UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ana Carolina Altomani

Grupos Fundamentais, Espaços de Recobrimento e Aplicações

Florianópolis

2019

Ana Carolina Altomani

Grupos Fundamentais, Espaços de Recobrimento e Aplicações

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de "Bacharela em Matemática", e aprovado em sua forma final pelo Departamento de Matemática

Florianópolis, 20 de Novembro 2019

Prof. Dra. Sílvia Martini de Holanda
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Marianna Ravara Vago

Prof. Dr. Marianna Ravara Vago
Orientador

Eduardo Tengan.

Prof. Dr. Eduardo Tengan

Prof. Dr. Sérgio Tadao

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a meus pais, Marisa Felix Teixeira Altomani e Domingos Altomani Neto, por serem minha maior fonte de inspiração e meus maiores exemplos de trabalho árduo e integridade. Agradeço especialmente por todo o amor que me deram ao longo dos meus 23 anos de vida e por tudo que me ensinaram, pois não há dúvidas de que eu não teria chegado aqui sem vocês. Agradeço também ao meu irmão, Vinicius Felix Altomani, por ser não só um irmão e um ombro de apoio, mas também um grande amigo, sempre presente. Agradeço também meu namorado, Vinicius Feldstein Haddad, por todo o apoio, amor e companheirismo ao longo dos últimos anos.

Agradeço aos amigos que o curso de matemática me trouxe, por terem tornado os últimos anos infinitamente mais divertidos e leves. Destes, agradeço especialmente a André Borges Carlos, Bruna da Silva Donadel e Letícia Figueredo de Carvalho, por me acompanharem com tanta intensidade. Agradeço a Tainá de Oliveira Johnson, pela amizade que infelizmente esperou até o último ano de faculdade para desabrochar. Agradeço do fundo do coração a Ben-Hur Eidt, Carlos Eduardo Caldeira, Carlos Eduardo Leal de Castro, Gabriel Simon Schafaschek, Isabele Sartor, Luis Eduardo Fritsch e Mateus Oliveira pelas amizades que surgiram no PET e jamais serão esquecidas.

Agradeço às amigas que as aulas de vôlei me proporcionaram, por tornarem cada semana mais divertida, pelas risadas e pelas memórias inesquecíveis. Agradeço especialmente a Diana Koch, Alycya Martins, Lara Zacchi e Sabine Reinert.

Agradeço aos amigos que me acompanham desde Campinas, Bruna Lima Vieira, Caio de Carvalho e Matheus Haddad e, especialmente, a Elisa Raymundo Lopes, por ter se tornado mais que uma amiga, mas também uma companheira de casa e uma irmã de coração, estando presente nos melhores e nos piores momentos da minha graduação.

Finalmente, agradeço à Professora Marianna Ravara Vago por me transmitir seu amor pela Geometria e por fazer eu me apaixonar cada vez mais pela ciência fantástica que é a matemática. Muito obrigada por tornar a construção deste TCC uma das melhores experiências acadêmicas que já tive.

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso estudamos Grupos Fundamentais e Espaços de Recobrimento usando como motivação alguns exemplos de natureza mais geométrica. Os temas estudados neste trabalho, além de interessantes por si só, são relevantes por exibirem a conexão entre álgebra e geometria em um nível compreensível a um aluno de graduação. Na primeira parte damos a definição do grupo fundamental e estudamos suas propriedades. Vimos que o grupo fundamental da circunferência é isomorfo a $\mathbb{Z}$, e usamos este resultado para mostrar que o grupo fundamental do cilindro também é isomorfo a $\mathbb{Z}$, enquanto o grupo fundamental do toro é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Na segunda parte do trabalho vimos a definição de recobrimento. Apresentamos exemplos de recobrimentos da circunferência, e finalizamos o capítulo com um bonito exemplo de recobrimento do cilindro e do toro, obtido através da Folheação de Reeb.

Palavras-chave: Homotopia de caminhos; Grupo Fundamental; Homeomorfismo local; Espaço de Recobrimento.

Abstract

In this work we studied the Fundamental Group and Covering Spaces using as motivation some examples of a more geometric nature. The topics studied, while being interesting on their own, are also relevant because they show the connection between algebra and geometry at a level that an undergraduate student may understand. In the first part of this work we give the definition on the fundamental group and study its properties. We show that the fundamental group of the circumference is isomorphic to $\mathbb{Z}$, and we use this result to show that the fundamental group of the cylinder is also isomorphic to $\mathbb{Z}$, whereas the fundamental group of the torus is isomorphic to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. in the second part of this work we give the definition of a covering space. We give examples of coverings of the circumference, and we finish this work exhibiting an example of covering for the cylinder and the torus obtained using the Reeb Foliation.

KEYWORDS: Path homotopy; Fundamental Group; Local homeomorphism; Covering Space.

Sumário

Introdução

Como estudar o "formato" de um espaço topológico X? Sob que circunstâncias dois espaços topológicos X e Y são "parecidos"? Para responder a perguntas desta natureza utilizamos o conceito de Grupo Fundamental, uma ideia central da Topologia. O estudo desta estrutura permite tirar conclusões sobre a "forma" de um espaço topológico ao analisar o comportamento de caminhos fechados dentro dele, assim como uma maneira de afirmar quando dois espaços "têm a mesma forma".

Veremos que, formalmente, dois espaços que "têm a mesma forma" são ditos homeomorfos. De um ponto de vista topológico, são indistinguíveis.

Os objetos básicos no estudo do grupo fundamental são os caminhos: funções contínuas do intervalo $I = [0, 1]$ no espaço topológico X. O que torna um caminho especial? Faz alguma diferença escolher um caminho específico para verificar uma certa propriedade de X, ou chegaríamos ao mesmo resultado utilizando outro caminho "devidamente parecido"? Quando dois caminhos são "devidamente parecidos"?

Formalmente, veremos que dois caminhos são "devidamente parecidos" quando existe uma deformação contínua levando um caminho no outro; esta deformação é chamada homotopia, e dizemos que os caminhos são homotópicos. Concluímos, de maneira intuitiva, que não importa muito o caminho determinado, já que é possível "amassá-lo", se necessário. Formalmente, dizemos que caminhos homotópicos estão na mesma classe de equivalência.

Agora, o que acontece se sairmos de um ponto em X, "dermos uma volta" pelo espaço e retornarmos ao ponto de partida? Será que o trajeto percorrido encerra uma região de X? A resposta, naturalmente, depende de X. Se for positiva, então "não tem muita graça"; essencialmente, é como se tivéssemos ficado parados. Porém, se a resposta for negativa, então "algo especial acontece em X"; um buraco, uma alça, ou algo pior...

Formalmente, buscamos informações que um caminho fechado em X pode fornecer. Melhor dizendo, informações que a classe de equivalência deste caminho pode fornecer. Bem, a estrutura que utilizamos como ferramenta para isto é o Grupo Fundamental de X. Podemos dizer que o grupo fundamental traduzirá para uma linguagem algébrica as informações obtidas "ao se dar um passeio em X" ao longo de um caminho fechado. Este estudo constitui a primeira parte do nosso trabalho.

A segunda parte é dedicada a estudar Espaços de Recobrimento. Estas estruturas são mais refinadas e possuem muitas aplicações em Geometria e Topologia, porém aqui não faremos um estudo extenso. No lugar disso, focaremos em oferecer exemplos bonitos e interessantes.

Além de serem interessantes por si só, grupos fundamentais e espaços de recobrimento são tópicos que ligam álgebra e geometria. A álgebra é a ferramenta utilizada para formalizar todas as afirmações (de natureza geométrica) feitas entre aspas nesta introdução, e este é exatamente o objetivo deste trabalho.

Objetivos e Metodologia

Como dito na Introdução, o presente trabalho tem como objetivo apresentar ao leitor teorias referentes a Grupos Fundamentais e a Espaços de Recobrimento de maneira intuitiva e simples, exibindo resultados elementares e diversos exemplos e figuras. Os conceitos estudadas permitirão relacionar os campos matemáticos de Álgebra, Topologia e Geometria, exibindo a importância desses campos de estudo na classificação e caracterização de espaços topológicos e superfícies.

Utilizamos a metodologia padrão para produção de trabalhos em matemática pura. A bibliografia principal foi o livro "Grupos Fundamentais e Espaços de Recobrimento", de Elon Lages Lima (LIMA, 2006). Alguns conceitos básicos de álgebra necessários foram retirados de (LANG, 2008). Para os conceitos básicos de topologia, utilizamos também (LIMA, 2009) e (MUNKRES, 2000). Para os conceitos básicos de geometria diferencial, nos baseamos em (CARMO, 2010). Além disso, serviram como bibliografia (CAMACHO; LINS-NETO, 1979), (LIMA, 1987) e (MASSEY, 1967).

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi estudado por um período de dois semestres, de março a dezembro de 2019.

1 Conceitos Introdutórios

Neste capítulo fazemos uma breve revisão de conceitos de álgebra, topologia e geometria diferencial que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Noções básicas de álgebra

As definições exibidas a seguir foram baseadas em (LANG, 2008).

Definição 1. Um Grupo $(G, *)$ é um conjunto G munido de uma operação $*$ que, a cada par de elementos $x, y \in G$, associa um elemento de G, denotado por $x * y$, que satisfaz as seguintes condições:

G1. Para quaisquer $x, y, z \in G$, a operação $*$ é associativa, ou seja, $(x * y) * z = x * (y * z)$

G2. Existe um elemento e de G tal que $e * x = x * e = x$, para todo $x \in G$. Este elemento é chamado de Unidade.

G3. Se x é um elemento de G, então existe um elemento y de G tal que $x * y = y * x = e$.

No decorrer deste trabalho, os grupos serão frequentemente tratados como *grupos multiplicativos*. Nesta notação, o símbolo da operação $*$ é omitido, de maneira que o grupo $(G, *)$ será chamado apenas de grupo G e a operação $x * y$ será denotada apenas por xy.

Definição 2. Seja G um grupo e H um subconjunto de G. Dizemos que H é um subgrupo se ele contiver o elemento unidade e se, dados $x, y \in H$, xy e x^{-1} também forem elementos de H. Desta forma, H é um grupo, e sua operação é a mesma de G.

Definição 3. Seja G um grupo. Se $xy = yx$ para todo $x, y \in G$, dizemos que G é um grupo abeliano.

Definição 4. Seja G um grupo. Dizemos que G é cíclico se existe um elemento $a \in G$ tal que todo elemento $x \in G$ pode ser escrito na forma a^n, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Uma grande parte da teoria de grupos consiste em definir relações entre grupos. Essas relações permitem estabelecer semelhanças entre os diferentes grupos, além de facilitar a classificação dos mesmos. Um dos conceitos mais importantes para o estudo da teoria de grupos fundamentais é o de *isomorfismo de grupos*, apresentado a seguir.

Definição 5. Sejam G e G' grupos. Um homomorfismo $f : G \to G'$ é uma aplicação dotada da seguinte propriedade: para todo $x, y \in G$ temos $f(xy) = f(x)f(y)$.

Um homomorfismo f é dito *injetor* se o núcleo de f for o conjunto unitário $\{e\}$, em que o núcleo de f é dado por

$$Ker(f) = \{x \in G : f(x) = e'\},$$

sendo e' a unidade de G'. Um homomorfismo é *sobrejetor* se para cada $x' \in G'$ existe um $x \in G$ tal que $f(x) = x'$. Um homomorfismo injetor e sobrejetor é dito *bijetor*.

Definição 6. Seja $f : G \to G'$ um homomorfismo. Dizemos que f é um isomorfismo se existe um homomorfismo $g : G' \to G$ tal que $f \circ g$ é a aplicação identidade de G' e $g \circ f$ é a aplicação identidade de G.

Em outras palavras, uma aplicação $f : G \to G'$ é um isomorfismo se f for um homomorfismo bijetor. Dizemos que G e G' são isomorfos e escrevemos $G \cong G'$.

1.2 Noções básicas de Topologia

As definições abaixo foram baseadas em (LIMA, 2009) e em (MUNKRES, 2000).

Definição 7. Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X – denominados conjuntos abertos segundo a topologia τ – satisfazendo as seguintes condições:

i. $X, \emptyset$ são abertos;

ii. A união de uma família qualquer de abertos é um aberto;

iii. A interseção de uma família finita de abertos é um aberto.

Definição 8. Um espaço topológico é um par (X, τ), em que X é um conjunto e τ é uma topologia em X.

Neste trabalho vamos admitir que um conjunto X já está munido de uma topologia τ. Mais especificamente, nos capítulos seguintes deste trabalho utilizaremos as topologias usuais de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e seus subespaços. Passaremos a falar apenas de um *espaço topológico* X.

Definição 9. Sejam X um espaço topológico e $A, F \subset X$. Dizemos que A é aberto em X se A é um elemento de τ. Dizemos que F é fechado em X Sejam X um espaço topológico e $A, F \subset X$. Dizemos que A é aberto em X se A é um elemento de τ. Dizemos que F é fechado em X se seu complementar $X - F$ é aberto.

se seu complementar $X - F$ é aberto.

Definição 10. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é Hausdorff se para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem abertos U, V de X tais que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$

Uma das principais definições em topologia é a de um conjunto conexo.

Definição 11. Dizemos que um espaço topológico X é conexo quando os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados em X são $\emptyset$ e X.

A seguir apresentamos a definição de caminho em um espaço topológico. Estes serão os objetos fundamentais de estudo nos capítulos seguintes.

Definição 12. Um caminho em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $a : [0, 1] \to X$.

Os pontos $x_0 = a(0)$ e $x_1 = a(1)$ são as extremidades de a, sendo x_0 o ponto inicial e x_1 o ponto final. Se $x_0 = x_1$, dizemos que a é um caminho fechado e que x_0 é o ponto base de a.

Definição 13. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é conexo por caminhos quando para quaisquer $x, y \in X$ existe um caminho $a : I \to X$ tal que $a(0) = x$ e $a(1) = y$.

Outra definição fundamental é a de um conjunto compacto. Para isto, precisamos primeiramente definir o conceito de cobertura.

Definição 14. Seja X um espaço topológico e $S \subset X$. Dizemos que uma família de conjuntos $\mathscr{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X é uma cobertura de S se $S \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

É possível e muito útil classificar coberturas. Então, se $\mathscr{C}$ é uma cobertura de S subconjunto de um espaço topológico X, dizemos que:

- $\mathscr{C}$ é aberta (respectivamente fechada) se os conjuntos que a compõem são abertos (respectivamente fechados);
- $\mathscr{C}$ é enumerável (respectivamente não enumerável) quando o conjunto L dos índices λ for enumerável (respectivamente não enumerável);
- $\mathscr{C}$ é finita quando o conjunto L dos índices λ for finito.

Agora definimos o conceito de compacidade.

Definição 15. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é compacto quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Para finalizar esta seção, damos a definição a seguir, que também é um conceito vital.

Definição 16. Sejam X, Y espaços topológicos. Um homeomorfismo é uma aplicação contínua bijetora $f : X \to Y$ tal que sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Neste caso dizemos que X e Y são *homeomorfos*.

Tendo em mãos as definições 16 e 6, podemos pensar em homeomorfismos como os isomorfismos de espaços topológicos.

Exemplo 1. A função translação $f_a : X \to X$ dada por $f_a(x) = x + a$ é um homeomorfismo.

1.3 Noções de Geometria Diferencial

Nesta seção revisaremos apenas o conteúdo suficiente para apresentar dois espaços topológicos que aparecerão muito nos próximos capítulos: o cilindro e o toro. Vamos defini-los como superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$, porém veremos que há outras maneiras igualmente úteis de representá-los. Nos baseamos principalmente em (CARMO, 2010).

Definição 17. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\varphi : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

- φ é diferenciável. Isto significa que se escrevermos

  $$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

  as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U;

- φ é um homeomorfismo. Como φ é contínua pela condição anterior, isto significa que φ admite uma inversa que é contínua;

- Para todo $q \in U$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva. Esta condição é chamada de *condição de regularidade.*

A aplicação φ é uma dita uma *parametrização local em p.* A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada de *vizinhança coordenada de p.*

Uma das superfícies que aparece com frequência nos capítulos seguintes é o cilindro. O cilindro é a superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Uma parametrização é dada por $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ em que $(u, v) \in U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Observe que a circunferência

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

pode ser parametrizada por $\alpha(u) = (\cos(u), \operatorname{sen}(u))$, $u \in [0, 2\pi]$. Desta forma podemos, de uma maneira mais algébrica, dizer que o cilindro é simplesmente $S^1 \times \mathbb{R}$.

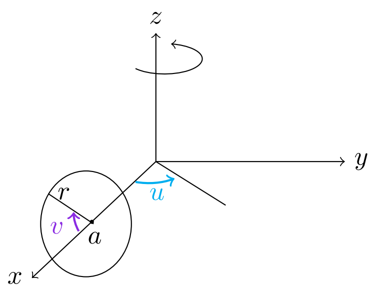
Outra superfície que aparecerá posteriormente é o toro. O toro é obtido da seguinte forma: dados dois números reais $a > r > 0$, tomamos, no plano xz, a circunferência de centro $(a, 0, 0)$ e raio r e fazemos a rotação desta em torno do eixo z. Obtemos assim

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}.$$

A parametrização obtida com este procedimento é:

$$\varphi(u, v) = ((r\cos(v) + a)\cos(u), (r\cos(v) + a)\operatorname{sen}(u), r\operatorname{sen}(v)),$$

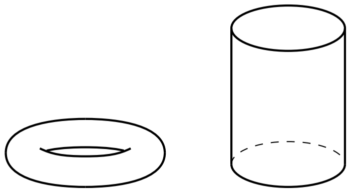
em que $(u, v) \in U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. A construção desta superfície está ilustrada na figura abaixo.



Tomando $a = 2$ e $r = 1$, podemos dizer de uma maneira mais algébrica que o toro é simplesmente $S^1 \times S^1$.

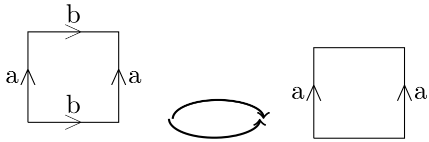
Cabe aqui observar que as parametrizações do cilindro e do toro dadas não cobrem a superfície inteira. No caso do cilindro, a reta $(1, 0, v)$ é deixada de fora. No caso do toro, o meridiano $(r\cos(v) + a, 0, r\operatorname{sen}(v))$ e o paralelo $((r + a)\cos(u), (r + a)\operatorname{sen}(u), 0)$

são excluídos. Porém, em termos práticos, isto não é um problema pois cada uma destas superfícies pode ser totalmente coberta com mais uma carta local muito similar à já apresentada. Na figura abaixo, temos a visualização destas duas superfícies:



(a) Toro (b) Cilindro

Agora, uma representação um pouco mais abstrata, porém muito útil, é o que neste trabalho chamamos de representação poligonal. Ela consiste em tomar um polígono, orientar os lados, e então "colá-los". Observe a figura abaixo:

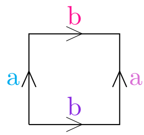


(c) Toro (d) Esfera (e) Cilindro

Identificando os lados opostos e respeitando a orientação, obteremos, respectivamente, o toro, a esfera e o cilindro. Para a esfera não tomamos exatamente um polígono mas sim uma circunferência na qual marcamos dois pontos antípodas, porém a construção é a mesma.

A operação de identificar lados opostos pode, em alguns casos, ser traduzida em palavras. Percorremos o contorno do polígono a partir de um vértice qualquer, em qualquer sentido, dando uma volta completa. Ao passar por uma aresta, associamos a ela uma letra, incluindo um expoente -1 caso a aresta tenha sido percorrida no sentido contrário ao indicado na representação poligonal. Justapomos todas as letras e expoentes associados, obtendo a palavra.

A palavra representação do toro, por exemplo, pode ser obtida da seguinte forma:



Iniciando pela aresta indicada em azul, temos: $\mathrm{aba}^{-1}\mathrm{b}^{-1}$. Já a representação da esfera em palavras é simplesmente aa^{-1}.

Finalizamos esta seção com um outro critério que permite saber quando um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular. Começamos com a seguinte definição:

Definição 18. Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação linear sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico de F é chamada de *valor crítico* de F. Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado de *valor regular* de F.

Vamos agora ao critério:

Proposição 1. Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. Como a é um valor regular de f podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_z(p) \neq 0$. Defina então $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. A diferencial de F em p é dada por:

$$dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p) & f_y(p) & f_z(p) \end{bmatrix},$$

de forma que $\det(dF_p) = f_z(p) \neq 0$. Denotando por (u, v, t) as coordenadas de um ponto na imagem de F e aplicando o Teorema da Função Inversa, temos que existem vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \to W$ é inversível e $F^{-1} : W \to V$, $F^{-1}(u, v, t) = (u, v, g(u, v, t)), (u, v, t) \in W$ é diferenciável. Desta forma, as funções coordenadas $x(u, v, t) = u; y(u, v, t) = v; z(u, v, t) = g(u, v, t)$ são diferenciáveis. Em particular, temos que $z(u, v, a) = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano XY.

Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : t = a\}$, temos que o gráfico de h é $f^{-1} \cap V$ e assim $f^{-1} \cap V$ é uma vizinhança coordenada de p. Como p é arbitrário, temos que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular. $\square$

Por exemplo, a esfera $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular. De fato, se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ então 1 é um valor regular de f; como $S^2 = f^{-1}(1)$, aplicamos a Proposição 1.

Embora já tenha sido feito anteriormente, podemos usar a Proposição 1 para mostrar que o cilindro e o toro são superfícies regulares. De fato, se $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, então 1 é um valor regular de f o cilindro é $f^{-1}(1)$; logo, uma superfície regular. Por outro lado, se $g(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$, então r^2 é um valor regular de g e o toro é $g^{-1}(r^2)$; portanto, uma superfície regular.

2 O Grupo Fundamental

2.1 Homotopias

As definições e resultados a seguir foram baseadas em (LIMA, 2006) e (MASSEY, 1967). A partir daqui, I denotará o intervalo fechado $[0, 1]$ munido da topologia usual de $\mathbb{R}$.

Definição 19. Sejam X, Y espaços topológicos e considere duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$. Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = g(x), \forall x \in X,$$

em que $XtimesI$ está munido da topologia produto induzida pelas topologias de X e I.

Neste caso, dizemos que H é uma homotopia entre f e g e escrevemos $H : f \cong g$ ou simplesmente $f \cong g$. Para o estudo do grupo fundamental, as homotopias mais interessantes são as homotopias de caminhos, definidas a seguir.

Definição 20. Sejam $a, b : I \to X$ dois caminhos tais que o ponto final de a coincide com o ponto inicial de b: $a(1) = b(0)$. Então, definimos:

- O produto ab como sendo o caminho que consiste em percorrer a e depois b, isto é:

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ b(2s-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

- O caminho inverso de a como sendo $a^{-1} : I \to X$ dado por $a^{-1}(s) = a(1-s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Definição 21. Sejam $a, b : I \to X$ caminhos. Dizemos que a, b são homotópicos se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que, $\forall s, t \in I$:

- $H(s, 0) = a(s)$;
- $H(s, 1) = b(s)$;
- $H(0, t) = a(0) = b(0)$;

- $H(1,t) = a(1) = b(1)$.

A Definição 21 só faz sentido se os caminhos a e b tiverem as mesmas extremidades. Em particular, para caminhos fechados a, b com mesmo ponto base x_0, podemos dizer que a e b são homotópicos se existir uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que se $a(0) = a(1) = x_0 = b(0) = b(1)$, com $x_0 \in X$, então $\forall s, t \in I$:

- $H(s,0) = a(s)$;
- $H(s,1) = b(s)$;
- $H(0,t) = H(1,t) = x_0$

A relação de homotopia entre dois caminhos a e b é uma relação de equivalência. De fato,

- Reflexiva: $H(s,t) = a(s)$ é uma homotopia entre a e a.
- Simétrica: se $H : I \times I \to X$ é uma homotopia entre a e b, então $K : I \times I \to X$ dada por $H(s,t) = K(s, 1-t)$ é uma homotopia entre b e a.
- Transitiva: se $H : a \cong b$ e $K : b \cong c$, então $L : I \times I \to X$ dada por
$$L(s,t) = \begin{cases} H(s,2t), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ K(s,2t-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades de homotopias.

Proposição 2. Sejam $a, b, a', b' : I \to X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$, $a'(1) = b'(0)$, $a \cong a'$ e $b \cong b'$. Então $ab \cong a'b'$ e $a^{-1} \cong (a')^{-1}$.

Demonstração. Sejam $H : a \cong a'$ e $K : b \cong b'$ homotopias. Vamos mostrar primeiramente que $ab \cong a'b'$. Defina $L : I \times I \to X$ dada por

$$L(s,t) = \begin{cases} H(2s,t), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}, t \in I \\ K(2s-1,t), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1, t \in I \end{cases}.$$

Veja que L está bem definida, pois $H(1,t) = a(1) = b(0) = K(0,t)$. Temos também que L é contínua, pois é contínua com relação a s em $\left[1, \frac{1}{2}\right)$ e em $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (pois H e K são contínuas em I) e é contínua em

$s = \frac{1}{2}$, pois:

$$H\left(2 \cdot \frac{1}{2}, t\right) = H(1,t) = a(1) = b(0) = K(0,t) = K\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, t\right)$$

Vamos mostrar agora que L é uma homotopia entre ab e $a'b'$. Temos:

$$L(s,0) = \begin{cases} H(2s,0), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s-1,0), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(s,0) = ab(s).$$

$$L(s,1) = \begin{cases} H(2s,1), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K(2s-1,1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a'(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b'(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(s,1) = a'b'(s).$$

Temos $L(0,t) = H(0,t) = a(0) = ab(0)$. Mas $H(0,t) = a'(0) = a'b'(0)$. Logo, $L(0,t) = ab(0) = a'b'(0)$. Finalmente, $L(1,t) = K(1,t) = b(1) = ab(1)$. Mas $K(1,t) = b'(1) = a'b'(1)$, logo $L(1,t) = ab(1) = a'b'(1)$. Assim, $L : ab \cong a'b'$.

Resta mostrar que $a^{-1} \cong (a')^{-1}$. Para isso, defina $G : I \times I \to X$ dada por $G(s,t) = H(1-s,t)$ e veja que G é contínua em I, pois H é contínua em I. Além disso, G é homotopia entre a^{-1} e $(a')^{-1}$:

$$G(s,0) = H(1-s,0) = a(1-s) = a^{-1}(s)$$

$$\Longrightarrow G(s,0) = a^{-1}(s).$$

$$G(s,1) = H(1-s,1) = a'(1-s) = (a')^{-1}(s)$$

$$\Longrightarrow G(s,1) = (a')^{-1}(s).$$

Agora, $G(0,t) = H(1,t) = a^{-1}(0)$. Mas $H(1,t) = (a')^{-1}(0)$, o que implica $G(0,t) = a^{-1}(0) = (a')^{-1}(0)$. Finalmente, $G(1,t) = H(0,t) = a^{-1}(1)$. Mas $H(0,t) = (a')^{-1}(1)$, portanto $G(1,t) = a^{-1}(1) = (a')^{-1}(1)$. Logo, $G : a^{-1} \cong (a')^{-1}$. $\square$

Ao estudar as homotopias existentes entre caminhos fechados em um espaço topológico X, é possível definir *classes de homotopia*, que são os elementos do grupo fundamental de X, que apresentaremos na seção seguinte.

A seguir serão apresentadas a definição de classe de homotopia e algumas de suas propriedades com respeito ao produto e à inversibilidade.

DEFINIÇÃO 22. Seja X um espaço topológico. Uma classe de homotopia $\alpha = [a]$ de um caminho a é uma classe de equivalência segundo a relação de homotopia.

DEFINIÇÃO 23. Sejam α a classe de homotopia dos caminhos que começam em $x \in X$ e terminam em $y \in X$ e β a classe de homotopia do caminhos que começam em $y \in X$ e terminam em $z \in X$. Definimos:

- O produto $\alpha \cdot \beta$ tomando caminhos $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ e fazendo $\alpha \cdot \beta = [a][b]$, ou seja, $[a][b] = [ab]$.
- A inversa α^{-1} tomando $a \in \alpha$ e fazendo $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$.

Observe que, da proposição 2, temos que as aplicações acima estão bem definidas.

PROPOSIÇÃO 3. Sejam $a, b, c : I \to X$ caminhos fechados tais que cada um termina onde o seguinte começa e $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ e $\gamma = [c]$ suas classes de homotopia. Sejam também $x = a(0)$ e $y = a(1)$, e_x, e_y caminhos constantes sobre esses pontos e $\varepsilon_x = [e_x], \varepsilon_y = [e_y]$ suas classes de homotopia. São válidas:

i. $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$;

ii. $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$;

iii. $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$;

iv. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

Demonstração. Sejam $a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma$ caminhos.

i. Considere $\varphi_1(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$.

Então

$$a \circ \varphi_1(s) = \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ a(1 - 2s), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a(2s), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ a^{-1}(2s-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Isto é, $a \circ \varphi_1 = aa^{-1} \cong e_x$. Logo, $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$.

ii. Considere agora $\varphi_2(s) = \begin{cases} 1-2s, & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ 2s-1, & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$.

Então

$$a \circ \varphi_2(s) = \begin{cases} a(1-2s), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ a(2s-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a^{-1}(2s), & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ a(2s-1), & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Isto é, $a \circ \varphi_2 = a^{-1}a \cong e_y$ e portanto, $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$.

iii. Defina

$$\varphi_3(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ 2s-1, & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \text{ e } \varphi_3'(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Assim, analogamente aos casos i. e ii. , temos $a \circ \varphi_3 = a = e_x a$ e $a \circ \varphi_3' = a = ae_y$, donde segue que $\varepsilon_x \alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$.

iv. Finalmente, defina

$$\varphi_4(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \dfrac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}(s+1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente aos casos anteriores, temos $(ab)c = a(bc) \circ \varphi_4$, donde segue que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

$\square$

Geometricamente, os itens da Proposição 3 significam que:

i. Percorrer um caminho representante de uma classe de homotopia e em seguida percorrer seu inverso é o mesmo que percorrer o caminho constante sobre o ponto inicial do caminho.

ii. Percorrer o inverso de um caminho representante de uma classe de homotopia e em seguida percorrer o próprio caminho é equivalente a percorrer o caminho constante sobre o ponto final do caminho em questão.

iii. Percorrer o caminho constante sobre o ponto inicial de um caminho e em seguida percorrer o caminho representante da classe de homotopia é equivalente a percorrer apenas o caminho representante da classe. O mesmo vale se percorrermos primeiro o caminho representante e depois o caminho constante sobre o ponto final do representante.

iv. Tomando três representantes a, b, c de três classes de homotopia diferentes, percorrer o caminho produto ab e depois o caminho c é equivalente a percorrer o caminho a e em seguida o caminho produto bc.

2.2 Definição e Resultados

Nesta seção, será apresentada a definição de grupo fundamental, bem como alguns resultados gerais a respeito dessa estrutura. As definições e resultados a seguir foram baseados em (LIMA, 2009).

Definição 24. O conjunto das classes de homotopia dos caminhos num espaço topológico X, munido da operação de produto de caminhos definida como anteriormente, é chamado de grupóide fundamental de X e é denotado por $\prod(X)$.

Definição 25. O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupóide fundamental de X, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0, com a operação de composição, constitui um grupo, chamado *grupo fundamental de X com base no ponto x_0*. O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$, do caminho constante sobre o ponto x_0.

Para começar a atribuir características aos grupos fundamentais, é importante verificar sob quais condições a escolha do ponto base x_0 afeta a estrutura do grupo fundamental do espaço topológico X. A proposição e o corolário a seguir trazem informações a esse respeito.

Proposição 4. Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Isto significa que cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Demonstração. Seja γ uma classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1. Defina $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ por $\varphi(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Vamos mostrar que φ é um isomorfismo de grupos. Primeiramente, verifiquemos que φ é um homomorfismo de grupos. De fato,

$$\varphi(\alpha\beta) = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1}) = (\gamma\alpha)\gamma^{-1}\gamma(\beta\gamma^{-1})$$

$$= \gamma\alpha\beta\gamma^{-1} = \varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

Logo, $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ e φ é homomorfismo.

Agora, vamos provar que φ é bijetor. Tome α, β tais que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Então:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \implies \gamma\alpha\gamma^{-1} = \gamma\beta\gamma^{-1} \implies (\gamma\alpha\gamma^{-1})\gamma = (\gamma\beta\gamma^{-1})\gamma$$

$$\implies \gamma\alpha = \gamma\beta \implies \gamma^{-1}\gamma\alpha = \gamma^{-1}\gamma\beta \implies \alpha = \beta$$

Assim, φ é injetivo. Agora, tome $\beta \in \pi_1(X, x_1)$ e vamos mostrar que existe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\varphi(\alpha) = \beta$. Considere $\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma$ e veja que, de fato, α está em $\pi_1(X, x_0)$: como γ é a classe de homotopia dos caminhos que ligam x_0 a x_1 se c é um representante da classe γ e b é um representante de β, temos que c^{-1} liga x_0 a x_1, b liga x_1 a x_0 e c liga x_0 a x_1. Portanto, $c^{-1}bc$ liga x_0 a x_1 e $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Agora, veja que $\varphi(\alpha) = \gamma(\gamma^{-1}\beta\gamma)\gamma^{-1} = \beta$. Logo, φ é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. □

Corolário 1. Se X é conexo por caminhos, então para quaisquer $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.

Demonstração. Se X é conexo por caminhos, então $\forall x_0, x_1 \in X$, temos que x_0, x_1 estão na mesma componente conexa. Assim, pela Proposição 4, segue o resultado. □

Definição 26. Um espaço topológico X é dito contrátil se todo caminho fechado é homotópico a um ponto de X.

Definição 27. Dizemos que um espaço topológico X é simplesmente conexo se seu grupo fundamental é isomorfo ao grupo trivial $\{0\}$, isto é, $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$

Veja que, como consequência das definições acima, temos que o grupo fundamental de um espaço contrátil é isomorfo a $\{0\}$. A seguir apresentamos duas propriedades do grupo fundamental que serão muito importantes na seção seguinte, quando for descrito o grupo fundamental do toro. Antes de enunciar e demonstrar as propriedades em questão, é necessário definir o homomorfismo induzido de uma aplicação.

Definição 28. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$, dado por $f_\#(\alpha) = [f \circ a]$, em que $\alpha = [a]$. O homomorfismo $f_\#$ é chamado de homomorfismo induzido.

Em particular, se $h : X \to Y$ for um homeomorfismo, então

$$h_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

onde $y_0 = h(x_0)$, é um isomorfismo. Isto é, espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos.

Proposição 5. Sejam X, Y espaços topológicos. O grupo fundamental do produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y.

Demonstração. Sejam X, Y espaços topológicos e considere

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

dado por $\varphi(\alpha) = (p_\#(\alpha), q_\#(\alpha))$, em que p e q são as projeções em X e Y, respectivamente. Vamos mostrar que φ é um isomorfismo.

Veja que como p, q são aplicações contínuas entre $X \times Y$ e X e Y (já que são projeções), respectivamente, temos que $p_\#, q_\#$ são homomorfismos induzidos. Então, dados $\alpha, \beta \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$, temos:

$$\varphi(\alpha\beta) = (p_\#(\alpha\beta), q_\#(\alpha\beta))$$

$$= (p_\#(\alpha)p_\#(\beta), q_\#(\alpha)q_\#(\beta)) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

Assim, φ é homomorfismo. Resta mostrar que φ é bijetor. Tome $c : I \to X \times Y$ um caminho fechado com base no ponto (x_0, y_0) e note que $c(s) = (a(s), b(s))$, com $a = p \circ c$ um caminho fechado em X com base em x_0 e $b = q \circ c$ um caminho fechado em Y com base em y_0. Então, se $c' : I \to X \times Y$ é da forma $c'(s) = (a'(s), b'(s))$, temos $c \cong c'$ se, e somente se, $a \cong a'$ e $b \cong b'$, pois devemos ter cada entrada da função c homotópica à respectiva entrada da funçaõ c'. Isso significa que $[c] = [c']$ se, e somente se, $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$. Desta forma, se

$\alpha = [c]$ e $\beta = [c']$ temos:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \Leftrightarrow ([a], [b]) = ([a'], [b']) \Leftrightarrow [a] = [a'], [b] = [b'] \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Logo, φ é injetor. Agora, seja $([a], [b]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, com $a : I \to X, b : I \to Y$. Tome $\alpha = (a, b) \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Então, $\varphi(\alpha) = ([a], [b])$ e φ é sobrejetor. Portanto, φ é um isomorfismo e $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ e $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ são isomorfos. □

Corolário 2. Sejam X, Y espaços topológicos contráteis. Então $X \times Y$ é contrátil.

Demonstração. Como X, Y são contráteis, temos que $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ e $\pi_1(Y, y_0) = \{0\}$. Segue então da Proposição 5 que

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \{0\} \times \{0\}.$$

Portanto, $X \times Y$ é contrátil. □

2.3 O Grupo Fundamental de S^1 e aplicações

Nesta seção, os resultados e definições exibidos nas Seções 2.1 e 2.2 deste capítulo serão utilizados para encontrar e caracterizar os grupos fundamentais de importantes estruturas geométricas. Os exemplos e conceitos exibidos nesta seção foram baseados em (LIMA, 2006), (LIMA, 1987) e em (MASSEY, 1967).

Antes de exibirmos os grupos fundamentais dessas estruturas, é necessário definir as chamadas função ângulo e o número de rotação (grau) de um caminho fechado.

Definição 29. Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$, S^1 o círculo unitário e $\phi : X \to S^1$ uma aplicação. Dizemos que $\alpha : X \to \mathbb{R}$ é uma função ângulo para ϕ se $\phi(x) = e^{i\alpha(x)} = (\cos(\alpha(x)), \operatorname{sen}(\alpha(x)))$, $\forall x \in X$.

Se a função ângulo α for contínua, então a aplicação ϕ é contínua. Se $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ forem duas funções ângulo para uma mesma aplicação ϕ, então $\cos(\alpha(x)) = \cos(\beta(x))$ e $\operatorname{sen}(\alpha(x)) = \operatorname{sen}(\beta(x))$. Isso significa que $\alpha(x) - \beta(x) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, se X for conexo e α, β forem contínuas, então o inteiro k não depende da escolha de $x \in X$.

Definição 30. Seja $a : I \to S^1$ um caminho fechado. O número inteiro $n(a) = \dfrac{\alpha(1) - \alpha(0)}{2\pi}$, associado a a é chamado grau (ou número de rotação) do caminho a.

O grau do caminho fechado a indica o número líquido de voltas que o ponto $a(s)$ dá ao longo de S^1, com $0 \leq s \leq 1$, isto é, o número de voltas dadas no sentido anti-horário (positivo) menos o número de voltas dadas no sentido horário (negativo).

A proposição a seguir exibe algumas propriedades a respeito do grau de caminhos fechados. A demonstração deste resultado é bastante técnica e extensa e por isso não será apresentada. Ela pode ser encontrada em (LIMA, 2006), páginas 56 e 57.

Proposição 6. Sejam $a, b : I \to S^1$ caminhos fechados. Então:

i. Se a e b têm o mesmo ponto base, então $n(ab) = n(a) + n(b)$;

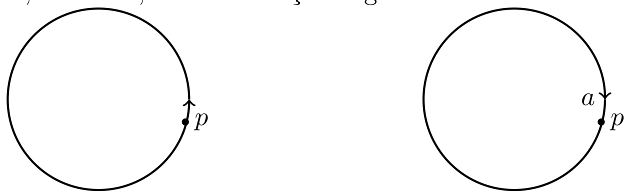
ii. Se $a \cong b$, então $n(a) = n(b)$;

iii. Se $n(a) = n(b)$ e a e b têm o mesmo ponto base, então $a \cong b$;

iv. Dados $p \in S^1, k \in \mathbb{Z}$, existe um caminho fechado $a : I \to S^1$ com base no ponto p tal que $n(a) = k$.

Tendo em mãos as definições e resultados acima podemos estudar os grupos fundamentais de alguns espaços, começando pela circunferência unitária S^1. Antes de iniciarmos a análise deste grupo fundamental, vamos entender um pouco mais sobre o que significa o conceito de caminho fechado neste espaço.

Primeiramente, repare que percorrer um caminho fechado em S^1 nada mais é que dar um número inteiro de voltas sobre S^1 começando num dado ponto p. A figura abaixo mostra dois caminhos em S^1 com base no ponto p: o primeiro, à esquerda, com orientação positiva e o segundo, à direita, com orientação negativa.



Agora, conforme exposto anteriormente, é possível associar a cada caminho fechado $a : I \to S^1$ um número inteiro $n(a)$, o grau de a. Desta forma, é razoável pensar que podemos associar cada caminho a um número inteiro e vice-versa. De fato, vamos mostrar a seguir que o grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros, isto é, $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Como S^1 é conexo por caminhos, a escolha do ponto inicial x_0 não afeta a estrutura do grupo fundamental e, por isso, representaremos $\pi_1(S^1, x_0)$ apenas por $\pi_1(S^1)$.

Teorema 1. O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.

Demonstração. Primeiramente, veja que, pela Proposição 6, caminhos homotópicos têm o mesmo grau, ou seja, podemos definir $n(\alpha)$, o grau da classe de equivalência α. Isso significa que se $\alpha = [a]$, então o grau $n(a)$ depende apenas da classe α, e não da escolha de um dos seus representantes.

Considere então $\alpha = [a]$ uma classe de homotopia de caminhos fechados em S^1 e a relação $\varphi : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ dada por $\varphi(\alpha) = n(\alpha)$.

Veja que φ está bem definida, pois tomando $\alpha = [a], \beta = [b]$ tais que $\alpha = \beta$, temos que $\varphi(\alpha) = n(\alpha) = n(\beta) = \varphi(\beta)$. Temos também que φ é um homomorfismo pois, pelo item i. da Proposição 6, se dois caminhos a, b possuem o mesmo ponto básico, vale que $n(ab) = n(a) + n(b)$. Então, se $\alpha, \beta \in \pi_1(S^1)$, temos:

$$\varphi(\alpha\beta) = n(\alpha\beta) = n(\alpha) + n(\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

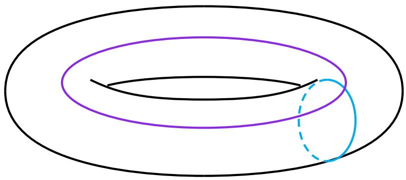
Portanto, φ é um homomorfismo. Resta mostrar que φ é bijetor. Note que a injetividade de φ segue diretamente do item iii. da Proposição 6. Da mesma forma, a sobrejetividade de φ segue diretamente do item iv. da Proposição 6.

Logo, φ é um isomorfismo de grupos e segue que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

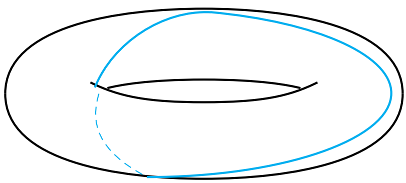
Do Teorema 1 é possível tirar diversas conclusões a respeito do grupo fundamental de S^1, já que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo com o qual estamos bastante familiarizados. A primeira destas conclusões é que $\pi_1(S^1)$ é um grupo cíclico com um gerador, já que o grupo dos inteiros é cíclico gerado pelo elemento 1. Além disso, é possível concluir que $\pi_1(S^1)$ é um grupo infinito, já que o grupo dos inteiros o é. Finalmente, $\pi_1(S^1)$ é abeliano, pois $(\mathbb{Z}, +)$ o é.

Outra consequência importante do isomorfismo exibido anteriormente é o grupo fundamental do toro e do cilindro, que apresentaremos a seguir. Vamos começar este estudo apresentando noções sobre os caminhos em um toro e as possíveis representações para tais caminhos.

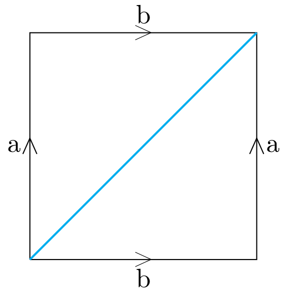
Consideremos o toro T^2 como o produto cartesiano de dois círculos unitários: $T^2 = S^1 \times S^1$. Assim, vamos caracterizar os caminhos pelo número de voltas que ele dá ao redor do círculo vertical e do círculo horizontal representados na imagem abaixo:



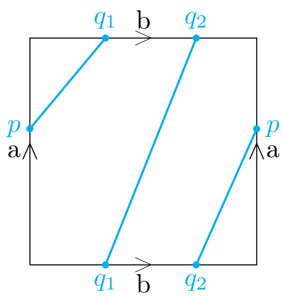
Um caminho no toro será representado por (n, k), em que n é o número de voltas que o caminho dá em torno do círculo vertical e k é o número de voltas que o caminho dá em torno do círculo horizontal. O caminho $(1, 1)$, por exemplo, é mostrado na imagem a seguir:



Para valores de n, k grandes, é bastante difícil representar o caminho em questão como feito acima. Assim, é mais conveniente representar o caminho utilizando a representação poligonal do toro, como visto na Seção 1.3. Neste contexto, temos a seguinte representação para o caminho (1,1):



Com essa representação em mãos, é possível visualizar caminhos muito mais complexos de forma mais simples, como o caminho $(1, 2)$, exibido a seguir:



A partir disso, é possível visualizar o grupo fundamental do toro com clareza. Esse grupo será denotado apenas por $\pi_1(T^2)$ (pois T^2 é conexo por caminhos), e é caracterizado a seguir.

Teorema 2. O grupo fundamental do toro T^2 é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pela Proposição 5, sabemos que

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1((X, x_0) \times (Y, y_0))$$

Além disso, sabemos que $T^2 = S^1 \times S^1$. Logo,

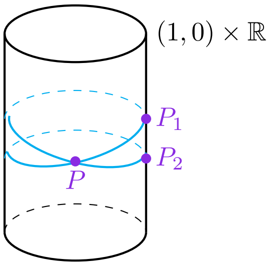
$$\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

$\square$

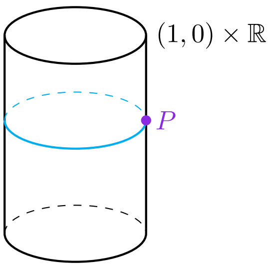
Note que, assim como o grupo fundamental do círculo unitário, $\pi_1(T^2)$ é infinito, pois $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o é. Além disso, $\pi_1(T^2)$ possui dois geradores, a saber, (1,0) e (0,1).

Queremos agora encontrar o grupo fundamental do cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$. Para isso, iremos classificar as auto-interseções de um caminho. Diremos que uma auto-interseção é *trivial* se ela ocorrer em todos os pontos do caminho, isto é, se o caminho "fica dando voltas" sobre si mesmo – como, por exemplo, os caminhos em S^1. Diremos que uma auto-interseção é *não trivial* se acontece em apenas um ponto.

Note que qualquer caminho fechado não trivial γ em C que cruza a reta geratriz $(1,0) \times \mathbb{R}$ em mais de um ponto possui auto-interseções não triviais, como a representada abaixo:



O caminho indicado em azul na imagem acima intersecta a geratriz $(1,0) \times \mathbb{R}$ nos pontos P_1 e P_2, indicados em roxo. Por se tratar de um caminho fechado, a auto-interseção no ponto P não pode ser removida. Desta forma, todos os caminhos fechados simples (isto é, sem auto-interseções) e não triviais no cilindro interceptarão a reta geratriz apenas em um ponto, como abaixo:



Assim, podemos caracterizar um caminho não trivial no cilindro a partir do número líquido de voltas que ele dá passando pelo ponto P. Ou seja, temos uma situação muito similar com o que ocorre com a circunferência S^1. E de fato é o que ocorre, como veremos.

Precisaremos do resultado abaixo, que é óbvio do ponto de vista intuitivo porém incluímos aqui a demonstração:

Proposição 7. $\mathbb{R}$ é contrátil.

Demonstração. Veja que percorrer um caminho fechado a em $\mathbb{R}$ com ponto base x nada mais é que percorrer o segmento de reta que liga x a algum x_0 e, em seguida, percorrer o segmento de reta que liga x_0 a x. Mas percorrer esse caminho é o mesmo que ficar parado sobre o ponto x. Logo, o caminho fechado a é homotópico ao caminho constante ε_x e $\mathbb{R}$ é contrátil. □

Portanto, do observado após a definição de espaço contrátil, temos $\pi_1(\mathbb{R}) = \{0\}$. Segue imediatamente das Proposições 5 e 7 o

Teorema 3.
$$\pi_1(C) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

3 Espaços de Recobrimento

Neste capítulo nossa intenção é, primordialmente, exibir alguns exemplos interessantes de recobrimento. Não é nosso objetivo, neste texto, discorrer sobre as diversas propriedades e aplicações dos espaços de recobrimento, uma teoria muito extensa e demasiadamente técnica. Em vez disso, damos as definições e resultados necessários para que se possam apreciar os exemplos, que possuem natureza mais geométrica.

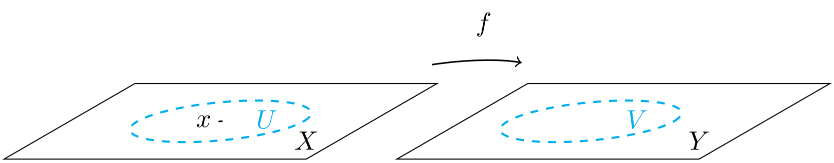
3.1 Homeomorfismos Locais e Fibras

Nesta seção nos baseamos em (LIMA, 2006) e (MASSEY, 1967).

Na Seção 1.2 apresentamos a definição de homeomorfismo entre dois espaços topológicos. Agora, para o desenvolvimento da teoria de espaços de recobrimento, utilizaremos o conceito de *homeomorfismo local*, introduzido a seguir.

Definição 31. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é um homeomorfismo local se para cada ponto $x \in X$ existe um aberto $U \subset X$ tal que $V = f(U)$ é aberto de Y e $f|_U$ é um homeomorfismo de U em V.

Geometricamente, temos a seguinte situação:

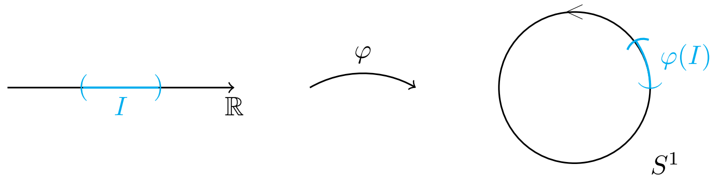


Todo homeomorfismo é um homeomorfismo local. Além disso, decorre da definição que um homeomorfismo local é uma aplicação aberta.

A consequência mais importante da existência de um homeomorfismo local é a de que se $f : X \to Y$ for um homeomorfismo local, então X herda localmente todas as propriedades topológicas de Y. Mais ainda, se f for sobrejetiva, então Y também herdará as propriedades topológicas locais de X. Vejamos agora alguns exemplos de homeomorfismos locais:

Exemplo 2. A função $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\varphi(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ é um homeomorfismo local. Ainda mais, esta aplicação é sobrejetiva.

Isso significa que, localmente, $\mathbb{R}$ e S^1 "se comportam" topologicamente da mesma forma:



Uma interpretação possível para a ação desta função é a de que φ "enrola" a reta real em cima da circunferência unitária S^1.

Vejamos agora que, de fato, φ é um homeomorfismo local. Para isso, seja $x \in \mathbb{R}$ e considere $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Então,

$$\varphi(U) = \{(\cos(t), \text{sen}(t)) \in S^1 : t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\},$$

que é um conjunto aberto de S^1. Além disso, temos que $\varphi|_U$ é uma função contínua, já que $\text{sen}(t), \cos(t)$ são funções contínuas e são sobrejetivas com respeito a S^1. Mais ainda, se $(\varphi|_U)^{-1}(\cos(t), \text{sen}(t)) = t$ é uma função contínua. Logo, φ é um homeomorfismo local de U sobre V.

Exemplo 3. A função $\psi : \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$ dada por $\psi(s,t) = (e^{is}, e^{it})$ é um homeomorfismo local sobrejetor. Para melhor visualizar esta aplicação, relembre a construção do toro dada na Seção 1.3. O toro pode ser parametrizado por

$$\varphi(u,v) = ((\cos(v)+2)\cos(u), (\cos(v)+2)\text{sen}(u), \text{sen}(v))$$

com $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

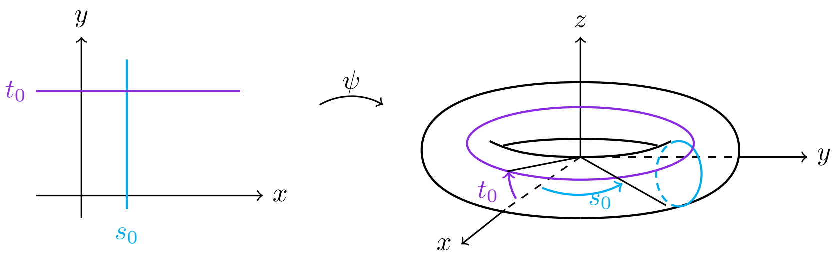
Agora, vamos olhar para $\psi(s,t) = (e^{is}, e^{it})$ fixando primeiramente s_0. Desta forma, lembrando que $e^{is} = \cos(s) + i\text{sen}(s)$, obtemos:

$$\psi_{s_0}(s_0,t) = ((\cos(t)+2)\cos(s_0), (\cos(t)+2)\text{sen}(s_0), \text{sen}(t))$$

Agora, fixando t_0, obtemos:

$$\psi_{t_0}(s,t_0) = ((\cos(t_0)+2)\cos(s), (\cos(t_0)+a)\text{sen}(s), \text{sen}(t_0))$$

Geometricamente, ψ_{s_0} leva a reta $s = s_0$ em um meridiano de $T-$ isto é, uma circunferência vertical em $T-$, dado por $\varphi(s_0,t)$. Por outro lado, a função ψ_{t_0} leva a reta $t = t_0$ em um paralelo de $T-$ isto é, uma circunferência horizontal em $T-$ cuja posição é dada por $\varphi(s,t_0)$. Esta situação está ilustrada na figura a seguir:



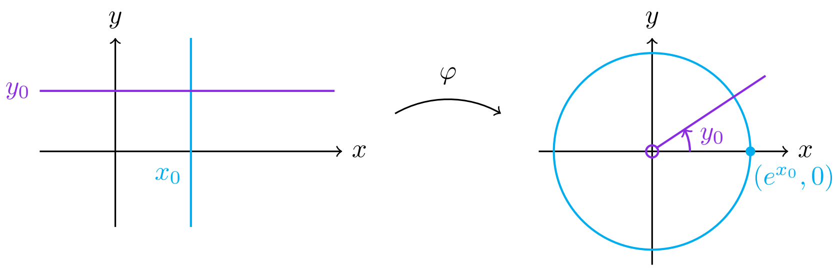
Neste caso, cada entrada da função ψ é similar à função φ apresentada no exemplo anterior, isto é, cada entrada de ψ é um homeomorfismo local sobrejetor. Segue então que ψ é um homeomorfismo local sobrejetor de $\mathbb{R}^2$ em T^2.

Exemplo 4. A função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \text{sen}(y))$$

é um homeomorfismo local não sobrejetor.

Cada reta vertical da forma (x_0, y), com x_0 fixo, é levada por φ em uma circunferência de centro na origem e raio e^{x_0}. Além disso, cada reta horizontal da forma (x, y_0), com y_0 fixo é levada por φ em uma semi-reta aberta que parte da origem e forma um ângulo de y_0 radianos com o semi-eixo $x > 0$. Esta situação está representada na figura a seguir:



Vamos verificar que φ é, de fato, um homeomorfismo local. Seja (x, y) um ponto em $\mathbb{R}^2$, fixe $\varepsilon > 0$ e considere U como sendo a bola aberta de centro (x, y) e raio ε. Desta forma, cada ponto (t, s) de U é levado por φ na interseção entre a semirreta de inclinação s e a circunferência de raio e^t.

Assim, se R é o conjunto das semi-retas abertas com inclinação a tal que $a \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ e C é o conjunto das circunferências de raio b tal que $b \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, então $\varphi(U) = \{(t,s) \in r \cap c : r \in R, c \in C\}$, que é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Além disso, prova-se por um raciocínio análogo ao dos exemplos anteriores que $\varphi|_U$ é um homeomorfismo. Porém φ não é sobrejetor pois $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Agora, se considerarmos $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, temos que $\overline{\varphi}$ é sobrejetor.

Agora, vamos apresentar algumas definições e propriedades de homeomorfismos locais, que serão utilizadas na caracterização dos espaços de recobrimento.

Definição 32. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ um homeomorfismo local. A fibra de um ponto $y \in Y$ pela aplicação f é o conjunto $f^{-1}(y)$.

Definição 33. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ um homeomorfismo local. Uma seção de f é uma aplicação contínua

$$\sigma : Y \to X$$

tal que $f \circ \sigma = id_Y$. Isso significa escolher, de forma contínua, para cada $y \in Y$, o ponto $\sigma(y)$ pertencente à fibra de y.

As definições acima podem ser estendidas para aplicações contínuas, simplesmente. No entanto, nem sempre é possível encontrar uma seção para uma função f qualquer. Porém temos o resultado abaixo:

Proposição 8. Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo local, então a fibra de cada ponto $y \in Y$ é um subconjunto discreto de X.

Demonstração. Pela definição de homeomorfismo local, para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe um aberto U de X tal que $f(U) = V \ni y$. Agora tomamos, para cada $x \in f^{-1}(y)$, uma vizinhança U_x, de forma que $U_x \bigcap f^{-1}(y) = x$. Logo, cada ponto x na fibra de y é isolado e, assim, a fibra de y é um subconjunto discreto de X. $\square$

3.2 Definição e resultados

Agora, vamos apresentar a definição de aplicação de recobrimento e alguns resultados que serão importantes para a construção dos exemplos na seção seguinte.

Definição 34. Uma aplicação $p : \tilde{X} \to X$ é dita uma aplicação de recobrimento – ou apenas recobrimento – quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ é uma reunião de abertos dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V.

Cada vizinhança V é dita uma *vizinhança distinguida.* O espaço $\tilde{X}$ é chamado de *espaço de recobrimento* de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é a *fibra* sobre x. O espaço X é a *base do recobrimento.*

Proposição 9. Uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é um homeomorfismo local de $\tilde{X}$ sobre X.

Demonstração. Pela definição, sabemos que $\bigcup_{\alpha} U_\alpha$ se aplica homeomorficamente sobre V e, como cada U_α é aberto, temos que $U = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ também o é. Assim, para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe um aberto U como acima que se aplica homeomorficamente sobre $V \subset X$ aberto, isto é, $p|_U$ é um homeomorfismo. Logo, p é um homeomorfismo local.

□

Proposição 10. Se a base X de um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é conexa, então todas as fibras $p^{-1}(x), x \in X$ possuem o mesmo número cardinal, chamado *número de folhas* do recobrimento.

Demonstração. Seja V uma vizinhança distinguida. Então, para cada $v \in V$, temos que a fibra $p^{-1}(v)$ tem a mesma cardinalidade, pela definição de recobrimento. Assim, o conjunto $A_n = \{v \in X : p^{-1}(x) = n\}$, $n \geq 1$ é aberto em X. Assim, $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$, isto é, os conjuntos A_n formam uma decomposição de X em abertos disjuntos. Mas X é conexo por hipótese. Então todos os A_n devem ser iguais, isto é, todas as fibras $p^{-1}(v)$ possuem o mesmo número cardinal. □

Para a proposição a seguir, será necessária a definição de aplicação *própria*, apresentada abaixo.

Definição 35. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e fechada. Dizemos que f é própria se para todo $y \in Y$ a fibra $f^{-1}(y)$ é compacta.

Proposição 11. Sejam X um espaço topológico de Hausdorff, Y conexo e $f : X \to Y$ um homeomorfismo local. São equivalentes:

i. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cada imagem inversa $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, possui n elementos.

ii. f é própria e sobrejetora.

iii. f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras $f^{-1}(y)$ são finitas.

Demonstração. Sejam X, Y e f como na hipótese. Vamos mostrar que i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii e iii $\Rightarrow$ i:

(i $\Rightarrow$ ii)

Sejam então $y \in Y$ e $A \subset X$ aberto tal que $f^{-1}(y) \subset A$. Por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $f^{-1}(y)$ possui n elementos, isto é, $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_n\}$. Disto e da hipótese de X ser Hausdorff, temos que existem $W_1, ...W_n$ abertos disjuntos dois a dois de forma que $x_i \in W_i, \forall i \in \{1, ..., n\}$ e $W_1 \cup ... \cup W_n \subset A$. Então, chamando $V = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} f(W_i)$, temos que V é uma vizinhança aberta de y.

Agora, como f é contínua e V é interseção finita de abertos, temos que $f^{-1}(V)$ é um aberto. Assim, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, temos que $U_i = W_i \cap f^{-1}(V)$ é aberto. Tomando $U = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_i$, temos $U \subset f^{-1}(V)$. Seja agora $w \in f^{-1}(V)$. Então existem $w_i \in W_i, \in \{1, ..., n\}$ tais que $f(w_i) = f(w) = v$ para todo i. Como $f^{-1}(v)$ é finita por hipótese e os W_i são dois a dois disjuntos por construção, temos $w = w_{i_0}$ para algum i_0, isto é, $w \in U_{i_0} = f^{-1}(V) \cap W_{i_0}$. Desta forma, $w \in U$, donde segue que $f^{-1}(V) = U \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} W_i \subset A$. Logo, f é fechada.

(ii $\Rightarrow$ iii)

Seja $y \in Y$ arbitrário. Por hipótese, $f^{-1}(y)$ é discreta e compacta e, portanto, é finita, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_n\}$. Sejam $W_1, ..., W_n \subset$

X abertos disjuntos dois a dois tais que $x_i \in W_i$ e que se aplicam homeomorficamente por f sobre abertos de Y. Como f é contínua e cada W_i é aberto, temos que $W = f(W_1) \cap ... \cap f(W_n)$ é uma vizinhança aberta de y. Agora, como f é fechada, existe um aberto $V \subset W$ contendo y tal que $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Tome, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $U_i = f^{-1}(V) \cap W_i$. Então:

$$f^{-1}(V) = (\bigcup_{i=1}^{n} W_i) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(V) \cap W_i) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

Como $V \subset f(W_i)$, temos que f aplica cada U_i homeomorficamente sobre V, ou seja, f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras são finitas.

(iii $\Rightarrow$ i)

Seja Y conexo. Então, pela Proposição 11, temos que todas as fibras $f^{-1}(y)$ possuem o mesmo número cardinal, donde segue o resultado.

$\square$

Corolário 3. Se X é um espaço topológico compacto e Hausdorff e Y é um espaço topológico Hausdorff, então todo homeomorfismo local sobrejetor $f : X \to Y$ é um recobrimento.

Demonstração. Sejam X, Y espaços topológicos tais que X é compacto e Hausdorff e Y é Hausdorff e $f : X \to Y$ um homeomorfismo local sobrejetor. Queremos mostrar que f é um recobrimento. Pela Proposição 12, como X é Hausdorff e f é homeomorfismo, temos que se f é própria e sobrejetora, então f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras são finitas. Como f é sobrejetora por hipótese, basta mostrarmos que f é própria.

- f é fechada: seja $G \subset Y$ um subconjunto fechado de Y. Como f é contínua, temos que $f^{-1}(G)$ é fechado em X. Chamando $F = f^{-1}(G)$ e lembrando que f é sobrejetora, temos que $f(f^{-1}(G)) = G$. Logo, f é fechada.

- Para cada $y \in Y$, a fibra $f^{-1}(y)$ é compacta: como $f^{-1}(y)$ é fechado e X é compacto, temos que $f^{-1}(y)$ é compacto.

Logo, f é própria, donde segue que f é uma aplicação de recobrimento.

$\square$

Faremos brevemente a relação entre grupo fundamental e espaços de recobrimento. Seja $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento e $a : I \to X$ um caminho. Um *levantamento* de a é um caminho $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{a} = a$. Se $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ é um ponto tal que $p(\tilde{x}_0) = a(0) = x_0$ (isto é, $\tilde{x}_0$ está na fibra de x_0), existe um único levantamento $\tilde{a}$ tal que $\tilde{a}(0) = \tilde{x}_0$.

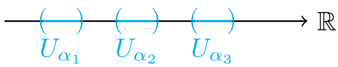
Seja $a : I \to X$ um caminho ligando os pontos $x_0 = a(0)$ e $x_1 = a(1)$. O levantamento de a fornece uma bijeção entre as fibras $p^{-1}(x_0)$ e $p^{-1}(x_1)$.

A propriedade que relaciona o grupo fundamental de X com o recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é a seguinte: o fato do intervalo I ser simplesmente conexo induz uma bijeção entre $\pi_1(X, x_0)$ e a fibra $p^{-1}(x_0)$. De fato, sejam $a : I \to X$ um representante de uma classe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{a}$ o levantamento de a a partir de $\tilde{x}_0$. Então $B : \pi_1(X, x_0) \to \tilde{X}$ definida por $B(\alpha) = \tilde{a}(1)$ é a bijeção procurada.

3.3 Exemplos

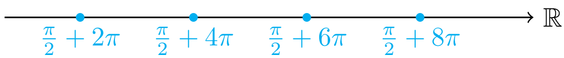
Nesta seção, iremos apresentar alguns recobrimentos interessantes para os principais espaços topológicos estudados neste trabalho. Os três primeiros exemplos exibem diferentes recobrimentos para a circunferência unitária S^1.

Exemplo 5. A função $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\varphi(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, apresentada no Exemplo 1 da Seção 3.1 é uma aplicação de recobrimento para a circunferência unitária. De fato, seja $x \in S^1$ arbitrário. Temos que $x = (\cos(t_x), \text{sen}(t_x))$, para algum $t_x \in [0, 2\pi)$. Então $\varphi^{-1}(x) = \{t \in \mathbb{R} : t = t_x + 2\alpha\pi, \alpha \in \mathbb{Z}\}$. Agora, tomando $U_\alpha = (t_x + 2\alpha\pi - 1, t_x + 2\alpha\pi + 1)$, temos a seguinte situação:

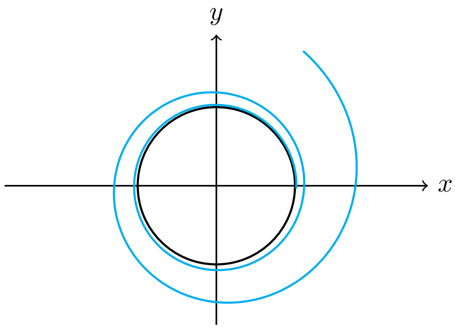


Cada U_α é aberto, os U_α são distintos dois a dois e é possível encontrar vizinhança V de x em S^1 tal que $\varphi^{-1}(V) = U_\alpha$. Como já mostramos que φ é um homeomorfismo local sobre S^1, temos que cada U_α se aplica homeomorficamente a S^1.

Logo, φ é uma aplicação de recobrimento de $\mathbb{R}$ sobre S^1. Alguns pontos da fibra do ponto (0,1) por esta aplicação estão indicados na figura a seguir:



Exemplo 6. Considere agora o traço da função $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\vartheta(t) = (1+e^t)e^{it} = ((1+e^t)\cos(t), (1+e^t)\text{sen}(t))$, denotado por $G(\vartheta)$ e representado na figura abaixo:



A aplicação $p : G(\vartheta) \to S^1$ que projeta pontos do traço de ϑ na circunferência unitária é um recobrimento de S^1.

Verifiquemos esta afirmação. Tome $x \in S^1$ arbitrário, V uma vizinhança de x e denote $T = \{t \in \mathbb{R} : (\cos(t), \text{sen}(t)) \in V\}$. Note que

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} \left\{((1+e^{2\alpha\pi t})\cos(2\alpha\pi t), (1+e^{2\alpha\pi t})\text{sen}(2\alpha\pi t)) : t \in T\right\}$$

Chamando

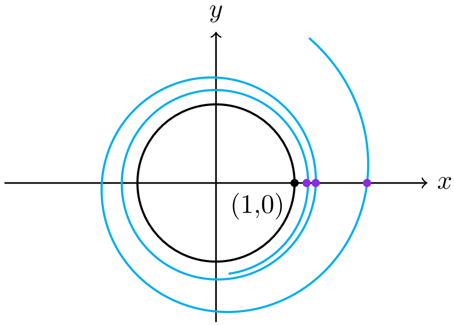
$$U_\alpha = \left\{((1+e^{2\alpha\pi t})\cos(2\alpha\pi t), (1+e^{2\alpha\pi t})\text{sen}(2\alpha\pi t)) : t \in T\right\},$$

temos que os U_α são dois a dois distintos e se aplicam homeomorficamente sobre V. Para verificar o último fato, fixe $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ arbitrário e considere $p|_{U_{\alpha_1}}$. Temos que $p|_{U_\alpha}$ é contínua e admite inversa contínua, pois é obtida a partir de funções que satisfazem tais condições (e^t, $\cos(t)$ e $\text{sen}(t)$). Além disso, $p(U_{\alpha_1}) = V$, pela construção de U_{α_1}. Desta forma, cada U_α se aplica homeomorficamente sobre V.

Logo, p é uma aplicação de recobrimento de $G(\vartheta)$ sobre S^1. Neste caso, a fibra de um ponto $x_0 \in S^1$ será dada pela interseção entre a semirreta com origem em $(0,0)$ que passa por x_0 o traço da curva ϑ. Para ilustrar esta situação, considere a fibra do ponto (1,0), dada por

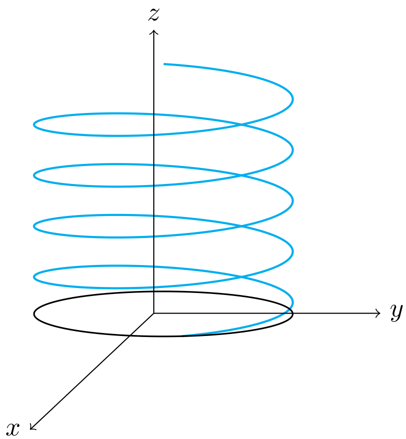
$$\{(1+e^{2k\pi}, 0) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

Alguns pontos de tal fibra estão indicados, em roxo, na figura a seguir:



y
x
(1,0)

Exemplo 7. Considere a função $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$, cujo traço $G(\gamma)$ está ilustrado em azul na figura a seguir. Observe que, neste caso, a circunferência unitária S^1 está sendo tratada como uma curva em $\mathbb{R}^3$.



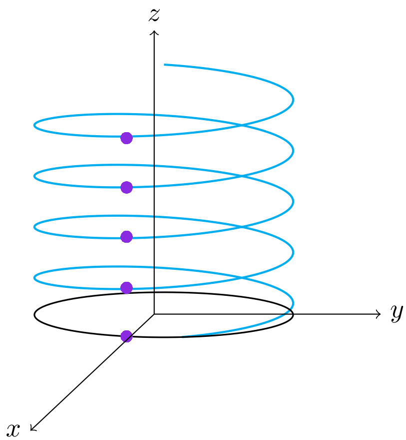
A aplicação $p : G(\gamma) \to S^1$ que projeta os pontos de $G(\gamma)$ em S^1 é um recobrimento de S^1 por $G(\gamma)$. De fato, tome $x \in S^1$ arbitrário e V uma vizinhança de x. Denote $T = \{t \in \mathbb{R} : (\cos(t), \text{sen}(t)) \in V\}$ e note que

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \{(\cos(2\alpha\pi t), \text{sen}(2\alpha\pi t), 2\alpha\pi t) : t \in T\}$$

Chamando $U_\alpha = \{(\cos(2\alpha\pi t), \text{sen}(2\alpha\pi t), 2\alpha\pi t) : t \in T\}$, temos que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_\alpha$ e que os U_α são disjuntos dois a dois. Resta mostrar que cada U_α se aplica homeomorficamente sobre V. Note que, neste caso, p é a projeção usual sobre o plano XY, que é contínua e possui inversa contínua. Além disso, segue da construção de U_α que $p(U_\alpha) = V$.

Logo, p é uma aplicação de recobrimento de $G(\gamma)$ em S^1. A fibra de um ponto P por p é dada pela interseção entre a reta $P \times \mathbb{R}$ e o traço de γ.

A fibra do ponto (1,0,0) está ilustrada na figura a seguir:



Neste exemplo fica clara a relação entre grupo fundamental e espaço de recobrimento. A cada ponto $\tilde{x}$ na fibra de $x_0 \in S^1$ podemos associar um número inteiro: o número de voltas, partindo de um ponto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, que o levantamento de um caminho fechado a em S^1 (com base em x_0) deu para sair de $\tilde{x}_0$ e chegar a $\tilde{x}$. Este número inteiro será justamente o grau do caminho de a. Reciprocamente, a cada número inteiro podemos associar um ponto na fibra $p^{-1}(x_0)$. Como o grupo fundamental de S^1 é isomorfo a $\mathbb{Z}$, fica construída a bijeção.

Exemplo 8. A função $\psi : \mathbb{R}^2 \to T$ dada por $\psi(s,t) = (e^{is}, e^{it})$, apresentada no Exemplo 2 da Seção 3.1 é um recobrimento para o Toro. De fato, seja $x = ((r\cos(v_0)+a)\cos(u_0), (r\cos(v_0)+a)\text{sen}(u_0), r\text{sen}(v_0)) \in T$ arbitrário e V uma vizinhança de x. Temos que

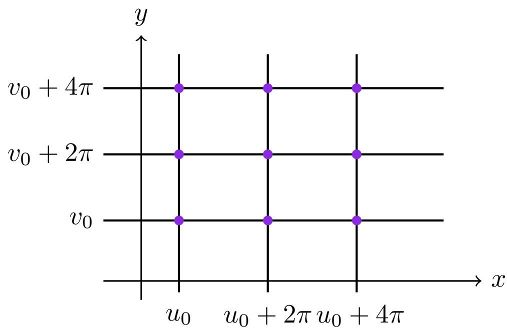
$$\psi^{-1}(V) = \{(u_0+2\alpha\pi-\varepsilon, u_0+2\alpha\pi+\varepsilon)\times(v_0+2\alpha\pi-\varepsilon, v_0+2\alpha\pi+\varepsilon), \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

Chamando

$$U_\alpha = (u_0 + 2\alpha\pi - \varepsilon, u_0 + 2\alpha\pi + \varepsilon) \times (v_0 + 2\alpha\pi - \varepsilon, v_0 + 2\alpha\pi + \varepsilon),$$

temos que $\psi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} U_\alpha$. Além disso, os U_α são dois a dois distintos. Já mostramos que ψ é um homeomorfismo local. Logo, cada U_α se aplica homeomorficamente sobre V, donde segue que ψ é uma aplicação de recobrimento.

Parte da fibra de um ponto (u_0, v_0) qualquer está ilustrada na figura a seguir:



Finalizaremos este trabalho com um belo exemplo de recobrimento, que dá origem ao que é conhecido como *Folheação de Reeb*. Nos baseamos em (CAMACHO; LINS-NETO, 1979)

Iniciamos a construção considerando uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r^2)e^{x_3}$, em que $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ tal que:

- $\alpha(0) = 1$;
- $\alpha(1) = 0$;
- Se $t > 0$, então $\alpha'(t) < 0$, isto é, α é decrescente quando $t > 0$.

Dado $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de f, como observado na Seção 1.3, temos que $f^{-1}(c) = S_c$ é uma superfície regular, chamada de *folha*.

Se $c = 0$, temos

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1^2 + x_2^2)e^{x_3} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Logo, $f^{-1}(0)$ é o cilindro $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Se $p = (x_1, x_2, x_3)$ é tal que $f(p) = c \neq 0$, temos:

$$e^{x_3}\alpha(r^2) = c \Rightarrow e^{x_3} = \frac{c}{\alpha(r^2)} \Rightarrow x_3 = \ln\left(\frac{c}{\alpha(r^2)}\right)$$

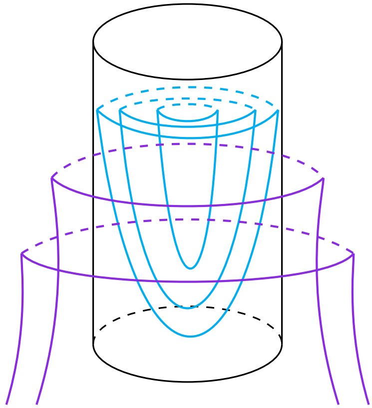
Assim, para $c \neq 0$, obtemos uma parametrização φ de S_c, dada por:

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \ln\left(\frac{c}{\alpha(r^2)}\right)\right).$$

Se $c > 0$, temos $f^{-1}(c) = \left\{\left(x_1, x_2, \ln\left(\frac{c}{\alpha(r^2)}\right)\right)\right\}$. Desta forma, para que a terceira coordenada de φ esteja bem definida, é necessário que $\alpha(r^2)$ seja positivo, já que c é positivo. Pela definição de α, isto implica que $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Neste caso, a superfície S_c está na região de $\mathbb{R}^3$ interior ao cilindro C.

Se $c < 0$, devemos ter $\alpha(r^2) < 0$ para que a terceira coordenada de φ esteja bem definida. Pela definição de α, isto implica que $x_1^2 + x_2^2 > 1$. Neste caso, a superfície S_c está na região de $\mathbb{R}^3$ exterior ao cilindro C.

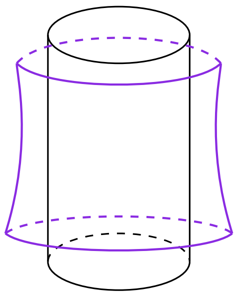
A situação descrita nos parágrafos acima está ilustrada na figura a seguir, na qual as superfícies em azul são as geradas pelo caso $c > 0$ e as superfícies em roxo são as geradas pelo caso $c < 0$. O conjunto das superfícies S_c é chamado *Folheação de Reeb*.



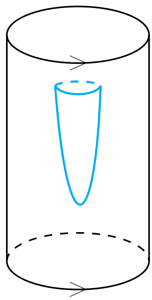
Proposição 12. Na situação acima, as folhas do interior do cilindro são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e as folhas no exterior do cilindro são homeomorfas a cilindros.

Agora, vamos apresentar exemplos nos quais uma folha desta folheação pode ser vista como espaço de recobrimento para o cilindro e para o toro.

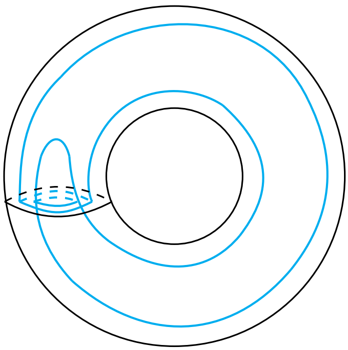
Exemplo 9. Sejam $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ e f, α, S_c como definidas anteriormente. Então $S_{-1} = f^{-1}(-1)$ é um espaço de recobrimento do cilindro C.



Exemplo 10. Agora vamos construir a folheação de Reeb no Toro. Para isso, considere C, f como anteriormente e $c = 1$: S_1 é uma superfície no interior do cilindro C. Agora, seguindo o procedimento descrito na Seção 1.3, orientando as extremidades do cilindro no mesmo sentido, temos a seguinte situação:



Finalmente, colando as extremidades do cilindro, obtemos a situação da figura abaixo:



Nestas condições, S_1 é um espaço de recobrimento para o toro.

Considerações Finais

Neste Trabalho de Conclusão de Curso estudamos Grupos Fundamentais e Espaços de Recobrimento (temas vastos e com inúmeras aplicações), usando como motivação alguns exemplos de natureza mais geométrica. Os temas estudados neste trabalho, além de interessantes por si só, são relevantes por exibirem a conexão entre álgebra e geometria em um nível compreensível a um aluno de graduação.

A primeira parte do trabalho foi dedicada a dar a definição do grupo fundamental de um espaço topológico e estudar suas propriedades. Vimos que o grupo fundamental pode dar informações sobre a forma do espaço. O grupo fundamental é construído considerando classes de equivalência de caminhos fechados; estes caminhos informam o que ocorre com a forma do espaço. Se for possível deformá-los a um ponto, dizemos que o espaço é contrátil e que o grupo fundamental é trivial. É o que ocorre, por exemplo, com uma reta, um plano ou mesmo uma esfera. Se não for possível deformar um caminho fechado, então algo interessante deve ocorrer no espaço. É o caso da circunferência, do cilindro e do toro. Vimos que o grupo fundamental da circunferência é isomorfo a $\mathbb{Z}$, e com isso concluímos que o grupo fundamental do cilindro também é isomorfo a $\mathbb{Z}$, enquanto o grupo fundamental do toro é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Na segunda parte do trabalho vimos a definição de recobrimento. Apresentamos exemplos de recobrimentos da circunferência, e finalizamos o capítulo com um bonito exemplo de recobrimento do cilindro e do toro, obtido através da Folheação de Reeb.

REFERÊNCIAS

CAMACHO, C.; LINS-NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 1979. 238 p.

CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2010. 607 p.

HATCHER, A. *Algebraic Topology*. [S.l.: s.n.], 2001. 550 p.

LANG, S. *Álgebra para Graduação*. Rio de Janeiro, Brasil: Ed. Ciência Moderna, 2008. 508 p.

LIMA, E. L. Curvas regulares no plano. *Matemática Universitária*, v. 6, p. 49–63, 1987.

LIMA, E. L. *Grupos Fundamentais e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro, Brasil: Ed. IMPA, 2006. 210 p.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2009. 297 p.

MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Nova Iorque, Estados Unidos: Springer, 1967. 264 p.

MUNKRES, J. *Topology*. Marion, Estados Unidos: Pearson, 2000. 537 p.