Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Sócio–Econômico
Departamento de Ciências Econômicas

Curso de graduação em Ciências Econômicas
a distância

Economia Matemática I

Jaylson Jair da Silveira

Catalogação na fonte elaborada na Biblioteca da Universidade Federal de Santa Catarina.

S587e Silveira, Jaylson Jair da

Economia matemática I / Jaylson Jair da Silveira. – 4. impri.
– Florianópolis : Departamento de Ciências Econômicas/UFSC, 2010.

88 p. : il., grafs., tabs.

Inclui bibliografia
Curso de Graduação em ciências Econômicas a Distância

ISBN 978-85-89032-13-1

1. Economia matemática. 2. Microeconomia – Modelos Matemáticos.
3. Modelos econômicos. I. Título

CDU: 51:336

EQUIPE DE PRODUÇÃO DE MATERIAL - PRIMEIRA EDIÇÃO

Coordenação de Design Instrucional Suelen Haidar Ronche
Design Instrucional Claudete Maria Cossa
Renata Oltramari
Revisão Textual Maria Geralda Soprana Dias
Coordenação de Design Gráfico Giovana Schuelter
Design Gráfico Natália Gouvêa
Rafael de Queiroz Oliveira
Ilustrações Natália Gouvêa
Rafael de Queiroz Oliveira
Design de Capa Guilherme Dias Simões
Felipe Augusto Franke
Steven Nicolás Franz Peña
Projeto Editorial André Rodrigues da Silva
Felipe Augusto Franke
Max Vartuli
Steven Nicolás Franz Pena

EQUIPE DE PRODUÇÃO DE MATERIAL - QUARTA EDIÇÃO

Coordenação de Design Instrucional Andreia Mara Fiala
Coordenação de Design Gráfico Giovana Schuelter
Design Gráfico Thiago Alves Vieira
Ilustrações Rafael de Queiroz Oliveira
Design de Capa Guilherme Dias Simões
Felipe Augusto Franke
Steven Nicolás Franz Peña
Projeto Editorial André Rodrigues da Silva
Felipe Augusto Franke
Max Vartuli
Steven Nicolás Franz Pena

Sumário

Unidade 5

APLICAÇÕES DE INTEGRAL: A RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MARGINAIS E TOTAIS DE UMA FIRMA UNIPRODUTO

Palavra do professor

Nos últimos oito anos, ofereci disciplinas de Matemática Aplicada à Economia em cursos de graduação na UNESP e na USP. Embora algumas vezes os alunos já tivessem cursado disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, na maioria dos casos tive que ensinar não só as aplicações econômicas em si, mas também os conceitos e teoremas matemáticos envolvidos nessas aplicações.

Assim, como se usa nos cursos de Engenharia o conceito de velocidade instantânea para motivar o conceito de derivada, passei a usar conceitos da Microeconomia, como produto, custo e receita marginais, para introduzir o conceito de derivada. Os resultados em sala de aula desta estratégia didática sempre foram muito bons, a julgar pelas avaliações formais feitas pelos alunos ao longo desses anos. Em parte, acho eu, porque a maioria dos alunos sente-se mais motivada em estudar Matemática quando vê como ela é utilizada em modelos econômicos.

Todavia, para entender o uso em modelos econômicos de conceitos matemáticos, como limite, derivada e integral, é necessário conhecer os conceitos econômicos envolvidos nesses modelos. Isso exige dos alunos um esforço dobrado, pois alunos do primeiro ano de cursos de graduação em Economia estão aprendendo ou ainda nem mesmo tiveram contato com esses conceitos econômicos. Portanto, o que costumo fazer em minhas aulas é supor que os alunos não têm qualquer conhecimento prévio de Microeconomia. A partir disto, normalmente, trabalho um tópico matemático em três fases: (i) apresentação de conceitos econômicos; (ii) exposição dos conceitos, teoremas e técnicas operatórias relacionadas ao tema em estudo; e (iii) fechamento da exposição com aplicações econômicas que juntam os conteúdos econômicos e matemáticos trabalhados nas fases (i) e (ii).

O presente livro, ao ser combinado com o livro Matemática I (GUERRA; TANEJA, 2009), pretende reproduzir a estratégia de ensino acima esboçada. Mais precisamente, aqui você encontrará ilustrações do uso, em Microeconomia, de conceitos e teoremas das Teorias dos Conjuntos, de Funções e do Cálculo.

Jaylson Jair da Silveira

1

APLICAÇÕES DE CONJUNTOS: DESCRIÇÃO DAS POSSIBILIDADES DE ESCOLHA DE UM CONSUMIDOR

Apresentaremos nesta unidade como a linguagem desenvolvida na teoria dos conjuntos é utilizada na teoria do consumidor para representar as possibilidades de consumo dos indivíduos em uma economia de mercado. Cabe salientar que, ao longo da exposição, quando um termo econômico for utilizado, este aparecerá sublinhado e seguir-se-á uma explicação mais precisa possível do seu significado. Os conceitos matemáticos também aparecerão sublinhados, seguidos por uma indicação entre parênteses das páginas onde se encontrarão explicações desses conceitos no manual *Matemática I* de Guerra e Taneja (2009).

1.1 CESTAS DE CONSUMO POSSÍVEIS: O CONJUNTO CONSUMO

A teoria microeconômica trata da tomada de decisões de compras e vendas de dois tipos fundamentais de agentes econômicos, a saber, os consumidores e as firmas.

A teoria dos conjuntos, que você estudou na Unidade 1 do livro ***Matemática I***, de Guerra e Taneja (2009), que daqui em diante será citado sinteticamente como "manual ***Matemática I***", tem um papel importante na descrição das possibilidades de escolha desses dois tipos de agentes econômicos. Para ilustrar isso, trataremos aqui das possibilidades de escolha dos consumidores.

Um consumidor é um indivíduo que decide quanto consumir de cada bem à sua disposição em um determinado período de tempo (um dia, uma semana, um mês), dados os preços dos bens e sua renda naquele período.

Ou um conjunto de pessoas – uma família – que decide coletivamente quanto consumir de cada bem, dada a renda total desse conjunto de pessoas e os preços dos bens

Passemos à descrição matemática dos objetos de escolha do consumidor. Tais objetos são as cestas de consumo, que são listas de quantidades de n bens existentes à disposição do consumidor nos mercados. Uma cesta de consumo x com n bens pode ser representada como $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, na qual x_i é a quantidade consumida do bem i por unidade de tempo. Por exemplo, suponha que houvesse $n = 4$ bens à disposição de um consumidor e que ele escolhesse a cesta de consumo $x = (2, 0, 1, 5)$. Isto indicaria que esse indivíduo decidiu consumir, em um dado intervalo de tempo, duas unidades do bem

1, nenhuma unidade do bem 2, apenas 1 unidade do bem 3, e 5 unidades do bem 4. Por questões didáticas, trabalharemos daqui em diante com cestas de consumo com apenas dois tipos de bens.

O conjunto formado por todas as cestas de consumo que o consumidor pode conceber, sendo elas possíveis ou não de serem compradas, é denominado conjunto consumo ou espaço de mercadorias. Denotaremos este conjunto pela letra M. O conjunto consumo é, digamos, o conjunto universo (p. 17 do manual *Matemática I*) da teoria do consumidor. Vejamos dois exemplos específicos de determinação de M.

Exemplo 1.1
(conjunto consumo com bens perfeitamente divisíveis)

Sejam x_1 a quantidade de tempo, medida em minutos, que um indivíduo consome usando seu telefone celular por dia e x_2 a quantidade de refrigerante, medida em litros, que este indivíduo consome por dia. É razoável supor que estes bens são perfeitamente divisíveis, ou seja, podem ser consumidos em quantidades não inteiras. Por exemplo, o indivíduo pode falar pelo celular 1,05 minutos (isto é, 1 minuto e 3 segundos) e consumir 0,25 de litro (isto é, 250 mililitros) de refrigerante. Mais precisamente, ao supormos que um bem é perfeitamente divisível, significa que adotamos a premissa de que sua quantidade pode ser representada por um número real (vide conjuntos numéricos fundamentais nas p. 14-15 e reta numérica na p. 23 do manual Matemática I).

Uma cesta de consumo pode ser representada por um par ordenado (vide p. 26-27 do manual Matemática I). Por exemplo, a cesta de consumo $x=(50,2)$ indica que o indivíduo gasta 50 minutos em conversas por celular e consome 2 litros de refrigerante em um dia. Generalizando, a cesta de consumo (x_1, x_2) indica que o consumidor gasta x_1 minutos em conversas por celular e consome x_2 litros de refrigerante por dia.

Seja M o conjunto consumo deste indivíduo, formado por todas as combinações de minutos de conversas por celular e litros de refrigerante que o indivíduo pode consumir em um dia. Obviamente, a cesta $(50,2)$ é factível, ou seja, é possível a priori que em um dia o indivíduo gaste 50 minutos conversando no celular e beba dois litros de refrigerante. Portanto, podemos estabelecer que $x \in M$ (vide relação de pertinência na p. 15 do manual Matemática I). Já a cesta $z=(1500,2)$ não é factível, pois o indivíduo não pode conversar por celular mais do que $1440(=60\,\text{min}\times 24h)$ minutos por dia, logo $z \notin M$. Se definir-mos $\overline{x}_2$ como a quantidade máxima de litros de refrigerante que o indivíduo suportaria beber em um dia, podemos determinar com precisão seu conjunto consumo por compreensão (vide p. 15 do manual Matemática I), a saber:

$$M = \left\{(x_1, x_2) \middle| x_1 \in \mathbb{R}, 0 \le x_1 \le 1440, x_2 \in \mathbb{R}, 0 \le x_2 \le \overline{x}_2 \right\}.$$

Na Figura 1.1, as cestas de consumo x e z são representadas por pontos no plano cartesiano (vide p. 26-30 do manual Matemática I). O retângulo em cinza nesta figura representa o conjunto consumo M .

Figura 1.1. Conjunto consumo com bens perfeitamente divisíveis e quantidades limitadas

Vejamos agora um exemplo de um conjunto consumo com bens não perfeitamente divisíveis, ou seja, bens que só podem ser consumidos em quantidades inteiras. Este tipo de bem é comumente denominado bem discreto.

Exemplo 1.2
(conjunto consumo com bens discretos)

Sejam x_1 a quantidade de camisetas e x_2 a quantidade de calças que um indivíduo compra por mês. Sem perda de generalidade, vamos desconsiderar que haja estoques ilimitados de camisetas e calças à disposição do indivíduo nos mercados destes bens. Assim, podemos afirmar que $x_1 \in \mathbb{N}$ e $x_2 \in \mathbb{N}$. O conjunto consumo deste indivíduo é, portanto, formado pelo produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (vide p. 28 do manual Matemática I), ou seja, o conjunto consumo deste indivíduo pode ser definido como:

$$M = \left\{(x_1, x_2) \middle| x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}\right\}.$$

Na Figura 1.2 encontra-se a representação gráfica de parte deste conjunto consumo.

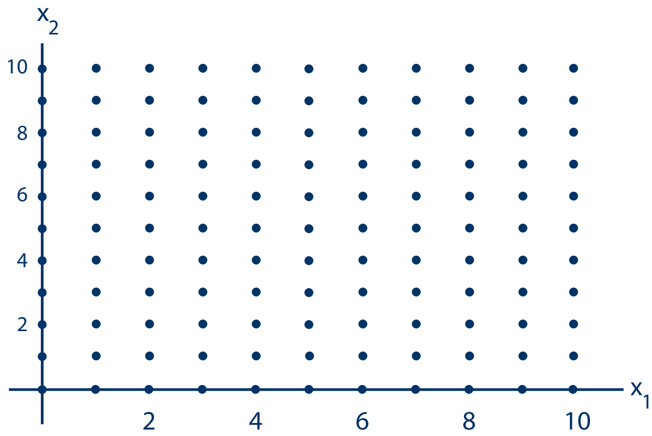


Figura 1.2. Conjunto consumo com bens discretos

Nos exemplos anteriores, acabamos de ver como os economistas utilizam conceitos da teoria dos conjuntos para especificar possibilidades factíveis de consumo em um dado intervalo de tempo. Todavia, o uso da teoria dos conjuntos na teoria do consumidor não acaba aí.

1.2 CONJUNTO DE CESTAS DE CONSUMO ECONOMICAMENTE ACESSÍVEIS: O CONJUNTO ORÇAMENTÁRIO

Nem toda cesta de consumo pertencente ao conjunto consumo pode ser comprada, pois o poder de compra de um consumidor depende da relação entre os preços dos bens e sua renda. Portanto, somente determinadas cestas de consumo pertencentes a M podem ser compradas.

Vejamos os dois exemplos, a seguir, que ilustram esta ideia, os quais partem das situações descritas nos exemplos 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.3
(conjunto orçamentário associado ao Exemplo 1.1)

Suponha que o custo de 1 minuto de ligação telefônica por celular custe R$ 2,00 e que 1 litro de refrigerante custe R$ 1,50. Logo, o consumidor gastará com a cesta de consumo $(50,2)$ o total de $\text{R}\$103{,}00 = 2\times 50+1{,}5\times 2$. Se a renda diária do consumidor for, digamos, 90 reais, então a cesta de consumo $(50,2)$ não poderá ser comprada.

Generalizando, uma cesta de consumo qualquer (x_1, x_2) custará $2x_1 + 1,5x_2$ e poderá ser comprada se o gasto total com a cesta (x_1, x_2) for menor ou igual à renda, ou seja, se $2x_1 + 1,5x_2 \leq 90$. O conjunto formado por tais cestas pode ser definido como $B = \{(x_1, x_2) \in M \mid 2x_1 + 1,5x_2 \leq 50\}$. Este conjunto, representado pelo trapézio em cinza escuro na Figura 1.3, é um subconjunto do conjunto consumo $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_1 \leq 1440, x_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_2 \leq \overline{x}_2\}$, ou seja, $B \subset M$ (vide relação de inclusão na p. 17-18 do manual Matemática I). Na citada figura, estamos supondo que o consumo máximo possível de refrigerante do indivíduo é de $\overline{x}_2 = 20$ litros por dia e, portanto, menor do que 60 litros de refrigerante, que é a quantidade máxima desse produto que o indivíduo poderia comprar por dia com sua renda de R$90,00.

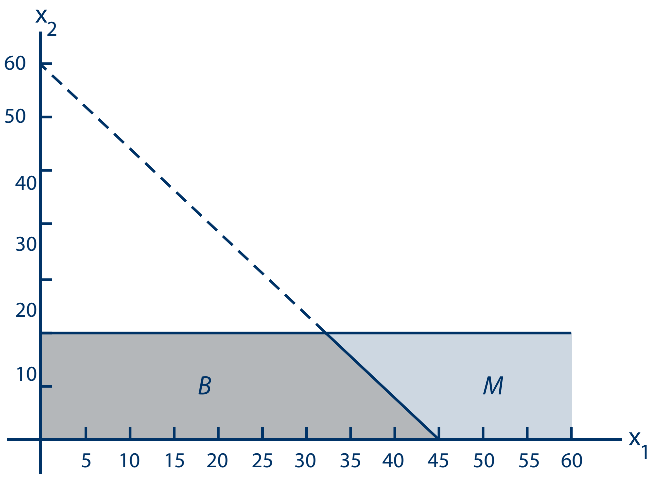


Figura 1.3. Conjunto orçamentário B associado ao conjunto consumo M do Exemplo 1.1

Exemplo 1.4
(conjunto orçamentário associado ao Exemplo 1.2)

Suponha que o preço de uma camiseta seja R$ 50,00, que uma calça custe R$ 100,00 e que a renda mensal do consumidor seja R$500,00. Uma cesta de consumo (x_1, x_2) poderá ser comprada se $50x_1 + 100x_2 \leq 500$. O conjunto formado por tais cestas pode ser definido como $B = \{(x_1, x_2) \in M \mid 50x_1 + 100x_2 \leq 500\}$.

Naturalmente, este conjunto é um subconjunto de $M = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $B \subset M$. O conjunto B é formado pelos pontos (com coordenadas que são números naturais) localizados no interior ou na fronteira do triângulo retângulo sombreado na Figura 1.4.

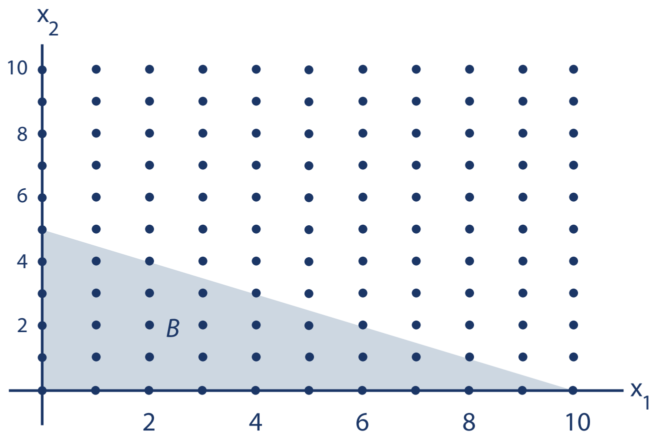


Figura 1.4. Conjunto orçamentário associado ao conjunto consumo do Exemplo 1.2

A partir dos exemplos anteriores podemos fazer as seguintes generalizações:

Sejam $x_1 \geq 0$ a quantidade do bem 1 e $x_2 \geq 0$ a quantidade do bem 2, consumidas em um dado intervalo de tempo. Os preços por unidade dos bens 1 e 2 são $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, respectivamente. Por fim, seja $m > 0$ a renda do consumidor no mesmo intervalo de tempo. O conjunto orçamentário B do consumidor é o subconjunto (vide p. 18 do manual de *Matemática I*) do conjunto consumo M formado pelas cestas de consumo que um indivíduo pode comprar ao se deparar com a lista de preços (p_1, p_2), dada sua renda m. O conjunto orçamentário pode ser definido, por compreensão, como segue:

$$B = \{(x_1, x_2) \in M \,|\, p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\},$$

tal que $B \subset M$.

Como você verá quando estudar a teoria do consumidor em Microeconomia, tipicamente, supõe-se que os bens sejam perfeitamente divisíveis e que o conjunto consumo seja infinito (vide p. 17 do manual *Matemática I*), correspondendo ao primeiro quadrante do plano cartesiano, isto é, $M=\{(x_1,x_2)|\,x_1\in\mathbb{R},x_1\geq 0,x_2\in\mathbb{R},x_2\geq 0\}$. Dessa forma, o conjunto orçamentário B passa a ser composto por todos os pontos no interior e na fronteira do triângulo retângulo (vide p. 24 do manual de *Matemática I*) sombreado na Figura 1.5 adiante.

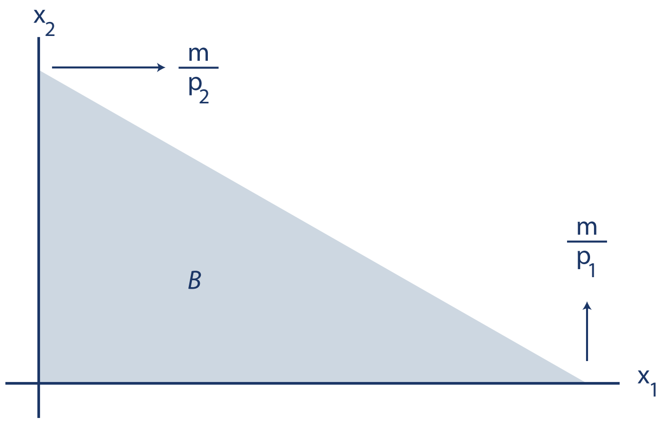


Figura 1.5. Conjunto orçamentário com bens perfeitamente divisíveis

A descrição do conjunto consumo e do conjunto orçamentário delimita as possibilidades de escolha de um consumidor, mas não determina qual será a cesta de consumo escolhida por ele. Isto é feito levando-se também em consideração os gostos ou preferências do consumidor. Não trataremos deste assunto aqui, pois seria necessário o conhecimento de funções de duas ou mais variáveis reais, o que não está dentro do escopo do presente livro.

Saiba Mais

!

Uma exposição mais detalhada sobre conjunto consumo e conjunto orçamentário é encontrada no capítulo 2 (Restrição Orçamentária) de Varian, H. ***Microeconomia: princípios básicos***. 7 ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

Resumo da unidade:

Apresentamos nesta unidade o uso de elementos da teoria dos conjuntos na representação das possibilidades de consumo dos indivíduos em uma economia de mercado. Na primeira seção, definimos os objetos de escolha de um consumidor, que são as *cestas de consumo*. Passamos, então, à definição do *conjunto consumo* ou *espaço de mercadorias*, cujos elementos são as cestas de consumo que o consumidor pode conceber. Na segunda seção, definimos o *conjunto orçamentário*, que é o subconjunto do conjunto consumo formado pelas cestas de consumo que um indivíduo pode comprar, dados os preços e sua renda.

Assista agora à vídeoaula correspondente a esta unidade.

Atividade de Aprendizagem – 1

1) Conjunto consumo com um bem discreto e um bem perfeitamente divisível:

   Esboce no plano cartesiano as combinações mensais possíveis de camisetas e minutos de ligações telefônicas por celular. Represente no eixo das abscissas a quantidade mensal x_1 consumida de camisetas e no eixo das ordenadas a quantidade mensal x_2 consumida de minutos de ligações telefônicas por celular. Além disso, defina por compreensão o conjunto consumo.

2) Mudanças no conjunto orçamentário em razão das variações na renda e nos preços:

   Represente graficamente o que aconteceria com o conjunto orçamentário se:

a) A renda do consumidor aumentasse, mantendo constantes os preços dos bens;

b) O preço do bem 1 caísse, mantendo a renda e o preço do bem 2 constantes;

c) O preço do bem 2 subisse, mantendo a renda e o preço do bem 1 constantes.

3) Inclusão de impostos no conjunto orçamentário:

   Defina por compreensão e represente graficamente o conjunto orçamentário de um consumidor com renda m; que paga p_1 e p_2 por unidade dos bens 1 e 2; e paga ao governo:

a) Um imposto sobre quantidade, isto é, uma quantia monetária $t > 0$ por unidade adquirida do bem 1;

b) Um imposto ad valorem, ou seja, uma fração $0 < \tau < 1$ sobre o valor de sua compra do bem 1;

c) Um imposto de montante fixo, isto é, um valor fixo $0 < d < m$, independentemente das quantidades consumidas dos bens.

Anotações

d m a

importante

2

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES: CUSTO, DEMANDA, RECEITA E LUCRO DE UMA FIRMA UNIPRODUTO

Apresentaremos nesta unidade, como as funções de uma variável real são utilizadas para caracterizar certas propriedades da estrutura de custos de uma firma, bem como para ligar a demanda por um bem com a receita de venda obtida pela firma produtora deste bem. Como você já sabe, ao longo da exposição, quando um termo econômico for utilizado, este aparecerá sublinhado e seguir-se-á uma explicação mais precisa possível do seu significado. Os conceitos matemáticos também aparecerão sublinhados, seguidos por uma indicação entre parênteses das páginas em que serão encontradas explicações desses conceitos, no manual Matemática I, de Guerra e Taneja (2009).

Como já mencionado na unidade anterior, a firma é um dos dois tipos fundamentais de agentes na teoria microeconômica. É a partir da teoria da firma, assunto que você verá detalhadamente em uma das disciplinas de Microeconomia, que os economistas constroem uma explicação para o lado da oferta dos mercados de bens. Para nossos fins, será suficiente adotarmos o conceito de firma como qualquer organização que realiza a transformação de certos insumos (que possui e/ou compra) em produtos (que vende).

Uma firma é classificada como uniproduto quando produz um único tipo de bem ou serviço, e multiproduto quando produz dois ou mais tipos de bens e/ou serviços. Trataremos aqui somente de firmas uniproduto.

Antes de passarmos aos conceitos de custos e receitas de uma firma, cabe um breve esclarecimento sobre a notação de função comumente utilizada pelos economistas. Como você leu na p. 35 do manual *Matemática I*, em Matemática representamos uma função genérica pela regra de associação $y = f(x)$. Em Economia, as variáveis x, y e a função f têm significados econômicos. Por isso, geralmente, a função f acaba sendo denotada como a própria variável y, ou seja, acaba-se escrevendo apenas $y(x)$ no lugar $y = f(x)$. Isto facilita a identificação quase que imediata do significado econômico da função.

Por exemplo, seja $C = f(q)$ a função custo total de uma firma. Em Matemática, dizemos que "C é o valor de f em q", enquanto em Economia é mais comum dizer que "C é o custo total da firma para produzir q unidades de produto". Assim, normalmente, os economistas costumam substituir $C = f(q)$ pela notação mais concisa $C(q)$. Neste caso, a "variável y" é C e a função f

é denotada também por C, o que facilita a identificação da função como uma função custo total. Por exemplo, uma função custo total quadrática poderia ser escrita como $C(q) = 50 + 3q^2$ para todo $q \geq 0$. Neste caso, tanto o valor da função em q quanto a função em si recebem a mesma denominação C.

2.1 CUSTOS

Vamos, inicialmente, distinguir o curto prazo e o longo prazo de uma firma.

O curto prazo de uma firma corresponde a aquele intervalo de tempo em que há pelo menos um fator de produção fixo; ou seja, há pelo menos um insumo cuja quantidade a firma não pode alterar, mesmo que decida não produzir. Normalmente, o estoque de capital de uma firma, formado pelas máquinas, equipamentos e instalações em geral, são um insumo fixo em um dado período de produção. Por exemplo, dadas as especificidades de sua atividade produtiva e as condições dos mercados fornecedores, uma firma pode levar seis meses para ampliar suas instalações e pôr em funcionamento novas máquinas e equipamentos; este seria o curto prazo desta firma. No longo prazo, todos os insumos são variáveis, ou seja, a firma pode alterar quaisquer das quantidades utilizadas dos seus insumos e combiná-los da melhor maneira possível.

Isto é, um insumo que pode ser classificado em uma das categorias amplas, como terra, trabalho ou capital.

Definido o curto e o longo prazo de uma firma, passemos à descrição da estrutura de custos de uma firma uniproduto, utilizando a teoria das funções de uma variável estudada na unidade 2 do manual *Matemática I*. No curto prazo, como há pelo menos um fator de produção fixo, uma firma depara-se com um custo fixo. Mais precisamente, o custo fixo (CF) é a soma dos custos associados aos insumos fixos, ou seja, insumos cujas quantidades utilizadas independem do nível de produção e, sobretudo, recebem pagamento, havendo ou não produção. Em suma, o custo fixo independe do nível de produção e tem de ser pago mesmo que a firma não produza, o que leva à definição de função custo fixo (vide a definição de função na p. 35 do manual *Matemática I*):

(2.1) $$CF = k \text{, para todo } q \geq 0,$$

sendo k um número real positivo. Obviamente, no longo prazo $CF = 0$, isto é, não há custo fixo.

A partir do conceito de custo fixo, podemos definir o conceito de custo fixo médio ($CFMe$), que é simplesmente o custo fixo por unidade de produto, ou seja, a função custo fixo médio pode ser definida pela seguinte regra de associação (vide p. 35 do manual *Matemática I*):

(2.2) $$CFMe(q) = \frac{CF}{q}, \text{ para todo } q > 0,$$

sendo q a quantidade de produto gerada em um dado período de produção.

Exemplo 2.1
(custo fixo e custo fixo médio)

Considere uma firma com custo fixo $CF = 98$ unidades monetárias. Caso a firma decida produzir $q = 7$ unidades de produto, seu custo fixo médio será $CFMe(7) = \frac{98}{7} = 14$ unidades monetárias. Generalizando, se a firma decidir produzir q unidades de produto, segue que seu custo fixo médio será $CFMe(q) = \frac{98}{q}$ unidades monetárias. Os gráficos (vide p. 38 do manual Matemática I) destas duas funções encontram-se nas figuras 2.1 e 2.2.

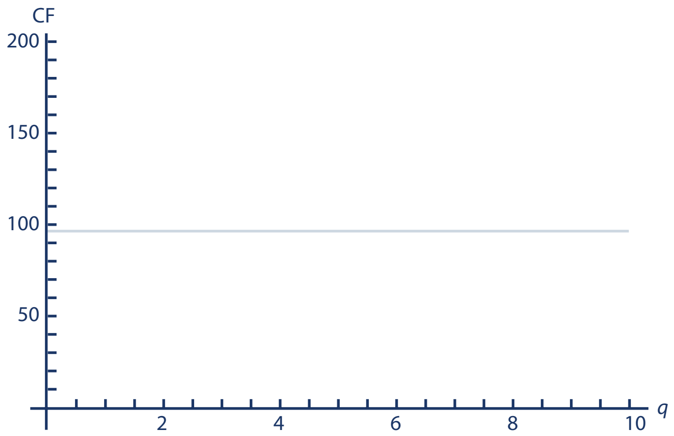


Figura 2.1. Função custo fixo

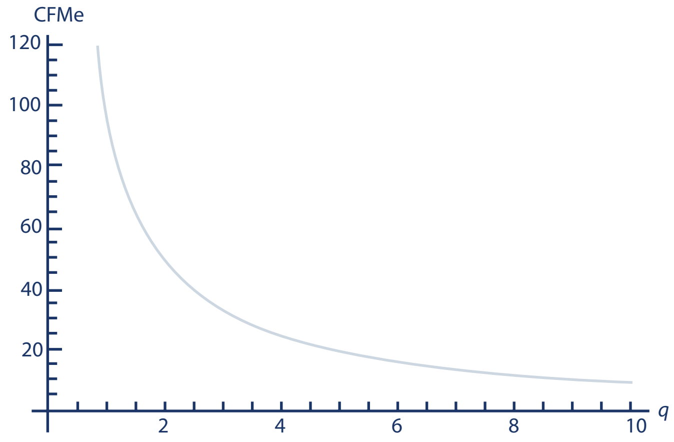


Figura 2.2. Função custo fixo médio

Considerando a Figura 2.1, vemos que o domínio (vide p. 35 do manual *Matemática I*) e o contradomínio (vide p. 35 do manual *Matemática I*) da função custo fixo são o conjunto dos números reais positivos, denotado por $\mathbb{R}^{+}$, ou seja, $D(CF) = CD(CF) = \mathbb{R}^{+}$. A imagem (vide p. 35 do manual *Matemática I*) desta função é um conjunto unitário (vide p. 16 do manual *Matemática I*), ou seja, $\text{Im}(CF) = \{k\}$. Esta função é do tipo constante (vide definição na p. 53 do manual *Matemática I*).

Com respeito à função custo fixo médio, vemos na Figura 2.2 que o domínio, o contradomínio e a imagem desta função são o conjunto dos números reais estritamente positivos, denotado por $\mathbb{R}^{++}$, ou seja, $D(CFMe) = CD(CFMe) = \text{Im}(CFMe) = \mathbb{R}^{++}$. Esta função é do tipo racional (vide p. 56 do manual Matemática I), mais precisamente uma hipérbole retangular.

Tratemos agora da outra parcela do custo total de uma firma, a saber, o custo variável (CV). Este tipo de custo é a soma dos custos associados aos insumos variáveis, ou seja, insumos como matérias-primas e horas de trabalho cujas quantidades utilizadas dependem do nível de produção e, portanto, os gastos associados a eles só ocorrem quando há de fato produção. Em síntese, o custo variável depende do nível de produção e passa a existir somente quando a firma produz. Em termos matemáticos, podemos denotar a função custo variável como:

(2.3) $$CV(q), \text{ para todo } q \geq 0.$$

Cabe observar, que, quando a firma não produz, $q = 0$, não há custo variável, $CV(0) = 0$.

Com base no conceito de custo variável, podemos definir o custo variável médio, que é o custo variável por unidade de bem produzida. Assim, a função custo variável médio é definida como:

$$CVMe(q) = \begin{cases} 0, \ \text{se } q = 0, \\ \dfrac{CV(q)}{q}, \ \text{se } q > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Esta função é definida por duas sentenças, uma válida para $q = 0$ e a outra para todo $q > 0$ (vide funções definidas por várias sentenças nas p. 41-43 no manual *Matemática I*). Assim, consistentemente com a definição econômica de custo variável, teremos $CV(0) = 0$, ou seja, não haverá custo variável se não houver produção. Nos livros-texto de Microeconomia este detalhe técnico costuma ser deixado de lado, definindo-se a função (2.3) simplesmente como $CVMe(q) = \dfrac{CV(q)}{q}$ para todo $q > 0$.

Exemplo 2.2
(custo variável e custo variável médio)

Seja q a quantidade produzida por uma firma uniproduto em um dado período de tempo. Para $q > 0$, o custo variável pode se comportar como uma <u>função polinomial de grau 3</u> (vide p. 55 do manual Matemática I). Por exemplo, poderíamos definir uma função custo variável como:

$$CV(q) = \begin{cases} 0, \ \text{se } q = 0, \\ q^3 - 12q^2 + 60q, \ \text{se } q > 0. \end{cases}$$

Neste caso, o custo variável de se produzir, digamos, $q = 10$ unidades de produto, é $CV(10) = (10)^3 - 12(10)^2 + 60(10) = 400$ unidades monetárias. Em Matemática, $CV(10)$ é o "valor da função CV em $q = 10$".

A partir da função custo variável anterior, obtemos a seguinte função custo variável médio:

$$CVMe(q) = \begin{cases} 0, \text{ se } q = 0, \\ \dfrac{q^3 - 12q^2 + 60q}{q} = q^2 - 12q + 60, \ \text{se } q > 0. \end{cases}$$

Esta é uma <u>função quadrática</u> (vide p. 55 do manual Matemática I) para .

Desde que $CV(10) = 400$ unidades monetárias, segue que o custo variável médio em $q = 10$ será $CVMe(10) = \dfrac{CV(10)}{10} = \dfrac{400}{10} = 40$ unidades monetárias.

Novamente, cabe observar que $CVMe(0) = 0$, consistente com a definição econômica de custo variável médio. Nas figuras 2.3 e 2.4 encontram-se os gráficos dessas funções custo variável e variável médio.

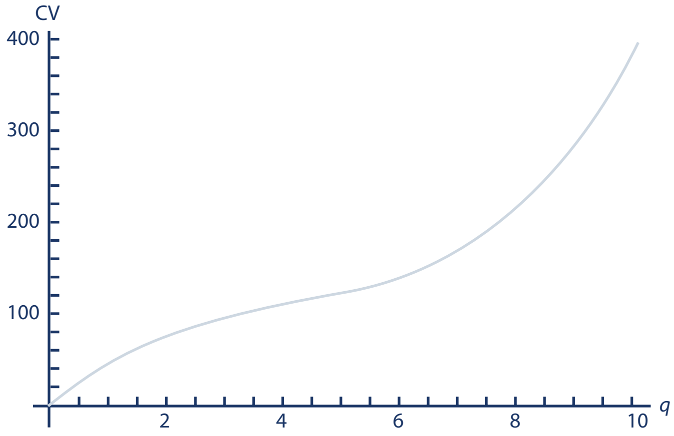


Figura 2.3. Gráfico de uma função custo variável polinomial de grau 3

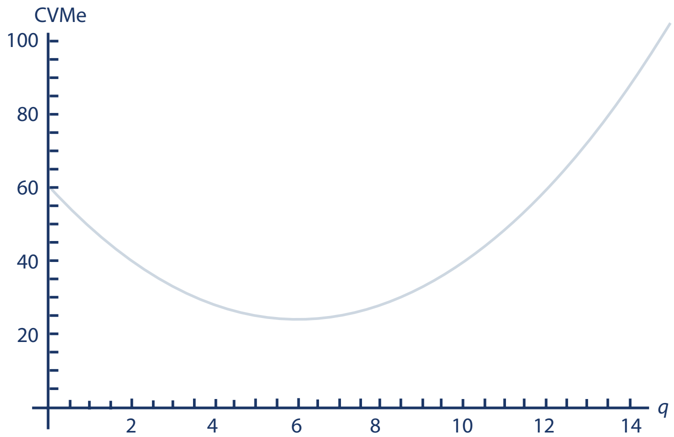


Figura 2.4. Gráfico de uma função custo variável médio quadrática

Considerando a Figura 2.3, podemos estabelecer que o domínio, o contradomínio e a imagem da função custo variável são $D(CV) = CD(CV) = \mathrm{Im}(CV) = \mathbb{R}^+$. Esta função é <u>crescente</u> (vide p. 44 do manual *Matemática I*), o que retrata o princípio econômico de que uma firma, ao ampliar sua produção, incorre necessariamente em aumento de custos.

Por sua vez, a Figura 2.4 permite definir o domínio da função custo variável médio como $D(CVMe) = \mathbb{R}^{+}$ e seu contradomínio como $CD(CVMe) = \mathbb{R}^{++}$.

A função $CVMe(q)$ pode ser decrescente (vide definição na p. 44 do manual *Matemática I*) para valores de produção baixos; todavia, a partir de certo nível de produção, essa função torna-se crescente. As causas disso serão vistas em detalhes nas disciplinas de Microeconomia. Em suma, o gráfico da função $CVMe(q)$ apresenta tipicamente uma forma U. Dado que o custo variável médio mínimo é maior que zero, a imagem da função $CVMe(q)$ é diferente do contradomínio, ou seja, $\text{Im}(CVMe) \neq CD(CVMe)$.

Dadas as funções custo fixo e custo variável, podemos definir a função custo total simplesmente como a soma destas duas funções (vide operações com funções nas p. 40-41 do manual *Matemática I*), ou seja:

(2.5) $$C(q) = CF + CV(q).$$

Como $CV(0) = 0$, segue que $C(0) = CF + CV(0) = CF$. Se $CF > 0$, teremos uma função custo total de curto prazo; caso $CF > 0$ teremos uma função custo total de longo prazo.

Finalmente, a partir do custo total, podemos definir o custo médio, que é o custo total por unidade de produto gerado. Assim, a função custo médio é definida como:

(2.6) $$CMe(q) = \frac{C(q)}{q}, \text{ para todo } q > 0.$$

Alternativamente, dado que $C(q) = CF + CV(q)$, podemos definir a função custo médio como a soma das funções custo fixo médio e custo variável médio:

(2.6-a) $$CMe(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{CF + CV(q)}{q} = \frac{CF}{q} + \frac{CV(q)}{q} = CFMe(q) + CVMe(q)$$

para todo $q > 0$.

Teremos uma função custo médio de curto prazo se a função custo total que deu origem a ela for de curto prazo. Analogamente, teremos uma função custo médio de longo prazo caso a função custo total associada seja de curto prazo.

Exemplo 2.3
(custo total e custo médio)

Considere a função custo total:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98 \text{ para todo } q \geq 0,$$

a qual é uma função polinomial de grau 3. Seu gráfico está desenhado na Figura 2.5.

O custo fixo é $CF = C(0) = 98 > 0$, o que indica que a função custo total é de curto prazo. O custo variável é obtido excluindo o custo fixo do custo total, ou seja, $CV(q) = C(q) - C(0) = q^3 - 12q^2 + 60q$.

A função custo médio de curto prazo é dada por:

$$CMe(q) = \frac{q^3 - 12q^2 + 60q}{q} = q^2 - 12q + 60 + \frac{98}{q} \text{ para todo } q > 0,$$

cujo gráfico se encontra na Figura 2.6. Note que esta função pode ser vista como a soma da função custo variável médio $CVMe(q) = q^2 - 12q + 60$ e da função custo fixo médio $CFMe(q) = \frac{98}{q}$ para todo $q > 0$.

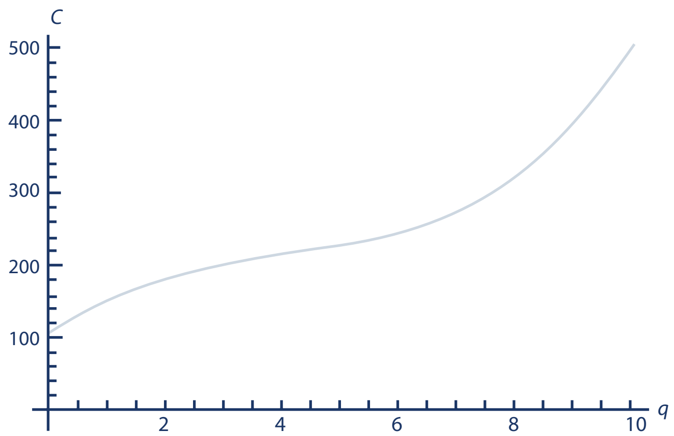


Figura 2.5. Função custo total polinomial de grau 3

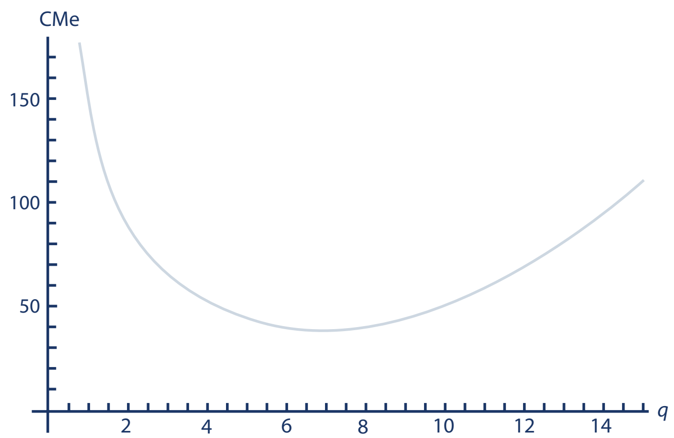
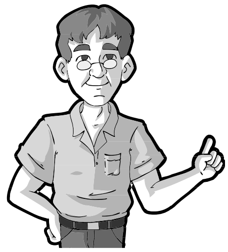


Figura 2.6. Função custo médio quadrática

Com base na Figura 2.6, podemos estabelecer o domínio e o contradomínio da função custo médio como o conjunto dos números reais estritamente positivos, ou seja, $D(CMe) = CD(CMe) = \Re^{++}$. Além disso, observamos que a função $CMe(q)$ é decrescente para valores de produção baixos, pois, em tal intervalo, tanto o custo fixo médio como o custo variável médio estão caindo. A partir de certo nível de produção, a função $CMe(q)$ torna-se crescente, pois o crescimento do custo variável médio passa a superar a redução do custo fixo médio. Em suma, o gráfico da função $CMe(q)$ apresenta tipicamente uma forma U. Finalmente, cabe salientar que a imagem da função custo médio é distinta do seu contradomínio, ou seja, *Im(CMe) ≠ CD(CMe)*.

2.2 PODER DE MERCADO, DEMANDA E RECEITA

Os seis conceitos de custos e respectivas funções vistas na seção anterior servem para caracterizar a estrutura de custos e sintetizar as informações relevantes a respeito da maneira como uma firma, sujeita a uma dada tecnologia de produção, combina certos fatores de produção, os quais compra nos mercados de fatores, onde a firma entra como demandante de fatores de produção. Resta agora descrever como uma firma se insere no mercado onde vende o bem que produz, ou seja, no seu mercado de produto, no qual entra como ofertante do produto. Em outros termos, focaremos o lado da receita da firma.



Para uma firma, é fundamental conhecer de maneira mais precisa possível o comportamento da demanda pelo seu produto, pois, com base nessa informação, é capaz de decidir qual o nível de produção que maximizará o seu lucro.

Uma firma é classificada como tomadora de preços quando não tem poder de mercado, ou seja, não é capaz de diferenciar o seu produto, e seu volume de produção é tão pequeno com relação ao mercado que não é capaz de afetar o preço (médio) de mercado do bem que produz quando varia sua quantidade ofertada. Por sua vez, uma firma é denominada formadora de preço quando tem poder de mercado, ou seja, é capaz de afetar o preço (médio) de mercado quando varia sua quantidade ofertada de produto. Vejamos exemplos de firmas sem e com poder de mercado.

Exemplo 2.4
(demanda e função receita total de uma firma tomadora de preços)

Considere uma firma tomadora de preço que vende um produto cujo preço unitário vigente no mercado é $p = 60$ unidades monetárias. Se representar-mos a quantidade vendida q no eixo das abscissas e o preço de mercado no eixo das ordenadas do plano cartesiano (vide p. 26-27 do manual Matemática I), estaremos, do ponto de vista matemático, expressando o preço como uma função da quantidade, de maneira que $p = 60$ pode ser interpretada como uma função constante, conforme ilustrado na Figura 2.7. Do ponto de vista econômico, esta representação gráfica sintetiza a situação de ausência de poder de mercado da firma, já que para ela não se abre a possibilidade de manipular o preço por meio de variações da quantidade vendida. Em outros termos, a firma sabe que venderá qualquer quantidade ao preço de mercado vigente.

A firma em análise, ao vender, por exemplo, 5 unidades de produto obterá uma receita total de $300 = 60 \times 5$ unidades monetárias. Generalizando, a firma, ao vender q unidades de produto, obterá uma receita total de $R(q) = 6q$ unidades monetárias. Enfim, esta firma tomadora de preço defronta-se com uma função demanda inversa constante e tem uma função receita total linear.

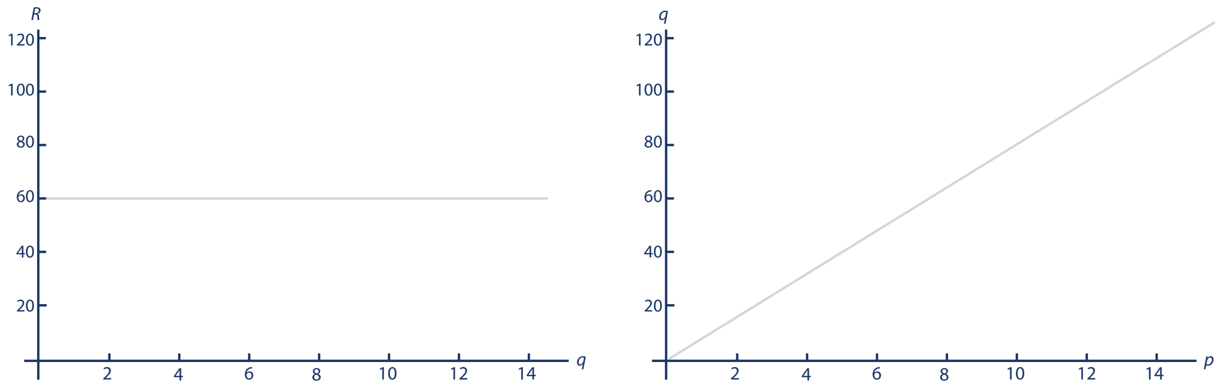


Figura 2.7. Funções demanda inversa e receita total de uma firma tomadora de preço

Vejamos agora um exemplo de uma firma com poder de mercado.

Exemplo 2.5
(demanda e receita de uma firma formadora de preço)

Considere uma firma monopolista que se depara com a seguinte função demanda:

$$q(p) = \begin{cases} 192 - 2p, \text{ se } 0 \le p \le 96, \\ 0, \text{ se } p > 96. \end{cases},$$

sendo q a quantidade demanda no mercado quando o preço unitário do bem é p. O gráfico desta função está desenhado na Figura 2.8. Daqui para frente, trabalharemos apenas com os valores de preço economicamente relevantes, a saber, $0 \le p \le 96$. Em outros termos, restringiremos o domínio da função demanda, fazendo $D(q) = \{p \in \mathbb{R} | 0 \le p \le 96\}$.

Como a firma é, por hipótese, a única produtora do bem, a quantidade demanda no mercado é igual à quantidade vendida pela firma. Portanto, a firma em questão sabe, por exemplo, que, se cobrar um preço de $p = 3$ reais por unidade de seu produto, venderá $q = 192 - 2 \times 3 = 186$ unidades de produto; mas, se cobrar um preço um pouco mais alto, digamos $p = 5$, venderá um pouco menos, mais precisamente $q = 192 - 2 \times 5 = 182$. Esta firma monopolista, diferentemente da firma tomadora de preço do Exemplo 2.4, depara-se com um dilema (trade-off) preço-quantidade, já que, ao aumentar o preço unitário de venda do produto, fatura mais em cada unidade, mas vende menos unidades de produto. Cabe notar que este dilema surge porque a função demanda é decrescente, conforme se vê na Figura 2.8, adiante.

Podemos olhar para a relação entre preço e quantidade demanda de outra maneira. A inversa (vide p. 46 do manual Matemática I) da função demanda em análise é dada por:

$$p(q) = 96 - 0,5q \text{, para todo } 0 \le q \le 192.$$

Esta função demanda inversa informa qual o preço unitário máximo p que poderá ser cobrado para se vender a quantidade q de produto. Assim, por exemplo, se a firma pôr a venda $q = 14$ unidades de produto no mercado, venderá cada unidade deste volume de produção por $p = 96 - 0,5 \times 14 = 89$ unidades monetárias. Por sua vez, se a firma reduzir o volume ofertado do seu produto para $q = 10$ unidades de produto, o preço unitário máximo que poderá cobrar aumenta para $p = 96 - 0,5 \times 10 = 91$ unidades monetárias. O gráfico desta função demanda inversa encontra-se também na Figura 2.8.

Em suma, a firma monopolista em questão, ao vender q unidades de produto, poderá cobrar $p = 96 - 0,5q$ unidades monetárias, obtendo uma receita total de $R(q) = pq = (196 - 0,5q)q = 96q - 0,5q^2$ reais para todo $0 \le q \le 192$. Portanto, uma firma formadora de preço que se depara com uma função demanda linear apresenta uma função receita quadrática no intervalo de quantidades economicamente relevante, conforme ilustrado na Figura 2.9.

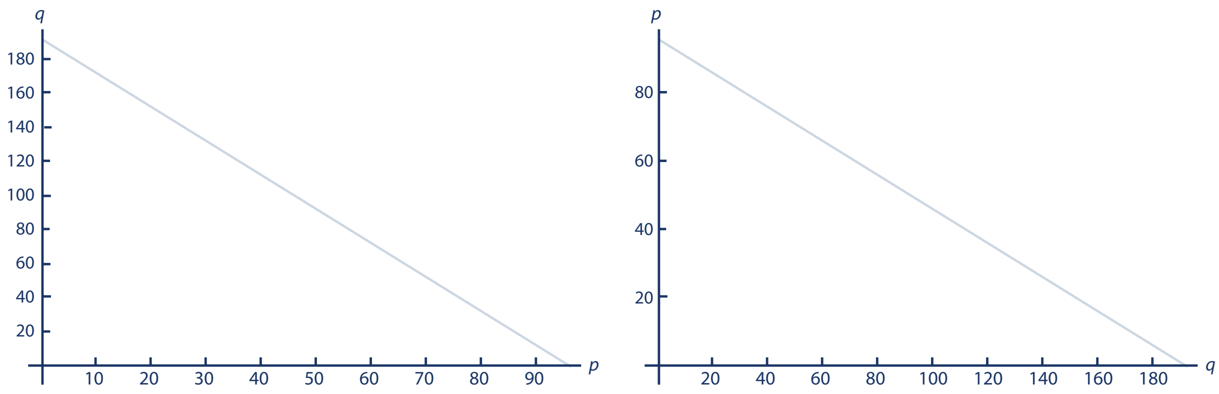


Figura 2.8. Função demanda linear e sua inversa de uma firma formadora de preço

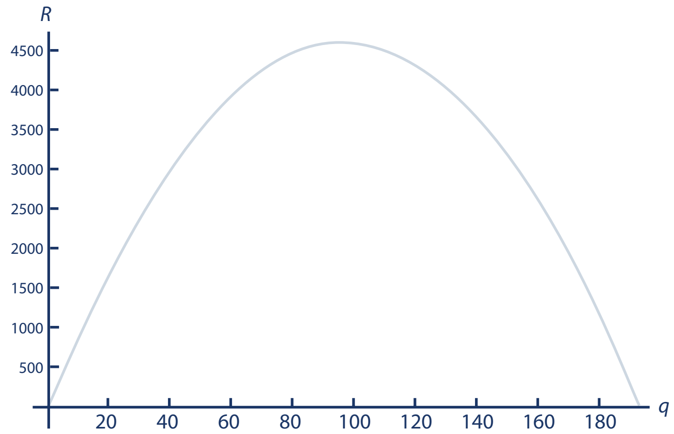


Figura 2.9. Função receita total quadrática de uma firma formadora de preço

Com base nos exemplos 2.4 e 2.5, podemos estabelecer com maior generalidade e precisão a relação entre a demanda pelo produto de uma firma uniproduto e sua receita. Com efeito, a demanda pelo bem produzido por uma firma pode ser representada por uma função demanda inversa, denotada por:

Em alguns livros-texto de Microeconomia não se faz uma distinção explícita entre função demanda e função demanda inversa. Manter esta diferença em mente vai evitar problemas de entendimento de alguns conceitos, como o de elasticidade-preço da demanda que veremos na próxima unidade

(2.7) $$p(q),$$

a qual fornece o preço unitário máximo p que poderá ser cobrado para se vender a quantidade q de produto.

Dessa forma, a <u>receita total</u> da firma é, simplesmente, a quantia monetária R que uma firma recebe pela venda de q unidades de produto a um preço unitário p, ou seja, $R = pq$. A <u>função receita total</u> pode, então, ser definida genericamente como:

(2.8) $$R(q) = p(q)q \, .$$

No Exemplo 2.5, supomos que a função demanda inversa era linear, ou seja, $p(q) = 96 - 0{,}5q$ para todo $0 \le q \le 192$, que gerou a função receita quadrática $R(q) = 96q - 0{,}5q^2$ para todo $0 \le q \le 192$.

No caso particular de uma firma tomadora de preços, também denominada firma perfeitamente competitiva, a função receita total é linear, a saber:

(2.8-a) $$R(q) = \overline{p}q \, ,$$

sendo $\overline{p}$ o preço unitário de mercado do bem produzido pela firma, tomado como dado (exógeno). No Exemplo 2.4, fizemos $\overline{p} = 60$ unidades monetárias.

Finalizando esta seção, vamos definir a receita média, que é a quantia monetária que uma firma recebe por unidade de um dado volume de produto vendido. Assim, a função receita média é dada por:

(2.9) $$RMe(q) = \begin{cases} 0, \text{ se } q = 0, \\ \dfrac{R(q)}{q}, \text{ se } q > 0. \end{cases}$$

No Exemplo 2.4, se a firma perfeitamente competitiva vender $q = 4$ unidades ao mesmo preço unitário, obtendo uma receita total $R(5) = 60 \times 4 = 240$ unidades monetárias, sua receita média será $RMe(5) = \dfrac{240}{4} = 60$ unidades monetárias, que é o próprio preço unitário de mercado. Analogamente, no Exemplo 2.5, se a firma monopolista vender $q = 4$ unidades ao mesmo preço unitário, obtendo uma receita total $R(4) = 96 \times 4 - 0{,}5 \times 4^2 = 376$ unidades monetárias, sua receita média será $RMe(4) = \dfrac{376}{4} = 94$ mil reais, que é o preço unitário de mercado quando a quantidade ofertada for $q = 4$, obtido calculando-se o valor da função demanda do Exemplo 2.5 no ponto $q = 4$, ou seja, $p(4) = 96 - 0{,}5 \times 4 = 94$ unidades monetárias.

A igualdade entre receita média e preço unitário de mercado ilustrada anteriormente não é uma coincidência. Em outras palavras, a função receita média é a própria função demanda inversa. Para ver isto, basta substituirmos a função receita total (2.8) na função receita média (2.9), como segue:

(2.9-a) $$RMe(q) = \begin{cases} 0, \text{ se } q = 0, \\ \dfrac{R(q)}{q} = \dfrac{p(q)q}{q} = p(q), \text{ se } q > 0. \end{cases}$$

Esta identidade será muito importante nas disciplinas de Microeconomia que você cursará.

2.3 LUCRO E PONTO DE NIVELAMENTO

A Microeconomia explica as tomadas de decisões econômicas (consumo, produção, troca) dos consumidores e firmas, partindo do princípio de que tais agentes econômicos se comportam racionalmente. Em termos gerais, este princípio é operacionalizado pela suposição de que os agentes buscam escolher ações econômicas de maneira a encontrar a melhor alternativa possível, em termos de algum parâmetro de desempenho, levando-se em consideração as restrições impostas pelos mercados nos quais estão inseridos.

No caso das firmas, normalmente se supõe que suas escolhas sejam pautadas pela busca da maximização de lucro. O lucro total de uma firma é simplesmente o que sobra da receita total após subtrairmos o custo total. Logo, a função lucro total de uma firma é definida como:

(2.10) $$L(q) = R(q) - C(q).$$

Veremos na unidade 4 como derivar a escolha do nível de produção q que maximiza o lucro de uma firma. Por enquanto, vamos nos restringir à análise do seu ponto de nivelamento (*breakeven point*). Este ponto é definido como a quantidade vendida que torna a receita total igual ao custo total; em outras palavras, é a quantidade vendida $\overline{q}$ que gera um lucro nulo, ou seja, $L(\overline{q}) = 0$.

Vamos ilustrar este conceito econômico determinando os pontos de nivelamento das firmas estudadas nos exemplos 2.4 e 2.5.

Exemplo 2.6 (determinação de um ponto de nivelamento)

Suponhamos que as firmas dos exemplos 2.4 e 2.5 apresentem a mesma estrutura de custos, caracterizada pela função custo total do Exemplo 2.3:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98 \text{ para todo } q \geq 0.$$

Lembre-se, trata-se de uma função custo total de curto prazo, pois $CF = C(0) = 98 > 0$.

Usando esta função custo total e a função receita total do Exemplo 2.4, obtemos a seguinte função lucro total:

$$\begin{aligned} L(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 60q - (q^3 - 12q^2 + 60q + 98) \\ &= -q^3 + 12q^2 - 98. \end{aligned}$$

No curto prazo, quando a firma não produz, o seu lucro será igual ao negativo do custo fixo, ou seja, $L(0) = -98 = -CF$. Em outras palavras, a firma incorre em um prejuízo (lucro negativo). Um ponto de nivelamento $\overline{q}$ deve satisfazer a condição $L(\overline{q}) = -\overline{q}^3 + 12\overline{q}^2 - 98 = 0$. Usando um pacote matemático computacional, (em particular, foi utilizado o Mathematica 7.0) obtemos os pontos $\overline{q} \cong 3{,}37$ e $\overline{q} \cong 11{,}22$, que são os dois pontos de nivelamento da firma em análise, conforme ilustra a Figura 2.10 adiante.

O símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a".

Usando a função custo total estabelecida inicialmente e a função receita total do Exemplo 2.5, obtemos a seguinte função lucro total para a firma monopolista:

$$\begin{aligned} L(q) &= (96q - 0{,}5q^2) - (q^3 - 12q^2 + 60q + 98) \\ &= -q^3 + 11{,}5q^2 + 36q - 98, \text{ para todo } 0 \le q \le 192. \end{aligned}$$

Um ponto de nivelamento $\overline{q}$ deve satisfazer a condição $L(\overline{q}) = -\overline{q}^3 + 11{,}5\overline{q}^2 - 60\overline{q} - 98 = 0$. Resolvendo esta equação de terceiro grau, usando um pacote matemático computacional, obtemos os pontos $\overline{q} \cong 1{,}83$ e $\overline{q} \cong 13{,}62$, que são os dois pontos de nivelamento da firma monopolista, conforme ilustra a Figura 2.11, adiante.

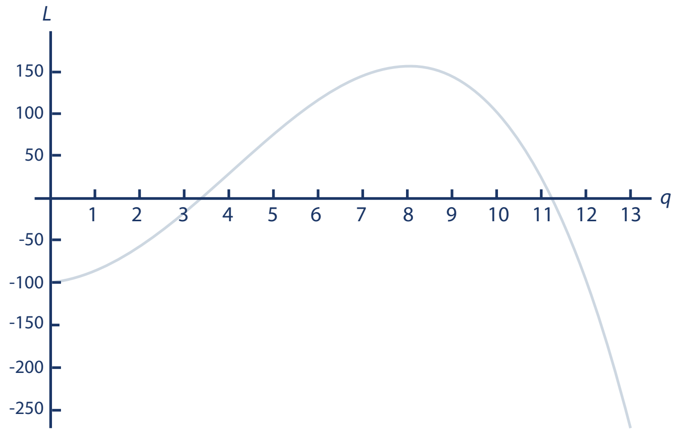


Figura 2.10. Função lucro da firma perfeitamente competitiva do Exemplo 2.4

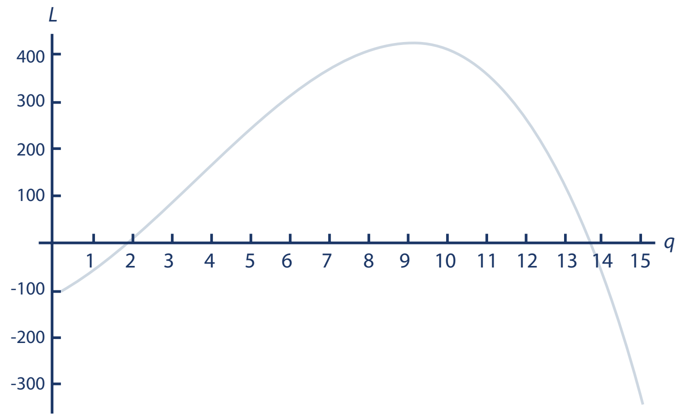


Figura 2.11. Função lucro da firma monopolista do Exemplo 2.5

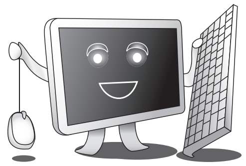
Saiba Mais

!

Além das funções custos, demanda, receita e lucro trabalhadas aqui, você pode encontrar outras aplicações econômicas de funções no capítulo 1 (Funções) do livro: VERAS, L. L. ***Matemática aplicada à economia***. São Paulo: Atlas, 1985.

Resumo da unidade:

Na primeira seção, mostramos como *funções de uma variável real* são utilizadas para caracterizar certas propriedades da estrutura de custos de uma firma, como *custo fixo, variável, médio e marginal*. Na segunda seção, mostramos como a *demanda*, com a qual se depara uma firma, e sua *receita total* podem ser representadas por tipos diferentes de funções de uma variável real, a depender do *poder de mercado* da firma. Finalmente, na terceira seção, trabalhamos o conceito de *ponto de nivelamento* (*breakeven point*).



Assista agora à vídeoaula correspondente a esta unidade.

Atividade de Aprendizagem – 2

1) Uma firma uniproduto tomadora de preço defronta-se com um preço unitário de mercado de 0,25 unidades monetárias. Esta firma apresenta um custo total dado pela função:

$$C(q) = \frac{3+q}{5+q}, \text{ para } q \geq 0.$$

Determine:

a) As funções receita média e receita total;

b) As funções custo fixo, custo variável, custo fixo médio, custo variável médio e custo médio;

c) Se a função custo total é de curto ou de longo prazo. Justifique sua resposta;

d) A função lucro total;

e) O(s) ponto(s) de ***breakeven*** desta firma.

2) Uma firma uniproduto formadora de preço defronta-se com uma função de demanda dada por:

$$q = 10,5 - \frac{p}{2},$$

para $0 \leq p \leq 21$, sendo p o preço unitário do seu produto e $q \geq 0$ a quantidade vendida (igual a produzida). Esta firma apresenta um custo total dado pela função:

$$C(q) = \frac{q^2}{3} + 7q, \text{ para todo } q \geq 0.$$

Determine:

a) As funções receita média e receita total;

b) As funções custo fixo, custo variável, custo fixo médio, custo variável médio e custo médio;

c) Se a função custo total é de curto ou de longo prazo. Justifique formalmente sua resposta;

d) A função lucro total;

e) O(s) ponto(s) de ***breakeven*** desta firma.

Anotações

d m a

importante

3

APLICAÇÕES DE LIMITE E CONTINUIDADE: UMA ANÁLISE MAIS PORMENORIZADA DOS CUSTOS MÉDIOS E DA DEMANDA DE UMA FIRMA UNIPRODUTO

Apresentaremos como o conceito de limite de funções de uma variável real é utilizado para caracterizar certas propriedades da estrutura de custos de uma firma, bem como para ligar a demanda por um bem com a receita de venda obtida pela firma produtora deste. Ao longo da exposição, quando um termo econômico for utilizado, este aparecerá sublinhado e seguir-se-á uma explicação mais precisa possível do seu significado. Os conceitos matemáticos também aparecerão sublinhados, seguidos por uma indicação entre parênteses das páginas que contêm as explicações desses conceitos no manual *Matemática I* de Guerra e Taneja (2009).

3.1 ANÁLISE ADICIONAL DAS FUNÇÕES CUSTO MÉDIO, CUSTO FIXO MÉDIO E CUSTO VARIÁVEL MÉDIO

Vamos analisar com mais cuidado, do ponto de vista matemático, o comportamento das funções custo médio, fixo médio e variável médio, definidas e exemplificadas na unidade anterior.

Exemplo 3.1
(Análise adicional da função custo fixo médio do Exemplo 2.1)

Considere uma firma cujo custo fixo é $CF = 98$ unidades monetárias. Como visto no Exemplo 2.1, a função custo fixo médio associada é:

$$CFMe(q) = \frac{98}{q}, \text{ para todo } q > 0 .$$

Podemos observar por esta fórmula, que o custo fixo médio tende a cair quando a produção aumenta, ou seja, o aumento da produção dilui o custo fixo. Em outros termos, a função em análise é decrescente. Para expressarmos esta propriedade econômica com precisão, basta tomarmos o limite da função custo fixo médio quando a produção tende ao infinito, ou seja:

$$\lim_{q\to\infty} CFMe(q) = \lim_{q\to\infty} \frac{98}{q}.$$

Usando a propriedade (ii) das observações à p. 82 do manual Matemática I, concluímos que:

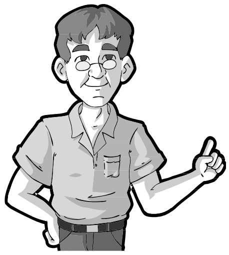
$$\lim_{q\to\infty} CFMe(q) = \lim_{q\to\infty} 98 \times \frac{1}{q} = \lim_{q\to\infty} 98 \times \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} = 98 \times 0 = 0.$$

Cabe salientar que o custo fixo médio, embora tenda a zero, não assumirá exatamente o valor zero por maior que seja o volume de produção da firma. Em outros termos, o valor da função custo fixo médio se aproxima assintoticamente de zero quando q torna-se arbitrariamente grande.

Vejamos agora o comportamento dessa função quando a produção tende a ficar cada vez menor. Com efeito, tomando o limite à direita da função custo fixo médio no ponto $q = 0$ obtemos:

$$\lim_{q\to 0^+} CFMe(q) = \lim_{q\to 0^+} \frac{98}{q} = 98 \lim_{q\to 0^+} \frac{1}{q} = 98 \times \infty = \infty.$$

Podemos ler a expressão acima como "o custo fixo médio tende ao infinito quando a produção tende a zero pela direita". Em outros termos, o custo fixo médio torna-se arbitrariamente grande quando a produção torna-se arbitrariamente pequena.



Vamos sintetizar o que vimos até aqui sobre a função custo fixo médio. Esta função apresenta $D(CFMe) = CD(CFMe) = \mathrm{Im}(CFMe) = \mathbb{R}^{++}$; é racional, mais precisamente uma hipérbole retangular; é decrescente; e seu valor (o custo fixo médio) tende ao infinito quando a quantidade produzida tende a zero pela direita e tende a zero quando a quantidade produzida tende ao infinito.

Exemplo 3.2
(Análise adicional da função custo variável médio do Exemplo 2.2)

No Exemplo 2.2, trabalhamos com a seguinte função custo variável médio:

$$CVMe(q) = \begin{cases} 0, \text{ se } q = 0, \\ q^2 - 12q + 60, \text{ se } q > 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que o custo variável médio fica arbitrariamente grande para níveis de produção suficientemente elevados. Com efeito, tomando o limite da função anterior quando q tende ao infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty} CVMe(q) &= \lim_{q\to\infty}\left(q^2-12q+60\right)\\ &= \lim_{q\to\infty} q^2\left(1-\frac{12}{q}+\frac{60}{q^2}\right)\\ &= \left(\lim_{q\to\infty} q^2\right)\ \lim_{q\to\infty}\left(1-\frac{12}{q}+\frac{60}{q^2}\right)\\ &= \left(\lim_{q\to\infty} q^2\right)\left(\ \lim_{q\to\infty}1-12\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}+60\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q^2}\right)\\ &= \infty\times(1-12\times 0+60\times 0)=\infty\times 1=\infty.\end{aligned}$$

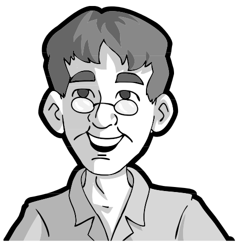
Nos passos seguidos acima foram usadas as propriedades de limite da unidade 3 do manual *Matemática I*.

Para finalizar, mostraremos que a função em análise não é contínua em $q=0$. Primeiramente, observe que o limite à direita da função custo variável médio no ponto $q=0$ existe, sendo:

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0^+} CVMe(q) &= \lim_{q\to 0^+}\left(q^2-12q+60\right)\\ &= \lim_{q\to 0^+} q^2 - \lim_{q\to 0^+} 12q + \lim_{q\to 0^+} 60\\ &= \lim_{q\to 0^+} q^2 - 12\lim_{q\to 0^+} q + \lim_{q\to 0^+} 60\\ &= 0-12\times 0+60\\ &= 60.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{q\to 0^+} CVMe(q)=60\neq 0=CVMe(0)$ e, portanto, no ponto $q=0$ a função $CVMe(q)$ não satisfaz a condição (iii) das condições de continuidade estabelecidas na p. 85 do manual Matemática I.

> Vejamos no exemplo a seguir como podemos usar os conceitos de limite para mostrar como os custos fixo médio e variável médio geram a forma U da função custo médio.



Exemplo3.3
(Análise adicional da função custo médio do Exemplo 2.3)

No Exemplo 2.3 trabalhamos com a seguinte função custo médio:

$$CMe(q)=q^2-12q+60+\frac{98}{q}\ \text{ para todo } q>0.$$

Como explicitado no Exemplo 2.3, a função custo médio acima pode ser vista como a soma das funções:

$$CVMe(q) = q^2 - 12q + 60 \text{ e } CFMe(q) = \frac{98}{q},$$

trabalhadas nos dois exemplos anteriores.

Assim, para mostrar que o custo médio fica arbitrariamente grande quando a produção é demasiadamente pequena, basta tomar a soma do limites à direita das funções custo fixo médio e variável médio no ponto $q = 0$, ou seja:

$$\lim_{q \to 0^+} CMe(q) = \lim_{q \to 0^+} CVMe(q) + \lim_{q \to 0^+} CFMe(q) = 60 + \infty = \infty.$$

Analogamente, para mostrar que o custo médio fica arbitrariamente grande quando a produção torna-se demasiadamente grande, é suficiente tomar o limite no infinito da citada soma de funções:

$$\lim_{q \to \infty} CMe(q) = \lim_{q \to \infty} CVMe(q) + \lim_{q \to \infty} CFMe(q) = \infty + 0 = \infty.$$

Resumindo, para níveis de produção próximos de zero, o comportamento da função custo médio é predominantemente determinado pela função custo fixo médio, enquanto para níveis de produção relativamente altos o comportamento da primeira passa a ser determinado predominantemente pela função custo variável médio.

3.2. A ELASTICIDADE-PREÇO DA DEMANDA NO ARCO

O conceito geral de elasticidade é muito utilizado em Economia. Este conceito serve para expressar em termos sintéticos o impacto em termos percentuais sobre uma variável y, gerado pela variação de 1% em uma variável x. Por exemplo, se x varia de 10 para 12, sofrendo um incremento $\Delta x = 12 - 10 = 2$, isto significa que x aumentou $20\% = \frac{2}{10} \times 100 = \frac{\Delta x}{x} \times 100$. Suponhamos que esta variação de 20% em x fez com que y aumentasse de 50 para 55, ou seja, y sofresse um incremento $\Delta y = 5$, aumentando $10\% = \frac{5}{50} \times 100 = \frac{\Delta y}{y} \times 100$.

Com base em tais valores, podemos dizer que, em média, y variou 0,5% para cada 1% de variação em x. Neste caso, diríamos que a elasticidade de y

com relação à x é $0,5=\frac{10\%}{20\%}=\frac{\frac{\Delta y}{y}\times 100}{\frac{\Delta x}{x}\times 100}=\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$. A medida de elasticidade é adimensional, ou seja, é um número puro. Vamos definir este conceito de elasticidade mais formalmente.

Seja $y=f(x)$ uma função qualquer. A variação proporcional de x quando esta variável sofre um incremento Δx é:

$$\frac{\Delta x}{x}\times 100\,.$$

O incremento Δx gera um incremento $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ na variável y . A variação proporcional de é:

$$\frac{\Delta y}{y}\times 100=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}\times 100\,,\ \text{para}\ f(x)\neq 0\,.$$

A *<u>elasticidade da função f no arco</u>* pode ser definida como quociente das variações proporcionais de y e x, ou seja:

$$\textbf{(3.1)}\quad \widehat{\varepsilon}_{yx}(x)\equiv\frac{(\Delta y/y)\times 100}{(\Delta x/x)\times 100}=\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{x}{y}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}\,\frac{x}{f(x)}\,.$$

No exemplo a seguir, aplicaremos este conceito a uma função demanda linear.

Exemplo 3.4
(a elasticidade-preço de uma função demanda linear)

Tomemos a função demanda do Exemplo 2.5 para valores economicamente relevantes, a saber:

$$q(p)=192-2p,\ \text{se}\ 0\leq p\leq 96\,.$$

A <u>elasticidade-preço da demanda</u> pode ser medida como a <u>elasticidade da função demanda no arco</u>. Lembrado que na função demanda a quantidade q faz o papel da variável y e o preço unitário p toma o lugar da variável x, podemos aplicar a fórmula (3.1) a esta função. Indicando pelo subscrito 1 os valores finais das variáveis e pelo subscrito 0 os seus valores iniciais, obtemos:

$$\widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0) = \frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q} = \left(\frac{q_1 - q_0}{p_1 - p_0}\right)\frac{p_0}{q_0}.$$

Desde que $q_1 = 192 - 2p_1$ e $q_0 = 192 - 2p_0$, segue que:

$$\widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0) = \left[\frac{192 - 2p_1 - (192 - 2p_0)}{p_1 - p_0}\right]\frac{p_0}{192 - 2p_0} = \left[\frac{-2(p_1 - p_0)}{p_1 - p_0}\right]\frac{p_0}{192 - 2p_0}$$
$$= \frac{-2p_0}{192 - 2p_0}.$$

Vamos interpretar esta expressão. Em $p_0 = 2$ a elasticidade-preço da demanda é $\widehat{\varepsilon}_{qp}(2) = \dfrac{-2 \times 20}{192 - 2 \times 20} \cong -0,26$. Isto significa que uma variação de 1% no preço a partir de $p_0 = 20$ geraria, aproximadamente, uma variação de 0,26%, no sentido contrário, da quantidade. Neste caso, dizemos que a demanda é <u>inelástica</u> com relação ao preço, pois 1% de variação no preço gerou menos do que 1% de variação em <u>módulo</u> (vide <u>função módulo</u> na p. 54 do manual Matemática I) na quantidade, ou seja, $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(2)\right| = 0,25 < 1$. De fato, para qualquer $0 < p_0 < 48$ teremos $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0)\right| < 1$.

Por sua vez, em $p_0 = 48$ a elasticidade-preço da demanda é $\widehat{\varepsilon}_{qp}(48) = \dfrac{-2 \times 48}{192 - 2 \times 48} = -1$. Isto significa que uma variação de 1% no preço a partir de $p_0 = 48$ geraria, aproximadamente, uma variação de 1%, no sentido contrário, da quantidade. Neste caso, dizemos que a demanda apresenta elasticidade-preço <u>unitária</u>, pois 1% de variação no preço geraria exatamente 1% de variação em módulo na quantidade, ou seja, $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(1)\right| = 1$.

Em $p_0 = 80$ a elasticidade-preço da demanda é $\widehat{\varepsilon}_{qp}(80) = \dfrac{-2 \times 80}{192 - 2 \times 80} = -5$.

Isto significa que uma variação de 1% no preço a partir de $p_0 = 80$ geraria, aproximadamente, uma variação de 5% da quantidade no sentido contrário. Neste caso, dizemos que a demanda é <u>elástica</u> com relação ao preço, pois 1% de variação no preço geraria mais do que 1% de variação em módulo na quantidade, ou seja, $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(80)\right| = 5 > 1$. De fato, para qualquer $48 < p_0 < 96$ teremos $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0)\right| > 1$.

Analisemos agora os pontos extremos. Comecemos com $p_0 = 0$. Neste ponto, a elasticidade-preço da demanda é $\widehat{\varepsilon}_{qp}(0) = \dfrac{-2\times 0}{192-2\times 0} = 0$. Isto significa que uma variação de 1% no preço a partir de $p_0 = 0$ afetaria de forma irrisória a quantidade. Neste caso, dizemos que a demanda é <u>perfeitamente inelástica</u> com relação ao preço, pois 1% de variação no preço não afetou a quantidade, ou seja, $\left|\widehat{\varepsilon}_{qp}(0)\right| = 0$.

Resta avaliar o ponto $p_0 = 96$. Não podemos inserir este valor de preço na fórmula $\widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0)$ associada à função demanda linear do presente exemplo, pois o seu denominador se anularia. Podemos, entretanto, usar o conceito de limite lateral. Com efeito, tomando o limite à esquerda da função demanda linear em análise no ponto $p_0 = 96$ resulta:

$$\lim_{p_0\to 96^-} \widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0) = \lim_{p_0\to 96^-}\left(\frac{-2p_0}{192-2p_0}\right) = \lim_{p_0\to 96^-} -2p_0 \times \lim_{p_0\to 96^-}\left(\frac{1}{192-2p_0}\right).$$

Desde que $(192-2p_0)\to 0^+$ quando $p_0 \to 96^-$, segue que:

$$\lim_{p_0\to 96^-}\left(\frac{1}{192-2p_0}\right) = \infty .$$

Portanto,

$$\lim_{p_0\to 96^-} \widehat{\varepsilon}_{qp}(p_0) = \lim_{p_0\to 96^-} -2p_0 \times \lim_{p_0\to 96^-}\left(\frac{1}{192-2p_0}\right) = -192\times\infty = -\infty .$$

Logo, podemos afirmar que, no ponto $p_0 = 96$, a elasticidade-preço da demanda é infinitamente elástica ou, alternativamente, <u>perfeitamente elástica</u>.

Os resultados acima são válidos para uma função demanda linear qualquer, a qual pode ser definida genericamente como:

(3.2)
$$q(p) = \begin{cases} \alpha - \beta p, \text{ se } 0 \le p \le \alpha/\beta, \\ 0, \text{ se } p > \alpha/\beta, \end{cases},$$

sendo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ constantes reais. Para fechar esta unidade vamos analisar melhor o significado econômico desta função, representada graficamente na Figura 3.1.

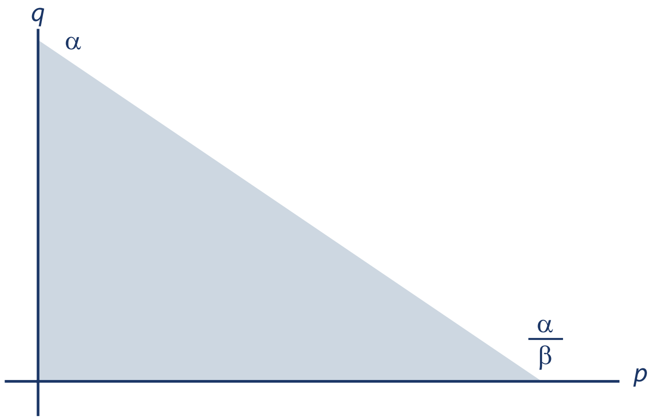


Figura 3.1: Função demanda linear geral

Para valores de preço entre 0 e α/β, ou seja, para preços no intervalo real semiaberto (Vide p. 23 do manual *Matemática I*) $[0,\alpha/\beta)$, aumentos de preço geram reduções da quantidade, ou seja, vale a lei da demanda. Neste intervalo, a função demanda é de fato linear, com coeficiente linear α e coeficiente angular $-\beta$ (vide p. 53-54 no manual *Matemática I*), enquanto para valores no intervalo real semiaberto $[\alpha/\beta,\infty)$ a função é constante.

Os coeficientes da parte linear têm interpretações econômicas importantes. Quando o bem é livre, ou seja, quando $p=0$, a quantidade máxima que seria consumida é α. Portanto, este coeficiente pode ser visto como um ponto de saciedade do mercado de um determinado bem. Quando o preço de mercado é igual ou superior a α/β, não há qualquer consumo do bem. Logo, α/β é o preço a partir do qual não haveria demanda pelo bem.

Aplicando a fórmula (3.1) à função demanda linear (3.2), obtemos:

$$\hat{\varepsilon}_{qp}(p_0)=\frac{\Delta q}{\Delta p}\frac{p}{q}=\left(\frac{q_1-q_0}{p_1-p_0}\right)\frac{p_0}{q_0}.$$

Desde que $q_1=\alpha-\beta p_1$ e $q_0=\alpha-\beta p_0$ para valores de preço positivos e menores do que α/β, segue que:

(3.3) $$\hat{\varepsilon}_{qp}(p_0)=\left[\frac{\alpha-\beta p_1-(\alpha-\beta p_0)}{p_1-p_0}\right]\frac{p_0}{\alpha-\beta p_0}=\frac{-\alpha p_0}{\alpha-\beta p_0}.$$

No exemplo 3.4, obtivemos a expressão da elasticidade-preço da demanda linear (3.3) tomando $\alpha=192$ e $\beta=2$ e considerando o domínio $D(q)=\{p\in\mathbb{R}\,|\,0\le p\le 96\}$.

Saiba Mais

Exposições mais detalhadas sobre demanda, elasticidade-preço da demanda, receita e custos são encontrados nos capítulos 15 (Demanda de Mercado) e 21 (Curvas de Custo), de Varian, H. ***Microeconomia: princípios básicos***. 7 ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

Resumo da unidade:

Nesta unidade, fez-se uma análise mais pormenorizada dos custos médios e da demanda de uma firma utilizando conceitos de *limites* e *continuidade* de uma função de uma variável real. Na primeira seção, apresentamos como as propriedades das funções custo fixo médio e custo variável médio determinam o formato em U da função custo médio. Na seção final, trabalhamos o importante conceito de *elasticidade-preço da demanda no arco*, fundamental para um bom entendimento da relação entre a receita total da firma e a demanda com a qual esta firma se depara.

Assista agora à vídeoaula correspondente a esta unidade.

Atividade de Aprendizagem – 3

1) Uma firma uniproduto tem uma estrutura de custos representada pela seguinte função custo total:

$$C(q) \quad \begin{cases} 15+\sqrt{q}, & \text{se } \ 0 \le q \le 9, \\ kq+q \quad , & \text{se } \ q > 9, \end{cases}$$

sendo k uma constante. Com relação a esta firma, pede-se:

a) Usando as propriedades do limite de função, avalie o comportamento do custo total quando a firma encontra-se produzindo um volume abaixo de 9 unidades de produto e expande sua produção paulatinamente em direção a este valor;

b) Usando as propriedades do limite de função, avalie o comportamento do custo total quando a firma encontra-se produzindo um volume acima de 9 unidades de produto e contrai sua produção paulatinamente em direção a este valor;

c) O valor da constante k tal que a função custo total torne-se contínua em $q = 9$. Justifique sua resposta com base nos resultados obtidos nos dois itens anteriores;

d) Considerando o valor da constante k determinada no item anterior, as funções custo fixo e custo variável da firma.

2) Uma firma uniproduto formadora de preço depara-se com uma função de demanda inversa dada por: $p = 24 - 4q$,

sendo p o preço unitário do seu produto e $q > 0$ a quantidade vendida (igual à produzida). Esta firma apresenta uma função custo total dada por:

$$C(q) = \begin{cases} 15 + q, & \text{se } 0 \le q \le 5, \\ kq + 3q^2 \;, & \text{se } q > 5, \end{cases}$$

sendo k uma constante. Com relação a esta firma pede-se:

a) Usando as propriedades do limite de função, avalie o comportamento do custo total quando a firma encontra-se produzindo um volume abaixo de 5 unidades de produto e expande sua produção paulatinamente em direção a este valor;

b) Usando as propriedades do limite de função, avalie o comportamento do custo total quando a firma encontra-se produzindo um volume acima de 5 unidades de produto e contrai sua produção paulatinamente em direção a este valor;

c) Qual o valor da constante k tal que a função custo total torne-se contínua em $q = 5$. Justifique sua resposta com base nos resultados obtidos nos dois itens anteriores;

d) Determine o(s) ponto(s) de ***breakeven*** desta firma;

e) Determine a elasticidade-preço da demanda no(s) ponto(s) de ***breakeven***. Interprete economicamente o(s) valor(es) obtido(s).

3) Com base no Exemplo 3.4, faça a análise das elasticidades-preço da demanda da função demanda linear (3.2).

4

APLICAÇÕES DE DERIVADA: ANÁLISE MARGINAL E MAXIMIZAÇÃO DE LUCRO DE UMA FIRMA UNIPRODUTO

Apresentaremos como o conceito de derivada é utilizado para caracterizar certas propriedades da estrutura de custos de uma firma, para ligar a demanda por um bem com a receita de venda obtida pela firma produtora deste e para estabelecer as condições sob as quais há maximização de lucro de uma firma uniproduto. Ao longo da exposição, quando um termo econômico for utilizado, este aparecerá sublinhado e seguir-se-á uma explicação mais precisa possível do seu significado. Os conceitos matemáticos também aparecerão sublinhados, seguidos por uma indicação entre parênteses das páginas onde se encontrarão explicações desses conceitos no manual Matemática I de Guerra e Taneja (2009).

O conceito de variação marginal em economia corresponde aos conceitos de taxa média de variação (vide p. 95 do manual *Matemática I*) quando as variáveis econômicas envolvidas são discretas e de taxa instantânea de variação, ou seja, derivada (vide p. 98 do manual *Matemática I*) quando as variáveis envolvidas são contínuas (perfeitamente divisíveis).

4.1. RELAÇÃO ENTRE CUSTO MARGINAL E CUSTO MÉDIO

Em termos econômicos, o custo marginal (CMg) é a variação no custo total resultante do acréscimo unitário na quantidade produzida, ou seja, é o custo de produção de uma unidade adicional de produto. Por exemplo, se em um determinado nível de produção o custo marginal é $CMg = 4$ reais, então o aumento da produção em uma unidade levaria a um aumento de 4 reais no custo total.

Agora, veja um exemplo de como este conceito econômico pode ser expresso em termos do conceito matemático de derivada.

Exemplo 4.1 (relação entre os conceitos de custo marginal e de derivada)

Considere uma firma uniproduto que produz uma quantidade q de um produto perfeitamente divisível em um dado período de produção, cuja função custo total é dada por:

$$C(q) = q^2 + 3, \text{ para todo } q \geq 0.$$

A taxa média de variação do custo total com relação à quantidade produzida dessa função é:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta C}{\Delta q} &= \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q} \\ &= \frac{(q+\Delta q)^2 + 3 - (q^2+3)}{\Delta q} \\ &= \frac{q^2 + 2q\Delta q + (\Delta q)^2 + 3 - q^2 - 3}{\Delta q} \\ &= 2q + \Delta q.\end{aligned}$$

Para, digamos, $q = 2$ e $\Delta q = 2$, esta taxa é $\frac{\Delta C}{\Delta q} = 2 \times 2 + 2 = 6$, indicando que, em média, cada uma das duas unidades de produto geradas adicionalmente elevou o custo total em aproximadamente seis unidades monetárias.

Usando a definição de derivada de uma função, a derivada do custo total com relação à quantidade produzida, ou seja, a taxa instantânea do custo total com relação à quantidade produzida é:

$$CMg(q) = C'(q \equiv \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \to 0} (2q + \Delta q) = 2q.$$

A derivada do custo total com relação à quantidade produzida é conhecida como <u>custo marginal</u>.

Vamos analisar o significado geométrico do custo marginal (vide <u>interpretação geométrica da derivada</u> nas p. 100-101 do manual *Matemática I*). Tomemos $q = 2$ unidades de produto, cujo custo total de produção é $C(2) = 2^2 + 3 = 7$ reais. Esta combinação de produção e custo total é representada pelo ponto $P(2,7)$ no plano cartesiano da Figura 4.1. Suponhamos que a firma em questão planeje realizar um <u>incremento</u> (vide p. 93 do manual *Matemática I*) na produção de Δq unidades de produto, de maneira que o outro nível de produção será $3 + \Delta q$ unidades de produto. Esta nova combinação de produção e custo total é representada pelo ponto $Q\left(2+\Delta q, (2+\Delta q)^2 + 3\right)$. Na Figura 4.1, apresentamos o caso no qual $\Delta q = 2$ e, portanto, $Q(4,19)$. A reta que cruza a função custo total nos pontos P e Q é denominada <u>reta secante</u> (vide p. 100 do manual *Matemática I*) à curva $C(q)$.

Note que esta reta secante forma um triângulo retângulo com catetos Δq e ΔC e hipotenusa $\overline{PQ}$. O ângulo oposto ao cateto ΔC, denotado por α, é formado pela reta secante à curva de custo total e o eixo das abscissas. Assim, do ponto de vista geométrico, podemos afirmar que a taxa média de variação $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ é a tangente do ângulo α, ou seja, $\frac{\Delta C}{\Delta q} = tg\ \alpha$.

Observe que, quando o incremento Δq torna-se cada vez menor, ou seja, tende a zero, o ponto Q aproxima-se paulatinamente do ponto P e a reta secante tende à reta tangente (vide p. 101 do manual *Matemática I*) à curva de custo total no nível de produção . Dessa maneira, $\frac{\Delta C}{\Delta q} = tg\ \alpha$ tende a igualar-se à taxa instantânea $C'(q) = tg\ \beta$, sendo β o ângulo formado pela reta tangente à curva $C(q)$ e o eixo das abscissas.

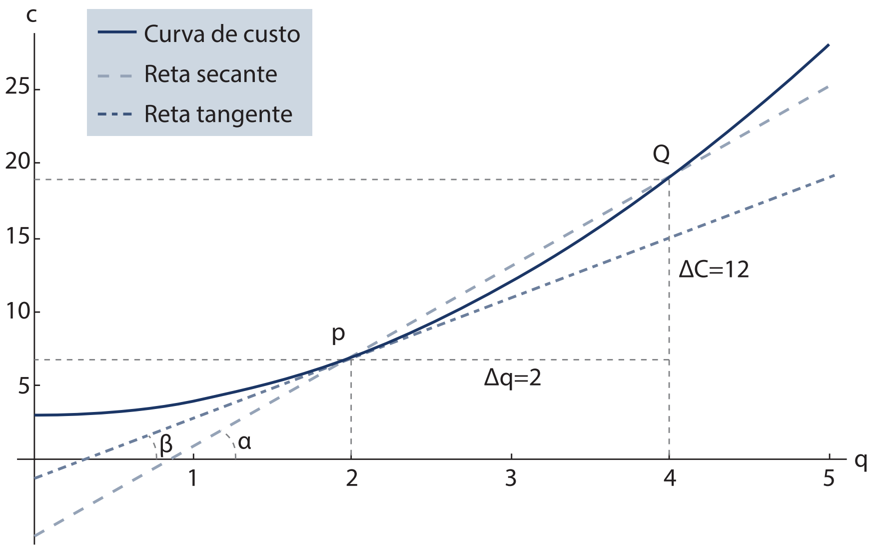


Figura 4.1. Interpretação geométrica do custo marginal

A ilustração feita anteriormente com uma função custo total específica pode ser prontamente generalizada. Considerando a função custo total derivável (vide p. 98 do manual *Matemática I*), o custo marginal pode ser visto como a taxa instantânea de variação da função custo total, isto é, a função custo marginal pode ser definida como o limite da taxa média de variação do custo total $\frac{\Delta C}{\Delta q}$ quando a variação da produção torna-se arbitrariamente pequena, isto é, a taxa instantânea de variação da função custo total:

$$(4.1) \qquad CMg(q) \equiv \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q} = C'(q),$$

se este limite existir.

No Exemplo 4.1, com fins didáticos, deduzimos o custo marginal como a derivada do custo total com respeito à quantidade produzida usando a definição de derivada na p. 98 do manual Matemática I. Poderíamos ter chegado ao mesmo resultado mais dire*tamente usa*ndo as regras de derivação (vide p. 101-104 do manual Matemática I). Por exemplo, usando as regras da derivada da função *soma, da fun*ção potência e da função constante, podemos obter diretamente a função custo marginal $CMg(q) = 2q$ derivando a função custo total $C(q) = q^2 + 8$ com relação à quantidade.

Portanto, além de saber os significados, econômico e geométrico, de uma derivada, é importante memorizar e saber operar as regras básicas de derivação. Isto irá facilitar tremendamente o estudo das teorias: microeconômica e macroeconômica.

Passemos à análise da relação entre a função custo marginal e a função custo médio. Inicialmente, é importante frisar que a taxa média de variação do custo total, $\frac{\Delta C}{\Delta q}$, é diferente do custo médio, $CMe(q) = \frac{C(q)}{q}$. Portanto, o custo marginal, por ser uma aproximação da taxa média de variação do custo total, é um conceito distinto do conceito de custo médio. Todavia, embora sejam conceitos distintos, há uma relação importante entre eles, que ilustramos com o exemplo adiante.

Exemplo 4.2 (a relação entre custo marginal e custo médio — uma aplicação da regra da derivada da função quociente)

Considere a função custo total proposta no Exemplo 2.3:

$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98$, para todo $q \geq 0$.

Desta, obtemos a seguinte função custo médio:

$CMe(q) = q^2 - 12q + 60 + \frac{98}{q}$, para todo $q > 0$.

Aplicando as regras de derivação à função custo total, obtemos a seguinte função custo marginal:

$$CMg(q) = 3q^2 - 24q + 60 \text{ para todo } q \geq 0\,.$$

As duas últimas funções estão grafadas no mesmo plano cartesiano na Figura 4.2.

Note que os custos médio e marginal são iguais em $q = 7$ unidades de produto, mais precisamente $CMe(7) = CMg(7) = 39$ unidades monetárias. Para valores do nível de produção menores que 7, o custo marginal é menor do que o custo médio e, consequentemente, este último cai com a expansão da produção. Por exemplo, em $q = 6$ o custo marginal é $CMg(6) = 3q^2 - 24q + 60 = 24$ unidades monetárias; isto indica que a variação da produção de 6 para 7 unidades aumentará o custo total em aproximadamente 24 unidades monetárias. Como as 6 primeiras unidades custam em média $CMe(6) = 6^2 - 12 \times 6 + 60 + \dfrac{98}{6} \cong 40{,}33$ unidades monetárias, a produção da sétima unidade de produto fará diminuir o custo por unidade de produto, já que, para produzi-la, o custo será menor que 40,33 unidades monetárias. O oposto ocorre para níveis de produção acima de 7 unidades, ou seja, para tais valores do nível de produção, o custo marginal é maior do que o custo médio e, por isso, o custo por unidade de produto aumenta com a expansão da produção.

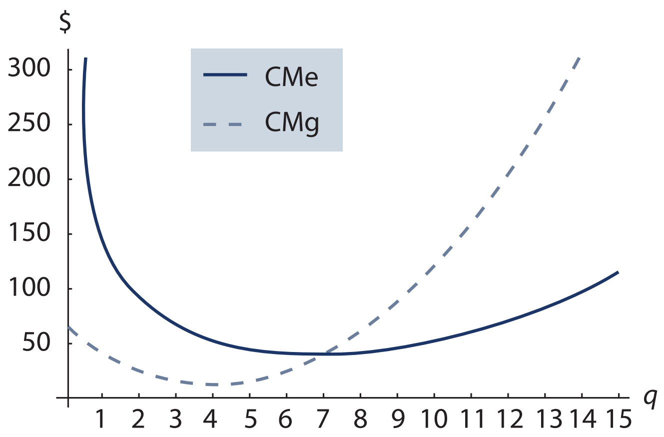


Figura 4.2. Funções custo médio e marginal do Exemplo 4.2

A relação entre o custo médio e o custo marginal ilustrada no exemplo anterior pode ser generalizada com o auxílio da regra da derivada da função quociente (vide p. 103 do manual *Matemática I*). Com efeito, considere a função custo médio definida em (2.6) na Unidade 2, cuja fórmula será reapresentada aqui por conveniência:

(2.6) $$CMe(q) = \frac{C(q)}{q}, \text{ para todo } q > 0.$$

Esta função pode ser vista como o quociente de duas funções, a saber, $C(q)$ e q.

Suponhamos que o produto da firma seja um bem perfeitamente divisível e que a função custo total seja derivável para todo $q > 0$. Logo, aplicando a regra da derivada da função quociente à função custo médio:

$$CMe'(q) = \frac{C'(q)q - C(q)\times 1}{q^2}, \text{ para todo } q > 0.$$

Manipulando algebricamente a expressão anterior, chegamos a:

$$CMe'(q) = \frac{1}{q}\left[C'(q) - \frac{C(q)}{q}\right] = \frac{1}{q}\left[CMg(q) - CMe(q)\right], \text{ para todo } q > 0.$$

A partir desta última expressão e com base no Teorema 4.1, à p. 125 do manual *Matemática I*, podemos extrair os seguintes resultados para qualquer $q > 0$:

» Se $CMg(q) < CMe(q)$, então $CMe'(q) = \frac{1}{q}\left[CMg(q) - CMe(q)\right] < 0$ e, portanto, a função $CMe(q)$ será decrescente em q;

» Se $CMg(q) = CMe(q)$, então $CMe'(q) = \frac{1}{q}\left[CMg(q) - CMe(q)\right] = 0$ e, portanto, a função $CMe(q)$ atingirá seu valor mínimo (vide p. 123-124 do manual *Matemática I*);

» Se $CMg(q) > CMe(q)$, então $CMe'(q) = \frac{1}{q}\left[CMg(q) - CMe(q)\right] > 0$ e, portanto, a função custo médio será crescente em q.

Em suma, no ponto em que a função custo marginal cruza a função custo médio, esta última atinge seu menor valor. Se o custo marginal é estritamente menor (maior) do que o custo médio, segue que este último está diminuindo (crescendo). Nas disciplinas de Microeconomia, essa relação será muito importante.

4.2. A ELASTICIDADE-PREÇO DA DEMANDA NO PONTO

Na seção 3.2, definimos a elasticidade de uma função f no arco, cuja fórmula (3.1) repetimos aqui por conveniência:

(3.1) $$\widehat{\varepsilon}_{yx}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; \frac{x}{f(x)}.$$

Tomando o limite desta expressão quando Δx torna-se arbitrariamente pequeno:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \widehat{\varepsilon}_{yx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \; \frac{x}{f(x)} \right].$$

Lembrando que o limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites dessas funções (vide propriedade P6 na p. 74 do manual *Matemática I*), o limite anterior transforma-se em:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \quad {}_{yx}(\;\;) = \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x} \right] \times \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{f(x)} \right].$$

Como é o incremento Δx que está tendendo a zero, o ponto x permanece constante e, portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \lim_{\Delta x \to 0} 1 = \frac{x}{f(x)}.$$

Além disso, se a função f é derivável, segue que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

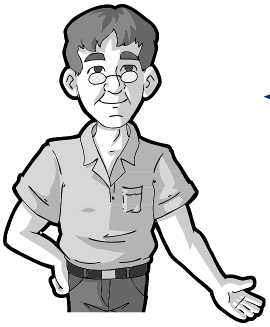
Considerando estes dois últimos limites, podemos afirmar que existe o limite da elasticidade da função f no arco quando Δx torna-se arbitrariamente pequeno, sendo dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \widehat{\varepsilon}_{yx}(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}.$$

Enfim, podemos definir a elasticidade da função *f* no ponto *x* como este limite, ou seja,

(4.1) $$\varepsilon_{yx}(x) \equiv f'(x) \; \frac{x}{f(x)}.$$

Em suma, assim como a derivada $f'(x)$ é uma aproximação da taxa média de variação $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ para pequenos incrementos Δx, a elasticidade no ponto $\varepsilon_{yx}(x)$ é uma aproximação da elasticidade no arco $\widehat{\varepsilon}_{yx}(x)$ para pequenos incrementos Δx. A elasticidade no ponto é extremamente usada, tanto teórica como empiricamente; por isso, é muito importante estudar e entender este conceito quantitativo.



Agora vamos analisar a elasticidade-preço de algumas funções demanda.

Exemplo 4.3 (elasticidade-preço da demanda de funções não lineares)

Para fixar ideias, façamos a análise da elasticidade-preço da seguinte função demanda:

$$q(p) = \frac{40}{p+1}, \text{ para todo } p \geq 0.$$

Aplicando a fórmula (4.2) a esta função demanda, obtemos a elasticidade-preço da demanda em um p qualquer:

> Lembrando que $q(p) = \dfrac{40}{p+1} = 40(p+1)^{-1}$, a derivada $q'(p) = -\dfrac{40}{(p+1)^2}$ foi calculada usando a regra da derivada da função potência e a regra da cadeia, conforme p. 102 e 107 do manual de Matemática I.

$$\varepsilon_{qp} = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \left[-\frac{40}{(p+1)^2}\right]\frac{p}{40/(p+1)} = -\frac{p}{p+1}.$$

Em particular, em $P = 3$:

$$\varepsilon_{qp}(3) = -\frac{3}{3+1} = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Portanto, neste ponto, a demanda é inelástica em relação ao preço. Em outras palavras, uma variação de 1% no preço leva a uma variação aproximada de 0,75% na quantidade no sentido contrário a variação do preço.

Consideremos mais um exemplo de função demanda, a saber:

$$q(p) = \frac{10}{p}, \text{ para todo } p > 0.$$

Para tal função a elasticidade-preço da demanda é:

> Lembrando que $q(p) = \frac{10}{p} = 10p^{-1}$, a derivada $q'(p) = -\frac{10}{p^2}$ foi calculada usando a regra da derivada da função potência.

$$\varepsilon_{qp}(p) = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \left(-\frac{10}{p^2}\right)\frac{p}{10/p} = -1,$$

para qualquer $p > 0$. Ou seja, tal função demanda apresenta uma elasticidade-preço constante e unitária. Em outros termos, uma variação de 1% no preço leva a uma variação aproximada de 1% na quantidade no sentido contrário à variação do preço.

4.3. MAXIMIZAÇÃO DE LUCRO

> Vamos começar esta última seção da Unidade 4 com uma ilustração numérica de um problema de escolha do nível de produção maximizador de lucro.

Exemplo 4.4 (maximização de lucro no curto prazo de uma firma uniproduto, tomadora de preço e que produz um bem discreto)

Considere uma firma uniproduto e tomadora de preço que se depara com um preço de mercado do seu produto igual a 6 unidades monetárias. Esta firma incorre em um custo fixo de $CF = 5$ unidades monetárias e sua função custo variável é quadrática, mais especificamente, $CV(q) = q^2$.

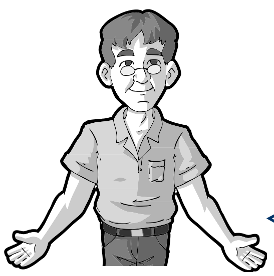
Suponhamos que a firma só possa produzir quantidades inteiras. Na Tabela 4.1 adiante temos a receita total (R) e o custo total (C) para sete níveis de produção possíveis, $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. O lucro total (L) é, por definição, a diferença entre a receita total e o custo total. Observando os dados da referida tabela, concluímos trivialmente que o nível de produção maximizador de lucro é $q = 3$ unidades de produto, sendo o lucro máximo igual a 4 unidades monetárias.

Tabela 4.1. Maximização de lucro no curto prazo de uma firma tomadora de preço

Q	R	C	L=R-C	RMG	CMG
0	0	5	-5	-	-
1	6	6	0	6	1
2	12	9	3	6	3
3	18	14	4	6	5
4	24	21	3	6	7
5	30	30	0	6	9
6	36	41	-5	6	11

Vejamos como podemos chegar a mesma conclusão, analisando o comportamento da receita marginal (RMg) e do custo marginal (CMg). Como a produção só pode variar em unidades inteiras, a receita marginal é obtida tomando-se o valor da receita total em uma linha e diminuindo do respectivo valor da linha antecedente. Como já explicado na seção 4.2, a receita marginal de uma firma tomadora de preço é igual ao preço unitário de mercado. Analogamente, o custo marginal é calculado tomando-se o valor do custo total em uma linha e diminuindo do respectivo valor da linha anterior.

Agora consideremos a decisão da firma de produzir ou não a primeira unidade de produto. De $q=0$ para $q=1$, a receita marginal da firma é 6 unidades monetárias, ou seja, a receita total aumenta 6 unidades monetárias. Por outro lado, o custo total aumenta 1 unidade monetária, que é o custo marginal. Como o benefício na margem (que é, neste caso, a receita marginal) supera o custo na margem (que é o custo marginal), para a firma é vantajoso produzir a primeira unidade do produto. Esta diferença entre a receita marginal e o custo marginal é o <u>lucro marginal</u>, ou seja, $LMg = RMg - CMg$, que indica o benefício líquido de expandir a produção em uma unidade. Consideremos a decisão da firma de produzir a segunda unidade de produto. De $q=1$ para $q=2$, a receita total novamente aumenta 6 unidades monetárias, o que nada mais é do que sua receita marginal. Por outro lado, o custo total aumenta 3 unidades monetárias, que é o custo marginal. Como o benefício na margem supera o custo na margem, isto é, desde que $LMg = 3$ unidades monetárias, para a firma, também é vantajoso produzir a segunda unidade do produto. Por um raciocínio análogo, podemos concluir que vale a pena para a firma produzir a terceira unidade de produto, embora a partir daí não seja mais vantajoso aumentar a produção, pois o lucro marginal torna-se negativo.



Vamos agora relaxar a premissa do exemplo anterior, de que o bem produzido é discreto, ou seja, vamos supor que o bem produzido seja perfeitamente divisível.

Exemplo 4.5 (maximização de lucro no curto prazo de uma firma uniproduto, tomadora de preço e que produz um bem perfeitamente divisível)

Suponhamos que a quantidade produzida q pode assumir qualquer valor real positivo. Por definição, $L(q) = R(q) - C(q)$ é o lucro total. Como $R(q) = 6q$ é a função receita total e $C(q) = q^2 + 5$ é a função custo total, então a firma resolve o seguinte problema de maximização de lucro:

$$\max_{q \geq 0} L(q) = \max_{q \geq 0} 6q - (q^2 + 5),$$

Primeiramente, vamos buscar um máximo local no intervalo aberto $(0, \infty)$. Logo, considerando a condição estabelecida na Definição 4.9 na p. 125 do manual *Matemática I*, que costuma ser denominada condição de primeira ordem (CPO), temos para $q > 0$:

$$L'(q) = 6 - 2q = 0 \Rightarrow q = 3 \text{ unidades de produto.}$$

Observe que a derivada $L'(q)$ da função lucro total é o lucro marginal. Portanto, a condição matemática $f'(x) = 0$ em Matemática, transforma-se em Microeconomia na condição de que o benefício líquido na margem deva ser nulo. Cabe ainda salientar que o lucro marginal é a diferença entre a receita marginal $RMg(q) = 6$, e o custo marginal $CMg(q) = 2q$. Assim, a condição de que o lucro marginal deve ser nulo no nível de produção maximizador de lucro, transforma-se na famosa condição necessária equivalente, a saber, de que a receita marginal deve ser igual ao custo marginal.

Cabe finalmente nos certificarmos de que a quantidade $q = 3$ é de fato a escolha ótima. Considerando o teste da segunda derivada para extremos relativos na p. 127 do manual *Matemática I*, que costuma ser denominada condição de segunda ordem (CSO) em Economia, temos para $q > 0$:

$$L''(q) = -2 < 0.$$

Logo, $L(3) = 4$ unidades monetárias é um máximo local no intervalo $(0, \infty)$.

Se a firma não produzisse, seu lucro seria $L(0) = -5$ unidades monetárias, ou seja, o negativo do custo fixo. Portanto, desde que $L(3) = 4 > -5 = L(0)$ a firma alcança, de fato, seu lucro máximo em $q = 3$.

Vamos ver mais um exemplo de maximização de lucro de uma firma uniproduto perfeitamente competitiva.

Exemplo 4.6 (maximização de lucro no curto prazo de uma firma uniproduto, tomadora de preço, que produz um bem perfeitamente divisível e com estrutura de custo cúbica)

Supondo que uma firma toma o preço unitário do bem que produz como dado (exógeno) em um nível $p = 60$ unidades monetárias, a função receita total da firma será:

$$R(q) = 60q\,,$$

analisada no Exemplo 2.4.

A estrutura de custos da firma é representada pela função custo total de curto-prazo do Exemplo 2.3:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98 \text{ para todo } q \geq 0\,.$$

Portanto, a função lucro total da firma é:

$$L(q) = -q^3 + 12q^2 + 98\,,$$

analisada no Exemplo 2.6.

Para $q \in (0,\infty)$ a CPO para maximização de lucro rende:

$$L'(q) = -3q^2 + 24q = 0 \Rightarrow q = 8\,.$$

Devemos, portanto, analisar se produzir 8 unidades é de fato uma escolha maximizadora de lucro caso a firma decida entrar em operação. Como de praxe, faremos isso usando o teste da segunda derivada para extremos relativos (vide p. 127 do manual *Matemática I*). A CSO para o problema em análise é dada por:

$$L''(q) = -6q + 24 \Rightarrow L''(8) = -6 \times 8 + 24 = -24 < 0$$

Logo, a escolha $q = 8$ no intervalo $(0,+\infty)$ é de fato maximizadora de lucro. O máximo local $L(8)$ deve ser comparado com o lucro de não produzir $L(0) = -98$.

A firma não fechará se $L(8) > L(0)$. Temos que $L(8) = 158 > -98 = L(0)$. Assim, a decisão ótima da firma é, de fato, produzir $q = 8$ unidades de produto.

Em síntese, como se observa na Figura 4.3, no ponto de maximização de lucro, a função custo marginal cruza a função receita marginal de baixo para cima. Graficamente, o custo total corresponde à área do retângulo cuja base mede 8 e a altura mede $CMe(8) = 40,25$, ou seja, $C(8) = 8 \times 40 = 320$. A receita total corresponde à área do retângulo cuja base mede 8 e a altura mede 60, ou seja, $R(8) = 8 \times 60 = 480$. Finalmente, o lucro total é, simplesmente, a diferença destas duas áreas, que corresponde ao retângulo cuja base mede 8 e a altura mede $60 - 40,25 = 19,75$, ou seja, $L(8) = 8 \times 19,75 = 158$.

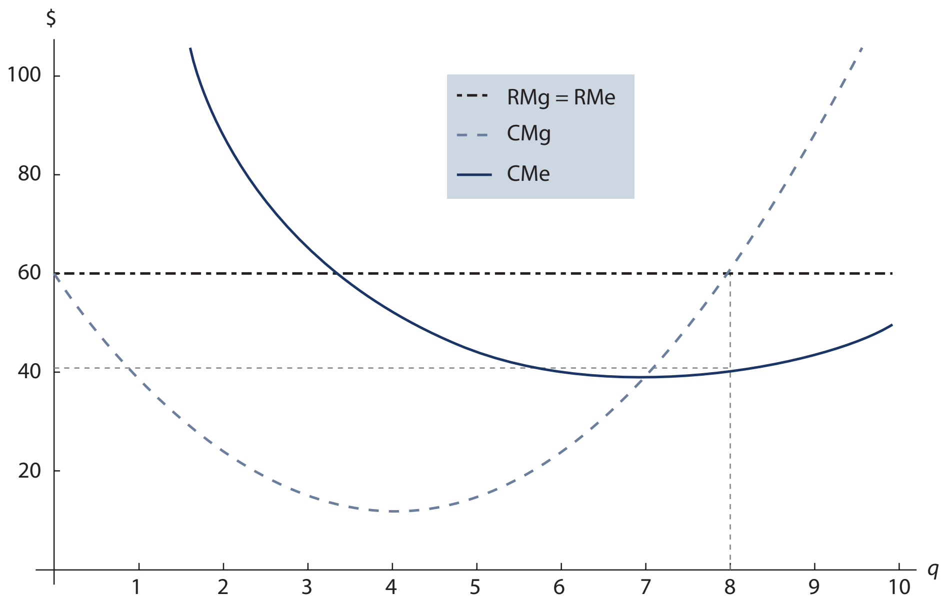


Figura 4.3. Equilíbrio de curto prazo de uma firma perfeitamente competitiva

> Vamos fechar esta unidade aplicando a análise marginal ao problema de maximização de lucro de uma firma monopolista.

Exemplo 4.7 (maximização de lucro no curto prazo de uma firma monopolista uniproduto, que produz um bem perfeitamente divisível e se depara com uma função demanda linear)

Considere uma firma monopolista que se depara com a seguinte função demanda inversa:

$$p(q) = 96 - 0,5q, \text{ para todo } 0 \leq q \leq 192,$$

analisada no exemplo 2.5.

Esta função demanda inversa gera a seguinte função receita total:

$$R(q) = 96q - 0,5q^2, \text{ para todo } 0 \leq q \leq 192,$$

também analisada no Exemplo 2.5.

A estrutura de custos da firma é representada pela função custo total de curto prazo do Exemplo 2.3:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98 \text{ para todo } q \geq 0.$$

Portanto, a função lucro total da firma é obtida subtraindo da receita total o custo total:

$$L(q) = -q^3 + 11,5q^2 + 36q - 98, \text{ para todo } 0 \leq q \leq 192,$$

analisada no Exemplo 2.6.

Para $q \in (0,\infty)$ a CPO para maximização de lucro rende:

$$L'(q) = -3q^2 + 23q + 36 = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau, obtemos $q = -4/3$ e $q = 9$. Somente o último valor é economicamente relevante.

Devemos, portanto, analisar se produzir 9 unidades é de fato o plano de produção maximizador de lucro caso a firma decida produzir. Como de praxe, faremos isso usando o teste da segunda derivada para extremos relativos. A CSO para o problema em análise é dada por:

$$L''(q) = -6q + 23 \Rightarrow L''(9) = -6 \times 9 + 23 = -31 < 0.$$

Logo, a escolha $q = 9$ no intervalo $(0,\infty)$ é de fato maximizadora de lucro. O máximo local $L(9)$ deve ser comparado com o lucro de não produzir $L(0) = -98$. A firma não fechará se $L(9) > L(0)$. Temos que $L(9) = 428,5 > -98 = L(0)$. Assim, a decisão ótima da firma é, de fato, produzir $q = 9$ unidades de produto.

Em síntese, como se observa na Figura 4.4, no ponto de maximização de lucro a função custo marginal cruza a função receita marginal (que é a função demanda inversa) de baixo para cima. Graficamente, o custo total corresponde à área do retângulo cuja base mede 9 e a altura mede $CMe(9) = 395/9 \cong 43,9$, ou seja, $C(9) = 8 \times \dfrac{395}{9} \cong 351,11$. A receita total corresponde à área do retângulo cuja base mede 9 e a altura mede $RMe(9) = p(9) = 96 - 0,5 \times 9 = 91,5$, ou seja, $R(8) = 91,5 \times 9 = 823,5$. Finalmente, o lucro total é, simplesmente, a diferença destas duas áreas, que corresponde ao retângulo cuja base mede 9 e a altura mede $91,5 - \frac{395}{9} \cong 47,6$, ou seja, $L(8) = 9 \times 47,6 = 428,5$.

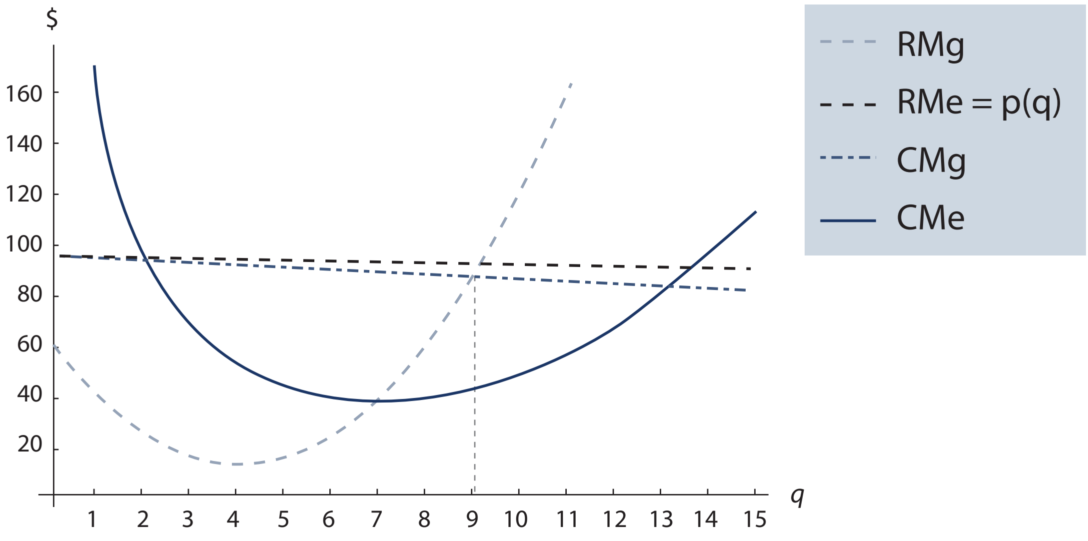


Figura 4.4. Equilíbrio de curto prazo de uma firma monopolista

Como se pode observar, os problemas de maximização de lucro de uma firma tomadora de preço e de uma firma formadora de preço têm a mesma estrutura matemática. Todavia, há uma diferença em termos econômicos, relacionada à curva de demanda, que se reflete na curva de receita marginal. Para uma firma tomadora de preços, esta é uma função constante; para uma firma formadora de preços é uma função decrescente e sempre abaixo da função receita média ou equivalentemente da função demanda inversa.

Saiba Mais !

Exposições mais detalhadas sobre a maximização de lucro de firmas perfeitamente competitivas e monopolistas são encontradas nos capítulos 19 (Maximização de Lucro) e 24 (Monopólio) de Varian, H. Microeconomia: princípios básicos. 7 ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

Resumo da unidade:

Nesta unidade, trabalhamos com o conceito de derivada e as principais regras operatórias de derivação de uma função de uma variável real. Na primeira seção, usamos este conceito matemático para definir o conceito econômico de *custo marginal*, bem como para analisar a relação entre este e o custo médio. Na segunda seção, definimos o conceito de *elasticidade-preço da demanda no ponto* a partir do conceito de *elasticidade-preço da demanda no arco*. Na última seção, mostramos como utilizar a derivada para resolver problemas de maximização de lucro de firmas produtoras de um único tipo de produto.

Assista agora à videoaula correspondente a esta unidade.

Atividade de Aprendizagem – Unidade IV

1) Considere uma firma que apresenta a função custo total $C(q) = 10 + \ln\left(2q + \frac{1}{2}\right)$ sendo $q \geq 0$ a quantidade produzida pela firma por período de produção. Pede-se:

   a) A função custo marginal e sua interpretação econômica;

   b) A função custo médio da firma.

2) Considere uma firma que apresenta a seguinte função custo total:

$$C(q) = \frac{3e^{4q}}{2},$$

sendo $q \geq 0$ a quantidade produzida pela firma por período de produção. Pede-se:

   a) A função custo fixo da firma e sua interpretação econômica;

   b) A função custo marginal da firma e sua interpretação econômica.

3) Usando a mesma estratégia de argumentação utilizada após o Exemplo 4.2 e a regra da derivada da função produto (vide p. 103 do manual *Matemática I*), demonstre que uma firma com poder de mercado que se depara com uma função demanda inversa qualquer $p(q)$ derivável, com $p'(q) < 0$ para todo $q \geq 0$, apresenta uma função receita marginal sempre abaixo da função demanda inversa no plano cartesiano, ou seja, $RMg(q) < RMe(q)$ para todo $q > 0$.

4) Considere a função demanda inversa trabalhada no Exemplo 3.4:

$$q(p) = 192 - 2p, \text{ se } 0 \leq p \leq 96,$$

sendo q a quantidade vendida e p o preço unitário do produto. Pede-se:

a) A elasticidade-preço da demanda em um ponto qualquer. Esta é igual a ou diferente da elasticidade-preço da demanda no arco? Por quê?

b) A elasticidade-preço da demanda no ponto $p = 10$ unidades monetárias, bem como sua interpretação econômica;

c) Considere uma firma que se depara com a função demanda acima e que decida reduzir o preço de $p = 10$ unidades monetárias para $p = 9$ unidades monetárias. Qual é o impacto dessa redução de preço sobre a receita total da firma?

d) Considere uma firma que se depara com a função demanda acima e que decida aumentar o preço de $p = 10$ unidades monetárias para $p = 11$ unidades monetárias. Qual é o impacto desse aumento de preço sobre a receita total da firma?

e) A elasticidade-preço da demanda no ponto $p = 70$ unidades monetárias, bem como sua interpretação econômica;

f) Considere uma firma que se depara com a função demanda acima e que decida diminuir o preço de $p = 70$ unidades monetárias para $p = 63$ unidades monetárias. Qual é o impacto desse aumento de preço sobre a receita total da firma?

g) Considere uma firma que se depara com a função demanda acima e que decida aumentar o preço de $p = 70$ unidades monetárias para $p = 77$ unidades monetárias. Qual é o impacto desse aumento de preço sobre a receita total da firma?

h) Com base no conceito de elasticidade-preço da demanda e nos cálculos efetuados nos itens anteriores, explique por que a direção (para cima ou para baixo) de ajustamento de preço de uma firma formadora de preço que busca melhorar sua receita total depende da posição na curva de demanda em que ela opera.

5) Uma firma perfeitamente competitiva e maximizadora de lucro defronta-se com um preço unitário de mercado pelo seu produto igual a 134 unidades monetárias.

Esta firma apresenta um custo fixo de 500 unidades monetárias e seu custo variável é dado pela função:

$$CV(q) = 20q + q^2,$$

sendo q a quantidade produzida e vendida pela firma.

O governo cobra desta firma tomadora de preço um imposto de 4 unidades monetárias por unidade produzida. Determine:

a) As funções receita total e custo total da firma;

b) O nível de produção maximizador de lucro e o lucro máximo da firma.

6) Uma firma monopolista maximizadora de lucro defronta-se com uma função de demanda inversa:

$$p = 200 - 3q\ ,$$

na qual p é o preço unitário de mercado e q a quantidade transacionada no mercado (igual à quantidade produzida pelo monopolista). Esta firma apresenta um custo fixo de 500 unidades monetárias e seu custo variável é dado pela função:

$$CV(q) = 20q + q^2\ .$$

O governo cobra deste monopolista um imposto de 4 unidades monetárias por unidade produzida. Determine:

a) As funções receita total e custo total da firma;

b) O nível de produção maximizador de lucro e o lucro máximo da firma;

c) Se a firma em análise produz em um ponto elástico, com elasticidade unitária, ou inelástico da função demanda. Justifique formalmente sua resposta.

5

APLICAÇÕES DE INTEGRAL: A RELAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MARGINAIS E TOTAIS DE UMA FIRMA UNIPRODUTO

Veremos como partir do custo e receita marginais e chegar ao custo e receita totais, respectivamente, usando a integral indefinida. Ademais, usando o conceito de integral definida e o teorema fundamental do cálculo, vamos analisar o problema de maximização de um monopolista que pode discriminar preços perfeitamente. Ao longo da exposição, quando um termo econômico for utilizado, este aparecerá sublinhado e seguir-se-á uma explicação mais precisa possível do seu significado. Os conceitos matemáticos também aparecerão sublinhados, seguidos por uma indicação entre parênteses das páginas onde serão encontradas as explicações desses conceitos no manual *Matemática I*, de Guerra e Taneja (2009).

5.1. DA FUNÇÃO MARGINAL PARA A FUNÇÃO TOTAL

Assim como o conceito econômico de variação na margem ou marginal encontra na derivada uma forma de expressão formal, o conceito de funções (custo, receita, lucro, etc.) totais encontra no conceito matemático de integral indefinida (vide p. 144 do manual *Matemática I*) a mesma possibilidade de expressão formal.

Em outros termos, a relação entre funções marginais e respectivas funções totais não é uma via de mão única.

> Na Unidade 4, vimos como obter a função marginal a partir de uma função total dada; agora, veremos exemplos de como sair de uma função marginal e chegar a uma função total associada.

Exemplo 5.1 (das funções custo marginal e fixo para a função custo total de curto prazo)

Considere as seguintes funções custo marginal e custo fixo, respectivamente:

$$CMg(q) = C'(q) = 2e^{0,2q}\ , \ CF = 90\ .$$

A função custo total é a integral indefinida da função custo marginal:

$$C(q) = \int C'(q)dq = \int 2e^{0,2q}dq \,.$$

Vamos usar a técnica de integração por substituição (vide p. 155-157 do manual Matemática I). Seja $u = 0,2q$. Logo, $du = 0,2dq$. Assim,

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 2e^{u}\frac{du}{0,2} = 10\int e^{u}du \\ &= 10e^{u} + c \\ &= 10e^{0,2q} + c. \end{aligned}$$

Temos, então, a família ou conjunto de todas as primitivas (vide p. 144 do manual *Matemática I*) da função custo marginal $CMg(q) = 2e^{0,2q}$.

Para determinarmos a constante de integração, devemos usar a informação sobre o custo fixo. Com efeito, sabemos que $C(0) = CF = 90$. Logo,

$$C(0) = 10e^{0,2\times 0} + c = 90 \therefore c = 80 \,.$$

Substituindo este valor da constante de integração na integral indefinida, obtemos a função custo total de curto prazo que estávamos procurando, a saber:

$$C(q) = 10e^{0,2q} + 80 \,.$$

Note que $C'(q) = 2e^{0,2q} = CMg(q)$ e $C(0) = 90 = CF$.

Vejamos mais um exemplo, agora envolvendo os conceitos de receita marginal e receita total.

Exemplo 5.2 (da função receita marginal para as funções receita total e demanda inversa)

Considere a seguinte função receita marginal:

$$RMg(q) = R'(q) = \frac{16}{(2+q)^3} \text{ para } q \geq 0 \,.$$

A função receita total é a integral indefinida da função receita marginal:

$$R(q) = \int R'(q)dq = \int \frac{16}{(2+q)^3}dq \,.$$

Mais uma vez, vamos usar a técnica de integração por substituição. Faça $u = 2 + q$. Então, $du = dq$. Logo,

$$R(q) = \int \frac{16}{u^3} du = \frac{16u^{-2}}{-2} + c = -8(2+q)^{-2} + c$$
$$= \frac{-8}{(2+q)^2} + c.$$

Temos, portanto, a <u>família ou conjunto de todas as primitivas</u> da função receita marginal $RMg(q) = \frac{16}{(2+q)^3}$.

Para determinarmos a constante de integração, usamos o fato econômico de que sem venda não há receita, ou seja, $R(0) = 0$. Assim,

$$R(0) = \frac{-8}{(2+0)^2} + c = 0 \therefore c = 2.$$

Substituindo este valor da constante de integração na integral indefinida, obtemos a função receita total:

$$R(q) = \frac{-8}{(2+q)^2} + 2.$$

Note que $R(0) = 0$.

Finalmente, lembrando que a função demanda inversa é a própria função receita média, chegamos a:

$$p = RMe(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-8}{q(2+q)^2} + \frac{2}{q}.$$

5.2. APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA E DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: A MAXIMIZAÇÃO DE LUCRO DE UM MONOPOLISTA DISCRIMINADOR PERFEITO DE PREÇOS

No Exemplo 4.7 da unidade anterior trabalhamos com a maximização de lucro de um <u>monopolista ordinário</u>, ou seja, com um monopolista que vende todas as unidades de seu produto ao mesmo preço. No referido exemplo, a produção maximizadora de lucro era $q = 9$ unidades de produto, e supomos que cada uma destas unidades era vendida por $91,5$ unidades monetárias.

Certos monopolistas são capazes de praticar algum tipo de discriminação de preços, vendendo unidades de um bem por preços diferentes. A teoria microeconômica classifica a discriminação de preços em três grupos. Um monopolista pratica discriminação de preços perfeita ou de primeiro grau quando é capaz de diferenciar o preço por unidade vendida e de comprador para comprador. Por sua vez, um monopolista faz discriminação de preços de segundo grau quando pratica preços diferenciados de acordo com a quantidade que cada comprador adquire. Finalmente, um monopolista faz discriminação de preços de terceiro grau ao estabelecer preços diferentes para compradores ou grupo de compradores diferentes.

Iremos nos ater aqui a um exemplo de maximização de lucro de um monopolista capaz de realizar discriminação de preços de primeiro grau. Primeiramente, vamos supor que o monopolista produza um bem discreto, ou seja, que só pode ser produzido em quantidades inteiras.

Exemplo 5.3 (maximização de lucro de um monopolista discriminador perfeito de preços produtor de um bem discreto)

Considere uma firma que só possa produzir quantidades inteiras e se depara com a seguinte função demanda inversa trabalhada no Exemplo 2.5:

$$p(q) = 96 - 0,5q, \text{ para todo } q = 0,1,2,\ldots,192 .$$

Esta função demanda encontra-se representada na Figura 5.1.

Como o monopolista pode, por hipótese, diferenciar o preço por unidade vendida, e de comprador para comprador, então esta firma tentará vender cada unidade do seu produto ao máximo preço que for possível cobrar. Assim, venderá a primeira unidade ao preço $p(1) = 96 - 0,5 \times 1 = 95,5$, a segunda unidade ao preço $p(2) = 96 - 0,5 \times 2 = 95$, a terceira unidade ao preço $p(3) = 96 - 0,5 \times 3 = 94,5$ e assim sucessivamente até uma quantidade q qualquer que venderia ao preço $p(q) = 96 - 0,5q$. Em suma, a função receita total deste monopolista poderia ser escrita como:

$$R(q) = (96 - 0,5 \times 1) + (96 - 0,5 \times 1) + \cdots + (96 - 0,5 \times q) = \sum_{i=1}^{q} (96 - 0,5i),$$

a qual está grafada na Figura 5.2.

Note que $p(1) = 95,5$ é a área do retângulo cuja base vai de $q = 0$ a $q = 1$ e a altura é o próprio valor $p(1)$; $p(2) = 95$ é a área do retângulo cuja base vai de $q = 1$ a $q = 2$ e a altura é o próprio valor $p(2)$ e assim sucessivamente. Enfim, até um valor q qualquer, teremos q retângulos com base igual a 1 e altura decrescente. Geometricamente, então, a expressão da receita total representa a soma das áreas desses q retângulos.

A estrutura de custos da firma é representada pela função custo total de curto-prazo do Exemplo 2.3:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98\text{, para todo } q = 0, 1, 2, \ldots, 192.$$

Portanto, a função lucro total da firma é obtida subtraindo da receita total o custo total:

$$L(q) = \sum_{i=1}^{q}(96 - 0,5i) - (q^3 - 12q^2 + 60q + 98)\text{, para todo } q = 0, 1, 2, \ldots, 192.$$

Na Figura 5.3, encontra-se o gráfico da função lucro total. Claramente, $q = 9$ é a quantidade maximizadora de lucro.

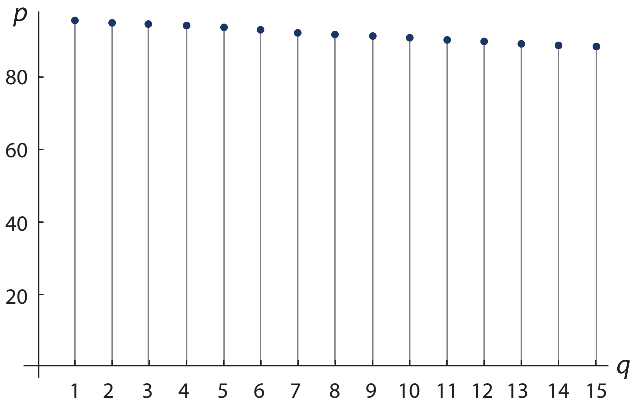


Figura 5.1. Função demanda inversa de um bem discreto

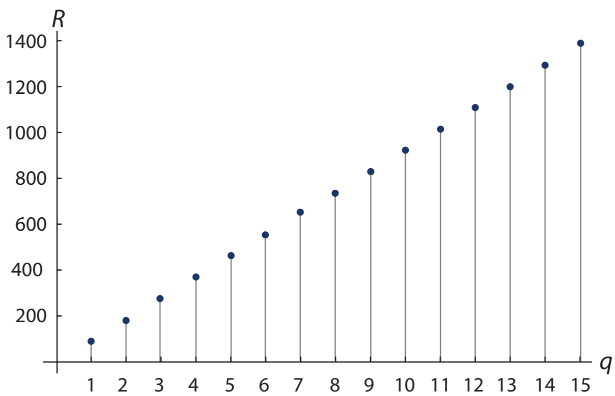


Figura 5.2. Função receita total de um monopolista discriminador perfeito de preços

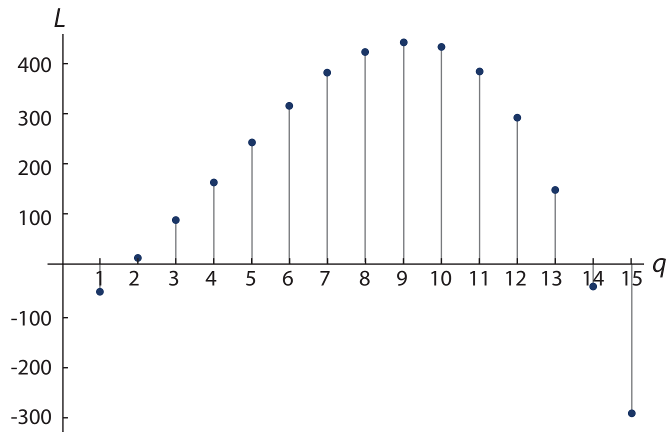
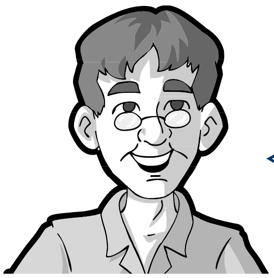


Figura 5.3. Função lucro total de um monopolista discriminador perfeito de preços



Vejamos como podemos aplicar a análise marginal ao problema anterior ao relaxarmos a premissa de que o monopolista só pode produzir quantidades inteiras.

Exemplo 5.4 (maximização de lucro de um monopolista discriminador perfeito de preços produtor de um bem perfeitamente divisível)

Considere uma firma monopolista que se depara com a seguinte função demanda inversa trabalhada no Exemplo 2.5:

$$p(q) = 96 - 0,5q \text{ , para todo } 0 \le q \le 192 \text{ .}$$

Como o monopolista pode, por hipótese, diferenciar o preço por unidade vendida e de comprador para comprador, então esta firma tentará vender cada fração do seu produto ao máximo preço que for possível cobrar. Agora, dada a perfeita divisibilidade da quantidade produzida, a receita total pode ser expressa como a integral definida (vide p. 148 do manual *Matemática I*) de 0 a q da função demanda inversa acima, ou seja:

$$R(q) = \int_0^q (96 - 0,5x)dx \text{ .}$$

Para ilustrar o significado geométrico desta expressão, tomemos $q = 80$ unidades de produto. Neste caso, a expressão da receita total acima representa a área da figura plana limitada pelo gráfico da função demanda inversa $p(q) = 96 - 0,5q$, pela reta $q = 0$, pela reta $q = 80$ e o eixo das abscissas (eixo das quantidades produzidas). Esta área corresponde à área sombreada na

Figura 5.4 (vide p. 164-168 do manual *Matemática I*).

Usando o teorema fundamental do cálculo, podemos calcular a receita total como segue:

$$\begin{aligned} R(q) &= 96x - 0,25x^2 \Big|_0^q \\ &= \left(96q - 0,25q^2\right) - \left(96 \times 0 - 0,25 \times 0^2\right) \\ &= 96q - 0,25q^2. \end{aligned}$$

Em particular, para $q = 80$ unidades de produto temos $R(80) = 96 \times 80 - 0,25 \times 80^2 = 6080$ unidades monetárias.

A estrutura de custos da firma é representada pela função custo total de curto prazo do Exemplo 2.3:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98 \text{ para todo } q \geq 0.$$

Portanto, a função lucro total da firma é obtida subtraindo da receita total o custo total:

$$\begin{aligned} L(q) &= (96q - 0,25q^2) - (q^3 - 12q^2 + 60q + 98) \\ &= -q^3 + 11,75q^2 + 36q - 98 \qquad , \end{aligned}$$

Para $q \in (0, \infty)$ a CPO para maximização de lucro rende:

$$L'(q) = -3q^2 + 23,5q + 36 = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau, obtemos $q \cong -1,31$ e $q \cong 9,15$. Somente o último valor é economicamente relevante. Devemos, portanto, analisar se produzir 9,15 unidades é de fato o plano de produção maximizador de lucro caso a firma decida produzir.

Como de praxe, faremos isso usando o teste da segunda derivada para extremos relativos. A CSO para o problema em análise é dada por:

$$L''(q) = -6q + 23,5 \Rightarrow L''(9,15) = -6 \times 9,15 + 23,5 \cong -31,4 < 0.$$

Logo, a escolha $q \cong 9,15$ no intervalo $(0 + \infty)$ é de fato maximizadora de lucro. O máximo local $L(9,15)$ deve ser comparado com o lucro de não produzir $L(0) = -98$. A firma não fechará se $L(9,15) > L(0)$. Temos que $L(9,15) \cong 449,1 > -98 = L(0)$. Assim, a decisão ótima da firma é, de fato, produzir $q \cong 9,15$ unidades de produto.

Para finalizar este exemplo, cabe destacar que tanto a quantidade produzida quanto o lucro total do monopolista com poder de discriminar preços perfeitamente são maiores que os respectivos valores para o monopolista ordinário trabalhado no Exemplo 4.7.

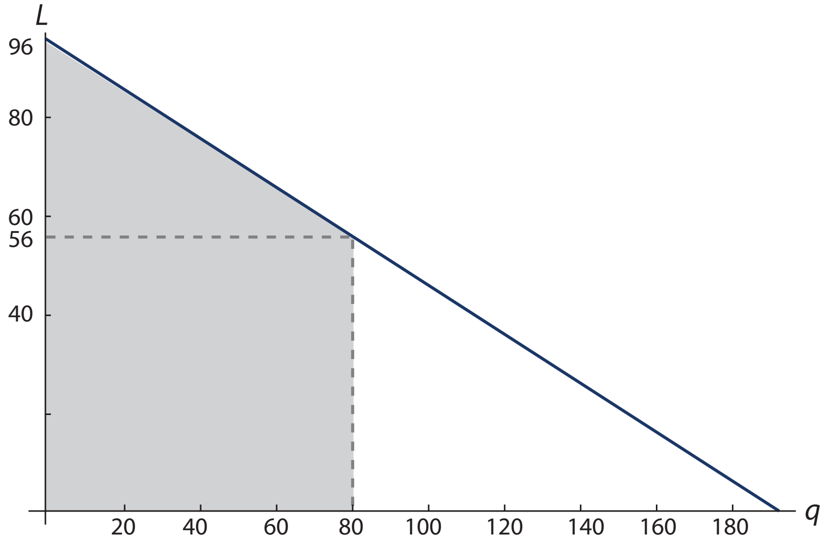


Figura 5.4. Receita total como uma área sob a função demanda inversa

Saiba Mais

!

Uma exposição mais detalhada sobre a maximização de lucro de monopolistas discriminadores de preços é encontrada no capítulo 25 (O Comportamento Monopolista) de Varian, H. *Microeconomia*: princípios básicos. 7 ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006

Resumo da unidade:

Nesta unidade, mostramos como os conceitos de *integral indefinida* e *integral definida* e o *teorema fundamental do cálculo* são utilizados para interpretar as funções de receita e custo totais como *primitivas* das respectivas funções de receita e custo marginais. Na primeira seção, apresentamos exemplos de como determinar funções receita e custo totais a partir de funções de receita e custo marginais dadas. Na última seção, usando o conceito de integral definida e o teorema fundamental do cálculo, resolvemos problemas de maximização de lucro de um monopolista que pode discriminar preços perfeitamente.

Assista agora à videoaula correspondente a esta unidade.

Atividade de Aprendizagem – Unidade V

1) Uma firma apresenta a seguinte função custo marginal:

$$CMg(q) = 2e^{q/2},$$

sendo q a quantidade produzida pela firma em uma dado período de produção. Obtenha a função custo médio de longo prazo desta firma.

2) Uma firma se depara com a seguinte função receita marginal:

$$RMg(q) = 200qe^{-q^2},$$

sendo q a quantidade produzida e vendida pela firma em uma dado período. Obtenha a função demanda inversa com a qual a firma se defronta.

3) Considere o monopolista do Exercício 4.6, que se depara a seguinte função de demanda inversa:

$$p = 200 - 3q,$$

na qual p é o preço de mercado e q a quantidade transacionada no mercado (igual à quantidade produzida pelo monopolista). Esta firma apresenta um custo fixo de 500 unidades monetárias e seu custo variável é dado pela função:

$$CV(q) = 20q + q^2.$$

Suponhamos que o governo deixe de cobrar deste monopolista um imposto por unidade produzida e que este último possa praticar discriminação de preços de primeiro grau. Determine:

a) A função receita total da firma;

b) O nível de produção maximizador de lucro e o lucro máximo da firma;

c) Se a firma em análise produz em um ponto elástico, com elasticidade unitária ou inelástico da função demanda. Justifique formalmente sua resposta.

4) O que aconteceria com a quantidade produzida e o lucro do monopolista do exercício anterior caso o governo passasse a cobrar deste monopolista um imposto de 5 unidades monetárias por unidade produzida?

REFERÊNCIAS

GUERRA, F.;TANEJA, I. J. *Matemática I*. 2 ed. Florianópolis: UFSC, 2009.

VARIAN, H. *Microeconomia*: princípios básicos. 7 ed. Rio de Janeiro: Campus, 2006.

VERAS, L. L. *Matemática aplicada à economia*. São Paulo: Atlas, 1985.