ANAIS

do

5.° Congresso Brasileiro de
Ensino da Matemática
10-15 de janeiro, 1966
São José dos Campos, SP
(CTA)

Coordenação do Grupo de
Estudos do Ensino de
Matemática - GEEM - São Paulo

1968

Esta publicação foi parcialmente financiada pela Diretoria do Ensino Secundário do Ministério de Educação e Cultura.

ANAIS

do

5º Congresso Brasileiro
do Ensino da Matemática

10 - 15 de janeiro, 1966

São José dos Campos, SP
(CTA)

Coordenação do Grupo de
Estudos do Ensino da Ma
temática-GEEM- S. Paulo

ÍNDICE

I.	Introdução	5
II.	Sessões de Abertura e Encerramento	17
III.	Resumo dos Cursos	29
IV.	Resumo de algumas aulas-demonstrações*	35
V.	Resumo de algumas conferências *	73
VI.	Algumas comunicações *	137

* Os trabalhos publicados nestes anais seguem fielmente os originais entregues pelos autores.

I - INTRODUÇÃO

O Coordenador Geral, Prof. Osvaldo Sangiorgi, dando início aos trabalhos do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática

5º CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

1. Local e Comissão Organizadora

O 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática teve lugar no magnífico campus do Centro Técnico de Aeronáutica, em São José dos Campos, Estado de São Paulo, no período de 10 a 15 de janeiro de 1966.

A organização do Congresso ficou a cargo do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - tendo sido instituída a seguinte Comissão Organizadora:

Alfredo Pereira Gomes
Alcides Boscolo
Alésio de Caroli
Benedito Castrucci
Irineu Bicudo
Leônidas Hegenberg
Lucília Bechara
L.H.Jacy Monteiro
Osvaldo Sangiorgi
Renate G.Watanabe

A coordenação geral ficou a cargo do Prof. Osvaldo Sangiorgi, função essa recebida pelo plenário do 4º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, - que se realizara em Belém, Pará, 1962.

Das primeiras resoluções da Comissão Organizadora constou a nomeação de Delegados do GEEM junto aos diversos Estados. Participaram do Conclave como Delegados os seguintes professôres:

Kleber Cruz Marques - Paraiba
Martha Souza Dantas - Bahia
Roberto Peixoto - Guanabara
Doris Ferraz de Aragon - Rio de Janeiro
Aristides Camargos Barreto - Minas Gerais

Osny Antonio Dacol - Paraná
Pedro Bosco - Santa Catarina
Antonio Rodrigues - Rio Grande do Sul
Diva Rocha - Santa Maria (R.G.S.)

A Comissão organizadora contou, de modo irrestrito, com a colaboração das autoridades do Centro Técnico de Aeronáutica e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica que proporcionaram tôdas as condições para o pleno desenvolvimento do Congresso. Assim, cêrca de 350 Congressistas de tôdas as partes do Brasil puderam desfrutar das excelentes instalações do CTA, inclusive de setores sociais e esportivos.

A Diretoria do Ensino Secundário, por intermédio da CADES, propiciou condições materiais para o desenvolvimento do Congresso e as Secretarias de Educação e do Govêrno do Estado de S.Paulo, contribuiram decisivamente para completo êxito do Congresso.

2. Nova Mecânica do Congresso - Sessões de Estudos

Procurou-se, com a finalidade de colher melhor resultado, introduzir-se uma nova mecânica na realização do Congresso, principalmente oferecendo aos participantes algumas Sessões de Estudos, reputadas de importância para o professorado secundário interessado no atual tratamento da Matemática.

Foram oferecidas aos Congressistas as seguintes Sessões de Estudos, coordenadas pela Prof. Renate G.Watanabe:

8h	9h 10m	10h 20m
Teoria dos Conjuntos Prof. B. Castrucci (auditório)	Lógica Matemática Prof.O. Sangiorgi (auditório)	Matemática Aplicada Prof.Ruy M.Barbosa (auditório)
Tratamento Moderno da Geometria Analítica Prof. A.Rodrigues (sala 2201)	Introdução à Álgebra Moderna Prof. I.Bicudo (sala 2201)	Geometria - Tratamento Moderno Prof. O.Catunda (sala 2201)
Introdução à Análise Prof.L.Mauro Rocha (sala 2126)	Técnicas Dedutivas Prof. L.Hegenberg (sala 2126)	Conferências (sala 2126)

O resumo dos Cursos desenvolvidos consta da página 29.

3. <u>Participação de professôres e entidades internacionais</u>

Pela primeira vez, em conclaves dessa natureza, figuraram como participantes os seguintes professôres estrangeiros, pertencentes a entidades internacionais ligadas ao ensino da Matemática.

<u>Marshall Stone</u> - Chefe do Departamento de Matemática da Universidade de Chicago (U.S.A) e presidente da Comissão Interamericana de Educação Matemática.

<u>George Papy</u> - Catedrático de Álgebra da Universidade de Bruxelas (Bélgica) e presidente do Centro Belga de Pedagogia da Matemática; membro da Comissão Internacional do Ensino da Matemática.

<u>Hector Merklen</u> - da Universidade de Montevidéu (Uruguai) e do Programa Interamericano para o Desenvolvimento do Ensino da Matemática (PIMEC).

<u>Helmuth Völker</u> - da Universidade de Buenos Aires (Argentina) e do Setor da Matemática do Ministério de Educação Pública da Argentina.

Ao invés de serem apresentados e discutidos apenas resultados de pesquisas no setor do ensino, foram propiciados a todos os congressistas informações matemáticas que pudessem refletir o que de mais atual e elevado se pratica nos diversos centros de estudos europeus e americanos. Êsse era o objetivo das sessões plenárias iniciadas às 14 horas, diàriamente.

O Prof. Marshall Stone realizou Sessões de Estudos sôbre "Tratamento Moderno da Geometria".

O Prof. George Papy desenvolveu, todos os dias, Sessões de Estudos sôbre diversos tópicos de Matemática Moderna no ensino secundário.

O prof. Hector Merklen realizou Sessões de Estudos sôbre "Ensino Moderno da Geometria".

O Prof. Helmuth Völker apresentou comunicação especial sôbre o desenvolvimento da Matemática Moderna na escola secundária argentina.

Cumpre assinalar a compreensão e o alto espírito de cooperação dos participantes que compareceram ao Congresso, não obstante o auxílio recebido tenha sido, em geral, insuficiente para tôdas as despesas - embora a preços razoabilíssimos a que estiveram sujeitos. O espírito de congrassamento revelado por todos os congressistas nas horas de refeições e outras atividades em comum, incluindo a vivência com professôres estrangeiros, se constituiu numa autêntica afirmação da necessidade de reuniões dessa natureza, onde professôres de Matemática de tôdas as partes do Brasil poderão trocar idéias acêrca dos grandes problemas educacionais dêste e de outros países.

4. <u>Aulas-demonstração</u>

À 15h 30m, diàriamente, de acôrdo com o calendário didático do Congresso, realizaram-se aulas - demonstração de níveis ginasial e colegial. As aulas foram as seguintes:

<u>Ginásio</u>: Prof. Luiz Barco - "Conjuntos"
Prof. Camilo A.S.Rambaud - "Sistemas de Numeração"
Prof. Scipione Di Pierro Neto - "Geometria"

<u>Colégio</u>: Prof. Douglas P.Bellomo - "Relações e funções"
Prof. Luiz Osvaldo Teixeira da Silva - "Princípios da Múltipla Escôlha"
Prof. Ruy M.Barbosa - "Combinatória e Probabilidade"

O resumo de algumas aulas desenvolvidas consta da página 35.

5. Conferências

Foram desenvolvidas as seguintes conferências:

1. A Matemática Moderna na Escola Argentina Prof. Helmuth Wölker.
2. Preparação de Professôres - Prof. Marshall Stone
3. Objetivos do Programa Interamericano para melhorar o ensino das Ciências" - Prof. Hector Merklen.
4. A Topologia no Ensino Secundário - Prof.George Papy.
5. Matemática Clássica, Moderna e Moderníssima - Prof. Newton Carneiro da Costa.
6. Vale a pena ler a "Théorie des Ensembles" de N. Bourbaki? - Prof. Jorge Barbosa.
7. Métodos de Dedução - Prof. Leônidas Hegenberg.

O resumo de algumas das conferências consta na página 73.

6. Comunicações

Em Sessões Plenárias foram apresentadas as seguintes comunicações:

1. Construção de Classes Experimentais e de Contrôle - Profs.Antônio Ribeiro, Joana Bender, Zilá G. Paim - Rio Grande do Sul.
2. Introdução no Ensino Secundário Brasileiro do Conceito de Número Primário - Prof. Joana Bender - Rio Grande do Sul.
3. Método Dedutivo - Prof. Ceres Marques Morais -Rio de Janeiro.

4. a) Um Método para se obter a Regra de Cramer
   b) Planejamento de um Curso de Geometria com Base em Noções Vetoriais - Prof. Antonio Rodrigues - Rio Grande do Sul.
5. Programa Experimental para as duas Primeiras Séries Ginasiais - Prof. Osny Dacól - Paraná.
6. Determinantes com base numa Definição Recorrente - Prof. Antonio Espada Filho - São Paulo
7. Uma Experiência de Geometria no Ginásio - Prof.Lucília Bechara - São Paulo.
8. Verificação de Aprendizagem - Prof. Genésio C.Freitas - Paraná.
9. Curso de Atualização de Professôres - Prof. Osny Dacol - Paraná.
10. Indução e Intuição - Prof. Luiz Oswaldo T.da Silva Rio de Janeiro.
11. Limites - Prof. Aristides Camargos Barreto - Minas Gerais.
12. Teoria das Rotações - Antônio Marmo - S.Paulo.
13. Uma Experiência na 1ª Série Ginasial - Prof. Martha S.Dantas - Bahia.
14. Um Método Numérico de Extração da Raiz Quadrada - Prof. Luiz Barco - São Paulo.
15. Interpretação dos Textos do S.M.S.G. - Prof. Lafayette de Morais - São Paulo.

O resumo de algumas comunicações consta na página 137.

7. Recursos Áudio-Visuais

1. Foram exibidos os seguintes filmes e dispositivos, sob a responsabilidade do Prof. Kleber Cruz Marques, diretor do Instituto Central de Matemática da Universidade Federal da Paraíba:

a) Corpos Numéricos
b) Conceito de Função
c) Conjuntos e Relações
d) Gráficos

2. Foi realizada uma exposição permanente de material didático para o ensino moderno de Matemática sob a responsabilidade do Prof. Antonio Arnot Crespo, do Instituto de Educação "Manoel Bento da Cruz" de Araçatuba, São Paulo.

8. Assuntos Gerais: Fundação do Instituto Brasileiro de Lógica Matemática.

Com o objetivo de uniformizar os estudos de Lógica Matemática e Filosofia da Ciência, bem como para um posterior e amplo programa de pesquisas, foi criado oficialmente, durante o 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática o Instituto Brasileiro de Lógica Matemática e Filosofia da Ciência.

9. Atividades Sociais

Foram realizadas as seguintes atividades sociais:

dia 11 - 3ª feira - 20h
Exibição e Comentários sôbre o filme "São Paulo S/A", uma contribuição da Cinemateca Brasileira.

dia 12 - 4ª feira
Almôço homenagem aos professôres estrangeiros no Sítio do Limoeiro, oferecido pela Sra. Nelson Tartuce Jr., no Km80 da Via Dutra.

À tarde, visita ao Reator Nuclear e Computador Eletrônico do ITA bem como ao Tunel Aerodinâmico e às Instalações da Comissão Nacional de Atividades Espaciais.

À noite, no Clube dos Oficiais do CTA, reunião social dansante com cocktail oferecido pela Prefeitura Municipal de S.José dos Campos.

dia 13 - 5ª feira
Às 20h, no Auditório Geral, extraordinária exibição do Teatro Arena com a peça "Arena conta Zumbi". Esse espetáculo de arte constituiu uma colaboração da Secretaria do Govêrno do Estado de S.Paulo ao Congresso.

dia 14 - 6ª feira
Jantar de Congraçamento do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática oferecido pelo Excelentíssimo Senhor Prefeito de São José dos Campos, Dr. José Marcondes Pereira, na Cantina Bela Veneza - Via Dutra - com sorteio de brindes oferecidos por grandes indústrias do Vale do Paraiba.

10. Sede do Próximo Congresso

Foi eleita como sede do 6º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, o Estado da Paraíba, sendo seu coordenador geral o Prof. Kleber Cruz Marques da Universidade Federal da Paraíba.

II - SESSÃO DE ABERTURA

SESSÃO DE ENCERRAMENTO

Saudação aos Congressistas pelo Cel. Aviador Newton Vassalo da Silva, presidente da Mesa

Registro das principais atividades oficiais do Congresso

1. Sessão Solene Inaugural

A Sessão Solene Inaugural teve lugar no dia 10 de janeiro de 1966 às 20h, no Auditório do Centro Técnico de Aeronáutica, com a presença de 300 Congressistas, tendo a mesa diretora a seguinte composição:

Coronel Aviador Newton Vassalo da Silva, respondendo pela Diretoria Geral do C.T.A. e representando no ato o Brigadeiro Eduardo Gomes, Ministro da Aeronáutica;

Professor Charles Kunzi, magnífico Reitor do Instituto Tecnológico da Aeronáutica;

Professor Paulo Nathanael Pereira de Souza, representando no ato a Secretaria de Educação de São Paulo;

Professor Marshall Stone, Presidente do Comité Interamericano de Educação Matemática;

Professor George Papy, Presidente do Centro Belga de Pedagogia da Matemática;

Professor Hector Merklen, representando o PIMEC - Uruguai;

Professor Helmuth Völker do Setor de Matemática do Ministério de Educação da Argentina;

Professor Roberto Peixoto, coordenador geral do 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Rio de Janeiro) e representando no ato o Professor Gildásio Amado, Diretor do Ensino Secundário do Ministério de Educação e Cultura;

Professôra Martha Maria Souza Dantas, coordenadora do 1º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Salvador, Bahia);

Professor Jorge Barbosa, coordenador geral do 4º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Belém, Pará);

Professor Geraldo Cardoso, presidente da A.N.P.P.M. - de Niteroi;

Deputado Professor Raul Schwinden, Presidente da Comissão de Educação e Cultura da Assembléia Legislativa de São Paulo;

Professor Benedito Castrucci, Presidente do Consêlho Deliberativo do GEEM de São Paulo e representando no ato o Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo;

Professor Irineu Bicudo, orador oficial do GEEM, São Paulo;

Professor Omar Catunda, presidente do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal da Bahia;

Representante do Magnífico Reitor da Universidade São Paulo;

Representante do Magnífico Reitor da Universidade Mackenzie - São Paulo;

Representante do Magnífico Reitor da Pontifícia Universidade Católica, São Paulo;

Representante da Sociedade de Matemática de São Paulo;

Representante da Prefeitura Municipal e Câmara de Vereadores de S.José dos Campos;

Professor Osvaldo Sangiorgi, coordenador geral do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, que abriu a Sessão proferindo as seguintes palavras:

"Por delegação do plenário do 4º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática - que teve lugar na magnífica cidade de Belém - coube-nos a insigne honra de ser o Coordenador Geral do 5º Congresso que, neste instante, ganha luz neste extraordinário campus do Centro Técnico de Aeronáutica.

Esta é a razão - caríssimos colegas de todo o Brasil e ilustríssimos professôres estrangeiros, que nos honram com suas excelsas presenças - de eu vos estar agora falando na abertura dêste Conclave que, legìtimamente, representa a máxima assembléia consultiva de professôres secundários e universitários de Matemática do nosso país.

Desde 1955, quando da realização do 1º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, nascido do idealismo de nossos colegas baianos, onde se destaca a figura da Profa. Martha de Sousa Dantas, sua Secretária, ganhou o Brasil novas oportunidades para que em cada dois ou três anos, houvesse um encontro de âmbito nacional de seus professôres de Matemática, a fim de que os problemas pertinentes ao ensino da Matemática fossem discutidos amplamente, com maior profundidade, num país de dimensões continentais. Foram assim realizados, com êxito sempre crescente, os Congressos de Porto Alegre, coordenado pela Profa. Martha Blauth Menezes; do Rio de Janeiro, coordenado pelo Prof. Roberto Peixoto e o de Belém, em 1962, coordenado pelo Coronel Prof. Jorge Barbosa.

Eis-nos, enfim, na abertura do Congresso que São Paulo se ufana em ser sede, numa fase em que o progresso ultra-rápido de nossa civilização é impulsionado, em primeiro lugar pela extraordinária evolução da técnica. Ninguém desconhece que os homens de ciência sairam de seu isolamento e se encontraram. Sublime encontro êsse em que os homens de ciência dão curso a vida moderna de hoje onde, respeitada a liberdade intelectual de cada um, produzem em equipes, resultados que honram o racional.

Sendo a cultura, de um modo geral, função diretriz dos valores de cada época, eis a nossa época de super-ciência a desafiar os educadores - responsáveis diretos pela formação da juventude - a se inteirarem dos novos princípios que estruturam a ciência atual.

A introdução de conceitos axiomáticos na pesquisa Matemática e a reformulação da própria Matemática com o espírito conjuntista-bourbakista, aliada aos avançados resultados obtidos pelo Centro Internacional de Epistemologia Genética, dirigido pelo insigne psicologista Jean Piaget, suscitaram complexos problemas pedagógicos com relação ao conteúdo da Matemática a ser ensinado às crianças da atual geração.

As rapidíssimas mudanças da ciência deixaram bem para trás a lenta evolução dos nossos clássicos sistemas educativos. Assim, na medida que um mundo nôvo luta para nascer, estão os educadores - e primordialmente os professôres de Matemática - intimados a realizarem um esfôrço decisivo para elevar a educação científica que possuem ao nível dos nossos tempos, orientando-a o melhor possível para um futuro bem diferente daquilo que lhes era familiar no passado.

Assim, por exemplo, a criança de hoje não se contenta mais em saber que uma das provas da "redondeza" da Terra é obtida observando o afastamento de um navio do porto e fixando-se no desaparecimento de seu mastro, porque já está habituado pelos jornais a ver uma prova muito mais contundente: a fotografia tirada por um astronauta que gira em torno da Terra!

Porisso, prezadíssimos Congressistas, a mecânica dêste 5º Congresso fará o possível para se adatar às exigências dos novos tempos de ciência em que vivemos, a fim de que seus frutos sejam saboreados, com prazer, pelos jovens de hoje.

O temário do Congresso: "Matemática Moderna

na Escola Secundária; articulações com o Ensino Primário e com o Ensino Universitário", aparentemente restrito, visa a dar aos nossos trabalhos maior concentração de estudos, bem como atender com ênfase aos reclamos de estudos encetados em Congressos anteriores. Estaremos, dessa maneira, fundamentalmente de acôrdo, com a realidade que participa atualmente de todos os Congressos Internacionais de Ensino da Matemática, onde a concepção básica da rainha das ciências é lastreada nos progressos da <u>nova Lógica</u> e a sua caracterização é feita por sistemas que possuem determinadas <u>estruturas</u>.

Parece até paradoxal o fato de que, quanto mais a Matemática é elevada a um tão grande grau de abstração nos centros de pesquisa, as suas aplicações, em todos os domínios, tenham se multiplicado cada vez mais e se proliferado de maneira tão extraordinária em todos os campos da atividade humana, que um nôvo mundo de pensamentos e de aplicações fica aberto para todos nós!

Longe de ser paradoxal, essa soberba conjunção de correntes aparentemente opostas em seu desenvolvimento, pode ser considerada justamente como o sinal evidente de uma verdade essencial acêrca da Matemática a ser ensinada aos nossos alunos.

Companheiros congressistas:
permiti que encerremos estas considerações, trazendo para esta magna Assembléia o espírito das palavras proferidas pelo eminente Prof. Papaioannou, no discurso de abertura da <u>Reunião Internacional de Novos Métodos do Ensino da Matemática</u>, realizada em Atenas, em 1963 da qual participaram eminentes matemáticos:

> SEJAM BEM VINDOS À NOSSA PÁTRIA GRÉCIA QUE É TAMBÉM A VOSSA PÁTRIA E A PÁTRIA DE TODOS OS MATEMÁTICOS DO MUNDO, POIS FOI AQUI QUE ELA FLORESCEU PELA PRIMEIRA VEZ!

Estas palavras, acreditamos, podem ser perfeitamente parafraseadas, ajustando-se ao moderno campus do C.T.A., já preparado para iniciar o trabalho com novos esquemas, assim como o milagroso palco científico que foi a antiga Grécia, no fundamentar a Matemática:

SEJAM BEM-VINDOS AO NOSSO CAMPUS, QUE TAMBÉM É VOSSO, COMO O É DE TODOS OS PROFESSÔRES QUE EMPENHADOS ESTEJAM EM MANTER FLORESCENTE E ATUALIZADA A MATEMÁTICA NO BRASIL !

A seguir usou da palavra o Coronel Jorge Barbosa, Coordenador do 4 Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado em julho de 1962 no Pará, que resumiu as atividades daquele Conclave, destacando a iniciação do estudo das teses sôbre Matemática Moderna na época e a colaboração do GEEM de São Paulo nesse sentido.

O Professor Irineu Bicudo brindou os Congressistas, em nome do GEEM, com a seguinte saudação:

Saudação aos Congressistas

Congressistas!
Vós sois a coragem, a fé, o ideal!
Sois barricada na luta contra o mal
Da estagnação!
Sois barco sempre a navegar,
Flâmula e bandeira do ensino
E porisso o GEEM vos saúda.
Vossos ouvidos ouviram nosso canto de alerta
Soando a reunir
E, habituados às doces vozes, atenderam.
No meio das férias,
Largastes as férias no meio.
Deixastes a pesca, a caça,
O contato suave da areia,
A salgada alegria do mar.

Palavras do Prof. Hector Merklen, representando o Programa Interamericano para o Desenvolvimento do Ensino da Matemática (PIMEC).

Deixastes vossas terras,
O quente confôrto de casa,
As horas que são da família
E viestes aqui estudar
A melhora do ensino.
Sois assim a confiança!
E porisso o GEEM vos saúda.
O GEEM vos saúda por êsse gesto,
Gesto que é abandono ao descanso,
Que é esperança ressurgida,
Que é fogo sempre a arder,
Que é carinho e amor,
Que é ninho e é paz,
Gesto que são mãos espalmadas que se dão
E é flor aberta no coração.

Usaram ainda da palavra: o prof. Raul Schwinden, saudando em nome da Assembléia do Estado de São Paulo o 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática e augurando votos para completo êxito no seu desenrolar; os professôres Geraldo Cardoso e Martha Sousa Dantas, em nome dos Congressistas e os professôres Marshall Stone, Hector Merklen e George Papy que trouxeram de seus países e das entidades internacionais que representam a saudação aos congressistas e votos de êxito para o conclave a ser iniciado.

2. Sessão de Encerramento

Às 11h do dia 15 de janeiro de 1966, no Auditório do C.T.A. realizou-se a Sessão de Encerramento do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, compondo a mesa o Coronel Aviador Newton Vassalo da Silva, o magnífico Reitor do ITA, Professor Charles Kunzi, professor Benedito Castrucci do GEEM de S.Paulo e o prof. Osvaldo Sangiorgi, Coordenador Geral.

A cerimônia foi aberta pelo Coronel Vassalo que cumprimentou os responsáveis pela realização do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática todo êle efetuado em alto nível e congratulou-se em nome do C.T.A. com todos os participantes do conclave.

O Professor Castrucci fêz um resumo de tôdas as atividades vividas intensamente durante a semana, ressaltando alguns resultados apresentados pelas diversas Comissões e destacando a brilhante participação de professôres estrangeiros que pela primeira vez colaboraram num Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática.

Em nome de Associação Nacional de Professôres e Pesquisadores de Matemática (ANPPM) de Niteroi usou da palavra a Professora Doris Ferraz de Aragon que ressaltou alguns aspectos positivos do Congresso e a importância que tem para reuniões educacionais dessa espécie a existência de Grupos de Estudos, por proporcionarem ótimas concentrações de valores.

Por votação realizada em plenário e conduzida pelo Prof. Jairo Bezerra, foi eleita para nova sede do próximo Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática a cidade de João Pessoa, no Estado da Paraíba, tendo sido nomeado seu coordenador geral o Prof. Kleber Cruz Marques, diretor do Instituto de Matemática da Universidade de Paraíba.

A seguir, em nome dos Congressistas usaram da palavra:

o Professor Roberto Peixoto, da Guanabara, que congratulou-se com os responsáveis pelo êxito do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, que com a chancela de São Paulo, dava excelente prosseguimento aos Congressos já realizados em Salvador, Pôrto Alegre, Rio de Janeiro e Belém;

a Professôra Sylvia Gonçalves Bittencourt B.Rosas, do Estado do Rio de Janeiro, que fêz com emoção a seguinte saudação-despedida:

Saudação aos congressistas pelo deputado Prof. Raul Schiwden, da Assembléia Legislativa do Estado de São Paulo e presidente da Associação dos Professôres do Ensino Secundário e Normal do Estado de São Paulo (APESNOESP)

Professôres paulistas!

Nós somos a coragem, a fé, o ideal
Vós sois a origem da coragem, a grandeza da fé, o fa-
rol do ideal
Somos barricada na luta contra o mal
Da estagnação!
Sois a fortaleza inexpugnável, que ao bem confere aval,
De coração!
Somos barco a navegar,
Sois bússola a nortear.
E por serdes alma e corpo da ciência,
Louvamos, agradecidos, tal vivência.
Ouvimos vosso canto de alerta,
Soando a reunir,
Pelo entusiasmo que desperta
Em tarefa hercúlea de unir.
E, se, habituados a doces vozes, atendemos,
Foi por tanta atenção que merecemos,
No meio das férias,
Largastes, também, as férias no meio
Deixámos a pesca, a caça,
Sentimos, porém, fibra de raça
Deixamos o contato suave da areia,
A salgada alegria do mar
Tocastes, em nossa vida, na veia
O clarim do despertar.
Deixamos nossas terras,
O quente confôrto de casa,
Mas ganhámos em grandes ternas
Para audazes vôos, doirada asa.
As horas que são da família
Trocaram-se por cálido carinho.
Vimos, sim, aqui estudar
A melhora do ensino
Como veloz e esperto passarinho
Vimos aprender convosco a melhorar
A visão de nosso tino.
Somos a confiança!
Sois a esperança!

Agradecemos ao GEEM a saudação,
OASIS na profissão
Saudação que é amor ao valor
Que é certeza já vivida
No raiar do alvorecer
Que é sentença altruista
Que é lema de civismo
Que é filosofia congressista.
Em nosso firme apêrto de mão,
Como raro simbolismo,
É vossa, a flôr viçosa
Que se nos abriu no coração!
A êste GEEM varonil,
A gratidão do Brasil!

Encerrou os trabalhos o Professor Osvaldo Sangiorgi, que destacou inicialmente a extraordinária colaboração recebida pelo C.T.A. na preparação e efetivação do 5º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática em todos os setores que caracterizam o complexo de um Congresso daquela Natureza. Ao seu Diretor Geral, Coronel Vassalo, bem como a sua brilhante equipe de Relações Públicas, comandada pelo Dr. Montenegro foi feito um agradecimento especial por tôdas as atenções recebidas. A seguir foi enaltecida a eficiente participação dos Delegados de outros Estados e a incansável presteza de todos os companheiros do GEEM, sem os quais não seria possível atingir o alto nível conseguido pelo Congresso, que constitui, sem dúvida na maior Assembléia de Professôres de Matemática do país.

Finalmente foram exortados os congressistas pelo brilhantismo que souberam dar a tôdas Sessões do Congresso e cujos resultados, serão desfrutados a curto prazo, por todos os estudantes do país que já passam a ver a Matemática com o aspecto atual que o mundo moderno impôs.

III - RESUMO DAS SESSÕES DE ESTUDOS - CURSOS

RESUMO DOS CURSOS

1. Teoria dos Conjuntos

Professor Benedito Castrucci

1. Conjuntos, conceito e notação. Subconjuntos. Conjunto das partes. Conjuntos especiais.
2. Operações entre conjuntos: reunião, intersecção, diferença. Complementação. Diagramas. Propriedades das operações.
3. Produto Cartesiano. Relações: conceitos, propriedades. Composição.
4. Aplicações: conceito. Tipos de aplicações.
5. Operações: conceito, propriedades. Principais estruturas.

2. Lógica Matemática

Professor Osvaldo Sangiorgi

1. Introdução ao cálculo proposicional. Proposição. Designação. Função Proposicional.
2. Operações e símbolos lógicos: negação, conectivos e quantificadores.
3. Táboa verdade. Tautologia.
4. Novos símbolos lógicos: condicional e bicondicional.
5. Relações lógicas: implicação e equivalência. Propriedades.
6. Aplicação à geometria do curso secundário.

6. Aplicação à geometria do curso secundário.
7. Equivalências fundamentais.
8. Outras relações lógicas: proposições independentes, inconsistentes, sub-contrárias e contraditórias.

3. Matemática Aplicada
Professor Ruy Madsen Barbosa

1. Estudo dos grafos: definição, aplicações. Associação de matrizes aos grafos. Relações e suas propriedades.
2. Programação linear. Aspectos didáticos. Problemas das inequações lineares e algumas aplicações. Programação linear a duas variáveis.
3. Conjuntos convexos. Alguns resultados. Exemplos.

4. Tratamento Moderno da Geometria Analítica
Professor Antonio Rodrigues

1. Noções sôbre espaços vetoriais; exemplos. Produto escalar. Espaços euclidianos tridimensionais; exemplos. Espaços afins.
2. Ensino da geometria espacial a partir das noções de ponto, número real e vetor. Propriedades de paralelismo e perpendicularismo. Alguns problemas geométricos; equações de uma reta e de um plano, distâncias.
3. Transformações lineares de um espaço vetorial e correspondentes transformações afins, em um espaço afim. Transformação de coordenadas. Algumas transformações importantes: transformações ortogonais, transformações isométricas, semelhanças.

5. Introdução à Álgebra Moderna
Professor Irineu Bicudo

O objetivo do Curso de Álgebra Moderna era fixar uma linguagem básica para a Matemática. Tendo isso em vista, foram desenvolvidos os seguintes tópicos:

1. Conjuntos: operações entre conjuntos
2. Relações: relações de equivalência e de ordem
3. Funções
4. Estruturas algébricas: (a) Monóide, (b) Grupos, (c) Aneis, (d) Corpos.

6. Geometria - Tratamento Moderno
Professor Omar Catunda

1. Representação dos números na reta, ordenação.
2. Soma de números reais. Vetores. Translação. Soma de vetores.
3. Simetria. Composição de simetrias. Composição de simetria com translação. Grupo das isometrias.
4. Homotetias. Composição de homotetia com translação.
5. Exercícios.

7. Introdução à Análise
Professor Luiz Mauro Rocha

1. Teoria dos números reais. Conceitos primitivos. Axiomas de adição e multiplicação, alguns teoremas. Axiomas de ordem. Axioma de continuidade.

2. Limite e Continuidade. Exemplos de limites. Limite de uma seqüência. Limite da soma, diferença, produto e quociente. Continuidade. Propriedades das funções contínuas. Funções ilimitadas. Seqüências infinitésimas. Definição de limite.
3. Funções logarítmicas e exponenciais. Logaritmo neperiano. Número e. Função exponencial. Propriedades. Função logarítmica e exponencial geral.
4. Integrais. Funções em escala. Integrais de funções mais gerais. Propriedades. Integrais como função do extremo superior. Dois teoremas fundamentais do cálculo.

8. Técnicas Dedutivas

Professor Leônidas Hegenberg

1. Introdução. Dedutibilidade. Argumentos válidos. Regras de inferência. Introdução de premissas e tautologias. Teorema fundamental.
2. Demonstração condicional. Demonstração por absurdo. Exemplos.

IV - RESUMO DE ALGUMAS AULAS - DEMONSTRAÇÃO

- Sistemas de Numeração - Camilo S. Rambaud
- Relações e Funções - Douglas Peres Bellomo
- Combinatória e Probabilidades - Ruy Madsen Barbosa
- Trabalho Dirigido no Ensino da Geometria - Scipione Di Pierro Netto

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Camilo Antonio Solanas Rambaud

A grande missão da Matemática Moderna, especialmente quando começam a se abrir as novas inteligências, isto é, durante o curso primário ou primeiras séries do curso secundário é fazer como que o aluno perca o medo tradicional que se apoderava do mesmo ao simples pronunciar a palavra matemática. Deve, pelo contrário, desde o começo sentir-se atraído por esta ciência sublime e perceber seu progresso, despertando no seu íntimo o desêjo de criar algo nôvo. As nossas aulas devem, portanto, ser ministradas de modo a propiciar aos nossos alunos elementos suficientes de compreensão e de trabalho com os quais os mesmos possam conhecer a importância da matéria, sua aplicação prática e os processos que, despertando o seu interêsse, virão tornar agradáveis e de lazer as horas dedicadas ao seu estudo.

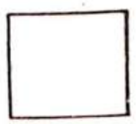
Não irei nesta aula esgotar um tema que poderia ocupar muitas horas, examinando diferentes processos de escritura, tábuas operatórias, operações etc... O meu tema é:

Sistemas de numeração

Para iniciar suponhamos que fomos convidados para uma festa de casamento a ser dada numa fazenda qualquer, que nos não conhecemos. O anfitrião arrumou a casa esperando o nosso comparecimento. Mandou preparar os galpões, inspecionou a disposição das mesas, observou a colocação das travessas e agradou-se com a apresentação dada aos doces.

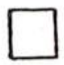
Vou representar no quadro negro,

cada galpão por uma figura assim:



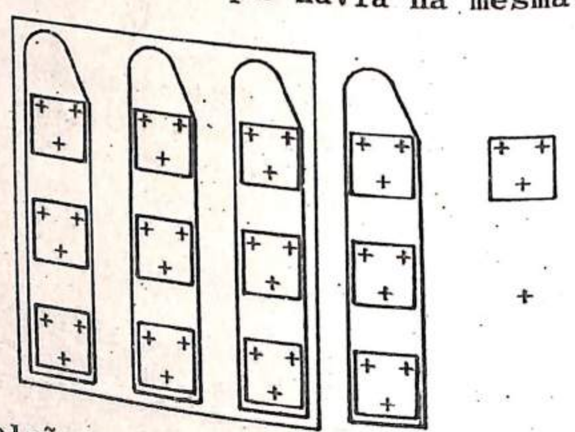
cada mesa por uma figura assim:

cada travessa por uma figura assim:



e cada doce por uma figura assim: +

Agora vou fazer um desenho da fazenda e perguntar a qualquer um o que havia na mesma.



Quantos galpões havia na fazenda? ....

Quantas mesas tinha cada galpão? ....

Havia alguma mesa fora dos galpões? ....quantas?....

Quantas travessas havia em cada mesa? ....

Havia alguma travessa fora das mesas?....quantas?....

Quantos doces havia em cada travessa? ....

Havia algum doce fora das travessas?.... quantos?....

Podemos dar uma representação matemática às respostas dadas a essas perguntas.

	G.	Mf.	Tf.	Df.
Havia um galpão	1			
Havia uma mesa fora dos galpões..		1		
Havia uma travessa fora das mesas.			1	
Havia um doce fora das travessas.				1
E, em cada galpão havia três mesas e em cada mesa três travessas e em cada travessa três doces, vou escrever a palavra três assim	1	1	1	$1_{três}$

$$1111_{três}$$

<u>Outros exemplos</u>

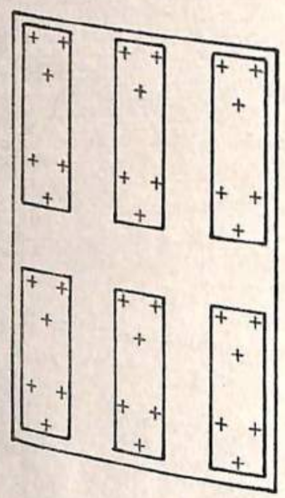
	G.	Mf.	Tf.	Df.	
1º)	2	1	0	2	$2102_{três}$
2º)	4	3	2	3	4323_{cinco}
3º)	3	2	1	2	3212_{quatro}

No primeiro exemplo havia dois galpões, uma mesa fora dos galpões, não havia travessas fora das mesas e havia dois doces fora das travessas. Em cada galpão três mesas, em cada mesa três travessas e em cada travessa três doces.

No segundo exemplo havia quatro galpões, três mesas fora dos galpões, duas travessas fora das mesas e três doces fora das travessas. Em cada galpão cinco mesas, em cada mesa cinco travessas e em cada travessa cinco doces.

No terceiro exemplo havia três galpões, duas mesas fora dos galpões, uma travessa fora das mesas e dois doces fora das travessas. Em cada galpão havia quatro mesas, em cada mesa quatro travessas e em cada travessa quatro doces.

Nossa fazenda agora não tem galpão. Nela encontramos o seguinte:



	M.	Tf.	Df.
Quantas mesas havia na fazenda?.....	1		
Quantas travessas fora das mesas? ..		2	
Quantos doces fora das travessas? ..			3
Qual a palavra que deve ser usada para indicar o número de travessas de cada mesa e o número de doces de cada travessa?	1	2	3_{seis}

O que nos estamos fazendo é entrar em contato com diferentes sistemas de contar, chamados sistemas de numeração. A palavra escrita por extenso se chama base do sistema e é tão importante que ao agrupar os doces, as travessas e as mesas, ela esteve sempre presente. Claro que na aritmética, nos já não vamos encontrar doces, travessas e mesas. Tècnicamente só falamos em ordens e começamos enumerando cada ordem pela direita, assim:

quarta ordem terceira ordem segunda ordem primeira ordem

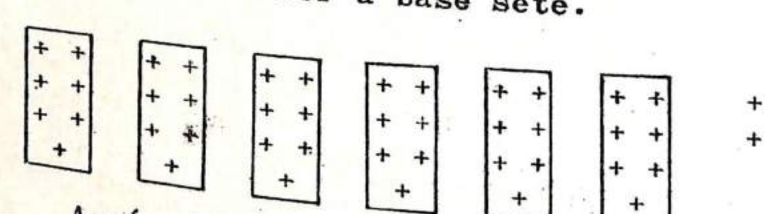
Podemos usar qualquer número como base e contar qualquer quantia em bases diferentes. Nós estamos acostumados mais freqüentemente ao sistema decimal, assim chamado por ser a sua base o número dez.

Seja o número:

5384

O fato de não escrever à sua direita qualquer palavra indica que estamos usando a base decimal; isto é a base do sistema é dez. Em cada galpão há dez mesas, em cada mesa dez travessas e em cada travessa dez doces. Nesse número estão representadas quatro unidades de primeira ordem, oito unidades de segunda ordem, três unidades de terceira ordem, cinco unidades de quarta ordem. Cinco galpões, três mesas fora dos galpões, oito travessas fora das mesas e quatro doces fora das travessas.

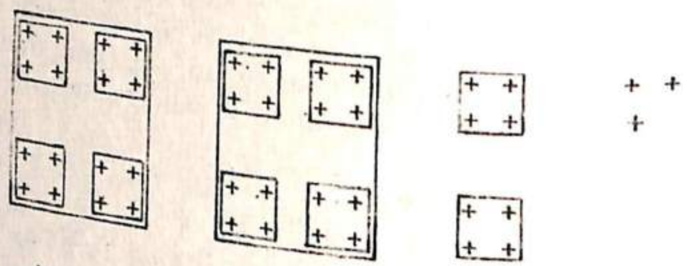
Nisto consistem os sistemas de numeração. Dado um conjunto de um número qualquer de elementos, suponhamos quarenta e três elementos, contados pelo processo tradicional natural, e representemos cada elemento por uma cruz. Estabelecida uma base para o sistema, digamos para o exemplo base sete, agruparemos o total dos elementos de tantos em tantos quantas sejam as unidades indicadas pela base. No nosso caso de sete em sete, visto ser a base sete.



Aquí só temos dois desenhos diferentes, isto é duas ordens. Voltando ao caso da fazenda: travessas e doces:

61_{sete}

Seja o mesmo número de elementos e a base escolhida quatro:



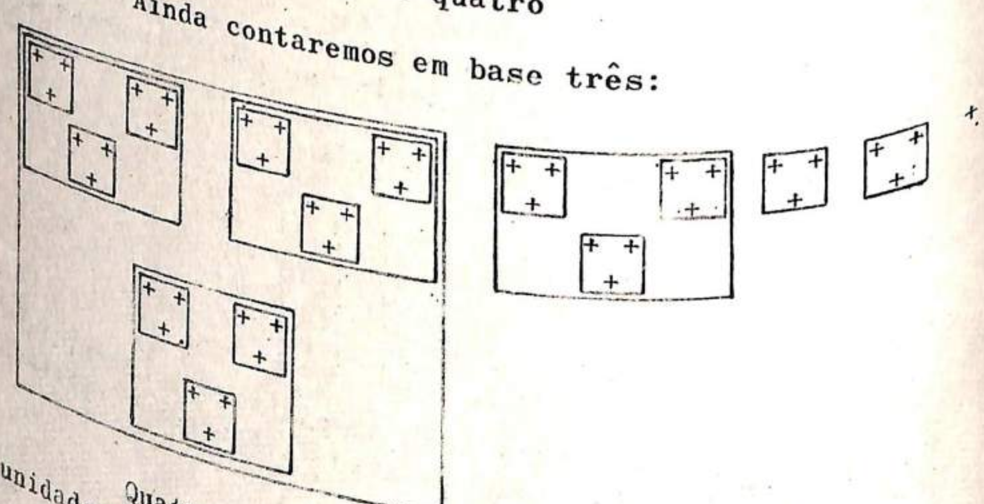
Agora temos três desenhos diferentes: unidades de primeira ordem de segunda ordem e de terceira ordem. O número correspondente é:

$$223_{quatro}$$

Duas unidades de terceira ordem	duas mesas
Duas unidades de segunda ordem	duas travessas fora das mesas
Três unidades de primeira ordem	três doces fora das travessas

Base quatro

Ainda contaremos em base três:



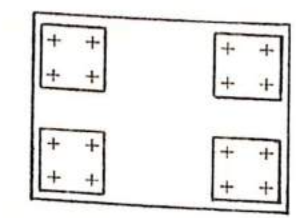
Quatro desenhos diferentes. Quatro ordens de unidades. O número é:

$$1121_{três}$$

Claro que pode acontecer o seguinte:

Um único desenho e no entanto são três m ordens. Esta dificuldade com a prática será solucionada fàcilmente. Há uma única mesa com quatro travessas e fora da mesa não sobraram travessas, nem fora das travessas sobraram doces.

O número é: 100_{quatro}



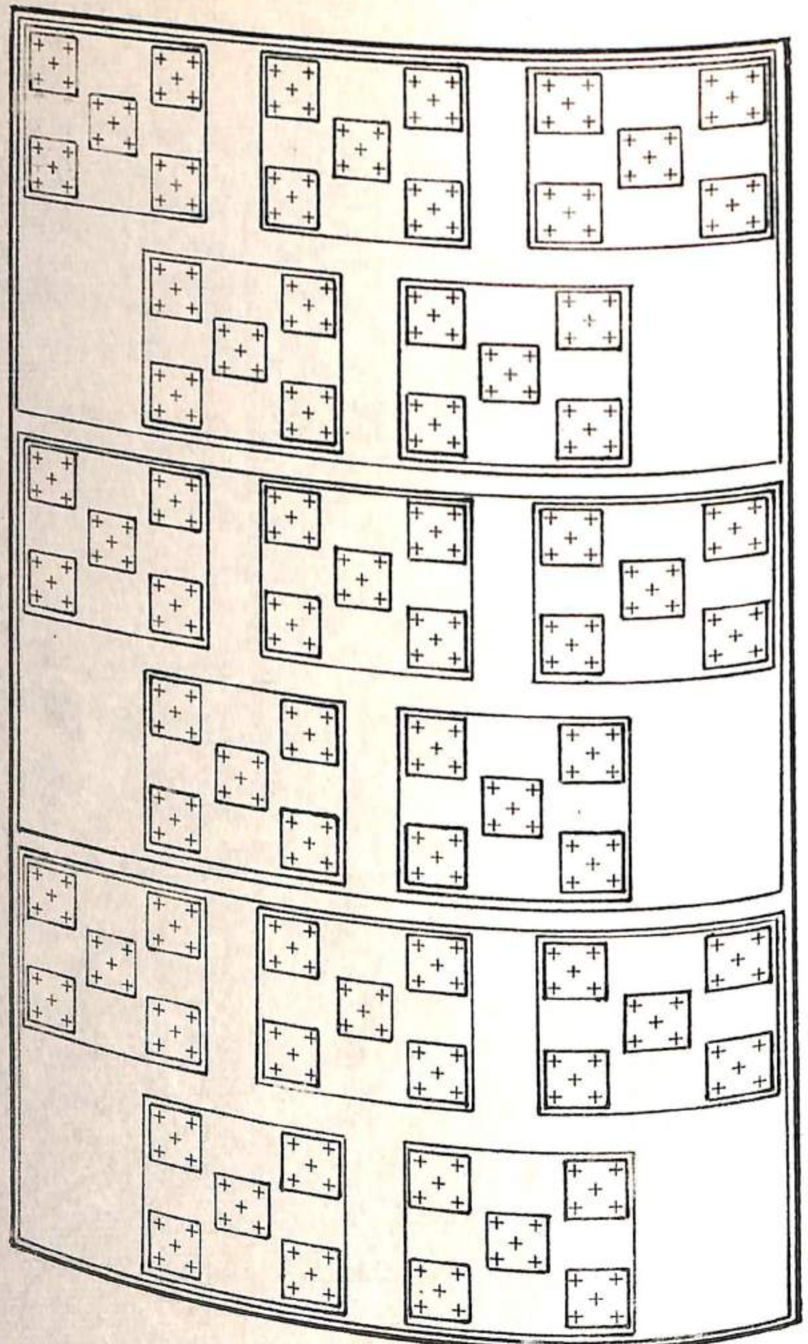
Quero chamar a atenção ainda para um fato interessante. Foram até aqui escritos os números:

$1111_{três}$	123_{seis}	$1121_{três}$
$2102_{três}$	5384	100_{quatro}
4323_{cinco}	61_{sete}	
3212_{quatro}	223_{quatro}	

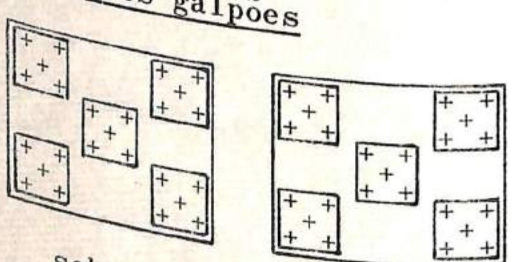
O algarismo que indica a base do sistema nunca figura no número. Será, portanto, errado escrever:

$$3254_{cinco}$$

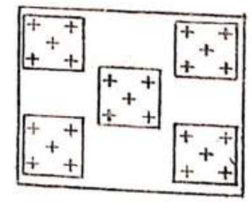
O êrro cometido seria da seguinte espécie:



três galpões



sobraram duas mesas



sobraram cinco travessas;
porém cinco travessas formam mais uma mesa. Logo sobrou mais uma mesa. Não sobraram travessas e

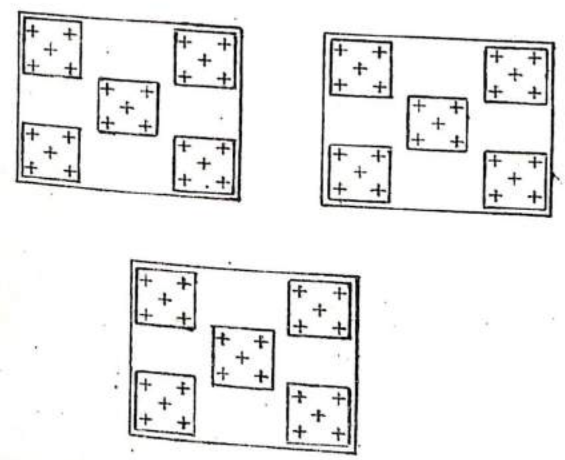
+ +
+ +

sobraram quatro doces.

O certo seria:

3304_{cinco}

três galpões



sobraram três mesas, não sobraram travessas e

+ +
+ +

sobraram quatro doces.

Agora é que podemos compreender o verdadeiro
sentido do que seja base de um sistema de numeração.
Havíamos escrito

3254_{cinco}

Sendo, porém a base do sistema, cinco, isto quer di-
zer que cinco unidades de qualquer ordem formam uma
unidade da ordem imediata superior. Então, cinco uni-
dades de segunda ordem formam mais uma unidade de ter
ceira ordem e assim onde (erradamente) estava escrito
dois e cinco, passamos a escrever três e zero

errado

3254_{cinco}

certo

3304_{cinco}

Se eu escrevesse:

2384_{seis}

Sendo a base do sistema, seis, seis unidades de qual-
quer ordem formam uma unidade da ordem imediata su-
perior, então, devo tirar seis unidades do oito que
passará a ser dois e juntar uma unidade ao três, que
passará a ser quatro.

errado

2384_{seis}

certo

2424_{seis}

Quando a mamãe vae à feira e pede três dú-
zias e meia de laranjas, o feirante conta:

uma, duas, ...doze
uma, duas, ...doze
uma, duas, ...doze
uma, duas, ...seis

A conta do feirante é:

36_{doze}

Daqui a um mês e oito dias estaremos no car
naval. Estamos contando:

18_{trinta}

É muito fácil contar em qualquer base, com
os conhecimentos que temos sôbre numeração decimal.
Basta eliminar do vocabulário na contagem a palavra
do número que dá nome à base e tôdas as que a ela se
referem. Por exemplo contando em base cinco, elimina
remos, cinco, cinquenta, quinhentos etc. Passaremos
da palavra anterior a elas à unidade da ordem seguin-
te. Assim, para contar em base quatro, faremos como
segue:

Um, dois, três, dez, onze, doze, treze,
vinte .... base quatro

Em base sete:

Um dois, três, quatro, cinco, seis, dez, onze,
doze, treze, quatorze,quinze, dezesseis,
vinte .... base sete

Neste momento aparece uma questão interessan
te. Podemos usar ao contar em qualquer base as pala-
vras dez, onze etc. ou precisaríamos dizer um, zero
(base...), um, um(base...). Creio que isto só viria a
dificultar a aprendisagem.

Acho que poderíamos ser transigentes neste
ponto. Quando falamos dezenove, não se segue que a
nossa intenção seja a de indicar necessàriamente uma
dezena e nove unidades. Podemos também ter em mente
uma unidade de segunda ordem e nove unidades de pri
meira ordem. Do contrário não poderíamos admitir no
vocabulário a palavra treze. Teríamos que substituí-
la por dez e três (na contagem decimal). Podemos, as-
sim, dar como interpretação que as palavras da numera
ção possam se referir perfeitamente às ordens de uni-
dades. Vinte e sete, pode significar duas unidades
de segunda ordem e sete unidades de primeira ordem.
Desta maneira generalizando, torna-se muito mais fá-
cil contar em qualquer base, sem necessidade de ter-
mos que limitar o vocabulário apenas para a contagem

decimal e usar êsse processo complicado e escabroso de citação de números: dois, sete, base... Para mim é muito mais simples, inteligível e pedagógico universal dizer:

trezentos e vinte e quatro em base seis, do que dizer: três, dois, quatro em base seis. O motivo é simplesmente o costume que temos de falar os números seguidos e não parcelados individualmente.

Aqui fica para vocês campo farto de trabalho. Eu disse pouco do muito que ainda poderia ser dito sôbre êste tema da numeração.

RELAÇÕES E FUNÇÕES

Douglas Peres Bellomo

Preliminares

A convite do G.E.E.M. preparou-se uma aula-demonstração sôbre Relações e Funções, à semelhança do que se tem desenvolvido no curso colegial em Guaratinguetá.

A aula foi ministrada a alunos do 1º Científico com iniciação em Teoria dos Conjuntos.

1. Conceito de Relação

Foram, de início, escolhidas duas situações com a finalidade de didatizar a explicação:

a) um conjunto de pessoas que viaja pela Central do Brasil com destino a um conjunto de cidade do Vale do Paraíba.

b) um conjunto de números primos e um outro conjunto onde alguns são múltiplos dos elementos do primeiro conjunto.

Em a) $P = \{\text{Paula, José, Antônio, Mário}\}$

$C = \{\text{Guaratinguetá, Taubaté, São José}\}$

Em b) $P_i = \{2,3,5,13\}$

$M = \{15,18,20,49\}$

Juntamente com os alunos fez-se uma lista de proposições para as duas situações, como as abaixo:

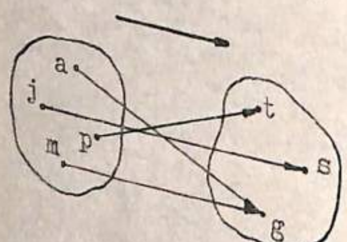
"Paula se destina à Guaratinguetá" e outras do tipo "15 é múltiplo de 3".

Utilizou-se estas sentenças para introduzir a simbologia conveniente a fim de abreviar a linguagem matemática e dar, consequentemente, maior clareza e potencialidade à mesma.

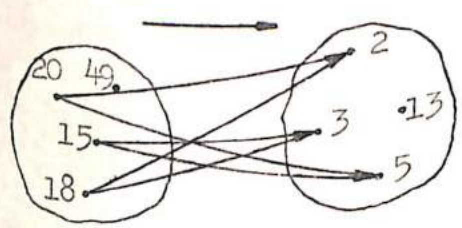
O uso da linguagem simbólica facilitou a introdução das representações em diagrama, em quadro de dupla entrada ou por gráfico cartesiano

a) diagramas

x se destina a y



b) x é múltiplo de y

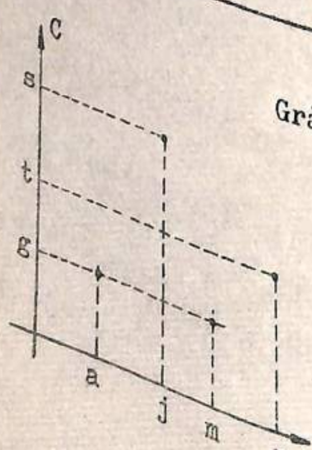


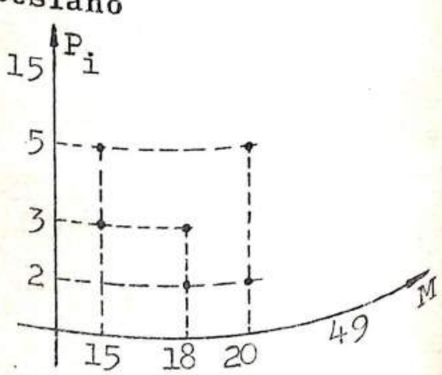
Quadro de dupla entrada

s		•		
t				•
g	•		•	
C / P	a	j	m	p

13				
5	•		•	
3	•	•		
2		•	•	
P_i / M	15	18	20	49

Gráfico cartesiano





A seguir introduziu-se a noção de sentenças abertas do tipo:

"x se destina a y" para a situação a) onde $x \in P$ e $y \in C$ e

"x é múltiplo de y" para a situação b) onde $x \in P_i$ e $y \in M$

Chamou-se atenção para o problema do par ordenado (x,y) e dos conjuntos de pares ordenados tais como

$S_1 = \{(a,g), (d,s), (p,t), (m,g)\}$

$S_2 = \{(20,2),(20,5),(15,3),(15,5),(18,2),(18,3)\}$

onde S_1 é o conjunto dos pares que traduz a situação a) através da relação "se destina a" e S_2 que traduz a situação b) através da relação "é múltiplo de"

Frizou-se que poderíamos construir conjuntos com mais elementos para as duas situações, bastando para isso, formar pares ordenados com todos os elementos do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo, obtendo-se desta forma os chamados produtos cartesianos:

$$P \times C \quad e \quad M \times P_i$$

Fàcilmente os alunos são levados a observar que

$$S_1 \subset P \times C$$
$$S_2 \subset M \times P_i$$

isto é, que S_1 e S_2 são subconjuntos respectivamente dos produtos cartesianos $P \times C$ e $M \times P_i$. Donde, a conceituação de relação como subconjunto de um determinado produto cartesiano. Esclarecemos o papel importantíssimo da sentença aberta que caracterizou essa relação.

Lembrou-se a possibilidade de se ter relação de A em A, dita, simplesmente, em A; Destacou-se a importância do <u>conceito de relação</u> na Matemática e em outros setôres de atividade científica.

Estudou-se com os alunos, a seguir, alguns exemplos que foram aproveitados para o uso da notação simbólica e da representação cartesiana.

2. <u>Função ou Aplicação</u>

Definiu-se a seguir função como caso particular de relação através de esquemas gráficos ressaltando neles:

1) Todo elemento $x \in A$ tem correspondente $y \in B$

2) O elemento de A que se corresponde com o elemento de B se corresponde com um único elemento de B.

Para finalizar, introduziu-se a denominação Função ou Aplicação preterindo-se para relação numérica o vocábulo <u>Função.</u>

Bibliografia

1. Elementos da Teoria dos Conjuntos
Prof. Benedito Castrucci - Série Professor, Nº 3, G.E.E.M. - S.P.

2. Um Programa Moderno de Matemática para o Ensino Secundário.
Série Professor, Nº 2 - G.E.E.M. - S.Paulo

3. Álgebra Moderna - Vol. I
Prof. L.H. Jacy Monteiro.

4. A Álgebra Moderna
Profs. Queysanne e A. Delachet.
Coleção "Saber Atual"

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

Ruy Madsen Barbosa

Preliminares

A convite da direção do G.E.E.M., preparamos uma sequência de aulas-demonstração sôbre Combinatória e Probabilidades, do ponto de vista moderno. Ministrou-se a primeira e expôs-se como desenvolver mais duas aulas. A sequência não tinha por finalidade dar a forma de se ministrar uma aula de combinatória ou probabilidades, mas da vantagem em se apresentar os dois tópicos simultâneamente.

Neste resumo daremos as linhas da primeira aula que versou sôbre <u>Árvores de Possibilidades</u>, e da segunda aula sôbre <u>Regras Básicas do Cálculo Combinatório e das Probabilidades</u>.

RESUMO DA AULA I

A. Árvores de Possibilidades

Considere a seguinte situação: Admita que existem 3 vias de locomoção da cidade de São Paulo a São José, e de São José a Caraguatatuba, só duas, abaixo discriminadas:

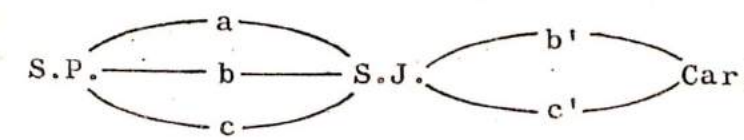
a via férrea
b via aérea
c rodovia asfaltada

b' via aérea
c' rodovia asfaltada

Temos, portanto, os conjuntos A e B de <u>possibilidades</u>:

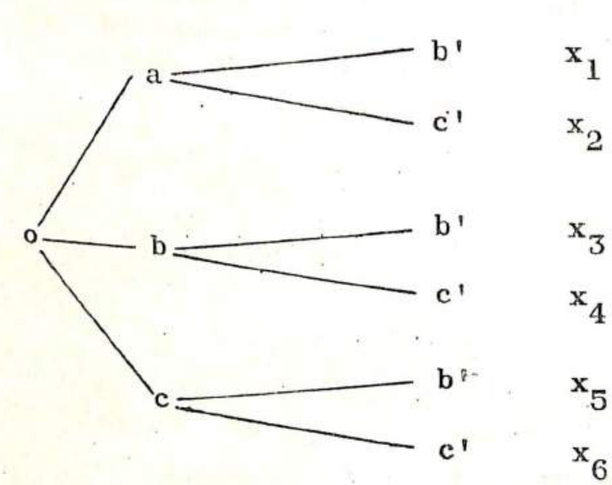
$A = \{a, b, c\}$ $B = \{b', c'\}$

que podem ser colocados no esquema abaixo:



Acompanhando o professor, modificar-se-ia o esquema para outra representação, no caso, mais conveniente, a da árvore de possibilidades:

1º estágio E_1 2º estágio E_2



onde os estágios correspondem a São Paulo, São José e Caraguatatuba.

Atendendo a explicações do professor, seriam aprendidas as noções de ramos, vias (ou cadeias), estágios, estados e secções da árvore, e responder-se-iam questões como: 1. quantas vias ou cadeias possui a árvore? (6). 2. qual o número de possibilidades para uma pessoa ir de São Paulo a Caraguatatuba passando por São José? (resposta igual a anterior). Quantos estágios possui essa árvore? (dois). E, contando o estágio inicial? Quantas secções possui? (três). Quantos estados possui o 1º estágio? (três). E, o segundo estágio?

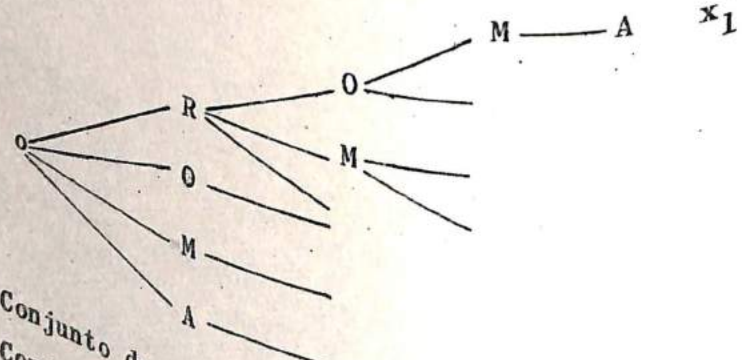
Para essa última questão observar-se-ia que os estados do segundo estágio dependem dos estados do primeiro estágio, de onde a idéia de condiciona - dos, da formação de pares ordenados na árvore; e, em outras, de énuplas ordenadas, onde poder-se-ia explo rar e rever o produto cartesiano:

$$A \times B = \{(a;b'),\ (a;c'), \ldots\} .$$

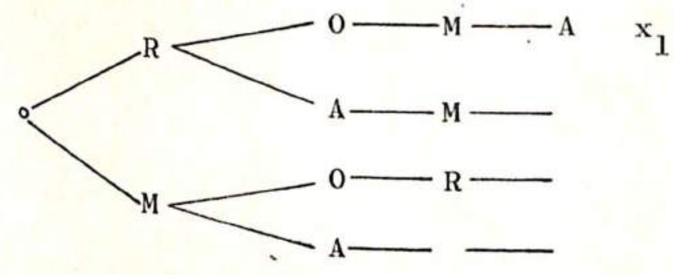
Nessa fase sugere-se exercícios explorató - rios para fixação da aprendizagem do recurso das ár- vores de possibilidades, com determinação do número de possibilidades por contagem direta do número de vias, como os seguintes:

a) Considere o conjunto de letras da palavra ROMA: {R, O, M, A}; determine-se: 1º) o número de anagramas que se pode formar, e, 2º) de anagramas fi cando alternadamente consoante e depois vogal:

1º). Complete:
N = 24



2º) Conjunto de consoantes: {R,M}
Conjunto de vogais: {O,A}
Complete:
N = 4



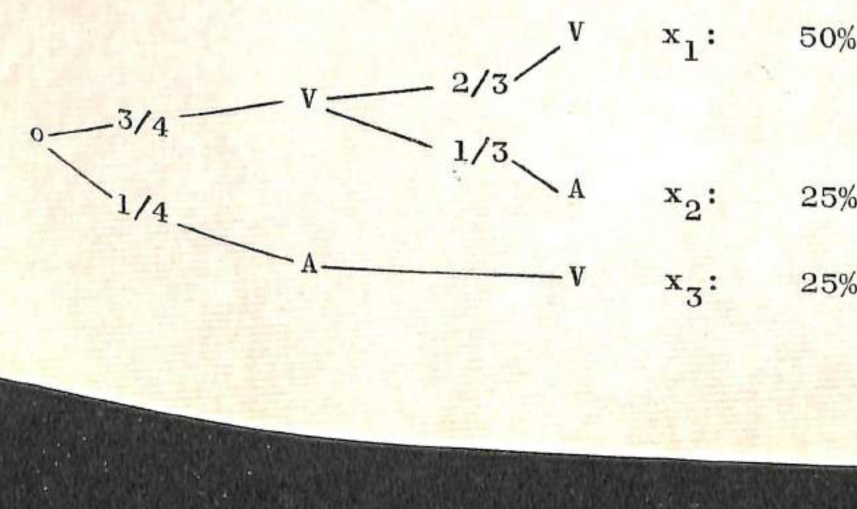
b) Uma urna possui duas bolas verdes, uma azul e uma branca; fazendo 3 retiradas sucessivas, quantas possibilidades existem: 1º) sem reposição da bola retirada? 2º) com reposição?

B. Árvores de Probabilidades

Aproveitando os exercícios das árvores de possibilidades, levar-se-ia os alunos a perceberem bem a distinção entre os conceitos de possibilidades e probabilidades; onde o segundo é um número, é mais uma medida comparativa das possibilidades.

Levar-se-ia o aluno a transformar uma árvore de possibilidades em árvore de probabilidades.

Exemplo: Considere uma urna com três bolas verdes e uma amarela, e procuremos as probabilidades para extrações sem reposição.



Por raciocínio, interpretando as probabilidades dos ramos, obtém-se que as probabilidades das vias são calculadas multiplicando-se as probabilidades dos ramos componentes.

Assim, para a cadeia x_1, poderíamos raciocinar: Sendo 3/4 a probabilidade da primeira bola extraída ser verde, e repetindo-se a experiência muitas vêzes, em 3/4 das vêzes a primeira bola seria verde, mas dêsse número de casos, 2/3 forneceriam a segunda bola também verde; isto é, 2/3 dos 3/4 dos casos dariam verde para ambas extrações, portanto, $2/3 \times 3/4 = 6/12 = 1/2$, ou em 50% dos casos.

Analogamente encontraríamos:

para a cadeia x_2: $3/4 \times 1/3 = 1/4$ ou 25%

para a cadeia x_3: $1/4 = 1/4 \times 1$ ou 25%

Seguir-se-iam outros exercícios com dados, bolas e moedas, variando o número de extrações, sem ou com reposição, quantidade ou côres das bolas, etc..

RESUMO DA AULA II

A. Regra do Produto da Combinatória

Recordar-se-ia o problema das vias de locomoção pelas três cidades, verificando-se que o número de possibilidades ou cadeias é obtido calculando-se

$$3 \times 2 = 6,$$

de onde a regra do produto:

"Se um estágio pode ser escolhido por m ramos e um estágio sucessivo por n ramos através de cada estado, ambos os estágios podem ser escolhidos num acontecimento composto por m x n cadeias".

ou, em têrmos de conjuntos:

"Se um conjunto A possui m elementos, e um conjunto B possui n elementos, então existem m x n pares ordenados do produto cartesiano A x B, isto é:

$$N(A \times B) = N(A) \times N(B)".$$

e, a conseqüente generalização.

Com êste recurso, vários exercícios poderiam ser feitos, como: 1) Uma firma de decoração possui cinco desenhos para poltronas, três para sofás, e dois para mesinhas. Quantas ternas pode organizar? (30). 2) Usando sòmente os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7, quantos números podemos formar: a) com dois algarismos? - (25). b) mas, sendo pares? (10). c) mas, sendo ímpares? (15). d) se dois algarismos, mas sem repetir? (20), etc..

B. Regra do Produto das Probabilidades

Nos exercícios das árvores já preparou-se terreno para a regra do produto, quando multiplica-se as probabilidades dos ramos de uma mesma cadeia.

Introduz-se a definição de probabilidade condicional:

$$P[A|B] = \frac{N(A \cap B)}{N(B)},$$

interpretando o condicionamento como mudança do universo para o evento B e do evento A para o evento $A \cap B$.

Transformando a expressão anterior, mostra-se a regra do produto:

$$P[A\cap B] = P[A|B] \, . \, P[B]$$

que para três será:

$$P[A\cap B\cap C] = P[A\cap(B\cap C)] = P[A|B\cap C] \, . \, P[B|C] \, . \, P[C]$$

Considere uma urna com 3 bolas vermelhas e uma amarela, e admita-as retiradas, mas com reposição da bola retirada; quais são as probabilidades de sair bola vermelha e amarela em cada retirada?

Tem-se: $P[V] = 3/4$, $P[A] = 1/4$, porque tem-se sempre a mesma situação.

Portanto, a probabilidade de sair vermelha, dado que saiu antes amarela, é ainda:

$$P[V|A] = 3/4$$

e, de sair amarela, dado que saiu antes vermelha é também ainda:

$$P[A|V] = 1/4$$

Conclue-se que $P[V|A] = P[V]$ e $P[A|V] = P[A]$

Essas questões servem para realçar que nesse problema não há dependência comoo tipo de bola que saiu antes, de onde a introdução do conceito de eventos estatisticamente independentes, e que a regra do produto nesse caso fica:

$$P[A\cap B] = P[A] \, . \, P[B]$$

> "A probabilidade da intersecção de eventos independentes é igual ao produto das probabilidades".

C. <u>Regra da Soma</u>

Com a ajuda de diagramas, ou mesmo pela definição de soma de dois números, obtém-se:

$$N(A\cup B) = N(A) + N(B)$$

> "Se um conjunto possui m elementos e um conjunto B possui n elementos, e se os conjuntos são disjuntos, então, o número (total) de elementos do conjunto união é m x n".

Idem, para conjuntos cruzados obtém-se:

$$\boxed{N(A\cup B) = N(A) + N(B) - N(A\cap B)}$$

Com essa regra far-se-ia alguns exercícios, que poderiam ser combinados com a regra do produto.

D. <u>Regra da Soma para Probabilidades</u>

Com a fórmula da soma da Combinatória, por divisão pelo número de elementos do universo $N(U)$, teríamos fàcilmente:

$$P[A\cup B] = P[A] + P[B] \quad \text{para} \quad A\cap B = \emptyset$$

e para três:

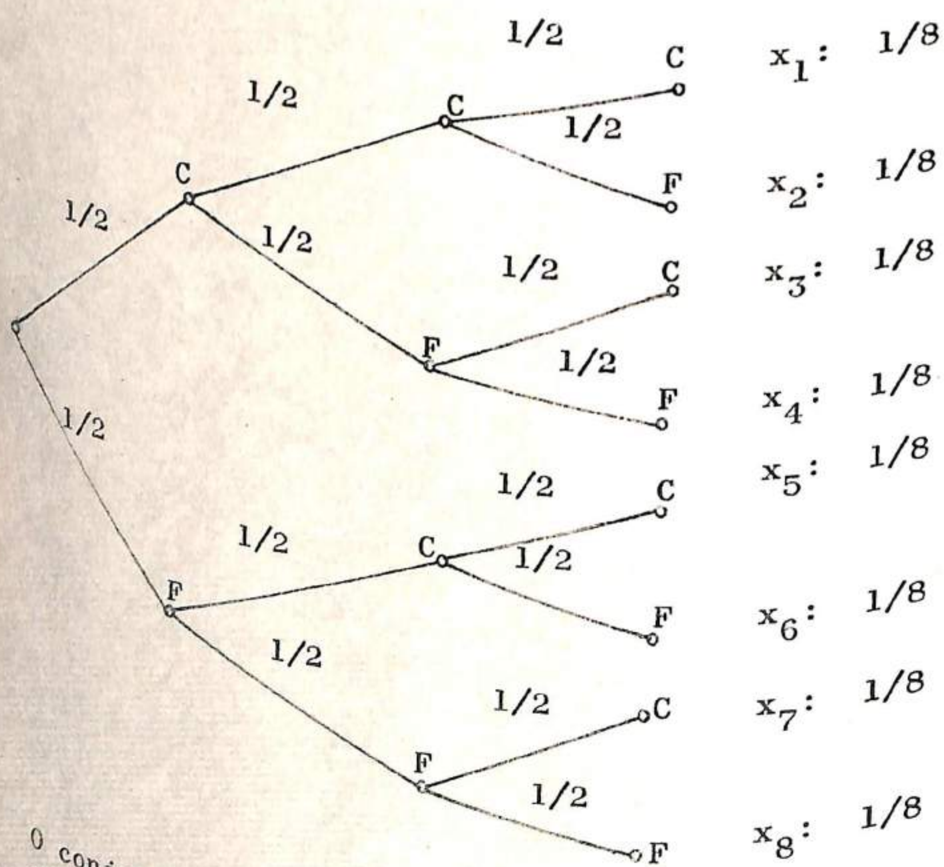
$$P[A\cup B\cup C] = P[A] + P[B] + P[C]$$

se forem disjuntos dois a dois, ou para o caso geral de dois eventos:

$$P[A\cup B] = P[A] + P[B] - P[A\cap B]$$

Novamente as árvores seriam, se quisessemos, auxiliares preciosos, assim, vejamos o seguinte problema:

No lançamento de uma moeda 3 vêzes, qual a probabilidade de sair uma face e duas coroas?



O conjunto de cadeias que interessa à questão é o conjunto:

$$\{x_2, x_3, x_5\}$$

e, pela regra da soma para probabilidades:

$$P\left[\{x_2, x_3, x_5\}\right] = P\left[\{x_2\}\right] + P\left[\{x_3\}\right] + P\left[\{x_5\}\right]$$

e, pela regra do produto das probabilidades (em cada cadeia):

$$P\left[\{x_2, x_3, x_5\}\right] = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8 \text{ ou } 37{,}5\%$$

<u>Bibliografia sugerida</u>:

1. BARBOSA, R.Madsen - Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória - (esgotado) - F.F.C.L. - Araraquara - [1963].
2. BARBOSA, R.Madsen - Combinatória e Probabilidades - G.E.E.M . - 1966.
3. JOHNSON, Lendsey, Slesnick, Bates - Modern Algebra Second Course - Wesley.
4. KEMENY, Mirkil, Snell and Tompson - Finite Mathematical Structures - Prentice Hall.
5. MAY, K. - Elements of Modern Mathematics - Wesley
6. VANCE, E. - Modern College Algebra - Wesley.

<u>Observação</u>: A primeira aula foi ministrada para alunos formados na 4ª série ginasial e alunos aprovados na 1ª série colegial da cidade de São José dos Campos.

O TRABALHO DIRIGIDO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Scipione Di Pierro Netto

A finalidade do presente trabalho é apresentar aos colegas congressistas, alguns trabalhos Dirigidos, destinados aos alunos principiantes no Estudo da Geometria.

Sem a preocupação de apresentar aqui uma justificação psico-pedagógica, devemos dizer que se procura aplicar o método heurístico e o processo da redescoberta, levando o aluno a concluir as propriedades fundamentais da Geometria, que serão, ou poderão ser, demonstradas num futuro próximo.

Neste processo, as propriedades são elaboradas pelos alunos que as constroem, através dos Trabalhos que lhes são apresentados, e a participação do professor é "limitada" à preparação dos Trabalhos Dirigidos e ao encaminhamento das questões, no sentido de se atingir tôdas as vêzes os objetivos propostos.

A limitação do tempo de aula, determina a amplitude do trabalho. Por essa razão, apresentamos uma sequência de T.D. (Trabalhos Dirigidos) abordando o tema: "Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal".

GEOMETRIA - T.D.-1

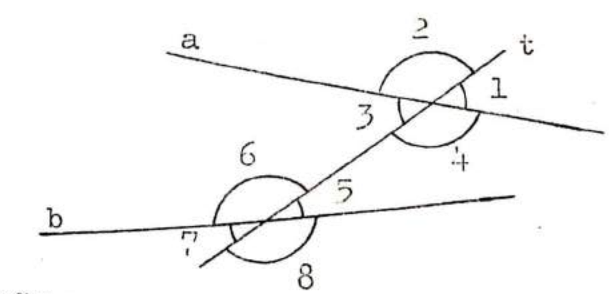
Nome do aluno:

Série:

Conceito

Ângulos formados por duas retas coplanares e uma secante.

Tracemos duas retas distintas a e b e uma reta t que encontra a e encontra b, de acôrdo com a figura abaixo:



1. DEFINIÇÕES:

Vamos denominar os ângulos 1,2,3,4,5,7 e 8 como segue:

$\hat{3}$; $\hat{4}$; $\hat{5}$; $\hat{6}$ ângulos internos

$\hat{1}$; $\hat{2}$; $\hat{7}$; $\hat{8}$ ângulos externos

$\hat{1}$; $\hat{5}$ - $\hat{4}$; $\hat{8}$ - $\hat{3}$; $\hat{7}$ - $\hat{2}$; $\hat{6}$ pares de ângulos correspondentes

$\hat{4}$; $\hat{5}$ - $\hat{3}$; $\hat{6}$ pares de ângulos colaterais internos

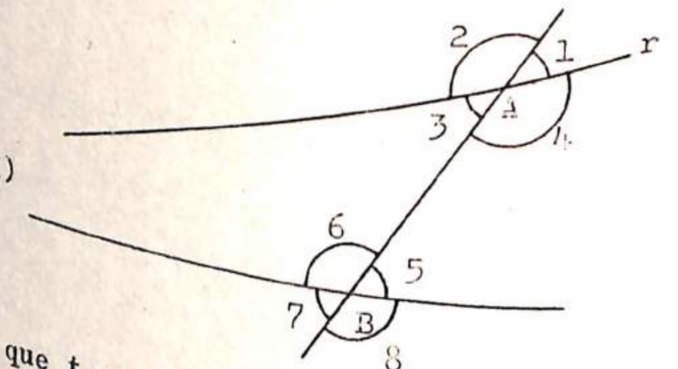
$\hat{1}$; $\hat{8}$ - $\hat{2}$; $\hat{7}$ pares de ângulos colaterais externos

$\hat{2}$; $\hat{4}$ - $\hat{3}$; $\hat{1}$ - $\hat{7}$; $\hat{5}$ - $\hat{6}$; $\hat{8}$ pares de ângulos opostos pelo vértice

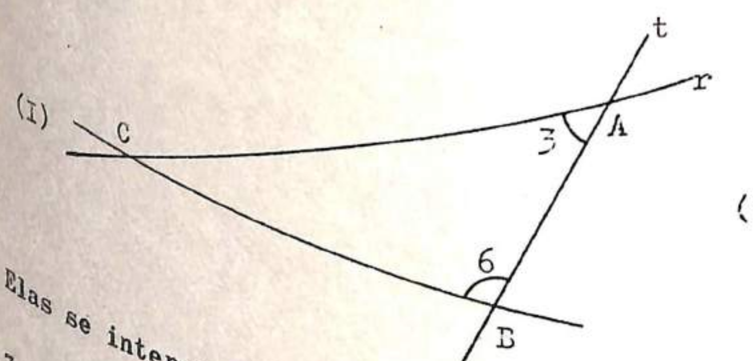
$\hat{4}$; $\hat{6}$ - $\hat{3}$; $\hat{5}$ pares de ângulos alternos internos

$\hat{2}$; $\hat{8}$ - $\hat{1}$; $\hat{7}$ pares de ângulos alternos externos.

2. Consideremos as retas r e s de um mesmo plano e uma transversal t que as intercepta em A e B.



Observa-se que t separa o plano em dois semiplanos I e II. Façamos essas retas, de tal modo que $\hat{3} + \hat{6} < 180^o$. Vê-se que



Elas se interceptam num ponto do semiplano (I).

3. Agora, construa você uma figura semelhante, de modo que $\hat{3} + \hat{6} > 180^o$.

Responda a seguir:

a) As retas r e s se interceptam num ponto D do semiplano ....

b) Qual a relação verdadeira dentre as que se seguem?

$$\hat{1} > \hat{5}$$
$$\hat{1} = \hat{5}$$
$$\hat{1} > \hat{5}$$

4. Construa as retas r, s e t de modo que os ângulos $\hat{3} + \hat{6}$ somem exatamente 180^o.

A seguir assinale a sentença verdadeira:

a) $r \cap s = \{C\}$ onde $C \in I$

b) $r \cap s = \{D\}$ onde $D \in II$

c) $r \cap s = \emptyset$

5. Escolha você um nome para as retas r e s em cada um dos casos seguintes:

a) $r \cap s = \{D\}$

b) $r \cap s = \emptyset$

c) $r \cap s = \{C\}$

T.D.nº 2

RETAS COPLANARES E UMA TRANSVERSAL

1. Construa duas coplanares r e s e uma transversal t, de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais ($\hat{1} = \hat{5}$).

Examine a figura e assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas. Enumere os ângulos no sentido anti-horário com os símbolos. $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ em tôrno de $\{A\} = r \cap t$ e $\hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ e $\hat{8}$ em tôrno de $\{B\} = s \cap t$.

$\hat{3} = \hat{4}$	$\hat{4} + \hat{5} = 180^o$	$\hat{4} = 6$
$\hat{4} = \hat{8}$	$\hat{1} + \hat{3} = 180^o$	$\hat{5} = \hat{8}$
$\hat{2} = \hat{6}$	$\hat{7} + \hat{8} = 180^o$	$\hat{3} = \hat{4}$
$\hat{1} = \hat{8}$	$\hat{5} + \hat{7} = 180^o$	$\hat{2} = \hat{8}$

2. Faça uma construção onde os ângulos colaterais internos $\hat{4}$ e $\hat{5}$ têm soma igual a 180^o.

Examine a seguir quais sentenças matemáticas são verdadeiras e quais são as falsas.

$\hat{1} = \hat{5}$	$\hat{6} + \hat{5} = 180^o$	$\hat{4} = \hat{6}$
$\hat{2} = \hat{7}$	$\hat{3} + \hat{6} = 180^o$	$\hat{1} = \hat{7}$
$\hat{3} = \hat{7}$	$\hat{1} + \hat{8} = 180^o$	$\hat{2} = \hat{3}$
$\hat{6} = \hat{3}$	$\hat{1} + \hat{3} = 180^o$	$\hat{5} = \hat{7}$.

3. Construa uma figura formada por duas coplanares e uma transversal de modo que os alternos internos ($\hat{4} = \hat{6}$) sejam iguais.

Examine a figura e responda a seguir quais as sentenças são verdadeiras e quais as falsas.

$\hat{1} = \hat{2}$	$\hat{3} + \hat{6} = 180^o$	$\hat{3} = \hat{5}$
$\hat{1} = \hat{5}$	$\hat{2} + \hat{7} = 180^o$	$\hat{1} = \hat{7}$
$\hat{3} = \hat{7}$	$\hat{1} + \hat{3} = 180^o$	$\hat{2} = \hat{8}$
$\hat{3} = \hat{4}$	$\hat{5} + \hat{7} = 180^o$	$\hat{2} = \hat{4}$

4. Considere as questões anteriores e complete as sentenças següintes:

a) Quando uma transversal intercepta duas coplanares, formando ângulos correspondentes iguais, então

I - Os ângulos alternos internos ....

II - Os ângulos alternos externos ....

III - Os ângulos colaterais internos ....

IV - Os ângulos colaterais externos ....

b) Se uma transversal forma com duas coplanares dois ângulos colaterais internos suplementares, então as coplanares ....

c) Se uma transversal forma com duas coplanares ângulos alternos internos iguais, então as coplanares são ....

T.D.nº 3

Voltemos às sentenças da questão 4 do T.D.2.

a) Se uma transversal t formar com duas retas coplanares r e s ângulos correspondentes iguais, então $r \cap s = \emptyset$.

b) Se uma transversal t forma com duas retas coplanares r e s ângulos colaterais internos cuja soma é igual a 180º, então $r \cap s = \emptyset$.

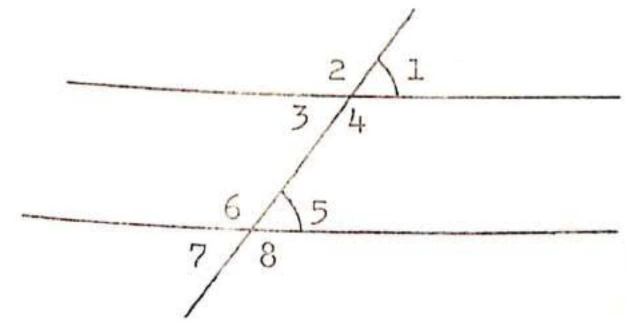
c) Se uma transversal t, forma com duas retas coplanares r e s ângulos alternos internos iguais, então $r \cap s = \emptyset$.

1. Vamos mostrar que a), b) e c) são proposições equivalentes, isto é, se a) é uma sentença verdadeira, então dessa verdade se pode deduzir b) e c) e reciprocamente.

Mostremos que a) $\Longrightarrow$ b)

A figura abaixo foi construída de modo que a sentença a) seja verdadeira, isto é, os ângulos correspondentes são iguais, por exemplo:

$$\hat{1} = \hat{5}$$



Ora, se

$$\left.\begin{array}{l} \hat{1} = \hat{5} \\ \hat{1} + \hat{4} = 180^o \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{4} + \hat{5} = 180^o$$

e isto quer dizer que os colaterais internos somam 180º, ou seja, é a própria sentença b).

2. Mostre agora você, de modo semelhante, que:

I) (b) $\Longrightarrow$ (c)

II) (c) $\Longrightarrow$ (a)

3. Faça a reunião das sentenças, a), b) e c).

ALGUMAS CONCLUSÕES

1. Trace duas retas paralelas r e s e uma secante t, de modo que

$$a \cap b = \emptyset, \quad t \cap a = \{A\} \quad e \quad t \cap b = \{B\}$$

2. Examine a figura e conclua:

a) os ângulos correspondentes $\hat{1}$ e $\hat{5}$ são ....
bem como os ângulos ....

b) os ângulos colaterais internos $\hat{4}$ e $\hat{5}$ têm soma igual a .... bem como ....

c) os ângulos colaterais externos: ....
....
....

d) os ângulos alternos internos $\hat{6}$ e $\hat{4}$ são ....
.... bem como ....

e) os ângulos alternos externos
.... externos ....
....

V - RESUMO DE ALGUMAS CONFERÊNCIAS

1. El programa interamericano para mejorar la enseñanza de las ciencias

   Hector Merklen

2. Métodos e técnicas de explicar conceitos novos de matemática no início do curso secundário

   George Papy

3. La Géométrie dans l'enseignement moderne la Mathématique

   George Papy

4. La Matematica Moderna en la Escuela Secundaria Argentina

   H.R. Völker

EL PROGRAMA INTERAMERICANO PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS (PIMEC)

Hector Merklen

El P.I.M.E.C. - El Programa Interamericano para mejorar la Enseñanza de las Ciencias fue propuesto al Programa de Cooperación Técnica da la Organización de Estados Americanos por el Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana y fue aprobado per el Consejo Interamericano Económico y Social, en su reunión de 1963, en San Pablo. Comenzó sus actividades el 1 de julio de 1964 pero se instaló em su sede, la Facultad de Ingenieria y Agrimensura de la Universidad de la Republica Oriental del Uruguay, recién en junio del pasado año 1965. Para ello fue necesaria la firma de un convenio, a nivel gubernamental, entre la Unión Panamericana y el Gobierno Uruguayo, que regula el funcionamiento del Programa, la que tuvo lugar el 30 de marzo de 1965. El Projecto tiene una duración de 5 años, que expira em junio de 1969.

El problema que el PIMEC pretende ayudar a resolver es el de poner a tono la educación científica latino americana, especialmente en el nivel secundario, con las exigencias del momento actual. Para ello es necesaria una reestructuración dinámica de la enseñanza y los sistemas educativos, la que, a su vez, requiere la preparación de profesores de ciencias básicas que puedan contribuir a actualizar la formación de los docentes secundarios.

El problema de la actualización efectiva de los decentes secundarios de los países latino americanos es de tal magnitud que sobrepasa la capacidad de cualquier esfuerzo realizado em escala continental por un organismo internacional. Por otra parte, la enseñanza secundaria debe ser de competencia y responsabilidad de cada país y, por consiguiente, es lógico que cada país procure solucionar de acuerdo com sus proprios fines e intereses el problema de mejoramiento de los profesores secundarios, sin perjuicio de que, para ello, requiera la ayuda de organismos internacionales. Es por esto que el PIMEC dirige en general sus cursos de adiestramiento y actualización a profesores de nivel universitario que, presumiblemente, tengan influencia en la formación de los docentes secundarios de su país.

Las actividades previstas para el PIMEC son de índole diversa y pueden resumirse em la siguiente enumeración;

1. Cursos y seminarios de adiestramiento para profesores;
2. Investigación sobre nuevos programas y tecnicas de enseñanza;
3. Desarollo y utilización de materiales de laboratorio de bajo costo;
4. Servicio de consulta y asesoramiento para los estados miembros;
5. Publicación de monografías;
6. Realización y / o publicación de traduciones;
7. Publicación del "Boletin de Informaciones"

1. Cursos y seminarios de adiestramiento

De acuerdo con lo dicho, el PIMEC ofrece regularmente cursos y seminarios de adiestramiento y actualización destinados a profesores de universidades e escuelas de profesorado. Son cursos breves e intensivos que no pretenden lograr la formación de docentes sino solamente provocar el impacto inicial del contacto brusco con la ciencia moderna y sus modernos métodos de enseñanza, brindando, además, una visión panorámica de temas de capital importancia y aportando la información y la orientación que el profesor necesita para proseguir por si mismo el adiestramiento futuro. Este tipo de cursos constituyen un

complemento valioso de la solución ideal para el problema de capacitación de los docentes. La solución ideal es, evidentemente enviar al candidato a los centros científicos claves para que complete su formación al cabo de uno o dos años de estudios intensivos. Existen ya muchos programas de becas, tanto de los gobiernos como de instituciones nacionales e internacionales, oficiales o privadas, que procuran llevar a la prática esta solución. El PIMEC no puede ni debe buscar una superposición con este tipo de programas. De hecho, se ha resuelto que nuestro Programa ofrezca cursos o seminarios de hasta tres meses de duración para unos 25 profesores latinoamericanos.Los participantes recibem una beca de la Unión Panamericana que les permite atender a todas sus necesidades durante el tiempo de extensión del curso. Los aspirantes a estas becas son seleccionados de acuerdo con normas generales del Programa de Cooperación Técnica teniendose en cuenta, además, la necesidad de obtener un grupo cuyo nivel de preparación sea apreciablemente homogeneo.

Cada Curso comprende alguns de las seguientes actividades: el desarrollo de dos o tres cursos sobre temas generales de capital importancia para la ciencia actual; seminarios de carácter técnico; seminarios de carácter pedagógico; trabajos individuales; conferencias; visitas. Se dictan clases teóricas, práticas y de laboratorio según las necesidades de la exposición.

Desde su iniciación hasta el presente, el PIMEC ha organizado los siguientes cursos:

a) antes de su instalación en la sede:

1) Instituto para Profesores Universitarios de Quimica
(Mexico,1965)

fecha: 28/XII/64 - 26/II/65
Local: Universidad Nacional Autónoma de México, Escuela de Ciencias Quimicas.
participantes: 25 profesores de 15 países.

actividades: cursos de **Fisicoquímica**, Química cuántica y Química Orgánica, conferencias, visitas.

2) Instituto para Profesores Universitarios de Física (San José de los Campos, 1965)

fecha: 28/XII/64 - 26/II/65

local: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico de Aeronáutica, San José de los Campos, S.P., Brasil.

participantes: 17 profesores de 9 países

actividades: cursos de Física Moderna, Mecánica y Electromagnetismo; visitas, excursiones.

b) luego de su instalación en la sede:

3) Primera Conferencia Interamericana para la Enseñanza de la Química, organizada por la Organización de Estados Americanos y el Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina, Buenos Aires 14-19 de junio de 1965. Tuvo el propósito de elaborar planos para mejorar la Enseñanza de la Química en los países latinoamericanos. A ella asistieron los participantes del Instituto para Profesores Universitarios de Química (Montevideo, 1965)

4) Instituto para Profesores Universitarios de Química (Montevideo, 1965)

fecha: 14/VI/65 - 10/9/65

local: Facultad de Ingeniería y Agrimensura y de Facultad de Quimica de la Universidad de la República Oriental del Uruguay;

participantes: 18 profesores de 11 países;

actividades: cursos de Unión Química y Tabla Periódica, Termodinámica, Química y Cinética Química; visitas; conferencias, asistencia a la Primera Conferencia Interamericana para la Enseñanza de la Química.

5) Instituto para Profesores Universitarios de Física (Montevideo - 1965)

fecha: 6/IX/65 - 26/XII/65

local: Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la República Oriental del Uruguay;

participantes: 20 profesores de 9 países;

actividades: seminario de Física Moderna, cursos de Optica y Ondas y de Mecánica, trabajos individuales y participación en el Seminario PIMEC - Unesco para la Enseñanza de la Física.

6) Seminario Pimec-Unesco para la Enseñanza de la Física

Tuvo lugar en Montevideo entre el 8 y el 26 de noviembre de 1965. Se ocupó de: experiencias docentes que se están efectuando en varios países, tales como el Projecto Noffield, de Inglaterra, el PSSC, de los Estados Unidos y el Projecto Piloto de Unesco-IBECC, desarrollado en San Pablo; de los medios de educación masiva, tales como los audiovisuales y la instrucción programada y del uso de equipes de laboratorio simples y de bajo custo.

7) Institutos A y B para profesores Universitários de Matemática (1965)

fecha: 13/IX/65 - 10/XII/65

local: Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la República Oriental del Uruguay

participantes: 32 profesores de 13 países

actividades: curso A: cursos de Algebra de estructuras, Geometria, Algebra Lineal, Introducción a la Teoria de Funciones;

curso B: cursos de Algebra de estructuras, Probabilidades, Inferencia Estadística, Modelos Lineales, Algebra Lineal e Introducción a la Teoría de Funciones. Además, se propusieron trabajos individuales consistentes en el desarrollo, para el nivel secundario, de algunos de los temas del Programa propuesto por Servais en la Reunión de Atenas; se realizó una visita al Instituto de Matemática y Estadistica y se ofrecieran conferencias y mesas redondas;

profesores: E.del Busto, de la Universidad de Bahia Blanca, Argentina dictó los cursos de Algebra; Hector Merklen, del PIMEC, el curso de Geometría; los profesores Daschlager, Fabroni y Fallena, del C.I.E.M.E.S. de Santiago de Chilelos cursittos de probabilidades y estadística; Jorge Bosch de la Universidad de La Plata, Argentina, el curso de Introdución a la Teoría ~~de~~ Funciones.

c) cursos para 1966

8) Curso de Algebra para Profesores de Matematica

fecha: 10/I/66 - 1/IV/66

local: Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la Republica Oriental del Uruguay

participantes: 25 becarios de varios países

actividades: cursos de Estructuras algebraicas, al nivel del libro de Herstein: Topics in Algebra y de Algebra Lineal, al nivel delde Halmos: Finite Dimensional Vector Spaces.

Cursillos sobre: Aplicaciones del Algebra Lineal, Teoria de Galois y Algebras de Boole. Trabajos individuales, conferencias, visitas. Se intenta organizar una reunión para el estudio de programas que tendreá lugar a fines de marzo.

9,10,11) Cursos de Física, Biologia y Quimica a ser realizados durante la segunda mitad de 1966, cujos detalles no podemos ofrecer aún.

2) Investigación sobre nuevos programas

Se encara actualmente la posibilidad de organizar una reunión para el estudio de programas de matemáticas, para la escuela secundária, en la que interrendría un grupo de destacados especialistas latinoamericanos y de la que participarían, en cierta medida, los becarios del Curso de Algebra. Tendría lugar a fines de marzo de 1966.

3) Laboratórios de bajo costo

Se están organizando los diferentes puntos para que un pequeño grupo de especialistas, trabajando durante todo el año 1966, desarrolle equipos de laboratorio de bajo costo especialmente adecuados para la enseñanza moderna de la Física en los países latinoamericanos.

4) Publicaciones y traducciones

En este rubro los trabajos se encuentran también iniciados pero no tienen el grado de desarrollo de la actividad "cursos y seminarios".

Está pronta para su publicación una monografia sobre "Enseñanza de la Geometría a Nivel Universitario Basico" y se ha solicitado autorización para la traducción de varias obras útiles a los docentes de ciencias básicas, entre ellas la compilacion denominada Estructuras Algebraicas y estruturas topológicas, publicada por los profesores secundarios de Francia y consistente en conferencias de Cartan, Choquet, Lichnerowics y otros.

5) El Boletin de Informaciones

El Boletin de Informaciones del PIMEC es una publicación bimensua l que se distribye gratuitamente a todas las personas o instituciones que así lo soliciten. Procura brindar información sobre las actividades que se están realizando en América Latina con relación con el mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias; sobre becas y también información bibliográfica. El PIMEC requiere la colaboración de lectores a quienes solicita que le remitan las informaciones que sea interesante publicar en el Boletin. El Boletin está organizado en base a algunas secciones permanentes que llevan los siguientes epígrafes: Pimec, actividades realizadas; Pimec: actividades en curso de realización; Pimec: actividades programadas; Nuestros colaboradores; Visitas; Actividades Latinoamericanas; Becas y Bibliografía.

Se han publicado hasta el momento tres números.

Prof. George Papy - Presidente do Centro Belga de Pedagogia da Matemática.

MÉTODOS E TÉCNICAS DE EXPLICAR CONCEITOS NOVOS DE MATEMÁTICA NO INÍCIO DO CURSO SECUNDÁRIO.

George Papy

1. Ensinando através de situações, como preparação para Matemática Aplicada.

Cada criança que tem atualmente entre 12 e 15 anos de idade provàvelmente terá de usar matemática mais tarde, qualquer que seja sua profissão, como um meio de compreensão, inquisição e resolução de problemas.

Se a Matemática deve ser usada efetivamente em situações reais, não é o suficiente ter mecanismos perfeitos que resolvem problemas automàticamente. A grande e maior dificuldade é reconhecer que uma situação é suscetível a um tratamento matemático e decidir que forma particular de tratamento deve ser usada. Para fazer isso, a situação concreta com que se defronta precisa ser conceitualizada e matematizada. Devemos notar de passagem que a maioria dos exercícios tradicionais em matemática aplicada não treinam o aluno em pensar dessa maneira, o que é no entanto, essencial.

A Matemática não deve, portanto, ser ensinada como se fôsse um assunto isolado para os alunos contemplarem. Ao contrário, o objetivo, desde o início, é deduzí-la de situações cuidadosamente escolhidas que tenham um impacto creativo na mente dos alunos.

No decorrer de seus estudos, os alunos precisam ser persuadidos a responder de mente aberta às situações apresentadas. Essa atitude é essencial sempre que um problema real deve ser atacado e que envolva o uso de conhecimentos matemáticos já adquiridos. É também essencial para assimilar qualquer conceito nôvo de matemática. Ainda mais, sabemos que, devido a rapidês com que as ciências estão se desenvolvendo e se tornando matematizadas, nossos alunos terão, em estágios posteriores, de assimilar novos conceitos matemáticos ligados a situações reais. Êles devem, portanto, ser treinados a conservar sempre a mente aberta para tais situações.

A escôlha de situações é de grande importância; elas precisam genuinamente ilustrar os conceitos introduzidos sem limitar o seu alcance por serem indevidamente especiais. Elas precisam ser atraentes e interessantes e deixar lugar para elaboração.

É dever do professor introduzir essas situações de modo que os alunos possam responder a elas. - Elas devem ser apresentadas de tal modo que os alunos venham a perceber um fato essencial a respeito da matemática - que ela tem unidade e estrutura.

2. Conjuntos e Diagramas de Venn

Todo professor de matemática deve começar reconhecendo um fato fundamental: A matemática de hoje reencontrou a sua unidade na universalidade do conjunto. A noção usual de conjunto deve, portanto, ser introduzida e elaborada tão cedo quanto possível.

Tôdas as crianças às quais eu dei aulas sôbre conjuntos - e algumas delas tinham sòmente 8 anos- tinham uma idéia inicial do que a noção significava.- Com crianças de 12 anos precisa-se apenas perguntar, por palavras, que sugiram, com vários exemplos, a idéia de conjunto, para receber umas 50 respostas em alguns minutos. Na minha experiência, os resultados são menos favoráveis com alunos de 17 anos que tiveram um bom treino em matemática tradicional.

Para aluno com 12 anos ou menos, não há portanto necessidade de se ensinar o conceito de conjunto, uma vez que para êles é uma questão de bom senso.

Tudo que precisamos fazer (mas isto é muito importante e às vêzes muito delicado) é elaborar o conceito comum e vago e trazer à luz o conceito matemático.

Os primeiros exemplos dados pelos alunos são sempre coletivos pre-estabelecidos como um esquadrão de aviões, uma classe de alunos, um atlas de mapas,um rebanho de carneiros, um enxame de abelhas. Usando êsses exemplos pode-se sempre começar a determinar o que são os elementos de um particular conjunto.

"O meu cachimbo é um elemento dêsse rebanho de carneiros?"

"Não"

"Por que não?"

"Porque seu cachimbo não é um carneiro. Sòmente carneiros podem ser elementos de um rebanho de carneiros."

"O rabo dêsse carneiro é um carneiro?"

-"Não, o rabo de um carneiro não é um carneiro"

O rabo do carneiro é um elemento do rebanho de carneiros?"

A resposta é não.

Usando êsse tratamento substituimos a idéia vaga e comum de conjunto por uma noção mais precisa de conjunto.

Quando as abelhas de um enxame estão numa colméia, tanto as abelhas com suas asas estão na colméia. O bom senso sugere que partes dos elementos de um conjunto podem muitas vêzes ser consideradas como membros dêsse conjunto.

Em matemática, um conjunto está determinado quando para cada objeto existe uma resposta clara para a pergunta "Êsse objeto pertence ao conjunto"?Isso é explicado às crianças através de exercícios e exemplos e, neste ponto, elas realmente substituem por uma noção precisa de conjunto a noção vaga que tinham prèviamente. Mas não devemos pensar que agora a batalha está ganha. Com um simples caso dêsse tipo, encontramos o fenômeno que sempre ocorre quando uma noção vaga e familiar é substituída por uma noção definida. Quando as crianças estão cansadas ou distraídas é sempre a primeira noção que emerge. Para evitar que isso aconteça usaremos, como será explicado em maior detalhe mais adiante, o método psicológico do choque.

Como um conjunto pode ser determinado dizendo-se sim a alguns objetos e não aos demais, encontramo-nos numa situação pedagógica favorável onde os alunos podem se deleitar, inventado conjuntos tanto inconsequentes como divertidos. É assim que os alunos mesmos constroem o material intelectual com o qual êles ficarão assim perfeitamente familiarizados. A atitude dos alunos é muito direta. Êles estão na ofensiva e mostram isso sugerindo conjuntos como "êsse pedaço de giz, essa esponja, êsse cactus e o senhor".

"Muito bem, vamos olhar para êsse conjunto. Vamos colocar êsses elementos no estrado da classe. Supondo que uma menina chinesa entre sùbitamente na sala, será que ela perceberia que nos decidimos formar um conjunto com êsses 4 elementos?"

A classe não tem dúvidas a respeito. A menina chinesa jamais vai adivinhar que o professor é um elemento do conjunto.

"Bom, como explicaremos isso a ela?

Muito naturalmente os alunos começam perguntando se a menina chinesa fala francês, holandês, inglês ou alemão e depois se o professor sabe falar chinês.

A resposta a essas questões sendo negativa, como poderemos mostrar a ela que formamos um conjunto com êsses 4 objetos?

Os alunos sugerem colocar os objetos num saco ou numa caixa.

Felizmente as autoridades educacionais ainda não incluiram como material didático um saco ou uma caixa na qual cabe um professor (apesar disso ser muito útil onde professôres continuam a ensinar matemática tradicional).

Os alunos pensam intensamente e sugerem uma corda.

Não há corda e então eu jogo o giz para um dos alunos que sem hesitar se levanta e corajosamente desenha uma corda em volta do conjunto.

Pede-se aos alunos desenhar o conjunto nos seus cadernos ou no quadro negro e assim fazendo êles simplesmente reproduzem o diagrama de Venn.

Pede-se então a uma das crianças representar no desenho os elementos do conjunto.

Enquanto ela hesita defronte ao quadro negro e pensa por onde começar, há um completo côro de sugestões da classe no sentido de (dependendo da idade) "desenhe pequenos círculos, quadrados, cruzes, pontos".

Bem quando o aluno está para desenhar êsses pontos ou cruzes eu, em geral, interfiro gritando "PARE"! Nós sabemos que podemos colocar pontos. Mas nós não vamos. Nós só vamos usá-los para representar algum dos objetos num conjunto, quando valer a pena chamar atenção sôbre êle. Se nós desenhássemos sistemàticamente todos os pontos de um conjunto finito em consideração, nós condicionaríamos os alunos a restringir o conceito de conjunto a conjuntos finitos e êles ficariam confusos assim que o conjunto fôsse infinito. E no entanto nós inevitàvelmente vamos encontrar conjuntos infinitos desde o início.

Considere um conjunto composto de 4 objetos:

a tôrre de Eiffel, meu relógio, o rei dos belgas e uma régua. O conjunto é então desenhado no quadro negro e então uma série de objetos são representados; General De Gaule, Paris, meu relógio, o diretor da Escola, etc. Para cada um dêsses objetos um ponto é desenhado dentro ou fora do diagrama e nunca na linha do diagrama. Se o exercício continuar depois de 4 pontos terem sido desenhados no interior do diagrama, os alunos comentam, após mais algumas questões, que de agora em diante todos os pontos novos estarão fora do diagrama. Êsse é o momento de pedir a um dos alunos de colocar no quadro um ponto representando o ponteiro dos minutos do meu relógio. Com alguma relutância, vagar e hesitação, o aluno coloca o ponto fora do diagrama. Isso vem como um choque. Na realidade, o ponteiro dos minutos é uma parte do relógio mas o poder creativo da nossa imaginação os separou, como o desenho mostra intuitivamente.

Como a maioria dos professôres, nós começamos sombreando ou colorindo áreas dentro do diagrama. Nós abandonamos êsse método pois êle leva os alunos a cometerem erros. O diagrama de Venn é uma corda colocada ao redor de certos objetos o que não os muda de maneira alguma. Mais tarde será útil considerar vários conjuntos simultâneamente. Para deixar as coisas claras os alunos mesmo vão sugerir escrevê-los (caracteriza-los) por símbolos, iniciais ou letras.

Quando representamos dois conjuntos simultâneamente, nós desenhamos uma linha, digamos amarela para um dêles e uma azul para o outro e indicamos um dêles por A (em azul) e o outro por B (em amarelo).

O diagrama é um modo fácil de introduzir o conjunto vazio, especialmente pelo uso de um conjunto que é talvez vazio.

Suponhamos que os alunos têm 15 anos.

"Em seguida desenhe o diagrama de um conjunto de alunos com mais de 1,50m e um de alunos com mais de 1,75m".

Sem saber mais nada sôbre a classe podemos deduzir alguma coisa a respeito dêsses conjuntos. Se descobrirmos que nenhum dos alunos tem mais de 1,75 m, então o conjunto é vazio. Representamos essa informação no desenho adotando a convenção, que me foi sugerida por alunos, que consiste em sombrear a parte vazia.

Eu então peço a um dos alunos de pensar em um conjunto A e outro pensar num conjunto B. Sem saber mais nada, eu posso representar esses dois conjuntos simultâneamente por desenhos como na Fig.1.

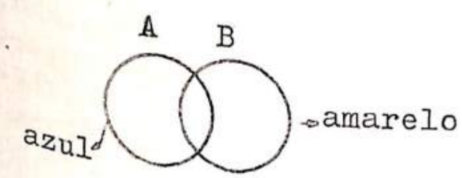


fig. 1

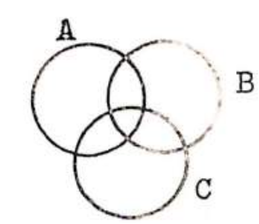


fig. 2

É essencial que os alunos percebam que três conjuntos A, B e C podem ser sempre representados por um trevo o que posteriormente se tornará um instrumento real de pensamento (fig.2). Muita coisa pode ser aprendida com casos especiais de conjuntos A,B,C, sombreando os espaços vazios.

Os alunos logo se familiarizam tanto com conjuntos que os consideram como informação concreta. Começando com dois conjuntos A e B, podemos pedir a êles que desenhem os conjuntos sugeridos pelo diagrama que introduz a álgebra dos conjuntos.

Isso os habilitará a pôr em jogo um nôvo tipo de cálculo, cujas regras se parecem com as usuais mas que diferem delas, especialmente em relação à distributividade mútua de $\cap$ e $\cup$. Para maiores detalhes sôbre a álgebra dos conjuntos o leitor poderá consultar Mathématiques Moderne I (capítulos 3 e 4).

Concluindo, gostaria de acentuar que alunos compreendem melhor a razão das regras usuais de cálculo algébrico com números naturais, por exemplo, se lhes fôr mostrado uma vêz uma álgebra cujas regras sejam diferentes.

3. Relações e gráficos

Matemática Moderna se apresenta sob um aspecto explìcitamente e concientemente relacional. Matemática sempre usou relações como igualdade, paralelismo, perpendicularismo, "maior que" e funções como adição e multiplicação.

No passado foi possível desenvolver matemática sem se voltar sempre para noção de relação. Relações governavam as ligações entre objetos matemáticos mas não eram, em si mesmo, assunto de matemática. Euclides conseguiu desenvolver seus "Elementos" sem usar explìcitamente a noção de função. A visão moderna das geometrias, por outro lado, sistemàticamente usa transformações que são funções. Todos reconhecem a importância das funções, mesmo na matemática aplicada de análise, que consiste essencialmente no estudo de certas classes de funções.

Vamos nós, como professôres, continuar a prática tradicional de esperar para introduzir funções, até chegarmos à situação difícil, crítica e crucial, quando não podemos avançar mais sem usar explìcitamente o conceito de função? Isso seria deliberadamente amontoar dificuldades e nos privar de uma ferramenta magnífica para a elaboração dos 1ºs estágios da matemática.

A noção de função é uma noção de senso comum e é fácil extraí-la. Mas nós só podemos dar precisão à noção colocando-a no contexto mais amplo de relações. Relações intervêm constantemente e com maior ou menor precisão em quase tôdas as atividades racionais. Històricamente, foi uma tarefa difícil trazer à luz a noção de função porque no começo apenas funções definidas analìticamente foram consideradas. Enquanto tôdas as funções oficialmente reconhecidas em matemática eram contínuas, a noção de continuidade não

aparecia. Da mesma maneira, propriedades especiais de relações, como reflexibilidade, simetria, anti-simetria e transitividade só podem ser compreendidas através de relações que não têm tais propriedades.

Um psicólogo mostrou que um dos focos naturais de interêsse numa classe de alunos de 10 anos ou menos é o conjunto formado pelos sobrenomes e primeiros nomes dos alunos.

Tomemos uma classe com alunos de 9 anos. Nós desenhamos no quadro-negro pontos que estão claramente distribuídos como os alunos na classe. Nenhuma palavra foi dita, mas a situação perante os alunos provoca interrogações em suas mentes pois êles levantam as mãos para dar as respostas.

"São nossas carteiras".

"Não, não podem ser as carteiras pois Conrado está ausente e não há um ponto para sua carteira."

Júbilo: "somos nós!"

Nós de início representamos por pontos pessoas tão importantes como os próprios alunos. Depois disso êles estão preparados para representar por pontos o que se quiser e em particular retas.

"Somos nós!"

"Ah! é você!"

"Então (escolhendo um dos alunos), onde está você?"

Crianças têm uma tendência natural para abstração e nenhuma jamais me respondeu "Eu Estou em Zoutenaie" ou "Na Escola Primária de Vladivostok".

Ao invés disso, o aluno vai ao quadro-negro e indica o ponto que o representa... algumas vêzes errando. Alguns alunos fazem erros sistemáticos adotando uma simetria baseada numa das medianas da classe ou seu centro. Isso é uma informação importante,pois nós vemos que mais tarde em geometria, alguns alunos continuam a fazer esses erros sistemáticos e dar respostas que poderiam ser desconcertantes a um professor que não estivesse a par da causa dos erros.

A seguir peço a cada criança para indicar todos os alunos da classe cujo primeiro nome começa com a mesma letra que seu próprio sobrenome. Isso é uma sentença particularmente longa, muito mais longa e complicada que a maioria das que se usa normalmente em Matemática. Ela precisa, portanto, ser repetida e explicada. Porquanto sua estrutura é bastante complicada, a sua compreensão é facilitada pelo fato de todos os conceitos que ela contêm serem muito familiares aos alunos.

Já alguns alunos estão apontando para outros. As respostas são verificadas, a pergunta foi entendida; insiste-se ainda e mais e mais alunos são apontados. Meu papel é o de colecionar essas informações. Como é que eu faço isso? Eu peço aos alunos me ajudarem e fazer sugestões. As respostas variam consideravelmente de classe para classe. Muitas vêzes alunos sugerem imediatamente que flechas deveriam ser desenhadas para reprdsentar um dedo apontando. Algumas vêzes a única sugestão é traçar uma linha. Se isso acontecer deve-se mostrar, como os alunos dizem, com uma linha não dá para ver quem está apontando. Algumas vêzes alunos sugerem outros métodos que são inadequados. Mas no fim a flecha é sempre sugerida por alguém e a classe a adota.

Êsse é o momento de traçar o gráfico. Pouco a pouco, como passarinhos construindo o ninho, os alunos vem, um por um, desenhar as suas flechas particulares. Eu também peço a êles desenhar as flechas de modo a não estragar o desenho o que proporciona um excellente e interessante exercício.

A experiência mostrou que êsse exercício é normalmente feito melhor por alunos de 9 a 12 anos do que por aquêles de 15 a 18 anos que estão imbuídos

de matemática euclidiana.

Alunos de 9 anos ainda não estão condicionados por linhas retas. O seu senso de brincadeira é despertado e êles nos mostram, sem que se peça, que apenas a origem e o fim de uma flecha são importantes, desenhando diagramas como o da Fig. 3.

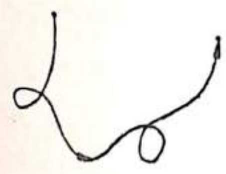


fig.3

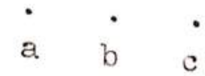


fig. 4

fig.5

Com alunos de 15 anos essa faculdade de imaginação infelizmente desapareceu. Não há nenhum retângulo no quadro negro mas a classe é, em muitos aspectos, retangular. E assim, de acordo com os deploráveis hábitos da matemática tradicional, os alunos ficam dentro do retângulo e o gráfico vai se tornando mais e mais emaranhado e confuso. Antes de cada flecha ser desenhada eu ainda, no entanto, repito infatigàvelmente e impertubàvelmente:

"Desenhe a flecha como você quizer mas não estrague o desenho." Finalmente um dos alunos tem a originalidade de desenhar a sua flecha para fora. A prévia armação foi destruída; tôdas as novas flechas se afastam dela da mesma maneira.

Com os alunos de 17 anos no ramo científico eu deparei com situações ainda mais surpreendentes. Tôdas as flechas eram muito retas, como vetores rígidos. Mas suponhamos que a tem que apontar para c (veja fig. 4). A resposta do aluno é: "Dessa vêz é impossível" "Mas linhas retas não são as únicas coisas na vida"

O resultado aparece na Fig.5. É verdade que a matemática tradicional estuda não sòmente linhas retas mas também circunferências...

Uma aluna, que até então havia passado quase despercebida na classe, desenhou o seguinte laço (veja fig.6). A menina era Srta. Brigitte Bardot. Não havia flecha no laço. Num caso semelhante Claudia Cardinale desenhou fig. 7. Ambas as convenções são aceitáveis mas é divertido observar que em classes onde uma flecha é adicionada ao laço, essa flecha, como um órgão sem função, se atrofia e eventualmente desaparece.

fig. 6

fig. 7

Algumas vêzes o gráfico é desenhado sem laços e os alunos inconscientemente substituem pela noção todos os alunos na classe exceto eu a noção de todos os alunos na classe.

O exercício anterior é muito apropriado para ensino coletivo. Cada aluno tem que desenhar flechas partindo dêle. Respostas dadas pelos bons alunos não matam o problema para os mais lentos. Algumas crianças (8 anos de idade) aparecem com as suas primeiras respostas corretas uma meia hora após os mais rápidos.

Quando isso está acabado, os alunos estão interessadíssimos e sugerem: "Professor, vamos jogar um outro jôgo como êste". Alguns especificam: "Vamos jogar o mesmo jôgo com sobrenomes apenas", o que leva a outras exclamações: "Isso vai ser muito mais fácil."

A lei do menor esfôrço levou os alunos espontâneamente a uma relação de equivalência. Eu pergunto

então diretamente: "Por que o nôvo jôgo vai ser mais fácil?" Os alunos expressam então em têrmos não sofisticados que a relação é simétrica("Se eu apontar para você, você aponta para mim)", reflexiva ("um laço em todo lugar") e transitiva ("se eu apontar para você, e você apontar para êle, então eu aponto para êle"). O nôvo jôgo é jogado e muitos exercícios são feitos. Usando gráficos, crianças de 9 a 10 anos são capazes de raciocinar de um modo que é muitas vêzes classificado como abstrato.

Nós nos afastamos do exemplo da classe fazendo exercícios com conjunto de crianças desconhecidas ou com outras relações. Em particular, pede-se às crianças de completar gráficos inacabados. Relações de parentesco cabem aqui muito naturalmente e levam a composição de relações. Nós não podemos nos demorar aqui nos numerosos exercícios sugeridos pela introdução de gráficos no ensino. Outros exercícios são encontrados na Mathématique Moderne I (capítulo 7). Nós recomendamos o uso de fôlhas grandes de papel e hélices de indicadores de feltro de várias côres.

Quando os alunos tiverem uma coleção razoàvelmente grande de gráficos, êles arrumam uma espécie de classificação. Êles dizem, por exemplo, que a relação "somar 5" é como a relação "ter como mãe". Chegou a hora de ajudá-los a fazer essa classificação, explicando as noções de reflexividade, simetria, assimetria, transitividade e função. Essas propriedades são muito difíceis de entender quando apresentadas na forma algébrica mas muito fáceis quando gráficos são usados. Esquemas ajudarão os alunos a fixar essas definições na sua memória. Anti-simetria, em particular, que uma exposição desajeitada pode tornar formidável, é muito fácil: uma relação é anti-simétrica se e sòmente se entre dois pontos distintos nunca há flechas de ida e de volta. Um estudo especial será feito, naturalmente, sôbre relações de equivalência e,acima de tudo, relações de ordem.

Os professôres deveriam dedicar um cuidado especial ao estúdo das relações de ordem. Por razões históricas elas tem sido negligenciadas dolorosamente no ensino tradicional. Pasch mostrou que é em relação a conceitos envolvendo ordem que construções euclidianas deixam muito a desejar. Graças a certas idéias de Artin, pode-se hoje em dia introduzir conceitos envolvendo ordem desde o começo da geometria (vide Mathématique Moderne-I, capítulo 15). A composição de relações é introduzida considerando parentesco e certas situações em álgebra. Relações ràpidamente se tornam objetos familiares aos olhos das crianças. Elas adoram desenhar uma "relação amarela" e uma "relação azul". Para compôr essas duas relações e desenhar em vermelho uma das relações compostas resultantes é um jogo que é tanto abstrato como facinante e exige muita atenção e método. A composição é òbviamente não comutativa (minha avó paterna não é meu avô materno) mas é muito bom confirmar isso desenhando em verde a outra relação composta. Situações compreendendo três relações levam para um dos teoremas mais fundamentais da matemática: a composição de relações é associativa. Graças a gráficos, a prova dêsse teorema é acessível a crianças de 12 anos.

Cada professor que usou gráficos acentuou o gôsto positivo dos alunos por desenhos multicolores. A maioria dêles gosta da beleza do desenho, escolhendo côres cuidadosamente e prestando grande atenção ao desenho. Talvez não seja de admirar que esses gráficos agradem às crianças, em vista da arte abstrata contemporânea.

4. Visão Dupla em Geometria e Preparação para os Inícios de Análise

A coisa mais lamentável a respeito de alguns esforços de reformular o ensino da matemática é a tentativa de introduzir as noções de conjunto e relação como uma espécie ramo nôvo e independente da matemática. Enquanto isso continuar o ensino da geometria e da álgebra continuará da mesma maneira antiga e monótona. Isto é uma traição deliberada ao espírito da

nova matemática; no que diz respeito aos alunos isso é intelectualmente enganador.

Sugerimos, portanto, que o estudo da geometria deveria começar com métodos de conjuntos. Os exemplos fundamentais fornecidos pela geometria também ajudarão fazer as primeiras lições, sôbre conjuntos, mais vivas. É essencial representar por meio de diagramas de Venn conjuntos que não são limitados nem compactos, como por exemplo, o conjunto de pontos fora de uma circunferência ou de um triângulo ou, muito simplesmente, o conjunto de pontos de uma reta.

O ensino tradicional da geometria, que é mudo ou confuso em relação a pontos limites, condiciona os alunos artificialmente de um modo que é extremamente difícil corrigir quando êles começam com a análise. Eu percebi isso de uma maneira chocante quando a uns 20 anos atrás, quando por uma combinação de circunstâncias, eu tinha que dar uma aula a crianças de 11 anos seguida imediatamente por uma aula a alunos de 19 anos. Na primeira aula eu "decompuz" o quadrado em quatro quadrados iguais desenhando as medianas. Um de meus alunos perguntou "para onde iam os pontos das medianas"; surpreendido pela pergunta, eu estùpidamente repliquei que não fazia diferença e falei a respeito de cortar o quadrado ao longo da mediana. Dessa maneira eu artificialmente condicionei os alunos a não perguntarem a respeito de pontos limites quando eles de fato estavam naturalmente curiosos a respeito dêles. Na aula seguinte eu estava ensinando o começo de análise e tendo uma grande dificuldade em explicar a diferença entre um quadrado fechado e um quadrado aberto.

Deve-se perceber que um pedaço de papelão não é suficiente como material intuitivo para distinguir entre um retângulo aberto, um retângulo fechado ou um retângulo que nem é aberto nem é fechado.

Aqui novamente, para ressaltar essas noções, eu adotei sugestões feitas por alunos em classes experimentais. Se nós adotarmos a convenção das luzes de tráfego, os pontos do conjunto são pintados de verde e os pontos limites eliminados são desenhados em vermelho. Isso leva muito naturalmente para alguns problemas extremamente interessantes de conjuntos convexos (veja Mathématique Moderne-I (capítulos 6 e 11).

Vamos nos limitar a acentuar a importância da visão dupla:

1 Visão intuitiva no plano

2 Visão intuitiva da estrutura lógica pelos diagramas de Venn.

Por mais importante que seja, a visão intuitiva espacial não salienta a estrutura lógica em situações simples porque as respostas as questões propostas são muitas vêzes vistas sem necessidade de pensamento. É nisso que o diagrama de Venn é útil.

Exercícios que consistem em mudança de uma representação para outra e vice-versa, interessam aos alunos enormemente porque as respostas as perguntas não são conhecidas de antemão. Tomar consciencia dessa possível representação dupla é uma experiência fundamental e enriquecedora.

5. Suporte Intuitivo para o Conceito de Conjunto Infinito

Um conjunto E diz-se infinito se existe $a \in E$, $b \in E | \{a\}$, $c \in E / \{a, b\}$, $d \in E | \{a,b,c\}$ .... Desenhemos flechas de a para b, de b para c, de c para d, etc. (figura 8).

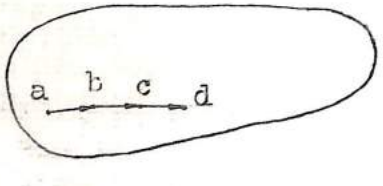


Fig.8

Assim é desenhado o gráfico de uma relação que chamaremos uma "ribambelle".

A noção de "ribambelle" é muito simples e a linguagem dos gráficos a reproduz claramente. A definição mais formalizada e algorítmica de "rimbambelle" é muito difícil. A linguagem dos gráficos, será portanto muito útil quando lidamos com conjuntos infinitos. Um conjunto é infinito se uma "ribambelle" pode ser definida nele. Uma vez feito isso, pode-se demonstrar a propriedade de Dedekind: Um conjunto é infinito se e sòmente se êle é equipotente a uma de suas partes próprias.

Por fim, pode-se chegar ao ponto de demonstrar fàcilmente a alunos de 15 anos o teorema de Bernstein considerando "ribambelles" disjuntas (veja Mathématique Moderne-I (capítulo 16).

LA GEOMETRIE DANS L'ENSEIGNEMENT MODERNE DE LA MATHEMATIQUE

George Papy

Le programme de l'espérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le problème de l'enseignement:

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.

2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.

3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste:

ESPACES VECTORIELS

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires?

Gustave CHOQUET a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne!

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif ... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de maniere plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur lagéométrie et le vectoriel euclidien plan.

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6ème (12-13 ans), j'ai pris une classe de 3ème scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amené à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat ... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!
2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.
3. Ensembles, relations, groupes ... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

<u>CLASSE DE SIXIEME</u> (12-13 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min) (*)

(*) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomadaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l'expérience dans des classes à quatre périodes.

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte - et ont pris leur temps pour cet enseignement - ont pu constater, les années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y voit les réponses sans raisonner. On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de Venn ([MM1] pp 68-71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM1] pp 73-75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe $\pi_o, +$ qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de Thalès. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM tb] p 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

CLASSE DE CINQUIEME (13-14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min).

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu'il existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de 13 à 14 ans.

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1], petit ouvrage destiné aux enseignants, ou à [MM2], manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développement du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus en plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours culmine par la mise en évidence de cette structure et se termine par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

CLASSE DE QUATRIEME (14-15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

"Le cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie". Encore convient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géometrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sousentend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élementaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent, théorème de Pythagore, inégalité de Cauchy-Schwartz et inégalité triangulaire.

Le cours culmine par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se termine par son utilisation systématique.

CLASSE DE TROISIEME SCIENTIFIQUE (15-16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 minutes).

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base:

Si un vectoriel admet une base de n éléments

Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les subtitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des classes de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure:il est apaisant et reconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de Pythagore. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

O Prof. Marshall Stone, presidente do Comitê Interamericano de Educação Matemática, assistindo uma das Conferências.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrieme. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5ème et 4ème, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'interêt rebondit ici de maniere subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices R^{2x2}, +, .) et le groupe linéaire général (voir [A7], Ch 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connaît déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux deux quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d'orienter le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe a + bi. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D] de Jean Dieudonné écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

<u>Annexe 1</u>: Programme optionnel de mathématique pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e scientifique.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

1. [A] ARTIN : - Geometric Algebra (Interscience Publishers - New York 1957)
   - Algèbre Géométrique (Gauthier-Villars, 1962)

2. [D1] DIEUDONNE : - Foundations of Modern Analysis (Academic Press inc., New York, 1960)
   - Fondements de l'Analyse Moderne (Gauthier-Villars, Paris 1963)

3. [D2] DIEUDONNE : - Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire (Herman - Paris, 1964)

4. [G] PAPY : - Groupes (Presses Universitaires de Bruxelles (Bruxelles - Dunod, Paris 1961)
   - Groups (Macmillan, London 1964)
   - I gruppi (Feltrinelli Editore, Milano, 1964)

5. [EE] PAPY : - Erste Elementen der Moderne Mathematik (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg 1962-1963).

6. [F1] PAPY-DEBBAUT : - Géométrie affine plane et nombres réels (Presses Universitaires de Bruxelles Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris 1962)
   - Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen. (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

7. [F2] PAPY : - Initiation aux Espaces Vectoriels (Presses Universitaires de Bruxelles - Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris, 1963).
   - Einführung in die Vectorraumlehre (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

8. [MM1] PAPY : - Mathématique Moderne 1 (Editions DIDIER - Bruxelles - Paris 1963)
   - Moderne Wiskunde 1 (DIDIER, Bruxelles - Paris 1965)
   - Matematica Moderna 1 (Edutura Tineretului, Bucaresti 1965)
   - Modern Mathematics 1 (Collier-Macmillan, London-New-York 1965)

9. [MM2] PAPY : - Mathématique Moderne 2 (DIDIER - Bruxelles, Paris 1965)

10. [A7] PAPY (avec la collaboration des Assistants du C.B.P.M.)

: - Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan.
(Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique - 183, avenue Brugmann - BRUXELLES 6).

11. [GP] PAPY : - Géométrie Plane
(Labor Bruxelles, Nathan, Paris 1966)

12. [MM3] PAPY : - Mathématique Moderne 3
(DIDIER - Bruxelles, Paris 1966).

ARTICLES

13. PAPY : - Introduction aux espaces vectoriels
(La math.du 20e siècle. Vol. II - Bruxelles 1961(33 pages)

14. PAPY : - Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire
(Mathématique moderne. OCDE Athènes 1963)
- Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna.
(Elementos nº 9, Nov.Dic.1964 pp 73-80, nº 10 En.Feb. 1965, pp 99-104, nº 11 Mar.Abr.1965 pp 127-130).
- Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools.
(The Mathematics Teacher-Vol. LVIII nº 4 April 1965 pp 345-352, nº 5 May 1965 pp 448-453).

15. PAPY : - Comment introduire les notions d'ensembles et de relations
(Publications de l'Unesco).

16. PAPY : - L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans.
(Publications de l'Unesco).

CENTRE BELGE DE PEDAGOGIE
DE LA MATHEMATIQUE

PROGRAMME DE MATHEMATIQUE POUR LES CLASSES DE SIXIEME (12 à 13 ans)

A. ENSEMBLES

1. Ensembles
Exemples - éléments d'un ensemble - représentation par les diagrammes de Venn - ensemble vide - ensemble comprenant un seul élément.

Termes et objets - égalité.

Les symboles $=$, $\in$, $\emptyset$; la notation

$$E = \{x \mid P(x)\}$$

et ses variantes.

2. Parties d'un ensemble
Parties ou sous-ensembles d'un ensemble.
Inclusion - les symboles $\subset$ et $\supset$
Ensemble des parties de certains ensembles.

3. Algèbre des ensembles
Intersection - Réunion - Différence
(facultativement la différence symétrique).
Commutativité et associativité de $\cup$ et de $\cap$
(Quelques "contre-exemples": non associativité de $\setminus$; situations relatives de $\setminus$ et de $\cup$).

4. Partition
Exemples de partitions d'un ensemble - définition.

B. RELATIONS ET GRAPHES

5. Relations et graphes
Nombreux exemples de relations
Graphe d'une relation.
Les relations regardées comme ensembles de couples.
Relation de l'ensemble A vers l'ensemble B.
Le produit A x B
Réciproque d'une relation.
Image d'un ensemble par une relation
Propriétés relatives de X, $\cap$, $\cup$.

6. Propriétés de certaines relations.
Réflexivité - symétrie - transitivité - antisymétrie.

7. Composition des relations
Associativité de la composition - réciproque d'une composée.

8. Fonctions.
Fonctions - applications - bijections - composition de fonctions - transformations et permutations d'un ensemble.
(Facultativement, injections et surjections).

9. Equivalence
Equivalence et partition.

10. Ordre
Ordre - ordre total.
Les symboles $<$, $>$, $<$, $>$.

C. NOMBRES ENTIERS RATIONNELS

11. Entiers Naturels
Ensembles équipotents - cardinal d'un ensemble (notions très élémentaires).
Ensembles finis et ensembles infinis.
Nombres naturels: cardinaux des ensembles finis.

Problèmes relatifs au cardinal de la réunion, de l'intersection et du produit d'un couple d'ensembles.
Recherche de la définition de l'addition et de la multiplication des entiers naturels à partir des opérations ensemblistes.
Eclairer et justifier les proprietés élémentaires de l'addition et de la multiplication à partir des propriétés ensemblistes.

12. Systèmes de numération

Numération binaire et numération décimale.

13. Etude élementaire de Z, +, .

Propriétés élémentaires de Z, +, ., notamment les produits remarquables.
Equations dans Z, +
Exercices de calcul numérique et littéral.

D. GEOMETRIE

14. Plan - point - droite

Le plan, ensemble infini de points.
Les droites, parties propres du plan
Ensemble des droites du plan
Propriétés d'incidence - utilisation des diagrammes de Venn.
Parallélisme - le symbole //.
La direction d'une droite, partition du plan.

15. Parallèles et perpendiculaires

Droites et directions perpendiculaires - le symbole $\perp$
Relations entre $\perp$ et //

16. Droites orientées

Les deux ordres totaux réciproques de toute droite.

Orientation des droites.
Demi-droites ouvertes et demi-droites fermées.
Segments ouverts, segments fermés, segments semi-ouverts.
Recherche de la définition des ensembles convexes.

17. Projections parallèles

Projection parallele du plan sur une droite.
Image d'une partie du plan par une projection.
Projection parallèle d'une droite A sur une droite B.
La projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est croissante et décroissante.
Cas particulier de la projection d'une droite orientée sur une droite parallèle orientée.
Droites parallèles orientées de même sens ou de sens opposé.

18. Equipollence et translations.

Couples équipollents.
l'équipollence est une équivallence.
Projection de couples équipollents - petit théorème de Thalès.
Milieu d'un segment - théorèmes du parallélogramme.
Propriétés des équipollences - croisement des équipollences.
Translations ou vecteurs.
Images de parties du plan par une translation.
Images de droites, de demi-droites, de segments et de couples de points par une translation.

CLASSE DE CINQUIEME (13 à 14 ans)

1. Le groupe des translations ou vecteurs.
Composition des translations.
Le groupe commutatif des translations du plan.
Traduction en notations vectorielles additives.
Premiers éléments de calcul vectoriel.

2. Le groupe π_o, +
Nouvelle représentation du groupe des translations ou du groupe des vecteurs.
Sous-groupes de π_o, +
Somme de parties de π_o, +
Calcul dans π_o, + - Equations - Problèmes.

3. Le groupe totalement ordonné D_o, +,
Toute droite D_o comprenant o est un sous-groupe de π_o, +
Etude du groupe ordonné D_o, +, $<$
Somme de segments - Première idée de l'approximation d'une somme.

4. Première synthèse de la notion de groupe
Mise en évidence de la notion de groupe à partir des exemples déjà rencontrés.
Nouveaux exemples, notamment groupe cyclique.
Calcul dans un groupe quelconque.
Notation additive et notation multiplicative.
Coefficients et exposants entiers rationnels.
Equations dans un groupe.

5. Nombres réels
Graduation de la droite - Axiome d'Archimède.
Sous-graduations binaires ou décimales.
Binaires et décimaux limités.
Binaires et décimaux illimités.
Axiome de continuité.
Première apparition du concept de nombre réel.

6. Théorème de Thalès
Théorème de Thalès sous sa forme générale.
Rapport de vecteurs parallèles.

7. Homothéties
Images de parties du plan par une homothétie.
Rapport d'homothétie.
Les homothéties de rapport $\neq 0$ conservent : la linéarité, l'incidence, le parallélisme, le milieu, le rapport de vecteurs parallèles, l'ensemble des segments.
Composée d'homothéties de même centre.
Groupe commutatif des homothéties de même centre et de rapport $\neq 0$.
A titre facultatif: groupe des homothéties et translations ou groupe des dilatations.

8. Addition des réels.
Le groupe additif ordonné des réels.
Equations et inéquations - Calcul approché - Valeur absolue.

9. Multiplication des nombres réels.
Pour les homothéties de rapport entier rationnel et de même centre: le rapport de la composée de deux homothéties égale le produit des rapports.
Définition de la multiplication des nombres réels par généralisation de la propriété précédente.

Associativité et commutativité de la multiplication des réels.

Le groupe $R_o, \cdot$ des réels non nuls.

Equations dans $R_o, \cdot$.

10. <u>Multiplication des vecteurs par un réel</u>
Associativité mixte.
Double distributivité.
Combinaisons linéaires et projections.

11. <u>Le champ réel ordonné</u> $R, +, \cdot, <$
Mise en évidence de la structure de champ ordonné.
Calcul dans ce champ.
Problèmes.

12. <u>Fractions</u>
Fractions à termes réels.
Règles et exercices de calcul de fractions.
Le champ des nombres rationnels.

13. <u>Equations linéaires à une inconnue dans le champ des réels.</u>
Equations à une inconnue - Problèmes.

14. <u>Inéquations - Approximations - Premiers éléments d'un calcul d'erreurs</u>

15. <u>Le vectoriel du plan</u>
Calcul vectoriel.
Equation vectorielle de la droite.
Bases et coordonnées.
Problèmes.

16. <u>Symétries centrales</u>
Images de parties du plan par une symétrie centrale.
Centre(s) de symétrie d'une partie du plan.
Composée de deux et de plusieurs symétries centrales.
Groupe des symétries centrales et des translations.

17. <u>Symétries parallèles et symétries orthogonales.</u>
Images de parties du plan et notamment de droites
Propriétés conservées.
Axe(s) de symétrie d'une partie du plan.

CLASSE DE QUATRIEME (14 à 15 ans)

A.

1. La relation "divise" dans Z et dans l'ensemble des entiers naturels.
Diviseurs premiers et primaires d'un nombre.
Parties stables et sous-groupes de Z, +
Tous les sous-groupes de Z, + sont cycliques.
P.G.C.D. et P.P.C.M. d'une partie de Z.
Relation de Bezout.

2. Equations de la droite.
Equation vectorielle, équations paramétriques et équation cartésienne de la droite.

3. Fonctions de R dans R - Fonctions polynomes
Exemples.
Représentation cartésienne.
Addition et multiplication de fonctions.
Anneau des applications de R dans R.

4. Algèbre des polynomes réels en une indéterminée.
Algèbre des polynomes.
Division par (x-a) - Division avec reste.
Exercices de factorisation dans les cas simples.

5. Racine carrée d'un nombre réel positif
Racine carrée et ses approximations.

6. Systèmes d'équations linéaires à une, deux et trois inconnues
Résolution par la méthode de Gauss.
Problèmes.

7. Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à 2 inconnues
Résolution de systèmes simples.
Problèmes. Interprétation géométrique.

B.

8. Groupe des déplacements et groupe des isométries du plan
Symétries orthogonales.
Translations, rotations et retournements, comme composées de symétries orthogonales.
Tout retournement comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie.
Groupe commutatif des rotations de centre donné.
Groupe des déplacements. Groupe des isométries.

9. Distance
Distance - cercles - disques ouverts et fermés.

10. Angles (orientés et non orientés)
Angle (orienté) d'une rotation.
Angle (orienté) d'un couple de demi-droites.
Groupe des angles (orientés).
Angle (non orienté) d'une paire de demi-droites.
Mesure des angles.

11. Cosinus et produit scalaire
Cosinus d'un angle.
Un angle non orienté est déterminé par son cosinus.
Produit scalaire et son invariance par les isométries.
Théorème de Pythagore.
Formules élémentaires de Trigonométrie.

12. Inégalité triangulaire
Inégalité de Cauchy-Schwarz - Inégalité triangulaire.
Convexité du disque.
Intersection d'une droite et d'un disque ou d'un cercle.
Calcul approché dans le plan.

13. Congruences et congruences directes
Parties congruentes du plan.
Parties directement congruentes du plan.
Couples de points congruents.
Triples de points congruents.

14. 14. Groupe des similitudes du plan et sous-groupe des similitudes directes

15. Les aires et leur mesure
Aires de parties élémentaires du plan.
Calcul des aires en s'aidant du calcul vectoriel et de la trigonométrie.

LA MATEMATICA MODERNA EN LA ESCUELA SECUNDARIA ARGENTINA

H. Renato Völker

I - Bases y etapas del processo renovador

El movimiento renovador que desde hace varios años se manifiesta en casi todo el mundo en favor de la enseñanza de la matemática, repercutió-como era natural en la República Argentina. Cuenta nuestro país con una honrosa tradición de matemáticos en el nivel superior y universitario; de modo que las nuevas corrientes encontraron campo propicio.

Creada en 1956 la Subcomisón Argentina de la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática (CIEM), dependiente a su vez de la Unión Matemática Internacional (IMU), su labor adquirió regularidad a partir del Congresso Internacional de Matemáticos de Edimburgo de 1958. Allí se decidió que las Subcomisiones Nacionales, entre otros asuntos, estudiaran: "qué temas y aplicaciones de matemática moderna pueden incluirse en los programas de escuelas secundarias", con el fin de tratarlos en el Congreso de Estocolmo de 1962. Una síntesis de las respuestas de 21 naciones fue hecha por el Profesor JOHN G.KEMENY, cuyo informe se tuvo en cuenta para la acción futura.

A partir de 1959 se desarrollaron también otras conferencias y seminarios cuyas conclusiones tuvieron gran influencia en el proceso argentino, en particular:

1 - Seminario de Royaumont, organizado por la Organización Europea de Cooperación Económica (OECE), entre noviembre y diciembre de 1959. Su relación, preparada por el Profesor HOWARD F.FEHR, es conocida con el nombre de "Mathématiques Nouvelles", en francés, y "New Thinking in School Mathematics", en inglés.

2 - Reunión del Grupo de Expertos en Dubrovnik (Yugoslavia), convocada por la (OECE) entre agosto y septiembro de 1960.

El informe contiene un programa moderno de matematica para la enseñanza secundaria, con el desarrollo de varios capítulos como orientación para los profesores. La traducción castellana del cap. 1º, con un apéndice y bibliografía fuera de texto, publicada por el Ministerio de Educación y Justicia de la República Argentina, se remitió en 1964 a todas las escuelas dependientes de la Dirección General de Enseñanza Secundaria.

3 - Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matematica celebrada en Bogotá, entre el 2 y el 9 de diciembre de 1961, a la que asistieron el Ingº JOSE BABINI (presidente de la Subcomisión Argentina de CIEM), el Doctor ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ (que tuvo a su cargo la primera conferencia sobre "La matemática y nuestra sociedad tecnológica") y el Doctor LUIS A. SANTALO, que leyó un trabajo sobre "La formación de los profesores de matemática".

Las recomendaciones de esta Conferencia fueron tenidas en cuenta en la Argentina, dieron impulso a los trabajos iniciales y sirvieron para fundamentar la creación de la Comisión Nacional para la Enseñanza de la Matemática por Resolución Ministerial del 15 de diciembre de 1964. (en el Apéndice se acompaña copia de dicha resolución). Sobre la tarea desarrollada por la Comisión se hace referencia más adelante.

Cabe destacar aquí la labor incansable del matemático norteamericano MARSHALL H.STONE, presidente de la IMU, propulsor de numerosas reuniones en varias partes del mundo tendientes a debatir problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela media. Durante su última visita a Buenos Aires se concretó un plan cuyas etapas principales fueron:

a) preparación de un programa para su inmediata experimentación en pequeña escala.

b) preparación de libros de texto adecuados para permitir esa experimentación y asegurar el mayor éxito posible.

c) examen y revisión del programa y de los textos a la luz de los resultados de los cursos experimentales dictados.

d) creación de cursos de verano para profesores con el objeto de familiarizarlos con las nuevas tendencias y con los nuevos programas.

e) obtención del apoyo de las autoridades educacionales para implantar progresivamente los nuevos programas en todas las escuelas secundarias.

f) introducción de cursos modernos en la carrera de profesorado de la especialidad.

Puede decirse que el plan, puesto en marcha inmediatamente, se viene cumpliendo en la República Argentina en mayor o menor medida en todos sus puntos, a pesar de las dificultades que la empresa implica.

II - El programa experimental

El programa experimental-cuya copia figura en el Apéndice fue redactado por Profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires. Fue concebido para ser desarrollado en seis años de escolaridad. Como, por regla general, la enseñanza media en la República Argentina abarca cinco años, con siete años de enseñanza primaria, el sexto año del programa propuesto (que contiene nociones de límite y continuidad de funciones; elementos de cálculo diferencial e integral, con susaplicaciones), sólo podrá aplicarse en los establecimientos que cuentan con planes de seis años.

El programa experimental se caracteriza por una poda considerable en la Geometría de Euclides y en la Trigonometría, mientras que en los programas tradicionales estas disciplinas ocupan prácticamente la mitad de su contenido total. En reemplazo de los temas suprimidos se introdujo: geometría analítica plana y del espacio con su ropaje moderno (vectores, transformaciones lineales, matrices, inecuaciones, programación lineal) y nociones de álgebra moderna (conjuntos, relaciones, funciones; estructuras algebraicas).

El álgebra desplaza en forma notoria a la geometría como núcleo y centro de interés y permite la introducción del razonamiento axiomático en estructuras sencillas como la de grupo o de espacio vectorial. Además, por sus múltiples aplicaciones el programa experimental contiene nociones de estadística y probabilidades.

III - Capacitación y actualización del personal docente

A partir del año 1962 comenzaron los trabajos tendientes a capacitar a un grupo de profesores, para su desempeño en cursos de ensayo. El Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, principal apoyo en la organización de ciclos de perfeccionamiento docente, inició esta labor fundamental que continua al presente como uno de los pilares de la reforma, no solo en matemática sino también en física, química y ciencias biológicas. Se organizaron, además, reuniones semanales de estudio y de discusión del programa experimental proyectado, con la participación de profesores secundarios y la orientación de catedráticos de la Facultad de Ciencias Exactas: CORA RATTO de SADOSKY, OSCAR VARSAVSKY, GONZALES DOMINGUEZ y LUIS A. SANTALO.

Conferencias en el Instituto Superior del profesorado y en muchos otros establecimientos y lugares del país comenzaron a crear un ambiente de manifiesto interés entre los educadores.

IV - Iniciación oficial del ensayo

El año 1963 fue decisivo para el proceso de la reforma en mi país. Al organizarse el Segundo Curso de Perfeccionamiento para Profesores de Matemática, patrocinado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, se dicidió que sucontenido abarcara los temas del programa experimental propuesto y en particular el tratamiento desallado de los tópicos correspondientes al primer año de estudios (Geometría Intuitiva con aplicaciones de Aritmética) y al segundo año (Conjuntos, relaciones, funciones, operaciones binarias, etc.). Tambiém formó parte del curso la discusión de aspectos didácticos vinculados a una correcta conducción del aprendizaje y finalmente nociones complementarias de Análisis, Probabilidades y Estadística e Historia de la Matemática. El curso fue dirigido por el Dr. SANTALO, uno de los redactores del programa, distinguido profesor universitario e investigador de renombre que continúa orientando el movimiento renovador en la República Argentina.

Al término del curso, al que asistieron 70 profesores seleccionados de todo el país, la Dirección General de Enseñanza Secundaria del Ministerio de Educación convocó a docentes de Buenos Aires que habían participado y los invitó a iniciar el ensayo de los nuevos programas en sus respectivos establecimientos en divisiones de ler. año, con vistas a continuar en los períodos escolares sucessivos con los siguientes cursos (2º, 3º, etc.). Contando con la entusiasta aceptación de los profesores, se dictó da Resolución Ministerial Nº 2418/63 por la que se autorizó a la mencionada Dirección General de Enseñanza para iniciar la experiência. A tales fines se eligieron cinco establecimientos de la Capital Federal y alrededores. No hubo selección previa de alumnos, con destino al ensayo pero sí de profesores.

Detalles de este primer año de ensayo, resultados y recomendaciones figuram en la Circular Nº 147 64 de la Dirección General de Enseñanza Secundária, que se remitió a todos los establecimientos de su dependencia para conocimiento de los profesores de la materia. (se acompaña en el Apéndice una copia).

La ubicación de la Geometría en los programas modernos, así como su tratamiento, continúan siendo motivo de agudas divergencias. Desde el grito de Jean Dieudonné "Abajo Euclides!", en el Seminario Internacional de Royaumont, hasta la axiomatixación propuesta por Gustavo Choquet (1), para referirnos sólo a los últimos años, se han sucesido los intentos para eliminar el tratamiento de la Geometría de Euclides. Según Howard F. Dehr, del Teachers College de la Universidad de Columbia, la Geometría de Euclides debe estudiarse informalmente en los primeros años de la escuela secundaria, porque contribuye poco a los estudios posteriores y se halla del camino principal de los adelantos matemáticos (2).

Parece natural una explicación de por qué en el programa experimental argentino se ha ubicado en 1er. año prácticamente toda la geometría tradicional, con un enfoque intuitivo. Veamos qué dice el Dr. SANTALO, que fue precisamente el redactor de esa parte del programa:

---

(1) Gustavo Choquet: "L'enseignement de la géométrie" Paris.

(2) H.F.Fehr: "Reforma de la Enseñanza de la Geometria", Conferencia de Bogotá, 1961. "La enseñanza de la Geometría en la Secundaria", Revista La Educación, nº 37/38, enero/jun./65.

"La geometría, considerada como la matemática por excelencia durante muchos siglos, ha sido en la actualidad desplazada por el álgebra.

...La réplica moderna de los Elementos (al procederse a la revisión de los fundamentos de la geometría) fue hecha por David Hilbert en su Grundlagen der Geometrie en 1899, con lo cual quedaba a salvo la consistencia del edificio geométrico, pero a expensas de aumentar mucho el número de axiomas y, en consecuencia, de hacer del mismo un gigante de granvalor matemático, pero didácticamente inservible... Por otra parte, el métido axiomatico, cuya enseñanza sigue pareciendo indispensable como base de toda educación matemática, ya no es exclusivo de la geometría. El álgebra moderna presenta numerosos ejemplos de sistemas axiomáticos mucho más simples que el de la geometría de Euclides, más faciles de comprender en su totalidad y más variados para mejor mostrar las posibilidades de la matemática y, por todo ello, con mayor valor educativo.

Qué queda de la geometría? Creemos que su enseñanza al nivel medio debe presentar dos etapas. Una primera de Geometría Intuitiva en los primeros años (12 o 13), en la cual se enseñe la geometría del mundo físico, como una prolongación más detallada de lo que se aprendió en la escuela primaria, añadiendo observaciones más delicadas y también demonstraciones para enseñar la potencia del razonamiento, ejercer el espíritu crítico y desarrollar la habilidad deductiva. Lo que se suprime en este primer año es el prurito de hacer una geometría axiomática; no se parte de la nada, sino de los conceptos intuitivos que el alumno ya tiene de punto, recta plano, longitud, áerea, etc. como abstracción de imágines visibles o como nociones de uso comum... Durante este primer año (o año y medio) de geometría intuitiva el alumno debe ir practicando toda la matemática que aprendió en la escuela primaria, para no olvidar en ningún momento la parte operatoria y calculatoria de la misma. Con esto y con la introducción de demonstraciones del tipo mencionado, el alumno, se irá preparando para entrar en la etapa de del álgebra, más axiomáticas y precisa, de los años superiores. Debe darse bastante énfasis al estudio de las transformaciones: tralaciones, rotaciones, simetrías, reflexiones, homotecias, congruencias, semejanzas... En la segunda etapa (15 ó 16 años), hay que volver a la geometría por la vía de la geometría analítica. Aquí, sí es que parece conveniente, puede harcer-se la entrada de manera axiomática, a través de los espacios vectoriales"... (1)

V - Primeros resultados

Hacia el final del año 1963 y el período de exámenes complementarios de marzo se hizo una primera evaluación de los resultados obtenidos en la enseñanza del programa del primer curso. Si bien éste no pudo completarse, por su extensión, especialmente la del último capítulo dedicado a transformaciones del plano en sí mismo, hubo opinión unánime, tanto de los profesores del ensayo como de quienes los supervisaban, que los alumnos habían evidenciado una seguridad, destreza y buena disposición frente a la Matemática, no observables entre los estudiantes de cursos paralelos que seguían el programa tradicional. El hecho de prescindir el programa de una pretendida sustentación axiomática, de basarse en conocimientos que el alumno trae o adquiere por observación concreta para evolucionar con razonamientos sencillos y de recurrir a la intuición cuando se juzga conveniente, configura una manera de enseñar y sobre todo de aprender que se aviene muy bien con la madurez y capacidad mental de un alumno de 12 o 13 años de edad. El programa del primer curso exige una gran dedicación del profesor porque éste debe conducir el aprendizaje del alumno, a cuyo cargo queda una participación activa en ese procesor, de suerte que el alumno adquiere conocimientos por elaboración propia y no por repetición de razonamientos ajenos. Las guías de trabajo juegam en ese proceso un papel importante y de la sensata e in-

(1) L.A.Santaló: "La matemática moderna en la Escuela Primaria y en la Secundaria", Revista La Educación, nº citado.

teligente graduación de dificultades con que estén redactadas depende, en buena parte, el éxito del aprendizaje. Corresponde que los ejercicios y problemas - muchos de ellos multivalentes - que esas guías deben contener, respondan a los núcleos fundamentales del programa, de suerte que para resolverlos el alumno tenga necesidad de recurrir a un conocimiento integrado. La experiencia hecha demonstró que un elevado porcentaje de alumnos había adquirido esa capacidad y que la ejescían naturalmente y con optimismo. Quiere decir, que esta forma de encarar la enseñanza de la Matemática, capacitando al alumno para hacer frente a situaciones nuevas y a manejarse con los elementos de que dispone para resolver por cuenta propia cuestiones hasta entonces para él desconocidas, responde a lo esencial de toda enseñanza y educación moderna en un mundo cambiante por excelencia. Es claro que la enseñanza conducida de esa manera requiere de algunos ajustes complemtarios en la organización escolar y en las instrucciones didácticas. Así, por ejemplo, hace falta disponer, por lo menos una vez a la semana, de dos horas seguidas de Matemática y es importante que el programa de la materia contenga instrucciones precisas sobre el sentido y objeto de sus contenidos y cuente con la caracterización analítica de cada tema.

Cabe señalar finalmente, que el programa del primer curso no pudo limitarse al estudio de la Geometría sino que hubo necesidad de incluir en él algunos temas de Artmética y Algebra, nociones sobre conjuntos y nomenclatura moderna, cuestiones éstas que se juzgaron imprescindible para el buen desarrollo de la enseñanza.

Los profesores contaron con información bibliográfica-sobre todo extranjera - pero tanto ellos como los alumnos se desenvolvieron sin textos que respondieran al curso, lo que dificultó la tares. A la fecha - diciembre de 1965 - la aparición de libros adecuados y de guías de trabajo parece inminente.

El ensayo del programa del segundo curso en 1964 se consideró crucial, por cuanto implicaba el avance decicivo de la Matemática moderna en la escuela secundaria y sentaba bases para su desarrollo en cursos posteriores. Esencialmente el programa prevé dos etapas: teoría de conjuntos, relaciones, funciones y operaciones binarias, por una parte y la teoría de los números, por otra. No hubo dificultad en el desarrollo de la primera, pero no fué posible encarar la segunda mediante un estudio axiomático riguroso. Ni la madurez de los alumnos, ni el tiempo disponible, ni la falta de textos adecuados lo permitieron. Por ello se vinculó el número natural con la teoría de conjuntos siguiendo el criterio adoptado por el profesor Papy en su obra "Mathématique Moderne".

Desarrollado el programa con este criterio , no ofreció mayores dificultades y como presenta una gran unidad estructural que permite abordar los sucesivos temas integrándolos con los conocimientos anteriores - los alumnos del ensayo evidenciaron un alto grado de aprovechamiento, por cuanto no sólo se mostraron bien informados, sino además poseedores de una buena disciplina mental.

Durante el año 1965 el ensayo llegó al tercer curso secundario. Aun no se dispone del informe final sobre los resultados obtenidos, pero sí estoy en condiciones de adelantar que las características de los cursos anteriores se mantienen. Los alumnos han adquirido soltura y seguridad para hacer frente a situaciones nuevas y todos, aun los de nivel mental bajo, se dedican a la Matemática sin prevención, convencidos de que con un esfuerzo normal de ensayo no deseanvolver a dictar los programas tradicionales y señalan que una vez que contemos con livros de texto adecuados y guías de trabajos para los alumnos, la tarea de enseñar resultará no sólo más grata, por lo interesante, sino menos absorbente en cuanto a las exigencias de tiempo.

VI - La Comisión Nacional para la Enseñanza de la Matemática

En la República Argentina hay un fuerte movimiento renovador de la enseñanza de las ciencias bási-

cas: Matemáticas, Física, Química y Biología. A él se deben los esfuerzos mancomunados que realizan el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, las Universidades Nacionales y el Ministerio de Educación y Justicia. Entre las muchas medidas que se han tomado para mejorar dicha enseñanza, figura la constitución de la Comisión Nacional para la Enseñanza de la Matemática, dispuesta por resolución ministerial del 15 de diciembre de 1964 (ver Apéndice). Esta comisión tiene por objeto llevar a la práctica las recomendaciones de la Primera Interamericana sobre Educación Matemática, de Bogotá, especialmente en cuanto se refiere a la actualización de los programas, el mejoramiento de los métodos de enseñanza, la formación y el perfeccionamiento del personal docente, la publicación de textos y demás medidas que contribuyan a elevar el nivel de la enseñanza matemática en general y especialmente en la escuela secundaria. Se la ha integrado con matemáticos de prestigio y docentes y funcionarios del Ministerio que por las tareas que cumplen juegan un papel importante en el quehacer educativo.La comisión dictó su propio reglamento, designó sus autoridades - el informante ocupa la vice-presidencia - y se reúne regularmente para tratar cuestiones por iniciativa propia o bien otras que el Ministerio le pasa en consulta. Se han constituído subcomisiones: de programas, de profesorado, de publicaciones, de difusión y otras con el fin de canalizar y agilitar la tramitación de los asuntos. Entre las cuestiones más importantes resueltas en este primer año de su funcionamiento acaso deben citarse las modificaciones propuestas en los programas tradicionales, para ser aplicadas de inmediato, es decir, a partir del curso lectivo de 1966. Se trata de temas que presentan unidad conceptual en sí, no interfieren eon el resto del programa y su conocimiento se juzga impostergable: nociones sobre conjuntos en el primer curso; relaciones entre conjuntos en el segundo; y funciones y ecuaciones en el tercero. Las instrucciones didácticas que se han dado caracterizan el justo alcance de estos temas y figuran en la circular nº 84/65 de la que se acompaña un ejemplar en el apéndice.

Entre las tareas de mayor alcance que deberá afrontar la Comisión próximamente figura la evaluación de los primeros tres años del ensayo en conjunto, los posibles ajustes de los respectivos programas, su coordinación definitiva con los de los cursos superiores en las distintas orientaciones de la enseñanza media y la actualización de planes y programas en la formación de los futuros profesores de Matemática.

VII - Perspectivas futuras

Como se desprende de lo antedicho, el ensayo hecho con los nuevos programas acusa índices muy favorables; no obstante no será fácil aplicarlos rápidamente en mayor escala, porque no se cuenta con el número necesario de docentes preparados. El reciente paso dado por el Ministerio de introducir de inmediato ciertos temas de Matemática moderna en los programas en vigor obligará a los profesores a pensar en actualizarse; ello, unido a un vasto plan de perfeccionamiento para docentes en actividad y a la publicación de textos para el profesor y el alumno y de guías de trabajos cuya aparición es inminente, harán posible que en un futuro no lejano la República Argentina cuente con programas de Matemática renovados y de alcance general en el ciclo secundario. Paralelamente se espera que las nuevas corrientes hallen eco en la escuela primaria cuyas autoridades superiores evidencian ya, a la fecha, un marcado interés por actualizar la enseñanza elemental. El esfurerzo mancomunado de quienes preparan a los maestros en las Escuelas Normales y de las instancias que responden por el perfeccionamiento del personal en actividad, podrá lograr también en ese nivel el renovamiento que se busca.

Buenos Aires, diciembre de 1965.

HELLMUT RENATO W.VÖLKER

V I - ALGUMAS COMUNICAÇÕES

Os trabalhos publicados seguem fielmente os originais entregues pelos autores

1. Construção de Classes Experimentais e de Contrôle
   Antonio Ribeiro, Joana Bender e Zilá G.Paim
2. Introdução no Ensino Secundário Brasileiro do Conceito de Número Primário
   Joana de Oliveira Bender
3. O Método Dedutivo
   ANPPM
4. Um método para dedução da Regra de Cramer
   Planejamento de um Curso de Geometria com Base em Noções Vetoriais
   Antonio Rodrigues
5. Introdução de Matemática Moderna na Escola Secundária
   O.A.Dacol
6. Determinantes com Base numa Definição Recorrente
   Antonio Espada Filho
7. Geometria no Ginásio - Relato de uma Experiência Realizada nos Ginásios Vocacionais de S. Paulo
   Lúcília Bechara e Elza Babá Akama
8. Intuição e Indução na Matemática
   Luiz Oswaldo T. Da Silva
9. Limites - Aristides Camargo Barretos
10. Uma Experiência na 1ª Série Ginasial
    Martha S. Dantas

CONSTRUÇÃO DE CLASSES EXPERIMENTAIS E DE CONTRÔLE

Antonio Ribeiro, Joana Bender
e Zilá G. Paim

COMUNICAÇÃO, propondo a organização de classes experimentais para o ensino da Matemática Moderna, nos níveis de ensino primário e médio.

ORIGEM - Contribuição do Centro de Pesquisas e Orientação Educacionais da Secretaria de Educação e Cultura do Estado do Rio Grande do Sul ao V Congresso do Ensino da Matemática.

O desenvolvimento vertiginoso que, desde o século passado, vem se processando em tôdas as ciencias e na utilização cada vez mais acentuada da Matemática pelas mesmas, vem exigindo um número sempre crescente, não só de estudiosos e entendidos da Matemática, mas também de pessoas habilitadas para, utilizando-a, melhor poderem compreender os progressos técnicos e científicos, assim como as grandes descobertas e o racional aproveitamento das mesmas.

Entretanto, apesar dos esforços despendidos no sentido da formação de matemáticos e de conhecedores desta ciência, muito pequenos têm sido os resultados obtidos, pois é ainda sem expressão o número de matemáticos ou conhecedores desta disciplina. Além disso, tal ciência tem-se tornado o grande impecilho aos que, não desejando fazer estudos matemáticos, pretendem, não obstante, dedicar-se a outras ciências, dado o grande número de reprovações, causadas todos os anos pela Matemática.

Essas reprovações têm motivado diversos estudos, para pesquisar as causas do insucesso na Matemática, acrescentando-se que, muitas vêzes, isso acontece a escolares de nível intelectual comprovadamente elevado.

Entre as hipóteses formuladas ao problema do insucesso no estudo da Matemática, salientam-se os métodos do ensino inadequados e a falta de professôres especializados, cuja comprovação foi estabelecida em diversas pesquisas em diferentes países.

Entretanto, em países onde os métodos foram grandemente aperfeiçoados, notou-se que o sucesso no estudo da Matemática não era suficiente para garantir a continuidade e aprofundamento no estudo dessa disciplina. São raros ainda os candidatos à especialização da ciência matemática. Isto levou os estudiosos a buscarem, no próprio conteúdo da ciência, os motivos prováveis dêsse fato.

Concluíram êles que o estudo da Matemática, como tradicionalmente é realizado, sem que haja um estreito relacionamento entre os seus ramos, permitindo mesmo o emprêgo da expressão "As Matemáticas", torna-se difícil e desinteressante para a maioria dos alunos.

A Matemática, como tôdas as demais ciências, deu um enfoque diferente ao conceito do todo e da parte. A introdução ao estudo da Topologia e a Teoria dos Conjuntos, que até bem pouco constituíam o coroamento de tôda a Ciência de que tratamos, foram colocadas, agora, em suas estruturas fundamentais, no início da aprendizagem, por haver constatado que o sistema de seus conceitos básicos é permanente no pensamento matemático.

Em outras palavras, os professôres de Matemática, bem como os de outras ciências, concebem que o sistema de conceitos em que se baseia qualquer conhecimento e, em particular da Matemática, deve ser bastante amplo, para poder representar a ciência, em sua totalidade, e não apenas, em aspectos isolados da mesma.

Propugna-se por uma dependência mútua, como

expressão de um inter-relacionamento intrínseco, dando desta forma, ênfase à unidade das estruturas que deverão alicerçar o ensino-aprendizagem da matemática e manter-se ao longo de todo êle. Além disso essas noções se constituiriam em fator de aumento do crescimento do educando, por atenderem melhor às suas necessidades e, principalmente, por coincidirem com as estruturas mentais que, em parte, se antepõem à experiência matemática.

Experiências de atualização do ensino da Matemática se vêm realizando desde vários anos, no Rio Grande do Sul. São elas experiências isoladas, porém inspiradas por um mesmo pensamento e levadas a efeito com critérios pedagógicos válidos, embora diferentes,

RELAÇÃO DE ALGUMAS EXPERIÊNCIAS DE PREPARAÇÃO DOCENTE, ATRAVÉS DE CURSOS, PALESTRAS, ENCONTROS

Em 1948, iniciou-se no Instituto de Educação "General Flôres da Cunha" a renovação dos conteúdos matemáticos necessários ao professor primário. Nesse trabalho de pioneirismo, é mister ressaltar o nome da Professôra ODILA BARROS XAVIER que sempre dedicou atenção especial ao progresso científico e didática da Matemática.

Em 1952, nessa mesma Escola, introduziram-se alguns conceitos sôbre a Teoria dos Conjuntos, no curso para professôres de Didática da Matemática e para supervisores escolares.

Em 1953 e 1954, na Associação de Professôres Católicos, realizaram-se cursos com o mesmo temário, também destinados a professôres de Didática de Matemática e professôres primários. Êstes três últimos cursos foram orientados pela professôra JOANA DE OLIVEIRA BENDER.

Depois, dêstes cursos, vários professôres da Universidade Federal do Rio Grande do Sul colaboraram com o Instituto de Educação "General Flôres da Cunha" e a Secretaria de Educação e Cultura na formação de seus professôres.

Em 1961, no Instituto de Educação "General Flôres da Cunha", houve um curso intensivo sôbre Iniciação à Teoria dos Conjuntos, para professôres de Direção de Aprendizagem em Matemática técnicos em Educação do Centro de Pesquisas e Orientação Educacionais, professôres primários, professôres-alunos do curso de Supervisores Escolares e normalistas.

O ano de 1964 caracterizou-se pelas seguintes realizações:

- na Faculdade de Engenharia, um curso sôbre a introdução à Teoria dos Conjuntos, com a duração de um ano, para professôres primários e secundários, organizado pela Associação dos Professôres e Pesquisadores da Matemática do Rio Grande do Sul, com a colaboração e participação do Centro de Pesquisas e Orientação Educacionais, da Secretaria de Educação e Cultura;

- no Colégio Estadual "Júlio de Castilhos", uma semana de estudos, orientada pelo Professor OSVALDO SANGIORGI;

- através da televisão um curso com a apresentação de alguns conceitos de Matemática Moderna;

- vários professôres riograndenses proferiram uma série de palestras, sôbre o ensino da Matemática Moderna em diversas escolas e entidades educativas no Rio Grande do Sul e Santa Catarina. No Rio Grande do Sul nas cidades de: Pôrto Alegre, Rio Grande, Pelotas, Caxias do Sul e no Estado de Santa Catarina em Florianópolis e Criciúma.

No ano de 1965:

- uma semana de estudos em Santa Maria e outras cidades do interior do Rio Grande do Sul orienta

dos pelo Professor OSVALDO SANGIORGI.

- em várias escolas de Pôrto Alegre um ciclo de palestras, pela professôra LUCIENNE FELIX;

- no Colégio Estadual "Júlio de Castilhos", reuniões semanais de estudos e debates assistidas por professôres de diversas escolas;

- na Faculdade de Ciências da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, um curso de noventa sessões para a modernização do estudo da Matemática no Rio Grande do Sul;

- no Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul um curso de três meses sôbre a Teoria de Conjuntos para professôres secundários;

- na Escola Normal "Paulo da Gama", de Pôrto Alegre teve início uma experiência com a Matemática, sôbre seu aspecto moderno, em quatro turmas de primeiro ano normal, sendo que, em duas turmas, foram utilizadas técnicas renovadas de trabalho;

- no Centro de Pesquisas e Orientação Educacionais, realizaram-se:

a. reuniões mensais de estudos para professôres de Pôrto Alegre e municípios vizinhos sôbre a introdução da Matemática Moderna na Escola Normal e Primária;

b. um curso de quatro meses para professôres de sexto ano primário, no qual alguns conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos foram estudados e debatidos;

c. palestras pela televisão sôbre a Teoria dos Conjuntos e a Topologia no ensino primário e médio;

d. um planejamento, para o presente ano, o qual sugere as diretrizes para a elaboração e aplicação de provas-diagnóstico sôbre o ensino da Matemática nos níveis primário e médio.

Considerando-se o exposto e a relevante significação, para a ação educativa, da adoção e desenvolvimento do ensino da Matemática (sob seu enfoque moderno), sugerimos sejam planejadas e executadas experiências sob critérios pedagógicos de classes experimentais e de contrôle, nos níveis de ensino pré-primário, primário e médio, para que se recolham dados científicos, e sôbre êles se formulem opiniões válidas das vantagens e desvantagens dos diferentes modos de orientação, no ensino desta ciência. Garantir-se-á, assim, um futuro promissor para os nossos alunos e as melhores perspectivas de acentuado progresso científico para nosso País.

<u>NOTA</u>: Encontram-se à disposição dos congressistas que desejarem examiná-los, os materiais sôbre as experiências acima referidas.

Equipe de Matemática da secção do Ensino Normal do Centro de Pesquisas e Orientação Educacionais e Execução Especializada da Secretaria de Educação e Cultura do Rio Grande do Sul.

Professôra de Psicologia ITÁLIA Z. FARACO
Professôra de Português DALVA DA ROSA DUPUY
Professôra de Didática VERA NEUSA LOPES
Professôra de Matemática ZILÁ MARIA GUEDES PAIM.

As comunicações apresentada por Antonio Ribeiro, Joana Bender e Zilá G. Paim.

INTRODUÇÃO NO ENSINO SECUNDÁRIO BRASILEIRO DO CONCEITO DE NÚMERO PRIMÁRIO

Joana de Oliveira Bender

<u>OBJETO</u>. Propor a introdução no Ensino Secundário do conceito de números primários (potências de número primos, segundo Bréard), pelas seguintes:

<u>RAZÕES</u>. a) Para evitar a grave imprecisão de considerar potência de primo como primo;
b) porque o conjunto dos fatôres primários " permite identificar o número fatorado, o que não acontece com o conjunto dos fatôres primos;
c) por sua importante aplicação, permitindo que se interprete a maximação e a minimação como intersecção e reunião de conjunto de fatôres primários respectivamente.

Exemplificando

(a)

<u>FATÔRES PRIMOS</u>	<u>FATÔRES PRIMÁRIOS</u>
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

(b)

A = conjuntos dos fatôres primos de $60 = \{2,3,5\}$

A_1 = conjunto dos fatôres primários de

$$60 = \begin{cases} 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 \\ 5^0 & 5^1 \end{cases}$$

B = conjunto dos fatôres primos de

$120 = \{2,3,5\}$

A = B

B_1 = conjunto dos fatôres primários de

$$120 = \begin{cases} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^0 & 3^1 \\ 5^0 & 5^1 \end{cases}$$

$A_1 \neq B_1$

(c)

Conjunto dos fatôres primários de

$$(60\ D\ 120) = A_1 \cap B_1 = \begin{cases} 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 \\ 5^0 & 5^1 \end{cases}$$

Conjunto dos fatôres primários de

$$(60\ M\ 120) = A_1 \cup B_1 = \begin{cases} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^0 & 3^1 \\ 5^0 & 5^1 \end{cases}$$

Neste último caso o próprio diagrama de Venn, está a indicar que os conceitos de m.d.c. e m.m.c., segundo esta interpretação, se evidenciam lógicos e conclusivos.

O MÉTODO DEDUTIVO

ANPPM

1. Tratamento Empírico dos Problemas Matemáticos

Notas históricas nos mostram o conhecimento de nºs e formas na Mesopotâmia (5.700 A.C.) e no Egito (4.200 A.C.). Êsses conhecimentos, possivelmente, provieram das necessidades agrícolas (elaboração de um calendário), da engenharia (construções, obras de irrigação e medição de terra). Com a aplicação dos conhecimentos acêrca dos nºs à indústria e ao comércio surgiram os primeiros rudimentos de álgebra.

Grande nº dos trabalhos eram coleções de regras práticas obtidas através de experimentação, mas, cujos resultados eram suficientes para as suas necessidades, embora muitas das fórmulas empregadas fossem falsas. Interessa-nos aqui, o método empregado na aquisição dêsses conhecimentos e não pròpriamente o seu conteúdo.

O método empregado pelos Babilônios e Egipcios (Método de "tentativa e êrro") baseava-se em raciocínios empíricos que, de certo modo são obtidos por observação e experimentação não sendo envolvidas considerações de ordem lógica.

Grande parte da matemática elementar foi estabelecida pelos processos empíricos de observação e experimentação durante um longo período de tempo.

1.1. Aparecimento do método dedutivo

Os gregos talvez motivados pelo desenvolvimento da filosofia, pela natureza de sua sociedade que desdenhava os trabalhos manuais e pelo seu amor a beleza, foram os primeiros levados a abandonar os pro -

cessos empíricos e a estabelecer conclusões matemáticas por processo dedutivo. Êste foi considerado pelos gregos como indispensável ao estabelecimento das teorias matemáticas. A nossa principal fonte de informação a respeito, é o "Sumário Eudemian" de Proclus.

1.2. Método dedutivo nos tempos antigos

Os Elementos de Euclides constituem o primeiro marco significativo da história da matemática, onde um pensamento sistemático e organizado aparece, embora alguns vestígios do método dedutivo sejam encontrados em épocas anteriores a Euclides.

Os "Elementos" compõe-se de treze livros. No princípio do livro I encontra-se uma lista de "Definições", "Postulados" e "Noções comuns" que eram considerados os princípios fundamentais, a partir dos quais Euclides deduz quatrocentos e sessenta e cinco (465) proposições.

A concepção sôbre o método dedutivo sofreu poucas alterações até o século XIX e serviu de modêlo para a construção de diversas teorias científicas.

Algumas definições da geometria de Euclides pretendem auxiliar a criação de imagens, pois, supomos que sua geometria visaria descrever o espaço físico. As noções comuns de Euclides chamadas por alguns "Axiomas" eram princípios tais como: "O todo é maior que a parte", comuns a tôdas as ciências. Os postulados são princípios aceitos como verdadeiros e peculiares a uma determinada ciência. As opiniões dos autores (já naquela época) sôbre o que seriam postulados e axiomas divergiam (Veja-se a respeito a definição de Aristóteles).

Investigações críticas mostram algumas falhas na estrutura lógica do trabalho de Euclides. Uma delas, por exemplo, foi a de usar expressões como "entre" e "continuidade" que não podem ser estabelecidas com base no seu sistema. Tais falhas, porém, não di-

minuem o grande valor da obra.

1.3. Evolução do método

A discussão sôbre a natureza dos axiomas e postulados teve como consequência uma nova concepção do método dedutivo.

II DESCRIÇÃO DO MÉTODO DEDUTIVO

Da impossibilidade de explicar o uso de cada expressão e justificar a validade de cada enunciado de uma disciplina, surgem as expressões fundamentais, das quais algumas são chamadas têrmos primitivos. A partir dêstes definimos os têrmos definidos. Outras aparecem da seleção de alguns enunciados cuja validade consideramos sem justificativa e que serão chamados axiomas. Depois de selecionados os axiomas aceitamos como válidos sòmente aqueles enunciados cuja validade é mostrada com base nos axiomas, definições ou enunciados cuja validade foi prèviamente estabelecida. Os enunciados nessas condições serão chamados teoremas.

A argumentação usada para demonstrar a validade dos enunciados provados é chamada DEDUÇÃO.

O método da construção de uma disciplina da maneira como foi estabelecida é denominado método dedutivo, e a disciplina assim construida disciplina dedutiva.

NOTAS COMPLEMENTARES

Os têrmos primitivos escolhidos na construção de uma disciplina são geralmente em número pequeno, e, dêles se pode dar uma interpretação intuitiva. Cumpre observar que um têrmo pode ser primitivo em uma construção e definido em outra. Se um enunciado primitivo de uma construção é substituido por outro poderá acarretar o aparecimento de novos resultados. Exemplo: A aceitação ou não do postulado de Euclides pode fazer surgir geometrias diferentes.

No desenvolvimento da construção dedutiva de uma disciplina outras disciplinas podem ser pressupostas. Na construção da lógica, particularmente, não se pressupõe nenhuma disciplina, mas, na construção de qualquer disciplina pode-se pressupor a lógica.

O método dedutivo é considerado um dos mais perfeitos na construção de disciplinas científicas e pode dar origem aos sistemas formais.

UM MÉTODO PARA DEDUÇÃO DA REGRA DE CRAMER

(Do livro:"Topics in Analysis" de Otto Toeplitz)

Antonio Rodrigues

Seja o sistema de equações $\sum a_{ij}x_j = b_i$ (1)

Considere-se o determinante $A = (a_{ij})$ (2)

Uma propriedade de determinantes permite multiplicarmos A por x_j e ao mesmo tempo a coluna j por x_j. Por outra propriedade, o determinante não se altera se multiplicarmos as demais colunas respectivamente por $x_1, x_2, \ldots x_n$ e acrescentarmos os resultados a coluna j que já está multiplicada por x_j. Isso se reduz, tendo em conta as equações (1) a trocar na matriz (a_{ij}) a coluna j por b_j. Indiquemos por A* o determinante da matriz obtida com esta troca. Então

$A x_j = A^*$ onde A^* = determinante da matriz (a_{ij}) com a coluna j trocada por b_j. Resulta pois a regra de Cramer

$$x_j = \frac{A^*}{A}$$

<u>Exemplo</u>

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}; \qquad Ay = \begin{vmatrix} 2 & 3y & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 3 & -2y & -4 \end{vmatrix}$$

$$Ay = \begin{vmatrix} 2 & 2x+3y+z & 1 \\ 1 & x+y+z & 1 \\ 3 & 3x-2y-4z & -4 \end{vmatrix}$$

$$Ay = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

de onde se tira

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}}$$

PLANEJAMENTO DE UM CURSO DE GEOMETRIA COM BASE EM NOÇÕES VETORIAIS

Antônio Rodrigues

O presente planejamento de geometria se fundamenta nas noções de ponto, vetor e número real. Cremos ser possível introduzí-lo na 1ª série colegial, durante o 2º semestre, quando o aluno já está acostumado com a noção de vetor, dada na física. No entanto, o sucesso de sua adoção depende muito da maturidade dos alunos, o que nem sempre acontecendo torna recomendável o seu emprego na 2ª ou 3ª série colegial, juntamente com as noções usuais de geometria analítica.

O plano consiste em construir a geometria do espaço a partir das referidas noções, caracterizadas por postulados que abaixo mencionamos.

É conveniente que se faça um confronto deste planejamento com o método tradicional do desenvolvimento da geometria espacial, principalmente para fazer com que o aluno sinta a diversidade de tratamento e a possibilidade que se lhe oferece de generalizar o assunto para espaços de maior dimensão. Sobretudo deve ser ressaltado que as definições de axiomas de uma teoria aparecem como noções primitivas e teoremas numa outra.

1) As noções fundamentais, como dissemos acima, são: ponto, vetor, número real, que se supõem conhecidas do aluno, através de fatos físicos, como por exemplo a noção de fôrça, dá uma idéia de vetor.

2) Os axiomas, em número de 6, procuram caracterizar tais noções de maneira a fazê-las corresponder às idéias usuais. Devem ser introduzidas gradualmente, por motivos didáticos, como se pode perce-

ber pela exposição que fazemos a seguir.

Inicialmente damos os axiomas que relacionam pontos com vetores. Depois de introduzir a noção de adição de vetores damos os demais axiomas que relacionam os números com os vetores, os axiomas que permitem introduzir as noções métricas, o axioma que caracteriza o espaço como sendo um espaço de dimensão três e finalmente, após o exame de alguns teoremas, o conhecido postulado de Euclides.

Êste planejamento permite, como será visto, desenvolver tôda a teoria de posição mútua de retas e planos, de paralelismo e perpendicularismo destas figuras de um modo simples.

Axiomas e alguns teoremas.

1) Dois pontos A e B determinam um único vetor $\vec{v}$, o qual é indicado por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou também por $\vec{V} = B - A$, de tal modo que se os pontos C, D determinam o mesmo vetor $\vec{v}$ então os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são iguais.(figura 1) Em outras palavras, os pontos A,B,C,D formam um paralelogramo

Fig. 1

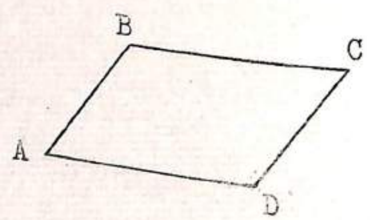
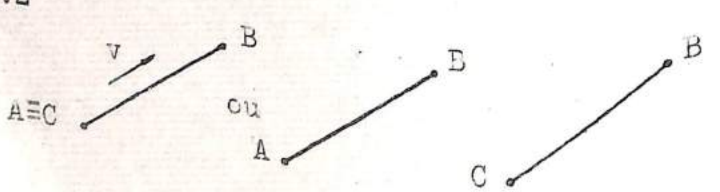


Fig.2



2) Um ponto A a um vetor $\vec{v}$ determinam um único ponto B que é indicado por $B = A + \vec{v}$, de tal modo que o par A,B determina $\vec{v}$. Além disto, se o ponto C e o vetor $\vec{v}$ determinam o mesmo ponto B então A = C. (fig. 2), isto é, se $C \neq A$ então $B = A + \vec{v} \neq B' = C + \vec{v}$

Estes axiomas permitem introduzir a noção de adição de vetores de seguinte maneira; através do:

Teorema: Dados dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ existe um único vetor $\vec{s}$ tal que qualquer que seja o ponto A tem-se:

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + \vec{s}$$

Demonstração: O ponto A e o vetor $\vec{u}$ determinam um único ponto $B = A + \vec{u}$. O ponto B e o vetor $\vec{v}$ determinam um único ponto $C = B + \vec{v}$. Os pontos A e C determinam um único vetor $\vec{s}$. Resulta que

$$C = A + \vec{s} \quad e \quad C = B + \vec{v} = (A + \vec{u}) + \vec{v}$$

O vetor $\vec{s}$ independe da escolha de A porque se $\vec{u}$ com A', determinam B' seria $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ e se $\vec{v}$ com B' determinasse C' seria $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ logo $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ (fig. 3) e consequentemente $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \vec{s}$.

O vetor $\vec{s}$ depende sòmente da escolha dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e se chama soma desses vetores. Escreve-se $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

É fácil de ver que $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

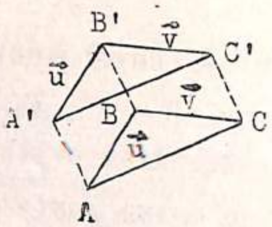


Fig.3

O vetor $\vec{u}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v}$ é chamado de vetor nulo e indicado por $\vec{0}$. Resulta que 1º) $A + \vec{0} = A$; 2º) o par de pontos A,A determina o vetor nulo. O vetor $\vec{v}^* = BA$ se chama oposto de $\vec{v} = AB$ e é tal que $\vec{v}^* + \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}^* = 0$ e indica-se $\vec{v}^*$ por $-\vec{v}$.

3) Um número real x e um vetor $\vec{v}$ determinam um único vetor $\vec{w}$, que se indica por $\vec{w} = x\,\vec{v}$ de tal modo que se acham verificadas as seguintes reações:

a) $(x+y)\,\vec{v} = x\vec{v} + y\,\vec{v}$

b) $x(\vec{v} + \vec{u}) = x\,\vec{v} + x\,\vec{u}$

c) $(xy)\vec{v} = x(y\,\vec{v})$

d) $1.\vec{v} = \vec{v}$

Antes de prosseguir com os demais axiomas é conveniente introduzir as definições de reta e plano e mostrar que os conhecidos axiomas da geometria clássica, como por exemplo, que dois pontos determinam uma reta, que três pontos não alinhados determinam um plano, são neste nosso planejamento, teoremas fáceis.

A reta é definida como sendo um conjunto pontual com a propriedade de que se A, B, X são três pontos quaisquer desse conjunto então existe um número real tal que $\overrightarrow{AX} = x\,\overrightarrow{AB}$. Em outros têrmos, a reta fica caracterizada pela expressão:

$$X = A + x\,(B - A)$$

onde A, B são dois pontos fixos dessa reta e X um ponto variável conforme o valor atribuido ao número x. O vetor $\vec{v} = B - A$ é chamado de uma base dessa reta e a classe de todos os vetores $\vec{w}$ tais que $\vec{w} = x\,\vec{v}$ é chamada de direção dessa reta.

A subclasse desta com $x > 0$ é dita 1 sentido. Tal reta pode, assim ser determinada pela expressão $X = A + x\,\vec{v}$ onde $\vec{v}$ é um vetor diretor. É evidente que dois pontos A, B quaisquer determinam uma reta e precisamente a reta constituida pelos pontos X tais que $X = A + x\,\vec{v}$ onde $\vec{v} = B - A$. Esta reta contém os pontos A, B bastando para isto dar a x os seguintes valores $x = 0$ e $x = 1$.

O plano é definido como sendo um conjunto pontual com a propriedade de que se X, A, B, C são quatro pontos quaisquer desse conjunto, onde três deles não está em linha reta, então existem dois números reais tais que o vetor $\vec{X}$ se acha relacionado com os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ mediante a expressão

$$\overrightarrow{AX} = x(\overrightarrow{AB}) + y(\overrightarrow{AC}).$$

Em outros têrmos, o plano fica caracterizado pela expressão

$$X = A + x(B - A),$$

onde A,B,C, são três pontos desse plano, não em linha reta, e X é um ponto variável conforme os valores de x,y.

$\vec{w} \neq \lambda\,\vec{v}$

Os vetores $\vec{v} = B-A$ e $\vec{w} = C-A$, são tais que e o par $\vec{v},\vec{w}$ é chamado de uma base do plano.

É evidente que três pontos não em linha reta determinam um plano e é fácil de ver que se uma reta tem dois pontos A,B em comum com um plano ela se acha contida nesse plano. (basta em $X = A + x(B-A)+y(C-A)$ fazer $y = 0$).

4. Axioma da métrica: Dois vetores quaisquer $\vec{v},\vec{w}$ determinam um único número x, chamado produto escalar indicado por $x = \vec{v}.\vec{w}$ de tal modo que:

a) $\vec{v}.\vec{v}$ é positivo se $\vec{v} \neq 0$ e nulo se $\vec{v} = 0$

b) $\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) . \vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v} . \vec{w}$

d) $(x\vec{v}).\vec{w} = x(\vec{v}.\vec{w})$

O axioma da métrica permite introduzir as noções métricas usuais do espaço como sejam a de distância de dois pontos, a de ângulo de duas direções, perpendicularismo etc. Para isto definimos o módulo de um vetor $\vec{v}$ o qual é indicado por $|\vec{v}|$ como sendo o número dado por

$$\sqrt{\vec{v} . \vec{v}}$$

Definimos a distância entre os pontos A,B como sendo o módulo do vetor $\vec{v} = B-A$. Para introduzir o ângulo de duas direções ou de duas retas demonstra-se o seguinte:

Teorema de Schwarz: $|\vec{v} . \vec{w}| \leqslant |\vec{v}|\,|\vec{w}|$

Demonstração: O módulo de $x\vec{v} + \vec{w}$ sendo positivo ou nulo permite escrever

$$x^2|v|^2 + 2x(\vec{v}.\vec{w}) + |w| \geqslant 0$$

após efetuar $(x\vec{v} + \vec{w}) . (x\vec{v} + \vec{w})$.

A inequação acima é satisfeita para qualquer valor de x se o descriminante fôr negativo, isto é, se

$$(v . w)^2 |v|^2 . |w|^2 \leqslant 0$$

donde segue dita desigualdade.

Resulta que o número

$$\frac{\vec{v} . \vec{w}}{|\vec{v}| . |\vec{w}|}$$

em valor absoluto é menor ou igual a 1 e isto nos permite considerá-lo como sendo o cosseno de um ângulo α. Daí definir-se o ângulo de dois vetores $\vec{v}, \vec{w}$ como sendo um ângulo tal que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} . \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}$$

Dois vetores vetores $\vec{v}, \vec{w}$ serão chamados de paralelos se $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ e serão chamados de perpendiculares se $\vec{v} . \vec{w} = 0$.

Estas noções são fàcilmente estabelecidas para retas, mediante o uso de suas direções. Assim, as direções das retas $X = A + x\vec{v}$ e $X^* = A^* + y\vec{w}$ são respectivamente determinadas pelos vetores $\vec{v}, \vec{w}$; dizemos que elas são respectivamente paralelas, perpendiculares conforme tais vetores sejam respectivamente paralelos, perpendiculares.

Uma reta se dirá paralela a um plano se ela fôr paralela a uma reta desse plano. Os teoremas de paralelismo que citaremos adiante mostrarão que uma tal reta não encontra nenhuma reta desse plano. Dois planos se dizem paralelos se qualquer reta de um dêles fôr paralelo ao outro.

Uma reta se dirá perpendicular a um plano se fôr perpendicular a duas retas desse plano não paralelas entre si. Um plano se dirá perpendicular a outro se contém uma reta que é perpendicular a êsse outro plano. Os teoremas de paralelismo e perpendicularismo caracterização perfeitamente estas noções.

5. Axioma da dimensão: Existem no espaço pelo menos um grupo de três vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ com as seguintes propriedades: (fig. 4)

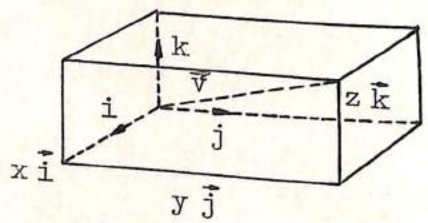


Fig. 4

a) Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são mùtuamente perpendiculares e cada um dêles tem módulo igual a 1.

b) Todo vetor $\vec{v}$ do espaço é da forma $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

A figura 4 não só elucida bem o sentido deste teorema como é indispensável que seja apresentada ao aluno, mediante apelo as noções intuitivas sôbre o espaço ambiente.

Resulta deste axioma que o módulo de um vetor $\vec{v}$ é dado pela fórmula

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e o produto escalar do vetor $\vec{v}$ pelo vetor

$$w = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

é dado por

$$\vec{v}.\vec{w} = xx' + yy' + zz'$$

Um sistema ortogonal de coordenadas, também chamado de sistemas cartesianos é constituído das retas, mutuamente perpendiculares, que passam por um dado ponto O, chamado origem, e cujas direções são determinadas pelos vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ora, como cada ponto X do espaço determina como a origem O um vetor $v = X - 0$ e por outro lado sendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ resulta que podemos a cada ponto X associar um terma de números x,y,z chamadas as coordenadas desse ponto X.

É interessante neste momento mostrar que se ao enunciar o axioma da dimensão tivessemos estabelecido a existência de pelo menos um grupo constituído sòmente de dois vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, (no lugar de três) mùtuamente ortogonais e cada um deles unitários de modo que fôsse $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ para todo vetor $\vec{v}$ do espa ço, êste seria um plano e tôda a geometria desenvolvida seria a geometria plana.

Torna-se, agora, fácil de ver que a distância de dois pontos A,B respectivamente de coordenadas (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) é dada por

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Também é fácil, em face das definições, obter as equações de uma reta e de um plano e daqui fazer tôda a geometria analítica.

Para concluir resta-nos examinar, ainda que brevemente os teoremas, que decorrem do material apresentado até aqui. Falta-nos ainda introduzir o postulado de Euclides, o que será feito adiante:

1) Teoremas de paralelismo:

a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Resulta imediatamente do fato que se $\vec{v},\vec{w},\vec{u}$ são vetores que dão as direções dessas retas tem-se $\vec{v} = x\vec{w}$ e $\vec{w} = y\vec{u}$ por hipótese, logo $\vec{v} = xy\vec{u}$ tese.

b) Duas retas paralelas não se encontram, De fato, se tivessem um ponto A em comum, poderíamos escolher um ponto B numa reta e um ponto C na outra de modo que fôsse $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ e consequentemente B coincidiria com C. Então essas retas teriam dois pontos em comum e coincidiriam.

c) Duas retas paralelas AB e CD se acham num mesmo plano. Resulta do fato de que podemos indicá-las respectivamente por

$$X = A + x\vec{v} \quad e \quad Y = C + y\vec{v}$$

onde

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

INICIAÇÃO OU INTRODUÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA ESCOLA SECUNDÁRIA

Osny A. Dacól

1.0 - Noção intuitiva de conjuntos
 1.1 - Exemplos de agrupamentos, classes, coleções, grupos, coletividades, equipes, famílias, regimentos, etc., conjuntos.
 1.2 - Sub-conjuntos ou partes de um conjunto; conjunto universal.
 1.3 - Igualdade de conjuntos

2.0 - Operações concretas entre conjuntos
 2.1 - Acomodação, contagem, escôlha, etc.
 2.2 - Intersecção, união, diferença, complementação.
 2.2.1 - Conjunto vazio, conjunto singular, conjunto binário.

3.0 - Números naturais
 3.1 - Potência de um conjunto — bijeção
 3.2 - Conjuntos equipotentes — "
 3.3 - Número cardinal de conjuntos equipotentes
 3.4 - Denominação e simbolização (numerais) dos números cardinais de conjuntos equipotentes
 3.4.1 - Sucessão dos números naturais.

4.0 - Operação formal entre os elementos de um conjunto
 4.1 - Operação definida completamente entre os elementos de um conjunto. Operação interna ou fechada; operação binária.
 4.1.1 - Propriedades das operações internas

5.0 - Números artificiais (reais)
 5.1 - Adição de números naturais. Propriedades.

 5.2 - Subtração de números naturais (como operação inversa da adição)
 5.2.1 - Subtração de números naturais caso em que o minuendo é menor que o subtraendo: aparecimento ou criação dos números negativos.
 5.3 - Números inteiros
 5.4 - Multiplicação de números naturais. Propriedades.
 5.5 - Divisão de números naturais (como operação inversa da multiplicação)
 5.5.1 - Divisão de números naturais caso em que o dividendo não é divisível pelo divisor: criação dos números fracionários.
 5.6 - Números racionais
 5.7 - Potenciação de números naturais. Propriedades.
 5.8 - Radiciação de números naturais (como operação inversa da potenciação)
 5.8.1 - Radiciação de números naturais caso em que o radicando não é uma potência exata em relação ao índice da raíz ou do radical: criação dos números irracionais
 5.9 - Números reais. Representação gráfica dos números reais.

Justificativa: após 2 anos de experiência no Colégio Estadual do Paraná, com a introdução da matemática moderna nas 1ª e 2ª séries ginasiais e a leitura de várias obras sôbre o assunto entre as quais "Mathématique Moderne" volume 1 de Papy; Psicologia da Inteligência de J.Piaget; Introdução à Filosofia da Matemática de B.Russel; "Um, dois, três,...infinito"; Matemática - Curso Colegial - 3 volumes da S.M.S.G. - Editôra Universidade de Brasilia; Revista "La Educación" nºs 37-38-Enero-Junio 1965 - Año X - La Enseñanza de La Matemática Moderna, Publicação da União Panamericana.

Lembrete sôbre a Comunicação "Iniciação ou Introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária".

1.0 - Homens nascidos em 1930 (conhecido como "classe de 1930); coleção de sêlos; empregados de uma firma; regimento de cavalaria; equipe de futebol; dizer que qualquer um dêsses casos pode-se dizer conjunto disso ou daquilo... palavras sinônimas.

1.2 - Sub-conjunto é um conjunto que está contido n'outro ou que cada elemento seu pertence a êsse outro. Se diz que entre um sub-conjunto e um conjunto existe uma relação de inclusão. Um sub conjunto é também considerado uma parte de um conjunto.

Obs. quando um elemento pertence a um conjunto se diz que entre o elemento e o conjunto existem uma relação de pertinência.

existem 2 tipos de sub-conjuntos:

a) sub-conjunto próprio: se diz que um sub-conjunto A de um conjunto B é próprio ou que A está contido pròpriamente em B se existe pelo menos um elemento pertencente a B e que não pertence a A.

Ex. $\{a, e\} \subset \{a,e,i\}$ o 1º é um sub-conjunto próprio do 2º

b) sub-conjunto impróprio: se todo elemento de um conjunto A também pertence a um conjunto B e vice-versa, se diz que A está contido impròpriamente em B ou que B contém impròpriamente A

Ex. $\{a,e,i\} \subseteq \{i,e,a\}$

Obs. nêsse caso se diz também que $A = B$.

2.0 - Operação concreta - quando se consideram objetos ou entes da vida em comum.

2.1 - Acomodação - acomodar várias pessoas em ordem crescente por tamanho;
Operação de mistura - ao serem misturados 2 substâncias quaisquer; escôlha - ao se formar uma equipe de qualquer modalidade esportiva, mediante a "escôlha" dos melhores elementos que a compõem, etc.

2.2 - Intersecção de conjuntos - é uma operação que tem por finalidade a determinação de um novo conjunto chamado Conjunto Intersecção, cujos elementos são os elementos comuns aos conjuntos dados.

Ex. $\{a,e,i,o\} \cap \{a,k\} = \{a\}$, chamado conjunto singular

$\{a,e,o\} \cap \{p,q\} = \phi$ chamado conjunto vazio

$\{a,e,i,o\} \cap \{p,a,e\} = \{a,e\}$ chamado conjunto par

União ou reunião de conjuntos: é uma operação que tem por finalidade a determinação de um novo conjunto cujos elementos são os elementos comuns e não comuns aos conjuntos dados.

Ex. $\{a,e,i,o\} \cup \{a,e,p,r\} = \{a,e,i,o,p,r\}$

Diferença de 2 conjuntos A e B: é uma operação que tem por finalidade a determinação de um novo conjunto cujos elementos pertencem a A, mas não pertencem a B.

Ex. $A = \{a,e,i,o,u\}$ ou $\{a,e\}$ ou $\{a,e,i,o\}$

$B = \{a,e\}$ ou $\{o,u\}$ ou $\{a,e,i,o,u\}$

1) $A - B = \{i,o,u\}$

2) $A - B = \{a,e\}$

3) $A - B = \{\ \}$

Complementação:

1) Conjunto complementar - Dados A e B, 2 conjuntos quaisquer, se B está contido em A então A-B chama-se conjunto complementar de B em relação A, cuja notação é $C_A B$.

2) Complementação: é a operação mediante a qual se obtém o complemento.

3.1 - Potência de um conjunto: é a quantidade de elementos que possui êsse conjunto.

3.2 - Conjuntos equipotentes: são os conjuntos que têm a mesma potência ou a mesma quantidade de elementos.

Exemplo de conjuntos equipotentes:

{ooo}

{^^^}

{^^^}

3.3 - Número cardinal de conjuntos equipotentes: é a propriedade comum que êsses conjuntos têm de possuirem a mesma quantidade de elementos. Notação é #

Ex. # {ooo} = #{^^^} = #{```}

3.4 - O Cardinal do conjunto vazio chama-se zero e em nosso sistema de numeração é representado pelo símbolo "0" indú-arábico também chamado numeral indú-arábico; ou algarismo

O Cardinal dos conjuntos singulares é chamado um e representado pelo numeral indú-arábico(nosso sistema de numeração) "1"

O Cardinal dos conjuntos binários é chamado dois e idem "2"

O Cardinal do conjunto {1,2,0} é chamado três e representado pelo símbolo ou numeral "/3" e assim por diante.

3.4.1 - Conjunto ou sucessão dos números naturais: {0,1,2,3,4,......}

4.0 - Operação formal: não interessa o conteúdo da operação (3 mais 4, não há necessidade de saber o que o 3 ou o 4 indicam)

4.1 - "Se diz que uma operação é completamente definida entre os elementos de um conjunto, quando aplicada a 2 ou mais dêsses elementos, o resultado é um elemento pertencente ao conjunto."

Ex. A = {a,b,c, ...}

Operação: o

Aplicação: a o b = c

Obs. nêsse caso a operação é chamada fechada ou interna em relação ao conjunto; quando a operação é feita entre dois elementos se diz que a mesma é uma operação binária.

4.1.2 - Propriedades das operações internas

a) fechamento
b) comutativa
c) associativa
d) elemento neutro
e) elemento simetrizável
f) distributiva de uma operação em relação à outra.

5.0 - Números artificiais reais

Inteiros: naturais e negativos - Z
Racionais: números fracionários e inteiros - Q
Reais: números racionais e irracionais - R

Sistema matemático

Se diz que existe um sistema matemático quando é dado um conjunto no qual está definida uma operação.

Ex. Conjunto dos números naturais
Operação definida: adição

Estrutura matemática

Se diz que existe uma estrutura matemática quando é dado um sistema matemático e é válida pelo menos uma das propriedades das operações internas a partir da associativa, podendo ou não ser válida a propriedade comutativa. Conforme as propriedades válidas uma estrutura matemática é chamada:

a) Estrutura de semi-grupo: a operação é interna em relação ao conjunto e é válida a propriedade associativa podendo ou não ser válida a comutativa.

Ex. Conjunto dos números naturais, exclusive o zero

Operação: adição, na qual são válidas as propriedades fechamento (diz que é interna), comutativa (não interessa à estrutura) e associativa.

b) Estrutura de monóide: a operação é interna em relação ao conjunto e o conjunto é um semi-grupo em relação à operação sendo ainda válida a propriedade do elemento neutro

Ex. Conjunto dos números naturais
Operação: adição na qual são válidas as propriedades fechamento, comutativa (não interessa), associativa e elemento neutro.

c) Estrutura de grupo: quando o conjunto é um monóide comutativo ou não (quando a propriedade comutativa é válida ou não) e ainda é válida a propriedade do elemento simetrizável, nêsse caso o conjunto é chamado um GRUPO em relação à Operação.

Ex. Conjunto dos nºs inteiros
Operação: adição na qual são válidas as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro, elemento simetrizável, e naturalmente também a do fechamento. Quando também

é válida a propriedade comutativa o Grupo é chamado ABELIANO (vem de Abel, nome de um matemático que morreu com um pouco mais de 20 anos) ou comutativo.

d) Estrutura de anel: quando um sistema matemático está munido de 2 operações (por ex. adição e multiplicação) e acontece o seguinte:

1) a 1ª operação possui uma estrutura de grupo abeliano ou melhor o conjunto dado é que é um grupo abeliano em relação à operação.

2) a 2ª operação ou lei é associativa e também distributiva em relação à 1ª operação.

Ex.: Conjunto dos nºs inteiros

Operações: adição e multiplicação, sendo válidas,
para adição: associativa, elemento neutro e elemento simetrizável, comutativa, logo o conjunto é um grupo abeliano
para multiplicação: associativa, distributiva em relação à adição.
Conclusão: o conjunto dos inteiros é um anel em relação às operações de adição e multiplicação.

Obs. se também fôr válida a propriedade comutativa para a multiplicação o anel é chamado ABELIANO.

e) Estrutura de Corpo: um sistema matemático está munido de uma estrutura de corpo ou que o conjunto é um corpo em relação às operações do sistema quando o mesmo sendo um anel e suprimindo-se do conjunto o elemento neutro em relação à 1ª operação, a 2ª operação dêsse anel resulta numa estrutura de grupo.

Ex. Conjunto dos nºs racionais
Operações: adição e a multiplicação

O conjunto é um corpo em relação às 2 operações porque:

1) O conjunto dos racionais é um anel em relação às 2 operações;

2) Êsse conjunto exclusive o zero (e.n. da adição) é um grupo em relação à multiplicação porque para essa operação nêsse novo conjunto são válidas as propriedades comutativas, associativa, e.n. (um) elemento simetrizável

DETERMINANTES COM BASE NUMA DEFINIÇÃO RECORRENTE

Antonio Espada Filho

A. Razões do Trabalho

Acompanhando êsse movimento de remodelação no ensino da Matemática, procuramos fazer um estudo sôbre Determinantes, dando uma nova orientação para o ensino e aprendizagem de tal assunto do colégio, ou seja, um tratamento moderno dado a Determinantes.

Entre outras justificativas para tal comportamento, citamos aquela em que se trata Determinantes do modo clássico e usual, com uma aridez prejudicial ao ensino, com o aparecimento de teoremas difíceis para o nível do colégio e ainda sem o rigor necessário para suas demonstrações; um outro argumento a nosso favor é a inclusão do estudo de matrizes no programa do colégio e então a necessidade de dar um tratamento a Determinantes usando a mesma linguagem, pois são assuntos tratados sucessivamente. Também a necessidade da redução da teoria, sendo importante então que se aprenda o que seja Determinante, cálculo e propriedades mais usuais e algumas aplicações.

Outros argumentos existem, porém os já citados justificam as razões do trabalho.

B. Desenvolvimento do Trabalho

Procuramos por meio de sistemas simples de equações dar uma maneira de introduzir o conceito de Determinantes, associando a cada sistema com o mesmo número de equações e incógnitas, matrizes quadradas e observando que nos valores das incógnitas aparecem expressões constituídas pelos mesmos elementos da matriz associada.

Com êsses resultados, definimos Determinante como um número associado a uma matriz de uma forma recorrente. Portanto, pela definição, o cálculo de Determinantes de qualquer ordem é trivial. Exemplos e cálculos de determinantes são dados de uma maneira mais variada possível. Tratou-se das regras práticas usuais para o cálculo de determinante de 2ª e 3ª ordem, mas para êste verificou-se, com surprêsa nossa, que os alunos ainda preferem a definição.

C. Definição Adotada

Adotou-se no trabalho comunicado a seguinte definição:

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, determinante da matriz indicamos por $|A|$; e por definição:

1º) $n = 1, \quad A = \left[a_{11}\right] \Longrightarrow |A| = a_{11}$

2º) $n \neq 1, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$

$$|A| = a_{11}\cdot|A^{1;1}| - a_{21}\cdot|A^{2;1}| + \ldots (-1)^{n+1} a_{n1}\cdot|A^{n;1}|$$

onde $|A^{i;j}|$ é o determinante da matriz $A^{i;j}$, obtida da matriz A eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna, que denominamos matriz reduzida em cruz.

D. Seqüência de Teoremas

Os teoremas e propriedades aparecem na seguinte ordem:

1. Expansão por qualquer coluna.
2. Determinante da matriz transposta.
3. Teorema do produto de um número por um determinante. Aplicações.
4. Teorema da dissociação. Aplicações.
5. Teorema da troca de linha (ou colunas). Aplicações.
6. Teorema das filas paralelas. Aplicações.
7. Teorema da soma de filas paralelas. Aplicações.

Adotada a definição dada, as demonstrações são bastante simples, exceto a propriedade 1, que por isso foi tratada no apêndice, mas inicialmente induzida de casos particulares para explicação em aula, conforme o texto.

No apêndice do trabalho tratou-se de algumas aplicações de determinantes à geometria analítica.

E. Resultados

O trabalho já foi aplicado em vários colégios, onde se observou bons resultados, principalmente da economia do tempo e aprendizagem das provas.

É digno de se destacar que, pelas finalidades dos determinantes ao nível colegial, a sequência de teoremas é desnecessária, pois com a definição os alunos têm um recurso prático imediato de cálculo, ganhando-se portanto em horas-aula; alguns professôres obtiveram as propriedades raciocinando só sôbre determinantes de baixa ordem, como é usual em alguns livros estrangeiros.

F. Observação

Após a comunicação, a dúvida apresentada foi relativa ao possível não entendimento da demonstração do teorema da troca de filas, no que, sem por em discussão a objeção, prometemos pensar numa outra prova.

G. Bibliografia

O trabalho segue a linha adotada pela obra de Arno Jaeger - Introduction to Analytic Geometry and Linear Algebra - Holt, Rinehart and Winston, Inc. N.Y. - [1960]; mas com resultados teóricos nossos, além da forma didática apresentada.

Entre outros consultou-se:

BARBOSA,R.M. - Introdução Elementar de Matrizes no Curso Colegial - In: Matemática Moderna para o Ensino Secundário - S.Paulo - G.E.E.M./I.B.E.C.C. - [1962].

CARAÇA,B.J. - Lições de Álgebra e Análise - Vol. I - Lisboa - 1956.

LACAZ NETTO,F.A. - Teoria Elementar dos Determinantes - S.Paulo - [s.e.] - 1950.

UNSPENSKY,J.V. - Teoria de Equaciones - Tradução - [B.Aires] - CEI - "LLR" - 1958.

VANCE,E.P. - An Introduction to Modern Mathematics - Addison Wesley Publ. Comp.Inc.Massachusetts - [1963].

WESTERN,D.and Haag - An Introduction to Mathematics - N.Y. - Henry Holt - [1959].

GEOMETRIA NO GINÁSIO - RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA REALIZADA NOS GINÁSIOS VOCACIONAIS DE SÃO PAULO

Lucília Bechara e Elza Babá Akama

Introdução

Os problemas mais freqüentes no ensino da matemática, são os relacionados com a geometria.

Êste problema tem sido amplamente discutido em congressos e colóquios de matemática e a conclusão mais freqüente é de que o atual ensino da geometria precisa ser reformulado.

Concretizados os primeiros planos de modernização do ensino da matemática no Brasil, são dados apenas alguns passos para a atualização do ensino da geometria que ainda continua desintegrada.

O que apresentamos aqui são ensaios válidos para atingir metas de educação bem definidas, não são resultados prontos que se entrega ao consumo, trata-se de verdadeira luta com recuos e avanços novos, uma pesquisa constante onde até os erros se incluem como marcos na procura da verdade.

Na experiência de geometria realizada nos Ginásios Vocacionais de São Paulo desenvolvemos conceitos novos de geometria e aplicamos técnicas pedagógicas renovadas.

Devemos lembrar que são dois aspectos distintos: Renovação pedagógica e Matemática Moderna.

As idéias aqui apresentadas acreditamos ser de grande proveito aos bem intencionados.

Na 1ª série os alunos formam o conceito de medida e operam com medidas de segmentos e ângulos com áreas e volumes; aplicam as propriedades das operações em problemas de determinação de área ou perímetro de figuras planas assim como conceituam ou definem reta, semi-reta, segmento, ângulo, polígono, triângulo, etc.

Na segunda série os alunos fazem experiências concretas e traçados que levam a perceber relações métricas como: soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, relação entre os ângulos de paralelas com transversal, relação de Pitágoras, relação entre as medidas dos ângulos central e inscrito de mesmo arco, etc. Esses fatos são explorados em equacionamento de problemas.

No primeiro semestre da terceira série, desenvolvemos o conceito de transformação geométrica e estudamos as isometrias através de traçados e fazemos alguns encadeamentos lógicos.

No segundo semestre da terceira série, estudamos os conceitos de implicação, equivalência, axiomas, teoremas, conceito primitivo, definição, através de exemplos da vida corrente e da álgebra e outros; em geometria partimos dos enunciados que definem congruência entre triângulos ("deduzidas" pelos alunos, através do conceito de congruência como relação que mantém as distâncias), e fazemos encadeamentos lógicos que levam a alguns enunciados como o da coincidência da altura e mediana nos triângulos equiláteros, o da congruência das diagonais dos retângulos, etc...

No primeiro semestre da quarta série desenvolvemos os conceitos de transformações homotéticas e de semelhança e os aplicamos em proporcionalidade e equacionamento de problemas.

No segundo semestre da 4ª série partimos das definições de semelhança entre triângulos ("deduzidas" pelos alunos através dos invariantes de homotetia) e

fazendo pequenos encadeamentos lógicos chegamos a alguns enunciados como os das relações métricas nos triângulos.

Dada a impossibilidade de aqui desenvolver tôdas as etapas, iremos fazer um resumo das idéias mais importantes para um professor, que pretende reformular seu esquema de geometria no Curso Ginasial.

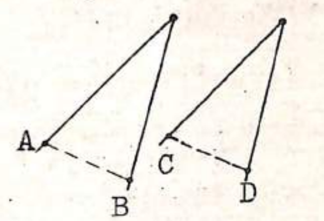
<u>Distância de pontos - conceito primitivo</u>

Dizemos em seguida que a distância de A a B é igual a distância de C a D e simbolizamos

$$d(A,B) = d(C,D)$$

se e sòmente se conservando a abertura de um compasso determinarmos os pares de pontos (A,B) e (C,D).

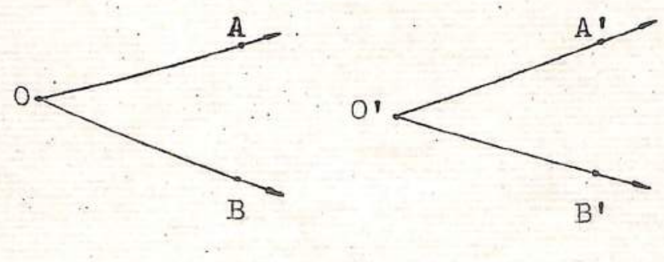
Observação: Pretendemos definir distância através de axiomas, no segundo ciclo.



<u>Abertura de ângulos - conceito primitivo.</u>

Dizemos que os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$ têm a mesma abertura se e sòmente se, dadas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'A'}$ e $\overrightarrow{O'B'}$, $d(O,A) = d(O',A')$ e $d(O,B) = d(O',B')$ e

$$d(A,B) = d(A',B')$$



Se $d(O,A) = d(O',A')$ e $d(O,B) = d(O',B')$ e $d(A,B) <$
$< d(A',B')$ então a abertura do ângulo $\widehat{AOB}$ é menor que a do ângulo $\widehat{A'O'B'}$.

Transformações Geométricas

Foram desenvolvidas dando uma figura F e fazendo determinar sua imagem F' através de uma lei dada.

Dizemos que F' é o transformado de F através da lei dada. Todo ponto A de F tem um e um só correspondente A' em F'.

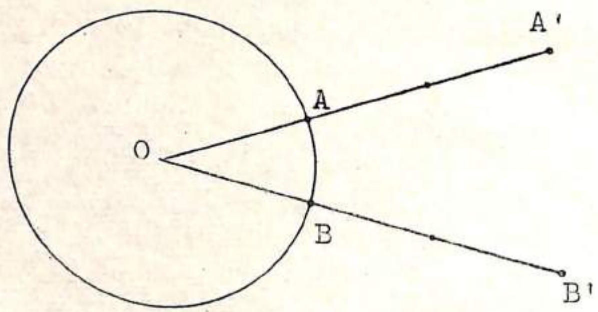
O aluno compreende esta idéia através de exercícios como:

1. Transformar o círculo (O,r) no círculo (O',r') obedecendo às leis

   a) $\forall A \in (O,r)$, $2d(O,A) = d(A,A')$, $A' \in (O',r')$

   b) A está entre O e A'

O modelo apresentado pelos alunos é:

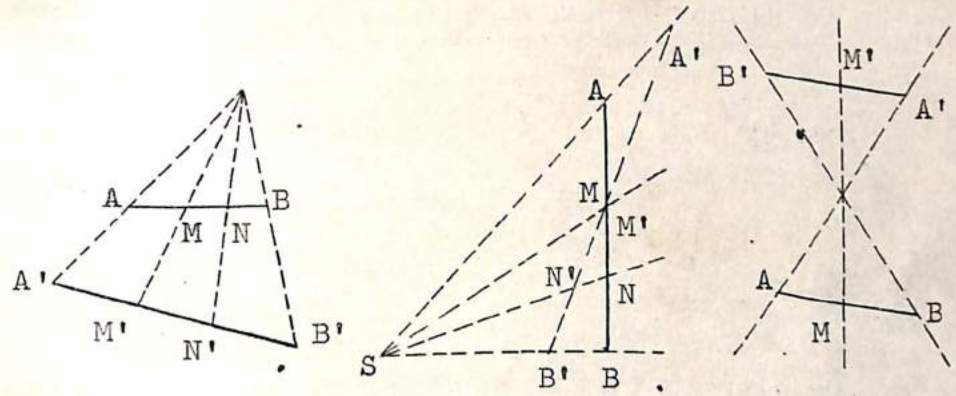


2. Transformar $\overline{AB}$ em $\overline{A'B'}$ obedecendo as seguintes leis

   a) Dados $S \notin \overline{AB}$, $\forall X \in \overline{AB}$, $X' \in \overline{A'B'}$, X, X', S são colineares

   b) os pontos da figuras transformada são colineares.

Os alunos apresentam modelos como



3. Transformar os pontos de uma semi-esfera $\mathcal{S}$ em pontos de um plano α paralelo ao círculo máximo da semi-esfera, obedecendo às leis :

   a) Dados $S \notin \mathcal{S}$ e $S \notin \alpha$, $\forall A \in \mathcal{S}$ e $A' \in \alpha$, $A' \in \overleftrightarrow{AS}$

Os alunos verificam nas transformações que algumas propriedades permanecem, outras não.

As propriedades que permanecem na figura transformada são os invariantes.

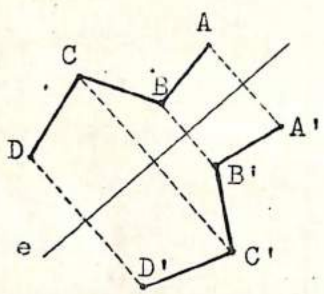
Assim, a colinearidade permanece no 2º exemplo, a curvatura permanece no 1º e não permanece no 3º, etc....

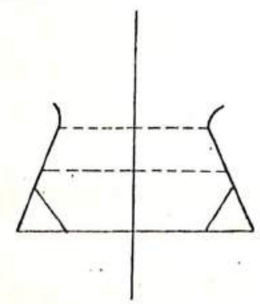
4. Transformar uma figura F em outra F' obedecendo às leis:

a) um ponto $A \in F$ e seu transformado $A' \in F'$ pertencem a uma reta perpendicular a reta e fixa;

b) um ponto $A \in F$ e seu transformado $A' \in F'$ são equidistantes do ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AA'}$ com o eixo e estão em semiplanos diferentes.

Os alunos apresentam modelos como





Os alunos verificam os invariantes: abertura dos ângulos correspondentes, distância entre pontos correspondentes, paralelismo e perpendicularismo.

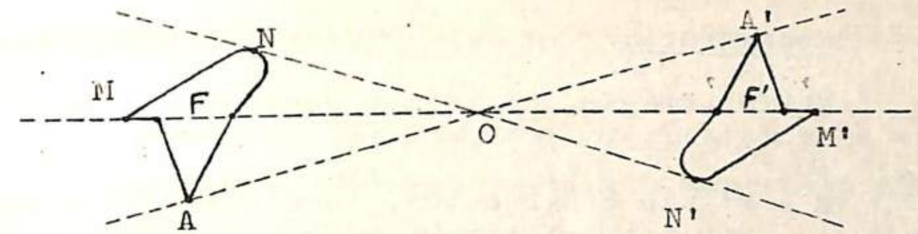
Chamamos esta transformação de SIMETRIA AXIAL

5. Transformar uma figura F em outra F', obedecendo às leis:

a) um ponto $A \in F$ e seu transformado $A' \in F'$ pertencem a semi-retas opostas, de origem O (ponto dado);

b) $d(O,A) = d(O,A')$

Os alunos apresentam modêlos como



Os alunos verificam os invariantes: abertura de ângulos correspondentes, distância entre pontos correspondentes, paralelismo e perpendicularismo.

Chamamos esta transformação de Simetria Central.

6. Transformar uma figura F em outra F', obedecendo às leis:

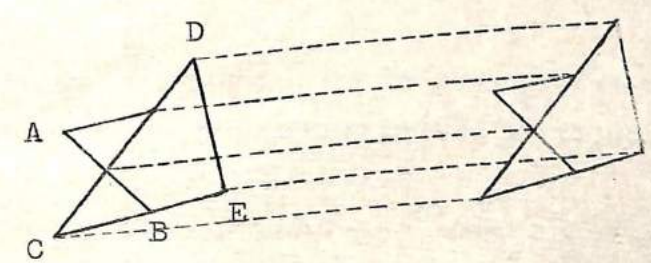
a) a distância entre qualquer ponto e seu transformado é constante, isto é,

$d(A,A') = d(V,V') = d(C,C')$, etc...

com $A,V,C \in F$ $A',V',C' \in F'$.

b) as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$, etc. devem ser paralelas.

Os alunos apresentam modelos como os seguintes e verificam os invariantes.



Congruência

Neste estágio, definimos congruência no plano:

F e F' são congruentes, se e sòmente se existir uma (ou mais) transformações tais que

$$\forall X,Y \in F \text{ e } X',Y' \in F', \quad d(X,Y) = d(X',Y')$$

Desta forma a verificação da congruência entre duas figuras só é possível quando fôr verificada a equidistância entre cada par de pontos e seus correspondentes.

Existem enunciados que simplificam esta verificação, no caso de segmentos, ângulos e polígonos:

"Dois segmentos AB e A'B' são congruentes se e sòmente se existe uma transformação tal que $d(A,B) = d(A',B')$".

"Dois ângulos são congruentes se e sòmente se tiverem a mesma abertura".

Êstes enunciados são provados quando os alunos no 2º semestre desenvolvem a dedução.

No caso dos triângulos simplifica-se ainda mais a verificação de congruência, através das definições:

"Dois triângulos são congruentes se e sòmente se possuem os três lados correspondentes congruentes".

"Dois triângulos são congruentes se e sòmente se os dois lados de um dêles e o ângulo por êles

determinado são congruentes a seus correspondentes no outro".

"Dois triângulos são congruentes se e sòmente se, um lado e os ângulos por êle suportado são congruentes a seus correspondentes no outro.

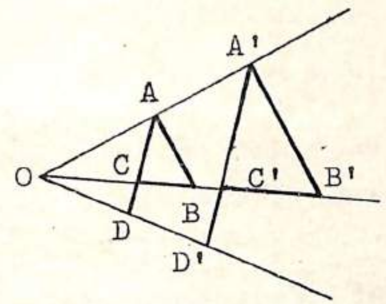
Homotetia

Propomos aos alunos transformações que obedecem as leis:

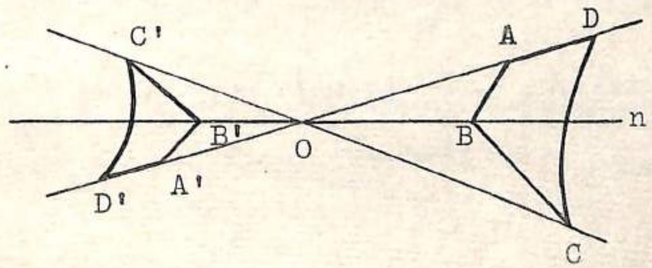
a) um ponto e seu transformado pertencem a uma mesma reta que contém o ponto O dado.

b) $\forall A \in F$ e $A' \in F'$, $OA:OA' = r$ (constante).

Os alunos apresentam modelos como



razão 1 : 3



razão - (2 : 1)

Analisamos os modelos para formalizar as duas possibilidades:

a) do ponto fixo O (centro de homotetia) estar entre os pontos A e A'

b) os pontos A e A' pertencem a mesma semi-reta de origem O.

Os alunos são levados a verificar os invariantes:

a) proporcionalidade das medidas dos pares de segmentos correspondentes

b) congruência dos ângulos correspondentes e consequentemente: paralelismo e perpendicularismo.

Êstes invariantes podem ser deduzidos partindo da Relação de Thales.

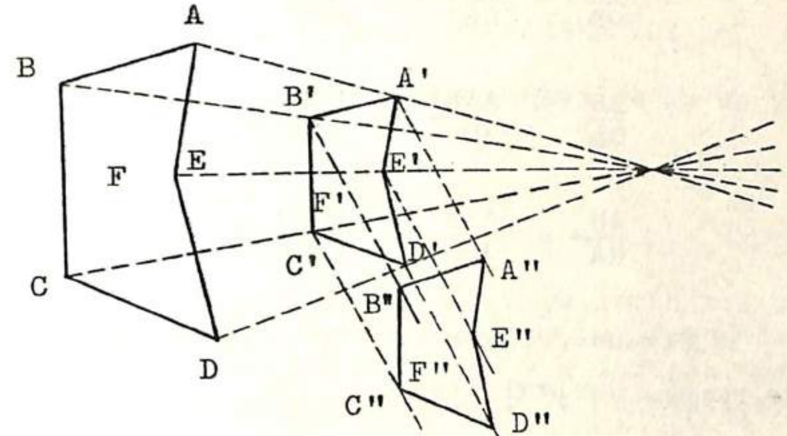
Semelhança

Definimos semelhança como uma relação entre figuras que conserva a proporcionalidade entre as distâncias correspondentes.

Partindo dessa definição podemos provar que nas figuras semelhantes os ângulos correspondentes são congruentes. Podemos também verificar que uma composição de isometrias e homotetias gera figuras semelhantes

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\text{homotetia}"] \arrow[rr, bend right, "\text{semelhança}"'] & F' \arrow[r, "\text{isometria}"] & F'' \end{tikzcd}$$

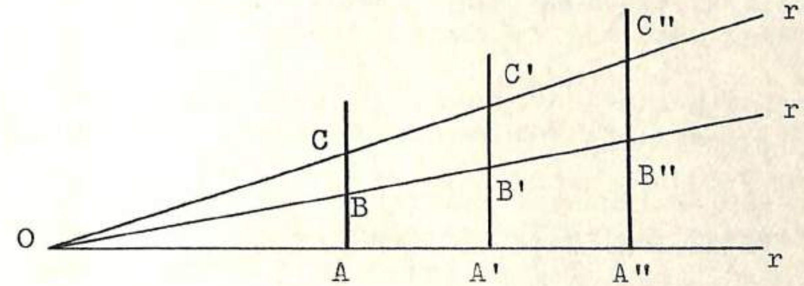
Modêlo:



Duas figuras F e F' são semelhantes, se e sòmente sse podemos passar de uma para outra através de homotetias e isometrias.

Relações Trigonométricas

Propomos uma transformação que gera um modêlo assim:



A direção das paralelas deve ser perpendicular à semi-reta $\overline{OA}$.

Nestas condições temos:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA''}{OB''} = a$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A''B''}{OB''} = b$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = c$$

Fixando-nos em r e r'' temos outro conjunto de razões equivalentes.

$$\frac{AC}{OA} = \frac{A'C'}{OA'} = \frac{A''C''}{OA''} \text{ etc.}$$

Os alunos acabam compreendendo algumas razões são constantes que dependem do ângulo formado pelas retas r e r'.

Definimos então seno, coseno e tangente.

$a = \cos \widehat{AOB}$

$b = \text{sen } \widehat{AOB}$

$c = \text{tg } \widehat{AOB}$

INTUIÇÃO E INDUÇÃO NA MATEMÁTICA

Luiz Oswaldo T. da Silva

1. Generalidades:

Para o fim de exercitar o raciocínio e esclarecer vários aspéctos, ora ilusórios, ora verdadeiros de certas proposições, a intuição e a indução desempenham um papel importante no ensino da matemática.

Como aparecem em pontos esparsos dêsse ensino, não são em geral devidamente focalizadas.

Não se deve confundir intuição com intuicionismo, embora haja remotos elos entre ambos.

2. Intuição:

Uma proposição matemática é intuitiva quando o seu enunciado nos parece verdadeiro, antes mesmo de ser demonstrado.

Esta demonstração, é não obstante, essencial pois uma afirmação embora intuitiva pode ser falsa.

Para esclarecer apresentamos várias proposições intuitivas, não intuitivas, verdadeiras e falsas:

1) Proposição intuitiva verdadeira: "de um ponto fora de uma reta, pode-se baixar uma perpendicular e sòmente uma a essa reta".

2) Proposição não intuitiva verdadeira: "o segmento que liga os pontos médios das diagonais de um trapézio é igual à semi diferença das bases."

3) Proposição intuitiva falsa: "se em um triângulo, duas cevianas correspondentes que partem de

dois vértices são iguais o triângulo é isósceles".
"Sôbre esta última faremos o seguinte comentário".

Demonstra-se fàcilmente:

a) Em todo triângulo isósceles duas cevianas correspondentes que partem dos dois vértices da base são iguais.

b) Se duas alturas de um triângulo são iguais êle é isósceles.

c) Se duas medianas de um triângulo são iguais êle é isósceles.

d) Se duas bissetrizes internas de um triângulo são iguais êle é isósceles.

Estas proposições nos levam a tentar generalizar para qualquer ceviana, o que seria o enunciado 3 acima. No entanto, tal não é verdadeira: demonstra-se que existem triângulos não isósceles com duas bissetrizes externas iguais. São chamados pseudo-isósceles: seus lados satisfazem a relação:

$$a^3 + 3\,abc - (a^2 + bc)(b + c) = 0$$

sendo iguais as bissetrizes externas que partem dos vértices B e C.

4) Proposição não intuitiva falsa: "dados dois círculos internos é sempre possível construir um triângulo inscrito no maior e circunscrito ao menor".

Sabemos que dado um triângulo qualquer existem dois círculos internos (um ao outro) tais que o maior é circunscrito ao triângulo e o menor é inscrito.

A proposição 4 seria a recíproca desta. Demonstra-se que em geral ela não é verdadeira; só o será se entre os raios dos dois círculos vale a rela-

ção de Euler.

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

onde: R é o raio maior
r é o raio menor
d é a distância entre os centros.

O número de exemplos de todos 4 tipos podia se suceder indefinidamente.

A intuição tem grande valor na matemática, como guia nas pesquisas mas deve ser controlada cuidadosamente, pois pode conduzir a graves erros.

3) <u>Indução</u>:

A indução é o método de se concluir uma proposição geral a partir de proposições particulares(ou seja casos particulares da proposição em geral).

A indução é um método usado não só na matemática como nas ciências naturais, embora com características completamente diferentes.

Na matemática o princípio da indução matemática se enuncia:

"Seja P(n) uma proposição definida para cada número natural n é verdadeiro para $n = 1$. Se P(k) sendo verdadeira acarreta P(k+1) ser verdadeira, então P(n) é verdadeira para todo conjunto dos naturais.

Observemos que se P(n) não é válida para $n = 1$ mas para $n = a$, então no enunciado acima podemos afirmar que P(n) é verdadeira para todo conjunto de inteiros $\geqslant$ a.

O princípio da indução pode-se enunciar de um modo um pouco diverso que é o seguinte:

"Se P(n) é uma proposição definida sôbre o conjunto dos naturais e verdadeira para P(k+1) se o fôr para $n \leqslant k$ e ainda se P(1) é verdadeira, então P(n) é verdadeira para todo conjunto dos naturais".

A veracidade de uma proposição P(n) para vários valores de n a partir de n = 1 (ou às vêzes de n = 0) não permite concluir a veracidade para todo n inteiro.

Daremos vários exemplos em que a observação de casos particulares levaria a congecturar uma proposição falsa.

1) Os números de Fermat são $F_n = 2^{2^n} + 1$

Se n = 0	$F_0 = 3$	primo
Se n = 1	$F_1 = 5$	"
Se n = 2	$F_2 = 17$	"
Se n = 3	$F_3 = 257$	"
Se n = 4	$F_4 = 65537$	"

Isto levou Fermat a conjecturar que os F_n eram todos primos. No entanto, Euler demonstrou que

$$F_5 = 4.294.967.297 = 6.700.417 \cdot 641$$

E mais, até hoje não se encontrou F_n primo para n>4.

2) O polinômio $x^2 + x + 41$ adquire valores primos para x = 0,1,2... 39 no entanto para x = 40 seu valor é $1.681 = 41^2$.

A veracidade do valor do polinômio ser primo para todo x inteiro cessa sòmente depois de 40 ensaios.

3) Examinamos o número de regiões em que n planos dividem o espaço tais que: a) 2 quaisquer não paralelos; b) 3 quaisquer não paralelos a uma reta; c) 4 quaisquer não passando por um mesmo ponto.

Se n = 0 temos uma região: O espaço todo.

Se n = 1 temos duas regiões: os dois semi-espaços por êle determinados.

Se n = 2 temos quatro regiões: os quatro diedros que os dois determinam.

Se n = 3 temos oito regiões: os oito triedros determinados pelas 3 retas intersecções dos 3.

Surgiria logo a hipótese: êsse número de regiões será $= N = 2^n$?

Um exame aprofundado que leva a solução do problema mostra que tal não é verdade e a fórmula exata é:

$$N = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

Observa-se que a primeira discrepância entre as 2 fórmulas é para n = 4.

A primeira dá $N = 2^4 = 16$ (errado); a segunda dá

$$N = \frac{4^3 + 5 \times 4 + 6}{6} = 15 \quad \text{(certo)}.$$

4) Os binômios $x^n - 1$ intimamente ligados à teoria da divisão da circunferência em partes iguais oferecem um bom exemplo de falsa indução. Êles apresentam as seguintes decomposições com coeficientes racionais:

$$x - 1 = x - 1$$
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observa-se que todos os fatôres que aparecem tem coeficientes unitários.

Será êste fato verdadeiro para todo n ?

Várias tentativas infrutíferas de demonstração foram feitas até que em 1941, Ivanov mostrou ser falsa a conjectura pois para $n = 105$ háaum fator de coeficientes não unitários indecomponível que é:

$$x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + \dots + x^{31} -$$
$$- x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} +$$
$$+ x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1$$

3) <u>Exemplos de prova por indução</u>

I) Quando se analisa a soma dos ímpares:

$1 = 1^2$ $\quad 1 + 3 = 2^2$ $\quad 1 + 3 + 5 = 3^2$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

percebe-se que $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} (2i - 1) = n^2$ (1)

Como provar?

É verdade para $n = 1$; suponhamos que o seja para $n = k$ isto é:

$$\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$$

Então para $n = k + 1$ temos:

$$\sum_{1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{1}^{k} (2i - 1) + 2(k + 1) - 1 = k^2 + 2k + 1 =$$
$$= (k + 1)^2$$

Logo se (1) vale para $n = k$ valerá para $n = k + 1$. Como é certo para $n = 1$ concluimos pelo princípio da indução que (1) é sempre verdadeiro.

II) Calcular:

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Temos

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad S_2 = \frac{2}{3} \qquad S_3 = \frac{3}{4}$$

Conjectura-se

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Ora tal conjectura é verdadeira para $N = 1$: suponhamos que o seja para $n = k$.

Então

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} \left(k + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1} \times \frac{k^2+2k-1}{k+2} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

o que mostra a validade para $k+1$.

O princípio da indução assegura a validade para todo inteiro $n \geqslant 1$.

III) Verificar a desigualdade: $(1+a)^n > 1+na$ sendo $a > -1$ e n inteiro positivo.

Se $n = 1$ $\quad 1+a = 1+a$ (não vale)

Se $n = 2$ $\quad (1+a)^2 > 1+2a$ (vale)

Suponhamos a validade para $n = k$ $\;(1+a)^k > 1+ka\;$ para $n = k+1$ temos:

$$(1+a)^{k+1} > (1+ka)(1+a)$$

ou

$$(1+a)^{k+1} > 1+k^2+a+ka^2$$

ou $\quad (1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$

Está provado para $n = k+1$. Logo vale para todo $n \geqslant 2$.

IV) Demonstrar que:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x^n & a & ax & \cdots & ax^{n-2} & ax^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & a & \cdots & ax^{n-3} & ax^{n-2} \\ x^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & ax^{n-4} & ax^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^n$$

Se $n=1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - a \qquad \text{vale}$$

Suponhamos válido para $n = k$

$$\Delta_k = (x-a)^k$$

Então subtraindo em Δ_{k+1} da primeira coluna a $k+1$ coluna temos:

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} x^k(x-a) & a & ax & \cdots ax^{k-1} & ax^k \\ x^{k-1}(x-a) & 1 & a & \cdots ax^{k-2} & ax^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a & 0 & 0 & \cdots 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)\Delta_k = (x-a)^{k+1} \qquad \text{é válido}$$

O princípio da indução assegura a validade para todo n.

V) Verificar que:

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \dots + \operatorname{sen}nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\ \operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

Para n=1 temos uma identidade válida. Suponhamos válida para $n=k$.

Para $n=k+1$ podemos escrever:

$$\operatorname{sen}x + \dots + \operatorname{sen}kx + \operatorname{sen}(k+1)x = \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2} + \operatorname{sen}(k+1)x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}\cdot\cos\frac{k+1}{2}x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{kx}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{k+1}{2}x\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{kx}{2} + \operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x - \operatorname{sen}\frac{kx}{2}\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x$$

é válida para $n=k+1$ e portanto para todo n pelo princípio da indução.

4. Princípio da indução transfinita

Se C é um conjunto simplesmente ordenado e $a\in C$ então designa-se por C/a o conjunto de elementos de C que precedem a.

Dizemos que C/a é a seção de C por a.

O princípio da indução transfinita enuncia-se: "Um conjunto simplesmente ordenado C tal que:

1) C tem primeiro elemento

2) Se $\bar{\mathcal{C}}\subseteq\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$ contém o primeiro elemento de $\mathcal{C}$ e de $\mathcal{C}\supseteq\mathcal{C}/C$.

(C/c é uma seção qualquer de $\mathcal{C}$) acarreta $\bar{\mathcal{C}}$ contém e então $\mathcal{C}=\mathcal{C}$". Citaremos sem demonstração o importante teorema:- "Para que um conjunto simplesmente ordenado C seja bem ordenado, é necessário e suficiente que êle satisfaça ao princípio da indução transfinita".

5. Relações entre a intuição e a indução

Embora sejam distintas há alguns elos entre a intuição e a indução. A intuição não pressupõe a indução. (ver o ex.1 do item 2).

Quando aplicamos a demonstração que utiliza o princípio da indução, temos de certa forma uma intuição de que o resultado é verdadeiro (ver os ex. 1

e 2 do item 3). Esta intuição surgiu pela repetição dos ensaios.

A intuição e a indução são excelentes armas matemáticas, mas à vezes enganadoras, necessitando muita cautela, os enunciados que elas nos sugerem.

6. A intuição e a indução no ensino médio

A intuição deve ser salientada aos alunos desde o ginásio, com os seus lados bons e maus.

No ciclo colegial também tem seu lugar, já a indução apenas no ciclo colegial pode ser apresentado como método e praticada com exercícios e demonstrações de teoremas.

Quanto ao princípio da indução transfinita não deve a nosso ver ser focalizada no ensino médio. Nós só a incluimos no presente trabalho para salientar o papel importante da indução em vários ramos da matemática como a teoria dos conjuntos.

Enfim, há um aspecto da intuição e indução que precisa não ser esquecido é como na matemática elas diferem do modo como se apresentam nas ciências naturais.

BIBLIOGRAFIA

1. The Methad of Mathematical Induction
   J.S. Sominskii
2. Metodos Problemas Mathematiques
3. Cèlebres Problèmes Mathematiques - E.C.Carreras
4. Abstract Algebra - E.Callandreau
5. Métodi Matematic - W.E.Seshins
6. Introduction to Foundations of Mathematcs - Gina Loria

   - R.L.Wilder

TEORIA GEOMÉTRICA DOS LIMITES

Aristides Camargos Barreto

O conceito de limite só depende da idéia de proximidade: o número k é limite da função f no ponto c quando f(x) fica próximo de k desde que se tome $x \neq c$ bem próximo de c. Tudo isto pode ser formulado geomètricamente, como segue.

Definição. Vizinhança de um ponto c da reta é qualquer intervalo aberto V_c que contenha c. Por exemplo, um da forma $V_c(\varepsilon) = (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$, chamado vizinhança simétrica de c, com raio ε $(\varepsilon > 0)$.

Podemo-nos restringir às simétricas, uma vez que tôda vizinhança contén alguma destas.

Definição (de limite). Sejam f uma função definida numa vizinhança de c, salvo possìvelmente no ponto c, e k um número. Dizemos que k é limite de f no ponto c quando para cada vizinhança V_k é possível obter uma vizinhança V_c tal que os $x \neq c$ de V_c sejam aplicados em V_k.

Gráficos ajudarão a esclarecer.

Uma função não pode ter dois limites no mesmo ponto. De fato, suponhamos que k e k' sejam ambos limites de f no ponto c e tomemos vizinhanças V_k e $V_{k'}$ disjuntas. Pela definição, cada ponto $x \neq c$ bem próximo de c será aplicado tanto em V_k como em $V_{k'}$: um absurdo, por serem disjuntas.

Notação: $\lim_c f = k$.

Demonstram-se do mesmo modo as propriedades de permanência do sinal e monotonia.

A teoria tradicional, com os ε e δ , é lògicamente equivalente a esta. Em têrmos precisos, podemos quantificar a definição anterior, bastando interpretar ε e δ como raios de vizinhanças V_k e V_c: k é limite de f no ponto c quando para cada $\varepsilon > 0$ (raio de uma vizinhança de k) existe um $\delta_\varepsilon > 0$ (raio de uma vizinhança de c) tal que

$$0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad \text{implique} \quad |f(x) - k| < \varepsilon.$$

Esta forma é mais conveniente na prova das propriedades operatórias (limite de soma, produto, etc.).

É claro que na formulação qualitativa fazemos uso forte de propriedades topológicas da reta, mas de maneira ingênua, com inegáveis vantagens didáticas. Além disso, ela habilita os estudantes a estenderem o conceito de limite a ambientes mais gerais que a reta, onde êle tenha sentido.

"UMA EXPERIÊNCIA NA 1ª SÉRIE GINASIAL"

Martha Maria de
Souza Dantas

Sob êste título, a representação da Bahia, apresentou, no 5º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática os resultados da aplicação, em caráter experimental, no Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia da U.F.Ba., do ensino moderno da Matemática, seguindo Apostilas elaboradas por um grupo de professôres que procurou alcançar os seguintes objetivos:

1. Introduzir, na 1ª série ginasial, a linguagem dos conjuntos;
2. Utilizar, efetivamente, tanto quanto possível, essa linguagem;
3. Introduzir o conceito de aplicação e estudar as operações, entre números naturais como aplicações;
4. Seguir, de perto, o programa de Matemática, para a 1ª série ginasial, apresentado pelo G.E.E.M.

Para exemplificar melhor as pretensões do grupo que elaborou o trabalho, publicamos aqui a primeira parte do Capítulo III, das apostilas apresentadas no Congresso:

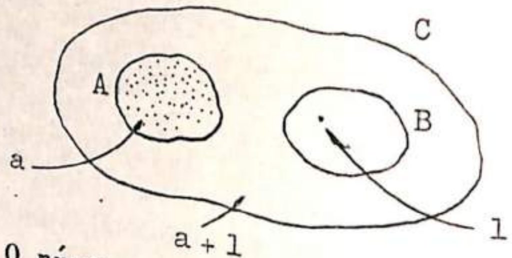
Capítulo III

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS; PROPRIEDADES ESTRUTURAIS

1. <u>Adição</u>

Como se viu, união de dois conjuntos A e B é o conjunto C formado por todos os elementos de A e to dos os elementos de B.

Seja <u>a</u> o número de elementos de A. Forme-se a união de A com um conjunto unitário B, cujo elemento não pertença a A

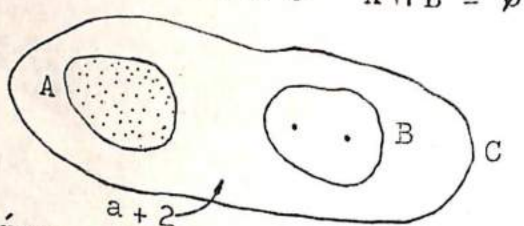


O número <u>c</u>, de elementos de C é por definição

$$a + 1$$

e o sinal "+", se lê "<u>mais</u>";

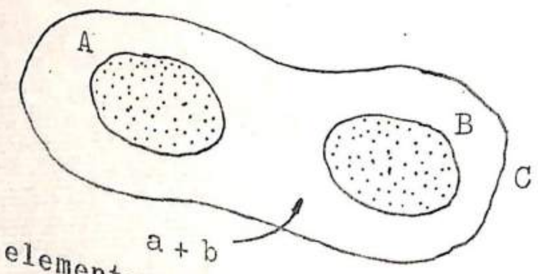
se B tivesse dois elementos e $A \cap B = \emptyset$,



O número de elementos de C seria

$$a + 2;$$

de um modo geral, se B tivesse <u>b</u> elementos e $A \quad B = 0$



O número de elementos de C seria

$$a + b.$$

Pode-se estender essa definição para $b = 0$(número de elementos do conjunto $\emptyset$).

Esta regra define uma aplicação

$$b \longrightarrow a + b$$

que é uma aplicação de N em N, chamada <u>adição de a com b</u>. O número <u>c</u> de elementos de C, diz-se <u>soma</u> do número <u>a</u> de elementos de A com o número <u>b</u> de elementos de B e escreve-se

$$c = a + b;$$

<u>a</u> e <u>b</u> dizem-se <u>parcelas</u> ou <u>têrmos da soma</u>.

Fixado o número <u>b</u>, esta regra define, também, uma aplicação:

$$a \longrightarrow a + b,$$

que é, ainda, uma aplicação de N em N.

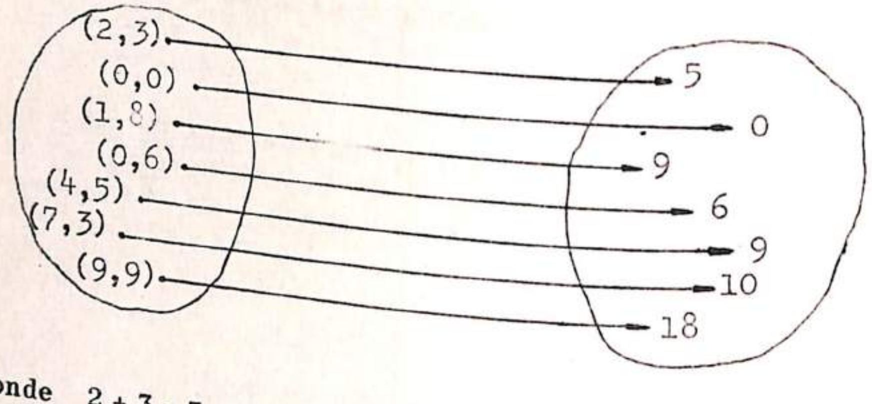
Pode-se dizer, também, que a adição de dois números naturais é uma aplicação de $N \times N$ (N cartesiano N) sôbre N, isto é, a aplicação que a cada par(a,b) de números naturais faz corresponder sua soma $a + b$.

Em símbolos, tem-se

$$f : N \times N \longrightarrow N$$
$$(a,b) \longrightarrow a + b,$$

com $a \in N$, $b \in N$ e $a + b \in N$.

Exemplo:



onde $2+3=5$, $0+0=0$, $0+6=6$, $1+8=9$, $4+5=9$, $7+3=10$, $9+9=18$.

Como, quaisquer que sejam os números naturais <u>a</u> e <u>b</u>, existe sempre um número natural <u>c</u> tal que

$$a + b = c,$$

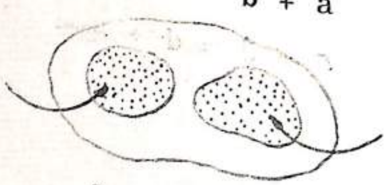
diz-se que o conjunto dos números naturais é <u>fechado</u> em relação à adição.

Como se viu, a adição está relacionada a união de conjuntos. Assim, as propriedades da adição são consequências das propriedades da união de conjuntos.

Conclui-se, portanto, que a adição goza das <u>propriedades:</u>

$\boxed{P_1}$ A adição é <u>comutativa:</u> quaisquer que sejam os números naturais a e b tem-se,

$$a + b = b + a$$



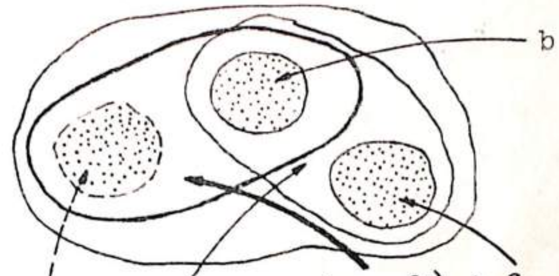
$a + b = b + a$

Exemplos:

$$2 + 5 = 5 + 2 = 7$$

$\boxed{P_2}$ A adição é <u>associativa</u>: quaisquer que sejam os números naturais <u>a</u>, <u>b</u>, e <u>c</u>, tem-se:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$



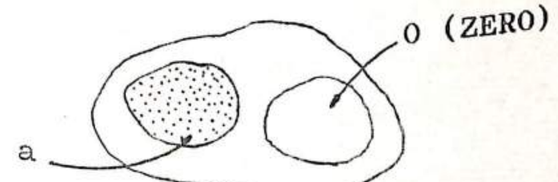
$a + (b + c) = (a + b) + c$

Exemplo

$$1 + (8 + 3) = (1 + 8) + 3 = 12$$

$\boxed{P_3}$ Existência do <u>elemento neutro</u>: existe um número natural <u>0</u> que é o <u>elemento neutro</u> da adição, isto é, qualquer que seja o número natural <u>a</u>, tem-se

$$a + 0 = 0 + a = a.$$



$a + 0 = 0 + a = a$

Exemplo:

$$6 + 0 = 0 + 6 = 6.$$

Definição:

Dois números naturais $\underline{a}$ e $\underline{b}$ dizem-se consecutivos se

$$a + 1 = b$$

isto é, a adição do número $\underline{1}$ com $\underline{a}$ dá o consecutivo de $\underline{a}$.

Exemplo:

$$5 + 1 = 6,$$

logo, 6 é o consecutivo de 5.

Aplicações:

A aplicação das propriedades comutativa e associativa da adição permitem explicar o porque da regra prática da adição, já estudada no curso primário.

1ª) Efetuar

$$325 + 98$$

Aplicando-se as propriedades associativa e comutativa da adição, tem-se

$$325 + 98 =$$

$$= (300 + 20 + 5) + (90 + 8) =$$

$$= 300 + (20 + 90) + (5 + 8) =$$

$$= 300 + (110) + (13) =$$

$$= 300 + (100 + 10) + (10 + 3) =$$

$$= (300 + 100) + (10 + 10) + 3 =$$

$$= 400 + 20 + 3 =$$

$$= 423.$$

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 325 \\ \underline{98} \\ 423 \end{array}$$

2ª) Efetuar:

etc.

«L. P. M.»
imprimiu
rua vergueiro. 418
loja 1