \beta'(t)) = (\tilde{X} + \tilde{V})_{\gamma(t)}$, $\forall t \in J$. Para $t \in J$ temos então:

$$\gamma''(t) = \frac{D\gamma'}{dt}(t) = \frac{D(\tilde{X} + \tilde{V}) \circ \gamma}{dt}(t) = \nabla_{\gamma'(t)}(\tilde{X} + \tilde{V}) = \nabla_{\tilde{X} + \tilde{V}}(\tilde{X} + \tilde{V})(\gamma(t))$$

e, portanto,

$$\gamma''(t) = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X} + \nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} + \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} + \nabla_{\tilde{V}} \tilde{V})(\gamma(t)).$$

Da proposição 2.18 segue então:

$$\begin{aligned} \text{hor } \gamma''(t) &= \left(\widetilde{\nabla_X^B X} - (f \circ \pi) \cdot \langle V, V \rangle_F \circ \sigma \cdot \widetilde{\nabla^B f} \right) (\gamma(t)) = \\ &= (\nabla_X^B X(\alpha(t)) - f(\alpha(t)) \cdot \langle V_{\beta(t)}, V_{\beta(t)} \rangle_F \cdot (\nabla^B f)(\alpha(t)), \mathbf{O}_{T_{\beta(t)}F}) \end{aligned}$$

$$= (\alpha''(t) - f(\alpha(t)) \cdot \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_F \cdot (\nabla^B f)(\alpha(t)), \mathbf{O}_{T_{\beta(t)}F}), \quad (\clubsuit)$$

pois $\nabla_X^B X(\alpha(t)) = \nabla_{X_{\alpha(t)}}^B X = \nabla_{\alpha'(t)}^B X = \frac{D^B(X \circ \alpha)}{dt}(t) = \frac{D^B \alpha'}{dt}(t) = \alpha''(t)$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \text{ver } \gamma''(t) &= \left(2 \frac{Xf}{f} \circ \pi \cdot \widetilde{V} + \widetilde{\nabla_V^F V} \right) (\gamma(t)) = \\ &= \left(\mathbf{O}_{T_{\alpha(t)}B}, 2 \frac{X_{\alpha(t)}f}{f(\alpha(t))} \cdot V_{\beta(t)} + \nabla_V^F V(\beta(t)) \right) = \\ &= \left(\mathbf{O}_{T_{\alpha(t)}B}, 2 \frac{(f \circ \alpha)'(t)}{f(\alpha(t))} \cdot \beta'(t) + \beta''(t) \right), \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

pois $X_{\alpha(t)}f = \alpha'(t)f = (f \circ \alpha)'(t)$ e $\nabla_V^F V(\beta(t)) = \beta''(t)$ pelo mesmo argumento utilizado para $\alpha''(t)$ anteriormente. Como γ é geodésica e $\gamma''(t) = 0$ se, e somente se, *ver* $\gamma''(t)$ e *hor* $\gamma''(t)$ são ambos nulos, segue então que *ver* $\gamma''(t_0)$ e *hor* $\gamma''(t_0)$ são nulos. Pelas duas equações acima deduzidas, seguem as equações 1 e 2 em t_0 .

Caso 2: $\gamma'(t_0)$ é horizontal. Como γ é geodésica, pelo corolário 1.59, já que as folhas são totalmente geodésicas (2.19), em um intervalo aberto $J \ni t_0$ segue que γ fica em $B \times \{\beta(t_0)\}$, ou seja, β é constante em J , de onde segue imediatamente a equação 2 em $J \ni t_0$. Além disso, ainda pelo corolário 1.59 temos que $\gamma|_J$ é geodésica em $B \times \{\beta(t_0)\}$. Como esta é isométrica a B e isometrias são transformações afins (corolário 1.22), $\alpha|_J = (\pi|_{B \times \{\beta(t_0)\}})_*(\gamma|_J)$ é geodésica em B , de onde segue a equação 1 em $J \ni t_0$.

Caso 3: $\gamma'(t_0)$ é vertical e não-nulo. Seja $p := \alpha(t_0)$. Assuma, inicialmente, que $(\nabla^B f)(p) = 0$. Pelo corolário 2.19, segue que $\{p\} \times F$ é totalmente geodésica. Como γ é geodésica, pelo corolário 1.59 segue então que, localmente, γ fica em $\{p\} \times F$ e é geodésica ali. Em particular, α é constante e igual a p numa vizinhança de t_0 , onde vale então a equação 1, já que $(\nabla^B f)(p) = 0$. Além disso, como $\{p\} \times F$ é homotética a F , pelo lema 1.21 segue então que $\sigma|_{\{p\} \times F}$ é afim e, portanto, numa vizinhança de t_0 temos que $\beta = (\sigma|_{\{p\} \times F})_*(\gamma)$ é geodésica, de onde segue a equação 2, já que $f \circ \alpha$ é constante.

Suponha agora que $(\nabla^B f)(p) \neq 0$. Primeiro, assuma que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ fica em $\{p\} \times F$. Segue que $\alpha|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é constante e igual a p . Além disso, se denotarmos por $\bar{\gamma} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \{p\} \times F$ a restrição de γ a $\{p\} \times F$, $i : \{p\} \times F \hookrightarrow B \times_f F$ a inclusão e $\mathbf{\Pi}$ o *shape tensor* de $\{p\} \times F$, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ temos que:

$$0 = \gamma''(t) = (i \circ \bar{\gamma})''(t) = di_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}''(t)) + \mathbf{\Pi}_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t)), \quad (\spadesuit)$$

de onde segue que $\bar{\gamma}''(t) = 0$, ou seja $\bar{\gamma}|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é geodésica em $\{p\} \times F$. Então, como $\sigma|_{\{p\} \times F}$ é transformação afim, $\beta|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é geodésica em F , o que mostra a equação 2, já que $f \circ \alpha$ é constante. Para mostrarmos a equação 1, basta que $\langle \beta', \beta' \rangle_F(t) = 0$, para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Mas, pela equação (\spadesuit) e pela proposição 2.18, para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ temos que:

$$0 = \mathbf{\Pi}_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t)) = -\frac{\langle \bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle}{f(p)} \cdot (\widetilde{\nabla^B f})(p),$$

de onde segue que $\langle \bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle = 0$, já que $(\nabla^B f)(p) \neq 0$. Como $\gamma'(t) = di_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}'(t))$ e i é imersão semi-Riemanniana, segue então que, se $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Como $\alpha|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é constante, $\alpha'|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} = 0$ e, portanto, $0 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = f(p)^2 \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_F$, o que mostra $\langle \beta', \beta' \rangle_F(t) = 0$, para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, como queríamos.

Suponha agora que não exista $\varepsilon > 0$ de forma que $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ fica em $\{p\} \times F$. Em particular, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\gamma|_{(t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})}$ não fica em $\{p\} \times F$. Agora, fixe um $k \in \mathbb{N}$. Escolha $s_k \in (t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})$ tal que $\gamma'(s_k)$ não seja vertical. Tal escolha de s_k é possível pois, do contrário, teríamos $\gamma'(t)$ vertical, para todo $t \in (t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})$, o que implica em $\alpha'|_{(t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})} = 0$, ou seja, $\alpha|_{(t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})}$ constante e igual a $p = \alpha(t_0)$, o que por sua vez contraria a hipótese de que $\gamma|_{(t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})}$ não fica em $\{p\} \times F$. Construimos assim uma sequência $\{s_k\}$ que converge para t_0 e tal que $\gamma'(s_k)$ é não-vertical, para todo k . Além disso, como $\beta'(t_0) \neq 0$ (pois estamos no caso 3), eventualmente teremos $\beta'(s_k) \neq 0$. Por simplicidade, podemos supor logo que $\beta'(s_k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, temos que $\gamma'(s_k)$ não é nem vertical e nem horizontal, para todo $k \in \mathbb{N}$. Aplicando então o caso 1 para s_k , concluimos que as equações 1 e 2 são válidas em s_k . Como $s_k \rightarrow t_0$, por continuidade dos termos envolvidos nas equações 1 e 2, segue que estas também são válidas para $t = t_0$, como queríamos.

Reciprocamente, assuma que as equações 1 e 2 sejam válidas para todo $t \in I$. Devemos mostrar que γ é geodésica e, para tanto, fixe $t_0 \in I$ para que mostremos $\gamma''(t_0) = 0$. Vamos dividir novamente nossa prova nos três mesmos casos:

Caso 1': $\gamma'(t_0)$ não é vertical nem horizontal. Pelas equações (\clubsuit) e (\heartsuit) deduzidas no caso 1 anterior, segue que *hor* $\gamma''(t_0)$ e *ver* $\gamma''(t_0)$ são ambos nulos, ou seja, $\gamma''(t_0) = 0$.

Caso 2': $\gamma'(t_0)$ é horizontal. Nesse caso, $\beta'(t_0) = 0$. Escrevendo $q = \beta(t_0)$, se $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ é carta de F em q , para t "perto" de t_0 , a equação 2 em coordenadas fica:

$$\begin{aligned} (y^k \circ \beta)''(t) &= -2 \frac{(f \circ \alpha)'(t)}{f \circ \alpha(t)} \cdot (y^k \circ \beta)'(t) - \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n (\Gamma^F)_{ij}^k \circ \beta(t) \cdot (y^i \circ \beta)'(t) \cdot (y^j \circ \beta)'(t), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (\diamond) \end{aligned}$$

pois $\beta'(t) = \sum_k (y^k \circ \beta)'(t) \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{\beta(t)}$ e

$$\beta''(t) = \sum_k \left[(y^k \circ \beta)''(t) + \sum_{i,j} (\Gamma^F)_{ij}^k \circ \beta(t) \cdot (y^i \circ \beta)'(t) \cdot (y^j \circ \beta)'(t) \right] \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{\beta(t)}.$$

Podemos interpretar a equação (\diamond) como um sistema de EDO's de segunda ordem em $\psi \circ \beta$, com condições iniciais $\psi \circ \beta(t_0) = \psi(q)$ e $(\psi \circ \beta)'(t_0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Mas, pela existência e unicidade locais para EDO's, temos que existe $\varepsilon > 0$ para o qual existe única solução para (\diamond) em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. No entanto, note que a função constante igual $\psi(q)$, definida

em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, é solução de (\diamond) , de onde segue que $\psi \circ \beta|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} = \psi(q)$, ou seja, $\beta|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é constante e igual a q . Como $\beta|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é constante, temos que $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ fica na folha $B \times \{q\}$ e que, pela equação 1, α é geodésica. Como $B \times \{q\}$ é isométrica a B , segue que γ é geodésica em $B \times \{q\}$ e, como esta é totalmente geodésica (corolário 2.19), pela proposição 1.58 segue que γ é geodésica em $B \times_f F$.

Caso 3': $\gamma'(t_0)$ é vertical e não-nulo. Sejam $p = \alpha(t_0)$ e $q = \beta(t_0)$. Assuma primeiramente que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ fique em $\{p\} \times F$ e denote por $\bar{\gamma}$ a restrição de γ a $\{p\} \times F$, $i : \{p\} \times F \hookrightarrow B \times_f F$ a inclusão e $\mathbf{\Pi}$ o *shape tensor* de $\{p\} \times F$. Dessa forma, $\alpha|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é constante e igual a p , de onde segue, pela equação 2, que $\beta|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é geodésica em F . Como esta é homotética a $\{p\} \times F$, temos que $\bar{\gamma}|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ é geodésica em $\{p\} \times F$ e, da proposição 2.18, para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ segue que:

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (i \circ \bar{\gamma})''(t) = di_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}''(t)) + \mathbf{\Pi}_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t)) \\ &= -\frac{\langle \bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle}{f(p)} \cdot (\widetilde{\nabla^B f})(p) \\ &= -f(p)^2 \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_F \cdot (\widetilde{\nabla^B f})(p), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre de contas semelhantes feitas no caso 3. Pela equação 1, segue que o lado direito da equação acima é nulo e, portanto, $\gamma''(t) = 0$ se $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, como queríamos.

Suponha agora que não existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ fica em $\{p\} \times F$. Dessa forma, dado $k \in \mathbb{N}$, tome $s_k \in (t_0 - \frac{1}{k}, t_0 + \frac{1}{k})$ de forma que $\gamma'(s_k)$ não seja vertical. Tal s_k existe pelo mesmo motivo apresentado no caso 3 e, novamente, podemos supor também $\gamma'(s_k)$ não-horizontal, já que $\beta'(t_0) \neq 0$ (hipótese do caso 3'). Aplicando o caso 1' para s_k , segue que $\gamma''(s_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, de onde segue por continuidade de γ'' e de $s_k \rightarrow t_0$ que $\gamma''(t_0) = 0$, o que encerra a prova. \square

Observação 2.26. Na notação da proposição 2.25, se γ é geodésica, a equação 2 nos diz que a função

$$(f \circ \alpha)^4 \cdot \langle \beta', \beta' \rangle_F$$

tem derivada nula em I , ou seja, é constante. Esse fato será fundamental para a subseção 3.4.1.

Para finalizar nosso estudo de produtos torcidos gerais, vamos provar um lema que nos será muito útil no capítulo 3, quando tratarmos certas isometrias entre produtos torcidos e levantamentos de campos vetoriais.

Lema 2.27. Sejam $G : B^m \rightarrow \hat{B}^m$ e $H : F^n \rightarrow \hat{F}^n$ difeomorfismos. Então, o difeomorfismo $G \times H : B \times F \rightarrow \hat{B} \times \hat{F}$ definido por $G \times H(p, q) := (G(p), H(q))$ satisfaz:

1. se $X \in \mathfrak{X}(B)$, temos $(G \times H)_* \tilde{X} = \widetilde{G_* X}$;

2. se $V \in \mathfrak{X}(F)$, então $(G \times H)_*(\widetilde{V}) = \widetilde{H_*V}$.

Demonstração. Vamos provar para o campo X e a prova para o campo V se faz de maneira análoga. Fixe $(p, q) \in B \times F$ arbitrário a fim de que tenhamos $((G \times H)_*\widetilde{X})_{(\hat{p}, \hat{q})} = (\widetilde{G_*X})_{(\hat{p}, \hat{q})}$, onde $(\hat{p}, \hat{q}) := G \times H(p, q)$. Tome cartas $p \in (\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^m)) \subseteq B$ e $q \in (\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n)) \subseteq F$ e considere a respectiva carta $(p, q) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi = (z^1, \dots, z^{m+n}))$ de $B \times F$. Fazemos agora o mesmo para \hat{B} e \hat{F} : tome cartas $\hat{p} \in (\hat{\mathcal{U}}, \hat{\varphi} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^m)) \subseteq \hat{B}$ e $\hat{q} \in (\hat{\mathcal{V}}, \hat{\psi} = (\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^n)) \subseteq \hat{F}$ e considere a respectiva carta $(\hat{p}, \hat{q}) \in (\hat{\mathcal{U}} \times \hat{\mathcal{V}}, \hat{\varphi} \times \hat{\psi} = (\hat{z}^1, \dots, \hat{z}^{m+n}))$ de $\hat{B} \times \hat{F}$ com o cuidado para que $G(\mathcal{U}) \subseteq \hat{\mathcal{U}}$ e $H(\mathcal{V}) \subseteq \hat{\mathcal{V}}$. Daí, $G \times H(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subseteq \hat{\mathcal{U}} \times \hat{\mathcal{V}}$.

Escreva

$$X|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \implies \widetilde{X}|_{\mathcal{U} \times \mathcal{V}} = \sum_{i=1}^m X^i \circ \pi \cdot \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} ((G \times H)_*\widetilde{X})_{(\hat{p}, \hat{q})} &= d(G \times H)_{(p, q)} \left(\widetilde{X}_{(p, q)} \right) = \sum_{i=1}^m X^i(p) \cdot d(G \times H)_{(p, q)} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \Big|_{(p, q)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m+n} X^i(p) \frac{\partial \left(\hat{\varphi} \times \hat{\psi} \circ G \times H \circ \varphi^{-1} \times \psi^{-1} \right)^j}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \frac{\partial}{\partial \hat{z}^j} \Big|_{(\hat{p}, \hat{q})} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m+n} X^i(p) \frac{\partial \left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \times \hat{\psi} \circ H \circ \psi^{-1} \right)^j}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \frac{\partial}{\partial \hat{z}^j} \Big|_{(\hat{p}, \hat{q})}. \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \times \hat{\psi} \circ H \circ \psi^{-1} \right)^j = \begin{cases} (\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1})^j \circ \pi_1, & 1 \leq j \leq m \\ \left(\hat{\psi} \circ H \circ \psi^{-1} \right)^{j-m} \circ \pi_2, & m+1 \leq j \leq m+n, \end{cases}$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são as projeções canônicas nas m primeiras e n últimas coordenadas, respectivamente. Logo, se $j \in \{m+1, \dots, m+n\}$, como $i \in \{1, \dots, m\}$ segue

$$\frac{\partial \left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \times \hat{\psi} \circ H \circ \psi^{-1} \right)^j}{\partial u_i} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} ((G \times H)_*\widetilde{X})_{(\hat{p}, \hat{q})} &= \sum_{i,j=1}^m X^i(p) \frac{\partial \left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \right)^j \circ \pi_1}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \frac{\partial}{\partial \hat{z}^j} \Big|_{(\hat{p}, \hat{q})} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m X^i(p) \frac{\partial \left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \right)^j}{\partial u_k} (\varphi(p)) \frac{\partial (\pi_1)^k}{\partial u_i} (\varphi(p), \psi(q)) \frac{\partial}{\partial \hat{z}^j} \Big|_{(\hat{p}, \hat{q})} \\ &= \sum_{i,j=1}^m X^i(p) \frac{\partial \left(\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1} \right)^j}{\partial u_i} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \Big|_{(\hat{p}, \hat{q})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i,j=1}^m X^i(p) \frac{\partial (\hat{\varphi} \circ G \circ \varphi^{-1})^j}{\partial u_i} (\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \Big|_{\hat{p}}, \mathcal{O}_{T_{\hat{q}}\hat{F}} \right) \\
&= \left(dG_p(X_p), \mathcal{O}_{T_{\hat{q}}\hat{F}} \right) \\
&= \left((G_*X)_{\hat{p}}, \mathcal{O}_{T_{\hat{q}}\hat{F}} \right) \\
&= \widetilde{G_*X}(\hat{p}, \hat{q}).
\end{aligned}$$

Isso prova $(G \times H)_* \tilde{X} = \widetilde{G_*X}$ e encerra a prova. □

3 O espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal

Neste capítulo, desenvolveremos os resultados principais do trabalho, explorando a geometria dos espaços-tempos de Schwarzschild e de Schwarzschild-Kruskal. Primeiramente, vamos tornar mais precisos alguns termos utilizados na motivação heurística apresentada na introdução e no capítulo 1 para o estudo desses modelos geométricos. Apresentaremos os objetos geométricos principais, com uma breve indicação de sua interpretação na Relatividade Geral.

Seja M uma variedade conexa com dimensão $n \geq 2$. A variedade M será pensada, em aplicações na Relatividade, como um modelo matematicamente conveniente para descrever a coleção de todos os *eventos físicos*, passados, presentes e futuros. Em geral, assume-se que a dimensão de interesse é $n = 4$, pois a um evento $p \in M$ podemos atribuir três coordenadas para descrever sua “posição espacial” e uma coordenada para descrever o “instante de tempo” em que p ocorreu. De fato, nossos modelos específicos terão essa dimensão, mas como a descrição geométrica geral inicial independe disso, não vamos particularizar n até ser estritamente necessário.

A variedade M , por si só, é demasiado desprovida de estrutura para ser fisicamente útil e deve ser “preenchida” das entidades físicas pertinentes. Denote por $S_2(M)$ o $C^\infty(M)$ -módulo dos $(0, 2)$ -campos tensoriais suaves e simétricos sobre M , ou seja,

$$S_2(M) := \{A \in T_2^0(M) : A \text{ é simétrico}\}.$$

O conjunto $Lor(M)$ de todas as métricas de Lorentz sobre M é subconjunto de $S_2(M)$.

Um *tensor de energia-momento* sobre M é uma aplicação $T : g \in U \subseteq Lor(M) \mapsto T_g \in S_2(M)$, onde U é algum subconjunto não-vazio de $Lor(M)$. T descreve, fisicamente, como a matéria do modelo que estamos estudando interage com o campo gravitacional, que é descrito na Relatividade Geral por uma métrica de Lorentz g sobre a variedade M . Vejamos alguns exemplos.

1) Suponha $M = (a, b) \times S$, onde (a, b) é um intervalo aberto e não-vazio de \mathbb{R} e S é uma variedade conexa de dimensão $n - 1$. Defina

$$U = \{-dt^2 + f(t)^2 \cdot h \mid f : (a, b) \longrightarrow (0, \infty) \text{ é suave e } h \text{ é métrica Riemanniana sobre } S\},$$

ou seja, U é o conjunto das métricas Lorentzianas que têm forma de produto torcido de um intervalo fixo com métrica $-dt^2$ com uma variedade Riemanniana (S, h) . Fixe duas funções suaves $\rho : (a, b) \longrightarrow (0, +\infty)$ e $p \in C^\infty(a, b)$. O tensor de energia-momento para um *fluido perfeito* com *densidade* ρ e *pressão* p é dado por:

$$T_{-dt^2+f(t)^2 \cdot h} = \rho \cdot (dt \otimes dt) + f^2 p \cdot h.$$

O fluido é chamado de *poeira* se $p = 0$. Esse tensor energia-momento é o que se utiliza em cosmologia e modela como interage gravitacionalmente um tipo de “média” da matéria e energia contida em todas as galáxias do universo.

2) Para uma constante não-negativa $m \geq 0$ fixada, seja $\phi \in C^\infty(M)$. Tome $U = Lor(M)$ e defina

$$T_g = d\phi \otimes d\phi - \frac{1}{2} g \cdot [g(\nabla^g \phi, \nabla^g \phi) + m^2 \phi^2].$$

Tal tensor energia-momento descreve um *campo escalar* ϕ de *massa* m .

3) Se $U = Lor(M)$ e $T_g = 0$ para toda g , dizemos que T descreve o *vácuo*, ou seja, regiões do universo onde a densidade de matéria e energia é desprezível para efeitos gravitacionais.

Fixados um tensor de energia-momento T e um número real Λ , um espaço-tempo (M, g) é *solução da equação de Einstein para tensor energia-momento T e constante cosmológica Λ* se

$$Ric_g - \frac{1}{2} S_g \cdot g + \Lambda \cdot g = 8\pi T_g. \quad (3.1)$$

Note que se estamos em uma situação de vácuo $T = 0$ e com constante cosmológica $\Lambda = 0$, e se $n \geq 3$, a equação 3.1 é equivalente¹ a

$$Ric_g = 0.$$

Tanto o espaço-tempo de Minkowski como o de Schwarzschild(-Kruskal) com massa $M > 0$ são soluções² desse tipo para $M = \mathbb{R}^n$ e $M = P \times \mathbb{S}^2$, onde P que será construído na seção 3.1.

O espaço-tempo de Schwarzschild de massa $M > 0$ descreve a região exterior a uma distribuição esférica de massa, mas se adequadamente estendida define o modelo mais simples de *buracos negros e brancos*, extraordinários objetos que parecem surgir diretamente da ficção científica. Essa extensão é chamada de espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal, e é ainda uma solução de vácuo com $\Lambda = 0$.

Uma vez que não há nenhuma matéria, um buraco negro/branco é uma entidade de “pura geometria” ou “pura gravidade”. Mas, nesse caso, pode-se perguntar a que a massa M associada se refere. Fisicamente, entende-se que a solução descreve o estado final de algum objeto - como uma estrela - que “colapsou” sob sua própria gravidade, e cuja massa está em “ $r = 0$ ”, inacessível para a descrição dada pela Relatividade Geral. É como se a

¹ Se $Ric_g = 0$ certamente a equação 3.1 é satisfeita pois $S_g = tr_g(Ric_g) = 0$. Supondo agora 3.1, temos $Ric_g = \frac{1}{2} S_g \cdot g$. Tomando o traço dos dois lados, segue-se que $S_g = \frac{n}{2} S_g$, o que implica $S_g = 0$ (pois $n \geq 3$) e, portanto, $Ric_g = 0$.

² O espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^n tem tensor de curvatura nulo e, portanto, $Ric = 0$. Mostraremos neste capítulo (teorema 3.9 e proposição 3.24) que Schwarzschild e Schwarzschild-Kruskal têm tensor de Ricci nulo.

Relatividade prevesse sua própria “inadequação” em $r = 0$, onde deveria ser suplantada por alguma teoria mais sofisticada a ser ainda construída, talvez de gravitação quântica.

O fato de o modelo de Schwarzschild(-Kruskal) ser uma solução da equação de Einstein (para $T = 0$ e $\Lambda = 0$) relativamente simples, mas com profundas consequências físicas e grande riqueza geométrica, é o principal motivo que nos leva a estudá-lo neste capítulo.

A estrutura deste capítulo é bastante simples: primeiramente, vamos construir o modelo de Schwarzschild e obter todos os resultados geométricos que lhe convêm (exceto o estudo das geodésicas, que será feito na seção 3.4), o que inclui provar que é solução da equação de Einstein para $T = 0$ e $\Lambda = 0$. Em seguida, vamos construir o modelo de Schwarzschild-Kruskal e resgatar os resultados geométricos de Schwarzschild. Finalmente, estudaremos em detalhes o comportamento das curvas causais em Schwarzschild-Kruskal na seção 3.4, em especial o comportamento das geodésicas causais. Na última seção, descreveremos alguns efeitos físicos esperados ao redor de um buraco negro.

3.1 O modelo de Schwarzschild

Os espaços-tempos interior e exterior de Schwarzschild serão ambos definidos como produtos torcidos. Nos cabe então indicar quem é a base, quem é a fibra e quem é a função de “warping” de cada um deles. Em ambos os casos, a fibra será a esfera “redonda” $(\mathbb{S}^2, \omega_2) = (\mathbb{S}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{S}^2})$, cuja geometria já é bem conhecida (seção 1.10). No restante deste capítulo e a menos de menção contrária, vamos fixar um número $M > 0$, que fisicamente representará a massa de nossa estrela ou buraco negro. Definimos então:

$$P_I := \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r > 2M\}$$

$$P_{II} := \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 2M\}$$

$$P := P_I \cup P_{II}.$$

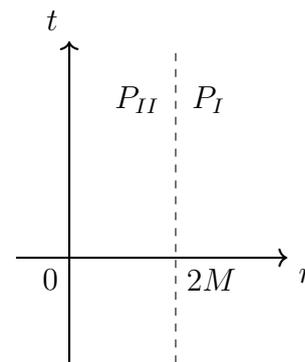


Figura 1 – Ilustração de P_I e P_{II} .

Note que P_I e P_{II} são subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 e, portanto, herdam deste sua estrutura diferenciável usual. A métrica em P_I e P_{II} , no entanto, será ligeiramente mais exótica. Como (t, r) é uma carta global em P_i , definimos a métrica g_i (também denotada por g_{P_i}) em P_i (para $i = I$ ou II) por seu elemento de linha:

$$ds^2 = -h \cdot dt^2 + h^{-1} \cdot dr^2, \quad (3.2)$$

onde $h = h(r) := 1 - \frac{2M}{r}$ é função suave em P , positiva em P_I e negativa em P_{II} . Portanto, segue que g_i tem índice 1 e que ∂_t é temporal em P_I e espacial em P_{II} , enquanto que ∂_r é espacial em P_I e temporal em P_{II} .

Definição 3.3. (*Espaços-tempos interior e exterior de Schwarzschild*)

Definimos:

1. $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ como o espaço-tempo³ exterior de Schwarzschild de massa M ;
2. $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ como o espaço-tempo interior de Schwarzschild de massa M ,

onde, para $i = I$ ou II , $r : P_i \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ é a projeção na segunda coordenada, a métrica em P_i é g_i e a métrica em \mathbb{S}^2 é a métrica redonda ω_2 .

Observe que $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ são variedades de dimensão 4 e índice 1 (Lorentzianas). Vamos denotar por⁴ $g = \langle, \rangle$ a métrica em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ e por π e σ as projeções canônicas usuais (veja capítulo 2). As funções t e r denotarão tanto as projeções definidas em P_I e P_{II} quanto em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ e o contexto deixará claro o domínio em questão, o mesmo acontecendo para a função h . A notação $P_{I,II}$ [resp. $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$] significará que a respectiva afirmação vale tanto para P_I [resp. $P_I \times_r \mathbb{S}^2$] quanto para P_{II} [resp. $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$].

A fim de calcular o elemento de linha de $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$ com respeito às coordenadas geográficas em \mathbb{S}^2 , considere:

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Como (t, r) são coordenadas globais em $P_{I,II}$, (t, r, θ, ϕ) são coordenadas em (um subconjunto aberto de) $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$. Vamos denotar por ∂_t e ∂_r os levantamentos dos respectivos campos coordenados de P_I e P_{II} e o mesmo faremos para os campos coordenados ∂_θ e ∂_ϕ . Dessa forma, pelo lema 2.16 temos:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t, \partial_t \rangle &= \langle \partial_t, \partial_t \rangle_{P_{I,II}} \circ \pi = -h; \\ \langle \partial_r, \partial_r \rangle &= \langle \partial_r, \partial_r \rangle_{P_{I,II}} \circ \pi = h^{-1}; \\ \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle &= r^2 \cdot \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma = r^2; \\ \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle &= r^2 \cdot \langle \partial_\phi, \partial_\phi \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Ainda pelo lema 2.16 e pelo fato de $\langle \partial_t, \partial_r \rangle_{P_{I,II}} = 0$ e $\langle \partial_\theta, \partial_\phi \rangle_{\mathbb{S}^2} = 0$, os termos cruzados são todos nulos, de forma que o elemento de linha de g fica:

$$ds^2 = -h \cdot dt^2 + h^{-1} \cdot dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2).$$

³ Para evitar mudanças canhestras de nomenclatura, cometeremos aqui um leve abuso de linguagem ao chamar a estas variedades de Lorentz de “espaços-tempos” antes de definir uma orientação temporal, o que será feito mais adiante.

⁴ $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ são formalmente parecidos, de forma que a notação não causará confusão.

Nosso objetivo agora é obter alguns resultados geométricos sobre $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e sobre $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$. Como as métricas em P_I e em P_{II} são formalmente as mesmas, é de se esperar que alguns fenômenos geométricos sejam semelhantes em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, bem como suas demonstrações, o que justifica utilizarmos a notação $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$. Destacamos, no entanto, que a interpretação física destes fenômenos será diferente em cada um dos casos.

Na teoria geral de produtos torcidos que desenvolvemos anteriormente, ficou claro que alguns entes geométricos do produto torcido são determinados a partir dos respectivos entes da base e da fibra e a partir da função de *warping*. Como já conhecemos a geometria de (\mathbb{S}^2, ω_2) (conexão, curvatura, geodésicas, campos de Killing, etc. Veja seção 1.10), vamos investigar o que acontece com $P_{I,II}$:

Lema 3.4. *Em $P_I \cup P_{II}$, temos:*

1. $\nabla_{\partial_t} \partial_t = \frac{Mh}{r^2} \cdot \partial_r$
 $\nabla_{\partial_t} \partial_r = \nabla_{\partial_r} \partial_t = \frac{M}{hr^2} \cdot \partial_t$
 $\nabla_{\partial_r} \partial_r = -\frac{M}{hr^2} \cdot \partial_r$
2. $\nabla t = -\frac{1}{h} \partial_t$ e $\nabla r = h \partial_r$
3. $Hess_r = \frac{M}{r^2} \cdot g_{I,II}$
 $Hess_t = -\frac{M}{hr^2} (dt \otimes dr + dr \otimes dt)$
4. $Sec = \frac{2M}{r^3}$

Demonstração. Os itens 1 e 2 são imediatos da definição de $g_{I,II}$ dada pela equação 3.2, bastando utilizar as fórmulas presentes na definição 1.12 e no lema 1.15. Para o item 3, utilizando os itens 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned} Hess_r(\partial_t, \partial_t) &= \langle \nabla_{\partial_t} \nabla r, \partial_t \rangle = \partial_t \langle \nabla r, \partial_t \rangle - \langle \nabla r, \nabla_{\partial_t} \partial_t \rangle = \\ &= -\frac{Mh^2}{r^2} \langle \partial_r, \partial_r \rangle = \frac{M}{r^2} \langle \partial_t, \partial_t \rangle, \end{aligned}$$

$$Hess_r(\partial_t, \partial_r) = \partial_t \langle \nabla r, \partial_r \rangle - \langle \nabla r, \nabla_{\partial_t} \partial_r \rangle = \partial_t(1) = 0,$$

$$Hess_r(\partial_r, \partial_r) = \partial_r \langle \nabla r, \partial_r \rangle - \langle \nabla r, \nabla_{\partial_r} \partial_r \rangle = \frac{M}{r^2} \langle \partial_r, \partial_r \rangle.$$

Daí, como $Hess_r$ e $g_{I,II}$ são tensoriais, segue que $Hess_r = \frac{M}{r^2} \cdot g_{I,II}$, como queríamos. A $Hess_t$ é calculada de maneira análoga.

Para o item 4, pelo item 1, temos:

$$R(\partial_t, \partial_r)\partial_r = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_r}\partial_r - \nabla_{\partial_r}\nabla_{\partial_t}\partial_r = \frac{2M}{hr^3}\partial_t.$$

Daí, ficamos com:

$$Sec = \frac{\langle R(\partial_t, \partial_r)\partial_r, \partial_t \rangle}{\langle \partial_t, \partial_t \rangle \langle \partial_r, \partial_r \rangle - \langle \partial_t, \partial_r \rangle^2} = \frac{2M}{hr^3} \frac{\langle \partial_t, \partial_t \rangle}{-1} = \frac{2M}{r^3},$$

como queríamos. \square

Estamos agora em condições de calcular a conexão de Levi-Civita e a curvatura de $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$:

Proposição 3.5. (Conexão em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$)

Em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$, se $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, temos:

1. $\nabla_{\partial_t}\partial_t = \frac{Mh}{r^2} \cdot \partial_r$;
 $\nabla_{\partial_t}\partial_r = \nabla_{\partial_r}\partial_t = \frac{M}{hr^2} \cdot \partial_t$;
 $\nabla_{\partial_r}\partial_r = -\frac{M}{hr^2} \cdot \partial_r$;
2. $\nabla_{\tilde{V}}\partial_t = \nabla_{\partial_t}\tilde{V} = 0$;
 $\nabla_{\tilde{V}}\partial_r = \nabla_{\partial_r}\tilde{V} = \frac{1}{r} \cdot \tilde{V}$;
3. $hor(\nabla_{\tilde{V}}\tilde{W}) = \mathbf{\Pi}(\tilde{V}, \tilde{W}) = -\frac{h}{r} \cdot \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot \partial_r$, onde $\mathbf{\Pi}$ é shape tensor de cada fibra;
4. $ver(\nabla_{\tilde{V}}\tilde{W})$ é o levantamento de $\nabla_{\tilde{V}}^{\mathbb{S}^2}W$.

Demonstração. A demonstração é imediata da proposição 2.18 e do lema 3.4. \square

Observação 3.6. De posse do lema 2.13, a proposição acima continua válida se substituirmos \tilde{V} e \tilde{W} nos itens 2 (apenas as igualdades para $\nabla_{\tilde{V}}\partial_t$ e $\nabla_{\tilde{V}}\partial_r$) e 3 por campos verticais \bar{V} e \bar{W} .

Proposição 3.7. (Tensor curvatura em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$)

Em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$, se $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, então:

1. $R(\partial_t, \partial_r)\partial_t = \frac{2Mh}{r^3} \cdot \partial_r$;
 $R(\partial_r, \partial_t)\partial_r = -\frac{2M}{hr^3} \cdot \partial_t$;
- $R(\partial_t, \partial_t)\partial_t = R(\partial_t, \partial_t)\partial_r = R(\partial_r, \partial_r)\partial_t = R(\partial_r, \partial_r)\partial_r = 0$;

2. $R(\tilde{V}, \partial_t)\partial_t = \frac{Mh}{r^3} \cdot \tilde{V};$
- $R(\tilde{V}, \partial_r)\partial_r = -\frac{M}{hr^3} \cdot \tilde{V};$
- $R(\tilde{V}, \partial_t)\partial_r = R(\tilde{V}, \partial_r)\partial_t = 0;$
3. $R(\partial_r, \partial_t)\tilde{V} = R(\tilde{V}, \tilde{W})\partial_t = R(\tilde{V}, \tilde{W})\partial_r = 0;$
4. se $X = \partial_t$ ou ∂_r , $R(X, \tilde{V})\tilde{W} = R(X, \tilde{W})\tilde{V} = -\frac{M}{r^3}\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot X;$
5. $R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U} = \frac{2M}{r^3} [\langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V} - \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W}].$

Demonstração. Os itens 1, 2, 3 e 4 seguem imediatamente da proposição 2.21, do lema 3.4 e do lema 1.37. Por exemplo, pela proposição 2.21, $R(\partial_t, \partial_r)\partial_t$ é o levantamento de $R^{P_{I,II}}(\partial_t, \partial_r)\partial_t$. Mas, pelo lema 3.4 item 4, segue que:

$$R^{P_{I,II}}(\partial_t, \partial_r)\partial_t = \frac{2M}{r^3} \left(\langle \partial_r, \partial_t \rangle \partial_t - \langle \partial_t, \partial_t \rangle \partial_r \right) = \frac{2Mh}{r^3} \partial_r,$$

de onde vem $R(\partial_t, \partial_r)\partial_t = \frac{2Mh}{r^3} \partial_r$.

Para o item 5, a curvatura seccional de \mathbb{S}^2 é 1 (proposição 1.74), logo $R^{\mathbb{S}^2}(V, W)U = \langle W, U \rangle_{\mathbb{S}^2} V - \langle V, U \rangle_{\mathbb{S}^2} W$ (proposição 1.42). Segue então da proposição 2.21 e do lema 3.4 que:

$$\begin{aligned} R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U} &= \langle W, U \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma \cdot \tilde{V} - \langle V, U \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma \cdot \tilde{W} + \\ &+ \frac{\langle \nabla r, \nabla r \rangle_{P_{I,II}}}{r^2} \cdot (\langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W} - \langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V}) \\ &= \frac{1}{r^2} (\langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V} - \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W}) + \frac{h}{r^2} (\langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W} - \langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V}) \\ &= \left(\frac{1-h}{r^2} \right) (\langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V} - \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W}) \\ &= \frac{2M}{r^3} (\langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V} - \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W}), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Observação 3.8. *Da maneira como a proposição 3.7 está escrita, conclusões precipitadas podem ser tiradas sobre o comportamento do tensor de curvatura R quando $r \rightarrow 2M$, ou seja, $h \rightarrow 0$. Assim, vamos explicitar as fórmulas da proposição 3.7 para os campos ∂_t e ∂_r normalizados. Para tanto, considere $\xi := \text{sgn } h$, ou seja, $\xi = 1$ se $r > 2M$ (em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$) e $\xi = -1$ se $r < 2M$ (em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$), de forma que a função $\xi \cdot h$ é positiva em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$. Dessa forma, definindo os campos vetoriais unitários u_t e u_r em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$ por*

$$u_t := \frac{1}{\sqrt{\xi h}} \cdot \partial_t \quad \text{e} \quad u_r := \sqrt{\xi h} \cdot \partial_r$$

e utilizando que R é $C^\infty(P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2)$ -trilinear, podemos reescrever as equações da proposição 3.7 como:

1. $R(u_t, u_r)u_t = \xi \cdot \frac{2M}{r^3} \cdot u_r;$
 $R(u_r, u_t)u_r = -\xi \cdot \frac{2M}{r^3} \cdot u_t;$
 $R(u_t, u_t)u_t = R(u_t, u_t)u_r = R(u_r, u_r)u_t = R(u_r, u_r)u_r = 0;$
2. $R(\tilde{V}, u_t)u_t = \xi \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \tilde{V};$
 $R(\tilde{V}, u_r)u_r = -\xi \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \tilde{V};$
 $R(\tilde{V}, u_t)u_r = R(\tilde{V}, u_r)u_t = 0;$
3. $R(u_r, u_t)\tilde{V} = R(\tilde{V}, \tilde{W})u_t = R(\tilde{V}, \tilde{W})u_r = 0;$
4. se $X = u_t$ ou u_r , $R(X, \tilde{V})\tilde{W} = R(X, \tilde{W})\tilde{V} = -\frac{M}{r^3} \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot X.$

Note que as proposições 3.5 e 3.7 nos permitem calcular a conexão (de Levi-Civita) ∇ e o tensor de curvatura R de $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ em quaisquer campos vetoriais, não necessariamente levantamentos (basta aplicar a proposição 2.12 e o lema 2.13).

Estamos agora aptos a provar que ambos $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ são soluções da equação de Einstein 3.1 para o tensor energia-momento $T = 0$, sendo portanto uma solução de vácuo para constante cosmológica $\Lambda = 0$:

Teorema 3.9. $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$ é “Ricci-plano”, ou seja, $Ric = 0$.

Demonstração. Como Ric é tensorial, pela proposição 2.12 e pelo lema 2.13, basta mostrarmos que Ric se anula em campos vetoriais que são levantamentos. Para tanto, sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(P_{I,II})$ e $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$.

$Ric(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0$ segue da proposição 2.23. Pela mesma proposição e pelo lema 3.4, temos:

$$Ric(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(Ric^{P_{I,II}}(X, Y) - \frac{2}{r} \cdot Hess_r^{P_{I,II}}(X, Y) \right) \circ \pi.$$

Como $Hess_r^{P_{I,II}}(X, Y) = \frac{M}{r^2} \cdot \langle X, Y \rangle_{P_{I,II}}$, basta nós provarmos que $Ric^{P_{I,II}}(X, Y) = \frac{2M}{r^3} \langle X, Y \rangle_{P_{I,II}}$. Defina $\xi := \text{sgn}(h)$. Daí, segue que $\left(\frac{1}{\sqrt{\xi h}} \partial_t, \sqrt{\xi h} \partial_r \right)$ é referencial ortonormal em $P_{I,II}$. Como $\langle \frac{1}{\sqrt{\xi h}} \partial_t, \frac{1}{\sqrt{\xi h}} \partial_t \rangle_{P_{I,II}} = -\xi$ e $\langle \sqrt{\xi h} \partial_r, \sqrt{\xi h} \partial_r \rangle = \xi$, pela definição 1.44, pela proposição 1.42, pelo lema 3.4 e omitindo a menção a $P_{I,II}$ na métrica, temos:

$$Ric^{P_{I,II}}(X, Y) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\xi \cdot \left\langle R^{P_I, II} \left(\frac{\partial_t}{\sqrt{\xi h}}, Y \right) X, \frac{\partial_t}{\sqrt{\xi h}} \right\rangle + \xi \cdot \left\langle R^{P_I, II} \left(\sqrt{\xi h} \partial_r, Y \right) X, \sqrt{\xi h} \partial_r \right\rangle \\
&= -\frac{1}{h} \langle R^{P_I, II}(\partial_t, Y)X, \partial_t \rangle + h \langle R^{P_I, II}(\partial_r, Y)X, \partial_r \rangle \\
&= -\frac{2M}{hr^3} \left\langle \langle X, Y \rangle \partial_t - \langle \partial_t, X \rangle Y, \partial_t \right\rangle + \frac{2Mh}{r^3} \left\langle \langle X, Y \rangle \partial_r - \langle \partial_r, X \rangle Y, \partial_r \right\rangle \\
&= \frac{2M}{r^3} \left(\langle X, Y \rangle + \frac{1}{h} \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Y \rangle + \langle X, Y \rangle - h \langle \partial_r, X \rangle \langle \partial_r, Y \rangle \right).
\end{aligned}$$

Basta então que $\frac{1}{h} \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Y \rangle + \langle X, Y \rangle - h \langle \partial_r, X \rangle \langle \partial_r, Y \rangle = 0$, o que pode ser verificado pelo leitor escrevendo-se $X = X^1 \partial_t + X^2 \partial_r$ e $Y = Y^1 \partial_t + Y^2 \partial_r$. Isso prova que $Ric(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$.

Basta agora mostrar que se anula também o caso $Ric(\tilde{V}, \tilde{W})$. De fato, pela proposição 2.23, pelo lema 3.4 e omitindo a menção a $P_{I, II}$ no Laplaciano e no gradiente de $r \in C^\infty(P_{I, II})$ e também na métrica, temos:

$$\begin{aligned}
Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) &= Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W) \circ \sigma - \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle \cdot \left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\langle \nabla r, \nabla r \rangle}{r^2} \right) \circ \pi \\
&= Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W) \circ \sigma - \langle V, W \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma \cdot (r \Delta r + h) \circ \pi.
\end{aligned}$$

Como, pelo lema 3.4, $Hess_r = \frac{M}{r^2} \cdot g_{P_{I, II}}$, segue que $\Delta r = tr Hess_r = \frac{2M}{r^2} \implies r \Delta r + h = \frac{2M}{r} + h = 1$. Daí, $Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) = 0 \iff Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W) = \langle V, W \rangle_{\mathbb{S}^2}$. Sejam, então, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}^2$ aberto e $E_1, E_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ um referencial ω_2 -ortonormal. Omitindo a menção à métrica ω_2 e lembrando que a curvatura seccional de \mathbb{S}^2 é 1 (proposição 1.74), temos:

$$\begin{aligned}
Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W) \Big|_{\mathcal{U}} &= \langle R^{\mathbb{S}^2}(E_1, W)V, E_1 \rangle + \langle R^{\mathbb{S}^2}(E_2, W)V, E_2 \rangle \\
&= \left\langle \langle V, W \rangle E_1 - \langle E_1, V \rangle W, E_1 \right\rangle + \left\langle \langle V, W \rangle E_2 - \langle E_2, V \rangle W, E_2 \right\rangle \\
&= \langle V, W \rangle - \langle E_1, V \rangle \langle E_1, W \rangle + \langle V, W \rangle - \langle E_2, V \rangle \langle E_2, W \rangle.
\end{aligned}$$

Escrevendo $V|_{\mathcal{U}} = V^1 E_1 + V^2 E_2$ e $W|_{\mathcal{U}} = W^1 E_1 + W^2 E_2$, o leitor pode se convencer de que $-\langle E_1, V \rangle \langle E_1, W \rangle + \langle V, W \rangle - \langle E_2, V \rangle \langle E_2, W \rangle = 0$. Daí, $Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W)|_{\mathcal{U}} = \langle V, W \rangle|_{\mathcal{U}}$. Como \mathcal{U} é arbitrário, segue que $Ric^{\mathbb{S}^2}(V, W) = \langle V, W \rangle$, o que mostra $Ric(\tilde{V}, \tilde{W}) = 0$ e conclui o teorema. \square

Estamos interessados também em calcular os campos de Killing em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$. Para tanto, tendo em mãos a proposição 2.24, vamos inicialmente calcular os campos de Killing em P_I e P_{II} .

Proposição 3.10. *Os campos de Killing em $P_{I, II}$ são os campos da forma $c \cdot \partial_t$, onde $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $X = A(t, r) \partial_t + B(t, r) \partial_r$ campo em $P_{I, II}$. Nesse caso, as equações de Killing (lema 1.64)

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} g_{ki} = 0, \quad \text{para } k \in \{1, 2\}$$

tornam-se as seguintes equações:

$$\frac{M}{hr^2}B + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

$$-\frac{M}{hr^2}B + \frac{\partial B}{\partial r} = 0 \quad (**)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - h^2 \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \quad (***)$$

Note que se A é uma constante c e $B = 0$, as três equações acima são satisfeitas, ou seja, os campos da forma $X = c \cdot \partial_t$ são de Killing em $P_{I,II}$. Reciprocamente, assumamos que X é de Killing. Devemos provar que $B = 0$ e que A é constante. Defina $\varepsilon := \text{sgn}(h)$ (função sinal), isto é, $\varepsilon = 1$ em P_I e $\varepsilon = -1$ em P_{II} , de forma que $\varepsilon h > 0$ em $P_{I,II}$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \partial_r \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \cdot B \right) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \frac{\partial B}{\partial r} + B \cdot \partial_r \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\partial_r(\sqrt{\varepsilon h})}{\varepsilon h} B \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{M}{hr^2} B \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da equação (**). Isso prova que a função $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \cdot B$ independe de r , isto é, existe uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon h}} \cdot B = g(t),$$

ou seja,

$$B(t, r) = \sqrt{\varepsilon h} \cdot g(t). \quad (*)$$

Nosso objetivo é provar que a função g é identicamente nula. Para tanto, lembrando que $h = h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ e derivando a equação (*) com relação a r e a equação (***) com relação a t nos dá, respectivamente, que:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial r} + \frac{M}{hr^2} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2M(r-M)}{h^2 r^4} B = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - h^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial r} = 0.$$

Isolando a derivada mista de A na segunda equação acima, substituindo na primeira e utilizando a equação (**), após as devidas simplificações, temos:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \frac{M}{r^4} (3M - 2r) B = 0.$$

Substituindo a equação (*) na equação acima implica que:

$$g''(t) = \frac{M}{r^4} (2r - 3M) g(t). \quad (**)$$

Fixe agora $t \in \mathbb{R}$. Em P_I , fazemos $r \rightarrow \infty$ na equação acima e temos $g''(t) = 0$. Como t é arbitrário, $g'' = 0$. Mas, ainda pela equação (**), fixado $r \neq \frac{3M}{2}$ qualquer, como $g'' = 0$ segue $g = 0$. Em P_{II} , fazemos $r \rightarrow 0$ na equação (**). Então $\frac{M}{r^4}(2r - 3M) \rightarrow \infty$ e, como o lado esquerdo da equação (**) é um número, devemos ter $g(t) = 0, \forall t$, o que prova $g = 0$. Em qualquer uma das regiões P_I ou P_{II} temos, pois, $g = 0$, donde $B = 0$ pela equação (*). Substituindo agora $B = 0$ nas equações (*) e (***) e lembrando que $h(r) \neq 0, \forall r$, segue:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 = \frac{\partial A}{\partial r},$$

donde A é constante, o que encerra a prova. \square

Teorema 3.11. *Todo campo de Killing em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ ou $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ é da forma $c \cdot \partial_t + \tilde{V}$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ é de Killing.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que os campos da forma $c \cdot \partial_t + \tilde{V}$ são, de fato, campos de Killing. Como V é de Killing em \mathbb{S}^2 , pelo lema 2.24 segue que \tilde{V} é de Killing em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$. Além disso, das proposições 3.10 e 2.24 item 3, como $\partial_t(r) = 0$, segue que ∂_t é campo de Killing em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$.

Dessa forma, como os campos de Killing formam um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2)$, segue que os campos da forma $c \cdot \partial_t + \tilde{V}$ são de Killing, para $c \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ de Killing. Isso prova a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, considere $Y \in \mathfrak{X}(P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2)$ de Killing e escreva $Y = \text{hor } Y + \text{ver } Y$ (proposição 2.12). Fixe, por hora, $q \in \mathbb{S}^2$. Pelo corolário 2.19, temos que $P_{I,II} \times \{q\}$ é totalmente geodésica. Dessa forma, pelo lema 1.72, segue que $(\text{hor } Y)|_{P_{I,II} \times \{q\}}$ é campo de Killing em $P_{I,II} \times \{q\}$. Mas pela proposição 3.10 e pelo lema 1.68 aplicado à isometria $\pi|_{P_{I,II} \times \{q\}}$, os únicos campos de Killing em $P_{I,II} \times \{q\}$ são da forma $c \cdot \partial_t$ (onde este ∂_t é a restrição de $\partial_t \in \mathfrak{X}(P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2)$ a $P_{I,II} \times \{q\}$). Assim, existe um (único) número $f(q)$ de forma que $(\text{hor } Y)|_{P_{I,II} \times \{q\}} = f(q) \cdot \partial_t|_{P_{I,II} \times \{q\}}$.

Como $q \in \mathbb{S}^2$ é qualquer, mostramos que fica bem definida uma função real f em \mathbb{S}^2 que satisfaz $\text{hor } Y = \tilde{f} \cdot \partial_t$, onde $\tilde{f} := f \circ \sigma$. Para mostrarmos que f é suave em \mathbb{S}^2 , note que

$$\tilde{f} = -\frac{1}{h} \langle \tilde{f} \cdot \partial_t, \partial_t \rangle = -\frac{1}{h} \langle \text{hor } Y, \partial_t \rangle,$$

o que mostra \tilde{f} suave em $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$. Agora, fixado $p \in P_{I,II}$, denote por $i_p : \mathbb{S}^2 \rightarrow P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$ a função dada por $i_p(q) := (p, q)$. Daí, temos a igualdade $f = \tilde{f} \circ i_p$, de onde segue que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$.

Seja $\bar{V} := \text{ver } Y$, o que nos permite escrever $Y = \tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}$. Nos resta provar que \tilde{f} é constante (ou, equivalentemente, que f é constante) e que \bar{V} é o levantamento vertical de algum campo de Killing de \mathbb{S}^2 .

Fixe $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ arbitrário. Como Y é de Killing, em particular, temos $\langle \nabla_{\partial_t} Y, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_t \rangle = 0$. Agora, utilizando a proposição 3.5, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_t} Y, \tilde{Z} \rangle &= \langle \nabla_{\partial_t} (\tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}), \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{f} \cdot \nabla_{\partial_t} \partial_t + \partial_t(\tilde{f})\partial_t + \nabla_{\partial_t} \bar{V}, \tilde{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t} \bar{V}, \tilde{Z} \rangle = \partial_t \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle - \langle \bar{V}, \nabla_{\partial_t} \tilde{Z} \rangle = \partial_t \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_t \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{Z}} (\tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}), \partial_t \rangle = \langle (Zf) \circ \sigma \cdot \partial_t + \tilde{f} \cdot \nabla_{\tilde{Z}} \partial_t + \nabla_{\tilde{Z}} \bar{V}, \partial_t \rangle \\ &= -h \cdot (Zf) \circ \sigma + \langle \nabla_{\tilde{Z}} \bar{V}, \partial_t \rangle = -h \cdot (Zf) \circ \sigma + \tilde{Z} \langle \bar{V}, \partial_t \rangle - \langle \bar{V}, \nabla_{\tilde{Z}} \partial_t \rangle \\ &= -h \cdot (Zf) \circ \sigma. \end{aligned}$$

Daí, de $\langle \nabla_{\partial_t} Y, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_t \rangle = 0$ segue que

$$h \cdot (Zf) \circ \sigma = \partial_t \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle. \quad (3.12)$$

Além disso, como Y é de Killing, $\langle \nabla_{\partial_r} Y, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_r \rangle = 0$ e pela proposição 3.5 temos também que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_r} Y, \tilde{Z} \rangle &= \langle \nabla_{\partial_r} (\tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}), \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{f} \cdot \nabla_{\partial_r} \partial_t + \partial_r(\tilde{f})\partial_t + \nabla_{\partial_r} \bar{V}, \tilde{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_r} \bar{V}, \tilde{Z} \rangle = \partial_r \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle - \langle \bar{V}, \nabla_{\partial_r} \tilde{Z} \rangle = \partial_r \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle - \frac{1}{r} \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_r \rangle &= \langle \nabla_{\tilde{Z}} (\tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}), \partial_r \rangle = \langle \tilde{f} \cdot \nabla_{\tilde{Z}} \partial_t + (Zf) \circ \sigma \cdot \partial_t + \nabla_{\tilde{Z}} \bar{V}, \partial_r \rangle \\ &= \langle \nabla_{\tilde{Z}} \bar{V}, \partial_r \rangle = \tilde{Z} \langle \bar{V}, \partial_r \rangle - \langle \bar{V}, \nabla_{\tilde{Z}} \partial_r \rangle = -\frac{1}{r} \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Segue então de $\langle \nabla_{\partial_r} Y, \tilde{Z} \rangle + \langle \nabla_{\tilde{Z}} Y, \partial_r \rangle = 0$ que

$$\partial_r \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle = \frac{2}{r} \langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle. \quad (3.13)$$

Fixe $q \in \mathbb{S}^2$ arbitrário e considere $\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle$ como função apenas de t e r em $P_{I,II} \times_r \{q\} = \sigma^{-1}(q)$. Pela equação 3.13, em $\sigma^{-1}(q)$ segue que

$$\partial_r \left(\frac{\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle}{r^2} \right) = 0,$$

ou seja, a função $\frac{\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle}{r^2}$ independe de r . Escreva, então, $\frac{\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle}{r^2} = g(t)$, com $t \in \mathbb{R}$, de forma que em $\sigma^{-1}(q)$ tenhamos

$$\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle = g(t)r^2. \quad (3.14)$$

Substituindo então a equação anterior na equação 3.12 ficamos com:

$$g'(t)r^2 = h \cdot (Zf) \circ \sigma|_{\sigma^{-1}(q)} = h \cdot (zf),$$

onde $z := Z_q \in T_q\mathbb{S}^2$. Mas, como $h = 1 - \frac{2M}{r}$ e zf é um número real, fazendo $r \rightarrow \infty$ na equação acima, concluímos que $g'(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e, como $h \neq 0$, $zf = 0$.

Segue então que, como o campo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ e o ponto $q \in \mathbb{S}^2$ eram arbitrários desde o princípio, $Zf = 0$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, ou seja, f é constante e igual a um $c \in \mathbb{R}$. Além disso, $g' = 0 \Rightarrow g$ constante em $\sigma^{-1}(q)$, i.e., g independe de t e r . Em $\sigma^{-1}(q)$ escreva, pois, $g = k(q)$. Da equação 3.14 temos:

$$k(q) = k(t, r, q) = \frac{\langle \bar{V}, \tilde{Z} \rangle(t, r, q)}{r^2} = \langle d\sigma_{(t,r,q)}(\bar{V}_{(t,r,q)}), Z_q \rangle_{\mathbb{S}^2}, \quad \forall (t, r) \in P_{I,II}.$$

Fixando $q \in \mathbb{S}^2$ e tomando $\{z_1, z_2\}$ uma base ortonormal em $T_q\mathbb{S}^2$, se $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ estendem z_1 e z_2 (ou seja, $Z_i(q) = z_i$), substituindo Z_1 e Z_2 na equação acima obtemos que $d\sigma_{(t,r,q)}(\bar{V}_{(t,r,q)})$ independe⁵ de t e r , de forma que podemos definir o campo V em \mathbb{S}^2 por

$$V_p := d\sigma_{(t,r,p)}(\bar{V}_{(t,r,p)}), \quad \forall p \in \mathbb{S}^2.$$

Pela definição de V e como \bar{V} é vertical, segue que $\bar{V} = \tilde{V}$ e, como \bar{V} é suave, $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$. Nos resta ver que V é de Killing em \mathbb{S}^2 , mas isso também já está feito, pois como $Y = \tilde{f} \cdot \partial_t + \bar{V}$ e $f = \tilde{f} = c \in \mathbb{R}$, segue que $\bar{V} = Y - c \cdot \partial_t$. Como ambos Y e $c \cdot \partial_t$ são de Killing, segue que $\tilde{V} = \bar{V}$ é de Killing. Pela proposição 2.24, segue finalmente que V é de Killing em \mathbb{S}^2 , o que encerra a demonstração. \square

Corolário 3.15. *Em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$, todo campo de Killing temporal é da forma $c \cdot \partial_t$ e, em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, todo campo de Killing é espacial.*

Demonstração. Primeiro, nos concentremos em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$. Note que os campos de Killing da forma $c \cdot \partial_t$ são, de fato, temporais, pois $\langle c \cdot \partial_t, c \cdot \partial_t \rangle = -hc^2 < 0$ já que $h > 0$. Agora, se $Y = c \cdot \partial_t + \tilde{V}$ é de Killing e é temporal, temos:

$$-c^2h + r^2 \langle V, V \rangle_{\mathbb{S}^2} = \langle Y, Y \rangle < 0.$$

Fixado $q \in \mathbb{S}^2$, como $\langle V_q, V_q \rangle_{\mathbb{S}^2} \geq 0$, calculando a expressão acima em q e fazendo $r \rightarrow \infty$ nos dá $\langle V_q, V_q \rangle_{\mathbb{S}^2} = 0$, pois $h(r) \rightarrow 1$. Segue daí que $V_q = 0$. Como q é arbitrário, segue $V = 0$, o que mostra $Y = c \cdot \partial_t$.

Agora, se $Y = c \cdot \partial_t + \tilde{V}$ é campo de Killing em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, temos que $\langle Y, Y \rangle = -c^2h + r^2 \langle V, V \rangle_{\mathbb{S}^2} \circ \sigma \geq 0$, pois $h < 0$. Se $Y_{(t,r,q)} = 0$, não há nada a fazer pois o vetor nulo é espacial. Se $(t, r, q) \in P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ é tal que $Y_{(t,r,q)} \neq 0$, temos que ou $c \neq 0$ ou $V_q \neq 0$. Em qualquer um dos casos, teremos $\langle Y, Y \rangle(t, r, q) > 0$, ou seja, $Y_{(t,r,q)}$ espacial. Isso mostra que os campos de Killing em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ são todos espaciais e encerra a prova. \square

⁵ Pois os coeficientes de $d\sigma_{(t,r,q)}(\bar{V}_{(t,r,q)})$ na base $\{z_1, z_2\}$ independem de t e r .

3.2 O plano de Kruskal

Anteriormente, construímos os espaços-tempos exterior e interior de Schwarzschild como dois produtos torcidos independentes. Por motivos físicos, esperamos poder “colar” esses dois modelos num só para que, por exemplo, faça sentido uma frase como “a partícula entrou no buraco negro”, sugerindo que ela pudesse estar “fora” dele anteriormente.

Nesse sentido, alguém poderia se perguntar o porquê de não definirmos a variedade Lorentziana $P = P_I \cup P_{II}$ com a métrica como na equação 3.2. Rapidamente se percebe que, como P é desconexo, a variedade $P \times_r \mathbb{S}^2$ assim definida, que esperamos representar ambos $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, é desconexa, o que mantém a frase anterior sem sentido. De fato, o que faremos nesta seção é construir outra variedade Lorentziana de dimensão 2, que possua cópias isométricas de P_I e P_{II} como subvariedades, e que seja conexa (!), para em seguida (próxima seção) podermos “colar” $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$.

Inicialmente, defina a função suave $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(r) := (r - 2M) \cdot e^{\frac{r}{2M}-1}.$$

Note que f' é dada por

$$f'(r) = \frac{r}{2M} \cdot e^{\frac{r}{2M}-1}$$

e, portanto, $f' > 0$. Pelo teorema da função inversa e como $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = -\frac{2M}{e}$, temos que $f : (0, \infty) \rightarrow (-\frac{2M}{e}, \infty)$ é difeomorfismo crescente.

Defina o conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ por

$$Q := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : uv > -\frac{2M}{e} \right\}.$$

Como Q é aberto, possui naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão 2. Além disso, fica bem definida a função suave $r : Q \rightarrow (0, \infty)$ dada por $r(u, v) := f^{-1}(uv)$. A função r não recebe esse nome por acaso: a menos de isometria, ela será precisamente a projeção r de $P_I \cup P_{II}$! Sendo assim, é interessante observarmos as curvas de nível de r . Note que $(u, v) \in r^{-1}(c) \iff r(u, v) = c \iff f^{-1}(uv) = c \iff uv = f(c)$.

Assim, $r^{-1}(2M) = \{(u, v) : uv = f(2M) = 0\}$, ou seja, é a união dos eixos coordenados u e v . Suponha agora $r_1 > r_2 > 0$. Então, $(u, v) \in r^{-1}(r_1) \iff uv = f(r_1)$ e $(u, v) \in r^{-1}(r_2) \iff uv = f(r_2)$. Como f é crescente, $f(r_1) > f(r_2)$. Daí, se por um momento definirmos o *poder* de uma hipérbole $\{(u, v) : uv = k\}$ como o número real k , então a discussão anterior nos mostra que a hipérbole $r^{-1}(r_1)$ é “mais poderosa” que a hipérbole $r^{-1}(r_2)$ se $r_1 > r_2$ (veja figura 2).

Os quadrantes abertos de Q serão numerados como I, II, III e IV (veja figura 2) e serão doravante denotados por $Q_{\mathcal{N}}$, para $\mathcal{N} = \text{I, II, III ou IV}$. É de se notar uma semelhança

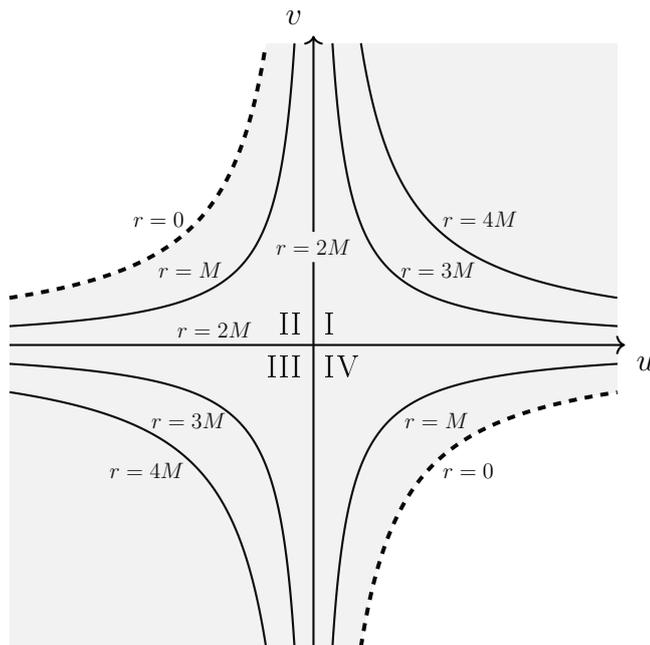


Figura 2 – Ilustração do plano de Kruskal com algumas curvas de nível de r .

entre as curvas de nível de r nos quadrantes Q_I e Q_{III} e também nos quadrantes Q_{II} e Q_{IV} , respectivamente. De fato, assim que tornarmos Q uma variedade semi-Riemanniana, veremos que os quadrantes Q_I e Q_{III} são isométricos entre si e a P_I enquanto que os quadrantes Q_{II} e Q_{IV} são isométricos (entre si) e a P_{II} .

Em Q , defina a função suave $F : Q \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ pondo

$$F(u, v) := \frac{8M^2}{r(u, v)} \cdot e^{1 - \frac{r(u, v)}{2M}}.$$

Note que F depende apenas da função r , de forma que podemos pensar também em $F = F(r)$ definida no intervalo $(0, \infty)$.

Definição 3.16. (*O plano de Kruskal*)

O plano de Kruskal (de massa M) é a região Q do plano uv munida da métrica Lorentziana

$$g := F(du \otimes dv + dv \otimes du).$$

Claramente, g é $(0, 2)$ -tensor simétrico. Para ver que é não-degenerado e tem índice 1, note que, em cada ponto, $\frac{1}{\sqrt{2F}}(\partial_u + \partial_v)$ e $\frac{1}{\sqrt{2F}}(\partial_u - \partial_v)$ formam uma base para o espaço tangente, em relação à qual a matriz de g é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A Lei de Inércia de Sylvester (vide Lima (1995)) nos garante então que, em cada ponto, g é não-degenerado e Lorentziano e, portanto, é métrica de índice 1.

Defina a função $T : Q_I \longrightarrow Q_{III}$ pondo $T(u, v) = (-u, -v)$. Note que T é difeomorfismo e $T^{-1} = T$. Além disso, como $F \circ T(u, v) = F(u, v)$ (isto é, T preserva a função F), afirmamos que $T^*g = g$. De fato, segue da definição de g que $T^*g = T^*(F) \cdot [T^*(du) \otimes T^*(dv) + T^*(dv) \otimes T^*(du)]$. Como $T^*(F) = F \circ T = F$, $T^*(du) = d(T^*u) = d(u \circ T) = -du$ e $T^*(dv) = -dv$, segue $T^*g = g$. Logo, T é isometria entre Q_I e Q_{III} . Analogamente, podemos definir T para agir em Q_{II} e ganhamos uma isometria entre Q_{II} e Q_{IV} , como já sugeria a figura 2.

Lema 3.17. *Sejam (M^2, g) superfície Lorentziana e u e v um sistema de coordenadas luminoso (ou seja, ∂_u e ∂_v são luminosos). Defina $F := g(\partial_u, \partial_v)$. Então, se F_u e F_v denotam as derivadas parciais de F , temos:*

1. a) $\nabla_{\partial_u} \partial_u = \frac{F_u}{F} \partial_u$
 b) $\nabla_{\partial_v} \partial_v = \frac{F_v}{F} \partial_v$
 c) $\nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{\partial_v} \partial_u = 0$
2. $Sec = -\frac{1}{F} \left(\frac{F_u}{F} \right)_v = -\frac{1}{F} \left(\frac{F_v}{F} \right)_u$
3. Se $f \in C^\infty(M)$, então $\nabla f = \frac{1}{F}(f_v \partial_u + f_u \partial_v)$ e $\Delta f = \frac{2f_{uv}}{F}$
4. As equações geodésicas são:

$$\begin{cases} u'' + \frac{F_u}{F} \cdot (u')^2 = 0 \\ v'' + \frac{F_v}{F} \cdot (v')^2 = 0 \end{cases}.$$

Demonstração. Para o item 1, basta utilizar a expressão coordenada para os símbolos de Christoffel (vide lema 1.15), usando que $g_{11} = 0 = g_{22}$ e $g_{12} = g_{21} = F$ e, portanto, $g^{11} = 0 = g^{22}$ e $g^{12} = g^{21} = \frac{1}{F}$. Para o item 2, usamos as fórmulas

$$Sec = \frac{\langle R(\partial_u, \partial_v) \partial_v, \partial_u \rangle}{\langle \partial_u, \partial_u \rangle \langle \partial_v, \partial_v \rangle - \langle \partial_u, \partial_v \rangle^2} \quad e \quad Sec = \frac{\langle R(\partial_v, \partial_u) \partial_u, \partial_v \rangle}{\langle \partial_u, \partial_u \rangle \langle \partial_v, \partial_v \rangle - \langle \partial_u, \partial_v \rangle^2}.$$

Para calcular o tensor R , usamos o item 1. A fórmula para ∇f do item 3 decorre imediatamente da equação na definição 1.12. Para a segunda fórmula, temos:

$$\Delta f = tr Hess_f = \sum_{k,l=1}^2 Hess_f(\partial_k, \partial_l) = 2 \cdot g^{12} Hess_f(\partial_u, \partial_v) = \frac{2}{F} \langle \nabla_{\partial_u} \nabla f, \partial_v \rangle.$$

Utilizando agora a fórmula para ∇f , ficamos com

$$\Delta f = \frac{2}{F} \left\langle \nabla_{\partial_u} \left(\frac{f_v}{F} \partial_u + \frac{f_u}{F} \partial_v \right), \partial_v \right\rangle$$

$$= \frac{2}{F} \left\langle \left(\frac{f_v}{F} \right)_u \partial_u + \frac{f_v}{F} \nabla_{\partial_u} \partial_u + \left(\frac{f_u}{F} \right)_u \partial_v + \frac{f_u}{F} \nabla_{\partial_u} \partial_v, \partial_v \right\rangle$$

Usando o item 1, segue

$$\Delta f = \frac{2}{F} \left[\left(\frac{f_v}{F} \right)_u \cdot F + \frac{f_v}{F} \frac{F_u}{F} \cdot F \right] = 2 \left[\frac{f_{uv}F - f_v F_u}{F^2} + \frac{F_u f_v}{F^2} \right] = \frac{2f_{uv}}{F}.$$

Finalmente, o item 4 decorre imediatamente das equações geodésicas usuais (equação 1.31) e do item 1. \square

Como consequência do lema 3.17, podemos calcular a curvatura seccional do plano de Kruskal:

Proposição 3.18. *A curvatura seccional de Q é*

$$Sec(u, v) = \frac{2M}{r(u, v)^3}.$$

Demonstração. Note que a F do lema anterior coincide com nossa função F definida em Q e as coordenadas u e v de Q são luminosas. Pelo lema 3.17, temos $Sec = -\frac{1}{F} \left(\frac{F_u}{F} \right)_v$. Da definição de F , escrevendo $r = r(u, v)$ temos as equações:

$$\begin{aligned} F_u &= -4M \frac{r_u}{r} \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \cdot e^{1-\frac{r}{2M}} \\ \frac{F_u}{F} &= -\frac{r_u}{2M} \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \\ \left(\frac{F_u}{F} \right)_v &= -\frac{r_{uv}}{2M} - \frac{r_{uv}}{r} + \frac{r_u r_v}{r^2}. \end{aligned}$$

Como $r(u, v) = f^{-1}(uv)$, segue que

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{v}{f'(r)} \quad \text{e} \quad r_v = \frac{u}{f'(r)} \\ r_{uv} &= \frac{1}{f'(r)} \left(1 - v r_v \frac{f''(r)}{f'(r)} \right) = \frac{1}{f'(r)} \left(1 - f(r) \frac{f''(r)}{f'(r)^2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para r_u, r_v e r_{uv} na derivada de F_u/F , temos

$$\left(\frac{F_u}{F} \right)_v = \frac{1}{f'(r)} \left[- \left(1 - f(r) \frac{f''(r)}{f'(r)^2} \right) \left(\frac{1}{2M} + \frac{1}{r} \right) + \frac{f(r)}{r^2 f'(r)} \right].$$

Mas como $f''(r) = \frac{1}{2M} \left(1 + \frac{r}{2M} \right) e^{\frac{r}{2M}-1}$, substituindo as expressões para $f(r), f'(r)$ e $f''(r)$ na equação anterior nos dá:

$$\left(\frac{F_u}{F} \right)_v = -\frac{16M^3}{r^4} \cdot e^{1-\frac{r}{2M}}.$$

Finalmente, usando a fórmula para a curvatura seccional do lema 3.17 e a expressão da função F , ficamos com

$$Sec = \frac{2M}{r^3},$$

como queríamos. \square

Observe que, formalmente, a expressão para a curvatura seccional de Q é a mesma que para $P_{I,II}$ (lema 3.4). Nosso objetivo agora é provar que Q_I (respectivamente Q_{II}) é isométrico a P_I (respectivamente P_{II}). Para tanto, assim como temos em Q o análogo do raio de Schwarzschild, vamos definir o análogo da projeção t de $P_I \cup P_{II}$. Para $(u, v) \notin r^{-1}(2M)$ (isto é, (u, v) em algum quadrante aberto), ponha $t(u, v) := 2M \cdot \ln \left| \frac{v}{u} \right|$, que claramente torna t suave. Assim como para a função r , é interessante observarmos as curvas de nível de t (figura 3).

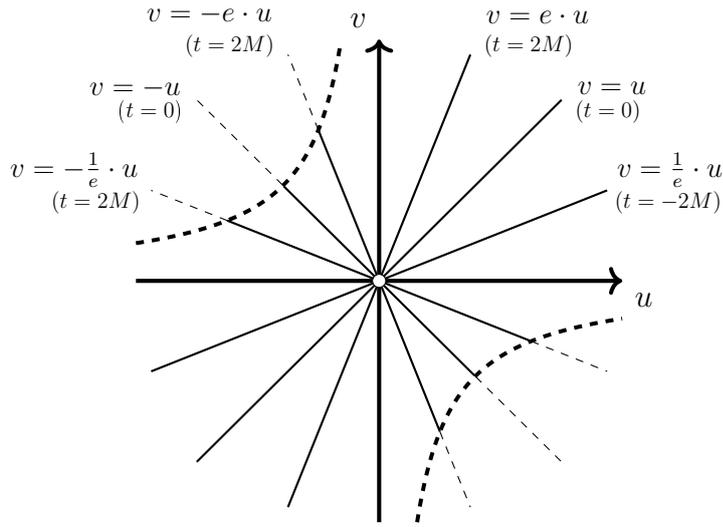


Figura 3 – Curvas de nível da função t

Lema 3.19. Considere a função $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Então, em Q temos:

1. a) $F(r)f(r) = 8M^2h(r)$;
 b) $F(r)f'(r) = 4M$;
 c) $\frac{f(r)}{f'(r)} = 2Mh(r)$;
2. a) $dt = 2M \left(\frac{dv}{v} - \frac{du}{u} \right)$;
 b) $dr = 2Mh \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right)$, para $uv \neq 0$;
3. $\nabla r = \frac{1}{4M} (u\partial_u + v\partial_v)$, $\forall (u, v) \in Q$;
4. a) $\nabla u = \frac{1}{F}\partial_v$;
 b) $\nabla v = \frac{1}{F}\partial_u$.

Demonstração. Para o item 1, basta lembrar que

$$f(r) = (r - 2M) \cdot e^{\frac{r}{2M}-1}$$

$$f'(r) = \frac{r}{2M} \cdot e^{\frac{r}{2M}-1}$$

$$F(r) = \frac{8M^2}{r} \cdot e^{1-\frac{r}{2M}}.$$

Para o item 2, lembre que $dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv$. Da definição da função t , segue

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{2M}{u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{2M}{v},$$

de onde segue a fórmula para dt . Para o dr , lembre que

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{v}{f'(r)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{u}{f'(r)}.$$

Pelo item 1, $\frac{f}{f'} = 2Mh$. Como $f(r) = uv \neq 0$, segue $\frac{1}{f'(r)} = \frac{2Mh(r)}{uv}$ e

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{2Mh}{u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{2Mh}{v}$$

de onde segue a fórmula para dr . Para o item 3, pela definição 1.12 temos

$$\nabla r = g^{12} \left(\frac{\partial r}{\partial u} \partial_v + \frac{\partial r}{\partial v} \partial_u \right) = \frac{1}{Ff'} (v\partial_v + u\partial_u),$$

donde segue o resultado usando a fórmula $Ff' = 4M$ do item 1. Finalmente, o item 4 segue imediatamente da definição 1.12 e da definição de g . \square

O item 4 em particular nos diz que as projeções u e v são submersões, de forma que os subconjuntos de Q com u constante (retas verticais) ou v constante (retas horizontais) são subvariedades de Q de dimensão 1. No entanto, como $\langle \nabla u, \nabla u \rangle = 0 = \langle \nabla v, \nabla v \rangle$, tais subvariedades são luminosas (proposição 1.62).

O item 3 do lema 3.19 nos mostra também que $r|_{Q-\{(0,0)\}}$ é submersão⁶. Como $\langle \nabla r, \nabla r \rangle = \frac{F}{8M^2} uv$, temos⁷ (veja figura 2):

- Se $c > 2M$, então $r^{-1}(c)$ é subvariedade de Q (de dimensão 1) e Lorentziana⁸;
- Se $0 < c < 2M$, então $r^{-1}(c)$ é subvariedade de Q (de dimensão 1) e espacial;
- Se $c = 2M$, então $r^{-1}(c) - \{(0,0)\} = \{(u,v) \in Q : uv = 0 \text{ mas } (u,v) \neq (0,0)\}$ é subvariedade de Q (de dimensão 1) e luminosa.

Teorema 3.20. *Considere a função $\psi : Q_I \cup Q_{II} \longrightarrow P_I \cup P_{II}$ dada por*

$$\psi(u, v) := (t(u, v), r(u, v)).$$

Então, ψ é isometria com $\psi(Q_i) = P_i$, para $i = I$ ou II , e ψ preserva as funções t e r , ou seja, se \hat{t} e \hat{r} denotam o tempo e o raio de Schwarzschild, então $t = \hat{t} \circ \psi$ e $r = \hat{r} \circ \psi$.

⁶ Pois $\nabla r \neq 0$ em $Q - \{(0,0)\}$ e, portanto, nessa região $dr \neq 0$ (ou seja, dr é sobrejetora).

⁷ Veja proposição 1.62.

⁸ Pois $(u, v) \in r^{-1}(c) \implies uv = f(c) > 0 \implies \nabla r$ é espacial e, portanto, $r^{-1}(c)$ tem mesmo índice de Q , ou seja, índice 1.

Demonstração. Primeiramente, notemos que a função ψ está bem definida. De fato, a função r é positiva em Q e, para $(u, v) \in Q_I \cup Q_{II}$, $uv \neq 0$ logo $r(u, v) \neq 2M$. Além disso, ela é claramente suave pois as funções t e r o são. Agora, temos

$$\hat{t} \circ \psi(u, v) = \hat{t}(t(u, v), r(u, v)) = t(u, v),$$

de onde segue $t = \hat{t} \circ \psi$ e analogamente $r = \hat{r} \circ \psi$. Para mostrarmos que ψ é difeomorfismo, considere as funções suaves $\xi_I : P_I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\xi_{II} : P_{II} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} \xi_I(\hat{t}, \hat{r}) &:= \left(\sqrt{f(\hat{r})} \cdot e^{-\frac{\hat{t}}{4M}}, \sqrt{f(\hat{r})} \cdot e^{\frac{\hat{t}}{4M}} \right) \\ \xi_{II}(\hat{t}, \hat{r}) &:= \left(-\sqrt{-f(\hat{r})} \cdot e^{-\frac{\hat{t}}{4M}}, \sqrt{-f(\hat{r})} \cdot e^{\frac{\hat{t}}{4M}} \right). \end{aligned}$$

As funções ξ_I e ξ_{II} estão bem definidas. Além disso, claramente $Im \xi_I \subseteq Q_I$ e, para $(\hat{t}, \hat{r}) \in P_{II}$, ou seja, $0 < \hat{r} < 2M$, temos

$$-\sqrt{-f(\hat{r})} \cdot e^{-\frac{\hat{t}}{4M}} \cdot \sqrt{-f(\hat{r})} \cdot e^{\frac{\hat{t}}{4M}} = f(\hat{r}) > -\frac{2M}{e},$$

o que mostra $Im \xi_{II} \subseteq Q_{II}$. Se, por um momento, denotarmos por ψ_i a restrição de ψ a Q_i , vamos mostrar que $Im \psi_i \subseteq P_i$ e $\psi_i = \xi_i^{-1}$. Com efeito, se $(u, v) \in Q_I$ então $r(u, v) > 2M \implies \psi_I(u, v) \in P_I$ e se $(u, v) \in Q_{II}$ então $0 < r(u, v) < 2M \implies \psi_{II}(u, v) \in P_{II}$. Daí,

$$\begin{aligned} \xi_I \circ \psi_I(u, v) &= \xi_I \left(2M \cdot \ln \left(\frac{v}{u} \right), f^{-1}(uv) \right) \\ &= \left(\sqrt{uv} \cdot e^{-\frac{2M \ln(v/u)}{4M}}, \sqrt{uv} \cdot e^{\frac{2M \ln(v/u)}{4M}} \right) \\ &= \left(\sqrt{uv} \cdot e^{\ln(v/u)^{-1/2}}, \sqrt{uv} \cdot e^{\ln(v/u)^{1/2}} \right) \\ &= \left(\sqrt{uv} \sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \sqrt{\frac{v}{u}} \right) \\ &= (u, v). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $(\hat{t}, \hat{r}) \in P_I$, temos

$$\psi_I \circ \xi_I(\hat{t}, \hat{r}) = \psi_I \left(\sqrt{f(\hat{r})} \cdot e^{-\frac{\hat{t}}{4M}}, \sqrt{f(\hat{r})} \cdot e^{\frac{\hat{t}}{4M}} \right) = \left(2M \cdot \ln e^{\frac{\hat{t}}{2M}}, f^{-1}(f(\hat{r})) \right) = (\hat{t}, \hat{r}).$$

Isso prova $\psi_I^{-1} = \xi_I$ e, analogamente, temos $\psi_{II}^{-1} = \xi_{II}$. Em particular, $\psi_i(Q_i) = P_i$. Isso prova que ψ é um difeomorfismo⁹. Nos resta agora provar que ψ preserva métricas.

Para tanto, denote por $\hat{g} = -\hat{h} \cdot d\hat{t} \otimes d\hat{t} + \frac{1}{\hat{h}} d\hat{r} \otimes d\hat{r}$ a métrica de P_I e P_{II} , onde $\hat{h}(\hat{t}, \hat{r}) := h(\hat{r}) = 1 - \frac{2M}{\hat{r}}$. Observe que $\psi^*(d\hat{t}) = d\psi^*(\hat{t}) = d(\hat{t} \circ \psi) = dt$ e analogamente $\psi^*d\hat{r} = dr$. Além disso, $(\psi^*\hat{h})(u, v) = \hat{h} \circ \psi(u, v) = \hat{h}(t(u, v), r(u, v)) = h(r(u, v))$. Segue então

$$\psi^*(\hat{g}) = -h(r) \cdot dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)} dr \otimes dr.$$

⁹ De fato, podemos definir a função suave ξ em $P_I \cup P_{II}$ pondo ξ_I em P_I e ξ_{II} em P_{II} e teremos $\psi^{-1} = \xi$.

Usando as fórmulas¹⁰ para dt e dr do lema 3.19, ficamos com

$$\begin{aligned}\psi^*(\hat{g}) &= -4M^2h(r) \left(\frac{du \otimes du}{u^2} + \frac{dv \otimes dv}{v^2} - \frac{du \otimes dv}{uv} - \frac{dv \otimes du}{uv} \right) + \\ &+ 4M^2h(r) \left(\frac{du \otimes du}{u^2} + \frac{dv \otimes dv}{v^2} + \frac{du \otimes dv}{uv} + \frac{dv \otimes du}{uv} \right) \\ &= \frac{8M^2h(r)}{uv} (du \otimes dv + dv \otimes du).\end{aligned}$$

Daí, pelo item 1.a) do lema 3.19, temos $F(r) = \frac{8M^2h(r)}{f(r)} = \frac{8M^2h(r)}{uv}$ e segue $\psi^*(\hat{g}) = F(r)(du \otimes dv + dv \otimes du) = g$, o que mostra ψ isometria e encerra a prova. \square

A função ψ do teorema 3.20 poderia muito bem ter sido definida com a mesma expressão formal para $Q_{III} \cup Q_{IV}$ em vez de $Q_I \cup Q_{II}$. Uma demonstração análoga à apresentada acima mostra então que Q_{III} é também isométrico a P_I e Q_{IV} a P_{II} , ou seja, o plano de Kruskal possui duas (!) cópias isométricas de P_I e de P_{II} . Vamos denotar por $\psi_{\mathcal{N}}$ a restrição de ψ para $Q_{\mathcal{N}}$, para $\mathcal{N} = I, II, III$ ou IV ¹¹.

Em particular, segue também do teorema 3.20 que, como $\psi_I : Q_I \rightarrow P_I$ é difeomorfismo, ψ_I é uma carta em Q_I . Explicitamente, isso mostra que as funções t e r formam uma carta em Q_I (e também nos demais quadrantes abertos), embora não seja uma carta global (pois t não está globalmente definida). Eventualmente, será interessante trabalharmos com as coordenadas t e r em vez de u e v . Note também que, em cada $Q_{\mathcal{N}}$, ficam bem definidos os campos coordenados ∂_t e ∂_r .

Proposição 3.21. *Defina em Q o campo X pondo*

$$X = \frac{1}{4M} (v\partial_v - u\partial_u).$$

Então, X coincide com ∂_t em cada quadrante aberto e os campos de Killing em Q são da forma $c \cdot X$, com $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Fixe um quadrante aberto $Q_{\mathcal{N}}$. Como t e r formam um sistema de coordenadas em $Q_{\mathcal{N}}$, escreva $X = X^1\partial_t + X^2\partial_r$ (em $Q_{\mathcal{N}}$). Temos $X^1 = dt(X)$ e $X^2 = dr(X)$. Daí, usando as fórmulas para dt e dr do lema 3.19 e a definição de X , segue $X^1 = 1$ e $X^2 = 0$, o que prova $X|_{Q_{\mathcal{N}}} = \partial_t$. Como \mathcal{N} é arbitrário, segue que X coincide com ∂_t em cada quadrante aberto.

Para ver que X é de Killing, basta mostrar que X satisfaz as equações de Killing (veja equação 1.65), onde as coordenadas usadas na equação são u e v . Finalmente, vamos provar a unicidade: assuma que $Y \in \mathfrak{X}(Q)$ é de Killing. Então, $Y|_{Q_I}$ é de Killing e, pelo

¹⁰ Vale a fórmula para dr pois estamos trabalhando em $Q_I \cup Q_{II}$ onde $uv \neq 0$.

¹¹ Cada $\psi_{\mathcal{N}}$ é dada por $\psi_{\mathcal{N}} = (t, r)$ mas calculada apenas em $Q_{\mathcal{N}}$. Isso é uma isometria com P_I (caso $\mathcal{N} = I$ ou III) ou com P_{II} (caso $\mathcal{N} = II$ ou IV).

lema 1.68, $(\psi_I)_*(Y|_{Q_I})$ é de Killing em P_I . Pela proposição 3.10 segue que $(\psi_I)_*(Y|_{Q_I}) = c \cdot \partial_{\hat{t}} \implies Y|_{Q_I} = c \cdot (\psi_I^{-1})_*(\partial_{\hat{t}})$. Afirmamos que $(\psi_I^{-1})_*(\partial_{\hat{t}}) = X|_{Q_I}$.

De fato, é equivalente mostrarmos $(\psi_I)_*(X|_{Q_I}) = \partial_{\hat{t}}$. Para tanto, segue da fórmula coordenada do “pushforward” (vide Lee (2002) página 70) que

$$\begin{aligned} ((\psi_I)_*(\partial_u))_{\psi_I(u,v)} &= \frac{\partial(\psi_I)^1}{\partial u}(u,v) \cdot \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{\partial(\psi_I)^2}{\partial u}(u,v) \cdot \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)} \\ &= \frac{\partial t}{\partial u}(u,v) \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)} \\ &= -\frac{2M}{u} \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{v}{f'(r)} \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} ((\psi_I)_*(\partial_v))_{\psi_I(u,v)} &= \frac{\partial t}{\partial v}(u,v) \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)} \\ &= \frac{2M}{v} \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{u}{f'(r)} \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)}. \end{aligned}$$

Daí, da definição de X segue

$$\begin{aligned} ((\psi_I)_*(X|_{Q_I}))_{\psi_I(u,v)} &= \frac{1}{4M} [v \cdot ((\psi_I)_*(\partial_v))_{\psi_I(u,v)} - u \cdot ((\psi_I)_*(\partial_u))_{\psi_I(u,v)}] \\ &= \frac{1}{4M} \left[2M \cdot \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} + \frac{uv}{f'(r)} \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)} + 2M \cdot \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{uv}{f'(r)} \partial_{\hat{r}}|_{\psi_I(u,v)} \right] \\ &= \partial_{\hat{t}}|_{\psi_I(u,v)}, \end{aligned}$$

o que prova $(\psi_I)_*(X|_{Q_I}) = \partial_{\hat{t}}$, donde segue $(\psi_I^{-1})_*(\partial_{\hat{t}}) = X|_{Q_I}$ e $Y|_{Q_I} = c \cdot X|_{Q_I}$. Como o campo $c \cdot X$ é de Killing em Q (já que X o é) e Q é conexo, segue do corolário 1.71 que $Y = c \cdot X$, o que encerra a prova. \square

O campo X definido acima é, pois, uma extensão do campo $\partial_{\hat{t}}$ para além dos quadrantes abertos. Note que nada de especial de Q_I foi utilizado na demonstração da proposição 3.21, de forma que ficou também provado que $(\psi_{\mathcal{N}})_*(X|_{Q_{\mathcal{N}}}) = \partial_{\hat{t}}$ para qualquer \mathcal{N} . Em particular, X é temporal em Q_I e Q_{III} e espacial em Q_{II} e Q_{IV} ¹², o que pode ser visto também diretamente da expressão que define X .

3.3 O espaço-tempo de Kruskal

Definição 3.22. O espaço-tempo de Kruskal (de massa M)¹³ é a variedade quadridimensional e Lorentziana $K := Q \times_r \mathbb{S}^2$, onde Q possui a métrica definida em 3.16, \mathbb{S}^2 possui a métrica ω_2 e $r : Q \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ é a função dada por $r(u,v) = f^{-1}(uv)$.

¹² Pois $\partial_{\hat{t}}$ é temporal em P_I e espacial em P_{II} .

¹³ Também chamado eventualmente de *espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal*.

Como no capítulo 2, vamos denotar por $\pi : K \longrightarrow Q$ e $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{S}^2$ as projeções canônicas. Para $\mathcal{N} = \text{I, II, III ou IV}$, definimos os abertos $K_{\mathcal{N}} := \pi^{-1}(Q_{\mathcal{N}})$ e

$$H := K - \bigcup_{\mathcal{N}=\text{I}}^{\text{IV}} K_{\mathcal{N}}$$

é o *horizonte de eventos*. Note que, para $(u, v) \in Q$ e $q \in \mathbb{S}^2$, $(u, v, q) \in H \iff uv = 0$, ou seja, $r(u, v) = 2M$. A *esfera central* é o conjunto $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{S}^2$ (a esfera que está “colada” em cima de $(0, 0)$), que é subvariedade bidimensional de K . Note que o conjunto $H - \pi^{-1}(0, 0)$ se escreve como união disjunta de 4 abertos (em $H - \pi^{-1}(0, 0)$), cada qual difeomorfo a¹⁴ $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^2$.

Como os quadrantes $Q_{\mathcal{N}}$ são isométricos a P_I ou P_{II} , é razoável esperar que os novos quadrantes $K_{\mathcal{N}}$ sejam isométricos a $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ ou $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$. Além disso, é também esperado que as aplicações $T_1 : K_I \longrightarrow K_{III}$ e $T_2 : K_{II} \longrightarrow K_{IV}$ dadas por

$$T_i(u, v, q) := (-u, -v, q), \text{ para } i \in \{1, 2\}$$

sejam isometrias.

Proposição 3.23. *Os quadrantes K_I e K_{II} são isométricos a $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ respectivamente. Além disso, as funções T_1 e T_2 definidas acima são isometrias.*

Demonstração. Vamos mostrar o caso K_I e $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ pois o caso K_{II} e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ é inteiramente análogo. Seja $\psi_I : Q_I \longrightarrow P_I$ a isometria definida na demonstração do teorema 3.20. Vamos mostrar que a função $\psi_I \times \mathbb{1} : K_I \longrightarrow P_I \times_r \mathbb{S}^2$ é isometria, onde $\mathbb{1} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é a identidade. Ela e sua inversa $\psi_I^{-1} \times \mathbb{1}$ são claramente suaves, de forma que $\psi_I \times \mathbb{1}$ é difeomorfismo. Denote por \hat{g} , $\hat{\pi}$, $\hat{\sigma}$, \hat{t} , \hat{r} a métrica, a projeção em P_I , a projeção em \mathbb{S}^2 , o tempo e o raio de Schwarzschild, respectivamente. De $\hat{g} = \hat{\pi}^* g_{P_I} + (\hat{r} \circ \hat{\pi})^2 \cdot \hat{\sigma}^* \omega_2$ segue que

$$\begin{aligned} (\psi_I \times \mathbb{1})^* \hat{g} &= (\psi_I \times \mathbb{1})^* \hat{\pi}^* g_{P_I} + (\hat{r} \circ \hat{\pi})^2 \circ (\psi_I \times \mathbb{1}) \cdot (\psi_I \times \mathbb{1})^* \hat{\sigma}^* \omega_2 \\ &= (\hat{\pi} \circ (\psi_I \times \mathbb{1}))^* g_{P_I} + (\hat{r} \circ \hat{\pi} \circ (\psi_I \times \mathbb{1}))^2 \cdot (\hat{\sigma} \circ (\psi_I \times \mathbb{1}))^* \omega_2 \\ &= (\psi_I \circ \pi)^* g_{P_I} + (r \circ \pi)^2 \cdot \sigma^* \omega_2 \\ &= \pi^* \psi_I^* g_{P_I} + (r \circ \pi)^2 \cdot \sigma^* \omega_2 \\ &= \pi^* g_{Q_I} + (r \circ \pi)^2 \cdot \sigma^* \omega_2, \end{aligned}$$

que é a métrica em $K_I = Q_I \times_r \mathbb{S}^2$, o que prova $\psi_I \times \mathbb{1}$ isometria. A conta para mostrar que T_i é isometria é inteiramente análoga, usando que as respectivas funções $\hat{T}_1 : Q_I \longrightarrow Q_{III}$ e $\hat{T}_2 : Q_{II} \longrightarrow Q_{IV}$ dadas por $\hat{T}_i(u, v) = (-u, -v)$ são isometrias e $T_i = \hat{T}_i \times \mathbb{1}$. \square

¹⁴ Os 4 abertos são da forma $\pi^{-1}(\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}) = \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{S}^2$ e suas variações ($\{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{<0} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}_{<0}$), todos eles claramente difeomorfos a $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^2$.

A proposição 3.23 conclui nosso objetivo de “colar” $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, pois K é conexo e possui duas cópias isométricas de $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$. Faz sentido agora transitar entre esses dois espaços, o que em particular justifica a frase “*entrar no buraco negro*” ou “*ultrapassar o horizonte de eventos*”.

Proposição 3.24. *K possui Ric identicamente nulo, ou seja, K é “Ricci-plano”.*

Demonstração. Segue do lema 1.46, da proposição 3.23 e do teorema 3.9 que o tensor de Ricci de K se anula em cada $K_{\mathcal{N}}$. Por continuidade¹⁵, segue que Ric também se anula em H e portanto se anula em todo K . \square

Isso prova que o espaço-tempo de Kruskal satisfaz a equação de Einstein 3.1 para $T = 0$ (vácuo) e $\Lambda = 0$ assim como os espaços-tempos interior e exterior de Schwarzschild.

Vamos denotar por $\partial_u, \partial_v, \partial_r$ e ∂_t os levantamentos (veja definição 2.11) dos respectivos campos de Q para¹⁶ K e o contexto deixará claro o ambiente em que estamos trabalhando. O mesmo será feito para as funções u, v, r e t , que podem significar tanto funções suaves em Q quanto em¹⁷ K .

Nosso próximo passo, assim como fizemos com $P_{I,II} \times_r \mathbb{S}^2$, é investigar os campos de Killing em K . Inicialmente, mostraremos que \tilde{X} é de Killing em K :

Proposição 3.25. *O campo $\tilde{X} = \frac{1}{4M}(v\partial_v - u\partial_u) \in \mathfrak{X}(K)$ é de Killing e coincide com ∂_t em $K - H$.*

Demonstração. Pela proposição 3.21, o campo $X \in \mathfrak{X}(Q)$ é de Killing em Q . Daí, pela proposição 2.24, para que \tilde{X} seja de Killing, basta que $Xr = 0$, o que pode ser checado pelo leitor lembrando que

$$\partial_v(r) = \frac{u}{f'(r)} \quad \text{e} \quad \partial_u(r) = \frac{v}{f'(r)}.$$

O fato de \tilde{X} coincidir com ∂_t em $K - H$ segue imediatamente da proposição 3.21 pois X coincide com ∂_t nos quadrantes abertos de Q . \square

Teorema 3.26. *Os campos de Killing em K são da forma $c \cdot \tilde{X} + \tilde{V}$, onde $c \in \mathbb{R}$, $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ é de Killing e $X \in \mathfrak{X}(Q)$ é o campo definido na proposição 3.21.*

Demonstração. Pela proposição 3.25 segue que \tilde{X} é de Killing em K . Se V é de Killing em \mathbb{S}^2 , pela proposição 2.24 segue que \tilde{V} é de Killing em K . Como os campos de Killing formam um espaço vetorial, segue que os campos $c \cdot \tilde{X} + \tilde{V}$ são de Killing em K .

¹⁵ Todo ponto de H é o limite de uma sequência de pontos em $K - H$. Por exemplo, se $(u, v, q) \in H$ e $u > 0$, tome a sequência $(u, \frac{1}{n}, q)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K_I$ já que $v = 0$.

¹⁶ Com exceção de ∂_t que só está definido em $K - H$.

¹⁷ Com exceção da função t que está definida apenas em $K - H$.

Reciprocamente, suponha que $Y \in \mathfrak{X}(K)$ seja de Killing. Daí, $Y|_{K_I}$ é de Killing $\implies (\psi_I \times \mathbf{1})_*(Y|_{K_I})$ é de Killing em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ (ψ_I é a função definida na demonstração do teorema 3.20), pela proposição 3.23 e pelo lema 1.68. Pelo teorema 3.11, segue que existem $c \in \mathbb{R}$ e $V \in \text{Kill}(\mathbb{S}^2)$ tais que $(\psi_I \times \mathbf{1})_*(Y|_{K_I}) = c \cdot \partial_{\hat{t}} + \widetilde{V}$. Daí, segue $Y|_{K_I} = c \cdot (\psi_I^{-1} \times \mathbf{1})_*(\partial_{\hat{t}}) + (\psi_I^{-1} \times \mathbf{1})_*(\widetilde{V})$. Mas, pelo lema 2.27 segue que¹⁸

$$\begin{aligned} (\psi_I^{-1} \times \mathbf{1})_*(\partial_{\hat{t}}) &= (\widetilde{\psi_I^{-1}})_*\partial_{\hat{t}} = \widetilde{X}|_{Q_I} = \widetilde{X}|_{K_I} \\ (\psi_I^{-1} \times \mathbf{1})_*(\widetilde{V}) &= \widetilde{\mathbf{1}}_*\widetilde{V} = \widetilde{V}, \end{aligned}$$

de onde segue que $Y|_{K_I} = c \cdot \widetilde{X}|_{K_I} + \widetilde{V}|_{K_I} = (c \cdot \widetilde{X} + \widetilde{V})|_{K_I}$. Como os campos $c \cdot \widetilde{X} + \widetilde{V} \in \mathfrak{X}(K)$ e $Y \in \mathfrak{X}(K)$ são de Killing e K é conexo, pelo corolário 1.71 segue que $Y = c \cdot \widetilde{X} + \widetilde{V}$ em K , o que encerra a prova. \square

3.4 Geodésicas em Kruskal

Vamos iniciar agora o estudo das curvas (causais) de K que se justifica sobretudo pelo significado físico que carregam: as curvas temporais representam trajetórias no espaço-tempo de partículas com massa não-nula, enquanto que *geodésicas* luminosas, como já sugere seu nome, representam trajetórias de partículas sem massa, como a luz. As curvas espaciais e as curvas luminosas que não são geodésicas não possuem interpretação física natural, de forma que não trataremos delas neste trabalho.

Nas subseções 3.4.1, 3.4.3 e 3.4.4, vamos analisar especificamente o comportamento das geodésicas causais em K , que representam trajetórias de partículas (com ou sem massa, dependendo de seu caráter causal) “em queda-livre” no campo gravitacional gerado por nossa estrela de massa M , ou seja, partículas sob efeito único do campo gravitacional. Como geodésicas possuem aceleração zero, elas são as trajetórias “mais retas” possíveis dada a geometria ambiente, e portanto, na Relatividade Geral não pensamos na gravidade como uma “força”. Ao contrário, a queda-livre é o “movimento espontâneo” ou “natural”, diferentemente do que ocorre na gravitação Newtoniana, onde a gravidade é uma força que desvia objetos das retas que eles de outro modo seguiriam.

Como exemplo, podemos citar um satélite artificial no campo gravitacional gerado pela Terra. Como o satélite é dotado de massa, sua trajetória espaço-temporal é representada geometricamente por uma curva temporal. Enquanto os motores de propulsão estão ligados, exercem força/aceleração sobre o satélite. Se os motores são desligados, o satélite deixa de ter aceleração e passa então a ser modelado geometricamente por uma geodésica temporal, que descreve seu movimento posterior.

¹⁸ Lembre que $(\psi_I)_*X = \partial_{\hat{t}}$, como ficou provado na demonstração da proposição 3.21.

3.4.1 A equação da energia

Nesta subseção, vamos deduzir a *equação da energia* para geodésicas (temporais e luminosas) no espaço-tempo de Kruskal. Podemos interpretar tal equação, para efeitos de sua discussão qualitativa, como um tipo de conservação da energia total, composta pela “energia cinética”, relacionada ao movimento radial da partícula e sua velocidade, e pela “energia potencial”, relacionada à posição radial da partícula no campo gravitacional gerado pela estrela de massa M ¹⁹.

Seja $\gamma : I \rightarrow K$ uma geodésica causal em $K = Q \times_r \mathbb{S}^2$. Inspirados na notação da proposição 2.25, escreva $\gamma = (\alpha, \beta)$, onde α e β são as projeções de γ sobre Q e \mathbb{S}^2 , respectivamente, ou seja, $\alpha = \pi \circ \gamma$ e $\beta = \sigma \circ \gamma$. Escreva o número $\varepsilon := \langle \gamma', \gamma' \rangle \leq 0$ (pois γ é causal). Da definição de métrica em um produto torcido (definição 2.5), segue que

$$\varepsilon = \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle + (r \circ \alpha)^2 \cdot \langle \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle, \quad (3.27)$$

onde a notação $\dot{\alpha}$ representa a derivada da curva α em Q e analogamente para $\dot{\beta}$. Omitiremos a menção às métricas de Q e \mathbb{S}^2 ao escrevermos simplesmente $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$ e $\langle \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle$.

Da observação 2.26 segue que $(r \circ \alpha)^4 \cdot \langle \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle$ é constante. Como \mathbb{S}^2 é Riemanniana, tal constante é não-negativa, de forma que podemos escrevê-la como L^2 , para $L \geq 0$ e temos

$$(r \circ \alpha)^4 \cdot \langle \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle = L^2. \quad (3.28)$$

Juntando as equações 3.27 e 3.28 ficamos com

$$\varepsilon = \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle + \frac{L^2}{(r \circ \alpha)^2}. \quad (3.29)$$

Finalmente, nossa última quantidade conservada é dada pela proposição 1.69: como o campo \tilde{X} é de Killing em K (proposição 3.25), temos que $E := -\langle \tilde{X} \circ \gamma, \gamma' \rangle$ é constante. Como $\tilde{X} = \frac{1}{4M}(v\partial_v - u\partial_u)$ e escrevendo $\alpha(s) = (u(s), v(s))$, temos

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{4M} \left\langle v(s)\partial_v|_{\gamma(s)} - u(s)\partial_u|_{\gamma(s)}, (\dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(s)) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4M} \left\langle v(s)\partial_v|_{\alpha(s)} - u(s)\partial_u|_{\alpha(s)}, \dot{\alpha}(s) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4M} \left\langle v(s)\partial_v|_{\alpha(s)} - u(s)\partial_u|_{\alpha(s)}, \dot{u}(s)\partial_u|_{\alpha(s)} + \dot{v}(s)\partial_v|_{\alpha(s)} \right\rangle \\ &= -\frac{F(\alpha(s))}{4M} (\dot{u}(s)v(s) - u(s)\dot{v}(s)). \end{aligned}$$

Abreviando as funções $u(s), v(s)$ e $r \circ \alpha(s)$ para u, v e $r(s)$, temos

$$16M^2 E^2 = F(\alpha(s))^2 (\dot{u}^2 v^2 + u^2 \dot{v}^2 - 2uv \cdot \dot{u}\dot{v}) = F(\alpha(s))^2 [(\dot{u}v + u\dot{v})^2 - 4uv \cdot \dot{u}\dot{v}]. \quad (3.30)$$

¹⁹ Entretanto, essa interpretação é adotada por analogia com a teoria Newtoniana, e não deve ser tomada de modo literal.

Note que, como $f(r(s)) = f(r \circ \alpha(s)) = f(r(u(s), v(s))) = u(s)v(s)$, temos

$$f'(r(s))\dot{r}(s) = \dot{u}v + u\dot{v}.$$

Além disso, como $\dot{\alpha}(s) = \dot{u}\partial_u|_{\alpha(s)} + \dot{v}\partial_v|_{\alpha(s)}$, temos

$$\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 2\dot{u}\dot{v}F(\alpha(s))$$

donde

$$4uv \cdot \dot{u}\dot{v} = 2f(r(s)) \cdot \frac{\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle}{F(\alpha(s))}.$$

Substituindo as equações para $\dot{u}v + u\dot{v}$ e $4uv \cdot \dot{u}\dot{v}$ na equação 3.30, segue que

$$16M^2E^2 = F(\alpha(s))^2 \left([f'(r(s))]^2 \dot{r}(s)^2 - 2f(r(s)) \frac{\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle}{F(\alpha(s))} \right)$$

Utilizando o lema 3.19, segue que

$$16M^2E^2 = 16M^2\dot{r}(s)^2 - 16M^2h(r(s))\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle.$$

Finalmente, isolando $\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle$ na equação 3.29 e substituindo na equação acima, temos

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + h(r(s)) \left(\frac{L^2}{r(s)^2} - \varepsilon \right), \quad (3.31)$$

ou, de forma mais explícita,

$$E^2 = [(r \circ \alpha)'(s)]^2 + h(r \circ \alpha(s)) \left(\frac{L^2}{[r \circ \alpha(s)]^2} - \varepsilon \right). \quad (3.32)$$

Esta é a chamada *equação da energia*, pois expressa uma quantidade conservada em que as parcelas dependem, claramente, da velocidade radial $(r \circ \alpha)'$ e da própria posição radial $r \circ \alpha$. Usaremos a equação da energia para o estudo qualitativo das geodésicas que será feito nas subseções 3.4.3 e 3.4.4.

3.4.2 Orientação temporal em K e o buraco negro de Schwarzschild-Kruskal

Tendo em mãos a descrição geral desenvolvida na seção 1.11, vamos agora definir uma orientação temporal em K , e com isso definir os buracos negro e branco no modelo de Kruskal. Vamos estudar também o comportamento das curvas causais futuro-dirigidas que entram nos buracos negro e branco.

Primeiramente, note que K é temporalmente orientável, pois o campo $\partial_v - \partial_u \in \mathfrak{X}(K)$ é temporal (veja proposição 1.79). Além disso, como K é conexo, K possui precisamente duas orientações temporais (veja lema 1.80). *Vamos escolher em K a (única) orientação temporal que torna o campo $\partial_v - \partial_u \in \mathfrak{X}(K)$ futuro-dirigido.*

Lema 3.33. *No espaço-tempo de Kruskal K , temos:*

1. os campos luminosos $-\partial_u$ e ∂_v são futuro-dirigidos em K ;
2. em K_I , o campo ∂_t é temporal e futuro-dirigido;
3. em K_{II} , o campo ∇r é temporal e futuro-dirigido.

Demonstração. Ao longo de toda a demonstração, vamos usar a proposição A.16. Para o item 1, basta notar que

$$\begin{aligned}\langle -\partial_u, \partial_v - \partial_u \rangle &= -F \\ \langle \partial_v, \partial_v - \partial_u \rangle &= -F,\end{aligned}$$

o que mostra $-\partial_u$ e ∂_v futuro-dirigidos já que F é sempre positiva e $\partial_v - \partial_u$ é futuro-dirigido pela definição da orientação temporal em K . Para o item 2, lembre que em $K-H$ temos $\partial_t = X = \frac{1}{4M}(v\partial_v - u\partial_u)$ (veja proposição 3.25). Daí, temos

$$\langle \partial_t, \partial_v - \partial_u \rangle = \frac{1}{4M} \langle v\partial_v - u\partial_u, \partial_v - \partial_u \rangle = -\frac{F}{4M}(u+v).$$

Como em K_I as funções u e v são positivas, temos então $\langle \partial_t, \partial_v - \partial_u \rangle < 0$, ou seja, ∂_t futuro-dirigido em K_I . Finalmente, para o item 3, o lema 3.19 nos dá que $\nabla r = \frac{1}{4M}(u\partial_u + v\partial_v) \in \mathfrak{X}(K)$ (esse ∇r é o levantamento horizontal do ∇r do lema 3.19. Veja lema 2.17). Daí,

$$\langle \nabla r, \nabla r \rangle = \frac{F}{8M^2} \cdot uv < 0 \quad \text{em } K_{II},$$

ou seja, ∇r é temporal em K_{II} . Além disso,

$$\langle \nabla r, \partial_v - \partial_u \rangle = \frac{1}{4M} \langle u\partial_u + v\partial_v, \partial_v - \partial_u \rangle = \frac{F}{4M}(u-v).$$

Como em K_{II} temos $u < 0$ e $v > 0$, segue $u - v < 0 \implies \langle \nabla r, \partial_v - \partial_u \rangle < 0$, ou seja, ∇r é futuro-dirigido em K_{II} , o que encerra a prova. \square

Podemos definir uma orientação temporal nas variedades $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ da seguinte forma: como $\partial_t \in \mathfrak{X}(P_I \times_r \mathbb{S}^2)$ é temporal, tome a orientação temporal em $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ para que ele seja futuro-dirigido; como $\nabla r \in \mathfrak{X}(K)$ é temporal em K_{II} , $(\psi_{II} \times \mathbb{1})_*(\nabla r)$ é temporal em $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$ e, portanto, define uma orientação temporal que o torna futuro-dirigido.

Com essa definição, fica evidente que as isometrias $\psi_I \times \mathbb{1}$ e $\psi_{II} \times \mathbb{1}$ preservam cones causais, no seguinte sentido: um vetor v causal e tangente a K_I (respectivamente K_{II}) é futuro-dirigido se, e somente se²⁰, $d(\psi_I \times \mathbb{1})(v) \in T(P_I \times_r \mathbb{S}^2)$ (respectivamente $d(\psi_{II} \times \mathbb{1})(v) \in T(P_{II} \times_r \mathbb{S}^2)$) é futuro-dirigido. Dessa forma, K_I é uma cópia isométrica “perfeita” do espaço-tempo exterior de Schwarzschild, e K_{II} do interior. Assim, por razões que em breve ficarão claras, nos referiremos doravante a K_{II} como o *buraco negro* (de Schwarzschild-Kruskal).

²⁰ Com efeito, para $K_I \times \mathbb{S}^2$ lembre que $(\psi_I \times \mathbb{1})_*(\partial_t) = \partial_{\hat{t}}$. Como ∂_t e $\partial_{\hat{t}}$ são temporais futuro-dirigidos em K_I e $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ respectivamente, a equivalência afirmada segue de $\langle d(\psi_I \times \mathbb{1})(v), \partial_{\hat{t}} \rangle = \langle v, \partial_t \rangle$.

É interessante observarmos o que acontece com as variedades K_{III} e K_{IV} nesse momento. Elas também são isométricas a $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, respectivamente. Contudo, não possuem a mesma orientação temporal induzida que $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ e $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, no sentido de que as funções $\psi_{III} \times \mathbb{1}$ e $\psi_{IV} \times \mathbb{1}$ que geram as respectivas isometrias não preservam²¹ os cones causais como fazem as isometrias $\psi_I \times \mathbb{1}$ e $\psi_{II} \times \mathbb{1}$. Este fato terá consequências curiosas ao longo desta seção: conforme nos aprofundemos no estudo das curvas causais, veremos que essa região se comporta como uma versão “temporalmente dual” do buraco negro. Em contraste com K_{II} , o espaço K_{IV} é, pois, chamado de *buraco branco* (de *Schwarzschild-Kruskal*).

A primeira consequência física da orientação temporal escolhida para K é a seguinte: é impossível para um objeto com massa ou um raio de luz - e portanto qualquer informação causal - “trafegar” de K_I para K_{III} ou vice-versa! Essas regiões podem ser pensadas como duas “cópias” da região exterior ao buraco negro/branco, que no entanto funcionam para todos os efeitos como “mundos paralelos”, que jamais podem se comunicar entre si.

Traduzindo-se em linguagem matemática precisa, isso significa que se $\alpha : I \rightarrow K$ é uma curva causal (temporal para partículas com massa, luminosa para raios de luz) futuro-dirigida e $\alpha(s_0) \in K_I$ (respectivamente $\alpha(s_0) \in K_{III}$), então para todo $s \geq s_0$ temos $\alpha(s) \notin K_{III}$ (respectivamente $\alpha(s) \notin K_I$).

De fato, assumamos $\alpha(s_0) \in K_I$. Daí, considerando a função $v \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ temos $(v \circ \alpha)(s_0) > 0$. Para todo $s \in I$, $(v \circ \alpha)'(s) = \langle (\nabla v)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = \frac{1}{F} \langle \partial_u|_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle$ (veja lema 3.19). Como ∂_u é passado-dirigido (lema 3.33) e α é futuro-dirigida, pela proposição A.16 segue que $\langle \partial_u|_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle \geq 0$, ou seja, $(v \circ \alpha)'(s) \geq 0, \forall s \in I$. Isso significa que a função $v \circ \alpha$ é não-decrescente e, como $v \circ \alpha(s_0) > 0$, segue $v \circ \alpha(s) \geq v \circ \alpha(s_0) > 0, \forall s \geq s_0 \implies \alpha(s) \notin K_{III}$ para $s \geq s_0$. Analogamente, se $\alpha(s_0) \in K_{III}$, temos $u \circ \alpha(s_0) < 0$ e $(u \circ \alpha)'(s) = \langle (\nabla u)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = \frac{1}{F} \langle \partial_v|_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle \leq 0$ pois ∂_v é futuro-dirigido. Daí, a função $u \circ \alpha$ é não-crescente e, portanto, $u \circ \alpha(s) \leq u \circ \alpha(s_0) < 0, \forall s \geq s_0 \implies \alpha(s) \notin K_I$ se $s \geq s_0$.

A próxima consequência da orientação temporal em K também é consideravelmente profunda, e a apresentaremos no formato de uma proposição vazada inicialmente em linguagem informal mas fisicamente significativa, e com a versão matematicamente precisa dada em seguida:

Proposição 3.34. *Nenhuma partícula material ou raio de luz que entre no buraco negro K_{II} pode escapar dele. Além disso, toda tal partícula ou raio se move necessariamente para posições radiais decrescentes e, se estiver em queda livre, termina na singularidade $r = 0$ ou antes, num valor finito de seu parâmetro afim.*

²¹ De fato, a isometria $\psi_{III} \times \mathbb{1}$ é dada por $(\psi_I \times \mathbb{1}) \circ (T \times \mathbb{1})$, onde $T : Q_{III} \rightarrow Q_I$ é dada por $T(u, v) = (-u, -v)$. Embora $\psi_I \times \mathbb{1}$ preserve orientação temporal, a aplicação $T \times \mathbb{1}$ troca a orientação temporal pois $(T \times \mathbb{1})_*(\partial_v - \partial_u) = \partial_u - \partial_v$, que é passado-dirigido.

Em linguagem matemática, a proposição 3.34 pode ser reescrita da seguinte forma: dada qualquer curva causal $\alpha : I \longrightarrow K$ futuro-dirigida para a qual existe $s_0 \in I$ com $\alpha(s_0) \in K_{II}$ tem-se $\alpha(s) \in K_{II}, \forall s \geq s_0$. Além disso, a função $r \circ \alpha(s)$ é decrescente para $s \geq s_0$, e se α é geodésica maximal e escrevemos $I = (a, b)$, então necessariamente $b < \infty$, ou seja, α é (futuro) incompleta.

Demonstração. Para ver que $\alpha(s) \in K_{II}$ se $s \geq s_0$, considere as funções $u \circ \alpha(s)$ e $v \circ \alpha(s)$. Como feito acima, segue que $u \circ \alpha(s)$ é não-crescente e $v \circ \alpha(s)$ é não-decrescente. Logo, temos para $s \geq s_0$: $u \circ \alpha(s) \leq u \circ \alpha(s_0) < 0$ e $v \circ \alpha(s) \geq v \circ \alpha(s_0) > 0$, ou seja $\alpha(s) \in K_{II}$.

Vamos mostrar agora que $r \circ \alpha(s)$ é decrescente para $s \geq s_0$. Note que

$$(r \circ \alpha)'(s) = \langle (\nabla r)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle.$$

Afirmamos que a função $(r \circ \alpha)'(s)$ é negativa para $s \in [s_0, \infty) \cap I$. Com efeito, como $\alpha(s) \in K_{II}$, ∇r é temporal e futuro-dirigido em K_{II} (lema 3.33) e α é causal futuro-dirigida, segue que $\langle (\nabla r)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle < 0$, ou seja, $(r \circ \alpha)'(s) < 0$, para $s \geq s_0$, o que mostra $r \circ \alpha(s)$ decrescente para $s \geq s_0$.

Finalmente, se α é geodésica maximal, α satisfaz a equação da energia

$$E^2 = [(r \circ \alpha)'(s)]^2 + \left(\frac{L^2}{(r \circ \alpha)^2(s)} - \varepsilon \right) \left(1 - \frac{2M}{(r \circ \alpha)(s)} \right).$$

Como $(r \circ \alpha)(s) < 2M$ se $s \geq s_0$ (já que $\alpha(s) \in K_{II}$), segue que $1 - \frac{2M}{r(\alpha(s))} < 0$. Logo, como $\varepsilon \leq 0$ temos $[(r \circ \alpha)'(s)]^2 > E^2 \implies |(r \circ \alpha)'(s)| > |E|$ e, como $(r \circ \alpha)'(s) < 0$, segue $(r \circ \alpha)'(s) < -|E|$, para todo $s \geq s_0$. Se, novamente, $s \geq s_0$, segue então que $r(\alpha(s)) - r(\alpha(s_0)) < -|E|(s - s_0)$, ou seja, $r(\alpha(s)) < -|E|(s - s_0) + r(\alpha(s_0))$, o que mostra $r(\alpha(s)) \longrightarrow -\infty$ se $s \longrightarrow \infty$, o que contraria $r(\alpha(s)) > 0, \forall s$. Daí, devemos ter $b < \infty$, o que encerra a prova. \square

Observação 3.35. A proposição 3.34 mostra que toda curva causal futuro-inextensível α (geodésica ou não) que entra no buraco negro segue inexoravelmente para raios cada vez menores, mas não prova que esta deva necessariamente convergir para a “singularidade”, ou seja, α não precisa a priori satisfazer $r \circ \alpha(s) \longrightarrow 0$. No entanto, argumentos mais elaborados dos que os que seremos capazes de apresentar aqui estabelecem que isto é de fato o que ocorre.

Um resultado análogo à proposição 3.34 pode ser enunciado para o buraco branco K_{IV} :

Proposição 3.36. Toda partícula material ou raio de luz no buraco branco deve necessariamente sair dele e nunca mais retornar. Além disso, toda tal partícula ou raio, enquanto estiver no buraco branco, se move necessariamente para posições radiais crescentes e, se

estiver em queda livre, originou-se na singularidade $r = 0$ ou depois, num valor finito de seu parâmetro afim.

Matematicamente, temos: *Seja $\alpha : I \longrightarrow K$ uma curva causal futuro-dirigida tal que $\alpha(s_0) \in K_{IV}$, para algum $s_0 \in I$. Logo, existe um $s_1 \in I$ tal que se $s \geq s_1$, então $\alpha(s) \notin K_{IV}$. Além disso, a função $r \circ \alpha(s)$ é crescente enquanto $\alpha(s) \in K_{IV}$, e se α é geodésica maximal e escrevemos $I = (a, b)$, então necessariamente $a > -\infty$, ou seja, α é (passado) incompleta.*

Demonstração. Vamos provar apenas que a função $r \circ \alpha(s)$ é crescente enquanto $\alpha(s) \in K_{IV}$, o que não garante a priori que $r(s)$ eventualmente deixa K_{IV} . Novamente, como na observação 3.35, argumentos mais elaborados são necessários para essa prova. A prova para a incompletude de geodésicas para o passado é “temporalmente dual” à do caso do buraco negro.

Para vermos que $r \circ \alpha(s)$ é crescente se $\alpha(s) \in K_{IV}$, basta notarmos novamente que

$$(r \circ \alpha)'(s) = \langle (\nabla r)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle.$$

Como $\langle \nabla r, \nabla r \rangle = \frac{F}{8M^2} uv$ (veja lema 3.19) e $uv < 0$ em K_{IV} , segue que ∇r é temporal em K_{IV} . Além disso, do lema 3.19 segue que

$$\nabla r = -\frac{1}{4M}(u(-\partial_u)) + (-v)\partial_v.$$

Como $u > 0$ e $v < 0$ em K_{IV} , pelo lema 3.33 segue que $u(-\partial_u) + (-v)\partial_v$ é futuro-dirigido em K_{IV} , ou seja, ∇r é passado-dirigido em K_{IV} . Como α é futuro-dirigida, segue que²² $\langle (\nabla r)(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle > 0$ para $\alpha(s) \in K_{IV}$, o que mostra $(r \circ \alpha)'(s) > 0$ se $\alpha(s) \in K_{IV}$.

Como mencionado, isso não garante, a priori, que eventualmente $r \circ \alpha(s) > 2M$. Mas, se soubermos de antemão que existe um $s_1 \in I$ com $\alpha(s_1) \notin K_{IV}$, temos então que $s \geq s_1 \implies \alpha(s) \notin K_{IV}$ pois as funções $u \circ \alpha$ e $v \circ \alpha$ são²³, respectivamente, não-crescente e não-decrescente e²⁴ $\alpha(s_1) \notin K_{IV}$. \square

O último parágrafo da prova mostra também que nenhuma partícula material ou raio de luz pode “entrar” no buraco branco. A única possibilidade de ela eventualmente estar dentro dele é se ela originar-se nele.

3.4.3 Análise qualitativa das geodésicas temporais em K

Nesta subseção, analisaremos as geodésicas temporais de K , mas apenas do ponto de vista qualitativo. O motivo é que a fórmula explícita de uma geodésica em Kruskal,

²² Esse número não pode ser 0 pois um vetor causal não pode ser ortogonal a um vetor temporal.

²³ Segue de α ser futuro-dirigida, como feito anteriormente.

²⁴ O que significa $u \circ \alpha(s_1) \leq 0$ e/ou $v \circ \alpha(s_1) \geq 0$.

quando for possível encontrá-la, pouco nos diz sobre o comportamento da curva em si. Queremos poder decidir, por exemplo, se uma dada geodésica temporal, ao passar perto do buraco negro, “escapará” dele, se permanecerá orbitando-o, se “escapará” até uma certa altura mas em seguida cairá de volta, etc. Nosso estudo qualitativo se propõe a responder perguntas como essas, cujas respostas nem sempre ficam evidentes a partir da fórmula explícita da geodésica.

Além disso, como em qualquer estudo qualitativo das soluções para uma dada equação diferencial (no nosso caso, a equação da energia 3.31), não seremos capazes de obter todas as informações sobre as soluções. Assim sendo, alguns comportamentos a princípio matematicamente possíveis das geodésicas a seguir não poderão receber a devida justificativa, que passaria por analisarmos outras equações diferenciais (como a equação orbital, veja O’Neill (1983) página 378), o que não será abordado aqui.

Note que responder o tipo de pergunta apresentado acima passa por analisar o comportamento da função $r \circ \gamma$ para γ geodésica temporal, que representa justamente o “raio” em que a partícula γ se encontra do centro da estrela de massa M ²⁵. Isso sugere que utilizemos a equação da energia (3.31 ou 3.32) que trata justamente da componente r da geodésica em questão.

Antes de continuarmos, será de grande importância para a análise que seguirá saber se a geodésica (maximal) com a qual trabalharemos é completa ou não, ou seja, se os valores do parâmetro podem crescer indefinidamente ou são limitados. Esse é o conteúdo do próximo teorema:

Teorema 3.37. *Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow K$ uma geodésica causal maximal futuro-[passado]-dirigida, com $0 \in (a, b)$. Então, $b < \infty$ [resp. $-\infty < a$] se, e somente se, $r \circ \gamma(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow b^-$ [resp. $s \rightarrow a^+$]. Portanto, no caso afirmativo γ é incompleta.*

Demonstração. A demonstração desse teorema, em sua total generalidade como foi enunciado, é demasiadamente trabalhosa para ser exposta aqui devido aos diversos casos em que deve ser dividida e pode ser encontrada na página 396 de O’Neill (1983), para o caso temporal. O caso luminoso se dá por uma pequena modificação na demonstração do caso temporal e o caso passado é temporalmente dual ao caso futuro. Faremos um caso particular que ilustra a ideia geral da prova:

Suponha que γ seja geodésica causal maximal e escreva $\varepsilon := \langle \gamma', \gamma' \rangle \leq 0$. Defina a função $r(s) := r \circ \gamma(s)$ e considere a equação da energia 3.31:

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + h(r(s)) \left(\frac{L^2}{r(s)^2} - \varepsilon \right).$$

²⁵ Esse “raio”, no entanto, é aqui apenas uma coordenada, e não representa necessariamente uma distância no sentido físico ou geométrico, ao contrário do que ocorre com a coordenada radial no espaço Euclidiano.

Nosso caso particular será considerar que $r_0 := r(0) > 2M$, $\dot{r}(s) > 0$, $\forall s \geq 0$, e $r(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow b$, ou seja, γ “escapa” do buraco negro. De acordo com o teorema, precisamos mostrar que $b = \infty$. Defina a função suave $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(r) := h(r) \left(\frac{L^2}{r^2} - \varepsilon \right)$$

de forma que a equação da energia se reescreve como $E^2 = \dot{r}(s)^2 + V(r(s))$, donde segue que

$$\dot{r}(s) = \sqrt{E^2 - V(r(s))}.$$

Considere $\delta > 0$ tal que $\dot{r}(s) > 0$ e $r(s) > 2M$ em $(-\delta, b)$. Pelo teorema da função inversa, sejam $d > c \geq 2M$ reais tais que a função $r : (-\delta, b) \rightarrow (c, d)$ é difeomorfismo crescente e seja $\tau : (c, d) \rightarrow (-\delta, b)$ a função inversa de r . Daí, temos

$$\dot{\tau}(r(s)) = \frac{1}{\dot{r}(s)} = \frac{1}{\sqrt{E^2 - V(r(s))}}.$$

Como²⁶ $V(r) > 0$ se $r > 2M$, segue que $s \in (-\delta, b) \implies r(s) > c \geq 2M \implies V(r(s)) > 0$. Daí, $E^2 - V(r(s)) < E^2$ de onde segue $\dot{\tau}(r(s)) > \frac{1}{|E|}$ em $(-\delta, b)$. Daí, para todo $s \geq 0$ temos

$$s = \tau(r(s)) - \tau(r(0)) = \int_{r_0}^{r(s)} \dot{\tau}(\xi) d\xi \geq \int_{r_0}^{r(s)} \frac{1}{|E|} d\xi = \frac{r(s) - r_0}{|E|}.$$

Finalmente, fazendo $s \rightarrow b$, temos $r(s) \rightarrow \infty \implies s \rightarrow \infty$, donde segue $b = \infty$. \square

Em vista do teorema 3.37, podemos fortalecer a proposição 3.34 para geodésicas causais futuro-dirigidas: *toda partícula material ou raio de luz em queda livre que eventualmente entrar no buraco negro deve necessariamente convergir para a singularidade $r = 0$ em tempo finito. Analogamente, se estiver no buraco branco é porque emanou de $r = 0$.* Com efeito, seja $\gamma : (a, b) \rightarrow K$ geodésica causal, maximal e futuro-dirigida que eventualmente entra em K_{II} (o caso para o buraco branco é análogo e o omitimos). A proposição 3.34 mostra que $b < \infty$. Logo, pelo teorema 3.37 segue que $r(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow b$, o que prova a afirmação.

Para o restante da subseção, fixe $\gamma : (a, b) \rightarrow K$ uma geodésica temporal, maximal e futuro-dirigida, com $0 \in (a, b)$. Por hora, escreva $\varepsilon = \langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$ e considere a função $\chi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi(x) := \int_0^x \sqrt{-\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} ds = \int_0^x \sqrt{-\varepsilon} ds = \sqrt{-\varepsilon} \cdot x.$$

A curva $\hat{\gamma}(z) := \gamma \circ \chi^{-1}(z) = \gamma \left(\frac{z}{\sqrt{-\varepsilon}} \right)$ é ainda geodésica²⁷ e $\hat{\gamma}'(z) = \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \gamma' \left(\frac{z}{\sqrt{-\varepsilon}} \right) \implies \langle \hat{\gamma}', \hat{\gamma}' \rangle = -1$, ou seja, $\hat{\gamma}$ é unitária e, como $\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} > 0$, a geodésica $\hat{\gamma}$ é uma reparametrização

²⁶ Pois $\varepsilon \leq 0$ e $h(r) = 1 - \frac{2M}{r} > 0$.

²⁷ Pois reparametrizações afins de geodésicas ainda são geodésicas (lema 1.34).

positiva de γ , isto é, “percorre a mesma trajetória de γ e no mesmo sentido”. Como estamos interessados, por hora, apenas na trajetória descrita por uma geodésica temporal, não faz diferença se consideramos a geodésica γ ou $\hat{\gamma}$ (ou seja, não faz diferença a velocidade com que a geodésica percorre sua trajetória), de forma que, sem perda de generalidade, podemos supor que $\varepsilon = \langle \gamma', \gamma' \rangle = -1$.

A equação da energia 3.31 para esse caso fica

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + h(r(s)) \left(\frac{L^2}{r(s)^2} + 1 \right),$$

onde $r(s) = r \circ \gamma(s)$. Defina a função suave $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(r) := h(r) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}. \quad (3.38)$$

A equação da energia fica então

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + V(r(s)). \quad (3.39)$$

A função V é chamada de *função potencial* pois depende apenas da posição r de uma partícula. Segue da equação 3.39 que $V(r(s)) \leq E^2, \forall s \in (a, b)$, ou seja, a função $r(s)$ só pode atingir valores de $r \in (0, \infty)$ onde $V(r) \leq E^2$. Isso sugere que estudemos o comportamento da função V para obtermos informações sobre $r(s)$. Assim sendo, note que

$$V'(r) = \frac{2}{r^4} (Mr^2 - L^2r + 3ML^2), \quad (3.40)$$

que possui raiz se, e somente se, $L^2 \geq 12M^2$. Nesse caso, os pontos críticos de V são

$$r_1 = \frac{L^2 - L\sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M}. \quad (3.41)$$

Além disso, o leitor pode verificar que

$$V''(r_1) = -\frac{2L}{r_1^4} \cdot \sqrt{L^2 - 12M^2} \quad \text{e} \quad V''(r_2) = \frac{2L}{r_2^4} \cdot \sqrt{L^2 - 12M^2},$$

ou seja, se $L^2 > 12M^2$, r_1 é máximo local de V e r_2 é mínimo local de V . Além disso, reunimos as demais informações relevantes sobre V no seguinte lema:

Lema 3.42. *A função V satisfaz:*

1. a) $V(2M) = 0$;
 b) $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 1$;
 c) $\lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) = -\infty$;
2. $V'(r(s)) = -2 \cdot \ddot{r}(s), \forall s \in (a, b)$ exceto possivelmente onde $r(s)$ é localmente constante e igual a r^* onde $V(r^*) = E^2$.

Demonstração. O item 1 segue diretamente da definição de V (equação 3.38). Para o item 2, derivando ambos os lados da equação 3.39 segue que

$$\dot{r}(s) [2 \cdot \ddot{r}(s) + V'(r(s))] = 0, \forall s \in (a, b).$$

O resultado é imediato onde $\dot{r}(s) \neq 0$. Fixe um $s_0 \in (a, b)$ com $\dot{r}(s_0) = 0$. Temos então dois casos:

Caso a): existe um $\delta > 0$ tal que $\dot{r}(s) = 0$ se $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Isso implica que $r|_{(s_0 - \delta, s_0 + \delta)}$ é constante e igual, digamos, a r^* . Pela equação 3.39 segue que $V(r^*) = E^2$.

Caso b): existe uma sequência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ tal que $s_k \rightarrow s_0$ e $\dot{r}(s_k) \neq 0, \forall k$. Nesse caso, temos $V'(r(s_k)) = -2 \cdot \ddot{r}(s_k), \forall k \in \mathbb{N}$. Por continuidade, segue $V'(r(s_0)) = -2 \cdot \ddot{r}(s_0)$, o que encerra a prova. \square

Para estudarmos as possíveis trajetórias de uma partícula γ , vamos primeiro nomeá-las:

Definição 3.43. Dizemos que γ :

1. vai para dentro (ou é “ingoing”) se $\dot{r}(s) < 0, \forall s \in (a, b)$;
2. vai para fora (ou é “outgoing”) se $\dot{r}(s) > 0, \forall s \in (a, b)$;
3. colide se $r(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow b$;
4. escapa se $r(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow b$;
5. é limitada quando existem $s_1, s_2 \in (a, b)$ tais que $r(s_1) \leq r(s) \leq r(s_2), \forall s \in (a, b)$;
6. é “flyby” quando $r(s)$ decresce até um valor $r^* > 2M$ e então começa a crescer, com $r(s) \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow b$. r^* é chamado de ponto de virada.

Faremos o estudo qualitativo das geodésicas temporais em três casos. O leitor pode observar que em todos os três casos a seguir, o gráfico do potencial $V(r)$ possui uma “queda” para $r \approx 0$ (veja figuras 5, 6 e 7), em contraste com o gráfico do potencial Newtoniano que “sobe” para valores pequenos de r (veja figura na página 455 de O’Neill (1983)). Isso se deve ao termo de correção $-\frac{2ML^2}{r^3}$ presente na equação 3.38 e ausente na expressão do potencial Newtoniano (veja equação da energia na página 454 de O’Neill (1983)).

Caso I: $L^2 < 12M^2$.

Nesse caso, o potencial V não possui pontos críticos e temos $V'(r) > 0, \forall r > 0$ (veja equação 3.40). Em particular, pelo item 1.b) do lema 3.42, segue que $V(r) < 1, \forall r > 0$. Esse caso, por sua vez, vai ser dividido em:

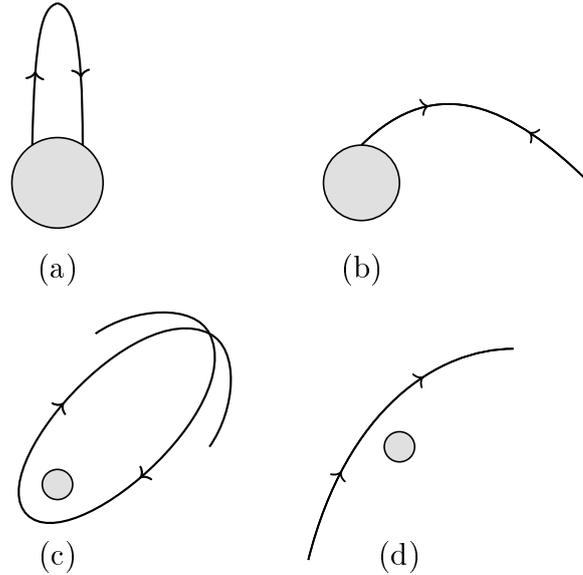


Figura 4 – Órbitas possíveis: (a) colide. (b) colide/escapa. (c) órbita limitada. (d) órbita “flyby”.

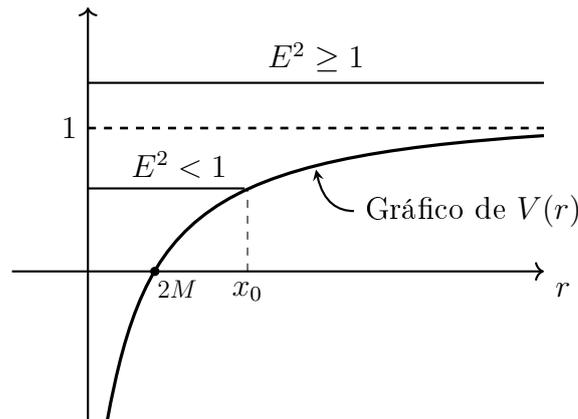


Figura 5 – Caso I: $L^2 < 12M^2$

Caso a): $E^2 \geq 1$: como $V(r) < 1, \forall r > 0$, segue $V(r) < E^2, \forall r > 0$. Daí, pela equação 3.39, como $V(r(s)) < E^2, \forall s$, segue que $\dot{r}(s) \neq 0, \forall s \in (a, b)$. Logo, ou temos $\dot{r}(s) > 0, \forall s$, ou $\dot{r}(s) < 0, \forall s$. Além disso, pelo item 2 do lema 3.42 segue que $\ddot{r}(s) < 0, \forall s$.

Se $\dot{r}(s) > 0, \forall s \in (a, b)$, segue do teorema 3.37 que $b = \infty$, ou seja, γ é completa. Vamos mostrar que $r(s) \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow \infty$, ou seja, γ escapa. Suponha, por absurdo, que $r(s)$ seja limitada superiormente e seja $c := \sup\{r(s) : s \in (a, \infty)\} \in \mathbb{R}$. Daí, $r(s) \rightarrow c$ quando $s \rightarrow \infty$. Como $\ddot{r} < 0, \dot{r}$ é decrescente embora seja sempre positivo. Seja $N := \inf\{\dot{r}(s) : s \in (a, \infty)\}$ de forma que $\dot{r}(s) \rightarrow N$ quando $s \rightarrow \infty$. Se $N > 0$, como $\dot{r}(s) \geq N, \forall s \in (a, \infty)$ temos uma contradição com $r(s)$ ser limitado. Logo, $N = 0$, ou seja, $\dot{r}(s) \rightarrow 0$. Então, pela equação 3.39 segue que $V(c) = \lim_{s \rightarrow \infty} V(r(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} [V(r(s)) + \dot{r}(s)^2] = E^2$, o que contraria $V(r) < E^2, \forall r$. Logo, de fato, $r(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$, ou seja, γ escapa.

Se $\dot{r}(s) < 0, \forall s$, como $\ddot{r}(s) < 0, \forall s$, devemos ter $b < \infty$ pois, do contrário, $r(s) \rightarrow -\infty$ se $s \rightarrow \infty = b$. Daí, pelo teorema 3.37 segue que $r(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow b < \infty$, ou seja, γ colide em $r = 0$.

Caso b): $E^2 < 1$: aqui, existe único $x_0 \in (0, \infty)$ com $V(x_0) = E^2$. De fato, temos $x_0 \geq 2M$ pois $V(2M) = 0 \leq E^2$. Como $V(r(s)) \leq E^2$ e V é crescente, devemos ter $r(s) \leq x_0, \forall s$.

Se $\dot{r}(0) < 0$, então $V(r(0)) < E^2$ e, portanto, $r_0 := r(0) < x_0$. Nesse caso, afirmamos que $\dot{r}(s) < 0, \forall s \geq 0$. De fato, suponha que não e defina $s_1 := \inf\{s \in [0, b) : \dot{r}(s) = 0\}$. Esse conjunto é não-vazio por hipótese de absurdo. Pela continuidade de \dot{r} segue que o conjunto $\{s \in [0, b) : \dot{r}(s) = 0\}$ é fechado e, portanto, $s_1 \in \{s \in [0, b) : \dot{r}(s) = 0\}$, ou seja, $\dot{r}(s_1) = 0$. Pela equação 3.39, segue que $V(r(s_1)) = E^2 \implies r(s_1) = x_0$. Como $r_0 < x_0$ e $\dot{r}(0) < 0$, existe $s_2 \in (0, s_1)$ com $\dot{r}(s_2) = 0$ (teoremas do valor intermediário e do valor médio), o que contraria a definição de s_1 . Daí, de fato, $\dot{r}(s) < 0, \forall s$, donde segue $\ddot{r}(s) < 0, \forall s$. Isso mostra que γ é incompleta ($b < \infty$, pois do contrário teríamos $r(s) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow \infty$) e, pelo teorema 3.37, segue que $r(s) \rightarrow 0$, ou seja, γ colide.

Se $\dot{r}(0) > 0$, $r_0 = r(0) < x_0$ (equação 3.39) e vamos mostrar que $r(s)$ genericamente atinge x_0 e retorna para cair no buraco negro. Nesse caso, chamamos x_0 de *ponto de virada*. Suponha, por absurdo, que $r(s) < x_0, \forall s$. Em particular, como $V(r(s)) < E^2, \forall s$, pela equação 3.39 segue que $\dot{r}(s) > 0, \forall s$ (já que $\dot{r}(0) > 0$). Então, o teorema 3.37 nos garante que $b = \infty$. Como $\{r(s) : s \in (a, \infty)\}$ é limitado, se definirmos $c := \sup\{r(s) : s \in (a, \infty)\}$ temos $r(s) \rightarrow c$ se $s \rightarrow \infty$. Como $V' > 0$, temos $\ddot{r}(s) < 0$ (lema 3.42), $\forall s \geq 0$, ou seja, $\dot{r}|_{(0, \infty)}$ é decrescente. Como $r(s)$ é limitada superiormente, devemos ter $\dot{r}(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. Daí, novamente pela equação 3.39 segue que $V(c) = E^2$, ou seja, $c = x_0$. No entanto, este comportamento assintótico da função $r(s)$, crescendo e tendendo a x_0 , é excepcional, isto é, instável por pequenas perturbações²⁸. Isso prova que existe $s_0 \in (a, b)$ tal que $r(s_0) = x_0$. De fato, escolhemos s_0 para ser o menor instante em que $r(s) = x_0$ (ou, equivalentemente, $\dot{r}(s_0) = 0$). Daí, se $0 \leq s < s_0$, temos $\dot{r}(s) > 0$ e $r(s) < x_0$, de forma que vale o item 2 do lema 3.42, donde segue que $\ddot{r}(s_0) < 0$. Daí, para s ligeiramente maior que s_0 , temos $\dot{r}(s) < 0$ e tudo se passa como no caso $\dot{r}(0) < 0$ acima, ou seja, γ colide.

Se $\dot{r}(0) = 0$, temos $r_0 := r(0) = x_0$ (equação 3.39). Segue que existe um $\delta > 0$ tal que se $s \in (-\delta, \delta)$ então $\dot{r}(s) = 0$ (do contrário, pelo item 2 do lema 3.42, teríamos $\ddot{r}(0) < 0$ e caímos no caso $\dot{r}(0) < 0$ acima), ou seja, $r|_{(-\delta, \delta)} = x_0$. Fisicamente, a partícula orbita o buraco negro com raio constante e igual a $x_0 \geq 2M$. Essa situação, embora seja

²⁸ Provar isso requer analisar também o comportamento da componente ϕ da geodésica γ (para coordenadas geográficas em \mathbb{S}^2), em especial a variação $\frac{d\phi}{dr}$ e a equação orbital (veja O'Neill (1983) páginas 378 e 396), o que não será feito aqui.

matematicamente possível, é fisicamente improvável, dado que qualquer pequena variação da energia total E do sistema é capaz de acelerar a partícula radialmente²⁹, ou seja, tornar \dot{r} não-nulo. Assim, caímos nos casos $\dot{r}(0) > 0$ ou $\dot{r}(0) < 0$ anteriores, o que leva γ a colidir.

Comentamos brevemente o “caso limite” $L^2 = 12M^2$. Nesse caso, surge um ponto crítico em $r = 6M$ (equação 3.40) com $V(6M) = \frac{8}{9}$, embora V ainda seja crescente e menor que 1. Daí, a análise é parecida com o caso anterior, incluindo uma órbita circular (instável) em $r = 6M$ caso $E^2 = \frac{8}{9}$. Como esse caso requer um “ajuste fino” dos parâmetros do sistema, seu interesse físico é menor.

Caso II: $12M^2 < L^2 < 16M^2$.

Nesse caso, temos dois pontos críticos³⁰ $r_1 < 6M < r_2$ dados pelas fórmulas na equação 3.41. Sabemos pois que r_1 é máximo local e r_2 é mínimo local. Observe também que $V'|_{(0,r_1)} > 0$, $V'|_{(r_1,r_2)} < 0$ e $V'|_{(r_2,\infty)} > 0$. Em particular, como $V'(2M) > 0$ (segue da equação 3.40), temos $2M < r_1$ ou $2M > r_2$. Mas $r_2 > 6M$, donde segue $2M < r_1$. Além disso, temos³¹ $V(r) < 1, \forall r > 0$. Temos os seguintes casos:

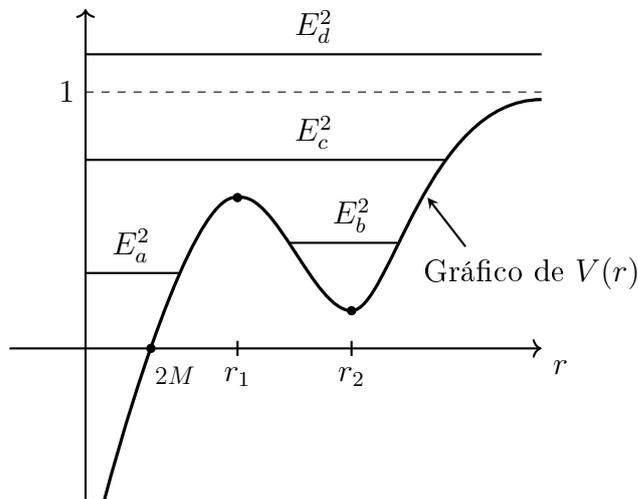


Figura 6 – Caso II: $12M^2 < L^2 < 16M^2$

Caso a): $E^2 < V(r_1)$ e $r_0 < r_1$. Aqui, $V' > 0$ em $(0, r_1)$, de forma que tudo se passa como no caso I.b), ou seja, γ colide.

²⁹ Pela equação 3.39, para $s \in (-\delta, \delta)$ temos $r(s) = x_0$ e $\dot{r}(s) = 0$. Se E^2 aumenta, a equação 3.39 força \dot{r} a ser não-nulo, ou seja, $r(s)$ sai do repouso.

³⁰ $r_2 = \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M} > \frac{L^2}{2M} > 6M$ e $r_1 < 6M \iff L^2 - L\sqrt{L^2 - 12M^2} < 12M^2 \iff 0 < L^2 - 12M^2 < L\sqrt{L^2 - 12M^2} \iff 0 < \sqrt{L^2 - 12M^2} < L$, o que decorre de $12M^2 > 0$.

³¹ Pela equação 3.38, $V(r) = 1 \iff 2Mr^2 - L^2r + 2ML^2 = 0$, que não possui solução pois $L^2 < 16M^2$. Daí, como $V(2M) = 0 < 1$, segue $V(r) < 1, \forall r > 0$.

Caso b): $V(r_2) \leq E^2 < V(r_1)$ e $r_0 > r_1$. Se $V(r_2) = E^2$, necessariamente devemos ter $r_0 = r(s) = r_2, \forall s$ devido à equação 3.39 e a r_2 ser mínimo local, ou seja, γ orbita em um raio constante e igual a $r_2 > 6M$. Essa órbita é matematicamente possível e fisicamente estável, pois um pequeno aumento na energia total do sistema E^2 mantém γ numa órbita limitada (como veremos a seguir). Se $V(r_2) < E^2$, então existe $x_0^1 \in (r_1, r_2)$ com $V(x_0^1) = E^2$. Como $V(r_1) < 1, \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 1$ e $V|_{(r_2, \infty)}$ é crescente, segue que existe $x_0^2 \in (r_2, \infty)$ com $V(x_0^2) = E^2$. Daí, devemos ter $x_0^1 \leq r(s) \leq x_0^2, \forall s$ (equação 3.39 já que $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$ e $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$), ou seja, temos uma órbita limitada. É de se notar que a órbita $r(s) = r_2$ não é mais possível pois $V(r_2) < E^2$. Esse é o caso em que a partícula orbita eternamente a estrela de massa M , entre os raios $x_0^2 > x_0^1 > 2M$.

Caso c): $V(r_1) \leq E^2 < 1$. Segue que existe único $x_0 > r_2$ com $V(x_0) = E^2$ (já que $V(r_2) < V(r_1) \leq E^2, \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 1 > E^2$ e $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$) e temos $r(s) \leq x_0, \forall s$ (segue de $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$ e da equação 3.39). Escreva $r_0 = r(0)$. Vamos mostrar que γ genericamente (isto é, exceto em casos excepcionais, e portanto fisicamente irrelevantes) colide com a singularidade $r = 0$. Inicialmente, faremos o caso $V(r_1) < E^2$.

Suponha $\dot{r}(0) < 0$, donde $r_0 < x_0$. Se $b < \infty$, estamos feitos (teorema 3.37). Suponha, por absurdo, que $b = \infty$. Vamos mostrar que, independentemente da posição inicial $r_0 \in (0, x_0), r(s) \rightarrow 0$. Para tanto, suponha $r_0 \in (r_2, x_0)$. Vamos provar que $r(s)$ atinge r_2 . Com efeito, se não fosse o caso, teríamos $r(s) > r_2, \forall s \in [0, \infty)$. Afirmamos que, nesse caso, $\dot{r}(s) < 0, \forall s$. Se não fosse o caso, defina $s_1 := \inf\{s \in (0, \infty) : \dot{r}(s) = 0\}$. Esse conjunto é fechado, de forma que $\dot{r}(s_1) = 0$, ou seja, $V(r(s_1)) = E^2$ (equação 3.39) e $s_1 > 0$. Como $V^{-1}(E^2) = \{x_0\}$ (estamos no caso $V(r_1) < E^2$), segue $r(s_1) = x_0$. Como $r_0 < x_0$ e $\dot{r}(0) < 0$, pelos teoremas do valor intermediário e médio segue que existe $s_2 \in (0, s_1)$ com $\dot{r}(s_2) = 0$, o que contraria a definição de s_1 e, portanto, $\dot{r}(s) < 0, \forall s > 0$. Daí, pelo lema 3.42 item 2, como $r(s) \in (r_2, x_0), \forall s$, onde $V' > 0$, segue $\ddot{r}(s) < 0, \forall s$. Mas isso contraria $r(s)$ ser limitado inferiormente. Daí, de fato, $r(s)$ atinge r_2 num menor instante digamos $\xi_1 > 0$. Pela equação da energia, temos $\dot{r}(\xi_1) \neq 0$ e por continuidade temos $\dot{r}(\xi_1) < 0$, de forma que para s ligeiramente maior que ξ_1 temos $r(s) < r_2$ e $\dot{r}(s) < 0$.

Vamos mostrar agora que $r(s)$ atinge r_1 . Se não fosse o caso, teríamos $r(s) > r_1, \forall s > \xi_1$ e, novamente, $\dot{r}(s) < 0, \forall s > \xi_1$ (argumento análogo ao do parágrafo anterior), de forma que $r_1 < r(s) < r_2, \forall s > \xi_1$ e r é decrescente. Como em (r_1, r_2) temos $V' < 0$, segue do lema 3.42 que $\ddot{r}(s) > 0, \forall s > \xi_1$, ou seja, $\dot{r}|_{(\xi_1, \infty)}$ é crescente e sempre negativa. Se for limitada superiormente por um $N < 0$, segue que $r(s) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow \infty$, o que contraria nossa suposição de que $r(s) > r_1, \forall s > \xi_1$. Daí, $\dot{r}(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$. Como $E^2 > V(r_1)$, isso mostra $r(s) \rightarrow x_0$ (equação 3.39 e x_0 é o único ponto onde V vale E^2), o que contraria $\dot{r}|_{(\xi_1, \infty)} < 0$. Isso prova que $r(s)$ atinge r_1 . Nesse caso, existe um menor

³² Se $r_0 < r_1$, estamos no caso II.a). $r_0 = r_1$ não é possível pois $E^2 < V(r_1)$ (equação 3.39).

$\xi_2 > \xi_1$ satisfazendo $r(\xi_2) = r_1$ e $\dot{r}(\xi_2) < 0$ ($\neq 0$ pela equação 3.39 e < 0 por continuidade). Nesse caso, para s ligeiramente maior que ξ_2 , temos $r(s) < r_1$ e $\dot{r}(s) < 0$, donde segue também $\ddot{r}(s) < 0$. De fato temos³³ $\dot{r}(s) < 0, \forall s > \xi_2$, ou seja, $r(s) < r_1, \forall s > \xi_2$. Como em $(0, r_1)$ temos $V' > 0$, segue do lema 3.42 que $\ddot{r}(s) < 0$ para $s > \xi_2$ e, portanto, como $b = \infty$ temos $r(s) \rightarrow -\infty$, o que é uma contradição. Logo, $b < \infty$ e temos $r(s) \rightarrow 0$.

Suponha agora que $\dot{r}(0) > 0$. Vamos mostrar que $r(s)$ atinge x_0 , independentemente da posição inicial $r_0 \geq 2M$ (de fato, se $r_0 < 2M$, o comentário que segue o teorema 3.37 mostra que $r(s) \rightarrow 0$ e não há nada a fazer). Suponha $2M \leq r_0 < r_1$. Para mostrarmos que $r(s)$ atinge r_1 , supomos por contradição que $r(s) < r_1, \forall s \geq 0$. Daí, teríamos³⁴ $\dot{r}(s) > 0, \forall s \geq 0$. Como $V'|_{(0, r_1)} > 0$, segue $\ddot{r}(s) < 0, \forall s \geq 0$, ou seja, $\dot{r}(s)$ decrescente embora positiva. Se existir $N > 0$ tal que $\dot{r}(s) \geq N, \forall s \geq 0$, segue que $r(s) \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow \infty$, o que contraria r ser limitada superiormente por r_1 . Segue não existe tal N e, como \dot{r} é decrescente, $\dot{r}(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$. Mas pela equação da energia 3.39, isso mostra que $r(s) \rightarrow x_0$, o que nos dá a contradição e mostra que $r(s)$ atinge r_1 . Seja $\eta_1 > 0$ o menor instante em que $r(\eta_1) = r_1$. Como $V(r_1) < E^2$, $\dot{r}(\eta_1) \neq 0$ e, por continuidade, $\dot{r}(\eta_1) > 0$, de forma que para s ligeiramente maior que η_1 temos $r(s) > r_1$ e $\dot{r}(s) > 0$.

Vamos mostrar agora que $r(s)$ atinge r_2 . Se não fosse o caso, teríamos $r(s) < r_2, \forall s \geq \eta_1$, o que nos garantiria, em particular, que $\dot{r}(s) > 0, \forall s \geq \eta_1$ e, portanto, $r(s) \in (r_1, r_2), \forall s > \eta_1$. Como $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$, teríamos $\ddot{r}(s) > 0, \forall s > \eta_1$, o que mostra $r(s) \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow \infty$, o que contraria $r(s) < r_2$. Seja pois $\eta_2 > \eta_1$ o menor instante em que $r(\eta_2) = r_2$. Segue que $\dot{r}(\eta_2) > 0$ e, para s ligeiramente maior que η_2 , $r(s) > r_2$ e $\dot{r}(s) > 0$. Finalmente, vamos mostrar que $r(s)$ atinge x_0 . Se não fosse o caso, $r(s) < x_0, \forall s > \eta_2$, o que em particular mostra que \dot{r} não pode zerar e, portanto, $\dot{r}(s) > 0, \forall s > \eta_2$. Como $V'|_{(r_2, x_0)} > 0$, temos $\ddot{r}(s) < 0$ se $s > \eta_2$, ou seja, $\dot{r}|_{(\eta_2, \infty)}$ é decrescente. O fato de $r(s)$ ser limitada por x_0 impede que \dot{r} seja limitada inferiormente por uma constante positiva e, como é decrescente, segue que $\dot{r}(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$. Pela equação 3.39 segue que $r(s) \rightarrow x_0$. Esse comportamento assintótico é, novamente, não-genérico³⁵. Sendo assim, nossa contradição está provada, donde segue que existe um menor $\eta_3 > \eta_2$ com $r(\eta_3) = x_0$ (e $\dot{r}(\eta_3) = 0$). Em particular, se $s \in (\eta_2, \eta_3)$ temos $\dot{r}(s) > 0$ e, pelo lema 3.42, segue $\ddot{r}(\eta_3) < 0$ pois $V'(x_0) > 0$. Daí, para instantes s ligeiramente maiores que η_3 , temos $r(s) < x_0$ e $\dot{r}(s) < 0$, o que mostra que γ colide da mesma maneira que o caso $\dot{r}(0) < 0$ anterior.

Se $r_0 = x_0$, ou seja, $\dot{r}(0) = 0$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\dot{r}|_{(-\delta, \delta)} = 0$ (se não fosse

³³ Se não fosse o caso, pegaríamos um menor $\zeta > \xi_2$ satisfazendo $\dot{r}(\zeta) = 0$, ou seja, $r(\zeta) = x_0$ e pelos teoremas do valor intermediário e médio teríamos a contradição.

³⁴ Porque $\dot{r}(s)$ só pode zerar em x_0 (equação 3.39), que é inatingível pela hipótese de absurdo.

³⁵ Novamente, uma análise mais cuidadosa é aqui exigida, em que deve ser levada em conta a componente ϕ de γ . Veja páginas 378 e 396 de O'Neill (1983).

o caso, o lema 3.42 nos garantiria que $\ddot{r}(0) < 0$ e cairíamos no caso $\dot{r}(0) < 0$ anterior) e $r|_{(-\delta, \delta)} = x_0$. Essa situação é fisicamente improvável como no caso I.b).

Finalmente, se $E^2 = V(r_1)$, poderíamos, a princípio, ter órbitas um tanto quanto diferentes do caso $E^2 > V(r_1)$ acima. Ocorre, no entanto, que ainda que tenhamos $V(r_1) = E^2$, essa condição é fisicamente improvável (ou, pelo menos, instável), no sentido de que facilmente ela se transforma na condição $V(r_1) < \hat{E}^2$ através de um pequeno fornecimento de energia para a partícula γ , o que inevitavelmente culmina com a colisão de γ com a singularidade $r = 0$.

Caso d): $E^2 \geq 1$. Esse caso é completamente análogo ao caso I.a) (se $\dot{r}(0) > 0$, então γ é completa e escapa e, se $\dot{r}(0) < 0$, γ é incompleta e colide com a singularidade).

Novamente, comentamos brevemente, que no caso $L^2 = 16M^2$, $V(r_1) = 1$ e r_1 é máximo global estrito. Novamente, este caso limite não tem grande interesse físico.

Caso III: $L^2 > 16M^2$.

Como no caso II, já que $L^2 > 12M^2$ temos dois pontos críticos r_1 e r_2 dados pelas fórmulas na equação 3.41, com r_1 ponto de máximo local e r_2 ponto de mínimo local e satisfazendo $r_1 < 6M < r_2$ (como no caso II). No entanto, neste caso, teremos pontos $r \in (0, \infty)$ para os quais $V(r) > 1$. Com efeito, já que $L^2 > 16M^2$, o leitor pode verificar diretamente da fórmula para V na equação 3.38 que $V(r) > 1$ se, e somente se, $r \in \left(\frac{L^2 - L\sqrt{L^2 - 16M^2}}{4M}, \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 - 16M^2}}{4M} \right)$. Daí, como deve existir um máximo nesse intervalo e o único máximo local de V é r_1 , temos que

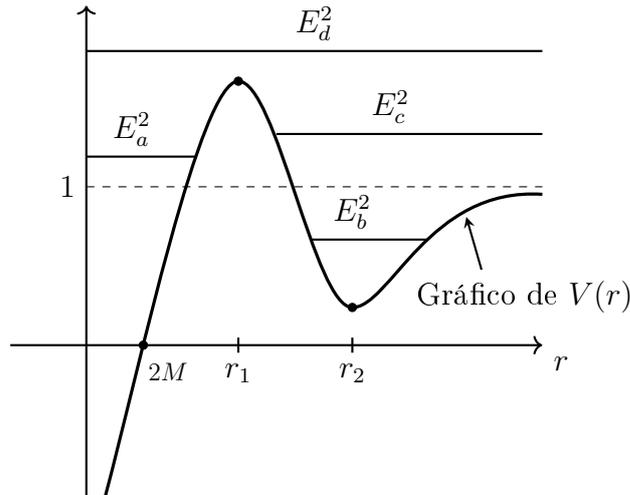
$$r_1 \in \left(\frac{L^2 - L\sqrt{L^2 - 16M^2}}{4M}, \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 - 16M^2}}{4M} \right).$$

Em particular, $V(r_1) > 1$. Como no caso II, temos que $V'|_{(0, r_1)} > 0$, $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$ e $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$. Note também que³⁶ $r_2 > \frac{L^2 + L\sqrt{L^2 - 16M^2}}{4M}$. Isso justifica a figura 7. Temos os seguintes quatro casos:

Caso a): $E^2 < V(r_1)$ e $r_0 < r_1$. Esse caso é inteiramente análogo ao caso I.b), ou seja, γ colide.

Caso b): $V(r_2) \leq E^2 < 1$ e $r_0 > r_1$. Note que o caso $r_0 < r_1$ é o próprio caso a) e $r_0 = r_1$ não é possível pois $E^2 < 1 < V(r_1)$. Se $E^2 = V(r_2)$, a única órbita possível é a órbita circular $r(s) = r_2, \forall s$, que é completa (teorema 3.37) e estável dado que um pequeno aumento na energia E^2 para um valor $\hat{E}^2 > E^2$ irá gerar uma órbita

³⁶ Pois r_2 é mínimo em $[r_2, \infty)$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 1$.

Figura 7 – Caso III: $L^2 > 16M^2$

limitada (veja a seguir). Se $V(r_2) < E^2$, existem $x_0^1 \in (r_1, r_2)$ e $x_0^2 \in (r_2, \infty)$ tais que $V(x_0^1) = E^2 = V(x_0^2)$. Daí, devemos ter $x_0^1 \leq r_0 \leq x_0^2$ e, de fato, $x_0^1 \leq r(s) \leq x_0^2$, para todo $s \geq 0$ pois $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$ e $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$. Daí, γ tem uma órbita limitada e completa (pois não vale que $r(s) \rightarrow 0$ já que $r(s) > x_0^1, \forall s$. Veja teorema 3.37).

Caso c): $1 \leq E^2 < V(r_1)$ e $r_0 > r_1$. Veja que $r_0 = r_1$ não é possível pois $E^2 < V(r_1)$ e $r_0 < r_1$ está coberto no caso a). Nesse caso, existe único $x_0 \in (r_1, r_2)$ tal que $V(x_0) = E^2$. Devemos, pois, ter $r(s) \geq x_0, \forall s \geq 0$, já que $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$. Neste caso, vamos mostrar que γ (genericamente) escapa.

Se $\dot{r}(0) > 0$, temos $r_0 > x_0$ e afirmamos que $\dot{r}(s) > 0, \forall s \geq 0$, e γ escapa. Que $\dot{r}(s) > 0, \forall s \geq 0$ é uma demonstração já corriqueira³⁷. Em particular, isso prova que γ é completa (ou seja, $b = \infty$) pelo teorema 3.37. Se $r_0 < r_2$, é fácil mostrar que $r(s)$ atinge³⁸ r_2 num menor instante s_1 com $\dot{r}(s_1) > 0$. Daí, para $s > s_1$, temos $r(s) \in (r_2, \infty)$ e, portanto, $\ddot{r}(s) < 0$, ou seja, $\dot{r}|_{(s_1, \infty)}$ é decrescente. Se $\dot{r}|_{(r_2, \infty)}$ é limitada inferiormente por um $N > 0$, segue que $r(s) \rightarrow \infty$, como queríamos. Se esse não fosse o caso, como $\dot{r}|_{(r_2, \infty)}$ é decrescente seguiria que $\dot{r}(s) \rightarrow 0$, o que, pela equação 3.39, nos daria $\lim_{s \rightarrow \infty} V(r(s)) = E^2$, ou seja, $\lim_{s \rightarrow \infty} r(s) = x_0$, o que não faz sentido pois $\dot{r}(s) > 0, \forall s \geq 0$, e $r_0 > x_0$.

Se $\dot{r}(0) < 0$, então afirmamos que $r(s)$ atinge x_0 . De fato, suponha $r_0 > r_2$. Então, $r(s)$ atinge r_2 , pois se $r_2 < r(s), \forall s \geq 0$, então como³⁹ $\dot{r}(s) < 0, \forall s \geq 0$, e $V'|_{(r_2, \infty)} > 0$, temos

³⁷ Suponha que não, e defina $s_1 := \inf\{s \in (0, \infty) : \dot{r}(s) = 0\}$. Daí, $\dot{r}(s_1) = 0$, ou seja, $r(s_1) = x_0$. Mas como $r_0 > x_0$ e $\dot{r}(0) > 0$, pelos teoremas do valor intermediário e médio existe $s_2 \in (0, s_1)$ tal que $\dot{r}(s_2) = 0$, o que contraria a definição de s_1 .

³⁸ Se $r(s) < r_2, \forall s \geq 0$, como $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$, teríamos $\ddot{r}|_{(0, \infty)} > 0$ e, como $\dot{r}(s) > 0$ para $s \geq 0$, então $r(s) \rightarrow \infty$, o que contraria ser limitada superiormente.

³⁹ Pois $r(s) > r_2, \forall s \geq 0 \implies r(s) \neq x_0, \forall s \geq 0 \implies \dot{r}(s) \neq 0, \forall s \geq 0$. Daí, como $\dot{r}(0) < 0$, segue $\dot{r}(s) < 0, \forall s \geq 0$.

$\ddot{r}(s) < 0, \forall s \geq 0$, o que contraria $r(s)$ ser limitada inferiormente. Seja ξ_1 o menor instante tal que $r(\xi_1) = r_2$. Como $V(r_2) < 1 \leq E^2$, segue $\dot{r}(\xi_1) \neq 0$ e, por continuidade, $\dot{r}(\xi_1) < 0$. Vamos mostrar agora que $r(s)$ atinge x_0 . Suponha, por absurdo, que $x_0 < r(s), \forall s > \xi_1$. Em particular, \dot{r} não pode zerar, donde $\dot{r}(s) < 0, \forall s \geq \xi_1$ e, em particular, $r(s) < r_2$ para $s > \xi_1$. Como $V'|_{(r_1, r_2)} < 0$, segue que $\ddot{r}(s) > 0$ para $s > \xi_1$, ou seja, $\dot{r}|_{(\xi_1, \infty)}$ é crescente e negativa. Se $\dot{r}|_{(\xi_1, \infty)}$ for limitada superiormente por um $N < 0$, teríamos $r(s) \rightarrow -\infty$, o que contraria $r(s) > 0, \forall s$. Segue que não existe tal $N < 0$ e então $\dot{r}(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, o que é equivalente, pela equação 3.39, a $r(s) \rightarrow x_0$, embora $r(s)$ seja sempre maior que x_0 . Novamente, esse caso assintótico é não-genérico. Isso mostra que existe um menor $\xi_2 > \xi_1$ tal que $r(\xi_2) = x_0$. Em particular, se $s \in (\xi_1, \xi_2)$, temos $r(s) > x_0$ e $\dot{r}(s) < 0$. O lema 3.42 nos dá que $\ddot{r}(\xi_2) > 0$. Assim, para s ligeiramente maior que ξ_2 , temos $r(s) > x_0$ e $\dot{r}(s) > 0$, o que nos leva para o caso $\dot{r}(0) > 0$ acima, ou seja, γ (genericamente) escapa.

Finalmente, se $r_0 = x_0$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\dot{r}|_{(-\delta, \delta)} = 0$ (se não fosse o caso, valeria o item 2 do lema 3.42 e teríamos, para s ligeiramente maior que 0, $\dot{r}(s) > 0$, ou seja, cairíamos no caso $\dot{r}(0) > 0$ acima), ou seja, $r|_{(-\delta, \delta)} = x_0$. Essa situação é fisicamente improvável como no caso I.b), o que implica que γ escapa.

Caso d): $E^2 \geq V(r_1)$. Se $V(r_1) < E^2$, tudo se passa como no caso I.a) já que $V(r) < E^2, \forall r > 0$. Daí, se $\dot{r}(0) > 0$, γ escapa e se $\dot{r}(0) < 0$, γ colide. O caso $E^2 = V(r_1)$ é, como no caso II.c), instável, facilmente se transformando no caso $V(r_1) < E^2$ anterior mediante pequeno fornecimento de energia para a partícula γ , ou seja, γ pode escapar ou colidir.

3.4.4 Análise qualitativa das geodésicas luminosas em K

Nesta subseção, analisaremos as geodésicas *luminosas* de K , novamente apenas do ponto de vista qualitativo⁴⁰. Como sabemos, essa análise nos dá informação física preciosa sobre como a luz se comporta nesse contexto. Nosso estudo será guiado pelas mesmas perguntas que nos fizemos na subseção 3.4.3 e, portanto, vamos novamente analisar a componente r de uma dada geodésica. Nesta subseção, fixamos $\gamma : (a, b) \rightarrow K$ uma geodésica (maximal) luminosa e futuro-dirigida e escrevemos $r(s) := r \circ \gamma(s)$. A equação 3.31 nesse caso se torna

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + \frac{L^2}{r(s)^2} \cdot h(r(s)),$$

já que $\varepsilon = \langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$. O caso $L = 0$, que é equivalente a dizer que a componente β de $\gamma = (\alpha, \beta)$ é constante (veja equação 3.28), corresponde às chamadas *geodésicas radiais*, que são tratadas separadamente no exemplo 3.48. Vamos assumir, pois, $L > 0$, de forma

⁴⁰ Embora no caso luminoso seja mais fácil encontrar fórmulas explícitas para as geodésicas. Veja exemplo 3.48

que, definindo $\kappa := \frac{|E|}{L} \geq 0$, a equação da energia para o caso de geodésicas luminosas e não-radiais se torna

$$\kappa^2 = \left(\frac{1}{L} \cdot \dot{r}(s) \right)^2 + \frac{1}{r(s)^2} h(r(s)). \quad (3.44)$$

Definimos ainda a função suave $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(r) := \frac{1}{r^2} h(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3}, \quad (3.45)$$

de forma que a equação 3.44 pode ser reescrita como

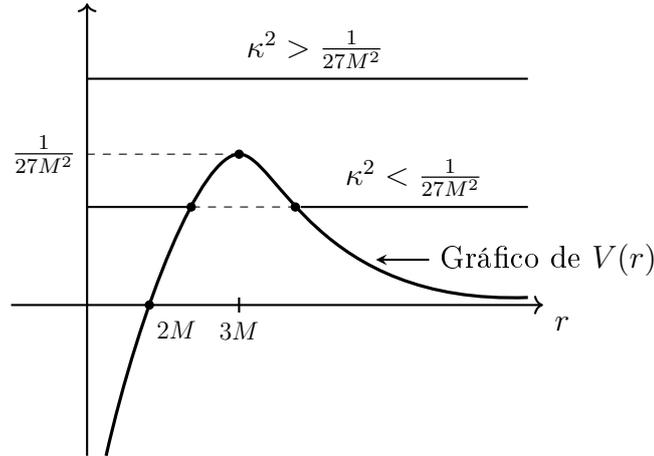
$$\kappa^2 = \left(\frac{1}{L} \cdot \dot{r}(s) \right)^2 + V(r(s)). \quad (3.46)$$

Como antes, chamamos V de *função potencial* pois depende apenas da posição r da partícula. Note que $V(r(s)) \leq \kappa^2, \forall s$, de forma que vamos estudar o comportamento de $V(r)$ para em seguida obtermos informações sobre soluções $r(s)$ da EDO dada pela equação 3.46.

Lema 3.47. *Para a função V definida pela equação 3.45, vale:*

1. a) $V(r) = 0 \iff r = 2M$;
 b) $\lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) = -\infty$;
 c) $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$;
2. $V'(r) = \frac{2}{r^3} \left(\frac{3M}{r} - 1 \right)$ e temos:
 a) $V'(r) > 0$ se $r < 3M$;
 b) $V'(3M) = 0$;
 c) $V'(r) < 0$ se $r > 3M$;
 d) $V(3M) = \frac{1}{27M^2}$;
3. $V''(r) = \frac{6}{r^4} \left(1 - \frac{4M}{r} \right)$ e
 a) $V''(r) < 0$ se $r < 4M$;
 b) $V''(4M) = 0$;
 c) $V''(r) > 0$ se $r > 4M$.
4. $V'(r(s)) = -\frac{2}{L^2} \cdot \ddot{r}(s), \forall s$, exceto possivelmente onde $r(s)$ é localmente constante e igual a r^* com $V(r^*) = \kappa^2$.

Demonstração. A demonstração dos itens 1, 2 e 3 é um simples exercício de cálculo, bastando utilizar a equação 3.45. O item 4 segue derivando ambos os lados da equação 3.46 e utilizando um argumento análogo ao da demonstração do item 2 do lema 3.42. \square

Figura 8 – Gráfico do potencial $V(r)$

As possíveis trajetórias para a geodésica γ a princípio são as mesmas descritas na definição 3.43. Como a figura 8 sugere, a análise aqui é dividida em dois casos:

$$\text{Caso I: } \kappa^2 < \frac{1}{27M^2}.$$

Nesse caso, existem x_0^1 e x_0^2 (únicos) tais que $V(x_0^1) = \kappa^2 = V(x_0^2)$ e $x_0^1 < 3M < x_0^2$. Daí, se definimos $r_0 := r(0)$, temos os casos:

Caso a): $r_0 < 3M$. Segue da equação 3.46 que $r(s) \leq x_0^1, \forall s$. Como $V'|_{(0,3M)} > 0$, pelo lema 3.47 temos $\ddot{r}(s) < 0, \forall s$, e então esse caso é completamente análogo ao caso I.b) da subseção 3.4.3, ou seja, γ colide com a singularidade $r = 0$ e, em particular, é incompleta (teorema 3.37).

Caso b): $r_0 > 3M$. Pela equação 3.46, segue que $r(s) \geq x_0^2 > 3M, \forall s$. Em particular, pelo teorema 3.37 segue que γ é completa. Como $V'|_{(3M,\infty)} < 0$, do lema 3.47 segue que $\ddot{r}(s) > 0, \forall s$. Segue, como no caso III.c) da subseção 3.4.3, que γ escapa. Destacamos que no caso $\dot{r}(0) < 0$, γ descreve, de fato, uma trajetória do tipo “flyby” com $r(s)$ decrescendo até x_0^2 , ou seja, se γ representa um raio luminoso, o que ocorre fisicamente é a deflexão da luz! Veja a figura 4.

(Em ambos os casos acima desconsideramos as trajetórias espirais identificadas como excepcionais na subseção da análise qualitativa das geodésicas temporais.)

$$\text{Caso II: } \kappa^2 > \frac{1}{27M^2}.$$

Aqui, como $V(r) \leq \frac{1}{27M^2} < \kappa^2, \forall r > 0$, segue da equação 3.46 que $\dot{r}(s) \neq 0, \forall s$, ou seja, temos $\dot{r}(s) > 0, \forall s$, ou $\dot{r}(s) < 0, \forall s$. Como no caso I.a) da subseção 3.4.3 segue que se $\dot{r}(0) > 0$, γ escapa, e se $\dot{r}(0) < 0$, γ colide.

O caso⁴¹ $\kappa = \frac{1}{27M^2}$, como na análise das geodésicas temporais, é instável dado que qualquer variação na energia E^2 ou em L^2 é suficiente para transformar o caso $\kappa = \frac{1}{27M^2}$ em um dos dois casos acima. Resumindo, para uma geodésica luminosa, poucas são as trajetórias possíveis: ou ela escapa (possivelmente em órbita “flyby”) ou ela colide com a singularidade $r = 0$.

3.5 Considerações físicas adicionais

Nesta seção, coletamos alguns fatos interessantes adicionais sobre o buraco negro de Schwarzschild-Kruskal.

Exemplo 3.48. (*Fórmula explícita para geodésicas radiais*)

Uma *geodésica radial* é uma geodésica $\gamma = (\alpha, \beta)$ em K cuja componente β é constante em \mathbb{S}^2 ou, equivalentemente, quando $L = 0$ (veja equação 3.28). Fisicamente, o único parâmetro livre de γ é seu raio e por isso o nome “radial”. A proposição 2.25 nos garante então que, como $\beta'' = 0$, α é geodésica em Q , ou seja, calcular as geodésicas radiais de K é o mesmo que calcular as geodésicas de Q . Nesse caso, escrevendo $r(s) = r \circ \gamma(s)$ e $q = \beta(s) \in \mathbb{S}^2, \forall s$, a equação da energia 3.31 fica consideravelmente mais simples:

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 - \varepsilon \cdot h(r(s)), \quad (3.49)$$

onde $\varepsilon = \langle \gamma', \gamma' \rangle \leq 0$ (estamos interessados apenas em γ causal). Especialmente no caso luminoso, temos $\varepsilon = 0$ e a equação 3.49 nos dá as soluções $r(s) = Es + r_0, \forall s$, e $r(s) = -Es + r_0, \forall s$, onde $r_0 := r(0) > 0$.

Se, por exemplo, $E > 0$, as geodésicas cuja componente r é dada por $r(s) = Es + r_0$ satisfazem $\dot{r}(s) = E > 0, \forall s$, logo devem ser completas (teorema 3.37). Daí, se $s \rightarrow \infty$, explicitamente temos $r(s) \rightarrow \infty$, ou seja, escapa. Por outro lado, as geodésicas γ de componente r dada por $r(s) = -Es + r_0$ devem ser incompletas, pois se fossem completas teríamos $r(s) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow \infty$. Pelo teorema 3.37 segue que $r(s) \rightarrow 0$, ou seja, γ colide com a singularidade $r = 0$.

A fim de explicitarmos uma fórmula para geodésicas luminosas radiais, vamos supor, por exemplo, γ em K_I ($\implies r(s) > 2M, \forall s$) e sem perda de generalidade $E > 0$. Consideramos então as geodésicas cuja componente r é dada por $r(s) = Es + r_0, s \geq 0$, que em particular são completas. Como β é constante, para explicitarmos uma fórmula para γ basta encontrarmos a curva α . Como γ está em K_I , α fica em Q_I o que nos permite escrever $t(s) = t \circ \alpha(s)$ (t só está definida nos quadrantes abertos de Q).

Em K_I , como $\tilde{X} = \partial_t$, temos que

$$-E = \langle \tilde{X} \circ \gamma, \gamma' \rangle = \langle \partial_t|_{\gamma(s)}, \dot{t}(s)\partial_t|_{\gamma(s)} + \dot{r}(s)\partial_r|_{\gamma(s)} \rangle = -\dot{t}(s) \cdot h(r(s)),$$

⁴¹ Esse caso possibilita à luz uma órbita circular $r(s) = 3M, \forall s$, que, apesar de instável, permite que um observador que esteja no raio $r = 3M$ veja a parte de trás da própria cabeça!

ou seja, temos $E = \dot{t}(s) \cdot h(r(s))$, donde segue

$$\dot{t}(s) = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r(s)}} = E \cdot \frac{r(s)}{r(s) - 2M} = E \cdot \frac{Es + r_0}{Es + r_0 - 2M} = E + 2M \cdot \frac{E}{Es + r_0 - 2M}.$$

Escrevendo $t_0 := t(0)$, segue que

$$t(s) = Es + 2M \cdot \ln \left(\frac{E}{r_0 - 2M} \cdot s + 1 \right) + t_0.$$

Escolhendo condições iniciais $r_0 = 4M$, $t_0 = 0$, e $\dot{t}(0) = 2$, segue $h(r(0)) = \frac{1}{2}$ e $E = \dot{t}(0) \cdot h(r(0)) = 1$, donde

$$\begin{aligned} r(s) &= s + 4M \\ t(s) &= s + 2M \cdot \ln \left(\frac{1}{2M} \cdot s + 1 \right). \end{aligned}$$

Essa é a fórmula explícita de uma geodésica luminosa em Q_I , descrita utilizando-se as coordenadas t e r . Visualmente, podemos pensar nela definida em P_I .

Para o caso temporal, vamos pensar em γ reparametrizada por comprimento de arco, ou seja, $\varepsilon = \langle \gamma', \gamma' \rangle = -1$ e a equação da energia 3.31 fica

$$E^2 = \dot{r}(s)^2 + h(r(s)),$$

que já é bastante mais complicada que a equação do caso luminoso, o que justifica a análise “apenas” qualitativa feita na subseção 3.4.3 para as geodésicas temporais.

Exemplo 3.50. (*Tempo de vida máximo ao entrar no buraco negro*)

O objetivo deste exemplo é calcular o tempo máximo que uma partícula material que entra no buraco negro K_{II} tem antes de colidir com a singularidade $r = 0$ e em que condições esse tempo é maximizado. Utilizaremos amplamente, a partir de agora, a discussão na seção 1.12 do capítulo 1.

Considere uma curva $\alpha : I \rightarrow K_{II}$ temporal, futuro-dirigida e de velocidade unitária, o que como vimos, representa fisicamente um observador que entrou no buraco negro K_{II} . Dados dois valores $a, b \in I$, com $a < b$, o tempo próprio⁴² medido por α entre os eventos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ é definido como o comprimento Lorentziano da curva α entre a e b , ou seja, o valor

$$L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{-\langle \alpha', \alpha' \rangle} = b - a.$$

Para estimar o maior valor possível para $b - a$, vamos considerar o campo vetorial $U := -\sqrt{-h(r)} \cdot \partial_r \in \mathfrak{X}(K_{II})$, onde

$$h(r)(u, v, q) = h(r(u, v)) = 1 - \frac{2M}{r(u, v)}$$

⁴² Que é, como vimos na seção 1.12, efetivamente o tempo que mediria um relógio idealizado carregado pelo observador.

é função suave é negativa em K_{II} . O campo U é temporal⁴³, unitário e futuro-dirigido, e portanto define um campo de observadores. Para ver que é futuro-dirigido, basta notar que, em K_{II} temos⁴⁴

$$\nabla r = -\frac{1}{h} \frac{\partial r}{\partial t} \partial_t + h \frac{\partial r}{\partial r} \partial_r = h \partial_r.$$

Como, em K_{II} , ∇r é futuro-dirigido (lema 3.33) e $h < 0$ segue ∂_r passado-dirigido e, portanto, $U = -\sqrt{-h(r)} \cdot \partial_r$ é futuro-dirigido, como afirmado.

Além disso, as curvas integrais de U são geodésicas: se $\gamma(s)$ satisfaz $\gamma'(s) = U_{\gamma(s)}, \forall s$, temos

$$\gamma''(s) = \nabla_{\gamma'(s)} U = (\nabla_U U)(\gamma(s)) = 0,$$

pois⁴⁵ $\nabla_U U = 0$. U descreve, portanto, uma família de observadores em queda livre no buraco negro.

Considere ainda a função $f : P_{II} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\hat{t}, \hat{r}) := \hat{r} \cdot \sqrt{-h(\hat{r})} + 2M \cdot \sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{\hat{r}}{2M}}. \quad (3.51)$$

Facilmente se prova que $\frac{\partial f}{\partial \hat{t}} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \hat{r}} = -\frac{1}{\sqrt{-h(\hat{r})}}$, donde decorre, pela definição 1.12 e pela equação 3.2, que

$$\nabla^{P_{II}} f = \sqrt{-h(\hat{r})} \cdot \partial_{\hat{r}}.$$

Assim, se definirmos a função $\Phi : K_{II} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(u, v, q) := f(r(u, v))$, ou seja, $\Phi := f \circ \pi \circ (\psi_{II} \times \mathbf{1})$, segue que

$$\nabla^{K_{II}} \Phi = -U. \quad (3.52)$$

De fato, denotando $\nabla \Phi = \nabla^{K_{II}} \Phi$, pelo lema 1.49 temos

$$(\psi_{II} \times \mathbf{1})_* \nabla \Phi = \nabla(f \circ \pi) = \widetilde{\nabla^{P_{II}} f} = \sqrt{-h(\hat{r})} \cdot \partial_{\hat{r}},$$

e, portanto,

$$\nabla \Phi = (\psi_{II}^{-1} \times \mathbf{1})_*(\sqrt{-h(\hat{r})} \cdot \partial_{\hat{r}}) = \sqrt{h(r)} \cdot \partial_r = -U.$$

Concluimos que U é um campo gradiente. Em particular, $\nabla \Phi$ é passado-dirigido.

Vamos, como anunciado, efetivamente majorar o tempo próprio $b - a$ medido pelo observador α entre $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$. Para tanto, dado $s \in I$, como $\nabla \Phi_{\alpha(s)}$ é temporal, segue da proposição A.9 que

$$\alpha'(s) = -\langle \nabla \Phi_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle \cdot \nabla \Phi_{\alpha(s)} + (\alpha')^\perp(s), \quad (3.53)$$

⁴³ Segue de $\langle \partial_r, \partial_r \rangle = \langle \partial_{\hat{r}}, \partial_{\hat{r}} \rangle_{P_{II} \times_r \mathbb{S}^2} \circ (\psi_{II} \times \mathbf{1}) = \frac{1}{h(r)}$. Usamos aqui que $(\psi_{II} \times \mathbf{1})_*(\partial_t) = \partial_{\hat{t}}$ e $(\psi_{II} \times \mathbf{1})_*(\partial_r) = \partial_{\hat{r}}$, que decorre imediatamente de $(\psi_{II})_*(\partial_t) = \partial_{\hat{t}}$, $(\psi_{II})_*(\partial_r) = \partial_{\hat{r}}$ e do lema 2.27. As fórmulas anteriores para Q_{II} são imediatas da definição de $\psi_{II} = (t, r)$.

⁴⁴ Usamos aqui a definição 1.12. Os coeficientes da métrica em K_{II} em relação às coordenadas t e r são, de fato, esses pois ψ_{II} é isometria e $(\psi_{II})_*(\partial_t) = \partial_{\hat{t}}$ e $(\psi_{II})_*(\partial_r) = \partial_{\hat{r}}$.

⁴⁵ Pode ser mostrado, por exemplo, que vale $\nabla_{(\psi_{II} \times \mathbf{1})_* U} ((\psi_{II} \times \mathbf{1})_* U) = 0$ usando que $(\psi_{II} \times \mathbf{1})_* U = -\sqrt{h(\hat{r})} \cdot \partial_{\hat{r}}$ e a proposição 3.5. Como $\psi_{II} \times \mathbf{1}$ é isometria, ela é transformação afim (lema 1.22) e, portanto, $\nabla_U U = 0$.

com $(\alpha')^\perp(s) \in (\nabla\Phi_{\alpha(s)})^\perp$ e, portanto, $\langle(\alpha')^\perp(s), (\alpha')^\perp(s)\rangle \geq 0$. Daí,

$$0 \leq -\langle\alpha', \alpha'\rangle = \langle\nabla\Phi \circ \alpha, \alpha'\rangle^2 - \langle(\alpha')^\perp, (\alpha')^\perp\rangle \leq \langle\nabla\Phi \circ \alpha, \alpha'\rangle^2.$$

Note também que a função $\langle\nabla\Phi \circ \alpha, \alpha'\rangle$ é não-negativa já que α é futuro-dirigida e $\nabla\Phi$ é passado-dirigido (proposição A.16). Finalmente, temos

$$b - a = L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{-\langle\alpha', \alpha'\rangle} \leq \int_a^b \langle\nabla\Phi \circ \alpha, \alpha'\rangle = \int_a^b (\Phi \circ \alpha)' = \Phi(\alpha(b)) - \Phi(\alpha(a)).$$

Se escrevemos $r(s) := r \circ \alpha(s)$, temos que $\Phi(\alpha(s)) = f(r(s))$, donde

$$b - a \leq f(r(b)) - f(r(a)). \quad (3.54)$$

Como sabemos que a função $r(s)$ é decrescente (veja proposição 3.34) e a função f dada pela equação 3.51 é também decrescente como função de \hat{r} (já que $\frac{\partial f}{\partial \hat{r}} < 0$), segue de $r(b) > 0$ e $r(a) < 2M$ que⁴⁶ $f(r(b)) < f(0) = \pi M$ e $-f(r(a)) < -f(2M) = 0$, donde

$$b - a \leq f(0) - f(2M) = \pi M,$$

ou seja, *nenhum observador que entre no buraco negro K_{II} pode medir um tempo superior a πM !* Além disso, note que se α é curva integral de U (e, portanto, geodésica), temos $\alpha'(s) = U_{\alpha(s)} = -\nabla\Phi_{\alpha(s)}$, donde $(\alpha')^\perp = 0$ (equação 3.53). Nesse caso, temos

$$b - a = f(r(b)) - f(r(a)). \quad (3.55)$$

Em particular, se $r \circ \alpha(a) = 2M$ e $r \circ \alpha(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow b$, temos

$$\begin{aligned} b - a &= \lim_{s \rightarrow b} \int_a^s \sqrt{-\langle\alpha', \alpha'\rangle} = \lim_{s \rightarrow b} \int_a^s \langle\nabla\Phi \circ \alpha, \alpha'\rangle = \lim_{s \rightarrow b} (f(r(s)) - f(r(a))) \\ &= f(0) - f(2M) = \pi M, \end{aligned}$$

ou seja, *as geodésicas que são curvas integrais de U maximizam o tempo de vida em K_{II} , enquanto que as demais curvas temporais têm menos tempo até colidir com a singularidade $r = 0$* ⁴⁷. Fisicamente, isso significa que, uma vez que uma partícula material entre no buraco negro, a fim de retardar sua inevitável destruição na singularidade $r = 0$, é necessário que não haja sobre a partícula qualquer força/aceleração, ou seja, a partícula está em queda livre. Se for uma nave espacial, por exemplo, recomendamos que se desliguem os motores!

Para exemplificarmos numericamente esse tempo limite, destacamos que a massa M utilizada ao longo de todo este capítulo representa, fisicamente, a massa relativística do

⁴⁶ $f(0)$ está bem definido pois $\hat{r}\sqrt{-h(\hat{r})} = \sqrt{-\hat{r}^2 h(\hat{r})} = \sqrt{2M\hat{r} - \hat{r}^2}$.

⁴⁷ De fato, tais geodésicas maximizam o tempo próprio entre quaisquer dois valores de $r_1, r_2 < 2M$, como mostram as equações 3.54 e 3.55.

buraco negro e é medida em unidades em que a constante Newtoniana de gravitação G e a velocidade da luz no vácuo c são iguais a 1. Nessas unidades, M tem unidade de comprimento. A relação de M com a massa medida em unidades usuais (digamos, do Sistema Internacional), é

$$M = \frac{G}{c^2} \cdot \mathcal{M},$$

onde \mathcal{M} denota a massa do buraco negro expressa em unidades de massa (Kg , no SI). Dessa forma, o tempo máximo que uma partícula material tem até colidir com $r = 0$ é expresso em unidades de tempo usuais como⁴⁸

$$\Delta t = \pi \cdot \frac{G}{c^3} \cdot \mathcal{M}. \quad (3.56)$$

Por exemplo, considere um buraco negro com a massa do Sol $\mathcal{M}_\odot \approx 1,989 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$. Substituindo os valores no SI de G e c na expressão acima, obtemos $\Delta t_\odot \approx 10^{-5} \text{ s}$! Se temos agora um buraco negro de massa \mathcal{M} qualquer, utilizando a equação 3.56 para Δt_\odot e Δt temos

$$\Delta t = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot} \cdot \Delta t_\odot \quad (3.57)$$

Agora, suponha que uma pessoa muito entusiasmada decida entrar num buraco negro para observar os fenômenos que lá acontecem, mesmo sabendo que não conseguirá transmitir qualquer informação para fora dele (proposição 3.34). No entanto, ela não deseja entrar em qualquer buraco negro, mas apenas naqueles em que ela possa viver tanto quanto ela viveria na Terra (digamos 80 anos). Usando $\Delta t = 80$ anos na equação 3.57 descobrimos que $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot} \approx 10^{13}$, ou seja, o buraco negro procurado deve ter massa da ordem de 10^{13} massas solares!

Ainda que uma partícula massiva possa, teoricamente, levar o tempo dado pela equação 3.56 para colidir com a singularidade, isso não significa que terá uma jornada agradável até lá. De fato, o exemplo 3.58 mostrará que mesmo num buraco negro de massa $\mathcal{M} \approx 10^{13} \mathcal{M}_\odot$, nosso entusiasta do parágrafo anterior provavelmente não viveria por 80 anos lá dentro: ele e todos os seus átomos seriam esmagados antes de atingir $r = 0$!

Exemplo 3.58. (*Operador “força de maré” no buraco negro*)

Uma geodésica não tem aceleração, e por isso um observador estritamente pontual em queda livre não tem efetivamente uma força atuando sobre si. Entretanto, duas ou mais “geodésicas vizinhas” podem possuir uma “aceleração relativa”, que é geometricamente descrita pela curvatura⁴⁹.

Ora, objetos físicos podem ser tratados como tendo tamanho desprezível em certos contextos, mas esse tamanho nunca é “realmente” zero! Na melhor das hipóteses, podemos tratar um objeto com certo tamanho (desde que ainda seja “pequeno”) como composto

⁴⁸ $\pi \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \mathcal{M}$ é o tempo medido em unidade de comprimento.

⁴⁹ Esta discussão, embora um tanto vaga, pode ser tornada precisa por meio da chamada *equação de Jacobi*, que não poderemos discutir aqui. Veja O’Neill (1983) no capítulo 8 para mais detalhes.

de partículas, cada uma das quais descrita por um membro de uma *família* de geodésicas temporais. A convergência ou divergência dessa família de geodésicas corresponde fisicamente a uma “compressão” ou “distensão” gravitacional no objeto em questão.

Este é precisamente o tipo de efeito gravitacional que provoca as marés em nossos oceanos, como descoberto pelo próprio Newton: a variação do campo gravitacional do Sol e da Lua sobre a Terra, que não é um objeto pontual, causa uma aceleração relativa entre as partes da massa líquida dos oceanos. Esse tipo de força é portanto conhecido como *forças de maré* (do inglês *tidal forces*).

Na Relatividade Geral, um objeto material que entre no buraco negro não só colide tragicamente com a singularidade $r = 0$, como também fica sob efeito de tais forças de maré de intensidade terrivelmente alta. Um dos aspectos mais elegantes dessa teoria é que as forças de maré são precisamente descritas pela curvatura!

Num primeiro momento, vamos definir matematicamente o operador força de maré em qualquer variedade semi-Riemanniana (N, g) : dados $p \in N$ e $v \in T_p N$, o *operador força de maré* (para o vetor v) é a transformação linear $R_v : T_p N \rightarrow T_p N$ dada por

$$R_v(w) := R_p(w, v)v, \quad (3.59)$$

onde R denota o tensor de curvatura de N . Note que, para quaisquer $v, w, z \in T_p N$, temos⁵⁰

1. $R_v(v) = 0$;
2. $\langle R_v(w), v \rangle = 0$;
3. $\langle R_v(w), z \rangle = \langle R_v(z), w \rangle$.

Definimos também a *força de maré* (para um vetor $u \in T_p N$) como a aplicação linear $F_u := -R_u : T_p N \rightarrow T_p N$. Apesar do nome “força” dado a F_u , fisicamente o que ele representa na verdade é a *aceleração* relativa entre as partículas de um objeto, a qual ainda precisaria ser multiplicada pela massa do objeto para nos retornar uma força.

Particularizando a discussão acima para nosso modelo de espaço-tempo, considere $N = K$, fixe $p = (u_0, v_0, q) \in K - H$ qualquer e escreva $r_0 := r(p) \neq 2M$. Fixe também $u \in T_p K$ observador instantâneo (definição 1.82) *radial* (isto é, horizontal) e escreva $u = a\partial_t + b\partial_r$, donde $a^2 h - \frac{b^2}{h} = 1$ pois u é unitário.

Considere o vetor $x \in T_p K$ radial dado por $x := \frac{b}{h}\partial_t + ah\partial_r$, de forma que $x \perp u$, e um vetor $w \in T_p K$ vertical qualquer. Da proposição 3.7⁵¹ e do lema 1.37 segue

$$F_u(x) = \frac{2M}{r_0^3} \cdot x \quad \text{e} \quad F_u(w) = -\frac{M}{r_0^3} \cdot w \quad (\Psi)$$

⁵⁰ Segue da definição de R_v e das simetrias do tensor R (veja lema 1.37).

⁵¹ Lembrando que os quadrantes abertos de K são isométricos a $P_I \times_r \mathbb{S}^2$ ou $P_{II} \times_r \mathbb{S}^2$, isometrias são transformações afins (corolário 1.22) e estas preservam tensor de curvatura (corolário 1.40).

As fórmulas acima valem, a priori, apenas para $p \in K - H$. No entanto, com um pouco mais de trabalho - que não faremos aqui - é possível mostrar que elas são também válidas para $p \in H$, de forma que podemos aplicá-las inclusive para um observador que eventualmente cruze o horizonte de eventos.

Considere agora um observador $\gamma : I \rightarrow K$ radial. Escreva $r(s) := r \circ \gamma(s)$. Então, para cada parâmetro $s \in I$ podemos definir um observador instantâneo $u_s := \gamma'(s)$ radial, bem como os vetores x_s e w_s tangentes a K em $\gamma(s)$ como acima⁵², ou seja, $x_s \perp \gamma'(s)$ radial e w_s vertical. Intuitivamente, pensamos nesses vetores como descrevendo uma “dimensão lateral” ou “espessura” do observador. Então, substituindo na equação (Ψ) temos

$$F_{\gamma'(s)}(x_s) = \frac{2M}{r(s)^3} \cdot x_s \quad \text{e} \quad F_{\gamma'(s)}(w_s) = -\frac{M}{r(s)^3} \cdot w_s \quad (\Psi\Psi)$$

O sinal “-” na expressão para $F_{\gamma'(s)}(w_s)$ indica que em qualquer direção transversal (representada por w_s), o observador sofre uma *compressão* (de mesma magnitude, em qualquer direção), enquanto que a ausência do sinal “-” na expressão para $F_{\gamma'(s)}(x_s)$ indica que na direção radial (direção de x_s) o observador é *esticado*. Esse fenômeno é conhecido como “*espaguetificação*”.

A magnitude da aceleração relativa por unidade de comprimento é dada por $\frac{2M}{r(s)^3}$ na direção radial e $\frac{M}{r(s)^3}$ em qualquer direção transversal. Veja que quando $r(s) \rightarrow 0$, a magnitude da aceleração relativa entre as partículas tende a ∞ . Isso justifica o comentário no final do exemplo 3.50 sobre nosso entusiasta provavelmente não sobreviver por 80 anos! De fato, eventualmente a magnitude de tal aceleração superaria, digamos⁵³, $50\mathcal{G}$, o que seria suportável pelo corpo humano no máximo por alguns segundos.

Exemplo 3.60. (Observadores estacionários em Schwarzschild)

Neste exemplo, vamos particularizar a discussão e as definições apresentadas na seção 1.12 para o espaço-tempo exterior de Schwarzschild, ou seja, $P_I \times_r \mathbb{S}^2 \simeq K_I$. Primeiramente, note que o campo vetorial $\partial_t \in \mathfrak{X}(K_I)$ é de Killing (teorema 3.11), temporal e futuro-dirigido. Além disso, ∂_t é completo. Com efeito, seja $\alpha : I \rightarrow K_I$ curva integral de ∂_t . Escreva α como $\alpha(s) = (t(s), r(s), q(s))$, para $q(s) \in \mathbb{S}^2$. Como $\alpha'(s) = \partial_t|_{\alpha(s)}$, $\forall s \in I$, que é horizontal, temos $q(s)$ constante e igual a $q \in \mathbb{S}^2$. Daí, $\alpha'(s) = \dot{t}(s)\partial_t + \dot{r}(s)\partial_r = \partial_t$, donde, a menos de translação, $t(s) = s$ e $r(s) =: r_0 > 2M$, para todo $s \in I$. Isso mostra que s pode ser definido em \mathbb{R} e, portanto, ∂_t é completo. De agora em diante, escrevemos pois $I = \mathbb{R}$. Geometricamente, $\alpha(s) = (s, r_0, q)$ percorre uma trajetória sobre a hipérbole $r(u, v) = r_0 > 2M$ em K_I (veja figura 2) da “direita para a esquerda”, já que $t(s) = s$ (veja figura 3).

⁵² Exceto possivelmente para $s \in I$ com $\gamma(s) \in H$, para os quais não ficam bem definidos os vetores x_s .

⁵³ Onde \mathcal{G} representa a aceleração da gravidade na superfície da Terra.

Os parágrafos anteriores mostram que K_I é uma região estacionária (seção 1.12 do capítulo 1). A família de observadores estacionários nesse caso é descrita pelo campo vetorial $U \in \mathfrak{X}(K_I)$ pondo

$$U := \frac{1}{|\partial_t|} \partial_t = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_t. \quad (3.61)$$

U é um campo de observadores não-geodésico, pois⁵⁴

$$\nabla_U U = \frac{M}{r^2} \partial_r = \frac{M}{\sqrt{h} \cdot r^2} \cdot u_r, \quad (3.62)$$

onde $u_r = \sqrt{h} \cdot \partial_r$ é unitário e espacial. Observe agora que se $\alpha : I \rightarrow K_I$ é uma curva integral de U e escrevemos $\alpha(s) = (t(s), r(s), q(s))$, então, como no caso da completude de ∂_t utilizando agora a equação 3.61, temos que $r(s) = r_0 > 2M$, $q(s) = q \in \mathbb{S}^2$ e:

$$\dot{t}(s) = h(r_0)^{-\frac{1}{2}}, \forall s \in I \quad (3.63)$$

donde, em particular, U é completo pois $t(s)$ é afim. Escrevemos então $I = \mathbb{R}$. Além disso, $\alpha(s)$ descreve um observador que está “em repouso diante do buraco negro”, uma vez que $r(s)$ e $q(s)$ (suas posições espaciais) são constantes. Da equação 3.62, temos

$$\alpha''(s) = \frac{M}{r_0^2 \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot u_r, \quad (3.64)$$

ou seja, $\alpha''(s) \neq 0$. Essa aceleração corresponde à força necessária para impedir o observador de precipitar-se para $r = 0$ - o que na Relatividade é o “movimento natural” e não requer forças para ocorrer - e portanto aponta radialmente *para fora*. Isso ocorre em contraste com o modelo Newtoniano, onde a força seria *para dentro*, pois deve-se ao desvio do movimento natural nesse caso, que é retilíneo.

Em módulo, a aceleração da equação 3.64 dá

$$\mathcal{A} = \frac{M}{r_0^2 \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observe que essa expressão aproxima-se do “comportamento Newtoniano” para $r_0 \gg 2M$, mas $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ à medida que $r_0 \rightarrow 2M$, indicando a impossibilidade de permanecer estacionário do horizonte para dentro do buraco negro.

Exemplo 3.65. (*Desvio para o vermelho*)

O *desvio para o vermelho* ocorre quando uma onda é detectada por um receptor com uma frequência menor do que aquela com que fora emitida. A causa desse fenômeno pode ser, por exemplo, a velocidade relativa entre o emissor e o receptor, como no caso do Efeito Doppler. Vimos na seção 1.12 a ocorrência desse fenômeno tendo como causa efeitos gravitacionais (ou seja, geométricos!).

⁵⁴ Segue de $\partial_t h = 0$ e do lema 3.4.

De fato, podemos utilizar a equação 1.93 daquela seção, imaginando que o fóton foi emitido por um observador estacionário em $e \in K_I$ e recebido por outro em $r \in K_I$, de raios r_1 e r_2 respectivamente. Nesse caso,

$$z_{e,r} = 1 - \sqrt{\frac{h(r_1)}{h(r_2)}} \quad (3.66)$$

Como mostrado anteriormente, a equação 3.66 indica que há *desvio para o vermelho* se $r_2 > r_1$, e *desvio para o azul* se $r_2 < r_1$. Se r_1 e r_2 são muito maiores do que $2M$,

$$z_{e,r} \approx \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2},$$

ou seja, o desvio para o vermelho pode ser dado aproximadamente como a diferença entre os potenciais Newtonianos em r_1 e r_2 . Isso justifica, de certo modo, a seguinte “descrição Newtoniana”, que entretanto deve ser tomada *cum grano salis*: o fóton, ao tentar sair do [mergulhar no] “poço gravitacional” perde [ganha] energia, que é transferida para [retirada de] o campo gravitacional, e isso se reflete no desvio para o vermelho [azul]. Por outro lado, se $r_1 \rightarrow 2M$, $z_{e,r} \rightarrow 1$, e a definição 1.92 do *redshift* indica que o comprimento de onda recebido diverge. Isso significa que luz de uma frequência fixa emitida por observadores estacionários mais e mais próximos do horizonte parecerá mais e mais vermelha.

A Espaços vetoriais semi-Euclidianos

Neste apêndice, desenvolveremos alguns requisitos ligeiramente mais específicos de álgebra linear necessários para um bom entendimento de todo o trabalho. Definiremos a noção de produto escalar em um espaço vetorial e a noção de espaço semi-Euclidiano. Em seguida, particularizaremos nosso estudo para o caso Lorentziano, de maior interesse para este trabalho tendo em vista o modelo geométrico com o qual trabalhamos no capítulo 3.

Aqui, enunciaremos os principais resultados necessários de forma bastante sucinta. Para mais detalhes sobre exemplos e demonstrações, o leitor pode consultar O'Neill (1983) nos capítulos 2 (a partir da página 46, sobre formas bilineares simétricas e produtos escalares) e 5 (entre as páginas 140 e 146, sobre o caráter causal em Lorentz e os cones temporais). Neste capítulo, \mathbb{V} denotará um espaço vetorial (sobre \mathbb{R}) de dimensão finita $n \geq 1$.

A.1 Produtos escalares

Em álgebra linear, definimos um *produto interno* em \mathbb{V} como uma aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in \mathbb{V}$:

1. $\langle a \cdot u + b \cdot v, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$ e $\langle u, b \cdot v + c \cdot w \rangle = b \langle u, v \rangle + c \langle u, w \rangle$ (\mathbb{R} -bilinearidade);
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (simetria);
3. $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$ (positividade).

Um par $(\mathbb{V}, \langle, \rangle)$ é chamado *espaço vetorial Euclidiano*. Podemos então definir a norma de um vetor como $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$, o ângulo entre dois vetores, a noção de ortogonalidade e valem os teoremas clássicos da álgebra linear, como a existência de base ortonormal e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Em particular, dado $u \in \mathbb{V}$, devido à positividade do produto interno, \langle, \rangle satisfaz:

$$\langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{V} \iff u = 0,$$

e diremos que uma forma bilinear simétrica satisfazendo esta condição é *não-degenerada*. Entretanto, uma tal forma bilinear não precisa ser positiva-definida. Este será o ponto de partida para a generalização que seguirá (definição A.1).

Dada uma forma bilinear e simétrica $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos o *índice* de b como o número

$$\text{ind } b := \max\{\dim W : W \text{ é subespaço de } \mathbb{V} \text{ com } g|_{W \times W} \text{ negativa-definida}\}.$$

Note que $0 \leq \text{ind } b \leq n$ e que b é positiva-definida (respectivamente negativa-definida) se, e somente se, $\text{ind } b = 0$ (respectivamente $\text{ind } b = n$). Além disso, quando $0 < \text{ind } b < n$, dizemos que b é *indefinida*.

Definição A.1. Um produto escalar g em \mathbb{V} é uma forma bilinear, simétrica e não-degenerada. O par (\mathbb{V}, g) é chamado de espaço semi-Euclidiano e o índice de g é também chamado de índice de (\mathbb{V}, g) , denotado por $\text{ind } g$ ou $\text{ind } \mathbb{V}$.

Pelo exposto acima decorre que todo espaço Euclidiano também é um espaço semi-Euclidiano. A maioria dos resultados para espaços Euclidianos continuam válidos para os espaços semi-Euclidianos. No entanto, algumas novidades surgem quando g é indefinido. Observe também que se $n = 1$, ou bem g é positiva-definida, ou g é negativa-definida.

Exemplo A.2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n e defina, para $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$g_\nu(x, y) = \langle x, y \rangle_\nu := - \sum_{i=1}^{\nu} x^i y^i + \sum_{i=\nu+1}^n x^i y^i.$$

Claramente, g_ν é bilinear, simétrico e a base canônica de \mathbb{R}^n evidencia que g_ν é também não-degenerado e tem índice ν (Lei da Inércia de Sylvester, (Lima, 1995)). \mathbb{R}^n munido com o produto escalar g_ν é denotado simplesmente por \mathbb{R}_ν^n . Note que no caso $\nu = 0$ resgatamos nosso espaço Euclidiano \mathbb{R}^n usual, munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Em um espaço semi-Euclidiano (\mathbb{V}, g) , definimos a *norma*¹ de um vetor u como $\|u\| := \sqrt{|g(u, u)|}$. Apesar do termo “norma” ser utilizado aqui, devemos ressaltar que, em geral, a aplicação $u \in \mathbb{V} \mapsto \|u\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ não satisfaz a condição $\|u\| = 0 \iff u = 0$ e tampouco satisfaz a desigualdade triangular². Portanto, o termo está sendo usado aqui de modo diferente do usual. Vale, no entanto, que $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se g é indefinido, um vetor $u \in \mathbb{V}$ é dito:

1. *temporal* se $g(u, u) < 0$;
2. *luminoso* se $g(u, u) = 0$ e $u \neq 0$;
3. *espacial* se $g(u, u) > 0$ ou $u = 0$;
4. *causal* se u é temporal ou luminoso,

e a categoria (1, 2 ou 3 acima) em que u se classifica é chamada de *caráter causal* de u . Obviamente, a definição acima só é de interesse no caso de g ser indefinido, do contrário todos os vetores são ou espaciais ou temporais.

¹ Perceba a presença do módulo na definição, já que g pode não ser positiva-definida.

² Por sinal, veremos que num espaço vetorial de Lorentz, vale a desigualdade triangular “ao contrário” (corolário A.20).

Dizemos que os vetores u e v são *ortogonais* se $g(u, v) = 0$ e escrevemos $u \perp v$. Dois subconjuntos A e B são *ortogonais* ($A \perp B$) se $g(u, v) = 0$ para quaisquer $u \in A$ e $v \in B$. Apesar de a definição de ortogonalidade ser formalmente a mesma que para um produto interno, esta noção pode não ter o caráter geométrico costumeiro se g é indefinido, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo A.3. Como continuação do exemplo A.2, vamos agora calcular quem são os vetores espaciais, temporais e luminosos de \mathbb{R}_1^n , para $n \geq 2$. Se $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}$ e q denota a forma quadrática de g_1 , então

$$q(x) = -(x^1)^2 + \sum_{i=2}^n (x^i)^2.$$

Daí, o conjunto dos vetores x causais, isto é, $q(x) = 0$ e $x \neq 0$, é um cone duplo (sem o vértice) em \mathbb{R}^n , a saber o conjunto

$$\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (x^1)^2 = \sum_{i=2}^n (x^i)^2\}.$$

Os vetores espaciais ($q(x) > 0$ ou $x = 0$) e temporais ($q(x) < 0$), além do conjunto Λ dos vetores luminosos, são ilustrados abaixo para o caso $n = 2$.

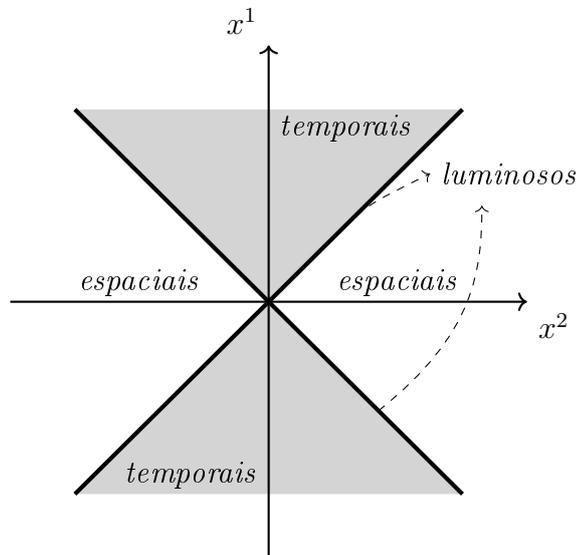


Figura 9 – Caráter causal de vetores em \mathbb{R}_1^2 . Note que $(1, 1)$ é um vetor ortogonal a si mesmo (luminoso), o que contraria nossa intuição Euclideana.

Se W é um subespaço de V , definimos

$$W^\perp := \{v \in V : v \perp W\}.$$

W^\perp é um subespaço de V chamado de W *perp*.

Lema A.4. Se W é um subespaço de (V, g) , então:

1. $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$;
2. $(W^\perp)^\perp = W$.

Demonstração. Pode ser encontrada em O'Neill (1983), na página 49. \square

Note que $g|_{W \times W}$ é uma forma bilinear e simétrica. Ela pode, no entanto, ser degenerada (tome, por exemplo, $W := \mathbb{R} \cdot u$, com u luminoso). Dizemos que um subespaço W é *não-degenerado* se $g|_{W \times W}$ é não-degenerada (e, portanto, um produto escalar em W). Do contrário, dizemos que W é *degenerado*. Quando g é definida (positiva ou negativa), todo subespaço é não-degenerado.

Quando g é um produto interno, chamamos W^\perp de *complemento ortogonal de W* devido à decomposição

$$V = W \oplus W^\perp.$$

No entanto, se g é indefinida, tal decomposição não é válida para qualquer subespaço W . Com efeito, tome $W := \mathbb{R} \cdot (1, 1)$ no exemplo A.3. Facilmente se verifica que $W^\perp = W$, o que está de acordo com o lema A.4 já que $\dim W + \dim W^\perp = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. No entanto, é falso que $\mathbb{R}^2 = W + W^\perp$, o que corrobora o lema a seguir já que W é degenerado ou, equivalentemente, $W \cap W^\perp$ é não-trivial.

Lema A.5. Dado um subespaço W de V , temos $V = W + W^\perp \iff W \cap W^\perp = \{0\} \iff W$ é não-degenerado $\iff W^\perp$ é não-degenerado. Nesse caso, $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Segue de $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp - \dim W \cap W^\perp$ e do lema A.4. Para mais detalhes, consulte O'Neill (1983) na página 49. \square

Um vetor $u \in V$ é dito *unitário* se $\|u\| = 1$, ou seja, se $g(u, u) = \pm 1$. Um conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vetores unitários e ortogonais dois a dois é dito ser *ortonormal*. Como de costume, um conjunto ortonormal $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente (LI) e, portanto, se $k = n$ nós temos uma base (ortonormal) de V .

Lema A.6. (V, g) possui uma base ortonormal. Além disso, em qualquer base ortonormal a quantidade de vetores temporais é constante e coincide com o índice de g .

Demonstração. Pode ser encontrada nas páginas 50 e 51 de O'Neill (1983). Uma demonstração alternativa à do livro e bastante mais simples pode ser feita utilizando-se a Lei de Inércia de Sylvester para formas bilineares simétricas (Lima, 1995). \square

No exemplo A.2, a base canônica de \mathbb{R}^n é ortonormal. Perceba que a matriz de g com respeito a uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ é diagonal. De fato, se definirmos $\varepsilon_i := g(e_i, e_i) = \pm 1$, temos:

$$g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \cdot \delta_{ij}, \quad \text{onde } \delta_{ij} \text{ denota o Delta de Kronecker.}$$

Frequentemente, vamos ordenar a base acima de forma que os primeiros vetores sejam temporais (se houver) e os últimos sejam espaciais (se houver), ou seja, se $\nu :=$ índice de \mathbb{V} temos $\varepsilon_i = -1$, para $1 \leq i \leq \nu$, e $\varepsilon_i = 1$, para $\nu + 1 \leq i \leq n$.

Tendo em vista a decomposição $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ se \mathbb{W} é não-degenerado, definimos a *projeção ortogonal* π de \mathbb{V} sobre \mathbb{W} como a única transformação linear sobre \mathbb{V} que mapeia \mathbb{W}^\perp em $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ e mantém \mathbb{W} invariante. Além disso, note que dada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$ de \mathbb{W} e uma base ortonormal $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ de \mathbb{W}^\perp , o conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal de \mathbb{V} . Isso prova que

$$\text{ind } \mathbb{V} = \text{ind } \mathbb{W} + \text{ind } \mathbb{W}^\perp.$$

Uma transformação linear $T : (\mathbb{V}, g) \longrightarrow (\overline{\mathbb{V}}, \overline{g})$ entre espaços semi-Euclidianos *preserva produto escalar* se

$$\overline{g}(Tv, Tw) = g(v, w), \quad \forall v, w \in \mathbb{V}.$$

Nesse caso, note que T é injetiva. Se T for ainda um isomorfismo linear, dizemos que T é uma *isometria linear* e, nesse caso, segue que T^{-1} também é isometria linear.

Lema A.7. *Dado um isomorfismo linear $T : (\mathbb{V}, g) \longrightarrow (\overline{\mathbb{V}}, \overline{g})$ entre espaços semi-Euclidianos, as seguintes condições são equivalentes:*

1. T é isometria linear;
2. $\overline{g}(Tv, Tv) = g(v, v)$, para qualquer $v \in \mathbb{V}$;
3. T mapeia bases g -ortonormais em bases \overline{g} -ortonormais e preserva caráter causal de vetores;
4. para qualquer $v \in \mathbb{V}$, $\|Tv\|_{\overline{g}} = \|v\|_g$ e T (e T^{-1}) preservam caráter causal de vetores.

Demonstração. A equivalência entre os itens 1 e 2 segue da identidade de polarização. A equivalência entre 2 e 4 é imediata da definição de norma de vetor, utilizando 1. A equivalência entre 1 e 3 é imediata. \square

É também imediato verificar que o conjunto

$$\text{Iso}(\mathbb{V}, g) := \{T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} : T \text{ é isometria linear}\}$$

é grupo com a operação de composição. Para uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$, definimos a matriz $[g_{kl}]_{k,l=1}^n$ por $g_{kl} := g(v_k, v_l)$. O fato de g ser não-degenerado é equivalente à matriz $[g_{kl}]_{k,l=1}^n$ ser invertível. Denotamos então por g^{kl} os elementos da matriz inversa de $[g_{kl}]_{k,l=1}^n$.

Dada uma forma bilinear simétrica b em (\mathbb{V}, g) , definimos o *traço*³ de b como

$$\text{tr } b := \sum_{k,l=1}^n g^{kl} b(v_k, v_l),$$

onde os elementos g^{kl} são os números definidos anteriormente para uma dada base $\{v_1, \dots, v_n\}$. O traço de b fica bem definido, ou seja, independe da base escolhida.

Um operador T em (\mathbb{V}, g) é dito *g -autoadjunto* se $g(Tu, v) = g(u, Tv)$, $\forall u, v \in \mathbb{V}$. O traço de um tal operador é definido como o traço de sua forma bilinear simétrica b_T associada, dada por:

$$b_T(u, v) := g(Tu, v).$$

Teorema A.8. *Seja (\mathbb{V}, g) espaço semi-Euclideo e indefinido, com $n \geq 2$. Sejam*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{v \in \mathbb{V} : v \text{ é temporal}\}; \\ S &:= \{v \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : v \text{ é espacial}\}; \\ \Lambda &:= \{v \in \mathbb{V} : v \text{ é luminoso}\}. \end{aligned}$$

Então,

1. \mathcal{T} e S são abertos, disjuntos e não-vazios;
2. $\Lambda \cup \{\mathbf{0}\} = \bar{\Lambda} = \bar{\mathcal{T}} \cap \bar{S}$, ou seja, $\partial\mathcal{T} = \partial S = \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}$.

Demonstração. Denotando por q a forma quadrática associada a g , ou seja, $v \in \mathbb{V} \mapsto q(v) \in \mathbb{R}$ dada por $q(v) := g(v, v)$, que \mathcal{T} e S são abertos segue da continuidade⁴ de q , já que $\mathcal{T} = q^{-1}(-\infty, 0)$ e $S = q^{-1}(0, \infty)$. O fato de serem não-vazios se deve a g ser indefinido. Isso prova o item 1.

A primeira igualdade do item 2 segue da caracterização de pontos no fecho de um conjunto por seqüências⁵ e do fato de q ser contínua. Vamos mostrar que $\partial\mathcal{T} = \partial S = \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}$, de onde seguirá, utilizando a continuidade de q e a caracterização de fronteira por seqüências, que $\bar{\Lambda} = \bar{\mathcal{T}} \cap \bar{S}$.

Se, por exemplo, $v \in \partial\mathcal{T}$, segue que $q(v) \leq 0$ por um argumento sequencial. Como \mathcal{T} é aberto, $v \notin \mathcal{T}$, logo $q(v) \geq 0$. Daí, segue $q(v) = 0$ e $v \in \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}$. O caso $v \in \partial S$ é semelhante. Isso mostra $\partial\mathcal{T}, \partial S \subseteq \Lambda \cup \{\mathbf{0}\}$.

³ É de se notar que, no caso Euclideo, tal definição coincide com a usual.

⁴ Em uma base para \mathbb{V} , q assume uma forma polinomial, logo suave e contínua.

⁵ Para $v \in \Lambda$, considere a seqüência $(\frac{v}{k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{0}$.

Reciprocamente, suponha $x \in \Lambda \cup \{\mathbf{O}\}$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de \mathbb{V} e escreva $g(e_i, e_i) =: \varepsilon_i$, com $\varepsilon_i = -1$, se $1 \leq i \leq \nu$, e $\varepsilon_i = 1$ se $\nu + 1 \leq i \leq n$. Escreva também $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Para mostrarmos $\Lambda \cup \{\mathbf{O}\} \subseteq \partial\mathcal{T} \cap \partial\mathcal{S}$ basta mostrarmos que existem seqüências $(v_k) \subseteq \mathcal{T}$ e $(w_k) \subseteq \mathcal{S}$ que convergem para x , já que $\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \emptyset$. De $q(x) = 0$ segue que

$$\sum_{i=1}^{\nu} (x^i)^2 = \sum_{i=\nu+1}^n (x^i)^2.$$

Se $x = \mathbf{0}$ o resultado segue imediatamente. Do contrário, segue da equação acima que existem $1 \leq i_0 \leq \nu$ e $\nu + 1 \leq j_0 \leq n$ tais que $x^{i_0}, x^{j_0} \neq 0$. Daí, as seqüências

$$v_k := \left(x^{i_0} + \frac{x^{i_0}}{k \cdot |x^{i_0}|} \right) e_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n x^i e_i \quad \text{e} \quad w_k := \left(x^{j_0} + \frac{x^{j_0}}{k \cdot |x^{j_0}|} \right) e_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n x^j e_j$$

satisfazem o que procuramos. □

O leitor pode visualizar esse resultado na figura 9.

A.2 Espaços vetoriais de Lorentz

Nesta seção, particularizaremos nosso estudo para os espaços semi-Euclidianos (\mathbb{V}, g) de índice 1 e dimensão $n \geq 2$, chamados de *espaços vetoriais de Lorentz*.

Num espaço de Lorentz, a noção de causalidade de vetores tem generalização natural para subespaços: todo subespaço W de \mathbb{V} se classifica em

1. *espacial* se $g|_{W \times W}$ é positivo definido, ou seja, é não-degenerado e tem índice 0;
2. *temporal* se $g|_{W \times W}$ é não-degenerado e tem índice 1;
3. *luminoso* se W é degenerado,

já que se W é não-degenerado, $\text{ind } W + \text{ind } W^\perp = \text{ind } \mathbb{V} = 1 \implies \text{ind } W = 0$ ou 1 . Além disso, as três condições acima são mutuamente excludentes. Esta definição de causalidade é coerente com a anterior para vetores individuais no seguinte sentido: se $W = \mathbb{R} \cdot v$, então o caráter causal de W é o mesmo que de v .

Proposição A.9. *Dado um subespaço W de (\mathbb{V}, g) , temos:*

1. W é temporal se, e somente se, W^\perp é espacial;
2. W é luminoso se, e somente se, W^\perp é luminoso;
3. W é luminoso se, e somente se, $g|_{W \times W}$ é semi-definida positiva mas não definida positiva.

Demonstração. O item 1 segue da igualdade $\text{ind } W + \text{ind } W^\perp = \text{ind } V = 1$. O item 2 segue do item 1. A “volta” do item 3 é óbvia já que $g|_{W \times W}$ é degenerado. Para a “ida”, basta mostrarmos que $g|_{W \times W}$ é semi-definida positiva. Como W é luminoso, tome $u \in W$ tal que $g(u, w) = 0, \forall w \in W$. Daí, se houvesse um $v \in W$ temporal, isto é, $g(v, v) < 0$, teríamos $g(u, v) = 0 \implies u \in (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$. Mas, pelo item 1, como v (e portanto $\mathbb{R} \cdot v$) é temporal, $(\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ é espacial, o que contraria $u \in (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ e $g(u, u) = 0$. Daí, $g(w, w) \geq 0, \forall w \in W$. \square

Segue da proposição A.9 acima que se v é um vetor temporal, V se decompõe como soma direta de $\mathbb{R} \cdot v$ e $(\mathbb{R} \cdot v)^\perp$, onde este último subespaço é um subespaço espacial.

Proposição A.10. *Seja W um subespaço com $\dim W \geq 2$. Então, são equivalentes:*

1. W é temporal;
2. W contém dois vetores luminosos linearmente independentes;
3. W contém um vetor temporal.

Demonstração. (1) \implies (2): Tome (e_1, \dots, e_m) base ortonormal de W ($m := \dim W \geq 2$), com e_1 temporal e e_j espacial para $j \geq 2$. Daí, os vetores $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$ de W são luminosos e linearmente independentes.

(2) \implies (3): Sejam u e v vetores em W luminosos e linearmente independentes. Então, afirmamos que $g(u, v) \neq 0$. De fato, fixe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , com apenas e_1 temporal. Escrevendo $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ e $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, como são luminosos temos $u_1^2 = u_2^2 + \dots + u_n^2$ e $v_1^2 = v_2^2 + \dots + v_n^2$. Note que $g(u, v) = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$. No entanto, como $(\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp$ é espacial e $e_j \in (\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp, j \geq 2$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz usual nos dá⁶:

$$(u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 < (u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_2^2 + \dots + v_n^2) = u_1^2 \cdot v_1^2,$$

que nos dá $g(u, v) \neq 0$. Daí, ou $u + v$ ou $u - v$ é temporal, dependendo do sinal de $g(u, v) \neq 0$.

(3) \implies (1): Tome $z \in W$ temporal. Daí, $W^\perp \subseteq (\mathbb{R} \cdot z)^\perp$, que é espacial pela proposição A.9. Segue então que W^\perp é não-degenerado e espacial. Novamente, pela proposição A.9 temos que W é temporal. \square

Proposição A.11. *Seja W um subespaço com $\dim W \geq 1$. Então, são equivalentes:*

⁶ Podemos supor que vale a desigualdade estrita, pois ou $\tilde{u} = \sum_{i=2}^n u_i e_i$ e $\tilde{v} = \sum_{j=2}^n v_j e_j$ são linearmente independentes (caso em que, de fato, vale a desigualdade estrita) ou existe um $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{u} = \lambda \tilde{v}$. Nesse caso, temos $u_i = \lambda \cdot v_i, i \geq 2$ e segue de $u_1^2 = u_2^2 + \dots + u_n^2$ e $v_1^2 = v_2^2 + \dots + v_n^2$ que $|u_1| = |\lambda \cdot v_1|$. O caso $u_1 = \lambda \cdot v_1$ contraria u e v serem LI. Se $u_1 = -\lambda \cdot v_1$, temos $u + 2\lambda v_1 e_1 = \lambda v$, de onde segue $g(u, v) \neq 0$.

1. W é luminoso;
2. W contém um vetor luminoso, mas não um vetor temporal;
3. $\dim W \cap W^\perp = 1$.

Demonstração. (1) \implies (2): A existência de vetor luminoso segue de $g|_{W \times W}$ ser degenerado. W não contém vetor temporal devido à proposição A.10.

(2) \implies (3): Pela proposição A.10, W não é temporal. Como contém um vetor luminoso, também não é espacial. Segue que W é luminoso $\implies \dim W \cap W^\perp \geq 1$. Se fosse > 1 , teríamos dois vetores luminosos LI em W , o que implicaria em W temporal pela proposição A.10.

(3) \implies (1): Pela proposição A.10, W não é temporal. Mas como $\dim W \cap W^\perp > 0$, W também não é espacial. Logo, W é luminoso. \square

A.3 Cones temporais e orientação temporal em espaços vetoriais de Lorentz

Fixe (V, g) um espaço vetorial de Lorentz. Vamos eventualmente denotar g por \langle, \rangle .

Definição A.12. Dado $u \in \mathcal{T}$, o cone temporal de V de u é o conjunto $C(u) := \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}$.

O cone oposto a $C(u)$ é o cone $C(-u) = -C(u)$. O leitor pode verificar, imediatamente da definição acima, que se $v \in C(u)$ e $\lambda > 0$, então $\lambda v \in C(u)$ (o que justifica o nome “cone”) e que $u \in C(u)$.

Observe que, dados $u, v \in \mathcal{T}$, ou $\langle u, v \rangle > 0$ ou $\langle u, v \rangle < 0$. De fato, suponha por absurdo que $\langle u, v \rangle = 0$, ou seja, $v \in (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$. Como u é temporal, pela proposição A.9 $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ é espacial o que nos leva a um absurdo, já que $v \in (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ e v é temporal.

Além disso, note que, dado $v \in \mathcal{T}$, $v \in -C(u)$ se, e somente se, $\langle u, v \rangle > 0$. Dessa forma, \mathcal{T} pode ser escrito como a união (disjunta) de $C(u)$ e $-C(u)$ (para qualquer $u \in \mathcal{T}$). Em particular, como $C(u)$ e $C(-u)$ são claramente abertos⁷ em V (e em \mathcal{T}), isso mostra que \mathcal{T} é desconexo.

Lema A.13. Sejam $u, v \in \mathcal{T}$. Então, $C(u) = C(v)$ se, e somente se, $\langle u, v \rangle < 0$.

Demonstração. (\implies): é óbvia, pois $u \in C(u)$.

⁷ Segue da continuidade da função $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\xi(x) := \langle u, x \rangle$. A continuidade dessa função segue de a expansão de $\xi(x)$ em uma base de V ser uma função polinomial, portanto suave.

(\Leftarrow): Basta mostrar que $C(u) \subseteq C(v)$ (a outra inclusão é completamente análoga). Seja $w \in C(u)$. Primeiro, note que $C(u) = C(\frac{u}{\|u\|})$, de forma que podemos supor u unitário. Como $\mathbb{V} = (\mathbb{R} \cdot u) \oplus (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$, escreva

$$v = a \cdot u + v^\perp \quad \text{e} \quad w = b \cdot u + w^\perp,$$

onde $v^\perp, w^\perp \in (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ (espacial). Note que $\langle v, w \rangle = -ab + \langle v^\perp, w^\perp \rangle$, que deve ser < 0 a fim de que $w \in C(v)$. Como $\langle u, v \rangle < 0$ e $\langle u, w \rangle < 0$, segue $a, b > 0$. Como v e w são temporais, segue $a > \|v^\perp\|$ e $b > \|w^\perp\|$. Em $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue $\langle v^\perp, w^\perp \rangle \leq \|v^\perp\| \|w^\perp\| < ab \implies \langle v, w \rangle < 0$, como queríamos. \square

Segue do lema acima que $C(u)$ é fechado para a soma e, portanto, convexo. Além disso, o lema prova que existem precisamente dois cones temporais em \mathbb{V} , que são as duas componentes conexas de \mathcal{T} (vide figura 10 para ilustração). Além disso, dois vetores temporais u e v estão no mesmo cone temporal se, e somente se, $\langle u, v \rangle < 0$.

Vamos também incluir os vetores luminosos na discussão. Para tanto, dado um $u \in \mathcal{T}$, defina os abertos disjuntos

$$\mathcal{U}_+(u) := \{v \in \mathbb{V} : \langle u, v \rangle < 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_-(u) := \{v \in \mathbb{V} : \langle u, v \rangle > 0\}$$

e também

$$\Lambda_+(u) := \mathcal{U}_+(u) \cap \Lambda \quad \text{e} \quad \Lambda_-(u) := \mathcal{U}_-(u) \cap \Lambda.$$

$\Lambda_+(u)$ e $\Lambda_-(u)$ são chamados, respectivamente, de *cone luminoso de u* e *cone luminoso de $-u$* (já que $\Lambda_-(u) = \Lambda_+(-u)$). Um argumento similar ao apresentado na demonstração do lema A.13 mostra que existem precisamente dois cones luminosos e que, dados u e v vetores temporais, temos $\Lambda_+(u) = \Lambda_+(v) \iff \langle u, v \rangle < 0 \iff \Lambda_-(u) = \Lambda_-(v)$ e $\Lambda_+(u) = \Lambda_-(v) \iff \langle u, v \rangle > 0 \iff \Lambda_-(u) = \Lambda_+(v)$. Observe também que⁸ $\Lambda = \Lambda_+(u) \sqcup \Lambda_-(u)$, o que mostra Λ desconexo.

Definição A.14. Os cones causais⁹ de (\mathbb{V}, g) são $\mathcal{C}_+ := C(u) \sqcup \Lambda_+(u)$ e $\mathcal{C}_- := C(-u) \sqcup \Lambda_-(u)$, para um dado $u \in \mathcal{T}$.

Se \mathcal{C} denota o conjunto de todos os vetores causais de \mathbb{V} , temos a decomposição $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \sqcup \mathcal{C}_-$. Note também que $\mathcal{C}_- = -\mathcal{C}_+$ e que eles são, de fato, cones no sentido da álgebra linear.

Proposição A.15. Dado $u \in \mathcal{T}$, temos $\partial C(u) = \Lambda_+(u) \cup \{\mathbf{O}\}$ e $\partial C(-u) = \Lambda_-(u) \cup \{\mathbf{O}\}$.

⁸ Já que um vetor causal não pode ser ortogonal a um vetor temporal, haja vista a proposição A.9. O símbolo “ \sqcup ” denota a união disjunta de conjuntos.

⁹ Eles ficam bem definidos, a menos da ordem.

Demonstração. Basta provarmos a primeira igualdade. Primeiro, provemos $\partial C(u) \subseteq \Lambda_+(u) \cup \{0\}$. Tome $v \in \partial C(u)$. Daí, existem sequências $(v_k) \subseteq C(u)$ e $(w_k) \subseteq \mathbb{V} \setminus C(u)$ que convergem para v . Afirmamos que o conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} : w_k \in C(-u)\}$$

é finito. Com efeito, se fosse infinito, haveria uma subsequência $(\tilde{w}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C(-u)$ de (w_k) e que convergiria para v . Daí, como $\langle \tilde{w}_k, u \rangle > 0, \forall k$, por continuidade segue que $\langle v, u \rangle \geq 0$. Por outro lado, como $\langle v_k, u \rangle < 0, \forall k$, segue que $\langle v, u \rangle \leq 0 \implies \langle v, u \rangle = 0 \implies v \in (\mathbb{R} \cdot u)^\perp$, que é espacial pois u é temporal. Mas isso contraria v temporal. Daí, segue a finitude do conjunto acima. Podemos então, sem perda de generalidade, supor que $w_k \notin C(-u), \forall k \implies w_k \in \mathbb{V} \setminus \mathcal{T}, \forall k$. Como $(v_k) \subseteq C(u) \subseteq \mathcal{T}$ e $(w_k) \subseteq \mathbb{V} \setminus \mathcal{T}$, segue que $v \in \partial \mathcal{T} = \Lambda \cup \{0\}$. Se $v = 0$, estamos feitos. Do contrário, como $\Lambda_+(u) = \{x \in \mathbb{V} : q(x) = 0 \text{ e } \langle x, u \rangle < 0\}$, precisamos mostrar que $\langle v, u \rangle < 0$. Mas da convergência dos v_k segue que $\langle v, u \rangle \leq 0$. Como dois vetores temporais não podem ser ortogonais, segue o resultado.

Para mostrar que $\partial C(u) \supseteq \Lambda_+(u) \cup \{0\}$, note que

$$\Lambda_+(u) \cup \{0\} \subseteq \Lambda \cup \{0\} = \partial \mathcal{T} \subseteq \partial C(u) \cup \partial C(-u),$$

onde a última inclusão segue de¹⁰ $\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$. Seja $v \in \Lambda_+(u) \cup \{0\}$. Se $v = 0$ o resultado é óbvio. Se não, $\langle v, u \rangle < 0 \implies v \notin \partial C(-u)$. Logo, $v \in \partial C(u)$, o que encerra a prova. \square

Segue da proposição anterior que os cones causais \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- são conexos, já que $C(u)$ é conexo e $C(u) \subseteq \mathcal{C}_+(u) \subseteq \overline{C(u)}$. A figura a seguir ilustra bem o conteúdo da proposição A.15.

Proposição A.16. *Sejam $v, w \in \mathcal{C}$. Então, v e w estão no mesmo cone causal se, e somente se, $\langle v, w \rangle < 0$ ou $v, w \in \Lambda$ e $v = \lambda w$, com $\lambda > 0$.*

Demonstração. (\implies): O caso em que um dos vetores v e w é temporal segue de forma similar à demonstração do lema A.13, obtendo $\langle v, w \rangle < 0$. Se ambos v e w são luminosos, escreva $v, w \in \mathcal{C}_+(u) \implies v, w \in \Lambda_+(u)$. Se $\langle v, w \rangle < 0$, não há nada a fazer. Suponha então $\langle v, w \rangle \geq 0$. Como sempre, podemos supor $\|u\| = 1$. Escreva

$$v = a \cdot u + v^\perp \quad \text{e} \quad w = b \cdot u + w^\perp.$$

Como $v, w \in \Lambda_+(u)$, segue $\langle v, u \rangle < 0$ e $\langle w, u \rangle < 0$, donde $a, b > 0$. Como $q(v) = q(w) = 0$, segue $a = \|v^\perp\|$ e $b = \|w^\perp\|$. Daí, $\langle v, w \rangle = 0$. Como provado na demonstração da

¹⁰ Pois em qualquer espaço métrico, a fronteira da união de dois conjuntos é um subconjunto da união das respectivas fronteiras.

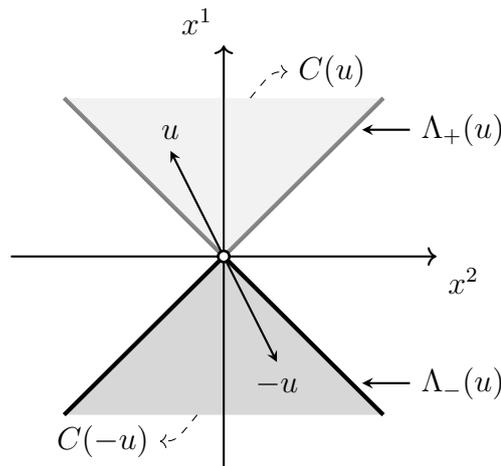


Figura 10 – Cones causais em \mathbb{R}_1^2

proposição A.10, dois vetores luminosos LI não podem ser ortogonais. Então, temos v e w LD, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $v = \lambda w$. Multiplicando (via produto escalar) os dois lados de $v = \lambda w$ por u , segue $\lambda > 0$.

(\Leftarrow): Suponha $v \in \mathcal{C}_+(u)$, com $u \in \mathcal{T}$ unitário. Precisamos mostrar $w \in \mathcal{C}_+(u)$, isto é, $\langle u, w \rangle < 0$. Suponha inicialmente $\langle v, w \rangle < 0$. Escreva, novamente,

$$v = a \cdot u + v^\perp \quad \text{e} \quad w = b \cdot u + w^\perp.$$

Como $\langle u, v \rangle < 0$, temos $a > 0$. Como $\langle v, w \rangle < 0$, temos $ab > \langle v^\perp, w^\perp \rangle \geq 0$. Segue então que $b > 0$. Mas de $\langle u, w \rangle = -b < 0$, segue o resultado desejado.

No caso de $v, w \in \Lambda$ e $v = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, temos $\langle u, w \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle u, v \rangle < 0$, o que encerra a prova. \square

Observação A.17. *Segue da proposição acima que os cones causais são convexos.*

Definição A.18. *Uma orientação temporal em um espaço vetorial de Lorentz (\mathbb{V}, g) é a escolha de um dos cones causais, que passa a ser chamado de cone causal futuro (denotado por \mathcal{C}_+), enquanto o outro cone é chamado de cone causal passado (denotado por \mathcal{C}_-). Uma vez escolhida uma orientação temporal, (\mathbb{V}, g) é dito temporalmente orientado.*

O interior de \mathcal{C}_+ , ou seja, seus vetores temporais, é chamado de cone temporal futuro e denotado por \mathcal{T}_+ , enquanto o interior de \mathcal{C}_- é denotado por \mathcal{T}_- e chamado de cone temporal passado.

Os vetores causais no cone causal futuro (respectivamente passado) são ditos futuro-dirigidos (respectivamente passado-dirigidos).

Vamos agora enunciar a desigualdade análoga à de Cauchy-Schwarz para o caso de um espaço vetorial Lorentziano:

Proposição A.19. *Dados $v, w \in \mathcal{T}$, temos:*

1. $|\langle v, w \rangle| \geq \|v\| \cdot \|w\|$ e vale a igualdade se, e somente se, v e w são colineares;
2. Se v e w estão no mesmo cone temporal, então existe único $\phi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, chamado de ângulo hiperbólico entre v e w , tal que $\langle v, w \rangle = -\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cosh(\phi)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na página 144 de O'Neill (1983). \square

Finalmente, também enunciamos nosso análogo para a desigualdade triangular:

Corolário A.20. *(Desigualdade triangular reversa)*

Sejam $v, w \in \mathcal{T}$ no mesmo cone temporal. Então, $\|v\| + \|w\| \leq \|v + w\|$ e vale a igualdade se, e somente se, v e w são colineares.

Demonstração. Pode ser encontrada na página 144 de O'Neill (1983). \square

É interessante notarmos como a proposição A.19 e seu corolário A.20 alteram a geometria usual que conhecemos dos espaços Euclidianos. Por exemplo, dados $v, w \in \mathbb{R}_1^2$ temporais e no mesmo cone temporal, a figura 11, juntamente com o corolário acima, nos mostra que o segmento de reta que une a origem ao ponto A (extremo de $v + w$) não mais minimiza a distância (Lorentziana) entre eles, mas sim maximiza dentre todos os caminhos poligonais unindo $(0, 0)$ e A .

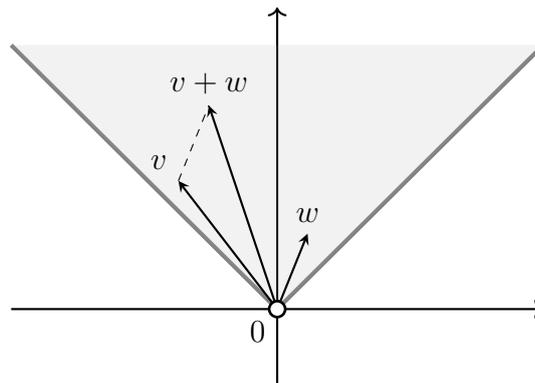


Figura 11 – Desigualdade triangular em \mathbb{R}_1^2

Esse fato curioso é fundamental em geometria Lorentziana e suas aplicações à teoria da Relatividade.

Referências

- Lee, J. (2002). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Springer.
- Lima, E. (1995). *Álgebra linear*. Coleção matemática universitária. IMPA.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press.