Organizando o programa de seis anos

Pode ser interessante ver como foi iniciada a experiência de se tentar chegar ao programa recentemente construído. Primeiramente, um pequeno grupo de matemáticos, conhecedores das tentativas de reforma passadas e presentes nos EUA e na Europa, reuniu-se a fim de preparar um congresso sôbre o programa. Êste grupo estabeleceu certas regras de ação e nomeou duas subcomissões para o preparo de trabalhos envolvendo a filosofia, os assuntos e o ponto de vista com relação ao ensino da geometria. Os dois trabalhos foram amalgamados num único, com um índice de assuntos e distribuição em anos escolares. Êste trabalho foi distribuído prèviamente a todos os anotadores e consultores matemáticos (para um congresso de três semanas) e representava uma posição que devia ser aceita para fins de desenvolvimento do programa.

No congresso, do qual participaram 8 matemáticos norte-americanos, 4 europeus e 6 professôres que trabalharam como anotadores, o relatório foi aceito com ligeiras modificações logo no primeiro dia. A comissão subdividiu-se então em comissão de álgebra, geometria, probabilidade (incluindo estatística), análise e matemática numérica — devendo cada uma preparar um programa de seis anos em seu campo específico, — e mostrar suas relações com os outros campos. Depois de oito dias, com algumas sessões plenárias, os programas foram aceitos e foi delineado o trabalho para o primeiro ano de escola secundária em cada um dêles.

Uma nova subcomissão foi encarregada de distribuir os programas aprovados num programa racional para seis anos. As subcomissões originais foram chamadas a desenvolver o programa para o primeiro ano, com sugestões sôbre organização e ensino dos assuntos. No final do congresso a comissão especial apresentou o programa unificado compreensível que segue.

Apesar de que os tópicos estejam distribuídos entre os seis anos do curso secundário, sòmente o programa do primeiro ano está bem definido neste ponto da experiência. Tanto a distribuição por anos como a ordem dos tópicos nos anos posteriores deve ser discutida e aceita em congressos de planejamento posteriores. Em verdade, mesmo o programa do primeiro estará sujeito a mudanças advindas das experiências que forem feitas com êle.

Ordem dos Tópicos do Primeiro Ano (7.ª série escolar) SSMCIS:

0) Planejamento de um processo matemático — introdução aos fluxogramas. Reexame das propriedades de $(N, +, <)$.
1) Adição e multiplicação no relógio, aplicações e operações em conjunto finitos.
2) Propriedades da operação em conjuntos.
3) Aplicações e transformações em N, Q^+.
4) Introdução a $(Z, +, <)$.
5) Reticulados no plano.
6) Reexame da multiplicação em N e desenvolvimento de $(Z, +, \cdot, <)$. Comparação de Z com $(Z, +, \cdot)$.
7) Aplicações e transformações de Z^2.
8) Conjuntos e relações binárias em conjuntos.
9) Transformações do plano. Orientação no plano.
10) Regiões angulares e suas medidas.
11) Teoria elementar dos números.
12) Probabilidade e estatística.
13) Construção de $(Q, +, \cdot, <)$.
14) Geometria do ponto material.
15) Aplicações de Q.
16) Incidência e ordem — um pequeno sistema axiomático.

Tópicos do Segundo Ano (não-ordenados) — SSMCIS

1) Conjuntos e grupos.
2) Tratamento axiomático da geometria plana afim.
3) Corpos e introdução aos números reais.
4) Perpendicularismo, produtos escalares e o teorema de Pitágoras.
5) Combinatória.
6) Transformações no espaço.
7) Funções reais.
8) Estatística; tendência central e dispersão.
9) Trigonometria elementar.
10) Tratamento axiomático da medida de conjuntos planos.

Tópicos do Terceiro Ano (não-ordenados) SSMCIS

1) Estrutura do espaço tridimensional afim e espaço métrico.
2) Introdução às matrizes, espaços vetoriais e solução de sistemas lineares.
3) Estudo da esfera.

Assuntos para seminários e estudo independente

1) Medida de ângulo.
2) Teoria da medida.
3) Espaços vetoriais normados.
4) Formas quadráticas.
5) Teorema de Frobenius, teoria de Galois, álgebra de Boole.
6) Teoria dos polinômios.
7) Determinantes e espaços vetoriais com produto interno.
8) Métodos numéricos para a solução de equações diferenciais.

O livro do primeiro ano foi escrito e está sendo ensinado, por 20 professôres especialmente treinados, a 350 bons alunos selecionados. Após três meses sabemos que os estudantes são capazes de fazer o trabalho relativo aos itens 0, 1, 2, 3, 4 e 12 do primeiro ano, com grande sucesso. Daqui a dois anos veremos se o resto do programa funcionará bem.

Programas de matemática no ensino de engenharia

Carlos Imaz
(México)

Há algum tempo na cidade do México, na Nona Convenção da União Pan-americana de Associação de Engenharia, o Prof. A. Morgan, do Stevens Institute of Technology, falou sôbre os problemas gerais do ensino de engenharia e examinou o assunto de dois ângulos, o primeiro referente aos países "desenvolvidos" e o segundo aos "em desenvolvimento". Presumo que o Professor Morgan não tem outro objetivo e entende esta diferenciação principalmente do ponto de vista do desenvolvimento tecnológico e econômico; parece-me que esta divisão é essencial pois os países "desenvolvidos" já atingiram êste estado mesmo se com pequena intensidade, através da resolução mais efetiva do tipo de problema com que ora nos preocupamos e que são mais agudos e críticos, necessitando portanto de mais atenção nos países "em desenvolvimento", principalmente na América Latina. Isto justifica o fato de analisarmos o assunto do ponto de vista da divisão de países acima mencionada.

Por muitas razões, a maioria das quais bem conhecidas, a solução que prevalece é a que se sugere mais ràpidamente; isto é, copiar o que é feito nos países mais adiantados e aplicá-lo mais ou menos diretamente em cada caso particular. De maneira nenhuma estou sugerindo que não possamos lucrar com a experiência dos outros; mas sim que devemos, em primeiro lugar analisar cuidadosamente nossas próprias situações de modo a podermos determinar que parte daquela experiência nos é útil e o que deve ser substituído por soluções convenientes para cada caso.

Vejamo-lo mais especìficamente. Uma coisa é clara e incontestável: a matemática desempenha um papel fundamental na engenharia e, portanto, os programas de ensino de matemática são necessários para aquêles que estudam engenharia. Mas como devem ser formulados tais programas? Uma maneira, que não é *muito trabalhosa*, consiste em perguntar aos engenheiros que *tipo de matemática* êles precisam e basear nosso programa na média dos dados obtidos. Aparentemente a grande maioria dos programas ora em uso surgiram desta maneira prosaica. Qual é o resultado dêstes programas? Como muitas "médias", êles não convêm a ninguém. Para muitos, em nosso caso para a maioria, êles são muito amplos; para o resto, insuficientes. Alguns pensarão que esta situação pode ser fàcilmente corrigida no futuro, já que o primeiro grupo esquece o que lhes foi ensinado (assumindo, com otimismo que êles chegaram a aprender) pela simples experiência da não-utilização; e os outros adquirem o conhecimento à medida que dêle precisam. Do ponto de vista da engenharia moderna, tal atitude é totalmente inaceitável. Mas isto não é tudo; desta forma esquece-se de levar em conta os recursos humanos disponíveis para levar a efeito o ensino, a relação entre o ensino e as outras disciplinas que fazem parte do currículo de engenharia e quase inteiramente os diversos aspectos particulares que deviam distinguir o ensino da matemática para engenheiros do ensino para outros grupos. Finalmente, não se leva em conta a educação prévia que os estudantes tiveram até ingressarem na Escola de Engenharia.

Estas e outras razões tornam claro que o currículo de matemática das escolas de engenharia da América Latina devia ser modificado, tendo em vista dois objetivos principais: a incorporação das novas diretrizes e progressos para melhor utilizar os recursos humanos, tanto em relação aos professôres como aos alunos. Devemos ter em mente que a execução efetiva dessas modificações não é um fato acadêmico nôvo e isolado mas, pelo contrário, representa, indubitàvelmente, mais um passo que deve ser dado para que o resto das nações "em desenvolvimento" tenham esperanças de suficiência, isto é, de se tornarem "desenvolvidas" algum dia.

Como já disse, um dos defeitos mais óbvios do currículo de matemática em nossas escolas de engenharia é que, para muitos, êle é extenso demais. Isto é baseado, em geral, na crença de que a matemática é que faz o engenheiro. Isto pode ser verdadeiro para certos tipos especiais de engenheiros, mas mesmo assim tenho dúvidas, pois sendo a matemática um instrumento indispensável, também a metodologia matemática não é aplicada em engenharia e é portanto apenas uma parte da educação e formação de engenheiros.

O problema da extensão do currículo de matemática é sério. Na grande maioria de nossas universidades os programas para graduação em engenharia são estudados de acôrdo com linhas fixas (gradativamente, em cinco anos), às quais todos os estudantes estão sujeitos, seja qual fôr o tipo de atividade profissional que pretendam ou estejam capacitados a realizar. Isto é, trabalho técnico rotineiro, trabalho técnico avançado ou ensino e pesquisa. E não havendo escolas técnicas para treinar elementos para o primeiro tipo de trabalho, aparece-nos como real o fato de que elementos interessados em estudar qualquer tipo de engenharia devem estudar pelo mesmo e único método de ensino.

Para demonstrar claramente que realmente existe tal extensão exagerada dos programas de matemática, apresentarei alguns dados comparativos. Temos o currículo fundamental para engenheiros, que deve ter 350 horas de aula de acôrdo com recomendações da Comissão sôbre o Programa para Graduação em Matemática (CUPM). Nas universidades soviéticas, por exemplo, na especialidade de engenharia civil, o programa de matemática toma 400 horas (incluindo aulas de teoria e exercícios). No México, qualquer especialidade de engenharia tem 640 horas de aula de matemática, além de aulas extraordinárias para exercícios.

No México, assim como em outros países latino-americanos, esta situação cria uma série de problemas sérios. Em primeiro lugar cria uma procura enorme de professôres que devem estar treinados para um nível bem alto de matemática. Esta procura não está prestes a ser atendida, e duvido que o seja se a situação continuar de acôrdo com as mesmas linhas de agora; desde que, entre outras coisas, pode não haver solução para o problema de ter o número necessário de professôres bem preparados.

Devemos também encarar o fato inegável de que êstes cursos de matemática constituem grandes obstáculos aos estudantes. Isto pode ser verificado amplamente pelo exame da quantidade de desistências. Por exemplo, no México, cêrca de 70% dos estudantes que se matriculam em escolas de engenharia interrompem seus estudos durante os primeiros dois anos pois não conseguem passar satisfatòriamente nos referidos cursos. A pior parte de tudo é que a esta altura os estudantes ainda não receberam nenhuma educação técnica e saem da universidade nas mesmas condições em que entraram, além de levarem uma sensação clara de frustração. A injustiça e ineficácia desta situação torna-se mais evidente quando muitos dos estudantes que continuam os estudos descobrem, mais tarde, que os últimos cursos em sua especialidade são completamente heurísticos na forma e, na maioria dos casos, usam simples introduções para o manuseio de manuais que quase nunca utilizam a instrução matemática prèviamente recebida e que, pelo desuso, já foi esquecida quando terminam o curso. Isto é tão verdade que os estudantes que fazem estudos de pós-graduação têm de aprender novamente a matemática que deviam saber do curso de engenharia.

Mas o pior de tudo é que as coisas progridem. Diz-se hoje que o engenheiro necessita um conhecimento de matemática cada vez maior. Isto é verdadeiro para certos tipos de engenheiros, mas está provocando um aumento nos assuntos de matemática que se tenta fornecer a todos engenheiros o que, conseqüentemente, piora a situação que estivemos discutindo.

Na melhor das hipóteses, se esta situação persistir, teremos a educação de um pequeno número de engenheiros altamente qualificados que são, é claro, absolutamente necessários, mas que se encontrarão num meio social em que não poderão desempenhar os deveres para os quais foram treinados.

Isto leva a uma destas duas coisas: ou o engenheiro devota-se a tarefas que exigem menos que a alta educação por êle recebida, ou emigra para lugares onde possa utilizar sua capacidade profissional mais completamente.

Diz-se freqüentemente que temos, na América Latina, uma forte tendência a procurar o melhor diretamente, sem ligar para os passos intermediários do processo. Quando uma escola de engenharia é fundada ela é modelada, por exemplo, no Massachusets Institute of Technology. Para fins de esclarecimento, vejamos a situação num campo diferente, o da Medicina. A faculdade de medicina do México é reconhecida mundialmente e ainda não há, curiosamente, uma escola razoável de enfermagem. Como resultado, a única coisa que os médicos não fazem nos hospitais é lavar o assoalho.

Naturalmente, não creio que as condições que apontei sejam as únicas relacionadas com a confecção de programas de matemática para engenheiros. Mas estou totalmente convencido de que elas são, em geral, ignoradas, e por isso analisei-as com algum detalhe.

Tenho a impressão que o caminho que se devia seguir para a formulação de programas de matemática para escolas de engenharia pode agora ser visto bem claramente. Em primeiro lugar, nos casos em que a situação coincide com aquela descrita nos parágrafos anteriores, dever-se-ia promover a reestruturação das escolas de engenharia para torná-las suficientemente maleáveis a fim de produzir engenheiros nos três níveis de atividade mencionados. Ao mesmo tempo — e devia ser encargo de comissões mistas de engenheiros e matemáticos — deviam ser analisadas as necessidades matemáticas de cada nível. Esta análise deve ser feita com a atenção concentrada nas necessidades reais e de modo a evitar qualquer intenção de fornecer erudição. A menos que as coisas sejam manejadas dêste modo, o que acontecerá é o mesmo que aconteceu no México, isto é, o aumento da necessidade de matemática para engenheiros de alto nível resultou numa ampliação ainda maior dos novos programas e uma conseqüente piora da situação. Por exemplo, quase não há professôres para ministrar êstes cursos. Ainda assim, isto não é o pior de tudo; o filtro através do qual todos os engenheiros devem passar é ainda mais fino.

Isto não satisfaz às necessidades reais de nosso desenvolvimento tecnológico. Não tenho intenções de saber exatamente quais as necessidades matemáticas dos diversos programas de engenharia, mas gostaria de ser um pouco mais específico e dar uma idéia da possível estruturação do currículo de matemática de acôrdo com os níveis já indicados. A êstes chamaremos de primeiro, segundo e terceiro em ordem acadêmica ascendente.

Para o primeiro, parece ser suficiente, em têrmos práticos, fornecer um conhecimento — mais manipulável que conceitual — de álgebra, cálculo e geometria analítica. Com isto, quero dizer que apesar de qualquer curso de matemática para engenheiros, em qualquer nível, devesse ser caracterizado por "motivação", "intuição", "extensão" e "aplicação", a extensão não deve ser usada neste nível para selecionar engenheiros. Parece-me absurdo, por exemplo, eliminar alguém por não saber demonstrar o teorema da média do cálculo diferencial. A "extensão" deve ser usada com um conta-gôtas e sòmente onde fôr absolutamente necessária, e não onde o seja apenas aparentemente. Por exemplo, sei, por experiência própria, que é completamente inútil provar coisas como a continuidade de produtos de funções contínuas com argumentos rigorosos do tipo ϵ e δ.

Por outro lado, os aspectos da "motivação", "intuição" e "aplicação" são os de que devem fazer uso preferencial nestes cursos. A qualquer preço, devemos evitar que sejam dadas aos estudantes apenas definições matemáticas vazias (pelo menos para êles), o que acontece mais freqüentemente do que se imagina.

Poderíamos acrescentar a êstes cursos básicos outros tais como estatística e probabilidades (elementares), noções de programação e análise numérica, métodos gráficos, etc. Por exemplo, o curso de álgebra seria um bom lugar para se ensinar programação elementar e se uma simples máquina de calcular de mesa fôr disponível, problemas numéricos podem ser esquematizados e propostos aos estudantes — uma atitude que em geral estimula seu interêsse e entusiasmo.

A situação no segundo nível é consideràvelmente mais complexa e certamente dependerá em grande parte de que ramo específico de engenharia se trata.

O que se pode fazer é designar matérias que mostrem o nível de conhecimento matemático desejável de se ter, repetindo que, nesses cursos, também se deve enfatizar os estágios de "motivação", "intuição" e "aplicação". O currículo neste nível pode incluir, entre outras coisas, matérias como cálculo avançado, equações diferenciais, análise numérica, equações com diferenças variáveis complexas, geometria diferencial, etc., de acôrdo com as necessidades específicas de cada tipo de engenharia. Finalmente, com relação ao terceiro nível, é pràticamente impossível demarcar limites, mas êste seria certamente o nível para tópicos como teoria da integração (Lebesgue), cursos avançados de equações diferenciais, equações integrais e outros tópicos especiais de análise fundamental, etc.

Devo salientar que em todo êste currículo devemos estar cônscios do grau de sofisticação no ensino e não permitir que êstes programas se tornem teóricos e muito pouco práticos, o que me demonstra a importância absoluta de se ter professôres de matemática competentes (pelo menos tendo o mestrado) em todos os níveis. Sòmente êles possuem o conhecimento matemático adequado, do que concluímos que as escolas de matemática encontram outra tarefa importante, que é a de produzir tais professôres. Isto pode parecer óbvio a muitos, mas a verdade é que é desprezado com freqüência alarmante e especialmente onde a chamada matemática pura está mais desenvolvida, já que nesses casos houve uma polarização do interêsse dos professôres (e portanto do interêsse dos alunos) para os aspectos

mais abstratos e avançados de matemática, com uma conseqüente negligência do setor intermediário. O que acontece aqui lembra o que ressaltei no início com relação às escolas de engenharia. Nossas ótimas escolas de ciência são capazes de produzir excelentes pesquisadores de matemática que, em muitos casos, vão melhorar os níveis acadêmicos de países mais avançados; ao passo que são incapazes de produzir simples professôres de cálculo avançado. Tudo isto origina-se, em grande parte, de um desejo de adotar o princípio errôneo de que a publicação de pesquisas é uma condição necessária para o ensino, princípio êste que, em muitos lugares, está forçando o mundo acadêmico a uma atitude de "publique-o agora, pense sôbre êle depois e no ínterim dê suas aulas". Outra característica dos cursos de matemática para engenheiros que, em minha opinião, deve ser mudada é sua concentração. A tendência usual é carregar os estudantes com o máximo possível em um ou dois anos e não voltar ao assunto. Isto tem duas desvantagens: por um lado, o perigo de indigestão e portanto a abertura de um vácuo perigoso entre os estudos iniciais e os de pós-graduação.

No entanto, é claro que o estudo da possível distribuição é um assunto delicado que deve ser examinado com cuidado.

Para concluir, quero mencionar outro nível de engenharia ao qual ainda não me referi. É o nível dos chamados "engenheiros-matemáticos" ou "matemáticos aplicados" que é indubitàvelmente de grande importância e deve ser estudado. Mas tenho a convicção de que estas pessoas deviam ser treinadas bàsicamente nas escolas de ciências e não nas escolas de engenharia e, portanto, deviam ser levados em conta na reconstrução dos programas daquelas instituições.

O programa dinamarquês de matemática

Erik Kristensen
(Universidade de Aarhus, Dinamarca)

Introdução

Êste relatório está relacionado principalmente com o ensino de matemática no curso colegial na Dinamarca, o chamado "gymnasium" (10.° ao 12.° anos escolares). Além disso, serão dadas algumas informações sôbre o ensino de matemática nas universidades, particularmente com referência à educação de professôres secundários.

O "gymnasium" dinamarquês é uma escola seletiva. É difícil precisar a porcentagem da população que freqüenta esta escola, mas ela está aumentando de ano para ano. É razoável dizer que os estudantes de matemática do "gymnasium" são recrutados dentre os primeiros 20% da população (dados referentes a inteligência).

O "gymnasium" é dividido em vários ramos. No momento temos dois ramos linguísticos e três matemáticos. O curso mais avançado de matemática é dado no ramo de matemática-física (cêrca de 6 horas por semana em cada um dos três anos). No que segue, concentrar-me-ei neste curso.

Todos os colégios dinamarqueses seguem o mesmo plano de estudo dado pelo Ministério da Educação. Mas a escolha de livros-texto é deixada ao professor.

Os planos de estudo para o ramo de matemática-física incluem duas línguas estrangeiras (além de sueco e norueguês). Assim, o "gymnasium" dinarmaquês é uma escola bem geral sem nenhuma especialização extrema em qualquer matéria. Os planos dinamarqueses foram escritos em 1959-60 e têm estado em uso oficial desde 1963 (em algumas escolas desde 1962).

Portanto, o tema dêste relatório é: Como estão alguns planos de estudo moderadamente modernos, após 4 ou 5 anos de uso? Em que direções êles foram longe demais e em que direções foram por demais moderados?

Os autores dêstes planos de estudo foram bastante cautelosos e não colocaram matérias que fôssem difíceis demais para estudantes do padrão esperado. Mas os planos foram, provàvelmente, muito extensos. Muita autodisciplina foi requerida para eliminar tópicos importantes e muitas vêzes interessantes e convenientes para o ensino. Mas isto foi necessário para que se pudesse reservar tempo suficiente para generalidade no tratamento de assuntos nos planos de estudo.

Uma parte importante do panorama do ensino da matemática é a base científica e pedagógica dos professôres. A educação dos professôres colegiais na Dinamarca consiste de um estudo universitário (normalmente de 5 a 6 anos), resultando na obtenção do mestrado e de um curso menor sôbre pedagogia teórica e prática (meio ano).

Na universidade, os futuros professôres recebem a mesma educação que os futuros cientistas. Não há distinção entre estas duas categorias de estudantes universitários e, muito freqüentemente, os próprios estudantes não escolhem sua carreira profissional até o final de seus estudos. Assim, os professôres colegiais recebem uma boa educação matemática. Mas quero ressaltar que não são, de maneira alguma, educados excessivamente. É necessária uma grande visão científica para se efetuar um ensino de valor a alunos talentosos na idade de 16-19 anos. Pode-se mencionar que a introdução de novos planos de estudo encontrou grandes dificuldades no início, principalmente porque o conhecimento dos professôres era falho com relação a matemática moderna.

Matemática no curso colegial dinamarquês (ramo de matemática-física)

Os itens centrais nos colégios da Dinamarca são análise (cálculo integral e diferencial) e geometria (principalmente geometria analítica). Os novos planos de estudo acrescentaram álgebra "abstrata" como um terceiro item importante. Em si, êste terceiro item é de proporções bem modestas mas tem forte influência no tratamento de outros itens.

Análise

Os antigos planos de estudo (anteriores a 1960) continham um tratamento bem rigoroso da continuidade, diferenciabilidade e integração. Os planos atuais não contêm exigências explícitas destas matérias mas aqui (e em todo lugar) os planos de estudo são maleáveis, de modo que há boas oportunidades para professôres e redatores de livros para deixarem as idéias modernas influírem na apresentação.

Na maior parte das escolas, o tratamento da continuidade é baseado em conceitos topológicos, mesmo que os conceitos não sejam apresentados de maneira sistemática. A continuidade só é definida formalmente para funções reais e para aplicações entre espaços métricos. Mas as definições são formuladas numa linguagem fàcilmente adaptável a aulas mais gerais sôbre aplicações. As experiências com esta apresentação foram favoráveis. A continuidade é compreendida mais imediatamente quando é ligada ao conceito de vizinhanças do que quando é apresentada na linguagem dos ϵ, δ. Por outro lado, não sinto necessidade de um tratamento mais geral da continuidade no curso colegial. Os alunos que se dedicarem à matemática na universidade estão bem preparados para um curso de topologia. Os outros estudantes têm uma boa idéia dos conceitos topológicos sem estarem carregados de técnicas.

O tratamento da diferenciação e integração também pode lucrar com novos conceitos e idéias. Mencionemos, por exemplo, duas possíveis definições para a derivada $f'(x_0)$:

$$\Delta f(h) = f'(x_0) \cdot h + 0(h) \tag{1}$$

e

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(h)}{h} \tag{2}$$

A primeira definição é fàcilmente generalizada a aplicações entre espaços vetoriais de dimensão finita,

$$f : R^n \to R^m$$

enquanto que a 2.ª definição só se aplica a aplicações onde $n = 1$.

Evidentemente, êste não é um argumento decisivo para que se use a definição (1) se estivermos considerando apenas funções de variável real (ou complexa). Mas, tenho a impressão de que a definição (1) é pelo menos tão fácil de se perceber quanto a definição (2). E tem certas vantagens em demonstração e aplicações. Além disso, ela remove o ar de mistério que cercava a diferencial df em certos livros mais antigos.

Um dos itens mais importantes em nossa modernização do ensino de matemática, é representado pelas "aplicações da matemática". Na Dinamarca, ainda não fomos muito longe nesta direção. Não encontramos muitas aplicações além das tradicionais. Mas em conexão com isto quero mencionar que a Fórmula de Taylor é agora parte do programa. É fácil de se demonstrar e dá boas oportunidades de mostrar outras aplicações que não as geométricas. Por outro lado, infelizmente, os planos de estudo da Dinamarca não incluem equações diferenciais. À primeira vista, as equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem são òbviamente assuntos para o curso colegial.

Posso resumir minhas observações a respeito de análise dizendo que o conhecimento de novos conceitos e idéias pode ser vantajoso mesmo em relação a um curso de cálculo bem tradicional. Êste conhecimento devia existir principalmente nas mentes dos professôres. É menos importante ter-se estudantes colegiais estudando um tratamento "moderno" (ou "abstrato") de análise.

Geometria

Os antigos planos de estudo de geometria incluíam geometria analítica plana com estudo detalhado da parábola, hipérbole e elipse e de suas propriedades geométricas, um pouco de trigonometria e de construção geométrica, bem como algo sôbre geometria espacial.

O estudo de secções cônicas e de trigonometria foi reduzido consideràvelmente e as construções geométricas desapareceram. Os planos de estudo prescrevem que o estudo de geometria deve ser baseado no conceito de vetor, mas não é necessário que se mencione o conceito de espaço vetorial. Os planos não mencionam a geometria afim mas exige-se um estudo de certas aplicações afins. A maioria dos colégios dinamarqueses organizam o curso de geometria da seguinte maneira:

1.º ano (10.º ano escolar): são introduzidos os vetores (intuitivamente) como classes de equivalência de segmentos de reta orientados, baseado num curso de geometria um tanto tradicional dado do 5.º ao 9.º ano escolar. Mostra-se que o conjunto de vetores tem as propriedades de um espaço vetorial com produto escalar e o estudo de geometria analítica plana e de trigonometria é baseado nestas propriedades (a expressão "espaço vetorial" não é mencionada neste ano).

Êste ano escolar inclui uma menção (puramente intuitiva) dos conceitos e da terminologia elementar dos conjuntos. Além do que foi mencionado acima, há um estudo de equações e inequações. Além disso há um primeiro estudo dos conceitos algébricos fundamentais (regras de composição, grupos) e também um pouco de teoria dos números.

2.º ano (11.º ano escolar): A maior parte do trabalho dêste ano é dedicada à análise.

Os únicos itens geométricos dêste ano são aplicações afins do plano e algo sôbre secções cônicas (parcialmente em conexão com aplicações afins).

O estudo das aplicações afins é bastante analítico e a descrição de aplicações afins por meio de matrizes 2×2 é estudada. (O estudo das matrizes não é um assunto obrigatório no "gymnasium" na Dinamarca mas é vantajoso apresentá-lo em conexão com suas aplicações geométricas.) Sòmente consideramos matrizes 2×2 mas isto é suficiente para dar uma impressão das idéias principais. O curso é, sem dúvida, um bom preparo para um curso posterior (na universidade) de álgebra linear.

Certos grupos importantes de aplicações afins são estudados (por exemplo isometrias, semelhanças). Com estas investigações os estudantes obtêm amplas oportunidades de usar seu conhecimento (bem modesto) da teoria dos grupos.

3.º ano (12.º ano escolar): A geometria do terceiro ano consiste de um estudo axiomático de geometria espacial, baseado nos axiomas de um espaço vetorial n-dimensional com produto escalar. Naturalmente, grande parte da teoria é restrita a $n = 3$. Mas a experiência mostrou que tal restrição não é necessária. Os estudantes acham bastante natural estudar a geometria desta forma axiomática e alguns estudantes chegam a ficar desapontados quando se faz a restrição $n = 3$.

Êste estudo não é exigido nos planos de estudo oficiais e há escolas onde a geometria espacial é estudada da maneira tradicional. Mas o estudo axiomático não está em desacôrdo com os planos de estudo.

Álgebra

Os conceitos algébricos fundamentais (regras de composição, grupos, anéis e corpos) constituem um tópico nôvo no currículo dinamarquês. Os planos de estudo oficiais são muito moderados com relação a êste assunto e o próprio ensino tem sido um pouco modesto demais. Deve-se ultrapassar trivialidades quando se

introduz um assunto nôvo. Mais importante que muitos teoremas puramente algébricos é o desejo de que os estudantes obtenham uma compreensão geral dos conceitos fundamentais. Conceitos e idéias algébricas aparecem tão freqüentemente no estudo de outros tópicos (especialmente em geometria) que os estudantes não consideram a álgebra como sendo uma matéria inferior.

É razoável estudar os conceitos algébricos sem muita profundidade teórica. É duvidoso que uma teoria dos grupos adequada deva ser dada no curso secundário (com exceção das partes mais elementares) não porque a teoria é muito difícil mas porque é difícil motivar o estudo e exemplificar os resultados. O valor fundamental da álgebra nas escolas secundárias está na aplicação a outros ramos da matemática. Portanto, não se deve ir além dos teoremas fundamentais sôbre o kernel de um homomorfismo.

Em benefício de outras partes da matemática, os conceitos algébricos deveriam ser introduzidos até o décimo ano escolar de modo que estivessem à mão quando se tornassem necessários. Talvez haja razões pedagógicas para uma introdução dos conceitos anteriores ao 10.º ano escolar. Seria mais fácil ensinar no curso colegial se os conceitos mais elementares de álgebra, bem como os conceitos teóricos elementares dos conjuntos, fôssem apresentados antes do 10.º ano. Êstes conceitos poderiam pròvàvelmente enriquecer o ensino nos anos anteriores.

Até aqui, o estudo dos grupos tem sido muito fraco na maioria dos colégios dinamarqueses, mas há razões para que se acredite que o curso de álgebra será aperfeiçoado nos anos futuros. Em breve o curso deverá estar seguindo estas linhas:

1.º ano (10.º ano escolar): Regras de composição e suas propriedades, grupos, subgrupos de um grupo. Uma primeira descrição das propriedades algébricas dos números (esta descrição é continuada mais tarde em conexão com o estudo de anéis e corpos). Grupos de classes residuais, grupos cíclicos. Isomorfismos e homomorfismos. O kernel de um homomorfismo com aplicações.

Aplicações à teoria dos números (o pequeno teorema de Fermat, teoria elementar da divisibilidade em conexão íntima com o estudo do grupo aditivo dos inteiros). Descrição das funções logarítmicas como isomorfismo que conservam a ordem do grupo multiplicativo dos números reais positivos no grupo aditivo dos números reais.

2.º ano (11.º ano escolar): Neste ano não são introduzidos conceitos novos de álgebra. A compreensão da álgebra por parte dos estudantes é ampliada através de suas aplicações em outras matérias, principalmente na teoria das aplicações afins.

A descrição dos números reais é estendida quando se discute a continuidade dos números reais como uma introdução à análise. Além disso, demonstra-se que o conjunto dos números racionais é enumerável, mas o dos números reais não o é.

3.º ano (12.º ano escolar): O curso de álgebra dêste ano compreende polinômios, anéis e corpos, números complexos. O estudo de anéis e corpos é motivado principalmente pela investigação das propriedades algébricas dos números, mas também outros anéis são considerados (por exemplo anéis de polinômios, anéis e corpos de classes residuais). O conjunto dos números reais é caracterizado como um corpo arquimediano continuamente ordenado, mas não há tentativa nenhuma de se indicar a construção dêsse corpo.

O curso de álgebra termina com a construção do corpo dos números complexos (baseado no corpo dos números reais) e com uma investigação das propriedades geométricas e algébricas dos números complexos. O teorema fundamental da álgebra é formulado com uma indicação de uma demonstração e algumas de suas conseqüências são evidenciadas. O teorema fundamental não é mencionado nos planos de estudo oficiais.

Talvez seja possível introduzir os números complexos antes do 12.º ano. Mas na Dinamarca, nós adiamos esta introdução para o bem dos físicos que insistem em ter cálculo diferencial e integral tão cedo quanto possível. Um argumento a favor da introdução posterior dos números complexos é a introdução bastante colorida que se torna possível. E, nesta altura, os estudantes atingiram uma maturidade suficiente para apreciar um capítulo que relaciona entre si tantos tópicos matemáticos diferentes (conceitos algébricos, vetores no plano, trigonometria, aplicações afins, polinômios, etc.).

Outras matérias

Nos planos de estudo oficiais da Dinamarca, encontram-se análise combinatória e probabilidade. Mas o curso requerido é tão pequeno que nem vale a pena discutir. Pode parecer surpreendente que desprezemos a teoria das probabilidades, dada sua crescente importância. Só se pode dizer que se déssemos um curso razoável sôbre esta matéria teríamos que sacrificar outros tópicos.

Naturalmente, a terminologia elementar da teoria dos conjuntos é exigida no "gymnasium" dinamarquês. Mas os planos de estudo não recomendam um curso sistemático sôbre teoria dos conjuntos. No momento, temos de iniciar o ensino no 10.º ano escolar com uma pequena lista dos conceitos e terminologia da teoria dos conjuntos, mas existem razões para que se acredite que dentro de alguns anos êsses conceitos serão apresentados nos anos inferiores, que são o seu devido lugar. Os únicos argumentos não triviais da teoria dos conjuntos no "gymnasium" são a investigação da enumerabilidade e da prova diagonal de Cantor da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais. Talvez se argumente que poderíamos omitir estas investigações já que os resultados não são usados nas outras matérias do "gymnasium", mas não gostamos de esconder dos estudantes estas idéias lindas.

Matemática nas universidades da Dinamarca

Os professôres secundários recebem, como já foi dito na introdução, sua educação científica em uma universidade, onde recebem a mesma instrução que os futuros cientistas. A educação na universidade é complementada com um curso de pedagogia teórica e prática. A parte prática dêsse curso tem lugar num curso colegial e é dirigida por professôres da escola.

Ao contrário da educação colegial, os estudos universitários são altamente especializados. Em geral os alunos estudam no máximo duas matérias, uma principal e uma secundária. A matéria secundária de matemática é uma ciência intimamente ligada à matemática, em geral física. Outras possíveis matérias secundárias são estatística e economia. É também possível estudar matemática sem estudar outra matéria.

A educação universitária é dividida em duas partes. A primeira (de 3 anos a 3 anos e meio) cobre uma série de tópicos matemáticos fundamentais, enquanto que a segunda (de 2 anos a 2 anos e meio) consiste de estudos mais avançados de um assunto especial escolhido pelo estudante. O estudo da matéria secundária é feito normalmente na primeira parte do curso. A matemática como matéria secundária é equivalente à primeira parte do estudo de matemática como matéria principal.

As universidades são mais livres que os colégios com respeito a planos de estudo. Por razões práticas, tôdas usam os mesmos planos de estudo durante a primeira parte para facilitar a possibilidade de transferência de uma universidade para outra.

Os planos de estudo das universidades da Dinamarca não diferem muito dos planos de estudo de outros países. Portanto, limitar-me-ei a dar uma rápida idéia da lista de matérias para a primeira parte do estudo. (A lista é referente a assuntos, não a tempo.)

Cálculo avançado

Topologia de conjuntos de pontos. Funções de várias variáveis. Diferenciabilidade de funções entre espaços vetoriais normados. Séries, séries de potências, séries de Fourier. Integral de Riemann-Stieltjes (funções de uma variável). Integral de Riemann (funções de diversas variáveis). Funções analíticas.

Funções reais

Integração de Lebesgue. Integração abstrata. Diferenciação de funções de conjunto. Integrais de Fourier.

Álgebra

Teoria dos Grupos (teorema da decomposição para grupos abelianos finitamente gerados). Anéis e corpos. Construção dos corpos dos números racionais e dos números reais. Elementos da teoria de Galois.

Álgebra linear e geometria

Álgebra Linear. Transformações lineares. Geometria afim e geometria euclidiana. Determinantes e volume. Fundamentos de geometria, geometria não-euclidiana. Geometria diferencial.

Análise funcional

Espaços de Hilbert e espaços de Banach. Teorema espectral para operadores compactos.

Êste programa é feito com intenção de ocupar cêrca de 50% do tempo de estudo nos primeiros três anos. O resto do tempo é gasto com matérias secundárias ou com estudos adicionais de matemática. Naturalmente os estudantes têm possibilidades de fazer outros cursos mais ou menos avançados tanto durante a primeira como a segunda partes.

Durante a segunda parte, o estudante concentra-se num assunto especial, e dentro dêste assunto êle escolhe um campo estreito onde (tanto quanto possível) possa entrar em contacto com pesquisas originais. Naturalmente, nem todos os estudantes têm a capacidade ou o interêsse científico para fazer pesquisa. Mas, de qualquer forma, é um enriquecimento para o futuro professor a familiarização com campos onde se faz pesquisa.

A maior vantagem de se dar a mesma educação a professôres secundários e a cientistas é que os estudantes podem estudar matemática numa atmosfera puramente acadêmica, sem serem

forçados a escolher sua carreira profissional cedo demais. Durante os anos na universidade, os estudantes desenvolvem aos poucos seus interêsses principais e, muito freqüentemente, terminam por escolher uma carreira diferente da que pretendiam originalmente.

Esta forma de estudo tem o defeito inegável de não ajudar os professôres em potencial a utilizarem seus conhecimentos científicos no ensino colegial. A experiência tem demonstrado que tal ajuda é freqüentemente necessitada. Por tal razão, tentamos organizar, em uma universidade, seminários sôbre matemática elementar considerada sob um ponto de vista avançado. Nossas experiências são ainda novas demais para permitirem conclusões. Mas os seminários foram encarados com grande interêsse tanto da parte dos estudantes com interêsse primàriamente científico em matemática como da parte dos que têm interêsse pedagógico. Êste é o resultado mais positivo de nossos seminários. É muito importante para o desenvolvimento da matemática no curso colegial que os professôres estejam realmente interessados em matemática, mas é igualmente importante que os cientistas tenham um interêsse sério pelos problemas do curso colegial.

Um esfôrço para aperfeiçoar a ciência e a matemática da escola secundária na Turquia

Eugene P. Northrop

(Representante da Fundação Ford na Turquia)

Introdução

Na segunda metade do século vinte, a importância da ciência e da tecnologia para tôda nação — aparecendo, em desenvolvimento ou desenvolvida — não precisa ser defendida; ela é evidente para o observador mais comum. A expansão explosiva do conhecimento científico fundamental, que começou na primeira metade do século, é uma fonte poderosa de melhoramentos rápidos na economia de uma nação, capaz de trazer, a cada cidadão, mais comida e água, melhores roupas e abrigos, maiores oportunidades de educação e salários, enfim uma vida mais saudável, mais segura e recompensada. Mas se uma nação deve ser capaz de aplicar a ciência e a tecnologia moderna, ela deve ter homens e mulheres eficientes para transformar o conhecimento resultante em meios de melhorar a economia nacional.

A Turquia tem demonstrado sua habilidade em produzir cientistas fundamentais de primeira classe. Contudo muitos dêstes eminentes cientistas têm manifestado interêsse sôbre a questão de seus sucessores. Êles informam que os melhores talentos científicos, vindo das escolas para as universidades, procuram carreiras de ciência aplicada, tais como medicina e engenharia, onde as recompensas financeiras são evidentes, e que as ciências básicas, física, matemática e biologia, estão atraindo apenas os talentos menores. Ainda que isto possa ser uma grande simplificação, há uma preocupação real entre cientistas, pelo fato de que poucos estudantes capazes estão entrando no ensino e pesquisa da universidade em ciências básicas para satisfazer até mesmo demandas comuns da Turquia — demandas que estão sujeitas a crescer com a economia industrial em expansão da Turquia.

De grande interêsse para os cientistas turcos, é o fato de que, cada ano, menos diplomados em ciências e matemática pela universidade estão escolhendo o ensino da escola secundária (Lise) como uma carreira. Êles observam com alarme que, num tempo em que a população escolar cresce mais e mais ràpidamente, menos professôres estão a postos para esclarecer a seus estudantes as recompensas — intelectuais tanto quanto materiais — vantajosas para êles, nas carreiras de pesquisa e ensino de ciências básicas.

Finalmente há a questão do talento humano como um recurso nacional. A Turquia tem, há muito tempo, reputação de dispensar especial atenção à talentosa juventude no desempenho das artes — música, *ballet*, teatro, etc. Numa época de ciência e tecnologia, perguntam os cientistas, porque não daria a Turquia atenção especial aos cientìficamente talentosos, sôbre os quais o progresso científico e tecnológico da nação deverá recair nas próximas décadas?

Uma solução *ideal* para êstes problemas é fácil de imaginar: trazer todos os professôres de ciências e matemática atualmente lecionando em escolas secundárias de tôda a Turquia, colocá-los a par dos mais recentes desenvolvimentos em matemática e ciência e equipá-los com todos os livros e todo o material de laboratório que êles necessitem. Desta maneira mais estudantes seriam atraídos pelo ensino de ciências na escola secundária; aos estudantes talentosos cientìficamente seriam dadas tôdas as oportunidades de desenvolver suas aptidões e as universidades e a indústria estariam asseguradas de uma fluência adequada de pessoas jovens e competentes na pesquisa e ensino das ciências básicas. Mas esta solução é muito pouco realística. Nenhuma nação no mundo tem recursos financeiros e profissionais — dinheiro e cientistas — necessários para êste trabalho.

Lançando o projeto

Para uma solução *realística*, os cientistas da Turquia chegaram ao que ficou conhecido por Projeto Nacional de Ciência Lise. O germe da idéia foi êste: Trazer alguns dos melhores professôres de ciências da escola secundária juntamente com alguns dos mais dedicados cientistas, deixá-los investigar juntos os progressos modernos nos materiais de aula e laboratório e métodos, com vista na produção de programas para a moderna escola secundária, usar êstes programas primeiro em uma escola especial para os melhores talentos da Turquia e mais tarde adaptá-los para uso regular nas escolas secundárias de tôda a Turquia.

Para lançar o Projeto Lise de Ciência, o Ministro da Educação em abril de 1962 designou uma comissão de estudo de cinco — dois cientistas, dois membros do Ministério e um quinto membro, estudioso de ciência e experimentado na direção de escolas e treino de professôres. Essa comissão apresentou um relatório, que foi aceito prontamente pelo Ministro da Educação.

Para supervisionar os detalhes do planejamento e condução do projeto o Ministro da Educação apontou uma comissão administrativa e consultiva constituída de quatro cientistas e três membros do Ministério. É significativo que aqui, como no caso da comissão pesquisadora, o Ministro procurou dar assistência aos cientistas da Turquia numa emprêsa de grande importância para o desenvolvimento da educação nacional de ciências.

Uma escola coeducacional, especialmente desenhada para 300 estudantes, foi construída, para abrigar o Projeto Lise de Ciência, em uma área de trinta acres de terra com vista para Ancara, e seus laboratórios e salas de aula foram equipados com aparelhagem e mobiliários mais modernos.

Todo ano estudantes das classes formandas das escolas médias (escolas primárias) da Turquia são selecionados por exames nacionais de habilitação para admissão ao primeiro dos três anos do Lise de Ciência. Mais de 10.000 candidatos são selecionados por uma primeira prova sôbre conhecimento geral; os primeiros 1.000 colocados fazem um segundo exame, testando sua capacidade científica; e 100 dêstes são finalmente selecionados para admissão.

Treinando professôres

Enquanto os edifícios estavam em construção, trinta professôres secundários de matemática e ciências foram selecionados por competição nacional. Êles foram designados para o ensino

nas escolas secundárias de Ancara, durante meio período, a fim de devotar o restante de seu tempo a um programa de três anos de trabalho de treinamento e redação de cursos em cooperação com o grupo de cientistas da universidade. Menos da metade dêles estava ocupada no ensino do Lise de Ciência; os outros trabalhavam nas demais fases do projeto. Os professôres de outras matérias principais eram também selecionados por concorrência, e a alguns dêles — notadamente os professôres de língua estrangeira — era dado treinamento especial.

Os cientistas turcos participantes do treinamento intensivo de professôres e da redação de cursos do projeto são das faculdades de ciências da Universidade de Ancara e da Universidade Técnica do Oriente Médio. Cêrca de quinze tomaram parte, inclusive o co-diretor turco do projeto.

Cientistas e professôres norte-americanos de ciências também cooperaram no projeto, na suposição de que a riqueza da experiência norte-americana no treinamento de professôres e mudança curricular poderiam ser utilizados com proveito. A Universidade do Estado da Flórida cedeu o co-diretor norte-americano e outros consultores e dirigiu aquelas partes do projeto baseados nos EUA. Quatro professôres norte-americanos vieram à Turquia trabalhar no projeto durante 1964-66.

No verão de 1963 os professôres universitários turcos visitaram os EUA para examinar detalhadamente os maiores projetos norte-americanos de treinamento de professôres secundários e redação de cursos. Durante 1963-64 êles dirigiram programas de trabalho, dentro de suas especialidades, em favor dos trinta professôres selecionados para o projeto. O grupo inteiro — professôres universitários e secundários — passou, então, o verão de 1964 na Universidade do Estado da Flórida, trabalhando no currículo e material de ensino para o primeiro ano do Lise de Ciência. Lá, êles conferenciaram, repetidas vêzes, com cientistas e professôres norte-americanos, observaram alguns dos novos programas de ciência em uso nas escolas públicas da Flórida e visitaram o Ginásio Bronx de Ciências em Nova York. Depois de sua volta à Turquia e da inauguração do Lise de Ciência em outubro de 1964, o programa de trabalho de treinamento e redação de cursos foi recomeçado. Em um seminário, durante o verão de 1965, os materiais do primeiro ano foram revistos, com base na experiência e produzidos os materiais do segundo ano. Êste processo se repetirá em 1966 e em 1967: os materiais receberão um aperfeiçoamento final.

Extensão do projeto

Naturalmente, os aspectos de longo alcance do Projeto Lise de Ciência vão muito além do estabelecimento do Lise de Ciência e a elaboração de novos programas de biologia, química, matemática e física para seus estudantes. Depois de vários anos de trabalho conjunto, os professôres secundários e universitários do projeto se reduziram, por assim dizer, a uma equipe compacta e bem coordenada em posição para fazer contribuições da maior importância para a educação de ciência em geral na Turquia.

Nos verões de 1965 e 1966, cursos de verão de cinco semanas foram dirigidos pelo projeto no Lise de Ciência. Mais de 200 professôres de tôdas as partes da Turquia foram, não só apresentados aos novos materiais e métodos nesses cursos, mas enviados novamente para suas escolas com substancial equipamento e verbas para permitir que colocassem em ação o que tinham aprendido. A participação de professôres de outras universidades turcas serviu para ampliar a familiarização da nação para com o projeto.

Novamente, na primavera de 1966, professôres de matemática do projeto fizeram uma conferência, num sábado, sôbre o ensino de matemática moderna, para professôres de Lise de Ancara. Foi um comêço modesto, mas com êxito. Algumas semanas mais tarde o projeto patrocinou um empreendimento mais elaborado — uma conferência internacional de cinco dias sôbre educação matemática, comparecendo mais de cinqüenta professôres universitários e secundários de matemática de tôdas as partes da Turquia, numerosos funcionários do Ministério da Educação, e vários matemáticos e educadores europeus e norte-americanos.

Estas atividades tornaram os professôres universitários e secundários participantes, impacientes pela mudança. Um resultado prematuro foi o pedido de materiais do projeto para um dos Lises Ordinários de Ancara e êles estão sendo usados, neste ano, sob a supervisão de professôres do projeto. Oportunidades semelhantes estão destinadas a se seguir, especialmente se o Ministro da Educação agir com o propósito comum de incorporar o projeto numa agência central ampliada, para o desenvolvimento do currículo de ciências, apropriadamente organizada e localizada no Ministério, e com poder e orçamento próprios. O problema agora é promover cuidadosamente a difusão planejada e controlada dos novos materiais e métodos para que falhas não prejudiquem o progresso feito até esta data.

O Projeto Lise de Ciência é um exemplo de cooperação entre inúmeras entidades. O govêrno da Turquia, através do Ministério da Educação, forneceu fundos para a construção do Lise de Ciência e está financiando os custos gerais da operação. A Fundação Ford providenciou o intercâmbio no exterior necessário para o programa de educação de professôres e redação de cursos, e importante equipamento e mobiliário. A Universidade Técnica do Oriente Médio forneceu o terreno para o *campus* e dirigiu a construção do prédio. A Universidade de Ancara deu espaço e facilidades para os funcionários do projeto até que o Lise de Ciência fôsse aberto. E, como foi observado acima, professôres da Universidade Técnica do Oriente Médio, da Universidade de Ancara e da Universidade Estadual da Flórida trabalharam, juntamente com professôres secundários turcos e norte-americanos, no desenvolvimento dos novos programas e materiais de ensino.

Todos os interessados no Projeto Lise de Ciência esperam que êste esfôrço pioneiro, para aperfeiçoar o ensino de matemática e ciências na escola secundária seja útil na indicação do caminho a outras nações às voltas com problemas semelhantes em estágios comparáveis de seu desenvolvimento.

O estado da reforma do ensino de matemática na Bélgica, 1966

G. PAPY

(Universidade de Bruxelas)

A experiência intensiva e extensiva de reforma da instrução matemática na Bélgica entra neste ano escolar em seu nono ano. A experiência segue para a classe final da seção científica da instrução secundária (estudantes de 17 a 18 anos de idade). É possível e útil fazer um resumo.

Neste movimento, podem ser destacados três períodos importantes, com três anos de duração cada um.

a) **1958-1961:** Experiência com o Programa de Lenger-Servais em certas classes da Escola Normal, aquelas da seção de Escola Maternal (futuros professôres de crianças de 3 a 6 anos de idade).

b) **1961-1964:** Transferência da experiência para o primeiro ciclo de instrução geral da escola secundária, alunos de 12 a 15 anos de idade. Generalizações de programas modernos em centenas de classes desde 1964. Em 1961 houve uma tentativa para modernizar a instrução de uma classe de alunos de 15 anos, que não tinham recebido ainda instrução moderna no primeiro ciclo (12-15 anos de idade).

c) **1964-1967:** A primeira experiência de instrução moderna em uma classe de estudantes da seção científica (segundo ciclo de instrução secundária, estudantes de 15 a 18 anos) que haviam recebido instrução moderna dos 12 aos 15 anos. Desde 1966 tem havido repetição desta experiência em uma nova classe — levando-se em conta a primeira tentativa de 1964-1967.

a) **Primeiro período, 1958-1961**

O Programa de Lenger-Servais continha assuntos básicos para a instrução moderna e foi proposto pela primeira vez por volta de 1950. Êle foi certamente influenciado pelo trabalho da Comissão Internacional para o Aperfeiçoamento da Instrução Matemática e pelo trabalho de Northrop e outros da Universi-

dade de Chicago. Desde então, tem sido razoável a experimentação na Bélgica. Além disso exerceu-se tão pouca originalidade quanto possível na escolha do assunto. A instrução foi limitada àqueles conceitos e resultados gerais reconhecidos como importantes pela maioria dos especialistas no assunto.

O Programa de Lenger-Servais levou em conta os objetivos específicos da instrução matemática dos futuros professôres de crianças de 3 a 6 anos de idade. É esta a razão do uso de tipos particulares de idéias — aquelas de conjuntos, relações e topologia. Os autores não pretenderam recomendar, mesmo de maneira indireta, como as idéias de conjuntos, relações e topologia deveriam ser ensinadas às crianças de três a seis anos de idade. Entretanto, pareceu-lhes oportuno que os futuros professôres fôssem informados da natureza dos conceitos matemáticos, básicos em nossos dias, de modo a favorecer certas aproximações neste sentido, nos jogos das crianças. Pareceu-lhes, também, que os diagramas de Venn e certas idéias muito elementares de topologia assemelhavam-se um pouco a desenhos espontâneos de crianças, freqüentemente tão bonitos e tão misteriosamente interessantes. A experiência permitiu o levantamento de algumas novas conjeturas, que se afiguram interessantes para um estudo posterior.

Os estudantes que escolhem a seção "Maternelle Normale" são motivados a se ocupar com a educação de crianças. Geralmente êstes estudantes tiveram resultados muito fracos no estudo de matemática em seus cursos anteriores. Alguns dêles não revelam nada, a não ser sua animosidade básica em relação à matemática e aos professôres que a ensinam. Seria interessante ver o que aconteceria, se êstes estudantes de fraca receptividade fôssem colocados em contato com novas idéias sôbre matemática em um nível de primeira importância.

As idéias matemáticas que apareciam no programa de Lenger-Servais eram bastante elementares. Contudo, logo se tornou evidente para os organizadores, que a seqüência pedagógica da matéria originava problemas com relação à seqüência matemática. Decidiram então valer-se da colaboração de um matemático profissional puramente técnico. Êste, professor da Universidade, além de ser muito cético, parecendo até hostil, a respeito do empreendimento intentado, aceitou, no entanto, de boa vontade prestar o papel de um subalterno. Devido aos resultados promissores que foram conseguidos, êste matemático tornou-se, sem dúvida, o primeiro opositor a ser convertido pela evidência de êxito. Depois do segundo ano de experiência — sob a zombaria de alguns de seus colegas — êle decidiu tomar conta sòzinho de uma classe experimental.

No comêço da experiência, os diagramas de Venn tinham sido usados com promessa de sucesso. Seguindo a tradição, usou-se no princípio um sistema de superfícies coloridas ou sombreadas. Foi no contato real com os alunos que o método de usar fios coloridos foi substituído. O sombreado — de acôrdo com a sugestão de um dos alunos — foi usado para indicar as regiões vazias. Espontâneamente, êstes alunos, tendo sido colocados numa situação pedagógica favorável, descobriram um processo, proposto pelo próprio Venn. A atividade, a instrução e o contato inspirador com os alunos possibilitou ao matemático a descoberta de um sistema de gráficos multicoloridos. Através desta primeira experiência revelou-se um apoio intuitivo e um precioso ideograma para instrução mais avançada.

Igualmente, desta primeira experiência, apareceu o germe de um método de introduzir os números reais, através do uso sistemático da numeração posicional (especialmente, por razões pedagógicas, a base dois). Começando com a faixa de Möbius, introduzida de uma maneira intuitiva, poder-se-ia prosseguir, pouco a pouco, até os elementos de topologia geral. Começamos com noções muito simples: vizinhanças (as cadeias de continuidade), círculos abertos com a convenção, sugerida pelos alunos, de o verde e o vermelho serem usados para distinguir, respectivamente, regiões circulares abertas e fechadas.

Esta primeira experiência logo estendida a numerosas classes foi extremamente frutífera, originando novos procedimentos pedagógicos, que permitiram vislumbrar uma reestruturação de longo alcance na instrução matemática em nível elementar. A instrução era dada nessas classes dentro de um clima agradável. A hostilidade dos alunos contra a matemática desapareceu completamente. Percebeu-se que as crianças de hoje poderiam ser transformadas com a matemática atual.

Paralela a esta experiência, havia sido dada permissão para um grande esfôrço de difusão dos conceitos de matemática moderna e de uma pedagogia para sua instrução a professôres em exercício e estudantes das escolas normais.

Foram realizadas as seguintes conferências de ensino:

Arlon 1, 1959: Apresentação dos primeiros resultados das experiências e o estudo da brochura, *Arlon 1*, sôbre conjuntos e topologia geral. Foram dadas lições de demonstração aos alunos nas novas classes.

Arlon 2, 1960: Uma apresentação de um curso (composto de ciclos) a ser usado nas classes modernas. (Primeiros elementos de matemática moderna.) O uso de métodos gráficos foi comunicado pela primeira vez.

Arlon 3, 1961: Primeira iniciação à teoria dos grupos com a ajuda de favoráveis esquemas pedagógicos.

No curso desta primeira fase, o diretor de uma grande escola secundária em Bruxelas, Sr. Oscar Guillaume, fundou um clube de matemática livre, aberto a todos os estudantes bem dispostos à instrução secundária. Êste clube foi usado principalmente como uma instituição de reforma, já que permitia, sem quaisquer restrições, a realização de numerosas experiências sôbre tópicos específicos de matemática moderna. O clube teve um enorme sucesso. Os participantes, todos voluntários, mostraram grande aptidão para a matemática. Num pequeno espaço de tempo, foi possível fazer preciosas experiências.

b) A segunda fase de experimentação, 1961-1964

O matemático que desempenhou um papel subalterno na estréia da primeira fase, pareceu suficientemente convencido e, sem grandes pretensões, escreveu "Sugestões para um nôvo programa de matemática para classes de estudantes de 12 anos". Devido aos bons resultados obtidos da conferência *Arlon 3*, e graças à determinação demonstrada pelo Sr. Henri Levarlet, então Diretor Geral da Educação Secundária na Bélgica, o Ministro da Educação decidiu tentar o programa proposto na sexta classe (estudantes de 12 anos de idade). Desde então a experiência progrediu regularmente, atingindo, cada ano, uma nova classe mais elevada da escala de instrução.

O nôvo programa ganhou, então, extensão desde as classes para estudantes de 12 anos até aquelas para estudantes de 15 anos de idade. O programa experimental era optativo nas escolas, mas realmente centenas de classes, todos os anos, têm adotado o nôvo programa. Finalmente, em 1965, foi decidido que os programas propostos peló Centro Belga de Pedagogia Matemática, criado durante o período 1961-1964, seriam os únicos permitidos para experimentação, e posteriormente, que o programa moderno seria obrigatório em tôdas as classes, para estudantes de 12 anos de idade, do ensino federal, começando em 1968.

Vários problemas estão preocupando o Centro Belga de Pedagogia Matemática, agora realmente conhecido como o Centro Básico Coletor de Pesquisa Científica, por iniciativa ministerial. A pesquisa em pedagogia matemática é conduzida pelos promotores, um matemático e um orientador educacional, com a ajuda de vários assistentes.

Em dezembro de 1966, êstes assistentes eram em número de 10 (4 belgas, 2 argentinos, 1 brasileiro, 1 canadense, 1 grego, e 1 turco). O Centro organizou, sem despesas, um curso para instrutores em 25 cidades (20 tardes por ano). Três mil instrutores na Bélgica fizeram realmente o curso, sem qualquer gasto para o govêrno belga. Os cursos são livres. Os próprios professôres pagam suas despesas de viagem e impressão de resumos. Uma grande onda de sentimento apostólico anima os professôres belgas de matemática moderna.

O primeiro programa, — matemática para classes de estudantes de 12 anos de idade, — tinha um único autor. O Centro criou logo uma Comissão de Programas. Faziam parte desta comissão professôres universitários, inspetores, diretores de escolas e professôres de classes experimentais. Os programas foram estabelecidos pela Comissão e colocados no ensino profissional, levando em conta as experiências do curso. O Centro garantiu a publicação de livros escolares em vista da natureza experimental e o registro do ensino das aulas. O Centro também organiza seqüências de instrução a pedido dos professôres, fazendo uso de ciclos de cursos. Êstes cursos são beneficiados com apoio financeiro do Ministério da Educação Nacional.

Examinemos agora, ràpidamente, o conteúdo dos programas para alunos de 12 a 15 anos, assim como alguns métodos para efetuar sua instrução. Deve ser deixado claro que esta instrução tem sido dada às classes que estão no mesmo ramo da educação secundária. As aulas de matemática são dadas quatro vêzes por semana, com a duração de 45 minutos.

O conteúdo do programa está de acôrdo com as recomendações, opiniões e ações manifestadas nos diversos relatórios de inúmeras conferências internacionais de grupos de estudiosos de educação matemática, tanto quanto de matemática pura e aplicada: Royaumont, Dubrovnik, Aarhus, Budapest, Atenas, Frascatti, Echternach. Estas recomendações, sem dúvida, limitam-se a propostas de inúmeros e extensos pontos de vista, sem interêsse para a organização do material, dentro da estrutura do curso, subdividido em anos de estudo. Faltava efetuar a reconstrução da matemática elementar, necessária e preliminar para o planejamento do programa completo.

O programa esboçado a seguir é *esquemático:*

Idade de 12 anos: Conjuntos, relações; o anel dos racionais inteiros; introdução à geometria afim. Limitamos a dis-

cussão a observações, no que diz respeito ao ensino de geometria. Algumas pessoas pediram que se reservasse um lugar para a geometria, na instrução reformada. Nossa experiência tem confirmado o papel fundamental do plano euclidiano. Contudo, deve ser elucidado, de uma maneira nova. Êle é reconstruído na apresentação das estruturas fundamentais da matemática. Como um suporte da geometria, mais fundamental que a geometria, as estruturas permanecem importantes na seqüência tôda do estudo de matemática. Êste desenvolvimento da geometria conserva por isso um caráter intuitivo, familiar e motivacional de estudo.

O antagonismo do rigor *versus* intuição parece ter terminado. Sòmente a partir de 1900, com os *Fundamentos da teoria* de Hilbert é que temos à nossa disposição um desenvolvimento rigoroso de geometria. Antes disso, era inevitável que o ensino da geometria tivesse de recorrer à intuição, o que dava um caráter nebuloso ao raciocínio matemático. Os *Fundamentos da Teoria* de Hilbert não é de modo algum um livro escolar para instrução secundária. Meio século de progresso em matemática colocou em evidência aquelas estruturas, que dão uma exposição rigorosa de geometria, de maneira simples e inteligível. Mas, acrescentamos, o estudo do plano vetorial euclidiano é baseado numa estrutura complicada. Como podemos apresentá-lo aos estudantes de modo a interessá-los na estrutura? Bem, isto propõe um problema pedagógico.

O plano métrico é uma estrutura complicada. Não é, todavia, adequado como introdução ao raciocínio matemático; Começa-se, então, com uma estrutura fundamental, lògicamente mais simples. O ensino de conjuntos facilita esta introdução. Por boas razões, devemos começar expondo claramente o que é aceito. Êsse é o caminho que se toma na fase de matematização dos problemas de matemática aplicada:

Afirmar claramente aquilo que é aceito.

Não dizer tudo de uma só vez.

Expor determinadas coisas aceitas, pouco a pouco.

Isto é a aproximação axiomática progressiva.

O método axiomático útil é o do físico. Expor o que é aceito como ideal, dentro de uma situação real, e dizê-lo pouco a pouco. Os primeiros axiomas de geometria são muito simples. Êles são introduzidos, cuidadosamente, numa aproximação axiomática lenta, que esclareça bem a diferença entre pontos e pingos, que os representam. Mas sempre raciocinar com grandes pingos, como pontos. O desenho microscópico deixa escapar um importante problema; não o resolve. Depois de formular os axiomas gerais de incidência, encontra-se a si mesmo numa situação lógica simples expressa, claramente, pela linguagem dos conjuntos.

Como é realizado o raciocínio com base nas tradicionais figuras onde se *vê* a resposta? Os diagramas de Venn dão ao problema o aspecto de uma guarda romana. Na representação pelas figuras tradicionais, as retas e os planos são dados como "conjuntos". Para resolver o problema é necessário raciocinar. Não abandonamos o uso de figuras tradicionais. Duplicamos o efeito da intuição pela intervenção dos diagramas de Venn, apoiados intuitivamente pela estrutura lógica da situação. Contudo, é necessário prevenir-se contra um retardamento muito grande no raciocínio com conjuntos, em seu aspecto formal. Os diagramas de Venn permitem uma rápida aproximação ao raciocínio sintético.

O ponto de vista de conjunto é absolutamente indispensável no estudo de elementos de topologia geral. A introdução tradicional do curso de análise é a menos revolucionária. Por exemplo, uma cartolina não nos permite fazer a distinção indispensável entre um quadrado aberto e um fechado. Mas a intervenção útil da convenção vermelho-verde leva a distinção a um grau elevado. Devido à carência de espaço, para maiores detalhes sôbre a organização do curso de geometria, é recomendado ao leitor *Mathématique moderne, 1* e *6*.

Até aqui, tem havido falta de prova, envolvendo vários passos, tão necessários para construções eventuais. Quando muito, tivemos uma vista prévia de "um passo" no sentido do matemático, não do lógico. Uma demonstração com vários passos necessita, sempre, de um certo esfôrço. Porque consentimos em fazer tal esfôrço, se é sòmente para provar aquilo, que não é certo, *a priori*?

Há um êrro pedagógico fundamental nos programas tradicionais. Freqüentemente crianças de 12 e 13 anos estudam geometria intuitiva. Sem fazer matemática, começa-se a ver corretamente um certo número de coisas, na maioria das vêzes despidas de qualquer interêsse ulterior. Algumas vêzes chega-se até superfícies helicoidais. Então, na idade de 13 anos, sofre-se uma mudança brutal de atitude e começa-se a estudar uma nova disciplina — geometria demonstrativa. Abandona-se o

método da contemplação e começa-se a quebrar a cabeça com demonstrações. Para provar o quê? Que por um ponto de uma reta pode-se levantar uma e sòmente uma perpendicular à reta — aquilo que as crianças conhecem há tanto tempo. Pobres crianças que não se levantam legìtimamente numa insurreição! Por que quebrar a cabeça para provar o que já é conhecido? Elas capitulam ante a ação desmoralizante de um extintor! Na verdade, é notório que a demonstração em questão é uma armadilha. Sua apresentação às crianças como demonstração é uma verdadeira decepção, capaz de lhes dar uma perigosa idéia falsa do que é na verdade uma demonstração correta. Neste assunto os programas tradicionais não ensinam nada!

Êles dão uma prova falsa de um fato conhecido.

Êles não ensinam o fato, nem o que constitui uma prova.

É necessário escolher cuidadosamente o objetivo das primeiras demonstrações. O problema das projeções paralelas de pares ordenados eqüipolentes é uma situação boa para introduzir demonstrações. As projeções paralelas de duplas eqüipolentes (pares ordenados) também são eqüipolentes? A classe se divide em suas respostas! Como começaremos? Como nos decidiremos? Certamente, não por voto! Por um argumento — por meio da convicção — por uma demonstração!

A cada passo, passa-se de uma quantidade de informação a outra que, claramente, a siga. O procedimento pedagógico de demonstração por meio de filmes fornece um apoio intuitivo à própria demonstração. Esta é, primeiro, apresentada de uma forma não-verbal. Algumas crianças, incapazes de entender uma demonstração oral, parecem acompanhar uma demonstração através de filmes com desenhos. Êstes meios pedagógicos ajudam as crianças a enfrentar uma demonstração. Na terceira demonstração elas mesmas propõem que lhes seja permitido descobrir a prova.

Depois da apresentação de uma prova, apresenta-se em seguida um filme sonoro usando uma justificação oral para a passagem de uma imagem à próxima. Finalmente, o terceiro passo consiste em aprender a estabelecer o "texto" de uma prova com os veículos usuais da linguagem matemática.

Estudantes de 13 anos de idade: A classe de computação: Neste ano são introduzidas simultânea e progressivamente as duas estruturas fundamentais, essenciais: o corpo ordenado dos números reais e o plano vetorial real. Começa-se com o grupo aditivo de vetores. Seu modêlo — os pontos do plano — é uma situação pedagógica fascinante e fundamental. Também há um número suficiente de exemplos para esboçar uma pequena e completa teoria de um grupo. Os exercícios devem ser selecionados a fim de convencer os estudantes de que a posse do conceito torná-los-á fortes e permitirá a êles resolver problemas, que anteriormente lhes causavam desânimo.

Os números reais são introduzidos por meio da numeração posicional. O sistema binário permite apresentar o processo iterativo de subgraduação da reta. O teorema de Tales é uma aplicação espetacular dêste método. Êle também permite a introdução de homotetia. Translações e homotetias introduzem a adição e multiplicação de números reais, fazendo-se uso do importante procedimento de transferir uma estrutura por bijeção (isomorfismo).

A apresentação do plano vetorial real é o ponto culminante do trabalho do ano. O curso termina colocando-se em funcionamento a máquina útil, que demonstra teoremas de geometria. Na estrutura de campo de números reais é introduzida a teoria de computação, construída sòlidamente de frações a números reais. Para detalhes posteriores, ver *Mathématique moderne, 2*.

Idade de 14 anos: Equações da reta são estabelecidas na estrutura do plano-vetor. O anel de funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o subanel de funções polinomiais, e a solução de sistemas de equações pelo método de Gauss, incluindo o cálculo efetivo da solução geral de um sistema, completam o ano de estudos.

Um ponto importante do programa para êste ano é o plano geométrico-métrico introduzido pelas simetrias ortogonais. Devido à formação, começa-se com simetrias centrais, que se controlam por meios pedagógicos de pontos numerados. As retas com escala introduzem o grupo de isometrias e os subgrupos de deslocamentos, rotações e translações. O estudo termina com a introdução do produto escalar e do plano vetorial euclidiano. O produto escalar é tratado rigorosamente, mas sempre seguindo o raciocínio com figuras, de modo a não impedir o recurso à intuição geométrica.

O estudo dêste ano termina colocando-se em funcionamento a máquina-operatriz, o plano vetorial euclidiano, para estabelecer uma prática industrial, o teorema de Pitágoras, a desi-

gualdade de Cauchy-Schwarz e suas conseqüências. Ângulos são apresentados como rotações que tenham perdido seus centros, isto é, uma transformação por translação. Para informação complementar, ver *Mathématique moderne, 2* e *3*.

Paralelamente à experiência nas classes para alunos de 12 a 15 anos, foram dadas informações aos professôres nos relatórios:

Arlon 4: Espaços vetoriais.

Arlon 5: Álgebra exterior.

Arlon 6: Análise (atualmente sendo revista com base no ensino experimental de análise).

Talvez seja conveniente, neste ponto, mencionar um nôvo sinal de sabedoria cética de um dos promotores da reforma na Bélgica. Êle pergunta: É necessário despender tanto esfôrço na organização de um currículo moderno para estudantes de 12 a 15 anos de idade? Não seria suficiente começar com os de 15 anos a introdução de idéias modernas e considerar a instrução tradicional para estudantes de 12 a 15 anos como uma preparação mais ou menos intuitiva?

Resposta: A experiência tem mostrado que retardar a introdução das idéias de conjuntos e relações refreia o curso das classes mais elevadas. Além do mais, tradicionalmente, maus hábitos foram adquiridos; uma parte importante da instrução superior consiste, não em suplementar o que não tinha sido aprendido, mas em fazer os estudantes esquecerem o que tinham aprendido. Que perda de energia! *A posteriori*, estabelecemos o fato de que na classe de estudantes de 15 anos, que tenha recebido instrução moderna dos 12 aos 15, pode-se ir muito mais adiante e evitam-se para os estudantes os tristes momentos de recordação.

c) **Terceira fase, 1964-1967**

Descrevemos a instrução do curso científico para estudantes que tenham tido um curso moderno no período de 12 a 15 anos de idade. O curso para esta seção tem sete períodos de instrução de 45 minutos por semana. A limitação à classe científica foi feita por não ser possível conduzir uma experiência em várias classes, simultâneamente. Estávamos bem cientes dos problemas propostos pela instrução de matemática nas classes nãocientíficas, de 15 a 18 anos de idade. A primeira experiência foi numa classe final da seção científica com alunos de 17 anos. Levando em conta todos os resultados reunidos da instrução passada, uma nova experiência deve ser encetada nas classes de estudantes de 15 anos, para ser seguida nos cursos subseqüentes de 1967 a 1969.

Seremos mais breves descrevendo o programa moderno para a seção científica (15 a 18 anos). Em vista de nossa segunda experiência repetida, apresentamos o programa numa forma modificada, em relação ao qual as mudanças do original são mínimas.

Idade de 15 anos: (Temos aqui uma reviravolta psicológica! Como uma situação conveniente para o estado de espírito do estudante.) A estrutura do campo real e do plano vetorial euclidiano foi alcançada, depois de uma longa ascensão, começando com axiomas de caráter intuitivo ou "evidente" e aceitos fàcilmente. Desta vez tomam-se o sistema de axiomas ($d \in \mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant$) e o plano vetorial euclidiano como pontos de partida. Esta volta não deve ser um pretexto para um fenômeno de regressão, que consiste em se provar o que já se conhece. O nôvo ponto de vista deve ser considerado como uma base de partida para novas conquistas.

No estudo completo de vetores, o teorema de base de Grassmann (Steinitz) é fundamental. Os resultados da aplicação para o caso de vetores de 2 ou 3 dimensões são pesados e maçantes. Os alunos já encontraram um grande número de exemplos de vetores (vetores de polinômios, vetores de equações etc.). A descoberta de um bom procedimento pedagógico, que permite a demonstração do teorema de Grassmann em um nível elementar, é um dos mais importantes resultados de nossa experiência. A seqüência seguinte é sugerida:

Vetores em 2 dimensões
Anel de transformações lineares
Transformações lineares definidas pela imagem de uma base
Um aumento de interêsse pelo uso de gráficos multicores
Coordenadas, matrizes 2×2
Transformações ortogonais, bases ortogonais
Matrizes ortogonais — prática da teoria e cálculos com matrizes
Simetrias, rotações
Semelhanças, semelhanças diretas
O corpo das semelhanças diretas

Meia volta. Os dois quartos de uma volta
Orientação. Um quarto de uma volta, i
O corpo complexo
Trigonometria
Combinatória
Fatoração em $(Z, +, \cdot)$

Para detalhes posteriores, consultar *Mathématique moderne, 5* e *6*.

Estudantes de 16 anos de idade:

Análise e Espaços Topológicos

$\pi\mathcal{T}_{\mu s}$; D, $\mathcal{T}_{\mu s}$; $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{\mu s}$; $\overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{T}_{\mu s}$; $\bar{\omega}$ $\mathcal{T}_{\mu s}$
Topologia dos espaços métricos
E, $\mathcal{T}_{\mu s}$ (O espaço usual de três dimensões)
$\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_{\mu s}$ (Topologia, homeomorfismo, vizinhanças; aderência, espaço-produto)
Continuidade, limites, seqüências, derivação, integração.

Para mais detalhes, consultar as referências de professôres, *Arlon 6* e *8*.

Espaços Vetoriais

Teorema de Grassmann
$\dim A + \dim B = \dim [A \cup B] + \dim [A \cap B]$
$\forall f \in a^P (V\text{–}W)$: $\dim fV + \dim f^{-1}\{0\} = \dim V$
(Ver $F2$, "Introdução aos Espaços Vetoriais")
Uma nova visão de problemas de sistemas de equações lineares.
Matrizes. Determinantes. Geometria afim do espaço usual começando com um espaço vetorial de 3 dimensões.

Aritmética

O anel de classes de restos $(Z_n, +, \cdot)$
O anel das funções polinomiais sôbre um anel
Anéis (ver *Mathématique moderne, 5*)

Estudantes de 17 anos: Êste é um ano de cálculo dedicado principalmente aos pretendentes à engenharia e às escolas preparatórias de engenharia.

Demonstração da fórmula de Taylor
A integral como limite de somas

Logaritmos e expoentes. O número e

Comprimento de algumas curvas. O número π

Medida de ângulos

O grupo de ângulos $(A, +)$ e isomorfismo para $(\mathbb{R}/Z, +)$

Funções circulares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Equações diferenciais

Forma final da teoria das equações lineares

Formas bilineares. Cônicas

Espaço vetorial euclidiano de 3 dimensões

Esta instrução de análise se tornou possível sòmente pela moderna preparação prévia. Dificuldades não aparecem. A clareza e a simplicidade da exposição resultam no seu próprio rigor. Ao lado do ensino experimental, professôres continuam obtendo informações necessárias de

Arlon 7: Sôbre produto escalar de vetores

Arlon 8: Lições de análise efetivamente realizadas por Frédérique, em classes de estudantes de 16 anos de idade.

Está em preparação *Arlon 9,* sôbre integrais.

Os problemas de amanhã

a) A introdução de elementos de probabilidade no programa. Estamos trabalhando nisto em colaboração com o Professor Jean Teghem.

b) Um estudo sistemático do raciocínio matemático que intervém na nova instrução de matemática elementar.

c) Utilização das vantagens dos processos audiovisuais.

O movimento todo tem sido seguido com grande entusiasmo. A 1.° de dezembro de 1966, uma grande conferência para dar informação sôbre o estado da reforma, com o título de *Reforma em progresso,* reuniu 1.700 professôres secundários belgas de matemática. As principais tarefas do futuro são a reforma da instrução de matemática na escola primária e preparar, tão logo seja possível, a segunda reforma na instrução matemática da escola secundária. Não há parada. Vamos em frente!

Referências

Mathématique moderne:

1. Conjuntos, relações
2. Números reais e plano vetorial
3. Aqui está Euclides
5. Aritmética
6. Geometria plana — plano vetorial euclidiano

Editado por Didier, francês; Macmillan, inglês; Klett, alemão; Eudeba, espanhol; Didier, flamengo.

Arlon 1: Elementos de topologia
Arlon 6: Documento para ensinar análise
Arlon 7: Documento sôbre espaços vetoriais e produto escalar.
Arlon 8: Curso de análise de Frédérique para alunos de 16 anos de idade

Editados pelo Centro Belga de Pedagogia da Matemática, Avenida Brugmann, 183, Bruxelas, Bélgica.

F1: "Geometria plana afim e números reais"
F2: "Introdução aos espaços vetoriais"

Editados por Gauthier-Villars (francês).

O currículo de análise

André Revuz

(França)

Rudimentos básicos de análise

Continuidade e limites são conhecidos como difíceis e possíveis de ser ensinados, sòmente, a estudantes de suficiente maturidade intelectual. A maioria dos cursos elementares não procura ir além de vagas explicações, insistindo mais sôbre aspectos técnicos de derivação, por exemplo, que sôbre o significado profundo. Êste último é estudado em cursos de nível mais elevado.

O fundamento para essa atitude repousa mais no preconceito que em resultados de experiência. A experiência mostra que a maturidade intelectual está muito menos relacionada à idade do estudante, que à educação que êle tenha tido; que conceitos matemáticos verdadeiros são bem recebidos pelos estudantes, desde que sejam apresentados com tôda a clareza e com motivação cuidadosa. Se o conceito é difícil, a solução não está em demorar a sua apresentação; antes, pelo contrário, em prepará-la muito mais cedo. O lema de instrução matemática deveria ser "cedo e progressivamente".

Com relação à análise, os rudimentos básicos que são encontrados a cada passo e que devem ser introduzidos desde o comêço são *linearidade* e *aproximação*.

A seqüência do ensino de análise do princípio do nível secundário até os últimos anos do nível universitário, acredito eu, deveria ser a seguinte:

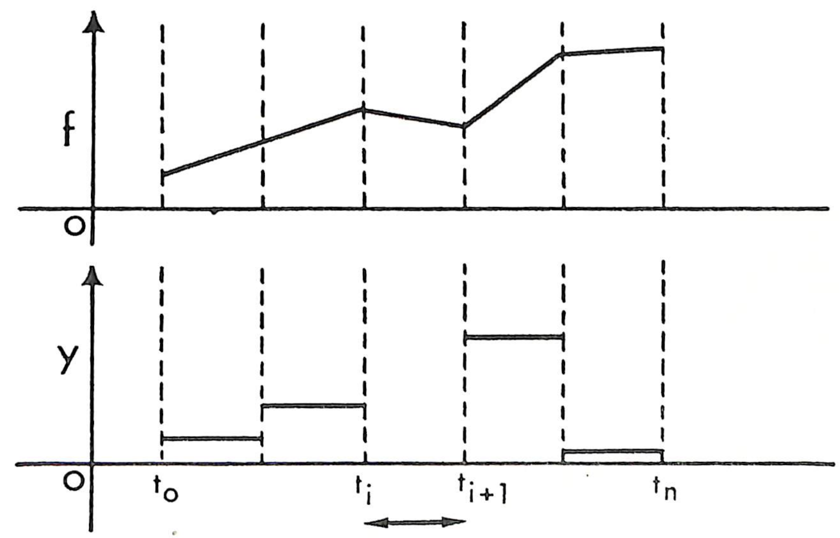
I. Interpolação linear. Funções seccionalmente lineares e funções associadas

Estas questões podem ser apresentadas, proveitosamente, a estudantes de 10 a 12 anos de idade. Neste estágio a intenção é usar o estudo de *situações concretas*, como preparação para introduzir os rudimentos básicos de análise

e já fornecer algumas ferramentas simples, que possam ser manipuladas corretamente.

Os estudantes, nesta idade, conhecem a função linear $x \to kx$, que lhes é, na verdade, apresentada por meio das complicadas "grandezas proporcionais", ao passo que conjuntos, que descrevam x e kx, não são apresentados claramente. O estudante sabe que êles são "números"; muitas vêzes não sabe nada mais, mas se satisfaz com isso no comêço. Do mesmo modo, êle pode satisfazer-se com a comparação experimental de que, no plano coordenado, todos os pontos com coordenadas x e kx estão alinhados. Sendo êste o caso, será visto que a correspondência prática entre grandezas não é conhecida senão por um número finito de valôres (resultados experimentais, tábuas de valôres numéricos); porém pode ser interessante estender a correspondência a outros valôres, até onde seja possível com simplicidade, para efetuar uma interpolação. A mais simples destas interpolações é a interpolação linear: a razão para esta simplicidade repousa no fato de que a aplicação $x \to kx$ é um endomorfismo da estrutura aditiva de Z (k deve ser então um número inteiro), de Q (k racional) ou de $\mathbb{R}$. (Desta maneira também podemos obter os únicos endomorfismos para Z e Q e os únicos endomorfismos de $\mathbb{R}$, que são também monotônicos ou contínuos. Êstes são também isomorfismos para $\mathbb{R}$ e Q.)

A interpolação linear substitui a correspondência, em que se conhece apenas um número finito de pares, por uma função seccionalmente linear que será designada doravante por f.s.l. Por exemplo, êste é o caso com as representações gráficas de estradas de ferro. A inclinação de cada um dos segmentos da curva do gráfico de uma f.s.l. é de interêsse: no caso de um trem ela é a sua velocidade durante o trecho correspondente. Um outro gráfico poderia ser traçado, formado por segmentos paralelos ao eixo das abscissas e usando-se o valor da velocidade correspondente à inclinação de cada trecho da f.s.l.



Isto nos dá uma forma de par ordenado de uma (f.s.l., f) e uma *função de grau* φ unidas pelas seguintes relações:

$$\text{Se } t \in]t_i, t_{i+1}[; \quad \varphi(t) = \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \quad \text{para } t' \neq t, \; t' \in]t_i, t_{i+1}[$$

$$\text{Para } t \in [t_i, t_{i+1}[, \; f(t) - f(t_0) = \sum_{j<i} u_i \, (t_{j+1} - t_j) + u_i \, (t - t_i)$$

Aqui, então, temos um caso simples formado de uma função f e sua derivada φ (derivada exceto num número finito de pontos. Os valôres de φ e os ponto t_i não são dados e não têm interêsse prático).

Pode ser visto, fàcilmente, que os conjuntos das f.s.l. e os conjuntos das funções-escada têm uma estrutura natural de espaço vetorial sôbre $\mathbb{R}$, e que a aplicação D, que faça φ corresponder a f, e a aplicação I, que faça f corresponder a φ (colocando, por exemplo, $f(t_0) = 0$), são lineares e mùtuamente recíprocas. Portanto, temos os princípios da teoria da diferenciação e da teoria da integração. O importante teorema da média é fàcilmente demonstrado no caso presente:

$$\text{Se para } t \in]t_0, t_n[\text{ tivermos } |\varphi(t)| \leqslant K,$$

$$\text{então } \; |f(t) - f(t_0)| \leqslant k \, |t - t_0| \, .$$

Se o estudo anterior fôsse feito com estudantes de 10 a 12 anos de idade, como eu afirmo, não usaríamos o têrmo espaço vetorial, visto que nas condições atuais os estudantes não o compreenderiam. Pode-se falar de propriedades lineares básicas de D e I. Estas, pelo menos, podem ser demonstradas fàcilmente e temos então exemplos muito importantes de espaços vetoriais e aplicações lineares para nosso estudo.

É possível e interessante dar numerosos exemplos de f.s.l. e de funções-escada associadas:

1) A tabela de um impôsto de renda progressivo (função-escada) e o valor do impôsto achado como uma função da renda (f.s.l.).

2) O número de passageiros levados de uma estação a outra por um meio comum de transporte (função-escada) e o número de "passageiros-quilômetro" realizados por êsses mesmos meios de transporte (f.s.l.).

3) A quantidade de eletricidade usada num departamento em função do tempo (função-escada) e o consumo de eletricidade (f.s.l.). Lembremo-nos que muitos dados estatísticos são postos à prova com bases históricas, que são representações gráficas de funções-escada com as quais as f.s.l. podem ser combinadas.

Tôdas as considerações anteriores, então, levam ao cálculo de diferenças finitas e a uma variedade de cálculos numéricos de importância evidente.

II. Introdução do corpo dos números reais

A melhor maneira de proceder, aqui, parece ser a apresentação axiomática. De fato, os estudantes já manipulam alguns números racionais e alguns irracionais ($\sqrt{a}$, π). O objetivo, então, é essencialmente torná-los cientes das propriedades que estão usando e fazer um balanço completo e exato, com

um corpo comutativo arquimediano totalmente ordenado e possuindo a propriedade dos *intervalos encaixantes.* (Por motivo de brevidade a terminologia precedente pode ser empregada junto a estudantes, com um número adequado de exemplos de estruturas algébricas [tôdas simples] e estruturas ordenadas, que já terão sido vistas. Realmente êste é apenas um problema menor. O mais importante é que os estudantes saibam claramente, qualquer que seja o vocabulário empregado, o que pode e o que não pode ser feito com números reais.)

Começando desta maneira é essencial ressaltar a equivalência da propriedade dos intervalos encaixantes e a existência de um mínimo para qualquer conjunto minorado. Esta equivalência pode ser admitida sem demonstração.

Juntamente com a introdução de $\mathbb{R}$, no caso da álgebra, é necessário extrair a noção de espaço vetorial, possibilitando numerosos exemplos que os estudantes deveriam ter aprendido:

a) Inúmeros dados estatísticos expressos por sucessões finitas de números, sucessões que podem ser somadas e multiplicadas por um número.

b) Exemplos de f.s.l. e funções-escada.

c) O estudo (eventualmente só experimental) de transformações de um plano.

III. Introdução progressiva de continuidade e, a seguir, a noção de limite

Em minha opinião, é necessário, neste ponto, gastar tempo suficiente para assegurar o estabelecimento da definição matemática autêntica de continuidade.

Imagino, pelo menos, duas aproximações, que não se excluem mùtuamente e são òbviamente compatíveis:

1. Começando com a matéria estudada em I (f.s.l. e funções-escada). Se usarmos a palavra contínuo em seu sentido intuitivo, ninguém irá contestar que as f.s.l. são contínuas e as funções-escada não são. O problema é dar uma definição matemática que não seja ambígua: poderíamos começar com a idéia de que uma função contínua não tem saltos; isto é, que todos os saltos, por menores que sejam, devem ser excluídos. Em outras palavras, por menor que possa ser uma quantidade positiva, a função deve variar menos que essa quantidade, quando se aproxima do valor x_0 no qual desejamos excluir a possibilidade de saltos. Chegamos à definição tradicional,

$$\forall \; \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exists \; \eta \in \mathbb{R}_+^* : |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$\mathbb{R}_+^*$ designa o conjunto dos reais estritamente positivos. O uso dos símbolos $\forall$ e $\exists$ são muito úteis para esclarecer as idéias e dar impacto à exposição.

2. Partindo da idéia de que tôda medida pode ser aproximada, e que uma função que expresse matemàticamente uma lei de medidas deve ser capaz de garantir que o êrro no valor $f(x)$ será tão pequeno quanto se queira, desde que o êrro em x seja suficientemente pequeno. Isto nos leva à afirmação enunciada anteriormente.

Isso pode ser feito como em I pela aplicação de um intervalo de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e também simultâneamente por aplicações de uma parte do plano no plano e, anàlogamente, de um espaço métrico em outro. A existência de diferentes distâncias no plano (ligadas a diferentes normas de $\mathbb{R}^2$) deveria ser apresentada razoàvelmente cedo. Isso se soma à intuição e mostra que podemos encontrar um operador no conceito de distância, quando o despojamos de seus aspectos particulares não-essenciais.

A *noção de limite* é uma das análises mais delicadas e deveria ser introduzida depois da continuidade, não antes. Uma das melhores maneiras de fazer isso, em minha opinião, é partir de funções descontínuas que tenham limites (limite à direita ou limite à esquerda, tais como as funções s, por exemplo). A definição será análoga à de continuidade, mas deve-se insistir no fato de que o valor da função em x_0, se existir, não entra na definição de limite em x_0; o importante aqui é a partição da função em valôres na vizinhança de x_0, mas diferentes de x_0. Por exemplo, encontramos a definição no caso de uma aplicação f de um espaço métrico E (provido de distância d) num espaço métrico F (provido de distância δ).

$$(\lim_{x_0} f = l) \iff (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : 0 < d(x, x_0) < \eta \implies \delta(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$$

Explicadas sumàriamente, a propriedade dos limites e a continuidade, que talvez sejam conseqüência de $\mathbb{R}$ ser um corpo topológico e $\mathbb{R}^2$ (com suas diferentes normas equivalentes) um espaço vetorial topológico, podem ser estabelecidas simples e definitivamente nesse estágio.

IV. Diferenciação de funções reais de uma variável real

O ponto de partida é a aproximação de tal função por uma f.s.l. Sabemos que há casos em que essa aproximação é satisfatória em têrmos práticos e outros em que é melhor, conforme a divisão do intervalo de variação da variável seja mais exata. Pode ser observado também que na prática é inútil ir além de certa subdivisão (o terreno percorrido por um trem durante $\frac{1}{1.000}$ de segundo não é de interêsse nenhum para qualquer viajante; a produção de uma fábrica durante 1/10 de segundo é insignificante etc.). Porém o matemático quer ir ao fim do processo; por um lado para ser capaz de satisfazer qualquer necessidade eventual de maior precisão, por outro lado para sua satisfação intelectual e para atingir uma situação, que a longo prazo é conceitualmente mais simples.

Mas é claro que a continuação indefinida da partição será particularmente significativa se a inclinação das retas de interpolação entre x_0 e $x_0 + h$, onde x_0 é fixo e h variável, varia cada vez menos, enquanto h decresce. Isto leva à noção de função derivável, para a qual temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$$

Mas se desejamos considerar o número que êsse limite é, há um fato significativo sôbre a situação precedente, onde uma aplicação linear foi envolvida: É possível recuperar a aplicação linear. Notamos que, se estabelecermos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = k(h)$$

teremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h)}{h} = l \text{ e } k(h) = lh + h \cdot \alpha(h), \text{ com}$$

$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. Isto nos capacita a explicar a diferenciabilidade de f em x_0 pelo fato de que ela pode ser escrita, para h muito pequeno, $f(x_0 + h) - f(x_0) = lh + \alpha(h) \cdot h$ com $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. A aplicação linear $h \to lh$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ qualifica como aplicação tangente linear de x_0 para f; também como uma diferencial de f em x_0.

Observe-se que esta aplicação pode ser considerada o limite da aplicação linear $u \to k(h)u$ quando h tende a zero, se a distância das duas aplicações lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é definida como o valor absoluto da diferença de seus coeficientes (O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de aplicçaões lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é isomorfo em $\mathbb{R}$, e a distância precedente está ligada à norma natural em $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.)

Chamaremos $D[f, x_0, \cdot]$ a diferencial de f em x_0 e $D[f, x_0, h]$ seu valor em h. Temos então:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = D[f, x_0, h] + \alpha(h) \cdot h \text{ com}$$
$$D[f, x_0, \cdot] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ e } \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0.$$

O conjunto D_{x_0} de funções diferenciáveis em x_0 torna-se imediatamente um espaço vetorial e a aplicação $f \to D[f, x_0, \cdot]$ de D_{x_0} em $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é linear. (A aplicação de $D_{x_0} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $(f, h) \to D[f, x_0, h]$ é bilinear).

As duas propriedades fundamentais da diferencial são as seguintes:

1) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0, e

se $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ (com $f([a, b]) \in [c, d]$), é diferenciável em $f(x_0)$, a aplicação composta gf é diferenciável em x_0 e sua diferencial é a combinação das diferenciais de f e g.

$$D(g \, o \, f, x_0, \cdot) = d(g, f(x_0), \cdot) \, o \, D(f, x_0, \cdot)$$

2) *Teorema da média.* Se f é diferenciável em $[a, b]$ e se a norma de $D[f, x]$ (isto é, o valor absoluto da derivada) é limitado em todo ponto $x \in]a, b[$ pelo número M, então

$$| f(b) - f(x) | \leqslant M(b - a).$$

A demonstração usa os seguintes fatos: dado ϵ, existe, de acôrdo com a hipótese, um número η para todo ponto $|h| < \eta(x)$ tal que

$$| f(x + h) - f(x) | \leqslant (M + \epsilon) \cdot | h | \qquad (1)$$

Consideramos, então, o conjunto E dos pontos x, tais que para qualquer y

$$y \in [a, x] \text{ temos } |f(y) - f(a)| \leqslant |(M + \epsilon)| \, y - a | \qquad (2)$$

Se E não fôr vazio, êle será majorado por b. Êle tem um supremo ξ (sem esta propriedade essencial dos números reais, o teorema seria falso). A relação (1) é verdadeira para todo $y \in \xi$. Por continuidade, ela é verdadeira para ξ. Porém devido a (2) ela é verdadeira para $\xi + \eta(\xi)$, o que demonstra que $\xi = b$ e que $b \in E$. Como ϵ é arbitrário o teorema está demonstrado.

O significado da formulação apresentada aqui é:

1) ela é válida para funções diferenciáveis de um intervalo de $\mathbb{R}$ em qualquer espaço normado.

2) a demonstração é muito mais natural que a prova do teorema apresentada na forma de

$$\exists\, c \in \,]a, b[, \text{ tal que } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

e que portanto a aparente exatidão é falsa uma vez que não se pode dizer nada de c, a não ser que êle pertence ao intervalo de $]a, b[$. Finalmente, salientemos que uma demonstração muito parecida com a precedente poderia estabelecer que se $D[f, x, \cdot\,]$ é uma aplicação crescente para todo $x \in \,]a, b[$, então f é crescente em $[a, b]$. Além disso, é possível deduzir o teorema da média do último resultado. A significação da exposição precedente, onde as estruturas envolvidas são mostradas claramente é que os resultados obtidos podem ser generalizados sem dificuldade.

3. *Extensão para o caso de aplicações de um conjunto de um espaço normado* E *num espaço normado* F (em particular $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$).

Temos apenas de ver o que foi útil para definir a diferencial, para perceber que os mesmos resultados podem ser conseguidos na situação seguinte:

f é uma aplicação de um Φ aberto de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F. Então, diz-se que f é diferenciável no ponto $x_0 \in \Phi$ se existe um elemento $D[f, x_0, \cdot\,]$ do espaço das aplicações lineares contínuas de E e F tal que para $||h||$ suficientemente pequeno, possamos escrever

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = D(f, x_0, h) + \alpha(h) \cdot ||h||$$

onde α é uma aplicação da esfera de centro O de E em F, tal que

$$\lim_{h \to 0} \alpha = 0.$$

Tôdas as propriedades descobertas em 3 para a diferencial e funções diferenciáveis podem ser estendidas sem nenhuma dificuldade. O teorema da média toma a forma:

Se o segmento $[a, b]$ está incluído em Φ, separa $x \in [a, b]$, temos $||D(f, x, \cdot\,)|| \leqslant M$, então $||f(b) - f(a)|| \leqslant M\,||b - a||$

do que deduzimos que, se $||D(f, x, \cdot\,]\,||$ é limitada por M em todo Φ e se designamos por $d_\Phi(a, b)$ o limite inferior dos comprimentos das curvas poligonais que ligam a com b em Φ, então temos para dois pontos quaisquer

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant M\, d_\Phi(a, b)$$

Finalmente observemos que se $E = \mathbb{R}^p$ e $F = \mathbb{R}^q$, $D[f, x, \cdot\,]$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (e portanto contínua, quaisquer que sejam as normas escolhidas sôbre $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$) e pode ser expressa em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ por uma matriz cujos coeficientes são as derivadas parciais das aplicações $pr \cdot f$ onde pr_i designa a i-ésima projeção sôbre $\mathbb{R}^q$.

A observação importante a ser feita aqui é que o passo III para IV exige por um lado a introdução da idéia de norma em um espaço vetorial, a qual é muito simples; da idéia de norma da aplicação linear e contínua de um espaço vetorial normado e finalmente de noções sólidas de álgebra linear, que nos dá uma outra razão para introduzi-las.

Parece razoável e possível realizar um programa bem pensado de instrução secundária, o que nos permitiria a apresentação do ponto IV na última parte do ano final.

IV. **Primitivas — Integração**

A seguir daremos apenas as direções mais gerais do desenvolvimento da idéia, salientando a motivação para cada um dos principais passos.

No primeiro estágio o pensamento pode limitar-se à consideração de aplicação de um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, mas no fim da unidade de estudo será evidente que tudo que foi dito continua verdadeiro para aplicações de $[a, b]$ em $\mathbb{R}^p$ e, do mesmo modo, em qualquer espaço de Banach.

A definição de primitivas não oferece qualquer dificuldade e o teorema da média garante que duas primitivas da mesma função diferem por uma constante. Qualquer tabela de derivação lida ao contrário dá uma tabela de primitivas.

Mas o primeiro problema que pode ser colocado é o seguinte: se a derivada é conhecida apenas aproximadamente, o que se pode dizer de sua primitiva? O teorema da média nos dá a resposta:

Se para todo $x \in [a, b]$, temos $|f'(x) - g'(x)| < \epsilon$, então pode-se afirmar, que temos também

$|(f(x) - f(a)) - (g(b) - g(a))| < \epsilon\,|b - a|$, ou, igualmente, introduzindo a seguinte norma, que será usada em tudo o que se segue:

$$||\Phi|| = sup\,\{[|\Phi(x)| : x \in [a, b]\}$$

e assumindo que a condição $f(a) = g(a)$ se verifica, temos a afirmação, se

$||f' - g'|| < \epsilon$, então $||f - g|| < \epsilon\,(b - a)$. Em outras palavras, com a condição $f(a) = g(a)$, derivadas próximas têm primitivas próximas.

A referência à aproximação de uma derivada f' por função-escada leva a um aperfeiçoamento do teorema da média, pela sua demonstração no caso de uma função que não é diferenciável em um número finito de pontos; esta demonstração decorre imediatamente ou anàlogamente num conjunto infinito e numerável de pontos (esta é mais elaborada). No que segue será suposto que "derivada" significa derivada exceto possìvelmente nos pontos de um conjunto que é no máximo enumerável.

O resultado obtido pode ser expresso então da seguinte forma: se a sucessão de funções derivadas (f_n') converge, com relação à norma, existindo a função derivada g' e se $f_n(a)$ converge para $g(a)$, então a sucessão (f_n) converge para g.

Porém isto nos leva a uma outra pergunta: se a sucessão de funções derivadas (f'_n) converge para a função g e se $f_n(a)$ tem um limite, haverá uma função g para a qual a sucessão (f_n) converge e que tenha a derivada g?

O problema é difícil, mas vale a pena analisar. Uma observação decisiva é que se a sucessão (f'_n) converge para g, as f'_n de índices razoàvelmente grandes estarão próximas umas das outras; mas então, devido ao teorema da média e à hipótese sôbre a sucessão $f_n(a)$, o mesmo será verdadeiro para funções f_n de índices grandes?

Isso implica a convergência da sucessão (f_n)? Isso leva à colocação do problema do critério de Cauchy para a solução de funções de números reais, que se reduz ao critério de Cauchy para sucessão de números reais e que pode ser fàcilmente deduzida do axioma dos intervalos encaixantes, ao qual é equivalente. Em conclusão, à pergunta feita é dada uma resposta afirmativa.

Mas então uma outra questão aparece: desde que as funções-escada estão entre as funções derivadas mais simples, perguntamo-nos que funções podem ser aproximadas — no sentido da norma — por funções-escada.

É evidente que uma função contínua contendo um ponto dado pode ser aproximada em um intervalo conveniente, tal como ϵ, por uma função constante. Então pode ela ser aproximada na norma, isto é, em todos os pontos a, por uma função-escada? A resposta positiva é dada pelo lema de Borel-Lebesgue para um intervalo fechado $[a, b]$; isto fornece a motivação, e a prova pode ser imediatamente deduzida da existência de um supremo de um conjunto majorado de $\mathbb{R}$. (Considerar o conjunto E dos $x \in [a, b]$ tais que o segmento $[a, x]$ possa estar contido num número finito de intervalos de uma família dada. E não é vazio. Êle é majorado por b. Seja c o supremo de E. Existe um intervalo $c - \eta_1$, $c + \eta_2$ da família. Mas $[a, c - \eta_1/_2]$ está por hipótese contido num número finito de intervalos da família dada, conseqüentemente $[a, c + \eta_2/_2]$ também. Logo, é impossível que $c < b$. Temos $c = b$ e o raciocínio infere $b \in E$.

Deve-se observar que o cálculo da primitiva de uma função-escada, aproximação de uma função contínua, envolve as chamadas somas de Cauchy-Riemann.

Obtivemos o intervalo de funções contínuas. Seu caráter linear foi mostrado. O teorema da média pode ser expresso por

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \| f \| \; | b - a |$$

o que significa que a forma linear (função linear)

$$f \to \int_a^b f(t)dt$$

num espaço vetorial normado $C([a, b], \mathbb{R})$ das funções reais contínuas em $[a, b]$, é contínua.

Novos problemas surgem: determinar tôdas as formas lineares e contínuas sôbre $C([a, b], \mathbb{R})$. A resposta é dada pelo teorema de F. Riesz. Além disso, descobrir as extensões razoáveis dessa forma linear que nos leva à integral de Lebesgue, começando com a observação de que

$\int_a^b |f(t)|dt$ é uma norma sôbre $C([a, b], \mathbb{R})$ para a qual o espaço não é completo.

Conclusão

Sem dúvida as poucas apresentações finais que descrevi ràpidamente deveriam ser desenvolvidas nos primeiros anos do nível universitário. Mas o importante é que elas foram preparadas cuidadosamente para instrução na escola secundária. Parece-me claro que dando ênfase às estruturas envolvidas e apresentando cada estágio como a resposta a um problema (mas uma resposta que realmente se origine de outras), podemos realizar uma exposição coerente que ilumine os fatos básicos e estimule a mente para sua máxima atividade.

A motivação para cada passo, ao invés de permitir que a matemática pareça uma coleção de resultados independentes, mostra o que ela realmente é: uma resposta prática e conceitualmente racional para importantes problemas.

Programas de análise nas universidades da América Central

Eduardo Suger Cofino
(Guatemala)

O tema específico que me foi designado para êste trabalho pelo Comitê Organizador da Segunda Conferência Interamericana sôbre Educação Matemática, refere-se aos programas de análise seguidos nas universidades da América Central. Entretanto, creio ser necessário fazer alguma referência a nossos programas completos, visto que, por um lado, não devemos perder a oportunidade de aproveitar a contribuição de colegas do continente, suas críticas e sugestões para modificação construtiva; e por outro lado, estou certo de que a insuficiência de nossos programas de análise é uma conseqüência imediata dos programas gerais.

Os programas que envolvem a educação matemática em nossa região são muito semelhantes, e portanto não estarei ignorando a situação geral ao focalizar com detalhes o caso da Guatemala.

Considerações gerais sôbre as universidades centro-americanas

Em ordem cronológica, a primeira Universidade da América Central foi fundada na Guatemala, em 1676; em seguida vem a Universidade da Nicarágua, em 1812; Salvador, 1841; Honduras, 1847, e Costa Rica, 1940. A Universidade de Costa Rica é realmente mais velha do que o sugerido; a velha Universidade de São Tomás foi fechada em 1888 e não houve universidade nesse país até 1940, quando a atual Universidade de Costa Rica foi organizada. A maioria destas universidades tem, portanto, 100 anos de idade.

Desde o comêço, os maiores esforços foram quase sempre concentrados em ciência social e jurídica, medicina, farmacologia e engenharia civil. Contrastando com isso, o ensino e o desenvolvimento de ciência pura, e conseqüentemente a tecnologia, foram negligenciados. Isto tornou difícil o desenvolvimento econômico da região.

Com relação ao desenvolvimento da matemática, podemos dizer que o interêsse na intensificação dos cursos e a elevação do nível de ensino na universidade é recente. Neste movimento, as recomendações da Conferência de Bogotá têm tido grande influência. O problema comum nas universidades centro-americanas com relação à instrução matemática é a preparação muito incompleta (educação sem valor, limitada à manipulação mecânica de expressões algébricas e à resolução de triângulos) que o estudante tem quando sai da escola secundária. Apesar da recomendação feita pelos professôres de matemática da universidade, o nível médio não teve seus planos de estudo aperfeiçoados. Penso que deve ser mencionado que os seguintes professôres têm trabalhado no treinamento de professôres de nível médio e na formulação de textos elementares de matemática: em Costa Rica, Professor Bernardo Alfaro; em Honduras, Professor Salvador Llopis; em Salvador, Professor Carlos Umana, e na Nicarágua, Professor Roberto Zalaya Blanco.

Não obstante êstes esforços, países intimamente ligados por laços econômicos e histórico-geográficos não realizaram ainda uma unificação de um nível mínimo de conhecimento matemático na escola secundária, o que formaria a base necessária para o desenvolvimento de planos seguintes, para matemática, em um nível universitário satisfatório.

Uma das bases para o avanço efetivo em qualquer campo do conhecimento humano é a sinceridade de cada um para consigo mesmo e a lealdade para com a comunidade científica a que pertence, que, por ser científica, não reconhece fronteiras raciais, políticas ou religiosas. Por essa razão não me sinto embaraçado em dizer que ainda estamos no estágio de primeira infância em matemática e que precisamos da assistência fraternal da Comunidade Matemática Internacional para nos guiar, de modo que, num futuro não muito distante, possam contar conosco como membros efetivos do progresso em matemática e educação matemática no domínio da ciência pura.

Programas de matemática nos programas de estudo geral

A universidade centro-americana (ciente da inconveniência de uma polarização prematura dos estudos universitários de um jovem formado numa escola secundária fraca, ciente da necessidade urgente para o homem moderno de ter um conhecimento sólido razoável nas várias áreas do entendimento humano, pois êle não deve ficar isolado numa sociedade artístico-científica) criou a área de estudos gerais, que dura de um a dois anos em vários países.

Dentro dêste gênero de estudo, darei, com detalhes, os programas guatemaltecos e discutindo o particular estarei auxiliando o geral.

O estudante que se matricula nos estudos gerais possui 18 anos de idade e geralmente tem a impressão de que a matemática conta grande número de fórmulas, que o homem usa para resolver problemas da vida cotidiana, tais como achar a área de um pedaço de terra, o volume de sólidos, o lucro sôbre o capital e alguns outros problemas. O estudante não tem conhecimento da existência da matemática pura, isto é, bem separada dos campos da física e engenharia. É importante, também, entender que estamos tratando de um grupo bastante heterogêneo de estudantes, isto é, futuros advogados, médicos, literatos, etc.

Nosso problema, então, é apresentar o estudante à matemática e mostrar-lhe que homens, fazendo matemática, trabalham com universos que podem governar; por essa mesma razão, o matemático é um construtor de universos, nos quais define as entidades e os postulados, as propriedades e as relações fundamentais. Deve ser deixado claro, também, que a matemática é útil (útil para "outras coisas") e portanto serve para outros fins além de si mesma, conforme esteja aplicada à física, economia, psicologia, etc.

O programa usado em 1964-65 está exposto abaixo para que o leitor se possa dar conta da eficácia do curso:

Matemática I (9 horas semanais durante um semestre)

1) Introdução à lógica simbólica. Operações com tabelas proposicionais, tais como $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \Longrightarrow p \vee q$
2) Elementos da teoria dos conjuntos. Demonstração de fórmulas por igualdade, tais como $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

3) Funções. $F: A \to B$, injeção, sobrejeção, bijeção, soma inversa, produto, composição.
4) Relações binárias. Uma relação R definida por $A \Longrightarrow R \subset A \times A$; reflexiva, simétrica, transitiva, antissimétrica, equivalência, classes de equivalência, partição de um conjunto, relações de ordem.
5) Estruturas algébricas. Operação binária definida sôbre A: $f: A \times A \to A$; monóides, semigrupos, anéis, anel de integridade, corpos e teoremas.
6) Inteiros. Construção e propriedades a partir de uma partição $Z = (J \times J)/\sim$, onde J é o conjunto dos naturais e "$\sim$" é definido em $J \times J$ por:

$$(a,\ b) \sim (a',\ b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b,$$

com $a,\ a',\ b,\ b' \in J$

A estrutura $(Z,\ +,\ \cdot)$ como um anel de integridade.

7) Os números racionais. Construção e propriedades como uma partição $Q = Z \times Z/\sim$. A estrutura $(Q,\ +,\ \cdot)$ como um corpo, etc.
8) O corpo das classes de Cauchy
9) Espaços métricos
10) Espaços topológicos
11) Limite de uma função e continuidade

Para estudantes que vão seguir engenharia depois dos estudos gerais, um curso chamado *Matemática 3* era dado, com o seguinte sumário:

Matemática III (6 horas por semana, durante um semestre)

Topologia geral dos números reais
Intervalos generalizados
Função de acréscimos
Função-quociente de acréscimo
Derivadas
Funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas
Teoremas fundamentais do cálculo diferencial
Conceito de integral
Teorema de Taylor

Apreciação dos resultados obtidos no programa de matemática dos estudos gerais

Podemos dizer que 8% dos 1.000 estudantes que passaram por êste programa mostraram excelente aproveitamento. Como um resultado positivo do programa, podemos atentar para o fato de que o estudante apreendeu estruturas matemáticas e lhe foi ensinado que, partindo de certos conceitos básicos, é possível construir todo o edifício da matemática. Podemos apontar, como um resultado negativo do programa, que os estudantes não tiveram a oportunidade de se familiarizar com os aspectos intuitivos da matemática e, visto que, nos cursos 1 e 2 tínhamos futuros médicos, biólogos, veterinários, etc., para quem o aspecto intuitivo da matemática é básico, estávamos tendo uma séria deficiência. Outro defeito sério do programa é devido ao fato mencionado anteriormente de que o curso secundário não equipa o estudante com ferramentas tais como geometria analítica, de modo que o futuro universitário não tendo qualquer conhecimento da equação da elipse não pode fazer cursos tais como topografia, mecânica dos fluidos, etc.

Seguindo a análise completa do programa prèviamente descrito e auxiliado pela valiosa colaboração de Jorge Arias (Reitor da Universidade de São Carlos da Guatemala) e do Dr. Burton Jones (especialista regional em matemática na CSUCA — NSF — AID Program) selecionamos os seguintes programas:

Matemática I

Tópico I — Conjuntos. Operações sôbre conjuntos. Relações (capítulo I)

Tópico II — Relações de equivalência. Operações binárias. Sistemas numéricos. Números racionais. Relações de ordem. Os números racionais como um corpo ordenado (capítulo II)

Tópico III — Os números reais. Números complexos (capítulo III)

Tópico IV — Valor absoluto. Gráficos. Funções (capítulo IV)

Tópico V — Sistemas de equações lineares (capítulo V)

Tópico VI — Função exponencial. Função logarítmica (capítulo IX)

Tópico VII — Funções trigonométricas (capítulo X)

Os capítulos referem-se a *University Freshman Mathematics*, Taylor-Wade, John Willey and Sons.

Matemática II

Tópico I — Indução matemática e teorema do binômio

Tópico II — Polinômios

Tópico III — Função exponencial e logarítmica

Tópico IV — Funções trigonométricas

Tópico V — Funções trigonométricas inversas

Tópico VI — Representação trigonométrica de números complexos

Tópico VII — Resolução de triângulos

Matemática III

Tópico I — Geometria analítica plana

Tópico II — Funções. Soma, produto e composição de funções

Tópico III — Transformações

Tópico IV — Equações. Duas variáveis. Cônicas

Tópico V — Limites e derivadas

Tópico VI — Teoremas fundamentais de análise

Tópico VII — Aplicações do cálculo diferencial

Texto recomendado: *Intermediate Analysis*, Haaser-Lasalle-Sullivan.

Matemática IV

Tópico I — A integral definida

Tópico II — Métodos de integração

Tópico III — Aplicações do cálculo integral

Tópico IV — Séries de Taylor

Tópico V — Funções de *n* variáveis

Texto recomendado: o mesmo de *Matemática III*.

Os resultados obtidos aqui já são satisfatórios, tanto que se pode dizer que 46% dos 2.000 estudantes que passaram por êsse programa, tiveram êxito.

Comentários gerais

a) Guatemala: Como se pode ver claramente da exposição precedente, ainda estamos trabalhando na formulação de cursos gerais, que incluem álgebra e análise, sofrendo, além disso, o sério problema de não têrmos um curso de geometria geral.

Para 1967, é planejada a criação de um departamento de matemática, o qual nos daria uma oportunidade de dar um curso de análise, talvez no nível do texto de Rudin.

b) Honduras: A situação de Honduras é semelhante à da Guatemala, desde que não existe curso de análise, exceto para as idéias elementares, apresentadas no programa de estudos gerais.

c) NICARÁGUA: Nicarágua (Leon) tem um departamento de Matemática que possui um curso de pós-graduação em matemática e por isso oferece de fato cursos formais de análise. Na Universidade de Manágua, um curso de análise não é, ainda, apresentado como uma continuação do curso de introdução ao cálculo infinitesimal.

d) COSTA RICA: Êste é, sem dúvida, o país da América Central que tem um currículo formal de análise. É dado pelo Departamento de Matemática aos futuros estudantes graduados em matemática.

D) SÔBRE A EDUCAÇÃO DO PROFESSOR

Reeducação de professôres em Pôrto Rico

MARIANO GARCIA
(Universidade de Pôrto Rico)

A educação matemática em Pôrto Rico sofreu várias mudanças na década passada, principalmente durante os últimos 5 anos. Fizemos numerosos projetos relacionados com a revisão dos planos de estudo para a instrução em nível secundário ou de princípio de universidade bem como com a reeducação de professôres de matemática e de ciências. Como se pode esperar o processo tem sido gradativo, mas o que já se conseguiu justifica o otimismo com relação ao futuro.

Demos atenção e fizemos esforços especiais para a reeducação de professôres. Desde 1957, sustentados pela NSF, mais de 40 cursos de ciências e matemática foram realizados, com participação de mais de 1.200 professôres primários e secundários. O Departamento de Instrução Pública de Pôrto Rico deu grande apoio e colaboração a êste programa de aperfeiçoamento do professor. Os cursos foram bàsicamente de três tipos: cursos de férias, cursos para professôres em exercício e cursos durante o ano escolar.

Os cursos de férias são geralmente conduzidos em vários níveis de acôrdo com o preparo e as necessidades dos professôres participantes. Alguns professôres recebem preparo em cursos modernos de biologia, química, física e matemática, formulados pelos diversos grupos de estudos de currículos experimentais nos EUA. Outros estudam matérias particulares tais como estatística, análise matemática e álgebra abstrata, disciplinas que oferecem aos participantes uma compreensão melhor da matemática e dão-lhes assim a oportunidade de ensinar num nível superior. Os participantes podem receber 6 créditos em matemática e ciências. Cêrca de 70 professôres de Pôrto Rico e de outros países latino-americanos tomam parte em cada curso. Tivemos o privilégio de ter, nos programas, professôres da Bolívia, Salvador, Nicarágua, República Dominicana, Panamá, Honduras, Guatemala, Peru, Colômbia e EUA. Alguns cursos têm sido organizados para professôres primários, mas a maioria tem sido dada em nível secundário. Os cursos de férias duram em geral de seis a oito semanas e são realizados em junho e julho, isto é, durante o período de férias escolares em Pôrto Rico.

O segundo tipo de curso é o destinado a professôres em exercício. São realizados durante o ano escolar, de agôsto a maio, geralmente aos sábados, de modo a não interferir no programa normal dos professôres participantes. Durante três horas cada semana, os professôres participam de cursos de ciências e matemática moderna destinados a aperfeiçoar suas habilidades e conhecimentos. Alguns dos cursos tendem a enriquecer o conteúdo dos cursos de matemática e ciências que foram preparados pelos grupos de estudos de currículos experimentais. Através dêstes cursos, os professôres participantes têm a oportunidade de receber 6 créditos durante o ano escolar.

O terceiro tipo de curso, realizado durante o ano escolar, dá um treinamento intensivo, durante o ano escolar, para grupos de professôres cuidadosamente selecionados, que tenham possibilidades de se tornarem líderes na modernização dos planos de estudo para matemática e ciências em tôda a ilha de Pôrto Rico. Já houve participantes de vários países latino-americanos. Cada participante tem a oportunidade de receber 36 créditos em matemática e ciências. Em Pôrto Rico os cursos durante o ano escolar são geralmente dados em nível não-graduado e incluem cursos de estatística matemática, geometria moderna, programação de computador eletrônico e física geral moderna. Alguns dos professôres mais bem-dotados matriculam-se em cursos de pós-graduação que conduzem ao mestrado com especialização em matemática. Cada professor participante neste curso recebe uma ajuda de custo de no máximo 3.000 dólares para um período de 10 meses, mais 450 dólares para cada um dos dependentes que podem ser no máximo 4. Além disso são dados 75 dólares para livros e gastos de 2 viagens de ida e volta entre sua casa e a universidade. Êle é também isento do pagamento de anuidades.

O programa formal do curso é complementado por palestras especiais feitas por matemáticos notáveis de Pôrto Rico, dos EUA e de outros países bem como por filmes sôbre assuntos matemáticos e científicos. Segue uma lista de alguns dos nomes dos nossos conferencistas: Jean Dieudonne, da França; Alexander Dinghas, Wilhelm Maak e Max Deuring, da Alemanha; Kert Hirsch, da Inglaterra; Lucas Bunt, Adrian Zaanen e Frederik van der Blij, da Holanda; Hans Tornehave, da Dinamarca; Jose Tola Pasquel, do Peru; Howard Fehr, Oystein Ore, Cletus Oakley, Irving Adler e Truman Botts, dos EUA.

Na seleção de professôres para cada tipo de curso, são considerados o número de anos de experiência acadêmica, educação prévia e distribuição geográfica dos participantes. A Universidade de Pôrto Rico deverá continuar a oferecer, no futuro, êstes e outros programas para professôres.

Outro programa que teve grande impacto sôbre os professôres e alunos de nível colegial em Pôrto Rico é o programa de palestras sôbre assuntos matemáticos e científicos patrocinada pela NSF. Estas palestras são ministradas por professôres universitários e procuram ampliar o conhecimento que os professôres têm das matérias que êles ensinam e fazer com que os estudantes se interessem por matemática e ciências. Eis alguns dos assuntos tratados nas palestras: Introdução à álgebra moderna, grupos, vetores, matemática recreativa, números perfeitos, transformações geométricas, desigualdades, sistema matemático, matrizes, conjuntos, relações e funções, métodos para abreviar a computação numérica, introdução à topologia, lógica matemática, o sistema de números reais, indução matemática.

Há um outro programa em operação desde 1961 na Universidade de Pôrto Rico, patrocinado pela NSF e também relacionado com a reeducação de professôres. Êste é um programa especial de matemática para estudantes secundários destacados. Um curso de matemática de nível universitário é dado com o objetivo de permitir aos estudantes fazerem cursos de matemática avançada durante os últimos anos de curso secundário. As aulas são ministradas duas vêzes por semana, num salão de palestras de uma universidade, geralmente das 17h às 18,30h. Aqui também, professôres secundários participam do programa a fim de observar de perto a reação dos estudantes diante dos novos conceitos bem como familiarizarem-se com os novos pontos de vista sôbre a instrução matemática em nível universitário.

A fim de que a participação dos professôres não seja totalmente passiva, cabe a êles a obrigação de passar diàriamente exercícios escritos aos estudantes. Além disso alguns programas de férias têm sido oferecidos a estudantes bem-dotados.

Há três anos, o Departamento de Instrução de Pôrto Rico recebeu uma subvenção da Fundação Ford para estabelecer um sistema de centros de currículos em várias partes da ilha. Três centros foram organizados um em cada uma das principais cidades. Êstes centros já fizeram as seguintes contribuições:

a) O treinamento de professôres por meio de seminários, palestras, reuniões professionais e cursos especiais de matemática e ciências. Êste aspecto do trabalho recebe assistência e colaboração de professôres das diversas universidades de Pôrto Rico, que funcionam como consultores. Êstes seminários são em geral realizados duas vêzes por mês e envolvem os professôres das cidades e das áreas do centro.

b) Preparação de materiais para currículos, com a finalidade de enriquecer os cursos de matemática e ciências. Aqui utilizamos os professôres que trabalham nos centros. Êles vêm de escolas primárias e secundárias e geralmente receberam treinamento nos diversos institutos científicos e matemáticos. Uma vez que os materiais estejam preparados êles são revisados pelos consultores de nível universitário e pelos diretores dos programas de matemática do Departamento de Instrução de Pôrto Rico.

Êstes projetos contribuíram substancialmente para o aperfeiçoamento da educação e reeducação de professôres de matemática e ciências em Pôrto Rico, mas a situação ainda exige atenção e estudo.

Em vista disto, nossos planos deverão continuar a oferecer o programa acima descrito e a ampliar tanto quanto possível as atividades relacionadas com o treinamento de professôres e a revisão contínua dos programas de estudo. Para isto, uma comissão de matemática foi criada recentemente com o apoio do Departamento de Exames de Ingresso à Universidade de Pôrto Rico a fim de conduzir a pesquisa e os estudos sôbre a instrução matemática em Pôrto Rico tanto no nível secundário como no universitário. Êsses estudos serão conduzidos durante os próximos dois anos com o objetivo de instituir em Pôrto Rico um programa acadêmico experimental de matemática. Espera-se que o trabalho da comissão resulte num aperfeiçoamento significativo do ensino de matemática em Pôrto Rico.

O texto acima apresenta, resumidamente, os diversos programas relacionados com a reeducação de professôres, da maneira como foram desenvolvidos em Pôrto Rico durante a década passada. Êstes esforços produziram um aperfeiçoamento no nosso sistema de ensino em nível secundário. No entanto, não estamos totalmente satisfeitos com êstes esforços e continuaremos a explorar outras possíveis soluções. Um grande grupo de professôres ainda não foi beneficiado com êstes programas, já que não participaram dos cursos e dos outros programas. E a incorporação de novos tópicos aos planos de estudos das escolas secundárias complica ainda mais a situação. Os professôres necessitam do treinamento na instrução dêstes assuntos e da oportunidade de conhecer cientistas e matemáticos de reputação que possam encorajá-los e ajudá-los na apresentação dos novos assuntos a seus estudantes. Em Pôrto Rico, permanecemos continuamente alertas com relação a novas idéias, procurando aperfeiçoar o conhecimento de nossos professôres e mantê-los continuamente atualizados à medida que os planos de estudos continuem a mudar. Nosso objetivo é um corpo docente da maior competência acadêmica e profissional.

O treinamento de professôres no Brasil

MARTHA MARIA DE SOUZA DANTAS

Tenho a honra de fazer uma palestra sôbre o treinamento de professôres secundários de matemática no Brasil. Isto é duplamente difícil, pois tenho de representar um país, que a extensão territorial, as diferenças regionais, de clima, raça e recursos econômicos e humanos, tornam difícil um plano uniforme. O manuseio adequado dêsse projeto exigiria uma investigação da situação real em cada Estado do país, o que no Brasil exigiria entrevistas pessoais. Graças à assistência da Diretoria da Universidade Federal da Bahia e do Instituto de Matemática e Física, dois professôres visitaram algumas das capitais dos Estados e coligiram informações. Portanto, sendo impossível generalizar, êste relato limitará suas observações a aspectos importantes.

Para efeito de clareza, trataremos do assunto de treinamento de professôres secundários no Brasil sob três aspectos: o conceito, a necessidade e a forma de ação.

O conceito brasileiro de treinamento de professôres secundários

a) Por treinamento de professôres no Brasil queremos dizer o treinamento dado nas faculdades de filosofia. Consiste em uma série de experiências práticas incluídas na matéria de educação matemática especial.

b) Referimo-nos à preparação do professor para a utilização de métodos modernos para o ensino de matemática que estão sendo disseminados através de cursos, chamados cursos de aperfeiçoamento do professor.

A necessidade de treinamento do professor para o nível secundário

Não sendo possível compreender um plano de trabalho sem algum conhecimento das peculiaridades da atmosfera à qual êle se aplica, farei um prefácio às considerações centrais com algumas observações.

Como foi indicado no relatório que apresentamos a esta segunda Conferência Interamericana sôbre Educação Matemática nosso primeiro Congresso Nacional de professôres secundários de matemática teve lugar em 1955, analisando principalmente a distribuição dos tópicos nas matérias. Quando isto foi conseguido voltamos nossa atenção à reformulação dos métodos de ensino numa tentativa de torná-los menos formais. Mas o programa ainda não estava atualizado. A disseminação dos pareceres da Comission Internationale pour l'Etude et Amelioration de l'Enseignement des Mathématiques mostrou o caminho para que a instrução de nível secundário ficasse em dia com a matemática contemporânea. "Era necessário evitar o sacrifício inútil de nossos jovens que, ao entrar na universidade, tinham de reclassificar todo o seu conhecimento à luz de idéias diferentes e de uma linguagem diferente que também introduzia um pensamento diferente." Esta sentença chocou muitos professôres que não acreditavam na aplicabilidade da matemática moderna ao nível secundário, mas recebeu admiração da maioria dos professôres brasileiros, alguns dos quais tinham preparo universitário, outros vinham de faculdades de filosofia, ciências e letras e ensinavam apenas alguns tópicos matemáticos do século XIX. Avaliamos a incompetência do ensino tradicional e sentimo-nos totalmente sem preparo para o ensino moderno. Sentimos o pêso de nossa responsabilidade. Em 1957, no segundo Congresso Nacional o tema foi: "Matemática tradicional ou moderna no nível secundário?" Mas como poderíamos responder a esta questão se alguns professôres também perguntavam: "Que é matemática moderna?"

No terceiro Congresso Nacional em 1959, ouviram-se críticas severas à educação matemática dada nas faculdades de filosofia — mesmo nas melhores — e entre as conclusões do congresso incluímos um pedido ao Ministério da Educação e Cultura para que estudasse uma nova estruturação dos cursos de matemática nas faculdades de filosofia. Foi feito também um pedido que estas faculdades incluíssem em seus currículos um estudo de matemática moderna para professôres secundários.

Por volta do terceiro Congresso Nacional havíamos tomado conhecimento da situação do ensino de matemática no Brasil, e uma avaliação das condições da equipe de ensino revelou que estávamos completamente atrasados.

Dois anos depois, em 1961, em Bogotá, Colômbia, o Professor Omar Catunda, do Brasil, em suas palestras sôbre "Treinamento de professôres de matemática no Brasil", explicou que apesar de ser esta uma função da faculdade de filosofia, ciências e letras, apenas uma pequena proporção de professôres recebem esta educação. Êle recomendou que, devido à falta de professôres para muitas escolas públicas (e êste número é crescente), fôsse autorizada oficialmente a concessão de certificados a professôres sem exigir preparação especializada.

Com respeito a isso, não ocorreu nenhuma mudança entre 1961 e o presente. A Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional, aprovada em dezembro de 1961 continua em vigor no país. Conseqüentemente a preparação de professôres secundários continua a ser função das faculdades de filosofia, ciências e letras e a concessão de certificados continua a ser feita sem se exigir preparação especializada.

Deve-se acrescentar que muitos Estados da União não têm cursos de matemática na Faculdade de Filosofia, nos lugares onde tais escolas existem. A Lei de Diretrizes e Bases vetou o artigo que requeria exames para a posição de professor de escola pública. Em geral, não se fazem tentativas que estimulem os professôres secundários do país a estudar.

Enquanto a educação de professôres secundários no Brasil permanece tão problemática, continua a haver insistência nacional e internacional por uma instrução melhor que prepare os jovens de hoje para as exigências do amanhã.

Portanto, a tarefa inadiável de preparar professôres no Brasil é por demais complexa já que não pode ser limitada a imbuir o corpo docente do espírito da matemática atual. Então, na maioria dos casos será necessário fornecer uma educação especial, em alguns casos corrigir inconveniências e em outros, preencher um vácuo absoluto.

Formas atuais de ação para o treinamento de professôres secundários no Brasil

Novamente, como é indicado no relatório que ora apresentamos à segunda Conferência Interamericana sôbre Educação Matemática, nossos primeiros cursos de treinamento de professôres foram dados em São Paulo, em janeiro de 1962, por professôres da universidade e pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Êstes cursos duraram 20 dias cada um, sendo que o primeiro, denominado primeiro estágio, constou dos seguintes tópicos:

a) Lógica matemática (8 horas)
b) Teoria dos conjuntos (8 horas)
c) Prática (18 horas)
d) Discussões (3 horas)

O segundo curso (segundo estágio), do nível mais avançado constou de:

a) Álgebra moderna (9 horas)
b) Geometria espacial (8 horas)
c) Aplicação prática (9 horas)
d) Palestras (2 horas)
e) Discussões (3 horas)

Êstes cursos foram realizados com a cooperação de Ministério da Educação e Cultura e da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Ao final de cada curso os participantes fizeram exames de aptidão. Cursos como êstes foram repetidos nos anos seguintes, quase sempre durante as férias. De janeiro a fevereiro de 1965, o terceiro estágio foi dado, constando de topologia moderna, programação linear e seminários.

No Rio Grande do Sul, o Centro de Pesquisa e Orientação Educacional (CPO) tem um plano de ação para modernizar a instrução de matemática em seus vários campos dentro dos próximos cinco anos. Neste ano, no setor de ensino secundário, está sendo ministrado um curso, de abril a dezembro, com 5 horas por semana. Ainda não temos informações sôbre o programa. Em geral, êles têm também cursos de férias e programas que buscam a atualização do conhecimento dos professôres secundários.

Há também alguma preocupação com a preparação de equipes para a execução do plano; elas serão constituídas de professôres universitários com diplomas de pós-graduação. Para êste curso que já está em operação, estão programadas as seguintes matérias: matrizes e álgebra linear, topologia geral, teoria dos números, estruturas algébricas, espaços vetoriais, lógica matemática e álgebra booleana.

Em Pôrto Alegre, capital do Rio Grande do Sul, o problema de equipes de ensino para a matemática de nível secundário é menos agudo que em outras capitais do país, porque uma lei estadual exige que só os professôres com diplomas de pós-graduação em matemática lecionem nas escolas estaduais, e até hoje o número dêsses professôres qualificados tem sido adequado às necessidades. O problema de pessoal especializado é sério no interior, da mesma maneira como o é em todo o país em geral.

No Rio de Janeiro, a antiga capital, por causa da densa população e do número insuficiente dos diplomados em matemática que a Faculdade Nacional de Filosofia e as faculdades particulares fornecem, podemos concluir que há grande dificuldade na modernização do ensino das matérias acima descritas. Podemos ressaltar que nos últimos cinco anos ocorreu o maior número de graduados em matemática na Faculdade Nacional de Filosofia que foi, em 1964, de 20 graduados.

A fim de promover a modernização dos professôres de matemática no Rio de Janeiro (Estado da Guanabara), o centro de treinamento de professôres de matemática no Rio de Janeiro foi fundado por um acôrdo entre a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e o Ministério da Educação e Cultura. Entrou em operação em abril dêste ano. Êste centro está oferecendo, no segundo semestre de 1966, um curso sôbre as idéias básicas de teoria dos conjuntos, dando 10 aulas teóricas de uma hora cada. Tôda aula de teoria é seguida de uma hora de discussão e estudo dirigido. Dois cursos estão planejados: um de introdução à álgebra linear, outro de elementos de lógica matemática, cada um também constituído de 10 aulas.

Na Bahia, os cursos de treinamento de professôres de matemática programados para 1958 só começaram em fevereiro de 1964 e ainda graças ao auxílio da Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste (SUDENE). Êsses cursos correspondem à programação estabelecida pelos professôres secundários sob a direção do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal da Bahia. Esta programação atende às necessidades

de pelo menos quatro matérias ou estudos básicos organizados da seguinte maneira: primeiro estágio: elementos de lógica simbólica, introdução à teoria dos conjuntos, estruturas algébricas fundamentais, noções, aplicações práticas; segundo estágio: álgebra moderna, geometria linear e plana; terceiro estágio: geometria espacial e estudo de matrizes; quarto estágio: elementos de topologia, cálculo integral e diferencial. Cada estágio tem duração mínima de um mês. Provê-se pelo menos 64 aulas teórico-práticas bem como igual número de aulas de estudo dirigido para cada estágio. Face às condições antiquadas de preparação do instrutor na Bahia, o primeiro estágio já foi realizado cinco vêzes. Os professôres são examinados e matrículas no estágio seguinte são condicionadas à aprovação no anterior. A realização do segundo estágio está programada para julho de 1967.

No ano passado, o Ministério da Educação e Cultura, sentindo a necessidade de participar mais diretamente no treinamento de professôres de ciências básicas no país, juntamente com as universidades e as secretarias de educação, criou seis centros denominados Centros para o Ensino de Ciências. Êles estão localizados nos seguintes Estados: Rio Grande do Sul, São Paulo, Guanabara, Minas Gerais, Pernambuco e Bahia. Com exceção do centro da Guanabara, há agora seções de matemática em funcionamento em cada um dêstes centros. Na Bahia, por exemplo, a criação do centro para o ensino de ciências permitiu a continuação dos cursos de treinamento do professor para os professôres de matemática que haviam sido iniciados em 1964, mas que foram interrompidos em 1965. Os centros do Nordeste, ou seja os da Bahia e Pernambuco, gozam da assistência da SUDENE. Por causa disto, os professôres que fazem tais cursos recebem assistência monetária na forma de bôlsas. Em Pernambuco e Minas Gerais os cursos de treinamento de professôres de matemática são também dados pelos centros de ensino de ciências. Nestes Estados, apesar de que os programas não são os mesmos, o treinamento leva também um mês. Não temos nenhuma notícia de qualquer programa a longo prazo neste projeto. Com relação às matérias, foram tomados os seguintes tópicos: elementos de teoria dos conjuntos, lógica matemática, probabilidade, álgebra moderna e álgebra linear. Os cursos em Pernambuco também incluem estudos dirigidos e exames de aptidão.

No Estado do Ceará, o aperfeiçoamento do professor é uma das metas do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Ceará. Neste Estado foram dados dois cursos de modernização do ensino secundário, um em 1964 em cooperação com a SUDENE, outro em julho de 1965, patrocinado pela Comissão Fullbright. No primeiro, foi estudado o primeiro volume de *Estudo de matemática*, uma tradução do texto do SMSG, publicada pelo IBECC. No segundo foram utilizados os volumes dois e três. Também no Estado da Paraíba, foram dados cursos para preparar professôres de matemática de nível secundário.

Como se pode concluir desta descrição, enquanto não há nenhum plano uniforme geral para a preparação de professôres secundários, há uma compreensão tácita sôbre como deveria ser realizado êste trabalho e há mais ou menos uma educação básica comum. Por exemplo, todos os cursos iniciais tratam de elementos da teoria dos conjuntos e um pouco de lógica matemática. O curso de lógica busca primeiramente equipar o professor de matemática brasileiro, que geralmente não sabe negar uma proposição, a fim de que êle possa iniciar proveitosamente o estudo necessário à sua atualização. Portanto, o curso de lógica dá ênfase aos processos dedutivos. Existe também bastante entusiasmo com relação às aplicações práticas, conhecidas como prática moderna. Isto satisfaz à curiosidade do professor ao mostrar-lhe como a matemática moderna funciona no curso secundário. Êste objetivo é atingido através do estudo moderno do tópico e do seu programa. A álgebra moderna, que ainda não é uma matéria compulsória em algumas escolas por ser considerada por demais abstrata, deve ter seu estudo iniciado com cuidado. O programa dêste curso deve ser escolhido cuidadosamente, selecionando-se aquilo que se constitui na melhor contribuição para a educação dos professôres secundários. Parece-nos prematuro introduzir a álgebra nos primeiros dois estágios. Falamos como professôres nordestinos, de uma parte do país onde o problema do ensino e de outro pessoal especializado é consideràvelmente mais grave do que na parte sul do país, por exemplo. Nossa experiência nos cursos dados em Salvador, Bahia, levanos à conclusão de que mesmo num curso de lógica com menos de 18 horas de aulas teórico-práticas, é impossível selecionar o conhecimento indispensável de cálculo, proposições, estudo dos quantificadores e equivalência formal. Da mesma forma, com menos de 20 aulas teórico-práticas não se consegue mostrar que uma estrutura de álgebra de Boole é definida pelas operações de interseção e reunião com tôdas as partes de um dado conjunto. Deve-se afirmar que os cursos em Salvador são sempre dados durante o período escolar e que cada aula teórico-prática é acompanhada de pelo menos uma hora de estudo dirigido, sob a orientação de um professor universitário competente. Os professôres também fazem exames de aptidão semanais. Nossa experiência mostrou que é impossível fazer juízo responsável sôbre como o professor se beneficia sem os exames de aptidão. Só podemos garantir proveito dos cursos através de análise pedagógica e avaliação estatística dos testes de aptidão. Se nada adianta dar cursos mais complexos, se dificuldades anteriores ainda não foram vencidas. A maioria dos nossos professôres precisa, acima de tudo, sobrepujar as deficiências de sua educação; isto é, aprender a raciocinar bem, abstrair e generalizar e portanto poder receber novas informações. Para êste trabalho é necessário ter sempre em mente a mentalidade utilitarista que domina a instrução e provoca a pergunta: "Para que serve a matemática moderna?"

Portanto é necessário tomar muito cuidado na preparação de tudo que será apresentado ao professor, já que uma instrução abstrata demais pode a qualquer momento desencorajá-lo definitivamente.

Em têrmos gerais, estas são as condições que envolvem o treinamento de professôres de matemática no nível secundário no Brasil.

Devemos, no entanto, expressar nossos agradecimentos à assistência de professôres de algumas faculdades de filosofia e institutos de matemática de nosso país. O acesso a colóquios matemáticos facultado a professôres secundários permite uma compreensão maior entre os professôres dos níveis e uma conseqüente reformulação dos objetivos em cada nível para a educação da juventude de hoje e da matemática de amanhã. Ao mesmo tempo, êste trabalho que é pràticamente um trabalho de salvamento é dispendioso e doloroso ao país e está longe de uma solução ideal. A solução adequada seria indubitàvelmente reconstruir desde as bases até uma educação especializada para professôres de matemática, que seja organizada e atualizada convenientemente.

Um programa rigoroso de treinamento do professor na Alemanha Ocidental

HANS-GEORG STEINER
(Universidade de Münster, Alemanha)

1. Sistema escolar

Na Alemanha Ocidental, que é uma república federal, os assuntos culturais e educacionais estão sob a responsabilidade do Govêrno dos "Länder" (*). Há diferenças em muitos detalhes de nosso sistema escolar, que varia de "Land" para "Land". Há, no entanto, um comum de experiência e tradição que tem grande influência unificadora.

O esquema seguinte mostra a *estrutura geral* da educação escolar na Alemanha.

ANO	IDADE	TIPO DE ESCOLA				
1 2 3 4	6-7 7-8 8-9 9-10	"Grundschule" (Escola Primária) 1.ª parte do "Volksschule"				
5 6 7 8	10-11 11-12 12-13 13-14	2.ª parte do "Volksschule" 50%	"Mittel-schule" (Escola Média) 20%	"Gymnasium" (Ginásio) 30%		
9	14-15			Divisão com 3 ou mais ramos		
10	15-16					
11 12 13	16-17 17-18 18-19			Clássico	Línguas modernas	Matemática, ciência

(*) "Länder" é comparável a "Estados" nos EUA.

Cêrca de 50% das crianças freqüentam apenas um tipo de escola, a "escola do povo", que agora consta de 9 anos escolares. Em seguida, os alunos têm usualmente um aprendizado e depois freqüentam uma escola vocacional ("Berufsschule") pelo menos por 2 anos.

Há dois tipos de *escolas secundárias.* Em alguns "Länder" estas iniciam-se no 5.º ano e em outros no 7.º ano. A "Mittelschule" corresponde à escola secundária inglêsa moderna. Sua orientação não é tão teórica quanto a do "Gymnasium", que conduz à Universidade.

Tendo concluído com sucesso a Escola Média no fim do 10.º ano, os alunos recebem um certificado que os qualifica, por exemplo, a entrar numa escola técnica ou numa escola superior de comércio. No fim da educação no "Gymnasium" há um exame, o chamado "Abitur", que em geral é necessário para a matrícula em uma Universidade ou em qualquer instituto do mesmo nível, como o "Technische Hochschule" ou "Pädagogische Hochschule".

Do 9.º ano em diante — ou mesmo antes — há uma divisão dentro do "Gymnasium" em três ou mais *ramos,* mas o ensino nesses ramos está baseado nos mesmos princípios e engloba o mesmo grupo de matérias. A diferença aparece na ênfase dada às línguas clássicas, às línguas modernas, à matemática e às ciências naturais ou — um ramo bem nôvo — às ciências sociais.

2. Matemática nas escolas

A matemática é ensinada em aproximadamente quase todos os tipos de escolas alemãs. Só existem exceções em alguns "Länder" onde se permite a um aluno de "Gymnasium" encerrar sua educação matemática ao término do 12.º ano a fim de concentrar-se em outros campos durante o último ano escolar.

Na "Volksschule" (8 ou 9 anos) a instrução matemática é confinada à Aritmética e Geometria até o ponto em que ela é útil para objetivos práticos na vida diária.

A instrução matemática na "Mittelschule" (5 anos) dá a um aluno as noções e os métodos matemáticos elementares e suas aplicações à vida prática: aritmética, porcentagem, funções, equações lineares e quadráticas, gráficos, logaritmos e régua de cálculo, geometria intuitiva, corpos sólidos, trigonometria.

A instrução matemática no "Gymnasium" busca desenvolver o pensamento intuitivo e lógico através da transmissão aos alunos de experiência e conhecimento de certas partes elementares da matemática e suas aplicações e pela orientação em direção a discernimentos metodológicos básicos. Assim ela inclui uma introdução ao cálculo e suas aplicações à física, à geometria analítica por meio de vetores e transformações e à álgebra no corpo dos números complexos.

Há tendências de *modernização* em todos os tipos de escolas. As tendências mais fortes são para a reforma da educação matemática no "Gymnasium": Primeiros três anos do "Gymnasium": primeira introdução dos números negativos e variáveis (como reservas de lugares), conjuntos, vocabulário da linguagem dos conjuntos, análise combinatória simples, uso de vetores, adição de vetores e aplicações (reflexões, rotações, translações) em geometria propedêutica; preparação ao conceito de grupo; ênfase maior sôbre relações, especialmente a relação de ordem para os números, desigualdades. Três anos seguintes: estudo extensivo de funções, sua representação e uso; estudo aperfeiçoado de equações e inequações de um ponto de vista lógico e semântico; investigação do grupo de congruências planas e seus subgrupos, principalmente, grupos de simetria de figuras; multiplicação de vetores por racionais, homotetias e semelhanças; exemplos de grupos, anéis e corpos, especial com modelos finitos. Últimos três anos: introdução à álgebra moderna elementar e à teoria das estruturas algébricas, axiomatização do sistema de números reais, espaços vetoriais e produto escalar; construção da geometria plana e espacial através da álgebra linear; introdução à teoria das probabilidades e estatística; aspectos metodológicos da matemática.

3. Preparo de professôres de matemática

Professôres de *todos os tipos de escola* têm de freqüentar um "Gymnasium" e concluem sua educação escolar ao serem aprovados no "Abitur". Professôres da "Volksschule" (professôres da escola primária) recebem seu preparo numa "Pädagogische Hochschule". Espera-se que êles lecionem qualquer matéria e portanto não recebem geralmente nenhum preparo especializado em matérias específicas. Sua bagagem matemática consiste no que aprenderam no "Gymnasium". Mas êles têm de participar, durante seu estudo de três anos, de pelo menos dois seminários de um semestre de duração sôbre o ensino de aritmética ou geometria. Além disso cada estudante tem de selecionar uma área de estudo, após sua opção, de modo a aprofundar seu conhecimento, mas não se especializar como um professor nesse campo. Êste campo pode ser o da matemática. Então os professôres de educação matemática na "Pädagogische Hochschule" fazem palestras e seminários sôbre matemática, nos quais êles usualmente escolhem assuntos do currículo do "Gymnasium" ou tópicos relacionados àqueles e os enriquecem por meio de material adicional ou novos pontos de vista. Êstes assuntos são: conjuntos e construção dos cardinais por meio da teoria dos conjuntos, o sistema numeral, teoria elementar dos grupos, fundamentos de geometria, geometria não-euclidiana, teoria das probabilidades, história da matemática.

Meu ponto de vista é que necessitamos de um professor primário especializado no campo da matemática. A análise didática e matemática nos níveis elementares detetaram uma rica estrutura de aprendizagem e ensino mesmo num nível pré-matemático. A fim de usar esta capacidade de visão e de desenvolver um bom pensamento e imaginação matemáticos na criança, tão eficazmente e tão cedo quanto possível, precisamos de professôres com preparação especial em matemática e também no ensino de matemática moderna.

O preparo dos professôres da "escola média", que são especializados em dois campos diferem de um "Land" para outro. Em alguns "Länder", os professôres de matemática de uma "escola média" têm de estudar 6 semestres em uma universidade. Depois disso êle têm de passar em exames escrito e oral de matemática e da mesma forma em outro campo, que freqüentemente é física e que é estudado simultâneamente. Os tópicos dêste exame são usualmente tirados de palestras-padrão de nível universitário sôbre cálculo, geometria analítica e álgebra linear, teoria elementar dos números, álgebra moderna elementar e fundamentos de geometria. Se a universidade oferece palestras especiais ou — o que chamamos — "didática da matemática" o exame pode incluir questões sôbre matemática elementar de um ponto de vista avançado. Isto será explicado com maior detalhe nos meus comentários sôbre o preparo do professor do "Gymnasium".

Tendo terminado seu estudo na universidade, que atualmente consta de 4 anos ao invés dos três anos requeridos, o professor de "escola média" participa de um seminário preparatório para um período adicional de um ano e meio. Aqui êle terá experiência dirigida no ensino de classes da escola média e receberá instrução sôbre teoria e prática da educação. Os detalhes disto podem ser explicados em conexão com meus comentários sôbre o professor do "Gymnasium", pois o seu preparo foi tomado como modêlo para êste nôvo preparo de professôres de escola média.

Em alguns "Länder" há possibilidade de um professor primário ser promovido à posição de professor de escola média caso façam cursos de matemática realizados por professôres — geralmente professôres notáveis do "Gymnasium" — em cidades diversas. Mas a banca examinadora para êstes candidatos é a mesma que para os que estudaram na universidade e descobriu-se que muito poucos professôres primários conseguem graduar-se fazendo apenas tais cursos.

Em outros "Länder" a única maneira de se tornar um professor de "escola média" é seguir a linha de um professor primário e graduar-se na "Pädagogische Hochschule". Assim, encontra-se grande diferença na formação matemática de professôres de "escola média" na Alemanha, dependendo de seu preparo.

Um provável futuro professor de "Gymnasium" tem de escolher pelo menos dois campos que são ensinados no "Gymnasium" e tem de estudá-los na universidade. Atualmente, o tempo de estudo para um professor de matemática é realmente muito maior que quatro anos. Na Universidade de Münster êle é de cêrca de 12 semestres ou 6 anos. Além das palestras, exercícios e seminários nesses dois campos, o estudante tem também de assistir palestras e seminários de filosofia e pedagogia. Ao final de seu estudo há um exame rigoroso, chamado o "Primeiro Exame Estadual" ("Referendarexamen"). O estudante pode escolher um de seus campos como seu campo especializado.

Se êste campo é matemática, êle tem de escrever uma tese de cêrca de 80 a 100 páginas sôbre um assunto especial de matemática usando todo o material disponível, inclusive os últimos artigos dos periódicos de matemática. Além disso, êle tem de ser aprovado em um ou dois exames escritos em cada campo feito nas salas do departamento de exames num tempo restrito de 4 a 5 horas cada um.

Ainda mais, há um exame oral de matemática de uma hora e outro igual no outro campo.

Um exame escrito e oral de filosofia e pedagogia, o chamado "Philosophium", faz parte do "Primeiro Exame Estadual". Mas pode ser feito depois do 6.º semestre.

Após completar o estudo universitário o provável professor do "Gymnasium" tem um período de dois anos de preparação do professor; no primeiro ano, ligado à escola e no segundo como membro de um "seminário" especial, em que são combinadas a prática e a teoria da vida e do ensino escolares. Ao final dêstes dois anos há outro exame o denominado "Segundo Exame Estadual" ("Assessorenamen"). O "Referendar" — como o candidato é chamado durante êstes dois anos — tem de escrever um relatório sôbre certo período do ensino em uma classe por êle realizado, analisar a estrutura matemática e didática dos tópicos ensinados, descrever as reações dos alunos e seu trabalho junto a êles, caracterizar o desempenho individual de alguns dêles e avaliar seu ensino. Além disso, êle tem de dar duas aulas-demonstração perante uma banca examinadora, uma numa classe familiar a êle, outra numa classe desconhecida. Finalmente há um exame oral de pedagogia e metodologia do ensino.

4. **Preparo matemático dos professôres de matemática**

O estudo universitário de um professor de "Gymnasium" na Alemanha dura muito atualmente. Esta duração é resultado de diversas influências, uma das quais pode ser reconhecida na extensão e complicação de nosso conhecimento científico. Para resolver o problema de uma limitação adequada, tanto em conteúdo como em tempo, várias comissões foram constituídas. Menciono em particular as comissões da União de Matemáticos da Alemanha ("Deutsche Mathematiker Vereinigung"), a comissão da Sociedade de Matemática Aplicada e Mecânica (GAMM) e as comissões que foram constituídas nos diversos "Länder".

As propostas feitas por estas comissões concordam nos seguintes pontos:

a) organização aperfeiçoada de cursos, principalmente para principiantes, a fim de capacitar o estudante a concluir seu estudo o mais tardar no fim do 10.º semestre, inclusive sua tese e exames finais;

b) mais ênfase nos laços entre a matemática da universidade e a matemática ensinada no nível secundário; maior eficiência do "Philosophium", pela substituição de filosofia geral por lógica matemática e fundamentos da matemática e substituição de pedagogia geral numa "Pedagogia do *Gymnasium*" especializada e didática da matemática.

A proposta da comissão da União de Matemáticos da Alemanha diz que o "Estudo Básico" em matemática devia ser o mesmo para prováveis professôres de matemática e para aquêles que se preparam para uma profissão matemática na indústria ou economia. Sugere o seguinte plano:

SEMESTRE	CURSO	HORAS SEMANAIS
1	Cálculo I	4 + 2
	Geometria analítica e álgebra linear I	4 + 2
2	Cálculo II	4 + 2
	Geometria analítica e álgebra linear II	4 + 2
3	Análise vetorial e equações diferenciais	4 + 2
	Topologia ou álgebra	4 + 1
4	Análise complexa I	4 + 1
	Análise numérica e "Practicum"	4 + 2

Na coluna de "horas semanais" do esquema, o primeiro número significa o número semanal de palestras de 45 minutos e o segundo é o número semanal de períodos de 45 minutos reservado para trabalho em grupos, a que chamamos "Übungen" (Exercícios). Êstes grupos são dirigidos por assistentes e tutores. Os estudantes trabalham em partes específicas do curso, em tópicos e problemas adicionais e discutem as soluções dos problemas nos quais estiveram trabalhando durante a semana ou quinzena anterior.

O "Estudo Principal" dará ao estudante mais liberdade para a escolha dos campos de acôrdo com seus interêsses. As áreas que são consideradas relevantes para o professor são:

a) Análise e topologia
b) Geometria
c) Álgebra e teoria dos números
d) Análise funcional e análise numérica
e) Teoria das probabilidades e estatística
f) Fundamentos e lógica

Todo provável professor de matemática do "Gymnasium" deverá fazer pelo menos um curso em cada uma das quatro primeiras áreas mencionadas. Se êle escolheu matemática como sua área especializada, deverá ter feito mais quatro cursos em quaisquer dos domínios supracitados. Deverá ter participado de dois seminários e ter feito pelo menos um trabalho de seminário. Deverá também ter assistido a palestras sôbre didática da matemática e um seminário de didática.

A fim de explicar o que se quer dizer com os cursos que pertencem ao "Estudo Básico", darei uma pequena lista dos tópicos que pertencem aos cursos de geometria analítica e álgebra linear I, II: grupos, corpos, espaços vetoriais, aplicações lineares, espaços vetoriais de dimensão finita, matrizes, espaços afins, sistemas de equações lineares, produto escalar, espaços vetoriais euclidianos, valor próprio, vetor próprio, polinômio característico, forma normal de endomorfismo e matrizes, isomorfismos, aplicações à classificação das quádricas, fundamentos de geometria projetiva, o "Erlanger Programm", álgebra multilinear, determinantes.

5. Epistemologia e didática da matemática

Na Alemanha, muitas universidades têm institutos para fundamentos da matemática e de lógica matemática. Na Universidade de Münster existe o mais antigo instituto dêste tipo na Alemanha. Aqui, desde muito tempo, é aceito que os estudantes podem fazer cursos de metodologia e lógica a fim de preparar-se para a parte chamada "Philosophium" que usualmente pertence ao campo de filosofia geral. Para êstes candidatos o instituto oferece um ciclo dos seguintes cursos:

a) Cálculo dos predicados.
b) Enumerabilidade, computabilidade, decidibilidade.
c) Teoria ingênua e axiomática dos conjuntos.

A necessidade de didática da matemática na universidade fôra ressaltada por Felix Klein. Em 1908, êle reclamou do que chamara a "descontinuidade dupla" na carreira do professor de matemática, que tem de saltar duas vêzes sôbre o fôsso entre a matemática da universidade e a matemática da escola secundária.

O próprio Klein deu um exemplo famoso sôbre como se pode trabalhar contra esta "descontinuidade dupla" ao oferecer palestras sôbre "Matemática elementar sob um ponto de vista avançado" e ao fazer contribuições importantes a um movimento de reforma do ensino da matemática na escola secundária. No tocante ao treinamento de professôres, Klein não teve muitos seguidores. De um modo geral, a situação contra a qual êle reclamava tornou-se ainda pior. Os cursos para principiantes mais abstratos, a maneira axiomática de ensino na universidade tornou cada vez mais difícil para um professor encontrar uma maneira de usar as coisas que êle aprendera em sua própria educação secundária.

Por outro lado uma solução parcial para êste problema foi encontrada na Universidade de Münster e está sendo usada atualmente como modêlo para outras universidades. Em 1952, seguindo as idéias de Klein, o Professor Behnke da Universidade de Münster realizou um primeiro "Seminário sôbre Didática da Matemática" na Alemanha. Êste seminário foi uma continuação institucional de algumas atividades no campo da educação matemática na qual Behnke colaborara com Toeplitz antes da guerra. Neste seminário, conferencistas universitários, estudantes dos últimos semestres e professôres dos "Gymnasiums" da cidade e da vizinhança trabalham juntos.

Os problemas discutidos durante os primeiros anos pertenciam principalmente à teoria e prática do movimento de reforma de Klein. Êstes problemas estavam relacionados com o ensino de cálculo e aplicação nas últimas fases do "Gymnasium" e com o ensino de geometria a crianças de 10 a 12 anos de idade em nível intuitivo e propedêutico. Desde cêrca de 1956, os aspectos do ensino de conjuntos, relações e conceitos estruturais como grupos, espaço vetorial, ordem, etc., e a penetração dêstes conceitos e idéias novas na escola secundária tornou-se dominante. Além disso a opinião básica do seminário reflete-se no seguinte ponto: a matemática elementar tem de ser uma representação adequada da matemática atual e de tôdas as atividades matemáticas essenciais num nível elementar. Além de enunciar ou fazer conjecturas de teoremas e dar demonstrações, há outras atividades tais como: experimentação, indução, matematização de uma situação, idealização, explicação de idéias intuitivas, axiomatização, organização local e global, formalização, codificação, etc. Tudo que possa ser de importância para a construção dessa matemática elementar, desde os diferentes pontos de vista nas bases da matemática até às últimas aplicações em quaisquer outros campos, devia ser levado em consideração.

Por "didática da matemática" queremos dizer a investigação sistemática das possibilidades de apresentar a matemática em níveis diferentes, de encontrar estruturações diferentes para conteúdo ou demonstrações matemáticas, de situações de iniciativa de onde os alunos possam ser conduzidos a um problema

ou a um conceito e assim por diante. Estamos conscientes de que a didática da matemática tem de ser considerada como um ponto de cruzamento de campos diferentes.

As reuniões para seminários em Münster sempre começam com um trabalho feito por participantes ou oradores convidados: conferencistas de universidades, professôres secundários ou estudantes. Os conferencistas de universidade contribuem usualmente com consideração teóricas novas, os professôres com relatórios sôbre publicações recentes ou um relatório do seguinte tipo: Um estudante é colocado em contato com especialistas em ciências sociais e estuda aplicações de teoria da ordenação dentro dessas ciências a fim de selecionar problemas que sejam suficientemente elementares e interessantes a ponto de serem estudados numa classe de escola secundária. Após cada relatório há uma discussão de uma hora.

Além do seminário, um ciclo de conferências sôbre didática da matemática tem sido realizado durante vários anos. O conferencista que tem experiência no "Gymnasium" é especializado no campo de didática da matemática. Êle faz conferências sôbre o ensino de análise, álgebra e geometria e também sôbre tópicos especiais tais como: o ensino de lógica na escola secundária, o papel da história da matemática no ensino, aplicações modernas da matemática no nível de escola secundária, etc.

Analisando a estrutura didática, os cursos de didática também atingem níveis de compreensão da matemática que pertencem à história da matemática. Desta maneira tentam dar ao estudante pelo menos uma rápida visão das situações históricas importantes, visão esta que na realidade devia sempre ser feita com bases nas últimas pesquisas históricas críticas.

É evidente que os cursos de didática podem ser ministrados em níveis diferentes. A maioria dos estudantes aprecia o ponto de vista de inventário e motivação e prefere um curso que reorganize seu conhecimento matemático apresentando-o de uma maneira nova. Mas um preparo progressivo de professôres precisa cuidar do fato que os professôres deverão ser produtivos e ativos num período contínuo e não-definitivo de reforma do ensino da matemática.

Novos programas de treinamento de professôres na Argentina

H. Renato Völker
(Argentina)

Considerações preliminares

O sistema escolar argentino ainda consta de uma fase escolar elementar relativamente longa de sete anos, seguida por um curso secundário de cinco anos, o qual é dividido em um primeiro ciclo (ou ciclo básico), de três anos, e um segundo ciclo, de dois anos, que pode ser de artes liberais ou de preparação para o magistério. As escolas comerciais são também instituições de cinco anos, nas quais os três primeiros anos são equivalentes ao ciclo básico mencionado anteriormente, pelo menos no que concerne aos programas de matemática. Há portanto doze anos escolares antes de se atingir um grau mais elevado de instrução ou a universidade e, neste aspecto, o sistema argentino, se fôr diferente do de outros países, o será muito pouco. As diferenças, entretanto, são maiores no tocante à duração dos estudos de nível elementar que devem ser completados para se ingressar nos cursos secundários. O resultado é que há um tempo supérfluo nos sete anos elementares e uma escassez de tempo para que se completem os programas do nível secundário. E os programas secundários na Argentina, assim como em outros países, são geralmente bastante amplos. O problema poderia ser solucionado pela transformação de pelo menos o sétimo ano primário num primeiro ano do nível secundário, o que forneceria o tempo suficiente para se abranger as matérias correspondentes. Infelizmente houve, e ainda há, razões de política educacional que tornam esta transformação difícil e devemos presumir que o sistema de sete anos elementares e cinco anos secundários terá que ser o considerado no momento.

Devido a êste fato e às metas de uma reforma na instrução matemática, uma solução poderia ser encontrada na transferência de parte do currículo do curso secundário para os sexto e sétimo anos elementares, mas então enfrentaríamos o problema da preparação inadequada dos professôres primários, os quais, na Argentina, têm só uma educação de nível secundário. (Isto porque as escolas normais em que êles se formaram possuem três anos de ciclo básico e só dois anos de preparação para o magistério.) Há uma tendência visìvelmente forte para estender êstes estudos, com o objetivo de melhorar a preparação científica dos professôres das escolas primárias, os quais atualmente são menos preparados neste setor que os formados em artes liberais. Tentativas poderiam ser feitas para se transmitir o conhecimento matemático dos professôres de escolas primárias em exercício até o momento, mas o grande número de tais professôres tornaria tal tarefa muito difícil e requereria um longo tempo para que resultados concretos pudessem ser alcançados. Uma análise realística da situação implica, portanto, a aceitação, no momento, dos sete anos elementares e cinco anos secundários, e na tentativa de estender o último, no futuro, para seis anos. Êste sistema na Argentina deverá ser atingido se ocorrerem reformas nos programas de matemática de todos os níveis e é em concordância com êstes objetivos que estamos trabalhando.

Os programas comuns ou regulares das escolas secundárias

Êstes programas pressupõem que o estudante tenha aprendido na escola primária as quatro operações básicas com números naturais, que êle possa trabalhar com decimais e frações relativamente simples, operar com regras de três simples ou compostas, calcular porcentagens, superfícies e volumes de figuras geométricas simples e conhecer algumas propriedades dessas figuras. Os exames de admissão no primeiro nível da escola secundária mostram que os candidatos adquiriram êste preparo na escola primária, mas à base de regras memorizadas de uma maneira mecânica. Por êsse motivo há atualmente uma reação contra a rotina, e tentativas têm sido feitas para que a matemática no nível elementar seja ensinada de um ponto de vista racional, ensinando o estudante a usar sua inteligência para resolver problemas que não são solúveis pela simples aplicação de uma fórmula ou regra.

Os programas comuns ou regulares das escolas primárias, atualmente em uso, incluem um pouco de geometria, aritmética e álgebra de natureza tradicional em cada um dos primeiros quatro anos. No quinto ano são ensinadas trigonometria e cosmografia. Cinco horas por semana são dedicadas à matemática nos dois primeiros anos e quatro horas nos anos restantes. A Geometria plana nos três primeiros anos e sólida no quarto é ensinada na forma euclidiana. A trigonometria inclui a resolução de triângulos; a cosmografia trata bàsicamente de astronomia de posição e um pouco de astrofísica.

O conteúdo e seqüência dêstes programas datam de uma reforma de 1926, a qual foi calorosamente elogiada na época por Frederico Enriques e que se constituiu num notável progresso na situação caótica daquele período. Contudo, ela encontrou severa oposição e só foi conseguida pelo vigor e competência técnica do seu autor, Professor Florence D. Jaime e do Ministério que o apoiou integralmente. É verdade que desde aquela data distante houve repetidas mudanças, mas com exceção de uma de curta duração, estas mudanças não afetaram o conteúdo de matéria em si, mas sim a extensão e a intensidade de certos tópicos e a extensão da perfeição com que êles são tratados.

Sòmente em 1965, com base nos bons resultados obtidos com os novos programas experimentais, é que se decidiu incluir nos programas regulares certos tópicos da matemática atual. Refiro-me a elementos de teoria dos conjuntos, relações, funções, operações binárias, inequações, vetores, estatística e probabilidades.

Programa secundário experimental

Um dos resultados da visita do Professor Marshall Stone a Buenos Aires, em 1962, foi a resolução de se publicar programas de matemática para o ciclo secundário, o que atenderia às demandas dos avanços científicos e às recomendações dos congressos internacionais principalmente o de Bogotá. Êstes programas deveriam ser tão audaciosos na reforma quanto fôsse conveniente para nosso país. A tarefa foi colocada nas mãos de um grupo de professôres do Departamento de Matemática da Divisão de Ciências Exatas e Naturais da Universidade de Buenos Aires. Os programas são destinados à execução em 6 cursos, que é o número usual nas escolas secundárias ligadas à universidade, mas êles não perdem continuidade se o último curso é eliminado.

Uma das diferenças essenciais entre os programas experimentais e os regulares é o abandono, no primeiro, da geometria e trigonometria em favor da álgebra. Quase tôda a geometria tradicional está concentrada no primeiro curso, mas de uma maneira intuitiva. O ponto de partida são os conceitos intuitivos de ponto, reta, plano, comprimento, área, etc., — uma abstração a partir de um modêlo concreto — conceitos trazidos pelo estudante da escola primária ou do próprio primeiro curso. Êstes conceitos são então ampliados por observações e demonstrações destinadas a fazer o estudante exercitar sua mentalidade crítica e capacidade racional. Aparentemente, o ensino desta geometria não é baseado nos métodos axiomáticos, mas pelo contrário, deixa tais métodos para os cursos de álgebra dos últimos anos, já que a álgebra é um veículo melhor que a geometria para introduzir o raciocínio axiomático e as estruturas simples.

O segundo curso no nôvo programa constitui um avanço decisivo e estabelece as bases para o estudo nos cursos posteriores. O programa tem essencialmente dois estágios:

1) Teoria dos conjuntos, relações, funções binárias e operações.
2) Teoria dos números até os racionais, inclusive.

A experiência mostrou que não há dificuldade em executar o primeiro estágio do programa; mas a falta de tempo e de maturidade mental dos estudantes torna difícil a realização do trabalho do segundo estágio através do estudo axiomático. Era necessário introduzir o conceito de número natural por meio da cardinalidade dos conjuntos.

Para o terceiro curso, o programa prevê o estudo dos números reais e questões de trigonometria elementar; inclui tópicos de geometria analítica plana, vetores de duas dimensões, equações lineares, sistemas de equações e inequações e representações gráficas.

O quarto curso consta de números complexos, equações do segundo grau, polinômios de uma variável, funções elementares, geometria analógica, seqüências, elementos de probabilidades e estatística e, como suplemento, alguns problemas de aritmética comercial.

O quinto e último curso examina novamente a geometria intuitiva que foi estudada no primeiro curso, sòmente que agora com discussão crítica das premissas implícitas. Inclui também o estudo da geometria analítica linear no espaço, usando vetores e finalmente estuda alguns problemas de divisibilidade.

Início e desenvolvimento da experiência

Uma vez que o programa experimental fôra formulado e debatido, o Ministério exigiu sua aplicação no início de 1963, em escala reduzida nas escolas públicas. A experiência envolveu 5 cursos em cinco escolas de características diversas, apesar de que tôdas elas estavam situadas no distrito federal de Buenos Aires ou vizinhanças. A distribuição buscava assegurar supervisão efetiva e determinar as diferentes reações por parte de estudantes de níveis sociais e intelectuais diversos com relação aos novos estímulos. A equipe de ensino foi selecionada cuidadosamente entre aquêles que tinham bôlsas para cursos intensivos para a modernização do conhecimento matemático. O Dr. Santaló, autor do programa de geometria intuitiva para o primeiro curso, escreveu também um guia para a execução adequada do programa. Além disso, o pessoal envolvido com a experiência reuniu-se peròdicamente e (continua a fazê-lo), a fim de elaborar as melhores formas de lidar com os problemas de conteúdo, método e organização que sempre surgem nesse tipo de inovação. Paralelamente à realização do primeiro curso, foi organizado um seminário para a discussão dos tópicos do segundo curso. Essa atitude foi tomada progressivamente cada ano até culminar recentemente com tópicos do programa do quinto curso que entra em operação em 1967.

Enquanto isso, encorajada pelos resultados obtidos, a liderança educacional autorizou a expansão da experiência, de modo que ela agora envolve 28 professôres lecionando em 41 cursos, de 10 instituições na capital, nas vizinhanças e outras partes do país.

À medida que a experiência prosseguia e cursos sucessivos eram ministrados, três relatórios anuais foram publicados e enviados a tôdas as instituições secundárias nacionais a fim de que todos os professôres de matemática pudessem ter informações diretas sôbre as áreas da reforma desejada, os sucessos obtidos e as dificuldades encontradas.

Os relatórios publicados são geralmente encorajadores. No momento, êles mostram que nenhum professor participante da experiência — não obstante os esforços exigidos dêle — deseja retornar ao ensino dos programas tradicionais. Com respeito aos estudantes, a experiência mostrou que êles têm uma capacidade admirável de encarar situações novas, senso crítico agudo, boa disciplina, maior interêsse pelas matérias e a compreensão

de que a matemática é pelo menos tão acessível e atraente quanto as outras matérias. Êles estão particularmente entusiasmados com a oportunidade de participar de alguma forma do processo criativo por não terem que aceitar a matemática passivamente como uma estrutura fixa, mas, pelo contrário, usando sua ingenuidade e habilidade para formular observações, deduzir conseqüências e resolver problemas. O estudante adquire conhecimento por sua própria atividade e não por uma repetição de raciocínios de outros. A experiência mostrou, por exemplo, que o fato de que o primeiro curso elimina a geometria intuitiva de uma forma axiomática e está baseado fundamentalmente no uso do conhecimento que o estudante adquire por observação direta para desenvolver o raciocínio e as deduções simples, mostra uma maneira de ensino e aprendizagem que parece corresponder muito bem às características mentais das crianças de 12 ou 13 anos de idade. Por outro lado, as exigências dos cursos posteriores familiarizam gradualmente o estudante com o raciocínio axiomático, e por volta dos 15 anos acontece que o estudante admite a vantagem do método não porque lhe é impôsto, mas porque êle está pessoalmente convencido. A evolução favorável dos estudantes com respeito a isso tem sido evidente. Por volta dos 15 anos, não se satisfazem com proposições baseadas na observação de casos individuais; êles pedem demonstrações de validade geral, formulam perguntas significantes, refletem sôbre as respostas e mostram relativa facilidade no uso da linguagem matemática precisa.

Não obstante as vantagens apontadas, a experiência encontrou alguns problemas. O principal dêles está no fato de que cinco anos de curso secundário não bastam ou as horas de aula programadas são insuficientes para a execução do nôvo programa. Quando alguns tópicos não são estudados num curso, êles têm de ser transferidos para o seguinte, ocasionando então uma extrema falta de tempo. A situação admite quatro soluções possíveis: reduzir ou reajustar os programas experimentais. Parece prematuro e talvez inconveniente transferir boa parte do programa de geometria intuitiva para o último ano do nível elementar (o que enfraqueceria a possibilidade de boa instrução) pelo menos atualmente. Ampliar os cursos secundários para seis anos, possibilidade que já foi discutida mas que envolveria tôda a política educacional da Argentina, que é bastante independente da experiência com a matemática. Ou aumentar o número de horas de aulas semanais para a matéria. Esta última é talvez a mais fácil de ser realizada, mas estaria ligada a planos de reforma que também dependem da política geral do futuro.

A êsse respeito, gostaria de ressaltar o forte movimento na Argentina em favor da intensificação e modernização da instrução em tôdas as ciências básicas. Êste movimento só pode beneficiar a matemática e é provável que uma combinação de medidas adequadas permitirá a execução dos programas experimentais regulares, principalmente após terem sido ajustados do ponto de vista da adoção geral e sejam amparados por livros-texto em espanhol suficientes e outras condições necessárias. Professôres dos cursos experimentais têm apontado as dificuldades causadas pelo fato de que êles e os estudantes não recebem em tempo hábil textos adequados em espanhol. Recentemente esta inconveniência foi eliminada para os três primeiros cursos, com o aparecimento de livros-texto escritos pelos próprios professôres do curso experimental. A publicação de novos textos, e guias de trabalho preparados fora do corpo docente está em vias de realização e isto constituir-se-á brevemente em assistência valiosa.

Modernização do pessoal em exercício

Para sua execução, os novos programas exigiram um pessoal especialmente preparado, recrutado dentre os professôres em exercício. Uma compilação de dados sôbre todos os professôres de matemática em mais de 500 escolas públicas no país resultou na seguinte tabela:

	NÚMERO	PORCENTAGEM
Total de professôres incluídos	2.800	
Com diploma de ensino em sua especialidade	1.700	60%
Com diploma técnico (engenheiro, etc.)	500	20%
Com diploma substituto (professor de escola primária)	440	16%
Sem nenhum diploma (1%) ou com diploma irrelevante	110	4%

Apesar do panorama relativamente encorajador das estatísticas, a Argentina, com algumas exceções, sofreu tanto quanto as outras nações devido ao fato de que o pessoal em exercício, não obstante os diplomas, não estavam preparados para atender às exigências do ensino de matemática moderna. Por esta razão outro dos acôrdos feitos durante a visita do Professor Stone em 1962 foi colocado em operação: a organização de cursos de férias

intensivos para professôres em exercício. A iniciativa veio do Departamento Nacional de Pesquisa Científica e Técnica, e, a partir daí, com o amparo do Conselho e do Ministério da Educação e Justiça e agora também da Secretaria de Estado da Educação Cultural, foram organizados 5 cursos de seis semanas cada um. Participaram, até o presente, um total de 200 professôres secundários de matemática. Dentre êles foram escolhidos aquêles que dirigem 41 cursos experimentais, e outros professôres dêste grupo estão divulgando as idéias da reforma ou liderando grupos de trabalho ou de estudo, que organizam cursos ou séries de palestras de nível pouco mais baixo, no interior do país.

Juntamente com os cursos de férias, outros cursos foram ministrados durante o ano letivo, geralmente durante dois ou três meses; além disso foram realizados debates, conferências, seminários e aulas-demonstração. Pode-se, portanto, afirmar que cêrca de metade dos professôres secundários em exercício, em escolas públicas e particulares, tiveram a oportunidade de freqüentar pelo menos um dos tipos de aulas mencionados, nas quais foram discutidos tópicos de matemática moderna. Circulares informativas oficiais publicadas em revistas de educação e mesmo por tôda a imprensa em geral deram bastante publicidade a êste assunto, de modo que não há mais qualquer dúvida de que todos ligados ao ensino da matemática no país estão conscientes do movimento de reforma e de suas características gerais. Todos sabem também ou podem descobrir fàcilmente quais as fontes bibliográficas às quais devem recorrer para maiores informações.

A tabela seguinte dá uma visão clara da situação atual relacionada com a freqüência a cursos e conferências:

Total de professôres secundários de matemática (2.800 são de escolas públicas e 2.200 de particulares)	5.000
Professôres que freqüentaram cursos intensivos de férias organizados pelo Conselho Nacional de Pesquisa Técnica e Científica	200 (4%)
Professôres que freqüentaram pelo menos um curso de não menos de duas a quatro aulas semanais com exame final	400 (8%)
Professôres que freqüentaram pelo menos uma série de conferências como as feitas por E. Castelnuovo, L. Felix, ou G. Papy, sem exame final	1.000 (20%)
Professôres que assistiram conferências esporádicas	2.000 (40%) ou mais

Nenhuma afirmação absoluta pode ser feita sôbre o número de professôres secundários que estão sendo atualmente condicionados a corresponder às exigências de um curso experimental. Estima-se que seja menor de 10% do total em exercício, isto é, cêrca de 500. Isto significa que a generalização da experiência só pode ser conseguida em etapas e também explica a precaução tomada na incorporação de tópicos de matemática moderna aos programas tradicionais.

Todos os métodos devem continuar a ser empregados para aperfeiçoar o pessoal em exercício.

A educação dos futuros professôres

Um dos grandes objetivos da reforma da instrução matemática é equipar o professor do futuro de modo que êle possa continuar a desenvolver-se por si mesmo à medida que os progressos científicos e metodológicos exijam a atualização do seu conhecimento, uma vez que êle tenha começado a ensinar. A modernização dos professôres em exercício que é atualmente um problema tão grande por causa dos gastos de tempo e dinheiro, entre muitas coisas, continuará a ser um problema a menos que alguma solução seja encontrada nesse ínterim. Portanto, parece fundamental que analisemos a educação do futuro professor de matemática de modo a equipá-lo durante seus estudos com conhecimento e habilidade que o capacitem a absorver com sucesso as mudanças que com certeza virão. O relatório de trabalho que apresentamos a esta conferência através do Dr. Louis A. Santaló ressalta com alguma ênfase esta característica essencial que é complementada e suplementada pelas outras condições lá descritas: uma educação matemática avançada, extensiva, intensiva, moderna; uma boa preparação pedagógica, orientada para os problemas concretos do mundo profissional, familiaridade adequada com alguma outra ciência na qual a matemática é instrumental, e finalmente um conhecimento geral de outras ciências auxiliado por um curso de história da matemática e evolução do conhecimento científico.

Durante longo tempo, os cursos de educação de professôres secundários de matemática na República Argentina incluíram quatro anos de estudo que podem ser acompanhados independentemente ou paralelamente e às vêzes necessàriamente do programa de ensino de física. Até há pouco, o conteúdo era tradicional com respeito à matemática: três cursos de análise (dos quais o primeiro era, na verdade, de álgebra), um curso de geometria, um de geometria métrica, um de geometria projetiva, um de geometria descritiva, dois de geometria analítica, etc. E, quanto à preparação do professor, a ênfase era dada à filosofia e pedagogia geral apesar de que prática de ensino era também importante.

Foi sòmente a partir de 1962 que notamos uma mudança, com a introdução de cursos de álgebra moderna, probabilidades e estatística e matemática superior, todos relacionados com o ensino da matemática. Quanto ao treinamento de professôres, notamos a disponibilidade do curso de psicologia da criança, um de psicologia do adolescente e um de psicologia do aprendizado. Mas mesmo atualmente o movimento de reforma não está difundido; as pessoas estão aparentemente esperando, talvez com precaução excessiva. Acreditamos que as recomendações desta conferência podem até certo ponto contribuir para a aceleração do processo e que a República Argentina terá dentro em breve cursos de treinamento de professôres que atendam às necessidades atuais e futuras da instrução matemática no nível secundário.

Treinamento

H. Renato Völker
e
Luis A. Santaló

O extraordinário desenvolvimento do conhecimento matemático durante as últimas décadas e as possibilidades crescentes de sua aplicação nas várias ciências e tecnologias requerem uma revisão do conteúdo e dos métodos de ensino de matemática na escola secundária e conseqüentemente uma mudança no treinamento dos professôres para êste nível.

Há uma idéia geral sôbre a parte da chamada matemática moderna a ser incluída no programa secundário mas ao mesmo tempo os professôres atualmente em exercício nas escolas nem sempre estão capacitados a fazê-lo, não tendo sido treinados para se adaptarem às novas situações. Além disso, há a necessidade de ajustar o treinamento dos futuros professôres das escolas secundárias às novas exigências. Isto levanta o problema da melhor maneira de afetuar uma reforma que possa ser condicionada às possibilidades e características de cada país. Êste documento procura esquematizar os aspectos considerados básicos para êsse treinamento, e sem entrar em detalhes, caracterizá-los de modo que êles possam ser discutidos, ampliados e tornados concretos na medida do possível.

Aspectos básicos

1) Ensino da matemática

O ensino competente requer informação científica adequada em extensão, intensidade e atualização. Portanto, o professor secundário deve possuir conhecimento sólido e atualizado, consideràvelmente além da matéria que êle se propõe a transmitir

a seus alunos. Sòmente à base do domínio de sua matéria, com um senso crítico e de alto nível pode o professor determinar claramente a melhor forma e o grau de generalidade com que ela deve ser ensinada. O futuro professor de matemática do curso secundário deve receber seu treinamento científico na universidade ou em institutos de categoria semelhante; e não há razão alguma para que os cursos que êle faz, principalmente nos primeiros anos ou semestres, sejam muito diferentes em intensidade e extensão daqueles feitos pelos futuros matemáticos profissionais. Um seminário básico no nível de seus estudos, que o capacitaria para o uso independente e para o aperfeiçoamento de sua própria educação formal será de valor incalculável para seu futuro desenvolvimento. Por outro lado, nos cursos avançados, deve-se ter em mente que não estamos preparando o pesquisador científico mas sim um professor que certamente tem de conhecer amplamente as diversas disciplinas matemáticas e suas inter-relações, mas ao mesmo tempo necessita de treinamento especial com respeito à adaptação de tópicos de interêsse, para um possível ensino aos estudantes secundários.

2) Treinamento pedagógico

Paralelamente à preparação científica, mas de preferência nos cursos avançados, é necessário que os futuros professôres recebam treinamento pedagógico adequado sôbre problemas específicos do ensino de matemática. Cursos de educação geral tendem a ser baseados em cursos de filosofia e geralmente os últimos são ministrados no início do programa de estudo, isto é, antes que o candidato tenha a informação ou a maturidade científica adequada para apreciar as necessidades de fundamentos filosóficos. Presumimos que isso tem contribuído em parte para a falta de prestígio dos cursos de educação entre os estudantes de ciências em geral; mas pode-se também presumir que uma reorganização dêstes problemas produzirá uma mudança, especialmente porque o treinamento educacional está orientado para problemas concretos que o professor secundário deve encarar em seu trabalho profissional — problemas para os quais soluções precisas são vitais para uma instrução bem sucedida. Assim, por exemplo, o comportamento individual e coletivo dos estudantes em face à necessidade e oportunidade de aprender é de interêsse para o ensino. O assunto está ligado à psicologia da adolescência e dinâmica de grupos. É também fundamental que o professor saiba teoria e técnicas de aprendizagem para aplicá-las ao ensino da matemática, principalmente quando novos assuntos derivados dos níveis avançados vão sendo adaptados ao nível secundário, da maneira mais clara e acessível aos estudantes. Poderia parecer justificativa para um curso ou seminário especial dedicado a êsse tipo de trabalho, especialmente se fôsse usual familiarizar os futuros professôres com o trabalho e as conclusões das reuniões e congressos, que têm sido realizados sôbre êsse assunto. Isso envolveria também o treinamento dêles para o trabalho criativo crítico e de reforma diretamente ligado a seus deveres diários. O período de prática do ensino — ampliado ou reduzido de acôrdo com aptidões particulares do candidato — seria uma oportunidade para experimentar uma aplicação concreta do conhecimento e técnicas adquiridas.

Capacidade de mudança

Considerando que os grandes progressos da matemática como ciência exigem rápida modernização de conteúdo e métodos de ensino no nível secundário, o professor da matéria deve dar um dinamismo a seu trabalho profissional. Isto é, êle precisa estar capacitado para enfrentar mudanças, que é um conceito não desenvolvido no treinamento tradicional dos professôres de matemática. A falta dessa visão é responsável pelas dificuldades atuais na adaptação rápida do pessoal em exercício. Sua modernização tem de ser conduzida por todos os tipos de cursos, o que envolve um gasto elevado de tempo e dinheiro. Seria prudente, de agora em diante, dar grande flexibilidade ao treinamento do professor, isto é, estruturar a especialização de forma tal que se assegure capacidade de mudança. Isso significa habilitar o futuro professor secundário a continuar a estudar por si mesmo após ter ingressado na atividade profissional e considerar obrigatório manter-se em dia com os progressos científicos e metodológicos, por meio de revistas, livros especializados e freqüência sistemática a reuniões profissionais. Talvez esta procura pareça pretensiosa e difícil ou impossível de ser realizada, considerando que o professor é sobrecarregado. No entanto, é razoável presumir que um seminário sôbre tópicos de matemática como ciência pura e outro sôbre a adaptação de problemas de matemática moderna ao curso secundário são necessários. Anàlogamente, alguns cursos de fundamentos da matemática, mostrando o panorama geral desta ciência, deixam suas marcas nos futuros professôres e dão-lhes condições para enfrentar com sucesso os tipos de responsabilidades acima descritos.

Relação com outras ciências

A importância da matemática, em outras ciências tais como física e economia, nas quais ela é absolutamente vital, é tão grande que se deve fazer alusão a isto no ensino. Isto não serve apenas para auxiliar alguns estudantes a adquirir um conceito claro e mais completo da importância da matemática como um fator de cultura e progresso, mas também para mostrar o campo bastante amplo de aplicação da matemática — matemática como um instrumento indispensável para a mente. Portanto, é conveniente que os professôres de matemática do curso secundário tenham familiaridade com um dêstes campos aplicados e sejam capazes de mostrar alguns de seus aspectos aos alunos. Seria, então, bastante útil incorporar no plano de estudo do professor de matemática alguns cursos de mecânica ou de aplicação da matemática à física, economia ou biologia, para citar apenas alguns exemplos.

Em alguns países é tradicional que o professor que ensina matemática como matéria principal dê também aulas de física e química. Isto exige certamente que incorporemos no plano de estudo do professor de matemática uma quantidade suficiente de matérias para uma especialização secundária que lhe garanta competência profissional. Êsse conceito de especialização dupla pode ser útil em muitos lugares, principalmente em escolas e localidades pequenas onde é difícil encontrar professôres secundários para as ciências básicas; mas não pode ser recomendado como política. Pelo contrário, queremos destacar a necessidade do professor de matemática ter familiaridade suficiente com outro campo de conhecimento para poder usar seu conhecimento matemático como instrumento e mostrar a seus alunos o uso da matemática nas ciências aplicadas. Segue-se claramente que isto exigirá uma preparação substancial no segundo campo e que esta preparação pode ser a base para a obtenção do segundo diploma de ensino ou de qualquer forma de qualificações profissionais mais fortes.

Matemática e cultura geral

O professor de matemática secundário deve ter em mente em sua instrução, primeiro, o conteúdo específico de sua matéria, segundo, como foi indicado, as possibilidades de sua aplicação. Mas como educador não pode eliminar seu dever de contribuir para a cultura geral de seus estudantes. A influência notável que o pensamento matemático tem exercido em quase todos os ramos do conhecimento e da tecnologia neste século dá ao professor de matemática uma grave responsabilidade. Êle deve ter ampla familiaridade com esta influência da matemática e estar consciente da grande corrente do pensamento matemático e sua relação com a evolução científica geral no passado. Portanto, parece aconselhável que o programa do professor de matemática secundário — de preferência no último ano — inclua um curso sôbre a história da matemática ou a evolução do conhecimento científico ou matemática e lógica ou matérias semelhantes.

Conteúdo

É prática comum dividir o ensino médio ou secundário em duas fases: a fase básica ou elementar (em geral a mesma para todos os estudantes) e a fase superior na qual diversas orientações são encontradas — o diploma preparatório ("liberal arts" ou ciências) a profissão de professor, ensino comercial e outras.

Bàsicamente, então, duas possibilidades são evidentes:

a) treinar professôres para um único nível comum para ambas as fases;

b) diferenciar o treinamento dos professôres para a fase básica do treinamento para a fase superior.

Nos EUA, há mais níveis diferentes entre os professôres de nível médio (ver as recomendações para o treinamento de professôres de matemática na "Mathematical Association of America", janeiro, 1961), mas para a maioria dos outros países da América parece que no máximo dois níveis devem ser recomendados.

De acôrdo com êste critério e tendo em mente os aspectos básicos tratados na seção 2, damos abaixo uma lista da quantidade mínima de conhecimento matemático e pedagógico apro-

priado ao professor secundário, havendo a possibilidade de dois níveis, como foi mencionado acima, mas sem as descrições de conteúdo modelada no Programa Dusseldorf, não obstante o fato de que o último foi preparado com outros objetivos. Deve-se também ressaltar aqui que um plano de preparo do professor feito pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Naturais da Universidade de Buenos Aires, acrescido de sugestões formuladas pelo Professor A. Pereira Gomes (Brasil) e Professor C. Abuauad (Chile), também foi considerado. A ordem de numeração e descrição não tem a intenção de sugerir de forma alguma uma seqüência de estudo e os assuntos podem ser reagrupados de maneira mais conveniente.

1. *Análise I.* Número real; conjunto dos números reais; limites; séries numéricas; funções de variável real. Continuidade. Derivadas. Máximos e mínimos de funções reais. Derivadas sucessivas. Fórmula de Taylor. Integral de Riemann. Funções primitivas. Métodos de integração. Aplicações a áreas e volumes. Geometria analítica do plano. Ângulo e distância. Coordenadas polares. Algumas propriedades das cônicas.

2. *Análise II.* Álgebra dos vetores. Geometria analítica linear do espaço. Ângulo e distância. As quádricas por meio de suas equações reduzidas. Cálculo diferencial de várias variáveis. Fórmula de Taylor. Máximos e mínimos de funções de variáveis reais. Integrais duplas e triplas. Análise vetorial, gradiente, divergente, rotacional; fórmulas para integrais vetoriais.

3. *Cálculo numérico.* Sistemas de equações lineares. Programação linear. Otimização. Solução numérica de equações. Equações diferenciais. Métodos aproximados de integração. As possibilidades dos computadores eletrônicos. Alguns modelos matemáticos das ciências sociais, economia ou psicologia.

4. *Álgebra.* Conjuntos. Relações. Funções. Relações de equivalência e de ordem. Estruturas algébricas. Grupos. Grupos de transformações. Exemplos de grupos abstratos e de grupos de transformações. Subgrupos. Anéis. Corpos. Geometria de um corpo finito. Anel de polinômios com coeficientes num corpo. Divisão de polinômios. Máximo divisor comum. Decomposição de frações racionais em elementos simples. Teorema fundamental da álgebra.

5. *Álgebra linear.* Espaços vetoriais. Independência linear. Bases de um espaço de dimensão finita. Dualidade. Aplicações lineares. Cálculo matricial. Formas lineares. Formas multilineares. Determinantes. Vetores próprios e valôres próprios de um endomorfismo. Equação característica. Redução à forma diagonal. Formas quadráticas. Espaços vetoriais euclidianos. Bases ortonormais. O grupo ortogonal.

6. *Geometria.* Transformações métricas, afins e projetivas no plano e no espaço. Exemplos de transformações quadráticas. O programa Erlanger. Noções concisas dos axiomas do tipo Hilbert para a geometria eucli-

diana. Geometria axiomática via álgebra linear (Artin). Modelos euclidianos de geometria não-euclidiana. Elementos de topologia combinatória. Alguns problemas gráficos no plano. Classificação topológica das superfícies. Orientação e número de Euler.

7. *Probabilidades e estatística.* Axiomas do cálculo das probabilidades. Algumas leis das probabilidades: Binomial, Poisson e Laplace-Gauss. Funções geradores de momentos. Amostragem, estimativa. Verificação da hipótese; χ^2 ("chi" ao quadrado); distribuição de Studant. Dependência estatística. Correlação. Aplicações da estatística a problemas de física, biologia, ciências sociais e psicologia. Avaliação de métodos de ensino.

8. *Fundamentos da matemática.* Álgebra dos conjuntos. Álgebra de Boole. Lógica simbólica e álgebra das proposições. Exemplos de aplicação da álgebra de Boole à teoria dos circuitos. Desenvolvimento axiomático dos números cardinais, inteiros e racionais. Breve história das idéias e das escolas de matemática.

9. *Complementos de geometria.* (*) Formas diferenciais. Cálculo diferencial externo. Fórmula de Stokes para casos simples. Geometria diferencial de curvas e superfícies no espaço euclidiano. Geodésicas. Curvatura total. Elementos de Geometria no espaço Reimaniano. Cálculo tensorial.

10. *Complementos de análise.* (*) Função analítica de uma variável complexa. Aplicações conformes. Exemplos de superfícies de Reimann. Integral de Cauchy. Resíduos. Cálculo de variação; problemas clássicos. Idéias de espaço normalizado. Exemplos.

11. *Seminário de elementos de matemática.* (*)

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Os assuntos indicados com o sinal (*) podem ser eliminados no preparo de professôres para um primeiro estágio básico.

2.ª) O plano de estudo deve também incluir, adicionalmente, alguns assuntos suplementares bem como um ou dois cursos de física (principalmente de mecânica ou de física matemática) e outros de natureza educativa (educação matemática, psicologia da aprendizagem, etc.).

3.ª) Poderá ser interessante incluir no plano de estudo um seminário sôbre o ensino da matemática moderna para a apresentação de informações e para a discussão de experiências tentadas em vários países e dos resultados e recomendações de encontros internacionais relativos ao assunto.

Planos-modêlo

Com a finalidade de ilustração os seguintes planos de estudo são agrupados por ano, e as matérias mencionadas no capítulo precedente são seguidas de uma indicação do número de horas-crédito (horas por semana) que elas devem presumìvelmente tomar:

Primeiro ano	
Álgebra	6 horas semestrais
Análise I	6 horas semestrais
Pedagogia	4 horas semestrais
Psicologia dos adolescentes	4 horas semestrais
	20 horas semestrais
Segundo ano	
Álgebra linear	5 horas semestrais
Análise II	5 horas semestrais
Probabilidade e estatística	4 horas semestrais
Física (mecânica)	7 horas semestrais
Psicologia da formação e dinâmica de grupos	3 horas semestrais
	24 horas semestrais
Terceiro ano	
Geometria	5 horas semestrais
Complementos de análise	4 horas semestrais
Análise numérica	4 horas semestrais
Seminário de elementos de matemática	5 horas semestrais
História da ciência contemporânea	3 horas semestrais
Didática matemática	3 horas semestrais
	24 horas semestrais
Quarto ano	
Fundamentos da matemática	4 horas semestrais
Complementos à geometria	4 horas semestrais
Física matemática	6 horas semestrais
Seminário sôbre o ensino de matemática	4 horas semestrais
Prática de ensino	6 horas semestrais
	24 horas semestrais

NOTA: o número total de horas dedicadas à matemática e à educação matemática é de 92.

O plano acima pode, naturalmente, ser desenvolvido também em cursos semestrais — ou trimestrais como acontece em alguns países. Em tais casos as horas-crédito dadas a cada matéria devem ser dobradas e uma seqüência deve ser estabelecida de modo que nenhuma matéria possa ser cursada sem que as correlatas apropriadas tenham sido estudadas anteriormente. Isto é, por exemplo, complementos de análise não pode ser cursada sem a aprovação nos cursos de análise I e análise II.