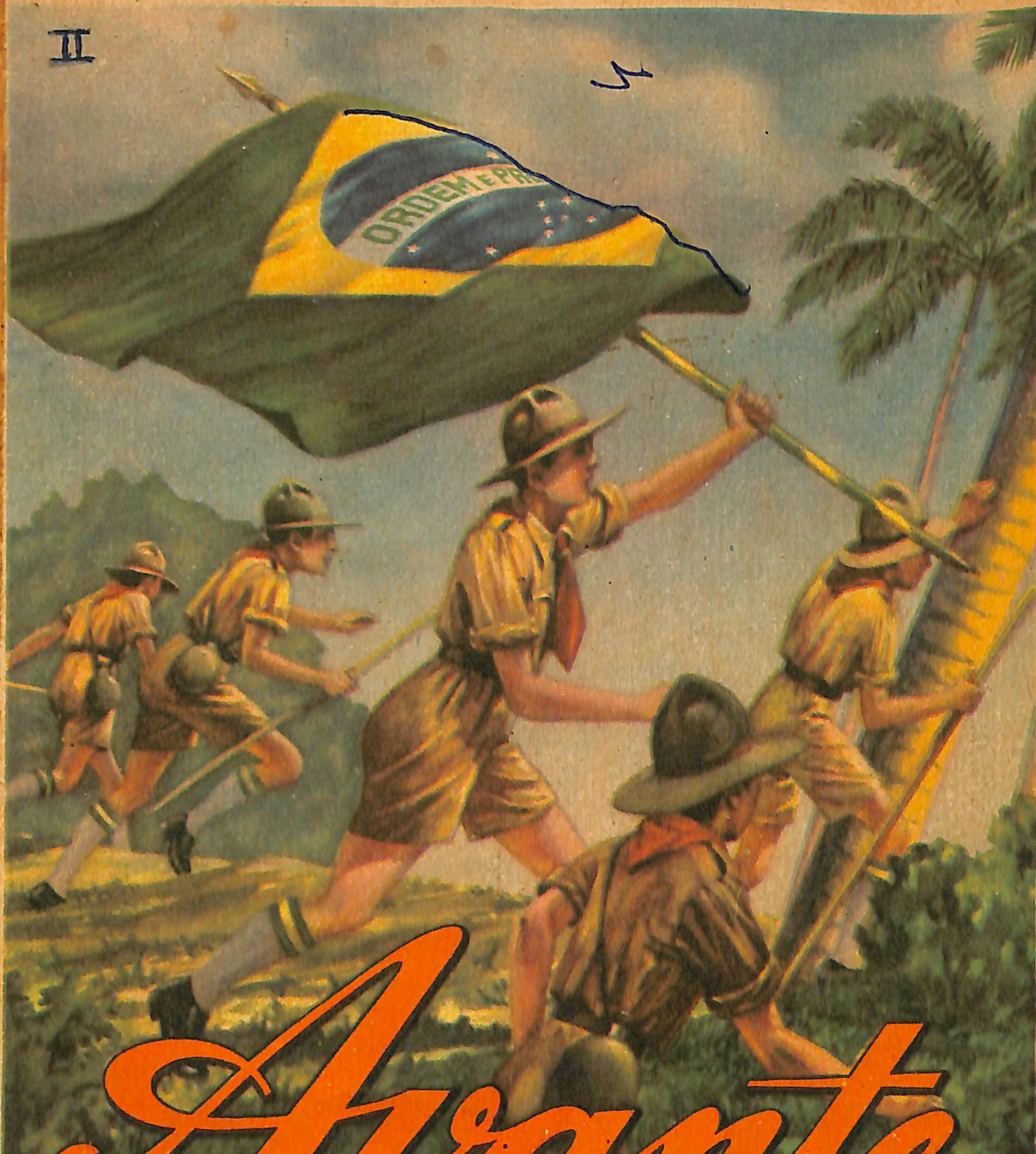


Claus Ivo Doering

Geometria

3º Série A

5.6.63

II - Geometria Plana:

1. **Conceitos Primitivos:** o ponto, a reta e o plano.
2. **Proposição:** é uma afirmação ou um conjunto de afirmações.

   Postulado: é a proposição que não decorre de outra e que se aceita sem demonstração.

   P/ex: dois pontos determinam uma reta.

   Teorema: é a proposição que decorre de outras por intermédio de uma demonstração.
3. **Hipótese e Tese:** o enunciado de um teorema compreende duas partes distintas: a Hipótese e a Tese. **Hipótese** é a verdade, ou melhor, o conjunto de condições aceitas como verdadeiras. **Tese** é a verdade que se pretende demonstrar. **Exemplo:**

   Suponhamos a proposição: "Dois ângulos retos são iguais". A hipótese é que os dois ângulos são retos e a tese é que são iguais. O enunciado de um teorema pode ser esquematizado dêsse modo:

Hipótese:		Tese:
Dois ângulos são retos	→	Êstes ângulos são iguais.

b- Reta:

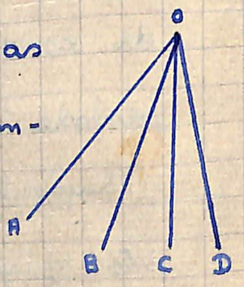
Entre as linhas, existe uma especial, denominada linha reta, ou simplesmente, reta. A reta é ilimitada nos dois sentidos, isto é, não tem origem nem extremidade.

1. Postulados da Reta: a) a Reta tem infinitos pontos. b) dois pontos determinam uma única reta.

c- Semi-Reta:

Qualquer ponto de uma reta, a divide em duas semi-retas.

A semi-reta é ilimitada num sentido e limitada no outro. O ponto A, que limita a semi-reta, denomina-se origem (o). As duas semi-retas em que foi dividida a reta, chamam-se semi retas opostas. Quatro semi-retas, com a mesma origem:



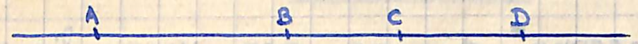
d- Segmentos:

A parte de uma reta, compreendida entre dois de seus pontos, denomina-se segmento.

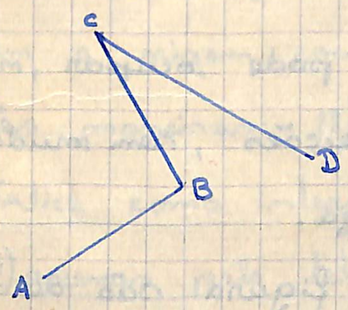
A e B são os extremos de um segmento, assim como também B e C, e C e D de outros segmentos.

1. Postulado do Segmento: o segmento retilíneo é a menor linha que se pode traçar entre dois pontos.

2. Segmentos colineares: são dois ou mais segmentos que têm o mesmo suporte, como AB, BC e CD:

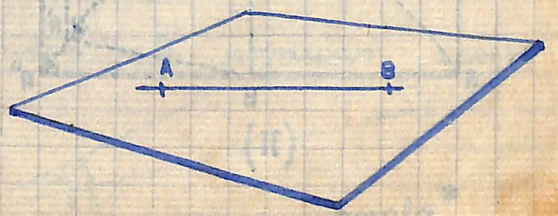


3. Segmentos consecutivos: são segmentos tais que a origem de cada um coincide com a extremidade do precedente. Na figura os segmentos AB, BC e CD são consecutivos.



e- Plano e Semi-Plano:

Um Plano é caracterizado pelos seguintes postulados: a) o plano é uma superfície ilimitada que divide o espaço em duas regiões opostas. b) uma reta que possue 2 pontos num plano, está inteiramente contida:



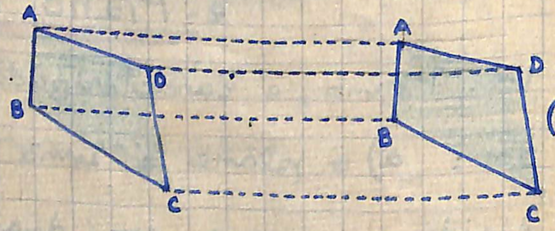
c) três pontos, não em linha reta, determinam um único plano. d) tôda reta de um plano, divide-o em duas regiões opostas, denominadas semi-planos.

F- Figuras Geométricas:

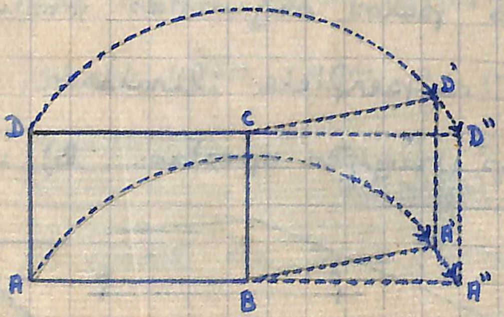
Um conjunto qualquer de pontos, denomina-se figura. A figura, cujos pontos estão todos situados no mesmo*, diz-se ser uma figura plana. Em caso contrário, denomina-se sólido.

1. Postulado: a) uma figura pode ocupar, no espaço; uma infinidade de posições, sem mudar de forma nem de grandeza.

b) os deslocamentos de uma figura são de três tipos: 1º) Translação (I):



(I)

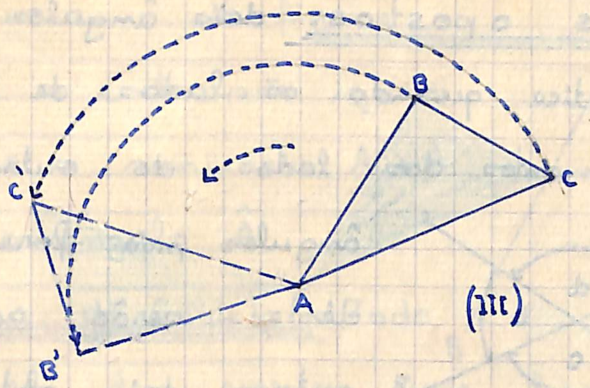


(II)

2º) Rotação em tôrno de um eixo (II).

3º) Rotação em tôrno de um centro (III):

* plano



(III)

11.6

II- Ângulos (pág 75...)

a) Definições:

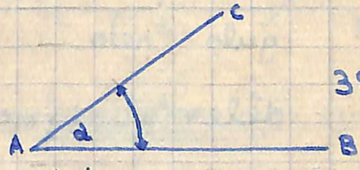
Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que tem a origem comum. O ângulo é indicado de três maneiras: 1º) por três letras, colocando-se a do vértice como intermediária: $\widehat{BAC}$ -

1º)

2º) apenas pela letra do vértice quando não acarreta confusão: $\hat{A}$ -

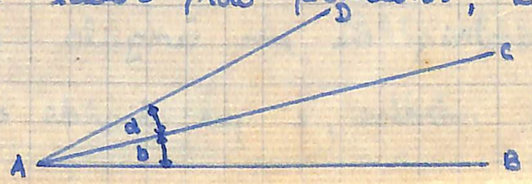
2º)

3º) por uma letra minúscula colocada em seu interior: ângulo a -

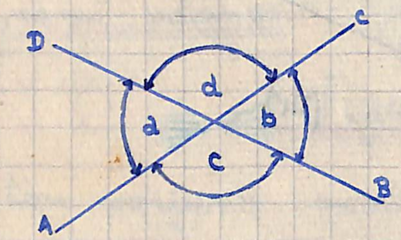


3º)

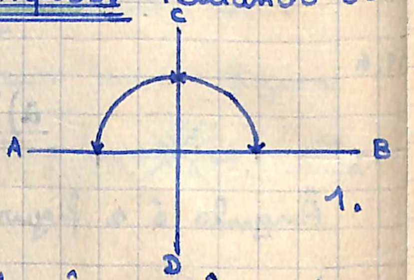
1. Ângulos adjacentes: são dois ângulos que têm o mesmo vértice e um lado comum, situado entre lados não comuns, como os ângulos a e b na figura ao lado:

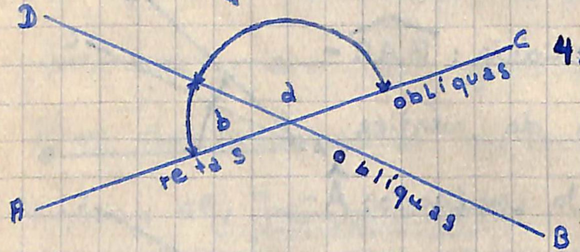


2. Ângulos opostos: dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Se os ângulos não forem retos, 2 dêstes serão agudos e os outros dois, obtusos. (ab ou cd



3. Retas perpendiculares e oblíquas: 1. Quando os ângulos adjacentes são iguais, as retas dizem-se perpendiculares; qualquer delas é perpendicular à outra. — 2. Quando êsses ângulos são desiguais, as retas dizem-se oblíquas:

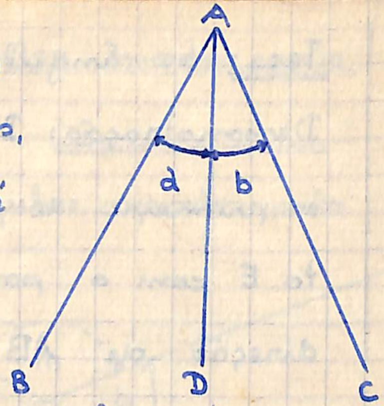




4. Ângulos complementares e suplementares: Dois ângulos são complementares, quando a soma é igual a um ângulo reto. São suplementares quando a soma dêles é igual a dois ângulos retos, ou 180°.

b- Bissetriz:

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta traçada do vértice, e que divide o ângulo em dois, adjacentes e iguais. Na figura:, os ângulos a e b são iguais, adjacentes e a semi-reta AD é bissetriz do ângulo Â.

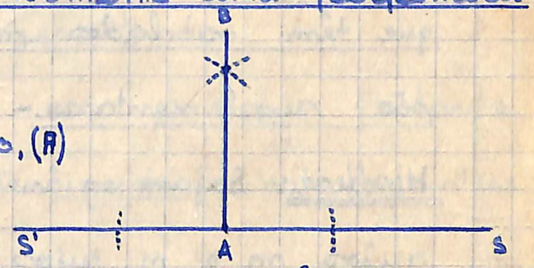


1. Postulado do ângulo: - Todo ângulo tem tem apenas uma bissetriz.-

c- Propriedades:

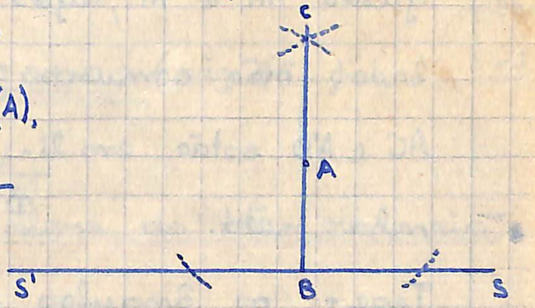
1. Prim. Propriedade: - Por um ponto dado em um plano pode-se traçar sòmente uma perpendicular a uma reta.-

1º) Primeiro Caso: o ponto, (A) está sôbre a reta.

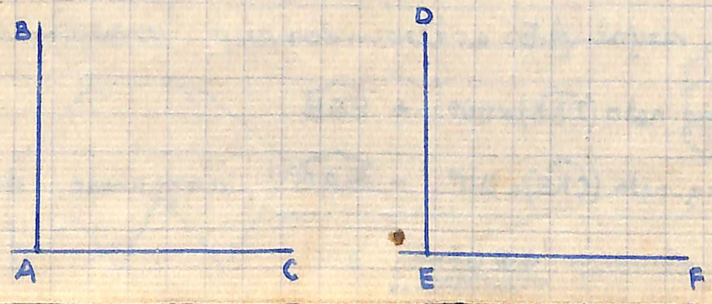


Perpendicular: segmento AB

2º) Segundo Caso: o ponto (A), está fora da reta. Perpendicular: segmento BC



2. Seg. Propriedade: - Todos os ângulos retos são iguais

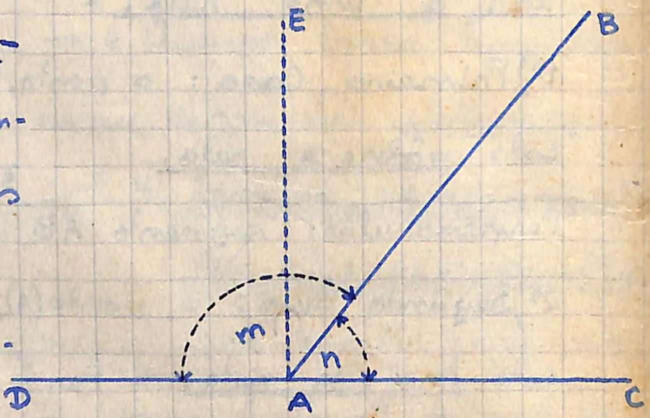


Hipótese: os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DEF}$ são retos.

Tese: os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ são iguais.

Demonstração: Desloquemos o segundo ângulo sobre o primeiro de modo que EF coincida com AC e o ponto E com o ponto A. - A semi-reta ED tomará a direção de AB porque, pelo ponto E, em coincidência com A, só se pode traçar uma perpendicular a AC. Assim, os dois ângulos coincidem e são iguais.

3. **Terceira Propriedade:** - Dois ângulos adjacentes que têm os lados não comuns em linha reta são suplementares.-



1º Teo

Hipótese: Sejam os ângulos m e n, cujos lados não comuns AC e AD estão em linha reta.

Tese: os ângulos m e n formam 180°.

Demonstração: Tracemos, pelo ponto A a perpendicular a CD, seja AE e teremos:

ângulo m = ang. reto $(\widehat{DAE}) = 90° + \widehat{EAB}$

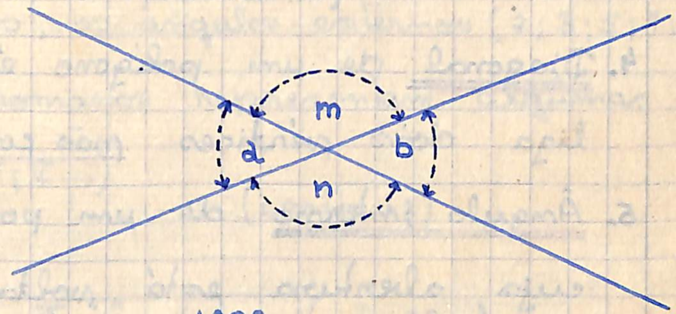
ângulo n = ang. reto $(\widehat{CAE}) = 90° - \widehat{EAB}$, somando dá:

m + n = 180°

4. **Quarta Propriedade:** - Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.-

2º Teo

Hipótese: sejam a e b dois ângulos opostos pelo vértice.



Tese: ângulo a igual a âng. b.

Demonstração:

Temos: ângulos a + m = 180°

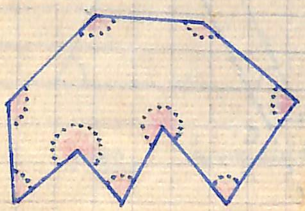
ângulos b + m = 180°, o que, subtraindo-se membro a membro resultará:

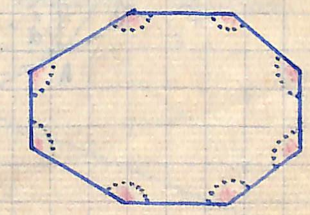
ângulo a - b = 0 ou a = b. Portanto os ângulos a e b são iguais (opostos p. vértice)

III - Polígonos (pág 85...)

a) - Definições:

1. O Polígono é uma figura plana de três ou mais lados ligados entre si.
2. Um polígono pode ser côncavo ou convexo. É côncavo quando seus ângulos são menores que 180°:





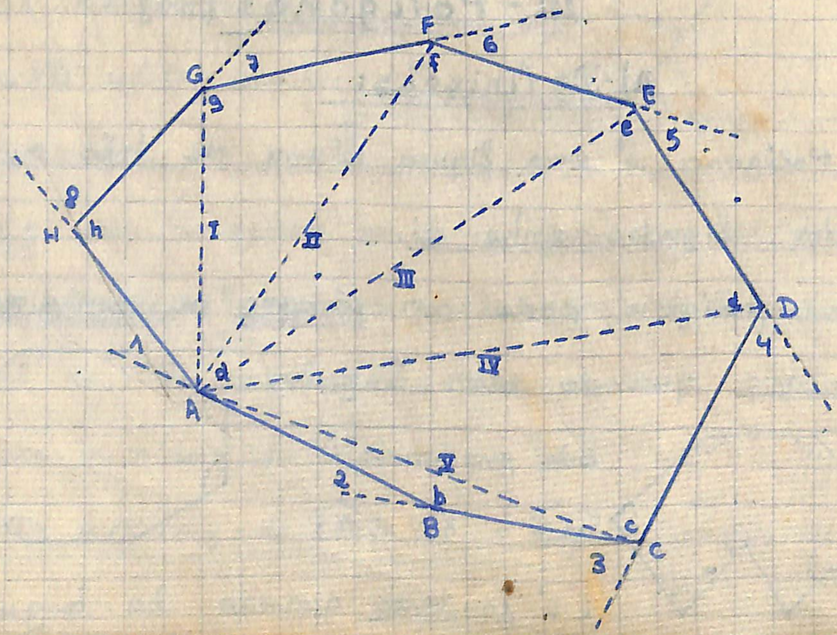
: é convexo quando há ângulos internos maiores que 180°.

3. Um Polígono tem tantos vértices vértices como lados. $n = \begin{cases} \text{nr. de vértices} \\ \text{nr. de lados.} \end{cases}$

4. <u>Diagonal</u> de um polígono é o segmento que liga dois vértices <u>não consecutivos</u> da figura

5. <u>Ângulo interno</u> de um polígono é aquêle cuja abertura está voltada para dentro da figura. <u>Ângulo externo</u> de um polígono é aquêle que está formado por um dos lados do polígono e pelo prolongamento do do lado antecedente a êste.

A soma do ângulo <u>interno</u> e do <u>externo</u> é igual a 180°.



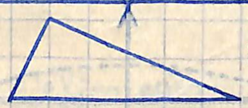
No Polígono representado, as letras maiúsculas, representam os vértices (A; B; C...); as letras minúsculas, os ângulos internos (a; b; c...); os números arábicos, os ângulos externos (2; 3; 5; 7;...) Os números romanos representam algumas diagonais (I; IV; V...)

(continua)

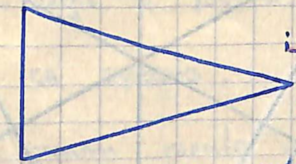
<u>IV - Triângulos</u> (pag. 80...)

<u>a - Classificação:</u>

1. <u>Classificação quanto aos lados:</u>

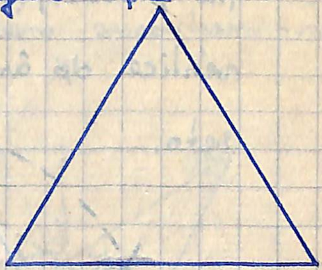


;<u>Escaleno</u>: é aquêle que tem os lados lados desiguais entre si.

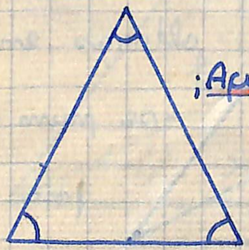


;<u>Isósceles</u>: é o triângulo que tem dois lados iguais.

<u>Equilátero</u>: é o triângulo com os três lados iguais;

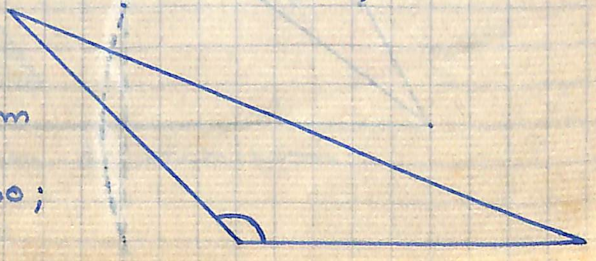


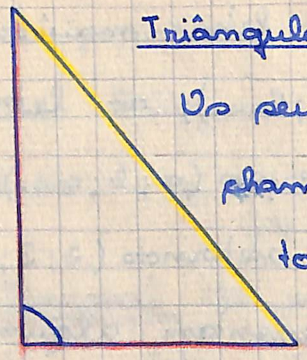
2. <u>Em relação aos ângulos:</u>



;<u>Acutângulo</u>: com três ângulos agudos.

<u>Obtusângulo</u>, com um ângulo obtuso;



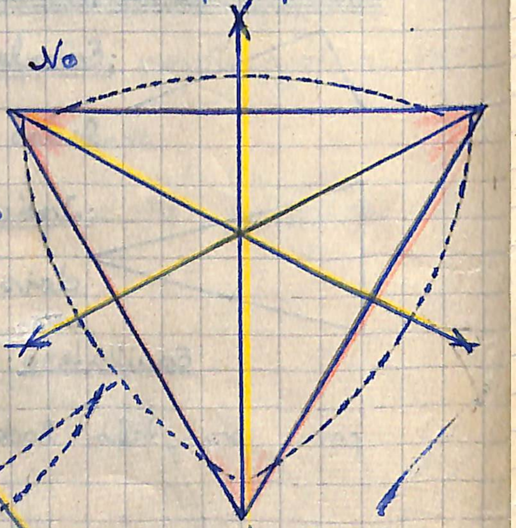


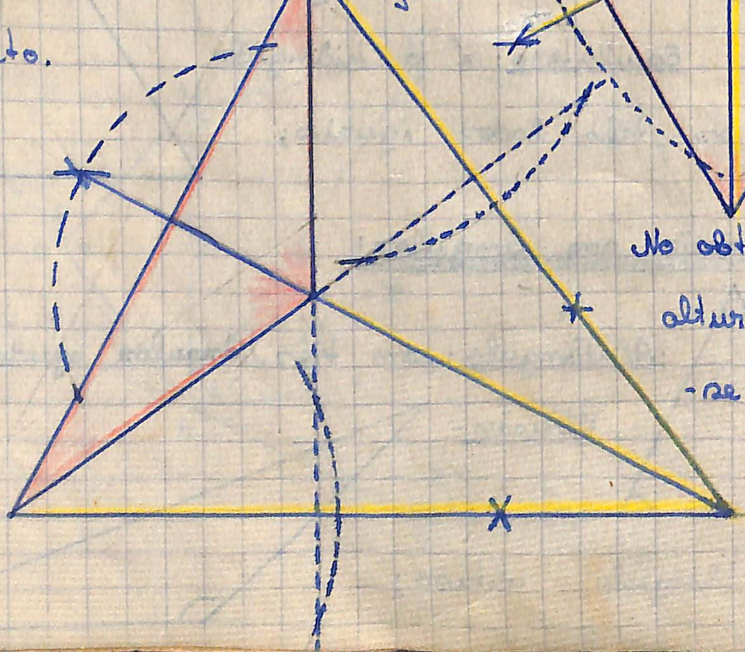
Triângulo Retângulo com um ângulo reto.

Os seus lados que formam o ângulo reto chamam-se catetos e o que está oposto ao ângulo reto, é a hipotenusa.

b- Alturas do Triângulo

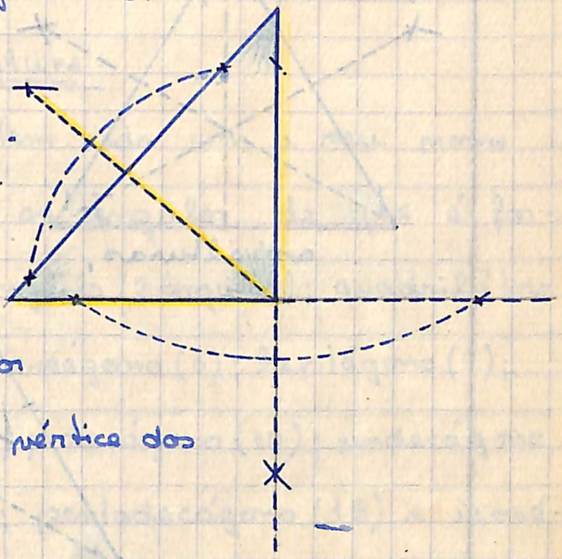
1. Definições: Altura de um triângulo é um segmento perpendicular baixado do vértice ao seu lado oposto. Em um △ as três alturas sempre concorrem num mesmo ponto. No acutângulo, encontram-se no interior; no retângulo, no vértice do ângulo reto.





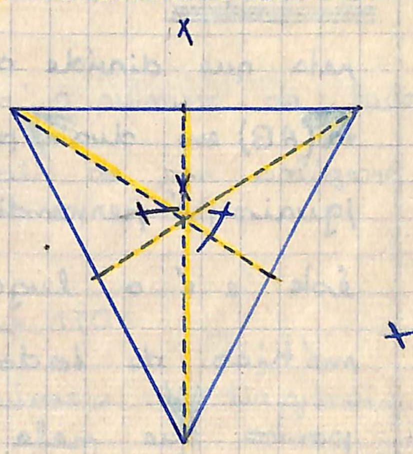
No obtusângulo, as alturas encontram-se num ponto fora da figura. Êsse ponto afasta-se tanto mais, quanto maior fôr o ângulo obtuso.

No △ Retângulo existe apenas uma altura, relativa à hipotenusa. As outras duas coincidem com os catetos e tem por ponto de concorrência o vértice dos mesmos.

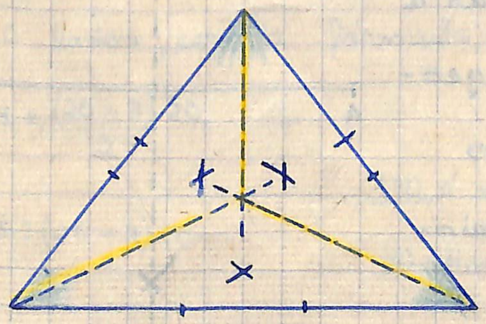


c- As Medianas do Triângulo

1. Definições: Mediana de um △ é um segmento que liga o ponto médio de um lado ao seu vértice oposto. As medianas também encontram-se num ponto só.

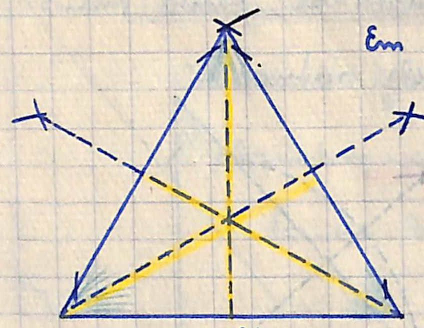


d- Bissetrizes

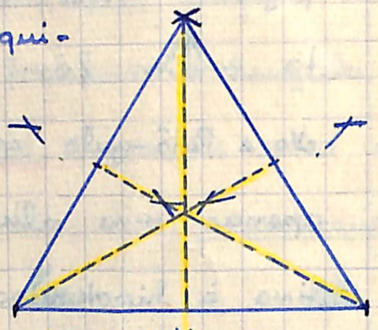


As bissetrizes de um △ encontram-se num só ponto.

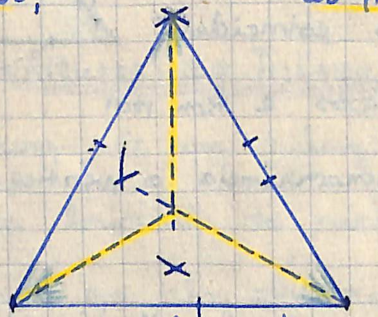
Em um △ equilátero,



as alturas,



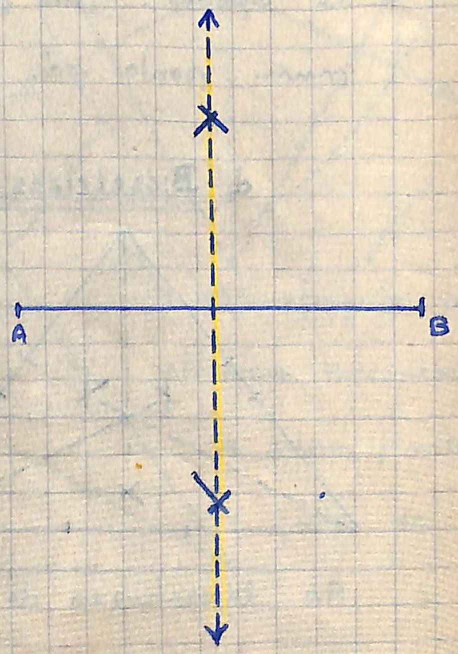
as medianas



e as bissetrizes coincidem..

e- Mediatriz

1. Definição: A Mediatriz é a reta que divide o segmento (AB) em duas partes iguais; é perpendicular a êste e é o lugar geométrico de todos os pontos que nela exsistem.



(continua)

III - O Polígono (pag 87...)

(conclusão)

b- Nomeclatura

1. Definição: os polígonos tem cada um o seu nome pelo número de lados ou ângulos de que é formado. Exemplos: triângulo (3 ângulos); quadrilátero (4 lados); pentágono (5); hexágono (6); heptágono (7); octógono (8); eneágono (9); decágono (10); undecágono (11 lados); dodecágono (12); pentadecágono (15) e icoságono (20) são os mais usados na Geometria.

2. Cálculo de diagonais de um polígono: calcula-se o número de diagonais de um polígono com a fórmula:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

O "d" quer dizer "diagonal" e o "n" o número de lados.

Exemplo: Calcular as diagonais de um polígono de 20 lados; com a fórmula:

$d = \frac{(20-3)\,20}{2}$

$d = (20-3)\,10$

$d = 170$

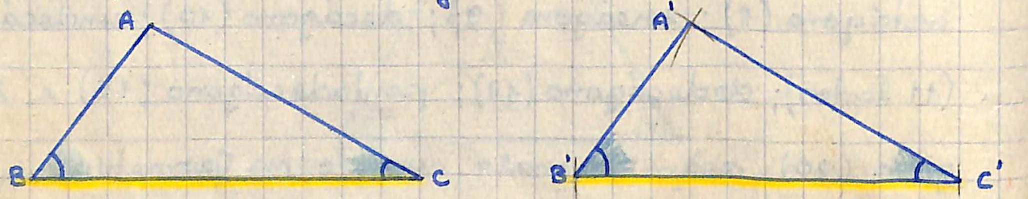
170 é o número de diagonais distintas.

IV - O Triângulo

(continuação)

f- Os Casos de Congruência (Igualdade) de Triângulos quaisquer:

1. Primeiro Caso: Dois Δ são congruentes quando têm um lado igual, adjacente a dois ângulos respectivamente iguais:



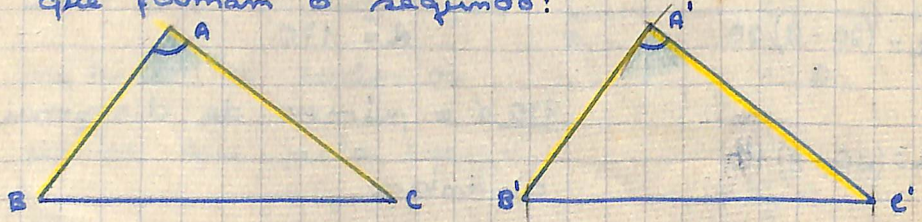
Hip.: $BC = B'C'$

$\measuredangle B = \measuredangle B'$

$\measuredangle C = \measuredangle C'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

2. Segundo Caso: Dois Δ são iguais quando têm um angulo respectivamente igual e os lados que formam o primeiro são iguais aos lados que formam o segundo:



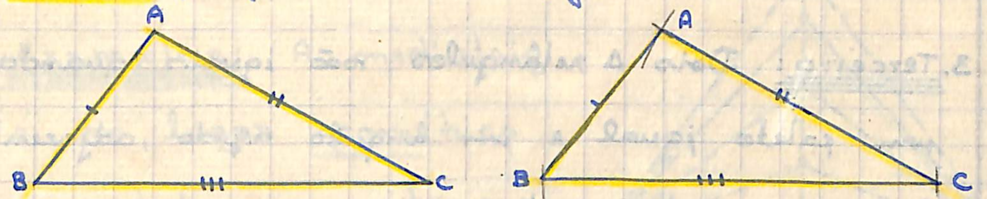
Hip.: $AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$\measuredangle A = \measuredangle A'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

3. Terceiro Caso: Dois Δ são iguais quando têm 3 lados respectivamente iguais:



Hip.: $AB = A'B'$

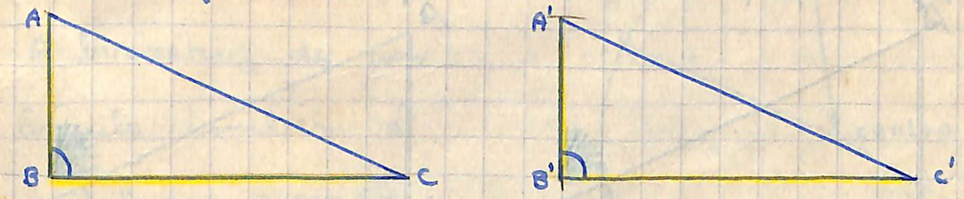
$AC = A'C'$

$BC = B'C'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

g- Os Casos de Congruência de um triângulo retângulo:

1. Primeiro: Dois triângulos retângulos são iguais quando têm os seus dois catetos respectivamente iguais:

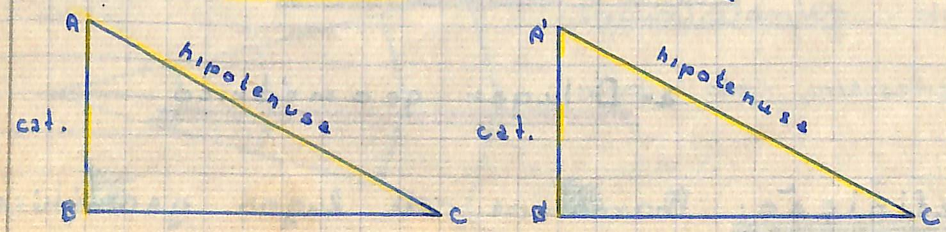


Hip.: $AB = A'B'$

$BC = B'C'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

2. Segundo: Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa e um cateto iguais.

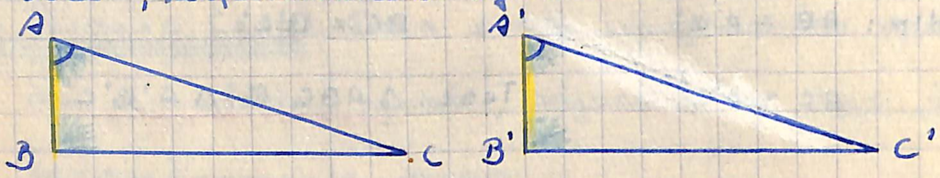


Hip.: $AB = A'B'$

$BC = A'C'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

3. Terceiro: Dois Δ retângulos são iguais quando têm um cateto igual e um ângulo agudo, adjacente a êsse, respectivamente iguais.

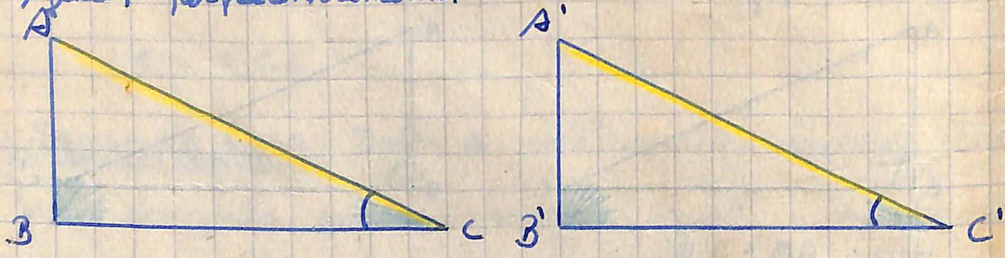


Hip.: $AB = A'B'$

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$

Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

4. Quarto: Dois Δ retângulos são iguais quando têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual, respectivamente.



Hip.: $AC = A'C'$

$\sphericalangle C = \sphericalangle C$

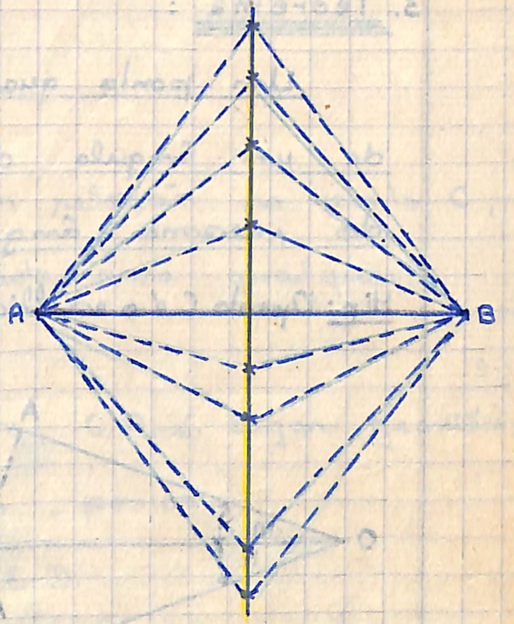
Tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

V - Perpendiculares

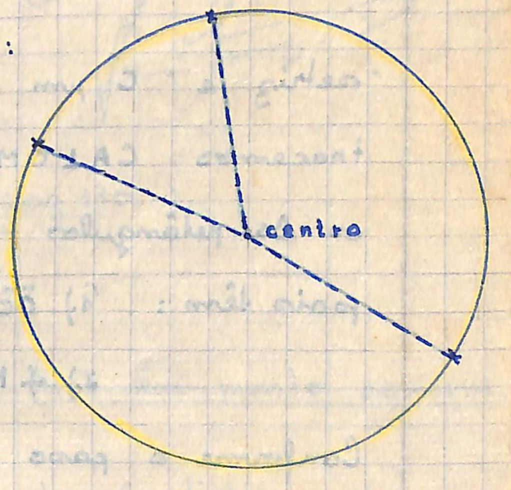
a- O lugar geométrico

1. Definição: Chama-se de lugar geométrico quando um conjunto de pontos gozam da mesma propriedade.

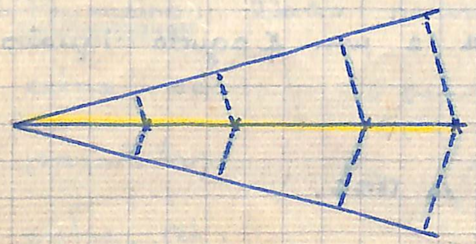
2. Exemplos: A mediatriz é um lugar geométrico para todos os pontos que nela existem:



A circunferência é lugar geométrico para todos os pontos que nela existem porque são eqüidistantes de um ponto comum chamado centro:



A bissetriz de um ângulo também é um lugar geométrico porque seus pontos gozam todos da mesma propriedade, isto é, são eqüidistantes dos lados do mesmo ângulo:

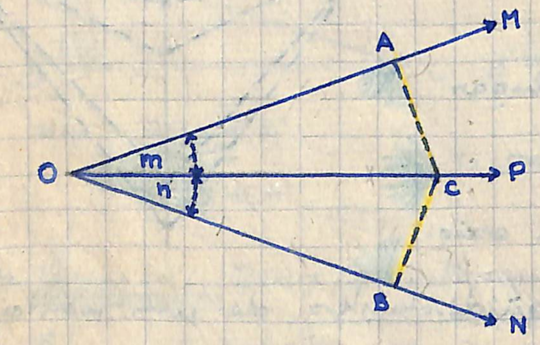


3. Teorema :

Um ponto qualquer situado na bissetriz de um ângulo dista igualmente dos lados do mesmo ângulo.

Hip: O ponto C é o escolhido na reta OP e $\measuredangle m = \measuredangle n$ (ou OP é bissetriz do $\measuredangle$ MON)

3º Teor



Tese: $\boxed{\overline{AC} = \overline{BC}}$

Demonst.: Seja dado o $\measuredangle$ MON ; OP a sua bissetriz e C um ponto qualquer nela. De C traçamos $CA \perp OM$ e $CB \perp ON$, recebendo assim os Δs. retângulos AOC e BOC, que são iguais, pois têm: 1.) $\overline{OC} = \overline{OC}$ (em comum)

2.) $\measuredangle n = \measuredangle m$ (hipótese)

Conforme o caso de congruência de Δs retângulos, - Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa e um $\measuredangle$ agudo iguais - podemos escrever:

$$\Delta AOC \cong \Delta BOC.$$

Sendo assim os triângulos retângulos iguais, coincidem e

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{BC}}$$

O que foi demonstrado em relação ao ponto C, também pode ser provado para qualquer outro ponto.

Conclui-se que, por isso, OP é lugar geométrico para todos êsses pontos.

Q. E. D.

Nito

RICHARD TEINKE 26-8-63

Os problemas feitos?

27.8.

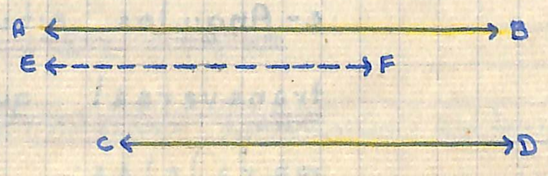
VI- Paralelas (pag 110...)

a) Definições:

Paralelas são retas que não têm ponto comum.

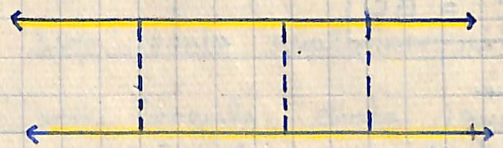
b) Postulados de Euclides:

1. Primeiro: Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si:



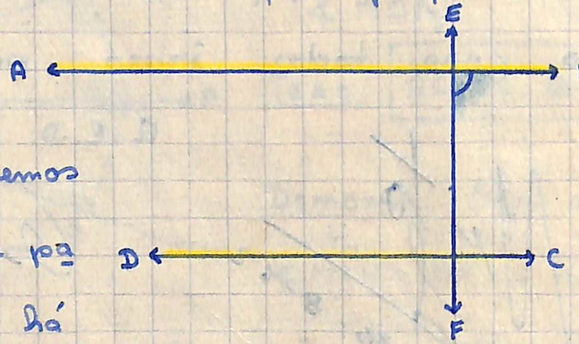
Prim. retas: AB e CD   3ª reta: EF

2. **Segundo:** Todas as perpendiculares entre duas

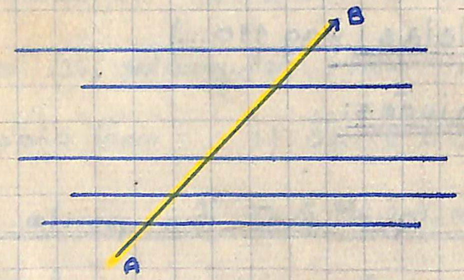


paralelas são iguais.

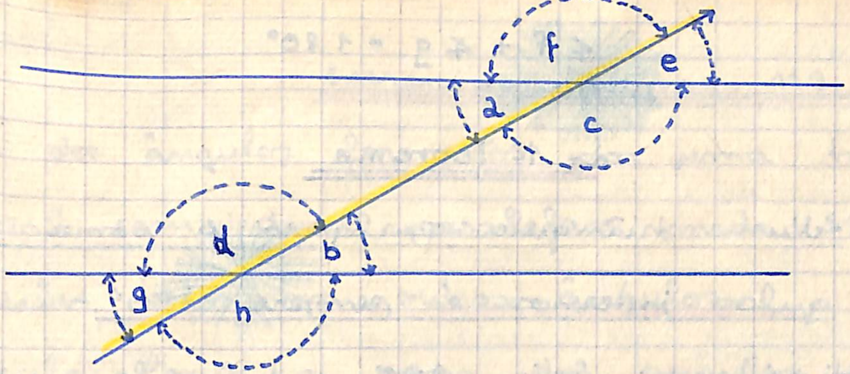
28.8. 3. **Terceiro:** Se há duas paralelas (nesse caso AB e DC) e uma é perpendicular a uma terceira reta (EF), obriga a outra ser perpendicular a esta.



4. **Quarto:** Se temos um feixe de paralelas e se há uma reta que corta uma delas, corta também tôdas as outras. (AB é a reta que corta as paralelas e é também chamada transversal).



c- Ângulos situados junto à transversal que corta duas paralelas:



1. **Primeiro grupo:** I- Ângulos alternos internos:

$\sphericalangle a = \sphericalangle b$

$\sphericalangle c = \sphericalangle d$

II- Ângulos alternos externos:

$\sphericalangle e = \sphericalangle g$

$\sphericalangle f = \sphericalangle h$

2. **Segundo grupo:** Ângulos correspondentes:

$\sphericalangle a = \sphericalangle g$

$\sphericalangle b = \sphericalangle e$

$\sphericalangle c = \sphericalangle h$

$\sphericalangle d = \sphericalangle f$

3. **Terceiro grupo:** I- Ângulos colaterais internos:

$\sphericalangle a + \sphericalangle d = 180°$

$\sphericalangle b + \sphericalangle c = 180°$

II- Ângulos colaterais externos:

$\sphericalangle e + \sphericalangle h = 180°$

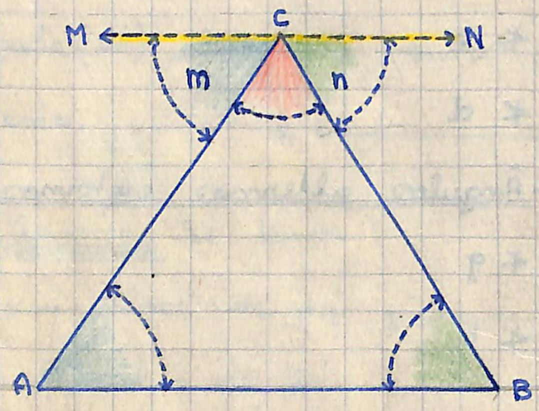
$\sphericalangle f + \sphericalangle g = 180°$

d- 1º Teorema

- Num triângulo qualquer a soma dos ângulos internos é sempre 180°.-

4º Tço

1. **Hipótese**: Seja ABC o triângulo.



2. **Tese**:

$$\boxed{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°}$$

3. **Demonstração**: Seja dada a figura como pede a hipótese. Pelo vértice C traçamos $MN \parallel AB$. Transfiramos todos os ângulos do triângulo à paralela MN:

$\sphericalangle A = \sphericalangle m$ (alternos internos)

$\sphericalangle B = \sphericalangle n$ (alternos internos)

$\sphericalangle C = \sphericalangle C$

Somando: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle m + \sphericalangle n + \sphericalangle C$

$$\boxed{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°}$$

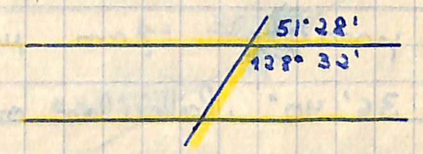
Q. E. D.

Exercícios à pag. 119:

1. Um dos ângulos formados por uma transversal com duas paralelas mede 51° 28'. Calcular todos os outros ângulos.

Cálculo: Como a soma dos angulos com o mesmo suporte sempre dá 180° e um dêles é 51° 28', o seu suplemento é:

$$\begin{array}{r} 180° \\ -\ 51°28' \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 179°\,60' \\ -\ 51°\,28' \\ \hline 128°\,32' \end{array}$$



Resposta: Havendo somente dois tipos de ângulos na figura acima, êstes são de 51° 28' e 128° 32', respectivamente.

2. A diferença entre dois ângulos colaterais internos, formados por duas paralelas com uma transversal, mede 53° 29' 20". Calcular todos os ângulos da figura.

Cálculo: Como a soma de dois ângulos colaterais é sempre 180° e a diferença dêles, nesse caso é de 53° 29' 20", os ângulos são:

$$\begin{array}{r} 180° \\ -53°\,29'\,20'' \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 179°60' \\ -53°29'\,20'' \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 179°\,59'\,60'' \\ -\ 53°\,29'\,20'' \\ \hline 126°\,30'\,40'' \end{array}$$ é o que

sobra da diferença. Dividindo por dois; ...
126° 30' 40" : 2; resulta 63° 15' 20". Êste é um dos ângulos. O outro é é isso mais a diferença; 63° 15' 20" + 53° 29' 20" = 116° 44' 40".

Resposta: os ângulos são de: 116° 44' 40" e de 63° 15' 20"

---

3. Um dos ângulos internos formados por duas paralelas com uma transversal mede 125° 36' 40". Calcular os ângulos da figura.

Cálculo: Sendo a soma de dois ângulos diferentes da figura referente a êste número, 180° e um dêles mede 125° 36' 40", o outro é:

$$\begin{array}{r} 180° \\ -125° 36' 40" \end{array} ; \quad \begin{array}{r} 179° 60' \\ -125° 36' 40" \end{array} ; \quad \begin{array}{rrr} 179°(60) & 59' & 60" \\ -125° & 36' & 40" \\ \hline 54° & 23' & 20" \end{array}$$

Resposta: Um dêles é de 125° 36' 40" e o outro, 54° 23' 20"

3.9. 4. Duas paralelas são cortadas por uma transversal, formando dois ângulos colaterais internos, a e b. Sendo a = 5x + 25° e b = 2x − 20°, calcular os ângulos da figura.

Cálculo: Ângulos colaterais sempre tem como soma 180°; portanto:

a + b = 180°   5x + 25 + 2x − 20 = 180

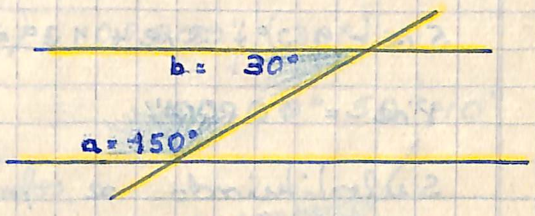
7x + 5 = 180   7x = 175

x = 25   Se x é 25, o a é:

5(25) + 25 = a   125 + 25 = a   150° = a; e

o b: 2(25) − 20°   50 − 20   30°

Resposta: o ângulo a é de 150° e o b, 30°



---

5. Uma transversal corta duas paralelas. Calcular os ângulos formados pela transversal com as paralelas, sabendo que a soma dos ângulos agudos é 204°

Cálculo: Como há 4 ângulos agudos na figura descrita acima (v. cap. Paralelas) e a soma dêles é 204°, um só é 204 : 4 = 51°. A soma dos dois ângulos diversos (agudo e obtuso) é 180°; o agudo é de 51° e o outro; 180° − 51° = 129°

Resposta: Os ângulos são de 51° e 129° respectivamente:

6. Duas paralelas são cortadas por uma transversal, formando dois ângulos colaterais externos, a e b. Sendo $a = 5x - 12°$ e $b = 3x + 12°$, calcular os ângulos da figura.

<u>Cálculo:</u> A soma de dois ângulos colaterais, tanto internos, como externos, é sempre 180°.

Substituindo a e b por seus valores, fica:

$5x - 12° + 3x + 12° = 180°$ $\qquad$ $8x = 180°$

$8x = 10800'$ $\qquad$ $x = 1350'$

Substituindo x nos valôres de:

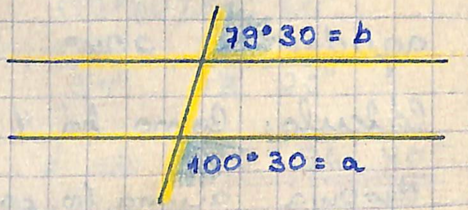
$a = 5(1350') - 720'$ $\qquad$ $a = 6750' - 720'$

$a = 6030'$ $\qquad$ $a = 100°\ 30'$;

$b = 3(1350') + 720'$ $\qquad$ $b = 4050' - 720'$

$b = 3330'$ $\qquad$ $b = 79°\ 30'$

<u>Resposta:</u> os ângulos são de <u>100° 30'</u> e de <u>79° 30'</u>



7. Os ângulos a e b, formados por duas paralelas com uma transversal, são alternos internos. Calcular os ângulos dados, sendo $a = 5x + 30°$ e $b = 2x + 48°\ 30'\ 24''$

<u>Cálculo:</u> ângulos alternos são sempre iguais; portanto $a = b$; substituindo por seus valores:

$5x + 30° = 2x + 48°\ 30'\ 24''$

$5x - 2x = 48°\ 30'\ 24'' - 30°$

$3x = 18°\ 30'\ 24''$

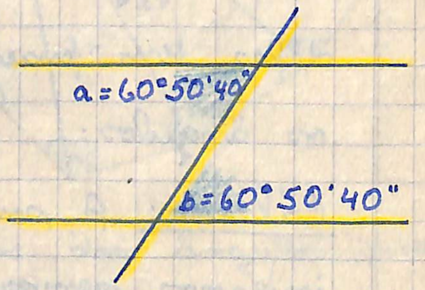
$3x = 66624''$ $\qquad$ $x = 22208''$.

Se isso é x, o a é:

$a = 5(22208'') + 108000''\ (30°)$

$a = 21904''$ $\qquad$ $a = 60°\ 50'\ 40''$

<u>Resposta:</u> Como os ângulos são alternos, são iguais; portanto, tanto a como b valem <u>60° 50' 40"</u>.



8. Sendo dois ângulos colaterais internos formados por duas paralelas e valendo um a terça parte do outro, calcular os mesmos.

<u>Cálculo:</u> A soma de dois ângulos colaterais é 180°; se um é a terça parte do outro:

$y = \frac{1}{3}x$ $\qquad$ $\frac{3y}{1} = x$ $\qquad$ $3y = x$ $\qquad$ $3y - x = 0$

Podemos calcular pelo sistema de 2 incógnitas

$x + y = 180°$

$x - 3y = 0$

$x + y = 180°$

$-x + 3y = -0$

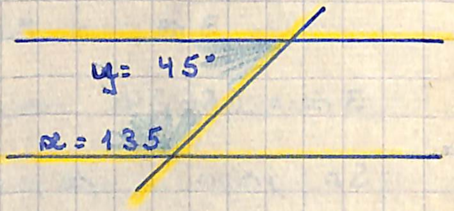
$4y = 180°$

$y = 45°$

$x = 180° - y$

$x = 180° - 45°$

$x = 135°$



Resposta: Os ângulos são de 135° e 45°

3. Dois ângulos são colaterais internos e um dêles tem mais 46°26' que o outro. Calcule os ângulos:

Cálculo: A soma de dois ângulos colaterais internos sempre é 180°. Calculando pelo sistema de 2 incógnitas — $46°26' = 2786'$ — :

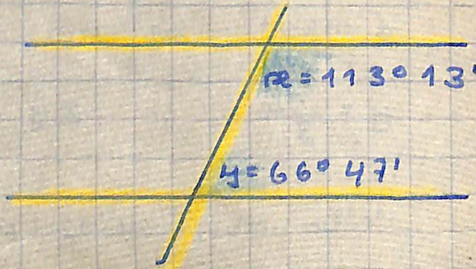
$x + y = 10800'$ | $y = 10800' - x$

$x - y = 2786'$ | $y = 10800' - 6793'$

$2x = 13586'$ | $y = 4007'$

$x = 6793'$ | $y = 66°47'$

$x = 113°13'$

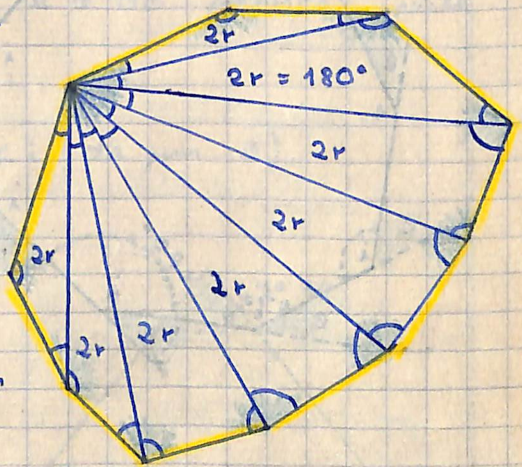


Resposta: os ângulos são de 113°13' e de 66°47'

VII: Soma dos ângulos de um polígono:

a - Ângulos internos

1. De um polígono qualquer:



Convenções: r = ∡ reto

Si = soma dos ângulos internos

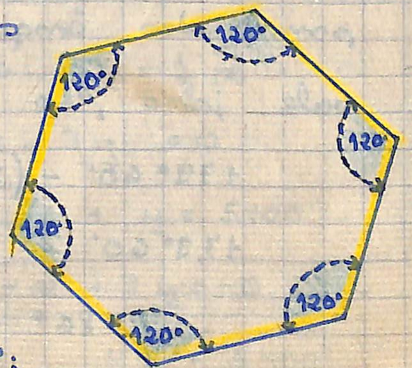
n = número de lados ou vértices de um polígono.

Fórmula para achar a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer:

$$Si = (n-2)\,2r \text{ ; ou}$$

$$Si = (n-2)\,180°$$

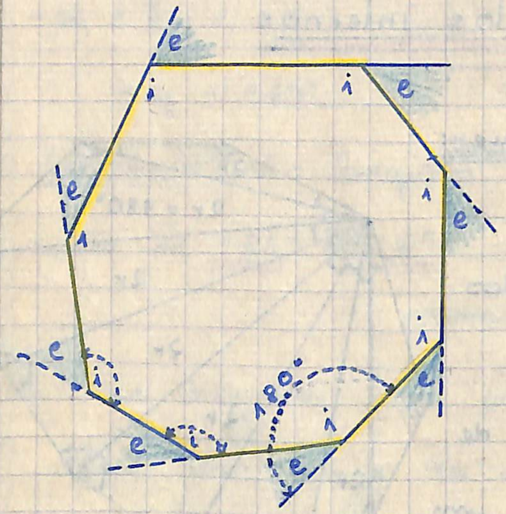
2. De um polígono regular: Nos polígonos regulares, nós podemos calcular um dos ∡ int., dividindo a soma dos ∡ int pelo número de lados: $\frac{(n-2)\,2r}{n}$



Exemplo: $∡_6 = \frac{720}{6}$ ∡ = 120°.

b= Ângulos externos

Desenvolvimento da fórmula da soma dos ângulos externos de um polígono:



$S_e + S_i = 2rn$

$S_e + 2r(n-2) = 2rn$

$S_e + 2rn - 4r = 2rn$

$S_e - 4r = 2rn - 2rn$

$S_e = 4r$

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Exercícios à pag.: 123

1. Dois ângulos de um triângulo valem, respectivamente, 39° 18' 45" e 54° 27' 15". Calcular o terceiro.

Cálculo: Segundo a lei de Tales, vemos que a soma dos ângulos internos é de 180°. Se um vale isso, o outro aquilo, o terceiro vale:

179° 60' − (39° 18' 45" + 54° 27' 15")

179° 60' − 93° 46'

86° 14'

Resposta: o último ∢ vale 86° 14'

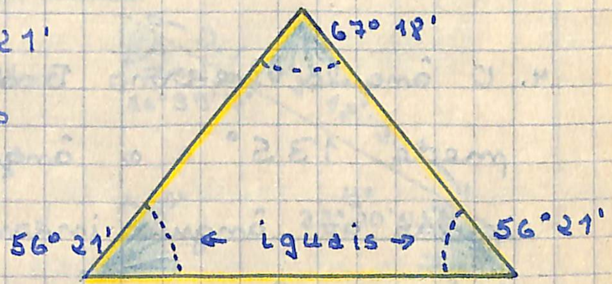
2. Calcular os ∢ da base de um Δ isósceles, sabendo que o ∢ do vértice, vale 67° 18'.

Cálculo: O Δ isósceles possui 2 ∢ iguais. Se o desigual, que, digamos, é o do vértice, vale 67° 18', os outros valem:

179° 60' (a soma dos ∢ i de um Δ)

− 67° 18'

112° 42' : 2 = 56° 21'



Resposta: Os outros ângulos valem 56° 21', cada.

3. Calcular os ∢ agudos de um Δ retângulo, sabendo que o menor é um terço do maior.

Cálculo: O Δ todo tem 180° de ∢ int. Como é retângulo, os ∢ agudos medem 90° ou 5400'

Se um é o terço do outro: $y = \frac{1}{3}x$

$\frac{3y}{1} = x$ $\quad 3y = x \quad x - 3y = 0$

Temos: $x + y = 5400'$ $\qquad x + y = 5400'$

$x - 3y = 0$ $\qquad -x + 3y = -0$

$4y = 5400'$

$y = 1350'$

$y = 22°\ 30'$

$x = 5400' - y$

$x = 5400' - 1350'$

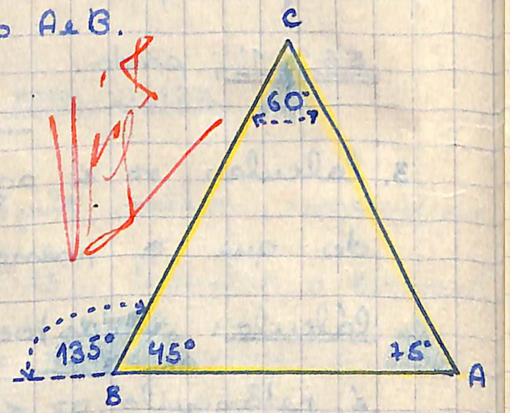
$x = 4050'$

$x = 67°\ 30'$

Resposta: Os ∡ agudos equivalem a 22° 30' e 67° 30', respectivamente.

4. O ângulo externo B de um triângulo ABC mede 135° e o ângulo interno C, 60°. Calcular os ângulos internos A e B.

Cálculo: Como sabemos que o ∡ e B vale 135°, o interno B, vale, portanto 45°, uma vez que a soma de um ∡ i e do ∡ e é 180°. Valendo o B, 45° e o C, 60°, o A vale 75, pois a soma dos três deve dar 180°.



Resposta: O ∡ A vale 75° e o ângulo B, ambos internos, 45°

11.9.

5. Calcular os ∡ agudos de um Δ retângulo, sabendo-se que a sua diferença é de 23° 18' 30".

Cálculo: Sendo a soma dos ∡ i. 180° e o Δ um retângulo, a soma dos ∡ i agudos é 90°. Pelo sistema com duas incógnitas, temos:

$x + y = 90°$

$x - y = 23°\ 18'\ 30''$

$2x = 113°\ 18'\ 30''$

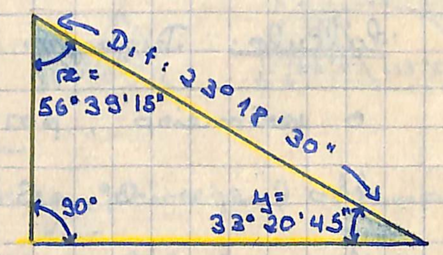
$x = 56°\ 39'\ 15''$

$y = 90° - x$

$y = 90° - 56°\ 39'\ 15''$

$y = 33°\ 20'\ 45''$

Resposta: Os ∡ agudos são de 56° 39' 15" e de 33° 30' 45".



6. Os três ∡ de um Δ têm para expressão, respectivamente, $x + 36°$; $2x - 15$ e $3x - 39°$. Calcular os ângulos.

Cálculo: A soma dos ∡ é 180°; substituindo-se por seus valores, resulta:

$x + 36° + 2x - 15° + 3x - 39° = 180°$

$x + 2x + 3x = 180° - 36° + 15° + 39°$

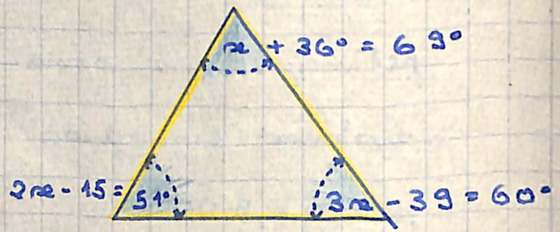
$6x = 198°$ $\quad x = 33°$

Sendo x, 33°, os ∡ são:

$1° = x + 36$ $\quad 33 + 36 \quad 69°$

$2° = 2x - 15$ $\quad 2(33) - 15 \quad 66 - 15 \quad 51$

$3° = 3x - 39$ $\quad 3(33) - 39 \quad 99 - 39 \quad 60°$



Resposta: Os ∡ são de 69°, 51° e de 60°.

7. Num Δ o primeiro ∡ é o dôbro do segundo, e êste, um têrço do terceiro. Calcular os ∡.

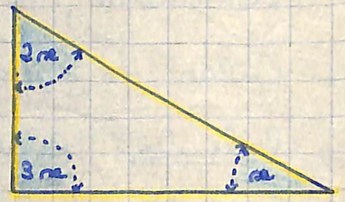
Cálculo: Digamos que o 2° ângulo seja x; o primeiro, portanto, será $2x$, pois é o dôbro, e o 3°, $3x$, pois o segundo é um têrço do terceiro ou o terceiro o triplo do 2°.

A soma dos três é 180°, portanto:

$x + 2x + 3x = 180°$

$6x = 180°$

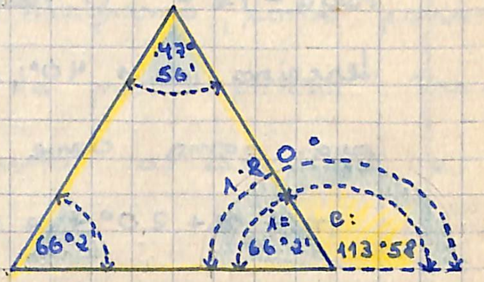
$x = 30°$ Se x é 30°, o primeiro ∡ é 60°, pois é $2x$ e o terceiro, 90°.



Resposta: Os ∡ são de 30°, 60° e de 90°, respectivamente o segundo, o primeiro e o terceiro.

8. Calcular os ∡ de um Δ isósceles, onde um dos ∡ externos da base tem 113°58'.

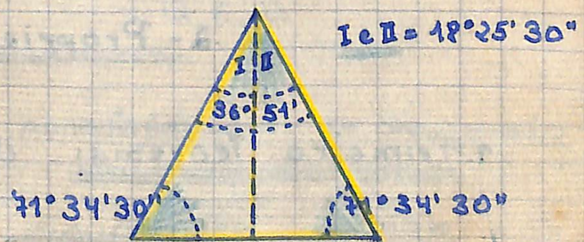
Cálculo: Se o ∡ e. é de 113°58', o ∡ i. é 66°2', pois a soma deve dar 180°. Sendo os ∡ da base iguais, a sua soma é 132° 4', sobrando, portanto, 47° 56' ao terceiro ∡, visto que sua soma deve dar 180°.



Resposta: Os 2 ∡ agudos medem 66°2' cada e o ∡ do vértice, 47°56'.

9. Num Δ isósceles a altura principal forma com o lado um ∡ de 18°25'30". Calcular os ∡ do Δ.

Cálculo: Como o Δ é isósceles, a altura principal é também a bissetriz do ∡ do vértice. A bissetriz de um ∡ forma dois ∡ iguais. Se um é 18°... 25'30", o ∡ do vértice é, pois, de 36°51'. Resta, portanto, 143° 9' aos outros dois, já que a soma dos ∡ i. deve dar 180°. Como os ∡ da base são iguais, cada um têm 71° 34' 30".



Resposta: O ∡ do vértice mede 36° 51' e os outros, cada, 71° 34' 30"

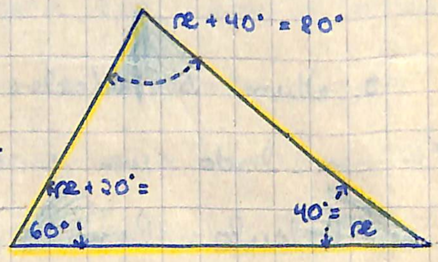
10. Num Δ escaleno, cada $\measuredangle$ excede o precedente de 20°. Calcular os ângulos do triângulo.

Cálculo: Como o enunciado diz que a figura é um Δ, há 3 angulos. Suponhamos que o menor seja $-x-$. O segundo, portanto, será $x + 20°$ e o terceiro, $x + 40°$, pois um excede o outro de 20°. A sua soma deve ser 180°; substituindo $-x$:

$$x + x + 20° + x + 40° = 180$$

$$x + x + x = 180° - 20° - 40°$$

$$3x = 120° \qquad x = 40°$$



Sendo $x = 40°$, o primeiro $\measuredangle$ tem 40° (x), o segundo, 60° ($x + 20°$) e o terceiro, 80° ($x + 40°$).

Resposta: Os $\measuredangle$ são de 40°, 60° e de 80°.

VIII - Quadriláteros Convexos -

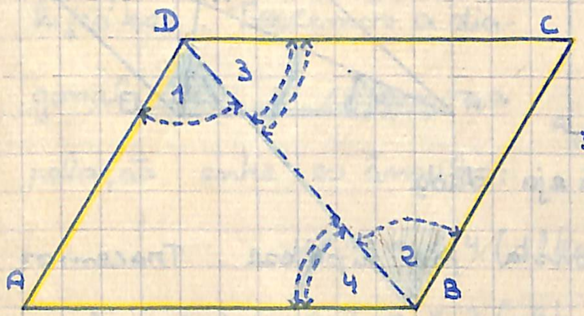
2 - Propriedades do Paralelogramo

1. Primeiro Teorema: Num paralelogramo os lados opostos são iguais.

5º TEO

1º) Hipótese: $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$

2º) Tese: $\boxed{AB = CD \text{ e } AD = BC}$



3º) Demonstração: Seja a figura ABCD um paralelogramo, como consta na hipótese. Tracemos a diagonal BD, formando os Δs ABD e BCD que são iguais:

BD = BD (em comum)

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ (alternos internos)

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ (alternos internos)

Segundo o 1º caso de congruência de Δs quaisquer, temos:

$$\Delta ABD \cong \Delta BCD$$

Sendo os dois Δs iguais, êles coincidem e, portanto

$$\boxed{AB = CD \text{ e } AD = BC}$$

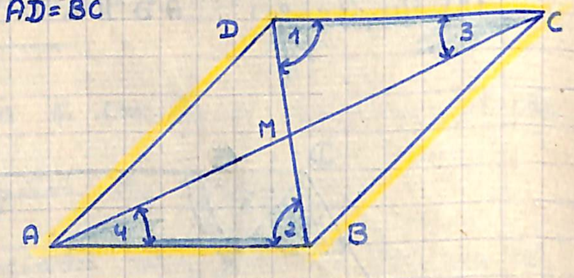
Q. E. D.

2. Segundo Teorema: Num paralelogramo as diagonais cortam-se mutuamente em segmentos iguais.

6º TEO

1º) Hipótese: $AB \overset{\parallel}{=} DC$ e $AD \overset{\parallel}{=} BC$

$AB \parallel CD$ e $AD \parallel CB$



2º) Tese: $\boxed{AM = MC \text{ e } BM = MD}$

3º) Demonstração: Seja dada a figura como consta na hipótese. Tracemos as diagonais AC e BD que formam triângulos quaisquer. Consideremos dêsses os Δs ABM e DCM que são iguais:

$AB = DC$ (hipótese)

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ (alternos internos)

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ (alternos internos)

Conforme o 1º caso de congruência de Δs quaisquer, temos:

$\Delta ABM \cong \Delta DCM$

Os Δ coincidem e, portanto também os ∢ e os lados:

$\boxed{AM = MC \quad \text{e} \quad BM = MD}$

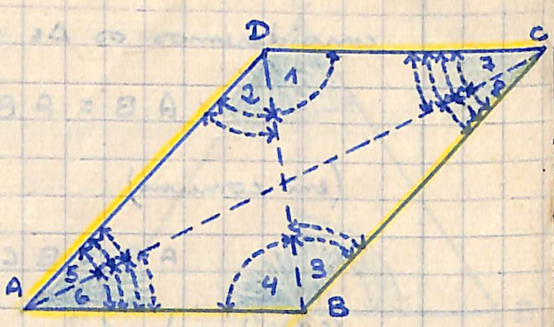
Q. E. D.

3. Terceiro Teorema: Num paralelogramo os ângulos opostos são iguais.

1º) Hipótese: $AB \parallel CD$ e $AD \parallel CB$; $AB = CD$ e $AD = BC$

2º) $\boxed{\measuredangle B = \measuredangle D \text{ e } \measuredangle A = \measuredangle C}$ é a Tese.

3º) Demonstração: Seja dada a figura como consta na hipótese. Tracemos a diagonal BD, e vejamos a relação entre os ângulos:



$\measuredangle 1 = \measuredangle 4$ (alternos internos)

$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ (alternos internos)

Somando: $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \measuredangle 4 + \measuredangle 3$

$\boxed{\measuredangle D = \measuredangle B}$

Tracemos, em seguida a diagonal AC, e temos:

$\measuredangle 5 = \measuredangle 8$ (alternos internos)

$\measuredangle 6 = \measuredangle 7$ (alternos internos)

Somando: $\measuredangle 5 + \measuredangle 6 = \measuredangle 7 + \measuredangle 8$

$\boxed{\measuredangle A = \measuredangle C}$

Q. E. D

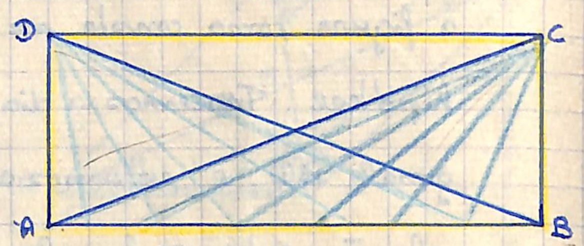
b- Propriedade do Retângulos:

1. Teorema: Num retângulo as diagonais são iguais

1º) Hipótese: $AB \overset{\parallel}{=} DC$ e $AD \overset{\parallel}{=} BC$; $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = \measuredangle 90°$

2º) Tese: $\boxed{AC = BD}$

3º) Demonstração: Seja ABCD o retângulo, como pede a hipótese. Tracemos as diagonais AC e BD e consideremos os Δs retângulos ABD e ABC:



AB = AB (em comum)

AD = BC (hipótese.)

Conforme o caso de igualdade de Δs retângulos: "Dois Δs retângulos são iguais quando têm a hipótese, ou melhor, ~~um cateto~~ e ~~outro~~ cateto iguais", deduzimos:

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$.

Os Δs retângulos são iguais, coincidem, e:

$\boxed{AC = BD}$

Q.E.D.

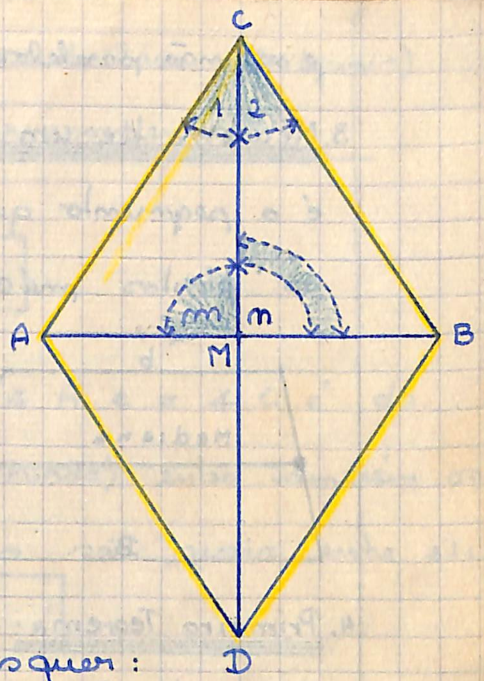
c- Propriedade do Losango

9º Teor. 1. Teorema: Num losango as diagonais são perpendiculares entre si e são as bissetrizes dos seus ângulos.

1º) Hipótese: $AC = AD = BC = BD$; $\measuredangle A = \measuredangle B$ e $\measuredangle C = \measuredangle D$

2º) Tese: $\boxed{AB \perp CD \text{ e } \measuredangle 1 = \measuredangle 2}$

3º) Demonstração: Seja ACBD o losango e AB e CD as diagonais. Comparemos os Δs ACM e BCM que são iguais:



CM = CM (em comum)

AC = BC (hipótese)

AM = MB (as diagonais num paralelogramo cortam-se ...)

Conforme o 3º caso de igualdade de Δs quaisquer:

$\Delta ACM \cong \Delta BCM$

Coincidindo os Δs, $\boxed{\measuredangle 1 = \measuredangle 2}$ e $\measuredangle m = \measuredangle m$, que são adjacentes e cujos lados exteriores estão em linha reta. Portanto são suplementares e cada um dêles tem 90°. Conclui-se que

$\boxed{CD \perp AB}$

Q. E. D.

d- Trapézio

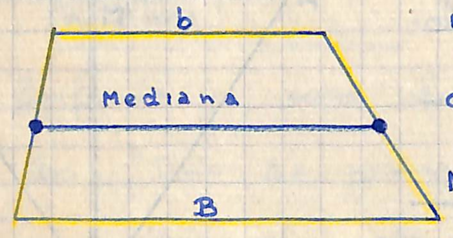
1. Definição: Trapézio é um quadrilátero que tem 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos.

2. Trapézio Isósceles: é o que tem 2 lados paralelos

e os não paralelos iguais:

3. **Mediana de um trapézio:**

é o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio; é a semisoma das duas bases:

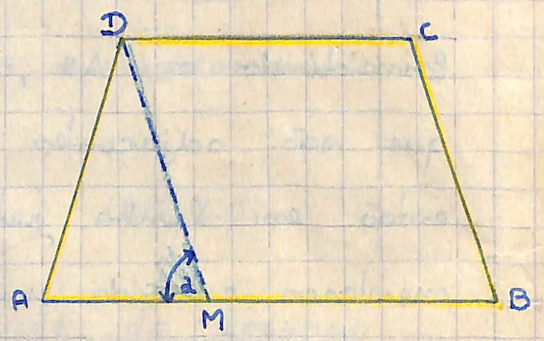


$$\text{Mediana} = \frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2}$$

4. **Primeiro Teorema:** Num trapézio isósceles os ângulos juntos à mesma base são iguais.

1º) **Hipótese:** $AB \parallel CD$ e $AD = BC$.

2º) **Tese:** $\boxed{\sphericalangle A = \sphericalangle B \text{ e } \sphericalangle C = \sphericalangle D}$



3º) **Demonstração:**

Seja ABCD o trapézio isósceles, como pede a hipótese. Pelo ponto D tracemos $DM \parallel BC$, formando assim o ▱ BCDM. [$MB \parallel CB$ (por construção) e $MB \parallel CD$ (hipótese)] O △ ADM é isósceles, porque:

$BC = DM$ (por construção)

$BC = AD$ (hipótese)

Segue que $AD = DM$. Sendo o △ isósceles;

$\sphericalangle A = \sphericalangle d$ (os ∢s da base são iguais)

$\sphericalangle B = \sphericalangle d$ (correspondentes)

Conclui-se que

$$\boxed{\sphericalangle A = \sphericalangle B}$$

O ∢ D é suplementar do ∢ A e o ∢ C é do ∢ B. Ora, se ∢ A = ∢ B (provado), então também os seus ângulos suplementares são iguais entre si:

$$\boxed{\sphericalangle D = \sphericalangle C}$$

Corolário: Duas grandezas iguais a uma terceira são iguais entre si.

Por exemplo:

$a = b$

$c = b$

---

portanto, $a = c$

Q. E. D.

Exercícios às pags. 137...:

1. A diferença entre dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é de 100°. Calcular os ∢s do ▱.

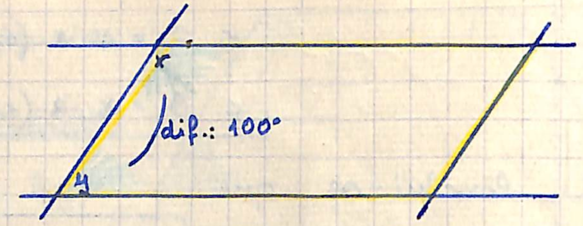
Cálculo: A diferença dos ∢s x e y é de 100°. Como são colaterais internos, a soma é é 180°:

$x - y = 100°$ $\qquad$ $x + y = 180°$

$2x = 280°$

$x = 140°$

$y = 180° - x$



$y = 180° - 140°$ $y = 40°$

Resposta: Os ∡s são de 140° e de 40°.

2. Dois ∡ opostos de um paralelogramo têm, para medidas, em graus, as expressões $4x + 28° 17'$ e $6x - 42° 13'$. Calcular os ∡s do paralelogramo.

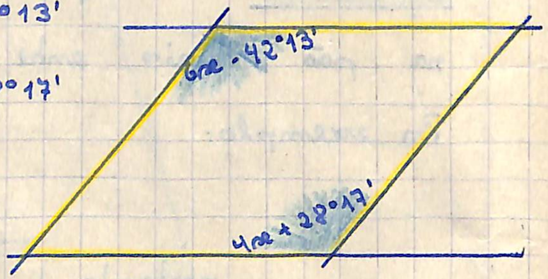
Cálculo: Os ∡s opostos de um ▱ são iguais. Portanto

$4x + 28°17' = 6x - 42°13'$

$4x - 6x = -42°13' - 28°17'$

$2x = 70° 30'$

$x = 35° 15'$



Sendo o $x = 35°15'$ os 1º ∡s iguais são:

$4(35°15) + 28°17'$; $141° + 28°17'$; $169°.17'$

Os outros são:

$179°60' - 169°17'$; $10° 43'$

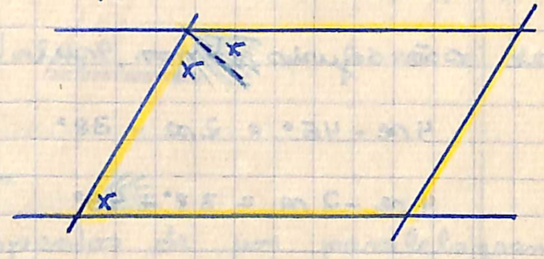
Resposta: Os ∡s obtusos medem 169°17' e os agudos, 10° 43'.

3. Em um paralelogramo os ∡ obtusos são o dôbro dos agudos. Calcular os ângulos do paralelogramo.

Cálculo: Sendo um ∡ agudo x, o obtuso é $2x$. Então

$x + 2x = 180°$ (colat. int.)

$3x = 180°$; $x = 60°$



Se o agudo é de 60°, o obtuso será de 120°, já que a soma deve dar 180°

Resposta: Os ∡s são de 60° e de 120°, respectivamente o agudo e o obtuso.

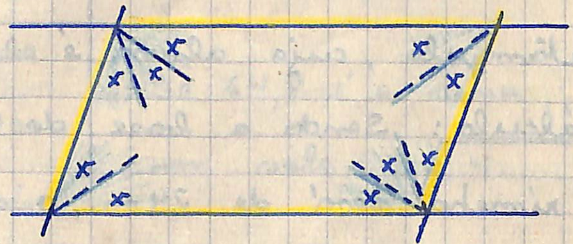
4. Em um paralelogramo cada ∡ agudo vale 2/3 de cada um obtuso. Calcular os ∡s do paralelogramo.

Cálculo: Digamos que o agudo seja $2x$; o obtuso será, então, $3x$, pois um tem 2 partes das 3 do outro. A soma deve ser 180°, pois são colaterais internos

$2x + 3x = 180°$

$5x = 180°$

$x = 36°$



O agudo será $2 \times 36°$; 72° e o obtuso, $3 \times 36°$; 108°

Resposta: Os ângulos agudos medem 72° e os obtusos, 108°.

5. Num trapézio isósceles os ∡s obtusos adjacentes à mesma base têm suas medidas expressas respectivamente pelos polinômios $4x - 45°$ e $2x + 38°$. Calcular os ∡s.

Cálculo: Como os ∡s obtusos de um trapézio isósceles são iguais, temos, substituindo-se x por seus valores:

$4x - 45° = 2x + 38°$

$4x - 2x = 38° + 45°$

$2x = 83$; $x = 41,5°$

Sendo $x = 41°30'$ (ou 41,5°) os obtusos serão:

$4x - 45°$; $4(41,5) - 45°$; $166° - 45°$; $121°$

Os agudos são o suplemento os obtusos

$180° - 121° = 59°$

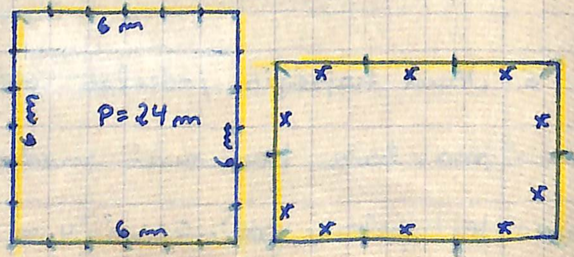
Resposta: Os ∡s agudos medem 59° e os obtusos, 121°.

13. O perímetro de um retângulo é igual ao de um quadrado, cujo lado tem 6 m.. Calcular as dimensões do retângulo, cuja altura é 2/3 da base.

Cálculo: Sendo a base do quadrado de 6 m., o perímetro será de 24 m., o que é também o do retangulo. Seja a altura 2x e a base é 3x, pois a altura tem dois terços dos dos três da base. A metade do perímetro é 12 m., e portanto; $2x + 3x = 12$ m.

$5x = 12$ m.

$x = 2,4$ m.

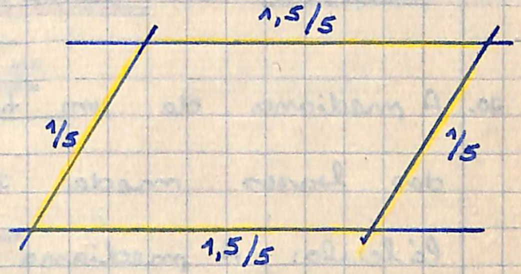


A altura será $2 \times 2,4$; 4,8 m. e a base, $3 \times 2,4$; 7,2 m.

Resposta: A altura é de 4,8 m. e a base é de 7,2 m.

16. A soma de dois lados opostos de um paralelogramo é 2/5 do perímetro, que vale 108 cm. Calcular os lados.

Cálculo: Os lados são x e y



$x + y = \frac{2 \times 108 \text{ cm}}{5}$

$x - y = 0$ (são iguais)

$x + y = 43,2$ cm

$x - y = 0$

$2x = 43,2$ cm

$x = 21,6$ cm

21,6 cm é o valor de dois dos lados. Os outros são o perímetro menos os primeiros lados:

108,0 cm (perímetro total)
− 43,2 cm (soma de 2 lados)
64,8 cm (soma dos 2 outros l.)

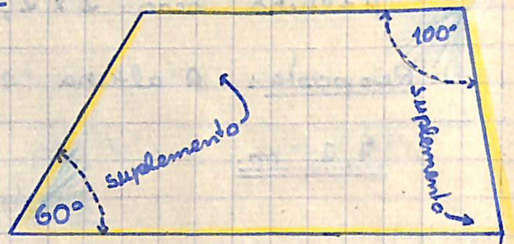
Se 64,8 é a soma, cada um vale 32,4.

Resposta: Os lados medem 32,4 cm e 21,6 cm.

1.10.

19. Dois dos ângulos de um trapézio medem respectivamente 60° e 100°. Calcular os dois outros ∡s do ▭.

Cálculo: Como num trapézio, cada ângulo tem seu suplemento em outro ângulo da figura, o ângulo consecutivo ao de 60° mede 120° e o consecutivo ao de 100°, 80°.



Resposta: Os outros ∡s medem 120° e 80°.

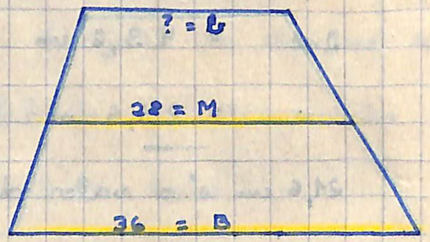
20. A mediana de um trapézio mede 28 dm e uma das bases mede 36 dm. Quanto mede a outra?

Cálculo: A mediana acha-se somando as bases e dividindo por dois. Substituindo:

$M = \frac{B + b}{2}$; $28 = \frac{36 + b}{2}$;

$56 = 36 + b$; $b = 20$,

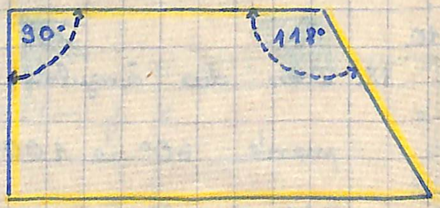
temos o resultado.



Resposta: A outra base mede 20 dm.

21. Num trapézio retângulo os ∡s adjacentes à base menor medem 90° e 118°, respectivamente. Classificar o trapézio e calcular os ângulos adjacentes à base maior.

Cálculo: Sendo um ∡ reto, o seu consecutivo é suplementar, deverá também ser



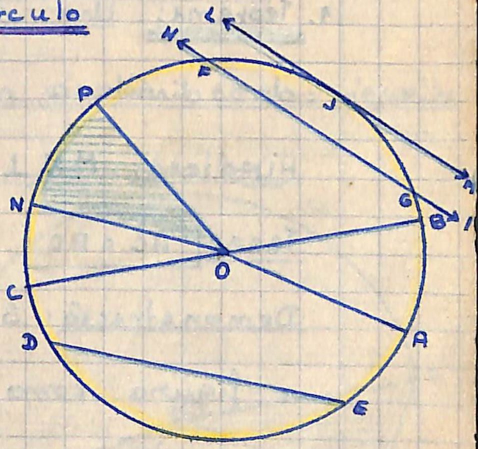
de 90°, pois são colaterais internos, o que já prova o trapézio ser retângulo, como consta no enunciado, uma vez que as duas bases são perpendiculares a um lado. O quarto ângulo mede 62°, pois deve ser o suplemento do consecutivo, que mede 118°.

Resposta: O trapézio é retângulo e os outros ângulos medem 90° e 62°.

IX - Círculo

2- Grandezas do Círculo

O círculo compreende a área fechada pela circunferência:



1. Circunferência (ABGJFPNCDE): é apenas a linha curva regular e fechada
2. Raio ($\overline{AO}$): é o segmento que liga o centro com qualquer ponto da circunferência.
3. Diâmetro ($\overline{CB}$): é o segmento que liga dois pontos da circunferência, passando pelo centro. Êle é a maior corda e o dôbro do raio.
4. Corda ($\overline{DE}$): é o segmento que liga dois pontos da circunferência.

5. **Secante (HI)**: é a reta que atravessa a circunferência em dois pontos.

6. **Tangente (LM)**: é a reta que toca a circunferência num ponto só.

7. **Setor circular (NOP)**: é a porção de superfície compreendida entre dois raios.

8. **Arco (AB)**: é uma porção da circunferência.

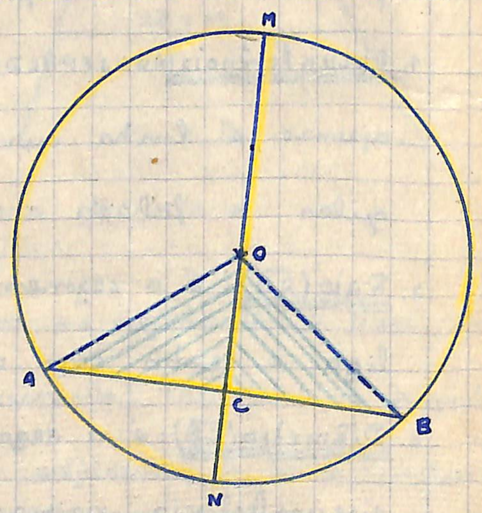
b- Propriedade do diâmetro

11º Teor

1. **Teorema:** Um diâmetro perpendicular a uma corda divide a mesma em dois segmentos iguais.

Hipótese: $MN \perp AB$ dentro do círculo de centro O

Tese: $\boxed{AC = BC}$



Demonstração: Seja dada a figura como consta na hipótese. Liguemos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, formando assim dois Δs retângulos, que são iguais, pois:

$AO = OB$ (raios)

$OC = OC$ (em comum)

Segundo o caso de congruência de Δs retângulos: - Dois Δs retângulos são iguais quando têm um cateto e a hipotenusa iguais -; verificamos:

$\Delta AOC \cong \Delta BOC$

Êles coincidem e:

$\boxed{AC = BC}$

Q. E. D.

Cordas iguais dentro do mesmo círculo, subtendem arcos iguais.

---

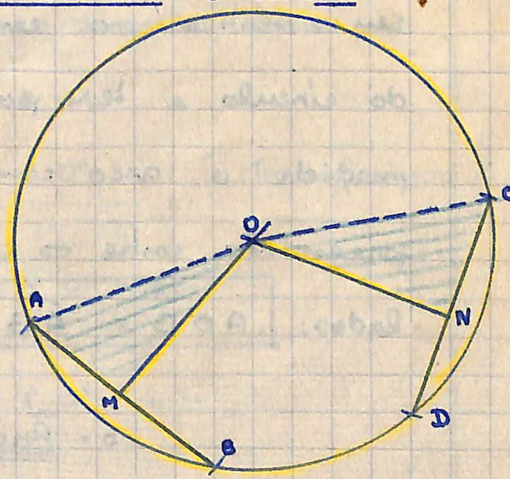
c- Propriedades da corda

12º Teor

1. **Teorema:** Dentro do mesmo círculo, cordas iguais distam igualmente do centro do círculo.

Hipótese: Dentro do círculo O temos: $AB = CD$; $OM \perp AB$ e $ON \perp CD$.

Tese: $\boxed{OM = ON}$



Demonstração: Suposto que a figura seja dada conforme consta na hipótese. Tracemos AO e CO e comparemos os Δs retângulos AOM e CON:

$AO = CO$ (raios)

$AM = CN$ (sendo as cordas iguais,

também o são as metades)

Segundo o caso de congruência de Δs retângulos: - Dois Δs retângulos são iguais quando têm um cateto e a hipotenusa iguais -; temos:

$$\Delta AMO \cong \Delta CNO$$

Os Δs são iguais, coincidem e:

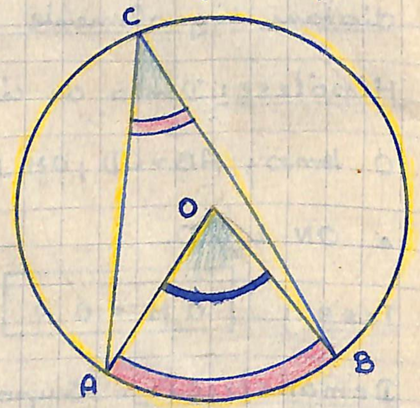
$$\boxed{OM = NO}$$

Q.E.D.

X - Correspondência de ângulos e arcos

a - Ângulo central

1. **Definição**: Ângulo central é o ângulo que tem o seu vértice no centro do círculo e tem por medida o arco compreendido entre os seus lados: $\boxed{AOB = \widehat{AB}}$



b - Ângulo inscrito

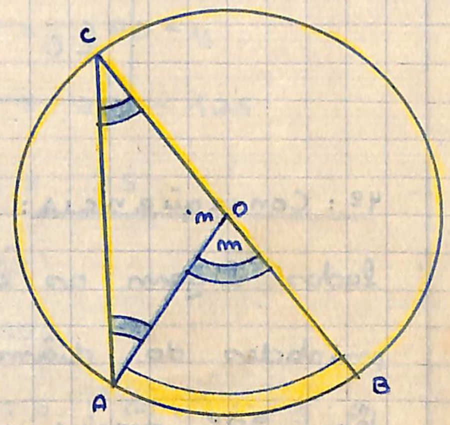
1. **Definição**: Ângulo inscrito é aquêle que tem o seu vértice na circunferência. Êle é igual à medida do arco compreendido entre os seus lados (ver: Ângulo central): $\boxed{\measuredangle C = \frac{\widehat{AB}}{2}}$

Todos os $\measuredangle$s inscritos no mesmo círculo, que têm por medida o mesmo arco, são iguais.

2. **Teorema**: O ângulo inscrito t. p. m. (tem por medida) a metade do arco compreendido entre seus lados

13°
Teo

1º: **Hipótese**: $\measuredangle C$ é inscrito no círculo de centro O e $\measuredangle m$ o ângulo correspondente do mesmo arco.



2º: **Tese**: $\boxed{\measuredangle C = \frac{\widehat{AB}}{2}}$

3º: **Demonstração**: Suposto que a figura seja dada como exige a hipótese. Conforme o desenho, temos:

$$\measuredangle m + \measuredangle m = 180°$$

$$\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle m = 180°$$

Transferindo $\measuredangle m$:

$$\measuredangle m = 180° - \measuredangle m$$

$$\measuredangle A + \measuredangle C = 180° - \measuredangle m$$

$$\measuredangle A + \measuredangle C = \measuredangle m$$

$$\measuredangle A + \measuredangle C = \widehat{AB} \quad (I)$$

O triangulo AOC é isósceles porque OC e OA são raios. Portanto:

$$\measuredangle A = \measuredangle C$$

Substituindo em (I), temos

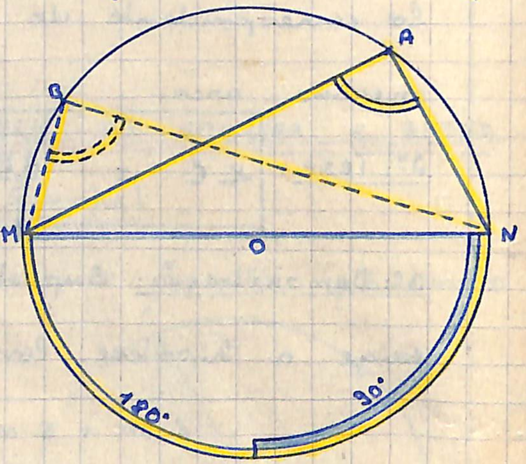
$$\measuredangle C + \measuredangle C = \overset{\frown}{AB}$$

$$2 \measuredangle C = \overset{\frown}{AB}$$

$$\boxed{\measuredangle C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Q. E. D.

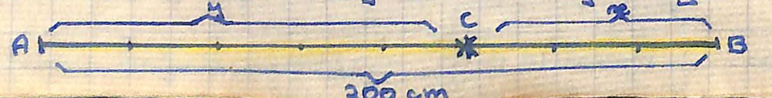
4º: Conseqüencia: Todo ângulo inscrito, cujos lados ligam as extremidades do diâmetro, têm 90°, porque compreende um arco que é a metade da semi-circunferência.



XI - Proporcionalidade de segmentos e semelhança de figuras geométricas

a- Pontos que dividem um segmento numa razão dada:

1. 1º Problema: Dividir um segmento de reta de 200 cm. em dois segmentos cuja razão seja $\frac{3}{5}$



1º: Sistema de equação:

$$x + y = 200$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3y}{5} + y = 200$$

$$3y + 5y = 1000$$

$$8y = 1000$$

$$x = \frac{3y}{5}$$

$$y = 125$$

$$x = 200 - y$$

$$x = 200 - 125$$

$$x = 75$$

2º Sistema de proporção:

$$x + y = 200$$

$$x : y :: 3 : 5 \; ; \; x : 3 :: y : 5$$

$$\frac{x+y}{3+5} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{200}{8} = \frac{x}{3}$$

$$x = \frac{200 \times 3}{8}$$

$$x = 75$$

$$y = 200 - x$$

$$y = 200 - 75$$

$$y = 125$$

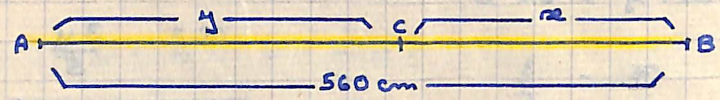
3º: Prova: $75 : 125 :: 3 : 5$

$$\frac{75}{125} = \frac{3}{5} \; ; \; \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

4º: Resposta: Os dois segmentos que dividem um outro, com a razão de 3:5, de 200 cm, medem respectivamente 75 cm e 125 cm

2. 2º Problema: Achar um ponto que divide um

segmento de 560 cm em dois outros, cuja razão seja $\frac{5}{8}$.



1º) Proporção:

$$x + y = 560$$

$$x : y :: 5 : 8 \quad \text{ou} \quad x : 5 :: y : 8$$

$\frac{x+y}{5+8} = \frac{x}{5}$; $\frac{560}{13} = \frac{x}{5}$; $x = \frac{560 \times 5}{13}$; $x = 215,4$

$y = 560 - x$; $y = 560 - 215,4$; $y = 344,6$

2º) Prova: 215,4 : 344,6 :: 5 : 8

$\frac{215,4}{344,6} = \frac{5}{8}$; $\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$

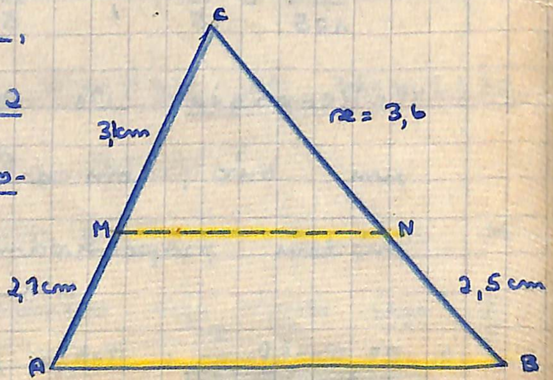
3º) Resultado: Os dois segmentos são de 215,4 cm e 344,6 cm.

b- Linhas Proporcionais no Triângulo

Teoremas de Tales:

14º T20

1º Teorema: Traçando um segmento paralelo a um dos lados de um Δ, êsse divide os outros 2 lados em segmentos proporcionais.



$$\boxed{CM : MA :: CN : NB \quad \text{ou} \quad CM : CA :: CN : CB}$$

1º) Por Proporção: 3,1 : 2,1 :: x : 2,5

7,75 = 2,1x ; 3,6 cm.

2º) Prova: 3,1 : 2,1 :: 3,6 : 2,5

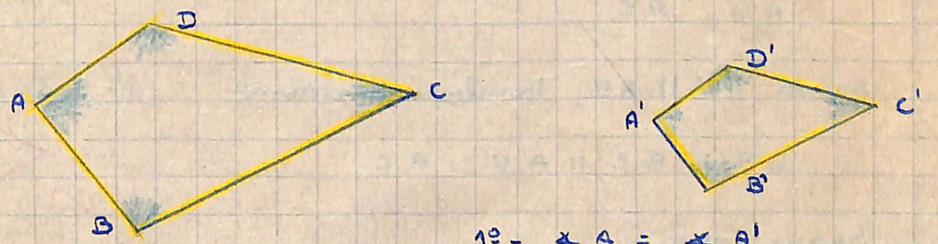
7,75 = 7,75

c - Semelhança

1. Polígonos iguais: Dois polígonos são semelhantes (têm a mesma forma) quando:

1º - Se os ∢s são respectivamente iguais

2º - Seus lados correspondentes proporcionais.



1º - ∢ A = ∢ A'
∢ B = ∢ B'
∢ C = ∢ C'
∢ D = ∢ D'

2º - $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A}$

15º T20

2. 2º Teorema de Tales: Se traçarmos um segmento paralelo a um dos lados do triângulo, êsse fica dividido em um triângulo parcial que é semelhante ao total.

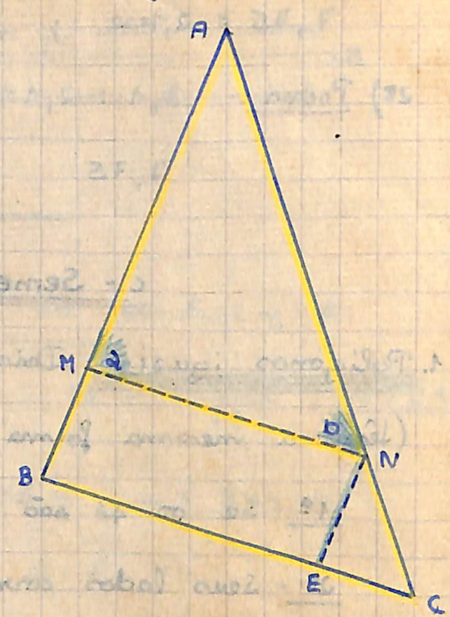
1º Hipótese: Seja MN ∥ BC, lado do Δ ABC.

2º Tese: $\boxed{\Delta AMN \sim \Delta ABC}$

3º Demonstração: Suposto a figura como pede a hipótese, tracemos ainda EN ∥ AB. Para que os Δs

AMN e ABC sejam semelhantes, devemos provar <u>primeiro</u>, que seus ângulos sejam respectivamente iguais;

$\boxed{\begin{array}{l} \measuredangle C = \measuredangle b \ (\measuredangle s \ \text{corresp.}) \\ \measuredangle B = \measuredangle a \ (\text{" \quad "}) \\ \measuredangle A = \measuredangle A \ (\text{em comum}) \end{array}}$



e <u>segundo</u>, que seus lados são proporcionais; Segundo o 1º Tales, temos:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Sendo $EN \parallel AB$, também conforme o 1º Tales, temos:

$$BE : BC :: AN : AC$$

Segue que:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BE}{BC} \quad (I)$$

Como BE é igual a MN, por serem lados opostos do paralelogramo MNEB e, substituindo em (I), temos:

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BC}{MN}}$$

Como os ângulos são iguais e os lados semelhantes, os triângulos AMN e ABC são semelhantes.

10.10. Q. E. D.

HINO NACIONAL

POEMA DE JOAQUIM OSÓRIO DUQUE ESTRADA

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heróico o brado retumbante,
E o sol da Liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó Liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

O' Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
E's belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza

Terra adorada,
Entre outras mil,
E's tu, Brasil,
O' Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos teem mais flores;
"Nossos bosques teem mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

O' Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
— Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada
Entre outras mil,
E's tu, Brasil,
O' Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!