

Victor Damian Almeida

**Introdução à teoria de categorias: um estudo  
de categorias e propriedades universais**

Florianópolis

2019

Victor Damian Almeida

## **Introdução à teoria de categorias: um estudo de categorias e propriedades universais**

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido para aprovação na disciplina TCC-II (MTM7144) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemática  
Departamento de Matemática  
Licenciatura em Matemática  
Trabalho de Conclusão de Curso - II

Orientador: Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Florianópolis

2019

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, doador da vida, por todo cuidado e todas as bênçãos que tem me dado, graças a Ele estou aqui, finalizando esta graduação.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer as pessoas mais importantes da minha vida por todo o suporte dado, vocês nunca serão esquecidos:

À minha mãe, Marlene, que me proporcionou todas as condições necessárias para que eu pudesse focar em meus estudos.

Ao meu pai, Mário, pelo apoio emocional e pelas boas conversas que tivemos.

À minha namorada Paula, parceira de vida, que atura minhas angústias, me incentiva a estudar e está sempre ao meu lado. Obrigado por tudo, meu amor.

Ao meu treinador de boxe e segundo pai, Bruno Jordão, que além de me ensinar a bela arte que é o boxe, também me ajudou a ser um melhor professor e a me sentir confiante frente a qualquer desafio. Obrigado por tudo, mestre.

Gostaria de agradecer também a alguns dos professores que fizeram parte da minha formação:

À professora Alda, que em fundamentos da matemática mostrou de maneira clara o que é uma demonstração, e me fez prestar mais atenção em meus erros de português.

Ao professor Gilles, pela oportunidade de eu ter sido seu orientando por mais de dois anos na iniciação científica, por ter me apresentado a teoria de categorias, me ensinado muita coisa no LaTeX, e por ter me orientado nesse TCC. Obrigado por tudo, professor.

Ao professor Leandro Morgado, que me inspira com sua maneira de dar aula e por seu amor pela matemática.

Gostaria também de agradecer aos meus amigos: Lhama, Nikolaf, Drala, Gerkaio, Wesb, Vini e Saito por alegrarem minhas noites no discord, uma pena ser tão difícil alinhar os planetas.

Por fim, gostaria de agradecer meus colegas e amigos(as) da matemática por toda ajuda que me foi dada e por sempre me emprestarem seus cadernos para tirar xerox.

## Resumo

O presente trabalho trata de um estudo sobre Categorias e Propriedades Universais. Para a realização desse trabalho, foi feito um estudo dirigido dos cinco primeiros capítulos do livro *Álgebra: chapter 0*, visando destacar as principais definições e resultados, com o objetivo de proporcionar conceitos fundamentais ao estudante que deseja se aprofundar na teoria de categorias. Como resultados principais, destacam-se: união disjunta, produtos, quocientes, três maneiras de ver injetividade e sobrejetividade, definição e exemplos de categorias, propriedades de morfismos, objetos terminais e propriedades universais utilizando os mesmos.

**Palavras-chave:** Categorias. Morfismos. Propriedades universais.

# Abstract

This monograph deals with a study on universal categories and properties. In order to do this monograph, a directed study of the first five chapters of the book Algebra: Chapter 0 was made, aiming at highlighting the main definitions and results, in order to provide fundamental concepts to the student who wants to deepen in the theory of categories. The main results are: disjoint union, products, quotients, three ways of seeing injectivity and surjectivity, definition and examples of categories, morphism properties, terminal objects and universal properties.

**Keywords:** Categories. Morphism. Universal properties

# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>5</b>
	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>NOÇÕES DE CONJUNTOS</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>FUNÇÕES ENTRE CONJUNTOS</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Injetividade, sobrejetividade e bijeções</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Injetividade, Sobrejetividade, bijeção: Segundo ponto de vista</b> . . .	<b>11</b>
<b>2.3</b>	<b>Monomorfismos e Epimorfismos</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2.4</b>	<b>Decomposição canônica</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>CATEGORIAS</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>MORFISMOS</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>PROPRIEDADES UNIVERSAIS</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>5.1</b>	<b>Produtos</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>5.2</b>	<b>Coprodutos</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>42</b>

# Introdução

O presente trabalho trata-se de uma introdução à teoria de categorias e baseia-se em um estudo dos cinco primeiros capítulos do livro *Algebra: chapter 0* do autor Paolo Alluffi (ALUFFI, 2009) que abordam respectivamente: teoria de conjuntos, funções, categorias, morfismos e propriedades universais.

A teoria de categorias consiste no estudo de estruturas matemáticas e da relação entre elas através de objetos e morfismos. Essa teoria foi apresentada pela primeira vez pelos matemáticos Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em 1945, como uma teoria relacionada com topologia algébrica.

Dentro da teoria de categorias foram apresentados os conceitos de funtores, categorias, transformações naturais e dualidade. Originalmente o propósito dessas noções era fornecer uma técnica para esclarecer alguns conceitos, como isomorfismos naturais.

Atualmente essa teoria vem ocupando espaço de destaque na matemática por conta de sua linguagem e métodos terem invadido e se tornado essenciais à álgebra, topologia, lógica matemática, entre outras áreas.

Este trabalho divide-se em cinco capítulos, que seguem a mesma ordem do livro *Algebra: chapter 0*, e que abordam as principais definições e exemplos vistos no mesmo. Pressupõe-se que o leitor possua conhecimentos razoáveis de teoria dos conjuntos, funções e álgebra básica. A principal referência foi o livro do Alluffi, porém, foram utilizadas outras referências para complementar o trabalho (MITCHELL, 1965; LAWVERE; SCHANUEL, 2009; EILENBERG; MACLANE, 1945; BORCEUX, 1994).

O primeiro capítulo aborda algumas definições e exemplos da teoria de conjuntos que são úteis para definir categorias e propriedades universais.

O segundo capítulo trata de funções entre conjuntos, abordando injetividade e sobrejetividade através de três pontos de vista. Este capítulo tem forte relação com o capítulo 4, que aborda morfismos.

O terceiro capítulo trata de categorias, em que é descrita sua definição, e são feitas algumas construções como: categoria dos conjuntos (*Set*), categoria  $\mathcal{C}_{A,B}$ , entre outras.

O quarto capítulo trata de morfismos e suas propriedades, mostrando relação com o conteúdo visto no capítulo 2.

Por fim, o quinto capítulo trata de propriedades universais, em que são apresentados alguns resultados desse assunto, como por exemplo: objeto inicial e final de uma categoria, produtos e coprodutos.

# 1 Noções de Conjuntos

Este primeiro capítulo trata-se de uma revisão de algumas definições de conjuntos e operações entre os mesmos, que serão utilizadas no capítulo 3 para construção de certas categorias, e no capítulo 5 em propriedades universais.

A noção de conjuntos é a formalização da ideia de “coleção de objetos”, chamados elementos. Assim, um conjunto é determinado pelos seus elementos, e podemos dizer que dois conjuntos são iguais se, e somente se, ambos tem precisamente os mesmos elementos.

Uma boa maneira de definir um conjunto é expressar seus elementos como elementos  $s$  de um conjunto maior  $S$ , satisfazendo uma condição  $P$ , que pode ser escrito como:

$$A = \{s \in S \mid s \text{ satisfaz } P\}.$$

**Definição 1.1.** Um conjunto é dito ser vazio se não possuir nenhum elemento. Denotamos tal conjunto por  $\emptyset$ .

**Definição 1.2.** Dois conjuntos, digamos  $A$  e  $B$  são ditos ser disjuntos se  $A \cap B = \emptyset$ .

**Definição 1.3.** Dados conjuntos  $S$  e  $T$ ,  $S$  é subconjunto de  $T$  se todo elemento de  $S$  é elemento de  $T$ . Notação:  $S \subseteq T$ .

Será utilizada a notação  $S \subsetneq T$  para representar que  $S \subseteq T$  e  $S \neq T$ . Vale lembrar também que para todo conjunto  $S$ , tem-se que  $\emptyset \subseteq S$  e  $S \subseteq S$  e que, se  $S \subseteq T$  e  $T \subseteq S$ , segue que  $S = T$ .

**Definição 1.4.** Seja  $S$  um conjunto qualquer. O conjunto abaixo é chamado de conjunto das partes de  $S$ :

$$P(S) = \{X \mid X \text{ é subconjunto de } S\}.$$

**Definição 1.5.** Uma partição de um conjunto  $S$  é uma família de subconjuntos não vazios e disjuntos de  $S$ , cuja união resulta em  $S$ .

É bastante frequente aparecer operações entre conjuntos ao estudar categorias e propriedades universais. Algumas das operações destacadas nesse trabalho são: união disjunta, produtos e quocientes. Veremos nos capítulos posteriores como tais operações se encaixam em categorias e propriedades universais.

**Definição 1.6.** Uma união disjunta de dois conjuntos  $S$  e  $T$  é um conjunto  $S \coprod T$  obtido da seguinte maneira: Primeiramente obtendo cópias  $S'$  e  $T'$  dos conjuntos  $S$  e  $T$  respectivamente, de forma que  $S' \cap T' = \emptyset$ , e então, aplicando a união desses conjuntos.



**Definição 1.7.** Dados conjuntos  $S$  e  $T$ , definimos  $S \times T$  como sendo o conjunto tal que os elementos são pares ordenados  $(s, t)$  de elementos de  $S$  e de  $T$ :

$$S \times T := \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}.$$

Chamamos tal conjunto de **produto** de  $S$  e  $T$ .

Sabendo isso, podemos obter cópias de conjuntos para a união disjunta através de produtos, por exemplo definindo  $S' = \{0\} \times S$  e  $T' = \{1\} \times T$ .

**Definição 1.8.** Uma **relação** em um conjunto  $S$  é um subconjunto  $R$  de  $S \times S$ . Se  $(a, b) \in R$ , dizemos que  $a$  e  $b$  estão relacionados por  $R$  e escrevemos  $aRb$ .

Com frequência são utilizados símbolos para representar relações, como por exemplo:  $\leq, =, \sim$ , etc.

**Definição 1.9.** Uma relação de equivalência em um conjunto  $S$  é qualquer relação  $\sim$  que satisfaça as seguintes propriedades:

- Reflexiva:  $\forall a \in S, a \sim a$  ;
- Simétrica:  $\forall a, b \in S, \text{ se } a \sim b, \text{ então } b \sim a$  ;
- Transitiva:  $\forall a, b, c \in S, \text{ se } a \sim b \text{ e } b \sim c, \text{ então } a \sim c$ .

Vale ressaltar que para definir uma categoria, precisamos apenas das propriedades reflexiva e transitiva, como veremos em exemplos no capítulo 3.

Dado um conjunto  $S$  com uma relação de equivalência  $\sim$ , podemos obter uma partição de  $S$  através da ideia de **quociente**. Obtemos tal partição da seguinte maneira: para cada elemento  $a \in S$ , definimos a classe de equivalência de  $a$  como o subconjunto de  $S$  :

$$[a]_{\sim} := \{b \in S \mid b \sim a\}.$$

Tais classes de equivalência formam uma partição  $P_{\sim}$  de  $S$ . Dessa maneira, definimos o quociente de um conjunto  $S$  com respeito à relação  $\sim$  como o conjunto :

$$S/\sim := P_{\sim}$$

das classes de equivalência dos elementos de  $S$  com respeito à  $\sim$ .

## 2 Funções entre conjuntos

Um outro assunto da teoria de conjuntos que deve ser abordado antes de começar a falar de categorias são funções. Estudando categorias veremos que morfismos são essenciais para as mesmas, e que funções também são morfismos que aparecerão na categoria *Set* (dos conjuntos).

Nesse capítulo serão abordados três pontos de vista diferentes sobre injetividade e sobrejetividade, além de uma revisão de algumas definições importantes para o melhor entendimento de funções.

**Definição 2.1.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é um subconjunto  $f \subseteq A \times B$  em que, para cada  $a \in A$ , existe um único  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .

Todas as informações sobre tal  $f$  podem ser resumidas em: qual elemento  $b \in B$  é imagem de algum  $a \in A$ , e isso nada mais é que um subconjunto de  $A \times B$ :

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B \text{ tal que } b = f(a)\} \subseteq A \times B.$$

Note que nem todos os subconjuntos  $\Gamma \subseteq A \times B$  são funções. Para  $\Gamma$  representar uma função, cada elemento  $a \in A$  (do **domínio**) deve ser enviado a exatamente um elemento de  $B$  (do **contradomínio**).

Uma maneira de escrever uma função  $f : A \rightarrow B$  é através de um diagrama:

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Diagramas são constantemente utilizados na teoria de categorias para representar morfismos, ou até mesmo objetos, dependendo da categoria.

**Definição 2.2.** Todo conjunto  $A$  vem equipado com uma função especial chamada **função identidade**. Tal função é denotada por:

$$id_A : A \rightarrow A$$

e é definida como : para qualquer  $a \in A$ ,  $id_A(a) = a$ .

Na categoria *Set*, o morfismo identidade (que será definido em breve) é exatamente a função identidade.

**Definição 2.3.** Dadas funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ , podemos **compor** tais funções com a operação  $g \circ f$ , definida por:

$$\text{para qualquer } a \in A, (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

Podemos observar a composição acima através de diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & g \circ f \end{array}$$

ou,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & C \\ & g \circ f & \end{array}$$

Dizemos que os diagramas acima **comutam** ou são **comutativos** se, independente do caminho escolhido para percorrer de  $A$  até  $C$ , obtivermos o mesmo resultado. Além disso, temos algumas propriedades importantes de composições:

**Composição é associativa:** Dadas funções  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  e  $h : C \rightarrow D$ , temos que  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . O diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & h \circ g & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & & & g \circ f & & \end{array}$$

**Funções identidade com respeito à composições:** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função, então  $id_B \circ f = f$  e  $f \circ id_A = f$ . Tais diagramas comutam também:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{id_B} B \\ & \searrow & \nearrow \\ & & f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \xrightarrow{f} B \\ & \searrow & \nearrow \\ & & f \end{array}$$

## 2.1 Injetividade, sobrejetividade e bijeções

Existem alguns tipos especiais de funções, chamadas injetora, sobrejetora e bijetora, que nos ajudam a entender mais sobre relação entre conjuntos, como por exemplo quando dois conjuntos são isomorfos.

**Definição 2.4.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita injetora (ou injetiva) se dados  $a', a'' \in A$ , com  $a' \neq a''$ , temos  $f(a') \neq f(a'')$ .

Ou seja, se dois elementos do domínio são diferentes, então suas imagens também serão diferentes. Com frequência é utilizada a contra-positiva desta mesma definição:

para qualquer  $a', a'' \in A$  tais que  $f(a') = f(a'')$ , temos que  $a' = a''$ .

Escrevemos  $f : A \hookrightarrow B$  para representar que  $f$  é injetora.

**Definição 2.5.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita sobrejetora (ou sobrejetiva) se, para qualquer  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ .

Ou seja, todo elemento do contradomínio é imagem de alguém do domínio. Podemos escrever  $f : A \twoheadrightarrow B$  para representar que  $f$  é sobrejetora.

**Definição 2.6.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita ser bijetora (ou bijetiva) quando  $f$  é injetora e sobrejetora, dizemos então que existe um **isomorfismo** entre  $A$  e  $B$ , ou que tais conjuntos são **isomorfos**. Denotamos por  $A \cong B$  ou:

$$f : A \xrightarrow{\sim} B.$$

No caso de  $f : A \rightarrow B$  ser uma bijeção, se  $A$  for um conjunto finito, então  $B$  necessariamente será finito também, e ambos terão a mesma quantidade de elementos, ou seja,  $|A| = |B|$ .

## 2.2 Injetividade, Sobrejetividade, bijeção: Segundo ponto de vista

Uma outra maneira útil de pensarmos sobre funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras é através de funções inversas

**Definição 2.7.** Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  funções. A função  $g$  é dita ser uma **inversa à esquerda** de  $f$  quando tivermos que

$$g \circ f = id_A.$$

**Definição 2.8.** Sejam  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  funções. A função  $g$  é dita ser uma **inversa à direita** de  $f$  quando tivermos que

$$f \circ g = id_B.$$

**Lema 2.9.** Dada uma função  $f : A \rightarrow B$ , se existem  $g_1, g_2 : B \rightarrow A$  tais que  $f \circ g_1 = id_B$  e  $g_2 \circ f = id_A$ , então  $g_1 = g_2$ .

*Demonstração.* De fato,

$$g_1 = id_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ id_B = g_2.$$

□

Como mostra o lema acima, se tivermos uma inversa à esquerda e uma à direita, então essa inversa é única. Nesse caso, dizemos que  $f$  possui uma inversa, e denotamos por  $f^{-1}$ .

Veremos a unicidade da inversa de maneira mais geral em categorias.

**Proposição 2.10.** *Dada uma função  $f : A \rightarrow B$ , com  $A \neq \emptyset$ , temos que:*

1.  *$f$  possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetora.*
2.  *$f$  possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetora.*

*Demonstração.* Provaremos agora o primeiro resultado.

Suponha que  $f : A \rightarrow B$  possui inversa à esquerda, então existe uma função  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = id_A$ . Sejam  $a', a'' \in A$  tais que  $a' \neq a''$ , logo:

$$g(f(a')) = id_A(a') = a' \neq a'' = id_A(a'') = g(f(a''))$$

ou seja, a função  $g$  envia  $f(a')$  e  $f(a'')$  em elementos diferentes, e portanto  $f(a') \neq f(a'')$ , mostrando que  $f$  é injetora.

Agora suponha que  $f : A \rightarrow B$  é injetora. Fixe um elemento  $s \in A$ . Construiremos agora uma função  $g : B \rightarrow A$  de forma que  $g \circ f = id_A$ . De fato, para  $b \in B$ , defina

$$g(b) := \begin{cases} a, & \text{se } b = f(a) \text{ para } a \in A \\ s, & \text{se } b \notin Im f. \end{cases}$$

A função acima está bem definida, pois como  $f$  é injetora, se  $b$  está na imagem de  $f$ , então existe um único  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .

Agora, dado  $a \in A$ , existe  $b \in B$  tal que,  $f(a) = b$ . Logo,

$$g(f(a)) = g(b) = a$$

e portanto  $g$  é de fato uma inversa à esquerda de  $f$ .

Provaremos agora o segundo resultado.

Suponha que  $f : A \rightarrow B$  possui inversa à direita, então existe uma função  $g : B \rightarrow A$  tal que  $f \circ g = id_B$ . Então, para qualquer  $b \in B$ , temos que:

$$b = id(b) = f(g(b)).$$

Portanto,  $f$  é sobrejetora.

Agora suponha que  $f : A \rightarrow B$  é sobrejetora, então  $Im f = B$ , ou seja, para qualquer  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ . Portanto, definiremos a função  $g : B \rightarrow A$  como: para

cada elemento de  $B$ , escolheremos um elemento  $a \in A$  de forma que  $f(a) = b$ . Tal  $a \in A$  existe, pois a função é sobrejetora, e o axioma da escolha nos permite fazer tal seleção. Portanto, para qualquer  $b \in B$ , temos que

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b.$$

Portanto,  $g$  é uma inversa à direita de  $f$ . □

**Corolário 2.11.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção se, e somente se,  $f$  possui inversa.

## 2.3 Monomorfismos e Epimorfismos

Além das duas maneiras que foram apresentadas para representar funções injetoras e sobrejetoras, existe ainda uma terceira que são os monomorfismos e epimorfismos. Essa terceira maneira é utilizada na teoria de categorias pois não precisa de elementos, apenas funções (morfismos para o caso de categorias).

**Definição 2.12.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita ser um **monomorfismo** se, para qualquer conjunto  $Z$ , e funções  $\alpha', \alpha'' : Z \rightarrow A$  tais que  $f \circ \alpha' = f \circ \alpha''$ , tivermos  $\alpha' = \alpha''$ .

**Proposição 2.13.** Uma função  $f$  é injetora se, e somente se,  $f$  for um monomorfismo.

*Demonstração.* Suponha que a função  $f : A \rightarrow B$  seja injetora, então existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = id_A$ . Suponha também que  $\alpha', \alpha''$  sejam funções quaisquer de um conjunto  $Z$  para o  $A$ , e que  $f \circ \alpha' = f \circ \alpha''$ . Dessa forma,

$$\alpha' = id_A \circ \alpha' = (g \circ f) \circ \alpha' = g \circ (f \circ \alpha') = g \circ (f \circ \alpha'') = (g \circ f) \circ \alpha'' = id_A \circ \alpha'' = \alpha''.$$

Portanto,  $f$  é monomorfismo.

Agora, suponha que  $f : A \rightarrow B$  seja monomorfismo. Queremos mostrar que  $f$  é injetora.

Dado um elemento  $a \in A$ , podemos escrever esse elemento como uma função  $\bar{a} : \{*\} \rightarrow A$  de um conjunto unitário para o conjunto  $A$ .

Sejam  $a_1, a_2 \in A$  tais que  $f(a_1) = f(a_2)$ . Podemos escrever  $f(a_1) = f(a_2)$  como:

$$(f \circ \bar{a}_1) = (f \circ \bar{a}_2)$$

logo

$$f \circ \bar{a}_1 = f \circ \bar{a}_2$$

e por  $f$  ser monomorfismo, temos que

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2$$

que é equivalente a

$$a_1 = a_2.$$

Portanto,  $f$  é injetora. □

Por outro lado, temos a definição de **epimorfismo**, que é equivalente a sobrejetividade.

**Definição 2.14.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita ser um **epimorfismo** se, dado um conjunto  $Z$  qualquer e funções  $\alpha', \alpha'' : B \rightrightarrows Z$ , se  $\alpha' \circ f = \alpha'' \circ f$ , então  $\alpha' = \alpha''$ .

**Proposição 2.15.** Uma função  $f$  é um epimorfismo se, e somente se,  $f$  é sobrejetora.

*Demonstração.* Seja  $f : A \rightarrow B$  um epimorfismo, considere o conjunto  $\{0, 1\}$  e as seguintes funções  $\alpha', \alpha'' : B \rightrightarrows \{0, 1\}$ :

$$\alpha'(b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in f(A) \\ 0, & \text{se } b \notin f(A) \end{cases}$$

$$\alpha''(b) = 1, \quad \forall b \in B.$$

Com isso temos que  $\alpha' \circ f = \alpha'' \circ f$  é a função constante em 1, então  $\alpha' = \alpha''$  e portanto  $Imf = B$ .

Por outro lado, seja  $f : A \rightarrow B$  uma função sobrejetora e  $\alpha', \alpha'' : B \rightrightarrows Z$  funções tais que  $\alpha' \circ f = \alpha'' \circ f$ .

Temos que, para qualquer  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ , então

$$\alpha'(b) = \alpha'(f(a)) = \alpha''(f(a)) = \alpha''(b)$$

o que prova que  $\alpha' = \alpha''$ . □

No contexto de categorias, na maioria das vezes, não nos preocupamos em trabalhar com elementos, mas sim com objetos e morfismos entre objetos. Por esse motivo, utilizaremos a segunda e terceira maneira aqui apresentadas para tratar de injetividade e sobrejetividade no contexto categórico.

**Exemplo 2.16.** Dados conjuntos  $A, B$  não vazios, considere as projeções naturais  $\pi_A, \pi_B$ :

$$\begin{array}{ccc} & A \times B & \\ \pi_A \swarrow & & \searrow \pi_B \\ A & & B \end{array}$$

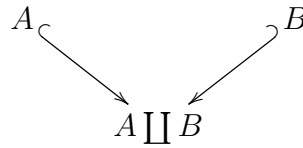
definidas por

$$\pi_A((a, b)) := a \quad \pi_B((a, b)) := b$$

para todo  $(a, b) \in A \times B$ .

Essa função é sobrejetora pois, dado  $a \in A$ , existe  $(a, b) \in A \times B$  tal que  $\pi_A((a, b)) = a$ , ou seja,  $A = \text{im}\pi_A$ . O mesmo vale para  $\pi_B$ .

**Exemplo 2.17.** De uma maneira similar, temos a injetividade de  $A$  e  $B$  para a união disjunta:



que é obtida mandando os elementos  $a \in A$  nos elementos correspondentes na cópia isomorfa  $A'$  de  $A$  em  $A \amalg B$ , e da mesma forma com  $B$ .

**Exemplo 2.18.** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência em um conjunto  $A$ . Existe uma **projeção canônica**:

$$\varphi : A \rightarrow A/\sim$$

que é obtida mandando cada elemento  $a \in A$  em sua classe de equivalência. Tal projeção é sobrejetiva, pois para todo  $x \in A/\sim$ , como  $X \neq \emptyset$ , logo existe  $a \in X$ , assim  $[a] = X$  e, logo,  $\varphi(a) = [a] = X$ . Portanto,  $\text{im}\varphi = A/\sim$ .

## 2.4 Decomposição canônica

Podemos utilizar a ideia de injetividade e sobrejetividade para entender como qualquer função pode ser construída. Para isso, observe que qualquer função  $f : A \rightarrow B$  determina uma relação de equivalência  $\sim$  em  $A$ :

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2).$$

Vamos mostrar que de fato isso é uma relação de equivalência.

*Demonstração.*

**Reflexividade:** Dado  $a \in A$ , temos que  $f(a) = f(a)$ . Portanto,  $a \sim a$ .

**Simetria:** Dados  $a, b \in A$ . Se  $a \sim b$ , então temos que  $f(a) = f(b)$ , que é equivalente à  $f(b) = f(a)$ , logo,  $b \sim a$ .

**Transitividade:** Dados  $a, b, c \in A$  tais que  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , isto nos diz que  $f(a) = f(b)$  e que  $f(b) = f(c)$ , segue que  $f(a) = f(c)$ , e portanto  $a \sim c$ .  $\square$



Provado que é uma relação de equivalência, finalizamos esse capítulo com um teorema.

**Teorema 2.19.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  e defina uma relação  $\sim$  como a apresentada acima, então podemos decompor  $f$  da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A & \twoheadrightarrow & (A/\sim) & \xrightarrow{f'} & \text{Im} f \hookrightarrow B
 \end{array}$$

em que a primeira função é a projeção canônica  $A \rightarrow A/\sim$ , a terceira função é a inclusão  $\text{Im} f \subseteq B$ , e a bijeção no meio é definida por

$$f'([a]_{\sim}) := f(a)$$

para todo  $a \in A$ .

Para provar esse teorema, mostraremos que a função  $f'$  está bem definida, e que de fato é uma bijeção.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos verificar que  $f'$  está bem definida. Para isso, devemos mostrar que para quaisquer  $a_1, a_2 \in A$ , se  $[a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim}$ , então  $f(a_1) = f(a_2)$ .

De fato, se  $[a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim}$ , temos que  $a_1 \sim a_2$ , e pela definição de  $\sim$ , segue que  $f(a_1) = f(a_2)$  e portanto, a função  $f'$  está bem definida.

Agora vamos mostrar que  $f' : A/\sim \rightarrow \text{Im} f$  é uma bijeção, para isso, devemos mostrar que  $f'$  é injetora e sobrejetora.

Injetividade: Suponha que  $f'([a_1]_{\sim}) = f'([a_2]_{\sim})$ , então por definição de  $f'$  temos que  $f(a_1) = f(a_2)$ . Dessa maneira, temos que  $a_1 \sim a_2$  por definição de  $\sim$ , e portanto  $[a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim}$ . Por conseguinte

$$f'([a_1]_{\sim}) = f'([a_2]_{\sim}) \Rightarrow [a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim},$$

mostrando assim a injetividade de  $f'$ .

Sobrejetividade: Dado um elemento qualquer  $b \in \text{Im} f$ , existe pelo menos um  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ . Então

$$f'([a]_{\sim}) = f(a) = b$$

por definição de  $f'$ , e isso mostra que  $f'$  é sobrejetiva. Portanto  $f'$  é bijetora, como queríamos provar.  $\square$

### 3 Categorias

Em categorias deixamos um pouco de lado a ideia de conjuntos e funções entre conjuntos, e começamos a falar de objetos quaisquer (conjuntos, grupos, anéis, vetores, etc.) e morfismo entre tais objetos. Todavia, existem categorias em que os objetos são conjuntos e os morfismos são funções, como veremos adiante.

Nesse capítulo, será definido o que é uma categoria, e serão feitas diversas construções de categorias. Algumas dessas construções serão utilizadas para propriedades universais.

**Definição 3.1.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  consiste de:

- Uma classe de objetos da categoria  $\mathcal{C}$ , denotada por  $Obj(\mathcal{C})$ .
- Para quaisquer  $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ , um conjunto de morfismos, denotado por  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

( $P_1$ ) (Morfismo identidade) Para cada objeto  $A$  pertencente à  $\mathcal{C}$ , existe um morfismo  $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ , chamado identidade de  $A$ .

( $P_2$ ) (Composição de morfismos) Dois morfismos  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$  determinam um terceiro morfismo  $gf \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ .

( $P_3$ ) (Associatividade da composição) Dados  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$  e  $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ , temos que:

$$(hg)f = h(gf).$$

( $P_4$ ) (Identidade com respeito à composição) Para todo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , temos que:

$$f1_A = f \quad e \quad 1_B f = f.$$

Um último pré-requisito para uma categoria  $\mathcal{C}$  estar bem definida é que, dados dois conjuntos de morfismos, digamos  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  e  $Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$  devemos ter que  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$ , a menos que  $A = C$  e  $B = D$ .

Para fazer a construção de uma categoria, primeiro deve-se definir quais são seus objetos, e como são seus morfismos, em seguida, define-se o morfismo identidade e a composição de morfismos. Por fim, deve-se demonstrar que a associatividade e a identidade com respeito à composição estão bem definidas.

Serão apresentados agora alguns exemplos de categorias, começando pela *Set*, que é a categoria dos conjuntos.

**Exemplo 3.2.** Categoria *Set*.

- $Obj(Set)$  : Classe de todos os conjuntos.
- Morfismos: Para todo  $A, B \in Obj(Set)$ ,  $Hom_{Set}(A, B) = B^A := \{f \mid f : A \rightarrow B, \text{ em que } f \text{ é função}\}$ .

( $P_1$ ) Dado  $A \in Obj(Set)$ , definimos  $1_A \in Hom_{Set}(A, A)$  como sendo a função identidade  $id_A$ .

( $P_2$ ) Dadas duas funções  $f \in Hom_{Set}(A, B)$  e  $g \in Hom_{Set}(B, C)$ , definimos a composição  $gf \in Hom_{Set}(A, C)$  por  $g \circ f$ .

( $P_3$ ) Sejam  $f \in Hom_{Set}(A, B)$ ,  $g \in Hom_{Set}(B, C)$  e  $h \in Hom_{Set}(C, D)$ , funções. Temos que, para todo  $x \in A$ :

$$((hg)f)(x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(gf(x)) = (h(gf))(x).$$

( $P_4$ ) Dada  $f \in Hom_{Set}(A, B)$ , existem identidades  $1_A \in Hom_{Set}(A, A)$  e  $1_B \in Hom_{Set}(B, B)$ , tais que, para todo  $x \in A$ :

$$f1_A(x) = f(1_A(x)) = f(x) \quad \text{e} \quad 1_B f(x) = 1_B(f(x)) = f(x).$$

Com isso podemos ver que conjuntos e funções formam uma categoria, e que as propriedades acima são, precisamente as que conhecemos de funções.

**Definição 3.3.** Uma categoria é dita ser pequena quando sua classe de objetos é apenas um conjunto.

Segue um exemplo de categoria pequena.

**Exemplo 3.4.** Suponha que  $S$  seja um conjunto e  $\sim$  uma relação em  $S$  satisfazendo as propriedades reflexiva e transitiva.

- Objetos: Elementos de  $S$ .
- Morfismos: Se  $a, b \in S$ , definimos  $Hom(a, b)$  como

$$Hom(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\}, & \text{se } a \sim b \\ \emptyset, & \text{se } a \not\sim b \end{cases}$$

em que  $(a, b)$  é um elemento de  $S \times S$ .

( $P_1$ ) Note que, por  $\sim$  ser reflexiva, todo elemento de  $S$  se relaciona com ele mesmo, e portanto,  $Hom(a, a) = \{(a, a)\}$  para todo  $a \in S$ , assim temos que:

$$1_A = (a, a) \in Hom(a, a).$$

( $P_2$ ) Sejam  $f \in Hom(a, b)$  e  $g \in Hom(b, c)$  morfismos, vamos definir um morfismo  $gf \in Hom(a, c)$ . Pela definição de morfismos, temos que  $f = (a, b)$ , e  $g = (b, c)$ , ou seja,  $a \sim b$  e  $b \sim c$ . Como a relação  $\sim$  é transitiva, segue que  $a \sim c$  e portanto  $(a, c) \in Hom(a, c)$ . Assim, definimos a composição como:

$$gf = (b, c)(a, b) = (a, c).$$

( $P_3$ ) Vamos mostrar que a composição é associativa. Sejam  $f \in Hom(a, b)$ ,  $g \in Hom(b, c)$  e  $h \in Hom(c, d)$ , temos que:

$$f = (a, b), \quad g = (b, c) \quad \text{e} \quad h = (c, d)$$

assim

$$gf = (b, c)(a, b) = (a, c) \quad \text{e} \quad hg = (c, d)(b, c) = (b, d)$$

logo

$$h(gf) = (c, d)(a, c) = (a, d)$$

e

$$(hg)f = (b, d)(a, b) = (a, d)$$

e portanto

$$h(gf) = (hg)f.$$

( $P_4$ ) Por fim, dado  $f \in Hom(a, b)$ , ou seja,  $f = (a, b)$ , existem  $1_A = (a, a) \in Hom(a, a)$  e  $1_B = (b, b) \in Hom(b, b)$ . Observe que, pela definição de composição:

$$f1_A = (a, b)(a, a) = (a, b) = f$$

e

$$1_B f = (b, b)(a, b) = (a, b) = f.$$

Com isso finalizamos a construção.

Note que a propriedade reflexiva foi essencial para definir o morfismo identidade, e a transitividade para a composição de morfismos. Mas e a propriedade simétrica? Caso tivéssemos a simetria, para cada  $f = (a, b)$ , existiria um  $g = (b, a)$ , pois de  $a \sim b$  segue que  $b \sim a$ , portanto, compondo  $f$  e  $g$  temos

$$fg = (a, b)(b, a) = (b, b) \quad \text{e} \quad gf = (b, a)(a, b) = (a, a).$$

Dessa maneira, segundo a definição 4.4, todo morfismo dessa categoria possuiria inversa.

**Exemplo 3.5.** Seja  $S$  um conjunto. Vamos definir a categoria  $\hat{S}$  da seguinte maneira:

- $Obj(\hat{S})$ : Conjunto das partes de  $S$ .
- Morfismos: Para todo  $A, B \in \hat{S}$ , definimos  $Hom_{\hat{S}}(A, B)$  como:

$$Hom_{\hat{S}}(A, B) = \begin{cases} \{(A, B)\}, & \text{se } A \subseteq B \\ \emptyset, & \text{se } A \not\subseteq B. \end{cases}$$

Observe que estamos definindo os morfismos da mesma forma que o exemplo anterior, porém, com a relação  $\subseteq$  entre os objetos. Além disso,  $\subseteq$  é reflexiva e transitiva:

- Dado um conjunto  $A$ , temos que  $A \subseteq A$ . (Reflexiva)
- Dados conjuntos  $A, B$  e  $C$ , se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ . (Transitiva)

Dessa maneira, a construção será similar ao exemplo anterior, e por essa razão, será escrita de maneira resumida.

( $P_1$ ) Definimos a identidade  $1_A \in Hom_{\hat{S}}(A, A)$  como o par  $(A, A) = 1_A$ , pois  $A \subseteq A$ .

( $P_2$ ) Sejam  $f \in Hom_{\hat{S}}(A, B)$  e  $g \in Hom_{\hat{S}}(B, C)$  morfismos, definimos a composição  $gf$  como  $gf = (B, C)(A, B) = (A, C) \in Hom_{\hat{S}}(A, C)$ .

( $P_3$ ) Dados  $f = (A, B)$ ,  $g = (B, C)$  e  $h = (C, D)$  morfismos em  $\hat{S}$  temos que:

$$(hg)f = ((C, D)(B, C))(A, B) = (B, D)(A, B) = (A, D)$$

e

$$h(gf) = (C, D)((B, C)(A, B)) = (C, D)(A, C) = (A, D).$$

Portanto  $(hg)f = h(gf)$ .

( $P_4$ ) Dado  $f = (A, B)$  morfismo de  $\hat{S}$ , existem morfismos  $1_A = (A, A)$  e  $1_B = (B, B)$  em  $\hat{S}$  tais que

$$f1_A = (A, B)(A, A) = (A, B) = f \quad \text{e} \quad 1_B f = (B, B)(A, B) = (A, B) = f.$$

Agora, um exemplo de categoria em que os objetos são morfismos de outra categoria, e os morfismos são diagramas comutativos.

**Exemplo 3.6.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria, e  $A$  um objeto de  $\mathcal{C}$ . Vamos definir a categoria  $\mathcal{C}_A$ :

- $Obj(\mathcal{C}_A)$ : São todos os morfismos  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ , em que  $X$  é um objeto de  $\mathcal{C}$ . Podemos representar tais objetos por:

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ A. \end{array}$$

- Morfismos: Dados dois objetos de  $\mathcal{C}_A$ , digamos  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$  e  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$ , um morfismo  $\phi \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f, g)$ , será um diagrama comutativo da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi'} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & A \end{array}$$

em que  $\phi' \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  e  $f = g\phi'$ .

- ( $P_1$ ) Dado um objeto de  $\mathcal{C}_A$ , digamos  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ , vamos definir o morfismo identidade  $1_f \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f, f)$  como sendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & & A \end{array}$$

em que  $1_X : X \rightarrow X$  é o morfismo identidade em  $\mathcal{C}$ .

- ( $P_2$ ) Dados dois morfismos  $r \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f, g)$  e  $s \in Hom_{\mathcal{C}_A}(g, h)$ , tais que  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$  e  $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$ , definimos a composição  $sr \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f, h)$  como sendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s'r'} & Z \\ & \searrow f & \swarrow h \\ & & A. \end{array}$$

que será escrito como

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{r'} & Y & \xrightarrow{s'} & Z \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow h & \\ & & A & & \end{array}$$

A composição  $s'r' \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$  segue do fato de  $\mathcal{C}$  ser categoria.

- ( $P_3$ ) Dados três morfismos, digamos  $r_1 \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f_1, f_2)$ ,  $r_2 \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f_2, f_3)$  e  $r_3 \in Hom_{\mathcal{C}_A}(f_3, f_4)$ , tais que  $f_1 \in Hom_{\mathcal{C}}(X_1, A)$ ,  $f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(X_2, A)$ ,  $f_3 \in Hom_{\mathcal{C}}(X_3, A)$  e  $f_4 \in Hom_{\mathcal{C}}(X_4, A)$ , queremos mostrar que  $(r_3r_2)r_1 = r_3(r_2r_1)$ .

Das composições  $r_3r_2$  e  $r_2r_1$  temos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{r'_3r'_2} & X_4 \\ & \searrow f_2 & \swarrow f_4 \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{r'_2r'_1} & X_3 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_3 \\ & A & \end{array}$$

Compondo  $(r_3r_2)r_1$  e  $r_3(r_2r_1)$  obtemos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{r'_1} & X_2 & \xrightarrow{r'_3r'_2} & X_4 \\ & \searrow f_1 & \downarrow f_2 & \swarrow f_4 \\ & A & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{r'_2r'_1} & X_3 & \xrightarrow{r'_3} & X_4 \\ & \searrow f_1 & \downarrow f_3 & \swarrow f_4 \\ & A & & \end{array}$$

que resultam em

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{(r'_3r'_2)r'_1} & X_4 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_4 \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{r'_3(r'_2r'_1)} & X_4 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_4 \\ & A & \end{array}$$

concluindo assim que os diagramas  $(r_3r_2)r_1$  e  $r_3(r_2r_1)$  são iguais, pois temos a associatividade  $(r'_3r'_2)r'_1 = r'_3(r'_2r'_1)$  em  $\mathcal{C}$ .

- ( $P_4$ ) Dado um morfismo  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_A}(f, g)$ , em que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A)$ , sabemos que existem identidades  $1_f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_A}(f, f)$  e  $1_g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_A}(g, g)$ . Compondo  $\phi 1_f$  obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{\phi'} & Y \\ & \searrow f & \downarrow f & \swarrow g \\ & A & & \end{array}$$

que resulta em

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi'} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & A & \end{array}$$

pois  $\phi' 1_X = \phi'$  em  $\mathcal{C}$ , portanto  $\phi 1_f = \phi$ . Por outro lado, compondo  $1_g \phi$  obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi'} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow g \\ & A & & \end{array}$$

que resulta em

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi'} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & A & \end{array}$$

pois  $1_Y \phi' = \phi'$  em  $\mathcal{C}$ , portanto  $1_g \phi = \phi$ .

No seguinte exemplo, relacionamos as construções vistas em 3.4 e 3.6, considerando agora o conjunto  $S$  como sendo o  $\mathbb{Z}$  e a relação  $\sim$  como  $\leq$ .

**Exemplo 3.7.** Considere o conjunto dos inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) e a relação  $\leq$ . Vamos denotar essa categoria por  $\mathcal{C}$ .

Agora escolhamos um objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ , que é um número inteiro, digamos  $A = 5$  (sem perda de generalidade) e definimos a categoria  $\mathcal{C}_5$  da seguinte maneira:

- $Obj(\mathcal{C}_5)$ : São todos os morfismos  $f = (n, 5) \in Hom_{\mathcal{C}}(n, 5)$ , de forma que  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \leq 5$ , ou seja:

$$\begin{array}{c} n \\ \downarrow n \leq 5 \\ 5. \end{array}$$

- Morfismos: Dados dois objetos de  $\mathcal{C}_5$ , digamos  $f = (n, 5)$  e  $g = (m, 5)$ , um morfismo  $\phi : f \rightarrow g$  estará bem definido se, e somente se,  $n \leq m$ . Representaremos esse morfismo através do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{n \leq m} & m \\ & \searrow n \leq 5 & \swarrow m \leq 5 \\ & & 5 \end{array}$$

- ( $P_1$ ) Dado um objeto de  $\mathcal{C}_5$ , digamos  $(n, 5) \in Hom_{\mathcal{C}}(n, 5)$ , definiremos a identidade como sendo o morfismo  $1_n : (n, 5) \rightarrow (n, 5)$ , que está bem definido pois  $n \leq n$  (reflexividade). Segue o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{n \leq n} & n \\ & \searrow n \leq 5 & \swarrow n \leq 5 \\ & & 5 \end{array}$$

- ( $P_2$ ) Dados dois morfismos de  $\mathcal{C}_5$ , digamos  $\phi : (x, 5) \rightarrow (y, 5)$  e  $\varphi : (y, 5) \rightarrow (z, 5)$ , definiremos a composição como  $\varphi\phi : (x, 5) \rightarrow (z, 5)$ , que está bem definida, pois  $x \leq y$  e  $y \leq z$  e portanto  $x \leq z$  (transitividade). Em termos de diagramas temos:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{x \leq y} & y & \xrightarrow{y \leq z} & z \\ & \searrow x \leq 5 & \downarrow y \leq 5 & \swarrow z \leq 5 & \\ & & 5 & & \end{array}$$

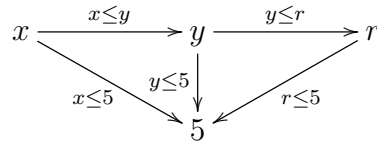
que escreveremos como

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{x \leq z} & z \\ & \searrow x \leq 5 & \swarrow z \leq 5 \\ & & 5 \end{array}$$

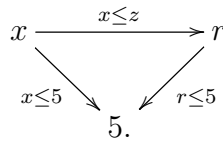


(P<sub>3</sub>) Dados três morfismos de  $\mathcal{C}_5$ ,  $\phi : (x, 5) \rightarrow (y, 5)$ ,  $\varphi : (y, 5) \rightarrow (z, 5)$  e  $\rho : (z, 5) \rightarrow (r, 5)$ , queremos mostrar que  $(\rho\varphi)\phi = \rho(\varphi\phi)$ .

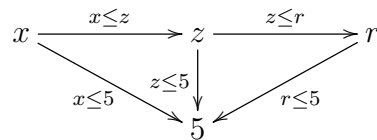
De  $(\rho\varphi)$  temos que  $y \leq z$  e  $z \leq r$ , logo,  $y \leq r$ , e de  $(\varphi\phi)$  temos que  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , e portanto  $x \leq z$ . Dessa maneira, compondo  $(\rho\varphi)\phi$  temos o seguinte diagrama:



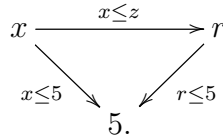
que resulta em



Por outro lado, compondo  $\rho(\varphi\phi)$  obtemos o seguinte diagrama

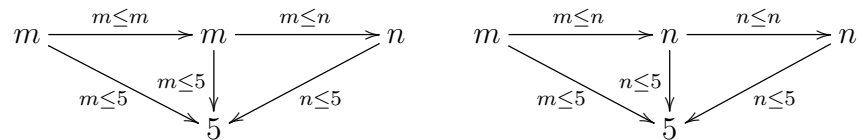


que resulta em

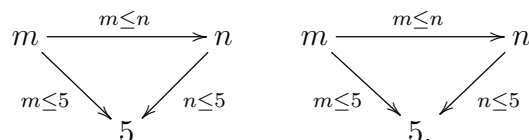


Portanto, temos que  $(\rho\varphi)\phi = \rho(\varphi\phi)$ , como queríamos mostrar.

(P<sub>4</sub>) Dado um morfismo em  $\mathcal{C}_5$ ,  $\phi : (m, 5) \rightarrow (n, 5)$ , pela definição de identidade existem morfismos  $1_m : (m, 5) \rightarrow (m, 5)$  e  $1_n : (n, 5) \rightarrow (n, 5)$ . Compondo  $\phi 1_m$  e  $1_n \phi$  obtemos respectivamente os seguintes diagramas:



que resultam em



Temos que  $\phi 1_m = \phi$  pois, de  $m \leq m$  e  $m \leq n$  segue que  $m \leq n$ . Da mesma maneira  $1_n \phi = \phi$  pois de  $m \leq n$  e  $n \leq n$  segue que  $m \leq n$ .

**Exemplo 3.8.** Seja  $\mathcal{C} = Set$  e  $A = \{*\}$ , em que  $\{*\}$  é um conjunto unitário fixo. Com essas informações, definiremos a categoria  $Set^*$ :

- $Obj(Set^*)$ : São os morfismos  $f : \{*\} \rightarrow S$  dentro da categoria  $Set$ . Denotaremos esses objetos por  $(S, s)$ , em que  $S$  é um conjunto qualquer não vazio e  $s$  é um elemento de  $S$  tal que  $f(*) = s$ .
  - Morfismos: Dados dois objetos  $(S, s)$  e  $(T, t)$  de  $Set^*$ , definiremos um morfismo de  $(S, s)$  para  $(T, t)$  como sendo uma função  $\phi : S \rightarrow T$ , em  $Set$  tal que  $\phi(s) = t$ .
- (P<sub>1</sub>) Dado um objeto  $(S, s)$  de  $Set^*$ , definiremos o morfismo  $1_S : S \rightarrow S$ , tal que  $1_S(s) = s$  como sendo a identidade.
- (P<sub>2</sub>) Dados dois morfismos  $\sigma : S \rightarrow T$  e  $\phi : T \rightarrow R$ , em que  $\sigma(s) = t$  e  $\phi(t) = r$ , definimos a composição como  $\phi\sigma : S \rightarrow R$  em  $Set$ , em que  $\phi\sigma(s) = \phi(\sigma(s)) = \phi(t) = r$ . Segue da definição de composição em  $Set$ .
- (P<sub>3</sub>) Dados três morfismos  $\phi : S \rightarrow T$ ,  $\varphi : T \rightarrow R$  e  $\sigma : R \rightarrow X$ , tais que  $\phi(s) = t$ ,  $\varphi(t) = r$  e  $\sigma(r) = x$ , pela definição de composição, temos que  $\sigma\varphi(t) = x$  e  $\varphi\phi(s) = r$ . Considerando  $f : \{*\} \rightarrow S$  em que  $f(*) = s$ , e compondo os morfismos, obtemos:

$$(\sigma\varphi)\phi(s) = (\sigma\varphi)(\phi(s)) = (\sigma\varphi)(t) = x$$

e

$$\sigma(\varphi\phi)(s) = \sigma((\varphi\phi)(s)) = \sigma(r) = x.$$

Portanto,  $(\sigma\varphi)\phi = \sigma(\varphi\phi)$ .

- (P<sub>4</sub>) Dado um morfismo  $\phi : (S, s) \rightarrow (T, t)$ , temos que  $\phi(s) = t$ , se os objetos forem  $(S, s)$  e  $(T, t)$ . Além disso, sabemos que existem morfismos identidade  $1_S : S \rightarrow S$  e  $1_T : T \rightarrow T$  tais que  $1_S(s) = s$  e  $1_T(t) = t$ . Dessa forma, temos que para qualquer  $x \in S$  tal que  $f : \{*\} \rightarrow S$  com  $f(*) = x$  segue que:

$$\phi 1_S(x) = \phi(1_S(x)) = \phi(x)$$

e

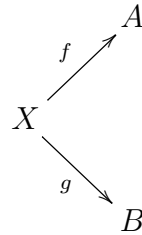
$$1_T \phi(x) = 1_T(\phi(x)) = \phi(x).$$

Os objetos da categoria  $Set^*$  são chamados de *pointed sets*.

Agora realizaremos uma construção parecida com a do exemplo 3.6, porém, considerando dois objetos fixos.

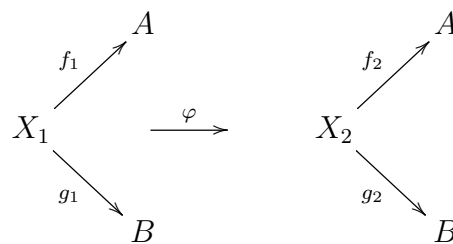
**Exemplo 3.9.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Vamos definir a categoria  $\mathcal{C}_{A,B}$  como:

- $Obj(\mathcal{C}_{A,B})$ : São diagramas em  $\mathcal{C}$  da forma:

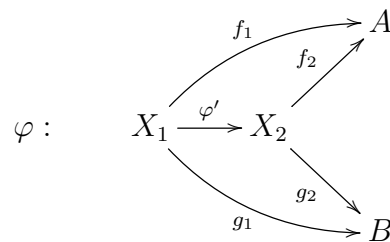


em que  $X$  é um objeto de  $\mathcal{C}$ ,  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$  e  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, B)$ .

- Morfismos: Um morfismo  $\varphi$  entre dois objetos de  $\mathcal{C}_{A,B}$ , digamos:

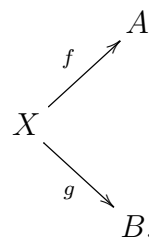


é um diagrama comutativo da forma:

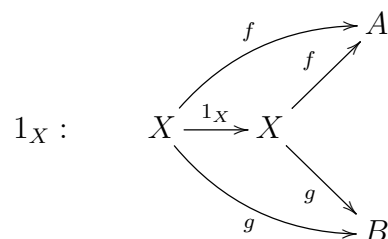


em que  $\varphi' : X_1 \rightarrow X_2$  é um morfismo em  $\mathcal{C}$ .

- ( $P_1$ ) Dado um objeto de  $\mathcal{C}_{A,B}$ , ou seja, um diagrama:

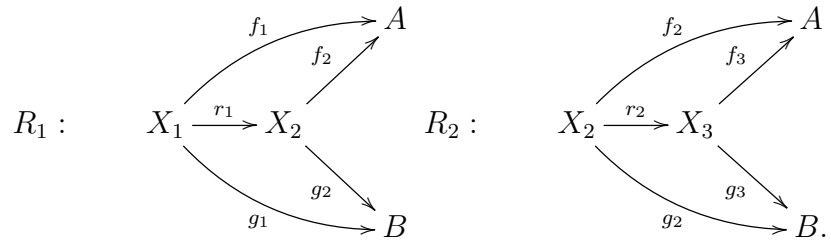


Definiremos como identidade o morfismo desse objeto nele mesmo:

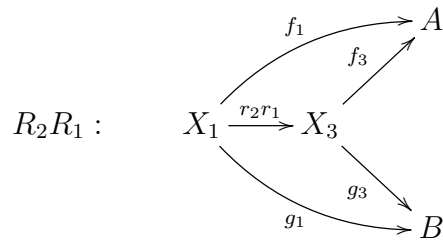


em que  $1_X : X \rightarrow X$  é o morfismo identidade em  $\mathcal{C}$ .

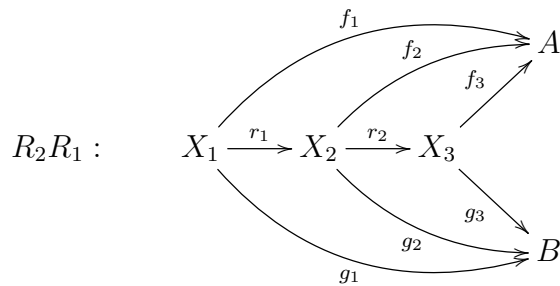
(P<sub>2</sub>) Dados dois morfismos  $R_1$  e  $R_2$  de  $\mathcal{C}_{A,B}$ , digamos :



Definiremos a composição como sendo o morfismo:

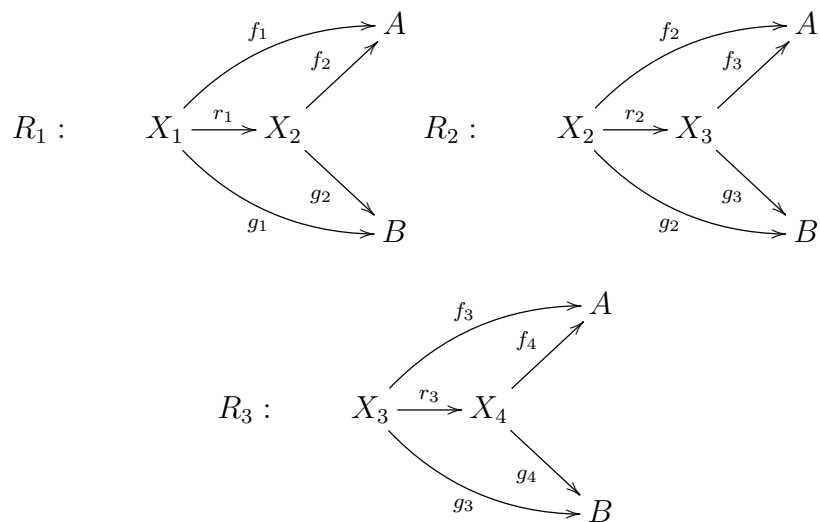


que será escrito como:

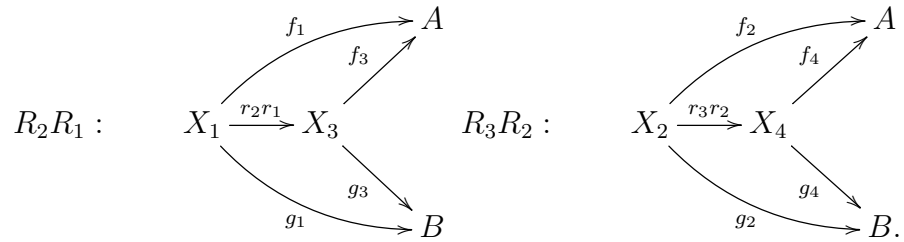


em que  $r_2r_1 : X_1 \rightarrow X_3$  é a composição em  $\mathcal{C}$ .

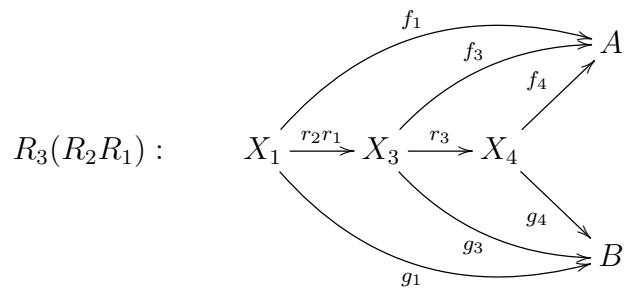
(P<sub>3</sub>) Sejam três morfismos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  de  $\mathcal{C}_{A,B}$ , digamos:



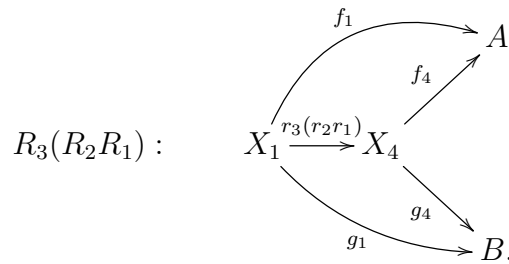
com  $r_1, r_2$  e  $r_3$  morfismos de  $\mathcal{C}$ . Composto os morfismos  $R_2R_1$  e  $R_3R_2$ , obtemos:



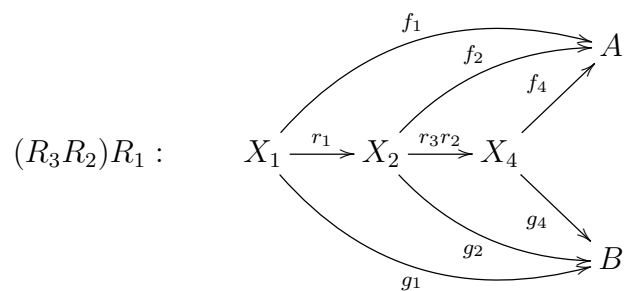
Agora, composto  $R_3(R_2R_1)$  temos:



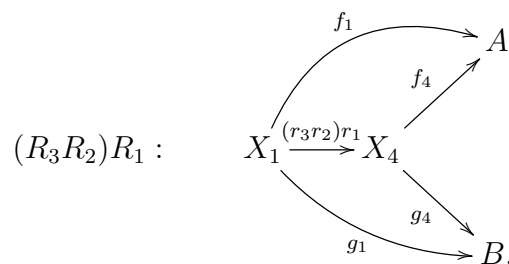
que pela definição de composição resulta em:



Por outro lado, composto  $(R_3R_2)R_1$ , temos:

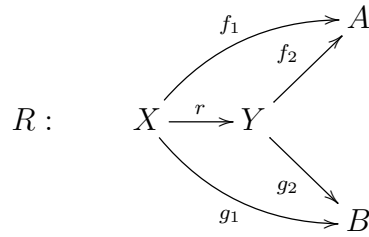


que pela definição de composição resulta em:

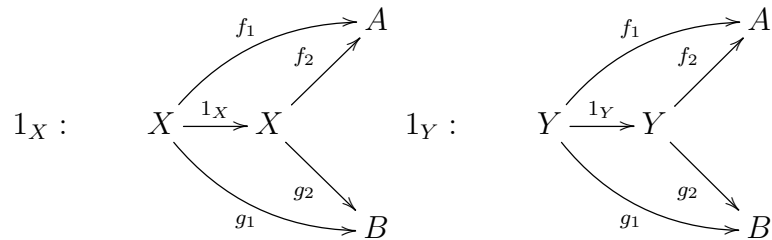


Portanto, segue que  $R_3(R_2R_1) = (R_3R_2)R_1$ , pois os diagramas são comutativos e  $r_3(r_2r_1) = (r_3r_2)r_1$  em  $\mathcal{C}$ .

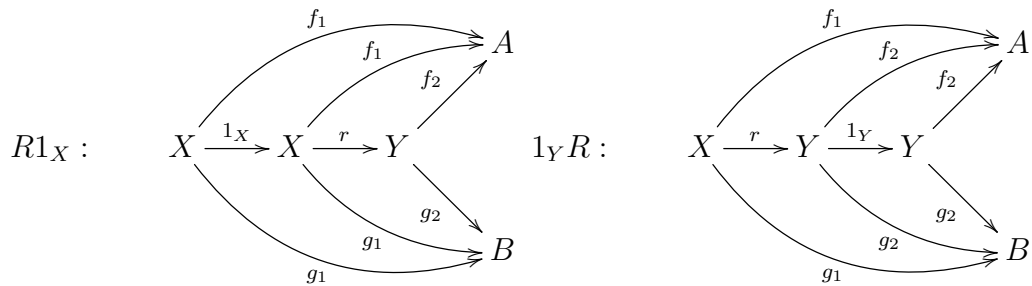
(P<sub>4</sub>) Dado um morfismo  $R$  de  $\mathcal{C}_{A,B}$ , digamos:



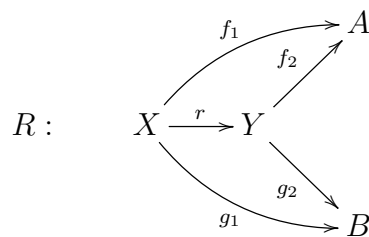
Sabemos pela definição de identidade que existem morfismos  $1_X$  e  $1_Y$  em  $\mathcal{C}_{A,B}$ :



em que  $1_X : X \rightarrow X$  e  $1_Y : Y \rightarrow Y$  são identidades em  $\mathcal{C}$ . Dessa maneira, compondo  $R1_X$  e  $1_Y R$  temos:



que resultam em



pois  $r1_X = r$  e  $1_Y r = r$  em  $\mathcal{C}$ .

Além das construções  $\mathcal{C}_A$  e  $\mathcal{C}_{A,B}$ , podemos definir as categorias  $\mathcal{C}^A$  e  $\mathcal{C}^{A,B}$ . Ambas construções  $\mathcal{C}^A$  e  $\mathcal{C}^{A,B}$  são similares à  $\mathcal{C}_A$  e  $\mathcal{C}_{A,B}$  respectivamente, apenas invertem-se as flechas (morfismos). Por essa razão, tais construções não serão feitas.

**Definição 3.10.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Uma subcategoria  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  consiste em uma coleção de objetos de  $\mathcal{C}$ , com morfismos  $Hom_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , para cada  $A, B \in Obj(\mathcal{C}')$ , tais que a identidade e composição em  $\mathcal{C}$  tornam  $\mathcal{C}'$  uma categoria.

Além disso, uma subcategoria  $\mathcal{C}'$  é dita **completa** se  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , para todo  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$ . Segue um exemplo de uma subcategoria completa.

**Exemplo 3.11.** Considere uma subcategoria  $S_1$  de  $\text{Set}$  em que os objetos são conjuntos finitos e os morfismos são funções entre esses conjuntos.

A categoria acima herda as propriedades de  $\text{Set}$ , a diferença é que consideramos apenas os conjuntos finitos como objetos. Dados dois conjuntos finitos, os morfismos entre esses conjuntos em  $S_1$  são exatamente iguais aos da categoria  $\text{Set}$ , portanto, dizemos que essa é uma subcategoria completa de  $\text{Set}$ .

Agora, um exemplo de uma subcategoria não completa.

**Exemplo 3.12.** Considere uma subcategoria  $S_2$  de  $\text{Set}$  em que os objetos são conjuntos e os morfismos são funções injetoras entre esses conjuntos. Essa categoria herda as propriedades de  $\text{Set}$  e preserva a injetividade das funções na composição, porém,  $S_2$  possui menos morfismos que  $\text{Set}$ , pois estamos apenas considerando as funções injetoras.

Dizemos então que  $S_2$  é uma subcategoria não completa de  $\text{Set}$ .

## 4 Morfismos

Nesse capítulo serão destacadas algumas das propriedades de morfismos. Da mesma maneira que funções em  $Set$  possuem propriedades como: injetividade, sobrejetividade e isomorfismo, podemos definir tais propriedades de morfismos para uma categoria qualquer através de um outro ponto de vista.

Começaremos definindo injetividade e sobrejetividade para morfismos em uma categoria arbitrária, porém, não podemos definir da mesma maneira que nas Definições 2.4 e 2.5, pois tais definições necessitam que os morfismos sejam funções entre conjuntos. Dessa forma, utilizaremos a noção de monomorfismo e epimorfismo já vista no Capítulo 2.

**Definição 4.1.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Um morfismo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  é dito ser um **monomorfismo** se:

para todo objeto  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , e morfismos  $\alpha', \alpha'' \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$ , tivermos que

$$f\alpha' = f\alpha'' \Rightarrow \alpha' = \alpha''.$$

Perceba que essa definição de monomorfismo é equivalente à Definição 2.12, no caso de  $\mathcal{C} = Set$ , porém de maneira generalizada.

**Definição 4.2.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Um morfismo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  é dito ser um **epimorfismo** se:

para todo objeto  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , e morfismos  $\beta', \beta'' \in Hom_{\mathcal{C}}(B, Z)$  tivermos que

$$\beta'f = \beta''f \Rightarrow \beta' = \beta''.$$

Da mesma maneira, temos que essa definição de epimorfismo é equivalente à definição 2.14, no caso de  $\mathcal{C} = Set$ .

Além de monomorfismos e epimorfismos, podemos pensar em inversas à esquerda e à direita. Para isso, utilizamos a ideia de retrações e seções que são equivalentes à inversa a esquerda e a direita respectivamente.

**Definição 4.3.** Dados morfismos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$ , se  $gf = 1_A$ , então  $g$  é dito ser uma **retração** do morfismo  $f$ , e  $f$  é dito ser uma **seção** do morfismo  $g$ .

Como resultado da definição acima, podemos afirmar que, se um morfismo é uma seção, então esse morfismo é um monomorfismo.



De fato, suponha que  $f : A \rightarrow B$  seja seção de um morfismo  $g : B \rightarrow A$ . Então, o morfismo  $g$  é uma retração de  $f$ , ou seja,  $gf = 1_A$ .

Agora suponha que existam morfismos  $\alpha_1, \alpha_2 : Z \rightarrow A$  tais que

$$f\alpha_1 = f\alpha_2.$$

Então, compondo  $g$  à esquerda temos

$$g(f\alpha_1) = g(f\alpha_2)$$

que implica em

$$(gf)\alpha_1 = (gf)\alpha_2$$

resultando em

$$1_A\alpha_1 = 1_A\alpha_2$$

e por fim

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Portanto,  $f$  é monomorfismo.

Seguindo a mesma lógica vista acima, podemos mostrar que se um morfismo for uma retração, então ele é epimorfismo. Equivalente ao Corolário 2.11, temos que um morfismo é dito ser isomorfismo se possuir inversa à esquerda e à direita.

**Definição 4.4.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Um morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  é dito ser um **isomorfismo** se existir um morfismo  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  tal que

$$gf = 1_A \quad \text{e} \quad fg = 1_B.$$

O morfismo  $g$  é chamado de um inverso de  $f$ .

**Proposição 4.5.** *Um isomorfismo admite um único inverso.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  um isomorfismo. Suponha que existam  $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  tais que

$$fg_1 = 1_B = fg_2 \quad \text{e} \quad g_1f = 1_A = g_2f.$$

Então,

$$g_1 = g_11_B = g_1(fg_2) = (g_1f)g_2 = 1_Ag_2 = g_2$$

o que mostra que o inverso é único, como queríamos provar.  $\square$

Da proposição acima, sabemos que o inverso de um isomorfismo  $f$  é único, por essa razão, denotamos o inverso por  $f^{-1}$ .

**Proposição 4.6.** *Considerando as notações escritas acima,*

1. *Toda identidade  $1_A$  é um isomorfismo, cujo inverso é o próprio  $1_A$ .*
2. *Se  $f$  é um isomorfismo, então  $f^{-1}$  é isomorfismo e  $(f^{-1})^{-1} = f$ .*
3. *Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  são isomorfismos, então a composição  $gf$  é isomorfismo e  $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ .*

*Demonstração.*

1. Dado uma identidade  $1_A$ , compomos  $1_A 1_A$  que resulta em  $1_A$  pela definição de identidade. Dessa maneira, temos que  $1_A$  é o inverso dele mesmo, e portanto é isomorfismo.
2. Se  $f$  é isomorfismo, existe uma inversa  $f^{-1}$  tal que  $ff^{-1} = Id_1$  e  $f^{-1}f = Id_2$ , ou seja,  $f$  é a inversa de  $f^{-1}$ . Portanto  $f^{-1}$  é isomorfismo
3. Como  $f$  e  $g$  são isomorfismos, existem inversas  $f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  e  $g^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$ , tais que  $ff^{-1} = 1_B$ ,  $f^{-1}f = 1_A$ ,  $gg^{-1} = 1_C$  e  $g^{-1}g = 1_B$ . Além disso,  $f^{-1}g^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ . Dessa forma, temos que:

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g(1_B g^{-1}) = gg^{-1} = 1_C$$

e

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}(1_B f) = f^{-1}f = 1_A.$$

Portanto  $f^{-1}g^{-1}$  é a inversa de  $gf$ , logo,  $gf$  é isomorfismo.

□

Além disso, dois objetos de uma categoria, digamos  $A$  e  $B$ , são ditos **isomorfos** se existe um isomorfismo  $f : A \rightarrow B$ . Da mesma forma que na Definição 2.6, se  $A$  e  $B$  são isomorfos, escrevemos  $A \cong B$ .

**Exemplo 4.7.** Os isomorfismos na categoria *Set* são as bijeções, ou seja, funções que possuem inversa à direita e à esquerda, como visto no Corolário 2.11.

## 5 Propriedades Universais

Categorias oferecem uma linguagem unificadora, nos dando uma visão ampla sobre várias construções em Álgebra e outras áreas.

Além disso, a descrição explícita de um objeto pode ser útil para argumentos matemáticos, porém, como regra, são as propriedades universais que mostram a real natureza das construções. Em alguns casos (como por exemplo na União Disjunta) a descrição do objeto necessita da escolha de elementos arbitrários, enquanto em termos de propriedades universais não há tal restrição.

Outro fato interessante é que algumas relações entre construções se tornam mais claras quando vistas em termos de propriedades universais. Um exemplo: Produtos de conjuntos e União Disjunta são construções espelhadas, no sentido que revertendo as flechas, a propriedade universal de uma se transforma na outra.

Neste capítulo serão vistas as definições de objeto inicial, final, produtos, coprodutos e exemplos de propriedades universais que utilizam conteúdos já vistos nos capítulos anteriores.

**Definição 5.1.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Um objeto  $I$  de  $\mathcal{C}$  é dito **inicial** em  $\mathcal{C}$  se, para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ , existe um único morfismo  $I \rightarrow A$  em  $\mathcal{C}$ :

$$\text{para todo } A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A) \text{ é unitário.}$$

Dizemos que um objeto  $F$  de  $\mathcal{C}$  é **final** em  $\mathcal{C}$  se para todo objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  existir exatamente um morfismo  $A \rightarrow F$  em  $\mathcal{C}$ :

$$\text{para todo } A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, F) \text{ é unitário.}$$

Um objeto é chamado **objeto terminal** quando o mesmo é um objeto inicial ou final. Uma categoria pode ter ou não ter objetos iniciais ou finais.

**Exemplo 5.2.** Considere a categoria construída no Exemplo 3.7. Essa categoria não possui objeto inicial nem objeto final, pois para ter um objeto inicial, deveria existir um número inteiro  $x$  tal que  $x \leq a, \forall a \in \mathbb{Z}$ , porém, tal inteiro não existe. De maneira similar, não existe objeto final, pois não existe um inteiro maior que todos os outros.

No caso em que fixamos um número inteiro, como na categoria  $\mathcal{C}_5$ , temos que essa categoria possui objeto inicial.

Além disso, quando objetos iniciais e finais existem, eles podem não ser únicos.

**Exemplo 5.3.** Na categoria  $Set$ , o conjunto vazio é inicial, e é o único conjunto que satisfaz esse requerimento. A categoria  $Set$  também possui objeto final: para cada conjunto  $A$ , existe uma única função de  $A$  em um conjunto unitário, digamos  $\{*\}$ . Todos os conjuntos unitários são objetos finais em  $Set$ .

Ademais, se objetos iniciais/finais existem, então são únicos a menos de isomorfismos.

**Proposição 5.4.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria.*

1. *Se  $I_1, I_2$  são objetos iniciais em  $\mathcal{C}$ , então  $I_1 \cong I_2$ .*
2. *Se  $F_1, F_2$  são objetos finais em  $\mathcal{C}$ , então  $F_1 \cong F_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Para cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  existe pelo menos um elemento de  $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ , chamado identidade  $1_A$ .

Se  $I$  é inicial em  $\mathcal{C}$ , então existe um único morfismo  $I \rightarrow I$  que deve ser a identidade  $1_I$ .

Suponha que  $I_1$  e  $I_2$  são objetos iniciais em  $\mathcal{C}$ . Como  $I_1$  é inicial, existe um único morfismo  $f : I_1 \rightarrow I_2$  em  $\mathcal{C}$ , e como  $I_2$  é inicial, existe um único morfismo  $g : I_2 \rightarrow I_1$  em  $\mathcal{C}$ . Compondo  $gf : I_1 \rightarrow I_1$ , obtemos

$$gf = 1_{I_1},$$

pois  $I_1$  é inicial. Da mesma maneira, compondo  $fg : I_2 \rightarrow I_2$ , obtemos

$$fg = 1_{I_2}$$

mostrando assim que  $f$  é um isomorfismo. Portanto  $I_1 \cong I_2$ .

Para objetos finais, a demonstração é análoga:

Se  $F$  é um objeto final em  $\mathcal{C}$ , então existe um único morfismo de  $F \rightarrow F$ , que deve ser a identidade  $1_F$ .

Suponha que  $F_1$  e  $F_2$  são objetos finais em  $\mathcal{C}$ . Como  $F_1$  é final em  $\mathcal{C}$ , existe um único morfismo  $f : F_2 \rightarrow F_1$  em  $\mathcal{C}$  e como  $F_2$  é final em  $\mathcal{C}$ , existe um único morfismo  $g : F_1 \rightarrow F_2$  em  $\mathcal{C}$ . Compondo  $gf : F_2 \rightarrow F_2$ , obtemos

$$gf = 1_{F_2}$$

pois  $F_2$  é final. Da mesma maneira, compondo  $fg : F_1 \rightarrow F_1$ , obtemos

$$fg = 1_{F_1}$$

mostrando assim que  $f$  é isomorfismo. Portanto  $F_1 \cong F_2$ .

□

Dizemos que uma estrutura satisfaz uma **propriedade universal** quando pode ser vista como um objeto terminal de uma categoria. Geralmente descreve-se uma propriedade universal como uma afirmação.

Constantemente as afirmações de propriedades universais seguem o seguinte padrão: “O objeto  $X$  é universal com respeito a seguinte propriedade: para todo  $Y$  tal que... , existe um único morfismo  $Y \rightarrow X$  tal que...”, de maneira que a categoria utilizada, e a afirmação que  $X$  é terminal não aparecem explicitamente. Segue um exemplo:

**Exemplo 5.5.** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência definida em um conjunto  $A$ . Observe a afirmação:

“O quociente  $A/\sim$  é universal com respeito a propriedade que associa  $A$  a um conjunto em que os elementos equivalentes tenham a mesma imagem.”

Nesse caso, trata-se de funções

$$f : A \xrightarrow{\varphi} Z$$

em que  $Z$  é um conjunto arbitrário satisfazendo a seguinte propriedade:

$$a' \sim a'' \Rightarrow \varphi(a') = \varphi(a''),$$

com  $a', a'' \in A$ .

Os morfismos  $f$  acima são objetos de uma categoria, que chamaremos de  $\mathcal{C}$ , (similar a do exemplo 3.6) e serão denotados por  $(\varphi, Z)$ . Desta forma, definimos os morfismos dessa categoria:

$$(\varphi_1, Z_1) \rightarrow (\varphi_2, Z_2)$$

como diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{z} & Z_2 \\ \swarrow \varphi_1 & & \nearrow \varphi_2 \\ & A & \end{array}$$

Denotando por  $\pi$ , a projeção canônica  $(\pi, A/\sim)$ , definida no exemplo 2.16, é um objeto inicial da categoria acima.

*Demonstração.* Seja  $(\varphi, Z)$  um objeto de  $\mathcal{C}$ . Queremos mostrar que existe um único morfismo  $\bar{\varphi} : (\pi, A/\sim) \rightarrow (\varphi, Z)$ , que faça o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} A/\sim & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & Z \\ \swarrow \pi & & \nearrow \varphi \\ & A & \end{array}$$

Seja  $[a]_\sim$  um elemento qualquer de  $A/\sim$ . Se o diagrama comutar, então devemos ter

$$\bar{\varphi}([a]_\sim) = \varphi(a).$$

Precisamos mostrar que a função  $\bar{\varphi} : A/\sim \rightarrow Z$  está bem definida, ou seja, se  $[a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim}$ , então  $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ . Suponha que

$$[a_1]_{\sim} = [a_2]_{\sim}$$

então, pela definição de classes de equivalência temos que

$$a_1 \sim a_2$$

e pela hipótese do problema,  $Z$  satisfaz que

$$a_1 \sim a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2).$$

Portanto, a função  $\bar{\varphi}$  está bem definida. Agora, mostraremos a unicidade de  $\bar{\varphi}$ .

Suponha que exista  $\Psi : (\pi, A/\sim) \rightarrow (\varphi, Z)$ , que faça o diagrama comutar. Então

$$\Psi([a]_{\sim}) = \Psi(\pi(a)) = \varphi(a) = \bar{\varphi}(\pi(a)) = \bar{\varphi}([a]_{\sim}).$$

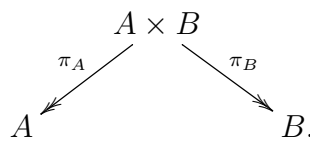
Portanto, temos a unicidade de  $\varphi$ . □

Observe que o problema não deixa explícito qual categoria foi utilizada, nem que deve-se por atenção no objeto inicial dessa categoria, e por fim, temos que a solução deste problema de propriedades universais não é  $A/\sim$  e sim o morfismo  $\pi : A \rightarrow A/\sim$ .

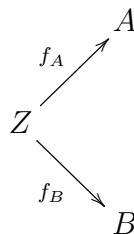
## 5.1 Produtos

Segue mais uma propriedade universal:

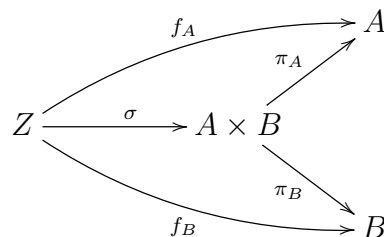
Sejam  $A, B$  conjuntos, e  $A \times B$  o produto desses conjuntos juntamente com suas projeções naturais  $\pi_A$  e  $\pi_B$ :



Então, para todo conjunto  $Z$  e morfismos  $f_A : Z \rightarrow A, f_B : Z \rightarrow B$ :



existe um único morfismo  $\sigma : Z \rightarrow A \times B$  tal que o diagrama



comuta. Neste caso, denotamos  $\sigma$  por  $f_A \times f_B$ .

*Demonstração.* Defina para qualquer  $z \in Z$

$$\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z)).$$

Observe que essa função faz o diagrama comutar, pois, para qualquer  $z \in Z$

$$\pi_A \sigma(z) = \pi_A(f_A(z), f_B(z)) = f_A(z)$$

e

$$\pi_B \sigma(z) = \pi_B(f_A(z), f_B(z)) = f_B(z)$$

mostrando assim que  $\pi_A \sigma = f_A$  e  $\pi_B \sigma = f_B$ .

Agora vamos mostrar a unicidade de  $\sigma$ . Suponha que exista  $\Psi : Z \rightarrow A \times B$  tal que o diagrama seja comutativo. Dessa forma, temos que, para todo  $x \in Z$ :

$$\pi_A \Psi(x) = f_A(x) = \pi_A \sigma(x)$$

e

$$\pi_B \Psi(x) = f_B(x) = \pi_B \sigma(x).$$

Observe que as projeções são iguais em ambos lados da igualdade, mostrando assim que  $\sigma = \Psi$  e portanto, temos a unicidade de  $\sigma$ .

□

Ou seja, os produtos de conjuntos são objetos finais na categoria  $\mathcal{C}_{A,B}$  (Exemplo 3.9), para o caso de  $\mathcal{C} = Set$ .

A vantagem de analisar produtos através de propriedades universais, é que podemos utilizar tais propriedades em qualquer categoria, enquanto a definição de produto (Definição 1.7) só faz sentido em  $Set$ .

**Definição 5.6.** Dizemos que uma categoria  $\mathcal{C}$  possui **produtos finitos**, ou é uma categoria **com produtos finitos**, se para quaisquer objetos  $A, B$  em  $\mathcal{C}$ , a categoria  $\mathcal{C}_{A,B}$  possui objetos finais.

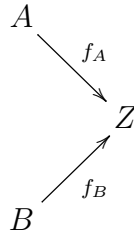
Tal objeto final consiste da informação de um objeto de  $\mathcal{C}$ , geralmente denotado por  $A \times B$  juntamente com dois morfismos  $A \times B \rightarrow A$  e  $A \times B \rightarrow B$ .

## 5.2 Coprodutos

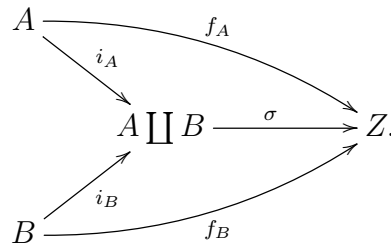
Como mostramos anteriormente, produtos são objetos finais na categoria  $\mathcal{C}_{A,B}$ .

Em contrapartida, temos que coprodutos serão objetos iniciais na categoria  $\mathcal{C}^{A,B}$ .  
 Segue a propriedade universal:

Sejam  $A, B$  objetos de uma categoria  $\mathcal{C}$ . Um **coproduto**  $A \amalg B$  de  $A$  e  $B$  será um objeto de  $\mathcal{C}$ , composto por dois morfismos  $i_A : A \rightarrow A \amalg B$ ,  $i_B : B \rightarrow A \amalg B$ , e satisfazendo a seguinte propriedade universal: para quaisquer objetos  $Z$  e morfismos  $f_A : A \rightarrow Z$ ,  $f_B : B \rightarrow Z$ :



existe um único morfismo  $\sigma : A \amalg B \rightarrow Z$  tal que o seguinte diagrama comute



Dizemos que uma categoria  $\mathcal{C}$  possui **coprodutos finitos** se o problema universal acima possuir solução para cada par  $A, B$  de objetos.

**Proposição 5.7.** *A União Disjunta é um coproduto na categoria Set.*

*Demonstração.* Como visto na Definição 1.6, a União Disjunta é definida como a união de duas cópias disjuntas e isomórficas  $A', B'$  de  $A$  e  $B$  respectivamente.

Seja  $A' = \{0\} \times A$  e  $B' = \{1\} \times B$ . As funções  $i_A, i_B$  são definidas por

$$i_A(a) = (0, a) \text{ e } i_B(b) = (1, b)$$

em que vemos esses elementos como elementos de  $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ .

Agora, dados morfismos arbitrários  $f_A : A \rightarrow Z$  e  $f_B : B \rightarrow Z$ , definiremos

$$\sigma : A \amalg B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B) \rightarrow Z$$

por

$$\sigma(c) = \begin{cases} f_A(a), & \text{se } c = (0, a) \in \{0\} \times A \\ f_B(b), & \text{se } c = (1, b) \in \{1\} \times B. \end{cases}$$

Observe que, dado  $a \in A$  e  $b \in B$ ,

$$\sigma i_A(a) = \sigma((0, a)) = f_A(a)$$



e

$$\sigma i_B(b) = \sigma((1, b)) = f_B(b).$$

Agora queremos mostrar que  $\sigma$  é única. Suponha que exista um outro morfismo  $\psi : A \amalg B \rightarrow Z$  que faça o diagrama comutar. Então, dado  $c \in A \amalg B$  temos que  $c = (0, a)$  ou  $c = (1, b)$ , para algum  $a \in A$  e  $b \in B$ , portanto

$$\psi(c) = \psi((0, a)) = \psi i_A(a) = f_A(a) = \sigma i_A(a)$$

e

$$\psi(c) = \psi((1, b)) = \psi i_B(b) = f_B(b) = \sigma i_B(b).$$

Como as inclusões são iguais, segue que  $\psi = \sigma$ , e portanto temos a unicidade de  $\sigma$ .

□

Com essa proposição vimos que a categoria *Set* possui coprodutos. Além disso, diferentes escolhas de uniões disjuntas nos levam a noções isomórficas, pois objetos terminais de uma categoria são únicos a menos de isomorfismo, como visto na Proposição 5.4.

## Considerações Finais

A teoria de categorias pode ser considerada nova na matemática, pois foi apresentada pela primeira vez em 1945 e por essa razão, ainda há muito o que ser estudado nessa área. Para estudantes que desejam começar tal estudo, não há outra maneira que não seja começar aprendendo inicialmente o que é uma categoria, como construí-la, como funcionam propriedades universais e por aí em diante.

O estudo realizado proporciona uma base para estudos futuros em categorias, por isso o enfoque nas construções de categorias e em propriedades universais mais básicas. Além disso também há de se destacar a importância de certos conjuntos, que como pôde ser visto, foram utilizados para definir categorias e para enriquecer o estudo.

Apenas estudando alguns conjuntos e categorias, já pôde-se ver através de propriedades universais que as estruturas tem relações interessantes entre si, como isomorfismos e simetrias, agora imagine quais relações podem aparecer aplicando tais conceitos em outros campos da matemática?

Partindo do conhecimento obtido aqui, há a possibilidade de estudar funtores, e então transformações naturais, ou até se aprofundar no estudo das propriedades universais, possibilitando futuramente ao estudante relacionar objetos de áreas distintas através de suas estruturas.

# Referências

- ALUFFI, P. *Algebra: Chapter 0: Chapter 0*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 104.
- BORCEUX, F. *Handbook of categorical algebra: volume 1, Basic category theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. v. 1.
- EILENBERG, S.; MACLANE, S. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 58, n. 2, p. 231–294, 1945.
- LAWVERE, F. W.; SCHANUEL, S. H. *Conceptual mathematics: a first introduction to categories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- MITCHELL, B. *Theory of categories*. [S.l.]: Academic Press, 1965. v. 17.