Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Sócio–Econômico
Departamento de Ciências Econômicas

Curso de graduação em Ciências Econômicas
a distância

Elementos de Economia Matemática II

Jaylson Jair da Silveira

S587e Silveira, Jaylson Jair da

Elementos de economia matemática II / Jaylson Jair da Silveira.
4.impri. - Florianópolis: UFSC, 2014.

111p. : il.; grafs. , tabs.

Curso de Graduação Ciências Econômicas

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-62894-42-8

1. Economia matemática. 2. Matemática. 3. Ensino a distância. I. Título

CDU: 51-77:336

EQUIPE DE PRODUÇÃO DE MATERIAL - PRIMEIRA EDIÇÃO

Coordenação de Design Instrucional	Suelen Haidar Ronche
Design Instrucional	Claudete Maria Cossa
	Renata Oltramari
Revisão Textual	Maria Geralda Soprana Dias
Coordenação de Design Gráfico	Giovana Schuelter
Design Gráfico	Natália Gouvêa
	Rafael de Queiroz Oliveira
Ilustrações	Natália Gouvêa
	Rafael de Queiroz Oliveira
Design de Capa	Guilherme Dias Simões
	Felipe Augusto Franke
	Steven Nicolás Franz Peña
Projeto Editorial	André Rodrigues da Silva
	Felipe Augusto Franke
	Max Vartuli
	Steven Nicolás Franz Pena

EQUIPE DE PRODUÇÃO DE MATERIAL - QUARTA EDIÇÃO

Coordenação de Design Instrucional	Andreia Mara Fiala
Coordenação de Design Gráfico	Giovana Schuelter
Design Gráfico	Thiago Alves Vieira
Ilustrações	Rafael de Queiroz Oliveira
Design de Capa	Guilherme Dias Simões
	Felipe Augusto Franke
	Steven Nicolás Franz Peña
Projeto Editorial	André Rodrigues da Silva
	Felipe Augusto Franke
	Max Vartuli
	Steven Nicolás Franz Pena

Sumário

UNIDADE 1

FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS E AS REPRESENTAÇÕES DA TECNOLOGIA PRODUTIVA DE UMA FIRMA E DAS PREFERÊNCIAS DE UM CONSUMIDOR

1.1 Função de várias variáveis 11
1.2 Gráfico e curvas de nível de funções de duas variáveis 15
1.3 Aplicação na análise econômica: função de produção com vários insumos, isoquantas, função utilidadee curvas de indiferença 21
1.4 Funções homogêneas 31
1.5 Aplicação na análise econômica: retornos de escala e funções de produção homogêneas 32

UNIDADE 2

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕESDE VÁRIAS VARIÁVEIS

2.1 Derivada parcial: definição, interpretação geométrica, regras de derivação e derivadas parciais de ordens superiores 41
2.2 Aplicações na análise econômica 51
Produtividades médias, marginais e o princípio das produtividades marginais decrescentes 51
Utilidades marginais, bens, males e neutros 58
2.3 Diferencial total de uma função de várias variáveis 63
2.4 Aplicações na análise econômica: taxa técnica de substituição e taxa marginal de substituição 68

UNIDADE 3

OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA COM DUAS VARIÁVEIS DE ESCOLHA

3.1 Otimização estática não condicionada com duas variáveis de escolha 77

Condição de primeira ordem (condição necessária) para um extremo 81

Condição de segunda ordem (condição suficiente) para um máximo e para um mínimo 83

Aplicações na análise econômica: a decisão de produção ótima de uma firma multiproduto com e sem poder de mercado 90

3.2 Otimização estática condicionada com duas variáveis de escolha e uma estrição de igualdade 92

Condição de primeira ordem (condição necessária) para um extremo 94

Condição de segunda ordem (condição suficiente) para um máximo e para um mínimo....................98

Aplicações na análise econômica: maximização de utilidade e demanda do consumidor....................102

Referências 107

Palavra do professor

Prezado aluno, seja bem-vindo!

Nos últimos oito anos, ofereci disciplinas de Matemática Aplicada à Economia em cursos de graduação na Universidade Estadual Paulista (UNESP) e na Universidade de São Paulo (USP). Embora algumas vezes os alunos já tivessem cursado disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria dos casos, tive que ensinar não só as aplicações econômicas em si, mas também os conceitos e teoremas matemáticos envolvidos nessas aplicações.

Assim, como se usa nos cursos de Engenharia conceitos da Física para dar a intuição de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, passei a usar conceitos da Microeconomia com o mesmo objetivo. Os resultados desta estratégia didática em sala de aula sempre foram muito bons, a julgar pelas avaliações formais feitas pelos alunos ao longo desses anos. Em parte, acho eu, porque a maioria dos alunos sente-se mais motivada em estudar Matemática quando vê como esta é utilizada em modelos econômicos.

Todavia, para entender o uso de conceitos matemáticos – como funções de várias variáveis, derivada parcial, bem como técnicas de otimização estática – em modelos econômicos, é necessário conhecer os conceitos econômicos envolvidos nesses modelos. Isto exige um esforço dobrado, pois alunos do primeiro ano de cursos de graduação em Economia estão aprendendo ou ainda nem mesmo tiveram contato com alguns dos conceitos econômicos envolvidos nessas aplicações. Portanto, o que costumo fazer em minhas aulas é supor que os alunos não têm qualquer conhecimento prévio de Microeconomia. A partir disso, normalmente, trabalho um tópico matemático em três fases: (i) apresentação de conceitos econômicos; (ii) exposição dos conceitos, teoremas e técnicas operatórias relacionadas ao tema em estudo; e (iii) fechamento da exposição com aplicações econômicas que juntam os conteúdos econômicos e matemáticos trabalhados nas fases (i) e (ii).

O presente livro-texto pretende reproduzir a estratégia de ensino acima esboçada. Mais precisamente, aqui você encontrará ilustrações do uso em Microeconomia de conceitos e teoremas ligados ao cálculo de funções de várias variáveis.

Finalmente, cabe explicitar que a estratégia pedagógica a ser desenvolvida ao longo do curso de Economia Matemática II pressupõe que a leitura do presente livro-texto e as videoaulas estão relacionadas de maneira inextricável. Ao assistir as videoaulas você perceberá que os conceitos e exemplos contidos neste livro-texto serão explicados muitas vezes de maneira mais intuitiva e/ou detalhada. Todavia, se você não ler previamente a parte correspondente à videoaula que irá assistir, você não aproveitará tanto a intuição e os detalhes fornecidos nela.

Prof. Jaylson Jair da Silveira

1

FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS E AS REPRESENTAÇÕES DA TECNOLOGIA PRODUTIVA DE UMA FIRMA E DAS PREFERÊNCIAS DE UM CONSUMIDOR

Ao final desta unidade, você deverá ter conhecimentos sobre:

- a definição matemática de função de várias variáveis;
- os conceitos matemáticos de gráfico e de curvas de nível de funções de duas variáveis;
- a aplicação destes conceitos matemáticos na construção dos conceitos econômicos de função de produção com vários insumos, isoquantas, função utilidade e curvas de indiferença;
- o conceito matemático de função homogênea; e
- a relação entre o conceito de função homogênea e o conceito econômico de retornos de escala.

No curso de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010, Unidade 2), você estudou o conceito de função de uma variável e seu uso na formalização das funções custo total, custo médio, receita total, receita média e lucro total. Agora, é necessário conhecer o conceito mais geral de funções reais de duas ou mais variáveis reais para formalizar outras duas funções extremamente importantes na *Microeconomia*, a saber: a **função de produção** e a **função utilidade**. É o que veremos na seção a seguir.

1.1 FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Antes de começarmos, vamos estabelecer a definição matemática de uma função real de duas ou mais variáveis reais.

> **Definição 1.1 – Função de n variáveis reais**
>
> Se para cada *n*-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de valores de n variáveis reais em certo domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ corresponde um, e somente um, valor bem determinado da variável $y \in \mathbb{R}$, dizemos que y é uma função de *n* variáveis reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida no domínio *D*. Uma função f de n variáveis reais é denotada por $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Na análise microeconômica, uma função *f* de várias variáveis pode representar possibilidades tecnológicas de uma firma ou preferências (gostos) que um consumidor tem sobre as cestas de consumo em seu conjunto consumo. Vejamos dois exemplos simples desses usos de funções de várias variáveis.

Exemplo 1.1 – Função de produção

Lembre-se que na disciplina *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010) definimos uma firma como qualquer organização que realiza a transformação de certos insumos (que possui e/ou compra) em produtos (que vende). Considere uma firma que, em um dado período de produção, utiliza capital (máquinas, equipamentos e matérias-primas), cuja quantidade denotaremos por x_1, e trabalho, cuja quantidade denotaremos por x_2, para produzir certa quantidade de produto, cuja quantidade denotaremos por y.

Uma determinada combinação de insumos que uma firma usa pode ser representada da mesma maneira que representamos uma cesta de consumo, ou seja, como um par ordenado. Por exemplo, a combinação de insumos (9,4) indica que a firma em análise usa 9 unidades de capital e 4 unidades de trabalho. Generalizando, a combinação de insumos (x_1, x_2) indica que a firma utiliza x_1 unidades de capital e x_2 unidades de trabalho.

Para maiores detalhes, consulte a Unidade 1 do livro de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010).

Suponha que os engenheiros de produção de uma firma estimaram que a quantidade máxima de produto que pode ser gerada em um dado período de produção, usando a quantidade de capital x_1 e a quantidade de trabalho x_2, é dada pela seguinte ***função*** de duas variáveis reais:

$$y = f(x_1, x_2) = 50\sqrt{x_1 x_2}\,. \tag{1.1}$$

Assim, se a firma usa a combinação de insumos $(9,4)$ ela obterá $y = f(9,4) = 50\sqrt{9\times 4} = 300$ unidades de produto. A expressão anterior $f(x_1, x_2) = 50\sqrt{x_1 x_2}$ é um exemplo do que, na teoria microeconômica, denomina-se função de produção.

Finalmente, cabe salientar que o domínio economicamente relevante da função de produção (1.1) é o conjunto $D(f) = \{(x_1,x_2) | \in \mathbb{R}_+,\ x_2 \in \mathbb{R}_+\}$ e sua imagem é $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Preste atenção! Adotaremos as convenções a seguir.

- O símbolo $\mathbb{R}_+$ denotará o conjunto dos números reais positivos (incluindo o zero).
- O símbolo $\mathbb{R}_{++}$ indicará o conjunto dos números reais estritamente positivos (excluindo o zero).
- O símbolo $\mathbb{R}_-$ denotará o conjunto dos números reais negativos (incluindo o zero).
- O símbolo $\mathbb{R}_{--}$ indicará o conjunto dos números reais estritamente negativos (excluindo o zero).

Passemos ao outro importante uso do conceito de função de n variáveis reais, agora na teoria do consumidor.

Exemplo 1.2 – Função utilidade

Partindo da representação de uma cesta de consumo como um par ordenado, apresentada na Unidade 1 do livro de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010), vimos como podemos representar matematicamente as possibilidades de consumo de um indivíduo com os conjuntos consumo M, orçamentário B e restrição orçamentária R.

A teoria do consumidor parte do axioma fundamental de que um indivíduo pode comparar quaisquer duas cestas de consumo que lhe forem apresentadas e afirmar qual delas é preferida ou se elas são indiferentes do ponto de vista das suas preferências. Em termos intuitivos, isso significa que é suposto que o consumidor é capaz de criar uma ordenação das cestas de consumo pertencentes ao conjunto M, ou seja, é capaz de gerar uma classificação em termos de preferências e, digamos, em ordem crescente (saindo da cesta menos preferida em direção à mais preferida) das cestas de consumo em M.

Vamos ver como o conceito de função de várias variáveis é útil para representar os gostos ou, mais precisamente, as preferências dos consumidores. Tomemos como ponto de partida para ilustrar isso o Exemplo 1.1 presente no livro de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010).

No citado exemplo, x_1 representa a quantidade de tempo, medida em minutos, que um indivíduo usa seu telefone celular por dia e x_2 a quantidade de refrigerante, medida em litros, que este indivíduo consome por dia. Supomos que estes bens são perfeitamente divisíveis, ou seja, que as quantidades destes bens podem ser representadas por números reais. Se este consumidor prefere níveis maiores de consumo de ambos os bens, ou como costumamos dizer, prefere consumir mais a menos, então, caso lhe sejam apresentadas duas cestas de consumo $x = (50, 2)$ e $z = (55, 3)$, este indivíduo preferirá a cesta z, pois ele falará 5 minutos a mais no celular por dia e tomará um litro a mais de refrigerante. Neste caso, fica claro que o consumidor associará um índice de satisfação (utilidade) maior para a cesta z do que para x.

Podemos utilizar uma função de duas variáveis reais, denominada na teoria microeconômica de ***função utilidade***, para representar esta ordenação feita pelo consumidor. Por exemplo,

(1.2) $$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Assim, a utilidade associada à cesta de consumo $x = (50, 2)$ seria $u(50, 2) = 50 + 2 = 52$ e a utilidade associada à cesta $z = (55,3)$ seria $u(50, 2) = 55 + 3 = 58$. Como $u(55, 3) = 58 > 52 = u(50, 2)$, afirmamos que o consumidor prefere z a x. Na teoria microeconômica contemporânea o valor absoluto da utilidade não importa, ou seja, a função utilidade

(1.3) $$v(x_1, x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

representa as mesmas preferências que (1.2), pois ainda se tem $v(55, 3) = 174 > 156 = v(50, 2)$. Em outros termos, a utilidade é uma medida ordinal ao invés de cardinal.

Claro que nem sempre é simples saber a priori, ou seja, sem perguntar para o próprio indivíduo, qual será a preferência dele entre duas cestas de consumo. Por exemplo, imagine que o consumidor está comparando as cestas $x = (50, 2)$ e $w = (49, 3)$. Se não conhecêssemos a função utilidade (1.2), não saberíamos a priori se o consumidor prefere a cesta x quando comparada à cesta w ou é indiferente entre elas, pois na cesta x, embora se apresente um minuto a mais de conversa por celular, tem-se um litro a menos de refrigerante, quando comparada à cesta de consumo w. Todavia, como temos a função utilidade (1.2), chegamos à conclusão de que o $u(50, 2) = u(49, 3) = 52$ e, portanto, que o consumidor associa, subjetivamente, o mesmo índice de utilidade às cestas de consumo x e w, ou seja, o consumidor mostra-se indiferente entre estas duas cestas de consumo.

Finalmente, cabe salientar que o domínio economicamente relevante da função utilidade (1.2) é o conjunto $D(f) = \{(x_1,x_2)| \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ e sua imagem é, neste caso específico, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Preste atenção! Adotaremos as convenções a seguir.

- O símbolo $\mathbb{R}^2$ denotará o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano, ou seja, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Se o par ordenado (x_1, x_2) está associado ao ponto P do espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$, dizemos que x_1 (abscissa) e x_2 (ordenada) são as coordenadas do ponto P.
- Por sua vez, o símbolo $\mathbb{R}^2_+$ denotará o conjunto de todos os pontos do primeiro quadrante do plano cartesiano, incluindo os pontos dos eixos das abscissas e das ordenadas, ou seja, $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}_+\}$.
- O símbolo $\mathbb{R}^2_{++}$ denotará o conjunto de todos os pontos do primeiro quadrante do plano cartesiano, excluindo os pontos dos eixos das abscissas e das ordenadas, ou seja, $\mathbb{R}^2_{++} = \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}_{++}, x_2 \in \mathbb{R}_{++}\}$.

1.2 GRÁFICO E CURVAS DE NÍVEL DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Intuitivamente, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície no espaço euclidiano tridimensional. Para definirmos com maior precisão o conceito de gráfico de uma função de duas variáveis, necessitamos estabelecer três conceitos matemáticos preliminares, a saber:

Definição 1.2 – Espaço euclidiano tridimensional

O espaço euclidiano tridimensional, denotado por $\mathbb{R}^3$, é o conjunto de ternas ordenadas (x_1, x_2, y) de números reais, ou seja, $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, y) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.3 – Coordenadas

Se a terna (x_1, x_2, y) está associada ao ponto P do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, dizemos que x_1 (abscissa), x_2 (ordenada) e y (cota) são as coordenadas do ponto P.

Definição 1.4 – Planos coordenados

O plano x_1x_2 é o plano que contém os eixos reais x_1 e x_2, e seus pontos formam o conjunto $\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \in \mathbb{R} \,|\, x_1 \in \mathbb{R} \,|\, x_1 \in \mathbb{R} \,|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, y = 0\}$.

Analogamente, o plano x_1y é o plano que contém os eixos reais x_1 e y, e seus pontos formam o conjunto $\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \in \mathbb{R} \,|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0, y \in \mathbb{R}\}$.

Finalmente, o plano x_2y é o plano que contém os eixos reais x_2 e y, e seus pontos formam o conjunto $\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

A partir dos três conceitos acima, podemos enunciar o seguinte conceito de gráfico de uma função de duas variáveis:

Definição 1.5 – Gráfico de uma função de duas variáveis

O gráfico de uma função $f(x_1, x_2)$, definida em um domínio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$, é o conjunto de todos os pontos $\left(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\right)$ tais que $(x_1, x_2) \in D(f)$.

Como já dito, intuitivamente, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície no espaço euclidiano tridimensional. Vejamos como são os gráficos das funções de produção e utilidade apresentadas nos Exemplos 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.3 – Gráfico da uma função de produção

Parte do gráfico da função $y = 50\sqrt{x_1x_2}$, cujo domínio é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathbf{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}\}$ pode ser visualizado em perspectiva na Figura 1.1. Como você pode ver, os pontos $\left(x_1, x_2, 50\sqrt{x_1, x_2}\right)$ formam **uma superfície** no espaço euclidiano tridimensional.

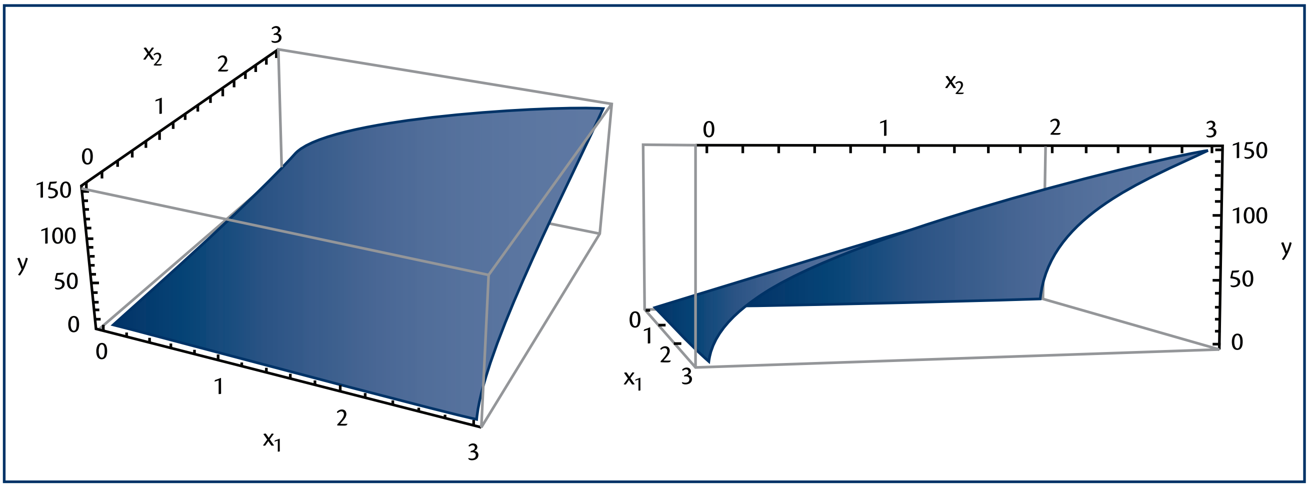


Figura 1.1 – Gráfico da função de produção $y = 50\sqrt{x_1 x_2}$.

Exemplo 1.4 – Gráfico de uma função utilidade

Parte do gráfico da função $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, cujo domínio é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, pode ser visualizado em perspectiva na Figura 1.2. Como podemos ver, os pontos $(x_1, x_2, x_1 + x_2)$ formam uma superfície plana com declive no espaço euclidiano tridimensional.

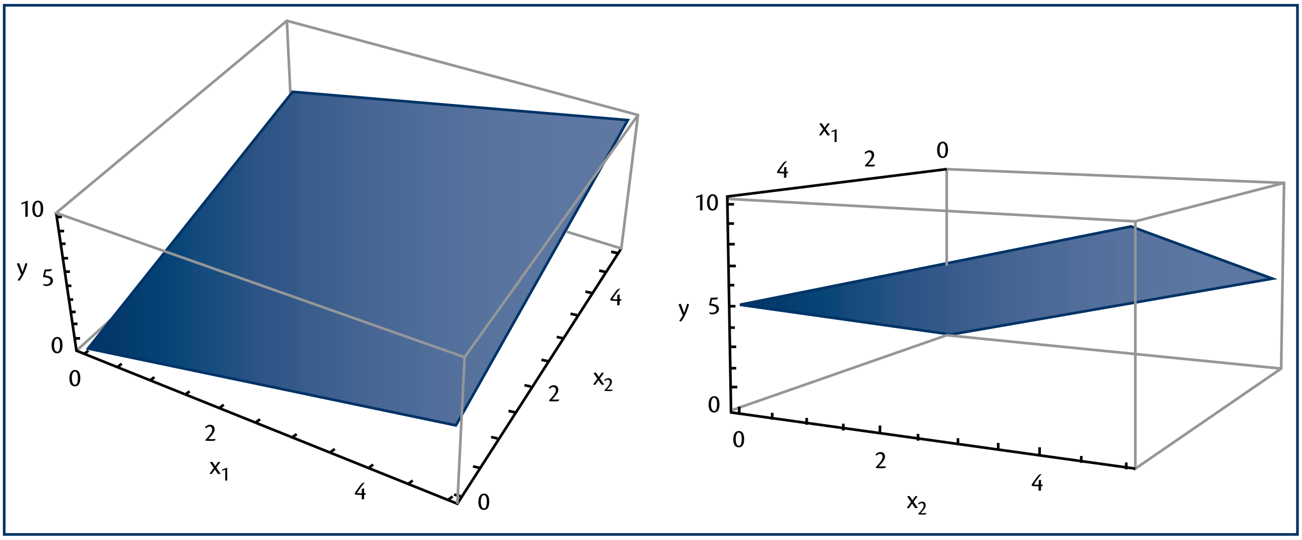


Figura 1.2 – Gráfico da função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Em particular, foi utilizado o *Mathematica* 7.0.

As figuras acima foram geradas com o auxílio de um pacote computacional. Desenhar gráficos tridimensionais à mão é extremamente laborioso. Assim, uma maneira mais conveniente de obter informações sobre o comportamento de uma variável real y que depende de duas variáveis reais (x_1, x_2) é analisar as chamadas curvas de nível geradas pelas funções de duas variáveis. Esta técnica é extremamente importante tanto na teoria macroeconômica quanto na teoria microeconômica.

Definição 1.6 – Curva de nível

A curva de nível da função $f(x_1, x_2)$ referente ao valor c é o gráfico no plano x_1x_2 definido implicitamente pela condição $f(x_1, x_2) = c$, ou seja, é o conjunto de pontos $\{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = c\}$ que geram a mesma imagem de valor c.

Definição 1.7 – Mapa de curvas de nível

Mapa de curvas de nível é uma coleção de curvas de nível para diferentes valores de c.

Agora, vamos tomar a função de produção trabalhada nos Exemplos 1.1 e 1.3 e obter o mapa de curvas de nível desta função.

Exemplo 1.5 – Mapa de curvas de nível de uma função de produção

Como vimos no Exemplo 1.1, a função de produção $f(x_1, x_2) = 50\sqrt{x_1x_2}$ é definida no domínio $D(f) = \mathbb{R}^2_+$. Se nos perguntarmos quais são as combinações de insumos (x_1, x_2) que geram o nível de produção 100, do ponto de vista matemático, estaremos buscando a curva de nível referente ao valor 100, definida implicitamente pela condição $f(x_1, x_2) = 100$, ou seja, pela condição:

$$50\sqrt{x_1x_2} = 100. \tag{1.4}$$

Podemos expressar como uma função explícita de x_1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 50\sqrt{x_1x_2} &= 100, \\ \sqrt{x_1x_2} &= 2, \\ x_1x_2 &= 4, \end{aligned}$$

(1.5) $$x_2 = \frac{4}{x_1} \ , \ \text{para todo } x_1 > 0.$$

Do **ponto de vista matemático**, o gráfico da função (1.5) no plano x_1x_2, ilustrado na Figura 1.3, é a curva de nível referente ao valor 100 da função de produção (1.1). Do **ponto de vista econômico**, a função (1.5) estabelece, para cada valor do insumo capital, qual deve ser a quantidade de trabalho x_2 necessária para se obter exatamente a produção de 100 unidades de produto.

Por exemplo, se $x_1 = 1$ unidade de capital, segue que será necessário empregar $x_2 = \frac{4}{1} = 4$ unidades de trabalho para se obter $f(1,4) = 50\sqrt{1\times 4} = 100$ unidades de produto. Assim, o gráfico apresentado na Figura 1.3 representa as combinações de capital e trabalho (x_1, x_2) que geram o nível de produção igual a 100, ou seja, representa o conjunto $\{(x_1, x_2) | 50\sqrt{x_1x_2} = 100\}$. Na teoria microeconômica da produção, este tipo de conjunto é denominado uma isoquanta. Cabe salientar que quanto maior a quantidade de capital, menor pode ser a quantidade de trabalho (e vice-versa) para se obter o mesmo nível de produção.

Você verá a definição formal de isoquanta a seguir, na seção 1.3.

Na Figura 1.4 apresentamos os gráficos, no mesmo plano cartesiano, de várias isoquantas referentes a diferentes níveis de produção. Cabe salientar que quanto mais distante da origem (0,0) do plano cartesiano uma isoquanta estiver, maior será o nível de produção a ela associado.

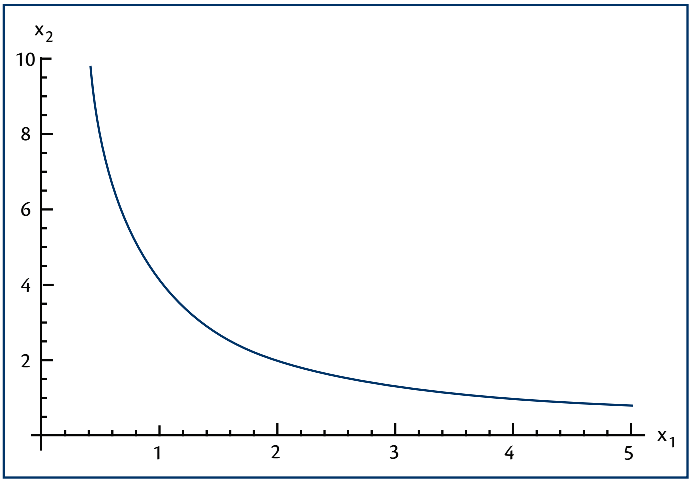


Figura 1.3 – Gráfico da curva de nível (isoquanta) $50\sqrt{x_1x_2} = 100$.

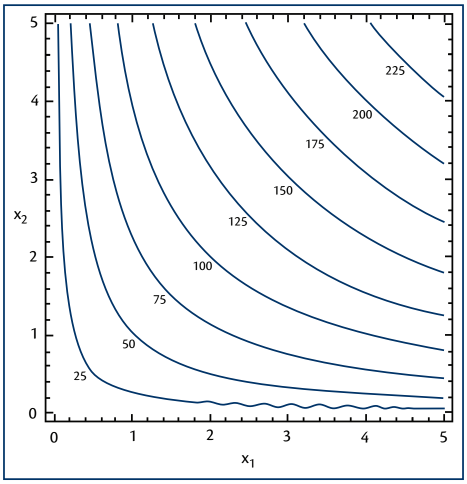


Figura 1.4 – Mapa de curvas de nível (isoquantas) da função de produção $y = 50\sqrt{x_1x_2}$.

A seguir, vamos obter e entender o significado econômico do mapa de curvas de nível da função utilidade trabalhada nos Exemplos 1.2 e 1.4.

Exemplo 1.6 – Mapa de curvas de nível de uma função utilidade

Como vimos no Exemplo 1.2, a função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ é definida no domínio $D(f) = \mathbb{R}^2_+$. Se nos perguntarmos quais são as cestas de consumo (x_1, x_2) que o consumidor associa ao índice de utilidade 5, do ponto de vista matemático, estaremos buscando a curva de nível referente ao valor 5, definida implicitamente pela condição $u(x_1, x_2) = 5$, ou seja, pela condição:

(1.6) $$x_1 + x_2 = 5.$$

Podemos expressar x_2 como uma função explícita de x_1, como segue:

(1.7) $$x_2 = 5 - x_1, \quad \text{para todo } x_1 \geq 0.$$

Do **ponto de vista matemático**, o gráfico da função (1.7) no plano x_1x_2, ilustrado na Figura 1.5, é a curva de nível referente ao valor 5 da função utilidade (1.2). Do **ponto de vista econômico**, a função (1.7) associa a cada quantidade x_1 do bem 1 qual deve ser a quantidade x_2 do bem 2 necessária para que o consumidor associe a medida subjetiva 5 à cesta de consumo (x_1,x_2). Por exemplo, se $x_1 = 4$ unidades do bem 1, segue que será necessário $x_2 = 5 - 4 = 1$ unidade do bem 2 para que o consumidor associe o índice de utilidade 5. Uma cesta composta por $x_1 = 3$ unidades do bem 1 terá a mesma avaliação subjetiva do consumidor se a quantidade do bem 2 nesta cesta for $x_2 = 5 - 3 = 2$ unidades. Dizemos, neste caso, que o consumidor é indiferente entre as cestas (4,1) e (3,2). Assim, o gráfico apresentado na Figura 1.5 representa as cestas de consumo às quais o consumidor associa o índice subjetivo de utilidade igual a 5 e, portanto, formam um conjunto de cestas de consumo que o consumidor considera indiferentes, ou seja, o conjunto $\{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 5\}$. Na teoria do consumidor este tipo de conjunto é denominado uma curva de indiferença. Cabe salientar que quanto maior a quantidade do bem 1, menor pode ser a quantidade do bem 2 (e vice-versa) para que o consumidor se mantenha no mesmo índice de utilidade, isto é, na mesma curva de indiferença.

Você verá a definição formal de curva de indiferença a seguir, na seção 1.3.

Na Figura 1.6 apresentamos os gráficos no mesmo plano cartesiano de várias curvas de indiferença referentes a diferentes valores do índice de utilidade. Cabe salientar, que, sob a suposição de que o consumidor prefere mais a menos de cada bem, quanto mais distante da origem (0,0) do plano cartesiano uma curva de indiferença estiver, maior será o nível de utilidade a ela associado.

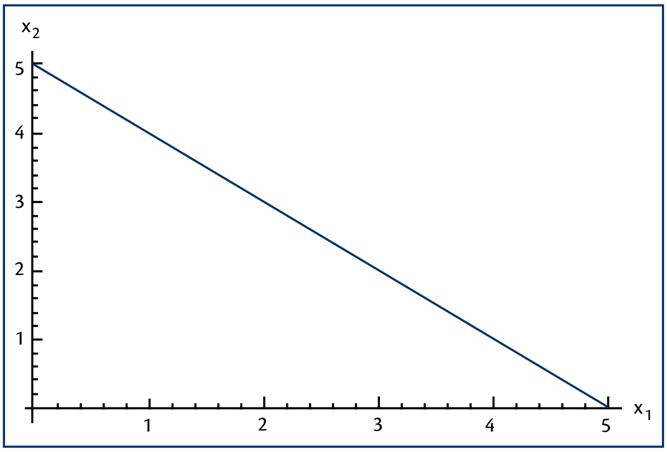


Figura 1.5 – Gráfico da curva de nível (curva de indiferença) $x_1 + x_2 = 20$.

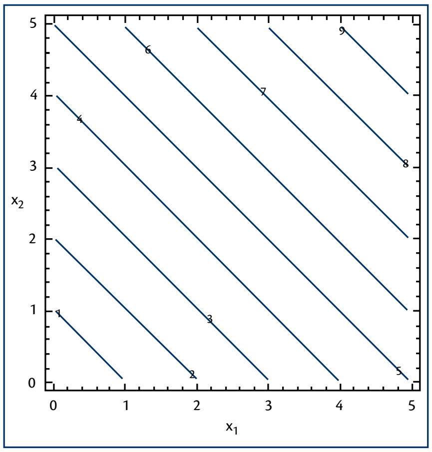


Figura 1.6 – Mapa de curvas de nível (curvas de indiferença) da função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1.3 APLICAÇÃO NA ANÁLISE ECONÔMICA: FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COM VÁRIOS INSUMOS, ISOQUANTAS, FUNÇÃO UTILIDADE E CURVAS DE INDIFERENÇA

Vamos, agora, formalizar as noções econômicas de função de produção, isoquanta, função utilidade e curvas de indiferença apresentadas nos exemplos das seções anteriores. Primeiramente, vamos estabelecer o conceito econômico de função de produção de um processo produtivo que usa n insumos para gerar um único produto.

Definição 1.8 – Função de produção

A função de produção $y = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ associa a cada combinação de insumos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ a quantidade *máxima* y que pode ser produzida.

Como vimos no Exemplo 1.5, uma curva de nível de uma função de produção leva o nome de isoquanta, a qual mostra as combinações de insumos que geram um determinado nível de produto. Esta noção econômica pode ser definida formalmente como vemos a seguir.

Definição 1.9 – Isoquanta

A isoquanta associada ao nível de produção y é o conjunto $Q(y)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+ \middle| f(x_1,x_2)=y\right\}$, formado por todas as combinações de insumos (x_1,x_2) que geram o mesmo nível de produção y.

Definição 1.10 – Mapa de isoquantas

O mapa de isoquantas de uma firma é a coleção de suas isoquantas.

Certas características tecnológicas são representadas matematicamente por funções de produção com formas funcionais específicas, que geram mapas de isoquantas diferenciados.

Veremos, a seguir, três exemplos muito utilizados na análise microeconômica. Acompanhe!

Exemplo 1.7 – Tecnologia Leontief ou de proporções fixas

Considere uma firma cujo processo de produção permite combinar os insumos somente em determinadas proporções fixas. Por exemplo, cada homem poderia operar simuntaneamente duas máquinas. Assim, se x_1 indicar a quantidade de horas de funcionamento de uma máquina por turno de produção e x_2 a quantidade de horas que cada homem trabalha por turno de produção, a proporção entre os fatores será $\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}$. Quando esta propriedade está presente em um processo produtivo, dizemos que a tecnologia é do tipo Leontief ou de proporções fixas.

A função de produção, cujo domínio é o conjunto $D(f)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$, que representa este tipo de tecnologia tem a seguinte forma funcional:

(1.8) $$f(x_1,x_2)=\min\{ax_1,bx_2\},$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são constantes reais. Na expressão acima, min {} indica que se deve pegar o menor entre os valores listados entre chaves. Por exemplo, min {3,2}= 2, min {0,2}= 0, min {3,3}=3 e min {-5,2}= -5.

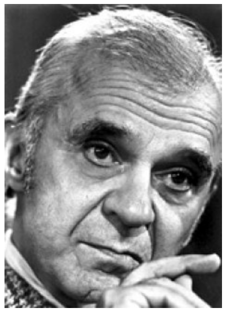
A função de produção (1.8) indica que a produção máxima é determinada pelo fator mais escasso. Por exemplo, suponha que $a=1$ e $b=2$, tal que

$$f(x_1,x_2)=\min\{x_1,2x_2\}.$$

Se x_1 = 3 unidades de capital e x_2 = 2 unidades de trabalho, segue que $f(3,2)=\min\{3,2\times 3\}=\min\{3,6\}=3$. Assim, embora haja mais unidades de capital do que unidades de trabalho, o primeiro insumo é o fator de produção escasso. Na Figura 1.7 você encontrará o gráfico desta função para a =1 e b = 2. Note que este gráfico se caracteriza pela presença de dois planos que se cruzam e formam uma reta que aparece em tom branco na citada figura. Vejamos o significado econômico desta reta.

No exemplo numérico que demos anteriormente tínhamos a combinação de insumo $(x_1,x_2)=(3,2)$, de maneira que $x_1<2x_2$ e, portanto, $f(3,2)=x_1=3$. Neste caso, como já dito, o capital é o fator escasso, ou seja, é o fator limitante da produção. Em outros termos, há excesso do insumo trabalho, pois bastaria se ter $x_2=1{,}5$ unidades de trabalho para se produzir 3 unidades de produto. Logo, não haverá excesso (desperdício) de qualquer insumo quando a quantidade de capital for exatamente o dobro da quantidade de trabalho, ou seja, $x_1=2x_2$. Todas as combinações de insumo (x_1,x_2) que satisfazem a igualdade $x_1=2x_2$ geram a reta que aparece em tom branco na Figura 1.7. Em termos mais precisos, a citada reta é formada pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1,x_2,y)\in\mathbb{R}^3_+ \mid y=x_1=2x_2\}$.

Um esboço do mapa de isoquantas da função de produção (1.8) é mostrado na Figura 1.8 adiante. A isoquanta da tecnologia Leontief associada a um nível de produção y é definida, considerando (1.8), como:



Wassily Wassilyovitch Leontief (1905 – 1999) foi um economista russo, naturalizado nos Estados Unidos. Recebeu, em 1973, o Prêmio de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel (não confundir com o Prêmio Nobel) pelo desenvolvimento da matriz de insumo-produto – que recebeu o seu nome – e a sua aplicação à economia. Esse modelo foi apresentado pela primeira vez em seu livro *The Structure of the American Economy*, publicado em 1941.

(1.9) $$Q(y)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+ \,\middle|\, \min\{ax_1,bx_2\}=y\right\}.$$

Como podemos observar, as isoquantas têm o formato em "L". Os vértices dos "L´s" são formados pelos pontos que formam uma reta no plano x_1x_2. Estes pontos, pertencentes ao domínio da função (1.8), representam as combinações de insumos (x_1,x_2) que não apresentam excesso (desperdício) de qualquer um dos insumos, de maneira que vale a igualdade $ax_1=bx_2$. Logo, a equação que define a reta em análise é $x_2=\dfrac{a}{b}x_1$.

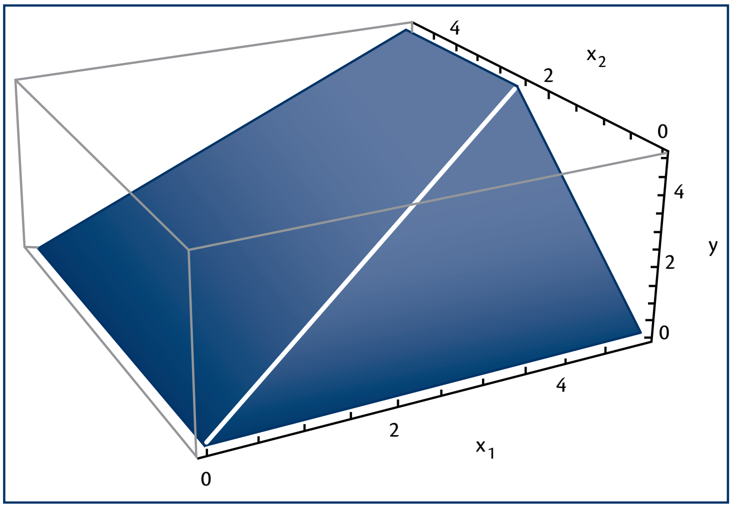


Figura 1.7 – Gráfico da função de produção Leontief $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$.

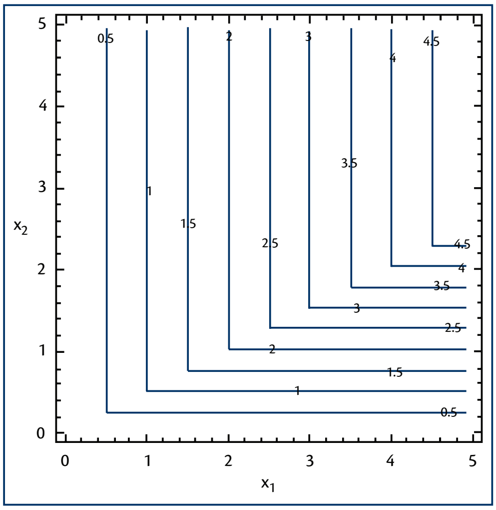


Figura 1.8 – Mapa de isoquantas da função de produção Leontief $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$.

Exemplo 1.8 – Tecnologia com insumos substitutos perfeitos

Enquanto a tecnologia do tipo Leontief representa a impossibilidade de usar os insumos em proporções variáveis, a tecnologia com insumos substitutos perfeitos representa o caso no extremo oposto.

Considere uma firma cujo processo de produção permite combinar os insumos em qualquer proporção desejada. Além disso, cada unidade de um insumo pode ser substituída exatamente por uma unidade do outro insumo e, ainda assim, a produção se mantém no mesmo patamar que se encontrava antes da substituição. A função de produção que representa este tipo de tecnologia tem a seguinte forma funcional:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \tag{1.10}$$

Parte do gráfico da função de produção (1.10), cujo domínio é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, pode ser visualizado em perspectiva na Figura 1.9. Como podemos ver, os pontos $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ formam uma superfície plana com declive no espaço euclidiano.

Um esboço do mapa de isoquantas da função de produção (1.10) é mostrado na Figura 1.10. A isoquanta da tecnologia com insumos substitutos perfeitos associada a um nível de produção y é definida, considerando (1.10), como:

(1.11) $$Q(y)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+ \middle| x_1+x_2=y\right\}.$$

Observe que as isoquantas são retas com inclinação negativa. Mais precisamente, uma isoquanta $Q(y)$ é um segmento de reta definido pela função $x_2=y-x_1$, para $0\le x_1\le y$.

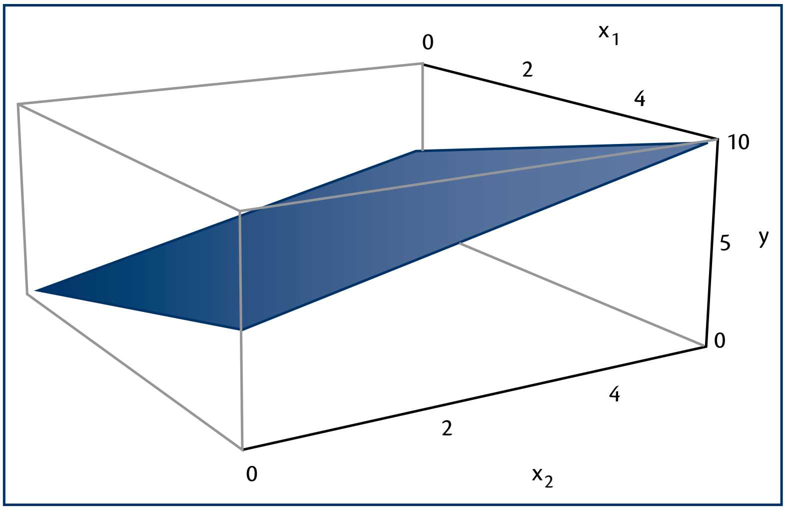


Figura 1.9 – Gráfico da função de produção com insumos substitutos perfeitos $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$.

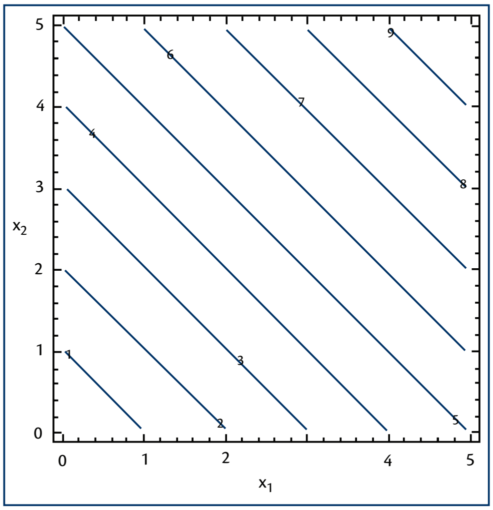


Figura 1.10 – Mapa de isoquantas da função de produção com insumos substitutos perfeitos $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$.

Exemplo 1.9 – Tecnologia Cobb-Douglas

Considere uma firma cujo processo de produção permite combinar os insumos em qualquer proporção desejada; todavia, nem sempre é possível substituir exatamente uma unidade de insumo por outra unidade do outro insumo e manter a produção no mesmo patamar que se encontrava antes da substituição.

Paul Howard Douglas (1892 – 1976) foi um político norte-americano e professor de Economia. **Charles Wiggans Cobb** (1875 –1949) foi um matemático e economista norte-americano. Juntos eles desenvolveram, na década de 1920, a famosa Função de Cobb-Douglas.

A função de produção que representa este tipo de tecnologia tem a seguinte forma funcional:

(1.12) $$f(x_1,x_2)=Ax_1^{\,a}x_2^{\,b},$$

em que $A>0$, $0<a<1$, $0<b<1$ são constantes reais. Dado que o domínio desta função é o primeiro quadrante do plano cartesiano, ou seja, $D(f)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\ge 0, x_2\ge 0\}$, então devemos impor que A>0 para que se tenha produção positiva, ou seja, para que $f(x_1,x_2)\ge 0$ para qualquer combinação de insumos (x_1,x_2) com $x_1\ge 0$ e $x_2\ge 0$. No transcorrer da disciplina, veremos o porquê das restrições quantitativas impostas aos parâmetros a e b. Por enquanto, vamos tomar estas restrições como dadas.

A função de produção (1.1) apresentada no Exemplo 1.1 é uma função de produção Cobb-Douglas com $A = 50$ e $a = b = 1/2$, pois $f(x_1, x_2) = 50\sqrt{x_1 x_2} = 50\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 50(x_1)^{1/2}(x_2)^{1/2}$. Logo, a Figura 1.1 é um esboço do gráfico de uma tecnologia Cobb-Douglas.

A isoquanta da tecnologia em questão associada a um nível de produção y é definida, considerando (1.12), como:

$$Q(y) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \middle| A{x_1}^a {x_2}^b = y \right\}. \tag{1.13}$$

Um esboço do mapa de isoquantas da função de produção (1.12) é mostrado na Figura 1.4 na seção 1.2, tomando $A = 50$ e $a = b = 1/2$. Como podemos observar, uma isoquanta $Q(y)$ é definida pela função $x_2 = \left(\dfrac{y}{A{x_1}^a} \right)^{1/b}$, para todo $x_1 > 0$.

Passemos agora à formalização das noções econômicas de função utilidade e curvas de indiferença de um consumidor, as quais servem como meio de descrição teórica das preferências (gostos) de um consumidor com relação às cestas de consumo pertencentes ao seu conjunto consumo.

Intuitivamente, uma função utilidade, como vimos no Exemplo 1.2 da seção 1.1, é um modo de atribuir um número real a cada cesta de consumo, de maneira que o consumidor atribui às cestas mais preferidas números reais mais altos do que aqueles atribuídos às cestas menos preferidas. Formalmente, pode-se estabelecer o conceito de função utilidade como vemos a seguir.

Definição 1.11 – Função utilidade

Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma cesta de consumo, na qual $x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}_+, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ são as quantidades consumidas em uma dada unidade de tempo dos bens $1, 2, \ldots, n$, respectivamente. Considere uma função u que associa um número real $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ a cada cesta de consumo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertencente ao conjunto consumo M. Dizemos que u é uma função utilidade se ela satisfaz a seguinte propriedade: uma cesta de bens $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ é preferida a uma cesta $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in M$ se, e somente se, $u(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq u(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

Definição 1.12 – Curva de indiferença

Uma curva de indiferença associada ao nível de utilidade $\overline{u}$ é o conjunto $I(\overline{u}) = \left\{(x_1, x_2) \in M \subset \mathbb{R}^2_+ \middle| u(x_1, x_2) = \overline{u}\right\}$, que é formado por todas as cestas de consumo (x_1, x_2) do seu conjunto consumo que o consumidor percebe como indiferentes entre si, ou seja, às quais ele atribui o mesmo nível de utilidade $\overline{u}$.

Definição 1.13 – Mapa de curvas de indiferença

O mapa de curvas de indiferença de um consumidor é a coleção de suas curvas de indiferença.

Para fixar esses conceitos, vejamos alguns exemplos de preferências que aparecem na teoria do consumidor.

Exemplo 1.10 – Preferências com bens complementares perfeitos

Considere um consumidor que só pode consumir bens em determinadas proporções fixas. Por exemplo, um par de sapatos é, normalmente, usado com um par de meias; uma impressora a tinta deve ser utilizada com um cartucho de tinta. Assim, se x_1 indicar a quantidade de pares de sapatos ou de impressoras a tinta utilizados em um dado período de tempo e x_2 indicar, respectivamente, a quantidade de pares de meias ou de cartuchos de tinta usados neste mesmo período de tempo, a proporção entre os bens será $\frac{x_2}{x_1} = 1$. Quando esta propriedade está presente, dizemos que os bens em questão são complementares perfeitos.

A função utilidade, cujo domínio é o conjunto

$$D(u) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

que representa este tipo de preferências, tem a seguinte forma funcional:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}. \tag{1.14}$$

A função de produção (1.14) indica que o nível de satisfação associado a uma cesta de consumo é determinado pela menor quantidade entre os bens que compõem a cesta. Por exemplo, as cestas de consumo (1,1), (3,1), (3,1) e (1,3) são indiferentes para um consumidor que considera os bens 1 e 2 complementares perfeitos, pois as utilidades associadas a tais cestas são iguais, mais precisamente, $u(1,1) = u(3,1) = u(1,3) = 1$.

Na Figura 1.11 encontra-se o gráfico da função utilidade (1.14). Note que este gráfico se caracteriza pela presença de dois planos, cuja intersecção forma uma reta que aparece em tom branco na citada figura. Esta reta é composta pelas cestas de consumo (x_1, x_2) que satisfazem a igualdade $x_1 = x_2$, ou seja, a citada reta é formada pelos pontos pertencentes ao conjunto $\left\{(x_1, x_2, u(x_1, x_2) = x_1) \in \mathbb{R}^3_+ \middle| x_1 = x_2\right\}$.

Um esboço do mapa de curvas de indiferença da função utilidade (1.14) é mostrado na Figura 1.12. A curva de indiferença associada a um nível de utilidade $\bar{u}$ é definida, considerando (1.14), como:

(1.15) $$I(\bar{u}) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \middle| \min\{x_1, x_2\} = \bar{u}\right\}.$$

Como podemos observar, as curvas de indiferença têm o formato em "L". Os vértices dos "L´s" são formados pelos pontos que formam uma reta no plano x_1x_2. Estes pontos, pertencentes ao domínio da função (1.14), representam as cestas de consumo (x_1, x_2) que não apresentam excesso (desperdício) de qualquer um dos bens, de maneira que vale a igualdade $x_1 = x_2$. Logo, a equação que define a reta em análise é $x_2 = x_1$.

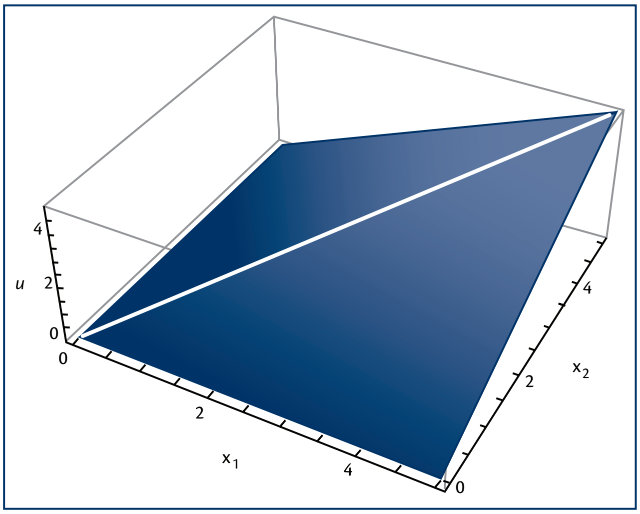


Figura 1.11 – Gráfico da função utilidade com bens complementares perfeitos $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

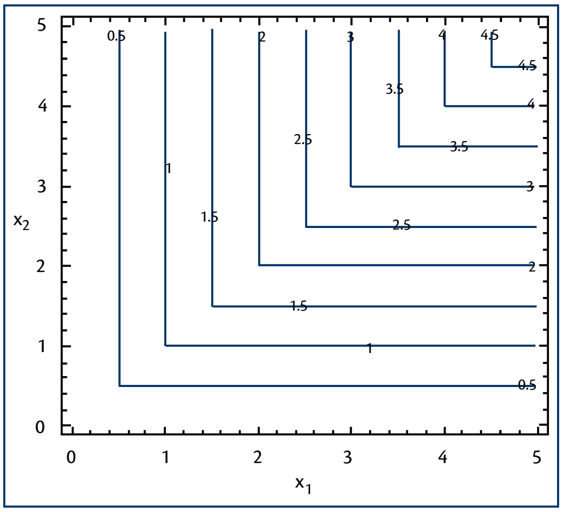


Figura 1.12 – Mapa das curvas de indiferença da função utilidade $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

Exemplo 1.11 – Preferências com bens substitutos perfeitos

Enquanto bens complementares perfeitos implicam o consumo em proporções fixas, bens substitutos perfeitos representam o caso no extremo oposto. Considere um consumidor que está disposto a substituir uma unidade de um determinado bem exatamente por uma unidade de outro bem ou vice-versa.

A função utilidade que representa este tipo de preferências tem a seguinte forma funcional:

(1.16) $$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 .$$

Parte do gráfico da função de produção (1.10), com domínio $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \big| x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, pode ser visualizado em perspectiva na Figura 1.2, apresentada na seção 1.1. Como pode ser visto, os pontos $\left(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\right)$ formam uma superfície plana com declive no espaço euclidiano.

Um esboço do mapa de curvas de indiferença da função utilidade (1.15) é mostrado na Figura 1.13. A curva de indiferença associada a um nível de utilidade $\overline{u}$ é definida, considerando (1.16), como:

(1.17) $$I(\overline{u}) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \big| x_1 + x_2 = \overline{u}\right\}.$$

Como podemos observar, as curvas de indiferença são retas com inclinação negativa. Mais precisamente, uma curva de indiferença $I(\overline{u})$ é um segmento de reta definido pela função $x_2 = \overline{u} - x_1$, para $0 \leq x_1 \leq \overline{u}$.

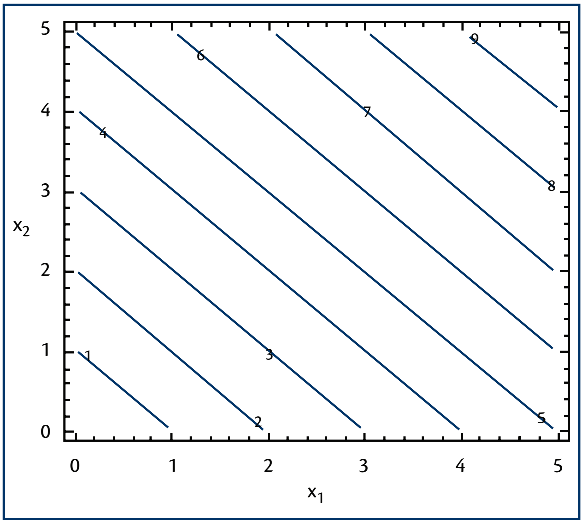


Figura 1.13 – Mapa das curvas de indiferença da função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Exemplo 1.12 – Preferências Cobb-Douglas

A função utilidade que representa este tipo de preferências tem a seguinte forma funcional:

$$u(x_1, x_2) = Ax_1^{\,a} x_2^{\,b}, \tag{1.18}$$

em que $A>0$, $a>0$ e $b>0$ são constantes reais. O domínio desta função, ou seja, o conjunto consumo é o primeiro quadrante do plano cartesiano, $M = D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Cabe salientar que, diferentemente da tecnologia Cobb-Douglas apresentada no Exemplo 1.9, os parâmetros a e b não necessitam ser menores do que 1. No transcorrer da disciplina, veremos o porquê dessas restrições quantitativas menos restritivas.

Um esboço do gráfico da função utilidade (1.17) é encontrado na Figura 1.14, gerada tomando $A = 1$, $a = 2$ e $b = 3$.

A curva de indiferença das preferências Cobb-Douglas associada ao nível de utilidade $\overline{u}$ é definida, considerando (1.18), como:

$$I(\overline{u}) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, x_1^{\,2} x_2^{\,3} = \overline{u}\right\}. \tag{1.19}$$

Como podemos observar, a curva de indiferença em análise é definida pela função $x_2 = \left(\dfrac{\overline{u}}{Ax_1^{\,2}}\right)^{1/3}$, para todo $x_1 > 0$. Um esboço do mapa de curvas de indiferença da função utilidade (1.18) é mostrado na Figura 1.15.

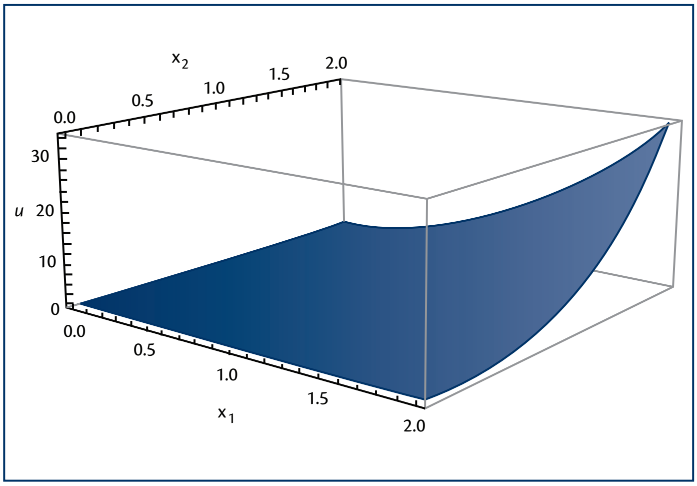


Figura 1.14 – Gráfico da função utilidade Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\,2} x_2^{\,3}$.

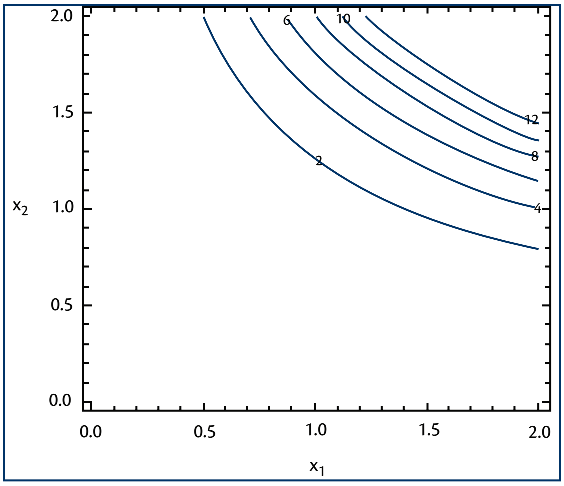


Figura 1.15 – Mapa das curvas de indiferença da função utilidade Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\,2} x_2^{\,3}$.

1.4 FUNÇÕES HOMOGÊNEAS

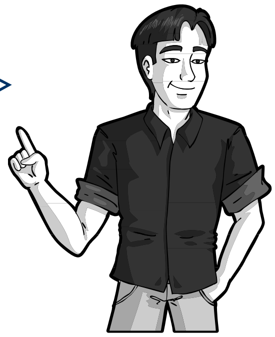
As funções homogêneas formam uma classe específica de funções que satisfazem uma determinada propriedade matemática que será definida adiante e que, por conta disto, representam de maneira conveniente, do ponto de vista analítico, certas propriedades econômicas, principalmente, de tecnologias de produção.

Em termos matemáticos, uma função homogênea pode ser definida da maneira como veremos a seguir.

Definição 1.14 – Função homogênea de grau r

Uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é homogênea de grau r se, para toda *n*-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e todo $t > 0$, temos $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Para facilitar a sua compreensão, veremos um exemplo puramente matemático de função homogênea de grau 1. Acompanhe!



Exemplo 1.13 – Função homogênea de grau 1

Considere a função $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$. Esta função é homogênea de grau 1, pois

$$f(tx_1, tx_2) = 2(tx_1) - 3(tx_2),$$
$$f(tx_1, tx_2) = t(2x_1 - 3x_2),$$
$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2).$$

Vejamos outro exemplo puramente matemático, agora de uma função homogênea de grau 5.

Exemplo 1.14 – Função homogênea de grau 5

Considere a função $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$. Esta função é homogênea de grau 5, pois

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 (tx_2)^3,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t^5 x_1^2 x_2^3,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t^5 f(x_1, x_2).$$

Finalmente, observe que nem toda função é homogênea, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.15 – Função não-homogênea

Considere a função $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$. Esta função não é homogênea, pois

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^2 + (tx_2)^3,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t^2(x_1^2 + tx_2^3) \neq t^2(x_1^2 + x_2^3) = t^2 f(x_1, x_2).$$

1.5 APLICAÇÃO NA ANÁLISE ECONÔMICA: RETORNOS DE ESCALA E FUNÇÕES DE PRODUÇÃO HOMOGÊNEAS

Quando analisamos o que acontece com o nível de produção de uma firma uniproduto quando ocorre uma expansão na mesma proporção de todos os insumos utilizados por ela, estamos analisando os retornos de escala desta firma. A *priori,* uma firma pode apresentar três tipos de retornos de escala, os quais definiremos a seguir.

Uma firma apresenta **retornos decrescentes de escala** se, ao serem aumentadas na mesma proporção todas as quantidades dos seus insumos, a sua produção variar numa proporção **menor** que a variação das quantidades utilizadas dos insumos. Esta definição pode ser estabelecida matematicamente da maneira como vemos a seguir.

Definição 1.15 - Retornos decrescentes de escala

A função de produção $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ apresentará retornos decrescentes de escala se $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) < tf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todo $t > 1$.

Uma firma apresenta **retornos constantes de escala** se, ao serem aumentadas na mesma proporção todas as quantidades dos seus insumos, sua produção variar na **mesma** proporção que a variação das quantidades utilizadas dos insumos. Esta definição pode ser estabelecida matematicamente da forma como vemos a seguir.

Definição 1.16 – Retornos constantes de escala

A função de produção $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ apresentará retornos constantes de escala se $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para todo $t > 1$.

Finalmente, dizemos que uma firma apresenta **retornos crescentes de escala** se, ao serem aumentadas na mesma proporção todas as quantidades dos seus insumos, a sua produção variar numa proporção **maior** que a variação das quantidades utilizadas dos insumos. Esta definição pode ser estabelecida matematicamente como vemos a seguir.

Definição 1.17 – Retornos crescentes de escala

A função de produção $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ apresentará retornos crescentes de escala se $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) > tf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para todo $t > 1$.

Você sabe qual é a relação entre a taxonomia de retornos de escala estabelecida anteriormente e a Definição 1.14 de função homogênea de grau r?

Quando a função de produção $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é homogênea de grau r, podemos afirmar que ela apresentará:

- retornos decrescentes de escala se $0 < r < 1$;
- retornos constantes de escala se $r = 1$; e
- retornos crescentes de escala se $r > 1$.

Vejamos, agora, como podemos analisar os retornos de escala das tecnologias apresentadas na seção 1.3.

Exemplo 1.16 – Retornos de escala e tecnologia Leontief ou de proporções fixas

A função de produção que representa este tipo de tecnologia tem a forma funcional (1.8), que repetimos aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}, \quad (1.8)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são constantes reais.

Veremos que esta função de produção é homogênea de grau 1. Com efeito, aplicando a Definição 1.14, obtemos para qualquer $t > 1$:

$$f(tx_1, tx_2) = \min\{atx_1, btx_2\},$$
$$f(tx_1, tx_2) = t\min\{ax_1, bx_2\},$$
$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2).$$

Logo, considerando a Definição 1.16, concluímos que a função de produção (1.8) apresenta retornos constantes de escala. Isto significa que aumentando a quantidade utilizada de insumos em $t > 1$ vezes, a produção aumentará exatamente na mesma proporção.

Exemplo 1.17 – Retornos de escala e tecnologia com insumos substitutos perfeitos

A função de produção que representa este tipo de tecnologia tem a forma funcional (1.10), que repetimos aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \tag{1.10}$$

Veremos que esta função de produção é homogênea de grau 1. Com efeito, aplicando a Definição 1.14 obtemos para qualquer $t > 1$:

$$f(tx_1, tx_2) = tx_1 + tx_2,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t(x_1 + x_2),$$
$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2).$$

Logo, considerando a Definição 1.16, concluímos que a função de produção (1.10) apresenta retornos constantes de escala.

Exemplo 1.18 – Retornos de escala e tecnologia Cobb-Douglas

A função de produção que representa este tipo de tecnologia tem a forma funcional (1.12), que repetimos aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{a}x_2^{b}, \tag{1.12}$$

em que $A > 0$, $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$são constantes reais. Veremos que esta função de produção é homogênea de grau $a + b$. Com efeito, aplicando a Definição 1.14 obtemos para qualquer $t > 1$:

$$f(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^a (tx_2)^b,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t^{a+b} x_1{}^a x_2{}^b,$$
$$f(tx_1, tx_2) = t^{a+b} f(x_1, x_2).$$

Logo, considerando a Definição 1.16, concluímos que a função de produção (1.10) apresentará retornos decrescentes de escala se $a + b < 1$, retornos constantes de escala se $a + b = 1$ e retornos decrescentes de escala se $a + b > 1$.

Saiba Mais

!

Para saber mais sobre os conteúdos tratados nas seções 1.1 e 1.2, consulte o capítulo 8 (seções 8.1 e 8.2) de Hariki & Abdounur (2002).

Uma apresentação com enfoque mais econômico sobre os tópicos trabalhados na seção 1.3, ou seja, função de produção, isoquantas e tecnologias dos tipos Leontief, com insumos substitutos perfeitos e Cobb-Douglas, é encontrada no capítulo 18 (seções 18.1 a 18.3) de Varian (2006).

Para saber mais sobre funções utilidade e curvas de indiferença, tópicos também trabalhados na seção 1.3, leia o capítulo 3 (seções 3.1 a 3.4) de Varian (2006).

Sobre funções homogêneas, leia o capítulo 12 (seção 12.6) de Chiang & Wainwright (2006).

E, finalmente, para aprofundar seus conhecimentos sobre retornos de escala, conceito estudado na seção 1.5, recomendamos a leitura do capítulo 18 (seção 18.10) de Varian (2006).

Chegamos ao fim da Unidade 1. Agora você deve ler o resumo do conteúdo que trabalhamos até este momento e, em seguida, responder às questões das Atividades de aprendizagem. Leia e releia a unidade antes de processar as respostas e recorra aos tutores sempre que tiver dúvidas. Além disso, lembre-se de assistir à Videoaula 1 no AVEA. Bom trabalho!

Resumo da unidade:

Nesta unidade, apresentamos, fundamentalmente, o uso dos conceitos matemáticos de função de várias variáveis e de curvas de nível de função de duas variáveis nas representações formais das restrições tecnológicas com que se defronta uma firma e das preferências (gostos) de um consumidor sobre as cestas de consumo pertencentes a seu conjunto consumo. Na primeira seção, estabelecemos a definição matemática de função de várias variáveis. Na segunda seção apresentamos os conceitos matemáticos de gráfico e curvas de nível de funções de duas variáveis. Na terceira seção, por sua vez, aplicamos os conceitos matemáticos expostos nas duas seções anteriores na construção dos conceitos econômicos de função de produção com vários insumos, isoquantas, função utilidade e curvas de indiferença. Analisamos, ainda na terceira seção, certos tipos específicos de tecnologia e de preferências que aparecem com frequência na análise microeconômica. Na quarta seção, apresentamos o conceito matemático de função homogênea. E, finalmente, na última seção, mostramos a relação entre o conceito de função homogênea e o conceito econômico de retornos de escala.

Atividade de Aprendizagem – 1

1) Uma firma uniproduto produz sujeita a uma tecnologia descrita pela função de produção $f(x_1, x_2) = \min\{2x_1, 6x_2\}$, sendo $x_1 \in \mathbb{R}_+$ a quantidade utilizada do insumo 1 e $x_2 \in \mathbb{R}_+$ a quantidade utilizada do insumo 2. Responda:

    a) Que tipo de tecnologia a função de produção representa?

    b) Qual é o domínio da função de produção?

    c) Defina por compreensão a isoquanta associada à produção de 12 unidades de produto.

    d) Esboce as isoquantas associadas aos níveis de produção 6, 8 e 12.

2) Considere um consumidor cujas preferências sobre o conjunto consumo $M = \mathbb{R}^2_+$ são representadas pela função utilidade $u(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, sendo $x_1 \in \mathbb{R}_+$ a quantidade consumida do bem 1 e $\in \mathbb{R}$ a quantidade consumida do bem 2 em um dado intervalo de tempo. Com base em tal função utilidade responda:

    a) Qual é o domínio desta função?

    b) Defina por compreensão a curva de indiferença associada ao nível de utilidade 10.

    c) Obtenha a função que representa a curva de indiferença para um nível de utilidade qualquer $u \geq 0$.

d) Esboce no plano $x_1 x_2$ os gráficos das curvas de indiferença para $u = 10$ e $u = 20$.

3) Dentre as funções listadas a seguir, verifique quais são homogêneas calculando, nesses casos, o grau.

a) $f(x, y) = x^4 - xy$

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - xy}$

c) $f(x, y) = x(x - y)^2 - x^{5/3} y^{4/3}$

4) Seja $Q = f(K, L) = \sqrt{K^{\alpha} L^{\beta}}$ uma função de produção, na qual ***Q*** é a quantidade de produto, ***K*** a quantidade de capital e ***L*** a quantidade de trabalho. Sobre esta função determine:

a) quais as restrições que devem ser impostas às constantes paramétricas **α** e **β** para que a tecnologia representada por esta função de produção apresente retornos crescentes de escala? Justifique formalmente sua resposta.

b) se $\alpha + \beta = 1$, é correto afirmar que quadruplicando as quantidades de capital e trabalho a produção duplica? Justifique formalmente sua resposta.

Anotações

d m a

importante

2

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Ao final desta unidade, você deverá ter conhecimentos sobre:

- a definição matemática de derivada parcial e sua interpretação geométrica;
- as regras de derivação, bem como o conceito de derivadas parciais de ordem superiores;
- o uso desses conceitos e técnicas operatórias para estabelecer formalmente o conceito econômico de produtividade marginal e o princípio das produtividades marginais decrescentes;
- o conceito econômico de utilidade marginal, além da taxonomia dos tipos de mercadorias do ponto de vista de um consumidor (bens, males e neutros);
- o conceito matemático de diferencial total de primeira ordem e sua aplicação na formalização dos conceitos econômicos de taxa marginal de substituição e de taxa técnica de substituição.

Em *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010, Unidade 4) estudamos o uso do conceito matemático de derivada ordinária (ou seja, de uma função de uma variável) para representar formalmente a ideia de variações marginais em Economia. Em particular, naquela ocasião, estudamos os conceitos econômicos de receita marginal, custo marginal e lucro marginal de uma firma uniproduto.

Nesta unidade iremos fazer algo semelhante. Vamos estudar como podemos estender o conceito de variação marginal quando uma determinada variável, como a produção de um determinado bem, depende de mais de uma variável econômica envolvida, como as quantidades de capital e trabalho.

2.1 DERIVADA PARCIAL: DEFINIÇÃO, INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA, REGRAS DE DERIVAÇÃO E DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Considere uma variável y, que pode representar a quantidade produzida de um determinado produto em um dado período de produção, que depende de $n \geq 2$ variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$ e x_n, que podem ser interpretadas como as quantidades utilizadas de certos insumos neste mesmo período de produção. Intuitivamente, a derivada parcial de uma variável y com relação a uma variável x_i é uma aproximação da variação média de y gerada por uma pequena variação em x_i, mantendo constantes todas as demais variáveis independentes x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}..., x_{n-1} e x_n. Formalmente, podemos definir a derivada parcial da maneira como vemos a seguir.

Definição 2.1 – Derivada parcial

A derivada parcial da função $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ em relação à variável independente x_i, designada pelas notações alternativas, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (lê-se: $delf - delx_i$), $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\cdot)$, f_{x_i} ou f_i, é dada pelo limite

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

se este limite existir.

Vejamos agora a interpretação geométrica da derivada parcial. Considere a Figura 2.1 adiante. Nela se encontra a representação de uma parte do gráfico definido por uma função $z = f(x,y)$. Note que agora, além de x, estamos tomando y como uma variável independente, sendo z a variável dependente. Para esta função de duas variáveis independentes, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a tangente do ângulo α, formado pela reta que passa nos pontos A e P e é tangente à superfície $f(x,y)$ no ponto P para um dado valor de y. Analogamente, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a tangente do ângulo β, formado pela reta que passa nos pontos B e P e é tangente à superfície $f(x,y)$ no ponto P para um dado valor de x.

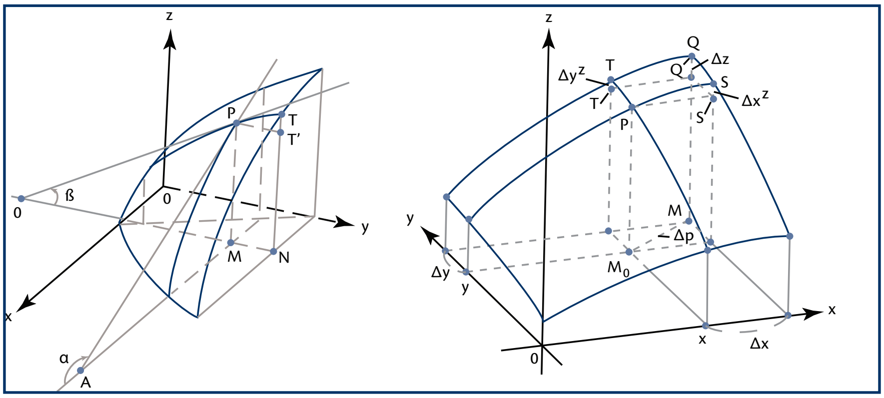
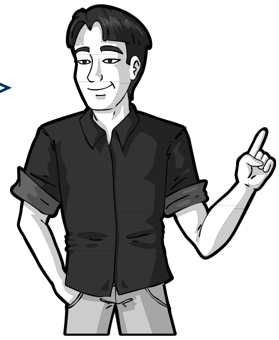


Figura 2.1 – Interpretação geométrica das derivadas parciais
Fonte: Piskounov (1993, p. 278, 284).

Na teoria da firma em microeconomia necessitamos expressar como cada fator de produção (insumo) contribui para o aumento da produção de uma firma uniproduto. Isto é feito utilizando o conceito de produtividade marginal de um fator, formalizado com o auxílio do conceito matemático de derivada parcial.

Vamos ilustrar, com dois exemplos, como isto pode ser feito. Acompanhe!



Exemplo 2.1 – Produtividade marginal de um insumo em termos de taxa média de variação

Considere uma firma uniproduto cuja função de produção é dada por:

(2.1) $$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} x_2\,,$$

sendo y a quantidade máxima que a firma pode produzir em um determinado período de produção utilizando a quantidade x_1 do insumo 1 e a quantidade x_2 do insumo 2.

A produtividade marginal do insumo 1 é a medida do impacto sobre a produção de uma unidade adicional do insumo 1, mantendo-se constantes as quantidades utilizadas dos demais insumos (aqui apenas o insumo 2). Por exemplo, suponhamos que a firma esteja utilizando a seguinte combinação de insumos $(x_1, x_2) = (3,4)$, com a qual produz $y = f(3,4) = 3^2 \times 4 = 36$ unidades de produto. Se a firma aumentar a quantidade utilizada do insumo 1 em 2 unidades ($\Delta x_1 = 2$), sua nova combinação de insumos será $(x_1 + \Delta x_1, x_2) = (3+2,4) = (5,4)$, passando a produzir $y = f(5,4) = 5^2 \times 4 = 100$ unidades de produto, gerando uma variação da produção $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2) = f(5,4) - f(3,4) = 100 - 36 = 64$ unidades de produto. Portanto, cada unidade adicional do insumo 1 gerou em média 32 unidades adicionais de produto. Ou seja, a taxa média de variação da produção em relação ao insumo 1 foi:

(2.2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{f(5,4) - f(3,4)}{2} = \frac{100-36}{2} = 32\,.$$

Generalizando, para a função de produção (2.1), a taxa média de variação da produção y gerada por uma variação $\Delta x_1 \neq 0$ na quantidade do insumo 1, a partir de uma combinação qualquer de insumo (x_1, x_2), pode ser expressa como:

(2.3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x_1)^2 x_2 - x_1^{\,2} x_2}{\Delta x_1} = 2x_1 x_2 + \Delta x_1\ x_2.$$

Para relembrar esse conceito, consulte a Unidade 4 do seu livro de *Matemática I*.

A expressão (2.3) é um exemplo da ideia de taxa média de variação da função f com relação a x_1. Substituindo os valores $(x_1, x_2) = (3,4)$ e $\Delta x_1 = 2$ na fórmula (2.3), obtemos o mesmo valor gerado em (2.2), a saber, $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 4 = 32$ unidades de produto. Como se vê, no caso específico da tecnologia representada pela função de produção (2.1), cada unidade de insumo 1 gerou em média um acréscimo de 32 unidades de produto, *coeteris paribus*. Como já dito, na análise microeconômica, este impacto incremental de um insumo sobre a produção é denominado produtividade marginal do insumo.

Você verá uma definição mais detalhada desse conceito a seguir, na subseção 2.2.1.

Cabe salientar que a taxa média de variação (2.3) pode ser calculada a partir de qualquer ponto no domínio da função de produção (2.1) e para qualquer valor de variação $\Delta x_1 \neq 0$. Por exemplo, suponha que se acrescente à combinação de insumos $(x_1, x_2) = (3,4)$ meia unidade de insumo 1, ou seja, que $\Delta x_1 = 0,5$. Sob tal hipótese, e usando (2.3), a taxa média de variação da produção com relação ao insumo 1 será $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 2 \times 3 \times 4 + 0,5 \times 4 = 26$. A interpretação deste valor deve ser feita com cautela. Se a partir da combinação de insumos $(x_1, x_2) = (3,4)$ aumenta-se a quantidade do primeiro insumo em meia unidade, a firma passa a produzir usando a nova combinação de insumos $(x_1, x_2) = (7/2, 4)$, que gera a produção de $f(7/2, 4) = (3,5)^2 \times 4 = 49$ unidades de produto. A variação de produção gerada pelo acréscimo de meia unidade do insumo 1 seria, então, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2) = f(7/2, 4) - f(3,4) = 49 - 36 = 13$ unidades de produto. Logo, a meia unidade adicional do insumo 1 gerou um aumento de 26 unidades, o que equivale a dizer que um acréscimo de uma unidade do insumo 1 gera adicionalmente, em média, 30 unidades de produto a partir do ponto $(x_1, x_2) = (3,4)$. Em suma, a taxa média de variação sempre expressa o impacto sobre uma variável y por unidade de variação em x_1, mesmo que a variação observada seja menor do que 1.

Ainda com respeito à interpretação da taxa média de variação, há outro ponto que merece destaque. Considere uma redução da quantidade do insumo 1, digamos em 1 unidade ($\Delta x_1 = -1$) a partir da combinação de insumos $(x_1, x_2) = (3,4)$. A nova combinação de insumos passa a ser, então, $(x_1, x_2) = (2,4)$. A produção será reduzida para $f(2,4) = 2^2 \times 4 = 16$ unidades de produto. A variação de produção seria, portanto, negativa, ou seja, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2) = f(2,4) - f(3,4) = 16 - 36 = -20$ unidades de produto. Logo, a redução de uma unidade do insumo 1 levou à redução de 20 unidades de produto, isto é, a taxa média de variação foi $\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{-20}{-} = 20$.

A positividade da taxa média de variação indica que a variação de x_1 em uma direção (positiva ou negativa) leva à variação em y na mesma direção. O oposto ocorre quando a taxa média de variação é negativa; quando x_1 varia numa direção, a variável y se move na direção oposta. No caso particular em que $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 0$, significa que uma variação em qualquer direção de x_1 não gera variação em y.

Finalmente, cabe destacar que tudo o que foi exposto no presente exemplo variando x_1 pode ser feito para x_2.

É mais conveniente, do ponto de vista teórico, substituir o conceito de produtividade marginal de um insumo medido como a taxa média de variação da produção com relação à quantidade deste insumo pelo conceito de taxa instantânea de variação da produção com relação à quantidade deste insumo. Vamos ilustrar como isto é feito no exemplo que segue.

Exemplo 2.2 – Produtividade marginal de um insumo em termos de derivada parcial

Assim como a taxa média de variação, a taxa instantânea de variação expressa o impacto sobre a variável y gerado pela variação em x_1. Todavia, esta última taxa expressa este impacto para variações infinitesimais (muito pequenas) de x_1.

Assim, a produtividade marginal do insumo 1 pode ser definida como o limite da taxa média de variação da produção com relação à quantidade do insumo 1 quando a variação deste insumo tende a zero, o que possibilita expressar esta grandeza econômica como a derivada parcial da função de produção de uma firma uniproduto com relação à variável que mede a quantidade do insumo.

Vamos ilustrar como isto é feito tomando como exemplo a função de produção (2.1) apresentada no exemplo anterior.

Primeiramente, vamos estabelecer a produtividade marginal do insumo 1, denotada por PMg_1, como o limite da taxa média de variação (2.3), ou seja, como a taxa instantânea de variação da produção com relação a este insumo:

$$PMg_1 \equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x_1)^2 x_2 - x_1^2 x_2}{\Delta x_1},$$

$$PMg_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left(2x_1 x_2 + \Delta x_1 \ x_2\right) = 2x_1 x_2 .$$

Considerando a definição 2.1, vemos que PMg_1 é, do ponto de vista matemático, a derivada parcial da função de produção (2.1) com relação à variável x_1, ou seja,

(2.4) $$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2 .$$

Observe que para $(x_1, x_2) = (3,4)$ e $\Delta x_1 = 2$, calculamos, no exemplo anterior, que a taxa média de variação era $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 32$. Com base em (2.4), a taxa instantânea de variação será $PMg_1 = 2 \times 3 \times 4 = 24$. Esta última pode ser vista como uma aproximação da primeira, que, neste caso, levaria a um $\text{erro} = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} - PMg_1 = 32 - 24 = 8$ unidades de produto. Façamos os mesmo cálculos agora para $(x_1, x_2) = (3,4)$ e $\Delta x_1 = 0,5$. Como já calculado no exemplo anterior, com estes novos dados a taxa média de variação passa a ser $\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = 26$, levando a um $\text{erro} = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} - PMg_1 = 26 - 24 = 2$.

Generalizando, o erro a partir de um ponto (x_1, x_2) e de uma variação Δx_1 quaisquer é obtido pela diferença entre (2.3) e (2.4):

$$\text{erro} = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} - PMg_1 = 2x_1x_2 + \Delta x_1\ x_2 - 2x_1x_2 = \Delta x_1\ x_2 .$$

Este erro depende, fundamentalmente, do tamanho da variação Δx_1. Logo, o erro tende a ser cada vez menor quanto menor for Δx_1. Assim, para valores infinitesimais (arbitrariamente pequenos) de Δx_1 podemos afirmar que:

(2.5) $$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x_1} .$$

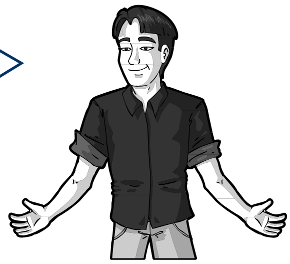
Do ponto de vista teórico, esta aproximação é extremamente importante, pois permite utilizar o cálculo diferencial na análise econômica.

O conceito de derivada parcial tem inúmeras outras aplicações. Sendo assim, é extremamente importante que você saiba como obter as derivadas parciais de uma função de várias variáveis.

Análogo ao que fizemos com as derivadas ordinárias (derivadas de funções de uma variável), para obtermos a derivada parcial de uma função

$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ com relação à variável x_1, não temos que usar diretamente a definição 2.1. Logo, para calcularmos a derivada parcial de uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ com relação à variável x_1, tudo que necessitamos fazer é aplicar as regras de derivação que aprendemos no curso de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010), tomando como constantes todas as demais variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

A seguir, veremos alguns exemplos puramente matemáticos que esclarecem o que acabei de dizer. Observe!



Exemplo 2.3 – Aplicações das regras de derivação básicas

Considere a função $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2$. Tomando x_2 como uma constante, a derivada parcial de y com relação a x_1 é obtida aplicando as regras das derivadas da função potência, do produto de uma constante por uma função e da soma/diferença de funções, a saber:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 .$$

Analogamente, tomando x_1 como uma constante, a derivada parcial de y com relação a x_2 é obtida aplicando as regras da derivada da função potência e da derivada da soma/diferença de funções, resultando:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 - 8x_2.$$

Considere a função $y = f(u, v) = (u+4)(3u+2v)$. Tomando v como uma constante, a derivada parcial de y com relação a u é obtida aplicando as regras das derivadas da função potência, do produto de uma constante por uma função e do produto de funções, ou seja:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \times (3u+2v) + (u+4) \times 3 = 3u + 2v + 3u + 12 = 6u + 2v + 12.$$

De maneira similar, tomando u como uma constante, a derivada parcial de y 15 do produto de uma constante por uma função e do produto de funções, ou seja:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = (u+4)2 = 2u + 8.$$

Considere a função $z = \dfrac{3u - 2v}{u^2 + 3v}$. Tomando v como uma constante, a derivada parcial de z com relação a u é obtida aplicando as regras das derivadas da função potência, do produto de uma constante por uma função e do quociente de funções, ou seja:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{3(u^2+3v)-(3u-2v)2u}{(u^2+3v)^2}=\frac{3u^2+9v-6u^2+4uv}{(u^2+3v)^2}=\frac{-3u^2+4uv+9v}{(u^2+3v)^2}.$$

Finalmente, tomando u como uma constante, a derivada parcial de z com relação a v é obtida aplicando as regras das derivadas da função potência, do produto de uma constante por uma função e do quociente de funções, como segue:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{-2(u^2+3v)-(3u-2v)3}{(u^2+3v)^2}=\frac{-2u^2-6v-9u+6v}{(u^2+3v)^2}=\frac{-2u^2-9u}{(u^2+3v)^2}=\frac{-u(2u-9)}{(u^2+3v)^2}.$$

Como vimos anteriormente, quando derivamos uma função de duas variáveis obtemos duas derivadas parciais, que são as derivadas parciais de primeira ordem. Uma função de $n \geq 2$ variáveis apresenta $n \geq 2$ derivadas parciais de primeira ordem. As derivadas de primeira ordem são em si funções das variáveis independentes da função original. Portanto, podemos derivá-las e obter as derivadas parciais de segunda ordem. A partir das derivadas de segunda ordem podemos obter as derivadas de terceira ordem e assim sucessivamente. Vamos ver mais detalhadamente este processo.

Considere uma função de duas variáveis independentes $z = f(x, y)$, suas derivadas parciais são, em regra, funções de x e y, ou seja:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Dessa forma, as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x, y)$ são quatro:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{yx}; e$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{y};$$

Por sua vez, as derivadas parciais de segunda ordem são também *x* e *y*. Logo, podemos derivar novamente as derivadas parciais de segunda ordem em relação a *x* e a *y*, obtendo as derivadas parciais de terceira ordem, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{xxx}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=f_{xxy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=f_{xyx}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=f_{xyy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=f_{yxx}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial xy}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}=f_{yxy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=f_{yyx}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{yyy}.$$

Definem-se, analogamente, as derivadas parciais de ordem superior para funções de $n \geq 2$ variáveis.

Vamos ver, a seguir, um exemplo puramente matemático para fixarmos esses conceitos. Acompanhe!

Exemplo 2.4 – Cálculo de derivadas parciais de ordem superior

Considere a função $f(x,y)=2x^3e^{5y}$. A partir das regras de derivação da função potência, do produto de uma constante por uma função, da função exponencial e da função composta (regra da cadeia) obtemos as seguintes derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=6x^2e^{5y}\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=10x^3e^{5y}.$$

Derivando estas duas expressões com relação às variáveis *x* e *y* obtemos as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=12xe^{5y}\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}=30x^2e^{5y}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}=30x^2e^{5y}\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=50x^3e^{5y}.$$

As derivadas f_{xx} e f_{yy} são denominadas derivadas parciais de segunda ordem **puras**, enquanto as derivadas f_{xy} e f_{yx} são chamadas de derivadas parciais de segunda ordem **mistas**.

Derivando cada uma das quatro derivadas de segunda ordem obtemos as oito derivadas parciais de terceira ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} = 12e^{5y}; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy} = 60xe^{5y};$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx} = 60xe^{5y}; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = f_{yxy} = 150x^2e^{5y};$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx} = 60xe^{5y}; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = f_{xyy} = 150x^2e^{5y};$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx} = 150x^2e^{5y}; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} = 250x^3e^{5y}.$$

As derivadas parciais de ordem superior a três podem ser obtidas analogamente.

A demonstração deste teorema foge do escopo do presente manual. Uma demonstração pode ser encontrada em Piskounov (1993, p. 300-302).

No exemplo anterior, você deve ter percebido que $f_{xy} = f_{yx}$, ou seja, que as derivadas de segunda ordem mistas são iguais. Isto sempre acontece se a função possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Esta propriedade é estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 – Teorema de Young

Suponhamos que a função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ possua derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Logo, para cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deste subconjunto e para cada par de índices i e j temos

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Agora, em posse do conceito de derivada parcial de n-ésima ordem e das regras de diferenciação parcial, estudados ao longo desta seção, vamos ver algumas aplicações econômicas que fazem uso deste instrumental matemático.

2.2 APLICAÇÕES NA ANÁLISE ECONÔMICA

2.2.1 Produtividades médias, marginais e o princípio das produtividades marginais decrescentes

Considere uma firma uniproduto cuja tecnologia de produção é descrita pela função de produção $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sendo y a quantidade gerada de produto em um dado período usando as quantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dos insumos $1, 2, \ldots, n$, respectivamente.

Existem dois conceitos básicos de produtividade dos insumos que são importantes no desenvolvimento da teoria da firma, os quais são definidos a seguir.

Definição 2.2 – Produtividade média do insumo *i*

A produtividade média do i-ésimo insumo, denotada por PMe_i, é a quantidade produzida por unidade do insumo i, dadas as quantidades dos demais insumos, ou seja,

$$PMe_i = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i}, \text{ para } x_i > 0.$$

Com base na noção de produtividade marginal apresentada no Exemplo 2.2, podemos definir a produtividade marginal do insumo i. Observe.

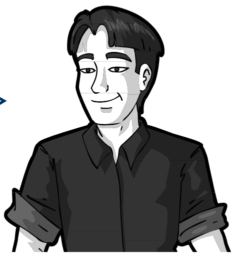
Definição 2.3 – Produtividade marginal do insumo *i*

A produtividade marginal do i-ésimo insumo, denotada por PMg_i, é a taxa instantânea de variação da produção com relação ao insumo i, ou seja,

$$PMg_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i},$$

se este limite existir.

A partir de agora, vamos analisar as produtividades médias e marginais dos três tipos de tecnologias apresentadas na Unidade 1. Comecemos pela Tecnologia Leontief.



Exemplo 2.5 – Produtividades da tecnologia Leontief ou de proporções fixas

Considere uma firma uniproduto que utiliza dois insumos e produz a partir de uma tecnologia do tipo Leontief, representada pela função de produção (1.8) apresentada no Exemplo 1.7, e repetida aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}, \tag{1.8}$$

sendo x_1 a quantidade do insumo 1, x_2 a quantidade do insumo 2 e $a > 0$ e $b > 0$ constantes reais. O domínio desta função é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Aplicando a Definição 2.2 à função de produção (1.8) obtemos as produtividades médias dos insumos 1 e 2, a saber:

$$PMe_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \begin{cases} \dfrac{ax_1}{x_1} = a, & \text{se } ax_1 \leq bx_2, \\ \dfrac{bx_2}{x_1}, & \text{se } ax_1 > bx_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

e

$$PMe_2 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = \begin{cases} \dfrac{ax_1}{x_2}, & \text{se } ax_1 < bx_2, \\ \dfrac{bx_2}{x_2} = b, & \text{se } ax_1 \geq bx_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Portanto as constantes $a > 0$ e $b > 0$ têm significado econômico, sendo as produtividades médias dos insumos 1 e 2, respectivamente, quando tais insumos não são utilizados em excesso.

As produtividades marginais da tecnologia em análise, por sua vez, não são determinadas nas combinações de insumos nas quais não há excesso de qualquer insumo. Vejamos o porquê disto.

Como vimos no Exemplo 1.7, o domínio da função de produção Leontief (1.8) pode ser dividido em três regiões no plano x_1x_2. A primeira região é composta pelas combinações de insumos nas quais o fator de produção em excesso é o insumo 2, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 < bx_2\}$. Na Figura 2.2, que veremos a seguir, estes pontos formam a região sombreada. Nesta região, dado que $f(x_1, x_2) = ax_1$, as produtividades marginais dos insumos são:

$$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = a \text{ e } PMg_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \tag{2.8}$$

A segunda região é composta pelas combinações de insumos nas quais o fator de produção em excesso é o insumo 1, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 > bx_2\}$. Na Figura 2.2 estes pontos formam a região não sombreada. Nesta região, dado que $f(x_1, x_2) = bx_2$, as produtividades marginais dos insumos são:

$$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \text{ e } PMg_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = b. \tag{2.9}$$

A terceira região é composta pelas combinações de insumos nas quais não há excesso de qualquer insumo, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$. Na Figura 2.2 estes pontos formam a reta $x_2 = \frac{a}{b} x_1$, que sai da origem $(0,0)$ e passa pelos vértices das isoquantas. Nesta região as produtividades marginais não existem. Com efeito, considerando a Definição 2.3, a produtividade marginal do insumo 1 é definida se o limite adiante existe:

$$PMg_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{2.10}$$

Este limite existirá se, e somente se, os limites laterais existirem e forem iguais, ou seja, se, e somente se,

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{2.11}$$

Agora, vamos mostrar que em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$ a igualdade (2.11) não é satisfeita.

Tomemos um ponto qualquer (x_1, x_2) tal que $ax_1 = bx_2$, ou seja, tal que $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$. Para $\Delta x_1 < 0$, sabemos que $x_1 + \Delta x_1 < x_1$ e, portanto, $a(x_1 + \Delta x_1) < ax_1$. Como $ax_1 = ax_2$, para $\Delta x_1 < 0$ temos $a(x_1 + \Delta x_1) < ax_2$. Dada esta última desigualdade, com base em (1.8) sabemos que $f(x_1 + \Delta x_1, x_2) = a(x_1 + \Delta x_1)$. Logo, como no ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$ temos $f(x_1, x_2) = ax_1$, segue que a taxa média de variação para um dado $\Delta x_1 < 0$ a partir do ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$ é dada por:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{a(x_1 + \Delta x_1) - ax_1}{\Delta x_1} = a. \tag{2.12}$$

Assim, em um ponto qualquer $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid ax_1 = bx_2\}$ segue que o limite à esquerda da taxa média de variação (2.12) será:

(2.13) $$\lim_{\Delta x_1 \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = a\,.$$

Tomemos novamente um ponto qualquer (x_1, x_2) tal que $ax_1 = bx_2$, ou seja, tal que $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, ax_1 = bx_2\}$. Para $\Delta x_1 > 0$, sabemos que $x_1 + \Delta x_1 > x_1$ e, portanto, $a(x_1 + \Delta x_1) > ax_1$. Como $ax_1 = bx_2$, para $\Delta x_1 > 0$ temos $a(x_1 + \Delta x_1) > ax_2$. Dada esta última desigualdade, com base em (1.8) sabemos que $f(x_1 + \Delta x_1, x_2) = bx_2$. Logo, como no ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, ax_1 = bx_2\}$ temos $f(x_1, x_2) = bx_2$, segue que a taxa média de variação para um dado $\Delta x_1 > 0$ a partir do ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, \boldsymbol{ax}_1 = \boldsymbol{bx}_2\}$ é dada por:

(2.14) $$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{ax_2 - ax_2}{\Delta x_1} = 0\,.$$

Assim, em um ponto qualquer $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, \boldsymbol{ax}_1 = \boldsymbol{bx}_2\}$ segue que o limite à direita da taxa média de variação (2.14) será:

(2.15) $$\lim_{\Delta x_1 \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = 0\,.$$

Enfim, considerando os limites laterais (2.13) e (2.15), inferimos que a igualdade de (2.11) não se verifica em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, \boldsymbol{ax}_1 = \boldsymbol{bx}_2\}$ e, portanto, a produtividade marginal do insumo 1, definida em (2.10), não existe.

Usando um argumento análogo, podemos mostrar que a produtividade marginal do insumo 2 também não existe em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, \boldsymbol{ax}_1 = \boldsymbol{bx}_2\}$.

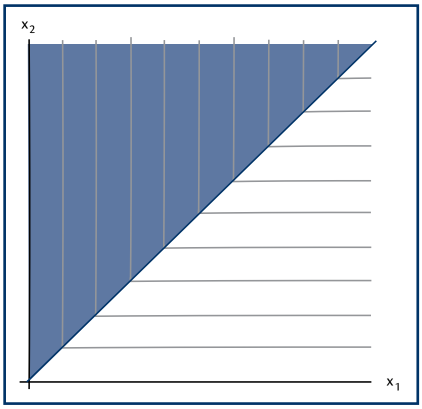


Figura 2.2 – Regiões do mapa de isoquantas da função de produção Leontief.

Passemos agora à análise das produtividades médias e marginais da tecnologia com insumos substitutos perfeitos.

Exemplo 2.6 – Produtividades da tecnologia com insumos substitutos perfeitos

Considere uma firma uniproduto que utiliza dois insumos e produz a partir de uma tecnologia com insumos substitutos perfeitos, representada pela função de produção (1.10) apresentada no Exemplo 1.8, repetida aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \tag{1.10}$$

sendo x_1 a quantidade do insumo 1 e x_2 a quantidade do insumo 2. O domínio desta função é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Aplicando a Definição 2.2 à função (1.10) obtemos as produtividades médias dos insumos 1 e 2, a saber:

$$PMe_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1} = 1 + \frac{x_2}{x_1} \tag{2.16}$$

e

$$PMe_2 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} + 1.$$

Cabe destacar que as produtividades médias dependem da intensidade de uso dos fatores de produção, ou seja, da razão x_2/x_1. Quanto maior a intensidade de uso do insumo 2, ou seja, quanto maior a razão x_2/x_1, maior a produtividade média do insumo 1 e menor a produtividade média do insumo 2. Por sua vez, quando a intensidade de uso do insumo 2 reduz-se, ou seja, quanto cai a razão x_2/x_1, diminui a produtividade média do insumo 1 e aumenta a produtividade média do insumo 2.

Para obtermos as produtividades marginais da tecnologia em análise basta calcularmos as derivadas parciais da função de produção (1.10), que são:

$$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \text{ e } PMg_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1. \tag{2.17}$$

Observamos que as produtividades marginais são ambas iguais a um. Isto significa que cada unidade adicional de um insumo, mantendo a quantidade do outro constante, gera uma variação de uma unidade de produto.

Finalmente, vamos analisar as produtividades da tecnologia Cobb-Douglas. Acompanhe!

Exemplo 2.7 – Produtividades da tecnologia Cobb-Douglas

Considere uma firma uniproduto que utiliza dois insumos e produz a partir de uma tecnologia Cobb-Douglas, representada pela função de produção (1.12) apresentada no Exemplo 1.9, repetida aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b, \tag{1.12}$$

sendo x_1 a quantidade do insumo 1, x_2 a quantidade do insumo 2, $A > 0$, $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$ constantes reais. O domínio desta função é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Note que supomos que $A > 0$ para garantir que $f(x_1, x_2) \geq 0$ para qualquer $(x_1, x_2) \in D(f)$.

Aplicando a Definição 2.2 à função (1.12) obtemos as produtividades médias dos insumos 1 e 2, a saber:

$$PMe_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{ax_1{}^a x_2{}^b}{x_1} = a\frac{x_2{}^b}{x_1{}^{1-a}} \quad \text{e} \tag{2.18}$$

$$PMe_2 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = \frac{ax_1{}^a x_2{}^b}{x_2} = a\frac{x_1{}^a}{x_2{}^{1-b}}.$$

Análogo à tecnologia com insumos substitutos perfeitos, a tecnologia Cobb-Douglas apresenta produtividades médias que dependem da intensidade de uso dos fatores de produção. Quando a quantidade do insumo 2 aumenta mais do que a quantidade do insumo 1, a razão $x_2{}^b / x_1{}^{1-a}$ diminui e, consequentemente, a produtividade média do insumo 1 aumenta e a do insumo 2 cai, pois a produção se tornou mais intensa em insumo 2. O oposto ocorre quando a intensidade de uso do insumo 2 reduz-se.

Para obtermos as produtividades marginais da tecnologia em análise basta calcularmos as derivadas parciais da função de produção (1.12), que são:

$$PMg_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = aAx_1{}^{a-1} x_2{}^b \ \text{e} \ PMg_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = bAx_1{}^a x_2{}^{b-1}. \tag{2.19}$$

Observamos que as produtividades marginais são ambas estritamente positivas para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$ e $x_2 \in \mathbb{R}_{++}$, já que $A > 0$, $a > 0$ e $b > 0$. Isto significa que cada unidade adicional de um insumo, mantendo a quantidade do outro constante, gera um aumento da produção.

Uma premissa comumente utilizada na teoria econômica é a de que a produtividade marginal de um fator de produção (insumo) cai quando se aumenta a quantidade utilizada desse fator, mantidos constantes os níveis de utilização dos demais fatores de produção.

Sabemos, de nossos estudos na disciplina *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010), que uma função é estritamente decrescente com relação a uma variável se a derivada com relação a esta variável é estritamente negativa. Considerando esta relação entre derivada de uma função e seu decrescimento, vejamos como estabelecer, se possível for, restrições sobre os parâmetros de uma função de produção para que a tecnologia por ela representada satisfaça o princípio das produtividades marginais decrescentes.

Exemplo 2.8 – Princípio das produtividades marginais decrescentes e a tecnologia Leontief ou de proporções fixas

Como vimos no Exemplo 2.5, no caso da tecnologia Leontief as produtividades marginais existem somente para combinações de insumos (x_1, x_2) tais que $ax_1 \neq bx_2$, ou seja, para combinações nas quais há excesso de um dos insumos. Nestes casos a produtividade marginal do insumo em excesso é nula e do insumo escasso é constante e igual à respectiva produtividade média (veja as expressões (2.8) e (2.9)). Logo, as produtividades marginais, quando existem, não são decrescentes e, portanto, a tecnologia Leontief não satisfaz o princípio das produtividades marginais decrescentes.

Exemplo 2.9 – Princípio das produtividades marginais decrescentes e a tecnologia com insumos substitutos perfeitos

Como vimos no Exemplo 2.6, no caso da tecnologia com insumos substitutos perfeitos as produtividades marginais dos insumos são constantes e iguais a unidade, conforme aparece em (2.17). Logo, a tecnologia em foco não satisfaz o princípio das produtividades marginais decrescentes.

Exemplo 2.10 – Princípio das produtividades marginais decrescentes e a tecnologia Cobb-Douglas

Considerando as expressões das produtividades marginais em (2.19), podemos descobrir se as restrições sobre os parâmetros implicam que as produtividades marginais são decrescentes com relação às respectivas quantidades de insumos, analisando o sinal das derivadas parciais de segunda ordem puras da função de produção Cobb-Douglas (1.12).

Com efeito, derivando a primeira função em (2.19) com relação à quantidade do insumo 1 obtemos:

(2.20) $$\frac{\partial PMg_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = (a-1)aA{x_1}^{a-2}{x_2}^b .$$

Esta expressão apresenta sinal negativo para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$ e $x_2 \in \mathbb{R}_{++}$, já que $A > 0$ e $0 < a < 1$ e, portanto, $(a-1)aA < 0$.

Por sua vez, derivando a segunda função em (2.19) com relação à quantidade do insumo 2 obtemos:

(2.21) $$\frac{\partial PMg_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} = (b-1)bA{x_1}^a{x_2}^{b-2} .$$

Esta expressão também apresenta sinal negativo para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$ e $x_2 \in \mathbb{R}_{++}$, já que $A > 0$ e $0 < b < 1$ e, portanto, $(b-1)bA < 0$.

Dado que as derivadas (2.20) e (2.21) são estritamente negativas sob as premissas $A > 0$, $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$, segue que as funções em (2.19) são estritamente decrescentes com relação aos respectivos insumos. Logo, a tecnologia Cobb-Douglas satisfaz o princípio das produtividades marginais decrescentes se a função de produção (1.12) satisfaz as restrições $A > 0$, $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.

2.2.2 Utilidades marginais, bens, males e neutros

O conceito de derivada parcial é também utilizado na teoria do consumidor, neste contexto, para especificar quando um consumidor prefere mais, menos ou é indiferente à quantidade de um bem em uma cesta de consumo, *coeteris paribus*.

A utilidade marginal do bem *i* é a variação da utilidade gerada pela variação em uma unidade do bem *i*, *coeteris paribus*. Em termos matemáticos, pode ser definida como a taxa média de variação da função utilidade $u(x_1,...,x_i,...,x_n)$ com relação ao bem *i*, isto é:

(2.22) $$\frac{u(x_1,x_2,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n)-u(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\Delta u}{\Delta x_i},$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}_+$ a quantidade consumida do i-ésimo bem em um dado intervalo de tempo, com $i = 1,2,...,n$.

No caso da produtividade marginal é mais conveniente, do ponto de vista teórico, definir a utilidade marginal como a taxa instantânea de variação da utilidade com relação ao bem *i*, ou seja, como a derivada parcial da função utilidade com relação ao bem *i*. Observe.

Definição 2.4 – Utilidade marginal do bem i

A utilidade marginal do i-ésimo bem, denotada por UMg_i, é a taxa instantânea de variação da utilidade com relação ao bem i, ou seja,

$$UMg_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - u(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i},$$

se este limite existir.

Lembre-se que a utilidade marginal do bem *i*, por ser definida como o limite da taxa média de variação da utilidade com relação ao bem *i*, é uma aproximação desta última, ou seja, para valores suficientemente pequenos de Δx_i podemos estabelecer que:

$$UMg_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} \cong \frac{\Delta u}{\Delta x_i}. \tag{2.23}$$

Com esta relação em mente, suponhamos que se dê ao consumidor uma quantidade adicional do bem *i*, ou seja, suponha $\Delta x_i > 0$, mantendo todas as quantidades consumidas dos demais bens constantes. Se o consumidor prefere mais do *i*-ésimo bem, então $u(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) > u(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, ou seja, $\Delta u > 0$. Portanto, $UMg_i \cong \frac{\Delta u}{\Delta x_i} > 0$.

Assim, quando a utilidade marginal do bem *i* é positiva, isto indica que uma cesta de consumo com uma quantidade maior do bem *i* e com as mesmas quantidades dos demais bem, ou seja, uma cesta de consumo $(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n)$ com $\Delta x_i > 0$, é preferível à cesta com menos quantidade do bem i e com as mesmas quantidades dos demais bem, isto é, à cesta $(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$.

Quando $UMg_i < 0$, temos o caso em que o bem *i* é considerado um **mal** (como, por exemplo, a poluição) pelo consumidor.

Finalmente, quando $UMg_i = 0$, temos o caso em que o bem *i* é considerado **neutro** pelo consumidor, ou seja, o consumidor não se importa com a quantidade deste bem nas cestas de consumo.

Exemplo 2.11 – Utilidades marginais das preferências com bens complementares perfeitos

Tais preferências são representadas pela função utilidade (1.14) apresentada no Exemplo 1.10, repetida aqui por conveniência:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}, \tag{1.14}$$

cujo domínio é o conjunto consumo $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

As utilidades marginais não são determinadas nas cestas de consumo nas quais não há excesso de qualquer bem. Vejamos o porquê disto.

Como vimos no Exemplo 1.10, o domínio da função utilidade (1.14) pode ser dividido em três regiões no plano x_1x_2. A primeira região é composta pelas cestas de consumo nas quais o bem em excesso é o 2, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 < x_2\}$. Nesta região, dado que $u(x_1, x_2) = x_1$, as utilidades marginais dos bens são:

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 1 \text{ e } UMg_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \tag{2.24}$$

A segunda região é composta pelas cestas de consumo nas quais o bem em excesso é o 1, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 > x_2\}$. Nesta região, dado que $u(x_1, x_2) = x_2$, as utilidades marginais são:

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ e } UMg_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1. \tag{2.25}$$

A terceira região é composta pelas cestas de consumo nas quais não há excesso de qualquer bem, ou seja, pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 = x_2\}$. Nesta região, as utilidades marginais não existem. Com efeito, considerando a Definição 2.3, a utilidade marginal do bem 1 é definida se o limite adiante existir:

$$UMg_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{2.26}$$

Este limite existirá se, e somente se, os limites laterais existirem e forem iguais, ou seja, se, e somente se,

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0^-} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0^+} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{2.27}$$

Agora, vamos ver que em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ a igualdade (2.27) não é satisfeita.

Tomemos um ponto qualquer (x_1, x_2) tal que $x_1 = x_2$, ou seja, tal que $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$. Para $\Delta x_1 < 0$, sabemos que $x_1 + \Delta x_1 < x_1$. Como $x_1 = x_2$, para $\Delta x_1 < 0$ temos $x_1 + \Delta x_1 < x_2$. Dada esta última desigualdade, com base em (1.14) sabemos que $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) = x_1 + \Delta x_1$. Logo, como no ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ temos $u(x_1, x_2) = x_1$, segue que a taxa média de variação para um dado $\Delta x_1 < 0$ a partir do ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ é dada por:

(2.28) $$\frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{(x_1 + \Delta x_1) - x_1}{\Delta x_1} = 1 .$$

Assim, em um ponto qualquer $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ segue que o limite à esquerda da taxa média de variação (2.28) será:

(2.29) $$\lim_{\Delta x_1 \to 0^-} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = 1 .$$

Tomemos novamente um ponto qualquer (x_1, x_2) tal que $x_1 = x_2$, ou seja, tal que $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$. Para $\Delta x_1 > 0$, sabemos que $x_1 + \Delta x_1 > x_1$. Como $x_1 = x_2$, para $\Delta x_1 > 0$ temos $x_1 + \Delta x_1 > x_2$. Dada esta última desigualdade, com base em (1.14) sabemos que $u(x_1 + \Delta x_1, x_2) = x_2$. Logo, como no ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ temos $u(x_1, x_2) = x_2$, segue que a taxa média de variação para um dado $\Delta x_1 > 0$ a partir do ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ é dada por:

(2.30) $$\frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{x_2 - x_2}{\Delta x_1} = 0 .$$

Assim, em um ponto qualquer $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ segue que o limite à direita da taxa média de variação (2.30) será:

(2.31) $$\lim_{\Delta x_1 \to 0^+} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = 0 .$$

Enfim, considerando os limites laterais (2.29) e (2.31), inferimos que a igualdade (2.27) não se verifica em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \big| x_1 = x_2\}$ e, portanto, a utilidade marginal do bem 1, definida em (2.26), não existe.

Usando um argumento análogo, podemos mostrar que a utilidade marginal do bem 2 também não existe em qualquer ponto $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_1 = x_2\}$.

Exemplo 2.12 – Utilidades marginais e preferências com bens substitutos perfeitos

Tais preferências são representadas pela função utilidade (1.16) apresentada no Exemplo 1.11, repetida aqui por conveniência:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \tag{1.16}$$

cujo domínio é o conjunto consumo $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Para obtermos as utilidades marginais das preferências em análise, basta calcularmos as derivadas parciais da função utilidade (1.16), que são:

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 1 \text{ e } UMg_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1. \tag{2.32}$$

Observamos que as utilidades marginais são ambas estritamente positivas. Isto significa que cada unidade adicional de um bem, mantendo a quantidade do outro constante, gera uma nova cesta de consumo que é preferida à anterior.

Exemplo 2.13 – Utilidades marginais e preferências Cobb-Douglas

Tais preferências são representadas pela função utilidade (1.18) apresentada no Exemplo 1.12, repetida aqui por conveniência:

$$u(x_1, x_2) = Ax_1^{\ a} x_2^{\ b}, \tag{1.18}$$

em que $A > 0$, $a > 0$ e $b > 0$ são constantes reais. O domínio desta função, ou seja, o conjunto consumo é o primeiro quadrante do plano cartesiano, ou seja, $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Para obtermos as produtividades marginais da tecnologia em análise, basta calcularmos as derivadas parciais da função de produção (1.18), que são:

$$UMg_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = aAx_1^{\ a-1} x_2^{\ b} \text{ e } UMg_2 = \frac{\partial}{\partial} = bAx_1^{\ a} x_2^{\ b} \quad . \tag{2.33}$$

Observamos que as utilidades marginais são ambas estritamente positivas para quaisquer $x_1 \in \mathbb{R}_{++}$ e $x_2 \in \mathbb{R}_{++}$, já que $A>0$, $a>0$ e $b>0$. Isto significa que cada unidade adicional de um bem, mantendo a quantidade do outro constante, gera uma nova cesta de consumo que é preferida à anterior. Entretanto, se, por exemplo, $a<0$ então teríamos $UMg_1 < 0$ e, portanto, o bem 1 se tornaria um mal. Já se $a=0$ teríamos, então, $UMg_1 = 0$ e, consequentemente, o bem 1 se tornaria um bem neutro.

2.3 DIFERENCIAL TOTAL DE UMA FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Antes de estabelecermos o conceito de diferencial total de uma função de $n \geq 2$ variáveis, vamos tratar desse conceito matemático para os casos mais simples de funções de uma e duas variáveis.

Considere a função $y = f(x)$ de uma variável. Se $f'(x)$ existe, então:

(2.34)
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

na qual $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ é a variação total em y gerada pela variação Δx da variável x. A partir de (2.34) podemos estabelecer o seguinte limite:

(2.35)
$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:

(2.36)
$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) - 0\right| < \varepsilon,$$

sempre que $0 < |\Delta x - 0| = |\Delta x| < \delta$.

A desigualdade (2.36) é equivalente a

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < \varepsilon,$$

$$|\Delta x|\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < |\Delta x|\,\varepsilon,$$

(2.37) $$\left|\Delta y - \Delta x\, f'(x)\right| < \left|\Delta x\right| \varepsilon.$$

O lado esquerdo da última desigualdade é o módulo da diferença entre a variação total efetiva da variável *y*, denotada por Δy, e a variação total estimada da variável *y*, dada por $\Delta x\, f'(x)$. Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$, a desigualdade (2.37) implica que o erro pode se tornar tão pequeno quanto se desejar tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeno.

Com base nas considerações feitas anteriormente, podemos estabelecer a seguinte definição formal de diferencial total de uma função de uma variável.

Definição 2.5 – Diferencial total de uma função de uma variável

Considere um ponto x do domínio da função $y = f(x)$ no qual a derivada $f'(x)$ é contínua. Chamamos diferencial total (de primeira ordem) desta função, designado por dy, o seguinte produto $dy = f'(x)\Delta x$. Desde que o diferencial da variável independente é $dy = \Delta x$, o diferencial total de $y = f(x)$ pode ser expresso como $dy = f'(x)\, dx$.

Vejamos agora como podemos aplicar esta definição para estimarmos o impacto na variável *y* gerado por uma variação Δx a partir de um ponto *x* do domínio de uma função $f(x)$.

Exemplo 2.14 – Cálculo do diferencial total de uma função quadrática

Considere a função $y = f(x) = x^2$. Sabemos que $f'(x) = 2x$. Aplicando a Definição 2.5, o diferencial total da função em análise em um ponto qualquer *x* do domínio é dado por $dy=2xdx$. Por exemplo, em $x=3$ e para uma variação $\Delta x = 0,005$, estimamos pelo diferencial total que a variação de *y* será aproximadamente $dy = 2\times 3\times 0,005 = 0,03$. Note que a variação total efetiva de *y* é $\Delta y = (3,005)^2 - 3^2 = 0,030025$. Logo, o erro é de apenas $\Delta y - \Delta x\, f'(x) = 0,030025 - 0,03 = 0,000025$.

Passemos agora à função $y = f(x_1, x_2)$ de duas variáveis. Para dadas variações Δx_1 e Δx_2 das variáveis independentes, a variação total da variável *y* é dada por:

(2.38) $$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2).$$

A variação total Δy pode ser aproximada com o uso das derivadas parciais de primeira ordem da função em análise.

> Vejamos, então, como isto pode ser feito. Observe!

Vimos no Exemplo 2.2 que a produtividade marginal de um insumo, definida com a derivada parcial da função de produção com relação à quantidade do insumo, é uma aproximação da taxa média de variação da produção com relação à quantidade do insumo. Analogamente, vimos que a utilidade marginal de um bem (veja a equação (2.23)) é uma aproximação da taxa média de variação da utilidade total com relação à quantidade do bem. Genericamente, a derivada parcial de uma função $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}$, com $i=1,2$, que é a taxa instantânea de variação de $y=f(x_1,x_2)$ com relação a x_i, é uma aproximação da taxa média de variação de $y=f(x_1,x_2)$ com relação a x_i, denotada por $\frac{\Delta y}{\Delta x_i}$. Em termos formais, podemos mostrar que se as derivadas parciais são contínuas em um ponto (x_1,x_2) do domínio de $f(x_1,x_2)$, então:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} \cong \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}, \tag{2.39}$$

para valores suficientemente pequenos de Δx_i.

Assim, considerando (2.39), a variação total aproximada de y gerada por uma variação Δx_i, *coeteris paribus*, pode ser obtida como segue:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i}\Delta x_i \cong \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}\Delta x_i, \text{ com } i=1,2. \tag{2.40}$$

Logo, para dadas variações Δx_1 e Δx_2 das variáveis independentes, a variação total aproximada da variável y é dada pela seguinte soma:

$$\Delta y \cong \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2. \tag{2.41}$$

O sinal $\cong$ de "aproximadamente igual a" pode ser substituído pelo sinal de igualdade se somarmos ao lado direito de (2.41) o erro, ou seja,

$$\underbrace{\Delta y}_{\text{variação total}} = \underbrace{\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2}_{\text{variação estimada (diferencial total)}} + \text{erro}. \tag{2.42}$$

Pode-se demonstrar que o termo erro tende a zero quando as variações Δx_1 e Δx_2 tornam-se arbitrariamente pequenas, ou seja, tendem ambas a zero. Não faremos isto aqui, pois implicaria uma digressão muito além do escopo do presente manual.

A partir da discussão sobre a variação total estimada de uma função $y = f(x_1, x_2)$ com derivadas parciais contínuas que acabamos de fazer, podemos estabelecer o conceito de diferencial total de uma função de duas variáveis. Observe.

Definição 2.6 – Diferencial total de uma função de duas variáveis

Considere um ponto (x_1, x_2) do domínio da função $y = f(x_1, x_2)$ no qual existem derivadas parciais contínuas $\frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ e $\frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$. Chamamos de diferencial total (de primeira ordem) desta função, designado por dy, a seguinte soma $dy = \frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$, que é uma aproximação da variação total efetiva $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$.

Cabe observar que na definição anterior $dx_1 = \Delta x_1$ e $dx_2 = \Delta x_2$. Vejamos agora um exemplo de aplicação da Definição 2.6.

Exemplo 2.15 – Diferencial total da função de produção Cobb-Douglas

A função de produção Cobb-Douglas foi definida em (1.12), apresentada no Exemplo 1.9, e é repetida aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = A x_1^{\,a} x_2^{\,b}. \tag{1.12}$$

Considerando as expressões das produtividades marginais da tecnologia Cobb-Douglas em (2.19), obtidas no Exemplo 2.7, podemos estimar o impacto sobre a produção de uma firma uniproduto que opera com esta tecnologia quando a combinação de insumos muda de (x_1, x_2) para $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$. Ou seja, usando a Definição 2.6 e as derivadas parciais de primeira ordem em (2.19) obtemos o diferencial total da função de produção Cobb-Douglas na combinação de insumos (x_1, x_2):

(2.43) $$dy = aAx_1^{a-1}x_2^{\,b}dx_1 + bAx_1^{\,a}x_2^{\,b-1}dx_2 \,.$$

Suponhamos, por exemplo, que $A = 30$, $a = 1/3$ e $b = 2/3$. Substituindo tais valores numéricos em (2.42) obtemos:

(2.43-a) $$dy = 10\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{2/3} dx_1 + 20\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-1/3} dx_2 \,.$$

Então, se a firma está produzindo em $(x_1, x_2) = (3, 24)$ e planeja aumentar em meia unidade a quantidade do insumo 1 ($dx_1 = 1/2$) e reduzir a quantidade do insumo 2 em quatro unidades ($dx_2 = -4$), qual será o impacto sobre a produção (dy)?

Para respondermos a esta questão basta introduzirmos os dados do problema na expressão (2.43-a), que leva a:

$$dy = 10\left(\frac{24}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{2} + 20\left(\frac{24}{3}\right)^{-1/3}(-4) = 40 - 40 = 0 \,.$$

Logo, a firma pode substituir quatro unidades do insumo 2 por meia unidade do insumo 1 e manter a produção inalterada.

A Definição 2.6 pode ser prontamente generalizada para o caso de funções com várias variáveis. Preste atenção.

Definição 2.7 – Diferencial total de uma função de n variáveis

Considere um ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do domínio da função $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no qual existem derivadas parciais contínuas $\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1}$, $\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_n}$. Chamamos de diferencial total (de primeira ordem) desta função, designado por dy, a seguinte soma

$$dy = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_n}dx_n \,,$$

que é uma aproximação da variação total

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.4 APLICAÇÕES NA ANÁLISE ECONÔMICA: TAXA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO E TAXA MARGINAL DE SUBSTITUIÇÃO

A definição de diferencial total de uma função de várias variáveis é útil para, entre outras coisas, estabelecer formalmente dois conceitos fundamentais da análise microeconômica, a saber: a taxa marginal de substituição (teoria do consumidor) e a taxa técnica de substituição (teoria da firma).

Tratemos inicialmente da **taxa marginal de substituição (TMS)**. Este conceito microeconômico expressa a taxa à qual o consumidor está propenso a substituir um bem por outro. Mais precisamente, a TMS associada à determinada cesta de consumo (x_1, x_2) é o negativo da medida numérica da inclinação da curva de indiferença $I(u(x_1, x_2))$ que passa por este ponto (x_1, x_2) no espaço de mercadorias *M*. A taxa marginal de substituição pode ser interpretada como a *propensão marginal* a pagar do consumidor.

Com respeito à TMS, é importante frisar dois pontos. Em primeiro lugar, o que o consumidor está *propenso* a pagar por uma quantidade adicional de um determinado bem depende apenas de sua própria preferência. Em segundo lugar, o que de fato o consumidor *tem* de pagar por uma quantidade adicional de consumo de um bem é determinado pelas forças impessoais do mercado.

Com o auxílio do conceito de diferencial total de uma função utilidade, podemos estabelecer a relação entre a TMS e as utilidades marginais de uma função utilidade. Em outros termos, a partir da função utilidade podemos obter a taxa marginal de substituição do bem 2 pelo bem 1, que passaremos a denotar por $TMS(x_1, x_2)$.

Considere um consumidor que está consumindo uma cesta $x = (x_1, x_2)$. Imaginemos uma variação no consumo de cada bem $(\Delta x_1, \Delta x_2)$, de maneira que a nova cesta $z = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ seja indiferente à cesta x ou, equivalentemente, que a utilidade $u(x_1, x_2)$ se mantenha constante ($\Delta u = 0$). Devemos ter, então:

(2.44) $$\Delta u = UMg_1 \Delta x_1 + UMg_2 \Delta x_2 = 0,$$

na qual UMg_i é a utilidade marginal do bem $i = 1,2$.

Logo, a taxa média de variação ao longo da curva de indiferença $I(u(x_1, x_2))$ à qual pertence a cesta x é dada por:

(2.45) $$\left.\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|_{\Delta u=0} = -\frac{UMg_1}{UMg_2}\text{, para } UMg_2 \neq 0\,.$$

A $TMS(x_1, x_2)$ é, por definição, o módulo desta taxa, ou seja:

Definição 2.8 – Taxa marginal de substituição

Considere um consumidor cujas preferências são representadas pela função utilidade $u(x_1, x_2)$, cujo domínio é o conjunto consumo $M = \mathbb{R}^2_+$. A taxa marginal de substituição do bem 2 pelo bem 1, a partir da cesta de consumo (x_1, x_2), é dada por $TMS(x_1, x_2) = -\left.\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|_{u(x_1,x_2)} = \frac{UMg_1(x_1, x_2)}{UMg_2(x_1, x_2)}$, com $UMg_2(x_1, x_2) \neq 0$.

Façamos o mesmo exercício utilizando as ferramentas do cálculo. O diferencial total da função utilidade $u(x_1, x_2)$ é, por definição:

(2.46) $$du = \frac{\partial u(x_1 + x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u(x_1 + x_2)}{\partial x_2}dx_2,$$

o qual fornece uma aproximação da variação da utilidade u quando o consumidor passa da cesta de consumo $x = (x_1, x_2)$ para a cesta $z = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$. Se o consumidor se mantém na mesma curva de indiferença, ou seja, sua utilidade se mantém constante, então $du = 0$. Logo,

(2.47) $$\frac{\partial u(x_1 + x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u(x_1 + x_2)}{\partial x_2}dx_2 = 0,$$

da qual obtemos a derivada da curva de indiferença cuja utilidade associada é $u(x_1, x_2)$:

(2.48) $$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u(x_1,x_2)} = -\frac{\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} \equiv -\frac{UMg_1}{UMg_2}.$$

Enfim, a $TMS(x_1, x_2)$ pode ser expressa como o módulo desta derivada:

(2.49) $$TMS(x_1, x_2) = \frac{\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} \equiv \frac{UMg_1}{UMg_2}\,.$$

Vamos agora nos voltar para a teoria da firma, mais especificamente, para a teoria da produção. Acompanhe!

A **taxa marginal de substituição técnica** ou simplesmente a **taxa técnica de substituição (TTS)** mede a taxa à qual a firma deve substituir um insumo por outro para manter a produção constante. Intuitivamente, a taxa técnica de substituição do insumo 2 pelo insumo 1, denotada por $TTS(x_1, x_2)$, é a quantidade de insumo 2 que a firma pode reduzir por usar uma unidade adicional do insumo 1 e manter a sua produção constante ou, alternativamente, é a quantidade adicional de insumo 2 que a firma deve usar para abrir mão de uma unidade do insumo 1 e manter constante sua produção.

A partir da função de produção podemos determinar a $TTS(x_1, x_2)$. Considere uma firma que está utilizando a seguinte combinação de insumos (x_1, x_2). Imaginemos uma variação na quantidade utilizada de cada insumo $(\Delta x_1, \Delta x_2)$, de maneira que a nova combinação $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ gere o mesmo nível de produto y ou, equivalentemente, que a produção se mantenha constante ($\Delta y = 0$). Devemos ter, então:

(2.50) $$\Delta y = PMg_1 \Delta x_1 + PMg_2 \Delta x_2 = 0 ,$$

sendo PMg_i o produto marginal do fator ou insumo $i = 1,2$.

Logo, a taxa média de variação ao longo da isoquanta $Q(y)$ associada à produção y, à qual pertence a combinação de insumos (x_1, x_2), supondo $PMg_2 > 0$, é dada por:

(2.51) $$\left.\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|_{y=f(x_1,x_2)} = -\frac{PMg_1}{PMg_2}.$$

A $TTS(x_1, x_2)$ é, por definição, o módulo desta taxa, isto é:

Definição 2.9 – Taxa técnica de substituição

Considere uma firma cuja tecnologia é descrita pela função de produção $f(x_1, x_2)$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^2_+$. A taxa técnica de substituição do insumo 2 pelo insumo 1, a partir da combinação de insumos (x_1, x_2), é dada por

$$TTS(x_1, x_2) = -\left.\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|_{y=f(x_1,x_2)} = \frac{PMg_1}{PMg_2}, \text{ com } PMg_2(x_1, x_2) \neq 0.$$

Façamos o mesmo exercício utilizando as ferramentas do cálculo. O diferencial total da função de produção $f(x_1, x_2)$ é, por definição:

(2.52) $$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2.$$

Este diferencial total fornece uma aproximação da variação da produção y quando a firma passa da combinação de insumos (x_1, x_2) para a combinação (x_1+dx_1, x_2+dx_2). Se a firma se mantém na mesma isoquanta $Q(y)$, ou seja, sua produção se mantém constante, então $dy=0$. Logo,

(2.53) $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

da qual obtemos a derivada da isoquanta $Q(y)$ cuja produção associada é $y = f(x_1, x_2)$, ou seja:

(2.54) $$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=f(x_1+x_2)} = -\frac{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}} \equiv -\frac{PMg_1}{PMg_2},$$

supondo $PMg_2 > 0$. Enfim, a $TTS(x_1, x_2)$ pode ser expressa como o módulo desta derivada:

(2.55) $$TMS(x_1, x_2) = \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}} \equiv \frac{PMg_1}{PMg_2}.$$

Saiba Mais

!

Para saber mais sobre derivadas parciais e técnicas de derivação parcial, consulte a seção 7.4 de Chiang; Wainwright (2006, p. 159-163) e a seção 9.1 de Hariki; Abdounur (2002, p. 321-331).

Uma apresentação mais formal do conceito de diferencial total de uma função de várias variáveis é encontrada na seção 7 – *Crescimento total e diferencial total* do Capítulo VIII de Piskounov (1993).

Uma apresentação com enfoque mais econômico sobre produtividade marginal, princípio das produtividades marginais decrescentes e taxa técnica de substituição é encontrada nas seções 18.5 a 18.7 do Capítulo 18 (*Tecnologia*) de Varian (2006).

Uma apresentação com enfoque mais econômico sobre utilidade marginal e taxa marginal de substituição é encontrada nas seções 4.4 e 4.5 do Capítulo 4 (*Utilidade*) de Varian (2006).

Concluímos a Unidade 2. Agora você deve ler o resumo do conteúdo que trabalhamos até este momento e, em seguida, responder às questões das Atividades de aprendizagem. Leia e releia a unidade antes de processar as respostas e recorra aos tutores sempre que tiver dúvidas. Além disso, lembre-se de assistir à Videoaula 2 no AVEA. Bom trabalho!

Resumo da unidade

Nesta unidade, apresentamos o uso dos conceitos matemáticos de derivada parcial de primeira e segunda ordem e de diferencial total de primeira ordem de uma função de várias variáveis nas representações formais das restrições tecnológicas com as quais se defronta uma firma e das preferências (gostos) de um consumidor sobre as cestas de consumo pertencentes a seu conjunto consumo. Na primeira seção, estabelecemos a definição matemática de derivada parcial e sua interpretação geométrica. Ademais, tratamos de regras de derivação, bem como do conceito de derivadas parciais de ordem superiores. Na segunda seção, apresentamos o uso dos conceitos e técnicas operatórias expostos na primeira seção para estabelecer formalmente o conceito econômico de produtividade marginal e o princípio das produtividades marginais decrescentes. Além disso, utilizamos os mesmos conceitos matemáticos para estabelecer o conceito econômico de utilidade marginal e construir uma taxonomia dos tipos de mercadorias do ponto de vista de um consumidor (bens, males e neutros). Na terceira seção, por sua vez, expusemos o conceito matemático de diferencial total de primeira ordem. E, por fim, na última seção, aplicamos esse conceito matemático na formalização dos conceitos econômicos de taxa marginal de substituição e de taxa técnica de substituição.

Atividades de Aprendizagem – 2

1) Obtenha as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções:

   a) $y = 3x_1^4 - 10x_1x_2^5 + 65$;

   b) $y = 3(x_1^2 + x_2)(x_1 - e^{3x_2})$;

   c) $y = \ln(x_1^2 x_2)$;

   d) $y = \dfrac{x_1 - 3}{x_1 x_2}$.

2) Considere uma firma uniproduto cuja tecnologia é descrita pela seguinte função de produção $y = 3x_1\sqrt{x_2}$, sendo y a quantidade produzida em um dado período de produção utilizando x_1 do insumo 1 e x_2 do insumo 2. Com base em tal função de produção, pede-se:

   a) as produtividades marginais;

   b) uma estimativa da variação da produção para quaisquer pequenas variações de x_1 e x_2, utilizando o diferencial total de primeira ordem;

   c) se a firma estiver usando inicialmente a combinação de insumos $(5,4)$, qual será a variação estimada da produção se a quantidade do insumo 1 aumentar 0,25 e a quantidade do insumo 2 diminuir 0,5?

   d) a função de produção é homogênea? Em caso afirmativo, de que grau? A tecnologia representada pela função de produção acima apresenta que tipo de retornos de escala?

3) Seja $Q = F(K,L) = K^{2\alpha}L^{3\beta}$ uma função de produção, na qual Q é a quantidade de produto, K o estoque de capital e L a quantidade de trabalho. Suponha, ademais, que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Que restrições adicionais, se houver alguma, devemos impor sobre as constantes paramétricas α e β para que a tecnologia representada por esta função de produção apresente retornos constantes de escala e, simultaneamente, satisfaça o princípio das produtividades marginais decrescentes? Justifique formalmente sua resposta.

4) Obtenha, se existe, a taxa marginal de substituição das seguintes funções utilidade:

   a) $u(x_1, x_2) = 3x_1 + \ln x_1$;

   b) $u(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 3x_2}$;

   c) $u(x_1, x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2$, com $a > 0$ e $b > 0$.

5) Obtenha, se existe, a taxa técnica de substituição das seguintes funções de produção:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$;

b) $f(x_1, x_2) = 7 + 5(x_1 + x_2)^3$;

c) $f(x_1, x_2) = Ax_1^{a} x_2^{1-a}$, com $0 < a < 1$.

3

OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA COM DUAS VARIÁVEIS DE ESCOLHA

Ao final desta unidade, você deverá ter conhecimentos sobre:

- o uso dos conceitos matemáticos de máximos e mínimos não condicionados e condicionados de uma função de duas variáveis nas representações formais de problemas de maximização de lucro por firmas multiprodutos, com e sem poder de mercado, e de maximização de utilidade de um consumidor tomador de preços;
- as condições necessárias de primeira ordem (CPO), bem como as condições suficientes de segunda ordem (CSO) para um máximo e para um mínimo local de um problema de otimização estática não condicionada (sem restrição);
- a aplicação das CPO e CSO na solução de problemas de maximização de lucro de firmas multiproduto, com e sem poder de mercado;
- as CPO e CSO para um máximo e para um mínimo local de um problema de otimização estática condicionada (com uma restrição de igualdade); e
- a aplicação das CPO e CSO na solução de problemas de maximização de utilidade de um consumidor tomador de preços.

Nesta unidade, juntaremos os conceitos matemáticos e econômicos trabalhados nas unidades anteriores e analisaremos, do ponto de vista formal, os problemas de escolha de firmas e consumidores em um contexto estático. Com isto, você terá o embasamento necessário para começar a estudar os conteúdos tipicamente trabalhados nas disciplinas de Microeconomia.

3.1 OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA NÃO CONDICIONADA COM DUAS VARIÁVEIS DE ESCOLHA

Um problema de otimização (maximização ou minimização) estática não condicionada com duas variáveis de escolha é representado da seguinte maneira:

(3.1) $$\underset{(x_1, x_2)}{Max / Min} \; f(x_1, x_2),$$

na qual x_i, com $i \quad 1,2,...,n$, é a i-ésima **variável de escolha** (de decisão ou de política) e $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ é a **função-objetivo**.

Este problema de otimização, ou seja, de busca de um ótimo em (3.1) é classificado como **estático** porque estamos procurando um único valor para o vetor (x_1, x_2) de variáveis de escolha que maximiza ou minimiza a função-objetivo $f(x_1, x_2)$. Por sua vez, a otimização dinâmica, que foge do escopo desta unidade, trata da escolha ótima de uma sequência de valores para um dado conjunto de variáveis de escolha – como quantidades de capital e trabalho utilizados por uma firma –, de maneira a maximizar (ou minimizar) um dado critério de desempenho, como, por exemplo, a soma de lucros (ou de custos) mensais trazidos a valor presente de uma firma.

Veremos o papel de restrições de igualdade na próxima seção.

O qualificativo "não condicionada" é sinônimo de "sem restrições". Restrições são condições expressas em termos de igualdades e/ou desigualdades que se estabelecem entre as variáveis de escolha para expressar certos vínculos (inter-relações) que há entre elas em um determinado contexto. Por exemplo, o consumidor não pode escolher qualquer cesta de consumo (x_1, x_2) do seu conjunto consumo M; ele deve escolher aquela cesta mais preferida entre as que pode comprar, ou seja, tal que $p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$, sendo $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$ os preços unitários dos bens à sua disposição e $m > 0$ sua renda nominal em um dado período de referência.

Vejamos agora três exemplos econômicos específicos que podem ser expressos em termos da estrutura geral (3.1).

Exemplo 3.1 – Formalização do problema de maximização de lucro de uma firma multiproduto e tomadora de preços nos mercados de bens

Vamos formalizar um problema de maximização de lucro de uma firma que produz dois produtos em mercados perfeitamente competitivos. A firma toma como dados os preços de venda de seus produtos, ou seja, o preço unitário do primeiro bem $p_1 > 0$ e o preço unitário do segundo bem $p_2 > 0$ são considerados variáveis exógenas. Assim, a receita total da firma é dada por:

$$R(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 \tag{3.2}$$

sendo q_1 e q_2 as quantidades produzidas (e vendidas) dos bens 1 e 2 pela firma, respectivamente, em um dado período.

A estrutura de custos da firma é caracterizada pela seguinte função custo total:

(3.3) $$C(q_1, q_2) = 5q_1^2 + q_1q_2 + 3q_2^2.$$

Como a firma é maximizadora de lucro, sua função-objetivo é a função lucro, ou seja,

(3.4) $$L(q_1, q_2) = R(q_1, q_2) - C(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - (5q_1^2 + q_1q_2 + 3q_2^2).$$

O problema de maximização de lucro da firma é, portanto:

(3.5) $$\underset{(q_1, q_2)}{Max}\ L(q_1, q_2) = \underset{(q_1, q_2)}{Max}\ p_1q_1 + p_2q_2 - 5q_1^2 - q_1q_2 - 3q_2^2,$$

no qual q_1 e q_2 são as variáveis de escolha da firma.

Exemplo 3.2 – Formalização do problema de maximização de lucro de uma firma multiproduto e monopolista

Considere uma firma com poder de mercado, ou seja, que se defronta com as seguintes funções demanda de mercado inversas:

(3.6) $$p_1 = 144 - 5q_1 \text{ e } p_2 = 144 - 3q_2,$$

sendo q_1 e q_2 as quantidades produzidas (e vendidas) dos bens 1 e 2 pela firma, respectivamente, em um dado período e q_1 e q_2 são os preços unitários dos bens 1 e 2, respectivamente.

Logo, os preços unitários dos bens 1 e 2 produzidos pela firma não são mais variáveis exógenas, de maneira que a função receita total passa a ser:

(3.7) $$R(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 = (144 - 5q_1)q_1 + (148 - 3q_2)q_2,$$
$$R(q_1, q_2) = 144q_1 - 5q_1^2 + 148q_2 - 3q_2^2.$$

A estrutura de custos da firma é caracterizada pela seguinte função custo total:

(3.8) $$C(q_1, q_2) = q_1^2 + 4q_1q_2 + q_2^2 + 75.$$

Como a firma é maximizadora de lucro, sua função-objetivo é a função lucro, ou seja,

(3.9) $$L(q_1, q_2) = -6q_1^2 - 4q_2^2 + 144q_1 + 148q_2 - 4q_1q_2 - 75.$$

O problema de maximização de lucro da firma é, portanto:

(3.10) $$\underset{(q_1, q_2)}{Max}\ L(q_1, q_2) = \underset{(q_1, q_2)}{Max} - 6q_1^2 - 4q_2^2 + 144q_1 + 148q_2 - 4q_1q_2 - 75$$

no qual q_1 e q_2 são as variáveis de escolha da firma.

Exemplo 3.3 – Formalização do problema de maximização de lucro de uma firma uniproduto e tomadora de preços nos mercados de bens e de fatores

Vamos formalizar um problema de maximização de lucro de uma firma tomadora de preços no mercado de bens que produz um único produto com dois insumos comprados em mercados de fatores perfeitamente competitivos.

A firma produz uma quantidade $q \geq 0$ do seu produto, sujeita à função de produção Cobb-Douglas definida no Exemplo 1.9 e repetida aqui por conveniência:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b \tag{1.12}$$

na qual $A > 0,\ 0 > a$ e $0 < b < 1$ são constantes reais. As variáveis x_1 e x_2 representam as quantidades de capital e trabalho, respectivamente, utilizadas em um determinado período de produção.

Como já vimos anteriormente, esta função de produção satisfaz o princípio das produtividades marginais decrescentes e, supondo que $a + b < 1$, apresenta retornos decrescentes de escala.

Por não ter poder de mercado, a firma vende seu produto a um preço unitário $p > 0 < 1$ constante e exogenamente determinado. Assim, considerando (1.12) e para um dado valor do preço unitário, a receita total pode ser expressa como uma função das quantidades de insumos:

$$R(x_1, x_2) = pAx_1^a x_2^b\ . \tag{3.11}$$

A firma também é, por hipótese, tomadora de preços nos mercados de fatores, ou seja, o preço (custo de oportunidade) do capital $r > 0$ e o preço do trabalhado (salário) $w > 0$ são tomados como constantes e exogenamente determinados pela firma. Assim, o custo total da firma pode ser expresso como segue:

$$C(x_1, x_2) = rx_1 + wx_2\ . \tag{3.12}$$

Dados o custo e a receita totais, o lucro total (função-objetivo) da firma será então:

$$L(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - C(x_1, x_2) = pAx_1^a x_2^b - rx_1 - wx_2\,. \tag{3.13}$$

Determinada a função-objetivo da firma, o problema de maximização de lucro pode ser assim representado:

(3.14) $$\underset{(x_1,x_2)}{Max}\ L(x_1,x_2)=\underset{(x_1,x_2)}{Max}\ pAx_1^{\,a}x_2^{\,b}-rx_1-wx_2\,.$$

Cabe salientar que neste contexto as variáveis de escolha são as quantidades de insumos x_1 e x_2.

3.1.1 CONDIÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM (CONDIÇÃO NECESSÁRIA) PARA UM EXTREMO

A partir de agora, vamos trabalhar, sem perda de generalidade, com funções de duas variáveis reais independentes. Mas, antes, vejamos a definição de máximo e mínimo de funções de duas variáveis e o teorema que estabelece a condição de primeira ordem (CPO) ou condição necessária para um extremo. Acompanhe!

Definição 3.1 – Máximo e mínimo de funções de duas variáveis

Diz-se que a função $f(x_1,x_2)$ admite um máximo no ponto (x_1^*,x_2^*) se $f(x_1^*,x_2^*)>f(x_1,x_2)$, para qualquer ponto $(x_1,x_2)\neq(x_1^*,x_2^*)$ na vizinhança de (x_1^*,x_2^*). Analogamente, diz-se que a função $f(x_1,x_2)$ admite um mínimo no ponto (x_1^*,x_2^*) se $f(x_1^*,x_2^*)<f(x_1,x_2)$, para qualquer ponto $(x_1,x_2)\neq(x_1^*,x_2^*)$ na vizinhança de (x_1^*,x_2^*).

Teorema 3.1 – Condição de primeira ordem ou condição necessária para um extremo

Considere uma função $f(x_1,x_2)$ definida em um domínio $D(f)\subset\mathbb{R}^2$ aberto. Se $f(x_1,x_2)$ admite um extremo (um máximo ou um mínimo) em $(x_1^*,x_2^*)\in D(f)$, então $\dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}=0$.

Demonstração: Com efeito, fixemos o valor de x_2 em $x_2=x_2^*$. A função $f(x_1,x_2)$ torna-se, portanto, uma função de uma única variável, a saber, x_1. Por hipótese, $f(x_1,x_2^*)$ admite um extremo no ponto (x_1^*,x_2^*), no qual $x_1=x_1^*$. Consequentemente, como vimos na disciplina *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010), $\dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}=0$. Demonstra-se, do mesmo modo, que $\dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}=0$.

Observação 3.1: *É importante observar que no ponto extremo* (x_1^*, x_2^*) *o diferencial total da função* $y = f(x_1, x_2)$ *anula-se, pois*

$$dy = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} dx_2 = 0dx_1 + 0dx_2 = 0 \cdot$$

Portanto, da mesma forma como dizemos, no caso de uma variável, que em um extremo a derivada primeira se anula, no caso de várias variáveis, em um extremo dizemos que o diferencial total de primeira ordem se anula.

A seguir, veremos dois exemplos puramente matemáticos de aplicação do Teorema 3.1.

Exemplo 3.4 – O uso da CPO na detecção de um extremo local

Considere a seguinte função $y = 8x_1^3 + 2x_1x_2 - 3x_1^2 + x_2^2 + 1$. A condição de primeira ordem para um extremo é:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 24x_1^2 + 2x_2 - 6x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2 = 0.$$

Este sistema de equações possui duas soluções, a saber, (0,0) e (1/3, -1/3), os quais são extremos. Na Figura 3.1, podemos observar o gráfico da função em análise numa vizinhança do ponto (0,0) e e do ponto (1/3, -1/3).

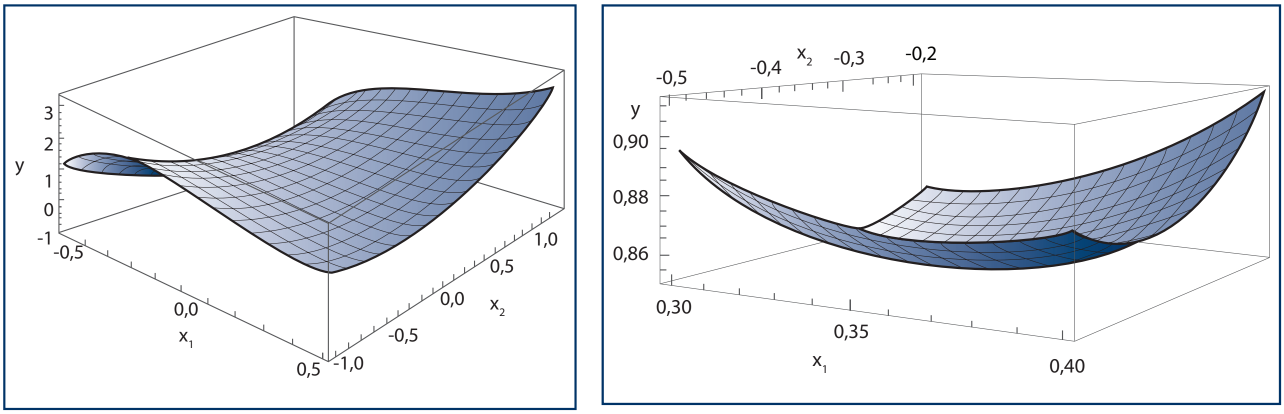


Figura 3.1 – Gráficos da função $y = 8x_1^3 - 2x_1x_2 - 3x_1^2 + x_2^2 + 1$ em torno dos extremos $(0,0)$ e $(1/3, -1/3)$.

Exemplo 3.5 – O uso da CPO na detecção de um extremo local

Considere a seguinte função $y = x_1 + 2ex_2 - e^{x_1} - e^{2x_2}$. A condição de primeira ordem para um extremo é:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 1 - e^{x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2e - 2e^{2x_2} = 0.$$

Este sistema de equações possui uma única solução, a saber, (0,1/2), que é um extremo.

3.1.2 Condição de segunda ordem (condição Suficiente) para um máximo e para um mínimo

Considere um ponto (x_1, x_2) do domínio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ da função $y = f(x_1, x_2)$ no qual existem derivadas parciais contínuas $\frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ e $\frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$.

Você deve lembrar que na seção 2.3, mais precisamente na Definição 2.6, definimos o diferencial total de primeira ordem desta função como:

$$dy = \frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \cdot$$

Note que o diferencial *dy* é uma função de x_1 e x_2. Podemos, portanto, obter o diferencial total de primeira ordem de *dy*, ou seja, $d(dy) = d^2 y$. Este diferencial é denominado diferencial total de segunda ordem da função $y = f(x_1, x_2)$, sendo uma estimativa da variação da variação de y gerada por dadas variações de x_1 e x_2. Formalmente, o citado diferencial total é definido da maneira como vemos a seguir.

Definição 3.2 – Diferencial total de segunda ordem

Considere um ponto (x_1, x_2) do domínio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ da função $y = f(x_1, x_2)$, no qual existem derivadas parciais contínuas $f_{x_1} = \dfrac{f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ e $f_{x_2} = \dfrac{f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$.

O diferencial total de segunda ordem desta função no ponto (x_1, x_2) é dado por

$$d(dy) = \frac{\partial(dy)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(dy)}{\partial x_2} dx_2,$$

$$d^2 y = (f_{x_1 x_1} dx_1 + f_{x_2 x_1} dx_2) dx_1 + (f_{x_1 x_2} dx_1 + f_{x_2 x_2} dx_2) dx_2,$$

$$d^2 y = f_{x_1 x_1} dx_1{}^2 + 2 f_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + f_{x_2 x_2} dx_2{}^2.$$

Para fixar o conceito, no conceito seguir, vamos aplicar esta definição a uma o matemática sem significado econômico explícito.

Exemplo 3.6 – Cálculo do diferencial total de segunda ordem de uma função de duas variáveis

Considere a seguinte função: $y = x_1^3 + 5x_1 x_2 - x_2^2$.

Seu diferencial total de primeira ordem é:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1,$$

$$dy = (3x_1^2 + 5x_2) dx_1 + (5x_1 - 2x_2) dx_2.$$

A partir deste diferencial, podemos obter o diferencial total de segunda ordem, a saber:

$$d^2 y = \frac{\partial\left(dy\right)}{\partial x_1} = dx_1 + \frac{\partial\left(dy\right)}{\partial x_2} dx_2,$$

$$d^2 y = \left(6x_1\, dx_1 + 5dx_2\right) dx_1 + \left(5dx_1 - 2dx_2\right) dx_2,$$

$$d^2 y = 6x_1\, dx_1^2 + 10 dx_1\, dx_2 - 2dx_2^2.$$

Como $f_{x_1} = 3x_1^2 + 5x_2$, $f_{x_2} = 5x_1 - 2x_2$, $f_{x_1 x_1} = 6x_1$, $f_{x_1 x_2} = 5$ e $f_{x_2 x_2} = -2$, conclui-se que as fórmulas acima estão de acordo com os conceitos de diferencial total de primeira e de segunda ordem estabelecidos na Definição 2.6 e na Definição 3.2, respectivamente.

Vejamos agora a relação entre máximos e mínimos e o diferencial de segunda ordem. Na Observação 3.1, destacamos que o diferencial total de primeira ordem de uma função $y = f(x_1, x_2)$ é nulo, $dy = 0$, em um ponto extremo (x_1^*, x_2^*). Assim, se num ponto extremo (x_1^*, x_2^*) temos $d^2y < 0$, então segue que dy sofre uma variação negativa em qualquer direção que se vá a partir do ponto (x_1^*, x_2^*) no domínio $D(f)$. Como $dy = 0$ no ponto (x_1^*, x_2^*) e esta grandeza é decrescente (pois $d^2y < 0$), segue que numa vizinhança suficientemente pequena em torno de (x_1^*, x_2^*) teremos $dy < 0$. Isto indica que a função é decrescente em qualquer direção no domínio $D(f)$ numa vizinhança suficientemente pequena em torno de (x_1^*, x_2^*). Em outras palavras, $f(x_1^*, x_2^*) > f(x_1, x_2)$ para qualquer ponto (x_1, x_2) nessa vizinhança suficientemente pequena em torno do ponto (x_1^*, x_2^*). Enfim, neste ponto há um máximo local dado por $f(x_1^*, x_2^*)$. Um raciocínio análogo poderia ser feito para o caso em que $d^2y > 0$ no ponto (x_1^*, x_2^*). Isto nos levaria à conclusão de que, sob tal hipótese, haveria um mínimo local em (x_1^*, x_2^*), dado por $f(x_1^*, x_2^*)$.

Portanto, para determinar se em um ponto extremo (x_1^*, x_2^*) há um máximo ou um mínimo local, temos que saber o sinal do diferencial total de segunda ordem d^2y neste ponto. Como você verá, o diferencial total de segunda ordem é uma forma quadrática e, portanto, determinar o sinal do primeiro se resume a encontrar o sinal de uma forma quadrática. Este tipo de forma é definido como veremos a seguir.

Definição 3.3 – Forma quadrática

Uma forma quadrática q em duas variáveis z_1 e z_2 é um polinômio da forma

$q(z_1, z_2) = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$, na qual a_{11}, a_{12} e a_{22} são constantes. Generalizando,

uma forma quadrática em $\mathbb{R}^k$ é uma função real de k variáveis da forma

$q(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}z_iz_j$, sendo a_{ij} uma constante.

Considerando a definição anterior, concluímos que o diferencial de segunda ordem $d^2y = f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$ é uma forma quadrática nas variáveis dx_1 e dx_2. Mais explicitamente, $d^2y = f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$ é uma forma quadrática do tipo $q(z_1, z_2) = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$, sendo $q = d^2y$, $z_1 = dx_1$, $z_2 = dx_2$, $a_{11} = f_{x_1x_1}$, $a_{12} = f_{x_1x_2}$ e $a_{22} = f_{x_2x_2}$. Portanto, estudar o sinal do diferencial d^2y significa estudar o sinal de uma forma quadrática.

As formas quadráticas podem ser classificadas com base no sinal que assumem. Isto é feito da seguinte maneira:

- $q > 0 \Rightarrow q$ é denominada positiva definida;
- $q \geq 0 \Rightarrow q$ é denominada positiva semidefinida;
- $q < 0 \Rightarrow q$ é denominada negativa definida;
- $q \leq 0 \Rightarrow q$ é denominada negativa semidefinida.

Podemos, agora, nos perguntar: quais restrições podem ser impostas sobre os coeficientes a_{11}, a_{12} e a_{22} para q ser positiva (ou negativa) definida?

Para responder a esta questão, vamos reescrever a forma quadrática q em duas variáveis z_1 e z_2, estabelecida na Definição 3.3, como segue:

(3.15)
$$
\begin{aligned}
q &= a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2,\\
q &= a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 + \frac{a_{12}^2z_2^2}{a_{11}} - \frac{a_{12}^2z_2^2}{a_{11}},\\
q &= a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + \frac{a_{12}^2z_2^2}{a_{11}} + a_{22}z_2^2 - \frac{a_{12}^2z_2^2}{a_{11}},\\
q &= a_{11}\left(z_1^2 + \frac{2a_{12}z_1z_2}{a_{11}} + \frac{a_{12}^2z_2^2}{a_{11}^2}\right) + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)z_2^2,\\
q &= a_{11}\left(z_1 + \frac{a_{12}z_2}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\right)z_2^2.
\end{aligned}
$$

Analisando a expressão (3.15), vemos que: se $a_{11} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, então $q > 0$, ou seja, a forma quadrática q será positiva definida. Por sua vez, se $a_{11} < 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, então $q < 0$, isto é, a forma quadrática q torna-se negativa definida. Em termos mais esquemáticos:

(3.16) $a_{11} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 > 0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow q$ é positiva definida;

(3.17) $a_{11} < 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Rightarrow q < 0 \Rightarrow q$ é negativa definida

Respondida a questão levantada anteriormente, podemos estabelecer a condição de segunda ordem para um máximo e para um mínimo. Como já foi observado, o diferencial total de segunda ordem $d^2y = f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2$ é uma forma quadrática nas variáveis dx_1 e dx, com $q = d^2y$, $z_1 = dx_1$, $z_2 = dx_2$, $a_{11} = f_{x_1x_1}$, $a_{12} = f_{x_1x_2}$ e $a_{22} = f_{x_2x_2}$. Considerando as restrições sobre as constantes da forma quadrática q, sintetizadas em (3.16) e (3.17), por analogia concluímos que:

(3.18) $f_{x_1x_1} > 0$ e $f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - \left(f_{x_1x_2}\right)^2 > 0 \Rightarrow d^2y > 0 \Rightarrow f(x_1^*, x_2^*)$ é um mínimo local

(3.19) $f_{x_1x_1} < 0$ e $f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - \left(f_{x_1x_2}\right)^2 > 0 \Rightarrow d^2y < 0 \Rightarrow f(x_1^*, x_2^*)$ é um máximo local

Neste momento, vamos aplicar os critérios anteriores para analisar os extremos obtidos nos Exemplos 3.4 e 3.5 trabalhados na subseção 3.1.1. Observe.

Exemplo 3.7 – O uso da CSO na busca de máximos e mínimos locais

Retomando o caso do Exemplo 3.4, temos a função:

$$f\left(x_1, x_2\right) = 8x_1^3 + 2x_1x_2 - 3x_1^2 + x_2^2 + 1.$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$f_{x_1} = 24x_1^2 + 2x_2 - 6x_1 = 0,$$
$$f_{x_2} = 2x_1 + 2x_2 = 0.$$

Como já vimos, as soluções deste sistema de equações são *(0,0)* e *(1/3, -1/3)*, que geram os extremos $f\left(0,0\right) = 1$ e $f\left(1/3, -1/3\right) = 23/27$.

Para a aplicação da condição de segunda ordem, necessitamos das derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{x_1x_1} = 48x_1 - 6, f_{x_1x_2} = 2, f_{x_2x_2} = 2.$$

Em $\left(0,0\right)$ temos:

$$f_{x_1x_1} = 48\times 0 - 6 = -6 < 0 \text{ e } f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - (f_{x_1x_2})^2 = (-6)\times 2 - 2^2 = -16 < 0.$$

Esta combinação de sinais não satisfaz nem a condição (3.18) nem a (3.19). De fato, $f\left(0,0\right) = 1$ é um ponto de sela, conforme vimos na Figura 3.1.

Em $\left(1/3,-1/3\right)$ temos:

$$f_{x_1x_1} = 48\times(1/3)-6=10>0 \text{ e } f_{x_1x_1}f_{x_2x_2}-(f_{x_1x_2})^2 = 10\times 2-2^2 = 16>0\,.$$

Logo, considerando a condição (3.18), $f\left(1/3,-1/3\right)=23/27$ é um mínimo local.

Exemplo 3.8 – O uso da CSO na busca de máximos e mínimos locais

Retomando o caso do Exemplo 3.5, temos a função:

$$f(x_1,x_2)=x_1+2ex_2-e^{x_1}-e^{2x_2}.$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$f_{x_1}=1-e^{x_1}=0,$$
$$f_{x_2}=2e-2e^{2x_2}=0,$$

cuja solução é o par ordenado $\left(0,1/2\right)$.

Para a aplicação da condição de segunda ordem, necessitamos das derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{x_1x_1}=-e^{x_1},\ f_{x_1x_2}=0,\ f_{x_2x_2}=-4e^{2x_2}.$$

Avaliando tais derivadas no ponto $\left(0,1/2\right)$ obtemos:

$$f_{x_1x_1}=-e^0=-1<0 \text{ e } f_{x_1x_1}f_{x_2x_2}-(f_{x_1x_2})^2=(-e^0)(-4e^{2\times 0})-(0)^2=4e>0$$

Logo, pela condição (3.19), inferimos que $f\left(0,1/2\right)=-(1+e)$ é um máximo local.

Para concluirmos esta subseção, vamos ver mais um exemplo para esclarecer o significado de um ponto de sela.

Exemplo 3.9 – Um ponto de sela

Considere a seguinte função:

$$f\left(x_1,x_2\right)=3+x_1^2-x_2^2-2\left(x_1-x_2\right).$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$f_{x_1}=2x_1-2=0,$$
$$f_{x_2}=-2x_2+2=0.$$

A solução deste sistema existe e é única, a saber, $x_1 = x_2 = 1$.

Para a aplicação da condição de segunda ordem, necessitamos das derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{x_1x_1} = 2, f_{x_1x_2} = 0, f_{x_2x_2} = -2.$$

Avaliando tais derivadas no ponto $(1,1)$ obtemos:

$$f_{x_1x_1} = 2 > 0 \quad \text{e} \quad f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} - (f_{x_1x_2})^2 = 2 \times (-2) - (0)^2 = -4 < 0$$

Esta combinação de sinais não satisfaz nem a condição (3.18) nem a (3.19). De fato, $f(0,0) = 1$ é um ponto de sela, conforme podemos ver na Figura 3.2 a seguir.

Vejamos por que este ponto não é nem um máximo nem um mínimo local. O diferencial total de segunda ordem no ponto (1,1) é:

$$d^2y = f_{x_1x_1} dx_1^2 + 2 f_{x_1x_2} dx_1 dx_2 + f_{x_2x_2} dx_2^2,$$
$$d^2y = 2dx_1^2 - 2dx_2^2.$$

Se $dx_1 \neq 0$ e $dx_2 = 0$ segue que $d^2y > 0$ na vizinhança do ponto (1,1). Isto significa que se variarmos o valor de x_1 a partir do ponto (1,1), mantendo constante o valor de x_2, haverá um aumento de y. Por outro lado, se $dx_1 = 0$ e $dx_2 \neq 0$ segue que $d^2y < 0$ na vizinhança do ponto (1,1). Isto significa que se variarmos o valor de x_2 a partir do ponto (1,1), mantendo constante o valor de x_1, haverá uma redução de y.

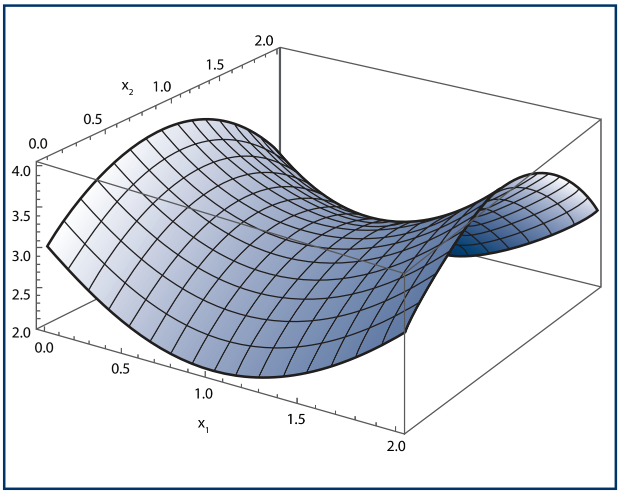


Figura 3.2 – Gráfico da função $f(x_1, x_2) = 3 + x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)$ em torno do extremo $(1,1)$.

3.1.3 Aplicações na análise econômica: a decisão de produção ótima de uma firma multiproduto com e sem poder de mercado

Em posse das condições de primeira e segunda ordem obtidas nas subseções 3.1.1 e 3.1.2, vamos analisar os problemas microeconômicos de otimização estática e não condicionada de duas variáveis de escolha estabelecidos nos exemplos do início da presente seção.

Exemplo 3.10 – Solução do problema de maximização de lucro de uma firma multiproduto e tomadora de preços nos mercados de bens

Considere o problema de maximização de lucro do Exemplo 3.1, a saber:

$$\text{(3.5)} \qquad \underset{(q_1,q_2)}{Max} \ L(q_1,q_2) = \underset{(q_1,q_2)}{Max} \ p_1q_1 + p_2q_2 - 5q_1^{\ 2} - q_1q_2 - 3q_2^{\ 2},$$

no qual q_1 e q_2 são as variáveis de escolha da firma.

A condição de primeira ordem para maximização de lucro é de que os lucros marginais para cada produto sejam nulos, ou seja, que as receitas marginais se igualem aos respectivos custos marginais em cada linha de produção:

$$\text{(3.20)} \qquad \begin{cases} L_{q_1} \equiv \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = p_1 - 10q_1^* - q_2^* = 0, \\ L_{q_2} \equiv \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = p_2 - q_1^* - 6q_2^* = 0. \end{cases}$$

Gabriel Cramer (1704 – 1752) foi um matemático suiço. Dedicou-se, de maneira especial, à teoria das curvas. **Fonte da imagem:** *http://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Cramer*

O sistema (3.20) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\text{(3.20-a)} \qquad \begin{cases} 10q_1^* - q_2^* = p_1, \\ q_1^* - 6q_2^* = p_2. \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer, podemos obter a solução deste sistema linear, a saber:

$$\text{(3.21)} \qquad q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & p_1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6p_1 - p_2}{59} \quad \text{e} \quad q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 10 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{vmatrix}}{59} = \frac{10p_2 - p_1}{59}.$$

Do ponto de vista econômico, a solução (3.21) só é significativa se $q_1^* > 0$ e $q_2^* > 0$. Considerando (3.21), isto ocorrerá se, e somente se:

(3.22)
$$6p_1 - p_2 > 0,$$
$$10p_2 - p_1 > 0.$$

Portanto, para uma dada estrutura de preços relativos (p_1, p_2) na qual as desigualdades em (3.22) sejam satisfeitas, haverá um único ponto extremo candidato a plano de produção maximizador de lucro, a saber:

(3.23)
$$\left(q_1^*, q_2^*\right) = \left(\frac{6p_1 - p_2}{59}, \frac{10p_2 - p_1}{59}\right).$$

Para a aplicação da condição de segunda ordem, necessitamos das derivadas parciais de segunda ordem, que são obtidas a partir das derivadas em (3.20):

(3.24) $L_{q_1q_1} = -10, L_{q_1q_2} = -1, L_{q_2q_2} = -6$.

No ponto $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ temos:

(3.25) $L_{q_1q_1} = -10 < 0$ e $L_{q_1q_1}L_{q_2q_2} - (L_{q_1q_2})^2 = (-10)\times(-6) - (-1)^2 = 59 > 0$.

Logo, pela condição (3.19), inferimos que $L(q_1^*, q_2^*)$ é o lucro máximo em $\mathbb{R}^2_{++}$, ou seja, $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ é o plano de produção maximizador de lucro em $\mathbb{R}^2_{++}$.

Exemplo 3.11 – Solução do problema de maximização de lucro de uma firma multiproduto e monopolista

Considere o problema de maximização de lucro do Exemplo 3.2, a saber:

(3.10) $\underset{(q_1,q_2)}{Max}\ L(q_1, q_2) = \underset{(q_1,q_2)}{Max}\ -6q_1^2 - 4q_2^2 + 144q_1 + 148q_2 - 4q_1q_2 - 75$,

no qual q_1 e q_2 são as variáveis de escolha da firma.

A condição de primeira ordem para maximização de lucro é de que os lucros marginais para cada produto sejam nulos, ou seja, que as receitas marginais se igualem aos respectivos custos marginais em cada linha de produção:

(3.26)
$$\begin{cases} L_{q_1} = -12q_1^* + 144 - 4q_2^* = 0, \\ L_{q_2} = -8q_2^* + 148 - 4q_1^* = 0. \end{cases}$$

O sistema (3.26) pode ser reescrito como segue:

(3.26-a) $$\begin{cases} 12q_1^* + 4q_2^* = 144, \\ 4q_1^* + 8q_2^* = 148. \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer, podemos obter a solução deste sistema linear, a saber:

(3.27) $$q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 144 & 4 \\ 148 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{560}{80} = 7 \quad \text{e} \quad q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 144 \\ 4 & 148 \end{vmatrix}}{80} = \frac{1200}{80} = 15.$$

Para a aplicação da condição de segunda ordem, necessitamos das derivadas parciais de segunda ordem, que são obtidas a partir das derivadas em (3.26):

$$L_{q_1q_1} = -12, L_{q_1q_2} = -4, L_{q_2q_2} = -8.$$

No ponto $(q_1^*, q_2^*) = (7,15)$ temos:

$$L_{q_1q_1} = -12 < 0 \text{ e } L_{q_1q_1}L_{q_2q_2} - (L_{q_1q_2})^2 = (-12)\times(-8) - (-4)^2 = 80 > 0.$$

Logo, pela condição (3.19), inferimos que $L(7,15)=1539$ é o lucro máximo em $\mathbb{R}^2_{++}$, ou seja, $(q_1^*, q_2^*) = (7,15)$ é o plano de produção maximizador de lucro em $\mathbb{R}^2_{++}$.

3.2 OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA CONDICIONADA COM DUAS VARIÁVEIS DE ESCOLHA E UMA ESTRIÇÃO DE IGUALDADE

Um problema de otimização (maximização ou minimização) estática condicionada com *n* variáveis de escolha e uma restrição de igualdade é representado como segue:

(3.28) $$\underset{(x_1,x_2)}{Max/Min}\ f(x_1,x_2) \text{ sujeito a } g(x_1,x_2) = c\ ,$$

no qual x_i, com $i = 1,2,...,n$, é a i-ésima **variável de escolha** (de decisão ou de política), $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a **função-objetivo**, c uma constante e $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ a **restrição de igualdade**.

Vejamos um exemplo econômico específico que pode ser expresso em termos da estrutura geral (3.28), a saber, a formalização do problema de escolha de um consumidor.

Exemplo 3.12 – Um problema de escolha de um consumidor

Considere um consumidor cujas preferências sobre o conjunto consumo $M = \mathbb{R}^2_+$ são representadas pela seguinte função utilidade:

(3.29) $$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 2x_1 ,$$

sendo x_i a quantidade consumida do *i*-ésimo bem em um dado intervalo de tempo.

Este consumidor defronta-se com os seguintes preços unitários exógenos $p_1 = 4$ e $p_2 = 2$ unidades monetárias dos bens 1 e 2, respectivamente, e aufere uma renda exógena de 60 unidades monetárias. Logo, sua restrição orçamentária é dada por:

(3.30) $$4x_1 + 2x_2 = 60 .$$

O consumidor busca escolher uma cesta de consumo $(x_1, x_2) \in M$ mais preferida entre aquelas cestas que pode comprar e esgotam seu orçamento. Em outros termos, o consumidor resolve o seguinte problema de maximização de utilidade:

(3.31) $$\underset{(x_1, x_2)}{Max}\; x_1 x_2 + 2x_1 \text{ sujeito a } 4x_1 + 2x_2 = 60 .$$

Este problema de maximização de utilidade é um problema de otimização estática condicionada com duas variáveis de escolha (as quantidades x_1 e x_2) e uma restrição de igualdade (a restrição orçamentária (3.30)). A função-objetivo é a função utilidade (3.29).

Vamos resolver este problema transformando-o em um problema de maximização não condicionada com uma variável de escolha, que aprendemos a resolver no curso de *Elementos de Economia Matemática I* (SILVEIRA, 2010).

Note que a restrição (3.30) torna x_2 uma função implícita de x_1, cuja forma explícita é obtida trivialmente:

(3.32) $$x_2 = 30 - 2x_1 .$$

Inserindo (3.32) na função-objetivo (3.29), o problema de maximização condicionada (3.31) transforma-se no seguinte problema de maximização não condicionada:

(3.33) $$\underset{x_1}{Max} \;\; x_1(30-2x_1)+2x_1 = \underset{x_1}{Max} \;\; 32x_1 - 2x_1^{\,2}.$$

A condição de primeira ordem deste problema de maximização é:

(3.34) $$\frac{du}{dx_1} = 32 - 4x_1^* = 0,$$

cuja solução é $x_1^* = 8$ unidades do bem 1. Inserindo este valor em (3.32) obtemos $x_2^* = 30 - 2 \times 8 = 14$ unidades do bem 2.

A condição de segunda ordem do problema (3.33) é dada por:

(3.35) $$\frac{du}{dx_1} = -4 < 0.$$

Logo, $u(8,14)$ é um máximo condicionado. Portanto, a cesta de consumo ótima (aquela considerada pelo consumidor a mais preferida dentre as cestas que ele pode comprar e que esgota seu orçamento) é $(x_1^*, x_2^*) = (8,14)$.

O problema de maximização estática condicionada que acabamos de ver é muito simples e pôde ser transformado facilmente em um problema de otimização estática mais fácil de resolver. Na maioria dos casos, principalmente na formulação de teorias, quando se almeja um maior grau de generalidade, esta estratégia de simplificação é inviável. Dessa forma, faz-se necessário desenvolver técnicas para lidar com problemas cuja estrutura matemática é aquela especificada em (3.28). Faremos isto nas próximas duas subseções e depois disto, na última subseção, aplicaremos o instrumental desenvolvido na análise do problema de maximização de utilidade.

3.2.1 Condição de primeira ordem (condição necessária) para um extremo

Supondo que $g_2(x_1^*, x_2^*) \equiv \dfrac{g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita sabemos que existe uma função

Uma apresentação detalhada deste teorema pode ser encontrada em Simon e Blume (2004, secão 15.1, p. 343-353).

(3.36) $$x_2 = h(x_1)$$

na vizinhança de (x_1^*, x_2^*) e que sua derivada é dada por:

(3.37) $$h'(x_1) = -\frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

A obtenção dessa derivada pode ser explicada intuitivamente como você vê a seguir. Note que o diferencial total de primeira ordem da função $g(x_1, x_2)$ no ponto (x_1^*, x_2^*) é $dg = g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2$. Como $g(x_1, x_2) = c$, então $dg = 0$.

Portanto, $dg = g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$. Manipulando algebricamente esta última igualdade e lembrando que $h'(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1}$ chegamos à deriva em questão.

Inserindo a função (3.36) na função-objetivo em (3.28) podemos transformar este problema de otimização estática condicionada no seguinte problema de otimização estática não condicionada:

$$\underset{(x_1, x_2)}{Max / Min}\ f(x_1, h(x_1)). \tag{3.38}$$

Usando a regra da derivada de uma função composta (regra da cadeia), obtemos a condição de primeira ordem deste problema, a saber:

$$f_1(x_1^*, x_2^*) + f_2(x_1^*, x_2^*)h'(x_1^*) = 0\ , \tag{3.39}$$

sendo $f_1(x_1^*, x_2^*) \equiv \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}$ e $f_2(x_1^*, x_2^*) \equiv \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}$.

Inserindo (3.37) em (3.39) obtemos:

$$f_1(x_1^*, x_2^*) - f_2(x_1^*, x_2^*)\frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{g_1(x_1^*, x_2^*)} = \frac{f_2(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}. \tag{3.31}$$

Cabe salientar que além desta condição temos que:

$$g(x_1^*, x_2^*) = c\ . \tag{3.41}$$

Em suma, a condição de primeira ordem para o problema de otimização (3.28) é dada pelo conjunto das condições (3.40) e (3.41).

Nos exemplos a seguir, vamos aplicar estas condições ao problema de maximização de utilidade apresentado no Exemplo 3.12. Acompanhe!

Exemplo 3.13 – O problema de escolha de um consumidor revisitado

Considere novamente o problema de maximização de utilidade do Exemplo 3.12, repetido aqui por conveniência:

(3.4) $$\underset{(x_1,x_2)}{Max}\ x_1x_2 \quad 2x_1 \text{ sujeito a } 4x_1+2x_2=60\,.$$

Vamos aplicar ao problema (3.31) as condições (3.40) e (3.41), que compõem a condição de primeira ordem para um extremo condicionado com duas variáveis de escolha e uma restrição de igualdade.

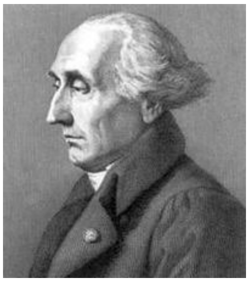
Sabemos que neste problema $f(x_1,x_2)=x_1x_2+2x_1$, $g(x_1,x_2)=4x_1+2x_2$ e $c=60$.

Logo, $f_1(x_1,x_2)=x_2+2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1$, $g_1(x_1,x_2^1)=4$ e $g_2(x_1,x_2)=2$.

Com estes dados, podemos estabelecer as condições (3.40) e (3.41) para o problema de maximização de utilidade (3.31), a saber:

(3.42) $$\begin{cases} \dfrac{f_1(x_1^*,x_2^*)}{g_1(x_1^*,x_2^*)}=\dfrac{f_2(x_1^*,x_2^*)}{g_2(x_1^*,x_2^*)}, \\ g(x_1^*,x_2^*)=c. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2^*+2}{4}=\dfrac{x_1^*}{2}, \\ 2x_1^*+4x_2^*=60. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (3.42), obtemos a solução $(x_1^*,x_2^*)=(8,14)$, obtida no Exemplo 3.12.



Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) foi um matemático e astrônomo italiano, naturalizado francês.
Fonte da imagem: www.en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange

A condição de primeira ordem (3.40)-(3.41) para o problema de otimização (3.28) pode ser obtida mais diretamente utilizando-se uma função de Lagrange (função lagrangeana), a qual é definida da seguinte maneira:

(3.43) $$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda[c-g(x_1,x_2)]$$

Para demonstrar que a partir de (3.43) podemos chegar às condições (3.40)-(3.41), vamos mostrar que a solução do seguinte problema de otimização estática não condicionada com três variáveis de escolha:

(3.44) $$\underset{(x_1,x_2,\lambda)}{Max}\ L(x_1,x_2,\lambda)$$

é a própria solução do sistema (3.40)-(3.41).

Com efeito, conforme vimos na seção 3.1, a condição de primeira ordem do problema (3.44) é dada por:

$$(3.45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = c - g(x_1^*, x_2^*) = 0. \end{cases}$$

A condição (3.45) pode ser reexpressa de maneira ainda mais compacta:

$$(3.46)\qquad \begin{cases} \dfrac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{g_1(x_1^*, x_2^*)} = \dfrac{f_2(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)} = \lambda^*, \\ c - g(x_1^*, x_2^*) = 0. \end{cases}$$

As condições em (3.46) são equivalentes às condições (3.40)-(3.41), como queríamos demonstrar.

A seguir, vamos aplicar o método da função de Lagrange ao problema de maximização de utilidade trabalhado nos Exemplos 3.12 e 3.13. Observe.

Exemplo 3.14 – O problema de escolha de um consumidor usando a função de Lagrange

Considere novamente o problema de maximização de utilidade do Exemplo 3.12, repetido aqui por conveniência:

$$(3.31)\qquad \underset{(x_1, x_2)}{Max}\ x_1x_2 + 2x_1 \ \text{ sujeito a } \ 4x_1 + 2x_2 = 60\,.$$

Vamos aplicar ao problema (3.31) as condições (3.46), que compõem a condição de primeira ordem para um extremo condicionado com duas variáveis de escolha e uma restrição de igualdade.

Em primeiro lugar, vamos construir a função de Lagrange para o problema de maximização em mãos. Tomando como base (3.43), temos:

$$(3.47)\qquad L(x_1, x_2, \lambda) = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)\,.$$

Aplicando as condições de primeira ordem (3.45) obtemos:

$$(3.48) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = x_2^* + 2 - 4\lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = x_1^* - 2\lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1^* - 2x_2^* = 0. \end{cases}$$

Isolando λ^* nas duas primeiras equações do sistema anterior, obtemos:

$$(3.49) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_2^* + 2}{4} = \dfrac{x_1^*}{2} = \lambda^*, \\ 2x_1^* + 4x_2^* = 60. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (3.49) obtemos a solução $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = (8,14,4)$. Portanto, a cesta de consumo é a mesma obtida nos dois exemplos anteriores, ou seja,

$(x_1^*, x_2^*) = (8,14)$. Além disso, obtivemos uma informação adicional, a saber, $\lambda^* = 4$, que é a utilidade marginal da renda, ou seja, o valor subjetivo dado pelo consumidor a uma unidade adicional de renda.

3.2.2 Condição de segunda ordem (condição suficiente) para um máximo e para um mínimo

Levando em consideração que no problema de otimização estática condicionada (3.28) x_1 e x_2 não são mais variáveis independentes entre si devido à restrição $g(x_1, x_2) = c$, para obtermos uma condição suficiente para que (x_1^*, x_2^*) seja um máximo ou um mínimo, temos que determinar o sinal do diferencial total de segunda ordem $d^2 f$ respeitando a restrição de que $dg = g_1(x_1, x_2)dx_1 + g_2(x_1, x_2)dx_2 = 0$. Em outros termos, vamos mostrar que:

(3.50) $\qquad d^2 f < 0$ sujeita a $dg = 0 \;\Rightarrow\;$ *máximo condicionado*;

(3.51) $\qquad d^2 f > 0$ sujeita a $dg = 0 \;\Rightarrow\;$ *mínimo condicionado*.

Mostraremos, seguindo Chian e Wainwright (2006, seção 12.3), como podemos desenvolver uma condição de segunda ordem para um máximo e para um mínimo a partir do diferencial total de segunda ordem da função de Lagrange, $d^2 L$. Para isso, vamos proceder em dois passos. No primeiro, demonstraremos como o diferencial total de segunda ordem $d^2 f$ sujeito à restrição linear $g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$ pode ser reescrito em termos das derivadas de segunda ordem da função de Lagrange com relação às variáveis de escolha. Em um segundo momento, estudaremos a definidade de uma forma quadrática qualquer sujeita a uma restrição linear.

- **PASSO 1: expressando $d^2 f$ sujeito à restrição linear $g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$ em termos de derivadas parciais de segunda ordem da função de Lagrange com relação às variáveis de escolha.**

Dada a restrição $g(x_1, x_2) = c$, uma perturbação $(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2^*)$ em torno de um ponto extremo restrito (x_1^*, x_2^*) deve respeitar a restrição $g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$, ou seja, para $g_2(x_1^*, x_2^*) \neq 0$ devemos ter:

(3.52)
$$dx_2 = -\frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)} dx_1$$

Assim, supondo $g_2(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $x_2 = \phi(x_1)$ na vizinhança de (x_1^*, x_2^*) tal que:

(3.53)
$$\phi'(x_1^*) = -\frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)} \,.$$

Logo, a função $f(x_1, x_2)$ apresenta apenas uma variável livre. Seu diferencial total de primeira ordem no ponto (x_1^*, x_2^*) é dado por:

(3.54)
$$df = f_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + f_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 \,.$$

Agora, considerando (3.52), ao calcularmos o diferencial total de segunda ordem $d^2 f$ não podemos mais tomar dx_2 como uma constante qualquer. Com efeito, é possível demonstrar que vale a seguinte igualdade:

(3.55)
$$d^2 f = L_{11}(x_1^*, x_2^*)dx_1^{\,2} + 2L_{12}(x_1^*, x_2^*)dx_1 dx_2 + L_{22}(x_1^*, x_2^*)dx_2^{\,2} \,.$$

Para maiores detalhes, consulte a seção 12.3 de Chian e Wainwright (2006, p. 338-339).

Assim, para analisar o sinal do diferencial de segunda ordem $d^2 f$ sujeito à restrição linear $g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$, basta analisarmos o diferencial total de segunda ordem (3.55) sujeito à referida restrição linear.

- **PASSO 2: definidade de uma forma quadrática sujeita a uma restrição linear.**

Que restrições podemos impor sobre as constantes a_{11}, a_{12} e a_{22} para que o sinal da forma quadrática $q = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$ sujeita à restrição linear $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$ seja determinado?

Da restrição linear $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$, sendo $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ duas constantes, segue que $z_2 = -\alpha z_1 / \beta$. Logo, a forma quadrática $q = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$ pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
q &= a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1\left(-\frac{\alpha}{\beta}z_1\right) + a_{22}\left(-\frac{\alpha}{\beta}z_1\right)^2, \\
q &= a_{11}z_1^2 - 2a_{12}\frac{\alpha}{\beta}z_1^2 + a_{22}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 z_1^2, \\
q &= \frac{z_1^2}{\beta^2}(a_{11}\beta^2 - 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\alpha^2).
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Desde que $\dfrac{z_1^2}{\beta^2} > 0$, então:

(3.57) $a_{11}\beta^2 - 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\alpha^2 > 0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow$ q é positiva definida;

(3.58) $a_{11}\beta^2 - 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\alpha^2 < 0 \Rightarrow q < 0 \Rightarrow$ q é negativa definida.

Considerando (3.55), $d^2 f$ é uma forma quadrática $q = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2$, com $d^2 f = q$, $z_1 = dx_1$, $z_2 = dx_2$, $a_{11} = Z_{11}(x_1^*, x_2^*)$, $a_{12} = Z_{12}(x_1^*, x_2^*)$ e $a_{22} = Z_{22}(x_1^*, x_2^*)$.

Por sua vez, $g_1(x_1^*, x_2^*)dx_1 + g_2(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$ é uma restrição linear do tipo $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$, sendo $\alpha = g_1(x_1^*, x_2^*)$ e $\beta = g_2(x_1^*, x_2^*)$.

Considerando as restrições sobre as constantes da forma quadrática q sujeita à restrição linear $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$ presentes em (3.57) e (3.58), por analogia concluímos que:

(3.59) $L_{11}g_2^2 - 2L_{12}g_1g_2 + L_{22}g_1^2 > 0 \Rightarrow d^2 f > 0 \Rightarrow f(x_1^*, x_2^*)$ é um mínimo local

(3.60) $L_{11}g_2^2 - 2L_{12}g_1g_2 + L_{22}g_1^2 < 0 \Rightarrow d^2 f < 0 \Rightarrow f(x_1^*, x_2^*)$ é um máximo local.

Agora, para fixar esse conceito, vamos analisar um exemplo puramente matemático de aplicação das condições de segunda ordem (3.59)-(3.60). Observe.

Exemplo 3.15 – A aplicação da CSO na detecção de um máximo ou de um mínimo em um problema de otimização estática com uma restrição de igualdade

Considere o problema de otimização:

(3.61) $$\underset{(x_1,x_2)}{Max / Min} \quad 2x_1x_2 + 4 \quad \text{sujeito a} \quad x_1 + 4x_2 = 32 \cdot$$

A função de Lagrange deste problema é dada por:

(3.62) $$L(x_1, x_2, \lambda) = 8x_1x_2 + 5 + \lambda(32 - x_1 - 4x_2) \cdot$$

A condição de primeira ordem é:

(3.63) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 8x_2^* - \lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 8x_1^* - 4\lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 32 - x_1^* - 4x_2^* = 0. \end{cases}$$

Esse sistema pode ser reduzido a:

(3.64) $$\begin{cases} \lambda^* = 8x_2^* = 2x_1^*, \\ x_1^* + 4x_2^* = 32. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $x_1^* = 16$, $x_2^* = 4$ e $\lambda^* = 32$.

Vamos ver, então, se podemos definir esta solução como um máximo ou um mínimo condicionado local. Da função de Lagrange (3.62) obtemos:

$$L_{11} = 0 \ , \ L_{12} = 8 \ , \ L_{22} = 0 \ , \ g_1 = -1 \ \text{e} \ g_2 = -4 \cdot$$

Logo, a expressão do lado esquerdo das primeiras desigualdades em (3.59)-(3.60) pode ser avaliada, resultando em:

$$L_{11}g_2^2 - 2Z_{12}g_1g_2 + Z_{22}g_1^2 = 0(-4)^2 - 2 \times 8 \times (-1) \times (-4) + 0(-1)^2 = -64 < 0$$

Logo, por meio de (3.60), concluímos que no ponto (16,4) do domínio da função-objetivo há um máximo condicionado local, cujo valor é 100.

3.2.3 Aplicações na análise econômica: maximização de utilidade e demanda do consumidor

A partir de agora, você vai saber como obter a função demanda dos bens à disposição de um consumidor, dadas suas preferências, os preços dos bens e sua renda nominal, usando o arcabouço analítico desenvolvido nas duas últimas subseções. Para isso, preste atenção no exemplo a seguir.

Exemplo 3.16 – Funções demanda marshallianas de um consumidor

Novamente, tomaremos o problema de maximização de utilidade do Exemplo 3.12 como referência, todavia em um maior nível de generalidade.

Como no exemplo citado anteriormente, considere um consumidor cujas preferências sobre o conjunto consumo $M = \mathbb{R}^2_+$ são representadas pela seguinte função utilidade:

(3.29) $$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 2x_1$$

sendo x_i a quantidade consumida do i-ésimo bem em um dado intervalo de tempo.

Este consumidor se defronta com preços unitários exógenos $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$ dos bens 1 e 2, respectivamente, e aufere uma renda $m > 0$. Logo, sua restrição orçamentária é dada por:

(3.65) $$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

O consumidor busca escolher uma cesta de consumo $(x_1, x_2) \in M$ mais preferida entre aquelas cestas que esgotam seu orçamento. Em outros termos, o consumidor resolve o seguinte problema de maximização de utilidade:

(3.66) $$\underset{(x_1, x_2)}{Max}\ x_1 x_2 + 2x_1 \text{ sujeito a } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\ .$$

A função de Lagrange associada a este problema de maximização de utilidade é:

(3.67) $$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Aplicando as condições de primeira ordem (3.45), obtemos:

(3.68)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = x_2^* + 2 - 4\lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = x_1^* - 2\lambda^* = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0. \end{cases}$$

Isolando λ^* nas duas primeiras equações do sistema anterior, obtemos:

(3.69)
$$\begin{cases} \dfrac{x_2^* + 2}{4} = \dfrac{x_1^*}{2} = \lambda^*, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (3.69), obtemos a solução:

(3.70)
$$x_1^* = \frac{m + 2p_2}{2p_1} \;;$$

(3.71)
$$x_2^* = \frac{m - 2p_2}{2p_2} \text{; e}$$

(3.72)
$$\lambda^* = \frac{m + 2p_2}{4p_1}.$$

As funções (3.70) e (3.71) são as funções demanda do consumidor pelos bens 1 e 2, respectivamente. Tais funções são conhecidas em Microeconomia como funções demanda marshallianas. Como já vimos no Exemplo 3.14, a função (3.72) representa a utilidade marginal da renda, ou seja, o valor subjetivo dado pelo consumidor a uma unidade adicional de renda.

Note que substituindo $p_1 = 4$, $p_2 = 2$ e $m = 60$ nas fórmulas (3.70)-(3.72) chegamos a $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = (8, 14, 4)$, conforme foi obtido no Exemplo 3.14.

Com este último exemplo, que mostra que a escolha de um consumidor pode ser representada como um problema de maximização estática condicionada e que a função demanda de um consumidor por um bem pode ser obtida usando o método de Lagrange, fechamos um ciclo de formação básico. Este ciclo começou exatamente com a descrição das possibilidades de consumo de um consumidor, lá na primeira unidade do manual Elementos de *Elementos de Economia Matemática I* (Silveira, 2010). Ao longo das disciplinas Elementos de Economia Matemática I e Economia Matemática II você adquiriu um instrumental analítico (conjuntos, funções, limites, derivadas, integral e técnicas de otimização estática com e sem restrições) que será usado ao longo do seu curso de graduação, principalmente nas disciplinas de Microeconomia. Com isto, espero ter contribuído para sua formação profissional. Bom estudo!

Saiba Mais

!

Para saber mais sobre otimização estática não condicionada com várias variáveis de escolha, recomendo a leitura do Capítulo 11 de Chiang e Wainwright (2006, p. 277-328) e da seção 10.2 do Capítulo 10 de Hariki e Abdounur (2002, p. 389-413).

Para um aprofundamento sobre otimização estática com várias variáveis de escolha e com restrições de igualdade, consulte o Capítulo 12 de Chiang e Wainwright (2006, p. 329-380) e a seção 10.3 do Capítulo 10 de Hariki e Abdounur (2002, p. 413-435).

Em todos os capítulos citados, você encontrará aplicações econômicas adicionais.

Caro aluno, terminamos a Unidade 3. Agora você deve ler o resumo do conteúdo aqui trabalhado e, em seguida, responder às questões das Atividades de aprendizagem. Leia e releia a unidade antes de processar as respostas e recorra aos tutores sempre que tiver dúvidas. Além disso, lembre-se de assistir à Videoaula 3 no AVEA. Bom trabalho!

Resumo da unidade:

Nesta unidade apresentamos o uso dos conceitos matemáticos de máximos e mínimos não condicionados e condicionados de uma função de duas variáveis nas representações formais de problemas de maximização de lucro por firmas multiprodutos, com e sem poder de mercado, e de maximização de utilidade de um consumidor tomador de preços. Na primeira seção, estabelecemos as condições necessárias de primeira ordem (CPO), bem como as condições suficientes de segunda ordem (CSO) para um máximo e para um mínimo local de um problema de otimização estática não condicionada (sem restrição). Nesta mesma seção, aplicamos as CPO e CSO na solução de problemas de maximização de lucro de firmas multiproduto, com e sem poder de mercado. Na segunda seção, estabelecemos as CPO e CSO para um máximo e para um mínimo local de um problema de otimização estática condicionada (com uma restrição de igualdade). Ainda na segunda seção, aplicamos as CPO e CSO na solução de problemas de maximização de utilidade de um consumidor tomador de preços.

Atividade de Aprendizagem – 3

1) Determine os extremos das funções abaixo e identifique, se possível, quais são máximos e quais são mínimos locais (HARIKI; ABDOUNUR, 2002, seção 10.1, p. 411):

   a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

   b) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 y^2)$;

   c) $f(x,y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$;

   d) $f(x,y) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$;

   e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

2) Considere uma firma maximizadora de lucro e tomadora de preços que produz dois bens cujos preços unitários são $p_1 = 5$ e $p_2 = 17$, sendo $p_i \geq 0$ o preço do i-ésimo bem. A função custo total da firma é dada por:

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + 5q_1 q_2 + \frac{3}{2} q_2^2,$$

   na qual $q_i \geq 0$ é a quantidade produzida do i-ésimo bem.

   Dados tais pressupostos pede-se:

   a) o problema de otimização da firma, tendo como variáveis de escolha as quantidades produzidas;

   b) as quantidades produzidas ótimas dos bens 1 e 2 da firma;

   c) as quantidades obtidas no item anterior são de fato ótimas? Justifique formalmente sua resposta.

3) Resolva o problema de maximização de lucro de uma firma uniproduto e tomadora de preços nos mercados de bens e de fatores estabelecido no Exemplo 3.3.

4) Determine os extremos condicionados das funções abaixo e identifique, se possível, quais são máximos e quais são mínimos locais (CHIANG; WAINWRIGHT, 2006, seção 12.2, p. 337):

   a) $z = xy$ sujeita a $x + 2y = 2$;

   b) $z = x(y + 4)$ sujeita a $x + y = 8$;

   c) $z = x - 3y - xy$ sujeita a $x + y = 6$;

   d) $z = 7 - y + x^2$ sujeita a $x + y = 0$.

5) Um consumidor escolhe as quantidades a serem consumidas de dois bens, x_1 e x_2 num dado intervalo de tempo. A relação de preferência deste consumidor no conjunto consumo é representada pela seguinte função utilidade:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2.$$

Os preços unitários, exogenamente determinados, dos bens 1 e 2 são $P_1 = 12{,}00$ e $P_2 = 6{,}00$, respectivamente. O consumidor aufere, no intervalo de tempo em análise, uma renda exógena de $\$300{,}00$. Determine:

a) o problema de maximização de utilidade do consumidor tendo como variáveis de escolha as quantidades consumidas;

b) as quantidades consumidas ótimas usando o método de Lagrange;

c) as quantidades obtidas no item anterior são de fato ótimas?
Justifique formalmente sua resposta.

REFERÊNCIAS

CHIANG, A.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para economistas.** 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier-Campus, 2006.

HARIKI, S.; ABDOUNUR, O. J. **Matemática aplicada**: administração, economia e contabilidade. São Paulo: Saraiva, 2002.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. 4. ed. Porto: Lopes da Silva, 1993.

SILVEIRA, J. J. **Elementos de economia matemática I**. Florianópolis: UFSC.