

André Puel

MODELAGEM COM PLASTIFICAÇÃO DE LAJES LISAS

Tese submetida ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio.

Coorientador: Prof. Dr. José Manuel Matos Noronha da Câmara.

Florianópolis
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Puel, André

Modelagem com plastificação de lajes lisas /
André Puel ; orientador, Daniel Domingues Loriggio,
coorientador, José Manuel Matos Noronha da Câmara ,
2018.

319 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós
Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Lajes lisas. 3. Análises
lineares com redistribuição. 4. Plastificação. 5.
Métodos numéricos. I. Domingues Loriggio, Daniel.
II. Manuel Matos Noronha da Câmara, José. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

André Puel

MODELAGEM COM PLASTIFICAÇÃO DE LAJES LISAS

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Florianópolis, 28 de Maio de 2018.

Prof. Glicério Trichês, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.
Orientador (UFSC)

Prof. José Manuel Matos Noronha da Câmara, Dr.
Coorientador (IST/LISBOA - Videoconferência)

Prof. Américo Campos Filho, Dr. (UFRGS - Videoconferência)

Prof. Fernando Rebouças Stucchi, Dr. (USP - Videoconferência)

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD. (UFSC)

Prof. Narbal Ataliba Marcellino, Dr. (UFSC)

Prof. Jano D'Araújo Coelho, Dr. (UFSC)

Este trabalho é dedicado a minha família, pelo apoio incondicional, parceria, durante todos os momentos desta caminhada. Aos lindos olhos escuros, a minha esposa, Isabel Christina Raitz Puel e aos nossos filhos, José Gabriel Raitz Puel e Pedro Augusto Raitz Puel, que nos enchem de alegria todos os dias.

Dedico também aos meus pais, Eurides Puel (*in memoriam*) e Beatriz Dell'Antônia Puel, responsáveis por minha formação e pelo belo exemplo de vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar à oportunidade de atingir este sonho.

Ao professor Daniel Domingues Loriggio, que me acompanha na vida acadêmica deste a Bolsa de Iniciação Científica (ano de 2001), pelas orientações e companheirismo, desde sempre.

Ao professor José Câmara, pelo exemplo de vida no ensino da engenharia de estruturas em concreto armado, tendo participado de projetos importantes, na vida acadêmica e profissional.

Aos professores e funcionários do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil da UFSC, pela assessoria, disponibilidade e ensinamentos prestados.

Aos funcionários e amigos do IST – Instituto Superior Técnico de Lisboa, que permitiram a realização do Doutorado Sanduiche.

Aos meus familiares, que me apoiaram em todas as etapas de minha vida.

Aos meus amigos Brasileiros e Portugueses, pela amizade e sempre presentes nesta caminhada.

À minha esposa, pela compreensão durante os momentos difíceis vividos para a realização deste trabalho e também pela contribuição na revisão ortográfica do texto escrito.

À minha Mãe, Beatriz Dell'Antônia Puel, pelo imenso amor, carinho e dedicação que demonstrou desde o início de minha vida.

A CAPES, pela bolsa de estudo concedida que propiciou a oportunidade de uma vivência fantástica em família no exterior, com a realização do Doutorado Sanduíche.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.”

(Albert Einstein)

“É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se aos pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cizenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”

(Theodore Roosevelt)

RESUMO

As análises lineares de lajes lisas são soluções em equilíbrio, respeitam o Teorema Estático, mas conduzem a dimensionamentos antieconômicos, pois desprezam o comportamento plástico e a capacidade de redistribuição que as lajes possuem. O Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), prescrito na NBR 6118:2014, é uma alternativa para incluir a plastificação no dimensionamento de lajes lisas, porém é restritivo, além de apresentar resultados distorcidos nas extremidades das lajes.

As análises não-lineares também podem ser utilizadas para as lajes lisas, muito úteis em trabalhos de investigação. No entanto, não se trata da melhor alternativa para projeto de estruturas, por serem complexas, de difícil interpretação, e precisam do resultado (no caso, das armaduras), para serem concluídas.

Este trabalho propõe uma modelagem numérica inovadora, a qual permite incluir a plastificação em análises lineares, em modelos integrados lajes/pilar, utilizando o *software* SAP 2000, a partir do MEF. A metodologia consiste em aplicar momentos de plastificação em faixas pré-estabelecidas na laje, e reanalisar o comportamento último da placa à flexão, após a introdução destes momentos de plastificação (análise com redistribuição de esforços). As condições de serviço bem como o fenômeno da punção propriamente dito não são abordados.

Tanto os momentos de plastificação como o comprimento das faixas são obtidos a partir do modelo elástico, pela média da distribuição inicial dos momentos fletores sobre os pilares, antes da aplicação da redistribuição. Também podem ser arbitrados pelos projetistas. Dessa forma, aplicam-se a qualquer disposição arquitetônica, sendo que o estudo abrangeu modelos com disposição regular e irregular dos pilares, com e sem vigas de bordo e também balanços. Ao final, a modelagem proposta nesta Tese foi ratificada pelas análises não lineares, utilizando o *software* ATENA 3D.

Os resultados em termos de carga última para todos os casos estudados mostraram que, a introdução das linhas de plastificação nos modelos lineares é uma solução em equilíbrio e respeita o Teorema Estático (a favor da segurança). A distribuição das armaduras pelo MPE necessitou de critérios para ajustar as faixas de distribuição nas seções de extremidade, uma vez que em alguns casos a segurança ficou comprometida.

Palavras-chave: Lajes Lisas, Análises lineares com redistribuição, Plastificação, Métodos numéricos.

ABSTRACT

The linear analyzes of flat slabs are solutions in equilibrium, they respect the Static Theorem, but they lead to uneconomical design, since they ignore the plastic behavior and the redistribution capacity that the slabs have. The Equivalent Frame Method (EFM), prescribed in NBR 6118: 2014, is an alternative to include plastification in the flat slab, but it is restrictive, besides presenting distorted results at the edges of the slabs.

Non-linear analyzes can also be used for flat slabs, which are very useful in research. However, this is not the best alternative for the design of structures, because they are complex, difficult to interpret, and need the result (in this case, reinforcement) to be completed.

This work proposes an innovative numerical modeling, which allows to include plastification in linear analyzes, in integrated slab / column models, using SAP 2000 software, from FEM. The methodology consists to applying plastification in pre-established bands on the slab, and reanalyzing the final behavior of the slab after the introduction of these plastification moments (redistribution analysis). The conditions of service as well as the punching phenomena itself are not taken in account.

Both the plastification moments and the bands's length are obtained from the elastic model, from the initial distribution of the bending moments over the columns, before the application of the redistribution. They can also be arbitrated by the designers. Thus, it applies to any architectural arrangement, symmetrical and asymmetric models, with and without edge beams and also cantilever. In the end, the model proposed in this thesis was ratified by the nonlinear analysis, using ATENA 3D software.

The results in terms of ultimate load for all the cases studied showed that the introduction of the plastification bands in the linear models is an equilibrium solution and respects the Static Theorem (in favor of safety). The distribution of the reinforcement by the the Equivalent Frame Method (EFM) needed criteria to adjust the distribution bands in the edge sections, since in some cases the security was compromised.

Keywords: Flat slabs, Linear analysis with redistribution, Plastification, Numerical methods.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 3-1 – Edifício com lajes lisas (RABELLO, 2015)..... | 41 |
| Figura 3-2 – Diagrama Momento Fletor X Curvatura (LORIGGIO, 2002)..... | 44 |
| Figura 3-3 – Diagrama Momento Fletor X Curvatura (LORIGGIO, 2002)..... | 45 |
| Figura 3-4 – Elementos infenitesimal dx, dy, sujeito a uma carga distribuída “p”, JAWAD (1994) | 47 |
| Figura 3-5 – Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes (COELHO, 2000) | 47 |
| Figura 3-6 – Equilíbrio elemento de placa momentos fletores e de torção (COELHO, 2000) | 48 |
| Figura 3-7 – Capacidade de rotação das rótulas plásticas (NBR 6118: 2014) .. | 52 |
| Figura 3-8 - Laje discretizada em elementos finitos (HENNRICHS 2003) | 57 |
| Figura 3-9 – Geometria do elemento DKQ..... | 60 |
| Figura 3-10 – Elemento quadrilátero de Batoz e Tahar Fonte: KANSARA (2004) | 60 |
| Figura 3-11 – Ilustração laje analisada por Analogia de Grelha (COELHO&LORIGGIO, 2002) | 62 |
| Figura 3-12 – Vetores de esforços atuantes em uma grelha plana | 63 |
| Figura 3-13 – Definição pórticos segundo a NBR 6118:2014 (EMERICK, 2005) | 67 |
| Figura 3-14 – Faixas de distribuição dos momentos fletores segundo a NBR 6118:2014 | 67 |
| Figura 3-15 – Distribuição dos momentos nas faixas (EMERICK, 2005)..... | 68 |
| Figura 3-16 – Divisão dos Pórticos (EMERICK, 2005) | 69 |
| Figura 3-17 – Faixa para a distribuição dos momentos (EMERICK, 2005) | 70 |
| Figura 3-18 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com ACI (EMERICK, 2005)..... | 71 |
| Figura 3-19 – Valores de x e y para a seção transversal laje-pilar (EMERICK, 2005)..... | 72 |
| Figura 3-20 – Rigidez equivalente do pilar (EMERICK, 2005) | 73 |
| Figura 3-21 – Diagrama Tensão-Deformação utilizado no ATENA 3D (ATENA, 2016) | 75 |
| Figura 3-22 – Lei de abertura de fissuras exponencial (ATENA, 2016)..... | 76 |
| Figura 3-23 – Comportamento Concreto à Compressão ATENA 3D (ATENA, 2016) | 77 |
| Figura 3-24 – Relação Tensão-Deformação do concreto (Model Code, 2010). .. | 77 |
| Figura 3-25 – Comportamento Compressão Concreto Pós Pico (ATENA, 2016) | 78 |
| Figura 3-26 – Comportamento Concreto pré-pico e pós-pico (VAN MIER, 1986)..... | 79 |
| Figura 3-27 – Ruptura concreto à compressão – Estado multiaxial de tensões (ATENA, 2016) | 79 |
| Figura 3-28 – Redução da tensão de compressão após fissuração (ATENA, 2016) | 80 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3-29 – Modos de propagação das fissuras (NOGUEIRA, 2011)..... | 81 |
| Figura 3-30 – Estado de tensões e deformações – Fixed Crack Model (ATENA, 2016) | 82 |
| Figura 3-31 – Estado de tensões e deformações – Rotated Crack Model (ATENA, 2016) | 82 |
| Figura 3-32 – Modelos constitutivos para as armaduras (NOGUEIRA, 2011) | 83 |
| Figura 3-33 – Modelos Bond-Slip pré-definidos (INÁCIO, 2010)..... | 84 |
| Figura 3-34 – Geometria elementos Tetraedros (ATENA, 2016)..... | 86 |
| Figura 3-35 – Geometria elementos Hexaedros - Brick (ATENA, 2016)..... | 86 |
| Figura 3-36 – Geometria elementos Wedge (ATENA, 2016)..... | 86 |
| Figura 3-37 – Geometria elementos SHELLs (ATENA, 2016)..... | 87 |
| Figura 3-38 – Método <i>Newton-Raphson</i> (ATENA, 2016) | 88 |
| Figura 3-39 – Método <i>Arc-Length</i> (ATENA, 2016) | 88 |
| Figura 3-40 – Curva tensão x deformação (<i>Model Code</i> , 2010)..... | 90 |
| Figura 3-41 – Curva tensão x deformação (LA ROVERE ET AL, 2008) | 91 |
| Figura 3-42 – Fator <i>tension stiffening</i> (ATENA, 2016) | 91 |
| Figura 4-1 – Formas de modelagem da ligação pilar/laje lisa (ROMBACH,2004) | 96 |
| Figura 4-2 – Arredondamento do diagrama de momentos fletores (NBR 6118:2014)..... | 97 |
| Figura 4-3 – Distribuição momentos fletores em uma seção transversal (SKORPEN ET AL, 2014) | 97 |
| Figura 4-4 – Modelo com pilar definido como elemento sólido (Henrichs,2003) | 98 |
| Figura 4-5 – Alternativas de representar o pilar como apoio para laje lisa (PUEL, 2009) | 99 |
| Figura 4-6 – Pilar como reação em lajes assimétricas (PUEL, 2009)..... | 100 |
| Figura 4-7 – Esquema do método simulando o pilar como reação na laje (PUEL, 2009) | 100 |
| Figura 4-8 – Trechos rígidos na região dos pilares | 101 |
| Figura 4-9 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje simétrica (PUEL, 2009) | 101 |
| Figura 4-10 – Esforço normal no pilar da ligação pilar/laje lisa – laje simétrica (PUEL, 2009) | 102 |
| Figura 4-11 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje assimétrica (PUEL, 2009) | 102 |
| Figura 4-12 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje assimétrica (PUEL, 2009) | 103 |
| Figura 4-13 – Modelagem da laje lisa em elementos finitos (SKORPEN ET AL, 2014) | 103 |
| Figura 4-14 – Comparativo momentos fletores face do pilar (SKORPEN ET AL, 2014) | 104 |
| Figura 4-15 – Condição de contorno pilar (SKORPEN ET AL, 2014) | 104 |
| Figura 4-16 – Pilar central modelado com apoios pontuais (SKORPEN ET AL, 2014) | 105 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4-17 – Distribuição momentos fletores sobre pilar central (SKORPEN ET AL, 2014) | 105 |
| Figura 4-18 – Modelo analítico proposto (a) definição da seção crítica (b) modelo analítico composto barras elásticas, elementos de placa e as molas não-lineares (CHOI ET AL, 2014) | 106 |
| Figura 4-19 – Rigidez das molas não-lineares (CHOI ET AL, 2014)..... | 106 |
| Figura 4-20 – Comparativo resultados modelo numérico e modelo experimental (CHOI ET AL,2014)..... | 108 |
| Figura 4-21 – Modelo em elementos finitos para a ligação laje/pilar de borda (PARK ET AL, 2006)..... | 109 |
| Figura 4-22 – Comparativo modelo numérico e modelo experimental (PARK ET AL, 2006)..... | 110 |
| Figura 4-23 – Esquema do modelo experimental em escala reduzida (MURRAY ET AL, 2005)..... | 111 |
| Figura 4-24 – Layout e espaçamento da malha (MURRAY ET AL, 2005)..... | 111 |
| Figura 4-25 – Elemento <i>Shell</i> proposto em camadas (XIAO ET AL, 2008)..... | 112 |
| Figura 4-26 – Modelo com armadura distribuída (MARTINELLI, 2003)..... | 113 |
| Figura 4-27 – Comparativo na armadura– modelo numérico e experimental (MARTINELLI, 2003) | 114 |
| Figura 4-28 – Modelo 3D proposto (MAMEDE ET AL, 2012) | 115 |
| Figura 4-29 – Característica exemplo 01 (FARIA, 2004)..... | 116 |
| Figura 4-30 – Faixas do pórtico equivalente - Exemplo 01 (FARIA, 2004)..... | 116 |
| Figura 4-31 – Malha e tensões MEF - Exemplo 01 (FARIA, 2004)..... | 117 |
| Figura 4-32 – Característica exemplo 02 (FARIA, 2004)..... | 117 |
| Figura 4-33 – Faixas do pórtico equivalente - Exemplo 02 (FARIA, 2004)..... | 118 |
| Figura 4-34 – Malha e tensões MEF - Exemplo 02 (FARIA, 2004)..... | 118 |
| Figura 4-35 – Layout dos exemplos estudados (PEDROZO, 2008) | 119 |
| Figura 4-36 – Modelo numérico 01 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)..... | 119 |
| Figura 4-37 – Modelo numérico 02 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)..... | 120 |
| Figura 4-38 – Modelo numérico 03 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)..... | 120 |
| Figura 4-39 – Modelo numérico 04 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)..... | 120 |
| Figura 4-40 – Modelo numérico 04 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)..... | 121 |
| Figura 4-41 – Momentos fletores na Seção A – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008) | 121 |
| Figura 4-42 – Momentos fletores na Seção E – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008) | 121 |
| Figura 4-43 – Momentos fletores na Seção C – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008) | 122 |
| Figura 4-44 – Momentos fletores na Seção F – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008) | 122 |
| Figura 4-45 – Comparativo MEF/MPE – Seção A (PEDROZO, 2008) | 123 |
| Figura 4-46 – Comparativo MEF/MPE – Seção E (PEDROZO, 2008)..... | 123 |
| Figura 4-47 – Comparativo MEF/MPE – Seção C (PEDROZO, 2008)..... | 124 |
| Figura 4-48 – Comparativo MEF/MPE – Seção G (PEDROZO, 2008) | 124 |
| Figura 4-49 – Comparativo MEF/MPE – Seção A (PEDROZO, 2008) | 124 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4-50 – Comparativo MEF/MPE – Seção E (PEDROZO, 2008)..... | 124 |
| Figura 4-51 – Comparativo MEF/MPE – Seção C (PEDROZO, 2008) | 125 |
| Figura 4-52 – Comparativo MEF/MPE – Seção G (PEDROZO, 2008) | 125 |
| Figura 4-53 – Faixas de plastificação (BURATO, 1993) | 127 |
| Figura 4-54 – Mecanismo de colapso adotado (BURATO, 1993)..... | 127 |
| Figura 4-55 – Faixas de plastificação (BURATO, 1993) | 128 |
| Figura 4-56 – Mecanismo de colapso pela Teoria das Charneiras Plásticas (BURATO, 1993)..... | 128 |
| Figura 5-1 – Redução aplicada na inércia..... | 132 |
| Figura 5-2 – Pilares modelados como elementos Sólidos..... | 134 |
| Figura 5-3 – Ligação Laje/Pilar com a utilização de molas não-lineares | 135 |
| Figura 5-4 – Inserção das molas não-lineares..... | 136 |
| Figura 5-5 – Linhas de plastificação sobre os pilares | 137 |
| Figura 5-6 – Inclusão das linhas de plastificação na laje | 138 |
| Figura 5-7 – Momentos de plastificação aplicado nos nós da malha..... | 138 |
| Figura 5-8 – Deformada da placa após inclusão das linhas de plastificação ... | 139 |
| Figura 5-9 – Momentos fletores na laje após a inclusão das linhas de plastificação..... | 139 |
| Figura 6-1 – Caso 1 – Sem balanço e com vigas de bordo | 141 |
| Figura 6-2 – Caso 2 – Sem balanço e sem vigas de bordo..... | 142 |
| Figura 6-3 – Caso 3 – Com balanço e sem vigas de bordo..... | 142 |
| Figura 6-4 – Croqui em planta com a disposição dos pilares | 143 |
| Figura 6-5 – Caso 4 –Irregular..... | 143 |
| Figura 7-1 - Esquema simplificado da NBR 6118:2014 para o momento de solidariedade..... | 144 |
| Figura 7-2 – Lançamento dos pilares análogo ao modelo de viga contínua | 145 |
| Figura 7-3 – Esforços axiais nos pilares - [kN] | 146 |
| Figura 7-4 – Momentos fletores nos pilares – [kNm]..... | 146 |
| Figura 7-5 – Carregamento uniformemente distribuído na laje | 146 |
| Figura 7-6 – Binário de forças resultante do momento fletor do pilar aplicado como reação na laje | 147 |
| Figura 7-7 – Carregamento final com q_E e q_D aplicado como reação na laje ... | 148 |
| Figura 7-8 – Pilar como barra substituído por um apoio do segundo gênero .. | 149 |
| Figura 7-9 – Rigidez da mola: meia altura do tramo inferior e superior do pilar | 149 |
| Figura 7-10 – Rotação do nó do vínculo do pilar | 150 |
| Figura 7-11 - Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que não há simetria do pilar na laje | 151 |
| Figura 7-12 – Rotação do nó do vínculo do pilar | 151 |
| Figura 7-13 – Trechos rígidos, NBR 6118:2014 | 152 |
| Figura 7-14 – Trechos rígidos nas seções transversais dos pilares | 152 |
| Figura 8-1 – Estimativa dos momentos de plastificação a partir de uma análise numérica | 154 |
| Figura 8-2 – Transições na malha com as dimensões dos pilares | 155 |
| Figura 9-1 – Pilares e linhas de plastificação no centro geométrico da seção . | 162 |

| | |
|--|-----|
| Figura 12-6 – Tensões no concreto – SC - Direção X – [MPa] | 205 |
| Figura 12-7 – Tensões no concreto – SD - Direção X – [MPa] | 206 |
| Figura 12-8 – Tensões no concreto – SE - Direção X – [MPa] | 206 |
| Figura 12-9 – Tensões no concreto – SF - Direção X – [MPa]..... | 206 |
| Figura 12-10 – Tensões no concreto – SG – Direção X – [MPa] | 207 |
| Figura 12-11 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 240 – [MPa]..... | 207 |
| Figura 12-12 – Deformações – SB - Direção X – <i>Step</i> 240..... | 208 |
| Figura 12-13 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 254 (final) – [MPa]..... | 208 |
| Figura 12-14 – Deformações – SD - Direção X – <i>Step</i> 254..... | 209 |
| Figura 12-15 – Momentos fletores pilares P1 e P3 – <i>Steps</i> iniciais | 210 |
| Figura 12-16 – Deformação da seção transversal da laje após fissuração | 210 |
| Figura 12-17 – Momentos fletores pilares P1 e P3 após fissuração da laje | 211 |
| Figura 12-18 – Redistribuição dos momentos negativos junto ao P1 e P3 | 213 |
| Figura 12-19 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 Método A1 – Pd15 – Etapa 1 | 215 |
| Figura 12-20 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 212 (carga última) – Etapa 1 - [MPa] | 216 |
| Figura 12-21 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 219 (final) Etapa 1 - [MPa]..... | 216 |
| Figura 12-22 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 Método A1 – Pd15 – Etapa 2 | 218 |
| Figura 12-23 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 219 (carga última) – Etapa 2 - [MPa] | 219 |
| Figura 12-24 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 220 (final) Etapa 2 - [MPa] | 219 |
| Figura 12-25 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 226 (carga última) Etapa 3 - [MPa] | 221 |
| Figura 12-26 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 227 (final) Etapa 3 - [MPa] | 221 |
| Figura 12-27 – Tensões no concreto – SB – Direção X – <i>Step</i> 226 Etapa 3 - [MPa] | 223 |
| Figura 12-28 – Deformações no concreto – SB – Direção X – <i>Step</i> 226 Etapa 3 - [MPa] | 223 |
| Figura 12-29 – Tensões no concreto – SD – Direção X – [MPa] | 224 |
| Figura 12-30 – Deformações no concreto – SD – Direção X – [MPa] | 224 |
| Figura 12-31 – Momentos Fletores – Direção X – Pilar como reação na laje | 225 |
| Figura 12-32 – Linhas de Plastificação – Momentos Fletores Direção X – [kNm/m] | 226 |
| Figura 12-33 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 – Método B Pd15 – Etapa 0..... | 227 |
| Figura 12-34 – Tensão armaduras – Direção X - <i>Step</i> 200 (última) – Método B Etapa 0 - [MPa] | 228 |
| Figura 12-35 – Tensão nas armaduras – Direção X <i>Step</i> 249 (final) – [MPa]..... | 229 |

| | |
|---|-----|
| Figura 12-36 – Tensões no concreto – SB – Direção X – [MPa]..... | 230 |
| Figura 12-37 – Deformações no concreto – SB – Direção X – [MPa]..... | 230 |
| Figura 12-38 – Tensões no concreto – SD - Direção X – [MPa]..... | 231 |
| Figura 12-39 – Deformações no concreto – SD - Direção X – [MPa]..... | 231 |
| Figura 12-40 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 215 (final) | |
| Método B - Etapa 1 - [MPa] | 234 |
| Figura 12-41 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 – Método B | |
| Pd15 – Etapa 3..... | 237 |
| Figura 12-42 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 219 (final) Etapa 3 - | |
| [MPa]..... | 238 |
| Figura 12-43 – Tensões no concreto – SB – Direção X – <i>Step</i> 218 | |
| Etapa 3 - [MPa]..... | 239 |
| Figura 12-44 – Deformações no concreto – SB – Direção X – <i>Step</i> 218 Etapa 3 | |
| - [MPa]..... | 239 |
| Figura 12-45 – Tensões no concreto – SD – Direção X – <i>Step</i> 218 | |
| Etapa 3 - [MPa]..... | 240 |
| Figura 12-46 – Deformações no concreto – SD – Direção X – <i>Step</i> 218 Etapa 3 | |
| - [MPa]..... | 240 |
| Figura 12-47 – Linhas Plastificação – Momentos Fletores – Reanálise | |
| Direção X – Etapa 3..... | 241 |
| Figura 13-1 – Caso 1 –Regular e com vigas de bordo seção 50 x 50 cm..... | 247 |
| Figura 13-2 – Caso 1 – Regular e com vigas de bordo seção 50x50 cm..... | 247 |
| Figura 13-3 – Momentos Fletores – Direção X – Pilar como reação na laje.... | 248 |
| Figura 13-4 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 1 – Método B | |
| Pd15 – Etapa 0..... | 250 |
| Figura 13-5 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 251 (última) | |
| Método B – Etapa 0 - [MPa]..... | 251 |
| Figura 14-1 – Caso 3 – Regular sem vigas de bordo e com balanços | 253 |
| Figura 14-2 – Modelo elástico: (a) pilar como reação (b) com momentos de | |
| plastificação | 254 |
| Figura 14-3 – Momentos Fletores – Direção X – (a) pilar como reação (b) após | |
| plastificação | 254 |
| Figura 14-4 – Distribuição das armaduras superiores – Direção X - Caso 3 | |
| Método B – Pd15 | 256 |
| Figura 14-5 – Distribuição das armaduras superiores – Direção X - Caso 3 | |
| Método B – Pd15 | 257 |
| Figura 14-6 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última – | |
| Método B – [MPa]..... | 258 |
| Figura 14-7 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última – | |
| Método B – [MPa]..... | 258 |
| Figura 14-8 – Tensão nas armaduras inferiores – Direção X – Carga última – | |
| Método B – [MPa]..... | 259 |
| Figura 15-1 – Planta baixa com a disposição dos pilares..... | 263 |
| Figura 15-2 – Modelo numérico 3D – <i>SAP</i> 2000..... | 263 |
| Figura 15-3 – Deformada da estrutura | 264 |

| | |
|---|-----|
| Figura 15-4 – Momentos fletores pilares – Caso 4 – [kNm]..... | 264 |
| Figura 15-5 – Momentos fletores – Pilar como Reação - Caso 4 Direção X e Y – [kNm/m]..... | 264 |
| Figura 15-6 – Momentos fletores – Linhas de plastificação - Caso 4 Direção X e Y – [kNm/m] | 265 |
| Figura 15-7 – Detalhamento das armaduras inferiores – Caso 4 | 266 |
| Figura 15-8 – Detalhamento das armaduras superiores – Caso 4 | 266 |
| Figura 15-9 – Análise não linear – Software ATENA 3D | 267 |
| Figura 15-10 – Tensões nas armaduras inferiores – Caso 4 - <i>Step</i> 246 – [MPa] | 268 |
| Figura 15-11 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - <i>Step</i> 246 | 268 |
| Figura 15-12 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - <i>Step</i> 263 | 269 |
| Figura 15-13 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - <i>Step</i> 279 (Final) | 269 |
| Figura 15-14 – Tensões nas armaduras inferiores – Caso 4 - <i>Step</i> 279 (Final) | 270 |
| Figura 15-15 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção Y | 271 |
| Figura 15-16 – Caso 4 – Seção 1 – Máximos positivos – Direção X..... | 271 |
| Figura 15-17 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção X..... | 272 |
| Figura 15-18 – Caso 4 - Seção S2 – Pilar P1 – Direção X..... | 272 |
| Figura 15-19 – Caso 4 - Seção S3 – Pilar P4 – Direção X..... | 273 |
| Figura 15-20 – Caso 4 - Seção S4 – Pilar P2 – Direção X..... | 273 |
| Figura 15-21 – Caso 4 - Seção S5 – Pilar P5 – Direção X..... | 274 |
| Figura 15-22 – Caso 4 - Seção S6 – Pilar P3 – Direção X..... | 274 |
| Figura 15-23 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção Y | 275 |
| Figura 15-24 – Caso 4 - Seção S7 – Pilar P1 – Direção Y..... | 275 |
| Figura 15-25 – Caso 4 - Seção S8 – Pilar P2 – Direção Y..... | 276 |
| Figura 15-26 – Caso 4 - Seção S8 – Pilar P3 – Direção Y..... | 276 |
| Figura 15-27 – Caso 4 - Seção S9 – Pilar P4 – Direção Y..... | 277 |
| Figura 15-28 – Caso 4 - Seção S10 – Pilar P5 – Direção Y..... | 277 |
| Figura 19-1 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 186 (final) – [MPa]..... | 294 |
| Figura 19-2 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 239 (final) – [MPa]..... | 295 |
| Figura 19-3 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> 206 (final) Método A - Etapa 1 - [MPa] | 297 |
| Figura 19-4 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final face superior - [MPa] | 301 |
| Figura 19-5 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final face inferior - [MPa]..... | 301 |
| Figura 19-6 – Deformações concreto – SB – Dir. X – <i>Step</i> 248 Et. 3- [MPa] | 302 |
| Figura 19-7 – Deformações no concreto – SD – Direção X – <i>Step</i> 248 Etapa 3 - [MPa] | 303 |
| Figura 19-8 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final – face superior - [MPa]..... | 306 |

| | |
|--|-----|
| Figura 19-9 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final – face inferior - [MPa] | 306 |
| Figura 19-10 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final – face superior - [MPa] | 310 |
| Figura 19-11 – Tensão nas armaduras – Direção X - <i>Step</i> final – face inferior - [MPa] | 310 |
| Figura 19-12 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 1 – Método B Pd15 | 317 |
| Figura 19-13 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última – Método B – [MPa] | 318 |
| Figura 19-14 – Tensão nas armaduras inferiores – Direção X – Carga última – Método B – [MPa] | 318 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|--|-----|
| Gráfico 5-1 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X – Redução Inércia . | 133 |
| Gráfico 5-2 – Momentos Fletores – Seção 1/2 – Direção X – Pilar como elemento sólido..... | 134 |
| Gráfico 5-3 – Rótula plástica..... | 135 |
| Gráfico 5-4 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X – Rótulas plásticas | 136 |
| Gráfico 5-5 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X | 140 |
| Gráfico 8-1 – Seção genérica - Estimativa momentos de plastificação | 153 |
| Gráfico 8-2 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 3 - Pilar como barra | 155 |
| Gráfico 8-3 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 3 - Pilar como reação | 156 |
| Gráfico 8-4 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 1..... | 156 |
| Gráfico 8-5 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 1..... | 156 |
| Gráfico 8-6 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 2..... | 157 |
| Gráfico 8-7 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 3..... | 157 |
| Gráfico 8-8 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 1 - Pilar como barra | 158 |
| Gráfico 8-9 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 1 - Pilar como reação | 158 |
| Gráfico 8-10 – Estimativa Mplast – Caso 2 - Seção 1 - Trecho 1..... | 159 |
| Gráfico 8-11 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 1 | 159 |
| Gráfico 8-12 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 2 | 159 |
| Gráfico 8-13 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 2 | 159 |
| Gráfico 9-1 – Definição Comprimento das LPs – Caso 2 – Seção S1/S3 – Pilar como reação..... | 165 |
| Gráfico 9-2 – Momentos de plastificação – Caso 2 – Seção S1 – Pilar como reação | 167 |
| Gráfico 9-3 – Momentos de plastificação – Caso 2 – Seção S3 – Pilar como reação | 167 |
| Gráfico 9-4 – Comparativo momentos – Situação 1,2,3 e antes da plastificação | 169 |
| Gráfico 9-5 – Momentos fletores na Laje – Seção S1/S2/S3/S4 Trechos rígidos | 174 |
| Gráfico 9-6 – Percentual de distribuição dos momentos nas faixas..... | 175 |
| Gráfico 9-7 – Deslocamentos na Laje – Seção S2/S4 – Etapa 1 Trechos rígidos | 175 |
| Gráfico 11-1 – Influência do TS na carga última – Pd=22,25 kN/m ² | 196 |
| Gráfico 11-2 – Diferenças percentuais - Carga última $c_{ts} = 0,2$ e $c_{ts} = 0,4$ Caso A e B..... | 197 |

| | |
|---|-----|
| Gráfico 12-1 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 0..... | 199 |
| Gráfico 12-2 – Deslocamentos a cada incremento de carga (m)..... | 200 |
| Gráfico 12-3 – Abertura de fissuras a cada incremento de carga Face superior - (m)..... | 201 |
| Gráfico 12-4 – Abertura de fissuras a cada incremento de carga Face inferior - (m)..... | 201 |
| Gráfico 12-5 – Reações verticais pilares e deslocamento máximo na laje..... | 202 |
| Gráfico 12-6 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 Método A1 – Etapa 0 - [MN]..... | 209 |
| Gráfico 12-7 – Reações horizontais – Direção X – P2 e P4 – Método A1 Etapa 0 - [MN]..... | 212 |
| Gráfico 12-8 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 1..... | 214 |
| Gráfico 12-9 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje | 215 |
| Gráfico 12-10 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 2..... | 217 |
| Gráfico 12-11 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje..... | 218 |
| Gráfico 12-12 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 3..... | 220 |
| Gráfico 12-13 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje..... | 220 |
| Gráfico 12-14 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 3 - [MN]..... | 222 |
| Gráfico 12-15 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 0..... | 226 |
| Gráfico 12-16 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje Método B – Etapa 0..... | 228 |
| Gráfico 12-17 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Método B Etapa 0 - [MN]..... | 232 |
| Gráfico 12-18 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 1..... | 233 |
| Gráfico 12-19 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje – Método B –Etapa 1..... | 234 |
| Gráfico 12-20 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Método B Etapa 1 - [MN]..... | 235 |
| Gráfico 12-21 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 3..... | 236 |
| Gráfico 12-22 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje Método B – Etapa 3..... | 237 |
| Gráfico 12-23 – Momentos fletores - Direção X–Caso 2 – Método B - Pd15 Reanálise S2/S4 – Etapa 3..... | 241 |
| Gráfico 12-24 – Carga Última – Caso 2 – Pd=15kN/m ² | 242 |
| Gráfico 12-25 – Carga Última x Carga de Projeto – Caso 2 – Pd=15kN/m ² ...243 | 243 |

| | |
|---|-----|
| Gráfico 12-26 – Carga Última x Carga Etapa anterior - Caso 2 – Pd=15kN/m ² | 243 |
| Gráfico 12-27 – Taxas de armadura globais - Caso 2 – Pd=15kN/m ² | 244 |
| Gráfico 13-1 - Momentos fletores - Direção X – Caso 1 – Método B – Pd15 | |
| S1/S2/S3/S4 – Etapa 0..... | 249 |
| Gráfico 13-2 – Reações verticais nos pilares e desloc. máximo na laje Método | |
| B – Etapa 0..... | 250 |
| Gráfico 14-1 - Momentos fletores - Direção X – Caso 3 – Método B – Pd15 | |
| S1/S2/S3/S4..... | 255 |
| Gráfico 14-2 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje | |
| Método B..... | 257 |
| Gráfico 14-3 – Reações horizontais P3 – Caso 3 - Método B | 260 |
| Gráfico 14-4 – Reações horizontais P1 – Caso 3 - Método B | 261 |
| Gráfico 15-1 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje | |
| Caso 4..... | 267 |
| Gráfico 19-1 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2 - Pd15 | |
| S1/S2/S3/S4 – Etapa 0..... | 293 |
| Gráfico 19-2 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje | |
| Método A2– Etapa 0..... | 294 |
| Gráfico 19-3 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 3 - [MN] | 295 |
| Gráfico 19-4 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2 - Pd15 | |
| S1/S2/S3/S4 – Etapa 1..... | 296 |
| Gráfico 19-5 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje Método | |
| A2 –Etapa 1..... | 297 |
| Gráfico 19-6 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 1 - [MN] | 298 |
| Gráfico 19-7 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 – Pd20 | |
| S1/S2/S3/S4..... | 299 |
| Gráfico 19-8 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares | 300 |
| Gráfico 19-9 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A1 - [MN].. | 303 |
| Gráfico 19-10 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2 Pd20 - | |
| S1/S2/S3/S4..... | 304 |
| Gráfico 19-11 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares | 305 |
| Gráfico 19-12 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A2 - [MN] | 307 |
| Gráfico 19-13 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B – Pd20 - | |
| S1/S2/S3/S4..... | 308 |
| Gráfico 19-14 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares | 309 |
| Gráfico 19-15 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A - [MN].. | 311 |
| Gráfico 19-16 – Carga Última – Caso 2 – Pd=20kN/m ² | 312 |
| Gráfico 19-17 – Carga Última x Carga de Projeto..... | 313 |
| Gráfico 19-18 – Carga Última x Carga anterior | 313 |
| Gráfico 19-19 – Redução momento ligação laje/P3 – Método A1 e A2..... | 313 |
| Gráfico 19-20 – Taxas de armadura globais - Caso 2 – Pd=20kN/m ² | 314 |
| Gráfico 19-21 - Momentos fletores - Direção X – Caso 1 – Método B – Pd15 | |
| S1/S2/S3/S4..... | 316 |

| | |
|--|-----|
| Gráfico 19-22 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje – Método B | 317 |
| Gráfico 19-23 – Reações horizontais P3 – Caso 1 - Método B – Etapa 1/3..... | 319 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA | 33 |
| 2. OBJETIVOS | 39 |
| 2.1. OBJETIVO GERAL | 39 |
| 2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS | 39 |
| 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 40 |
| 3.1. HISTÓRICO DA ANÁLISE DE LAJES LISAS | 40 |
| 3.2. VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS LAJES LISAS | 41 |
| 3.2.1. <i>Vantagens</i> | 41 |
| 3.2.2. <i>Desvantagens</i> | 43 |
| 3.3. ETAPAS DE COMPORTAMENTO DE UMA LAJE DE CONCRETO ARMADO..... | 43 |
| 3.4. TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA ELEMENTOS DE PLACA..... | 45 |
| 3.4.1. <i>Hipóteses fundamentais da análise elástica</i> | 46 |
| 3.4.2. <i>Análise Linear</i> | 46 |
| Definição da Equação de Lagrange | 47 |
| 3.4.3. <i>Análise linear com redistribuição</i> | 51 |
| 3.4.4. <i>Análise Limite ou Plástica</i> | 51 |
| 3.4.5. <i>Análise não-linear</i> | 54 |
| 3.4.6. <i>Comentários relevantes sobre os tipos de análises</i> | 55 |
| 3.5. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE LAJES LISAS | 56 |
| 3.5.1. <i>Método dos Elementos Finitos</i> | 56 |
| Elemento finito de placa..... | 59 |
| 3.5.2. <i>Analogia de Grelha</i> | 61 |
| Critérios para traçado da malha | 65 |
| 3.6. MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES | 66 |
| 3.6.1. <i>Norma Brasileira NBR 6118:2014</i> | 66 |
| 3.6.2. <i>Norma europeia EuroCode 2 (2004)</i> | 69 |
| 3.6.3. <i>Norma Americana ACI</i> | 70 |
| 3.7. PREMISSAS DAS ANÁLISES NÃO LINEARES | 73 |
| 3.7.1. <i>Introdução ao software ATENA 3D</i> | 74 |
| Modelo Constitutivo do Concreto..... | 74 |
| Modelo Constitutivo do Aço..... | 82 |
| 3.7.2. <i>Influência das propriedades dos materiais</i> | 84 |
| 3.7.3. <i>Elemento finito não-linear</i> | 85 |
| 3.7.4. <i>Métodos para a solução das equações não lineares</i> | 87 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.7.5. | <i>Convergência do método</i> | 89 |
| 3.7.6. | <i>Tension Stiffening</i> | 89 |
| 3.8. | CRITÉRIO DE SEGURANÇA DAS ANÁLISES NÃO LINEARES | 91 |
| 3.8.1. | <i>Método probabilístico</i> | 92 |
| 3.8.2. | <i>Método dos coeficientes parciais de segurança</i> | 92 |
| 3.8.3. | <i>Método da resistência global</i> | 93 |
| | Método da estimativa do coeficiente de variação da resistência | 93 |
| | Método do coeficiente global de resistência..... | 93 |
| 4. | PESQUISAS RELEVANTES ACERCA DE MODELAGEM DE LAJES LISAS | 95 |
| 5. | ESTRATÉGIAS PARA INCLUSÃO DA PLASTIFICAÇÃO | 130 |
| 5.1. | CONSIDERAÇÕES INICIAIS..... | 130 |
| 5.2. | DESCRIÇÃO DAS ALTERNATIVAS DE MODELAGENS NUMÉRICAS | 132 |
| | 5.2.1. <i>Redução da inércia na faixa de distribuição</i> | 132 |
| | 5.2.2. <i>Pilar como elemento sólido</i> | 133 |
| | 5.2.3. <i>Análise não linear – concreto armado material elastoplástico</i> | 135 |
| 5.3. | MODELAGEM DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO | 137 |
| 6. | DESCRIÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS | 141 |
| 6.1. | MODELOS COM DISPOSIÇÃO REGULAR DOS PILARES | 141 |
| | Caso 1 - Sem balanço – com vigas de bordo | 141 |
| | Caso 2 - Sem balanço – sem vigas de bordo | 142 |
| | Caso 3 - Com balanço – sem vigas de bordo..... | 142 |
| 6.2. | MODELOS COM DISPOSIÇÃO IRREGULAR DOS PILARES | 142 |
| 7. | CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DOS MODELOS NUMÉRICOS LINEARES | 144 |
| 7.1. | PILAR COMO REAÇÃO NA LAJE | 146 |
| 7.2. | PILAR COMO SEÇÃO RÍGIDA | 152 |
| 8. | OBTENÇÃO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO | 153 |
| 8.1. | CÁLCULO DO MPLAST – CASO 2..... | 154 |
| | 8.1.1. <i>Seção S3</i> | 155 |
| | 8.1.2. <i>Seção S1</i> | 157 |
| 8.2. | COMENTÁRIOS SOBRE O CÁLCULO DO MPLAST | 160 |
| 9. | ESTUDO PLASTIFICAÇÃO NAS ANÁLISES NUMÉRICAS LINEARES | 161 |
| 9.1. | LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO NOS PILARES DE BORDO | 161 |
| 9.2. | COMPRIMENTO DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO | 164 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 9.3. | ANÁLISE COM E SEM LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO | 172 |
| 10. | CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DOS MODELOS NUMÉRICOS NÃO LINEARES | 176 |
| 10.1. | MODELAGEM NUMÉRICA | 176 |
| 10.1.1. | <i>Geometria</i> | 176 |
| | Concreto | 177 |
| | Aço | 179 |
| 10.1.2. | <i>Condição de contorno</i> | 179 |
| 10.1.3. | <i>Definição da Malha</i> | 181 |
| 10.1.4. | <i>Aplicação do carregamento</i> | 182 |
| 10.1.5. | <i>Métodos de análise e critérios de convergência</i> | 183 |
| 10.1.6. | <i>Pontos de monitoramento</i> | 184 |
| 10.2. | DEFINIÇÃO DAS ARMADURAS | 185 |
| 10.3. | CRITÉRIO DE SEGURANÇA ADOTADO | 188 |
| 11. | ANÁLISE NÃO LINEAR – RESULTADO PRELIMINAR | 189 |
| 11.1.1. | <i>Resultados para $c_{ts} = 0$</i> | 192 |
| 11.1.2. | <i>Resultados para $c_{ts} = 0,2$</i> | 194 |
| 11.1.3. | <i>Resultados para $c_{ts} = 0,4$</i> | 195 |
| 11.1.4. | <i>Comparativo $P_{d-NL} \times P_d$</i> | 196 |
| 12. | ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 2 | 199 |
| 12.1. | MÉTODO A1 | 199 |
| 12.1.1. | <i>Etapa 0</i> | 199 |
| | Comentários da análise não linear – Etapa 0 | 212 |
| 12.1.2. | <i>Etapa 1</i> | 213 |
| | Comentários da análise não linear - Etapa 1 | 216 |
| 12.1.3. | <i>Etapa 2</i> | 217 |
| | Comentários da análise não linear - Etapa 2 | 219 |
| 12.1.4. | <i>Etapa 3</i> | 220 |
| 12.2. | MÉTODO A2 | 224 |
| 12.3. | MÉTODO B | 225 |
| 12.3.1. | <i>Etapa 1</i> | 232 |
| 12.3.2. | <i>Etapa 3</i> | 236 |
| 12.4. | CONSIDERAÇÕES CARGA ÚLTIMA – $P_0=15kN/m^2$ | 242 |
| 12.5. | ALTERAÇÃO NA CARGA DE PROJETO – $P_D=20kN/m^2$ | 245 |
| 13. | ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 1 | 247 |
| 13.1. | DISTRIBUIÇÃO DAS ARMADURAS: ETAPA 1 E 3 | 251 |
| 13.2. | CONSIDERAÇÕES SOBRE A CARGA ÚLTIMA | 252 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 14. | ANÁLISE NÃO-LINEAR – CASO 3 | 253 |
| 14.1. | CONSIDERAÇÕES SOBRE A CARGA ÚLTIMA..... | 261 |
| 15. | ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 4..... | 263 |
| 16. | CONCLUSÕES..... | 279 |
| 17. | TRABALHOS FUTUROS..... | 284 |
| 18. | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 285 |
| 18.1. | BIBLIOGRAFIA UTILIZADA..... | 285 |
| 18.2. | BIBLIOGRAFIA CONSULTADA..... | 290 |
| 19. | APÊNDICES | 293 |
| 19.1. | CASO 2 – MÉTODO A2 – $P_D=15\text{kN}/\text{M}^2$ | 293 |
| 19.1.1. | <i>Etapa 0</i> | 293 |
| 19.1.2. | <i>Etapa 1</i> | 296 |
| 19.2. | CASO 2 – $P_D=20\text{kN}/\text{M}^2$ | 299 |
| 19.2.1. | <i>Método A1</i> | 299 |
| 19.2.2. | <i>Método A2</i> | 304 |
| 19.2.3. | <i>Método B</i> | 308 |
| 19.2.4. | <i>Considerações sobre a carga última</i> | 312 |
| 19.3. | CASO 1: ETAPA 1 E ETAPA 3 | 315 |

1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

As edificações, sejam quais forem suas finalidades, necessitam de uma estrutura ou um conjunto de estruturas que lhes sirvam de suporte, propiciando estabilidade, segurança e condições de utilização satisfatórias durante sua vida útil.

As lajes lisas constituem um sistema estrutural largamente utilizado em projetos, propiciando alterações de *lay-out* em ambientes internos, pois dispensam o uso de vigas. As análises desses tipos de lajes são complexas, principalmente no entorno das regiões das ligações lajes/pilares. Com o avanço dos computadores e conseqüentemente dos pacotes de *softwares* especializados em estruturas, a maioria dos projetos estruturais de lajes lisas são desenvolvidos em programas computacionais para obtenção dos esforços e deslocamentos, cujas análises são baseadas em métodos numéricos. Dentre eles, pode-se destacar o Processo por Analogia de Grelha e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Segundo SKORPEN ET AL (2014), o MEF tem sido utilizado pelos Engenheiros de Estruturas desde 1960 e a teoria do método já se encontra consolidada.

Ao se modelar pilares diretamente apoiado em lajes, é comum ocorrer concentrações de tensões e esforços na região dos apoios, conduzindo também a valores elevados de momentos fletores na laje. Resultados desse tipo dificultam a interpretação na aplicação em projetos estruturais. Segundo CHOI ET AL (2014), o comportamento estrutural da ligação laje/pilar das lajes lisas é muito complicado, pois são compostos por dois tipos diferentes de elementos: barra (pilar) e elementos de placa (laje). Ainda sobre esse assunto, MURRAY ET AL (2005) comenta: a forma como se modela o comportamento da ligação pilar/laje é o ponto crítico da análise de lajes lisas.

Teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada em uma laje, ela provoca momentos fletores que tendem ao infinito em seu ponto de aplicação, gerando pontos de singularidade. Conseqüentemente, em um método numérico, quando um pilar para apoio de lajes é modelado como um ponto isolado, provoca o efeito de uma carga concentrada de sentido contrário, resultando em momentos fletores muito elevados no ponto de aplicação da carga e no entorno dela. É sabido que esses momentos serão tanto maiores quanto mais refinada for a malha. No entanto, na prática, um pilar não é um ponto, mas sim um elemento com dimensões discretas, suficientes para se considerar uma superfície de apoio e não apenas um nó, gerando resultados diferentes tanto nos momentos fletores da laje como também nos esforços do próprio pilar. Os trabalhos de HENRICHS (2003), ROMBACH (2004), PUEL (2009) e S.A. SKORPEN ET AL (2014) detalhados nesta Tese abordaram esse

tema, propondo alternativas de modelagem no âmbito de uma análise linear, para os apoios de lajes lisas, modelando ora o pilar com seção física ora como reação distribuída na laje no sentido de baixo para cima. Ainda, foram propostos valores de dimensionamento para os momentos fletores, obtidos na face como também no centro dos pilares.

Na prática, as lajes lisas são geralmente projetadas com a utilização de pacotes de *softwares* desenvolvidos para análises lineares, baseadas na Teoria das Placas em regime elástico, utilizando os métodos numéricos aqui citados. Enquadram-se nesse contexto alguns *softwares* bastante utilizados no meio técnico, como o AltoQi Eberick, TQS, SAP 2000, ANSYS, entre outros. As análises lineares são utilizadas tanto para verificações em serviço (ELS) como também para verificações em Estado Limite Último (ELU). No entanto, quando se trata de dimensionamento (ELU), as análises elásticas conduzem muitas vezes a taxas de armaduras elevadas, pois não levam em consideração o comportamento plástico nem a capacidade de redistribuição das lajes (ROMBACH, 2004). Já em elementos lineares (por exemplo as vigas), as soluções elásticas conduzem a dimensionamentos próximos das análises plásticas. Segundo JONES & MORRISON, 2005, as maiores críticas das análises lineares em lajes lisas recaem na utilização das propriedades elásticas dos materiais, que resultam em momentos fletores superestimados na região dos apoios. Pode-se notar que, em se tratando do dimensionamento de lajes, as análises elásticas não representam adequadamente esse elemento de concreto armado, podendo conduzir a soluções antieconômicas quando utilizadas em projetos, sem ao menos haver uma redistribuição dos esforços por meio da introdução de linhas de plastificação.

As análises não-lineares são uma alternativa para se compreender melhor o comportamento e obter soluções mais econômicas, sob níveis de tensões que propiciem esse comportamento em regime não-linear. No entanto, são complexas e de difícil interpretação. A obtenção das armaduras diretamente pelas análises não lineares é por meio de um processo iterativo, cuja convergência pode ser complicada, uma vez que a disposição inicial pode estar muito longe da solução final. Por conta disso, na maioria dos casos, utiliza-se modelos mais simples para estimar a quantidade de aço. Ou seja, o momento fletor para definição da malha de aço, que não necessariamente será o momento de plastificação, é obtido por meio de uma análise simplificada e, posteriormente, essas mesmas armaduras são verificadas em uma análise não-linear.

Segundo S.A. SKORPEN ET AL (2014), as análises não-lineares em *softwares* que utilizam o Método dos Elementos Finitos são complicadas, demoradas para configurar os dados de entrada e costumam

significativamente mais do que os *softwares* de análise lineares. Vê-se, portanto, que para aplicação em projeto, pode não ser a melhor alternativa para se obter respostas em tempo hábil às exigências do mercado de trabalho atual.

Dentre os trabalhos mais relevantes encontrados sobre análises não-lineares de lajes lisas, pode-se destacar duas linhas de atuação: 1) estudos que propuseram a alteração do código de um *software* existente, desenvolvido inicialmente para análises lineares, de modo a acrescentar um comportamento não-linear na ligação laje/pilar, conforme apresentado em K. K. CHOI et al (2014), H. G. PARK et al (2006), R. Y. XIAO et al (2008), W. WANG et al (2008), Y. X. ZHANG et al (2006) e MARTINELLI, M (2003). Ao final, os ensaios numéricos foram comparados com ensaios experimentais. 2) utilização de programas comerciais desenvolvidos para análises não-lineares e comparação com ensaios experimentais, conforme apresentado em K.A. MURRAY et al (2005) e N. F. MAMEDE et al (2012). Aplicando esses estudos a projetos estruturais, as críticas que se fazem aos trabalhos do item 1 é a necessidade de mudar a formulação de um *software* (o que exige conhecimentos adicionais de programação), ter o *software* disponível e com acesso ao código para poder alterar a formulação. As críticas em relação ao item 2, recaem na dificuldade de interpretação dos resultados e no custo de um *software* para análise não-linear. A comparação com ensaios experimentais apresentar bons resultados dá confiança mas não generaliza a formulação para o desenvolvimento de projetos estruturais. Projetar ao ELU se trata de uma condição idealizada, com hipóteses simplificadoras de dimensionamento, combinações das ações, materiais com resistências minoradas, etc, que necessariamente são diferentes entre executado e projetado.

A verificação de Estados Limites Últimos também pode ser realizada por uma Análise Plástica da estrutura, com a simulação de linhas de plastificação localizadas em seções críticas da laje. Segundo a NBR 6118:2014, em alguns casos, é necessária a verificação das rotações das linhas de plastificação, que não podem superar a capacidade de rotação plástica das seções transversais correspondentes, cujos limites estão definidos nessa mesma norma. Admite-se que o concreto armado trabalhe na iminência da plastificação, com comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito. Determinam-se dois valores para a carga última: um limite superior (teorema cinemático) e um limite inferior (teorema estático). Como exemplo, pode-se citar a Teoria das Charneiras Plásticas e o dimensionamento de lajes cogumelo pelo Método das Faixas Avançado de Hillerborg, respectivamente.

Segundo LORIGGIO (2002), o dimensionamento de estruturas que possuam um comportamento plástico acentuado (caso das lajes usuais de concreto armado) pode ser baseado na Teoria Geral da Plasticidade. Os dimensionamentos plásticos podem trazer uma economia significativa em relação ao dimensionamento elástico, mas necessitam de conhecimentos adicionais para que o projeto atenda satisfatoriamente não só as condições de segurança, mas também condições de utilização. Sobre esse assunto, cita-se o trabalho de DUARTE (1998) e BURATO (1993), demonstrados no Capítulo 4. Sobre o trabalho de DUARTE (1998), o comparativo de dimensionamento de um pano de lajes com distribuição regular, adotando o processo elástico pelo uso de tabelas, MEF, Analogia de Grelha e Teoria das Charneiras Plásticas mostrou que a Teoria das Charneiras Plásticas fornece resultados econômicos, muito embora possua limitação, a citar: devido a configuração de ruína ser específica a cada caso, fica difícil de generalizar para tipos de lajes com contornos não usuais e não leva em consideração a deformabilidade dos apoios. Sobre o trabalho de BURATO (1993), o “Método Iterativo Direto Aproximado”, que simula a Não-Linearidade Física do material concreto armado, variando a rigidez da laje através da modificação do módulo de elasticidade do concreto com base no diagrama momento-curvatura, foi implementado em um *software* existente. Apresentou bons resultados quando comparado com a Teoria das Charneiras Plásticas, porém utilizou modelos simples de comparação, necessitou de um esforço de programação importante para modificar um *software* previamente desenvolvido e não assegura que esse Método pode ser aplicado para outras formas de *lay-out*.

Uma forma prática para obtenção dos momentos de dimensionamento em lajes lisas é a partir do Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), prescrito na NBR 6118:2014, em seu item 14.7.8, como também no ACI 318-11, EuroCode 2 (2004), entre outras. Trata-se de um processo equivalente a uma análise elástica com redistribuição, que consiste em adotar em cada direção pórticos múltiplos e certos percentuais de distribuição de esforços por faixas para a obtenção dos momentos de plastificação. No entanto, o MPE possui restrições quanto a geometria da estrutura, que deve ser regular, com vãos pouco diferentes entre os pilares. Quando há uma distribuição irregular de pilares ou as lajes são utilizadas para fazer parte do sistema de contraventamento da estrutura, fica difícil de modelar um sistema composto por vigas e pilares capaz de simular corretamente o comportamento complexo de lajes lisas. O trabalho de FARIA (2004), que utilizou o *software* ADAPT, ratifica esta afirmativa.

Nos estudos desenvolvidos por PEDROZO (2008), fez-se o comparativo de um pavimento de lajes lisas protendidas entre o MEF e o MPE. As conclusões mostraram que os momentos fletores são diferentes junto dos pilares de bordo. Resultados análogos a esse também são encontrados na Tese de Doutorado de FIGUEIREDO FILHO (1989). Para os pilares de meio, o comportamento em termos de momentos positivos e negativos foi mais parecido, sendo os momentos fletores obtidos no centro dos pilares de meio pelo MEF superiores aos obtidos pelo MPE. Em termos de projeto, a análise de lajes lisas pelo MPE é muito interessante, pois dá uma resposta rápida a um problema complexo. No entanto, torna-se útil uma análise numérica com a introdução dos momentos de plastificação, de modo a equalizar os momentos nas extremidades das lajes.

Os trabalhos desenvolvidos nesta Tese estudam a modelagem de lajes lisas simétricas e assimétricas incluindo a plastificação, em modelos integrados lajes/pilar, considerando o comportamento plástico que as lajes possuem. São desenvolvidos modelos baseados em análises numéricas elásticas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Posteriormente, os resultados das análises elásticas são comparados com modelos não lineares, utilizando o *software ATENA 3D*, podendo-se validar as metodologias aqui propostas nas análises elásticas com plastificação. O estudo avalia a capacidade última da estrutura em termos de flexão, não se atendo as condições em serviço.

A filosofia de trabalho consiste em aplicar momentos de plastificação em faixas com comprimentos obtidos pelo diagrama dos momentos elásticos (visualizado no diagrama de esforços) e reanalisar o comportamento da placa como um todo. Os momentos de plastificação serão obtidos integrando os momentos fletores da análise elástica dentro da distribuição das linhas de plastificação, adotando o momento médio. Com isso, será possível generalizar o cálculo do momento de plastificação para quaisquer tipos de lajes lisas, não ficando condicionado ao valor dado pelo Método dos Pórticos Equivalentes (válido somente para lajes simétricas). O lançamento dos pilares será realizado conforme o modelo de viga contínua, proposto na NBR 6118:2014, onde se tem as extremidades do pilar simplesmente apoiadas, considerando meia altura do tramo superior e inferior. Por se tratar de uma análise integrada laje/pilar, os esforços nos pilares também serão avaliados.

Em todos os casos analisados nesta Tese (modelos com disposição regular e irregular dos pilares, com e sem vigas de bordo, e também balanços), a abordagem inovadora proposta, ou seja, uma modelagem numérica elástica com redistribuição, com duas alternativas para

representar a seção física do pilar, permitiu obter já na primeira reanálise, quantidades de armaduras bem balanceadas nas seções dos negativos e positivos, distribuídas em comprimentos de faixas sobre pilares coerentes com a posição que o elemento ocupa na laje. Por exemplo, nos pilares de canto e de bordo, que não possuem a continuidade da laje e, por conta disso, representam uma região ainda mais crítica em termos de concentrações de esforços. Por conta disso, tem-se bons resultados em termos de carga última, além de representarem soluções em equilíbrio e que respeitam o Teorema Estático.

Sobre a distribuição das armaduras pelo MPE, no que tange a seção de extremidade do caso com pilares de bordo sem vigas, precisou-se reduzir o comprimento das faixas de detalhamento das armaduras na área de influência dos pilares. Além disso, foi necessário limitar o momento sobre o apoio e redistribuir o momento excedente para a seção dos positivos, uma vez que a segurança teórica de projeto ficou comprometida. Sugere-se que esse critério, descrito no decorrer do texto, seja incluído nos códigos estruturais vigentes, notadamente a NBR 6118:2014.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver modelos numéricos integrado laje/pilar, para o estudo de lajes lisas em concreto armado, com a introdução de linhas de plastificação em análises lineares (análises lineares com redistribuição), aplicáveis em projetos estruturais.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver modelos elásticos utilizando o *software* SAP 2000, a partir do MEF;
- Continuar o estudo do Mestrado (PUEL, 2009) sobre o comportamento elástico da laje ao modelar o pilar com trechos rígidos ou como reação na laje, a fim de eliminar as singularidades que ocorrem em lajes lisas ao modelar um pilar como barra diretamente na laje;
- Simular linhas de plastificação em seções críticas na laje, com a aplicação de momentos de plastificação, considerando uma análise numérica linear com redistribuição baseada no Método dos Elementos Finitos;
- Calcular o momento de plastificação sobre os pilares que geram punção na laje, a partir da distribuição inicial dos momentos elásticos, o qual permite generalizá-lo para qualquer tipo de laje lisa, simétricas ou assimétricas;
- Estimar o comprimento das linhas de plastificação também a partir da distribuição inicial dos momentos elásticos;
- Estudar elasticamente a redistribuição dos esforços na laje após a aplicação dos momentos de plastificação, comparando com os valores obtidos pelo MPE;
- Estudar os esforços nos pilares que geram punção na laje após a aplicação dos momentos de plastificação;
- Ratificar a metodologia proposta nesta Tese para as análise lineares com redistribuição, com a aplicação das análises não-lineares, utilizando o *software* ATENA 3D;
- Estudar, em termos de carga última de colapso, com o auxílio das análises não lineares, estando as armaduras dimensionadas a partir dos modelos elástico com redistribuição (após inclusão das linhas de plastificação), como também pelo MPE.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. HISTÓRICO DA ANÁLISE DE LAJES LISAS

O sistema de lajes apoiadas diretamente em pilares apareceu pela primeira vez em 1906, com a construção do edifício C.A. Bovey Building em Minneapolis, Minnesota, nos Estados Unidos, pela iniciativa pioneira de C. A. P. Turner.

Houve muita polêmica em torno do novo sistema de lajes sem vigas na época, sendo que eram construídos de maneira empírica - uma vez que não havia métodos de análise disponíveis - e antes de serem utilizados eram realizadas diversos testes de carga para sua aceitação (COELHO, 2000). Ainda segundo COELHO (2000), não havia métodos disponíveis para a análise, e conseqüentemente não havia consenso sobre a maneira mais segura e correta em se projetar as armaduras. Havia diferentes esquemas de armação, desde armaduras na diagonal, armaduras circulares ou retangulares em torno dos pilares.

O primeiro código que fez recomendações práticas sobre as lajes lisas foi o ACI em 1920, ainda que o conhecimento do comportamento da estrutura e métodos para sua análise não estivesse claro para os engenheiros (FIGUEIREDO FILHO, 1989). Em 1956, o código do ACI ainda utilizava uma equação baseada na apresentada por Nichols em 1914, o qual chamou de método empírico. Em 1971, o método empírico mudou de nome para se chamar método direto. No ACI 83 o método direto foi simplificado, e a transformação do momento total em positivos e negativos passou a ser executada em função das condições de apoio e existência ou não de vigas. No código de 1971 foi então apresentado o Método dos Pórticos Equivalentes para a análise elástica das lajes sem vigas, e abrangia o cálculo de todos os tipos de lajes armadas em duas direções, com ou sem vigas entre os apoios (HENNRICHS, 2003).

A teoria das linhas de ruptura foi introduzida por Johansen em 1943, e é considerado o primeiro importante desvio da teoria clássica da elasticidade na solução de problemas de placas. No caso de lajes não retangulares e para as lajes sem vigas com malha irregular de pilares, a Teoria das Linhas de Ruptura fornecia uma boa alternativa ao modelo proposto pelo ACI. O CEB 78 permitia o uso da Teoria das Linhas de Ruptura, ou Teoria das Charneiras Plásticas, cuja teoria foi desenvolvida por Ingerslev (1921) e posteriormente por Johansen (1962) e Telemaco (1966). O método das faixas proposto por Hillerborg (1975), forneceu uma alternativa plástica para a análise das lajes. No Brasil, a NBR 6118 de 1978 permitia o uso da Teoria das Charneiras Plásticas para o cálculo

de lajes lisas. Era aceito, ainda, que se calculasse a laje pelo Método dos Pórticos Múltiplos quando os pilares estivessem em malha ortogonal e a espessura da laje obedecesse aos limites especificados pela norma.

Navier (1785-1836), considerado o fundador da moderna Teoria da Elasticidade, encontrou a solução correta das equações diferenciais de placas retangulares com resistência à flexão. Foram utilizadas séries duplas trigonométricas para chegar à solução do problema de placas retangulares simplesmente apoiadas. A teoria das placas foi aprimorada por Kirchhoff (1824-1887), que introduziu o método dos deslocamentos virtuais na solução dos problemas de placas. As soluções para a teoria não linear de placas começaram a ser estudadas em 1907 com Föppl, no entanto a forma final das equações diferenciais de placa sujeitas a grandes deformações só foi desenvolvida por von Fárman.

A evolução dos computadores permitiu que se automatizassem os procedimentos de cálculo. Surgiram então os programas de análise estrutural e com eles as análises numéricas, notadamente o Método dos Elementos Finitos e o Processo por Analogia de Grelha. Atualmente as lajes lisas são solucionadas em sua grande maioria por processos numéricos, atendo-se as modelagens que são realizadas pelos Engenheiros, sobretudo nas regiões de concentrações de esforços e nos pontos de singularidades.

3.2. VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS LAJES LISAS

3.2.1. Vantagens

A solução de lajes lisas tem sido utilizada cada vez mais nos projetos estruturais de concreto armado, devido às inúmeras vantagens que o sistema possui ao ser comparado com o sistema convencional composto por lajes, vigas altas e pilares.



Figura 3-1 – Edifício com lajes lisas (RABELLO, 2015)

As principais vantagens são citadas a seguir, conforme Figueiredo (1989):

- a) *Adaptabilidade de diversas formas ambientais*: permite alterações no “lay-out” de uma arquitetura após a conclusão da obra (pois não tem vigas), racionalização de vedações e aberturas, execução de fachadas com grande liberdade;
- b) *Simplificação das formas*: menor consumo de materiais, havendo um plano contínuo, sem recortes na ligação com as vigas. As formas e cimbramentos em uma estrutura com lajes lisas são extremamente fáceis de projetar, executar, montar e desformar;
- c) Além disso, as espessuras das lajes podem ser uniformizadas, facilitando a montagem e desmontagem, reaproveitamento do material, padronização dos cimbramentos, etc;
- d) *Simplificação e racionalização das armaduras*: a ausência de vigas diminui as operações de corte, dobra e montagem. Facilita também a conferência das armaduras;
- e) *Simplificação da concretagem*: poucos recortes na laje, facilitando o acesso de vibradores, o que reduz falhas de concretagem (as conhecidas “bicheiras”);
- f) *Redução da quantidade de cimento*: nos sistemas convencionais, nas regiões da laje com a viga, pode haver uma concentração elevada de armaduras, necessitando de um concreto mais fluido;
- g) *Redução da altura total do edifício*: devido a ausência de vigas.
- h) *Simplificação das instalações*: menor incidência de cortes e emendas, melhor qualidade do produto final, menor quantidade de condutos e fios, redução de mão de obra; modificações futuras são facilitadas;
- i) *Melhoria das condições de habitabilidade*: a ausência de vigas facilita a insolação e ventilação dos ambientes, o que diminui a umidade e reduz o acúmulo de sujeira e insetos;
- j) *Redução no tempo de execução*: devido a todas às simplificações comentadas: facilidades na montagem e desmontagem das formas, armaduras, concretagens, instalações.

3.2.2. Desvantagens

Mesmo havendo inúmeras vantagens, existem também desvantagens, que devem ser ponderadas para a escolha ou não do sistema estrutural com lajes lisas, a citar:

- a) *Punção das lajes*: é um dos principais problemas, que deve ser combatido com cautela, adotando-se espessuras adequadas e/ou armadura de punção;
- b) *Deslocamento transversal das lajes*: para um mesmo vão e mesma rigidez, o deslocamento de lajes sem vigas é maior do que no sistema convencional;
- c) *Estabilidade global do edifício*: em se tratando de edifícios altos, a ausência de vigas não permite a formação de pórticos de contraventamento para resistir a esforços horizontais, diminuindo a estabilidade global da edificação. Pode-se, nesses casos, vincular as lajes em paredes estruturais ou em núcleos rígidos, o que pode aumentar o custo global da edificação.

3.3. ETAPAS DE COMPORTAMENTO DE UMA LAJE DE CONCRETO ARMADO

Segundo LORIGGIO (2002), “O comportamento de uma laje de concreto armado depende do nível de carregamento que a solicita. Para carregamentos de pequena intensidade, a Teoria das Placas em Regime Elástico descreve bem o comportamento da laje, mesmo considerando o material como isótropo e homogêneo.” Trata-se, portanto, da fase elástica.

Ainda segundo LORIGGIO (2002), com o aumento do carregamento, inicia-se a fase de fissuração nas regiões dos maiores esforços solicitantes, diminuindo com isso a rigidez destas seções. Segundo essa fase de comportamento, geralmente associada à condição de serviço da laje, é normalmente estudada pela Teoria das Placas em Regime Elástico.

Havendo mais um incremento no carregamento, inicia-se a plastificação das seções mais solicitadas que, sendo seções sub-armadas (caso mais comum em lajes), passam a se deformar sem aumento sensível do momento fletor.

Com o aumento da plastificação, a estrutura perde o equilíbrio e se deforma livremente com qualquer acréscimo de carga. Nesse caso, entende-se que a laje atingiu sua fase de ruína. Segundo LORIGGIO (2002), “a fase de plastificação e a de ruína possuem comportamento bem

diferente daquele descrito pelo regime elástico. O estudo da fase de plastificação é bem mais complexo, já que existem zonas plastificadas, zonas fissuradas e zonas que ainda estão no regime elástico.”

Ao atingir a fase de ruína, a laje também atingiu um Estado Limite Último, e deve ser projetada de modo a possuir uma segurança adequada em relação a este estado. “Já a verificação dos Estados Limites de Utilização devem ser feitos baseados, obrigatoriamente, em um procedimento que represente bem a fase de serviço, ou seja, provavelmente uma análise elástica.” (LORIGGIO, 2002).

O Diagrama Momento Fletor x Curvatura de uma seção solicitada à flexão simples (Figura 3-2) representa bem as Etapas de comportamento das estruturas de concreto armado.

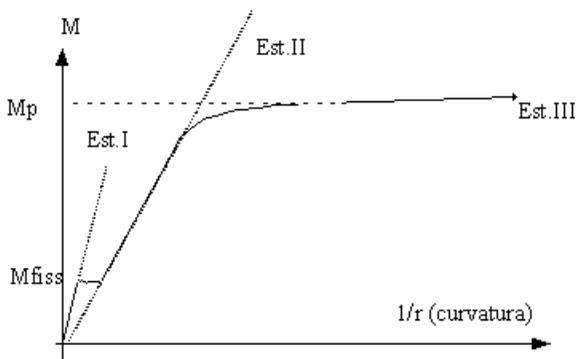


Figura 3-2 – Diagrama Momento Fletor X Curvatura (LORIGGIO, 2002)

Para momentos flectores menores que o momento de fissuração da seção o comportamento é praticamente elástico, caracterizado pelo modelo do Estádio I, que imagina que os materiais trabalham elasticamente, inclusive o concreto submetido à tração. Após a fissuração, o comportamento é bem representado pelo modelo do Estádio II, no qual se admitem comportamentos elásticos para o aço e o concreto. A partir de certa curvatura, o momento permanece praticamente constante com valor muito próximo do momento último da seção, conhecido como o Momento de Plastificação da seção.

A ductilidade das seções transversais durante a fase de plastificação é muito importante, sendo que ela é medida pelo comprimento do patamar de plastificação do diagrama. Na flexão simples, posições da linha neutra mais elevadas, geralmente levam a seções mais dúcteis.

A Figura 3-3 apresenta diagramas momento x curvatura de cálculo para uma seção de laje com várias taxas de armadura. Pode-se notar que

com o aumento da taxa de armadura a linha neutra abaixa, diminuindo a ductilidade da seção.

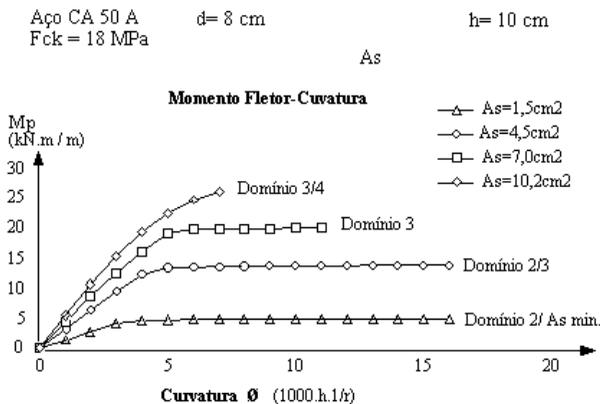


Figura 3-3 – Diagrama Momento Fletor X Curvatura (LORIGGIO, 2002)

Segundo LORIGGIO (2002), “existe uma grande faixa de dimensionamento (domínio 2 e parte do domínio 3) na qual as lajes possuem um comportamento plástico bem definido. Essas lajes são suficientemente dúcteis para que possa ser feito um dimensionamento plástico. Esses dimensionamentos são baseados nos Teoremas da Análise Limite da Teoria Geral da Plasticidade. Entretanto, as normas atuais exigem que seja verificada a ductilidade para os níveis de deformações plásticas de projeto.”

3.4. TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL E FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA ELEMENTOS DE PLACA

Placa é uma estrutura laminar em que uma das dimensões (espessura) é muito menor que as outras, submetida a ações que provocam flexão transversal ao plano definido por sua superfície média. Define-se como espessura “ h ” da placa a menor das três dimensões e, a superfície média, como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento que determina a altura em cada ponto da placa (TIMOSHENKO, 1959). As placas podem ser classificadas como finas, em geral para $h < 0,1L$, ou espessas, em geral para $h > 0,10L$, em que “ h ” é a espessura da placa e “ L ” a menor dimensão em planta.

Um carregamento será suportado por uma distribuição bidirecional de esforços, entre eles: forças cortantes, momentos fletores e momentos

de torção. Esses esforços são análogos aos que ocorrem em vigas (comportamento unidirecional), porém mais complexos.

As placas podem variar entre si por diversos fatores, a citar: forma (retangulares, circulares, com aberturas); disposição dos apoios (balanços, apoios ao longo do contorno, continuidade entre as placas); tipos de apoio (simples ou engastamento), etc.

Existem diversos procedimentos para a análise e dimensionamento de lajes com comportamento linear e não-linear. Destacam-se as teorias elásticas e a teoria da análise limite.

3.4.1. Hipóteses fundamentais da análise elástica

Assim como as estruturas reticuladas em geral (vigas) podem ser estudadas através da Resistência dos materiais, as lajes também podem ser adequadamente estudadas pela Teoria das Placas Delgadas, baseadas nas seguintes hipóteses fundamentais (hipóteses de *Kirchoff-Love*):

- O material é homogêneo, isotrópico e elástico linear (obedece a lei de Hooke);
- A placa indeformada é plana;
- A espessura “h” da placa é pequena em relação às outras dimensões;
- As tensões normais à superfície média são desprezáveis em relação às demais tensões;
- Os pontos pertencentes, antes da deformação, a retas normais à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada;
- Os deslocamentos e rotações são muito pequenos em relação à espessura da placa, sendo possível não considerar a influência deles no estudo das condições de equilíbrio da laje.

3.4.2. Análise Linear

Na análise linear admite-se o comportamento elástico-linear para o concreto armado. As características geométricas podem ser determinadas pelas seções brutas das lajes, e o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados de acordo com os valores prescritos pela NBR 6118:2014, item 14.7.3.

A análise linear fornece resultados que normalmente são usados para a verificação dos Estados Limites de Utilização. Para a grande maioria das estruturas de concreto armado, no entanto, é possível estender tais resultados para as verificações aproximadas de Estado Limite Último,

mesmo com altas tensões, desde que se observem a ductilidade em determinadas seções críticas sujeitas a maiores rotações.

Definição da Equação de Lagrange

A equação diferencial de equilíbrio de momento de uma viga é:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad [\text{EQ. 3.1}]$$

A equação [EQ 3.1] pode ser expressa em termos de carregamento externo:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad [\text{EQ. 3.2}]$$

A equação diferencial correspondente para um elemento de placa é mais complexa, pois inclui termos relativos a momentos nas direções x e y, como também momentos de torção, que existirão em lajes. Inicialmente, deve-se considerar um elemento de placa infinitesimal de dimensões dx, dy (Figura 3-4), sujeito a uma carga vertical p(x,y).

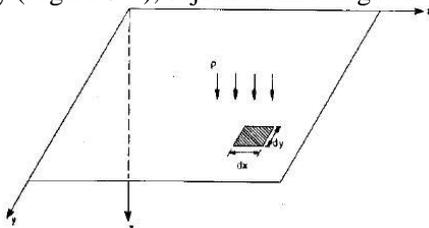


Figura 3-4 – Elementos infinitesimal dx, dy, sujeito a uma carga distribuída “p”, JAWAD (1994)

As forças e momentos necessários ao equilíbrio do elemento estão indicados na Figura 3-5 e, considerando o sinal positivo tal qual como o indicado.

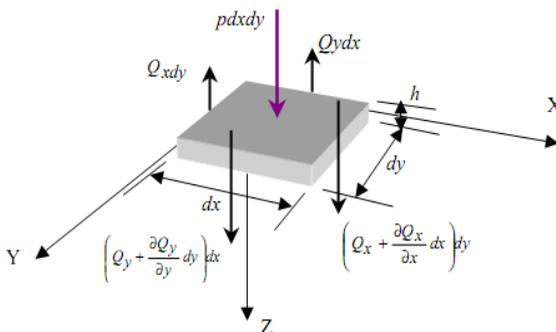


Figura 3-5 – Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes (COELHO, 2000)

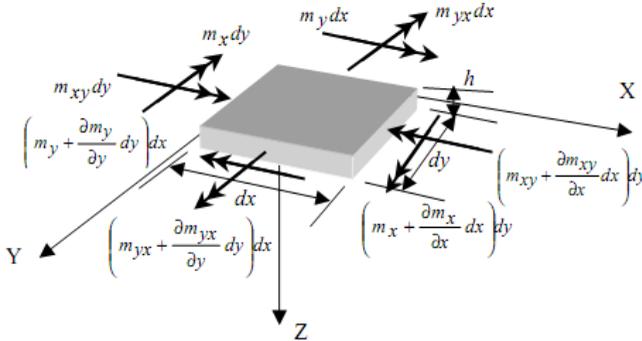


Figura 3-6 – Equilíbrio elemento de placa momentos fletores e de torção (COELHO, 2000)

Da mesma forma como os esforços, os deslocamentos “w” também são considerados positivos para baixo. Vale frisar que, pela Figura 3-5 e Figura 3-6, para o equilíbrio de um elemento de placa são necessários:

- Duas forças cortantes: V_x e V_y ;
- Dois momentos fletores: M_x e M_y ;
- Dois momentos de torção: M_{xy} e M_{yx} .

Como os valores dos momentos fletores, de torção e esforços cortantes dependem das coordenadas x e y, deve-se levar em consideração a variação que eles irão sofrer ao longo dos comprimentos dx e dy, conforme mostrado na Figura 3-5 e Figura 3-6.

A carga total resultante da carga distribuída “p” aplicada em todo o elemento é dada por:

$$V = p \cdot dx \cdot dy \quad [\text{EQ. 3.3}]$$

Fazendo o somatório das forças verticais (direção z), tem-se a primeira equação de equilíbrio:

$$p(x, y) dx dy - V_x \cdot dy + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy - V_y \cdot dx + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad [\text{EQ. 3.4}]$$

Que se reduz a:

$$p(x, y) + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad [\text{EQ. 3.5}]$$

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção x:

$$M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} \cdot dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dx dy \quad [\text{EQ. 3.6}]$$

$$-V_x \cdot dy \frac{dy}{2} + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + p \cdot dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad [\text{EQ. 3.7}]$$

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção y:

$$M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx} \cdot dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy dx \quad [\text{EQ. 3.8}]$$

$$- V_y \cdot dx \frac{dx}{2} + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + p \cdot dy dx \frac{dx}{2} = 0$$

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad [\text{EQ. 3.9}]$$

Substituindo a [EQ. 3.7] e [EQ. 3.9] na [EQ. 3.5] tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -p \quad [\text{EQ. 3.10}]$$

Em qualquer ponto da placa, a tensão de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, logo $M_{xy} = M_{yx}$, e pode-se chegar na equação [EQ. 3.11], que é a *Equação Diferencial de Equilíbrio das Placas*.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad [\text{EQ. 3.11}]$$

Vale frisar que a equação [EQ. 3.11] independe da laje estar em regime elástico ou plástico, do coeficiente de Poisson e do fato da placa ser isotrópica ou ortótropa. Além disso, pode-se notar que uma parte da equação é resistida por um mecanismo de viga na direção x, outro em y, e uma por momento de torção (x,y). Em todos os casos, o equilíbrio deve ser obrigatoriamente respeitado.

A partir da equação diferencial de equilíbrio das placas, incluindo o comportamento elástico da laje e as Equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos, baseados nas hipóteses de *Kirchoff-Love*, pode-se chegar à *Equação de Lagrange*, que rege o comportamento das placas finas ou delgadas: em regime elástico-linear:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad [\text{EQ. 3.12}]$$

Onde:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

E = módulo de deformação do concreto;

h = altura da laje;

ν = coeficiente de Poisson do concreto;

p = carga por unidade de área, aplicada perpendicularmente ao plano da laje, positiva para baixo;

x, y = coordenadas cartesianas que indicam a posição de um ponto genérico da laje;

w = deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje, positivo para baixo.

Ao comparar a equação [EQ. 3.12] com a equação [EQ. 3.2], observa-se que a *Equação de Lagrange* é mais complexa, haja vista os momentos nas direções x e y e também momentos de torção.

Os momentos fletores podem ser determinados a partir das equações abaixo:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad [\text{EQ. 3.13}]$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad [\text{EQ. 3.14}]$$

$$M_{xy} = -D(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad [\text{EQ. 3.15}]$$

A integração da *Equação de Lagrange* para as lajes retangulares pode ser feita através de vários processos, como a solução por séries simples (*Fourier*), séries duplas trigonométricas (*Navier*), além de existirem várias Tabelas na bibliografia, como *Czerny*, *Bares*, entre outras, que fornecem os esforços e deslocamentos. As tradicionais Tabelas apresentam soluções para os casos mais comuns de carregamento e geometria da placa, embora existam tabelas com soluções mais complexas. Para as soluções de placas diferentes das usuais, existem muitos *softwares* que, usando vários métodos numéricos (diferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno, etc), resolvem a *Equação de Lagrange*. Os programas de computadores estão cada vez mais sendo utilizados, especialmente em casos de lajes não retangulares e com condições de contorno não encontradas em tabelas.

Ainda, eles levam em consideração a deformação vertical das vigas de bordo, sendo que as tabelas sempre consideram os apoios indeformáveis.

3.4.3. Análise linear com redistribuição

Segundo a NBR 6118:2014, item 14.5.3, a análise estrutural é definida como linear com redistribuição quando os efeitos das ações, determinados em uma análise linear, são redistribuídos na estrutura, tendo em vista a consideração os efeitos da fissuração e da quantidade de armadura presente, numa dada seção. Trata-se da consideração de uma porcentagem de plastificação na referida seção. Nesses casos, as condições de equilíbrio e de ductilidade devem ser obrigatoriamente satisfeitas. Todos os esforços internos deverão ser recalculados de modo a garantir o equilíbrio de cada um dos elementos estruturais e da estrutura como um todo.

Para se obter comportamento dúctil em lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

- $x/d \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$;
- $x/d \leq 0,35$, para concretos com $50\text{ MPa} < f_{ck} \leq 90\text{ MPa}$.

De modo a garantir a ductilidade das peças, quando for efetuada uma redistribuição, reduzindo um momento fletor de M para δM , a NBR 6118:2014 impõe limites para o cálculo do coeficiente “ δ ”, a citar, sendo “ x ” a posição da linha neutra.

- $x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25$ para concretos $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$;
- $x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25$ para concretos $50\text{ MPa} < f_{ck} \leq 90\text{ MPa}$.

O coeficiente de redistribuição “ δ ” deve, ainda, obedecer ao limite absoluto $\delta \geq 0,75$.

Por fim, todos os esforços internos deverão ser recalculados de modo a garantir o equilíbrio de cada um dos elementos estruturais e da estrutura como um todo.

3.4.4. Análise Limite ou Plástica

Na análise plástica, admite-se que o concreto armado trabalha na plastificação, caracterizada por escoamento das armaduras e pelo progresso das linhas de plastificação. Admite-se, pois, neste tipo de análise, um comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito para concreto armado, permitindo uma determinação adequada do valor da carga máxima que ele pode ser submetido numa solicitação, carga esta conhecida como carga de ruína ou carga última.

A NBR 6118:2014, item 14.7.4, permite que a análise dos esforços para a consideração do ELU sejam efetuadas por meio da Teoria das Charneiras Plásticas.

Em alguns casos, é necessária a verificação das rotações das linhas de plastificação. De acordo com o item 14.6.4.4 dessa mesma norma, o limite, função da profundidade relativa x/d da linha neutra na seção para o momento fletor considerado na rótula, pode ser determinado através da Figura 3-7, para razão a/d igua a 6 (onde “a” é a distância entre pontos de momento nulo da região que contém a seção plastificada).

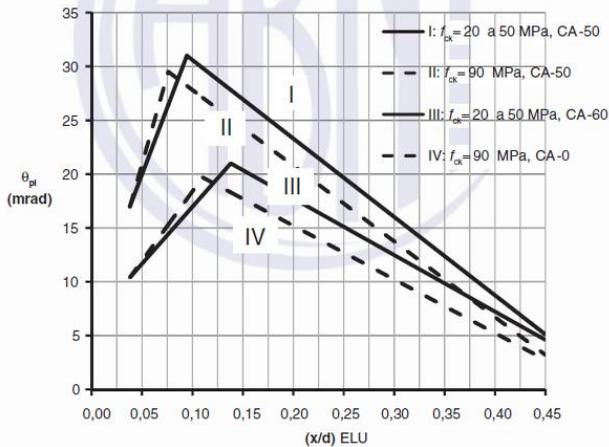


Figura 3-7 – Capacidade de rotação das rótulas plásticas (NBR 6118: 2014)

É dispensada a verificação da capacidade de rotação das rótulas plásticas desde que a posição da linha neutra seja limitada conforme a seguir:

$$x/d \leq 0,25, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa.}$$

$$x/d \leq 0,15, \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa.}$$

A solução exata de um problema pela Teoria da Plasticidade Geral na determinação da carga de ruína de uma estrutura em regime elasto-plástico precisa satisfazer três condições:

- Mecanismo: a estrutura deve tornar-se hipostática com a plastificação provocada pela carga. Isso equivale a dizer que a estrutura deve formar uma configuração possível (as vezes designada por mecanismo cinematicamente admissível);
- Equilíbrio: as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas;
- Plastificação: em nenhum ponto da estrutura pode-se ter esforço superior ao que originou a plastificação.

As hipóteses básicas para que as estruturas possam ser estudadas plasticamente são:

- a) Plasticidade perfeita (no caso das lajes, que tenham um patamar de plastificação, no diagrama Momento Fletor x Curvatura, bem definido e com comprimento suficiente);
- b) Os carregamentos atuantes aumentam sempre proporcionalmente entre si;
- c) Estruturas apresentam pequenos deslocamentos mesmo próximas da ruína.

No caso particular das lajes, o cálculo exato pela teoria da plasticidade não é possível, uma vez que o grau de indeterminação estática das mesmas é infinito. Com isso, em vez da obtenção do valor exato da carga última, determinam-se dois valores: um limite superior, dado pelo teorema cinemático, e um limite inferior, correspondente ao teorema estático. Estes dois teoremas, acompanhados pelo teorema da unicidade, constituem a base fundamental para o desenvolvimento do cálculo plástico e são abordados de maneira sucinta a seguir.

a) Teorema da Unicidade

Existe apenas uma única carga de colapso associada ao colapso da estrutura.

b) Teorema cinemático ou do limite superior

Este teorema estabelece que toda carga correspondente a um mecanismo é de valor igual ou superior ao da carga de ruína da estrutura ou peça em análise. Dá-se o nome de mecanismo a toda e qualquer configuração de ruína cinematicamente admissível. Este teorema permite, portanto, a definição de um limite superior para a carga efetiva de ruína, dando margens a um cálculo que pode ser contra a segurança, uma vez que dá margem para obtenção de um valor superestimado da carga última. Segundo LORIGGIO (2002), para uma determinada configuração possível da laje (configuração que torna a laje hipostática) associada a um dado carregamento, existe um n° “K”, tal que o carregamento multiplicado por “K” satisfaça à condição de igualdade de energias desenvolvidas interna e externamente à laje. Esse valor de “K” é igual ou superior ao valor de “K” que leva a laje ao colapso.

A Teoria das Charneiras Plásticas é uma aplicação deste teorema às lajes e constitui um instrumento de análise de esforços para a consideração do Estado Limite Último em placas, conforme prescrito na NBR 6118:2014, item 14.7.4. Segundo LORIGGIO (2002), a Teoria das Charneiras Plásticas deriva do Teorema Cinemático, no qual o valor de K encontrado para uma determinada configuração possível em estudo é sempre contra a segurança, a não ser que a configuração seja exatamente

a configuração de ruína da peça. É necessário, portanto, que se verifique, dentre todas as configurações possíveis, qual a que oferece o menor valor de K , sendo esta a configuração de ruína.

c) Teorema estático ou do limite inferior

Estabelece que todo carregamento em equilíbrio com uma distribuição de esforços estaticamente admissível apresenta valor igual ou inferior ao que provoca a ruína. Entende-se por distribuição de esforços internos estaticamente admissível aquela que satisfaça às condições de contorno e que não ultrapasse a capacidade resistente da peça ou estrutura analisada. Permite, assim, a obtenção de um limite inferior para a carga de ruína e conduz a um cálculo a favor da segurança.

O processo das faixas de Hillerborg é um exemplo de aplicação deste teorema, baseando-se na determinação simplificada da distribuição de momentos, conforme se pode ver em HILLERBORG [1975]. Segundo LORIGGIO (2002), O método estático, ou de Hillerborg, consiste em encontrar distribuições de esforços internos que estejam em equilíbrio com as cargas aplicadas e dimensionar a laje de modo que sua resistência, em cada ponto, seja suficiente para suportar estes esforços internos. Esse método tem uma grande flexibilidade e permite soluções simples em casos de geometrias e carregamentos complexos. Entretanto, para vários casos, não se sabe a priori se a solução encontrada é ou não econômica e qual é o nível de redistribuição de esforços necessário, para se chegar à distribuição de esforços imaginada. E para a laje ter a segurança adequada deve-se garantir a sua capacidade de deformação plástica.

A análise limite não pode ser adotada quando são considerados os efeitos de segunda ordem global ou quando não houver suficiente ductilidade para que as configurações previstas sejam atingidas.

Com o intuito de se garantir as condições adequadas de ductilidade, dispensando a verificação explícita da capacidade de rotação plástica da seção, a NBR 6118:2014 item 14.7.4, limite a posição da linha neutra em $x/d \leq 0,30$.

A razão entre os momentos de extremidade ou de borda e momentos no vão ou centrais, na mesma direção, deve estar entre 0,5 e 2,0.

3.4.5. Análise não-linear

A NBR 6118:2014, item 14.7.5, permite realizar análises não-lineares tanto para verificações de estados limites últimos como para verificações de estado limites de serviço.

A análise não-linear considera o concreto armado trabalhando com um comportamento não linear, levando em conta ou não os efeitos de segunda ordem. As condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade devem ser necessariamente satisfeitas.

Elementos estruturais isolados ou mesmo estruturas compostas de vários elementos sob níveis de tensões tais que lhe conferem um comportamento em regime elástico não linear, podem ser analisados com o auxílio de métodos numéricos que admitem um diagrama momento-curvatura de cálculo e que em média, as seções planas permanecem planas.

Antes de sua realização é necessário fazer uma estimativa preliminar da disposição e quantidade de armaduras, uma vez que as mesmas influenciam seu desenvolvimento. Dada a dificuldade do processo iterativo para encontrar a malha nas análises não lineares, essa estimativa normalmente é feita através de modelos mais simples em análise linear. Por esse e outros motivos, para aplicação em projetos estruturais, as análises não lineares não são usualmente empregadas, sendo que o desenvolvimento desta Tese apresentará modelagens lineares com redistribuição de lajes lisas, incluindo o efeito da plastificação.

Todos os esforços internos, tensões, deslocamentos e deformações da estrutura devem ser calculados com base em valores médios das propriedades dos materiais (E_c , f_{ctm} , etc.), com exceção de regiões críticas (como por exemplo as de apoios, regiões de cargas concentradas, regiões de encontro de vigas) em que a resistência última precisa ser calculada, onde devem ser adotados valores de cálculo para essas propriedades.

Os valores finais das áreas de armaduras necessários na análise não-linear devem ser bem próximos daqueles previamente estimados. Havendo diferenças significativas, devem ser adotados outras distribuições e repetir-se o processo até se obter uma solução convergente e considerada adequada.

3.4.6. Comentários relevantes sobre os tipos de análises

Apesar das lajes de Concreto Armado possuírem um comportamento plástico, é possível utilizar a teoria das Lajes em Regime Elástico para fazer o seu dimensionamento. Não será o procedimento mais econômico, mas o Teorema Estático afirma que a solução vai estar a favor da segurança. No entanto, para verificações em serviço, a distribuição elástica de esforços é, em geral, adequada utilizando-se naturalmente as Combinações de Serviço e uma inércia equivalente adequada.

Como se discutiu, o dimensionamento com base nos esforços elásticos não é obrigatório no cálculo das lajes de Concreto Armado podendo-nos basear também na Teoria Geral da Plasticidade. A economia na armadura pode causar problemas nos Estados Limites de Serviço e, portanto, a verificação das condições de utilização devem ser feitas, obrigatoriamente, com outra análise que represente bem as condições de utilização.

As análises não-lineares, propriamente ditas, conduzem certamente a dimensionamentos econômicos, no entanto, não se trata da melhor alternativa para projeto de estruturas, por serem análise complexas, de difícil interpretação, e precisam de um trabalho iterativo com definição inicial da distribuição das armaduras.

Aqui, mais uma vez, destaca-se a metodologia inovadora proposta nesta Tese, ou seja, uma modelagem numérica linear com redistribuição, que fornece bons resultados ao ELU, como será demonstrado no decorrer do texto.

3.5. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE LAJES LISAS

Os métodos mais tradicionais para a determinação de momentos fletores em uma laje têm sido baseados em modelos elásticos. Lajes mais complexas somente puderam ser resolvidas usando procedimentos numéricos, os quais se tornaram possíveis com a evolução dos computadores. Dentre os procedimentos numéricos existentes, citam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que será utilizado nesta Tese.

3.5.1. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico e aproximado utilizado para resolver problemas em engenharia, principalmente nos quais não é possível obter soluções satisfatórias por métodos analíticos. Consiste na discretização de um meio contínuo em um número finito de elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Utilizam-se, para tanto, elementos que são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos. Soluções que compartilhavam da mesma filosofia deste método têm origem no final do século XVIII (LOTTI et al, 2006), contudo sua viabilização só se tornou possível com o advento dos computadores, facilitando a resolução das enormes equações algébricas.

Conforme LA ROVERE (2001), o MEF pode ser definido sob três diferentes enfoques:

- Enfoque matemático: pode-se interpretar o MEF como um método aproximado para solução de equações diferenciais parciais ou Problemas de Valor de Contorno, assim como o Método das Diferenças Finitas.
- Enfoque físico: o MEF pode ser caracterizado como um método de discretização, ou seja, transforma um sistema contínuo, com uma infinidade de pontos, em um sistema discreto com um número finito de pontos.
- Enfoque variacional: o método é uma modificação do Método Variacional de Rayleigh-Ritz, em que o domínio de integração do funcional é subdividido em regiões.

O MEF consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas, denominadas *elementos finitos*. A este conjunto de regiões dá-se o nome de malha de elementos finitos. Os elementos finitos podem ter formas geométricas diversas, de maneira a permitir uma melhor aproximação do problema. Têm-se elementos unidimensionais com barras de eixo reto ou curvo; elementos bidimensionais planos (triangulares, retangulares, quadriláteros com lados retos ou curvos); elementos tridimensionais sólidos (tetraédricos, hexaédricos, com lados retos ou curvos), elementos laminares de placa (superfície plana) e casca (superfície curva) e elementos axi-simétricos.

Os elementos são ligados entre si por pontos nodais, chamados de *nós*, sendo que cada elemento tem um número determinado de nós. No MEF, por considerarem-se cada região ou *elemento isoladamente*, há a possibilidade de se escolher funções mais simples para representar o comportamento da região.

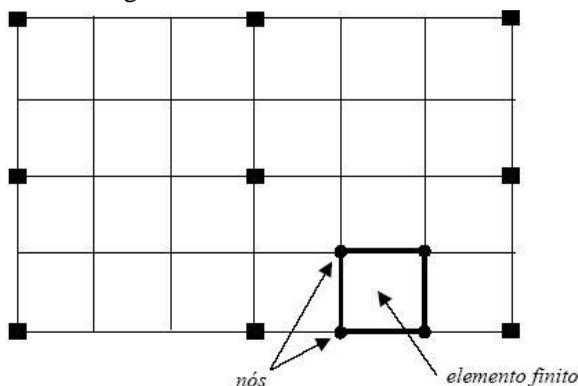


Figura 3-8 - Laje discretizada em elementos finitos (HENNRICHS 2003)

As incógnitas do problema são expressas em função de valores nodais que são relacionadas através de funções de interpolação polinomiais válidas para cada região ou elemento. Os polinômios podem ser do 1º grau ou de ordem superior. Segundo ASSAN (1999), ao invés de se buscar uma função admissível que atenda as condições de contorno para todo o domínio, busca-se funções admissíveis ao domínio de cada elemento finito. Em todos os elementos monta-se um funcional, sendo que todos somados foram o funcional que representa todo o domínio. Para cada elemento, forma-se uma função aproximada gerada por variáveis referidas aos parâmetros nodais e por funções denominadas de funções de forma. A condição de estacionariedade gera um sistema de equações algébricas lineares, sendo que a solução deste sistema fornece os valores dos parâmetros nodais, que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação do MEF que se utilize.

Caso o campo de deslocamentos for descrito por funções aproximadoras e o princípio da energia potencial mínima for empregado, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais. Esta forma corresponde ao Método dos Deslocamentos ou da Rigidez.

Porém, se o campo de tensões ou esforços internos for representado por funções aproximadoras, as incógnitas são tensões ou esforços internos nodais, sendo que esta forma corresponde ao Método da Flexibilidade ou das Forças.

Matricialmente, este sistema de equações pode ser escrito na forma:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad [\text{EQ. 3.16}]$$

onde:

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura

$\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais

$\{F\}$ é o vetor de forças nodais

Resolvendo o sistema são obtidos os deslocamentos nodais $\{U\}$, onde então é possível chegar aos valores dos deslocamentos $u(x,y)$ e $v(x,y)$ em qualquer ponto dentro de cada elemento, através de funções de interpolação. A partir dos deslocamentos chega-se às deformações específicas e às tensões em qualquer ponto dentro do elemento.

Vale ressaltar que o MEF é um método numérico no qual a solução obtida para o problema é uma solução aproximada. As condições de convergência do método dependem da formulação dos elementos como também da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na

discretização. Ou seja, é necessário que a *modelagem* seja adequada. Por isso, é de fundamental importância que o projetista tenha pleno conhecimento dos elementos, configurações de condições a serem aplicadas no MEF, senão os resultados obtidos podem estar muito distantes dos que seriam corretos, aumentando os custos do projeto ou então pondo em risco a segurança dos usuários da edificação. Conforme COOK, MALKUS & PLESHA (1989), “Embora o método dos elementos finitos possa tornar um bom engenheiro ainda melhor, ele pode tornar um mau engenheiro muito perigoso”.

Elemento finito de placa

As placas podem ser classificadas como finas, em geral para $h < 0,1.L$, ou espessas, em geral para $h > 0,10.L$, em que “h” é a espessura da placa e “L” a maior dimensão. Uma placa fina fletirá segundo uma superfície de revolução, admitindo-se pequenos deslocamentos em relação a espessura h . Dessa forma, a teoria de placas finas fica simplificada, podendo-se utilizar modelos matemáticos bidimensionais.

As diversas teorias apresentadas para um elemento de placa se diferenciam quanto ao esforço cortante. Na teoria clássica de Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887) a espessura é inextensível e desprezam-se as deformações por esforço cortante. No entanto, Eric Reissner (entre 1945 e 1947) e R. D. Mindilin (1951) consideraram em suas teorias as deformações por esforço cortante. Vale frisar que a teoria de Kirchhoff se aplica a placas finas e de Reissner-Mindilin a placas espessas.

A cada ano, diversas pesquisas estão sendo desenvolvidas para os elementos finitos de placa, sendo a maioria baseada nas teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindilin. Dentre elas, destaca-se a pesquisa desenvolvida por Batoz e Tahar (1982), baseada na Teoria Discreta de Kirchhoff (*DKT – Discrete Kirchhoff Theory*). Trata-se de um elemento conforme, proposto inicialmente para elemento triangular (Batoz *et al* 1980) e, posteriormente, quadrilátero (*DKQ – discrete Kirchhoff quadrilateral*), sendo esse último utilizado no *software* comercial SAP 2000 (*Computer and Structures*), conforme apresentado por PIERIN (2005).

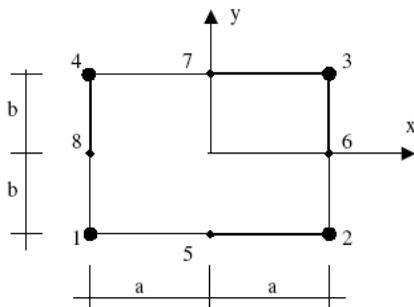


Figura 3-9 – Geometria do elemento DKQ

Segundo KANSARA, 2004, o elemento quadrilátero DKQ possui 12 graus de liberdade e é muito eficiente para a representação da flexão em elementos de placas ou cascas. A *Figura 3-10* apresenta o elemento com os graus de liberdade para cada nó, que são o deslocamento vertical w , e as rotações em torno dos eixos x e y .

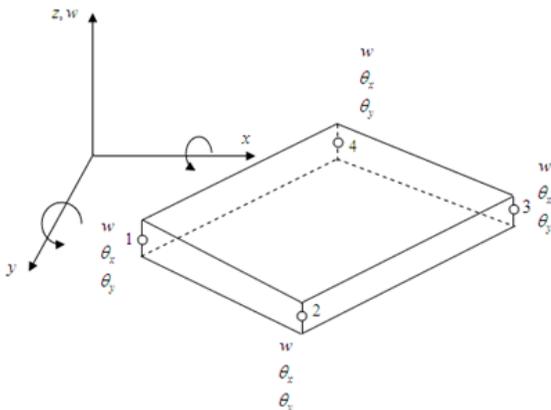


Figura 3-10 – Elemento quadrilátero de Batoz e Tahar Fonte: KANSARA (2004)

A formulação do elemento DKQ despreza a deformação devido ao cisalhamento em pontos discretos do elemento. A energia de deformação é:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \tilde{\chi}^T D \tilde{\chi} dV \quad [\text{EQ. 3.17}] \quad \text{em que,}$$

• \tilde{D} é a matriz constitutiva generalizada de flexão dada por:

$$\tilde{D} = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & G(1-\nu^2) \end{bmatrix}, \text{ [EQ. 3.18]}$$

Sendo: E = Módulo de elasticidade ou Módulo de Young e G=Módulo de cisalhamento.

• $\tilde{\chi}$ representa as curvaturas generalizadas, dadas por:

$$\tilde{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \text{ [EQ. 3.19]}$$

Sendo que β_x e β_y são as rotações do vetor normal aos planos indeformados da placa.

Derivando a energia de deformação interna em relação ao vetor de deslocamentos nodais \tilde{U} , obtém-se a matriz de rigidez do elemento, uma

vez que $\tilde{U} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{U}^T \tilde{K} \tilde{U}$.

3.5.2. Analogia de Grelha

Grelha é uma estrutura plana composta de barras contínuas que se interceptam ou se cruzam mutuamente. Todas as barras e nós existem no mesmo plano, sendo que as barras estão rigidamente ligadas entre si.

A estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano. Entretanto as cargas da grelha atuam normalmente ao plano da mesma e todos os binários têm seus vetores, com seta dupla, no mesmo plano da grelha. Os efeitos de flexão são predominantes nas estruturas usuais de edifícios.

Conforme HAMBLY (1976): “Um painel de laje é estruturalmente contínuo nas duas dimensões do plano da laje de tal modo que as cargas aplicadas são equilibradas por uma distribuição bi-dimensional de esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção. (...) Como a solução rigorosa das equações diferenciais raramente é possível, um procedimento aproximado pode ser usado, a Analogia de Grelha, na qual o painel de lajes é representado para fins de análise por uma grelha bi-dimensional de vigas. (...) os avanços significativos feitos nos programas de Analogia de Grelha nos últimos anos tornam esse procedimento mais versátil, mais rápido, e mais simples de compreender do que os demais”.

O Processo de analogia de grelha consiste em discretizar uma laje em várias faixas, com larguras arbitradas pelos projetistas, segundo as direções principais da placa. Cada faixa é representada por uma barra, com propriedades físicas e geométricas, a citar: rigidez à flexão e rigidez à torção. A Figura 3-11 representa a laje discretizada em barras que se cruzam entre si, formando uma grelha plana.

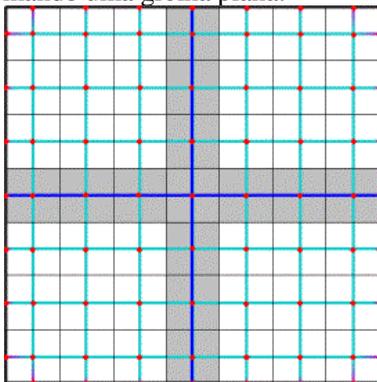


Figura 3-11 – Ilustração laje analisada por Analogia de Grelha (COELHO&LORIGGIO, 2002)

Em uma grelha plana, as cargas atuam perpendicularmente ao plano e os esforços solicitantes podem ser determinados por métodos conhecidos na estática das estruturas, entre eles o método dos esforços e o método dos deslocamentos.

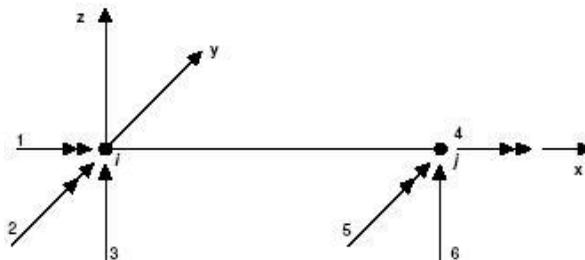


Figura 3-12 – Vetores de esforços atuantes em uma grelha plana

Devido à facilidade de programar, a formulação do Método dos deslocamentos ou Método da rigidez é largamente utilizada para solucionar problemas envolvendo a Analogia de Grelha.

A princípio, o Processo por Analogia de Grelha parece tratar-se da aplicação da análise de grelhas planas em um painel discretizado. Os esforços obtidos serão utilizados para dimensionamento da laje.

Em razão da substituição das faixas de lajes em barras que se cruzam, ocorrerão esforços de torção que serão representados por momentos de torção nas barras. Em consequência disso, os momentos fletores na placa variam conforme o valor dos momentos de torção, uma vez que o equilíbrio na placa deve ser mantido.

Diante do exposto, é necessário analisar a influência do parâmetro de rigidez à torção das barras.

Os esforços de uma barra de uma Grelha, associados aos graus de liberdade, são proporcionais às rigidezes das barras, que correspondem aos parâmetros de rigidez à torção “ GJ_p ” e de rigidez à flexão “ EI_y ”.

O parâmetro “ GJ_p ” é composto do módulo de elasticidade transversal (G) do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade longitudinal (E_c) ou módulo de Young e do momento de inércia à torção (J_p) da seção transversal da barra.

Para materiais isotrópicos e homogêneos, a *Lei de Hooke* generalizada pode ser formulada a partir de apenas três constantes elásticas, a citar: E , ν e G . A equação que relaciona “ G ” em função de “ E ” é:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad [\text{EQ. 3.20}]$$

Para aplicações em concreto armado a NBR 6118:2014, no item 8.2.9, fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0,2, e para “G” adota a seguinte relação aproximada:

$$G = 0,4 \cdot E_c \quad [\text{EQ. 3.21}]$$

Nesse trabalho usou-se “G” conforme expresso na [EQ. 3.21].

Como segundo parâmetro utilizado para calcular a rigidez à torção de uma barra, encontra-se o momento de inércia à torção da seção transversal da barra (J_p).

As barras da grelha possuem seção retangular com largura igual à largura das faixas e altura igual à espessura da placa. O momento de inércia à torção dado pela mecânica dos sólidos para um elemento de seção retangular é:

$$J_p = \beta \cdot e^3 \cdot f \quad [\text{EQ. 3.22}]$$

Em que:

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f} \right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4} \right) \quad [\text{EQ. 3.23}]$$

e = menor dimensão da seção transversal;

f = maior dimensão da seção transversal.

Conforme já observado na [EQ. 3.23], “e” é sempre a menor dimensão. Portanto quando as faixas possuírem largura maior que a altura, o valor “e” é igual à espessura da faixa e “h” igual à largura da faixa. Quando as faixas passam a ter uma largura menor que a espessura da placa esta situação se inverte.

As lajes analisadas por Analogia de grelha têm grande sensibilidade ao parâmetro de rigidez à torção. Na prática, ao invés de se utilizar uma inércia à torção para as barras da grelha igual à apresentada pela mecânica dos sólidos [EQ. 3.22] para uma seção retangular, utiliza-se uma inércia à torção em função da inércia à flexão, dada pela equação a seguir:

$$J_p = \alpha \cdot I \quad [\text{EQ. 3.24}]$$

Onde,

J_p = momento de inércia polar da seção transversal;

α = coeficiente de ajuste da relação $J_p - I$;

I = momento de inércia da seção transversal.

Alguns trabalhos em nível de mestrado desenvolvidos no GAP - Grupo de análise e projeto de estruturas, a citar, COELHO (2000) e STRAMANDINOLI (2003), estudaram a influência do coeficiente “ α ” nos esforços e deslocamentos de uma placa. As conclusões obtidas nesses

dois trabalhos mostram que não existe um valor único para “ α ” de modo a se obter os melhores resultados em termos de esforços e deslocamentos em uma placa. Determinados valores de “ α ” fornecem resultados melhores para a obtenção dos deslocamentos na placa, outros valores “ α ” são melhores para obtenção dos momentos positivos na placa e ainda há outros valores de “ α ” para a obtenção dos momentos negativos na placa. HAMBLY [1976] demonstrou que o valor teórico a ser usado é $\alpha = 2$, o qual será adotado nos trabalhos a serem desenvolvidos na Tese.

Critérios para traçado da malha

Diante da variabilidade de formas das lajes e dos diferentes tipos de carregamento, é difícil estabelecer ou definir uma malha como sendo genericamente a ideal para cada caso. Assim sendo, visando melhores esclarecimentos sobre o uso da técnica, apresentam-se a seguir, algumas considerações para sua correta aplicação neste trabalho.

De acordo com indicações de HAMBLY [1976], apresentadas em BARBOZA [1992], são válidos os seguintes critérios para lajes retangulares, que devem ser adequados a cada tipo de laje que se deseja modelar:

a) As barras da grelha devem estar localizadas em posições pré-determinadas pelo projeto, tais como linhas de apoio ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras se existirem, que contenham uma ação específica;

b) Em lajes ortótropas, cada barra deve ter no máximo uma largura igual a 1/4 do vão transversal ao seu eixo;

c) Numa laje ortótropa, na direção de menor inércia, deve-se considerar a largura das

barras igual a 40% do vão transversal ao seu eixo. Caso haja dúvidas quanto à isotropia ou ortotropia da laje, deve-se adotar o critério anterior;

d) Quanto mais densa a malha, melhores serão os resultados obtidos. No entanto, essa melhora deixa de acontecer quando a largura das barras for menor que duas ou três vezes a espessura da laje;

e) No caso de existência de balanços na laje, é necessário colocar-se pelo menos duas barras transversais ao vão em balanço;

f) Deve-se colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura para o cálculo do momento de inércia à torção deve ser diminuída de 0,3 h, por se tratar do ponto por onde passa a resultante das tensões de cisalhamento devidas à torção;

g) Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja

largura das barras não seja superior a três ou quatro vezes a espessura da laje;

h) Não devem ser considerados os orifícios na laje desde que sua maior dimensão não exceda $3h$, sendo h a espessura da laje, a não ser que estejam localizados muito próximos dos pilares. Existindo aberturas maiores, devem ser aplicados os mesmos critérios válidos para as bordas livres.

3.6. MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES

A análise estrutural de lajes lisas pode ser realizada pelo Método dos Pórticos Equivalentes. Segundo a NBR 6118:2014, item 14.7.8, “Nos casos em que os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais, de maneira regular e com vãos pouco diferentes, o cálculo dos esforços pode ser realizado pelo processo elástico aproximado, com redistribuição, que consiste em adotar em cada direção pórticos múltiplos, para obtenção dos esforços solicitantes.”

O ACI-318 permite o cálculo como pórticos para estruturas com pilares que apresentem no máximo um desvio de 10% em relação ao alinhamento dos demais. Evidentemente para lajes bastante irregulares, com pilares desalinhados e presença de grandes aberturas é recomendável o uso de métodos mais refinados como a analogia de grelhas ou o método dos elementos finitos.

Dos métodos existentes de pórticos equivalentes, existem pelo menos três com pequenas variações no tipo de recomendações: Norma Brasileira, Norma Americana e a Norma Europeia (o mesmo adotado pela Norma Inglesa).

3.6.1. Norma Brasileira NBR 6118:2014

O método do pórtico equivalente proposto pela NBR 6118:2014, item 14.7.8, consiste em dividir a estrutura em cada direção em uma série de pórticos constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da laje limitada pela metade da distância entre duas linhas de pilares conforme apresentado na Figura 3-13.

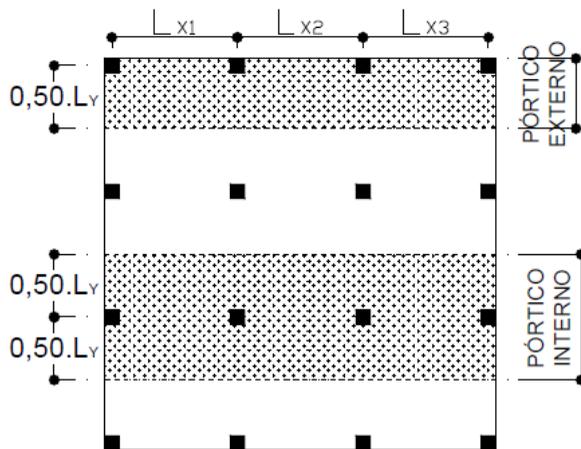


Figura 3-13 – Definição pórticos segundo a NBR 6118:2014 (EMERICK, 2005)

Para cada pórtico deve ser considerada a carga total. A distribuição dos momentos obtida em cada direção, segundo a NBR 6118:2014, item 14.7.8, deve ser feita da seguinte maneira:

- 45,0 % dos momentos positivos para as duas faixas internas;
 - 27,5 % dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- externas;
- 25,0 % dos momentos negativos para as duas faixas internas;
 - 37,5 % dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

Obrigatoriamente devem ser considerados os momentos de ligação entre a laje e pilares externos. A distribuição dos momentos proposta pela NBR 6118 requer entendimento do que são as faixas internas e externas do painel, conforme é mostrado na Figura 3-14.

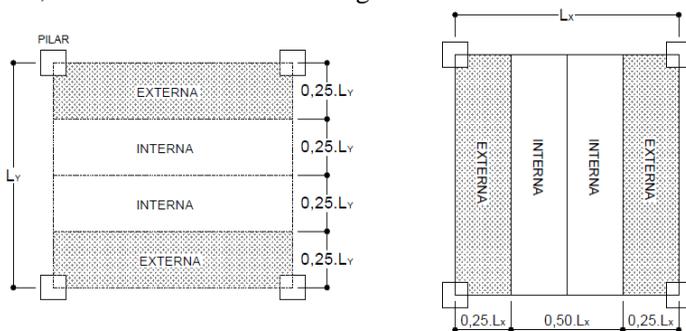


Figura 3-14 – Faixas de distribuição dos momentos fletores segundo a NBR 6118:2014

A Figura 3-15 indica os momentos distribuídos pelo pórtico equivalente nas regiões dos apoios e nos vãos entre apoios. Os momentos M_1 e M_2 são valores negativos correspondentes à tração das fibras superiores e os momentos M_3 e M_4 positivos à tração das fibras inferiores no painel de laje. Os momentos M_{apoio} são os momentos negativos máximos na região dos apoios, assim como o $M_{\text{vão}}$ é o momento positivo máximo no vão entre apoios.

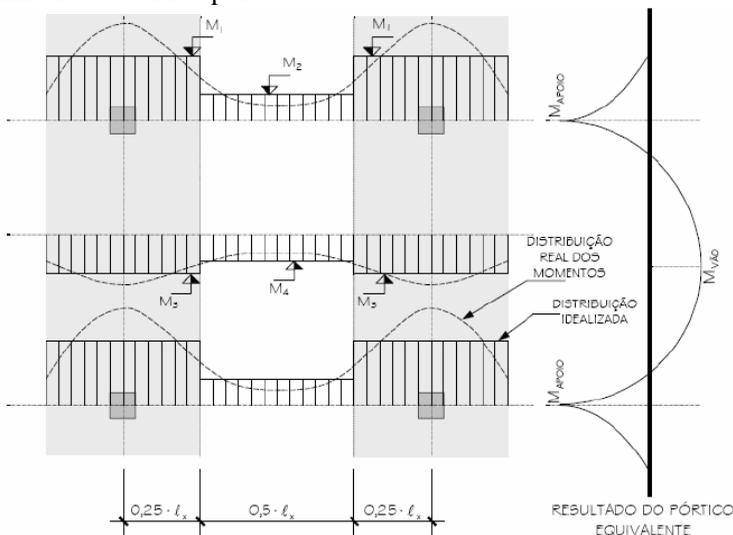


Figura 3-15 – Distribuição dos momentos nas faixas (EMERICK, 2005)

Encontrados os momentos máximos do pórtico equivalente, passe-se a distribuí-los na direção ortogonal ao pórtico considerado. Deve-se prestar bastante atenção nos pavimentos em que as faixas externas e internas são diferentes em largura e carregamento, gerando pórticos com momentos máximos desiguais e conseqüentemente afetando os momentos distribuídos em cada faixa.

$$M_1 = 0,375 \times \frac{M_{\text{apoio}}}{0,25l_x} \qquad M_3 = 0,275 \times \frac{M_{\text{vão}}}{0,25l_x}$$

$$M_2 = 0,25 \times \frac{M_{\text{apoio}}}{0,5l_x} \qquad M_4 = 0,45 \times \frac{M_{\text{vão}}}{0,5l_x}$$

ARAÚJO 2003 afirma que os momentos negativos obtidos com esse método são os valores que devem ser usados para o

dimensionamento, não sendo permitido o arredondamento do diagrama de momentos fletores sobre os apoios.

Para encontrar os esforços axiais nos pilares, ARAUJO (2003), indica que se pode adotar a média entre os valores obtidos em cada uma das direções. Já EMERICK (2005), aconselha o uso do maior dos valores encontrados entre as duas direções.

3.6.2. Norma europeia EuroCode 2 (2004)

O método dos pórticos equivalentes proposto pelo EuroCode 2 (2004) e também pela norma Inglesa é bastante parecido com o proposto pela Norma Brasileira, com exceção de alguns detalhes, a citar:

1) A estrutura deve ser dividida em uma série de pórticos nas duas direções ortogonais constituídos por colunas e barras horizontais, cujas inércias serão iguais às da seção bruta de cada elemento.

2) A largura da laje a ser considerada na divisão dos pórticos depende da relação entre os vãos em cada sentido ortogonal da laje. A divisão é feita conforme Figura 3-16.

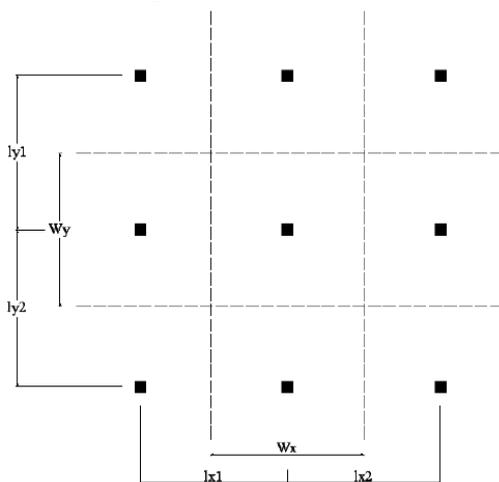


Figura 3-16 – Divisão dos Pórticos (EMERICK, 2005)

$$l_y \leq 2 \times l_x$$

$$l_y > 2 \times l_x$$

$$W_x = (l_{x1} + l_{x2}) / 2$$

$$W_y = (l_{y1} + l_{y2}) / 2$$

$$W_x = (l_{x1} + l_{x2}) / 2$$

$$W_y = 2 \times W_x$$

Para o cálculo dos pórticos, os pilares acima e abaixo da laje devem ser considerados engastados em suas extremidades e deve ser considerada sua altura total.

A distribuição dos momentos nas faixas proposta é considerada conforme Figura 3-17.

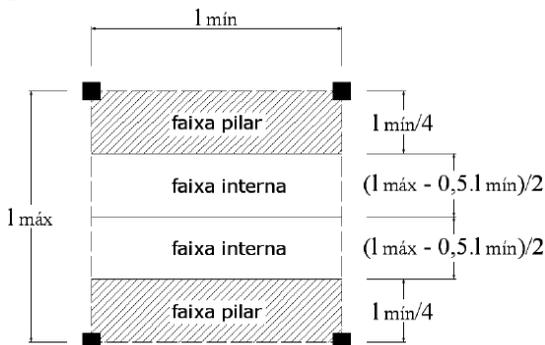


Figura 3-17 – Faixa para a distribuição dos momentos (EMERICK, 2005)

A distribuição dos momentos pela Norma Inglesa é igual a apresentada pela NBR 6118:2014. Já o EuroCode 2 (2004) traz outras possibilidades de distribuição, a citar:

- 50% a 30% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 50% a 70% dos momentos positivos para as duas faixas do pilar;
- 40% a 20% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 60% a 80% dos momentos negativos para as duas faixas do pilar.

3.6.3. Norma Americana ACI

O método dos pórticos equivalentes proposto pela Norma Americana ACI apresenta a mesma definição da largura dos pórticos apresentada pela NBR 6118:2014 (Figura 3-14). Quanto à definição das faixas para a distribuição dos momentos, o ACI considera a largura das faixas definidas por 25% do menor vão da laje, assim como as Normas Inglesa e Européia (Figura 3-17).

A distribuição dos momentos obtidos em cada direção deve ser feita conforme a figura Figura 3-18.

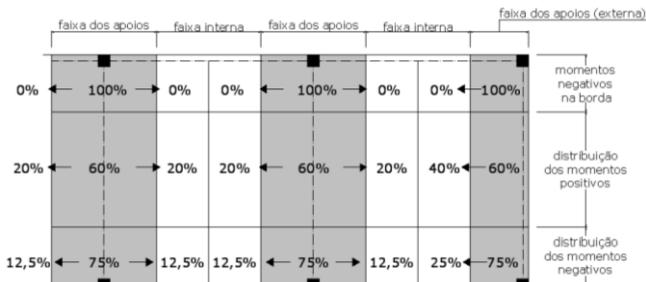


Figura 3-18 – Coeficientes para a distribuição dos momentos de acordo com ACI (EMERICK, 2005)

O ACI permite aumentar a rigidez na região dos pilares em razão da existência de capitéis, engrossamentos e até mesmo pela própria existência do pilar. Nesses casos, o momento de inércia da “lajeveiga” na região que vai do eixo do pilar até sua face externa é tomado como o valor do seu momento de inércia na face do pilar (considerando a existência ou não de engrossamento) dividido por:

$$\left(1 - \frac{c_2}{l_2}\right)^2$$

Onde:

- c_2 é a dimensão do apoio na direção transversal ao pórtico;
- l_2 é o vão na direção transversal ao pórtico.

O ACI leva em consideração o fato de existir uma grande diferença de largura entre a laje do pórtico e o pilar no cálculo do pórtico equivalente. Essa consideração é feita atribuindo-se uma rigidez à torção no encontro do pilar com a laje do pórtico. A partir da combinação da rigidez do elemento de torção com a do pilar, calcula-se uma rigidez equivalente k_{ec} .

$$\frac{1}{k_{ec}} = \frac{1}{\sum k_c} + \frac{1}{k_T}$$

Onde:

- $1/k_{ec}$ é a flexibilidade do pilar equivalente;
- $\sum k_c$ é a soma da rigidez dos pilares acima e abaixo da laje do pórtico;
- k_T é a rigidez do elemento torcional.

A rigidez de uma barra bi-engastada pode ser calculada por:

$$k_c = \frac{4E_c I_c}{L_c}$$

Onde:

- E_c é o módulo de elasticidade do pilar;
- I_c é o momento de inércia do pilar;
- L_c é o comprimento do pilar.

Segundo o ACI, a rigidez do elemento na torção pode ser calculada por:

$$k_T = \sum \frac{9E_c C}{l_2 \left((1 - c_2) / l_2 \right)^3}$$

Sendo:

$$C = \sum \left[\left(1 - 0,63 \frac{x}{y} \right) \times \frac{x^3 y}{3} \right]$$

Onde:

• x e y são o menor e maior lado do retângulo que compõe a seção transversal laje-pilar, conforme Figura 3-19.

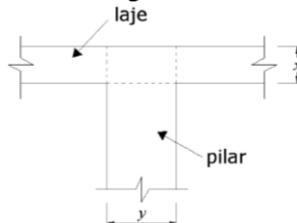


Figura 3-19 – Valores de x e y para a seção transversal laje-pilar (EMERICK, 2005)

Uma possibilidade para considerar a rigidez equivalente do pilar com uso de programas computacionais é por meio do cálculo de um comprimento equivalente para o pilar, de tal forma que a rigidez do pilar passe a ser a rigidez equivalente do conjunto, conforme Figura 3-20.

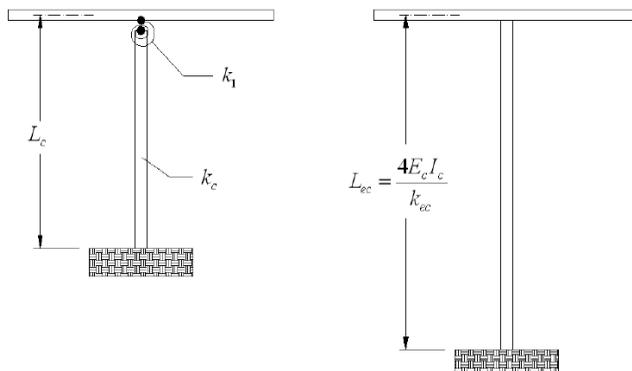


Figura 3-20 – Rigidez equivalente do pilar (EMERICK, 2005)

3.7. PREMISSAS DAS ANÁLISES NÃO LINEARES

As análises não-lineares podem ser classificadas de acordo com o tipo de comportamento, a citar:

- 1) Comportamento não-linear dos materiais (não linearidade física), que é o caso mais comum para estruturas de concreto armado, devido às limitações usuais de deformações.
- 2) Deformações (deslocamentos e/ou rotações) são grandes o suficiente que as equações de equilíbrio precisam contar com a forma deformada da estrutura (não linearidade geométrica). Entretanto, as deformações específicas ainda são pequenas.
- 3) O último grupo usa equações que representam ambas as não linearidades, físicas e geométricas. Não se pode aplicar a carga total de uma única vez, mas sim é necessário integrar em incrementos de carga (ou incrementos de tempo). Em geral, essa é a abordagem mais precisa, e ao mesmo tempo a mais complicada de ser implementada (ATENA, 2016).

Basicamente, há duas possibilidades para a formulação do comportamento não-linear geométrico de estruturas, baseadas na forma deformada: Lagrange e Euler. Para a análise estrutural, a formulação de Lagrange é a mais indicada, interessada no comportamento infinitesimal de partículas de volume dV e não no fluxo (caso de Euler).

A formulação de Lagrange, por sua vez, subdivide-se em dois tipos: Formulação Lagrangeana Total e Formulação Lagrangeana Atualizada. É difícil dizer qual formulação é melhor porque ambos têm suas vantagens e desvantagens. Normalmente, depende de uma estrutura particular que está sendo analisada e qual delas usar é uma questão de

julgamento de engenharia. Geralmente, desde que as equações constitutivas sejam adequadas, os resultados para ambos os métodos são idênticos.

3.7.1. Introdução ao software ATENA 3D

O nome *ATENA* é uma abreviação de “Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis”. Trata-se de um *software* desenvolvido na República Tcheca, por Cervenka Consulting, essencialmente para análise não-lineares de estruturas de concreto armado.

Ele utiliza um modelo constitutivo realista do concreto, que permite uma simulação real em serviço, bem como nas condições de carregamento último. A redistribuição de forças internas devido ao comportamento não linear do material é levada em consideração, sendo que as tensões resultantes bem como o estado de deformação satisfazem os três requisitos de mecânica: equilíbrio de forças, compatibilidade de deformações e leis materiais.

Além disso, utiliza a Formulação Lagrangeana Atualizada e atende aos três níveis máximos da análise não linear. Por isso, permite modelar e analisar, pelo Método dos Elementos Finitos, o comportamento não-linear de estruturas tridimensionais, e não somente planas.

Modelo Constitutivo do Concreto

O modelo constitutivo do concreto utilizado pelo *ATENA 3D* chama-se SBETA, e contém os seguintes efeitos do comportamento do concreto:

- Comportamento não linear na compressão, incluindo pré-pico e pós-pico;
- Comportamento de fratura de concreto na tração, com base na mecânica de fratura não linear;
- Critério de falha baseado em estado multiaxial de tensões;
- Redução da resistência de compressão após a fissuração;
- Possibilidade de levar em consideração o efeito de “*Tension Stiffening*”;
- Dois modelos de fissuração: “fixed crack direction” e “rotated crack direction”;

Relação Tensão-Deformação

As relações consideradas para o comportamento do material num estado multiaxial, foram reduzidas a um estado uniaxial, de forma a eliminar o efeito de Poisson, introduzindo uma extensão equivalente uniaxial.

Para a relação tensão-deformação, é utilizado um diagrama assimétrico, de acordo com a Figura 3-21, baseado no comportamento real do material. Esse diagrama está de acordo com as recomendações do CEB-FIP *Model Code* 2010, e serve tanto para concretos normais como para concretos de alta resistência.

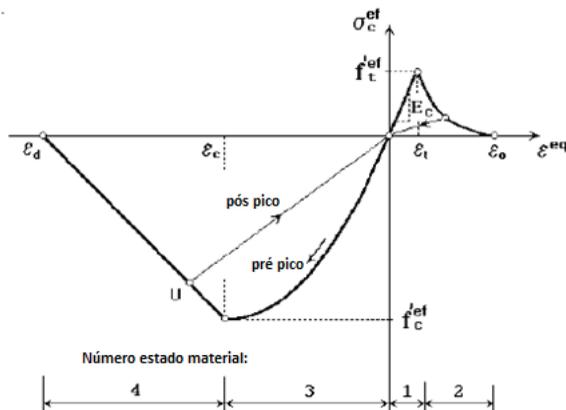


Figura 3-21 – Diagrama Tensão-Deformação utilizado no ATENA 3D (ATENA, 2016)

O estado do material (concreto) é determinado de acordo com a numeração no diagrama da Figura 3-21. Os estados 1 e 3 representam os estados iniciais do material, antes da existência da fissuração, em tração e compressão, respectivamente. Os estados 2 e 4 representam o comportamento do concreto após alguma fissuração. O estado 2 é caracterizado por fissuras perpendiculares às forças de tração, enquanto o Estado 4 caracteriza-se pela existência de fissuras paralelas ao carregamento.

Os valores máximos de f_c^{ef} e f_t^{ef} são determinados de acordo com o critério de ruptura Multiaxial.

Comportamento sob tração

O comportamento do material antes da fissuração é Elástico-Linear. Nesse caso, E_c representa o Módulo de Elasticidade Inicial e f_t^{ef} é a tensão de tração determinada pelo critério de ruptura Multiaxial.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \times \varepsilon^{eq} \quad \text{para } 0 \leq \sigma_c^{ef} \leq f_t^{ef} \quad [\text{EQ. 3.25}]$$

No momento em que a estrutura atinge o ponto de fissuração, as aberturas de fissuras são simuladas baseadas na lei de abertura de fissuras exponencial (*fictitious crack model*), adequada para representar a propagação de fissuras no concreto, mostrada na Figura 3-22.

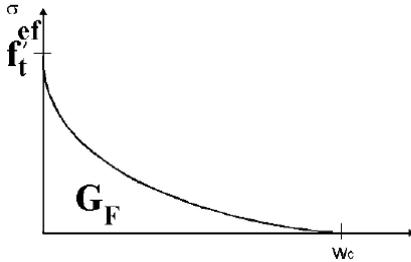


Figura 3-22 – Lei de abertura de fissuras exponencial (ATENA, 2016)

Nas ordenadas está representada a tensão resistente à tração e nas abcissas a abertura de fissuras. A função da abertura de fissuras é baseada na energia de fratura e na resistência à tração do concreto, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{\sigma}{f_t^{ef}} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad [\text{EQ. 3.26}]$$

$$w_c = 5,14 \frac{G_f}{f_t^{ef}}$$

Onde:

w = abertura de fissuras;

w_c = abertura de fissuras quando a tensão de tração é igual a zero;

G_f = energia de fratura, que corresponde a quantidade de energia necessária para criar uma área unitária de fissuras sem tensão;

c_1 e c_3 = constantes igual a 3 e 6,93, respectivamente, derivadas experimentalmente por HORDIJK (1991).

Vale frisar que o fato de utilizar comportamentos baseados na abertura de fissuras está relacionado com a reduzida dependência da malha de Elementos Finitos.

Comportamento sob Compressão

O comportamento do material sob compressão está mostrado na Figura 3-23.

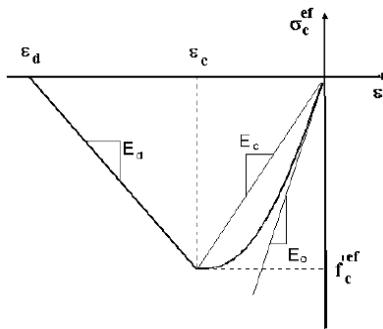


Figura 3-23 – Comportamento Concreto à Compressão *ATENA 3D* (*ATENA*, 2016)

Trata-se de uma adaptação do modelo proposto pelo *Model Code* 2010 (Figura 3-24).

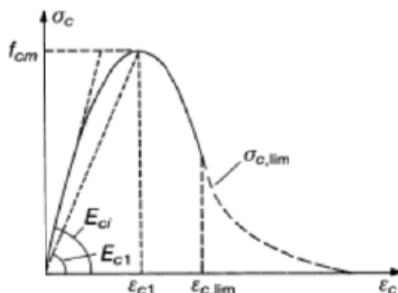


Figura 3-24 – Relação Tensão-Deformação do concreto (*Model Code*, 2010)

No *ATENA 3D*, as tensões e deformações de compressão são consideradas negativas. O *Model Code* 2010 utiliza grandezas características de um concreto, como f_{cm} , E_{ci} , E_{c1} , ε_{c1} e $\varepsilon_{c,lim}$. e o *ATENA 3D* os parâmetros a seguir indicados:

f_c^{ef} = resistência de pico de compressão, obtida pelo critério de ruptura multiaxial, ao contrário de f_{cm} , que se refere a ruptura uniaxial;

ε_c = deformação de pico, associada a f_c^{ef} ;

E_o = módulo de Elasticidade Inicial;

E_c = módulo de Elasticidade Secante Pico, $E_c = \frac{f_c^{ef}}{\varepsilon_c}$.

O ramo ascende recomendado pelo *Model Code* 2010 é:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci} \times \varepsilon_c}{E_{c1} \times \varepsilon_{c1}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c1}^2}}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad [\text{EQ. 3.27}]$$

No caso do *ATENA 3D*, a ruptura multiaxial implica em utilizar f_c^{ef} , levando em conta as tensões nas direções ortogonais. Além disso, o *software* pondera as deformações em relação à deformação máxima através da variável “x”, e também a relação entre o Módulos de Elasticidade através da variável “k”.

$$\sigma_c^{ef} = - \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2)x} f_c^{ef} \quad , \text{com } x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \text{ e } k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad [\text{EQ. 3.28}]$$

Para o ramo descendente, após se atingir a resistência de pico f_c^{ef} , foi adotado um ramo linear descendente, conforme se observa na Figura 3-25.

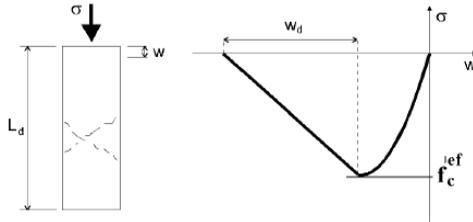


Figura 3-25 – Comportamento Compressão Concreto Pós Pico (*ATENA*, 2016)

Admite-se que a ruptura por compressão é localizada em um plano normal às direção das tensoes principais de compressão. Dessa forma, todos os deslocamentos pós pico e a energia de dissipação estão localizadas nesse plano, sendo que os deslocamento são independentes do tamanho da estrutura. Esta hipótese é fundamentada pelos experimentos de VAN MIER (1986), que sugere utilizar $w_d = 0,5\text{mm}$ para concretos normais, valor para o qual a resistência a compressão passa a ser nula.

Dessa forma, o cálculo da deformação total do concreto à compressão será:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L_d} \quad [\text{EQ. 3.29}]$$

Onde:

ε_d = deformação máxima (total) de compressão, incluindo a Etapa pré-pico e pós-pico;

ε_c = deformação de pico, associada a f_c^{ef} ($\varepsilon_c = \varepsilon_i + \varepsilon_{cp}$) (ε_{cp} – ver Figura 3-26)

w_d/L_d = deformação devido a fase de pós-pico, valor para o qual o a resistência à compressão passa a ser nula.

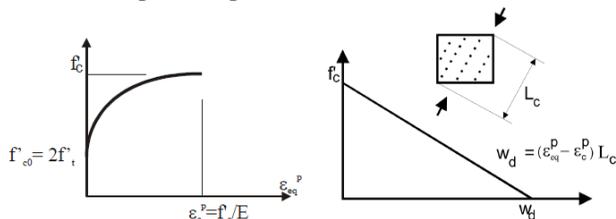


Figura 3-26 – Comportamento Concreto pré-pico e pós-pico (VAN MIER, 1986)

Pode-se nota-se que L_d corresponde ao tamanho do elemento finito da malha na direção paralela à aplicação do esforço no elemento finito. Portanto, essa formulação torna o processo pouco dependente da malha utilizada.

Ruptura Multiaxial

A ruptura do concreto à compressão prevê um estado multiaxial de tensões, de acordo com KUPFER et al (1969), conforme mostrado na Figura 3-27.

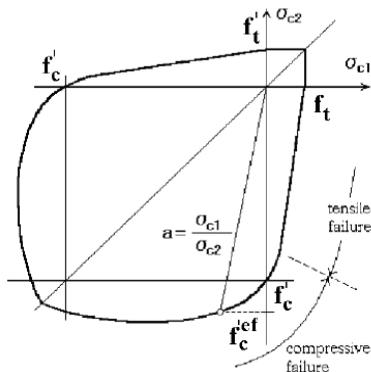


Figura 3-27 – Ruptura concreto à compressão – Estado multiaxial de tensões (ATENA, 2016)

O diagrama da Figura 3-27 prevê a influência do efeito de Poisson, permitindo o aumento da resistência quando há compressões biaxiais, de acordo com a equação 9.6.

$$f_c^{ef} = \frac{1+3,65a}{(1+a)^2} f_c', \text{ com } a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad [\text{EQ 3.30}]$$

Onde:

σ_{c1} e σ_{c2} = tensões principais;

f_c' = tensão uniaxial do concreto.

Além disso, o critério de ruptura multiaxial adotado pelo *ATENA* 3D prevê a redução da resistência à compressão num eixo existindo tração no outro.

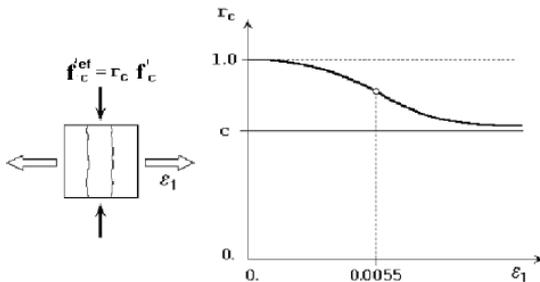


Figura 3-28 – Redução da tensão de compressão após fissuração (*ATENA*, 2016)

$$f_c^{ef} = r_c f_c', \quad r_c = c + (1 - c)e^{-(128\epsilon_u)^2} \quad [\text{EQ 3.31}]$$

Para deformações iguais a zero ou próximas de zero, não há redução das tensões de compressão. Para grandes deformações, usualmente as tensões de compressão são reduzidas a $f_c^{ef} = r_c f_c'$.

Segundo estudos de DYNGELAND, 1989, o fator redutor “ r_c ” sugerido pelo autor é $r_c = 0,8$.

Fissuração

Existem 3 modos de propagação de fissuras, todos de acordo com a aplicação das forças, a citar:

- Modo 1: modo de abertura, por meio das tensões normais ao plano da fissura;
- Modo 2: modo de deslizamento, por meio das tensões de corte na direção da fissura;
- Modo 3: modo de rasgamento, através das tensões de corte no plano da fissura mas perpendiculares à direção do Modo 2.

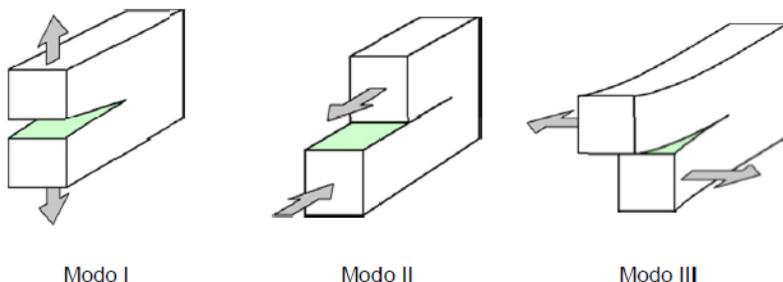


Figura 3-29 – Modos de propagação das fissuras (NOGUEIRA, 2011)

Desse modo, as análises numéricas não-lineares de estruturas de concreto armado preveem esses modos de ruptura por tração. O *Fictitious Crack Model*, é um modelo desenvolvido por HILLERBORG, 1976, baseado no conceito de energia de fratura, que é a energia necessária para criar uma fissura de área unitária, correspondendo à área sob o diagrama tensão-deformação à tração do concreto. Em resumo, esse modelo assume que após atingida f_t^{ef} , inicia-se a fissuração, seguido do amolecimento do concreto, criando a micro-fendilhação. Ao aumentar o carregamento, a energia absorvida por essa fissura fictícia aumenta, até se atingir a energia de fratura, e a tensão não permitir mais a transmissão de tensões.

O modelo de fissuração proposto pelo *software ATENA 3D* está baseado na fissuração distribuída, chamado de *Smearred Crack Model*, assumindo que as fissuras são uniformemente distribuídas dentro do elemento finito da malha. Esse modelo consegue representar a propagação de fissuras em estruturas de concreto armado, considerando o material ortotrópico.

Dentro desse conceito, duas opções são disponíveis para os modelos de fissuração, a citar: Modelo de fissuras fixas (*fixed crack model*) e o Modelo de fissuras rotacionadas (*rotated crack model*).

Fixed Crack Model – FCM (DARWIN 1974): inicia pelo Modo I de fratura, e a direção das fissuras é dada pela direção das tensões principais no início da fissuração (pois antes disso o material ainda se comporta como isotrópico), quando se atinge a resistência última multiaxial de tração f_t^{ef} . Ao se manter o carregamento, a direção da fissura é mantida, representando o eixo de ortotropia do material.

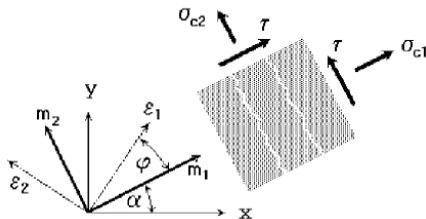


Figura 3-30 – Estado de tensões e deformações – Fixed Crack Model (ATENA, 2016)

Rotated Crack Model – RCM (VECCHIO 1986, CRISFIELD 1989): enquanto no FCM mantém-se constante a direção das tensões principais no início da fissuração para toda a fissura, o RCM segue, ao longo da fissuração, a direção das tensões principais, variando assim a orientação. Nesse caso, não existem tensões de cisalhamento, mas sim somente duas forças principais.

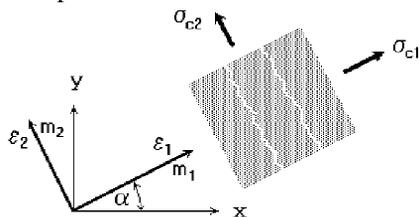


Figura 3-31 – Estado de tensões e deformações – Rotated Crack Model (ATENA, 2016)

Segundo KROPLIN, et al, 1999, as maiores críticas ao FCM é o fato de não permitirem mais fissuras nas proximidades da fissura inicial, o que pode levar as imediações da primeira fenda ter uma resistência superior a capacidade do material, aumentando a carga de ruptura. Já no RCM, pelo fato das fissuras seguirem as direções das tensões principais, esse modelo não apresenta trações exageradas junto as fissuras, o que resulta em um comportamento mais dúctil. Ou seja, a ruptura ocorre sempre segundo a direção principal do carregamento, fazendo com que a dissipação da energia seja a mais otimizada possível.

Modelo Constitutivo do Aço

O ATENA 3D permite utilizar armaduras distribuídas (inseridas como uma percentual dentro do elemento de concreto) como também barras discretas (ou seja, inserir as barras, uma a uma, espaçadas conforme apresentada na Figura 3-32).

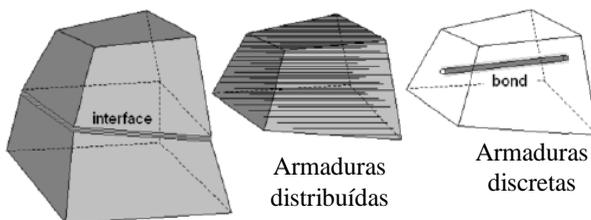
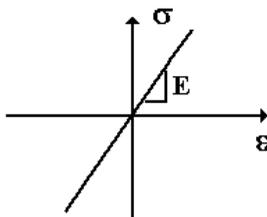


Figura 3-32 – Modelos constitutivos para as armaduras (NOGUEIRA, 2011)

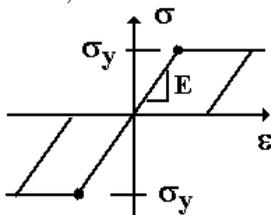
Relação tensão x deformação

São definidas como:

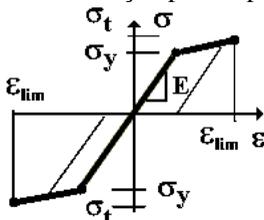
- Linear: o módulo de elasticidade mantem-se sempre constante;



- Bilinear ou Elasto-plástico perfeito: o módulo de elasticidade mantem-se constante até a tensão de escoamento, a partir do qual o módulo de elasticidade é nulo;



- Bilinear com Endurecimento: possui comportamento semelhante ao anterior, mas com a particularidade de poder definir um módulo de elasticidade após o aço atingir a tensão de escoamento bem como definir um limite de deformação para ruptura do aço.



- Multilinear: nesse caso, pode-se definir ponto a ponto a relação tensão x deformação, criando um modelo com comportamento próximo do obtido em ensaios do aço em laboratório.

Modelos de aderência

Além da aderência perfeita entre concreto e aço, o *ATENA 3D* permite também utilizar modelos de aderência, baseados nas relações bond-slip, que definem as tensões máximas de aderência de acordo com o escorregamento entre os materiais. Existem dois modelos pré-definidos e ainda um terceiro, que pode ser definido pelo engenheiro.

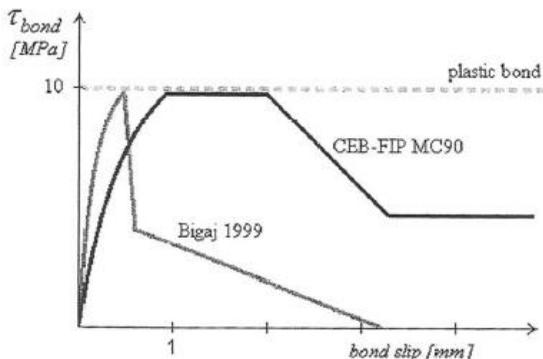


Figura 3-33 – Modelos Bond-Slip pré-definidos (INÁCIO, 2010)

3.7.2. Influência das propriedades dos materiais

Segundo MAMEDE (2012), a análise de lajes lisas em concreto armado é complexa, pois ocorre uma zona de descontinuidade geométrica onde as tensões estão altamente concentradas em uma pequena área. A influência dos parâmetros que influenciam na punção ainda encontram-se em discussão. Dos poucos estudos paramétricos que existem, alguns resultados ainda são controversos.

MENETREV (1994) concluiu que a falha por punção ocorre devido à falha por tração no concreto (ao longo das fissuras inclinadas na zona punccionada) e não devido as tensões de compressão. Além disso, concluiu que o aumento na taxa de armadura de flexão aumenta a carga de punção.

HALLGREN (1996) mostrou que a resistência a tração do concreto tem grande influência na carga de colapso por punção. Em contrapartida, a resistência à compressão tem pequena influência. Demonstrou também que a maior fragilidade de classes de concreto elevadas reduz o aumento da carga última de punção.

OZBOLT (2000) conclui que a taxa de armadura (ρ) e a energia de fratura (G_F) tem influência semelhante e relativamente forte na carga última de punção. Altos valores de G_F e ρ levam a um crescimento mais estável das fissuras dentro do cone de punção, aumentam a zona comprimida, aumentam a carga última de punção muito embora rupturas mais frágeis, o que foram confirmados pelos resultados numéricos.

EDER (2010), mostrou que o aumento da resistência à tração do concreto tem mais influência nos deslocamento do que na carga última, e melhora o comportamento da laje em relação ao efeito da punção.

FARIA ET AL (2010), desenvolveram um estudo paramétrico usando o *software ATENA 3D*, analisando a resistência ao cisalhamento das ligações Laje/Pilar, considerando um pilar interno. Foram analisados os seguintes parâmetros do concreto, a citar: resistência à compressão, resistência à tração, módulo de elasticidade e energia de fratura. Também avaliou a influência da taxa de armadura. Os resultados desse estudo mostraram que a resistência à tração e o módulo de elasticidade tem pequena influência na carga última de punção. Já a resistência à compressão, a energia de fratura e a taxa de armadura tem influência significativa, pois aumentam a carga última na raiz cúbica.

Os estudos mencionados acima tem por objetivo mostrar a importância das propriedades dos materiais, notadamente o concreto, nas análises não lineares. As contradições nos resultados obtidos entre os pesquisadores são em grande parte devidas as simplificações adotadas por cada um, utilizando modelos bidimensionais (2D). Por isso, para análises não lineares das ligações Laje/Pilar em lajes lisas de concreto armado, é importante uma análise tridimensional (3D), com modelos constitutivos dos materiais mais recentes e sempre atualizados.

3.7.3. Elemento finito não-linear

O *ATENA 3D* permite utilizar elementos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) para modelar as estruturas de concreto armado. Para o estudo de estruturas sujeitas aos esforços de punção, os elementos bidimensionais (2D) não representam bem o comportamento da laje. Sendo assim, apresentam-se a seguir os elementos tridimensionais (*Solids Elements*) suportados pelo *ATENA 3D*.

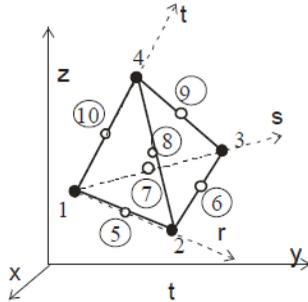


Figura 3-34 – Geometria elementos Tetraedros (ATENA, 2016)

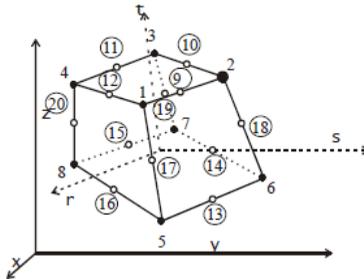


Figura 3-35 – Geometria elementos Hexaedros - Brick (ATENA, 2016)

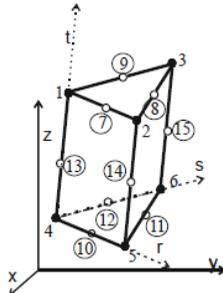


Figura 3-36 – Geometria elementos Wedge (ATENA, 2016)

O número de nós de cada tipo de elemento varia com o tipo de funções de interpolação escolhidas. A numeração nos círculos, localizada nos vértices, indica os nós utilizados para as funções de interpolação lineares.

Os elementos sólidos Hexaedros utilizados no ATENA 3D chamam-se “Brick” e são os mais utilizados para as modelagens de estruturas tridimensionais, especialmente em zonas puncionadas.

Existe também a opção de utilizar elementos *SHELLS*, que são um caso especial do Elemento Sólido, pois possui uma dimensão (espessura)

bem menor se comparada com as demais. No *ATENA 3D*, os elementos *SHELLs* pertencem a família dos elementos finitos *Ahmad* e *IsoShell*. Ao contrário dos elementos *Brick*, os elementos *Shells* possuem 9 pontos de integração, o que reduz o tempo de processamento. Em contrapartida, possuem camadas internas (cujo número é configurado pelo usuário) na formulação do elemento.

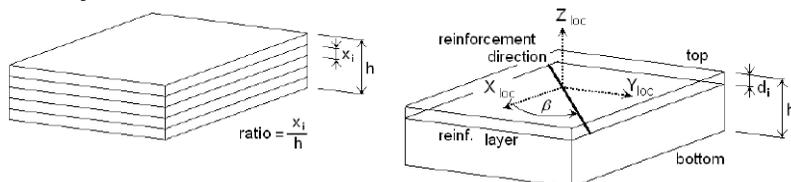


Figura 3-37 – Geometria elementos *SHELLs* (*ATENA*, 2016)

Cada nó do elemento *Shell* possui 3 graus de liberdade correspondente as forças. Entretanto, alguns graus de liberdade não existem devido a introdução de *constrains* que garantem o equilíbrio. Como resultado, esses elementos não possuem momentos e rotações como dados de saída. Além disso, são elementos com grandes dimensões em planta se comparados aos Elementos *Brick*. Então, apesar de poderem ser modelados em conjunto com elementos *Brick*, a interface entre eles fornece resultados ruins. Por isso, nesta Tese, utilizaram-se somente elementos sólido do tipo *Brick*.

3.7.4. Métodos para a solução das equações não lineares

O *software ATENA 3D* utiliza dois métodos para a solução das equações não-lineares, a citar:

- 1) *Newton-Raphson*: este método, e também algumas de suas variações, é um dos mais utilizados para resolução de sistemas de equações não lineares de estruturas discretizadas por EF (BATHE, 1982). O método é incremental e iterativo: aplica-se a cada etapa um incremento de carga inalterado e calcula-se o incremento de deslocamento até se atingir a convergência do equilíbrio das forças. Isso significa que este método deve ser usado nos casos em que os valores de carga devem ser exatamente atendidos. Deve ser usado no caso de seguintes tipos de carga: temperatura, retração, protensão, deslocamentos implícitos, etc. No entanto, não deve ser usado perto de picos locais e globais, seguido de diminuição de carga (ramificação descendente). Em outras palavras, não deve ser usado para análises de Carga Última, quando um carregamento força é aplicado.

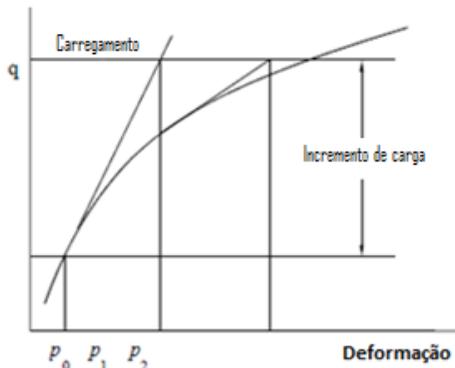


Figura 3-38 – Método *Newton-Raphson* (ATENA, 2016)

- 2) *Arc-Length*: nesse método, mantém o caminho da solução constante (no espaço de deslocamento de carga) e itera-se tanto incrementos de deslocamentos quanto forças. Portanto, deslocamentos e forças alteram a cada iteração.

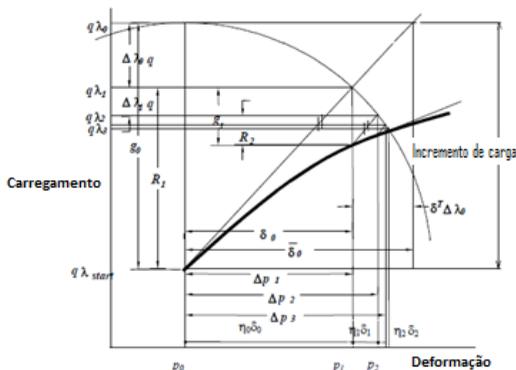


Figura 3-39 – Método *Arc-Length* (ATENA, 2016)

É mais geral que o método *Newton-Raphson*, no entanto, não é útil para algum tipo de problemas, como aqueles em que se deseja precisão no incremento de carga aplicado (forças de contorno, protensão, retração, temperatura, etc).

Para se obter a carga de colapso da estrutura, recomenda-se utilizar a opção *Arc-Length*, uma vez esse método começa a reduzir automaticamente o carregamento aplicado, de modo a obter a carga de pico e, com isso, a capacidade última.

3.7.5. Convergência do método

Nas análises não lineares, tão importante quanto escolher corretamente o método de solução das equações não lineares, é definir os critérios de convergência do método, uma vez que o processo de resolução das equações é iterativo. Parâmetros equivocados de convergência do método trarão resultados indesejados, mesmo que todo o processo de modelagem (que engloba condições de contorno, escolha do elemento finito, definição da malha, aplicação do carregamento, etc) esteja bem calibrado.

No *software ATENA 3D*, existem 4 (quatro) critérios de convergências disponíveis, a citar:

- Critério 1: erro relativo nos deslocamentos;
- Critério 2: erro relativo nas forças residuais;
- Critério 3: erro absoluto nas forças residuais;
- Critério 4: erro relativo na energia, basicamente um produto do erro residual relativo e do erro de deslocamento.

É com base na escolha dos critérios de convergência que a análise encerra. Como recomendação para os casos em que se deseja encontrar a carga última, o limite para os critérios de convergência adequado é 10% (isso significa que a análise encerra quando o erro de convergência no final de uma etapa exceder 10%). Nesta Tese foi utilizado o valor de 10%.

3.7.6. *Tension Stiffening*

Devido à aderência existente entre o concreto e armadura, após o concreto estar fissurado, o concreto entre as fissuras ainda é solicitado, ocorrendo a transferência de tensões do concreto entre as fissuras para as armaduras de aço. Desta forma, o concreto depois de fissurado ainda contribui para a rigidez da peça de concreto armado, sendo este fenômeno denominado *tension stiffening*, ou então, “Contribuição do concreto entre fissuras”. Nesta Tese será utilizada a palavra “*Tension Stiffening*”, uma vez que já se encontra bem difundida no meio técnico.

Segundo LA ROVERE ET AL (2008), o efeito do *tension stiffening* depende de vários fatores, como dimensões dos elementos, taxa de armadura, diâmetros das barras, módulo de elasticidade e resistência do material. Este efeito ocorre até as armaduras atingirem a tensão de escoamento, e tende a aumentar à medida que a taxa de armadura diminui.

Muitos modelos já foram propostos para representar o efeito do *tension stiffening*, desde os mais simples até os mais complexos. Dentre os mais simples, muito embora bem aceitos pelos projetistas de cálculo, é o modelo Branson.

Para as análises não lineares em Elementos Finitos, o CEB FIP *Model Code*-2010 propõe um modelo para considerar o efeito do *tension stiffening*. A equação para determinar a curva tensão x deformação é baseada nas médias das deformações, situada entre o Estádio I e o Estádio II.

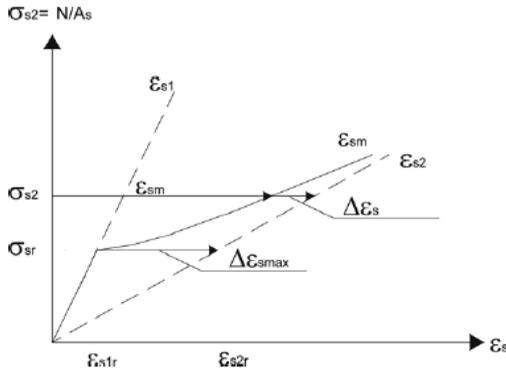


Figura 3-40 – Curva tensão x deformação (*Model Code*, 2010)

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_{s,\max} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad [\text{EQ } 3.32]$$

Onde:

$\Delta \varepsilon_s$ = representa a contribuição do concreto entre fissuras;

$\Delta \varepsilon_{s,\max}$ = máxima variação entre a deformação ε_{s1} e ε_{s2} ;

σ_{sr} = tensão na armadura para tensão não concreto igual a fct;

σ_{s2} = tensão na armadura na seção fissurada para a carga aplicada.

LA ROVERE ET AL (2008), propõe um modelo baseado no modelo constitutivo do CEB, que modifica a equação constitutiva do concreto após a fissuração. Considera-se um decaimento exponencial em função de um parâmetro α , que é obtido em função da taxa de armadura e da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço. Essa é a grande vantagem desse método, pois a taxa de armadura tem grande influência na consideração do *tension stiffening*.

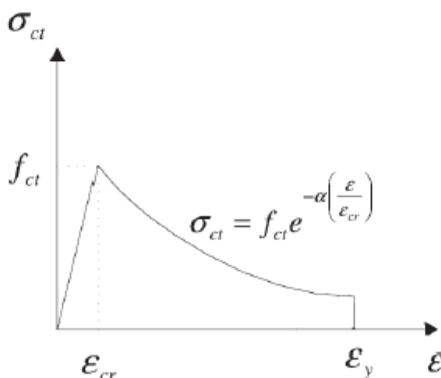


Figura 3-41 – Curva tensão x deformação (LA ROVERE ET AL, 2008)

No *software ATENA 3D*, o efeito do *tension stiffening* pode ser simulado a partir da especificação do fator *tension stiffening* “ c_{ts} ” (Figura 3-42).

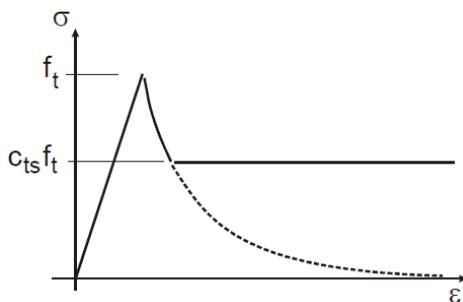


Figura 3-42 – Fator *tension stiffening* (ATENA, 2016)

Esse fator representa o valor limite relativo da resistência à tração. Dessa forma, a tensão de tração não pode ser inferior ao valor dado pelo produto de “ $c_{ts} f_t$ ”. O valor recomendado pelo CEB FIB *Model Code* 2010 é $c_{ts} = 0,4$.

3.8. CRITÉRIO DE SEGURANÇA DAS ANÁLISES NÃO LINEARES

Segundo CERVENKA (2013), o CEB-FIB *Model Code* 2010 representa o estado da arte para o projeto de estruturas de concreto. Ele revela tendências e ideias para o futuro desenvolvimento de código, enquanto códigos operacionais, úteis para projetos de estruturas.

O *Model Code* 2010 apresenta um critério para verificação da segurança das estruturas nas análises não lineares, baseado no Método da Resistência Global.

$$F_d \leq R_d, \quad R_d = \frac{R_m}{\gamma_R^* \gamma_{Rd}}, \quad \text{onde:} \quad [\text{EQ 3.33}]$$

F_d = Carga de projeto;

R_d = Resistência de projeto;

R_m = Resistência média do material;

γ_R^* , γ_{Rd} = coeficiente de segurança global de resistência e fator devido as incertezas do modelo, respectivamente.

Nas análises não-lineares, a resistência de projeto “ R_d ” pode ser obtida por diferentes métodos para a verificação de estados limites, a citar.

3.8.1. Método probabilístico

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R(\alpha\beta), \quad \text{onde:} \quad [\text{EQ 3.34}]$$

γ_{Rd} = fator devido as incertezas do modelo;

β = índice geral de confiabilidade;

α = fator de redução da resistência;

R = Resistência.

Em geral, $\alpha \beta = 0.8 \times 3.8 = 3.04$

Segundo CERVENKA (2013), a vantagem de uma análise probabilística é devido ser independente de um modo de falha. Uma margem de segurança potencialmente mais alta de alguns modos de falha, como por exemplo, falha de cisalhamento, é automaticamente incluída na maior sensibilidade da resistência numérica a uma falha frágil. No entanto, devido às suas demandas computacionais, uma análise probabilística completa é justificada em casos especiais, onde as consequências da falha justifiquem o esforço.

3.8.2. Método dos coeficientes parciais de segurança

Pode ser aplicada para encontrar a carga de projeto, uma vez que se utiliza na análise não linear a resistência de projeto f_d como parâmetro de entrada. Desse modo, $f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}$, onde γ_M corresponde ao coeficiente parcial de segurança do material.

Segundo CERVENKA (2013), os valores de projeto representam propriedades dos materiais extremamente baixas, que não representam um comportamento real do material e, portanto, podem levar a modos de falha distorcidos. Por outro lado, este método aborda diretamente o valor de projeto de destino e, portanto, nenhuma extrapolação está envolvida. No entanto, a probabilidade de resistência global não é avaliada e, portanto, desconhecida.

3.8.3. Método da resistência global

O Método da resistência global subdivide-se em dois tipos, a citar.

Método da estimativa do coeficiente de variação da resistência

É feita uma estimativa da carga última da estrutura com base nos valores característicos e nos valores médios do material.

$$R_m = r(f_m, \dots) \quad , \quad R_k = r(f_k, \dots) \quad \text{[EQ 3.35]}$$

O coeficiente de variação da resistência V_R e o fator global de segurança é determinado:

$$V_R = \frac{1}{1.65} \ln\left(\frac{R_m}{R_k}\right) \quad , \quad \gamma_R = \exp(\alpha_R \beta V_R) \quad \text{[EQ 3.36]}$$

Onde α_R = fator da confiabilidade da resistência (normalmente igual a 0,8) e β = índice de confiabilidade (normalmente igual a 3,8).

Por fim, a resistência de projeto é calculada $R_d = \frac{R_m}{\gamma_R \gamma_{Rd}}$, sendo

o fator $\gamma_{Rd} = 0$.

O método propõe estimar a resistência por duas análises não lineares separadas, utilizando os valores médios e característicos do material. O coeficiente β pode ser alterado se necessário e reflete todos os tipos de falha.

Método do coeficiente global de resistência

A resistência de projeto é calculada a partir de $R_d = \frac{r(f_m, \dots)}{\gamma_R \gamma_{Rd}}$

onde “r” representa os parâmetros da análise não linear, sendo $f_{ym} = 1.1 f_{yk}$ e $f_{cmd} = 1.1 f_{ck} \times (\gamma_s / \gamma_c)$.

Considerando $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,5$, resulta em $f_{cmd} = 0,85 f_{ck}$.

O coeficiente global de segurança é assim obtido:

$$\gamma_{GL}^{concreto} = \frac{f_{cm}}{f_{cd}} = \frac{0,85f_{ck}}{f_{ck}/1,5} = 1,27 \quad [\text{EQ 3.37}]$$

Sendo: $\gamma_R = 1,2$ e $\gamma_{RD} = 1,06$.

A vantagem desse método é que ele abrange ambos os modelos de falha, devido ao aço e ao concreto, sem necessidade de um conhecimento prévio do modo de falha. Por conta disso, é um método conservador se comparado ao anterior, já que contempla também as rupturas frágeis.

4. PESQUISAS RELEVANTES ACERCA DE MODELAGEM DE LAJES LISAS

Teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada à laje, ela provoca momentos fletores que tendem ao infinito em seu ponto de aplicação, gerando pontos de singularidade. Conseqüentemente, em um método numérico, quando um pilar para apoio de lajes é modelado como um ponto isolado, provoca o efeito de uma carga concentrada de sentido contrário, resultando em momentos fletores muito elevados no ponto de aplicação da carga e no entorno dela. Sabe-se que esses momentos não representam o comportamento real da placa e não podem ser utilizados para projetos. Na prática, um pilar não é um ponto, mas sim um elemento com dimensões discretas, suficientes para se considerar uma superfície de apoio e não apenas um nó, gerando resultados diferentes. SKORPEN ET AL (2014), a utilização do Método dos Elementos Finitos para a análise de lajes lisas está bem entendida pelos Engenheiros de Estruturas com exceção da modelagem da ligação das lajes lisas com os pilares.

O *EUROCODE 2* (2004) não prescreve ou determina um tipo de análise ou modelagem para interpretar os resultados obtidos em uma análise numérica para os efeitos de cargas concentradas. Isso naturalmente conduz a inúmeras formas de interpretação, depende da forma como se modela o pilar na ligação pilar/laje lisa também depende da experiência dos projetistas.

Segundo MURRAY ET AL (2005), o projeto de lajes lisas é baseado em normas cujas prescrições são desenvolvidas com bases empíricas.

ROMBACH (2004) listou algumas maneiras de modelar os pilares de apoio de lajes lisas.

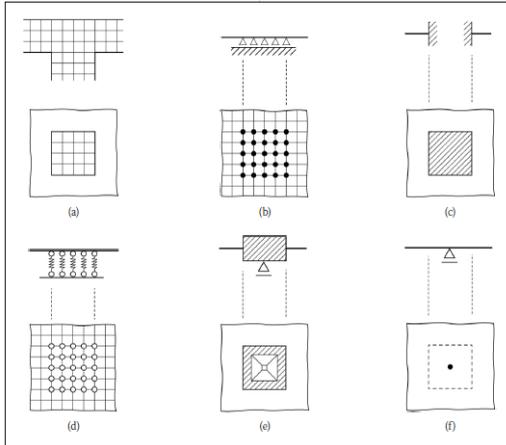


Figura 4-1 – Formas de modelagem da ligação pilar/laje lisa (ROMBACH,2004)

Segue a descrição sucinta de cada caso.

a) Modelo integrado em 3D, conduz a bons resultados, com picos de tensão nas arestas dos pilares, porém demanda um tempo considerável para elaborar o modelo bem como analisá-lo;

b) Apoios pontuais ao longo da área da seção transversal do pilar, conduz a momentos elevados nas faces dos apoios e não é adequado para pilares flexíveis;

c) Propor apoios do 3º gênero nas faces do pilar, conduz a momentos elevados nas faces dos apoios e não é adequado para pilares flexíveis;

d) Apoios elásticos na projeção da área da seção transversal do pilar;

e) Enrijecer a região da seção transversal do pilar, permite a rotação do pilar e é indicado para pilares flexíveis;

f) Apoio pontual, esta é a forma mais comum de ser idealizada, porém é a maneira que mais conduz a resultados pouco precisos. Esse tipo de abordagem provoca pontos de singularidade e os momentos fletores são tanto maiores quanto mais refinada for a malha.

ROMBACH (2004), sugeriu como conclusão dos estudos uma equação para suavizar os momentos fletores em lajes lisas quando essas são modeladas com apoios pontuais fixos.

$$M_s = M_p - \frac{F_s \times b_s}{8}$$

Onde:

M_s = momento fletor arredondado nos apoios;

M_p = pico de momento fletor obtido do análise elástica numérica no ponto do apoio pontual;

F_s = reação de apoio do pilar;

b_s = largura do pilar de apoio.

A NBR 6118:2014 em seu item 14.6.3 permite o arredondamento do diagrama de momentos fletores sobre os apoios, em pontos de aplicação de forças concentradas e em nós de pórticos e como também pode ser visto nos estudos de GLORIA (2003).

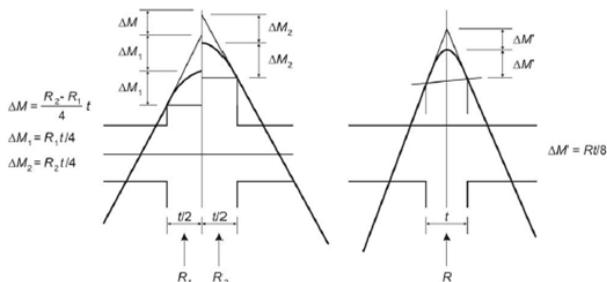


Figura 4-2 – Arredondamento do diagrama de momentos fletores (NBR 6118:2014)

SKORPEN ET AL (2014) também apresentaram critérios de várias normas internacionais para a distribuição do pico de momento fletor em faixas na região do pilar e da laje. Em resumo, esses critérios condicionam um maior percentual de momentos fletores na faixa do pilar, analogamente a um modelo de viga com apoio central. São métodos simplificados, que trazem respostas práticas como forma de responder questões complexas.

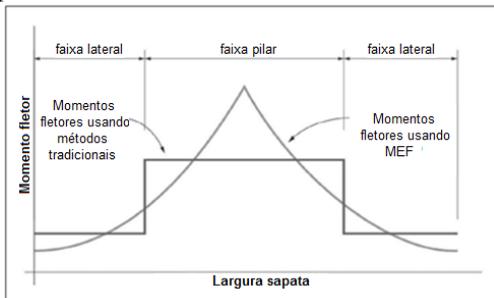


Figura 4-3 – Distribuição momentos fletores em uma seção transversal (SKORPEN ET AL, 2014)

Com o avanço dos *softwares* para análise estrutural, surgiu a necessidade de estudar a influência de cargas pontuais nas estruturas, em particular na análise de lajes lisas, com a utilização de métodos numéricos.

HENNRICHS (2003) estudou a influência de se considerar o pilar central como apoio pontual utilizando o Método dos Elementos Finitos e no Processo por Analogia de Grelha. Em ambos os casos variou-se a malha e, foi constatado que o momento fletor negativo máximo sobre o pilar central aumentava na medida em que se refinava a malha (tendendo ao infinito), mas que os momentos fletores positivos, deslocamentos e reação no pilar central praticamente não se alteravam, assim como observado nos resultados obtidos pela Teoria das placas em regime elástico. Por fim, compararam-se os resultados obtidos pelos métodos numéricos (MEF e Analogia de grelha) com a Teoria das placas. Os valores foram parecidos para malhas finas, havendo diferenças significativas para malhas grosseiras. Outro estudo realizado por HENNRICHS (2003) foi distribuir a reação do pilar de apoio de lajes lisas considerando as dimensões do pilar, utilizando a Teoria das placas em regime elástico. Foram desenvolvidas equações através de séries de Fourier para a resolução de placas, considerando o a área da seção transversal do pilar, transformando-o em um carregamento externo aplicado na laje no sentido de baixo para cima. Os resultados mostraram que, ao considerar o pilar central como apoio pontual ou como carregamento distribuído, pouca diferença ocorreu nos momentos positivos, deslocamentos e reação no pilar central. Porém, o momento negativo máximo diminuiu, sendo que o diagrama de momentos sofreu um arredondamento na região do pilar central. Por fim, foi idealizado um modelo analisado pelo MEF que considera o pilar central com elementos Sólidos, procurando simular as dimensões reais do elemento (Figura 4-4).

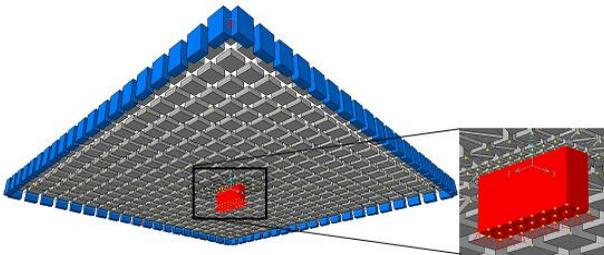


Figura 4-4 – Modelo com pilar definido como elemento sólido (Henrichs,2003)

Nesse modelo apresentado por HENNRICHS (2003) os resultados em termos de momento fletor positivo, carga no pilar e deslocamentos máximos apresentaram bastante semelhança com os resultados obtidos pela Teoria das Placas em Regime Elástico, com diferenças aumentando na medida em que se aumenta a dimensão do pilar central. Porém, com relação aos momentos negativos na região do pilar central, houve picos de valores nas bordas do pilar. Tais picos foram maiores em pilares com uma dimensão bem inferior a outra (pilares alongados).

PUEL (2009) estudou em lajes lisas simétricas e assimétricas o comportamento dos momentos fletores na laje e no pilar (modelo integrando a laje e o pilar, além dos esforços na laje é necessário também analisar os esforços nos pilares), ao modelar um pilar como apoio pontual, como reação distribuída na laje na região do pilar e também como reação distribuída na região do pilar projetada no centro geométrico da laje (critério análogo ao efeito de uma roda sobre o tabuleiro de uma ponte), conforme mostrado na Figura 4-5. Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos e também o Processo por Analogia de Grelha.

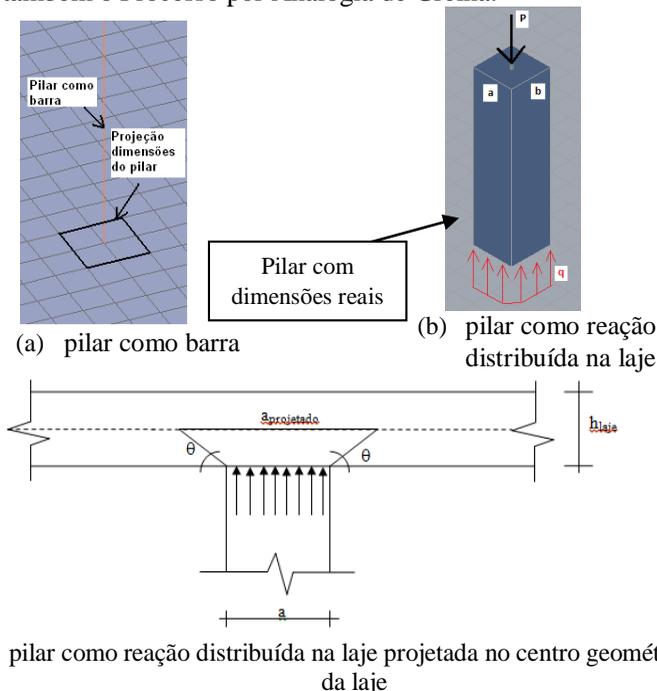


Figura 4-5 – Alternativas de representar o pilar como apoio para laje lisa (PUEL, 2009)

Quando há uma assimetria do posicionamento do pilar em relação à laje, ou o carregamento é assimétrico ou existem forças horizontais, além do esforço normal surgem esforços de flexão no pilar. A solidariedade do pilar com a laje é obtida através do modelo análogo ao de viga contínua, em que se modela meia altura do tramo inferior e superior do pilar.

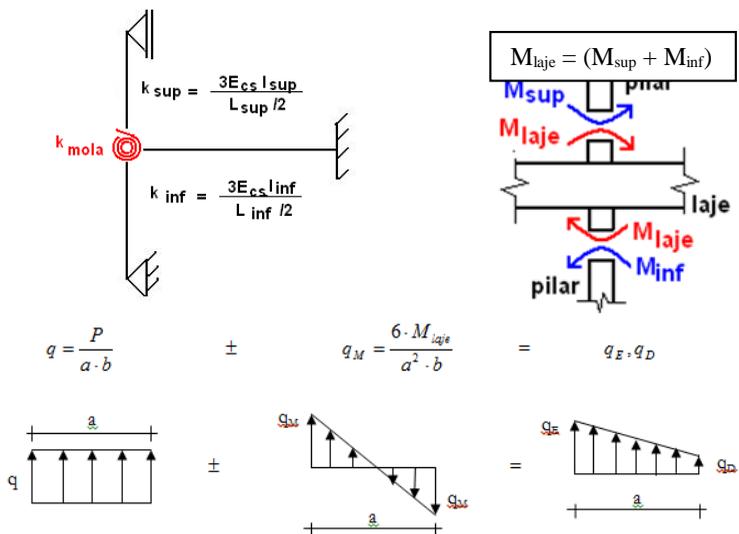


Figura 4-6 – Pilar como reação em lajes assimétricas (PUEL, 2009)

A metodologia para simular os esforços axiais e de flexão do pilar como reação aplicada na laje consiste em um processo iterativo, mostrado resumidamente na Figura 4-7.

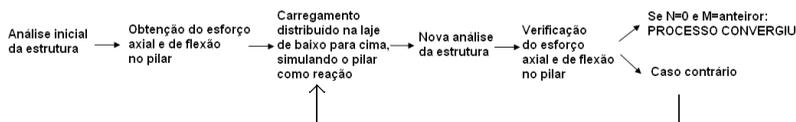
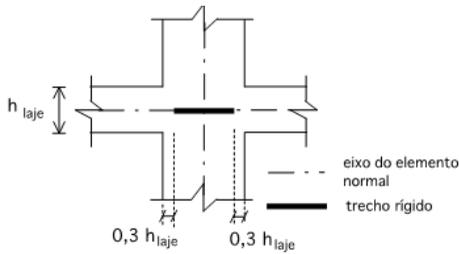
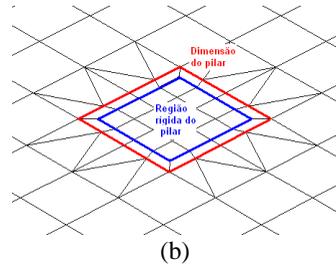


Figura 4-7 – Esquema do método simulando o pilar como reação na laje (PUEL, 2009)

PUEL (2009) estudou também a existência de um núcleo rígido na região da seção transversal do pilar, conforme prescrito na NBR 6118:2014, item 14.6.2.1: “Os trechos de elementos lineares pertencentes à região comum ao cruzamento de dois ou mais elementos podem ser considerados como rígidos (nós de dimensões finitas).



(a) Trechos rígidos adaptados da NBR 6118:2014



(b) Modelagem dos trechos rígidos em uma análise numérica em MEF (PUEL,2009)

Figura 4-8 – Trechos rígidos na região dos pilares

As conclusões para as lajes simétricas mostraram que os momentos fletores aumentam quanto mais refinada for a malha quando se modela o pilar como apoio pontual. Já para os demais casos houve um arredondamento no diagrama de momentos fletores e os valores foram pouco sensíveis à variação da malha (Figura 4-9).

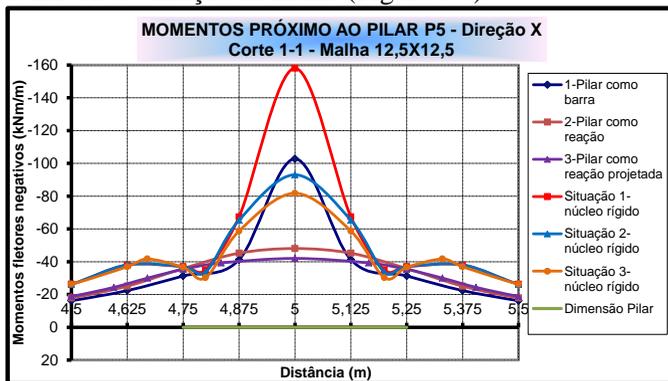


Figura 4-9 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje simétrica (PUEL, 2009)

Os esforços normais no pilar central também apresentaram variação expressiva, principalmente ao comparar o pilar modelado como núcleo rígido.

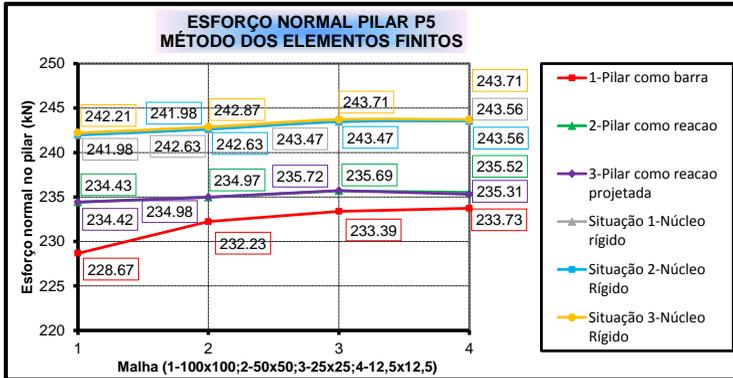


Figura 4-10 – Esforço normal no pilar da ligação pilar/laje lisa – laje simétrica (PUEL, 2009)

Quando se tem assimetria do pilar em relação à laje o diagrama de carregamentos do pilar como reação na laje não é uniforme, e por isso o momento máximo negativo da laje não ocorre no centro do pilar. Há claramente um arredondamento do diagrama de momentos fletores quando se utiliza o pilar como reação na laje. Há também uma perturbação dos momentos fletores nos caso em que se tem o núcleo rígido do pilar rígido (Figura 4-11).

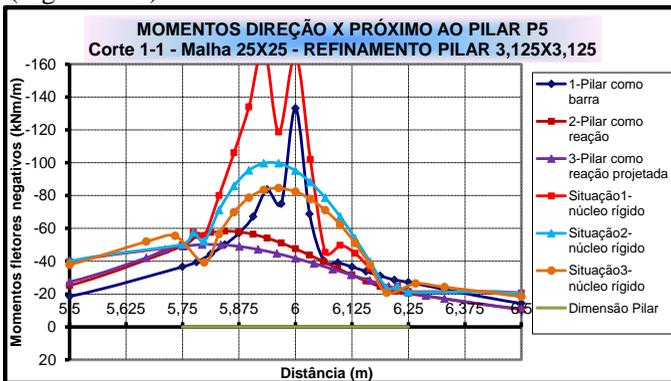


Figura 4-11 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje assimétrica (PUEL, 2009)

Os esforços normais no pilar da ligação pilar/laje lisa tiveram um comportamento análogo para os casos em que se tem simetria do pilar na laje. Com relação aos momentos fletores, quando se tem o pilar modelado como apoio pontual os momentos no pilar são bem inferiores aos demais

casos, o que mostra se tratar de um modelo equivocado, mesmo para malhas refinadas (Figura 4-12).

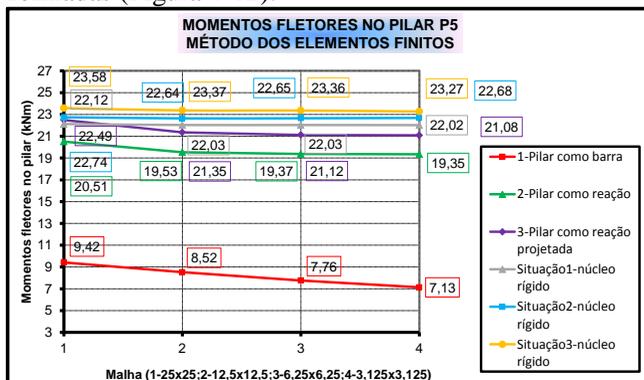


Figura 4-12 – Momentos fletores na ligação pilar/laje lisa – laje assimétrica (PUEL, 2009)

SKORPEN ET AL (2014) apresentaram um comparativo entre os métodos tradicionais de análise de lajes lisas (chamados pelos Autores de “SD-Simplified design) com o método dos elementos finitos e também com resultados experimentais.

O modelo foi concebido no *software* Prokon (2012), muito utilizado na África do Sul, que usa o Método dos Elementos Finitos para resolução das estruturas. O exemplo consiste em uma laje lisa (Figura 4-13), com 1,2 x 1,2 m, espessura de 15 cm, pilar com dimensões de 0,2 x 0,2 m e concreto $f_{ck} = 35$ MPa, modelada com elementos de placa, quadrilátero (*DKQ – discrete Kirchhoff quadrilateral*).

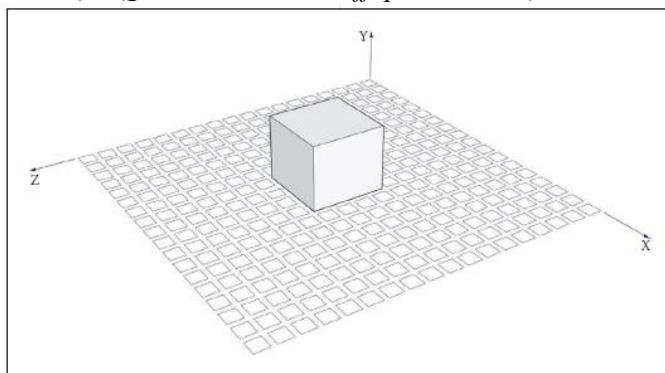


Figura 4-13 – Modelagem da laje lisa em elementos finitos (SKORPEN ET AL, 2014)

As condições de suporte do pilar central foram alteradas de acordo com as sugestões apresentadas por ROMBACH, 2004, na Figura 4-1.

A Figura 4-14 apresenta os momentos fletores na região do pilar central de acordo com as formas de modelagem apresentadas por Rombach, 2004. Os momentos fletores obtidos pelos métodos simplificados (chamados de “SD” pelos Autores) utilizaram as prescrições da norma para projeto de estruturas de concreto da África do Sul, SANS 10100 2000, The structural use of concrete, Part 1.

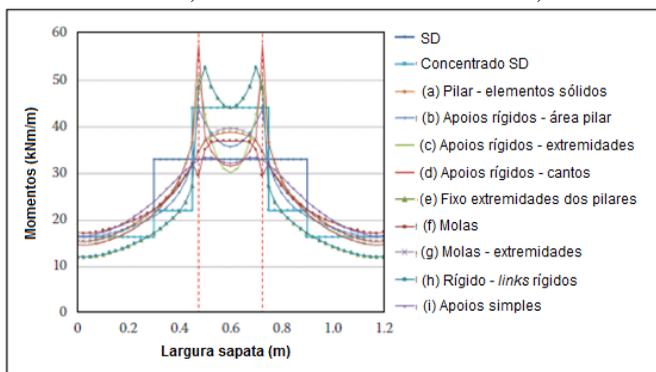


Figura 4-14 – Comparativo momentos fletores face do pilar (SKORPEN ET AL, 2014)

Os momentos fletores obtidos entre as prescrições da norma SANS 10100 2000, resultados experimentais e modelo numérico foram muito próximos. Com relação ao modelo numérico em Elementos Finitos, os casos (a) e (g) foram os que apresentaram as melhores respostas, das quais foram comparadas com os resultados experimentais e as prescrições da norma SANS 10100 2000. O caso (a) considera o pilar como elemento sólido e o caso (g) considera as extremidades do pilar com molas elásticas (Figura 4-15).

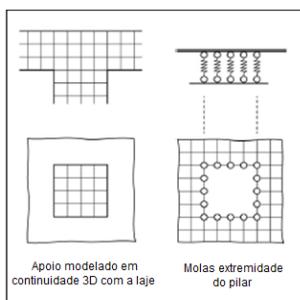


Figura 4-15 – Condição de contorno pilar (SKORPEN ET AL, 2014)

Segundo os Autores, o caso (i) deve ser evitado, pois não leva em consideração a rigidez do pilar central, resultando em momentos fletores baixos sobre o pilar. O caso (i) modela o pilar central com apoios pontuais.

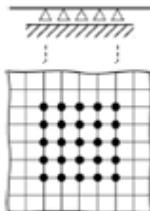


Figura 4-16 – Pilar central modelado com apoios pontuais (SKORPEN ET AL, 2014)

Apresenta-se a seguir o diagrama de momentos fletores obtido no Caso (a), que considera o pilar modelado como elemento sólido.

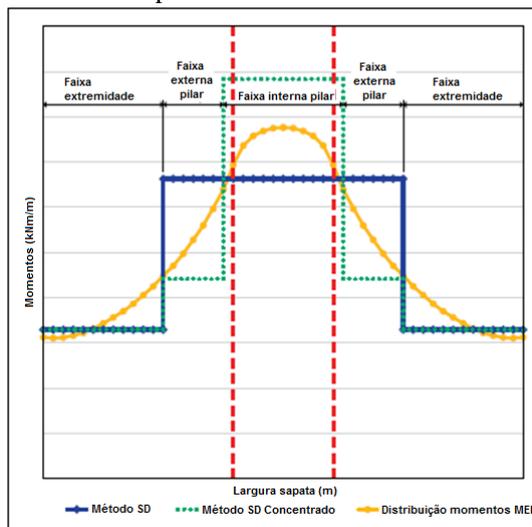


Figura 4-17 – Distribuição momentos fletores sobre pilar central (SKORPEN ET AL, 2014)

CHOI ET AL (2014) apresentaram um método para resolver as lajes lisas, notadamente na ligação laje/pilar para aplicação em análises não-lineares, mediante a aplicação de molas não-lineares. O estudo teve por objetivo avaliar o comportamento de lajes lisas não somente para cargas gravitacionais, mas também para cargas laterais (como vento e ações sísmicas), uma vez que as lajes lisas precisam possuir uma

capacidade de deformação compatível com o sistema de contraventamento proposto para a edificação.

As molas não-lineares foram adicionadas na seção crítica da ligação laje/pilar, definida como sendo a largura do pilar somada a espessura da laje (Figura 4-18-a). A ligação laje/pilar foi modelada por meio de vigas (elementos de barra) com largura e espessura equivalentes à da seção crítica. Na extremidade dessas vigas foram adicionadas as molas não-lineares (Figura 4-18-b).

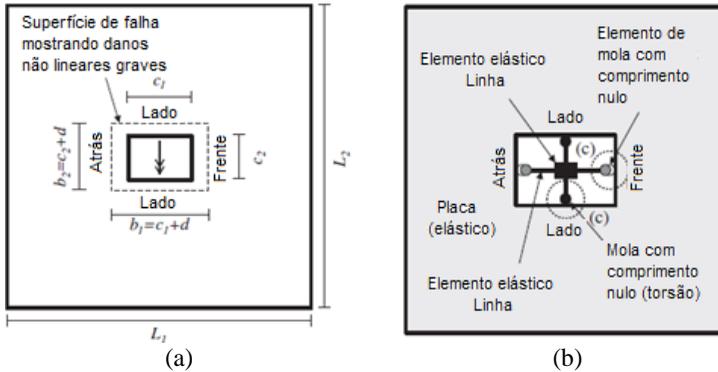


Figura 4-18 – Modelo analítico proposto (a) definição da seção crítica (b) modelo analítico composto barras elásticas, elementos de placa e as molas não-lineares (CHOI ET AL, 2014)

Os pilares e a laje foram modelados com elementos elásticos e lineares. Somente as ligações laje/pilar foram modeladas com molas não lineares, que transferem os esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção. A rigidez das molas está representada na Figura 4-19.

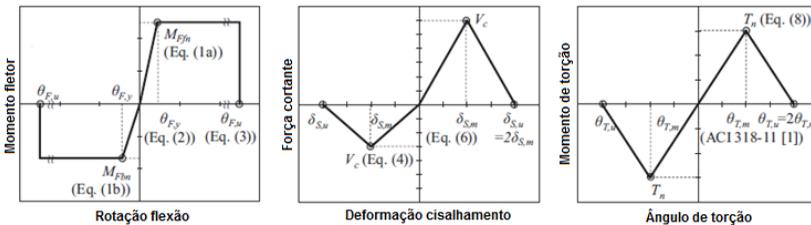


Figura 4-19 – Rigidez das molas não-lineares (CHOI ET AL, 2014)

Para as molas não-lineares que simulam a rigidez à flexão, o gráfico é definido utilizando um modelo elasto-plástico, definido de acordo com a norma Coerana KCI 2012.

$$M = A_s \times f_y \times j_d , \text{ onde:}$$

M = momento de plastificação na seção crítica;

A_s = área de aço da seção crítica de dimensionamento (definida na Figura 4-18-a);

f_y = tensão de escoamento do aço;

j_d = distância entre a resultante das forças de tração e compressão na seção transversal do pilar.

A deformação rotacional correspondente é dada por:

$$\theta = \frac{M \times (L - c - d) / 2}{3EI} , \text{ onde:}$$

θ = deformação rotacional;

M = momento de plastificação;

L = comprimento da laje na direção paralela à direção do momento fletor;

c = largura do pilar na direção paralela à direção do momento fletor;

d = espessura da laje;

EI = rigidez à flexão do pilar

As molas não-lineares que simulam a rigidez ao cisalhamento também foram definidas conforme a norma Coerana KCI 2012.

$$V_c = v_c \times (c_2 + d) \times d , \text{ onde:}$$

$$v_c = k_s \times k_{bo} \times f_{te} \times \cot\phi (c_u / d)$$

V_c = esforço cortante da seção crítica;

v_c = tensão de cisalhamento média;

$$k_s = \sqrt[4]{300/d} \leq 1;$$

$$k_{bo} = \frac{4}{\sqrt{b_o/d}} \leq 1,25 \quad \text{onde } b_o = \text{perímetro da seção crítica;}$$

$$f_{te} = 1/3f_{ctm}$$

ϕ = ângulo médio de inclinação das fissuras no cisalhamento.

A deformação cisalhante correspondente é dada por:

$$\delta = \theta_s \times (c + d) / 2 , \text{ onde:}$$

δ = deformação cisalhante;

θ_s = definido em ACI-11;

c = dimensão do pilar na direção paralela à direção do esforço cortante;

d = espessura da laje.

As molas não-lineares que simulam a rigidez à torção também foram definidas conforme a norma Coerana KCI 2012.

$$T = \frac{4}{3} \times (v_{ct} - v_g) \times \left(\frac{c+d}{2} \right)^2 \times d, \text{ onde:}$$

T = momento de torção da seção crítica;

C = dimensão do pilar;

D = espessura da laje;

$(v_{ct}-v_g)$ = tensão cisalhante da seção crítica.

A deformação rotacional correspondente é dada por ACI 318-11.

Essa formulação foi implementada em um *software* próprio com linguagem de programação do tipo OpenSees. Os resultados dessa formulação implementada via OpenSees foram comparados com modelos experimentais. Os valores em termos de carga de ruptura e deformações na laje foram próximos, o que validaram a formulação proposta, conforme apresentado na Figura 4-20.

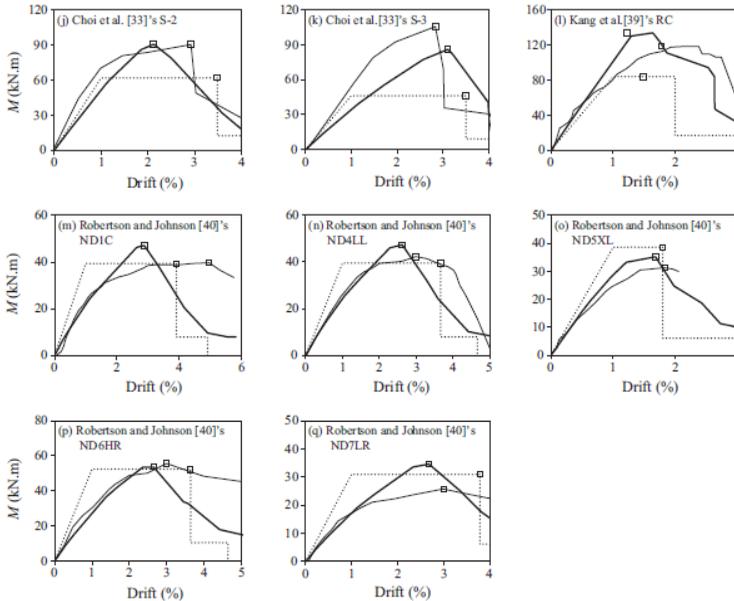


Figura 4-20 – Comparativo resultados modelo numérico e modelo experimental (CHOI ET AL,2014)

Estudos análogos aos realizados por CHOI ET AL (2014) também foram realizados por PARK ET AL (2006). Foi desenvolvido um *software* em elementos finitos para analisar o comportamento não-linear da ligação laje/pilar. O *software*, originalmente desenvolvido por PARK ET AL (1999) foi modificado para incluir a formulação proposta pelos autores, que prevê o comportamento do concreto fissurado com o alívio de tensão causada por essa fissuração. Trata-se de uma formulação complexa, que inclui a consideração da área de aço existente (Figura 4-21).

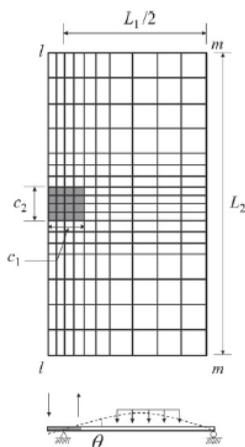


Figura 4-21 – Modelo em elementos finitos para a ligação laje/pilar de borda (PARK ET AL, 2006)

Não foi comentado no artigo, no entanto acredita-se que a análise não-linear fica restrita somente a região da ligação laje/pilar de borda. Ou seja, a laje e o pilar foram modelados em uma análise linear.

Os resultados obtidos pelo modelo numérico foram comparados com modelos experimentais. Os valores tiveram uma boa aproximação, conforme apresentado na Figura 4-22.

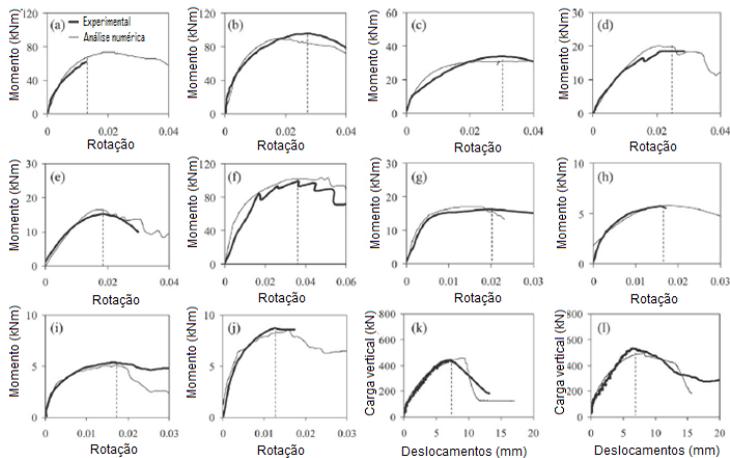


Figura 4-22 – Comparativo modelo numérico e modelo experimental (PARK ET AL, 2006)

PARK ET AL e CHOI ET AL (2006) também publicaram outro artigo, porém considerando um pilar central e não um pilar de borda. Nesse documento apresentou-se a mesma metodologia utilizada na análise numérica e os resultados também foram comparados com ensaios experimentais, sendo os valores próximos, validando a formulação.

MURRAY ET AL (2005) apresentaram um comparativo dos momentos fletores obtidos por um modelo experimental e um modelo numérico nas proximidades de um pilar de borda de uma laje lisa.

O modelo experimental foi desenvolvido em escala reduzida de modo a representar uma parte de uma estrutura de laje lisa. Os pilares de borda foram modelados com suas dimensões reais. Por fim, o carregamento foi aplicado em vários pontos da laje para simular o comportamento de uma carga uniformemente distribuída.

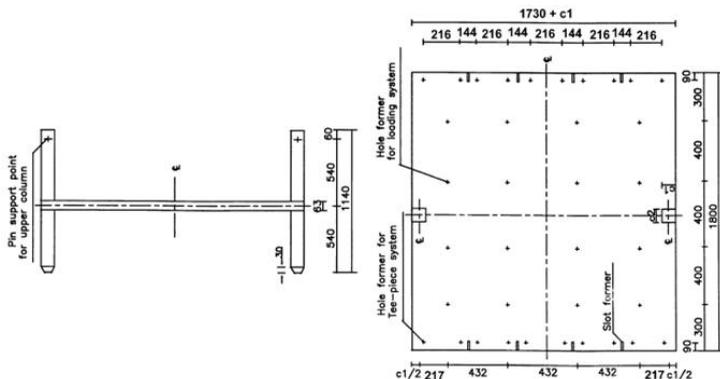


Figura 4-23 – Esquema do modelo experimental em escala reduzida (MURRAY ET AL, 2005)

O modelo numérico foi analisado no *software* “Enfram”, desenvolvido pela empresa “Encad Systems Ltda”, que utiliza o Processo por analogia de grelha para resolução das lajes. Trata-se de uma análise não-linear que considera a fissuração do concreto na região do pilar de borda. As dimensões do modelo numérico foram as mesmas dimensões adotadas no modelo experimental. Porém, no modelo numérico, por simetria, adotou-se metade do modelo experimental e realizou-se as devidas condições de contorno. A malha foi adequadamente distribuída, havendo um refinamento na região do pilar de borda (Figura 4-24).

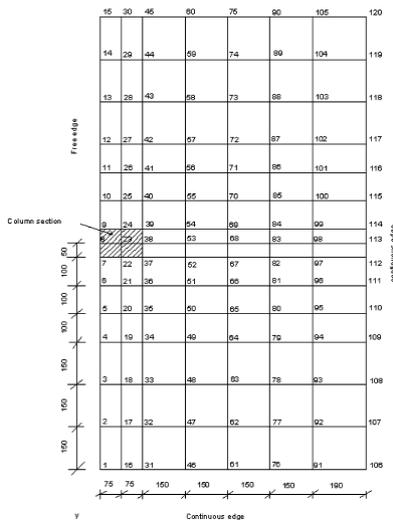


Figura 4-24 – Layout e espaçamento da malha (MURRAY ET AL, 2005)

O pilar de borda foi modelado de várias maneiras, com o intuito de se obter os melhores resultados para serem comparados com o modelo experimental. As formas de modelagem adotadas pelos autores seguiram duas linhas, a citar:

- a) Apoio simples e pontual no centro da seção transversal do pilar, restrintigido na vertical e com rigidez à rotação proporcional a rigidez do pilar. Variou-se o comprimento do pilar proporcionalmente à espessura da laje.
- b) Molas nos quatro cantos do pilar de borda com rigidez proporcional à rigidez do pilar. Variou-se o comprimento do pilar proporcionalmente à espessura da laje.

As conclusões que os Autores chegaram é que a análise numérica não-linear mais próxima do modelo numérico foi a que utilizou o pilar modelado com apoio simples e pontual no centro da seção transversal.

Estudos análogos aos realizados por CHOI ET AL (2014) também foram realizados por XIAO ET AL (2008). Nesse caso foi adotado o modelo “Tension Softening Material (TSM)”. Esse modelo é capaz de simular o comportamento fissurado do concreto que ocorre na ligação laje/pilar de lajes lisas. Trata-se de uma formulação complexa, capaz de simular e classificar modo distintos de ruptura, que foi implementada no *software* ANSYS em uma análise não-linear. O comparativo do modelo numérico com os ensaios experimentais validaram a formulação proposta pelos autores em termos de carga de ruptura e deformação da laje.

WANG ET AL (2008) apresentaram uma formulação para a análise nao-linear de lajes lisas que consiste em criar um elemento *Shell* capaz de corrigir os esforços cortantes na ligação laje/pilar por conta da fissuração do concreto nessa região.

Nesse sentido foi criado um elemento *Shell* em camadas, capaz de reproduzir o comportamento do material, em termos de fissuração e o consequente alívio de tensão. Trata-se de uma formulação complexa introduzida em um *software* em elementos finitos.

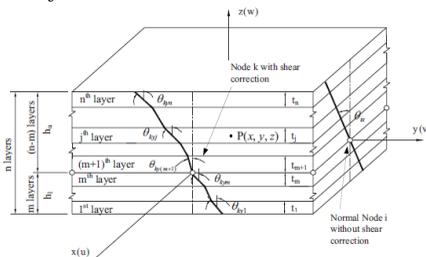


Figura 4-25 – Elemento *Shell* proposto em camadas (XIAO ET AL, 2008)

Nesse elemento *Shell* em camadas é possível reproduzir propriedades diferentes do material concreto, inclusive os locais onde se tem as armaduras. Os testes numéricos comparados com os ensaios experimentais mostraram que os resultados são próximos, inclusive em lajes lisas irregulares, que não possuem simetria entre os pilares. No entanto, essa formulação é específica para avaliar o comportamento ao cisalhamento da ligação laje/pilar.

Estudo análogo foi realizado por ZHANG ET AL (2006), no qual proporam uma formulação complexa para um elemento *Shell* que posteriormente foi implementada em um *software* em elementos finitos com análise não-linear. Essa formulação consiste em levar em consideração o comportamento do concreto fissurado e as relações constitutivas do material concreto na ligação laje/pilar. Foi realizado um exemplo numérico que posteriormente foi comparado com um ensaio experimental. Os resultados em termos de carga deformação na região da ligação foram próximos, validando a formulação proposta.

MARTINELLI (2003) desenvolveu um programa computacional, elaborado pelo Método dos Elementos Finitos, para análise tridimensional de situações de punção em lajes de concreto armado com e sem armadura de cisalhamento. Utilizaram-se elementos da família *Serendipity* isoparamétricos quadráticos com 20 (vinte) nós. Como ponto de partida, alterou-se o código de um *software* existente para análise não-linear dinâmica e estática de estruturas tridimensionais em concreto armado.

O concreto é representado por modelos constitutivos elasto-viscoplásticos e empregou-se o modelo de camadas sobrepostas para simular o carregamento de longa duração. Nesse modelo admite-se que o concreto é constituído por um número conveniente de camadas com a mesma deformação, porém com características materiais diferentes. A tensão total é obtida pela soma das contribuições de cada camada. A armadura é introduzida no modelo como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto.

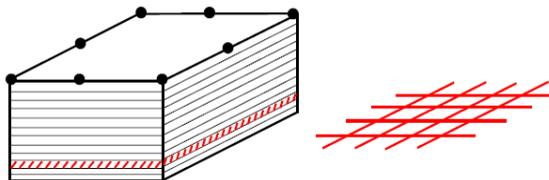


Figura 4-26 – Modelo com armadura distribuída (MARTINELLI, 2003)

O comportamento após a fissuração do concreto é representado pelo modelo de fissuras distribuídas, onde as propriedades dos materiais são modificadas e a malha de elementos finitos não necessita de atualização. Foi considerada a contribuição do concreto entre fissuras.

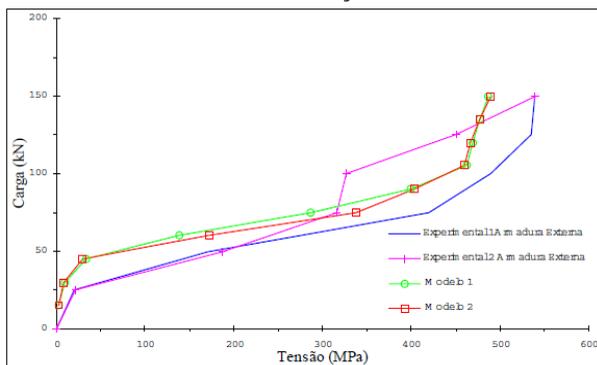


Figura 4-27 – Comparativo na armadura– modelo numérico e experimental (MARTINELLI, 2003)

Os resultados numéricos foram comparados com ensaios experimentais executados por outros autores, onde se obtiveram boas aproximações para lajes com e sem armadura de cisalhamento. Dessa forma, o programa computacional desenvolvido pode ser empregado para generalizar resultados experimentais em lajes cogumelo com variação na resistência do concreto, na bitola das barras de armadura, no espaçamento entre as barras e no número de camadas de armadura de cisalhamento do tipo vertical retangular e inclinada.

MAMEDE ET AL (2012) apresentaram um estudo em que comparam uma análise numérica não-linear 3D para lajes lisas com ensaios experimentais.

O modelo numérico foi lançado no *software ATENA 3D*, em elementos finitos (Figura 4-28). O *software ATENA 3D* permite uma análise não linear, levando em consideração o comportamento do concreto fissurado, o que permite simular o comportamento real da estrutura tanto em serviço como ao ELU. A redistribuição dos esforços na ligação laje/pilar e conseqüentemente em toda a laje considera o comportamento não-linear do concreto.

O elemento escolhido para simular a laje lisa foi “CC3DNonLinCementitious2”, que consiste em um modelo de fratura plástica para o concreto.

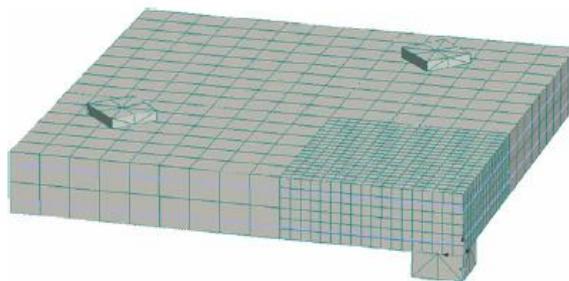


Figura 4-28 – Modelo 3D proposto (MAMEDE ET AL, 2012)

Por se tratar de uma análise não-linear a quantidade de aço foi incluída nas duas direções da laje, assumindo uma perfeita aderência entre o aço e o concreto.

Sobre a modelagem, foi realizada com elementos tridimensionais isoparamétricos com 8 (oito) nós, utilizando somente $\frac{1}{4}$ da laje tomando partido da simetria. Na região do pilar a malha foi refinada com o objetivo de melhor avaliar os esforços na ligação laje/pilar (Figura 4-28).

O estudo ainda contou com variação da malha, variação da espessura da laje, variação das dimensões do pilar, variação da taxa de armadura e variação da resistência do concreto (f_{ck}).

Em geral, os comparativo dos resultados numéricos tiveram uma boa aproximação com os resultados experimentais. Isso mostra ser possível reproduzir em uma análise numérica uma laje lisa, especialmente na região complexa da ligação laje/pilar, ainda que se utilize um análise não-linear em um *software* comercial *ATENA 3D*. Notou-se que com a diminuição da taxa de armadura os resultados foram mais distantes quando comparados com os ensaios experimentais. Sobre as dimensões do pilar, quanto mais rígido for o pilar, notou-se uma concentração de tensões nas quinças da secão transversal.

FARIA (2004) mostrou um comparativo dos resultados obtidos para uma laje lisa pretendida analisada pelo Método dos Pórticos Equivalentes e pelo Método dos Elementos Finitos. A comparação dos resultados foi feita através da comparação dos momentos de projeto, comparação das tensões em serviço, comparação das flechas em serviço e comparação da quantidade de armadura passiva requerida.

Foram modelados dois tipos de lajes lisas, uma com disposição regular dos pilares e outra com disposição irregular. O *software* utilizado para as análises pelo Método dos pórticos equivalentes (MPE) foi o ADAPT-PT (versão 6.18), programa largamente utilizado para projetos

lajes protendidas armadas em duas direções, que utiliza as premissas do ACI 318-02. O *software* utilizado para as análises pelo Método dos Elementos Finitos foi o ADAPT-Floor Pro (versão 1.11), considerando os cabos (quantidade e perfis) determinados através da análise pelo MPE.

Apresenta-se na Figura 4-29 as características geométricas do Exemplo 01, que possui simetria na disposição dos pilares.

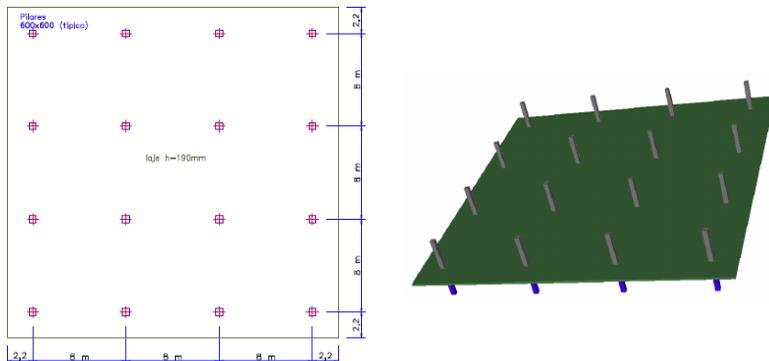


Figura 4-29 – Característica exemplo 01 (FARIA, 2004)

Apresenta-se na Figura 4-30 as faixas do pórtico equivalente distribuídas pelo *software* ADAPT-PT.

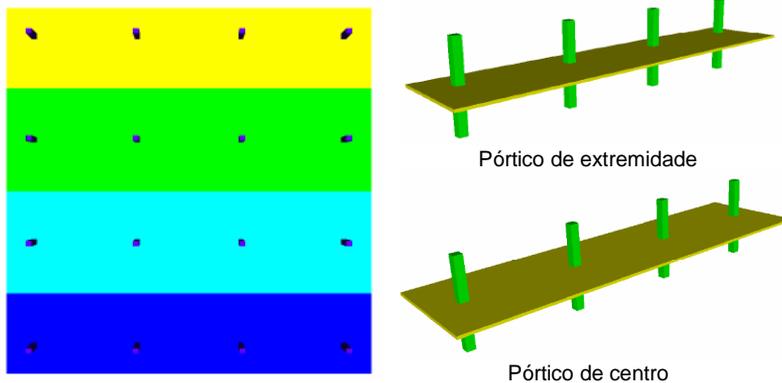


Figura 4-30 – Faixas do pórtico equivalente - Exemplo 01 (FARIA, 2004)

Apresenta-se na Figura 4-31 a malha utilizada pelo *software* ADAPT-Floor Pro para a análise pelo Método dos Elementos Finitos, bem com as tensões na laje.

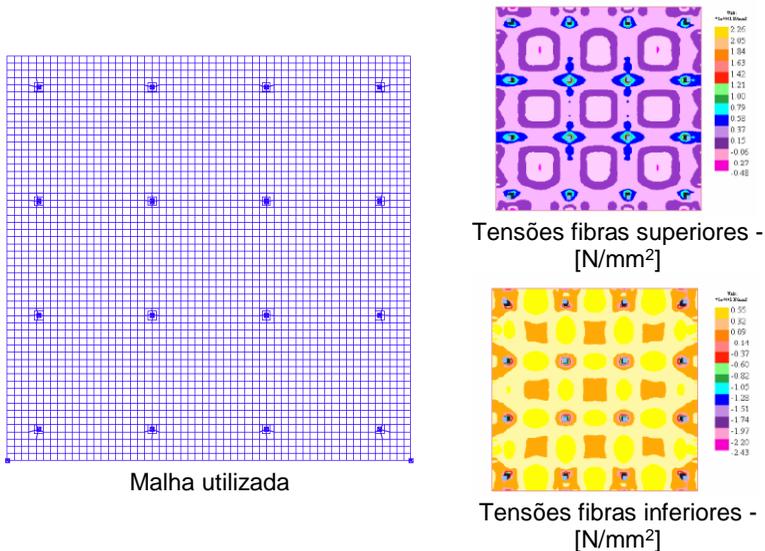


Figura 4-31 – Malha e tensões MEF - Exemplo 01 (FARIA, 2004)

Apresenta-se a seguir as características geométricas do Exemplo 02, que possui assimetria na disposição dos pilares.

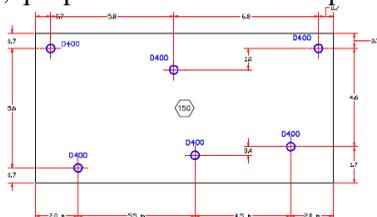
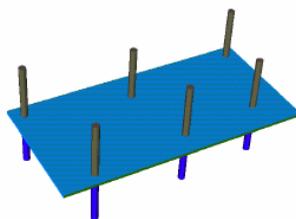


Figura 4-32 – Característica exemplo 02 (FARIA, 2004)



A seguir apresentam-se as faixas do pórtico equivalente distribuídas pelo *software* ADAPT-PT.

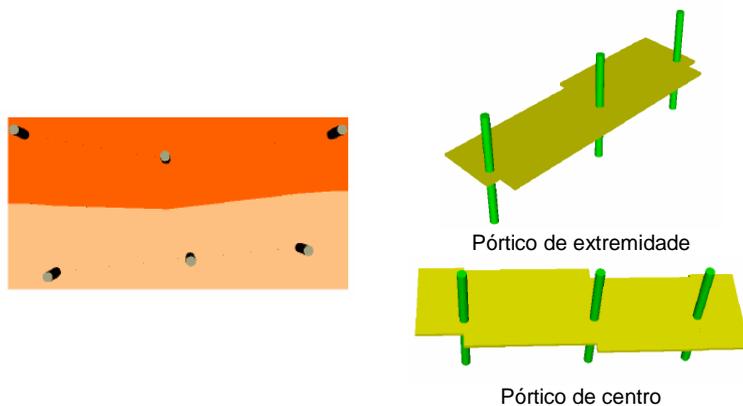


Figura 4-33 – Faixas do pórtico equivalente - Exemplo 02 (FARIA, 2004)

A seguir apresenta-se a malha utilizada pelo *software* ADAPT-Floor Pro para a análise pelo Método dos Elementos Finitos.

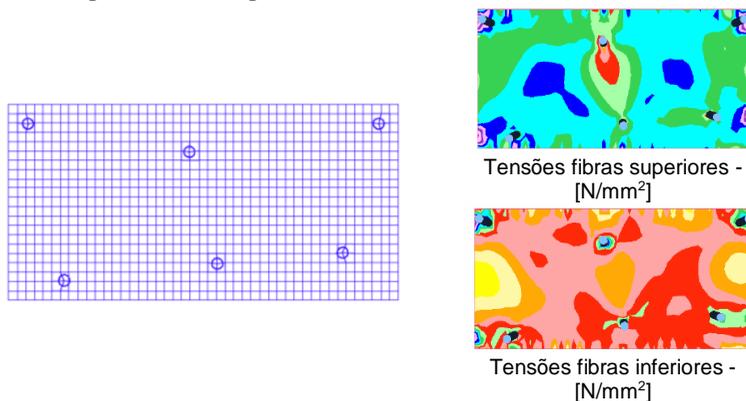


Figura 4-34 – Malha e tensões MEF - Exemplo 02 (FARIA, 2004)

O comparativo dos resultados mostrou que para a laje lisa com distribuição simétrica dos pilares (exemplo 01) os valores foram próximos entre o MPE (ADAPT-PT) e o MEF (ADAPT-Floor Pro) em termos de deslocamentos e taxas de armadura. Para a laje com distribuição assimétrica dos pilares (exemplo 02), os momentos fletores foram significativamente diferentes, resultando em taxas de armaduras diferentes bem como as flechas. Portanto, ratifica-se a precaução da NBR 6118:2014, item 14.7.8 na utilização do MPE somente para lajes lisas com pilares dispostos em filas ortogonais, de maneira regular e com vãos pouco diferentes.

PEDROZO (2008) apresentou critérios de projeto de lajes lisas protendidas, e foram feitos exemplos de dimensionamento de pavimentos com e sem balanços, comparando os resultados obtidos pelo processo do pórtico equivalente e pelo método dos elementos finitos através do programa computacional SAP 2000.

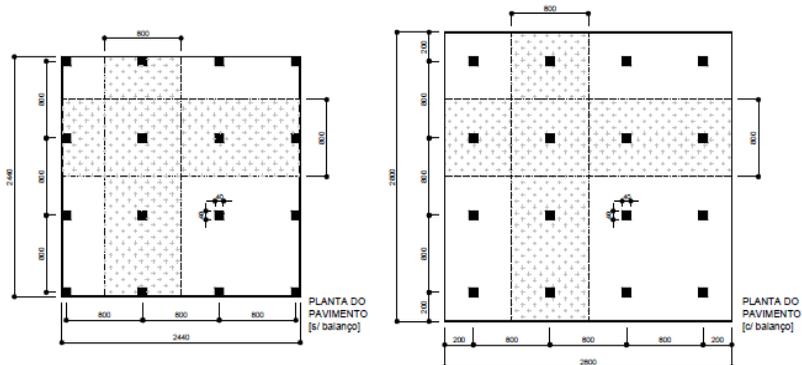


Figura 4-35 – Layout dos exemplos estudados (PEDROZO, 2008)

A Figura 4-35 apresenta as faixas para a determinação dos pórticos equivalentes. Sobre a análise pelo Método dos Elementos Finitos foram propostos 4 (quatro) modelos, realizados para $\frac{1}{4}$ da laje, tomando partido da simetria.

Modelo 01: pilares modelados como apoios pontuais, em seu centro, com malha 20x20cm.

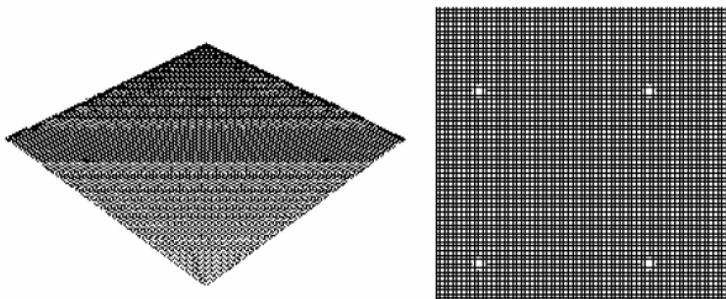


Figura 4-36 – Modelo numérico 01 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)

Modelo 02: pilares modelados como apoios pontuais, em seu centro, malha 20x20cm com refinamento na região dos pilares para 10x10cm.

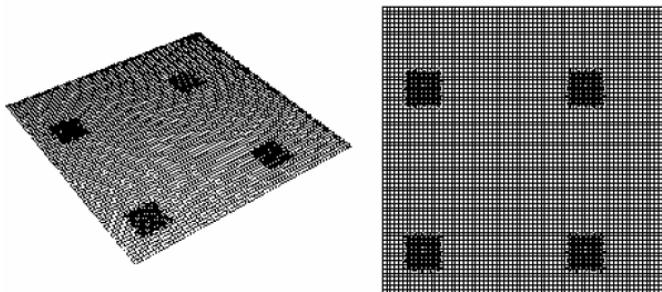


Figura 4-37 – Modelo numérico 02 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)

Modelo 03: malha 20x20cm com refinamento na região dos pilares para 10x10cm e reação equivalente dos pilares distribuídos uniformemente sobre a área do pilar de 40x40cm.

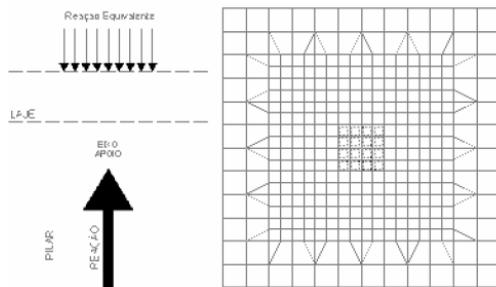


Figura 4-38 – Modelo numérico 03 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)

Modelo 04: malha 20x20cm com refinamento na região dos pilares para 10x10cm e reação equivalente dos pilares distribuídos uniformemente sobre a área do pilar de 45x45cm

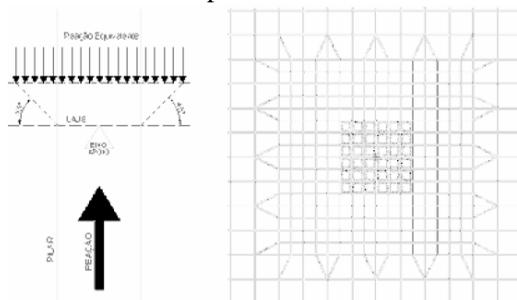


Figura 4-39 – Modelo numérico 04 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)

A Figura 4-40 mostra as 4 (quatro) seções de estudo realizadas para a laje.

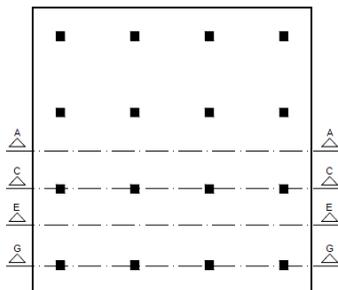


Figura 4-40 – Modelo numérico 04 – SAP 2000 (PEDROZO, 2008)

A Figura 4-41 e Figura 4-42 apresentam os momentos fletores nas seções A e E, que correspondem aos trechos de momentos positivos na laje.

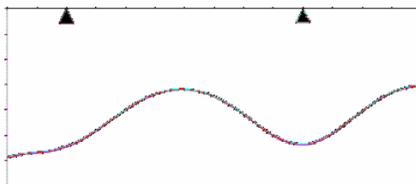


Figura 4-41 – Momentos fletores na Seção A – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008)

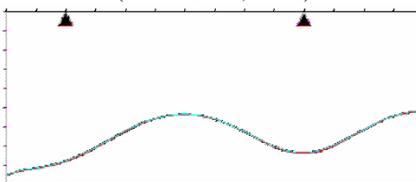


Figura 4-42 – Momentos fletores na Seção E – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008)

Pode-se notar que praticamente não há diferença entre os modelos analisados relacionados aos momentos positivos.

A Figura 4-43 e a Figura 4-44 apresentam os momentos fletores nas seções C e G, que correspondem aos trechos de momentos negativos (sobre os pilares) na laje.

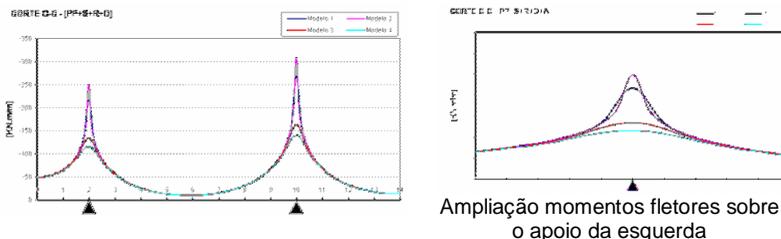


Figura 4-43 – Momentos fletores na Seção C – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008)

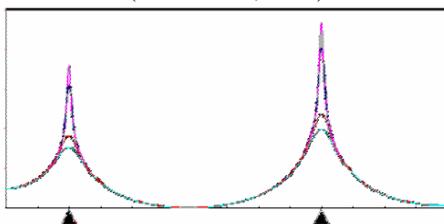
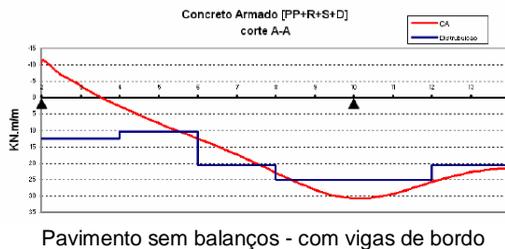


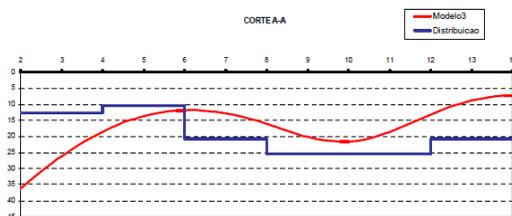
Figura 4-44 – Momentos fletores na Seção F – Modelos 01/02/03/04 (PEDROZO, 2008)

Pode-se notar que houve um arredondamento do diagrama de momentos fletores para os modelos 03 e 04, que consideram o pilar como reação na laje. O modelo 04, por possuir uma área de distribuição maior teve o menor valor de momento sobre o pilar.

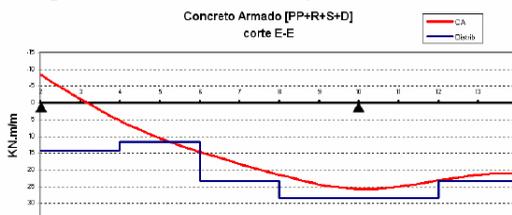
A seguir apresenta-se o comparativo entre os momentos fletores obtidos pela análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos e os momentos obtidos pelo Método dos Pórticos Equivalentes. Foi adotado o Modelo 04 da análise em MEF para ser comparado com o Método dos Pórticos Equivalentes (MPE).

A Figura 4-45 e a Figura 4-46 apresentam o comparativo entre os modelos analisados pelo MEF e pelo MPE no exemplo sem balanço para as seções de momento positivo (Seção A e E). Pode-se notar que os momentos diferem nos pilares de borda sendo que na Seção E a diferença também ocorre para a Seção E.

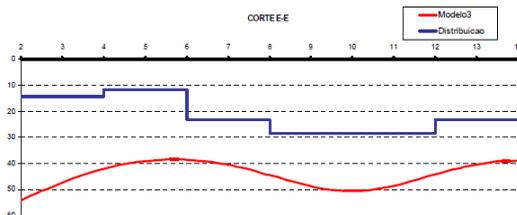




Pavimento sem balanços – sem vigas de bordo
 Figura 4-45 – Comparativo MEF/MPE – Seção A (PEDROZO, 2008)



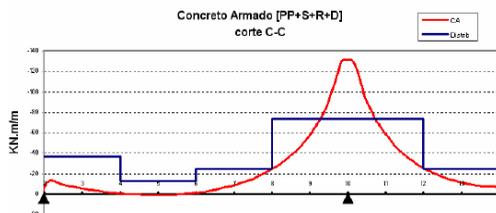
Pavimento sem balanços - com vigas de bordo



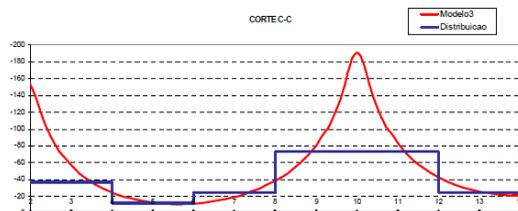
Pavimento sem balanços – sem vigas de bordo

Figura 4-46 – Comparativo MEF/MPE – Seção E (PEDROZO, 2008)

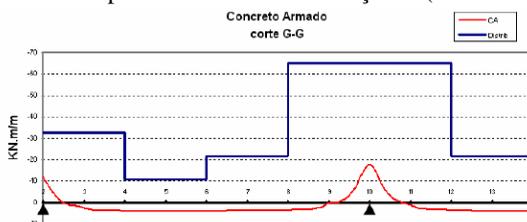
A Figura 4-47 e a Figura 4-48 apresentam o comparativo entre os modelos analisados pelo MEF e pelo MPE no exemplo sem balanço para as seções de momento negativo (Seção C e G). Pode-se notar que os momentos diferem bastante nos pilares de borda sem as vigas de bordo.



Pavimento sem balanços - com vigas de bordo

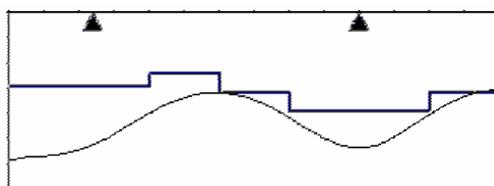


Pavimento sem balanços – sem vigas de bordo
 Figura 4-47 – Comparativo MEF/MPE – Seção C (PEDROZO, 2008)

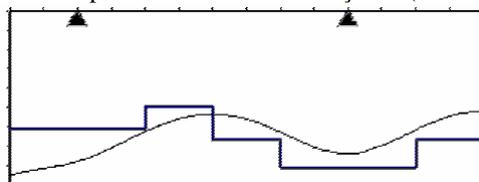


Pavimento sem balanços – sem vigas de bordo
 Figura 4-48 – Comparativo MEF/MPE – Seção G (PEDROZO, 2008)

A Figura 4-49e a Figura 4-50 apresentam o comparativo entre os modelos analisados pelo MEF e pelo MPE no exemplo sem balanço para as seções de momento positivo (Seção A e E). Pode-se observar que os momentos distribuídos obtidos pelo pórtico equivalente são menores que os encontrados pelo modelo numérico, principalmente nas regiões das extremidades do pavimento. Exceção ocorre na Seção E para o pilar de meio.

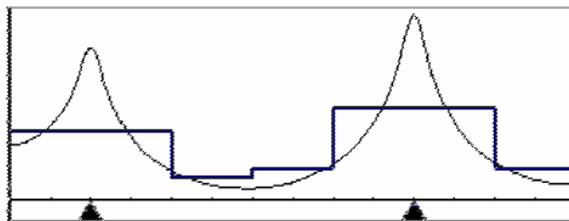


Pavimento com balanços - sem vigas de bordo
 Figura 4-49 – Comparativo MEF/MPE – Seção A (PEDROZO, 2008)



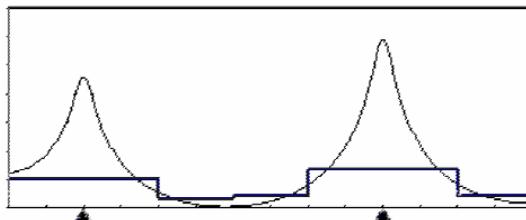
Pavimento com balanços - sem vigas de bordo
 Figura 4-50 – Comparativo MEF/MPE – Seção E (PEDROZO, 2008)

A Figura 4-51 e a Figura 4-52 apresentam o comparativo entre os modelos analisados pelo MEF e pelo MPE no exemplo sem balanço para as seções de momento negativo (Seção C e G). Pode-se notar que entre os pilares os resultados são próximos, porém o mesmo não ocorre para os momentos na região dos pilares, sendo o MPE apresentando valores menores.



Pavimento com balanços - sem vigas de bordo

Figura 4-51 – Comparativo MEF/MPE – Seção C (PEDROZO, 2008)



Pavimento com balanços – sem vigas de bordo

Figura 4-52 – Comparativo MEF/MPE – Seção G (PEDROZO, 2008)

Os exemplos incluíram o efeito da protensão como carregamento externo equivalente. Nos modelos numéricos foi feito um estudo da influência da modelagem dos apoios nos momentos fletores. A solução adotada foi a utilização de um carregamento equivalente, uniformemente distribuído, na região dos apoios, a fim de obter resultados coerentes para análise do pavimento.

Uma vez definido um modelo que forneceu resultados bons nos apoios, passou-se ao estudo do lançamento dos cabos de protensão no pavimento, utilizando diferentes traçados e concentrações de cabos. Desta maneira, buscou-se analisar o efeito do traçado em planta dos cabos e sua posterior influência na análise dos estados limites.

Através dos estudos realizados ficou claro que o método dos pórticos equivalentes não consegue representar satisfatoriamente o comportamento em serviço da laje. Portanto, para o estudo dos Estados Limites de Serviço é necessário um modelo numérico com uma modelagem adequada da região dos apoios.

DUARTE (1998) realizou o dimensionamento de lajes pelo método das tabelas, métodos numéricos e pelas análises plásticas. Adotou-se como exemplo o dimensionamento das lajes do pavimento tipo de um edifício comercial, que possui distribuição regular, com lajes retangulares.

O processo de cálculo elástico pelo uso de tabelas adotado foi uma adaptação das tabelas de Bares. Foi utilizado o Processo por Analogia de Grelha e o Método dos Elementos Finitos, com a adoção de malhas 50x50cm e elementos de placa, utilizando o *software* SAP 90. Sobre a análise plástica, utilizou-se a Teoria das Charneiras Plásticas, que constitui uma aplicação de um dos teoremas fundamentais de cálculo plástico (teorema cinemático ou do limite superior). A aplicação da Teoria das Charneiras Plásticas foi realizada por meio do *software* “LAJES”, desenvolvido RIOS (1991), baseado no Processo do Equilíbrio ou das Forças Nodais. Cabe ressaltar que o dimensionamento, baseado no uso de tabelas (seja elástico ou pela teoria da análise limite), não leva em consideração a deformabilidade dos apoios.

O modelo estrutural de análise através das tabelas conduziu a valores elevados para os momentos fletores negativos, quando comparado às outras análises, para todas as regiões de interface de lajes contíguas. Já para os momentos fletores positivos, ocorreu o inverso. Estas diferenças são devidas às considerações simplificadas do uso das tabelas: as vigas são apoios indeslocáveis para as lajes e o cálculo dos painéis de lajes como placas isoladas.

Os modelos de análise através da técnica da analogia de grelha e do método dos elementos finitos conduziram a resultados mais precisos, apresentando tendências de convergência nas malhas propostas para o pavimento em estudo. Além disso, são modelos que consideram a rigidez relativa entre os elementos estruturais e a rigidez real das vigas de apoio.

O modelo analisado através da teoria das charneiras plásticas, apesar de fazer praticamente as mesmas considerações da maneira como são dispostas as ações, dos apoios indeslocáveis nas vigas e dos painéis de laje isolados uns dos outros, já mencionadas para o cálculo através de tabelas do método elástico, conduziu a resultados mais coerentes e certamente constitui, dentre os modelos simplificados, o mais indicado.

BURATO (1993) analisou o comportamento de lajes de concreto armado pelo “Método Iterativo Direto Aproximado”, que simula a Não-Linearidade Física do material concreto armado e apresenta uma visão macroscópica do comportamento não-linear do concreto armado.

O Método Iterativo Direto Aproximado foi implementado em um *software* existente, desenvolvido inicialmente por Owen and Hinton, e

consiste na variação da rigidez da laje através da modificação do módulo de elasticidade do concreto com base no diagrama momento-curvatura. Essa formulação, complexa e difícil de ser implementada no *software* existente, foi realizada em uma malha de Elementos Finitos e a linguagem de programação utilizada foi *Fortran*. No início do processo todos os pontos de integração da laje possuem o mesmo módulo de elasticidade, os quais são modificados até que todas as curvaturas e momentos principais desses pontos coincidam com seus respectivos diagramas momento-curvatura.

Foram realizados alguns modelos de lajes de concreto armado utilizando o *software* desenvolvido. O primeiro deles trata de uma laje quadrada, apoiada em quatro pilares. A Figura 4-53 apresenta as faixas de plastificação obtidas pelos pontos de integração que entraram no patamar de escoamento do diagrama momento-curvatura.

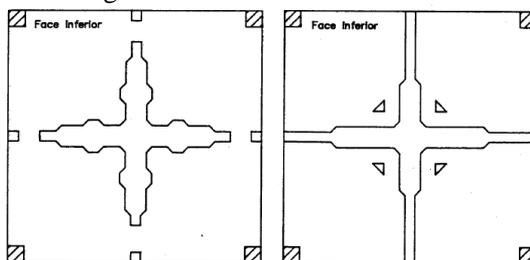


Figura 4-53 – Faixas de plastificação (BURATO, 1993)

A Figura 4-54 fornece as faixas de plastificação obtidas pela Teoria das Charneiras Plásticas.

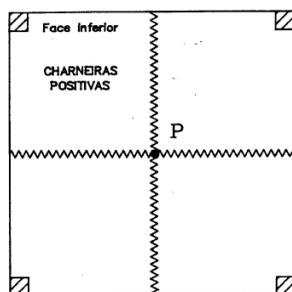


Figura 4-54 – Mecanismo de colapso adotado (BURATO, 1993)

Pode-se notar que as linhas de plastificação e o mecanismo de colapso obtido pelo Método Iterativo Direto Aproximado implementado em um *software* existente e pela Teoria das Charneiras Plásticas são

semelhantes. A carga de ruína também foi próxima comparando os dois métodos, sendo 1308,77 kgf pelo Método Iterativo Direto Aproximado e 1270,4 kgf pela Teoria das Charneiras Plásticas. Por fim, as faixas de plastificação iniciaram-se pelo centro da laje, redistribuindo-se em direção aos lados com o aumento da carga.

O segundo exemplo estudou uma laje quadrada apoiada nos contornos. A Figura 4-55 apresenta as faixas de plastificação para o Método Iterativo Direto Aproximado.

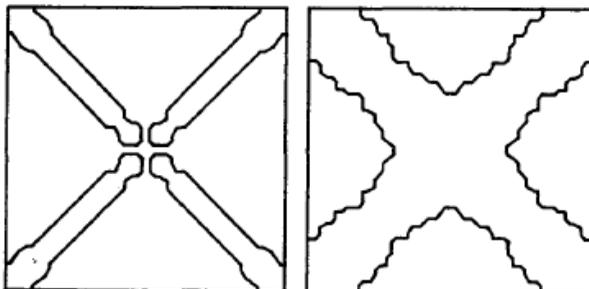


Figura 4-55 – Faixas de plastificação (BURATO, 1993)

A Figura 4-56 apresenta o mecanismo de colapso dado pela Teoria das Charneiras Plásticas.

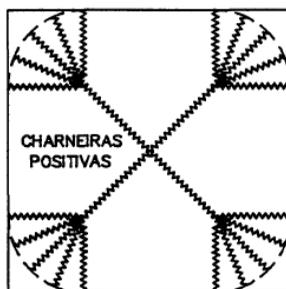


Figura 4-56 – Mecanismo de colapso pela Teoria das Charneiras Plásticas (BURATO, 1993)

Assim como apresentado no primeiro exemplo, pode-se notar que as linhas de plastificação e o mecanismo de colapso obtido pelo Método Iterativo Direto Aproximado implementado em um *software* existente e pela Teoria das Charneiras Plásticas são semelhantes. A carga de ruína também foi próxima ao comparar os dois métodos.

Trata-se de uma formulação que apresentou bons resultados, no entanto necessitou de um esforço de programação para modificar um *software* previamente desenvolvido e que se possuía acesso ao código.

Outros artigos e teses internacionais relativos a modelagem de lajes lisas notadamente na ligação laje/pilar pesquisados não foram citados nesta Tese por não estarem diretamente ligados ao tema proposto.

5. ESTRATÉGIAS PARA INCLUSÃO DA PLASTIFICAÇÃO

5.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dentre as pesquisas desenvolvidas sobre o tema, pode-se constatar que a grande maioria trata de estratégias de modelagens para eliminar o problema da singularidade ocorrido na ligação laje/pilar e propor momentos de dimensionamento considerando o comportamento plástico da ligação laje/pilar.

Dentro o campo das análises lineares, destacou-se os trabalhos de ROMBACH (2004), que propôs modelos para a consideração do pilar de apoio; as prescrições da NBR 6118:2014, item 14.6.3, acerca do arredondamento do diagrama de momentos fletores; HENNRICHS (2003), que modelou o pilar como elemento sólido; PUEL (2009), que considerou o pilar como reação distribuída na laje e SKORPEN ET AL (2014), que modelou o pilar com elementos sólidos e também com molas elásticas nas extremidades do pilar.

Dentro o campo das análises pseudo-lineares, destacou-se os trabalhos de CHOI ET AL (2014), que implementou em um *software* a consideração do pilar com elementos de barra e aplicou molas não lineares nas extremidades dessas barras com rigidez equivalente a um modelo elasto-plástico definido pela norma Coreana KCI 2012. Cabe destacar que os demais elementos fazem parte de uma análise elástica; PARK ET AL (2006), que implementou em um *software* existente uma formulação na área da seção transversal do pilar para prever o comportamento do concreto fissurado com o alívio de tensão causada por essa fissuração, primeiramente para pilares centrais e posteriormente para pilares de borda.

Dentre o campo das análises não-lineares, destacou-se os trabalhos de MURRAY ET AL (2005), que considerou no *software* de análise não-linear “Enfram” o pilar modelado como apoio simples e apresentou bons resultados quando comparado com o modelo experimental ; XIAO ET AL (2005), que implementou no *software* ANSYS em uma análise não-linear, o modelo “Tension Softening Material”, que é capaz de simular o comportamento fissurado do concreto que ocorre na ligação laje/pilar de lajes lisas; WANG ET AL (2008), que implementou em um *software* um elemento *Shell* em camadas, capaz de reproduzir o comportamento do material, em termos de fissuração e o conseqüente alívio de tensão da ligação laje/pilar ; MARTINELLI (2003), desenvolveu um programa computacional, elaborado pelo Método dos Elementos Finitos, para análise tridimensional de situações de punção em lajes de concreto

armado com e sem armadura de cisalhamento ; MAMEDE ET AL (2012), modelou no *software ATENA 3D*, em uma análise não-linear, tanto o pilar e a laje como elementos sólidos, e obteve bons resultados em comparação com ensaios experimentais.

Dentre o campo das análises pelo Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), destacaram-se os trabalhos de FARIA (2004), que analisou no *software ADAPT* uma laje lisa pretendida simétrica e assimétrica, comparando os resultados pela MEF e pelo MPE e PEDROZO (2008), que analisou no *software SAP 2000* uma laje lisa pretendida simétrica considerando o pilar como reação distribuída na laje e comparando os resultados com o MPE.

Dentre o campo das análises limites ou plásticas, destacou-se o trabalho de DUARTE (1998), que comparou os momentos fletores das lajes de um pavimento pelo método elástico com o uso de tabelas, pelo MEF, por Analogia de grelha e pela Teoria das Charneiras Plásticas e BURATO (1993), que analisou o comportamento de lajes de concreto armado pelo “Método Iterativo Direto Aproximado”, que simula a Não-Linearidade Física do material concreto armado. Esse método, que foi implementado em um *software* existente, consiste na variação da rigidez da laje através da modificação do módulo de elasticidade do concreto com base no diagrama momento-curvatura.

Cabe destacar que as modelagens elásticas com apoio pontual apresentaram resultados ruins, melhorados quando se considerou o pilar com dimensões discretas ou então quando se distribui a reação do pilar na laje na área da seção transversal do pilar. Nas análises elásticas que consideraram o pilar com elemento sólido, foi encontrada uma concentração de esforços nas quinas dos pilares. Já na análise não-linear com o uso do *software ATENA 3D*, o modelo 3D em elementos sólidos apresentou bons resultados. O mesmo foi constatado quando se utilizou molas não-lineares no encontro da placa com o pilar. No entanto, em ambos os casos, os resultados foram comparados com ensaios experimentais específicos, o que não validam as hipóteses para outros tipos de estruturais.

Mesmo com todos esses estudos aqui comentados, continua-se com a problemática de qual seria a melhor maneira para encontrar momentos de dimensionamento das lajes lisas bem como os comprimentos das faixas de detalhamento, aplicáveis durante a fase de projeto. Por isso, mais uma vez, destaca-se a metodologia inovadora proposta nesta Tese, ou seja, uma modelagem numérica linear com redistribuição, que fornece bons resultados ao ELU, a qual será demonstrada no decorrer do texto.

5.2. DESCRIÇÃO DAS ALTERNATIVAS DE MODELAGENS NUMÉRICAS

Antes de apresentar a metodologia a ser adotada nesta Tese (descrita no Capítulo 5.3), serão mostradas alternativas realizadas pelo Autor na tentativa de incluir o efeito da plastificação nas lajes. Mesmo que esses modelos não tenham evoluído por conta dos resultados não serem satisfatórios, é importante a documentação deles para registro.

Os resultados foram comparados com os valores obtidos pelo Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), prescrito no item 14.7.8 da NBR 6118:2014. Os resultados também foram comparados considerando a seção física da ligação laje/pilar, modelando o pilar como reação distribuída na laje, conforme mostrado no trabalho de PEDROZO (2008) e PUEL (2009).

Todos os modelos foram concebidos no *software* SAP 2000, cuja formulação é baseada no Método Numérico dos Elementos Finitos. Utilizaram-se elementos de placa quadriláteros, do tipo *PLATES THIN*, de quatro nós (*DKQ – discrete Kirchhoff quadrilateral*).

5.2.1. Redução da inércia na faixa de distribuição

O primeiro modelo idealizado considera uma laje lisa simétrica em que se aplica uma redução gradual na inércia dos elementos *PLATES THIN* que fazem parte da faixa de dimensionamento. A ligação da laje/pilar foi modelada com o pilar como reação na laje, de modo a eliminar o problema da singularidade.

Na região dos pilares foram realizadas as reduções na inércia dos elementos *Plates*, de forma gradual. A maior redução da inércia ocorreu nas regiões de maior momento fletor (que são os locais onde se encontram os pilares), havendo uma diminuição da redução em direção a extremidade final da faixa de distribuição dos momentos.

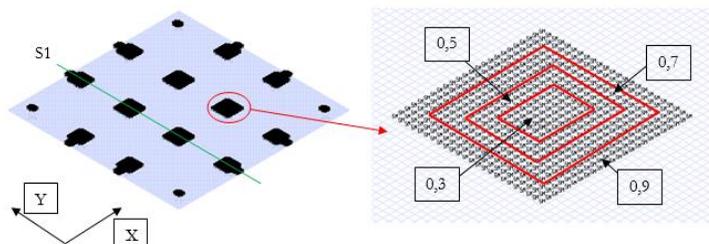


Figura 5-1 – Redução aplicada na inércia

O Gráfico 5-1 apresenta os momentos fletores na direção X para a Seção 1, indicada na Figura 5-1.

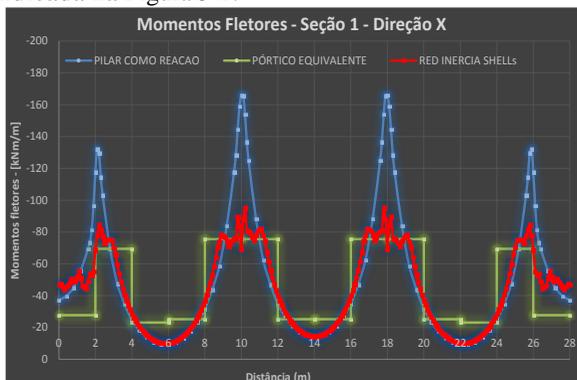


Gráfico 5-1 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X – Redução Inércia

Procurou-se uma redução na inércia de modo a criar o patamar de distribuição dos momentos fletores dado pelo MPE. Pode-se notar que essa modelagem não apresentou bons resultados, pois houve uma perturbação na região sobre os pilares sem efetivamente manter o patamar de momentos dado pelo MPE.

Além disso, outras reduções na inércia dos *PLATES THIN* foram aplicadas, sendo a distribuição aqui mostrada foi a que apresentou melhores resultados. Por conta disso, a metodologia apresentada neste Capítulo, que consiste em uma redução gradual na inércia dos elementos *PLATES THIN* por meio da aplicação direta de um coeficiente minorador, não se mostrou uma boa alternativa para a plastificação dos momentos na região da ligação laje/pilar.

5.2.2. Pilar como elemento sólido

O segundo modelo idealizado considera o pilar como elemento sólido. A ligação do elemento sólido com os elementos *PLATES THIN* foi realizada por meio de *links* rígidos, como forma de fazer a compatibilidade das deformações, conforme mostrado na Figura 5-2.

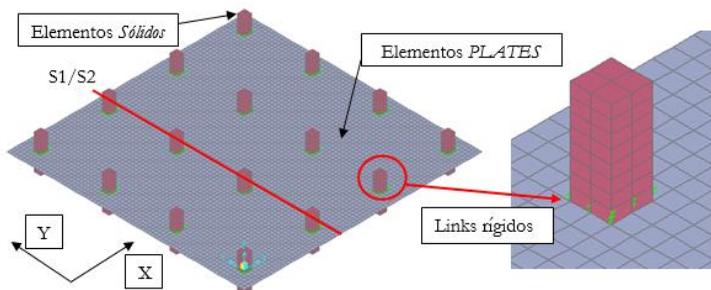


Figura 5-2 – Pilares modelados como elementos Sólidos

O Gráfico 5-2 apresenta os momentos fletores na direção X para as Seções 1 e 2, indicadas na Figura 5-2. A Seção 1 está situada bem no centro do pilar e a Seção 2 está situada na face do pilar central.

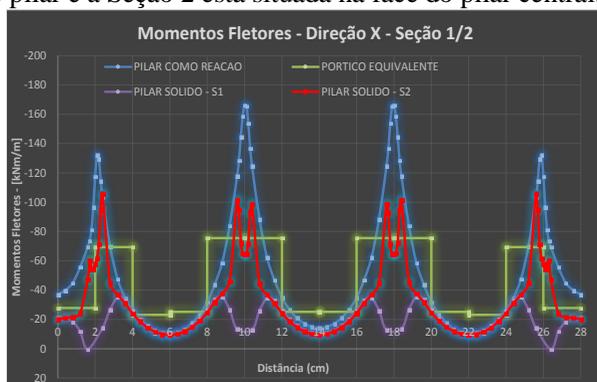


Gráfico 5-2 – Momentos Fletores – Seção 1/2 – Direção X – Pilar como elemento sólido

Pode-se notar que essa modelagem também não apresentou bons resultados. Para a Seção 1, que passa pelo centro do pilar, os momentos foram bem inferiores aos momentos fornecidos pelo MPE. Já a Seção 2, que passa pela face do pilar, houve uma concentração de esforços nas quinas do pilar, já constatada em outros estudos descritos no Capítulo 4.

Observações:

- 1) O momento fletor máximo obtido considerando o pilar como reação na laje é muito superior ao momento obtido pelo MPE. Isso evidencia que mesmo que se represente o pilar como reação na laje, ainda pode-se reduzir o momento de dimensionamento;

- 2) É necessário utilizar malhas bem refinadas para poder conectar os nós da malha da laje com os nós do pilar. Caso se opte por malhas mais grosseiras, inevitavelmente será necessário criar transições nas regiões próximas aos pilares. Sabe-se que transições na malha normalmente são responsáveis por concentrações de esforços.

5.2.3. Análise não linear – concreto armado material elastoplástico

O terceiro modelo idealizado trata de uma análise não linear, considerando o concreto armado como um material elastoplástico, por meio de molas não-lineares na ligação laje/pilar, conforme estudo realizado por CHOI ET AL (2014).

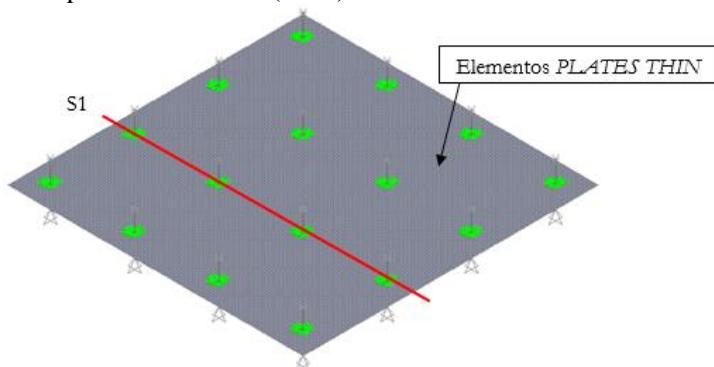


Figura 5-3 – Ligação Laje/Pilar com a utilização de molas não-lineares

Na região da seção transversal do pilar, considerou-se um núcleo rígido e aplicação de molas não-lineares que consideram o concreto armado como material elastoplástico, com rigidez proporcional ao momento de plastificação, conforme Gráfico 5-3.

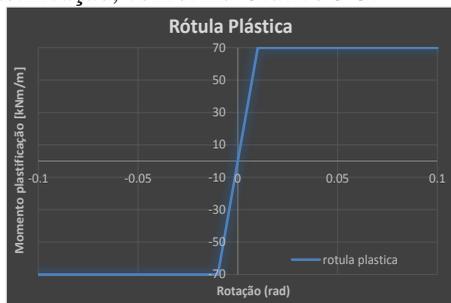


Gráfico 5-3 – Rótula plástica

Essas molas foram inseridas no *SAP 2000*, fazendo a ligação da malha da laje com o núcleo rígido do pilar, conforme apresentado na Figura 5-4.

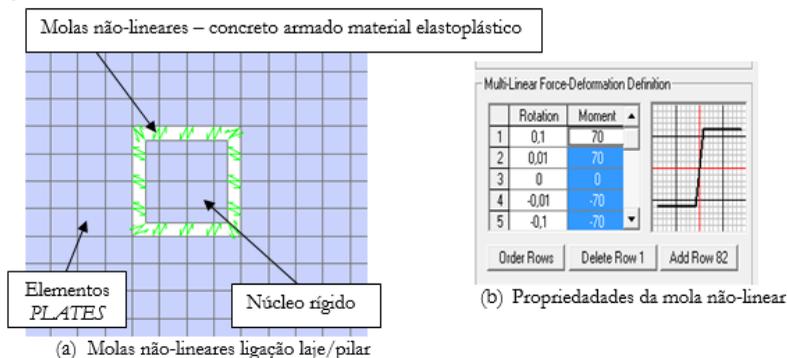


Figura 5-4 – Inserção das molas não-lineares

O Gráfico 5-4 apresenta os momentos fletores na direção X para a Seção 1, indicada na Figura 5-3. A Seção 1 está situada na face do pilar central. Tendo como base os resultados obtidos no item 5.2.2, não se realizou a seção passando pelo centro do pilar.



Gráfico 5-4 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X – Rótulas plásticas

Pode-se notar que esse modelo também não apresentou bons resultados. Houve uma perturbação dos momentos fletores na região dos pilares que também se refletiu para o entorno, resultando em momentos menores dos valores obtidos pela análise pelo MPE. De fato, não se conseguiu obter um patamar do momento de plastificação. Além disso, seguem alguns problemas encontrados nessas análises:

- é necessário utilizar malhas bem refinadas para poder conectar os nós da malha da laje com os nós do pilar. Caso se opte por malhas mais grosseiras, inevitavelmente será necessário criar transições nas regiões próximas aos pilares. Sabe-se que transições na malha normalmente são responsáveis por concentrações de esforços;

- o tempo de processamento dessa estrutura, relativamente simples, foi maior do que 2 (duas) horas, tendo em vista a inserção das molas não-lineares.

Vale frisar que demais modelos foram testados alterando a forma de consideração do pilar mantendo as molas não-lineares. Utilizaram-se pilares como elementos sólidos e também como apoio pontual no centro da seção transversal, havendo ligação com elementos de barra. Os resultados obtidos foram piores em relação aos obtidos neste Capítulo.

5.3. MODELAGEM DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO

Nesse caso, a modelagem para as análise lineares consiste em criar linhas de plastificação na laje (análogo às Charneiras Plásticas), nas regiões dos momentos fletores negativos sobre os pilares, em ambas as direções dos momentos. Criaram-se aberturas na malha e aplicaram-se elementos de ligação entre os nós afastados, chamados de *links*, do tipo *Constrains*.

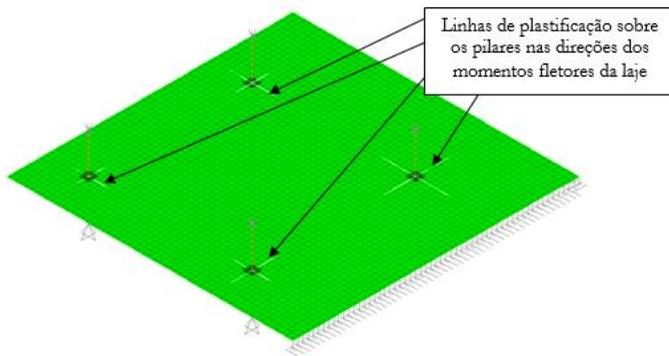


Figura 5-5 – Linhas de plastificação sobre os pilares

Os *links* do tipo *Constrains* possuem propriedades de transferência de translação de um nó para outro e permite a rotação entre eles. No entanto, nos nós de união da laje com o pilar é necessário restringir, além da translação, também a rotação, de modo a avaliar os momentos fletores transferidos da laje para os pilares (Figura 5-6b).

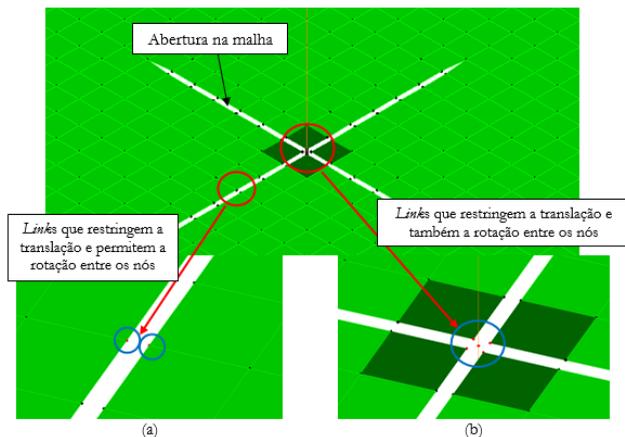


Figura 5-6 – Inclusão das linhas de plastificação na laje

Na sequência, aplica-se os momentos de plastificação (M_{plast}) nos nós da linha de plastificação e faz-se a reanálise da laje.

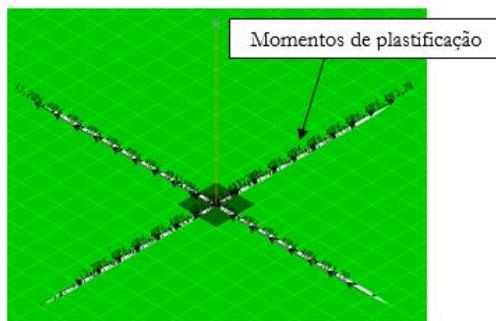


Figura 5-7 – Momentos de plastificação aplicado nos nós da malha

Vale lembrar que os momentos de plastificação aplicados nos nós são proporcionais a discretização da malha, uma vez que os momentos são representados em kNm/m .

Em termos qualitativos, apresenta-se na Figura 5-8 a deformação da placa.

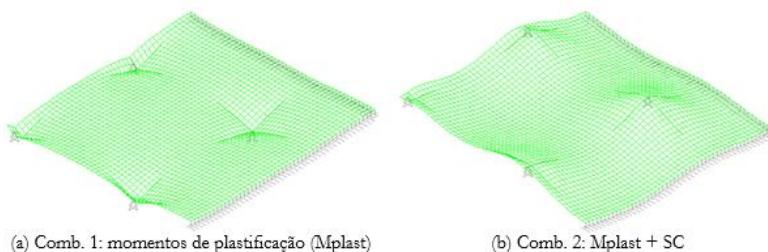


Figura 5-8 – Deformada da placa após inclusão das linhas de plastificação

Nota-se na Figura 5-8a que os momentos de plastificação modificam a deformada da placa quando atuam isoladamente. No entanto, quando atuam concomitantemente com a sobrecarga (Figura 5-8b), a deformada assume uma configuração já esperada dadas as características geométricas da estrutura e dos carregamentos aplicados.

A Figura 5-9a apresenta os momentos fletores na laje na Direção X, antes da inclusão dos momentos de plastificação. Já a Figura 5-9b mostra os momentos após a inclusão dos momentos de plastificação e a reanálise da estrutura. Nesse primeiro exemplo, os momentos de plastificação (Mplast) foram obtidos pelo MPE, cujo valor é igual a 86,25 kNm/m, com comprimentos iguais a 2 metros e 4 metros (pilares dos cantos e meio, respectivamente).

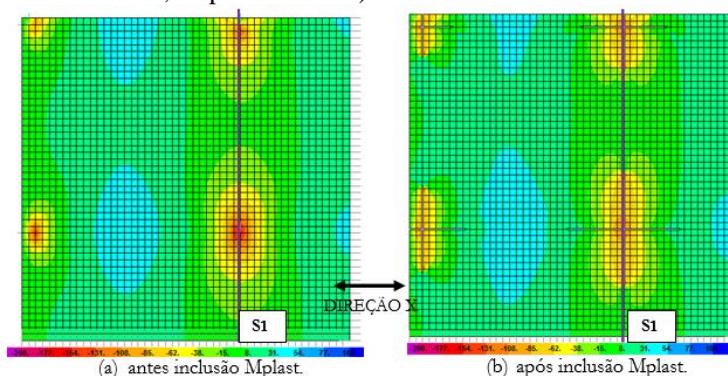


Figura 5-9 – Momentos fletores na laje após a inclusão das linhas de plastificação

O Gráfico 5-5 apresenta os momentos fletores para a Seção 1, indicada na Figura 5-9.

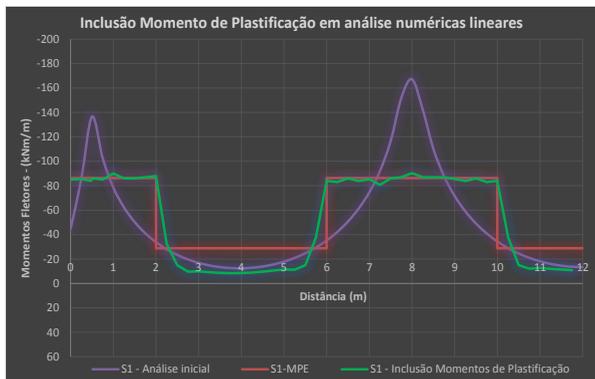


Gráfico 5-5 – Momentos Fletores – Seção 1 – Direção X

Acerca dessa modelagem, cabem alguns comentários:

- trata-se de uma análise linear com redistribuição, pois até os *links* são lineares, com tempo de processamento baixo mesmo para malhas refinadas;

- pode ser utilizada em qualquer *software* de análise estrutural, sem a necessidade de alterar o código de programação do *software*;

- foi desenvolvida para análises pelo Método dos Elementos Finitos. No entanto, a mesma ideia também pode ser aplicada em análise pelo Processo por Analogia de Grelha.

- permite criar linhas de plastificação para quaisquer comprimentos e não ficam restritas apenas à região de momento negativo da laje;

- após aplicar os momentos de plastificação e reanalisar a laje, há também uma redistribuição dos momentos fletores em demais pontos da laje, sendo necessário analisar as demais seções;

- não foi encontrada na vasta pesquisa realizada, modelagens com essa metodologia. Portanto, trata-se de uma abordagem inovadora;

Por todo o exposto, essa será a metodologia a ser utilizada nesta Tese para alcançar os objetivos preteridos. Maiores detalhes sobre essa abordagem, que envolve não somente a análise numérica linear com redistribuição, mas também a obtenção dos momentos de plastificação e o comprimento de distribuição das faixas de detalhamento das armaduras, serão apresentados no decorrer deste trabalho.

6. DESCRIÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

Os modelos numéricos foram subdivididos em dois grupos: Disposição regular e irregular dos pilares. Utilizaram-se modelos sem balanço (com e sem vigas de bordo) e com balanço. Em todos os casos, foram adotadas as seguintes propriedades dos materiais, dimensões e cargas.

| | |
|--|----------------------------|
| $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ | Espessura da laje = 0,25 m |
| $E_{cs} = 2,38 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ | Pilares seção 0,5 x 0,5 m |
| SC + PP = 10/15/20 kN/m ² | Vigas de bordo 0,5 x 0,5 m |

Consideraram-se pilares com 4 (quatro) metros de comprimento, modelados 2 (dois) metros acima da laje e 2 (dois) metros abaixo da laje, explicado no Capítulo 7.

6.1. MODELOS COM DISPOSIÇÃO REGULAR DOS PILARES

Todos os modelos regulares são compostos de 4 linhas de pilares, espaçados igualmente a cada 8 metros, o que totaliza uma laje retangular com 24x24 metros. Por conveniência de análise e sem prejuízo na obtenção e apresentação dos resultados e tomando partido da simetria, adotou-se $\frac{1}{4}$ da laje para estudo, ficando com dimensões 12x12 metros. Nesse caso, aplicaram-se as condições de contorno nos limites de simetria de modo a manter a compatibilidade das tensões e deformações, restringindo a rotação na direção da simetria.

Os exemplos regulares foram chamadas de Caso 1, Caso 2 e Caso 3, cujas descrições estão a seguir.

Caso 1 - Sem balanço – com vigas de bordo

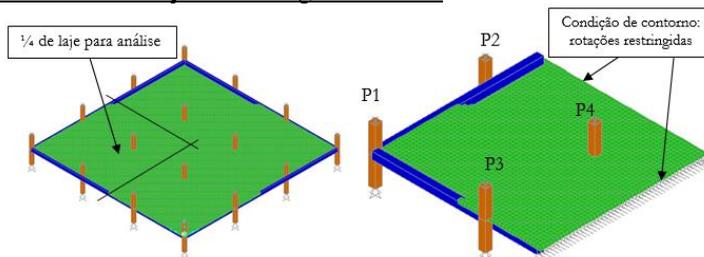


Figura 6-1 – Caso 1 – Sem balanço e com vigas de bordo

Caso 2 - Sem balanço – sem vigas de bordo

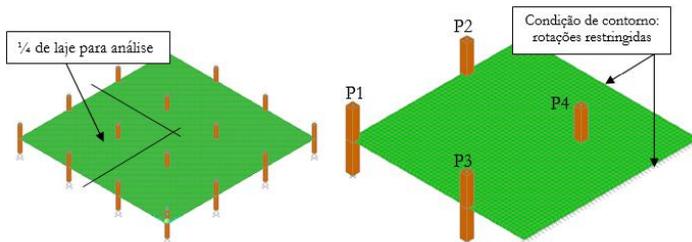


Figura 6-2 – Caso 2 – Sem balanço e sem vigas de bordo

Caso 3 - Com balanço – sem vigas de bordo

Nesse caso, adotou-se 2 metros de comprimento de balanço, totalizando um laje retangular com 28x28 metros, mantendo a distância entre pilares igual a 8 metros. O trecho simétrico possui 14x14 metros.

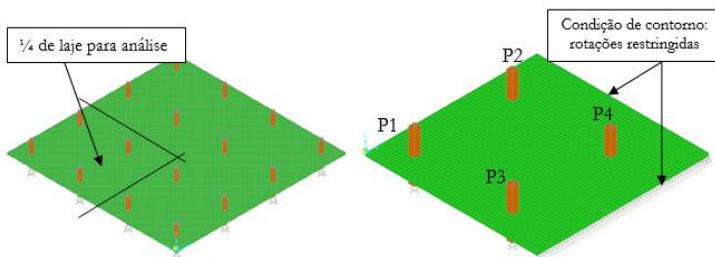


Figura 6-3 – Caso 3 – Com balanço e sem vigas de bordo

6.2. MODELOS COM DISPOSIÇÃO IRREGULAR DOS PILARES

O modelo irregular foi baseado em uma arquitetura usual para projetos de lajes lisas. Trata-se de um pano assimétrico compreendido dentro de um pano simétrico, com um total de 26 x 19 m. Utilizaram-se pilares de borda, balanços e assimetrias nas duas direções. A Figura 6-4 mostra o croqui em planta com a disposição dos pilares. Por conveniência da análise, modelou-se $\frac{1}{4}$ da laje, mantendo as condições de contorno de simetria, ficando as dimensões com 13 x 9,5 m.

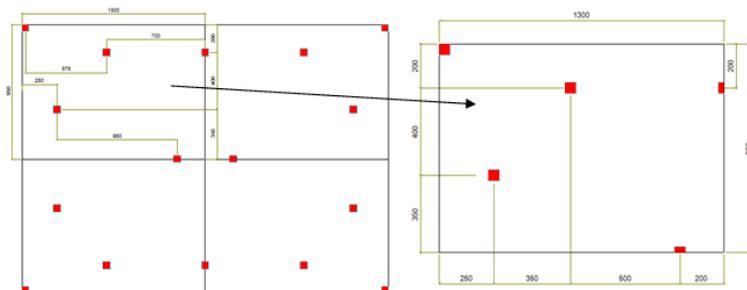


Figura 6-4 – Croqui em planta com a disposição dos pilares

A Figura 6-5 mostra o modelo no *software* SAP 2000 (¼ do painel), aplicando as condições de contorno nos bordos simétricos.

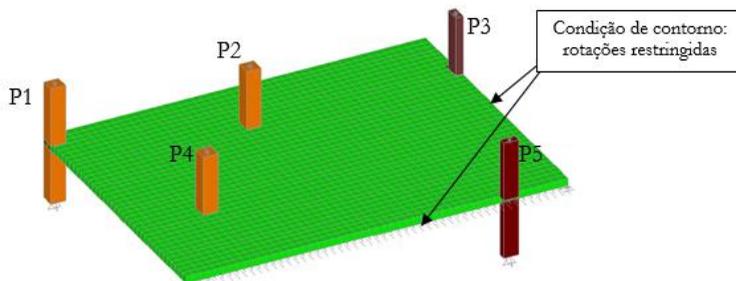
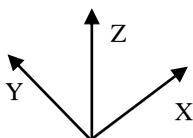


Figura 6-5 – Caso 4 –Irregular

7. CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DOS MODELOS NUMÉRICOS LINEARES

As análises lineares com a introdução das linhas de plastificação utilizadas nesta Tese foram concebidas no *software* SAP 2000, pelo Método Numérico dos Elementos Finitos (MEF). Os pilares e vigas foram representados por elementos lineares do tipo *FRAMES* e as lajes representadas por elementos de placa do tipo *PLATE THIN*, com seções transversais e comprimentos determinados de acordo com o exemplo a ser estudado. O lançamento foi realizado da seguinte forma:

1) Inicialmente definiram-se os planos para o lançamento da estrutura, representados pelos eixos X, Y e Z indicados a seguir:



O plano XY representa o plano da laje.

Na seqüência, foram inseridos os nós de apoio para o lançamento das vigas e pilares.

2) No lançamento dos pilares, idealizou-se o modelo análogo ao de viga contínua, prescrito na NBR 6118:2014 item 14.6.6.1, sendo que a continuidade do pilar com a laje se dá modelando meia altura do tramo inferior e superior do pilar conforme Figura 7-1.

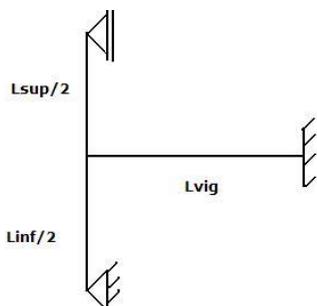


Figura 7-1 - Esquema simplificado da NBR 6118:2014 para o momento de solidariedade

3) A condição de contorno foi feita restringindo os nós das extremidades superior e inferior dos pilares com apoios do primeiro e segundo gênero, respectivamente, conforme Figura 7-2. Os apoios do primeiro gênero foram obtidos impedindo-se as translações nas direções dos eixos X e Y, deixando livres as rotações nos eixos X, Y e Z. Já para os apoios do segundo gênero, impediram-se as translações nos eixos X, Y e Z, mantendo livres as rotações nos eixos X, Y e Z.

4) As lajes foram representadas por elementos de placa do tipo “PLATE THIN”, analisadas pelo MEF (Figura 7-2).

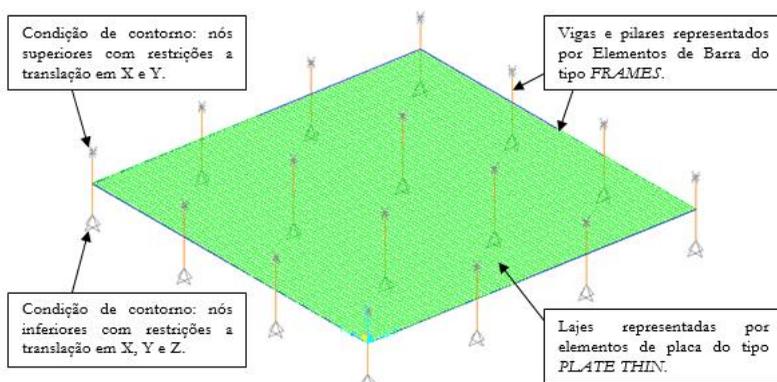


Figura 7-2 – Lançamento dos pilares análogo ao modelo de viga contínua

Tal qual como mostrado na Figura 7-2, tem-se a situação em que ocorrem as singularidades, já mencionadas neste trabalho, uma vez que as lajes estão diretamente apoiadas nos pilares (nesse caso representados por barras).

Mesmo havendo o problema da singularidade, serão apresentados alguns resultados com modelos com tais características (caso da Figura 7-2). No entanto, em determinadas situações, será necessário realizar alguns ajustes nos modelos numéricos, procurando alternativas para representar a seção física dos pilares, como forma de evitar as singularidades.

As bibliografias citadas no Capítulo 4 propõem algumas maneiras para representar o pilar como um elemento com dimensões discretas, e não somente uma barra. Nesta Tese, serão utilizadas duas alternativas, já estudadas em PUEL (2009) e, agora, com alguns aprimoramentos, haja vista a maior complexidade dos modelos aqui estudados, a citar.

7.1. PILAR COMO REAÇÃO NA LAJE

A primeira alternativa consiste em distribuir a reação do pilar em uma determinada área, como sendo um carregamento de baixo para cima, aplicado na laje. Nesse caso, além do esforço normal, é comum ocorrerem também momentos fletores, mesmo em distribuição regulares de pilares na laje.

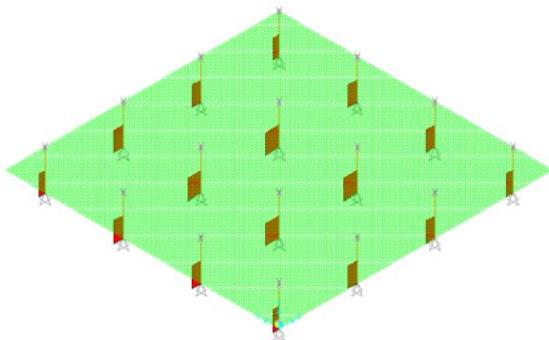


Figura 7-3 – Esforços axiais nos pilares - [kN]

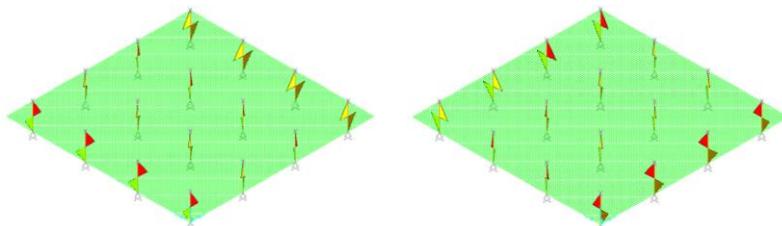


Figura 7-4 – Momentos fletores nos pilares – [kNm]

Com relação ao esforço normal nos pilares, é possível determinar o valor do carregamento uniformemente distribuído (q), dividindo a carga pelas dimensões dos pilares.

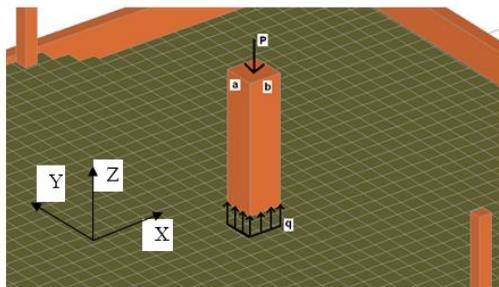


Figura 7-5 – Carregamento uniformemente distribuído na laje

Nesse caso, tem-se:

$$q = \frac{P}{a \cdot b} \quad \text{EQ. 7-1}$$

Onde:

q = Carregamento uniformemente distribuído aplicado como reação de baixo para cima na laje;

P = Esforço axial no pilar;

a = menor dimensão do pilar;

b = maior dimensão do pilar.

Quando também atuam momentos fletores concomitante aos esforços normais, a flexão no pilar pode ser substituída por um binário de forças, calculado a partir da soma do momento superior ao nó e do momento inferior ao nó que, quando aplicado como reação na laje, resulta em um diagrama prismático triangular de carregamentos, conforme mostrado na Figura 7-6.

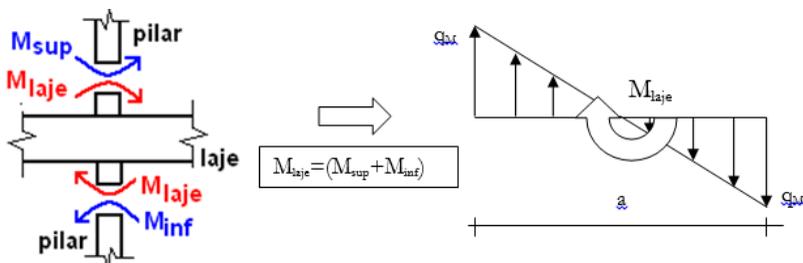


Figura 7-6 – Binário de forças resultante do momento fletor do pilar aplicado como reação na laje

O valor de “ q_M ” é constante ao longo da outra dimensão do pilar, resultando em um carregamento prismático triangular. O valor de “ q_M ” é dado pela [EQ. 7-2].

$$q_M = \frac{6 \cdot M_{laje}}{a^2 \cdot b} \quad [\text{kN/m}^2] \quad \text{[EQ. 7-2]}$$

Onde:

q_M = Valor da extremidade do carregamento aplicado como reação na laje;

M_{laje} = Momento fletor atuante na laje obtido através do somatório do momento do pilar superior e do momento do pilar inferior;

a = dimensão do pilar no plano de atuação do momento;

b = outra dimensão do pilar.

A metodologia para simular os esforços axiais e de flexão do pilar como reação aplicada na laje, consiste em um processo também iterativo, descrito a seguir:

- 1) Analisa-se inicialmente a estrutura modelando o pilar como apoio pontual (Figura 7-3 e Figura 7-4), obtendo-se os diagramas de esforço normal e momentos fletores do pilar;
- 2) Encontra-se o valor de “ q ” através da [EQ.7-1] e de “ q_M ” através da [EQ. 7-2]. Faz-se a sobreposição dos efeitos axiais (q) e de flexão (q_M) do pilar, obtendo-se um diagrama de carregamento final com valores q_E e q_D (Figura 7-7), adicionando-o na laje.

$$q = \frac{P}{a \cdot b} \quad \pm \quad q_M = \frac{6 \cdot M_{laje}}{a^2 \cdot b} = q_E \cdot q_D$$

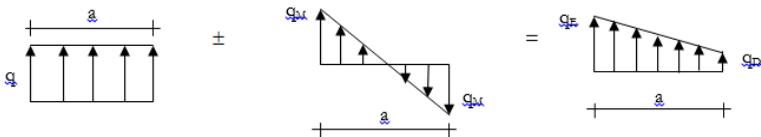


Figura 7-7 – Carregamento final com q_E e q_D aplicado como reação na laje

Onde: q_E = carregamento na face esquerda do pilar ;
 q_D = carregamento na face direita do pilar.

O diagrama final da composição do esforço normal e de flexão nem sempre tem a configuração apresentada acima. Dependendo do valor do esforço normal e de flexão, pode haver um bordo tracionado e com isso o sentido de “ q_D ” será de cima para baixo.

- 3) Substituem-se as barras dos pilares (modelado meia altura do tramo inferior e superior), por um apoio do segundo gênero, conforme Figura 7-8;

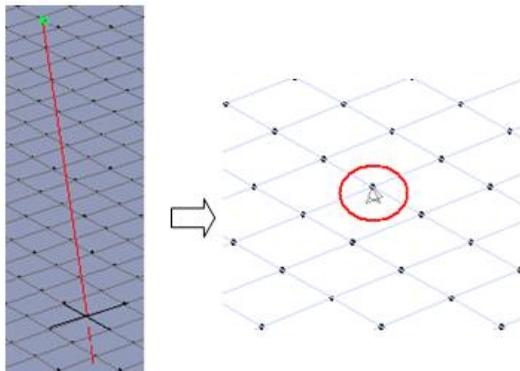


Figura 7-8 – Pilar como barra substituído por um apoio do segundo gênero

- 4) Analisa-se novamente a estrutura, obtendo-se no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 7-8), a reação no apoio e a rotação do nó;
- 5) A reação de apoio deve ser nula ou praticamente nula (dentro de um limite estabelecido pelo projetista). Caso não seja, deve-se corrigir o esforço axial inicial a partir da diferença encontrada nessa iteração;
- 6) Através da rotação do nó, verifica-se qual é o novo momento atuante, multiplicando-se a rotação do nó pela rigidez de uma mola que simula a rigidez da barra do pilar, modelado meia altura do tramo inferior e superior, conforme mostrado na Figura 7-9.

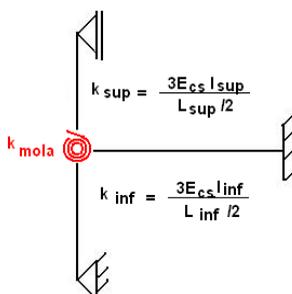


Figura 7-9 – Rigidez da mola: meia altura do tramo inferior e superior do pilar

A rigidez da mola (k_{mola}) é calculada da seguinte forma:

$$k_{mola} = k_{sup} + k_{inf}$$

$$k_{mola} = \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{sup}}{L_{sup} / 2} + \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{inf}}{L_{inf} / 2} \quad [\text{kN.m}] \quad [\text{EQ. 7-3}]$$

Onde:

k_{mola} = rigidez da mola;

E_{cs} = Módulo de elasticidade secante do concreto;

I_{sup} = Inércia do pilar superior;

I_{inf} = Inércia do pilar inferior;

L_{sup} = Comprimento do pilar superior;

L_{inf} = Comprimento do pilar inferior.

Por fim, o momento será calculado da seguinte forma:

$$M_{laje} = k_{mola} \cdot \varphi \quad [\text{EQ. 7-4}]$$

Onde:

M_{laje} = Momento fletor atuante na laje;

k_{mola} = rigidez da mola;

φ = rotação no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 7-9), oriundo do diagrama de carregamento obtido por q_E e q_D , aplicado como reação na laje, conforme mostrado na Figura 7-10.

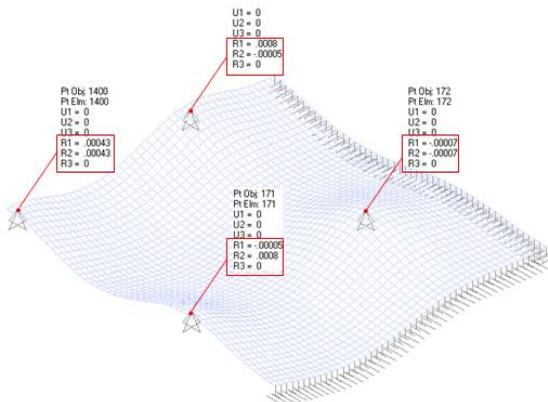


Figura 7-10 – Rotação do nó do vínculo do pilar

Caso o momento fletor atuante no nó do vínculo do pilar nessa iteração não seja igual ao momento anterior, utilizado para encontrar q_E e q_D , torna-se necessário repetir o processo. A convergência se dá quando o momento obtido na iteração atual é igual ou praticamente igual ao utilizado na iteração anterior. É necessário que se estipule um limite mínimo de convergência dos momentos na mola.

- 7) Dessa forma, quando o processo não converge, é necessário ajustar os valores de “q” e “ q_M ” a partir dos novos valores de esforço normal e momento fletor, compondo um novo diagrama de carregamentos a partir dos valores de q_E e q_D . Esse novo diagrama será mais uma vez aplicado na laje até que se tenha a convergência do esforço normal e momento fletor comentada nos itens 5 e 6.

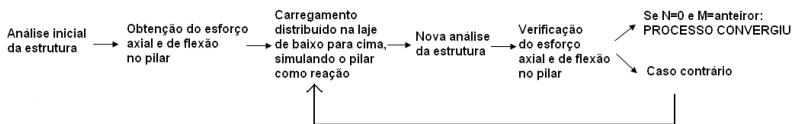


Figura 7-11 - Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que não há simetria do pilar na laje

Quando os momentos atuam em ambas as direções nos pilares (Figura 7-4), o procedimento acima descrito é realizado concomitantemente para as direções X e Y. Após isso, o diagrama prismático do item 2 (q_D e q_E da Figura 7-7) é inserido no modelo numérico como carregamento de baixo para cima na laje, conforme Figura 7-12.

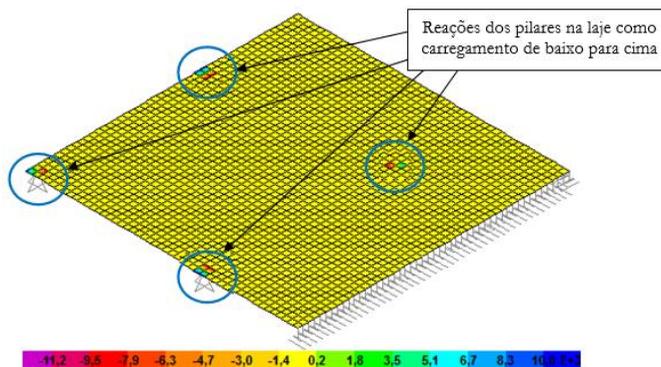


Figura 7-12 – Rotação do nó do vínculo do pilar

7.2. PILAR COMO SEÇÃO RÍGIDA

Na ligação da laje com o pilar, especificamente na região compreendida pela área da seção transversal do pilar, existe uma região diferente em relação aos demais pontos da placa. Devido à interação laje x pilar, percebe-se que essa região tem uma rigidez superior. A Norma Brasileira NBR 6118:2014, no item 14.6.2.1, prescreve que: “Os trechos de elementos lineares pertencentes à região comum ao cruzamento de dois ou mais elementos podem ser considerados como rígidos (nos de dimensões finitas)”, conforme mostrado na Figura 7-13.

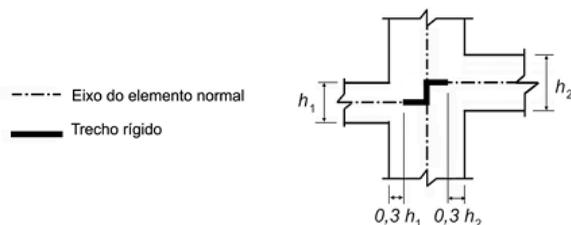


Figura 7-13 – Trechos rígidos, NBR 6118:2014

Dessa forma, nos elementos *PLATE THIN* que ficam compreendidos dentro da seção transversal do pilar, as rigidezes foram aumentadas em 100 vezes em relação aos demais elementos, transformando em rígida essa região (Figura 7-14).

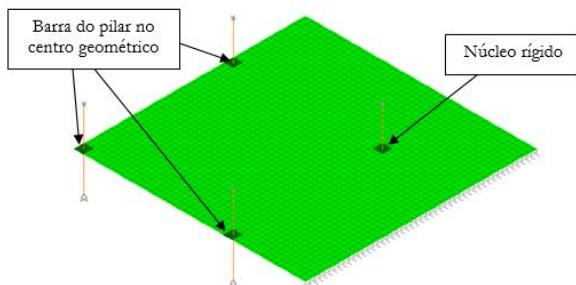


Figura 7-14 – Trechos rígidos nas seções transversais dos pilares

É importante frisar que nos modelos numéricos em que se tem a seção rígida, os pilares continuam a serem representados como barras, mas posicionadas no centro geométrico da seção transversal, mesmo nos pilares de canto.

8. OBTENÇÃO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO

O Método dos Pórticos Equivalentes (MPE) prescrito no NBR 6118:2014, item 14.7.8, fornece valores de momentos fletores que podem ser admitidos como momentos de dimensionamento (ou momentos de plastificação).

No entanto, quando se tem uma distribuição assimétrica dos pilares é sabido que o MPE não fornece bons resultados. Ainda, mesmo havendo distribuição regular dos pilares, o comparativo dos momentos fletores obtidos pelo MPE com o Método dos Elementos Finitos (MEF) não mostraram bons resultados nos pilares de bordo.

Desse modo, apresenta-se nesta Tese uma alternativa para estimar o Momento de Plastificação na laje, a partir da análise numérica pelo MEF. A metodologia consiste em integrar os momentos fletores obtidos pelo modelo numérico elástico dentro de uma faixa de interesse, dividindo o somatório desses momentos pelo comprimento da faixa. Em linhas gerais, obtém-se o momento médio daquela faixa, cuja equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$M_{\text{plast}} = \sum [(x_{n+1} - x_n) * (M_{x,n+1} + M_{x,n})] / 2 / L_{\text{faixa}} \quad [\text{EQ. 8.1}]$$

A título de exemplo, será apresentado numericamente o cálculo do M_{plast} para uma seção genérica, em uma laje lisa, cujos momentos fletores estão mostrados no Gráfico 8-1.

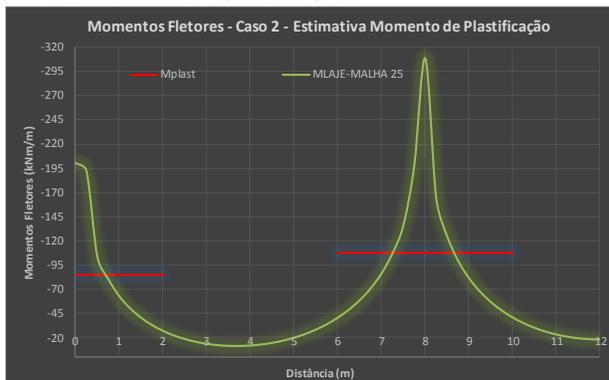


Gráfico 8-1 – Seção genérica - Estimativa momentos de plastificação

Os comprimentos das faixas foram definidos iguais a 2 e 4 metros (em vermelho no Gráfico 8-1), a partir dos quais se fez a integração dos momentos. Para a faixa de 6 metros a 10 metros (intermediária), o momento de plastificação será:

$$M_{\text{plast}} = \{ [(6,25 - 6)*(-45,4 - 37,3)]/2 + [(6,5 - 6,25)*(-55,1 - 45,4)]/2 + \dots \\ [(10 - 9,75)*(-39,1 - 46,3)] \} / 4$$

$$M_{\text{plast}} = -107 \text{ kNm/m} \quad [\text{EQ. 8.2}]$$

O mesmo procedimento também foi aplicado na faixa de 0 a 2 metros (extremidade), sendo que resultou em um momento de plastificação ($M_{\text{plast}} = -84,5 \text{ kNm/m}$, ambos representados no Gráfico 8-1.

Pode-se notar que se trata de um procedimento simples, mas que fornece um resultando importante para a análise à flexão das lajes lisas.

8.1. CÁLCULO DO MPLAST – CASO 2

Neste Capítulo, apresenta-se um estudo para a estimativa do momento de plastificação para o Caso 2 (sem vigas de bordo e sem balanço), seção S1 e S3 da Figura 8-1. Essa, por sua vez, apresenta os momentos fletores na laje na direção X, ora modelando o pilar como barra ora como reação na laje.

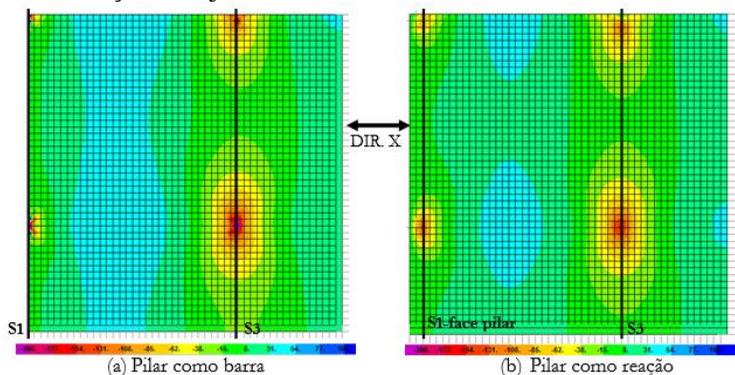


Figura 8-1 – Estimativa dos momentos de plastificação a partir de uma análise numérica

Será considerado o pilar modelado como barra (onde aparecem as singularidades) e também como reação distribuída na laje (ver Capítulo 7.1), para as malhas 12,5x12,5, 25x25, 50x50 e 100x100. Nesse caso, cada ponto da malha dos elementos finitos faz parte da integração dos momentos e, dependendo da largura adotada, será necessário realizar transições para ajustar com as dimensões do pilar (com seção transversal igual a 50x50 cm), conforme ilustrado na Figura 8-2.

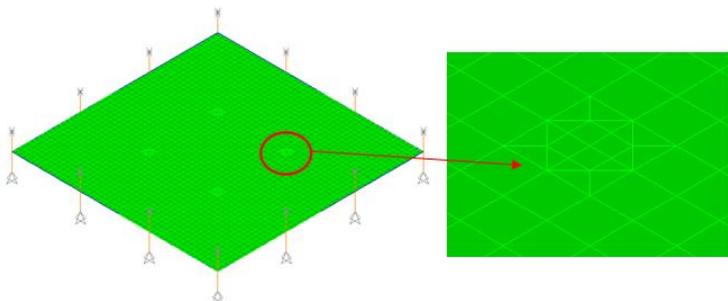


Figura 8-2 – Transições na malha com as dimensões dos pilares

O modelo que considera o pilar como trecho rígido não pode ser utilizado para a estimativa do momento de plastificação, uma vez que os momentos fletores dentro dos trechos rígidos resultam em altas concentrações esforços.

Por razões didáticas, o estudo iniciará pela Seção S3 e posteriormente pela Seção S1. De modo a estabelecer uma comparação com o valores encontrados com o MPE, será utilizado o mesmo comprimento das faixas, iguais a 4 (quatro) metros para o trecho intermediário e 2 (dois) metros para o trecho do canto.

8.1.1. Seção S3

O Gráfico 8-2 apresenta os momentos fletores para a Seção S3 (Figura 8-1a), malhas 12,5, 25, 50 e 100 cm, considerando o pilar modelado como barra.

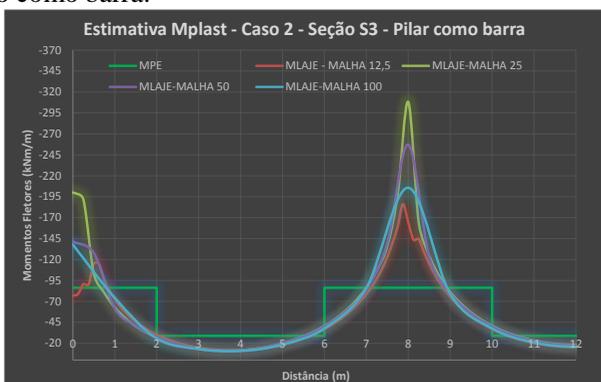


Gráfico 8-2 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 3 - Pilar como barra

O Gráfico 8-3 apresenta os momentos fletores para a Seção S3 (Figura 8-1b), malhas 12,5, 25, 50 e 100, considerando o pilar como reação na laje.

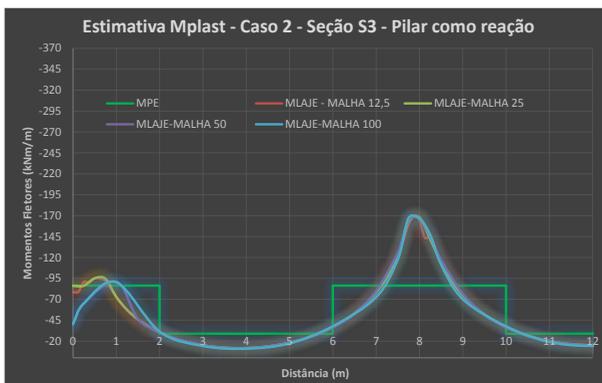


Gráfico 8-3 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 3 - Pilar como reação

O cálculo do momento de plastificação será apresentado por trechos, de acordo com as faixas dadas pelo MPE.

Trecho 1: 0 a 2 metros:

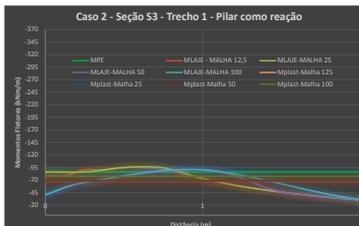


Gráfico 8-4 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 1

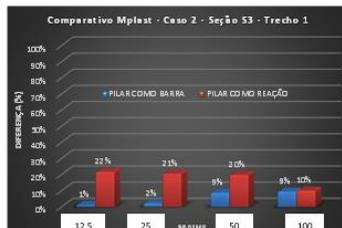
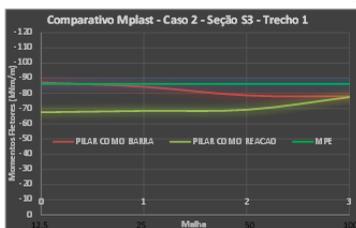


Gráfico 8-5 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 1

Trecho 2: 6 a 10 metros:

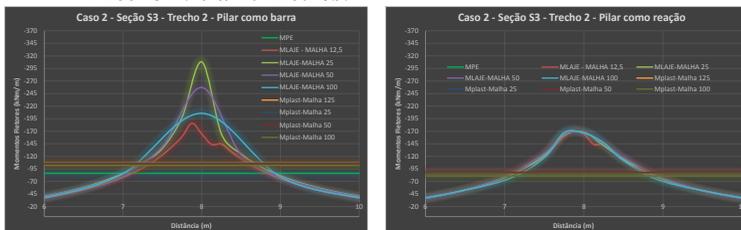


Gráfico 8-6 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 2

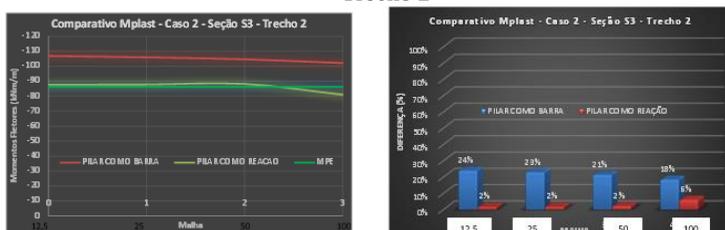


Gráfico 8-7 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 – Seção 3 - Trecho 3

Os momentos obtidos pelo MPE foram superiores no trecho 1 (exceção malha 12,5), mas inferiores no trecho 2 (exceção malha 100), em comparação aos obtidos pelo modelo numérico. No trecho 1, as maiores diferenças ocorreram quando se modela o pilar como reação, já no trecho 2 quando se modela o pilar como barra. A malha teve pequena influência em ambos os trechos, sendo mais notada no trecho 1 para as malhas mais grosseiras (50cm e 100 cm).

8.1.2. Seção S1

O Gráfico 8-8 apresenta os momentos fletores para a Seção S1 (Figura 8-1a) malhas 12,5, 25, 50 e 100 cm, considerando o pilar modelado como barra.

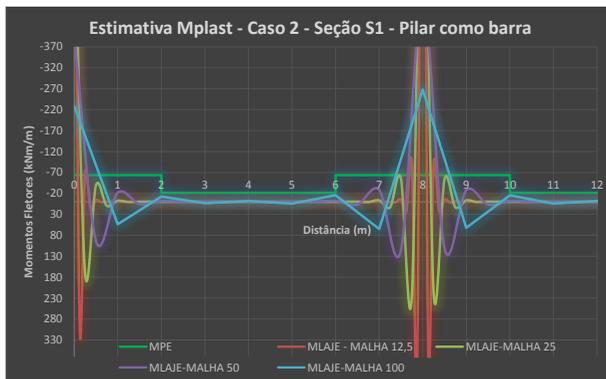


Gráfico 8-8 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 1 - Pilar como barra

O Gráfico 8-9 apresenta os momentos fletores para a Seção S1 (Figura 8-1b), malhas 12,5, 25, 50 e 100, considerando o pilar como reação na laje.

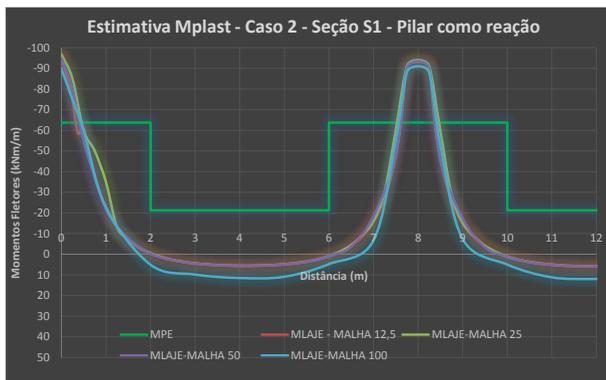


Gráfico 8-9 – Momento fletores – Caso 2 – Seção 1 - Pilar como reação

Nos modelos em que se considera o pilar como barra houve uma perturbação no diagrama dos momentos fletores (Gráfico 8-8). Já nos modelos com reação do pilar distribuída na laje, o comportamento do diagrama dos momentos foi muito mais regular (Gráfico 8-9).

O cálculo do momento de plastificação será apresentado por trechos, em gráficos, de acordo com as faixas dadas pelo MPE, tanto para o pilar modelado como barra ou modelado como reação. Na sequência, o momento de plastificação será comparado com o momento calculado pelo MPE, para todas as malhas analisadas.

Trecho 1: 0 a 2 metros:



Gráfico 8-10 – Estimativa Mplast – Caso 2 - Seção 1 - Trecho 1

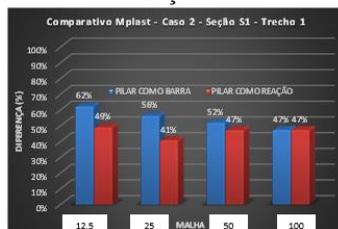
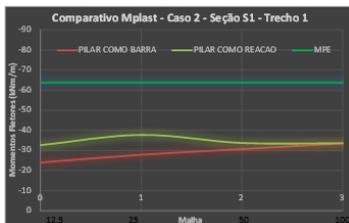


Gráfico 8-11 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 1

Trecho 2: 6 a 10 metros:



Gráfico 8-12 – Estimativa momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 2

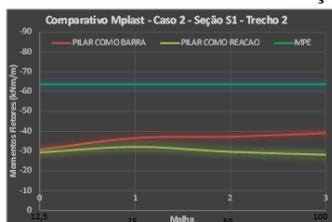


Gráfico 8-13 – Comparativo momentos de plastificação – Caso 2 Seção 1 - Trecho 2

Em ambos os modelos e trechos, o momento obtido pelo MPE foi superior ao obtido pelo modelo numérico. As diferenças foram expressivas, em torno de 50%. Situação análoga a esse já havia sido evidenciada em PEDROSO, 2008.

A malha teve influência nos casos em que se modela o pilar como barra, tanto no trecho 1 como no trecho 2. Ou seja, o diagrama de momentos fletores nessas regiões ficou tão perturbado a ponto do momento médio ser influenciado pela malha.

8.2. COMENTÁRIOS SOBRE O CÁLCULO DO MPLAST

Como comentários acerca do cálculo do Mplast pode-se citar:

- 1) Ao se modelar o pilar como barra, a distribuição dos momentos no trecho 1 e 2 da Seção S1 foi crítico em termos de singularidade. O que se tem é uma perturbação dos esforços nessas regiões. O modelo que distribui a reação do pilar na laje apresentou um diagrama com um comportamento bem mais regular. Mesmo assim, na média, nesse caso o cálculo do momento de plastificação não apresentou diferenças significativas, muito embora recomenda-se utilizar o segundo modelo;
- 2) Para a Seção S3, o efeito do pilar modelado como barra foi menos sentido do que na seção S1, havendo picos no diagrama de momentos fletores, sem no entanto haver perturbações. Nesse caso, houve diferenças expressivas na obtenção do Mplast (em torno de 20%) ao se utilizar o modelo com e sem singularidades;
- 3) A obtenção do Momento de Plastificação (Mplast) a partir do modelo que considera o pilar como barra apresentou bons resultados, e pode ser uma boa alternativa em termos de projeto, pois facilita a modelagem. Mesmo assim, por conta dos pilares de bordo, com ausência de vigas, recomenda-se utilizar o pilar como reação na laje. A distribuição regular dos momentos na laje sobre os pilares conduz a valores mais credíveis para o cálculo do Mplast.
- 4) Nesta Tese, para o cálculo do Mplast, utilizou-se o procedimento que considera o pilar como reação na laje, pelas razões aqui elencadas.
- 5) É importante frisar que o cálculo do Mplast é uma sugestão deste trabalho para se adotar para o momento de dimensionamento das lajes lisas. No entanto, o valor pode ser arbitrado a critério do projetista, inclusive tomando como referência o valor de Mplast. Em ambos os casos, a metodologia descrita no Capítulo 5.3 permitirá a inclusão do valor em questão.

9. ESTUDO PLASTIFICAÇÃO NAS ANÁLISES NUMÉRICAS LINEARES

Neste Capítulo, serão apresentados os resultados obtidos para as análises numéricas após a inclusão das linhas de plastificação, também chamadas de LPs, conforme procedimento apresentado no Capítulo 5.3, considerando o Caso 2 (sem vigas de bordo e sem balanço). O estudo abrangerá os momentos fletores obtidos na laje com e sem a inclusão das linhas de plastificação. Dessa forma, será possível verificar a influência da plastificação na redistribuição dos esforços na laje.

Inicialmente, será apresentado um estudo acerca da melhor maneira de modelar as linhas de plastificação nos pilares de bordo, que possui uma condição particular em relação aos pilares intermediários.

Na sequência, é alterado o comprimento das linhas de plastificação para valores diferentes dos obtidos pelo MPE. A análise pelo MEF sugere valores diferentes de $\frac{1}{4}$ da distância entre os pilares, prescrito no MPE, tendo em vista a própria distribuição dos momentos na laje. Com isso, é possível avaliar também a influência do comprimento das linhas de plastificação nos momentos transferidos aos pilares, uma vez que se trata de uma análise integrada laje/pilar.

9.1. LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO NOS PILARES DE BORDO

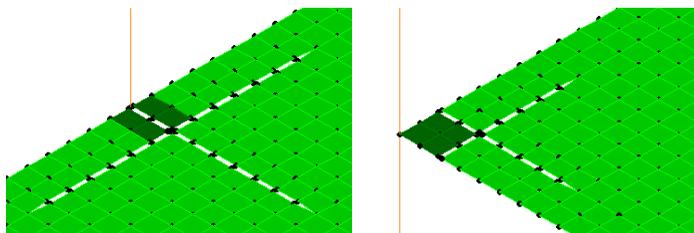
A modelagem das linhas de plastificação, apresentado no Capítulo 5.3, merece atenção especial nos pilares de bordo, e não pode ser tratada da mesma maneira como nos pilares intermediários. Nesse último caso, o centro geométrico coincide com a inclusão da barra do pilar bem como com o cruzamento das linhas de plastificação. Já nos cantos isso não acontece.

O estudo a seguir está descrito em sua maioria quando se considera o pilar como trecho rígido, descrito no Capítulo 7.2, mas também vale quando se considera o pilar como reação na laje (Capítulo 7.1).

O Caso 2 (sem vigas de bordo e sem balanço), descrito no Capítulo 6, exemplifica bem esta situação. O fato de não existir a continuidade da laje, o equilíbrio das extremidades é garantido transferindo integralmente a rotação da placa para os pilares. Por conta disso, a modelagem dessa região torna-se ainda mais importante.

Foram idealizadas algumas situações para a inclusão das linhas de plastificação nos pilares de borda, a citar:

- 1) Pilares situados nas extremidades da seção, com linhas de plastificação situadas na face da seção transversal;

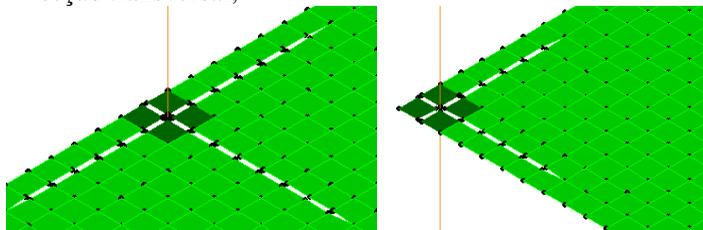


(a) pilar de extremidade

(b) pilar de canto

Figura 9-1 – Pilares e linhas de plastificação no centro geométrico da seção

- 2) Pilares situados no centro geométrico da seção transversal, com linhas de plastificação também situadas no centro da seção transversal;

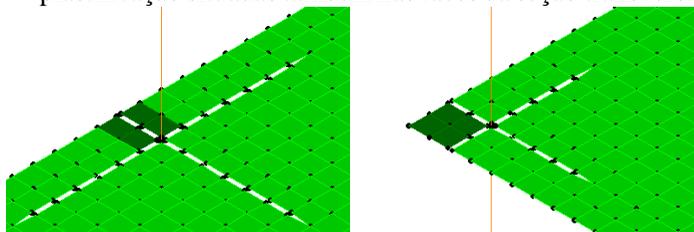


(a) pilar de extremidade

(b) pilar de canto

Figura 9-2 – Pilares e linhas de plastificação no centro geométrico da seção

- 3) Pilares situados nas faces da seção transversal, com linhas de plastificação situadas também nas faces da seção transversal;



(a) pilar de extremidade

(b) pilar de canto

- Figura 9-3 – Pilares e linhas de plastificação na face da seção
- 4) Pilares situados no centro geométrico da seção transversal, com linhas de plastificação passando pelo centro e pela face da seção transversal.

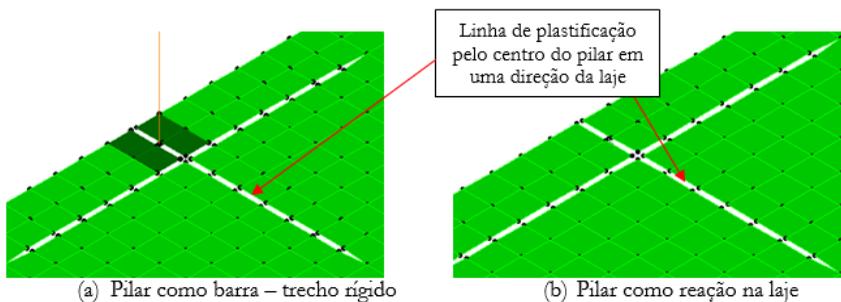


Figura 9-4 – Item 4 - Pilares de extremidade

Nos pilares de canto a situação é um pouco diferente. Em ambas as direções da laje, as linhas de plastificação ficam posicionadas nas faces dos pilares e a barra do pilar no centro geométrico da seção.

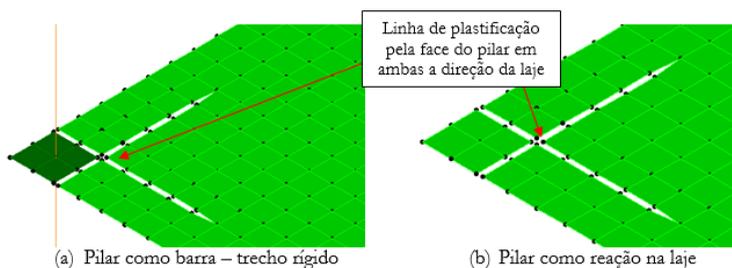


Figura 9-5 – Item 4 - Pilares de canto

Os melhores resultados foram obtidos na metodologia descrita na alinea 4 (Figura 9-4 e

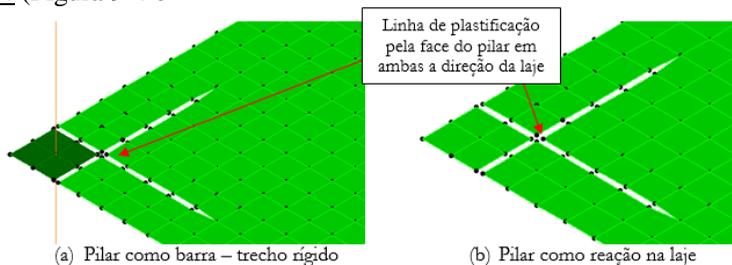


Figura 9-5), os quais serão utilizados nesta Tese.

9.2. COMPRIMENTO DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO

O Método dos Pórticos Equivalentes (MPE) propõe larguras de faixas a serem adotadas para distribuir os momentos fletores, calculadas a partir das distâncias entre a disposição dos pilares.

Em uma análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), é possível verificar a distribuição dos momentos fletores em torno dos pilares. Com base nela, pode-se estimar o comprimento das linhas de plastificação e calcular o momento médio da largura da faixa (momento de plastificação). Trata-se de um procedimento que naturalmente conduzirá a valores diferentes dos obtidos pelo MPE, seja para o M_{plast} como também para o comprimento das faixas.

A Figura 9-6 apresenta a distribuição dos momentos fletores na laje para o Caso 2 (sem vigas de bordo sem balanço), considerando os pilares modelados como reação, e malha 25 cm.

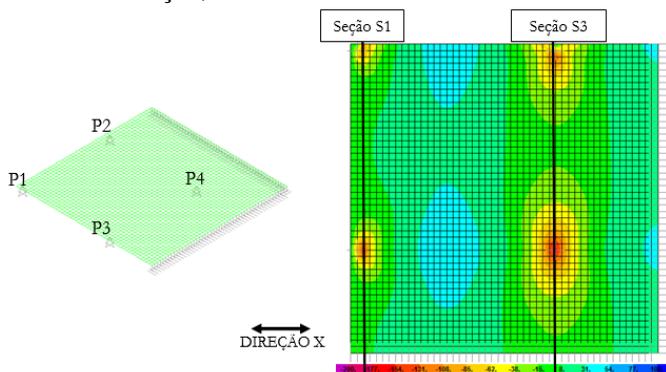


Figura 9-6 – Momentos fletores – Caso 2 - Pilar como reação -
Malha 25x25 -- [kNm/m]

Pela Figura 9-6, pode-se notar que a distribuição dos momentos fletores na laje sobre os pilares intermediários (P2 e P4), no qual se tem a continuidade da laje, é maior do que a distribuição no pilar de canto (P1) e de extremidade (P3). Dessa forma, tem-se que o comprimento das faixas das armaduras é diferente entre a seção S3 e S1.

Mais uma vez, destaca-se a importância de se utilizar o modelo que considera o pilar como reação na laje, que elimina as singularidades e resulta em um diagrama de momentos com comportamento bem regular.

O critério adotado nesta Tese para a determinação do comprimento das linhas de plastificação é adotar a faixa correspondente aos momentos que superam 30% do momento máximo negativo sobre os pilares, quando se usa os modelos que consideram o pilar como reação na laje.

O Gráfico 9-1 apresenta os momentos fletores para as seções S1 e S3 da Figura 9-6, e as linhas horizontais correspondem a 30% dos máximos momentos fletores sobre os apoios. O trecho de momentos fletores que está acima da linha horizontal é o trecho que vai ser modelado com plastificação.



Gráfico 9-1 – Definição Comprimento das LPs – Caso 2 – Seção S1/S3 – Pilar como reação

Com isso, chega-se a comprimentos das faixas mostrados na Tabela 9-1.

| | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|-----|------|-----|-----|
| Comprimento faixas negativos (m) | 1,0 | 1,75 | 1,5 | 3,0 |

Tabela 9-1 – Comprimento linhas de plastificação – Modelo elástico

Percebe-se que os valores não são fixos para cada pilar e seguem a distribuição dos momentos negativos dados pelo modelo elástico (Figura 9-6), sendo o pilar modelado como reação na laje. Além disso, permitem modelar linhas de plastificação sem que ocorram concentrações de tensões nas extremidades das LPs.

No entanto, o estudo deste Capítulo sugere utilizar comprimentos das faixas conforme mostrado na Tabela 9-2, para 3 (três) situações distintas, procurando apresentar resultados para valores máximos (situação 1), mínimos (situação 3) e intermediários (situação 2).

| Comprimento das linhas de plastificação arbitradas | | | |
|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| | Situação 1 | Situação 2 | Situação 3 |
| P1 | 1,5 metros | 1,0 metro | 0,5 metros |
| P2 | 2,0 metros | 1,5 metros | 1,0 metro |
| P3 | 3,0 metros | 2,0 metros | 1,0 metro |
| P4 | 4,0 metros | 3,0 metros | 2,0 metros |

Tabela 9-2 – Comprimento das linhas de plastificação arbitradas

Os valores obtidos pelo modelo elástico (Tabela 9-1) mais se aproximam da Situação 2, um caso intermediário entre a Situação 1 e a Situação 3. Os momentos de plastificação para as 3 (três) situações foram obtidos conforme procedimento do Capítulo 8, pelo modelo que considera o pilar como reação na laje. Já as linhas de plastificação foram inseridas nos modelos ora o pilar como seção rígida (Capítulo 7.2) ora como reação na laje (Capítulo 7.1).

A Figura 9-7 apresenta as Situações 1, 2 e 3.

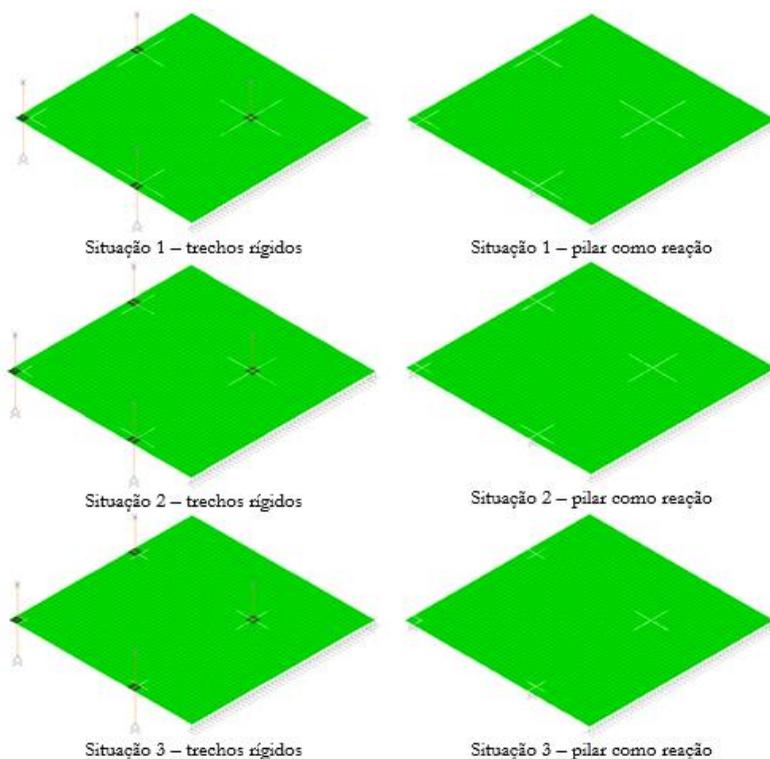


Figura 9-7 – Comprimento Linhas de Plastificação – Situação 1,2 e 3

O Gráfico 9-2 apresenta os momentos fletores para a Seção 1 (Figura 9-6), mostrando também os momentos de plastificação encontrados para os pilares P1 e P3, considerando os comprimentos das linhas de plastificação dado na Tabela 9-2.

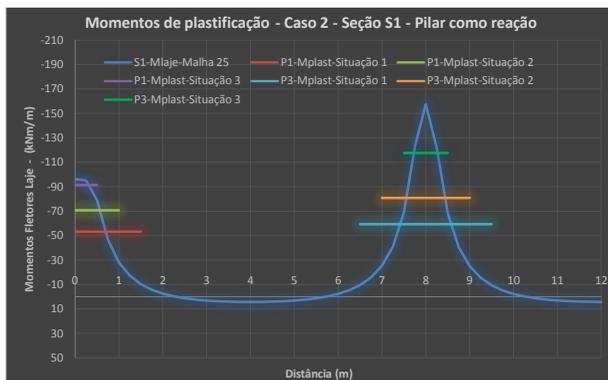


Gráfico 9-2 – Momentos de plastificação – Caso 2 – Seção S1 – Pilar como reação

O Gráfico 9-3 apresenta os momentos fletores para a Seção 3 (Figura 9-6), mostrando também os momentos de plastificação encontrados para os pilares P2 e P4, considerando os comprimentos das linhas de plastificação dado na Tabela 9-2.

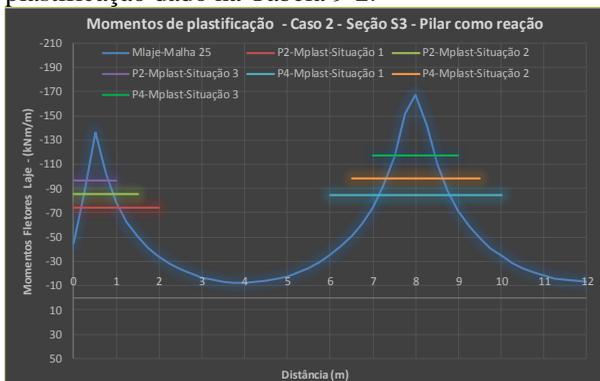


Gráfico 9-3 – Momentos de plastificação – Caso 2 – Seção S3 – Pilar como reação

Pode-se notar que o momento de plastificação aumenta na medida em que se diminuem os comprimentos das faixas. Na Situação 3 do pilar P1 (seção S1), o momento de plastificação quase ultrapassou o momento encontrado na análise elástica.

Na sequência, aplica-se os momentos de plastificação para cada situação para verificar as mudanças ocorridas na laje e nos pilares após a reanálise. A Figura 9-8 apresenta os momentos fletores na laje para os comprimentos das linhas de plastificação definidos na Tabela 9-2,

considerando o pilar modelado como trechos rígidos e também como reação na laje.

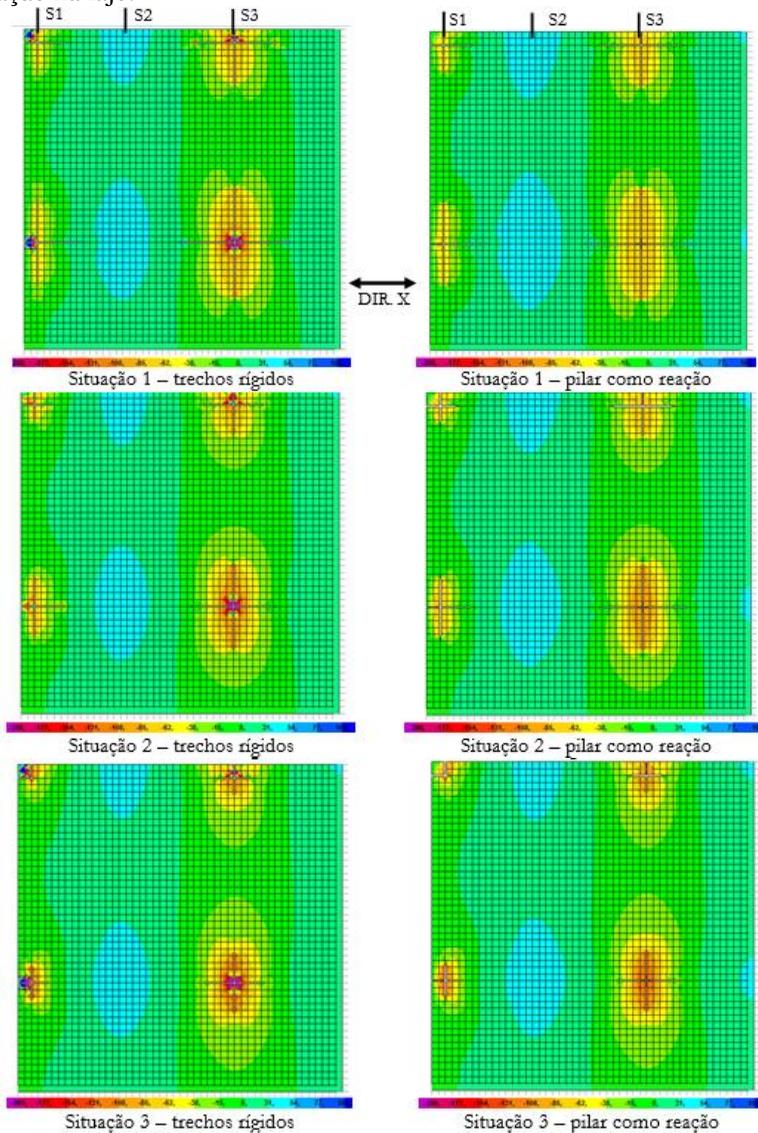


Figura 9-8 – Momentos Fletores – Direção X - Caso 2
Malha 25x25 – [kNm/m]

O diagrama de momentos fletores da Figura 9-8 mostrou que a alteração do comprimento das linhas de plastificação pouco interferiu na redistribuição do esforços nas demais regiões da laje, mesmo no modelo com trechos rígidos, que concentrou esforços dentro e próximo da seção transversal do pilar. Cabe destacar que nos modelos que considera o pilar como reação na laje não houve concentrações de tensões, independente da situação 1, 2 ou 3.

O Gráfico 9-4 apresenta os momentos fletores para a Seção S1, S2 e S3, para as situações 1, 2, 3 e também antes da inclusão das linhas de plastificação.

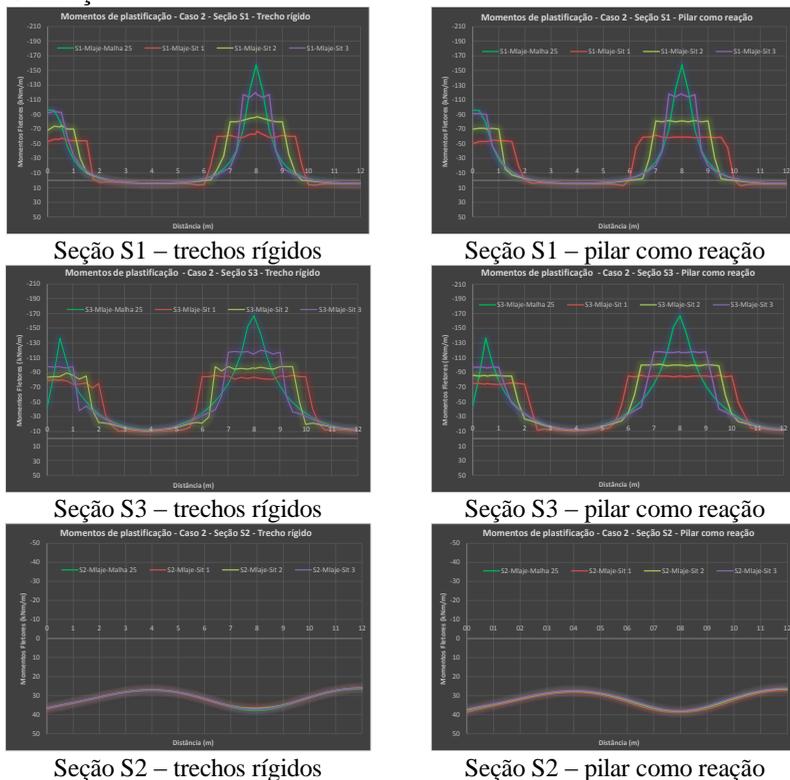


Gráfico 9-4 – Comparativo momentos – Situação 1,2,3 e antes da plastificação

Nos modelos que considera o pilar com trechos rígidos, os momentos dentro e próximo dos trechos rígidos foram ajustados, para melhorar a visualização dos resultados. Já nos modelos que considera o pilar como reação, nada foi feito. Ao comparar com a situação inicial (ou seja, sem plastificação), nota-se que ao se afastar das linhas de

plastificação não ocorrem grandes redistribuições de esforços, conforme já constatado na Figura 9-8. A seção S2 (positivos) ratifica essa afirmativa.

A Figura 9-9 apresenta os momentos fletores transferidos para os pilares P1, P2, P3 e P4, considerando o modelo com os trechos rígidos. Eles estão apresentados somente em uma direção, sendo que são iguais na direção oposta.

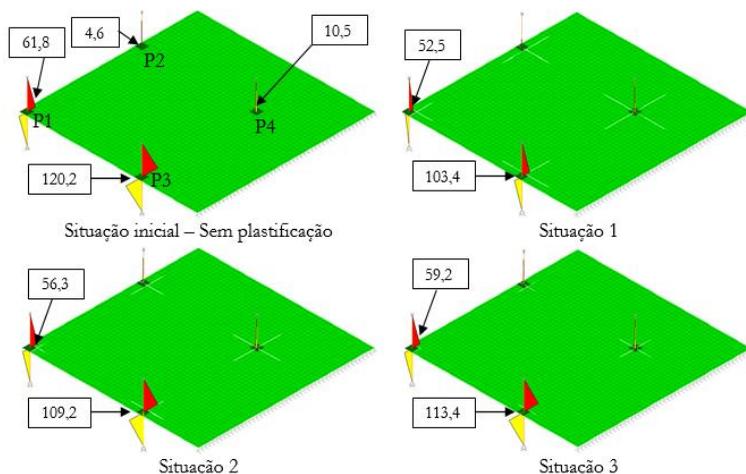


Figura 9-9 – Momentos fletores pilares – Caso 2 - Malha 25x25 – [kNm]

Para os pilares intermediários (P2 e P4), uma vez que se tem a continuidade da laje, os valores são baixos e independente de ter ou não linhas de plastificação, continuam pequenos e muito parecidos. Agora, com relação aos pilares de canto e extremidade (P1 e P3), cujo equilíbrio é garantido quase que exclusivamente pela ligação Laje/Pilar, o comprimento das linhas de plastificação tem influência direta. Quanto menor o comprimento da faixa, maiores são os momentos transferidos aos pilares, e tendem a se aproximar da situação inicial, sem redistribuição.

Na situação 1, com comprimento das faixas relativamente maior ao obtido pela distribuição inicial dos momentos elásticos (Tabela 9-1 e Figura 9-6), os momentos de plastificação mais afastados dos pilares P1 e P3 não se transferem a eles. Por isso, o momento nos pilares são um pouco menores se comparados com a situação 3.

A título de comparação com os modelos que consideram o pilar como reação distribuída na laje, os momentos transferidos aos pilares são muito parecidos ao obtidos pelo modelo com os trechos rígidos (Figura 9-9).

O processo de obtenção dos momentos nos pilares não é tão direto se comparado quando se tem os trechos rígidos (ver Capítulo 7.1). Por isso, sugere-se a segunda opção, que em termos de modelagem é bem mais simples e com resultados similares.

A Figura 9-10 mostra sucintamente o estudo realizado quando se tem o pilar como reação na laje.

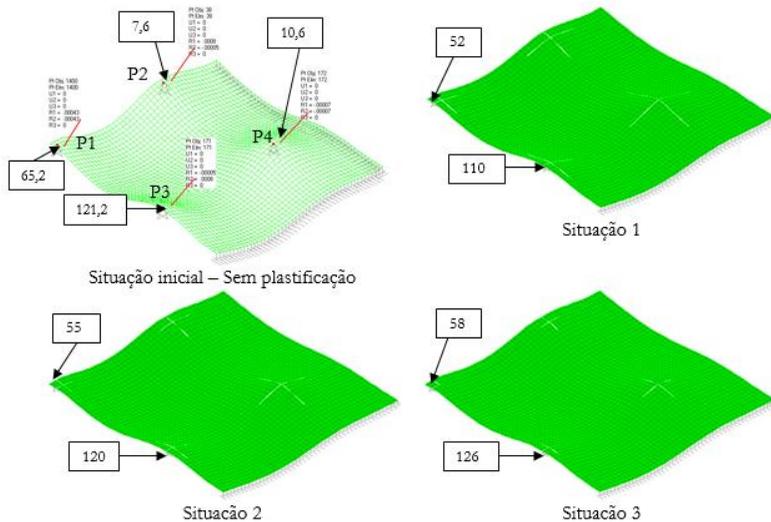


Figura 9-10 – Pilares – Momentos Fletores– Caso 2 – Pilar como reação
Malha 25x25 – [kNm]

O estudo deste Capítulo mostrou que o comprimento das linhas de plastificação não precisa necessariamente ter valores fixos ou pré-determinados, seja em estrutura simétricas ou assimétricas. Pode-se estipular valores máximos e mínimos, que seriam as situações 1 e 3 da Tabela 9-2, respectivamente, ou então seguir o critério da distribuição dos momentos elásticos do modelo numérico, que resulta em valores intermediários entre a Situação 1 e Situação 3 (ver Tabela 9-2). Define, portanto, um valor adequado a utilizar para as faixas e, logicamente, tem influência direta no cálculo do M_{plast} e no detalhamento das armaduras e, por isso, será utilizado nesta Tese.

No caso de comprimentos de faixas muito pequenos (situação 3), nota-se que os momentos de plastificação quase se igualam aos momentos elásticos.

Após a inclusão dos momentos de plastificação e reanálise da estrutura, tanto o modelo com trechos rígidos como o modelo que considera o pilar reação na laje apresentaram resultados parecidos. Isto

mostra que as concentrações de tensões dentro e próximo dos trechos rígidos não influenciam na distribuição dos momentos nas demais regiões da laje bem como nos momentos transferidos ao pilares.

Dessa forma, em termos de projeto, recomenda-se utilizar o modelo com os trechos rígidos para as análise numéricas com redistribuição. Tem-se uma modelagem bem mais simples se comparada aos modelos com pilares como reação na laje, com bons resultados e similares. Por isso, é usada nesta Tese.

9.3. ANÁLISE COM E SEM LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO

O estudo a seguir apresenta um comparativo entre as análise numéricas lineares antes e após a aplicação das linhas de plastificação, utilizando o *software* SAP 2000, aplicando o MEF.

Tendo em vista os estudos já realizados até o momento, a modelagem prevê os trechos rígidos no pilares, com malha de 25 cm e o momento de plastificação obtido conforme Capítulo 8, a partir do modelo que considera o pilar como reação na laje. Por razões didáticas e a título de comparação com o MPE, os comprimentos das linhas de plastificação serão os mesmos valores calculados pelo MPE.

Escolheu-se mais uma vez o Caso 2 (sem vigas de bordo e sem balanço) para a realização desse estudo, pois possui os pilares de borda, sem vigas ou balanços, e sem a continuidade da laje. Além disso, é regular e pode-se realizar um paralelo com o MPE, conforme informado no parágrafo anterior. A carga de projeto foi igual a $P_d = 10 \text{ kN/m}^2$. Por conveniência da análise, desprezou-se o momento de torção, sem prejuízo ao equilíbrio da placa.

A Figura 9-11 apresenta as seções para o estudo dos momentos fletores na laje. A Seção S1 e S3 estão localizadas sobre os pilares P1/P3 e sobre os pilares P2/P4, respectivamente. Já as Seções S2 e S4 estão localizadas entre esses pilares.

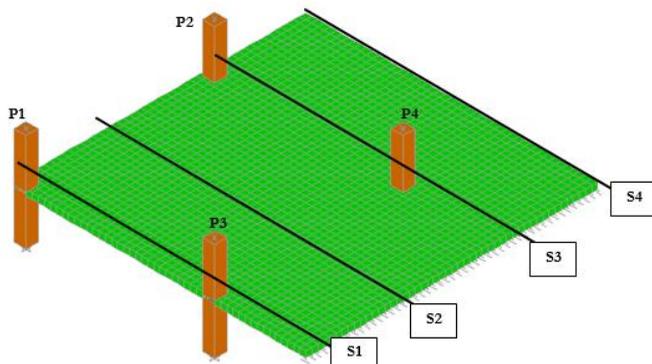


Figura 9-11 – Caso 2 – Trecho rígido – Seções

Chamou-se Etapa 0 a distribuição inicial dos momentos fletores, e Etapa 1 após a inclusão das linhas de plastificação, com a redistribuição dos esforços. A Tabela 9-3 apresenta os Momentos de Plastificação (M_{plast}) sobre os pilares P1, P2, P3 e P4, obtidos pelo MPE e também pelo modelo elástico (Etapa 0 da Figura 9-12). Nesse último caso, seguiu-se o procedimento do Capítulo 8, para faixas de 2 metros (pilares dos cantos) e 4 metros (pilares intermediários).

| | <i>P1</i> | <i>P2</i> | <i>P3</i> | <i>P4</i> |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>M_{plast} (kNm/m)</i> | -41,4 | -74,5 | -45,9 | -84,5 |
| <i>MPE (kNm/m)</i> | -63,8 | -86,3 | -63,8 | -86,3 |

Tabela 9-3 – Momentos de plastificação – Caso 2

A Figura 9-12 apresenta os momentos fletores na laje, na direção X, para a Etapa 0 e Etapa 1.

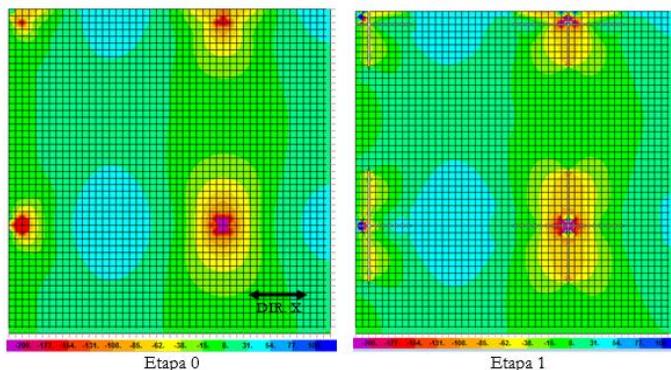


Figura 9-12 – Momentos fletores laje – Caso 2 – Direção X
Malha 25x25 – [kNm/m]

Mais uma vez percebe-se que a distribuição dos momentos elásticos na Etapa 0 da Figura 9-12 sugere comprimentos de faixas menores dos utilizados na Etapa 1 (calculados a partir do MPE), principalmente na seção de extremidade (S1, sobre P1 e P3).

O Gráfico 9-5 apresenta os momentos fletores na laje na direção X, para as Seções S1, S2, S3 e S4 (Figura 9-11), considerando a Etapa 0, Etapa 1, e também os momentos obtidos pelo MPE.

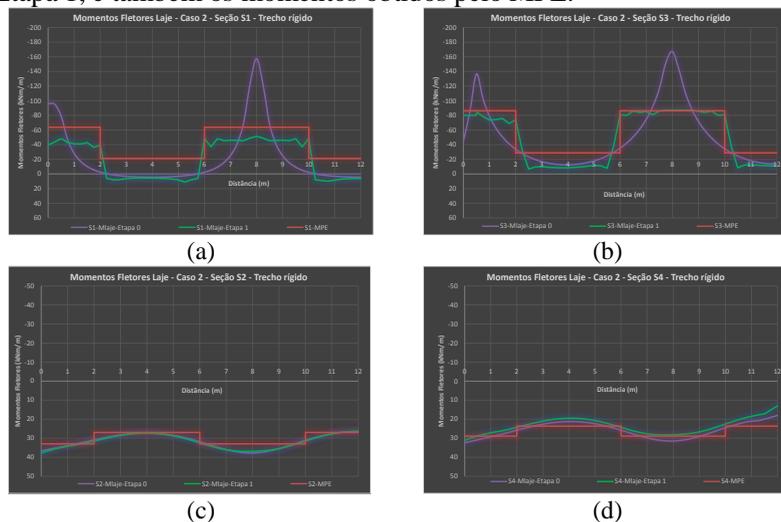


Gráfico 9-5 – Momentos fletores na Laje – Seção S1/S2/S3/S4 Trechos rígidos

Pode-se notar no Gráfico 9-5a e Gráfico 9-5b que os momentos de plastificação do modelo elástico e MPE diferem bastante na seção de extremidade (S1 – sobre P1 e P3) e também sobre o pilar P2 da seção S3. No entanto, sobre o pilar intermediário (P4) praticamente coincidiram. Esse fato também foi constatado nas conclusões dos estudos de PEDROZO (2008). Já nos trechos entre pilares, as diferenças foram bem acentuadas mesmo para a seção S3. Com relação aos momentos positivos (seções S2 e S4), percebe-se que a inclusão das linhas de plastificação praticamente não influenciou nos valores, sendo que na Seção S4 houve uma pequena redução (Gráfico 9-5d).

O Gráfico 9-6 apresenta o percentual de distribuição dos momentos fletores em cada faixa, comparando os valores do MPE com os valores obtidos pelo modelo elástico. No Gráfico 9-6, T1 significa a faixa de 0 a 2m, T2 de 2 a 6 m, T3 de 6 a 10 m e T4 de 10 a 12m.

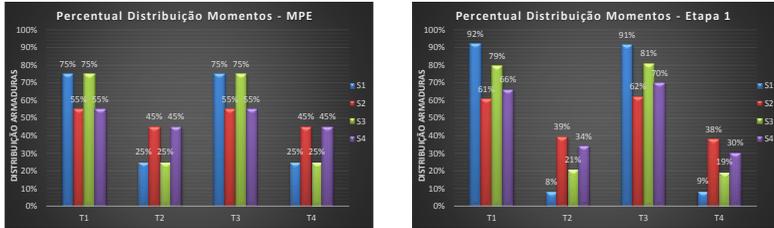


Gráfico 9-6 – Percentual de distribuição dos momentos nas faixas

Observa-se claramente que a distribuição dos momentos obtidos pela Etapa 1 do modelo elástico são bem diferentes do MPE. Na seção dos negativos (S1 e S3), houve uma maior concentração dos momentos sobre os pilares do que entre eles. O mesmo fato também ocorreu na seção dos positivos (S2 e S4). Naturalmente isso conduz a dimensionamentos diferentes que terão impacto direto no comportamento último da estrutura.

A título qualitativo, o Gráfico 9-7 mostra pequenas alterações nos deslocamentos na laje na seção dos positivos (S2 e S4), na direção X, comparando a Etapa 0 e a Etapa 1.

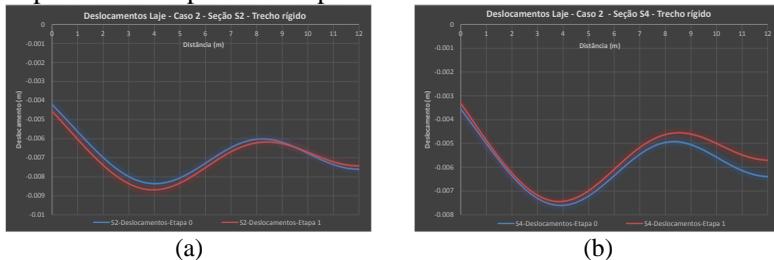


Gráfico 9-7 – Deslocamentos na Laje – Seção S2/S4 – Etapa 1 Trechos rígidos

De um modo geral, a inclusão das linhas de plastificação tiveram pouca influência na redistribuição dos esforços para as demais regiões da laje, em especial, nas seções dos positivos, S2 e S4. Justifica-se tal constatação devido a característica bi-linear que as lajes possuem, e ao grau elevado de hiperstaticidade. Em um elemento linear (uma viga por exemplo), os efeitos das análises com redistribuições são mais notados.

10. CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DOS MODELOS NUMÉRICOS NÃO LINEARES

As análises não-lineares são importantes para estudar o comportamento de uma estrutura, desde o início do carregamento até a ruína, passando da fase elástica, para a fase plástica e, por fim, até atingir o colapso.

Em lajes lisas, nas ligações entre as lajes e o pilares, o complexo fenômeno da punção pode ser melhor estudado pelas análises não-lineares. Os modelos numéricos elásticos, nesses casos, precisam de ajustes e critérios para se adequarem não somente aos esforços cisalhantes, mas também aos esforços de flexão (momentos fletores).

Nesse sentido, as análise não-lineares, por possibilitarem compreender melhor as ligações laje/pilar, notadamente nos pilares de bordo e de canto, servirão de base para validar os modelos numéricos elásticos propostos no Capítulo 9. Além disso, permitirão propor critérios, de modo a fornecer melhores resultados em termos de carga última de colapso, para uma mesma quantidade de armadura ou então aumentando a performance da laje para o mesmo nível de carga (isto é, diminuindo as taxas de armaduras totais).

Adotou-se nesta Tese o *software ATENA 3D*, por ser um programa de análise não linear essencialmente para estruturas de concreto armado. Ele utiliza um modelo constitutivo do concreto e do aço que permite uma boa simulação nas condições de carregamento último e também em serviço. Os bons resultados obtidos no artigo “Experimental and parametric 3D nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement”, MAMEDE ET ALL (2012) e em demais artigos em que se utilizou o *software ATENA 3D*, ratifica essa afirmação e dá confiança para utilizá-lo nas simulações numéricas a seguir.

10.1. MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem da estrutura é uma etapa primordial do processo da análise estrutural, sobretudo nas análise não-lineares. Por isso, apresenta-se a seguir a descrição acerca das modelagens não lineares adotadas no *software ATENA 3D*.

10.1.1. Geometria

Os Casos a serem estudados, descritos no Capítulo 6, foram modelados no *software ATENA 3D* com praticamente as mesmas concepções e critérios, mantendo as diretrizes básicas dos modelos elásticos.

A Figura 10-1 apresenta os modelos lançados no *software ATENA 3D*.

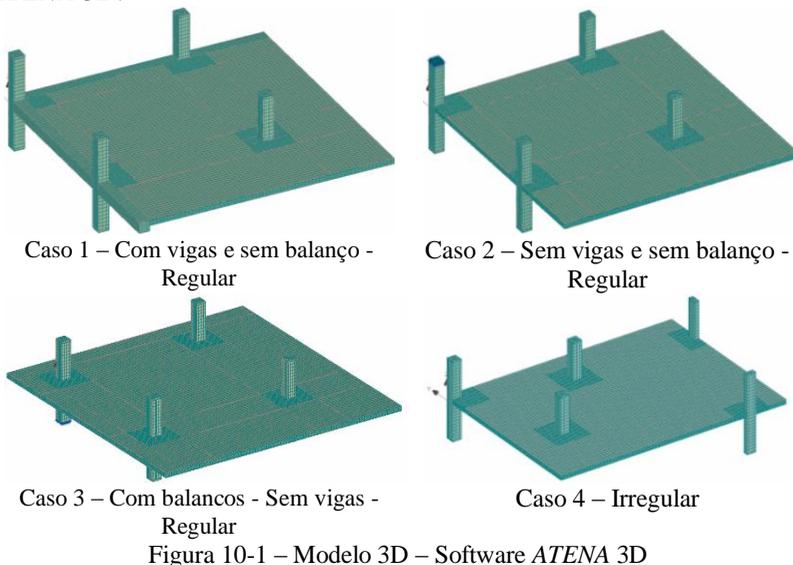


Figura 10-1 – Modelo 3D – Software *ATENA 3D*

Por razões de simplificações da análise, utilizou-se somente $\frac{1}{4}$ da laje, adotando as devidas condições de contorno na simetria. Nos Casos 1 e 2, as dimensões externas da parte simétrica é de 12 x 12 metros. No Caso 3 é de 14 x 14 metros, enquanto que no Caso 4 é de 9,5 x 13 metros.

A laje será maciça, com espessura constante de 25 cm. Os pilares terão comprimento de 2 metros (acima e abaixo da laje), com seção retangular constante de 50x50cm. Por fim, as vigas terão seção retangular constante igual a 50 x50 cm.

Concreto

No *ATENA 3D*, o modelo constitutivo do concreto que contempla todas as características, apresentadas no Capítulo 3.7.1, chama-se “CC3DNonLinCementitious2”. Ele consiste em um modelo plástico/fratura para o concreto.

Por se tratar de uma análise ainda na fase de projeto, no qual não se conhecem as propriedades dos materiais, serão utilizados os parâmetros definidos na NBR 6118:2014 e, na falta deste, no *Model Code 2010*. O f_{ck} de projeto é 25 MPa, e a partir dele se originam os demais parâmetros, sendo os mais importantes citados a seguir.

| | |
|---|---|
| $f_{cmd} = 0,85f_{ck} = -21,25 \text{ MPa}$ | $G_F = 0,000025f_{ct,md}=5,77 \times 10^{-5} \text{ MN/m}$ |
| $f_{ct,md} = 0,3f_{ck}^{2/3} = 2,31 \text{ MPa}$ | $w_d = -4,41 \times 10^{-4} \text{ m} / w_d = -8,83 \times 10^{-4} \text{ m}$ |
| $E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot f_{ck}^{1/2} = 25815 \text{ MPa}$ | $\epsilon_{cp} = -1,92 \times 10^{-3}$ |
| $\mu_c = 0,2$ | $r_e = 0,8 \text{ (Figura 3-28)}$ |

O diagrama tensão x deformação (Figura 10-2) foi determinado da seguinte forma, considerando o comportamento à compressão do concreto no *software ATENA 3D*, definido na Figura 3-23.

- Ponto 1: para a tensão máxima de compressão ($f_{ck} = 25\text{MPa}$), a deformação foi igual a $\epsilon_{c1} = 2,1$ por mil (Tabela 3.1 - EuroCode 2 – 1992-1-1 (2004));

- Ponto 2: para a deformação $\epsilon_{cu1} = 3,5$ por mil, estimou-se a tensão no concreto em $0,75f_{ck}$.

- A partir desses dois pontos, projetou-se uma reta até atingir o eixo das abcissas, chegando a deformação limite igual a 7,4 por mil.

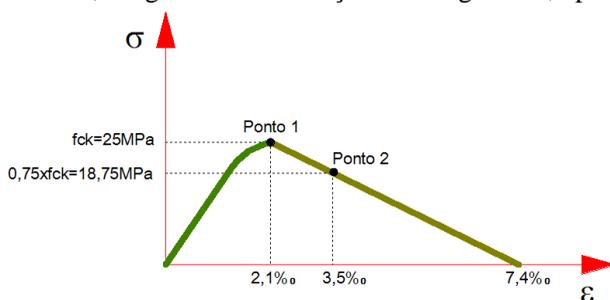


Figura 10-2 – Limites de deformação e tensão definidos para o concreto

O valor de w_d (Figura 3-25) foi determinado com base nos limites definidos para o concreto (apresentados na Figura 10-2) e também pelas dimensões da malha do elemento finito. Será apresentado no Capítulo 3.7 dois tipos de elementos, a citar: um com dimensões de 0,0833 metros e outro com dimensões de 0,1667 metros. Logo, tem-se dois valores para w_d :

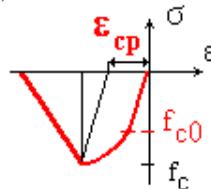
$$\epsilon_d = \frac{w_{d1}}{L_{d1}}, \quad \epsilon_d = 7,4 - 2,1 = -5,3 \times 10^{-3}, \quad w_{d1} = 5,3 \times 10^{-3} \times 0,0833 \rightarrow w_{d1} = -4,41 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$w_{d2} = 5,3 \times 10^{-3} \times 0,1667 \rightarrow w_{d2} = -8,83 \times 10^{-4} \text{ m} \quad [\text{EQ } 10.1]$$

Sendo assim, foram configurados dois tipos de concreto, uma para a malha mais refinada (com w_{d1}) e outro para a malha menos refinada (com w_{d2}).

O valor de ε_{cp} (Figura 3-26 e Figura 10-2) foi assim determinado:

$$\varepsilon_{cp} = 2,1 \times 10^{-3} - \frac{2 \times 2,31}{25815} = -1,92 \times 10^{-3} \quad [\text{EQ } 10.2]$$

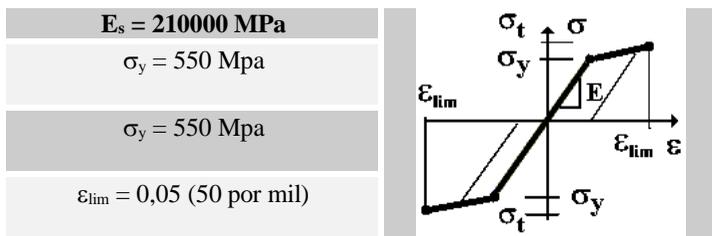


Nesses termos, teoricamente o concreto atinge seu ponto de ruína quando atingir a deformação de $\varepsilon_{c,lim} = 7,4 \times 10^{-3}$.

NOGUEIRA (2011) demonstrou em seus estudos utilizando o *software ATENA 3D* que utilizando o modelo com *Rotated Crack Model* (RCM) forneceu melhores aproximações do que utilizar o *Fixed Crack Model* (FCM), ambos apresentados no Capítulo 3.7. Logo, nesta Tese, utilizou-se o RCM.

Aço

Para o aço, utilizou-se o modelo Bilinear com Endurecimento, conforme definido no Capítulo 3.7.1.



Quando o aço atingir o limite de $\varepsilon_{s,lim} = 0,05$, ele rompe e o processo iterativo chega ao final ou próximo do final, dependendo da capacidade de redistribuição da estrutura.

10.1.2. Condição de contorno

As condições de contorno foram inseridas nos bordos de simetria como também no topo e base dos pilares, conforme mostrado na Figura 10-3.

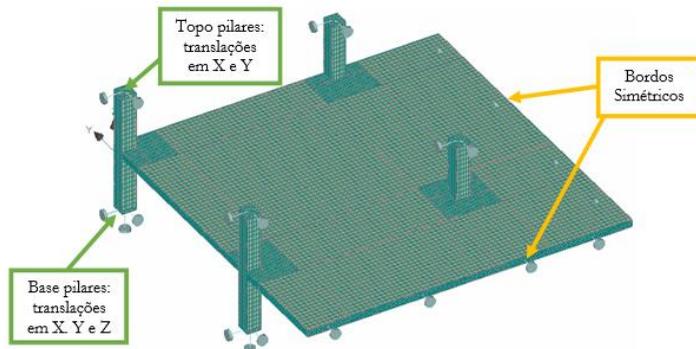


Figura 10-3 – Modelo 3D – Condições de contorno - Software *ATENA 3D*

Em relação a base e topo dos pilares, a restrição aos deslocamentos ocorreu somente nos nós. O motivo das restrições serem pontuais, justifica-se pela necessidade de haver medições nesses pontos, como será mostrado no Capítulo 10.1.6. Além disso, somente a base possui restrições na direção Z. Com isso, toda a carga vertical será medida por esse nó.

No entanto, o *ATENA 3D* não permite aplicações pontuais das condições de contorno nem mesmo aplicações pontuais de carregamento, uma vez que provocam perturbações no modelo constitutivo não linear do concreto. Desse modo, é necessário criar um elemento de transição entre o nó de apoio e a face do pilar (Figura 10-4), com um tipo de material específico, elástico isotrópico, chamado de *3D Elastic Isotropic*. Trata-se de uma chapa metálica, com espessura de 10cm, em que as condições de transferência para o concreto são ao longo da seção transversal do pilar, distribuídas em uma área de 50x50 cm.

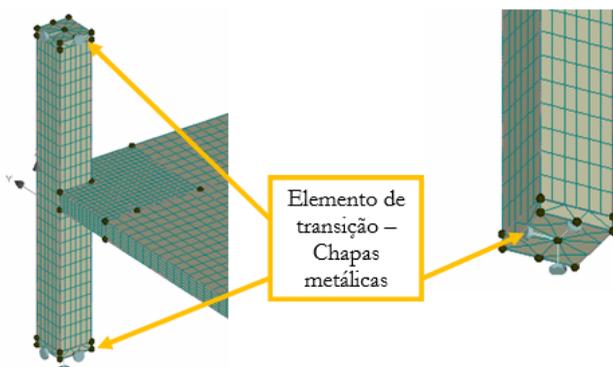


Figura 10-4 – Chapa metálica - Elementos de transição

10.1.3. Definição da Malha

Para toda a estrutura, utilizaram-se elementos isoparamétricos tridimensionais, chamados no *software ATENA 3D* de Elementos Sólidos *Brick*, apresentado no Capítulo 3.7.2.

Segundo MAMEDE ET AL (2012), as análises numéricas mostraram que a convergência do método ocorreu de maneira adequada para malhas mais refinadas. Já em malhas mais grosseiras houve aumento da carga última. Por isso, utilizaram-se no mínimo 6 (seis) elementos na menor dimensão, sejam lajes, vigas ou pilares, sendo que as recomendações indicam para um mínimo absoluto de 4 elementos, sob pena de se obter resultados sem significado algum.

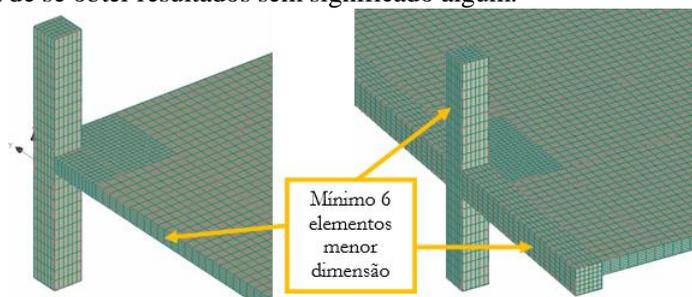


Figura 10-5 – Definição da malha de elementos finitos

Nas zonas ao redor dos pilares, afastadas a 1 metro da face dos pilares, por possuírem grandes concentrações de tensões devido ao fenômeno da punção, procedeu-se a um refinamento da malha (Figura 10-6). Nessas regiões, utilizaram-se elementos na proporção de 1:2 (4,16 cm x 8,33 cm), enquanto que nas demais regiões da laje utilizaram-se elementos na proporção de 1:4 (4,16 cm x 16,67 cm). Para os pilares e vigas, utilizou-se a proporção de 1:2 e sem refinamento (8,33 cm x 16,67 cm).

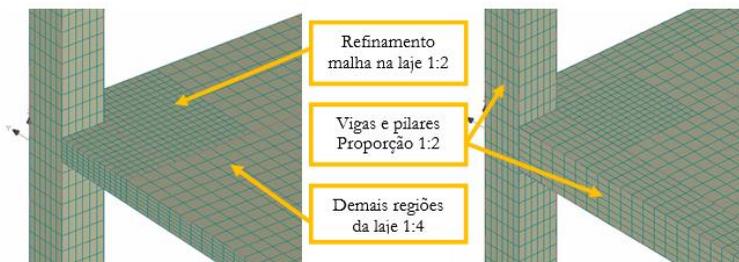


Figura 10-6 – Refinamento da malha

A ligação entre os macro elementos (regiões de transição da malha) é realizada automaticamente pelo *ATENA 3D*, desde que as faces entre eles estejam de fato em contato. Sobre a malha de elementos finitos, mesmo havendo pontos que não estejam conectados, o programa realiza internamente as condições de compatibilidade entre os nós, mediante a utilização de *constrains*. Ainda assim, procurou-se trabalhar com elementos de dimensões proporcionais, evitando regiões com esforços incoerentes.

Vale frisar que a malha do elemento finito tem uma influência muito importante na qualidade dos resultados da análise. Por isso, a escolha foi realizada de forma minuciosa, de modo a se obter a melhor relação entre o resultado obtido e o tempo de processamento, uma vez que as análises não lineares consomem na sua execução um tempo considerável.

10.1.4. Aplicação do carregamento

No *ATENA 3D*, a aplicação do carregamento é incremental, e não de uma única vez. Ou seja, a cada iteração (ou *step*), aplica-se o valor do incremento de carga até que a estrutura atinja o valor de colapso.

O valor do incremento é de fundamental importância para a convergência da análise não linear. Valores muito altos podem fazer não convergir o método. Vários testes foram realizados até encontrar o valor mais adequado para cada *Step*. Para níveis usuais de cargas de projeto ($P_d=10 \text{ kN/m}^2$; $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$ e $P_d = 20 \text{ kN/m}^2$), chegou-se ao valor de $0,25 \text{ kN/m}^2$, inserido diretamente na laje, conforme apresentado na Figura 10-7.

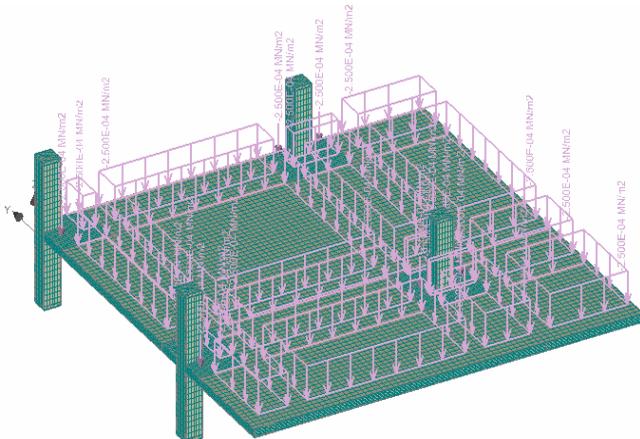


Figura 10-7 – Aplicação do carregamento na laje

Vale frisar que o *software ATENA 3D* representa a carga por macroelemento que compõe o painel (Figura 10-7), o que significa ser uniformemente distribuída ao longo de toda a laje.

Além do carregamento na laje, foi inserida uma carga vertical nos pilares, de modo a simular uma estrutura pertencente a pavimento intermediário de um edifício. O valor adotado foi de 2000 kN em cada pilar, distribuído na área da seção transversal, dividido em 5 incrementos (Figura 10-8) de carga.

$$\text{Carga pilar} = 2000 / 0,5 \times 0,5 = 8000 \text{ kN/m}^2 \quad ; \quad \text{Incremento} = 8000/5 = 1600 \text{ kN/m}^2$$

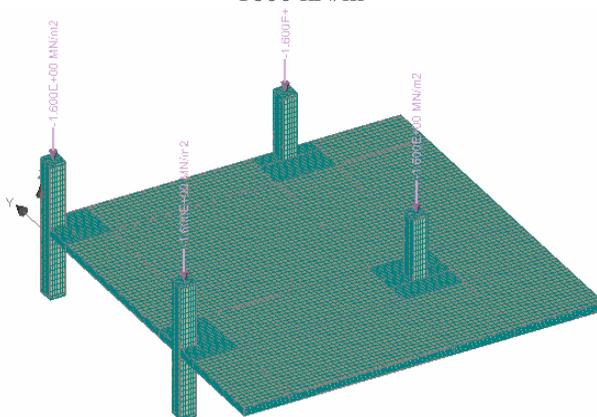


Figura 10-8 – Aplicação do carregamento nos pilares

É importante comentar que o carregamento dos pilares foi inserido de modo independente e preliminarmente ao carregamento da laje. Ou seja, quando a laje entra em serviço, os pilares já estão comprimidos, com carga axial igual a 2000 kN por pilar.

Desse modo, os cinco primeiros *Steps* contém a análise dos incrementos de carga dos pilares e a partir do sexto *Step* inicia-se a análise dos incrementos de carga na laje, até atingir a ruptura da estrutura.

10.1.5. Métodos de análise e critérios de convergência

Por se tratar de uma carga com valor exato, as cargas nos pilares foram analisadas pelo Método *Newton Raphson*. Já o carregamento na laje foi analisado pelo Método *Arc Length* (ambos explicados no Capítulo 3.7.4), para se obter a melhor resposta pós pico.

O limite adequado e utilizado nesta Tese para os critérios de convergência (Capítulo 3.7.5), é igual a 10%, para ambos os Métodos

(*Newton Raphson* e *Arc Length*). Isso significa dizer que a análise encerrará quando o erro de convergência no final de uma etapa exceder 10%. Além disso, configurou-se o limite de 120 iterações entre um *Step* e outro. Porém, normalmente 10 iterações já são suficientes para que se passe ao próximo *Step*, a não ser quando se está próximo da carga de ruptura, que é quando o equilíbrio fica mais difícil de ser alcançado.

10.1.6. Pontos de monitoramento

Durante a análise não linear do *ATENA 3D*, é importante monitorar, a cada *Step*, as forças, deslocamentos, fissuração ou mesmo tensões no modelo. Os dados monitorados fornecem informações importantes sobre o estado da estrutura. Por exemplo, sem o monitoramento das forças aplicadas nos apoios, não é possível determinar carga máxima de ruptura.

Sendo assim, criaram-se vários pontos de monitoramento em locais chave da estrutura, a citar: reações de apoio (horizontais e verticais) nos pilares, deslocamentos máximos e fissuração na laje e nas vigas. Todos eles estão identificados na Figura 10-9, e os resultados serão apresentados no decorrer desta Tese.

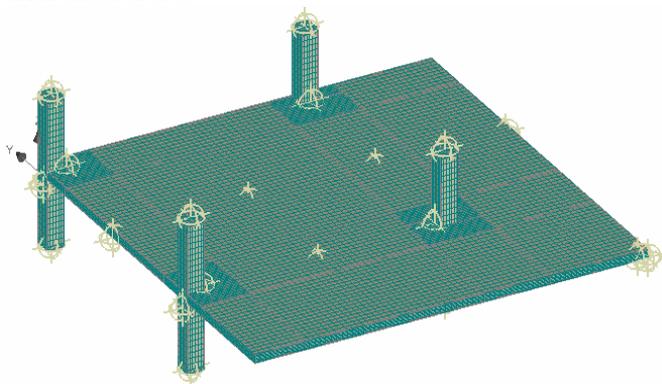


Figura 10-9 – Definição dos pontos de monitoramento

A partir da necessidade de se inserir os pontos de monitoramento para se obter, por exemplo, as reações de apoio, justifica-se aplicar as condições de contorno dos pilares em um único nó. Caso contrário, seria necessário realizar o somatório das reações de todos os nós nas faces dos pilares.

10.2. DEFINIÇÃO DAS ARMADURAS

Nas análises não lineares, as armaduras precisam ser previamente calculadas e depois inseridas no modelo. Então, independente da forma como ela foi obtida, para uma mesma estrutura, os valores de carga última poderão não ser iguais para critérios diferentes de distribuição da armadura. Em contrapartida, se o cálculo da armadura for realizado por métodos de análises diferentes, mas para valores iguais de carga, é possível que a carga última seja muito parecida entre os modelos analisados.

Nos exemplos da Tese, as armaduras foram obtidas por 3 (três) maneiras distintas, a citar:

- 1) Método A: Utiliza o Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), com duas distribuições:

A1: distribuição prescrita na NBR 6118:2014, item 14.7.8, sendo 75% (faixa interna - FI) e 25 % (faixa externa - FE) as armaduras negativas e 55% (FI) e 45 % (FE) para as armaduras positivas;

A2: distribuição prescrita no EuroCode 2 – 1992-1-1 (2004), Anexo I.1.2, que permite realizar uma variação na distribuição dos momentos dentro das faixas, diferentemente da norma brasileira. Nesse caso, utilizou-se a distribuição 60% (FI) e 40 % (FE) para as armaduras negativas e 60% (FI) e 40 % (FE) para as armaduras positivas.

- 2) Método B: Método Elástico, utilizando o MEF por meio do *software SAP*, descrito no Capítulo 5 desta Tese. Nesse caso, obtém-se o momento de plastificação pelas médias dos momentos fletores dentro da faixa de interesse (conforme explicado no Capítulo 8). Após isso, faz-se a inserção das linhas de plastificação no modelo numérico (Capítulo 9), aplicam-se os momentos de plastificação sobre os apoios, analisa-se novamente a estrutura e então dimensiona-se as armaduras a partir dos momentos fletores atuantes.

As Etapas iniciais, também chamada de Etapa 0, correspondem as distribuições mencionadas nos itens 1 e 2 acima. Entretanto, ao longo do estudo das análises não lineares, serão realizadas algumas alterações na distribuição das armaduras, passando então a ser chamar de Etapa 1, Etapa 2 ... e assim por diante.

Tanto o Método A1/A2 como o Método B descritos acima são métodos elásticos com redistribuição, que naturalmente conduzem a dimensionamento das armaduras diferentes. Por consequência, as análises

não lineares resultarão em carga última de ruptura que poderão ser diferentes.

O dimensionamento das armaduras foi realizado por flexão simples, no Estádio III, com $f_{cd} = f_{ck} / 1,4 = 17,85 \text{ MPa}$ e $f_{yd} = f_{yk} / 1,15 = 435 \text{ MPa}$. As armaduras efetivas adotadas foram os valores mais próximos das armaduras calculadas. Ou seja, pode-se ter barras espaçadas a cada 20,5 cm por exemplo, e não os espaçamentos padrões de 15cm/17,5cm/20cm/22,5cm. Além disso, não se utilizou a armadura mínima nas zonas tracionadas (somente nas regiões de compressão). Com isso, o valor de carga última obtido nas análise não-lineares não tem acréscimo devido as armaduras efetivas e armaduras mínimas.

O critério adotado para a armadura mínima de tração é igual ao prescrito na NBR 6118:2014, Tabela 19.1. Sendo assim, adotou-se $\phi 8,0\text{c}/20\text{cm}$, também utilizado nas zonas comprimidas.

A Figura 10-10 apresenta um exemplo do detalhamento das armaduras, face inferior e superior (direção X), calculadas por um dos três métodos explicados anteriormente.

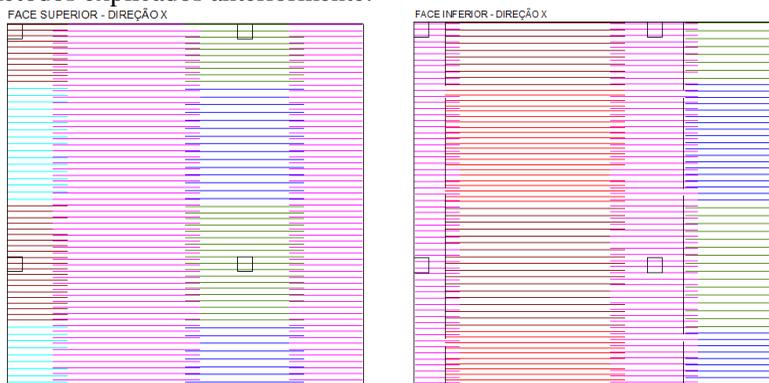


Figura 10-10 – Exemplo de detalhamento das armaduras planificadas em ambiente CAD

Na sequência, as barras foram inseridas no *software ATENA 3D*. Adotou-se a opção por barras discretas e não armaduras distribuídas (ver Capítulo 3.7). Ou seja, cada barra foi inserida com seu respectivo diâmetro e espaçamento, conforme Figura 10-11a. Além disso, criaram-se grupos para as armaduras (Figura 10-11b), separando-as em direção X e Y, face superior e inferior. Assim, facilita-se a análise dos resultados, já que cada barra tem seu papel na obtenção da carga última.

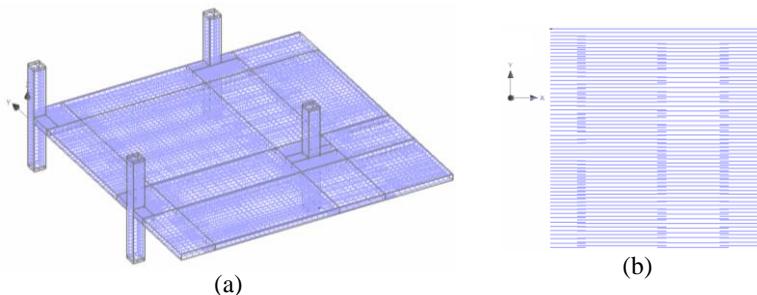


Figura 10-11 – Inserção das armaduras no Software ATENA 3D

Com relação aos pilares, o dimensionamento foi realizado considerando flexão composta oblíqua, com majoração nos esforços em uma vez e meia, para condicionar a ruptura na laje. Sendo assim, resultou em $8 \phi 25,0\text{mm}$ para a armadura longitudinal e estribos $\phi 8,0\text{c}/15\text{cm}$.

A verificação da laje à punção foi realizada segundo o item 19.5 da NBR 6118:2014, considerando pilares de meio, pilares de bordo e pilares de canto. No caso do contorno C, considerando $f_{ck} = 25 \text{ Mpa}$, a tensão resistente foi de $\tau_{Rd2} = 6,075 \text{ MPa}$. Já para o contorno C', a tensão resistente foi de $\tau_{Rd1} = 0,65 \text{ MPa}$. Em todos os casos estudados, para todos os níveis de carga preteridos, as tensões atuantes foram sempre inferiores as tensões resistentes. Mesmo assim, mantendo a ideia de que o objetivo nesse estudo é analisar o comportamento da laje e não da punção, adicionam-se estribos na laje, na quantidade arbitrada igual a $\phi 12,5 \text{ c}/10 \text{ cm}$, conforme mostrado na Figura 10-12.

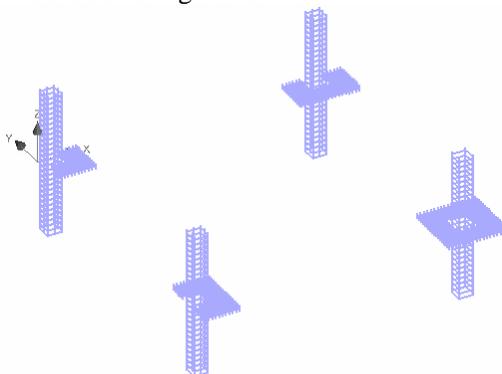


Figura 10-12 – Armaduras dos pilares e estribos na laje

10.3. CRITÉRIO DE SEGURANÇA ADOTADO

Conforme Capítulo 3.8, os parâmetros adotados para os materiais tem influência direta nos critérios de verificação da segurança da estrutura. Isto é particularmente importante nos casos de um projeto, onde uma margem de segurança apropriada deve ser atendida. Por essa razão, a escolha das propriedades do material depende da finalidade da análise.

De acordo com a maioria dos regulamentos atuais, a resistência estrutural (carga de falha), deve ser obtida com as propriedades dos materiais considerando seus valores mínimos, com fatores de segurança parciais aplicados. Sendo assim, em se tratando de aplicação em Projeto, adotou-se nesta Tese o Método do coeficiente global de resistência, descrito no Capítulo 3.8.3, com $\gamma_{GL} = 1,27$, para determinar a carga última não linear da estrutura. Talvez as maiores críticas do meio técnico a esse método estão relacionadas ao fato de não poder estabelecer coeficientes diferentes para modos de falha específicos. É salutar pensar que o nível de segurança almejado para uma ruptura frágil (por exemplo, punção) seja maior do que para uma ruptura dúctil (por exemplo, flexão). Nesse sentido, pode haver um certo conservadorismo na estimativa da carga de ruína não linear.

Nos casos estudados nesta Tese, todas as lajes terão rupturas por flexão, uma vez que as armaduras nos pilares, vigas e cisalhamento da laje nas zonas puncionadas foram calculadas com margem suficiente de folga, de modo a não entrarem em colapso.

Sendo assim, no Método do coeficiente global de resistência, o coeficiente $\gamma_{GL} = 1,27$ foi formulado para representar a mesma probabilidade de falha do aço e do concreto (EQ. 10.3 e EQ 10.4), o que entende ser um bom critério de segurança nas rupturas por flexão.

$$\text{Aço: } f_{sd} \gamma_{GL}^{aço} = f_{sd} \times 1,1 \times \gamma_s = f_{sm} \quad ; \quad \gamma_{GL}^{aço} = 1,1 \times 1,15 = 1,27 \quad [\text{EQ } 10.3]$$

Concreto:

$$f_{cm} = \frac{1,1 \gamma_s}{\gamma_c} \cong 0,85 \quad \gamma_{GL}^{\text{concreto}} = \frac{f_{cm}}{f_{cd}} = \frac{0,85 f_{ck}}{f_{ck} / 1,5} = 1,27 \quad [\text{EQ } 10.4]$$

Além disso, o Método do coeficiente global de resistência permite estabelecer uma carga de ruína com o mesmo nível de segurança para todos os casos analisados, podendo-se comparar os valores dentre todas as análises não lineares que realizadas no decorrer desta Tese.

O procedimento consiste em encontrar a carga máxima na análise não linear (P_{NL}) e dividir pelo coeficiente global, $\gamma_{GL} = 1,27$ (P_{d-NL}). Após isso, pode-se comparar com a carga de projeto (P_d), utilizada para o dimensionamento ao ELU, Estádio III, a partir dos modelos elásticos.

11. ANÁLISE NÃO LINEAR – RESULTADO PRELIMINAR

Dada a complexidade das análises não lineares, preliminarmente ao estudo dos casos apresentados no Capítulo 6 e Capítulo 10.1.1, são mostrados os resultados para um modelo simplificado, procurando minimizar quase que totalmente o efeito bi-dimensional que as lajes possuem. Por isso, considerou-se uma estrutura com 1 metro de largura, 8 metros de comprimento, espessura de 25 centímetros, com apoios afastados 42,5 centímetros das extremidades (portanto, distância entre apoios igual a 7,15 metros). Não se modelaram os pilares, sendo as chapas metálicas em contato diretamente com a laje (Figura 11-1).

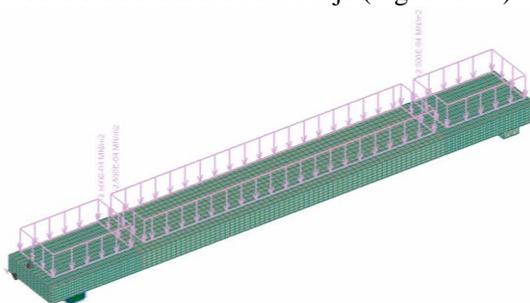


Figura 11-1 – Análise não-linear - Exemplo Laje 1D

A modelagem e concepção estrutural seguiram as mesmas diretrizes dos modelos no Capítulo 10.1. Ou seja, elemento finito do tipo *Brick*, Malha 1:4 com refinamento na região dos apoios 1:2, incrementos de carga igual a $0,25 \text{ kN/m}^2$ (uniformemente distribuída na laje). A condição de contorno foram 4 apoios pontuais em chapas metálicas, restringido nos dois nós da esquerda as translações nas direções X, Y e Z e nos dois nós da direita as translações nas direções Y e Z, apenas (condição isostática). Os bordos não possuem condição de simetria. Foram criados dois pontos de monitoramento, uma para medir deslocamentos no meio vão e outro para controlar as reações de apoio na direção Z (Figura 11-2).

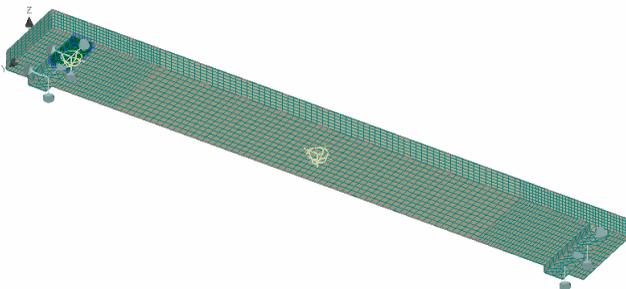


Figura 11-2 – Exemplo Laje 1D – Condição de contorno e pontos de monitoramento

Os materiais utilizados possuem as mesmas propriedades definidas no Capítulo 10.1, com exceção da resistência a tração do concreto, que se utilizou $f_t = 3,10$ MPa. As armaduras foram definidas a partir do diagrama de momentos fletores, calculadas ao ELU no Estádio III, com $f_{cd} = 17,85$ MPa e $f_{yd} = 435$ MPa. A carga de projeto utilizada foi $P_d = 22,25$ kN/m², que resultou no momento fletor de dimensionamento $Md^+ = 142,5$ kNm/m, e $Md^- = 4,8$ kNm/m. A armadura inferior utilizada foi igual a $8 \phi 16$ mm c/12,5 e a armadura superior foi igual a $8 \phi 6,3$ mm c/12,5, ambas ao longo de toda a extensão. A armadura de distribuição utilizada foi $\phi 6,3$ mm c/30. Para facilitar a análise dos resultados, criou-se um grupo para as armaduras superiores e outro para as armaduras inferiores (Figura 11-3 e Figura 11-4).

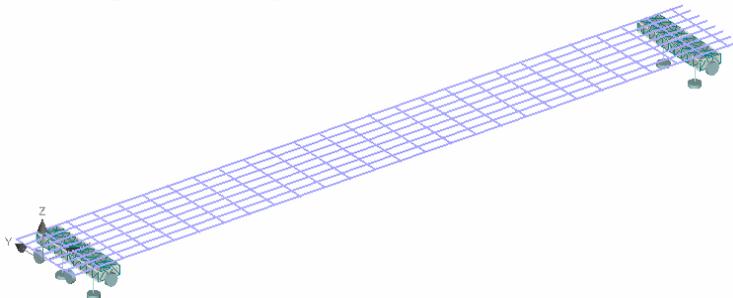


Figura 11-3 – Grupo armaduras inferiores

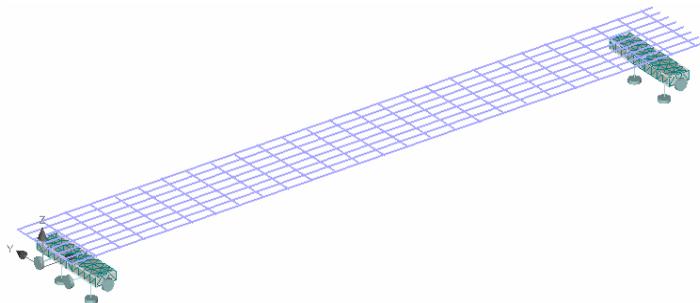


Figura 11-4 – Grupo armaduras superiores

O método de análise utilizado foi *Arc Length*, com os mesmos critérios de convergência definidos no Capítulo 3.7.4 e 3.7.5. Por fim, utilizou-se o Método do coeficiente global de resistência, com $\gamma_{GL} = 1,27$, $f_{cmd} = 21,25$ MPa e $f_{ym} = 550$ MPa, para estimar a carga última da estrutura.

O efeito do *tension stiffening* (TS) é muito importante para uma correta interpretação das análises em serviço. Mas o critério adotado e implementado no *ATENA 3D*, também exerce influência direta na obtenção da carga última. Na Figura 3-42, pode-se notar que ao considerar um valor para “ c_{ts} ”, permite-se introduzir no modelo uma tensão de tração constante no concreto, igual ao produto de “ $c_{ts}f_t$ ”, que ocorre nas regiões em que se atingiu a tensão máxima de tração, conforme esquema mostrado na Figura 11-5.

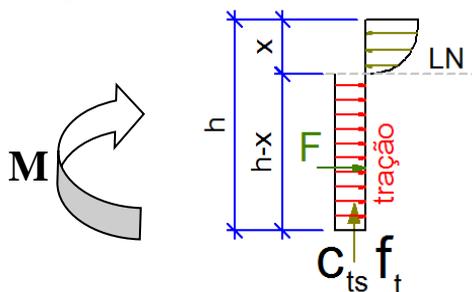


Figura 11-5 – Efeito do Tension Stiffening na carga última

O resultado final é o aumento da resistência da laje, o que não representa adequadamente o ELU, pois a ruptura à flexão geralmente está ligada a seções fissuradas e, portanto, sem influência significativa do TS.

Por isso, esse estudo preliminar também tem o objetivo de mostrar exemplos com e sem a consideração do Tension Stiffening, segundo o critério usado pelo *ATENA 3D*, e verificar o impacto que ele causa na carga última.

Em termos analíticos, determinou-se a influência do *Tension Stiffening* na carga última do modelo da Figura 11-1, para uma seção com 25 centímetros de espessura, na seção do meio vão, conforme mostrado na Tabela 11-1 e $f_t = 3,10$ MPa.

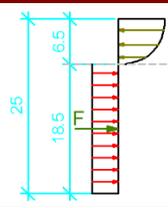
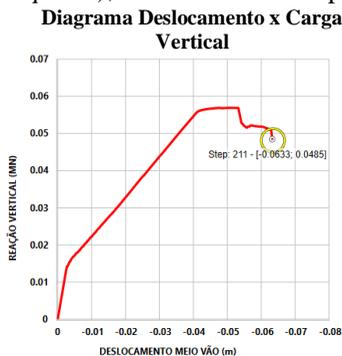
|  | $c_{ts} = 0,2 (c_{ts}f_t)$ | $c_{ts} = 0,4 (c_{ts}f_t)$ |
|---|---|---|
| | | $F = 0,185 \times 0,2 \times 3100 = 114,7 \text{ kN}$ |
| | $M = 114,7 \times \left(0,25 - \frac{0,8 \times 0,065}{2} - \frac{0,185}{2} \right)$ | $M = 230 \times \left(0,25 - \frac{0,8 \times 0,065}{2} - \frac{0,185}{2} \right)$ |
| | $M = 15,08 \text{ kNm}$ | $M = 30,25 \text{ kNm}$ |
| | $\Delta P = \frac{8 \times 15,08}{7,15^2} = 2,36 \text{ kN/m}^2$ | $\Delta P = \frac{8 \times 30,25}{7,15^2} = 4,75 \text{ kN/m}^2$ |

Tabela 11-1 – Cálculo analítico da Influência do TS na carga última

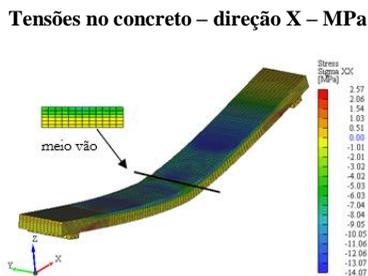
O valor do ΔP significa o acréscimo de carga devido à consideração do *Tension Stiffening*, para $c_{ts} = 0,2$ e $c_{ts} = 0,4$. Na sequência, estão apresentados os resultados da análise não linear realizada no *software ATENA 3D* para $c_{ts} = 0$ (desprezando o efeito do TS), $c_{ts} = 0,2$ e $c_{ts} = 0,4$.

11.1.1. Resultados para $c_{ts} = 0$

Os resultados da Figura 11-6a mostram o comportamento da estrutura, desde o estágio inicial de carga até atingir a ruína. O estudo das tensões/deformações no aço e concreto iniciarão pelo último *Step* (*Step 211*), onde ocorre o colapso da estrutura.



(a)



(b)

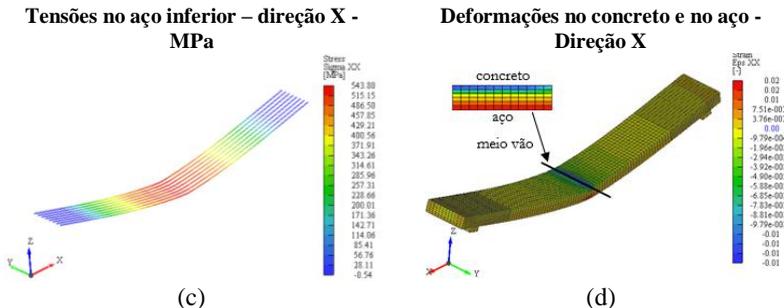


Figura 11-6 – Análise resultados – *Step* 211 - $c_{ts} = 0$

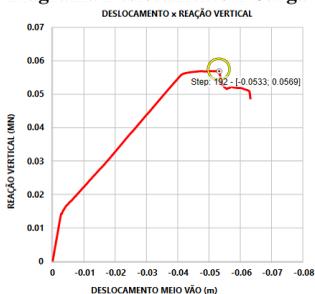
Para o último incremento de carga (*Step* 211), na seção do meio vão, as deformações no concreto (Figura 11-6d) estão acima dos limites estabelecidos, enquanto as deformações no aço ainda não alcançaram o limite de 50 por mil. Com isso, fica evidente que o colapso da estrutura se deu por ruptura do concreto na metade do vão da laje.

Ainda em relação ao meio vão, as tensões de tração no aço praticamente atingiram a tensão de plastificação. Já as tensões de compressão no concreto possuem valores mais baixos se comparados a $f_{cmd} = 21,25$ MPa, devido ao comportamento pós pico do diagrama tensão x deformação (Figura 3-25). As tensões de tração do concreto são praticamente nulas, uma vez que se considerou $c_{ts} = 0$.

Pode-se notar pela Figura 11-6b, pequenas regiões pontuais que contém tensões de tração no concreto. Elas existem pois se tratam de zonas não fissuradas, com valores abaixo do limite de tensão configurado para o concreto.

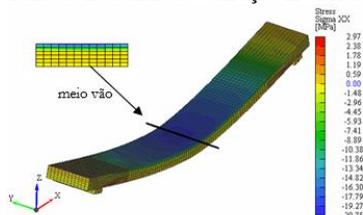
Vê-se pela Figura 11-6a, que a carga última ocorreu um pouco antes do *Step* 211, sendo alcançada no *Step* 192. Dessa forma, será realizado esse mesmo estudo, agora para o *Step* 192 (Figura 11-7).

Diagrama Deslocamento x Carga Vertical



(a)

Tensões no concreto – direção X - MPa



(b)

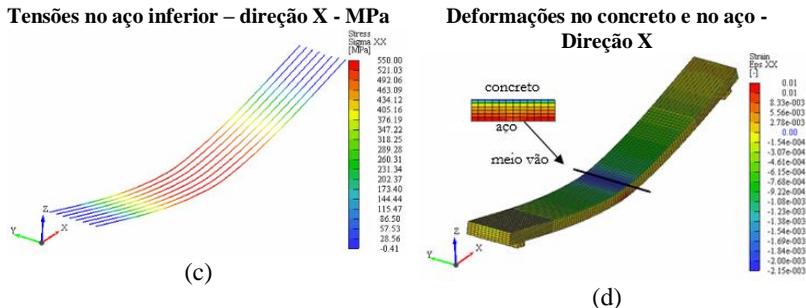


Figura 11-7 – Análise resultados – Step 192 - $c_{ts} = 0$

Nesse caso, na seção do meio vão, as tensões de compressão no concreto estão próximas do pico (Figura 11-7a). As deformações no concreto (Figura 11-7d) mostram que ele se encontra na parte ascendente do diagrama tensão x deformação. As tensões de tração no aço correspondem à tensão de escoamento enquanto que no concreto são praticamente nulas. Sendo assim, a carga de ruína será:

$$P_{STEP192} = \frac{56,9 \times 4}{1 \times 8} = 28,45 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-STEP192} = \frac{28,45}{1,27} = 22,40 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 11.1]}$$

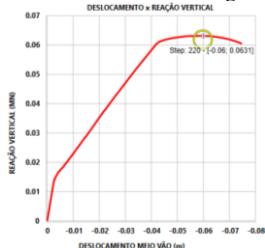
$$\Delta P = 22,40 - 22,25 = 0,15 \text{ kN/m}^2$$

Portanto, a carga última estimada pela análise não linear (P_{d-NL}), utilizando o método do coeficiente global de resistência, é praticamente a mesma carga de projeto (P_d) utilizada para dimensionar as armaduras ao ELU no Estádio III, igual a $P_d = 22,25 \text{ kN/m}^2$.

11.1.2. Resultados para $c_{ts} = 0,2$

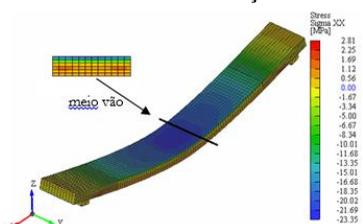
Apresenta-se na Figura 11-8 os resultados da análise não linear realizada no *software* ATENA 3D para $c_{ts} = 0,2$. Neste caso, será apresentado somente os resultados para a carga última, uma vez que a ruína da estrutura também ocorre por ruptura à compressão do concreto na região do meio vão da laje.

Diagrama Deslocamento x Carga Vertical



(a)

Tensões no concreto – direção X - MPa



(b)

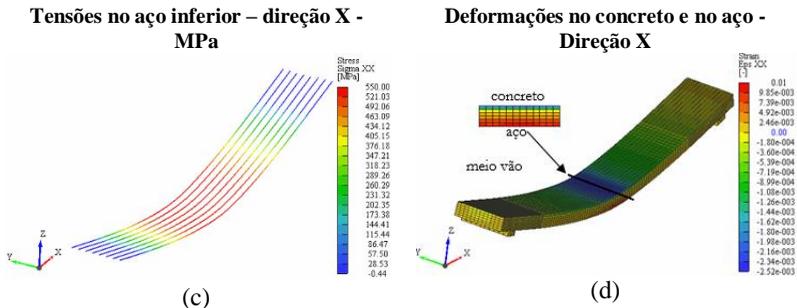


Figura 11-8 – Análise resultados – Step 220 - $c_{ts} = 0,2$

Pode-se notar pela Figura 11-8a que a estrutura atingiu o colapso no Step 245 e a carga última no Step 220. O comportamento após o escoamento (quando praticamente não houve mais incremento de carga), foi mais suave se comparado com a Figura 11-7a. A adição do *tension stiffening* permitiu mais ductilidade nos Modos de Fraturas apresentados no Capítulo 3.7.

Na seção do meio vão, o comportamento foi análogo ao mostrado na Figura 11-7a, com exceção das tensões de tração no concreto. Nota-se na Figura 11-8b, valores da ordem de $f_t = 0,2 \times 3,1 = 0,62$ MPa, sendo a carga última calculada a seguir.

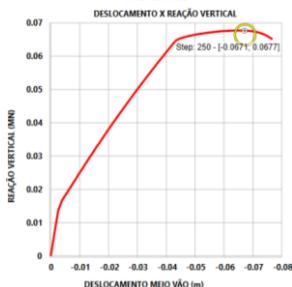
$$P_{STEP220} = \frac{63,1 \times 4}{1 \times 8} = 31,55 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-STEP220} = \frac{31,55}{1,27} = 24,85 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ 11.2}]$$

$$\Delta P_{NL} = 24,85 - 22,25 = 2,6 \text{ kN/m}^2 \rightarrow \Delta P_{ANALÍTICO} = 2,36 \text{ kN/m}^2$$

11.1.3. Resultados para $c_{ts} = 0,4$

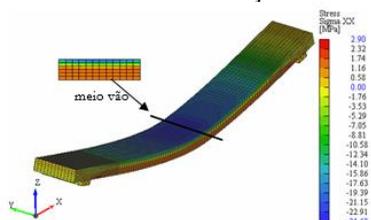
Apresenta-se na Figura 11-9 os resultados da análise não linear realizada no *software ATENA 3D* para $c_{ts} = 0,4$, somente para a carga última.

Diagrama Deslocamento x Carga Vertical



(a)

Tensões no concreto – direção X - MPa



(b)

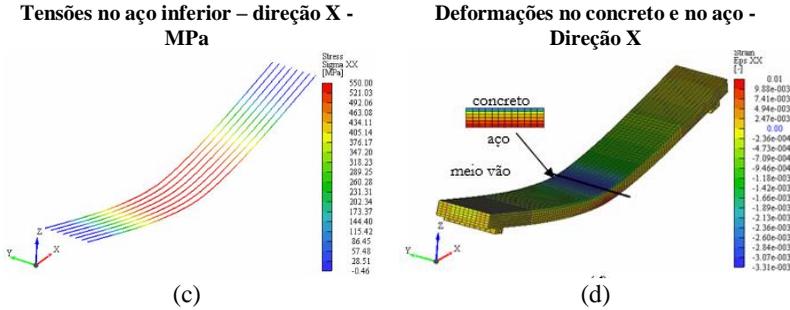


Figura 11-9 – Análise resultados – Step 250 - $c_{ts} = 0,4$

Nesse caso, o colapso foi atingido no Step 260 e a carga última no Step 250, com comportamento dúctil após o escoamento. Vale frisar que, ao passar de $c_{ts} = 0$ até $c_{ts} = 0,4$, a carga última foi atingida com o concreto em deformações de compressão mais próximas de 3,5 por mil no meio vão (Figura 11-7d, Figura 11-8d e Figura 11-9d).

As tensões de tração do concreto na seção do meio vão são da ordem de $f_t = 0,4 \times 3,1 = 1,24$ MPa (Figura 11-9) e a carga última calculada a seguir.

$$P_{STEP250} = \frac{67,7 \times 4}{1 \times 8} = 33,85 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-STEP250} = \frac{33,85}{1,27} = 26,65 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 11.3]}$$

$$\Delta P_{NL} = 26,65 - 22,25 = 4,40 \text{ kN/m}^2 \rightarrow \Delta P_{ANALÍTICO} = 4,75 \text{ kN/m}^2$$

11.1.4. Comparativo P_{d-NL} x P_d

O Gráfico 11-1 apresenta a evolução de P_{d-NL} ao se utilizar $c_{ts} = 0$, $c_{ts} = 0,2$ e $c_{ts} = 0,4$ em comparação com a carga de projeto $P_d = 22,25 \text{ kN/m}^2$.

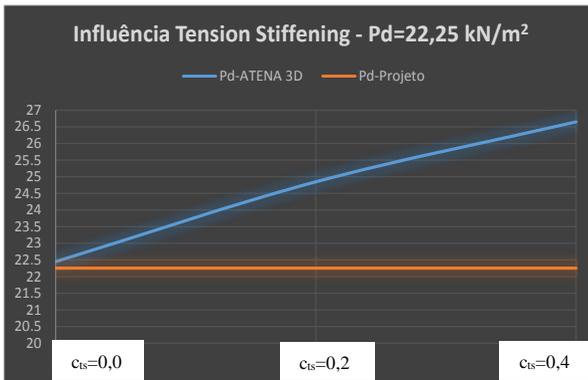


Gráfico 11-1 – Influência do TS na carga última – $P_d = 22,25 \text{ kN/m}^2$

Caso se diminua a carga de projeto e consequentemente a taxa de armadura, e mantendo a mesma estrutura, a influência do TS na carga última é ainda maior. No Gráfico 11-2, o Caso A (maior taxa de armadura) refere-se a $P_d = 22,25 \text{ kN/m}^2$ e o Caso B (menor taxa de armadura) refere-se a $P_d = 12,05 \text{ kN/m}^2$, que resulta em $7 \phi 12,5 \text{ mm c/15}$ na malha inferior ao invés de $8 \phi 16,0 \text{ mm c/12,5}$ do Caso A.

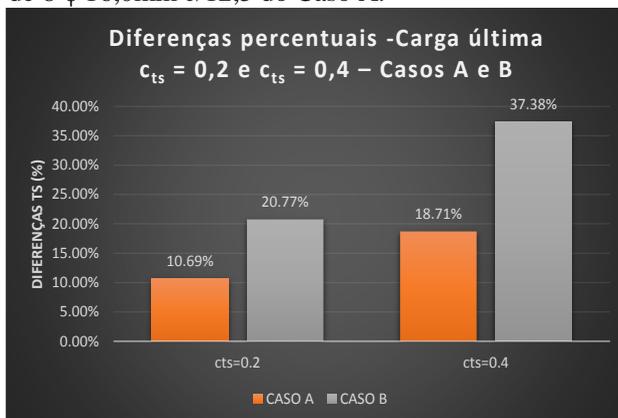


Gráfico 11-2 – Diferenças percentuais - Carga última $c_{ts} = 0,2$ e $c_{ts} = 0,4$
 Caso A e B

O valor de ΔP , seja no Caso A ou no Caso B, é praticamente o mesmo. Porém, a influência de ΔP na carga última é maior na medida em que se diminui a taxa de armadura (Caso B - Gráfico 11-2), conforme já observado em LA ROVERE ET AL (2008).

Nesta Tese, o objetivo da análise não linear está em apresentar o comportamento da estrutura em termos de capacidade última, sem avaliar as condições em serviço. De antemão, pode-se perceber que nem sempre se consegue obter a melhor resposta ao ELU e ELS concomitantemente em um mesmo modelo numérico. Ou seja, é possível ter um modelo específico para estudar o ELU e um modelo específico para estudar o ELS. Por conta disso, será desprezada a influência do *Tension Stiffening* na obtenção da carga última. Ou seja, $c_{ts} = 0$. Dessa forma, a resistência à tração do concreto nas regiões de máxima tração não trará contribuição alguma na carga última da estrutura.

Ainda sobre esse assunto, cabem alguns comentários acerca do exemplo deste Capítulo (Figura 11-1), a citar:

- 1) Nota-se claramente que a consideração do *tension stiffening* no software *ATENA 3D* tem influência direta na obtenção da carga última, com valores muito próximos dos obtidos pela avaliação analítica simplificada (Tabela 9-2).

- 2) Trata-se de uma laje unidirecional, onde o efeito favorável bi-dimensional praticamente não existe. Mesmo assim, pode-se notar algumas diferenças nas obtenções das resistências uniaxiais configuradas para o concreto, justificadas pelo critério de ruptura bi-axial, explicado no Capítulo 3.7.1;
- 3) Na seção do meio vão, antes da ruptura, ocorre uma fissura ao longo de toda a seção (análogo a uma rótula plástica). Sendo assim, a contribuição do concreto a tração na obtenção da carga última é praticamente nula, o que justifica $c_{ts} = 0$;
- 4) Quando se despreza integralmente o *tension stiffening* ($c_{ts} = 0$), a carga última obtida pela análise não linear, utilizando o método do coeficiente global de resistência ($P_{d,NL} = 22,40 \text{ kN/m}^2$), é praticamente igual a carga de projeto ao dimensionar as armaduras pelo ELU no Estádio III ($P_d = 22,25 \text{ kN/m}^2$). Esta verificação é muito importante, neste sistema isostático, para validar as análises e conclusões dos casos completos que seguem.

12. ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 2

Os exemplos a serem estudados pela análise não linear foram apresentados no Capítulo 10.1. Inicialmente será apresentado com mais detalhe o Caso 2 – Regular, sem vigas de bordo e sem balanços, que consiste em uma laje com vãos de 8 metros, $f_{cmd} = 21,25\text{MPa}$ e espessura constante igual a 25 cm.

O carregamento adotado está descrito abaixo:

- Peso próprio, igual a $6,25\text{ kN/m}^2$;
- Carga permanente, igual a $1,5\text{ kN/m}^2$;
- Carga acidental, igual a $2,25\text{ kN/m}^2$;
- Total = 10 kN/m^2 .

O coeficiente de segurança adotado foi igual a $\gamma_f=1,5$, que resulta em uma carga de projeto igual a $\mathbf{P_d = 15\text{ kN/m}^2}$. Em linhas gerais, trata-se de um nível de carga bastante corrente adotado em projeto e por isso considerado nesta Tese.

A Etapa 0 corresponde as distribuições mencionadas nos itens 1 e 2 do Capítulo 10.2. Entretanto, ao longo do estudo das análises não lineares, serão realizadas algumas alterações na distribuição das armaduras, passando então a ser chamar de Etapa 1, Etapa 2 ... e assim por diante.

12.1. MÉTODO A1

12.1.1. Etapa 0

No Método A1, Etapa 0, as armaduras foram calculadas pelo MPE, apresentado no Capítulo 10.2, com faixas de distribuição 75% / 25% para as armaduras negativas e 55% / 45% para as armaduras positivas. O Gráfico 12-1 apresenta os momentos fletores para as seções em estudo.

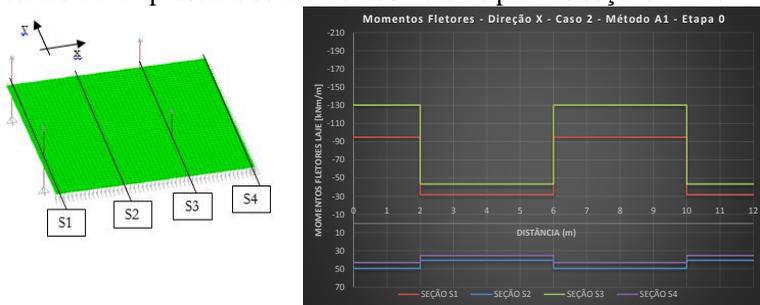


Gráfico 12-1 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 0

As armaduras calculadas ao ELU, no Estádio III, estão apresentadas na Tabela 12-1.

| | Seção S1 | Seção S3 | Seção S2 | Seção S4 |
|----------|-----------|-----------|-------------|-----------|
| FI (75%) | φ16,0c/19 | φ20,0c/21 | φ12,5c/22,5 | φ12,5c/26 |
| FE (25%) | φ10,0c/23 | φ12,5c/26 | φ10,0c/17,5 | φ10,0c/21 |

Tabela 12-1 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1
Pd15 – Etapa 0

A Figura 12-1 apresenta a distribuição das armaduras na laje para a direção X (direção horizontal), face superior e face inferior, em faixas de 2 e 4 metros de largura. Na sequência, estas foram inseridas no software ATENA 3D, conforme explicado no Capítulo 10.2.

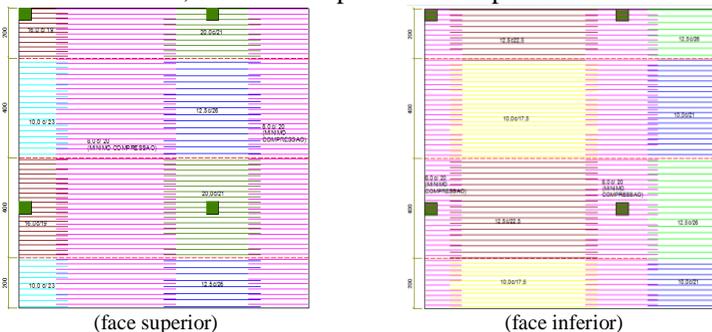


Figura 12-1 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 – Método A1
– Pd15 – Etapa 0

As armaduras também foram inseridas na direção Y (direção vertical), tanto na face inferior e superior, iguais as apresentadas na direção X, uma vez que são simétricas.

O Gráfico 12-12 apresenta os deslocamentos na direção Z (vertical) em alguns pontos de interesse da laje, monitorados conforme explicado no Capítulo 10.1.6.

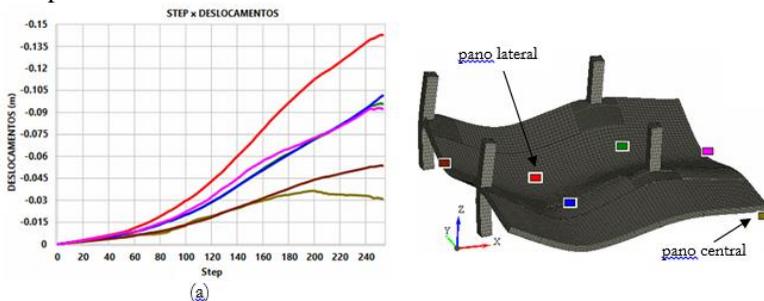
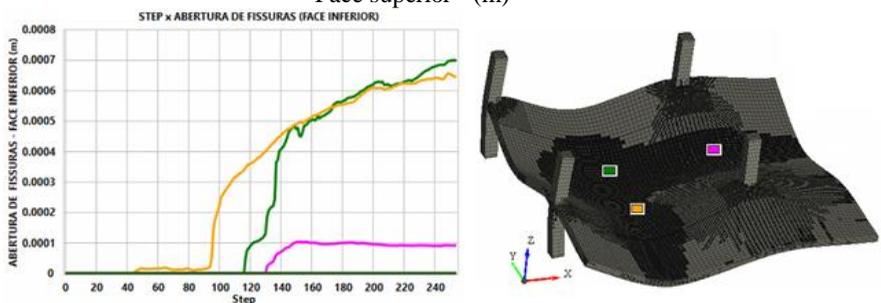
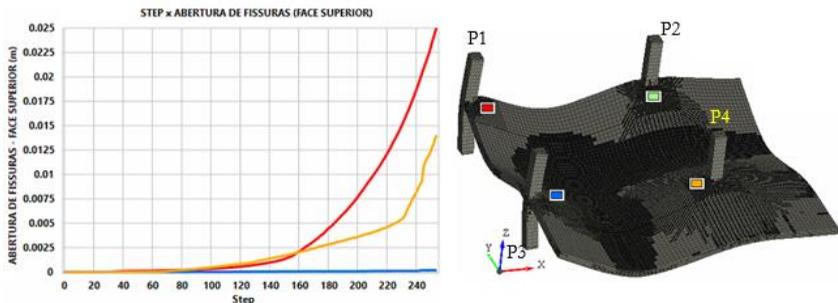


Gráfico 12-2 – Deslocamentos a cada incremento de carga (m)

Pode-se notar que o deslocamento máximo ocorre no meio do pano lateral. Um detalhe curioso é o deslocamento no centro do pano central começar a diminuir a partir do *Step* 200, influenciado pelo deslocamento do pano lateral.

O Gráfico 12-3 e Gráfico 12-4 apresentam a abertura de fissuras em pontos de interesse da laje, na face superior e inferior, respectivamente. É importante referir que o valor absoluto destas aberturas em termos do comportamento em serviço tem um valor relativo, pois o *tension stiffening* foi considerado zero pelas razões anteriormente explicadas.



Acerca da medição da abertura de fissuras, cabe comentar que muitas vezes os locais definidos pontualmente não conseguem capturar com precisão o início da abertura de fissura como também a magnitude dos valores ao longo dos incrementos de carga. Mesmo assim, é possível perceber que a fissuração na laje se inicia próximo ao pilar P1 e P4 (*Step* 25), na face superior, sendo os valores máximos de aberturas de fissuras

também nesse local. Já para os pilares P2 e P3, nota-se que os pontos adotados não conseguiram monitorar as fissuras.

Na face inferior, os valores das aberturas de fissuras são menores se comparados com a face superior, com início da fissuração no *Step* 45. Nota-se ainda um aumento abrupto nos valores de aberturas de fissuras tanto no meio do pano lateral como entre os pilares (entre os *Steps* 90 e 130), justificadas pelo fato da medição ser pontual. Isso também se aplica ao fato das fissuras entre os pilares P2 e P4 não serem iguais entre os pilares P3 e P4.

O Gráfico 12-5a apresenta as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 para cada incremento de carga (*Step*). Já o Gráfico 12-5b apresenta as reações verticais nos pilares e nas abscissas mostra o deslocamento máximo da laje.

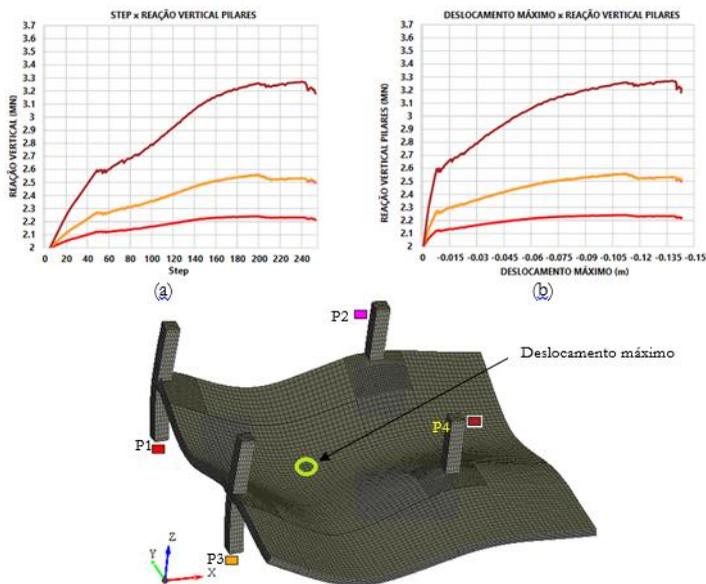


Gráfico 12-5 – Reações verticais pilares e deslocamento máximo na laje

De início, nota-se que as curvas do Gráfico 12-5 iniciam com reações nos pilares no valor de 2 MN, de acordo com a aplicação do esforço de compressão definido no Capítulo 10.1.4. Enquanto isso, a laje ainda não entrou em serviço (somente após o *Step* 6) e o único deslocamento que existe até então é devido à deformação axial dos pilares.

Após o *Step* 6, inicia-se a aplicação de carga na laje, sendo a carga última atingida no *Step* 200. Desse ponto em diante, os pilares P1, P2 e P3 tiveram uma diminuição da carga e mantiveram-na praticamente constante até o *Step* 240. Enquanto isso, o pilar P4 perdeu carga logo no *Step* 200, mas voltou a recuperar até o *Step* 240. Após o *Step* 240, o incremento de carga diminuiu em todos os pilares e a estrutura entrou em colapso.

A Figura 12-12 apresenta as tensões nas armaduras na Direção X para o *Step* 200.

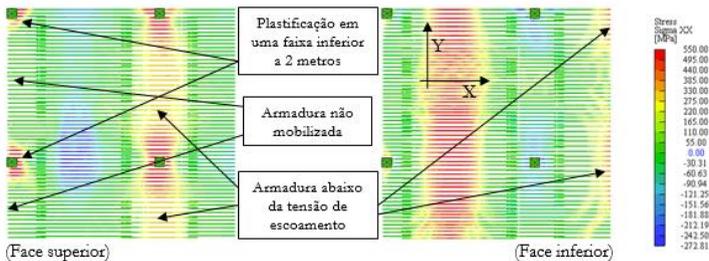


Figura 12-2 – Tensão nas armaduras – Direção X
Step 200 (carga última) – [MPa]

Nota-se na Figura 12-12, face superior, a quantidade de armaduras junto aos pilares laterais (P1 e P3) que plastificaram são bem inferiores a uma faixa de 2 e 4 metros, ao contrário do ocorrido para os pilares centrais P2 e P4. Ainda na face superior, as armaduras superiores entre os pilares P1 e P3 praticamente não foram mobilizadas. Já entre os pilares P2 e P4, as tensões são um pouco inferiores à tensão de escoamento. Na malha inferior, as barras de aço do pano lateral (vão condicionante para o início da ruptura) entraram em plastificação, ao contrário do pano central, com tensões bem inferiores a tensão de escoamento.

A carga última calculada está mostrada a seguir, obtida para o *Step* 200.

$$P_{s200} = \frac{1256 + 555 \times 2 + 241}{12 \times 12} = 18,1 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S200} = \frac{18,1}{1,27} = 14,25 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 12.1]$$

A Figura 12-3 apresenta as seções na estrutura para o estudo das tensões no concreto para o *Step* 200, no qual ocorre a carga última da estrutura. Utilizaram-se letras ao invés de números para não confundir com as seções dos momentos fletores (Gráfico 12-1).

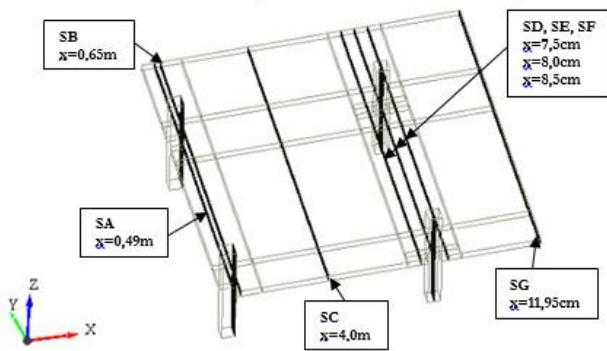


Figura 12-3 – Seções de estudo para as tensões no concreto

A Figura 12-4 e Figura 12-5 apresentam as tensões no concreto para as seções SA e SB, localizadas próximo ao pilar P1 (canto) e P3 (bordo).

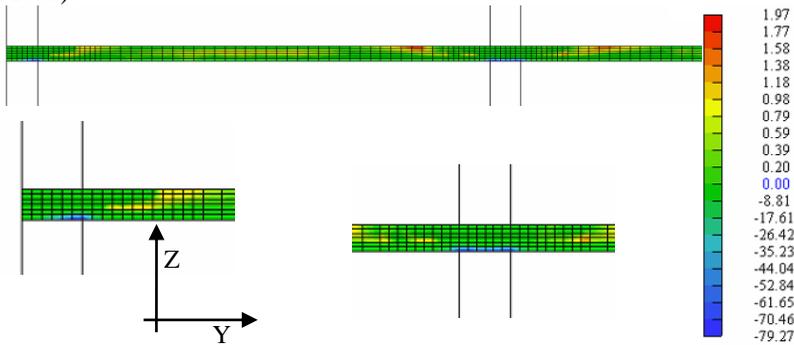


Figura 12-4 – Tensões no concreto – SA- Direção X – [MPa]

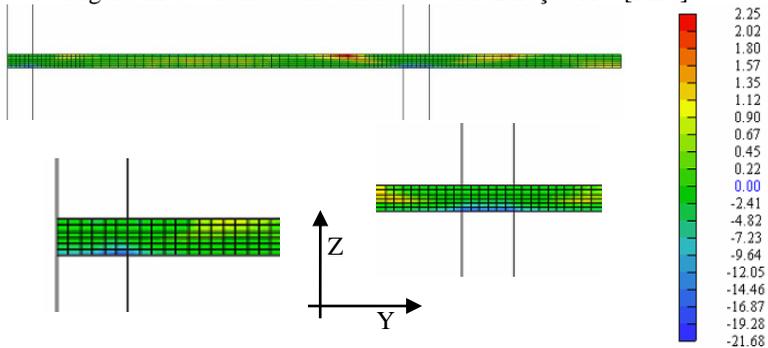


Figura 12-5 – Tensões no concreto – SB - Direção X – [MPa]

Na Seção SA, por estar junto aos pilares laterais, possuem concentração de tensões de compressão elevadas na região do P1 e P3, com valores obtidos pelo critério de ruptura multiaxial do concreto. Já na Seção SB, afastada apenas 20 cm da face do pilar, as concentrações diminuem e as compressões no concreto reduzem. Tanto na SA como na SB, seja no pilar P1 ou no P3, as tensões de compressão no concreto limitam-se a faixas com extensões pequenas (em torno de 1 metro no pilar P1 e 1,5 metros no pilar P3), o que é coerente com o fato de poucas barras negativas terem atingido a tensão de escoamento (Figura 12-2). Nas proximidades dessas faixas, aparecem tensões de tração, por se tratar de uma região com grandes concentrações de tensões e de difícil análise.

A Figura 12-6 apresenta as tensões no concreto para a Seção SC, localizada no meio do pano lateral.

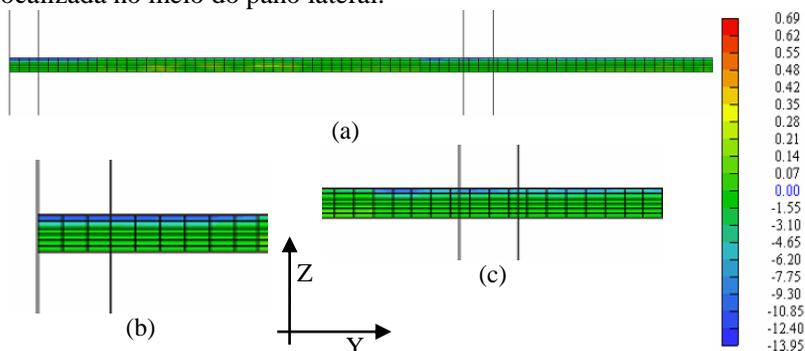


Figura 12-6 – Tensões no concreto – SC - Direção X – [MPa]

Nesse caso, as tensões de compressão no concreto possuem valores típicos de um comportamento a flexão simples, sem perturbações, uma vez que a SC está afastada dos pilares. Nas regiões das máximas compressões, as tensões são mais espalhadas se comparadas com a SB, em faixas próximas aos 2 metros para os cantos (Figura 12-6 b) e 4 metros para o centro (Figura 12-6c).

A Figura 12-7, Figura 12-8 e Figura 12-9 apresentam as tensões de compressão nas seções SD, SE e SF, localizadas junto aos pilares P2 e P4 (central).

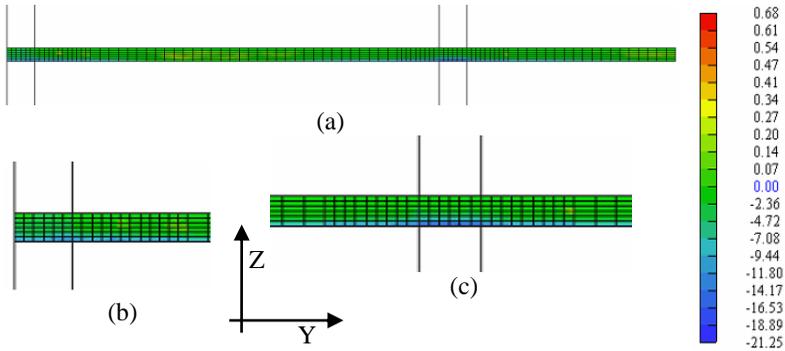


Figura 12-7 – Tensões no concreto – SD - Direção X – [MPa]

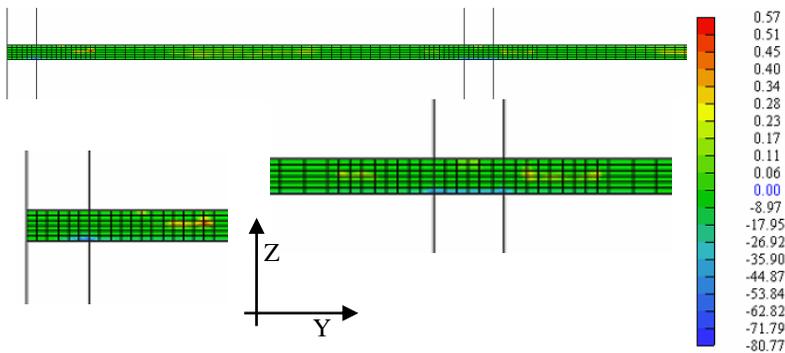


Figura 12-8 – Tensões no concreto – SE - Direção X – [MPa]

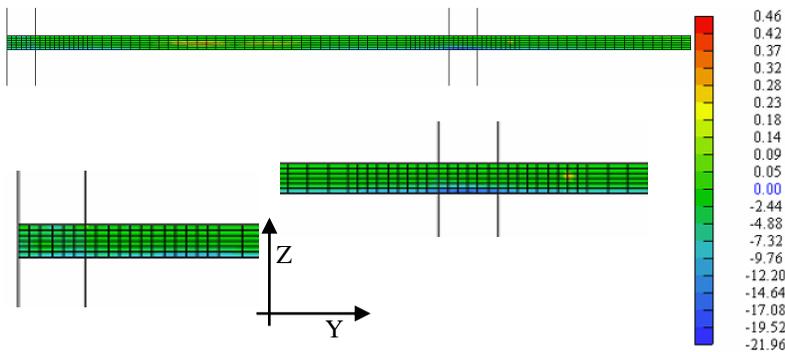


Figura 12-9 – Tensões no concreto – SF - Direção X – [MPa]

Analogamente à seção SA, a seção SE possui uma grande concentração de tensões nas proximidades com os pilares P2 e P4. Já nas seções SD e SF, afastadas apenas 25 cm da face desses pilares, permite-

se analisar com mais clareza os resultados. Nesse caso, ao contrário do ocorrido na SB, nas regiões de máxima compressão, notam-se zonas mais alongadas, próximas de 2 metros para os cantos (P2 - Figura 12-7b) e próxima dos 4 metros para o meio (P4 - Figura 12-7c). Mesmo assim, as tensões são maiores próximas aos pilares. No entanto, esse fato não influenciou negativamente nas armaduras, uma vez que praticamente todas as barras atingiram a tensão de escoamento dentro da faixa sobre o P2 e P4 (Figura 12-2). Na Seção S3 do Gráfico 12-1, devido a continuidade da laje, a estrutura conseguiu buscar nos aços negativos mais afastados dos pilares a força necessária para atingirem o escoamento, ao contrário do ocorrido nos cantos, Seção S1, sobre o P1 e P3.

A Figura 12-10 apresenta as tensões no concreto para a seção SG, localizada no meio do pano central.

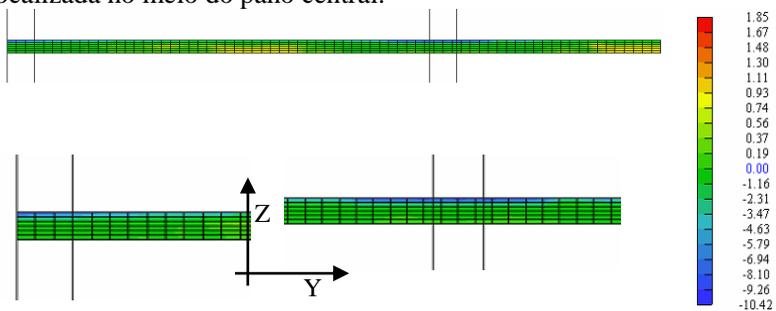


Figura 12-10 – Tensões no concreto – SG – Direção X – [MPa]

A seção SG possui comportamento análogo ao da seção SC, com tensões de compressão um pouco menores ao da SC. Aparecem tensões de tração em pontos localizados devido a proximidade da seção com o bordo de simetria (situações numéricas).

A Figura 12-11 apresenta as tensões nas armaduras na Direção X para os *Step* 240, um pouco posterior a carga última.

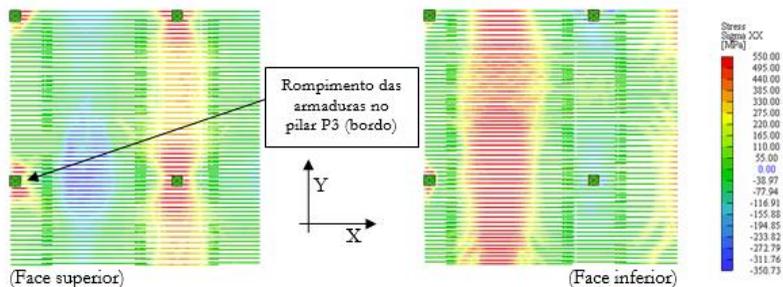


Figura 12-11 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 240 – [MPa]

A Figura 12-12 apresenta as deformações no concreto e no aço para a Seção SB da Figura 12-3.

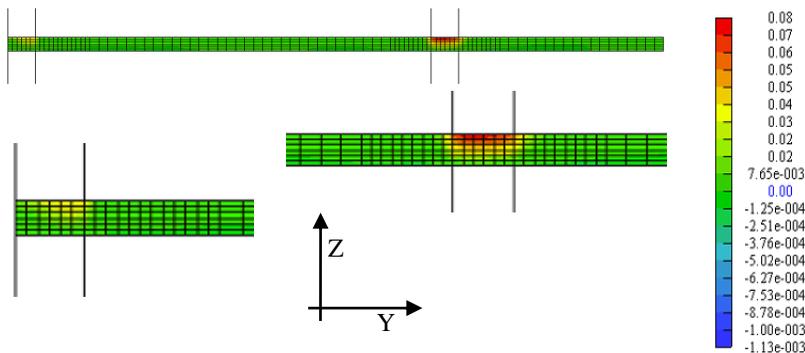


Figura 12-12 – Deformações – SB - Direção X – Step 240

Nota-se o rompimento das barras superiores junto ao pilar P3 (bordo). As deformações no concreto estão no trecho ascendente do diagrama tensão x deformação. Enquanto isso, as deformações no aço ultrapassaram o limite de 50 por mil, o que denota uma ruptura na armadura e não no concreto. Já no pilar P1(canto), tanto o aço como o concreto estão com deformações dentro dos limites impostos, não havendo ruptura de nenhum material.

A Figura 12-13 apresenta as tensões nas armaduras na Direção X para os Step 254, sendo o incremento final de carga.

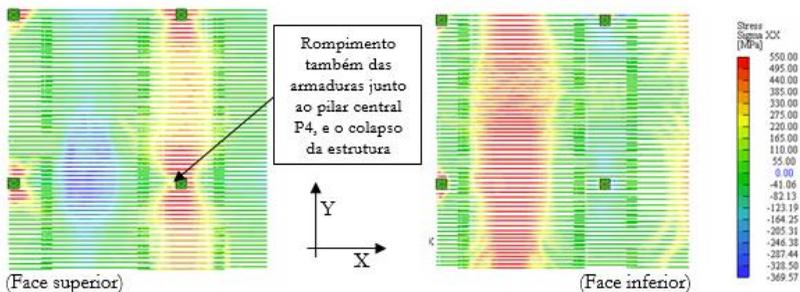


Figura 12-13 – Tensão nas armaduras – Direção X - Step 254 (final) – [MPa]

A Figura 12-14 apresenta as deformações no concreto e aço da Seção SD (Figura 12-3).

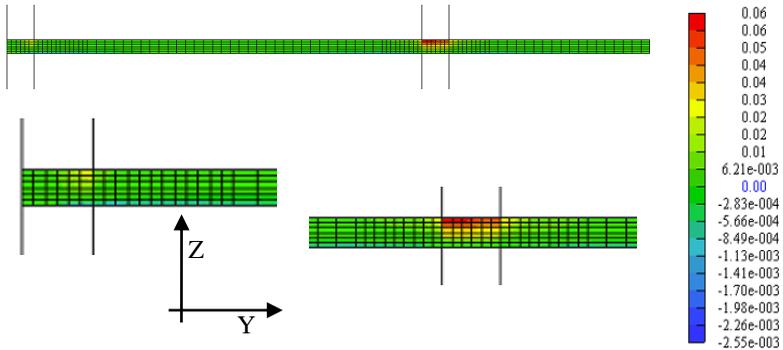


Figura 12-14 – Deformações – SD - Direção X – Step 254

Além do rompimento das armaduras junto ao pilar P3 (Step 240 - Figura 12-11), houve também o rompimento das barras superiores próximos ao pilar P4 (meio), do lado do pano lateral. A Figura 12-14 mostra as deformações no aço junto ao Pilar P4, acima do limite de 50 por mil, enquanto que as deformações no concreto estão no ramo descendente, porém inferiores aos limites impostos de ruptura.

Na continuidade da análise do comportamento, notou-se claramente não linear a evolução das reações horizontais nos pilares nas duas direções. Os Gráfico 12-6 mostra a evolução das reações de apoio, na direção X, para o pilar P1 (canto) e pilar P3 (bordo), na seção de topo e base, desde o início até o incremento de carga final (step 254).

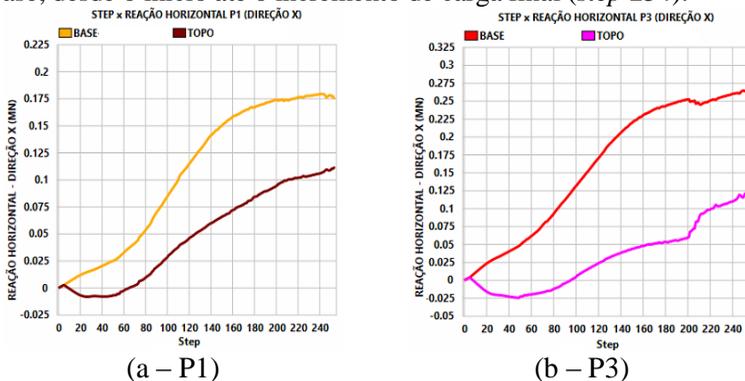


Gráfico 12-6 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3
Método A1 – Etapa 0 - [MN]

Vale lembrar que ao multiplicar por 2 (dois) as reações, tem-se os momentos fletores nos pilares.

Para os incrementos de carga iniciais (até o *Step* 25 para o P1 e até o *Step* 45 para o P3), os momentos nos pilares seguem comportamentos análogo ao apresentado no modelo elástico, ou seja, no trecho inferior tracionam a face externa e no trecho superior tracionam a face interna (Figura 12-15).

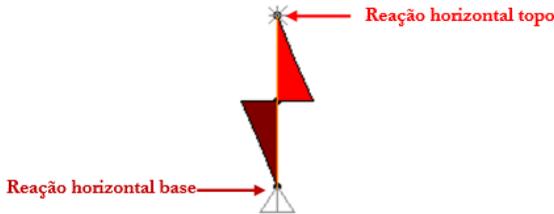


Figura 12-15 – Momentos fletores pilares P1 e P3 – *Steps* iniciais

Logo após os incrementos de carga iniciais, as reações no topo permanecem constantes por alguns *Steps* e logo após invertem de sentido, alterando a curvatura do pilar (ver deformada dos pilares Gráfico 12-2).

Se analisar o comportamento após fissuração das lajes, verifica-se que a linha neutra da seção se desloca para cima (seções de momento positivo) ou para baixo (seções de momento negativo), havendo sempre uma extensão positiva ao nível do eixo horizontal da laje. Este fato resulta em uma deformação para o exterior (notada principalmente nos pilares de contorno), seguida de uma reação hiperestática (pequena compressão axial na laje).



Figura 12-16 – Deformação da seção transversal da laje após fissuração

Dessa forma, a partir de um certo estágio de fissuração da laje, os momentos nos pilares superiores mudam de sinal e a face externa do pilar superior fica tracionada ao invés da face interna (Figura 12-17). Os momentos na laje continuam sendo a diferença entre o momento do pilar inferior e do momento do pilar superior.

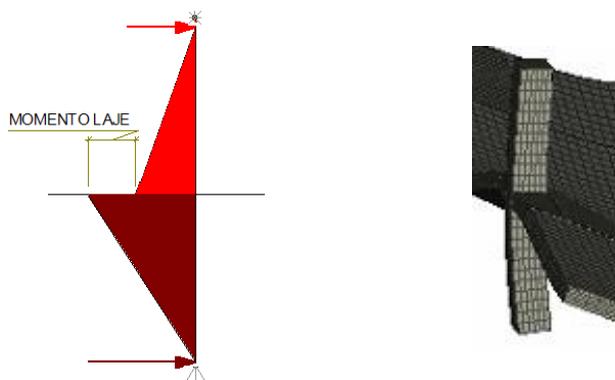


Figura 12-17 – Momentos fletores pilares P1 e P3 após fissuração da laje

Para o *Step 200*, tem-se os seguintes valores de momentos para os pilares P1, P3 e na laje junto a esses pilares (Tabela 12-2).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>P1</i> | 348 | 189 | 159 |
| <i>P3</i> | 504 | 120 | 384 |

Tabela 12-2 – Momentos pilares P1, P3 e laje – *Step 200* – Método A1
Etapa 0

Analisando o Gráfico 12-6b, nota-se uma queda abrupta dos momentos fletores na laje após o *Step 200* (onde ocorre a carga última), devido a ruptura das armaduras superiores junto ao pilar P3 (Figura 12-11). O mesmo fato não ocorreu no pilar P1 (Gráfico 12-6a), pois não houve barras de aço rompidas nesse local.

O Gráfico 12-7 mostra a evolução das reações de apoio na direção X, para o pilar P2 e pilar P4, na seção de topo e base, desde o início até o incremento de carga final (*step 254*). As características da evolução são semelhantes embora menos realçadas (menor distância à zona de simetria).

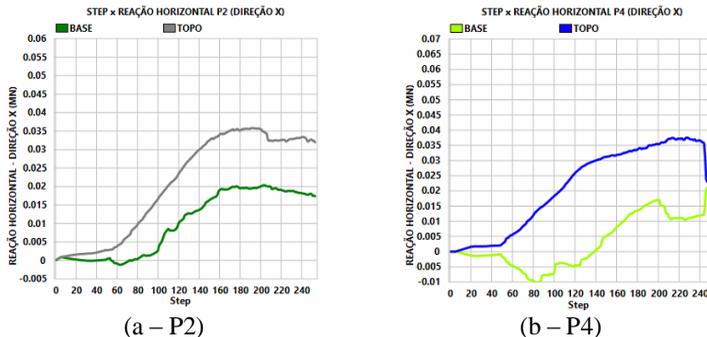


Gráfico 12-7 – Reações horizontais – Direção X – P2 e P4 – Método A1 Etapa 0 - [MN]

Após o *Step* 200, com o rompimento das barras de aço negativas junto ao P3, os momentos na laje junto ao pilar P4 tiveram um aumento significativo. No entanto, após o *Step* 240, com o rompimento das armaduras superiores junto ao P4 (Figura 12-13), houve uma perturbação nos momentos na laje e logo após a análise encerra por perda de equilíbrio. Pode-se dizer então que a estrutura atingiu o colapso teórico.

Para o *Step* 200, tem-se os seguintes valores de momentos para os pilares P2, P4 e na laje junto a esses pilares (Tabela 12-3).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P2 | 40 | 71 | 31 |
| P4 | 34 | 70 | 36 |

Tabela 12-3 – Momentos pilares P2, P4 e laje – *Step* 200 – Método A1 Etapa 0

Comentários da análise não linear – Etapa 0

Os resultados do Caso 2 (sem vigas de bordo e sem balanço) – Método A1 - Etapa 0, mostraram que o critério do MPE de distribuição das barras na seção do canto (S1), em faixas de 2 metros (P1) e 4 metros (P3) não é o mais eficiente. As armaduras superiores junto ao P1 e ao P3 (mais solicitado do que o P1) que entraram em plastificação, restringem-se a poucas barras, em uma faixa que corresponde a aproximadamente 1 metro para o P1 e 1,5 metros para o P3. As demais barras de aço dessa mesma faixa praticamente não foram mobilizados. Isso fica mais evidente ao analisar a Figura 12-12 (tensões nas armaduras), Figura 12-4 e Figura 12-5 (tensões de compressão no concreto). Outro fato é o valor do momento resultante na laje, junto ao P3, exposto na Tabela 12-2, ser igual a 384 kNm, enquanto que o momento de dimensionamento obtido pelo

MPE foi igual a 506 kNm. Isso indica que aproximadamente 25% do momento de projeto não foi mobilizado na ligação Laje/P3. Para o P1 foi 37 %.

Com relação as armaduras inferiores, pode-se perceber que as barras do pano central não foram mobilizados na integralidade, uma vez que a ruptura inicial ocorreu precocemente na ligação da laje com o pilar P3.

Como consequência, tem-se que a carga última obtida pela análise não linear $P_{d-NLS200} = 14,25 \text{ kN/m}^2$ foi inferior a carga última de projeto, $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$. Portanto, teoricamente contrária a segurança. Ou seja, ficou evidente que aplicar o MPE, com distribuição de faixas iguais, ora nos cantos (P1/P3) ora no meio (P2/P4), pode ser considerado como uma opção menos eficiente de dimensionamento.

12.1.2. Etapa 1

Tendo em vista estes resultados, em particular a carga última resultante da distribuição das armaduras na seção S1 e S3, considerou-se interessante alterar o detalhamento e por consequência os esforços nos cantos. Passa-se, então, a denominada Etapa 1.

O critério consiste em estabelecer uma faixa de distribuição das armaduras igual a “2h” (duas vezes a espessura da laje) a partir das faces dos pilares. Além disso, deve-se limitar os momentos negativos dentro dessa faixa a um momento reduzido $\mu_{RED,LIM} = 0,2$, onde:

$$\mu_{red} = \frac{Md}{L_{faixa} \times d^2 \times f_{cmd}} \quad [\text{EQ } 12.2]$$

Caso o momento avaliado seja superior àquele limite, o restante será redistribuído para as armaduras positivas, conforme Figura 12-18.

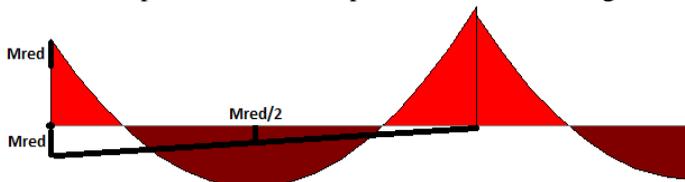


Figura 12-18 – Redistribuição dos momentos negativos junto ao P1 e P3

Sendo assim, a largura da faixa das barras negativas junto ao pilar P3 será igual a 1,5 metros e o momento da faixa igual a:

$$M_{d,FAIXA1,S} = \mu_{red} \times L_{faixa} \times d^2 \times f_{cmd} \rightarrow M_{d,FAIXA1,S} = 0,2 \times 1,5 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000 \text{ [EQ 12.3]}$$

$$M_{d,FAIXA1,S} = 308,55 \text{ kNm} \rightarrow M_{d,FAIXA1} = 205,7 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20\text{c}/12$$

$$M_{d,RED/2} = \frac{506 - 308,55}{2} = 98,72 \text{ kNm}$$

O valor de $M_{d,RED/2} = 98,72 \text{ kNm}$ significa a parcela de redistribuição, e será somada ao momento positivo da seção S2. Sendo assim, será realizado a nova distribuição dos momentos fletores, mantendo 55% para a faixa interna e 45 % para a faixa externa.

Para o restante da seção S1, considerou-se armadura mínima igual a $\phi 8,0\text{c}/20\text{cm}$, uma vez que essas barras de aço praticamente não foram mobilizados.

O Gráfico 12-8 apresenta os novos momentos fletores para a Etapa 1 (S1 e S2).

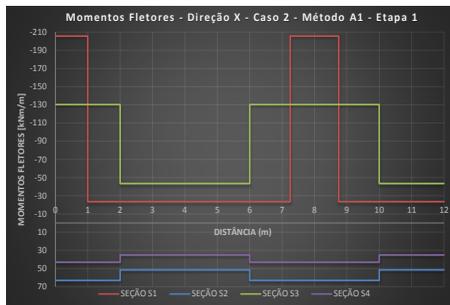
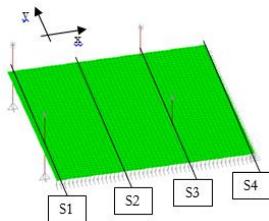


Gráfico 12-8 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 1

As novas armaduras calculadas ao ELU estão apresentadas na Tabela 12-4, já considerando a redistribuição do momento negativo da S1 para os positivos da S2.

| | Seção S1 | Seção S3 | Seção S2 | Seção S4 |
|-----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| FI | $\phi 20,0\text{c}/12$ | $\phi 20,0\text{c}/21$ | $\phi 12,5\text{c}/18$ | $\phi 12,5\text{c}/26$ |
| FE | $\phi 8,0\text{c}/20$ | $\phi 12,5\text{c}/26$ | $\phi 12,5\text{c}/22$ | $\phi 10,0\text{c}/21$ |

Tabela 12-4 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1 – Pd15 Etapa 1

A seção S3 e S4 não tiveram alteração. A Figura 12-19 apresenta a distribuição das armaduras na laje para a direção X.

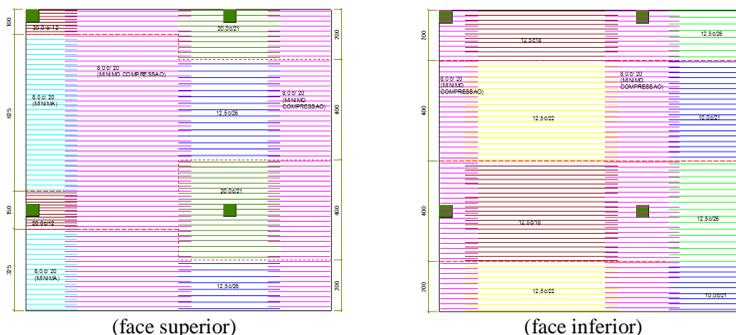
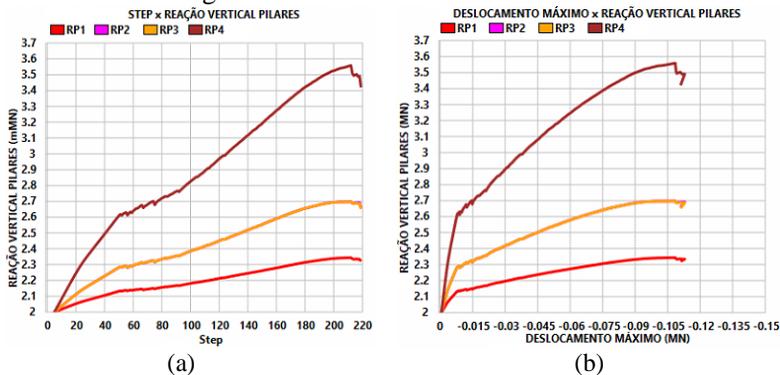


Figura 12-19 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2
Método A1 – Pd15 – Etapa 1

O Gráfico 12-9 apresenta a reação vertical nos pilares com os incrementos de carga como também com o deslocamento máximo.



Pode-se notar que a carga última ocorreu no *Step* 212, sendo o colapso no *Step* 219. De uma forma geral, a ductilidade reduziu em comparação com a Etapa 0. Para os pilares P1, P2 e P3 nota-se um pequeno trecho de carga praticamente constante, mas para o P4 não.

A Figura 12-20 apresenta a tensão na armadura para o *Step* 212

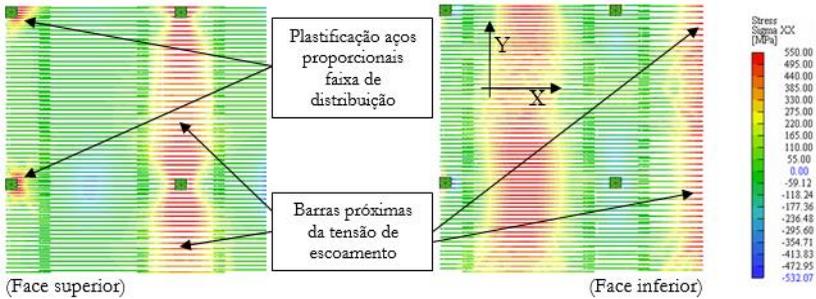


Figura 12-20 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 212 (carga última) – Etapa 1 - [MPa]

Percebe-se agora que praticamente todas as barras negativas sobre o pilar P3 e P1, distribuídos na faixa de 1,5 m e 1,0 m, respectivamente, atingiram a tensão de escoamento. O mesmo ocorreu para os aços entre os pilares P2 e P4 e para a armadura positiva do pano central, que antes estavam com tensão inferiores a tensão de escoamento.

A Figura 12-21 apresenta a tensão na armadura para o *Step* 219, sendo o incremento de carga final.

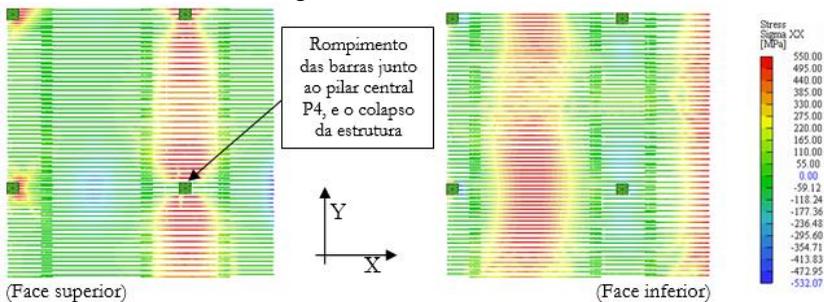


Figura 12-21 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 219 (final) Etapa 1 - [MPa]

Agora, o colapso ocorreu no pilar P4, por rompimento das armaduras negativas tanto do pano lateral como do pano central.

A carga última calculada para o *Step* 212 está mostrada a seguir.

$$P_{STEP212} = \frac{1559 + 698 \times 2 + 344}{12 \times 12} = 22,9 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S212} = \frac{22,9}{1,27} = 18,1 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 12.4]}$$

Comentários da análise não linear - Etapa 1

Pode-se notar que houve um acréscimo de 27% na carga última, ficando acima inclusive da carga de projeto, igual a 15 kN/m². Isso mostrou que o critério de concentrar as armaduras sobre o P1/P3,

afastadas “2h” a partir das faces dos pilares, foi eficiente em termos de carga última.

No entanto, no Gráfico 12-9b nota-se uma perda substancial da ductilidade em relação a Etapa 0, notada principalmente sobre o P4. O Gráfico 12-8 mostra uma disparidade acentuada nos momentos fletores de dimensionamento sobre o P3 e P4 (menor no P4), o que pode ter contribuído para o colapso da estrutura ter ocorrido junto ao P4.

Sendo assim, sugere-se alterar a distribuição das armaduras junto ao pilar P4, com o intuito de se ter um ganho em termos de ductilidade e também carga última.

12.1.3. Etapa 2

De acordo com a Figura 12-7 - Seção SD, as tensões no concreto na região dos negativos são maiores próximas ao P4 e P2, e diminuem na medida em que se afasta deles. Consequentemente, os momentos fletores são maiores próximos dos pilares. Porém, as armaduras negativas estão igualmente distribuídas na faixa de 2 metros para o P2 e 4 metros para o P4.

Sendo assim, na Etapa 2, a alteração no detalhamento sugere escalonar o momento fletor sobre o pilar P2 e P4, separando a faixa interna em central e lateral (1metro para cada), utilizando 60% do momento para a faixa interna central e 40% do momento para a faixa interna lateral (Gráfico 12-10).

Além dos momentos negativos sobre os pilares, o critério também sugere utilizar armadura mínima entre o P2 e P4 (ao invés de 25% do momento máximo) e deduzir do momento total sobre o P2 e P4 o momento resultante da armadura mínima.

A nova distribuição dos momentos é apresentada no Gráfico 12-10, com o escalonamento sobre os pilares P2 e P4.

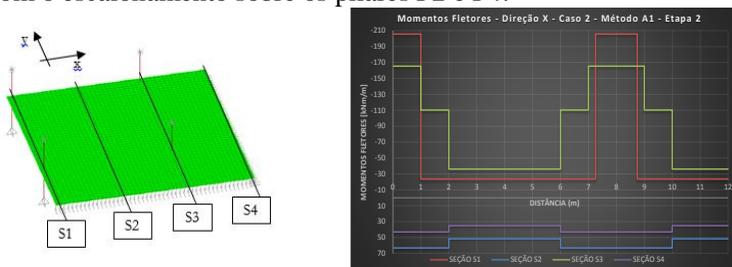


Gráfico 12-10 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 Pd15 - S1/S2/S3/S4 – Etapa 2

Nesse caso, não há redistribuição dos momentos negativos na seção S3, pois apenas se distribuiu as armaduras de maneira diferente. Portanto, a Seção S1, S2 e S4 permanecem inalteradas. As novas armaduras estão apresentadas na Tabela 12-5.

| | Seção S1 | Seção S3 | Seção S2 | Seção S4 |
|-----------|-----------------|---------------------------------|-----------------|-----------------|
| FI | $\phi 20,0c/12$ | $\phi 20,0c/16 / \phi 16,0c/16$ | $\phi 12,5c/18$ | $\phi 12,5c/26$ |
| FE | $\phi 8,0c/20$ | $\phi 10,0c/20$ | $\phi 12,5c/22$ | $\phi 10,0c/21$ |

Tabela 12-5 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1
Pd15 – Etapa 2

A Figura 12-19 apresenta a distribuição das armaduras na laje para a direção X (direção horizontal).

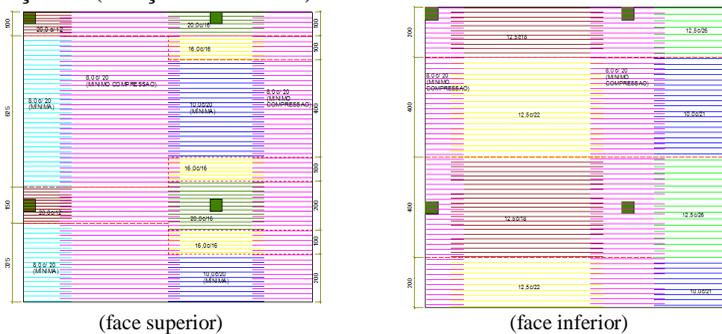


Figura 12-22 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2
Método A1 – Pd15 – Etapa 2

O Gráfico 12-11 apresenta a reação vertical nos pilares com os incrementos de carga como também com o deslocamento máximo.

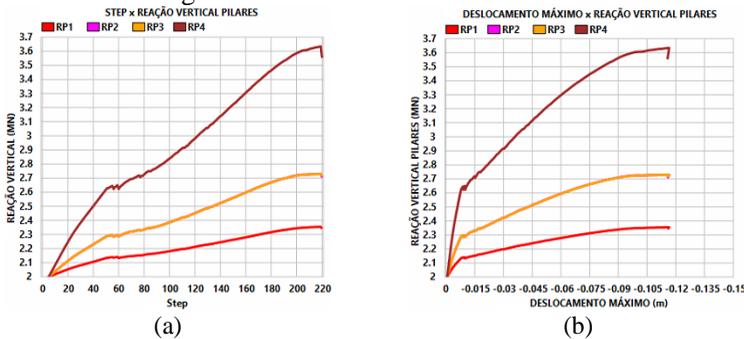


Gráfico 12-11 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje

A carga última ocorreu para o *Step* 219, enquanto que o colapso ocorreu para o *Step* 220. A Figura 12-23 apresenta a tensão nas armaduras

para o *Step* 219, com resultados análogos aos apresentados na Figura 12-20.

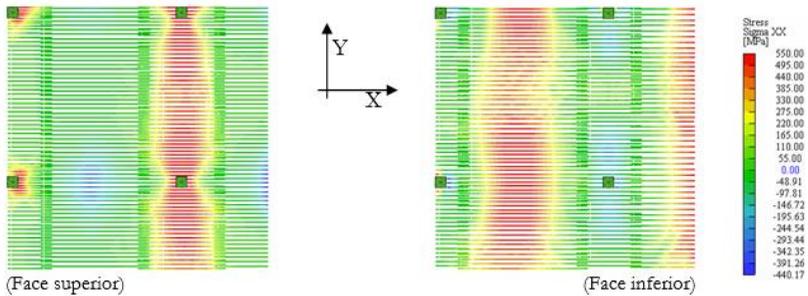


Figura 12-23 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 219 (carga última) – Etapa 2 - [MPa]

A Figura 12-24 apresenta a tensão nas armaduras para o *Step* 220, para o incremento de carga final.

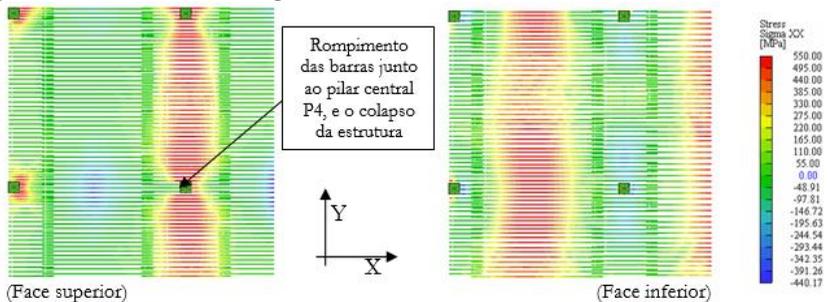


Figura 12-24 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 220 (final) Etapa 2 - [MPa]

O colapso também ocorreu no pilar P4, mas por rompimento das barras negativas somente do pano lateral, com as armaduras principais negativas e positivas na tensão de escoamento.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP219} = \frac{1634 + 729 \times 2 + 354}{12 \times 12} = 23,9 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP219} = \frac{23,9}{1,27} = 18,8 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 12.5]}$$

Comentários da análise não linear - Etapa 2

Pode-se notar que houve um pequeno aumento da carga última em relação a Etapa 1 (igual a 4%). Além disso, teve-se uma ruptura mais dúctil (Gráfico 12-11), com um trecho de carga praticamente constante não somente para os pilares P1, P2 e P3, mas também para o pilar P4. No entanto, e dentro do objetivo de melhoria das características de

comportamento na ruptura, realizar-se-á mais uma alteração no detalhamento.

12.1.4. Etapa 3

A última alteração no detalhamento é análoga a alteração realizada na Etapa 2, porém com distribuição de momentos na Seção S3 na proporção 70% para faixa interna central e 30% para a faixa interna lateral, conforme apresentado no Gráfico 12-12.

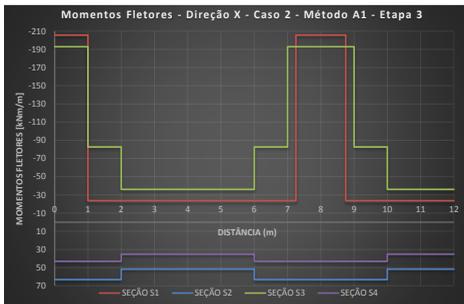
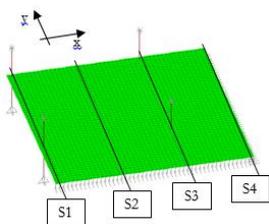


Gráfico 12-12 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 3

As Seções S1, S2 e S4 permaneceram inalteradas. As novas armaduras estão apresentadas na Tabela 12-6.

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|
| FI | φ20,0c/12 | φ20,0c/13 / φ16,0c/22 | φ12,5c/18 | φ12,5c/26 |
| FE | φ8,0c/20 | φ10,0c/20 | φ12,5c/22 | φ10,0c/21 |

Tabela 12-6 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1 Pd15 – Etapa 3

O Gráfico 12-13 apresenta a reação vertical nos pilares com os incrementos de carga como também com o deslocamento máximo.

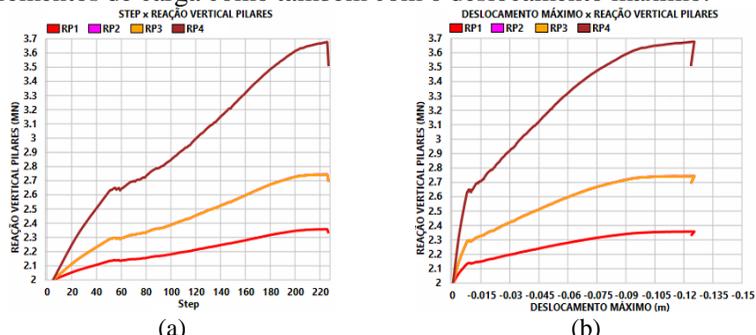


Gráfico 12-13 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje

A carga última ocorreu para o *Step* 226 enquanto que o colapso ocorreu para o *Step* 227. A Figura 12-25 apresenta a tensão nas armaduras para o *Step* 226, com resultados análogos aos apresentados na Figura 12-23.

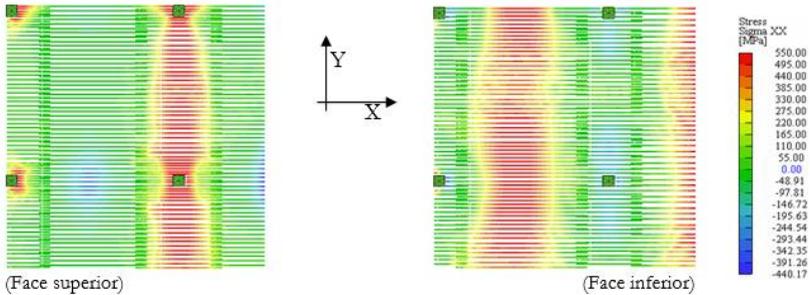


Figura 12-25 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 226 (carga última)
Etapa 3 - [MPa]

A Figura 12-26 apresenta a tensão nas armaduras, *Step* 227, incremento de carga final.

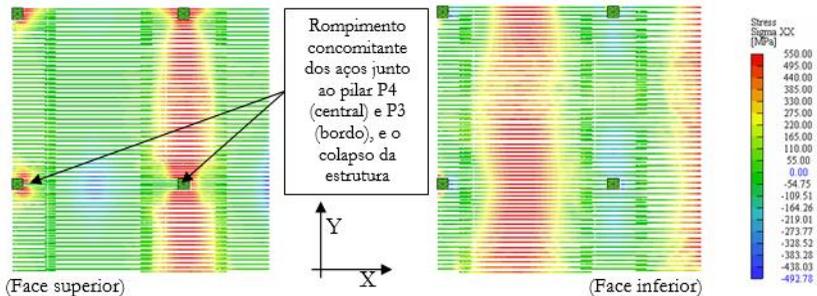


Figura 12-26 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 227 (final)
Etapa 3 - [MPa]

De acordo com o Gráfico 12-12, o momento junto ao pilar P3 é quase o mesmo do momento junto ao pilar P4. Por isso, o colapso ocorreu concomitantemente com o rompimento das barras negativas junto ao P4 (central) e ao P3 (bordo), com as demais armaduras principais negativas e positivas na tensão de escoamento.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP226} = \frac{1678 + 743 \times 2 + 358}{12 \times 12} = 24,5 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP226} = \frac{24,5}{1,27} = 19,3 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 12.6]}$$

Houve um aumento de 2,6 % em relação a Etapa 2, um aumento de 7 % em relação a Etapa 1 e um aumento de 36 % em relação ao

detalhamento inicial. Da Etapa 1 para a Etapa 3 o ganho em termos de carga última foi pequeno. No entanto, em termos de comportamento pré ruptura, tem-se um colapso mais dúctil e, por todo esse conjunto, se mostrou ser a melhor alternativa dentre as apresentadas anteriormente.

O Gráfico 12-14 mostra a evolução das reações horizontais nos pilares P1 e P3, topo e base, para a Etapa 3 da disposição das armaduras, com o objetivo de avaliar a eficiência da ligação P1/Laje e P3/Laje.

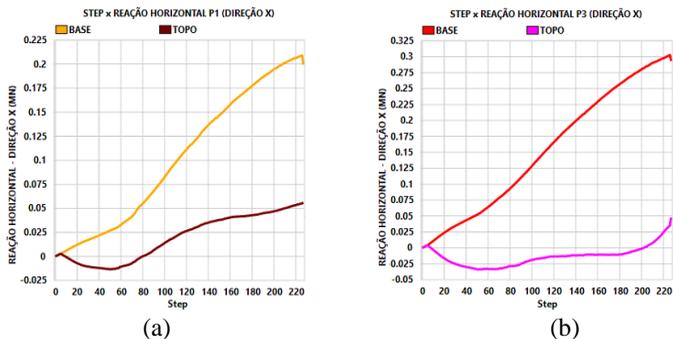


Gráfico 12-14 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 3 - [MN]

Para o *Step 226*, tem-se os seguintes valores de momentos para os pilares P1, P3 e na laje junto a esses pilares (Tabela 12-7).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P1 | 418 | 110 | 308 |
| P3 | 606 | 70 | 536 |

Tabela 12-7 – Momentos pilares P1, P3 e laje – *Step 226* – Etapa 3

O momento na laje utilizado para dimensionar as armaduras superiores junto ao P3 foi de 308,55 kNm. O valor resultante foi bem superior, pois dispor as armaduras em uma faixa menor daquela obtida pelo MPE não só aumenta a carga última como também melhora a eficiência da ligação nos bordos (P3/Laje) e no canto (P1/Laje).

A Figura 12-27 e Figura 12-28 mostram as tensões e deformações na Seção SB (ver localização na Figura 12-3), respectivamente, considerando o *Step 226* (carga última).

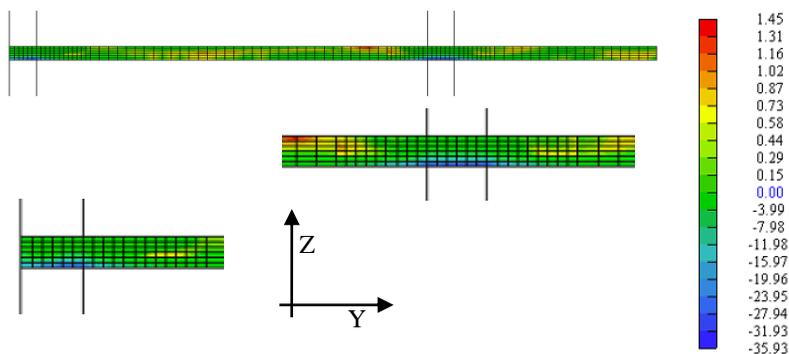


Figura 12-27 – Tensões no concreto – SB – Direção X – Step 226 Etapa 3 - [MPa]

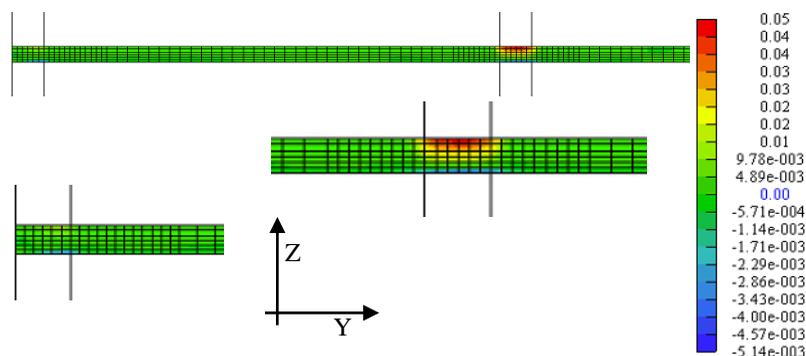


Figura 12-28 – Deformações no concreto – SB – Direção X – Step 226 Etapa 3 - [MPa]

As tensões de compressão junto ao P1 e P3 são maiores se comparadas com a Etapa 0 (Figura 12-5), e agora se estendem por uma faixa muito próxima da faixa de 1,5 metros para o P3 e 1,0 metro para o P1. Com relação às deformações de compressão, percebe-se que estão no trecho descendente do diagrama tensão x deformação e próximas da deformação limite imposta para o concreto (Figura 10-2), fato que não ocorreu na Etapa 0 (ver Figura 12-12). Enquanto isso, as deformações no aço já estão próximas da ruptura. Ou seja, tanto o concreto como o aço tiveram maiores deformações (maior ductilidade global), se comparado com a disposição inicial das armaduras.

A Figura 12-29 e Figura 12-30 mostram as tensões e deformações na Seção SD (ver localização na Figura 12-3), respectivamente, considerando o Step 226 (carga última).

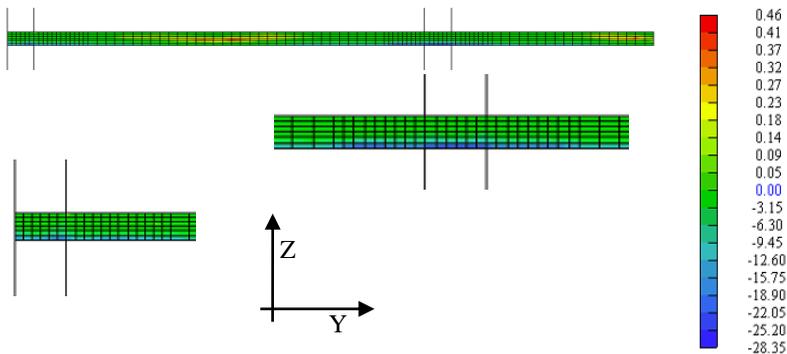


Figura 12-29 – Tensões no concreto – SD – Direção X – [MPa]

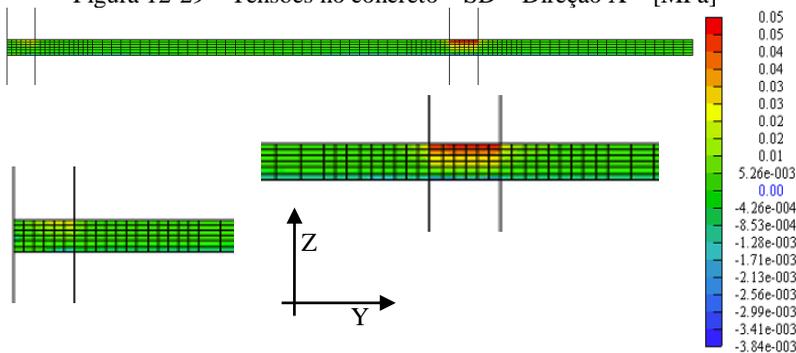


Figura 12-30 – Deformações no concreto – SD – Direção X – [MPa]

Assim como ocorrido com a SB, na seção SD o concreto também foi mais solicitado na compressão se comparado com a disposição inicial das armaduras (Figura 12-7 e Figura 12-14), seja em termos de tensão ou mesmo em termos de deformação. O aumento não foi tão expressivo quanto foi para a seção SB, mas nota-se agora que as tensões são praticamente constantes ao longo de toda a faixa de 2 metros para o P2 e principalmente para a faixa de 4 metros para o P4. A distribuição escalonada das armaduras da Etapa 3 junto ao P2 e P4 permitiu que isso ocorresse, e como resultado final, tem-se uma ruptura dúctil e com uma capacidade de carga maior.

12.2.MÉTODO A2

O método A2 pode ser considerado como um caso particular do método A1, já que também utiliza o MPE, porém com faixas de distribuição 60%/40% tanto para as armaduras negativas e positivas. Por isso, o resultados são apresentados no Apêndice do Capítulo 19.1.

12.3.MÉTODO B

Neste caso, a forma de obtenção das armaduras é de acordo com o modelo elástico analisado pelo MEF no *software* SAP (mais detalhes no Capítulo 9). Em resumo, obtém-se o momento de plastificação pelas médias dos momentos fletores dentro da faixa de interesse. Após isso, faz-se a inserção das linhas de plastificação no modelo numérico, aplicam-se os momentos de plastificação sobre os apoios, analisa-se novamente a estrutura e então dimensiona-se as armaduras a partir dos momentos fletores atuantes.

A Figura 12-31b mostra a distribuição dos momentos fletores na direção X, considerando o pilar como reação na laje (Figura 12-31a). Inicialmente, a faixa de obtenção dos momentos de plastificação será igual a 2 metros sobre o P1/P2 e de 4 metros sobre P3/P4 (Figura 12-31b), como forma de manter uma comparação com a Etapa 0 do Método A. No entanto, a distribuição dos momentos elásticos da Figura 12-31b indica comprimentos de faixas menores, conforme já visto no Capítulo 9.

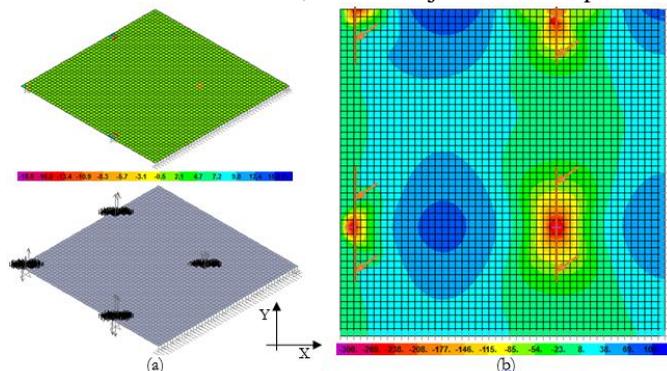


Figura 12-31 – Momentos Fletores – Direção X – Pilar como reação na laje

Os momentos de plastificação calculados sobre os pilares P1, P2, P3 e P4 estão mostrados na Tabela 12-8.

| MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO (kNm/m) – FAIXA 2m | | | | |
|--|----|--------|----|---------|
| PILARES | P1 | -54,66 | P2 | -137,38 |
| | P3 | -66,86 | P4 | -143,73 |

Tabela 12-8 – Momentos de plastificação – Método B – Faixa 2 m

A Figura 12-32b mostra os momentos fletores na laje (direção X) após a inserção dos momentos de plastificação sobre os pilares P1, P2, P3 e P4. O modelo utilizado contempla os pilares com trechos rígidos e

modelados como barra, 2 metros acima e abaixo da laje (Figura 12-32a), conforme já explicado no Capítulo 5.

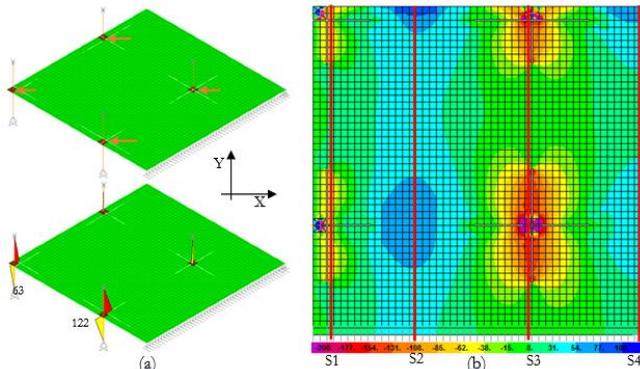


Figura 12-32 – Linhas Plastificação – Momentos Fletores Direção X – [kNm/m]

É importante lembrar que os momentos de torção (M12) foram desprezados na análise. Desse modo, o equilíbrio em termos de flexão é obtido somente pelos momentos na direção X (M11) e na direção Y (M22).

O Gráfico 12-15b apresenta os momentos fletores para as seções em estudo da Figura 12-32b bem como o percentual de distribuição das armaduras dentro das faixas de dimensionamento (faixas de 2 metros - Gráfico 12-15a).

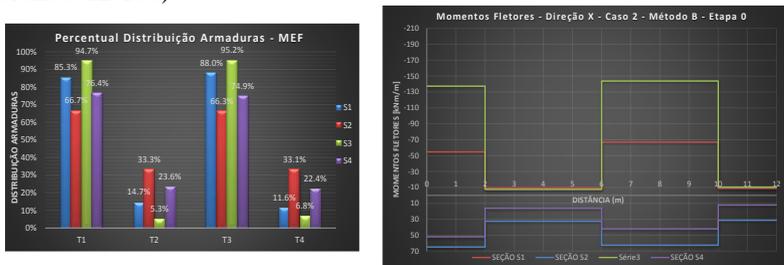


Gráfico 12-15 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 0

Pode-se notar que os percentuais de distribuição dos momentos dentro de uma seção, para cada trecho, são bem diferentes dos valores fornecidos pelo MPE. Por exemplo, nas seções S1 e S3, há uma disparidade acentuada do trecho sobre pilares e do trecho entre pilares. Inclusive na seção S3, as armaduras praticamente se concentram todas sobre os pilares. Além disso, existem taxas de armaduras diferentes da

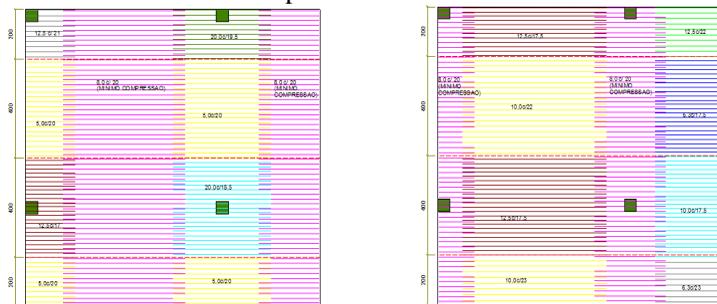
faixa central para a faixa lateral. A Tabela 12-9 apresenta as armaduras calculadas para esse caso.

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>T1</i> | φ12,5c/21 | φ20,0c/19,5 | φ12,5c/17,5 | φ12,5c/22 |
| <i>T2</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ10,0c/22 | φ6,3c/17,5 |
| <i>T3</i> | φ12,5c/17 | φ20,0c/18,5 | φ12,5c/17,5 | φ10,0c/17,5 |
| <i>T4</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ10,0c/23 | φ6,3c/23 |

Tabela 12-9 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método B
Pd15 – Etapa 0

Em comparação com as armaduras obtidas pelo MPE – Método A (Tabela 12-1), na Seção S1, os trechos sobre os pilares T1 e T3 resultaram em taxas mais baixas. Em contrapartida, os armaduras positivas da seção S2 aumentaram. Já para os trechos T2 e T4, o modelo numérico praticamente não resultou em armadura na Seção S1, e reduziu um pouco na Seção S2. Para a seção S3, as diferenças são mesmo para os trechos T2 e T4, com valores bem abaixo dos obtidos pelo MPE (menor inclusive do que a taxa mínima). Já para os trechos T1 e T3, as taxas são praticamente iguais. A seção S4 teve comportamento análogo à Seção S2, porém com reduções maiores para os trechos T2 e T4.

É importante frisar que não se utilizou a armadura mínima nas zonas tracionadas, com o objetivo de obter a carga última de acordo com os esforços atuantes do modelo elástico. A Figura 12-33 mostra o detalhamento das armaduras para as faixas de dimensionamento.



(Face superior)

(Face inferior)

Figura 12-33 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 2 – Método B
Pd15 – Etapa 0

O Gráfico 12-16a e Gráfico 12-16b apresentam as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 para cada incremento de carga (*Step*) e deslocamento máximo, respectivamente.

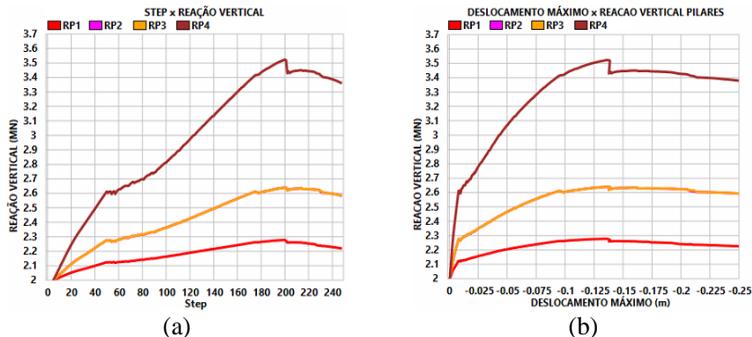
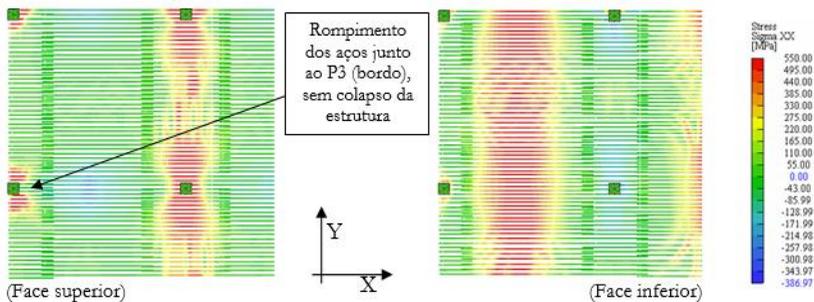


Gráfico 12-16 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje Método B – Etapa 0

Houve uma ruptura precoce das armaduras negativas junto ao P3, ainda no *Step* 175. Mesmo assim, a reação nos pilares continuou a aumentar, com pouca intensidade no P1, P2 e P3, ao contrário do P4, até atingir a carga última no *Step* 200. A partir daí houve uma redução brusca da carga suportada pela estrutura, seguida de uma redução gradual até atingir o colapso, no *Step* 249. Esse comportamento foi análogo ao obtido no Método A2 – Etapa 0 (Gráfico 19-2).

A Figura 12-34 apresenta as tensões nas armadura para a Direção X para a carga última.



Houve o rompimento das armaduras junto ao P3 (*Step* 200), mas a estrutura permaneceu em equilíbrio. O colapso teórico veio a ocorrer somente no *Step* 249, com rompimento generalizado dos aços negativos junto aos pilares para o pano lateral (Figura 12-35).

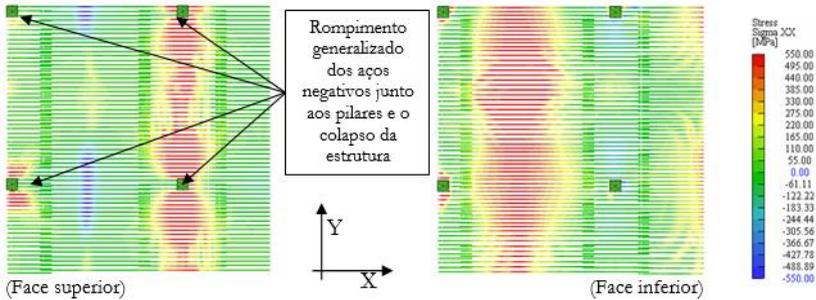


Figura 12-35 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 249 (final) – [MPa]

Tanto para a carga última como para a carga de colapso, as armaduras inferiores do pano central não atingiram a tensão de escoamento do aço. Sobre o pilar P3, há mais barras em tensão de escoamento se comparado ao Método A1 e A2, concentrados dentro de uma faixa de 1,5 metros ao invés de 4 metros.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP200} = \frac{1520 + 639 \times 2 + 277}{12 \times 12} = 21,3 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S200} = \frac{21,3}{1,27} = 16,8 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 12.7]}$$

O valor foi superior a carga de projeto, igual a 15 kN/m^2 , e também superior ao obtido no Método A1 e A2 para a Etapa 0. Apesar de continuar o problema com relação a largura da faixa junto ao pilar P3 e P1, o método elástico resultou inicialmente em menos armadura negativa sobre os pilares P1 e P3 e mais armadura nos positivos da Seção S2, o que justifica a carga última maior já no modelo inicial.

A Figura 12-36 e a Figura 12-37 apresentam as tensões e deformações para o carga última (*Step* 200), respectivamente, para a Seção SB (ver posição Figura 12-3).

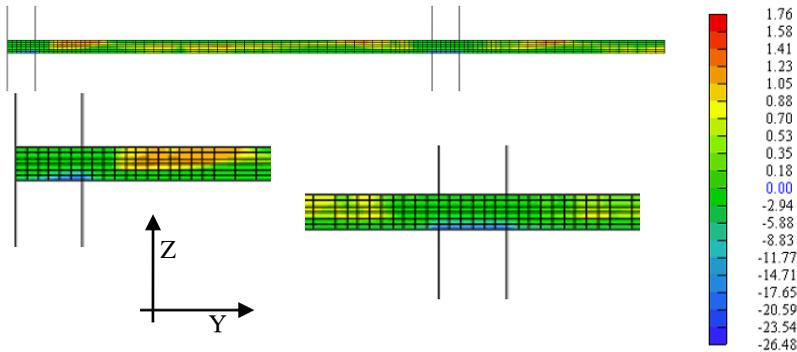


Figura 12-36 – Tensões no concreto – SB – Direção X – [MPa]

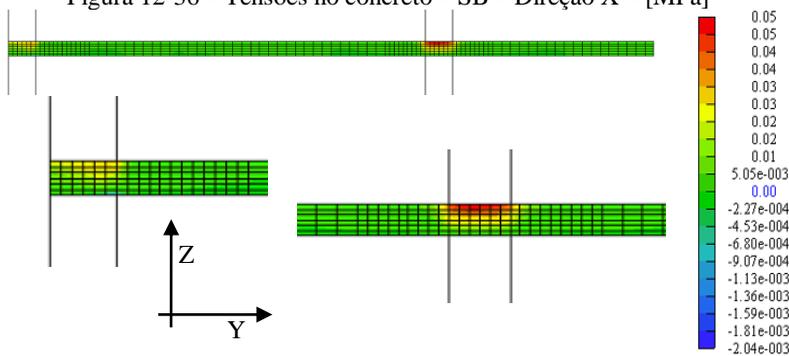


Figura 12-37 – Deformações no concreto – SB – Direção X – [MPa]

Sobre as tensões de compressão no concreto, elas ficaram concentradas na região dos pilares (em uma faixa bem inferior a 2 e 4 metros). Também apareceram algumas áreas com pequenas tensões de tração, justificada por ser regiões de concentrações de esforços. Com relação as deformações, na região do pilar P3 o aço já atingiu a ruptura enquanto o concreto ainda ficou no trecho ascendente do diagrama tensão x deformação.

A Figura 12-38 e a Figura 12-39 apresentam as tensões e deformações para a carga última (*Step* 200), respectivamente, para a Seção SD (ver posição Figura 12-3).

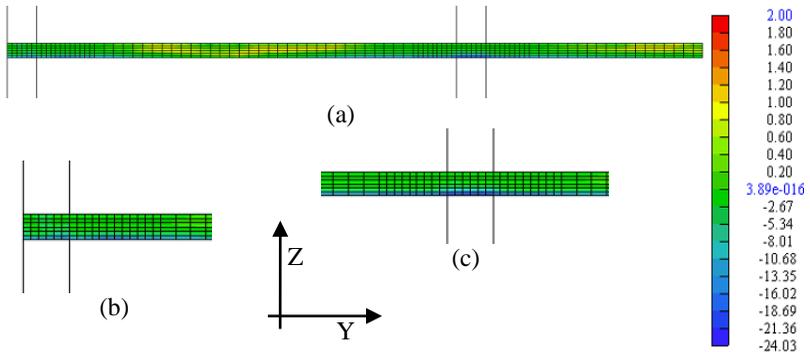


Figura 12-38 – Tensões no concreto – SD - Direção X – [MPa]

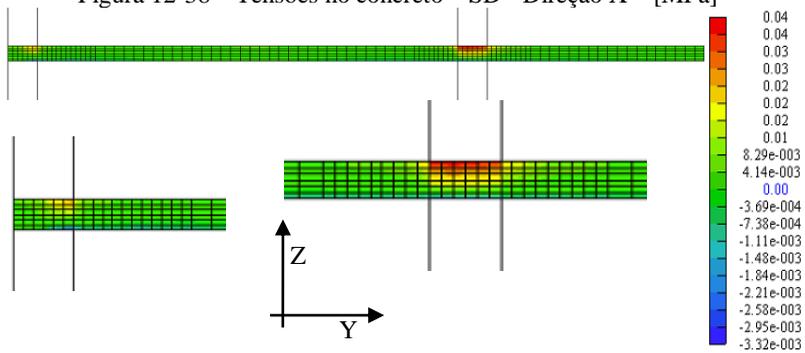


Figura 12-39 – Deformações no concreto – SD - Direção X – [MPa]

Neste caso, assim como já apresentado nos casos anteriores, as tensões de compressão se espalham para além da região dos pilares, com valores maiores sobre os pilares. As deformações no aço já estão quase na ruptura, com o concreto no trecho descendente do diagrama tensão x deformação. Ou seja, ambos os materiais estão sendo bem solicitados, ao contrário da Seção SB.

O Gráfico 12-17 apresenta as reações horizontais nos pilares P1 e P3, base e topo.

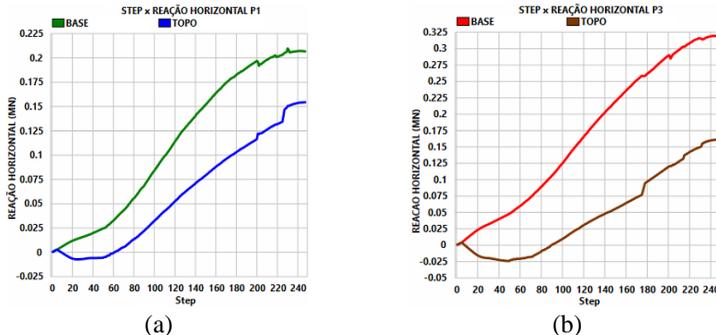


Gráfico 12-17 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Método B
Etapa 0 - [MN]

Houve uma redução das reações horizontais no P3 na *Step* 175 por conta do rompimento das armaduras negativas, assim como no *Step* 200 para o P1 e também P3. Para a carga última, *Step* 200, tem-se os seguintes valores de momentos (Tabela 12-10).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>P1</i> | 394 | 234 | 160 |
| <i>P3</i> | 580 | 240 | 340 |

Tabela 12-10 – Momentos pilares P1, P3 e laje – *Step* 200 – Método B - Etapa 0

O momento de dimensionamento na ligação Laje/P3 foi igual a 268 kNm e para Laje/P1 foi igual a 110 kNm. Ao contrário do ocorrido no Método A1 e A2, o momento da ligação foi atingido ainda na Etapa 0, justificado pelas diferenças nas taxas de armaduras da Seção S1 e S2.

12.3.1. Etapa 1

Mesmo o modelo numérico da Etapa 0 ter resultado em carga última não linear superior à carga de projeto, as tensões no concreto e no aço sobre os pilares P1 e P3 da Seção S1 ainda se concentraram em uma pequena faixa (Figura 12-35, Figura 12-36 e Figura 12-37), o que justifica concentrar as armaduras nesses locais.

É importante destacar que a distribuição dos momentos fletores do SAP, mostrados na Figura 12-31b, já indicavam comprimentos menores para a faixa de distribuição das armaduras sobre o P1 e P3 (seção S1) em comparação com o P2 e P4 (seção S3). Isso vem de encontro ao critério proposto no Capítulo 12.1.2, que consiste em concentrar as armaduras

sobre os pilares P3 e P1, em uma faixa afastada de “2h” das faces dos pilares. Para o pilar P1, a faixa fica igual a 1,0 metro e para o pilar P3 a faixa fica igual a 1,5 metro. Desse modo, tem-se:

Para o pilar P1:

$$M_d = 109,32 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{109,32}{1,0 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,106 \quad [\text{EQ } 12.8]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA1,0} = 109,32 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 16c/16$$

Para o pilar P3:

$$M_d = 267,43 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{267,43}{1,5 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,173 \quad [\text{EQ } 12.9]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA1,5} = 178,29 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20,0c/14,5$$

Tanto para o pilar P1 como para o pilar P3, o μ_{RED} foi inferior ao $\mu_{RED,LIM} = 0,2$. Com isso, não houve redistribuição dos momentos para as armaduras inferiores da Seção S2.

O Gráfico 12-18 apresenta a distribuição dos momentos fletores para a nova disposição de armaduras.

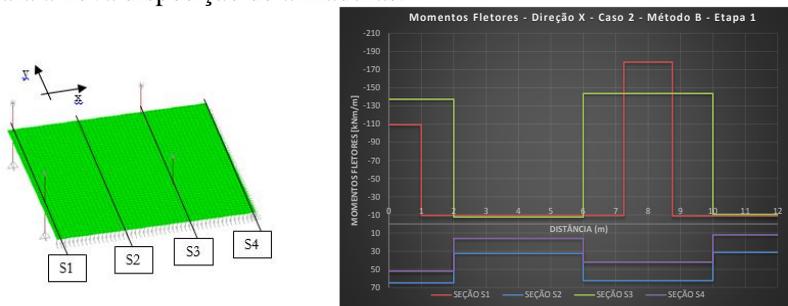


Gráfico 12-18 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 1

As novas armaduras estão apresentadas na Tabela 12-11. A única alteração está na Seção S1, já que não houve redistribuição dos momentos negativos sobre o P1 e P3.

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| T1 | $\phi 16,0c/16$ | $\phi 20,0c/19,5$ | $\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 12,5c/22$ |
| T2 | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 10,0c/22$ | $\phi 6,3c/17,5$ |
| T3 | $\phi 20,0c/14,5$ | $\phi 20,0c/18,5$ | $\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 10,0c/17,5$ |
| T4 | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 10,0c/23$ | $\phi 6,3c/23$ |

Tabela 12-11 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método B Pd15 – Etapa 1

A disposição das armaduras é análoga à disposição mostrada na Figura 12-19, com os valores apresentados na Tabela 12-11. O Gráfico 12-19 apresenta as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 para cada incremento de carga (*Step*) e deslocamento máximo, respectivamente.

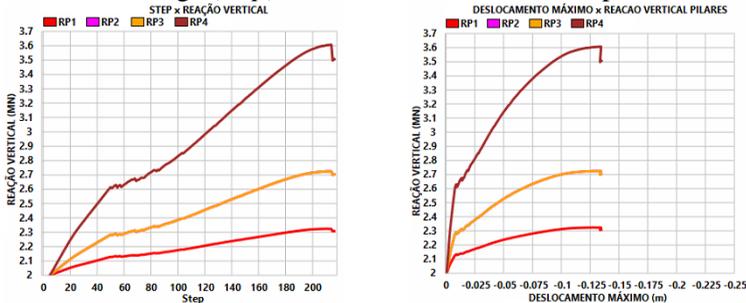


Gráfico 12-19 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje
Método B – Etapa 1

A carga última foi atingida no Step 213 e o colapso ocorreu logo após, no Step 215. Apesar de haver uma sensível redução da ductilidade em comparação com a Etapa 0, ainda se percebe uma constância no acréscimo de carga antes da carga de ruptura, mesmo para o pilar P4. Esse comportamento não foi evidenciado no Método A1 (Gráfico 12-9) e principalmente no Método A2 (Gráfico 19-5), ambos Etapa 1. Ademais, pode-se notar no Gráfico 12-8 (Método A1) e Gráfico 19-4 (Método A2) uma maior disparidade nos valores dos momentos fletores entre as Seções S1 e S3 se comparado com o Método B. Inclusive, no modelo elástico, o momento negativo sobre o pilar P1 (T1 – S1) é inferior ao obtido no pilar P2 (T1 – S3), fato não observado no Método A1 e A2.

A Figura 12-40 apresenta as tensões nas armaduras para a Direção X para a carga de colapso (*Step 215*).

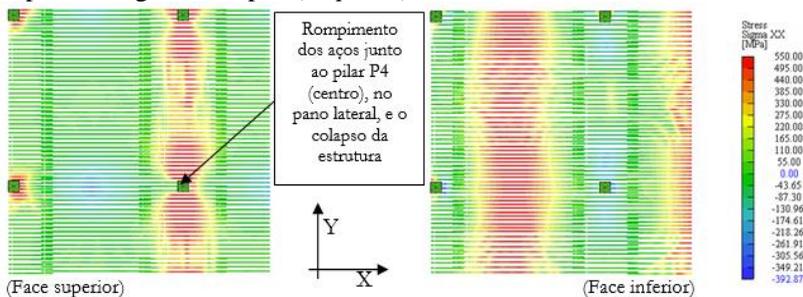


Figura 12-40 – Tensão nas armaduras – Direção X – *Step 215* (final)
Método B - Etapa 1 - [MPa]

A ruptura ocorreu nas armaduras negativas sobre o pilar P4. Neste caso, praticamente todas as barras sobre o P1 e P3 estão em plastificação. Com relação à armadura positiva, nota-se que a malha da Seção S4 também atingiu a tensão de escoamento. Dessa modo, tem-se uma estrutura com um melhor aproveitamento das armaduras quando comparado com a situação inicial (Figura 12-35).

A carga última ocorreu para o *Step* 213, calculada a seguir.

$$P_{STEP205} = \frac{1608 + 724 \times 2 + 323}{12 \times 12} = 23,5 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP205} = \frac{23,5}{1,27} = 18,5 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 12.10]$$

Como consequência da concentração das armaduras negativas junto ao P1 e P3, tem-se um aumento de 10 % na carga última em relação à distribuição inicial das armaduras. No entanto, esse valor é inferior aos valores obtidos no Método A1 (27%) e Método A2 (17%).

O Gráfico 12-20 apresenta os momentos fletores para os pilares P1 e P3, base e topo.

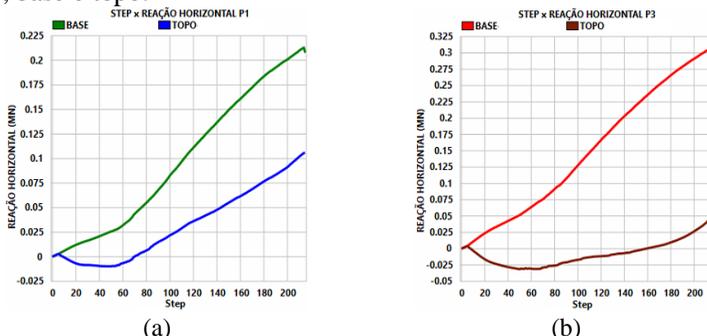


Gráfico 12-20 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Método B
Etapa 1 - [MN]

Nesse caso, a descontinuidade no gráfico ocorre somente no incremento de carga final (*Step* 215). Para a carga última (*Step* 213), tem-se os seguintes valores de momentos fletores (Tabela 12-12).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>P1</i> | 424 | 210 | 214 |
| <i>P3</i> | 612 | 94 | 518 |

Tabela 12-12 – Momentos pilares P1, P3 e laje – *Step* 213 – Método B - Etapa 1

Houve naturalmente um aumento quando comparado com a Etapa 0 (Tabela 12-10). Os momentos na ligação Laje/P3 e Laje/P1 de dimensionamento das armaduras foram iguais a 268 kNm e 110 kNm

enquanto os obtidos da análise não linear foram 518 kNm e 214 kNm, respectivamente. Ou seja, a Etapa 1 não somente contribuiu para aumento da carga última mas como consequência aumentou significativamente a eficiência da ligação da laje junto ao pilar de canto P1 e pilar de bordo P3.

A seqüência do estudo sugere alterar a disposição das armaduras negativas junto ao P2 e P4, de igual modo realizado na Etapa 2 e Etapa 3 do Método A1. No entanto, aqui no Método B, será realizado diretamente a Etapa 3, que se mostrou a situação final em termos de carga última e com uma boa ductilidade.

12.3.2. Etapa 3

A Etapa 3 sugere escalonar os momentos na Seção S3, na proporção 70% para faixa interna central e 30% para a faixa interna lateral. Além disso, será utilizada armadura mínima igual a $\phi 10,0c/20$ entre os pilares P2/P4 e o momento devido a armadura mínima será subtraído do momento de plastificação obtido para o P2 e P4. Com relação as armaduras positivas, manteve-se o dimensionamento já realizado, e não se utilizaram as armaduras mínimas. Dessa forma, não haverá acréscimo de aço em comparação com as Etapas anteriores. O Gráfico 12-21 apresenta os momentos resultantes dessa alteração.

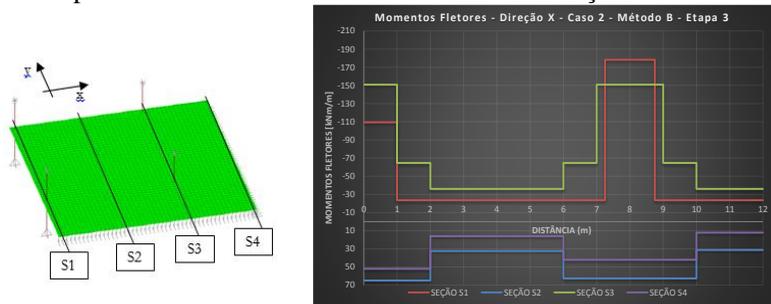


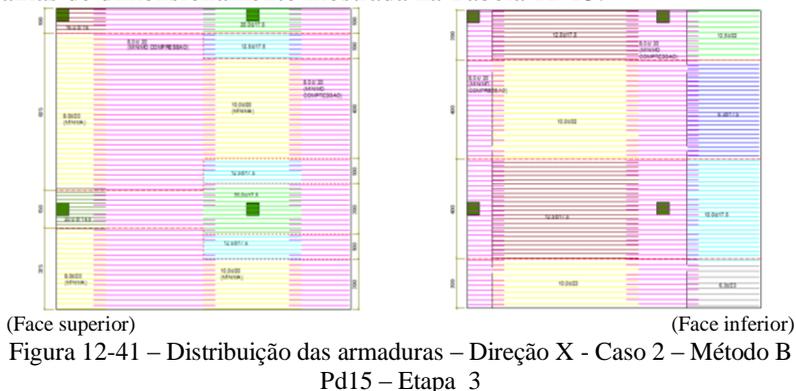
Gráfico 12-21 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 3

As Seções S1, S2 e S4 permaneceram inalteradas. As novas armaduras estão apresentadas na Tabela 12-13.

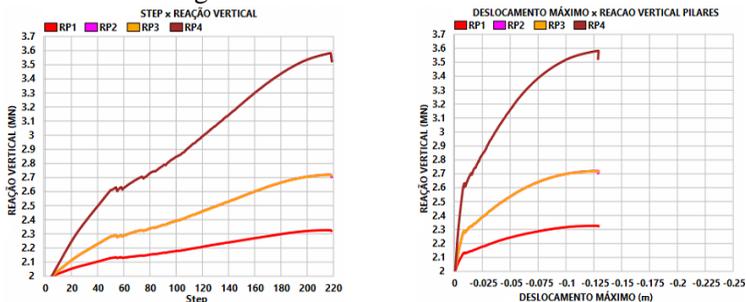
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------|
| T1 | $\phi 16,0c/16$ | $\phi 20,0c/17,5/\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 12,5c/22$ |
| T2 | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 10,0c/20$ | $\phi 10,0c/22$ | $\phi 6,3c/17,5$ |
| T3 | $\phi 20,0c/14,5$ | $\phi 20,0c/17,5/\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 12,5c/17,5$ | $\phi 10,0c/17,5$ |
| T4 | $\phi 5,0c/20$ | $\phi 10,0c/20$ | $\phi 10,0c/23$ | $\phi 6,3c/23$ |

Tabela 12-13 – Dimensionamento – Caso 2 – Método B – Pd15 – Etapa 3

A Figura 12-41 mostra o detalhamento das armaduras para as faixas de dimensionamento mostrada na Tabela 12-13.



O Gráfico 12-22 apresenta a reação vertical nos pilares com os incrementos de carga como também o deslocamento máximo.



A carga última ocorreu para o *Step* 218 enquanto que o colapso ocorreu logo após, no *Step* 219. Não houve descontinuidade no diagrama nos pilares P1, P2 e P3. Em relação ao P4, o colapso foi atingido sem um patamar de carga constante.

A Figura 12-42 apresenta a tensão nas armaduras para o *Step* 217, para o incremento de carga final.

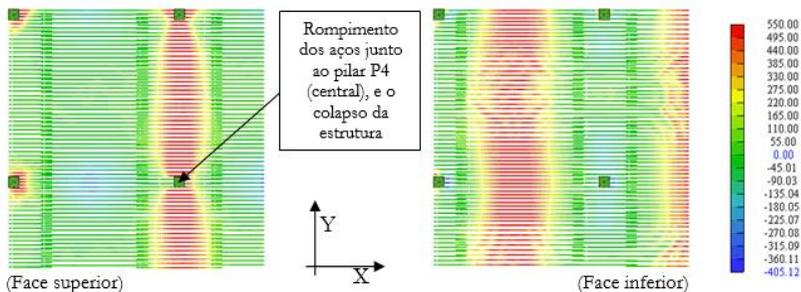


Figura 12-42 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 219 (final)
Etapa 3 - [MPa]

Houve o rompimento das barras negativas junto ao pilar P4 (central). Como justificativa, tem-se o fato de utilizar armadura mínima ($\phi 10,0c/20$) entre o P2/P4 ao invés da malha $\phi 5,0c/20$. Com isso, reduziu-se um pouco o momento junto ao pilar P4, ficando inferior ao momento obtido para o P3 (Gráfico 12-21). Sendo assim, mesmo escalonando os momentos sobre o P4, o colapso da estrutura se dá na armadura negativa junto ao Pilar P4 (lado do pano lateral), com menor ductilidade se comparado com a Etapa 1.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP218} = \frac{1583 + 719 \times 2 + 326}{12 \times 12} = 23,3 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S218} = \frac{23,3}{1,27} = 18,3 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 12.11]}$$

Houve uma pequena redução na carga última, aproximadamente 3%, justificada pela redução dos momentos sobre o pilar P4 com a adição da armadura mínima.

Como não teve alteração nas armaduras na Seção S1 da Etapa 1 para a Etapa 3, tem-se os mesmos valores de momentos no P1 e P3 já apresentados no Gráfico 12-20 e Tabela 12-12.

A Figura 12-43 e Figura 12-44 mostram as tensões e deformações na Seção SB (ver localização na Figura 12-3), respectivamente, considerando o *Step* 218 (carga última).

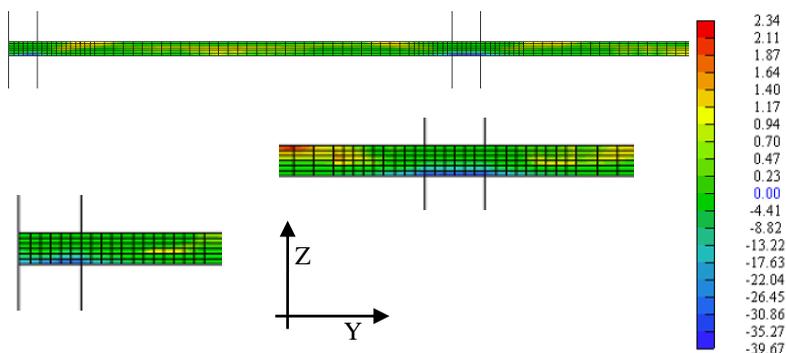


Figura 12-43 – Tensões no concreto – SB – Direção X – Step 218
Etapa 3 - [MPa]

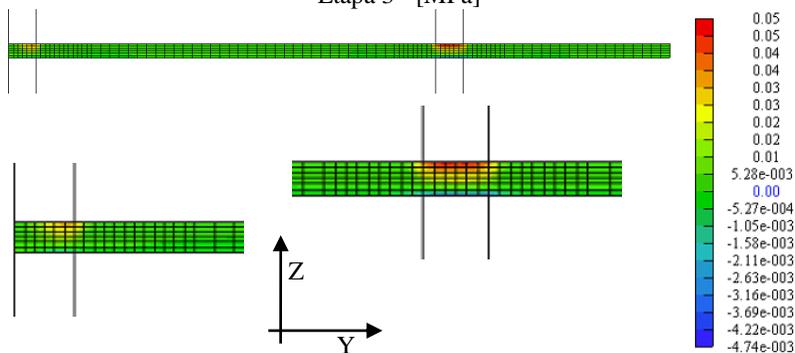


Figura 12-44 – Deformações no concreto – SB – Direção X – Step 218
Etapa 3 - [MPa]

As conclusões aqui são análogas às conclusões da Figura 12-27 e Figura 12-28, referente a Etapa 3 do Método A1. O fato de concentrar as armaduras negativas sobre os pilares P1 e P3, fez com que tanto o concreto como as armaduras fossem mais solicitadas se comparado com a disposição inicial. As tensões se estenderam por uma faixa muito próxima da faixa de 1,5 metros para o P3 e 1,0 metro para o P1, o que ratifica o critério proposto em concentrar as armaduras. Com relação as deformações de compressão, percebe-se que estão no trecho descendente do diagrama tensão x deformação (ou seja, com um bom aproveitamento - Figura 10-2). Enquanto isso, as deformações no aço já estão próximas da ruptura.

A Figura 12-45 e Figura 12-46 mostram as tensões e deformações na Seção SD (ver localização na Figura 12-3), respectivamente, considerando o *Step* 218 (carga última).

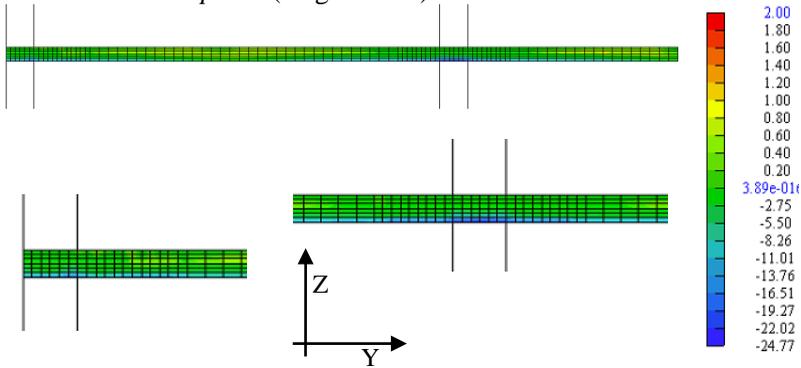


Figura 12-45 – Tensões no concreto – SD – Direção X – *Step* 218
Etapa 3 - [MPa]

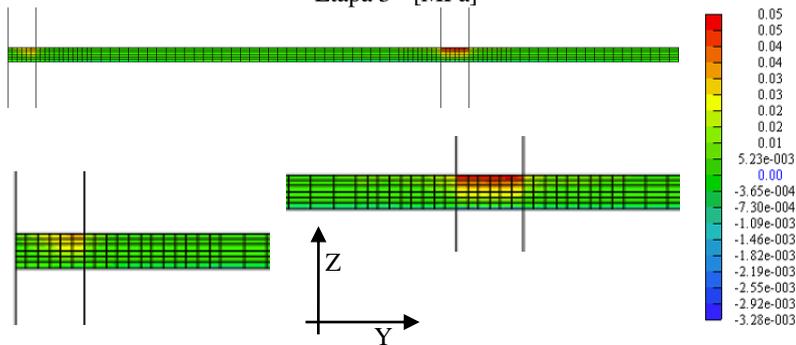


Figura 12-46 – Deformações no concreto – SD – Direção X – *Step* 218
Etapa 3 - [MPa]

Assim como ocorrido com a SB, na seção SD o concreto também foi mais solicitado na compressão se comparado com a disposição inicial das armaduras (Figura 12-38 e Figura 12-39), seja em termos de tensão ou mesmo em termos de deformação. Nota-se ainda que as tensões são maiores na região do P4 e, portanto, os momentos da seção são maiores nesse local, o que justifica a disposição 70% (faixa interna central) e 30% (faixa interna lateral).

Tendo em vista as mudanças realizadas na Seção S1 e também na Seção S3, é necessário introduzir os novos momentos fletores dessa alteração (Etapa 1 e 3), conforme Figura 12-47.

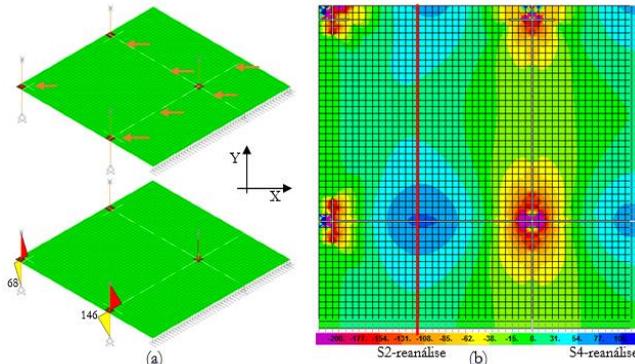


Figura 12-47 – Linhas Plastificação – Momentos Fletores – Reanálise Direção X – Etapa 3

O Gráfico 12-23 apresenta além dos momentos fletores iniciais para as Seções S1, S2, S3 e S4 (Etapa 0), os momentos fletores para as seções S2 e S4 após a reanálise da Etapa 1 e Etapa 3.

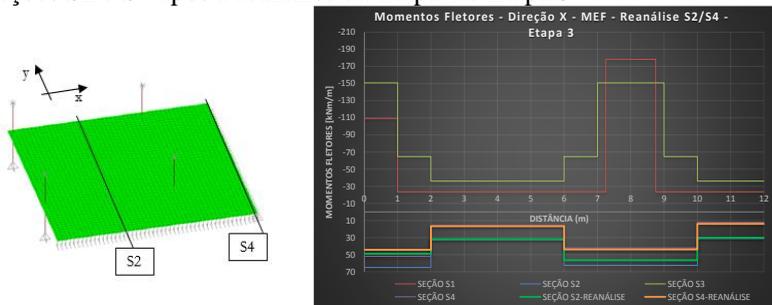


Gráfico 12-23 – Momentos fletores - Direção X–Caso 2 – Método B - Pd15 Reanálise S2/S4 – Etapa 3

Os novos momentos fletores da Etapa 3, S2 e S4, são ligeiramente inferiores aos obtidos na Etapa 0, o que ratifica as armaduras já dimensionadas. As maiores reduções ocorreram na Seção S4, entre o P2 e P4, por conta da introdução do momento mínimo. Os momentos nos pilares P1 e P3 como também na ligação com a laje são praticamente iguais aos obtidos na Etapa 1, uma vez que a seção S1 não foi alterada. Desse modo, o dimensionamento das armaduras positivas pode ser baseado nos esforços do modelo elástico da Etapa 3.

12.4. CONSIDERAÇÕES CARGA ÚLTIMA – $P_d=15\text{kN/m}^2$

O Gráfico 12-24 apresenta a carga última obtida na análise não linear (P_{d-NL}) para os três métodos estudados e em todas as Etapas, em comparação com a carga de projeto ($P_d = 15 \text{ kNm/m}^2$).

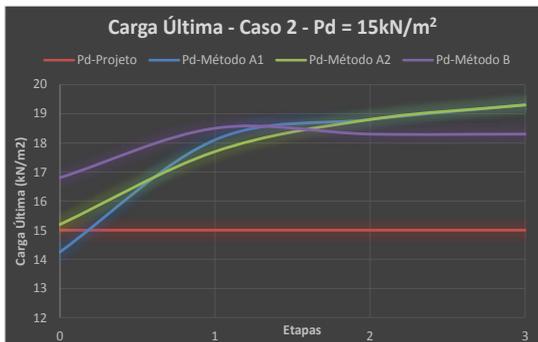


Gráfico 12-24 – Carga Última – Caso 2 – $P_d=15\text{kN/m}^2$

Com relação a Etapa 0 (faixas de 2 e 4 metros), pode-se notar que o Método A1 (MPE distribuição 75%/25% negativos e 55%/45% positivos) foi o único que apresentou valor inferior a carga de Projeto (-5,3%). O motivo está diretamente relacionado ao fato de distribuir as armaduras negativas sobre o P3 em uma faixa igual ao pilar central P4. Por conta disso, nem toda a armadura negativa junto ao P3 foi mobilizada, prejudicando a segurança da estrutura. Já o Método A2 (MPE distribuição 60%/40% positivos e negativos) que possui uma taxa inferior sobre o P3 e ligeiramente maior nos positivos para o mesmo trecho, resultou em carga praticamente igual a carga de projeto (1,3% maior - Gráfico 12-25). O Método B (elástico) apresentou menos armadura sobre o P3 e P1 (S1) e ao mesmo tempo maiores taxas nos positivos (S2). Isso permitiu obter carga última 12% maior do que a carga de projeto, mesmo havendo o problema da largura da faixa excessiva junto ao P1 e P3.

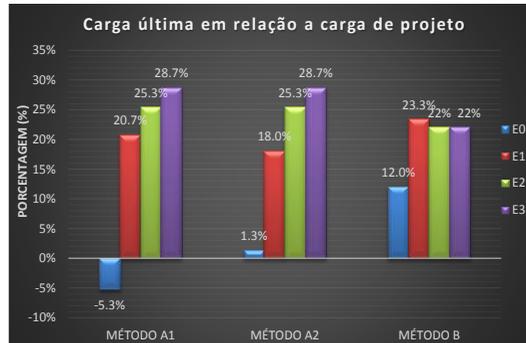


Gráfico 12-25 – Carga Última x Carga de Projeto – Caso 2 – Pd=15kN/m²

Para a Etapa 1, que reduziu a largura da faixa na disposição das armaduras negativas junto ao P1 e P3, e redistribuiu o momento excedente (caso exista) para os positivos da seção S2, a carga última da análise não linear foi sempre superior a carga de projeto, em todos os métodos analisados. O maior valor foi obtido para o Método B (Gráfico 12-25). No entanto, o Método A1 obteve o maior aumento em relação a Etapa 0, igual a 27 % (Gráfico 12-26), mostrando que a ligação da laje com o pilar de bordo na análise pelo MPE merece grande atenção, e de forma alguma pode ser tratada igual a uma ligação laje/pilar de meio.

A Etapa 2 e 3 tem praticamente as mesmas conclusões. A carga última do método A1 e A2 foram os maiores valores obtidos (Gráfico 12-25). O método B teve uma redução de armaduras sobre o P2 e P4, o que justifica a menor carga última obtida. Já no método A1 e A2, o ganho de carga última não foi tão expressivo da Etapa 3 para a Etapa 1 como foi da Etapa 1 para Etapa 0 (em torno de 7% - Gráfico 12-26). Mesmo assim, ficou evidente que as tensões de compressão no concreto se distribuíram melhor com o detalhamento escalonado sobre o P2/P4 da Etapa 3.



Gráfico 12-26 – Carga Última x Carga Etapa anterior - Caso 2 – Pd=15kN/m²

De forma geral, observou-se que o melhor comportamento da estrutura, ou seja, que resulta na melhor relação carga última x ductilidade, ocorre quando o momento junto ao pilar P4 (centro) está próximo do pilar P3 (bordo). Isso foi obtido no Gráfico 12-12 (Etapa 3 do Método A1) e Gráfico 12-18 (Etapa 1 do Método B). Portanto, em termos de projeto, recomenda-se escalonar as armaduras junto ao pilar P4 em uma proporção que seja equivalente às armaduras junto ao pilar P3, mantendo a distribuição em uma faixa de 1m / 2m / 1m, conforme já apresentado nos gráficos da Etapa 3.

O Gráfico 12-27 mostra as taxas de armadura para as Etapa 0, 1, 2 e 3 para os métodos A1, A2 e B.

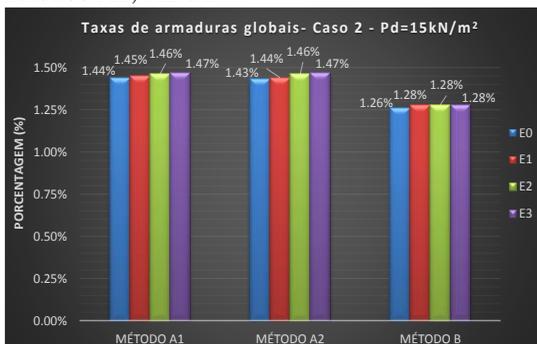


Gráfico 12-27 – Taxas de armadura globais - Caso 2 – Pd=15kN/m²

As taxas de armadura são praticamente iguais entre as quatro etapas, seja no Método A1, A2 e B, pois as alterações no detalhamento não fez aumentar a quantidade de barras de aço de uma para outra. No entanto, o comportamento da estrutura em termos de carga última, mantendo ductilidade, foi melhor observado na Etapa 3 (exceção no Método B por uso da armadura mínima entre o P2/P4).

Após o resultado das análise não linear, pode-se afirmar que, com exceção da Etapa 0 do Método A1, todos os três métodos aqui estudados são soluções em equilíbrio e que respeitam o método estático. Portanto, a favor da segurança. Vale frisar que a menor taxa de armadura foi obtida no Método B, sendo que a carga última foi apenas 5% inferior ao Método A1 e A2. Isso mostra que a análise elástica permitiu balancear de forma adequada a distribuição das armadura nas zonas tracionadas superiores e inferiores, mediante a introdução dos momentos de plastificação e reanálise da estrutura.

Em relação a carga última obtida na Etapa 3, observa-se que os valores foram em média 25% superiores a carga de projeto (Etapa 3 -

Gráfico 12-25), o que era de se supor estarem próximos de $P_d=15\text{kN/m}^2$ (fato esse já constatado no exemplo da laje 1D do Capítulo 10.3). Parte desse aumento de 25% é justificado pelo movimento horizontal na laje contra os pilares, que gera uma pequena compressão axial na laje, explicado de forma esquemática a seguir.

A equação 10.12 apresenta o momento resistente na seção transversal.

$$M'_{rd} = (A_s \times f_{yd} + n/2) \times Z \quad [\text{EQ 12.12}]$$

Onde:

M'_{rd} = momento resistente da seção transversal;

$A_s f_{ym}$ = força devida a armadura;

N = esforço axial na laje;

Z = braço de alavanca da seção transversal.

O valor de N é obtido pelas reações horizontais nos pilares P1 e P3, na direção X (topo e base), dividindo pela largura da laje, igual a 12 metros.

$$N = \frac{\sum R_{H-pilares}}{L_{laje}} \quad [\text{EQ 12.13}]$$

Sendo assim, a influência do esforço axial de compressão será tanto maior quanto menor for a taxa de armadura nas zonas tracionadas. Por isso, calculou-se a média das taxas para todos os trechos da seção S2, S3 e S4. A seção S1, por estar junto aos pilares P1 e P3, admitiu-se não sofrer a influência da carga N .

Sendo assim, o valor médio da influência do esforço axial de compressão na carga última é igual a 8%. Com isso, para a Etapa 3 do Método B, tem-se:

$$P_{STEP218} = 23,3 \times 0,92 = 21,4 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP218} = \frac{21,4}{1,27} = 16,85 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ 12.14}]$$

Ainda assim, tem-se um valor 13% acima da da carga de projeto, justificado pelo comportamento multiaxial da laje na ruptura (utilizado pelo ATENA – ver Capítulo 3.7), com efeitos de torção e com grandes redistribuição de esforços.

12.5. ALTERAÇÃO NA CARGA DE PROJETO – $P_d=20\text{kN/m}^2$

O estudo em alterar a carga de projeto tem por objetivo avaliar o comportamento da estrutura para um valor superior ao comum e normalmente utilizado para uma laje lisa para fins residenciais, igual a 15 kN/m^2 . O valor será alterado para $P_d = 20 \text{ kN/m}^2$ e os demais parâmetros

serão mantidos exatamente iguais. De antemão, para uma laje com vão de 8 metros, espessura de 25 cm e $f_{cmd} = 21,25$ MPa, utilizar uma carga de projeto igual a 20 kN/m^2 já implica em um valor elevado, no qual se espera um comportamento menos dúctil da estrutura até o colapso.

Como os capítulos anteriores já descreveram com detalhes o passo a passo do início do carregamento até a ruptura, neste caso os resultados serão apresentados de forma mais resumida, no Apêndice do Capítulo 19.2.

13. ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 1

O Caso 1 tem uma particularidade em relação ao Caso 2 (sem vigas e sem balanço), por possuir vigas de bordo, com dimensão 50 x 50 cm, conforme mostrado na Figura 13-1. A carga de projeto será igual a $P_d = 15\text{kN/m}^2$, por se tratar de um valor usual utilizado em projeto para as lajes em concreto armado, já justificado anteriormente.

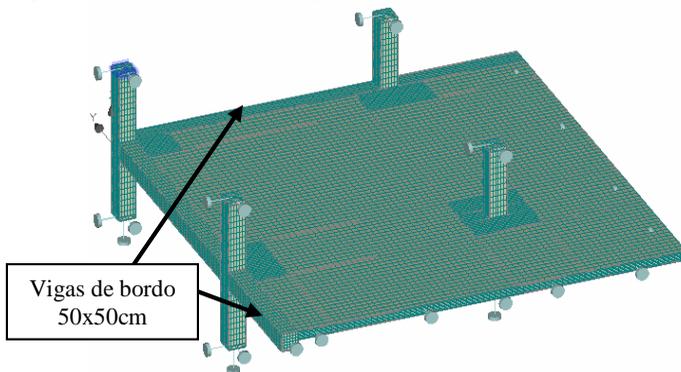


Figura 13-1 – Caso 1 –Regular e com vigas de bordo seção 50 x 50 cm

Será estudado somente o Método B (elástico), pois o MPE não prevê com clareza um critério para tratar os momentos nos bordos quando se tem vigas. Sendo assim, o dimensionamento da estrutura será realizado pelo modelo numérico, analisado no MEF.

As vigas foram dimensionadas com base nos esforços apresentados na Figura 13-1, resultando em 4 ϕ 12,5 mm na face inferior, 4 ϕ 16 mm na face superior e estribos ϕ 10 mm c/20.

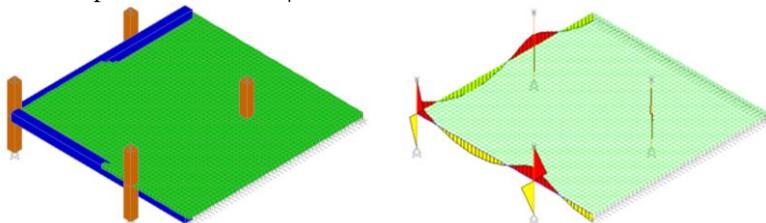


Figura 13-2 – Caso 1 – Regular e com vigas de bordo seção 50x50 cm

Para os pilares, manteve-se o mesmo dimensionamento já realizado no Caso 2 (sem vigas e sem balanço), sendo igual a 8 ϕ 25 mm para a armadura longitudinal e estribos ϕ 8,0 c/15 cm. Também se

mantiveram os estribos na laje, conforme definidos no Capítulo 10.2, excluindo as barras dentro da viga.

Para as lajes, o procedimento foi o mesmo adotado para o Método B do Caso 2 (Capítulo 12.3). Ou seja, obteve-se o momento de plastificação pela médias dos momentos fletores dentro da faixa de interesse. Após isso, fez-se a inserção das linhas de plastificação no modelo numérico, aplicaram-se os momentos de plastificação sobre os apoios, analisou-se novamente a estrutura e então dimensionaram-se as armaduras a partir dos momentos fletores atuantes. Nesse caso, para os momentos na direção X, as linhas de plastificação foram somente sobre o pilar P2 e P4, em faixas de 2 e 4 metros, respectivamente, conforme mostrado na Figura 13-3a.

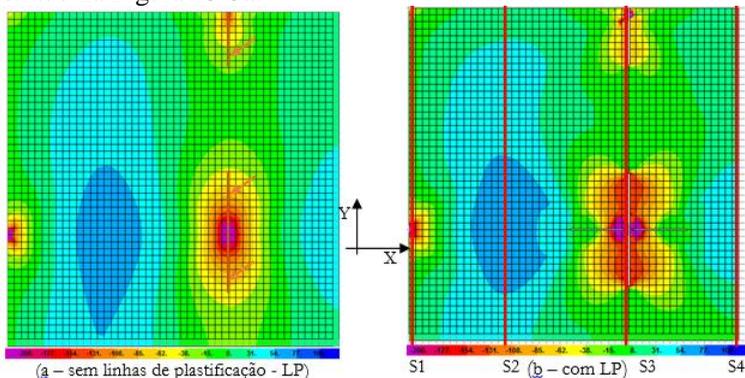


Figura 13-3 – Momentos Fletores – Direção X – Pilar como reação na laje

Na Figura 13-3b observa-se os momentos fletores na direção X após a inclusão das linhas de plastificação. Por conta das vigas de bordo, nota-se que a distribuição dos esforços é um pouco diferente se comparado ao Caso 2 (sem vigas e sem balanço), principalmente na Seção S1, S2 e S4 (S2 e S4 nas proximidades com a viga). Já na Seção S3, tem-se uma distribuição bem parecida, o que já era esperado para essa situação.

O Gráfico 13-1 apresenta os momentos fletores na laje para as seções S1, S2, S3 e S4, após a aplicação dos momentos de plastificação.



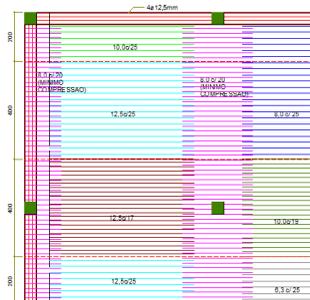
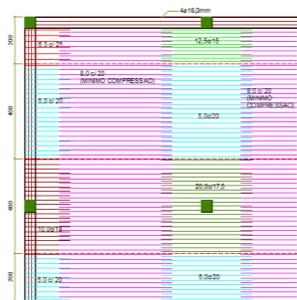
Gráfico 13-1 - Momentos fletores - Direção X – Caso 1 – Método B – Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 0

A Tabela 13-1 apresenta o dimensionamento das armaduras com base para as quatro seções em estudo mostradas no Gráfico 13-1, considerando faixas de 2 e 4 metros.

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| T1 | φ6,3c/25 | φ12,5c/15 | φ10,0c/25 | φ8,0c/25 |
| T2 | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ12,5c/25 | φ8,0c/25 |
| T3 | φ10,0c/19 | φ20,0c/17,5 | φ12,5c/17 | φ10,0c/19 |
| T4 | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ12,5c/25 | φ6,3c/25 |

Tabela 13-1 – Dimensionamento das armaduras – Caso 1 – Método B Pd15 – Etapa 0

Em termos de taxas de armaduras, ao comparar com a Etapa 0 do Caso 2 – Método B (Tabela 12-9), nota-se que no trecho 1 (proximidade com a viga), as áreas de aço são bem inferiores para as quatro seções, inclusive na S3 junto ao P2. Para o trecho 2, o Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanços) resultou em mais armadura nos positivos (S2 e S4). Para os trechos T3 e T4, mais afastados da viga de bordo, já se tem valores parecidos, com exceção do T3 da S1, por conta da viga de bordo. Nas regiões comprimidas utilizou-se armadura mínima de compressão (φ8,0c/20cm). A Figura 13-4 mostra o detalhamento das armaduras para as faixas de dimensionamento.

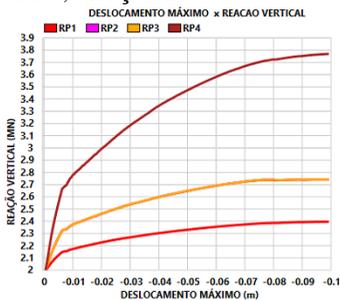


(Face superior)

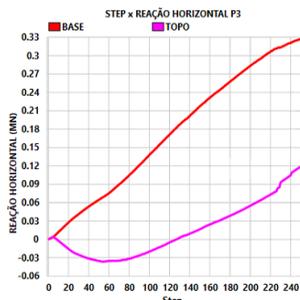
(Face inferior)

Figura 13-4 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 1 – Método B Pd15 – Etapa 0

O Gráfico 13-2a e Gráfico 13-2b apresentam as reações verticais nos pilares x deslocamento máximo bem como as reações horizontais no pilar P3, direção X.



(a)



(b)

Gráfico 13-2 – Reações verticais nos pilares e desloc. máximo na laje Método B – Etapa 0

O comportamento pré-ruptura mostra que houve o rompimento das armaduras negativas sobre o P3, ainda no *Step* 226 (deslocamento máximo igual a 7,71 cm). A partir daí, notou-se que a estrutura atingiu um patamar de escoamento para o P1, P2 e P3, mas com ganho de carga no pilar P4 (meio), atingindo o colapso e a carga última no mesmo *Step* 251, para um deslocamento de 9,92 cm. As reações horizontais no P3, direção X (Gráfico 13-2b), ratificam o rompimento da armadura negativa junto ao P3 no *Step* 226. Ou seja, mesmo havendo a viga de bordo, esse fenômeno sugere que se concentre as armaduras sobre o P3.

A Figura 13-5 apresenta as tensões nas armadura para a Direção X para a carga última.

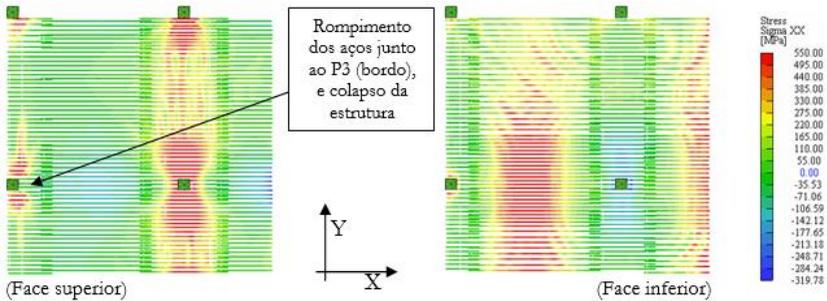


Figura 13-5 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 251 (última)
Método B – Etapa 0 - [MPa]

Conforme já mencionado, houve o rompimento precoce das barras sobre o pilar P3. Por conta disso, as armaduras negativas da Seção S3 entre o P2 e P4 não chegaram a atingir o escoamento. Com relação as malhas positivas, nota-se que as barras do pano central próximo as vigas não atingiram o escoamento, devido ao efeito favorável que das duas vigas de bordo.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP200} = \frac{1777 + 741 \times 2 + 397}{12 \times 12} = 25,4 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP200} = \frac{25,4}{1,27} = 20,0 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 13.1]}$$

Portanto, superior a carga de projeto, igual a 15 kN/m².

A Tabela 13-2 apresenta o momento fletor no pilar P3 como também na ligação Laje/P3 para o *Step* 226.

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P3 | 624 | 160 | 464 |

Tabela 13-2 – Momento pilar P3 e laje – *Step* 226 – Método B – Etapa 0

O momento de dimensionamento das armaduras negativas junto ao P3 foi igual a 153,6 kNm. O valor muito superior obtido pela análise não linear (igual a 464 kNm), é justificado pela presença da viga, que funciona como um elemento intermediário na transmissão de esforços da laje para o pilar.

13.1. DISTRIBUIÇÃO DAS ARMADURAS: ETAPA 1 e 3

O comportamento da laje do Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanços), da Etapa 1 e Etapa 3, em comparação com a Etapa 0, foi muito parecido. Em termos de carga última os valores foram idênticos para as três Etapas, mostrando que a presença da viga de bordo melhorou a

distribuição das tensões na ligação Laje/P3, e não condicionou a ruptura da estrutura nos bordos.

Os resultados estão apresentados no Apêndice do Capítulo 19.3.

13.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A CARGA ÚLTIMA

O Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanços) mostrou que a viga de bordo exerceu papel fundamental no comportamento da estrutura até o colapso. As concentrações das tensões na ligação laje/P3 foram amenizadas e melhor distribuídas. Os momentos elásticos mostraram que o comprimento das linhas de plastificação sobre o P1 e P3 são inferiores a 2 e 4 metros, respectivamente. Porém, por conta da viga de bordo, mesmo não se utilizando os menores valores sugeridos pelo modelo numérico, a carga última não teve forte influência. A Etapa 0 resultou em $P_d = 20 \text{ kN/m}^2$, o que corresponde a 33% acima da carga de projeto $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$. A carga última da Etapa 1 e Etapa 3 foram praticamente iguais à Etapa 0.

A influência da compressão axial na carga última devido ao efeito não linear do concreto foi igual a 14 %, maior do que Caso 2 (8%), pela presença da viga. Dessa forma, tem-se:

$$P_{STEP218} = 25,4 \times 0,86 = 21,8 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP218} = \frac{21,8}{1,27} = 17,2 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 13.2]}$$

Em comparação com o Caso 2 (sem vigas e sem balanço) – Método B (elástico), a maior carga última foi obtida na Etapa 1, igual a $P_d = 18,5 \text{ kN/m}^2$. Ao retirar 8%, resultou em $P_d = 16,85 \text{ kN/m}^2$ (EQ. 10.14). Portanto, praticamente iguais.

Pode-se afirmar que todos os três exemplos do Caso 1 são soluções em equilíbrio, respeitam o teorema estático, estando por consequência a favor da segurança.

14. ANÁLISE NÃO-LINEAR – CASO 3

O Caso 3 também se trata de uma particularidade do Caso 2 (sem vigas e sem balanço), por possuir balanços nas lajes com 2 metros de comprimento, sem vigas de periferia e com disposição regular dos pilares (Figura 14-1). A carga de projeto utilizada para o dimensionamento das armaduras continuou sendo igual a $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$.

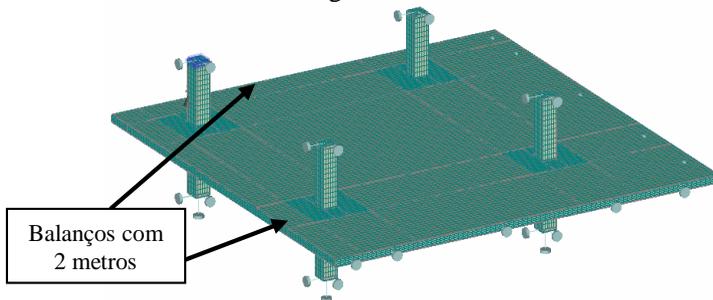


Figura 14-1 – Caso 3 – Regular sem vigas de bordo e com balanços

Será estudado somente o Método B, com os momentos fletores obtidos pelo modelo elástico analisado no *SAP* pelo MEF. Os estudos realizados por PEDROZO (2008), mostraram que, para o Caso 3 (com balanços e sem vigas), os momentos obtidos pelo MPE e pelo Modelo numérico foram parecidos. Por isso, não se justifica realizar a análise não-linear para os Métodos A1 e A2 (MPE).

Para os pilares, manteve-se o mesmo dimensionamento já realizado no Caso 2, sendo igual a $8 \phi 25 \text{ mm}$ para a armadura longitudinal e estribos $\phi 8,0 \text{ c}/15 \text{ cm}$. Também se mantiveram os estribos na laje, conforme definidos no Capítulo 10.2.

Para as lajes, a obtenção dos momentos de dimensionamento foi o mesmo procedimento já adotado no Método B (elástico) do Caso 2 (sem vigas e sem balanço) e do Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanço). Ou seja, a partir do modelo que considera o pilar como reação na laje (Figura 14-2a), calculam-se os momentos de plastificação sobre os pilares, aplica-os na laje (Figura 14-2b), reanalisa a estrutura e então se dimensiona as armaduras. Inicialmente serão utilizadas faixas com comprimentos iguais 4 metros. Ou seja, o mesmo valor que se obteria pelo MPE.

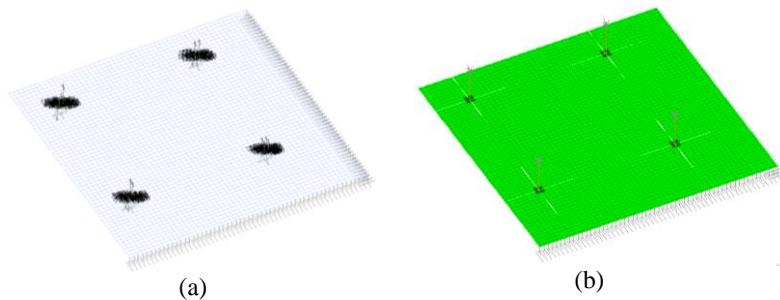


Figura 14-2 – Modelo elástico: (a) pilar como reação (b) com momentos de plastificação

Os momentos de plastificação calculados sobre os pilares P1, P2, P3 e P4, para uma faixa de 4 metros, estão mostrados na Tabela 14-1.

| MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO (kNm/m) – FAIXA 2m | | | | |
|--|----|--------|----|---------|
| PILARES | P1 | -70,94 | P2 | -101,67 |
| | P3 | -96,21 | P4 | -143,29 |

Tabela 14-1 – Momentos de plastificação – Método B – Faixa 2 m

A Figura 14-3 apresenta os momentos fletores na direção X para as situações apresentadas na Figura 14-2a e Figura 14-2b.

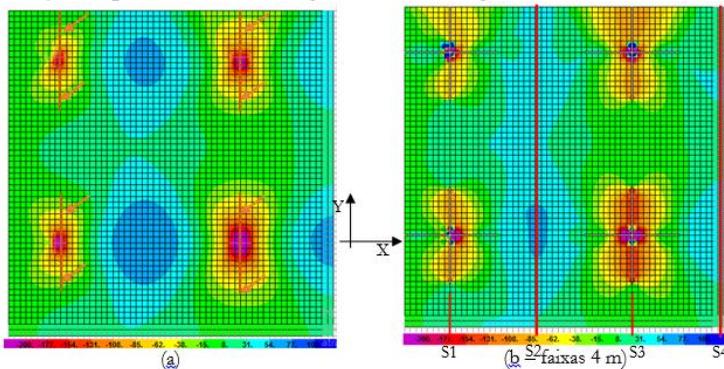
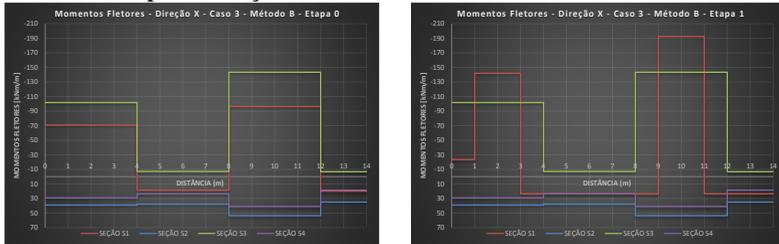


Figura 14-3 – Momentos Fletores – Direção X – (a) pilar como reação (b) após plastificação

A seqüência dos resultados apresentará a Etapa 0, com faixas de detalhamentos iguais 4 metros. Para a Etapa 1, as armaduras sobre os pilares P1 e P3 foram distribuídas em 2 metros, valor esse sugerido pelo modelo elástico (Figura 14-3a), que corresponde a “3h” a partir das faces

dos pilares. Já sobre o P2 e P4 manteve-se o valor de 2 e 4 metros, respectivamente.

O Gráfico 14-1 apresenta a distribuição dos momentos fletores na laje para a Etapa 0 e Etapa 1, seções S1, S2, S3 e S4, após a aplicação dos momentos de plastificação.



(a - Etapa 0)

(b - Etapa 1)

Gráfico 14-1 - Momentos fletores - Direção X – Caso 3 – Método B – Pd15 S1/S2/S3/S4

Apresenta-se a seguir o cálculo do momento sobre o P1 e P3 da Etapa 1, mantendo o $\mu_{RED,LIM} = 0,2$.

Para o pilar P1:

$$M_d = 283,8 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{283,8}{2 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,138 \quad [\text{EQ } 14.1]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA2} = 141,90 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20,0c/19$$

Para o pilar P3:

$$M_d = 384,8 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{384,8}{2,0 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,187 \quad [\text{EQ } 14.2]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA2,0} = 192,40 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20,0c/13$$

Tanto para o pilar P1 como para o pilar P3, o μ_{RED} foi inferior ao $\mu_{RED,LIM} = 0,2$ e, portanto, não houve redistribuição dos momentos para as armaduras inferiores da Seção S2.

A Tabela 14-2 e a Tabela 14-3 apresentam o dimensionamento das armaduras com base nas quatro seções em estudo mostradas na Figura 14-3b, para a Etapa 0 e 1, respectivamente.

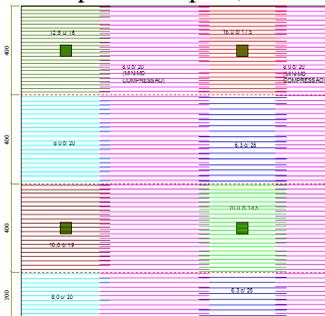
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| T1 | φ12,5c/16 | φ16,0c/17,5 | φ10,0c/19 | φ10,0c/25 |
| T2 | φ8,0c/20 | φ6,3c/25 | φ10,0c/19 | φ8,0c/20 |
| T3 | φ16,0c/19 | φ20,0c/18,5 | φ12,5c/21 | φ10,0c/17,5 |
| T4 | φ8,0c/20 | φ6,3c/25 | φ10,0c/21 | φ8,0c/25 |

Tabela 14-2 – Dimensionamento das armaduras – Caso 3 – Método B
Pd15 – Etapa 0

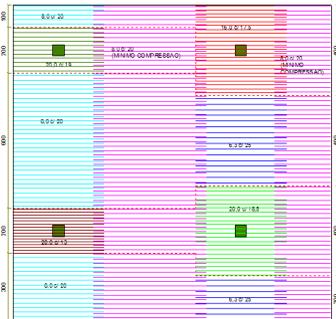
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| T1 | φ8,0c/20/φ20,0c/19 | φ16,0c/17,5 | φ10,0c/19 | φ10,0c/25 |
| T2 | φ8,0c/20 | φ6,3c/25 | φ10,0c/19 | φ8,0c/20 |
| T3 | φ20,0c/13 | φ20,0c/18,5 | φ12,5c/21 | φ10,0c/17,5 |
| T4 | φ8,0c/20 | φ6,3c/25 | φ10,0c/21 | φ8,0c/25 |

Tabela 14-3 – Dimensionamento das armaduras – Caso 3 – Método B
Pd15 – Etapa 1

A Figura 14-4 mostra o detalhamento das armaduras superiores para a Etapa 0 e Etapa 1, de acordo com a Tabela 14-2 e Tabela 14-3.



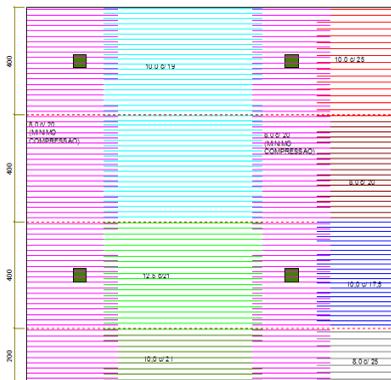
(Face superior – Etapa 0)



(Face superior – Etapa 1)

Figura 14-4 – Distribuição das armaduras superiores – Direção X - Caso 3
Método B – Pd15

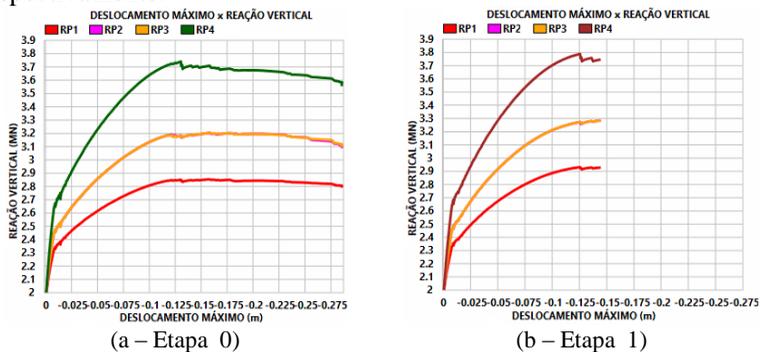
A Figura 14-5 mostra o detalhamento das armaduras inferiores para a Etapa 0 e Etapa 1, sendo que nesse caso são iguais, uma vez que não houve redistribuição de momentos na Etapa 1, mostrado na EQ. 12.1 e EQ. 12.2.



(Face superior – Etapa 0/Etapa 1)

Figura 14-5 – Distribuição das armaduras superiores – Direção X - Caso 3
Método B – Pd15

O Gráfico 14-2a e Gráfico 14-2b apresentam as reações verticais nos pilares e o deslocamento máximo para a Etapa 0 e Etapa 1, respectivamente.



(a – Etapa 0)

(b – Etapa 1)

Gráfico 14-2 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje
Método B

A Figura 14-6 apresenta as tensões nas armadura superiores para Etapa 0, Direção X, considerando a carga última e a carga de colapso.

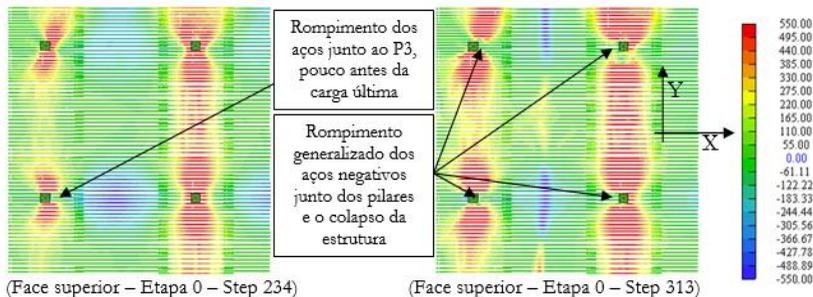


Figura 14-6 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última
Método B – [MPa]

Na Etapa 0, ocorre a ruptura das armaduras negativas sobre o pilar P3, um pouco antes de atingir a carga última (*Step 224* - Gráfico 14-2a), justificada pelo momento de plastificação menor sobre o P3 do que sobre o P4 (Gráfico 14-1a). Na sequência, tem-se o rompimento das barras negativas junto ao pilar central P4, onde se atingiu a carga última (*Step 234*). Logo após, houve uma redução da carga e uma grande capacidade de redistribuição de esforços, com rompimento generalizado das barras negativas junto aos quatro pilares, seguido do colapso da estrutura (ocorrida no *Step 313*).

A Figura 14-7 apresenta as tensões nas armadura superiores para Etapa 1, Direção X, considerando a carga última e a carga de colapso.

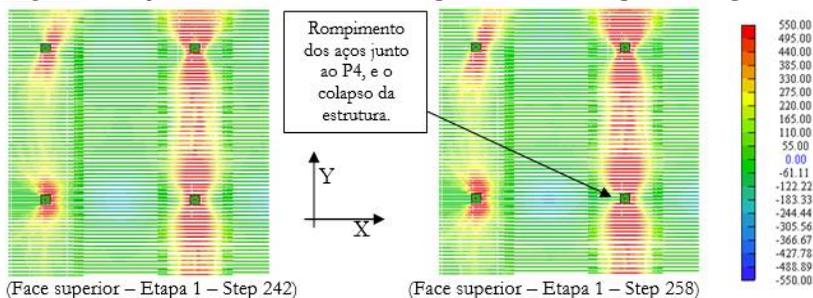


Figura 14-7 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última
Método B – [MPa]

Já na Etapa 1, a carga última ocorreu logo após o rompimento das barras negativas junto ao P4 (*Step 242* - Gráfico 14-2b), e não junto ao P3, como ocorreu na Etapa 0. O colapso da estrutura ocorreu logo após, no *Step 258*. Ao reduzir a faixa de distribuição das armaduras, o momento de plastificação sobre o P1 e P3 (Seção S1) aumentou em relação ao P4

(Gráfico 14-1b), o que justifica o comportamento mais frágil e a ruptura iniciar no P4.

A Figura 14-8 apresenta as tensões nas armaduras inferiores para Etapa 0 e 1, Direção X, considerando a carga última.

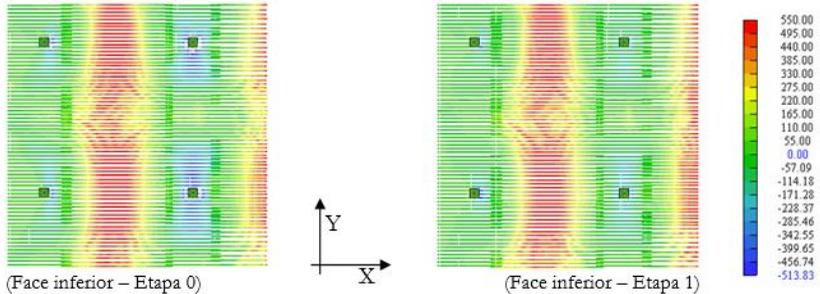


Figura 14-8 – Tensão nas armaduras inferiores – Direção X – Carga última
Método B – [MPa]

Nota-se que, em ambos as Etapas, praticamente todas as armaduras tracionadas atingem a tensão de escoamento.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

Etapa 0:

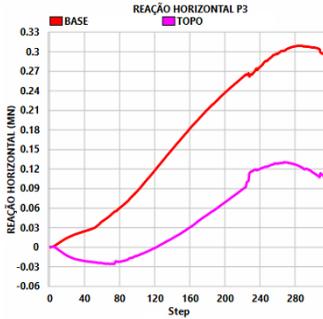
$$P_{STEP234} = \frac{1654 + 1125 \times 2 + 808}{14 \times 14} = 24,0 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP247} = \frac{24,0}{1,27} = 18,9 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 14.3]$$

Etapa 1:

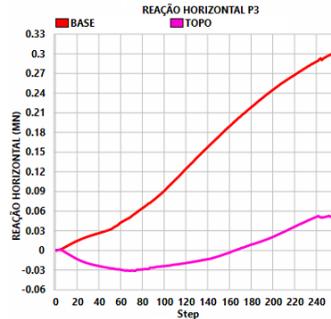
$$P_{STEP242} = \frac{1699 + 1210 \times 2 + 885}{14 \times 14} = 25,5 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP253} = \frac{25,5}{1,27} = 20,1 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 14.4]$$

A carga última na Etapa 1 aumentou 6% em relação a Etapa 0. Isso mostra que distribuir as armaduras em faixas com comprimento de acordo com o momentos elásticos da Etapa 0 (nesse caso, resultou em 3h a partir das faces dos pilares), melhora o rendimento da laje em termos de carga última, muito embora se tem uma redução da ductilidade. A diferença de carga última entre a Etapa 0 e Etapa 1 não foi tão expressiva, justificada pela presença dos balanços, que melhora a distribuição das tensões na ligação Laje/P3 e Laje/P1.

O Gráfico 14-3 mostra as reações horizontais no pilar P3, direção X, para a Etapa 0 e 1.



(a) Etapa 0



(b) Etapa 1

Gráfico 14-3 – Reações horizontais P3 – Caso 3 - Método B

Para a Etapa 0, a descontinuidade no Gráfico 14-3a já logo no *Step* 224 ratifica o rompimento das barras negativas junto ao P3 um pouco antes de atingir a carga última. Já na Etapa 1, não há descontinuidades, o que mostra não haver ruptura das armaduras.

A Tabela 14-4 apresenta o momento fletor no pilar P3 como também na ligação Laje/P3 para o *Step* 224 para a Etapa 0 e *Step* 242 para a Etapa 1.

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>P3 (Etapa 0)</i> | 530 | 186 | 344 |
| <i>P3 (Etapa 1)</i> | 586 | 102 | 484 |

Tabela 14-4 – Momentos pilares P1, P3 e laje – Método B – Etapa 1/3

O momento elástico de dimensionamento das armaduras na laje sobre o P3 foi igual a 384,83 kNm. Ao comparar com os resultados da análise não linear, na Etapa 0 o valor quase foi atingido, justificado pela presença dos balanços.

O Gráfico 14-4 mostra as reações horizontais no pilar P1, direção X, para a Etapa 0 e 1.

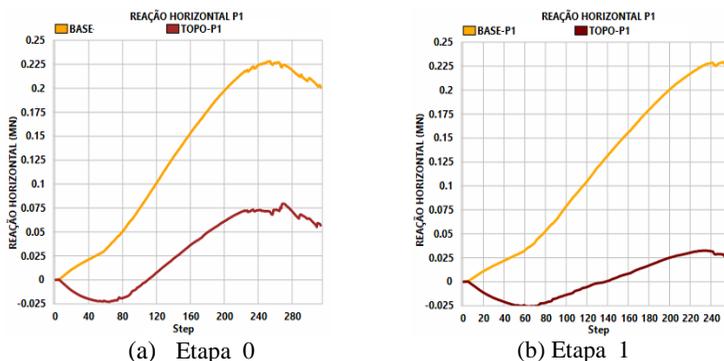


Gráfico 14-4 – Reações horizontais P1 – Caso 3 - Método B

No Gráfico 14-4a, a descontinuidade e consequentemente o rompimento das barras negativas junto ao P1, ocorreu no *Step* 271, após atingir a carga última (*Step* 234). Já na Etapa 1 não se tem esse comportamento e, portanto, não há rompimento das armaduras. As reações horizontais no P1 ratificam o comportamento da estrutura até o colapso para ambas as etapas explicado até aqui.

A Tabela 14-5 apresenta o momento fletor no pilar P1 como também na ligação Laje/P3 para o *Step* 254 (Etapa 0) e *Step* 242 (Etapa 1).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>P1 (Etapa 0)</i> | 456 | 144 | 312 |
| <i>P1 (Etapa 1)</i> | 458 | 66 | 392 |

Tabela 14-5 – Momentos pilares P1, P3 e laje – Método B – Etapa 1/3

O momento elástico de dimensionamento das armaduras na laje sobre o P3 foi igual a 283,77 kNm. Ao comparar com os resultados da análise não linear, em ambas as Etapas os valores foram atingidos. Não somente os balanços permitiram que isso ocorresse (inclusive na Etapa 0), mas também mostra que a ligação mais importante para a estrutura se dá sobre o P3 (bordo) e não sobre o P1 (canto).

14.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE A CARGA ÚLTIMA

Assim como ocorreu no Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanço), a inclusão dos balanços do Caso 3 também exerceu papel fundamental no comportamento da estrutura até o colapso. Houve uma

melhor distribuição das tensões na ligação Laje/P1 e também Laje/P3, ao comparar com o Caso 2 (sem vigas e sem balanço). Com isso, a maneira de distribuir as armaduras negativas sobre o P1 e/ou P3 (em faixas de 4 metros ou concentradas em 2 metros), deixou de exercer papel fundamental na segurança global da estrutura. Porém, em relação ao comportamento pré ruptura, houve uma redução expressiva da ductilidade podendo, a critério do projetista, aumentar o comprimento das faixas sobre o P1 e P3 ou inclusive utilizar o escalonamento.

Em resposta a isso, tem-se que a carga última da análise não linear, Etapa 0 e Etapa 1, são praticamente iguais, com diferença de 6% apenas. Para a Etapa 0, o valor é igual a 19,9 kN/m², o que corresponde a 33% acima da carga de projeto $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$.

A influência da compressão axial na carga última devido ao efeito não linear do concreto foi igual a 11 %, maior do que Caso 2 (8%). Dessa forma, tem-se:

$$P_{STEP218} = 24,0 \times 0,89 = 21,4 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP218} = \frac{21,4}{1,27} = 16,82 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 14.5]$$

Em comparação com o Caso 2 (sem vigas e sem balanço) – Método B (elástico), a maior carga última foi obtida na Etapa 1, igual a $P_d = 18,5 \text{ kN/m}^2$. Ao retirar 8%, resultou em $P_d = 16,85 \text{ kN/m}^2$ (EQ. 10.14). Portanto, resultou em carga última praticamente igual a Etapa 1 (otimizada) do Caso 2, tendo como justificativa a presença dos balanços.

Pode-se afirmar que todos os dois exemplos do Caso 3 (com balanços e sem vigas) são soluções em equilíbrio, respeitam o Teorema Estático, estando a favor da segurança.

15. ANÁLISE NÃO LINEAR – CASO 4

O Caso 4, ao contrário dos demais casos, é referente a um pano de laje, com disposição irregular dos pilares, muito comum em projetos de lajes lisas, mostrado na Figura 15-1. A dimensões estão mostradas em planta, a espessura da laje se manteve igual a 25 cm, assim como as características dos materiais e a carga aplicada ($P_d = 15 \text{ kN/m}^2$). Por conveniência da análise, modelou-se $\frac{1}{4}$ do painel de lajes.

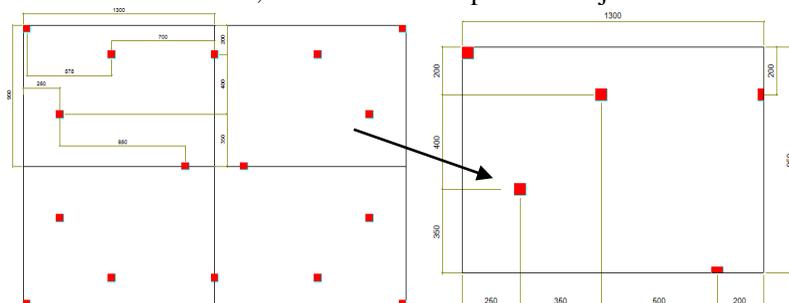


Figura 15-1 – Planta baixa com a disposição dos pilares

Por se tratar de um painel irregular, o MPE não poderá ser aplicado, uma vez que a NBR 6118:2014, item 14.7.8, só permite o uso do MPE em lajes simétricas, com disposição regular dos pilares. Além disso, ainda sobre esse assunto, o trabalho de FARIA (2004), resumido no Capítulo 4, apresentou resultados ruins ao utilizar o MPE em lajes assimétricas. Sendo assim, será empregado o método numérico desenvolvido nesta Tese (Capítulo 9), modelando no *software* SAP 2000, $\frac{1}{4}$ do painel, aplicando as condições de contorno nos bordos simétricos (Figura 15-2).

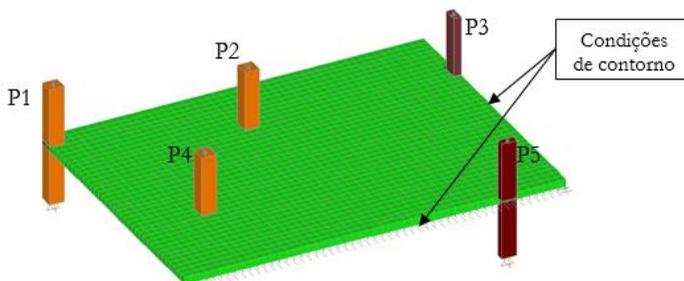


Figura 15-2 – Modelo numérico 3D – SAP 2000

A Figura 15-3 mostra a deformada da estrutura. O objetivo é mostrar, ainda que em termos qualitativos, o comportamento do painel de lajes.

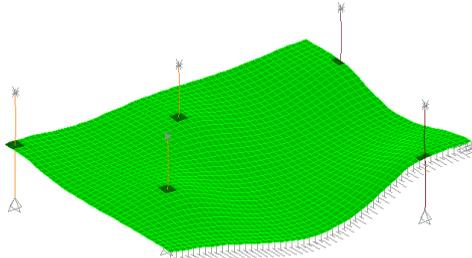


Figura 15-3 – Deformada da estrutura

A Figura 15-4 apresenta os momentos fletores nos pilares, tanto para a direção X como para a direção Y.

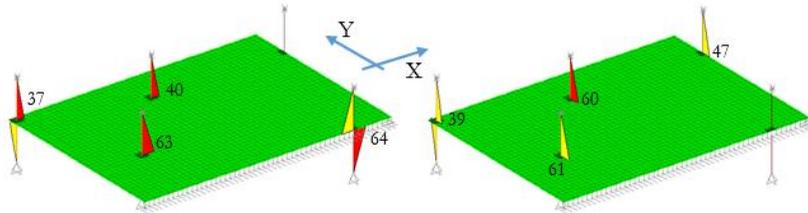
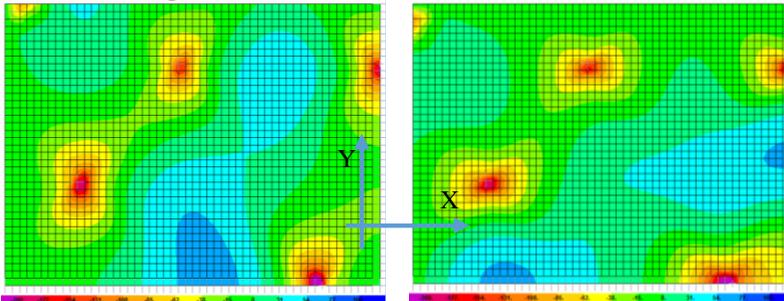


Figura 15-4 – Momentos fletores pilares – Caso 4 – [kNm]

A Figura 15-5 apresenta os momentos fletores na direção X e na direção Y, após representar os pilares como reação na laje, eliminando as singularidades. Assim como adotado nos casos com disposição regular dos pilares, o momento de torção foi desprezado da análise sendo que, neste caso, teve pouca influência nos resultados finais.



(M11 – Direção X)

(M22 – Direção Y)

Figura 15-5 – Momentos fletores – Pilar como Reação - Caso 4
Direção X e Y – [kNm/m]

Os momentos de plastificação sobre os pilares foram calculados como sendo a média dos momentos elásticos dentro do comprimento da faixa, que por sua vez foi estimada com base na distribuição dos momentos elásticos no *SAP* (critério definido no Capítulo 8), utilizando o critério de 30% do momento máximo negativo sobre os pilares. Sendo assim, o limite aproximado adotado para o comprimento das linhas de plastificação é até a escala de cor amarela da Figura 15-5.

Portanto, tem-se comprimentos de faixa específicos, e que pode ser diferentes na direção X e Y para o mesmo pilar. A Tabela 15-1 apresenta os comprimentos das linhas de plastificação, bem como os valores dos momentos para cada pilar, considerando malha de 25 cm.

| MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO/COMPRImentos DAS LINHAS DE PLASTIFICAÇÃO | | | | | |
|---|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 |
| MPLAST - X (kNm) | -38,08 kNm | -93,26 kNm | -117,45 kNm | -103,06 kNm | -134,98 kNm |
| Comprimento | 1,0 m | 2,0 m | 2,0 m | 3,0 m | 1,5 m |
| MPLAST - Y (kNm) | -41,95 kNm | -103,66 kNm | -122,40 kNm | -106,05 kNm | -127,36 kNm |
| Comprimento | 1,0 m | 2,0 m | 1,0 m | 2,5 m | 3,0 m |

Tabela 15-1 – Comprimento linhas de plastificação – Caso 4

A Figura 15-6 apresenta os momentos fletores após a inclusão dos momentos de plastificação da Tabela 15-1, e a redistribuição dos esforços.

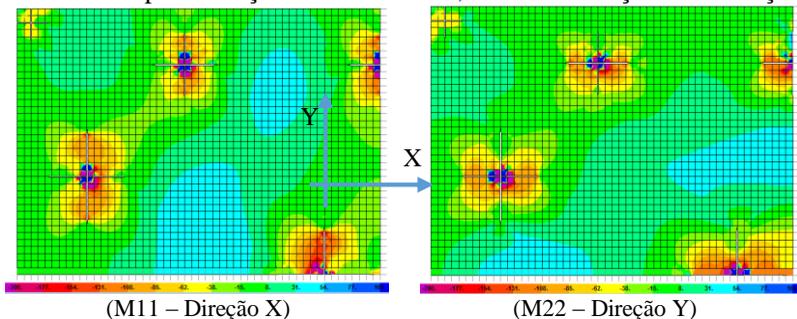
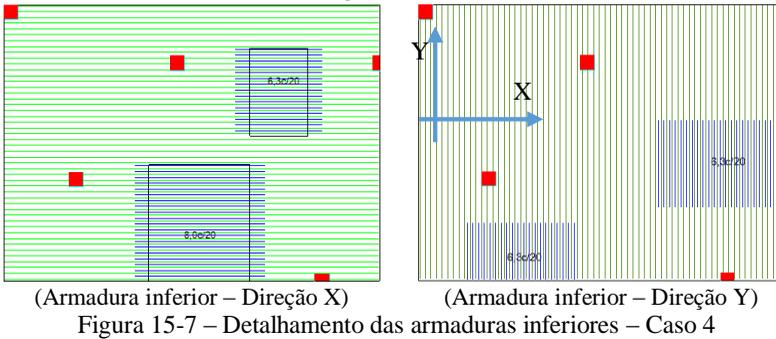


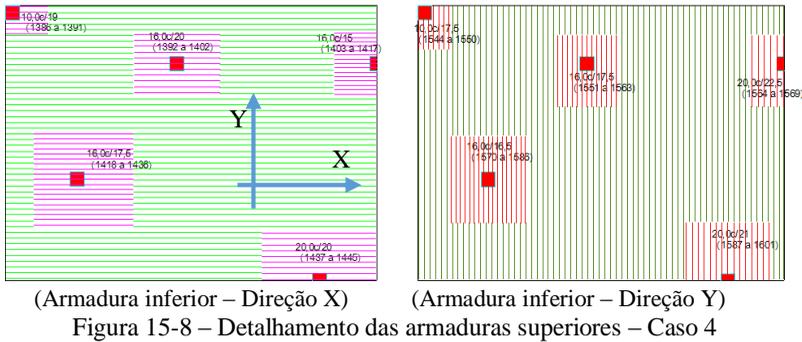
Figura 15-6 – Momentos fletores – Linhas de plastificação - Caso 4
Direção X e Y – [kNm/m]

O cálculo das armaduras foi baseado no diagrama de momentos fletores apresentado na Figura 15-6. Seja para a armadura inferior como para a armadura superior, adicionou-se uma malha base igual a $\phi 8,0c/20$, que representa a armadura mínima nas zonas tracionadas, seguida de reforços nos locais onde o momento resulte em armadura superior.

A Figura 15-7 apresenta o detalhamento das armaduras inferiores, na direção X e Y. Pode-se notar a presença de reforços intercalados com a malha base, em ambas as direções.



A Figura 15-8 apresenta o detalhamento das armaduras superiores, na direção X e Y. Nesse caso, sobre os pilares, adicionou-se a armadura negativa necessária e, fora das regiões das linhas de plastificação, adicionou-se a malha base.



Apresenta-se a seguir os resultados da análise não linear, realizado no *software* ATENA 3D. A modelagem seguiu os mesmos conceitos apresentados no Capítulo 10.1, conforme apresentado na Figura 15-9.

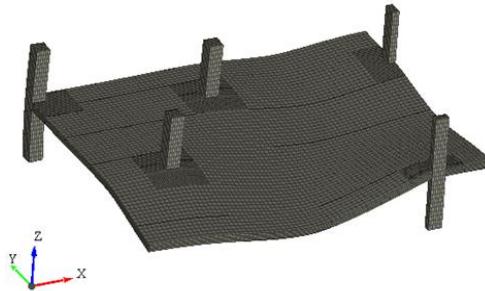
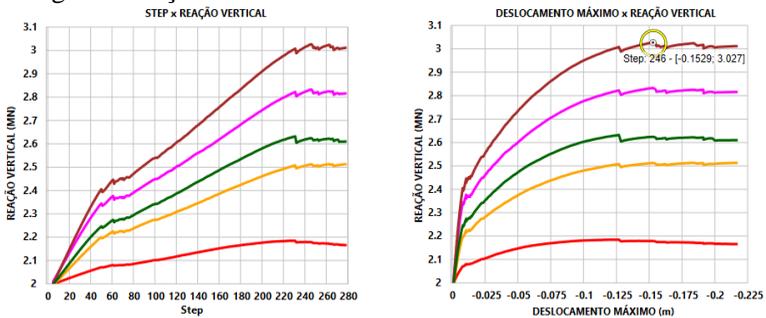


Figura 15-9 – Análise não linear – Software ATENA 3D

O Gráfico 15-1 apresenta a evolução da reação vertical ao longo de cada incremento de carga, como também dos deslocamentos máximos ao longo das reações verticais.



A primeira discontinuidade no gráfico ocorreu no *Step* 231, muito embora a estrutura continuou a suportar mais carga, até o *Step* 246, que foi onde ocorreu a carga última. A partir daí, nota-se um trecho acentuado de carga praticamente constante (com ligeira redução), até atingir a ruptura no *Step* 279. No *Step* 246, o deslocamento foi igual a 15,29 cm, já no *Step* final foi igual a 21,75 cm. Ou seja, houve um patamar expressivo de ductilidade.

A Figura 15-10 apresenta as tensões nas armaduras inferiores para o *Step* 246, onde ocorreu a carga última.

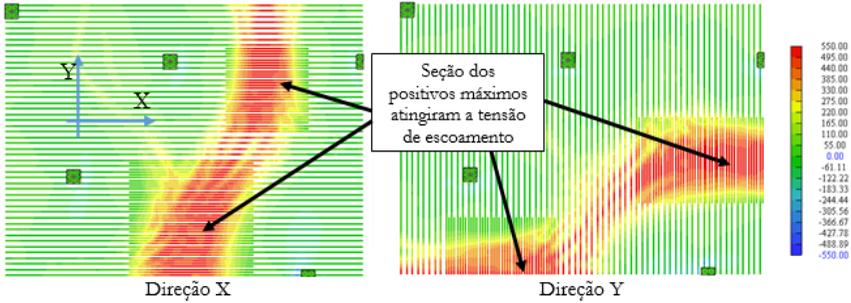


Figura 15-10 – Tensões nas armaduras inferiores – Caso 4 - *Step* 246 – [MPa]

Nota-se que as armaduras estão na tensão de escoamento nas regiões de momento positivo máximo, com algumas regiões um pouco abaixo de 550 MPa.

A Figura 15-11 apresenta as tensões nas armaduras superiores para o *Step* 246, onde ocorreu a carga última.

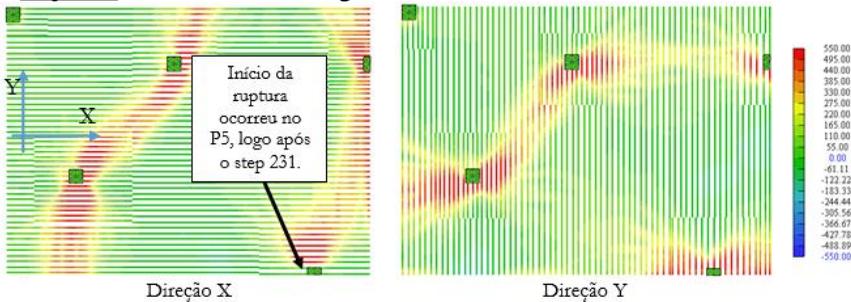


Figura 15-11 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - *Step* 246

O início da ruptura ocorreu nas armaduras negativas sobre o pilar P5, direção X, logo após o *Step* 231. Mesmo assim, a estrutura suportou mais carga, atingindo a carga última no *Step* 246.

A Figura 15-12 apresenta as tensões nas armaduras superiores para o *Step* 263, que se trata de um incremento de carregamento intermediário entre a carga última e a carga final.

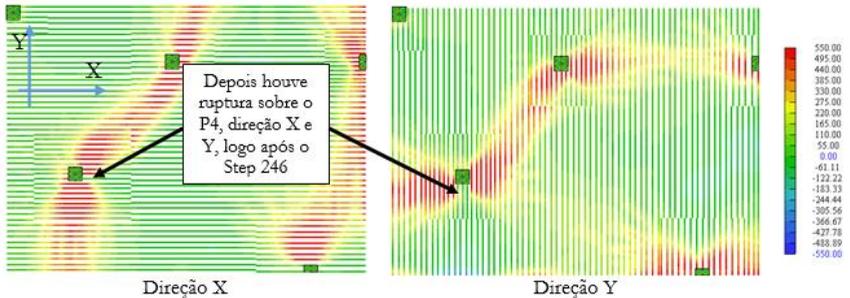


Figura 15-12 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - *Step 263*

Até o *Step 263*, houve também o rompimento das armaduras negativas sobre o P4, ocorrido logo após o *Step 246*. Nesse caso, apenas o pilar P5 suportou mais carga (até o *Step 263*), sendo que para os demais pilares notou-se um patamar praticamente constante.

A Figura 15-13 apresenta as tensões nas armaduras superiores para o *Step 279* (final).

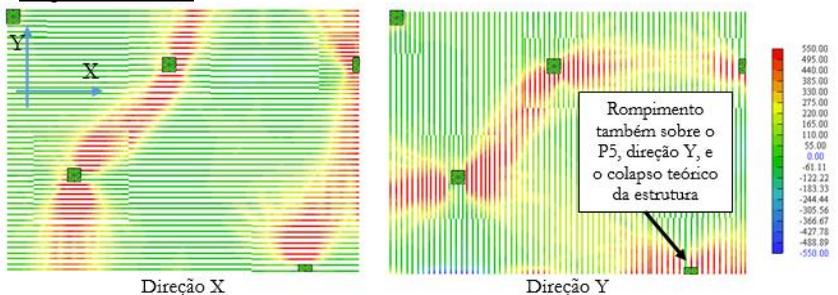


Figura 15-13 – Tensões nas armaduras superiores – Caso 4 - *Step 279* (Final)

Após o rompimento da barra negativa sobre o P5 na direção Y, a estrutura atingiu o colapso teórico, para um carregamento total ligeiramente inferior ao obtido para a carga última, com uma redução mais acentuada logo após o *Step 263*.

A Figura 15-14 apresenta as tensões nas armaduras inferiores para o *Step 279* (final).

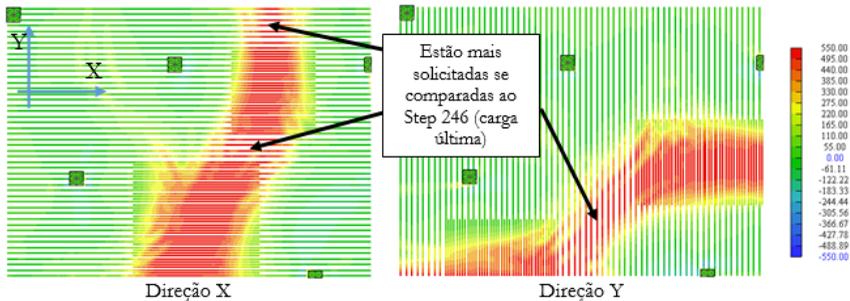


Figura 15-14 – Tensões nas armaduras inferiores – Caso 4 - *Step* 279 (Final)

Pode-se notar que do *Step* 246, onde se obteve a carga última (Figura 15-10), para o *Step* 279 (final), a estrutura procurou suporte nas armaduras inferiores, uma vez que se encontram menos solicitadas. Porém, o nível de carregamento foi menor se comparado ao *Step* 246.

A carga última ocorrida no *Step* 246 está calculada a seguir.

$$P_{d-STEP246} = \frac{1010+811+605+503+170}{1,27 \times (13 \times 9,5)} = 19,76 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 15.1]$$

O valor obtido para a carga última foi superior a carga de projeto em aproximadamente 31%.

Se levar em consideração o efeito favorável da influência da compressão axial devido ao efeito não linear do concreto, nesse caso igual a 10 %, o valor reduz para:

$$P_{d-STEP246} = \frac{(1010+811+605+503+170) \times 0,9}{1,27 \times (13 \times 9,5)} = 17,78 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 15.2]$$

O comparativo com o Caso 2 (sem vigas e sem balanço) do Método B (elástico) resultou em $P_{d-NL} = 16,85 \text{ kN/m}^2$ (EQ. 10.14).

Na zonas de máxima tração, seja nos positivos ou nos negativos, tem-se a armadura efetiva aproximadamente igual a armadura calculada. Em alguns trechos, o fato de utilizar a malha base igual a $\phi 8,0/20$, fez com que a relação $A_{s,ef}/A_{s,calc}$ fosse um pouco superior a 1, o que justifica o valor da carga última do Caso 4 (irregular) ser um pouco superior ao obtido no Caso 2. Mesmo assim, tem-se cerca de 18% acima da carga de projeto, sendo esse acréscimo de carga justificado pelo alto grau de hiperestacidade que as lajes possuem, que favorece ao aparecimento dos mecanismos de torção associado aos mecanismos de flexão.

O estudo a seguir apresenta a distribuição das tensões e deformações, em seções chave do pano de lajes, considerando a carga última, ocorrida para o Step 246.

Na Figura 15-15 está indicada a seção dos máximos positivos.

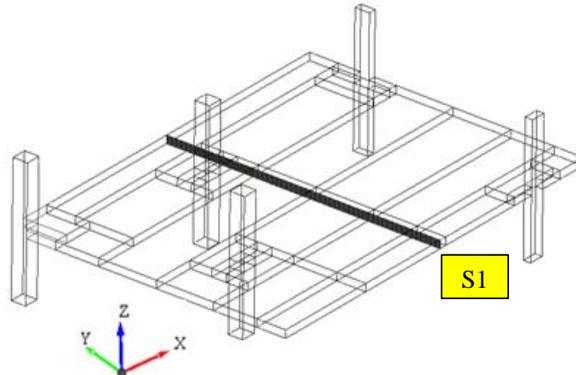


Figura 15-15 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção Y

A Figura 15-16 apresenta as tensões e deformações para a seção S1.

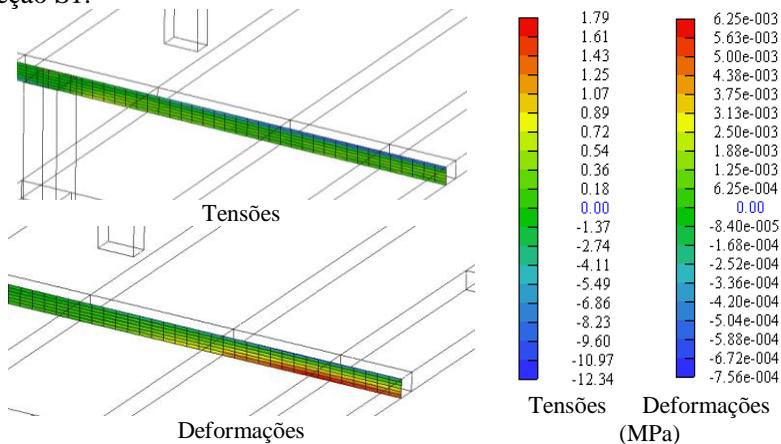


Figura 15-16 – Caso 4 – Seção 1 – Máximos positivos – Direção X

Pode-se notar que na carga última as tensões de compressão no concreto estão abaixo da tensão última, igual a 21,25 MPa. Como consequência, as deformações de compressão ainda se encontram no ramo ascendente do diagrama tensão deformação apresentado na Figura 10-2. Já para o aço, as deformações são bem inferiores ao limite de 50 por mil, muito embora com valores no escoamento (acima de 2,62 por mil).

Com isso, ratifica-se o comentário já feito de que, da carga última até o colapso, a estrutura buscou suporte nas armaduras positivas, aumentando a ductilidade no comportamento pré-ruptura.

A Figura 15-17 apresenta as seções realizada no painel de laje para o estudo das tensões na direção X, junto aos pilares, considerando a carga última, ocorrida para o Step 246.

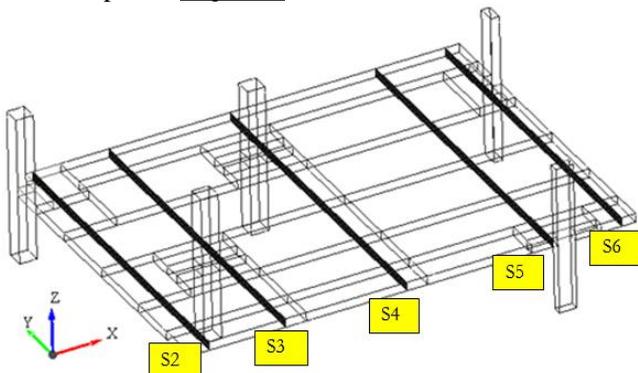


Figura 15-17 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção X

A Figura 15-18 apresenta as tensões e deformações para a seção S2, junto ao pilar P1.

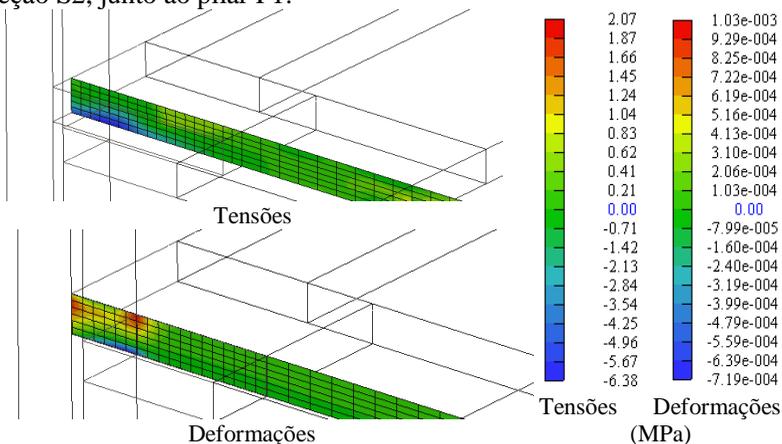


Figura 15-18 – Caso 4 - Seção S2 – Pilar P1 – Direção X

A Figura 15-19 apresenta as tensões e deformações para a seção S3, junto ao pilar P4.

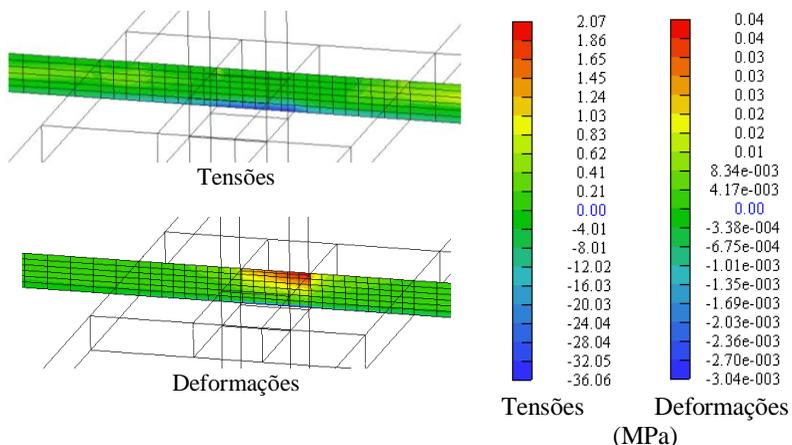


Figura 15-19 – Caso 4 - Seção S3 – Pilar P4 – Direção X

A Figura 15-20 apresenta as tensões e deformações para a seção S4, junto ao pilar P2.

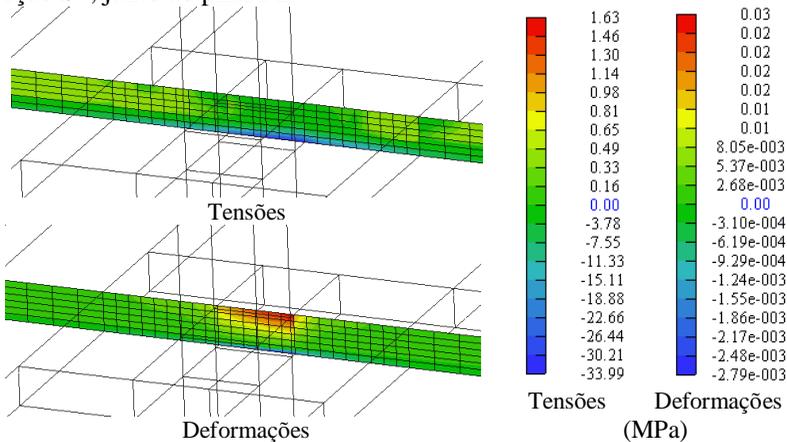


Figura 15-20 – Caso 4 - Seção S4 – Pilar P2 – Direção X

A Figura 15-21 apresenta as tensões e deformações para a seção S5, junto ao pilar P5.

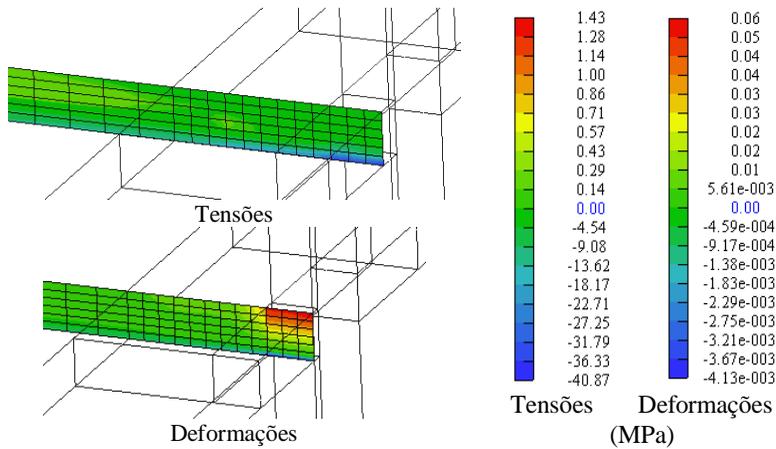


Figura 15-21 – Caso 4 - Seção S5 – Pilar P5 – Direção X

A Figura 15-22 apresenta as tensões e deformações para a seção S6, junto ao pilar P3.

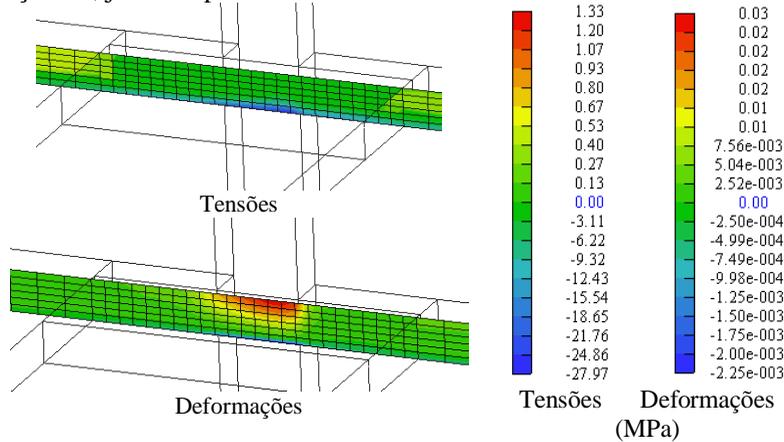


Figura 15-22 – Caso 4 - Seção S6 – Pilar P3 – Direção X

O estudo das tensões sobre os pilares na direção X veio ratificar que a ruptura da estrutura se iniciou pelo pilar P5, direção X, uma vez que as deformações no aço na seção S5 extrapolaram o limite de 50 por mil (Capítulo 3.7.1). Para as demais seções, os valores são inferiores a 50 por mil, considerando a carga última. As tensões de tração no concreto estão abaixo do limite estipulado no Capítulo 3.7.1. Já as tensões de compressão seguem o critério da ruptura multiaxial e apresentam valores acima da tensão uniaxial também estipulada no Capítulo 3.7.1. Sobre as

deformações no concreto, apenas a Seção S2 (menos solicitada, junto ao P1), não se encontra no ramo descendente do diagrama tensão x deformação (Figura 15-21), uma vez que não ultrassou o limite $\varepsilon_{cp} = -2,02 \times 10^{-3}$ (EQ 13.16). A seção S5 (mais solicitada), possuem as maiores deformações.

A Figura 15-23 apresenta as seções realizada no painel de laje para o estudo das tensões na direção Y, junto aos pilares, considerando a carga última, ocorrida para o Step 246.

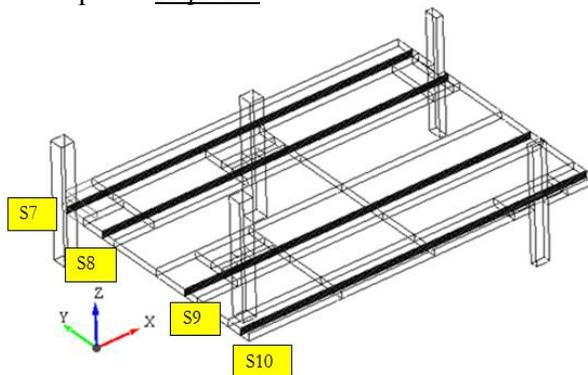


Figura 15-23 – Seções na laje para o estudo das tensões na direção Y

A Figura 15-24 apresenta as tensões e deformações para a seção S7, junto ao pilar P1.

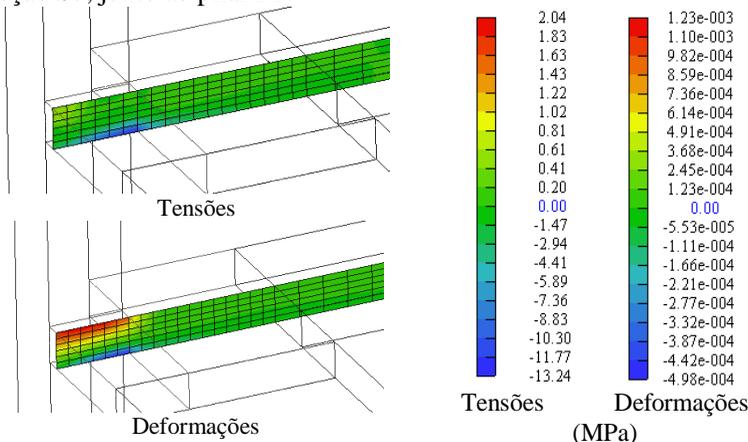


Figura 15-24 – Caso 4 - Seção S7 – Pilar P1 – Direção Y

A Figura 15-25 apresenta as tensões e deformações para a seção S8, junto ao pilar P2.

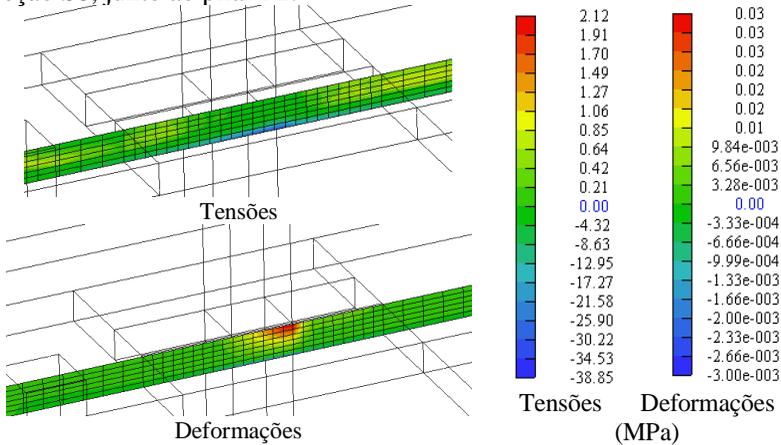


Figura 15-25 – Caso 4 - Seção S8 – Pilar P2 – Direção Y

A Figura 15-26 apresenta as tensões e deformações para a seção S8, junto ao pilar P3.

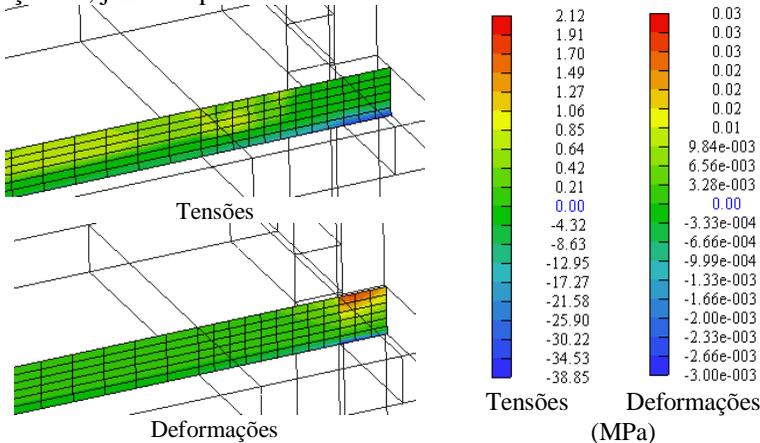


Figura 15-26 – Caso 4 - Seção S8 – Pilar P3 – Direção Y

A Figura 15-27 apresenta as tensões e deformações para a seção S9, junto ao pilar P4.

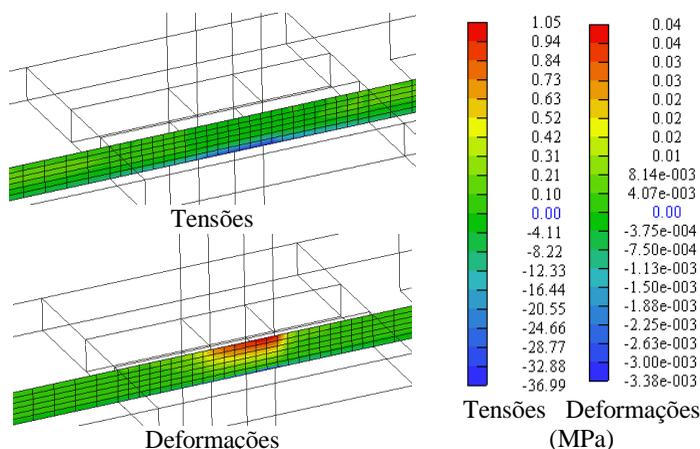


Figura 15-27 – Caso 4 - Seção S9 – Pilar P4 – Direção Y

A Figura 15-28 apresenta as tensões e deformações para a seção S10, junto ao pilar P5.

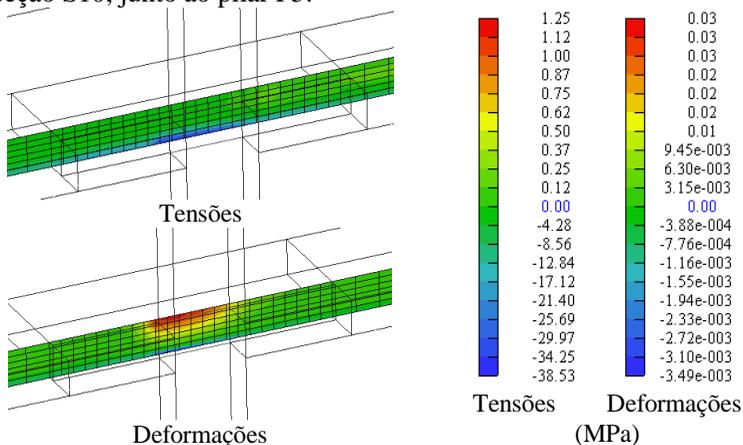


Figura 15-28 – Caso 4 - Seção S10 – Pilar P5 – Direção Y

As tensões e deformações na direção Y são inferiores aos valores apresentados na direção X, sem nenhum rompimento das armaduras tão pouco do concreto.

Em termos de distribuição das tensões e/ou deformações, o comportamento é muito parecido ao apresentado para a Direção X.

Pelos valores apresentados ao longo do detalhamento das armaduras negativas, pode-se notar que o critério estipulado para determinar o comprimento das faixas (ver Capítulo 9.2) está adequado.

Mesmo as barras negativas mais afastados dos pilares atingiram a tensão de escoamento, além de permitirem que as armadura inferiores também entrassem em escoamento. Como consequência, tem-se que a carga última não linear está acima da carga de projeto, com boa ductilidade até a ruptura, respeitando o Teorema Estático (a favor da segurança).

16. CONCLUSÕES

O desenvolvimento de trabalhos com a finalidade de modelar numericamente estruturas em concreto armado, notadamente as lajes lisas (sem vigas), tem sido tema constante de pesquisas recentes, e um desafio e tanto principalmente pela complexidade em analisar as ligações de lajes diretamente apoiada em pilares.

O Capítulo 5 mostrou algumas tentativas para modelar elasticamente a complexa ligação laje/pilar. Tentou-se reduzir a inércia dos elementos *PLATES* dentro das faixas de plastificação e também modelar o pilar como elemento Sólido. Além disso, considerou-se o concreto armado como elemento elastoplástico, por meio de molas não lineares. Todos eles não apresentaram resultados satisfatórios, e evidenciaram as dificuldades de se modelar linhas de plastificação nas análises elásticas.

O Capítulo 6 mostrou o modelo numérico inicial, com os pilares modelados como barra para apoio direto nas lajes, havendo, portanto, as singularidades. Já o Capítulo 7 apresentou duas alternativas para representar o pilar em análises elásticas de lajes lisas, como forma de eliminar as singularidades, utilizando o *software SAP 2000*, também estudadas em PUEL (2009). A primeira modelou o pilar como reação na laje (análogo a um carregamento de baixo para cima), na área de projeção da seção transversal do pilar (Situação 1). A segunda modelou trechos rígidos na seção transversal do pilar (Situação 2). Os resultados, comparados com a situação inicial (singularidades), mostraram que na Situação 1 obteve-se um diagrama de momentos fletores com um bom comportamento, praticamente sem distorções para todas as seções (incluindo as extremidades) e independente da malha. Já a Situação 2 apresentou concentrações de tensões dentro e no entorno dos trechos rígidos, mas ao afastar-se da região dos pilares o comportamento foi análogo à Situação 1.

Tanto a Situação inicial (com singularidades) como a Situação 1 permitiram o cálculo do comprimento das Linhas de Plastificação (LPs) como também encontrar os Momentos de Plastificação (chamado de *Mplast*), ambos a partir da visualização dos momentos elásticos na placa. Nos casos em que se tem pilares de bordo, sem vigas e sem a continuidade da laje (Caso 2), não se recomenda a situação inicial nessas regiões (seções de extremidades), devido as distorções e elevadas concentrações de tensões sobre os pilares. Mais uma vez vale comentar que a Situação 1 resultou em diagramas de momentos fletores com um bom

comportamento, aplicáveis a qualquer disposição arquitetônica, simétricas ou assimétricas, indicada para o cálculo das LPs e do Mplast.

O Capítulo 9.2 apresentou um estudo sobre valores adequados a adotar para o comprimento das Linhas de Plastificação. Inicialmente os valores foram arbitrados, com o objetivo de estimar comprimentos máximos, mínimos e intermediários (Tabela 9-2). Na sequência, calculou-se o comprimento das LPs a partir do modelo elástico, seguindo o critério sugerido, que consiste em limitar o comprimento em faixas afastadas aproximadamente 30% do momento máximo negativo sobre os pilares. A estimativa do comprimento das LPs mostrou que valores muito pequenos para as LPs (caso dos valores mínimos estudados na Tabela 9-2), resultaram em momentos de plastificação muito elevados, quase de igual magnitude ao máximo valor obtido pela análise elástica, quando se modela o pilar como reação na laje. Portanto, não são indicados, uma vez que não trazem praticamente nenhum nível de plastificação, tornando-se antieconômicos. Já o modelo elástico resultou em valores próximos dos obtidos pelo MPE (análogos aos valores intermediários da Tabela 9-2), e permitiu diferenciar o comprimento das faixas entre pilares centrais e pilares de bordo ou canto. Por isso, recomenda-se fortemente o uso deste critério para o cálculo das LPs e também do Mplast. Esses, por sua vez, foram obtidos pela média dos momentos dentro das LPs.

Não se utilizou a Situação 2 para o cálculo das LPs e do Mplast, pois se desprezam os momentos dentro dos trechos rígidos. No entanto, permitiu de forma simples e direta (pela facilidade de modelagem em comparação a Situação 1), a inclusão dos Mplast na região dos pilares, a partir das Linhas de Plastificação (LPs), transformando a situação inicial em análises elásticas com redistribuição. Trata-se de uma metodologia inovadora, cujo procedimento foi descrito no Capítulo 5.3, aplicável a quaisquer disposições arquitetônicas, principalmente as assimétricas, com ou sem pilares de bordo, não abrangidas pelo MPE.

O comparativo dessa nova abordagem numérica e elástica que inclui a redistribuição, com o Método dos Pórticos Equivalentes (MPE), prescrito na NBR 6118:2014, item 14.7.8, mostrou diferenças no cálculo do momento de plastificação na seção de extremidade (maiores no MPE). Além disso, o critério do MPE não é claro sobre as larguras das faixas serem fixas, independente se forem pilares intermediários ou de bordo, e também não se aplicam as estruturas assimétricas.

As análises não lineares permitiram verificar o comportamento da estrutura, desde o início do carregamento até a ruptura. Nesta Tese, utilizou-se o *software* ATENA 3D, como forma de validar as análises elásticas com redistribuição, após a inclusão dos momentos de

plastificação. Os resultados foram expressos em termos de carga última de colapso à flexão. O Estado Limite de Serviço (ELS) bem como a carga última de punção não foram avaliados.

O Caso 2, modelo regular e sem vigas de bordo, possibilitou trazer ao meio técnico a importância da ligação da laje diretamente aos pilares de bordo. A ausência da continuidade da laje mostrou uma particularidade nessas regiões, que resultou em faixas menores de distribuição das armaduras em comparação aos pilares intermediários. O modelo elástico, analisado pelo MEF, a partir da distribuição inicial dos momentos e com o critério já mencionado para o cálculo das LPs e do Mplast, representou muito bem essa situação, apresentando ainda na Etapa inicial, carga última não linear superior à carga de projeto. Notou-se plastificação na maioria das armaduras principais sobre os pilares intermediários e principalmente de extremidade, e também nos positivos. Além disso, as tensões no concreto nas zonas de plastificação dos momentos negativos se estenderam por faixas com comprimentos parecidos aos estimados na análise elástica, ratificando o critério adotado e aqui sugerido.

Ainda sobre o Caso 2, o MPE precisou de ajustes no comprimento das faixas dos pilares de bordo e de canto (chamado de Etapa 1), pois as armaduras mais afastadas não atingiram a tensão de escoamento, além das tensões no concreto se concentrarem em uma região muito menor daquela sugerida pelo MPE. Sendo assim, o critério consistiu em concentrar as barras de aço sobre o P1 e P3, em larguras de faixas com comprimentos iguais as “2h” (duas vezes a espessura da laje), a partir das faces dos pilares (uma redução de 4 metros para 1,5 metros para o exemplo estudado). Ainda, limitou-se o momento dentro da nova faixa reduzida, a partir de um momento reduzido igual a $M_{red,lim} = 0,2$ (sugerido nesta Tese para as tradicionais cargas de projeto $P_d = 15 \text{ kN/m}^2$). Com isso, é possível haver redistribuição do momento excedente negativo para a seção dos positivos. Somente após esse balanço nos esforços, encontrou-se carga de colapso não linear superior a carga de projeto, com um ganho expressivo em comparação a Etapa inicial.

O Caso 1 (regular, com vigas de bordo e sem balanços) e o Caso 3 (regular, com balanços), analisados somente pelo modelo elástico, mostrou claramente uma melhor distribuição das tensões nos pilares de extremidade e de canto, tanto nas armaduras como no concreto. Dessa forma, concentrar ou não as barras de aço negativas da laje sobre os pilares dos bordos deixou de ser essencial para a segurança global da estrutura, mas teve influência direta na ductilidade.

O Caso 4, com disposição irregular dos pilares, também foi analisado somente pelo modelo elástico. Já na Etapa inicial, aplicando o

critério sugerido nesta Tese para o cálculo das LPs e do Mplast, chegou-se a comprimentos diferentes para as faixas de detalhamento das armaduras sobre os pilares, em função da distribuição dos momentos elásticos, tanto na direção X como Y, conforme a posição do pilar na arquitetura. Na sequência, realizou-se a análise não linear para ratificar o detalhamento obtido a partir da metodologia proposta no Capítulo 9.3. Os resultados foram excelentes, com carga última não linear superior em 25% a carga de projeto, estando as armaduras principais, tanto positivas como negativas, na tensão de escoamento. Além disso, as tensões no concreto sobre os pilares se estenderam por larguras condizentes com o cálculo do comprimento das linhas de plastificação, não necessitando de qualquer tipo de ajuste no comprimento das faixas.

Para os pilares intermediários, que possuem a continuidade da laje, as faixas de distribuição inicial das armaduras, ora pelo modelo elástico ora pelo MPE, deram bons resultados para todos os quatro casos estudados, inclusive quando ocorrem as singularidades. Mesmo assim, realizou-se uma alteração no detalhamento na seção dos pilares centrais, propondo um diagrama de momentos fletores escalonado, concentrando 70% das armaduras na faixa interna e o restante (30%) na faixa externa. Em termos de carga última, o ganho foi pequeno. Porém se percebeu que as tensões no concreto dentro das faixas de distribuição das linhas de plastificação ficaram mais uniformes, com uma ruptura mais dúctil.

Um fato curioso foi o comportamento das reações horizontais nos pilares (e também os momento fletores) nas análises não lineares. Após a fissuração da laje, a linha neutra da seção se desloca para cima (seções de momento positivo) ou para baixo (seções de momento negativo), havendo sempre uma extensão positiva ao nível do eixo horizontal da laje. Dessa forma, a partir de um certo estágio de fissuração da laje, os momentos nos pilares superiores mudam de sinal, e a face externa do pilar superior fica tracionada ao invés da face interna (Figura 12-17), fato que não ocorre nas análises lineares. Caso o modelo fosse feito com vários andares simultaneamente esse efeito seria diferente.

Os valores da carga de colapso encontradas pelas análises não lineares foram em médias 25% superiores a carga de projeto, mesmo adotando armaduras nas regiões tracionadas praticamente iguais as armaduras calculadas (não se utilizou armadura mínima). Desse valor, aproximadamente 8% foi devido a contribuição favorável da compressão axial causada pelo deslocamento horizontal após a fissuração. O restante (17%), é justificado pelo comportamento biaxial da laje na ruptura, com efeitos de torção e com grandes redistribuição de esforços. Uma constatação direta disso são os momentos encontrados na análise não

linear na ligação da laje com o pilar de extremidade (P3 - Caso 2 - sem vigas e sem balanço), superiores ao valor utilizado para o dimensionamento das armaduras na fase de projeto.

As análises não lineares realizadas neste trabalho mostraram que são demoradas e de uma complexidade enorme para serem validadas e compreendidas, mesmo em modelos simples. Além disso, é necessário uma boa logística para guardar os arquivos pesados que são gerados. Em contrapartida, permitiram um entendimento qualitativo mais amplo do comportamento dessas lajes, principalmente nos cantos e extremidades, que trouxeram benefícios para esta pesquisa. Por isso, são bem indicadas para trabalhos de investigação, uma vez que, desde que bem calibrado o modelo não linear, podem dispensar a execução de ensaios experimentais para se ter confiança nos valores obtidos. Porém, para aplicação em projeto, não são indicadas pelas razões já aqui mencionadas.

As armaduras calculadas pelo MPE são soluções em equilíbrio, mas podem ser contrárias a segurança em algumas situações, quando se tem pilares de bordo ou canto. Nesses casos, sugere-se a revisão nos códigos, especialmente a NBR 6118:2014, para incluir o critério que limita a largura para distribuição das armaduras como também o momento na ligação (adoção do $\mu_{red,lim}$), quando não se tem a continuidade da laje.

A abordagem inovadora proposta nesta Tese, que trata da modelagem numérica e elástica com redistribuição é relativamente simples de ser implementada. Além de resultar em taxas de armaduras globais inferiores às obtidas pelo MPE, conduz a momentos fletores bem equilibrados em termos dos negativos e positivos. Permite, ainda na fase de projeto, definir um momento de plastificação e também o comprimento no qual será inserido. Após a reanálise da estrutura, são dimensionadas também as armaduras nas seções dos positivos. Chega-se, então, na solução final de detalhamento da laje, com adequada segurança global e boa ductilidade antes da ruptura, logo na Etapa inicial, tanto para estruturas simétricas ou assimétricas.

Apesar de ter sido realizado quatro casos, o procedimento sugerido nesta Tese, que consistiu em incluir linhas e momentos de plastificação nas análises numéricas lineares, são indicados para projeto. O modelo elástico com redistribuição mostrou que o resultado em termos de carga última são soluções econômicas, em equilíbrio e que respeitam o Teorema Estático. São, portanto, a favor da segurança.

Pelo exposto, pode-se concluir que a Tese atingiu os principais objetivos, com grande potencial para trabalhos futuros, como será abordado no Capítulo 17.

17. TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento deste trabalho, que trata da introdução de linhas de plastificação em análises lineares de lajes lisas (análises lineares com redistribuição), permite dar continuidade aos estudos. Por conta disso, sugerem-se alguns temas de interesse, a citar:

- Estudo das rotações plásticas, após a inclusão das linhas e dos momentos de plastificação;
- Externar a metodologia em aplicar os momentos de plastificação em faixas pré-definidas a partir do diagrama de momentos fletores elásticos, para o Processo por Analogia de Grelha, avaliando as dificuldades em termos de modelagem e também os resultados;
- Aprimorar os estudos do escalonamento do diagrama de momento fletor sobre os pilares. Ou seja, adotar duas ou mais faixas de detalhamento, com vários percentuais de distribuição;
- Realizar, por meio das análises não lineares, um estudo paramétrico nas propriedades dos materiais, modificando tensão de tração e compressão no concreto, módulo de elasticidade, tipos de aços, etc, mantendo o mesmo modelo numérico elástico com a introdução das linhas de plastificação;
- Desenvolver estudos acerca dos Critério de Segurança Global apresentados no *Model Code* 2010, de modo a prever coeficientes de segurança específicos para cada tipo de ruptura. A ideia de um coeficiente global pode conduzir a valores conservativos em determinadas situações;
- Avaliar o efeito da redistribuição dos esforços de flexão (a partir da introdução das linhas de plastificação), no funcionamento da laje. Avaliar se aumenta ou reduz a carga de colapso à punção e também avaliar o comportamento das tensões dentro do cone de punção;
- Estudar os efeitos das análises lineares com redistribuição (após a inclusão das linhas de plastificação) no Estado Limite de Utilização (ELS). A inclusão do *Tension Stiffening* nas análises não lineares tem influência direta na obtenção da deformada da estrutura e também na fissuração.

18. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

18.1. BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. NBR 6118*. Rio de Janeiro, RJ: 2014.
- ATENA Program Documentation (2016). Cervenka Consulting, Prague, Czech Republic.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. (ACI 318-08). - *Building Code Requirments for Structural Concrete and Commentary*. Michigan: Farmington Hills, 2002.
- ARAÚJO, José Milton de. *Curso de Concreto Armado*. Rio Grande: Dunas, 2003.
- BAKER & HEYMAN. *Plastic Design of Frames*. Vol. 1, 2. Cambridge University Press. London, 1969.
- BURATO N. A. *Análise de Flexão de Placas de Concreto Armado com Linearidade do Material do Material Utilizando um Método Iterativo Direto Aproximado*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1993.
- BS 1997. BS 8110:1997: *Structural use of concrete. Part 1: Code of Practice for Design and Construction*. London: British Standards Institution.
- CAMARA, J.; VINAGRE, J.; PINTO, A., *Metodologia para a verificação da segurança em análises não-lineares*. Encontro Nacional Betão Estrutural. Pp. 373-383, Porto, 1994.
- CEB/FIP Model Code, 1990.

- CERVENKA, V. *Global safety formats in fib Model Code 2010 for design of concrete structures*. 11^o International Probabilistic Workshop, Brno, 2013.
- Computers and Structures, Inc. *SAP 2000 – Integrated Software for Structural Analysis and Design*. Version 11. USA, 2008.
- CHOI K. K. & KIM J.C., *Nonlinear model simulating load-deformation relationship of flat plate structures*. Technical Paper. Engineering Structures. South Korea, 2014.
- COELHO, Jano d' Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha*. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2000.
- DUARTE, Heraldo. *Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado*. Dissertação de mestrado. São Carlos, 1998.
- EMERICK, A. A. *Projeto e Execução de Lajes Protendidas*. Brasília. Interciência Ltda., 2003.
- EUROCODE 2 2004. BS EN 1992-1-1:2004. *Design of concrete structures. Part 1-1: General – Rules and rules for buildings*. Brussels: European Committee for Standardisation.
- FARIA D., BISCAIA H., LÚCIO V. & RAMOS A., *Punching of reinforced concrete slabs – numerical and experimental analysis and comparison with codes*. In: Joint IABSE-fib conference, Dubrovnik, Croatia; May, 2010
- FARIA, Elves L., *Projeto de lajes planas protendidas via método dos elementos finitos e pórticos equivalentes*, Dissertação de Mestrado. UFMG. Belo Horizonte, 2004.
- FIGUEIREDO FILHO, J.R.. *Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução*. São Carlos, 1989, 272p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1989.
- FILHO, Jasson Rodrigues de Figueiredo. *Sistemas Estruturais de Lajes sem Vigas: Subsídios para o Projeto e Execução*. Tese de Doutorado; São Carlos, 1989.

- GERE, J.M.; WEAVER JR., W. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.
- HAMBLY, E. C. *Bridge deck behavior*. London, Chapman and Hall, 1976.
- HENNRICHS, Carlos A., *Estudo sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado*, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.
- HILLERBORG, A.; “Strip method of design”; London; William & Sons; 225p. (A Wiewpoint publication); 1975.
- JAWAD, H.H. *Theory and design of plate and shell structures*. Chapman & Hall, Inc. London, 1994.
- JONES, A & MORRISON, J. *Flat slab design: Past, present and future*. Structures & Buildings, 158(SB2):133–140, 2005.
- LA ROVERE, Henriette Lebre. *Notas de Aula “Elementos finitos” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.
- LA ROVERE, Henriette Lebre. *Notas de Aula “Análise Matricial de Estruturas” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.
- LORRIGIO, Daniel D., *Dimensionamento elástico e plástico de lajes*. Artigos técnicos do site www.altoqi.com.br, 2002.
- LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Estruturas em regime elasto-plástico” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.
- LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Placas e lajes em concreto armado” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.

- LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Análise Matricial e Modelagem de Estruturas” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil.* UFSC. Florianópolis, 2000.
- MARTINELLI, M., *Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos.* Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003. 149 páginas.
- MAMEDE N. F. S., RAMOS A. P. & FARIA D. M. V. *Experimental and parametric 3D nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement.* Technical Paper. Engineering Structures. Lisboa, 2012.
- MENEZES, Ivan Fábio Mota de., *Análise limite de lajes em concreto armado.* Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro, 1990.
- MURRAY K.A. & CLELAND D.J. & GILBERT S. *The Development of a non-linear numerical model to simulate the behaviour of reinforced concrete flat slabs in the vicinity of edge columns.* Technical Paper. Construction and Building Materials. Belfast, 2005.
- NOGUEIRA, João Pedro Matias, *Modelação Numérica do Punçamento de Lajes Fungiformes Reforçadas com Parafusos.* Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2011.
- PARK H.G. & CHOI K. K., *Improved Strength Model for Interior Flat Plate-Column Connections Subject to Unbalanced Moment.* Technical Paper. Journal of Structural Engineering. Korea, Michigan, 2006.
- PARK H.G. & CHOI K. K., *Strength of exterior slab-column connections subjected to unbalanced moments.* Technical Paper. Engineering Structures. Korea, 2007.
- PEDROZO, David Guillermo Esteche. *Análise Crítica dos Critérios de Projeto de Lajes Protendidas.* Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2008.

- PUEL, André. *Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado – Análise integrada laje x pilar*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009. 152 páginas.
- RABELO, Fernando T., *Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado*, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2010.
- ROMBACH, G A. *Finite element design of concrete structures*. London: Thomas Telford, 2004.
- SANS 1989. SANS 10160:1989. *The general procedures and loadings to be adopted in the design of buildings*. Pretoria: South African Bureau of Standards, p 123.
- SKORPEN S. A. and DEKKER N. W. *The application and interpretation of liner finite element analysis results in the design and detailing of hogging moment regions in reinforced concrete flat slabs*. Technical Paper. Journal of the South African Institution of Civil Engineering. South African, 2014.
- LANGENDONCK, Telemaco V., Charneiras Plásticas em Lajes de Edifícios. Revista Técnica das Construções, ABCP, 1966.
- XIAO, R. Y. & CHIN C.S. *Flat Slab and Slab-Column Connection: Nonlinear Finite Element Modelling and Punching Shear Capacity Design Criterion*. Technical Paper. Advances in Structural Engineering, 2007.
- ZHANG Y. X., BRADFORD M. A. & GILBERT R. I. *A layered cylindrical quadrilateral shell element for non-linear analysis of RC plate structures*. Technical Paper. Advances in Engineering Software, 2007.
- WANG W. & TENG S. *Finite-Element Analysis of Reinforced Concrete Flat Plate Structures by Layered Shell Elements*. Technical Paper. Journal of Structural Engineering. China, 2008.

18.2. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- CALLADINE, C. R. *Engineering Plasticity*. Pergamon Press. London, 1969.
- COELHO, Jano d'Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Influência do parâmetro de rigidez*. Artigos técnicos do site www.altoqi.com.br, 2002.
- COELHO, Jano d'Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Influência da flexibilidade dos apoios*. Artigos técnicos do site www.altoqi.com.br, 2002.
- COOK, Robert D; MALKUS, David S.; PLESHA, Michael E. *Concepts and applications of finite elements analysis*. Hamilton Printing Company. Third Edition. United States of America, 1989.
- EDER M., VOLLUM R., ELGHAZOULI A., ABDEL-FATTAH T., *Thee-dimensional numerical analysis of punching failure*. Modelling and experimental assessment of punching shear in flat slabs with shearheads. Eng Struct, 2010. Department of Structural Engineering, Stockholm, Sweden, 2000.
- GLORIA, Rodrigo Luz. *Estudo do dimensionamento de vigas na ligação com pilares em projetos de estruturas de concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- MENEGAZZO, C.; CAMARA, J.; LORIGGIO, D., *Verificação da segurança ao esforço transversal em lajes alveolares pré-esforçadas*. Encontro Nacional Betão Estrutural. LNEC, Lisboa, 2010.
- HALLGREN M. *Punching shear capacity of reinforced high strength concrete slabs*. PhD thesis, Bulletin 23. Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, 1996.
- HILLERBORG, A; MODEER, M.; PETERSSON, P. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, Vol. 6, p. 773-782, 1976.

- HORNE, M. R. *Plastic Theory of Structures*. Pergamon Press. Londo, 1979.
- INACIO, R. A., *Análise numérica do punçamento em lajes fungiformes*. Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa, 2010.
- LEONHARDT, F. *Construções de concreto*. Volume 3. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.
- MENETREY P. *Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures*. PhD thesis, nº 1279. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 177p., 1994.
- MONT'ALVERNE, Alexandre Miranda. *Ferramentas computacionais para o projeto de lajes de concreto armado*. Tese de doutorado. Rio de Janeiro, 1998.
- MONTOYA, J.; MESENGUER, A. G.; CABRE, F. M. *Hormigon Armado*. Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1973.
- MIER, J. G. M Van, *Multiaxial strain-softening of concrete, Part I: fracture, Materials and Structures*, RILEM, Vol. 19, No.111, 1986.
- OLIVEIRA, Richard Sarzi. *Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física – modelagem e metodologia de aplicação a projetos*. Tese de doutorado. São Carlos, 2001.
- OZBOLT J., VOCKE H., ELIGEHAUSEN R., *Thee-dimensional numerical analysis of punching failure*. In: Proceedings of the international workshop on punching shear capacity of RC slabs. Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, Sweden, 2000.
- PARK, R. e GAMBLE, W.L. *Reinforced concrete slabs* – Editora John Wiley & Sons – New York, 1980.
- PIERIN, Igor. *Estudo de estabilidade de perfis pultrudados de materiais PRFV*. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2005.

- REAL, Mauro de Vasconcellos. *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado. UFRGS. Porto alegre, 1990.
- SLIZARD, Rudolph. *Theory and analysis of plates*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- STRAMANDINOLI, Juliana S. B. *Contribuição à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha*. Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.
- TIMOSHENKO, S.P. e Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.
- MIER, J. G. M Van, *Multiaxial Strain-softening of Concrete, Part I: fracture*, Materials and Structures, RILEM, Vol. 19, No.111, 1986.

19. APÊNDICES

19.1. CASO 2 – MÉTODO A2 – Pd=15kN/m²

19.1.1. Etapa 0

Na Etapa 0 do Caso 2 (sem vigas e sem balanço), Método A2, as armaduras foram calculadas pelo MPE, porém na proporção 60% / 40 % para as armaduras negativas e também 60% / 40 % para as armaduras positivas (Capítulo 10.2). O Gráfico 19-1 apresenta os momentos fletores para as seções em estudo.

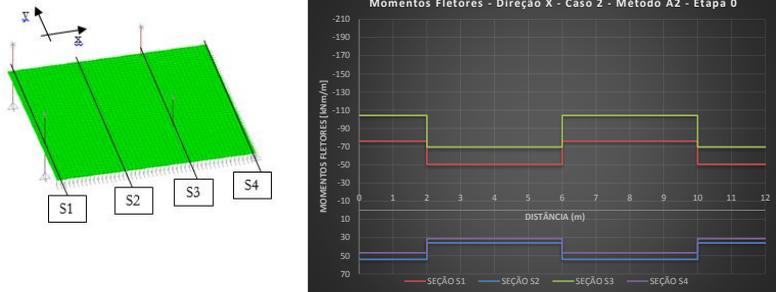


Gráfico 19-1 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2 - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 0

As armaduras calculadas ao ELU, no Estádio III, estão apresentadas na Tabela 19-1.

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| FI | φ16,0c/24 | φ16,0c/17 | φ12,5c/21 | φ10,0c/16,5 |
| FE | φ12,5c/22.5 | φ12,5c/16 | φ10,0c/20 | φ10,0c/24 |

Tabela 19-1 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A2 Pd15 – Etapa 0

A disposição das armaduras é análoga à disposição mostrada na Figura 12-1, com os valores apresentados na Tabela 19-1. O Gráfico 19-2 apresenta as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 para cada incremento de carga (*Step*) e deslocamento máximo, respectivamente.

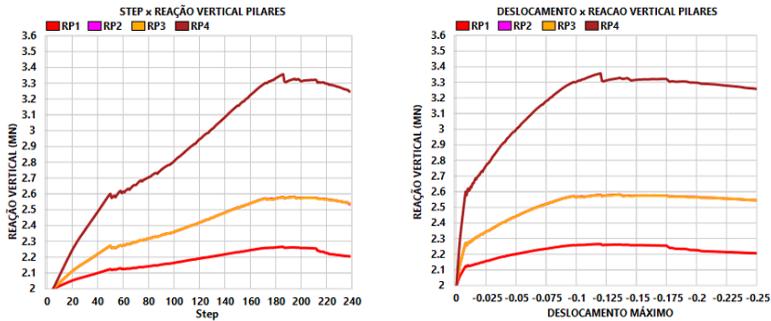


Gráfico 19-2 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje
Método A2– Etapa 0

Em comparação com os resultados da Etapa 0 do Método A1 (Gráfico 12-5), o Método A2 mostrou uma ruptura precoce das barras negativas junto ao P3, ocorrida logo no *Step* 172. Mesmo assim, a estrutura ainda teve um aumento de carga, alcançando o valor último no *Step* 186. Após isso, as armaduras negativas junto ao P4 (central) também romperam e então a estrutura teve redução da carga, até perder o equilíbrio no *Step* 239. Porém, do *Step* 186 até o *Step* 239, houve uma grande capacidade de redistribuição dos esforços, sendo que a carga última ocorreu para $\Delta_{\max} = 12,03\text{cm}$ enquanto o colapso ocorreu para $\Delta_{\max} = 25,3\text{ cm}$, com carga praticamente constante.

A Figura 19-1 apresenta as tensões nas armadura para a Direção X para a carga última.

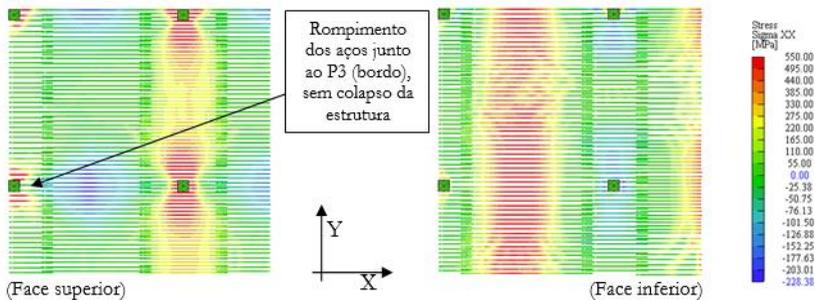


Figura 19-1 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 186 (final) – [MPa]

Conforme já mencionado, o colapso teórico veio a ocorrer somente no *Step* 239, com rompimento generalizado dos aços negativos junto aos pilares para o pano lateral (Figura 19-12).

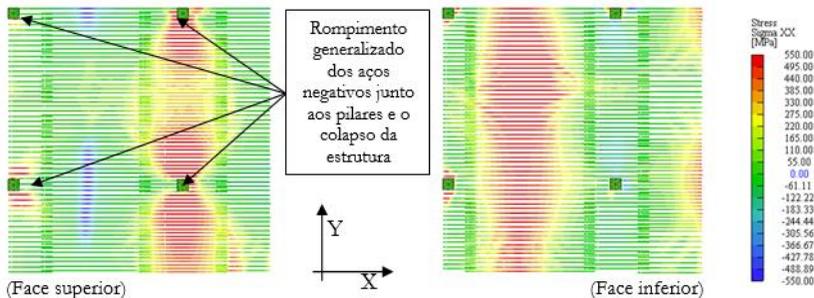


Figura 19-2 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* 239 (final) – [MPa]

A carga última calculada está mostrada a seguir.

$$P_{STEP186} = \frac{1358 + 580 \times 2 + 266}{12 \times 12} = 19,3 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S186} = \frac{19,3}{1,27} = 15,2 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.1]}$$

Verifica-se neste caso uma carga última ligeiramente superior à de projeto (que é igual a 15 kN/m²). Analogamente ao ocorrido no Método A – Etapa 0, identifica-se aqui o problema com relação a largura da faixa junto ao pilar P3 e P1 (Figura 12-2), e o fato das armaduras positivas do pano central estarem com tensão bem abaixo da tensão de escoamento.

O Gráfico 19-3 apresenta as reações horizontais nos pilares P1 e P3, base e topo.

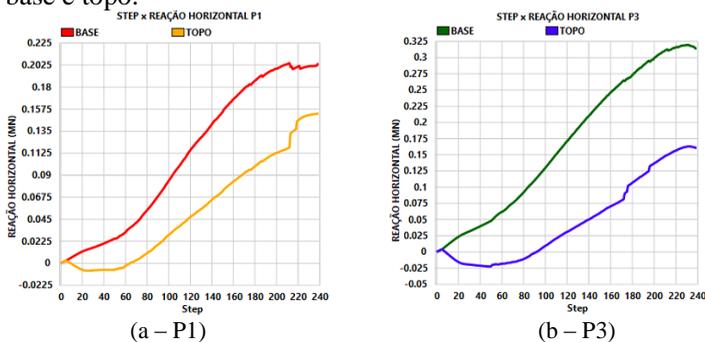


Gráfico 19-3 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 3 - [MN]

Houve uma redução das reações horizontais no P3 no *Step* 172 por conta do rompimento das armaduras negativas, assim como no *Step* 212 para o P1. Para a carga última, *Step* 186, tem-se os seguintes valores de momentos (Tabela 19-2).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P1 | 384 | 208 | 176 |
| P3 | 566 | 228 | 338 |

Tabela 19-2 – Momentos pilares P1, P3 e laje – Step 186

O momento de dimensionamento na ligação Laje/P3 continua sendo igual a 506 kNm, portanto bem superior ao obtido pela análise não linear.

Essa nova distribuição reduziu as armaduras sobre os pilares, sem no entanto haver um aumento significativo das armaduras positivas na Seção S2. Com isso, o comprimento das faixas dos cantos, iguais a 2 metros no P1 e 4 metros no P3 continua reduzindo de sobremaneira a carga última da estrutura.

19.1.2. Etapa 1

Nesse caso aplicou-se o mesmo critério da Etapa 1 do Método A1 (ver Capítulo 12.1.2), de modo a concentrar as armaduras sobre os pilares P3 e P1, afastadas de “2h” das faces dos pilares, que resultará no mesmo detalhamento apresentado na Figura 12-19 e com a mesma redistribuição calculada na EQ 14.3.

O Gráfico 19-4 apresenta a distribuição dos momentos fletores para essa nova configuração de armaduras.

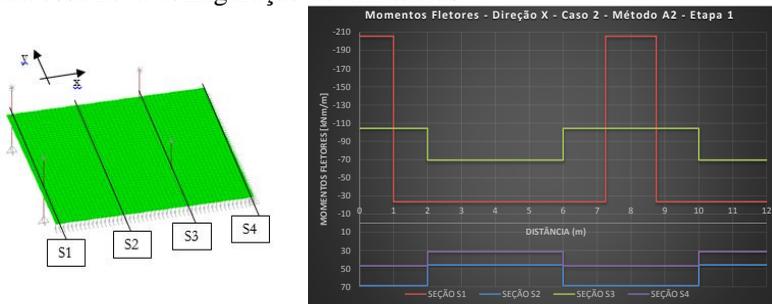


Gráfico 19-4 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2 - Pd15 S1/S2/S3/S4 – Etapa 1

As novas armaduras estão apresentadas na Tabela 19-3, já considerando a redistribuição do momento negativo junto ao P3 e P1.

| | Seção S1 | Seção S3 | Seção S2 | Seção S4 |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| FI | $\phi 20,0c/12$ | $\phi 16,0c/17$ | $\phi 12,5c/16$ | $\phi 10,0c/16,5$ |
| FE | $\phi 8,0c/20$ | $\phi 12,5c/16$ | $\phi 12,5c/24$ | $\phi 10,0c/24$ |

Tabela 19-3 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A2
Pd15 – Etapa 1

A disposição das armaduras é análoga à disposição mostrada na Figura 12-19, com os valores apresentados na Tabela 19-3. O Gráfico 19-5 apresenta as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 para cada incremento de carga (*Step*) e deslocamento máximo, respectivamente.

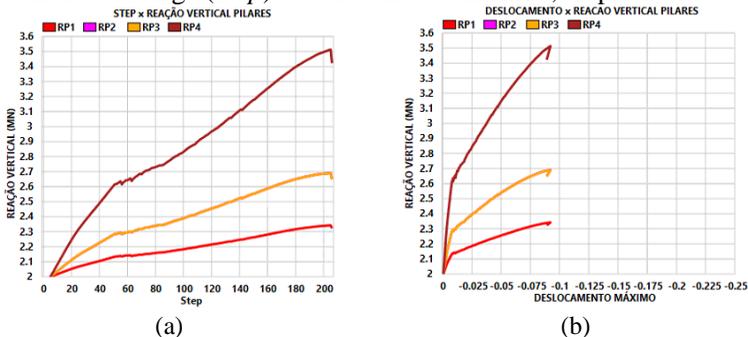


Gráfico 19-5 – Reações verticais nos pilares/desloc. máximo na laje
Método A2 – Etapa 1

A Figura 19-3 apresenta as tensões nas armadura para a Direção X para a carga última.

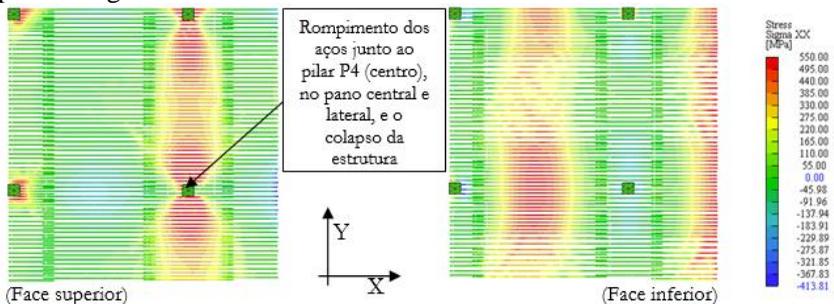


Figura 19-3 – Tensão nas armaduras – Direção X - Step 206 (final) Método A
Etapa 1 - [MPa]

Assim como ocorrido na Etapa 1 do Método A1, nesse caso o colapso também ocorreu nas armaduras negativas do pilar P4 (Figura

12-21) do pano central e lateral, com as barras principais na tensão de escoamento, inclusive a malha de positivos do pano central.

Em contrapartida, a ruptura ocorreu sem nenhuma ductilidade, sem haver um trecho com carga constante nos pilares, mesmo para o P1, P2 e P3.

A carga última ocorreu para o *Step* 205, calculada a seguir.

$$P_{STEP205} = \frac{1514 + 691 \times 2 + 343}{12 \times 12} = 22,5 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP205} = \frac{22,5}{1,27} = 17,7 \text{ kN/m}^2 \quad [\text{EQ } 19.2]$$

Houve um aumento de 17% na carga última em relação a distribuição inicial das armaduras. No método A1 esse aumento foi maior, igual a 27%.

O Gráfico 19-6 apresenta os momentos fletores para os pilares P1 e P3, base e topo.

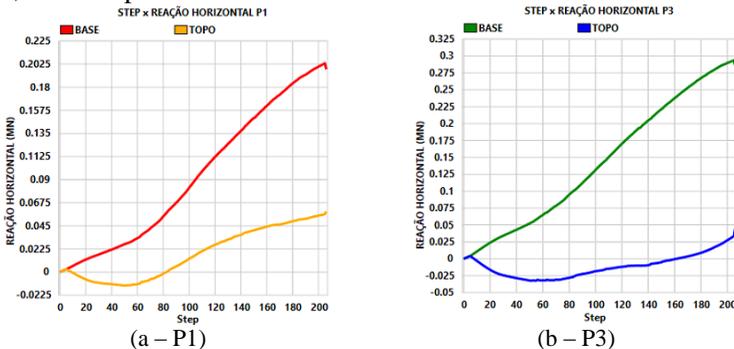


Gráfico 19-6 – Reações horizontais – Direção X – P1 e P3 – Etapa 1 - [MN]

Nesse caso, a descontinuidade no gráfico ocorreu somente no incremento de carga final (*Step* 206). Para a carga última (*Step* 205), tem-se os seguintes valores de momentos fletores (Tabela 19-4).

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P1 | 408 | 114 | 294 |
| P3 | 588 | 68 | 520 |

Tabela 19-4 – Momentos pilares P1, P3 e laje – *Step* 205 – Método A2 - Etapa 1

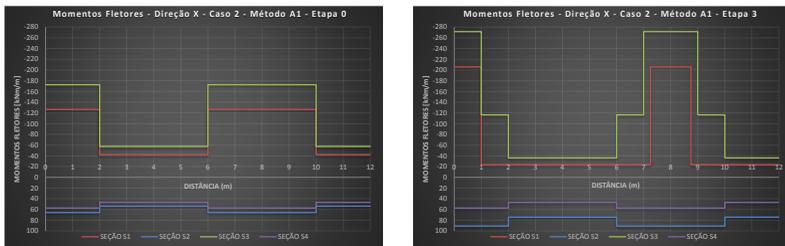
Os momentos na laje são muito parecidos aos apresentados na Tabela 12-7, uma vez que o detalhamento das armaduras negativas junto ao bordo são iguais, diferindo um pouco na zona dos positivos do pano lateral, tendo as mesmas conclusões.

A sequência dos estudos do Método A2, sugeria dispor as armaduras conforme Etapa 2 e Etapa 3 do Método A1. No entanto, como isso resultaria em detalhamento das armaduras praticamente iguais e, por consequência, em resultados muito parecidos, não será apresentado.

19.2. CASO 2 – Pd=20kN/m²

19.2.1. Método A1

Serão apresentados os resultados para a Etapa 0 e para a Etapa 3. O Gráfico 19-7 apresenta os momentos fletores para as seções S1, S2, S3 e S4.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 3)

Gráfico 19-7 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A1 – Pd20
S1/S2/S3/S4

No caso da Etapa 3, houve uma redistribuição dos momentos fletores na Seção S1 sobre o pilar P1 e P3 para os momentos positivos da Seção S2. Mantiveram-se os mesmos critérios já utilizados no Capítulo 12.1.2, com largura de faixas de comprimento “2h” a partir das faces dos pilares e com $\mu_{RED,LIM} = 0,2$. O momento na ligação laje/P3 é igual a 675 kNm. Sendo assim, tem-se:

$$M_{d,FAIXA1,5} = \mu_{red} \times L_{faixa} \times d^2 \times f_{cmd} \rightarrow M_{d,FAIXA1,5} = 0,2 \times 1,5 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000 \quad [EQ 19.3]$$

$$M_{d,FAIXA1,5} = 308,55 \text{ kNm} \rightarrow M_{d,FAIXA1} = 205,7 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20c/12$$

$$M_{d,RED/2} = \frac{675 - 308,55}{2} = 183,23 \text{ kNm}$$

O valor de $M_{d,RED/2} = 183,23 \text{ kNm}$ será somado ao momento positivo da seção S2, realizando a nova distribuição dos momentos fletores nas porcentagens de 55% para a faixa interna e 45 % para a faixa externa.

Para a Seção S3 também se manteve o mesmo critério, utilizando a armadura mínima entre o P2 e P4 e a distribuição do momento restante sobre o P2 e P4 na proporção 70% e 30% dentro da faixa interna.

A Tabela 19-5 e Tabela 19-6 apresentam as armaduras para as quatro seções em estudo da Etapa 0 e 3.

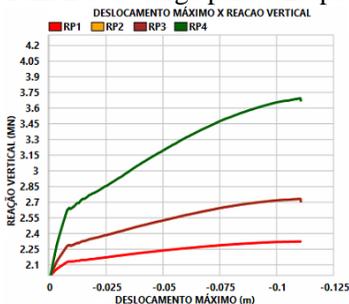
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| T1 | φ20,0c/21,5 | φ20,0c/15 | φ12,5c/17 | φ12,5c/20 |
| T2 | φ10,0c/17,5 | φ12,5c/19,5 | φ12,5c/21 | φ12,5c/24 |
| T3 | φ20,0c/21,5 | φ20,0c/15 | φ12,5c/17 | φ12,5c/20 |
| T4 | φ10,0c/17,5 | φ12,5c/19,5 | φ12,5c/21 | φ12,5c/24 |

Tabela 19-5 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1
Pd20 – Etapa 0

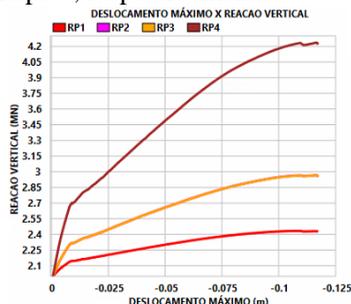
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| T1 | φ20,0c/12 | φ25,0c/13/φ16c/15 | φ16,0c/20 | φ12,5c/20 |
| T2 | φ8,0c/20 | φ10,0c/20 | φ16,0c/24,5 | φ12,5c/24 |
| T3 | φ20,0c/12 | φ25,0c/13/φ16c/15 | φ16,0c/20 | φ12,5c/20 |
| T4 | φ8,0c/20 | φ10,0c/20 | φ16,0c/24,5 | φ12,5c/24 |

Tabela 19-6 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A1
Pd20 – Etapa 3

O Gráfico 19-8a e Gráfico 19-8b apresentam as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4) e o deslocamento máximo, para cada incremento de carga para a Etapa 0 e Etapa 3, respectivamente.



(a – Etapa 0)



(b - Etapa 3)

Gráfico 19-8 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares

O comportamento da estrutura pré-colapso se mostrou menos dúctil se comparado com o Método A1 – Pd=15kN/m² (Gráfico 12-5), mesmo para a Etapa 0. Da Etapa 0 para a Etapa 3, tem-se um ganho significativo na obtenção da carga última, em maior parte obtido pela concentração das armaduras negativas junto ao P1 e P3 e em menor escala

pela concentração das armaduras junto ao P2 e P4 na proporção 70% e 30%.

A Figura 19-4 apresenta as tensões nas armaduras superiores, direção X, para a Etapa 0 – *Step* 204 e para a Etapa 3 – *Step* 260, ambos *Steps* finais.

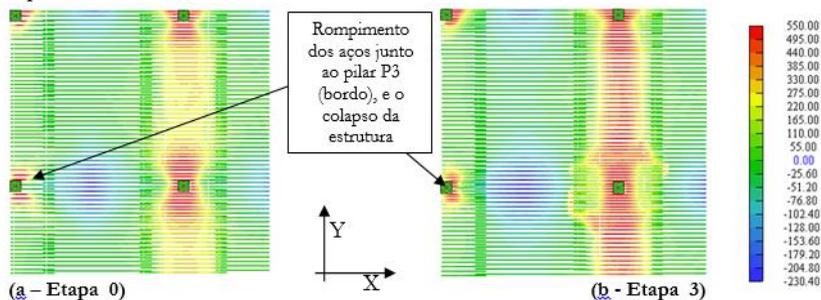


Figura 19-4 – Tensão armaduras – Direção X - *Step* final - face superior - [MPa]

A Figura 19-5 apresenta as tensões nas armaduras inferiores, direção X, para a Etapa 0 e para a Etapa 3, considerando o *Step* final.

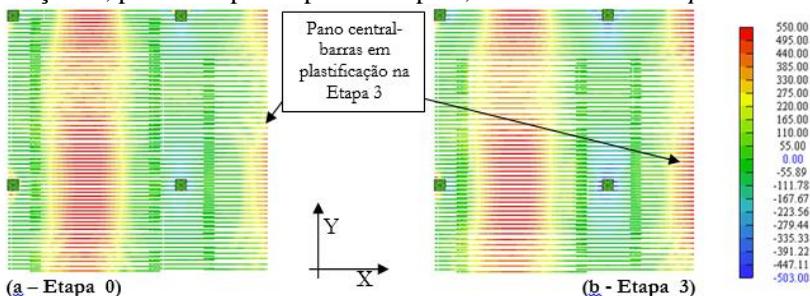


Figura 19-5 – Tensão armaduras – Direção X - *Step* final - face inferior - [MPa]

As alterações no detalhamento das armaduras realizadas na Etapa 3 permitiram um maior aproveitamento das armaduras, seja sobre o P3 (S1), entre o pilar P2 e P4 (S3) e também na malha positiva do pano central (S4).

Seja para a Etapa 0 ou para a Etapa 3, o colapso ocorreu devido ao rompimento das armaduras negativas junto ao P3. No caso da Etapa 3, nota-se no Gráfico 19-7b que existe uma distância considerável entre os momentos fletores obtidos sobre o pilar P3 e P4, justificado pelo critério adotado nessa Tese em limitar os momentos sobre o P3 em $\mu_{RED,LIM} = 0,2$. No entanto, esse limite trata-se de uma sugestão utilizada nesta Tese e que pode ser alterado pelo projetista. No caso da carga de

20 kN/m², um limite maior poderia ser adotado, muito embora não se espera que o resultado final seja muito distante do obtido com $\mu_{RED,LIM} = 0,2$.

A carga última está calculada a seguir para o *Step* 203 para a Etapa 0 e o *Step* 248 para a Etapa 3.

Etapa 0:

$$P_{STEP203} = \frac{1695 + 733 \times 2 + 316}{12 \times 12} = 24,2 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP203} = \frac{24,2}{1,27} = 19,1 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.4]}$$

Etapa 3:

$$P_{STEP248} = \frac{2233 + 965 \times 2 + 433}{12 \times 12} = 31,9 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP248} = \frac{31,9}{1,27} = 25,1 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.5]}$$

Como consequência dos resultados da Figura 19-4 e Figura 19-5, para a Etapa 0 tem-se uma carga final obtida pela análise não linear inferior a carga de projeto. Já para a Etapa 3, o valor foi substancialmente superior.

A Figura 19-6 e Figura 19-7 mostram as deformações na Seção SB e SD (ver localização na Figura 12-3), respectivamente, para a Etapa 3 considerando o *Step* 248 (carga última).

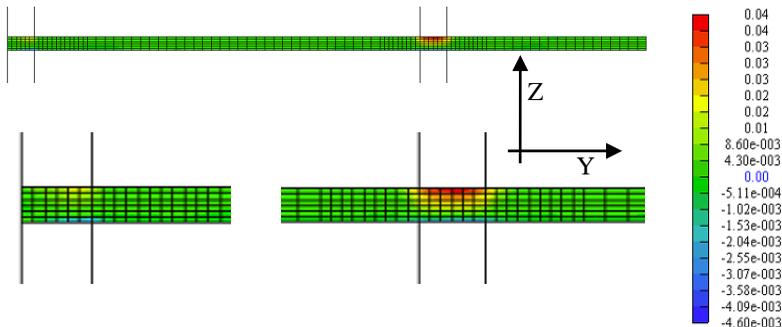


Figura 19-6 – Deformações concreto – SB – Dir. X – *Step* 248 Et. 3- [MPa]

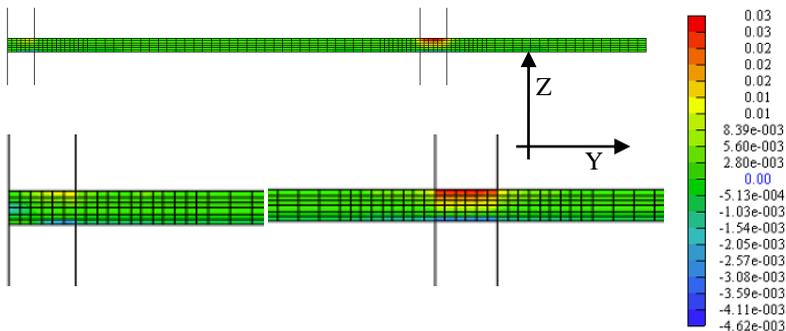
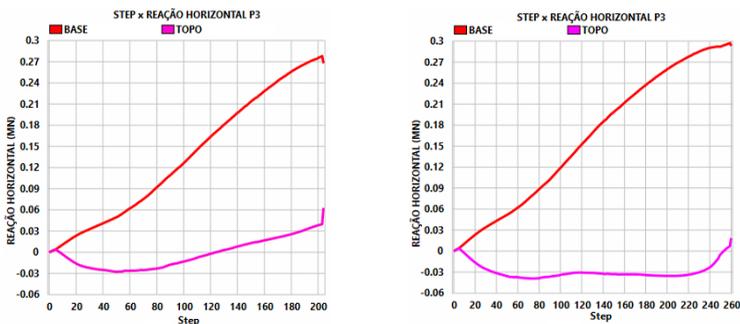


Figura 19-7 – Deformações no concreto – SD – Direção X – Step 248 Etapa 3 - [MPa]

O concreto possui praticamente a mesma deformação tanto na SB como na SD. No entanto, na SB as deformações no aço estão mais próximas da ruptura, o que justifica o colapso da estrutura ter ocorrido sobre o P3. Em comparação com a Etapa 3 do Método A1 – $Pd=15 \text{ kN/m}^2$, observa-se que nesse caso as deformações na seção SB estão mais próximas da ruptura, por conta da carga de projeto igual a 20 kN/m^2 .

O Gráfico 19-9 apresenta os momentos fletores para o pilar P3, base e topo, para a Etapa 0 e Etapa 3, respectivamente.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 3)

Gráfico 19-9 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A1 - [MN]

Para a Etapa 0, o rompimento das armaduras negativas junto ao P3 ocorreu no Step 203 (descontinuidade no diagrama), praticamente no incremento de carga final Step 204. Já para a Etapa 3, o mesmo ocorreu no Step 248, um pouco antes do step final 260. Para a carga última, tem-se os seguintes valores de momentos fletores (Tabela 19-7).

| | | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|----------------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>Etapa 0</i> | <i>P3</i> | 556 | 80 | 476 |
| <i>Etapa 3</i> | <i>P3</i> | 580 | 20 | 560 |

Tabela 19-7 – Momentos pilares P3 e laje – Método A1

O momento de dimensionamento da Etapa 0 na ligação P3/Laje é 675 kNm enquanto o valor obtido na análise não linear é 476 kNm. Para a Etapa 3 o momento de dimensionamento é 308,55 kNm e o valor obtido na análise não linear é 560 kNm. Como consequência das alterações no detalhamento da Etapa 3, aumentou-se a rigidez da ligação P3/Laje, o que justifica os resultados apresentados na Tabela 19-7.

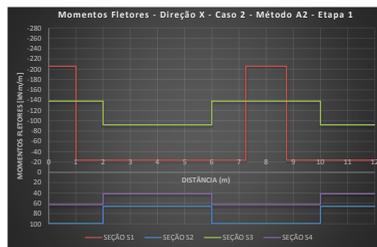
Em comparação com a Etapa 3 do Método A1 – Pd=15 kN/m² (Tabela 12-7), o momento na laje é praticamente igual, uma vez que o detalhamento das armaduras na Seção S1 é o mesmo. O que mudou foi uma maior redistribuição para os positivos da Seção S2.

19.2.2. Método A2

Neste caso, como a Etapa 3 resultou em armaduras muito parecidas com o Método A1, serão apresentados os resultados para a Etapa 0 e para a Etapa 1. O Gráfico 19-10 apresenta os momentos fletores para as seções S1, S2, S3 e S4.



(a – Etapa 0)



(b - Etapa 1)

Gráfico 19-10 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método A2
Pd20 - S1/S2/S3/S4

Para a seção S1 da Etapa 1, realizou-se a mesma alteração feita no Método A1, mantendo a largura de faixa e o valor para $\mu_{RED,LIM} = 0,2$.

A Tabela 19-8 e Tabela 19-9 apresentam as armaduras para seções em estudo do Método A2.

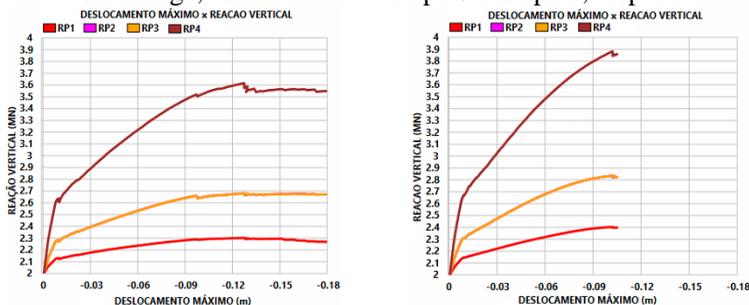
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <i>T1</i> | $\phi 16,0c/21,5$ | $\phi 20,0c/19,5$ | $\phi 12,5c/15,5$ | $\phi 12,5c/18$ |
| <i>T2</i> | $\phi 12,5c/16,5$ | $\phi 16,0c/20$ | $\phi 12,5c/23,5$ | $\phi 10,0c/17,5$ |
| <i>T3</i> | $\phi 16,0c/21,5$ | $\phi 20,0c/19,5$ | $\phi 12,5c/15,5$ | $\phi 12,5c/18$ |
| <i>T4</i> | $\phi 12,5c/16,5$ | $\phi 16,0c/20$ | $\phi 12,5c/23,5$ | $\phi 10,0c/17,5$ |

Tabela 19-8 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A2
Pd20 – Etapa 0

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| <i>T1</i> | $\phi 20,0c/12$ | $\phi 20,0c/19,5$ | $\phi 16,0c/18$ | $\phi 12,5c/18$ |
| <i>T2</i> | $\phi 8,0c/20$ | $\phi 16,0c/20$ | $\phi 12,5c/17$ | $\phi 10,0c/17,5$ |
| <i>T3</i> | $\phi 20,0c/12$ | $\phi 20,0c/19,5$ | $\phi 16,0c/18$ | $\phi 12,5c/18$ |
| <i>T4</i> | $\phi 8,0c/20$ | $\phi 16,0c/20$ | $\phi 12,5c/17$ | $\phi 10,0c/17,5$ |

Tabela 19-9 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método A2
Pd20 – Etapa 1

O Gráfico 19-11a e Gráfico 19-11b apresentam as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 e o deslocamento máximo, para cada incremento de carga, considerando a Etapa 0 e Etapa 1, respectivamente.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 1)

Gráfico 19-11 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares

Para a Etapa 0, tem-se uma ruptura menos dúctil se comparado a Etapa 0 do Método A2 - $P_d=15\text{kN/m}^2$. Já na Etapa 1 os comportamentos são semelhantes. Nesse caso, a Etapa 0 obteve carga última no *Step* 208 e carga final no *step* 247 enquanto para a Etapa 1 a carga última ocorreu no *Step* 232, pouco antes da carga final *Step* 238.

A Figura 19-8 apresenta as tensões nas armaduras superiores, direção X, para a Etapa 0 – *Step* 238 e para a Etapa 1 – *Step* 238, ambos *Steps* finais.

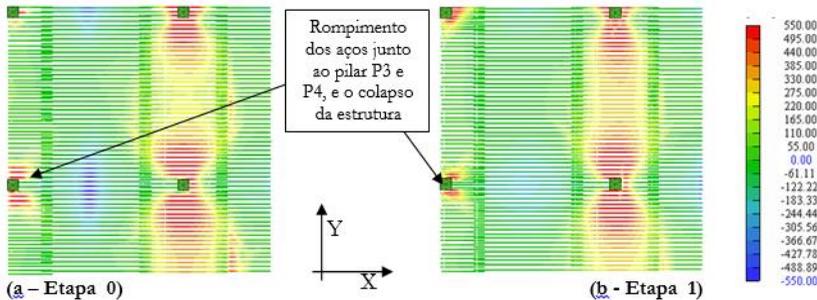


Figura 19-8 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* final – face superior - [MPa]

A Figura 19-9 apresenta as tensões nas armaduras inferiores, direção X, para a Etapa 0 e para a Etapa 1, considerando o *Step* final.

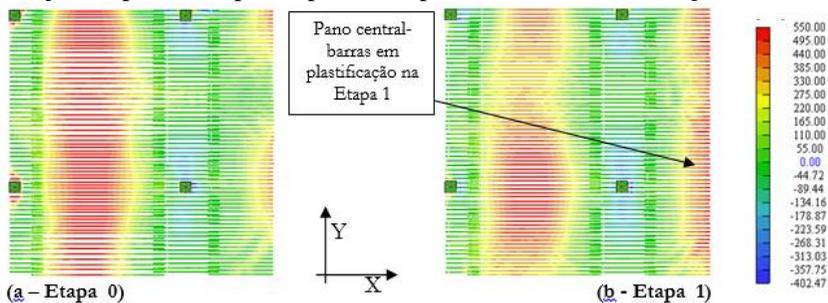


Figura 19-9 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* final – face inferior - [MPa]

Assim como ocorrido nos casos anteriores, o detalhamento da Etapa 1 permitiu um melhor aproveitamento das barras de aço da seção S3 e S4. Na seção S2 notou-se uma redução da tensão nas armaduras da Etapa 1 para a Etapa 0, justificando a necessidade de se realizar a alteração na malha proposta para o Etapa 3.

Houve o rompimento precoce das armaduras negativas sobre o P3 e P4, logo no *Step* 185 para um deslocamento de 9,72 cm (Gráfico 19-11a). Como consequência, a Etapa 0 resultou em uma carga última menor do que a carga de projeto, inclusive inferior ao Método A1 (fato esse que não aconteceu para a carga de 15 kN/m²). Já a otimização da Etapa 1 fez com que tivesse um pequeno aumento, ficando acima da carga de projeto. O cálculo está apresentado a seguir.

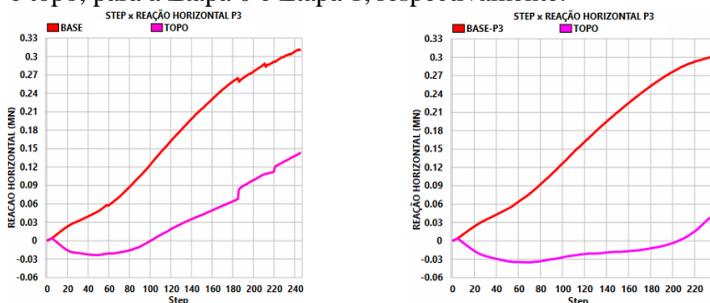
Etapa 0:

$$P_{S208} = \frac{1616 + 680 \times 2 + 302}{12 \times 12} = 22,8 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S208} = \frac{22,8}{1,27} = 17,9 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.6]}$$

Etapa 1:

$$P_{S232} = \frac{1883 + 836 \times 2 + 403}{12 \times 12} = 27,5 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S232} = \frac{27,5}{1,27} = 21,7 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.7]}$$

O Gráfico 19-12 apresenta os momentos fletores para o pilar P3, base e topo, para a Etapa 0 e Etapa 1, respectivamente.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 1)

Gráfico 19-12 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A2 - [MN]

Os momentos no P3 para a Etapa 1 são praticamente iguais aos apresentados na Etapa 3 do Método A1 deste Capítulo, uma vez que possuem o mesmo detalhamento na Seção S1 (também observado na Tabela 19-10). Para a Etapa 0, nota-se a descontinuidade no diagrama ainda no *Step* 185, o que ratifica o rompimento precoce das armaduras negativas junto ao P3, também observado no Gráfico 19-11a. De igual modo, também houve um novo rompimento no *Step* 208, onde se obteve a carga última. A Tabela 19-10 apresenta os valores de momentos para a carga última.

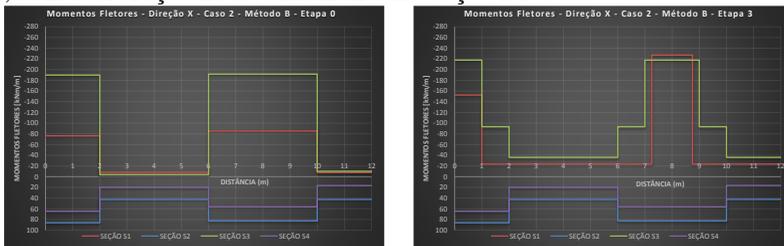
| | | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|----------------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>Etapa 0</i> | <i>P3</i> | 568 | 212 | 356 |
| <i>Etapa 1</i> | <i>P3</i> | 600 | 70 | 530 |

Tabela 19-10 – Momentos pilares P3 e laje – Método A2

Para a Etapa 0, houve uma redução do momento na ligação Laje/Pilar em comparação com o Método A1, uma vez que a taxa de armadura sobre o pilar P3 é menor. Para a Etapa 1, tem-se valor praticamente igual ao Método A1, pois o detalhamento das armaduras é o mesmo na seção S1.

19.2.3. Método B

O Gráfico 19-13 apresenta os momentos fletores para as seções S1, S2, S3 e S4. Serão mostrados os resultados para a Etapa 0 e para a Etapa 3, com a alteração no detalhamento na Seção S1 e S3.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 3)

Gráfico 19-13 – Momentos fletores - Direção X - Caso 2 – Método B – Pd20 - S1/S2/S3/S4

Na Etapa 3, a seção S2 não sofreu alteração, pois não houve redistribuição dos momentos negativos sobre o P1 e P3, conforme demonstrativo a seguir.

Pilar P1:

$$M_d = 152,6 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{152,6}{1,0 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,148 \quad [\text{EQ } 19.8]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA1,0} = 152,6 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20c / 17,5$$

Pilar P3:

$$M_d = 340,7 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{340,7}{1,5 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,221 \quad [\text{EQ } 19.9]$$

$$M_{d,FAIXA1,5} = 227,2 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 20,0c / 10,5$$

Para o pilar P3, como $\mu_{RED} = 0,221$ está próximo do $\mu_{RED,LIM} = 0,2$, manteve-se o valor de $\mu_{RED} = 0,221$ e se optou por não redistribuir para os positivos da seção S2.

A Tabela 19-11 e Tabela 19-12 apresentam as armaduras para seções em estudo do Método B.

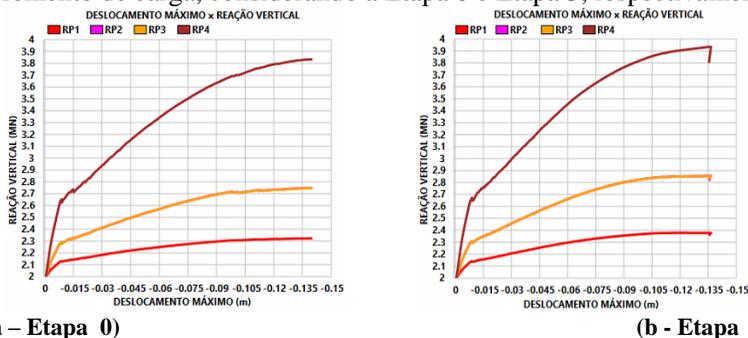
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>T1</i> | φ16,0c/24 | φ20,0c/14 | φ16,0c/21 | φ12,5c/17,5 |
| <i>T2</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ10,0c/17,5 | φ8,0c/25 |
| <i>T3</i> | φ16,0c/21 | φ20,0c/13 | φ16,0c/22 | φ12,5c/20 |
| <i>T4</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ10,0c/17,5 | φ6,3c/17,5 |

Tabela 19-11 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método B
Pd20 – Etapa 0

| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| <i>T1</i> | φ20,0c/17,5 | φ20,0c/11,5/φ16c/19 | φ16,0c/21 | φ12,5c/17,5 |
| <i>T2</i> | φ8,0c/20 | φ10,0c/20 | φ10,0c/17,5 | φ8,0c/25 |
| <i>T3</i> | φ20,0c/10,5 | φ20,0c/11,5/φ16c/19 | φ16,0c/22 | φ12,5c/20 |
| <i>T4</i> | φ8,0c/20 | φ10,0c/20 | φ10,0c/17,5 | φ6,3c/17,5 |

Tabela 19-12 – Dimensionamento das armaduras – Caso 2 – Método B
Pd20 – Etapa 3

O Gráfico 19-14a e Gráfico 19-14b apresentam as reações verticais nos pilares P1, P2, P3 e P4 e o deslocamento máximo, para cada incremento de carga, considerando a Etapa 0 e Etapa 3, respectivamente.



(a – Etapa 0) Gráfico 19-14 – Deslocamento máximo x Reação vertical pilares (b - Etapa 3)

Assim como ocorreu nos métodos anteriores para a Etapa 0, no Método B também se tem um comportamento até a ruptura menos dúctil se comparado com $P_d=15\text{kN/m}^2$ (Gráfico 12-16b). Já para a Etapa 3, o comportamento é parecido entre os três métodos para os diferentes níveis de carga. Na Etapa 0, tem-se o rompimento precoce das barras negativas junto ao P3, logo no *Step* 193 (deslocamento máximo igual a 9,81 cm), análogo ao ocorrido no Método A2, uma vez que possuem taxas de

armadura parecidas sobre o P3. Mesmo assim, a estrutura teve um ganho de carga, sendo que a carga última ocorreu para o mesmo incremento de carga final (*Step* 227). Já na Etapa 3, a carga última ocorreu no *Step* 244 e, logo após, a carga final (*Step* 245).

A Figura 19-10 apresenta as tensões nas armaduras superiores, direção X, para a Etapa 0 – *Step* 227 e para a Etapa 3 – *Step* 245, ambos *Steps* finais.

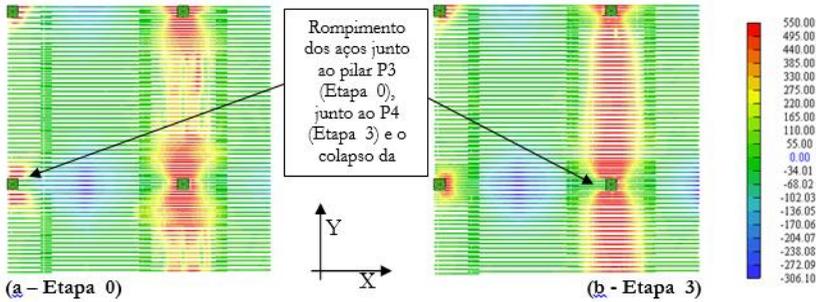


Figura 19-10 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* final – face superior [MPa]

A Figura 19-11 apresenta as tensões nas armaduras inferiores, direção X, para a Etapa 0 e para a Etapa 3, considerando o *Step* final.

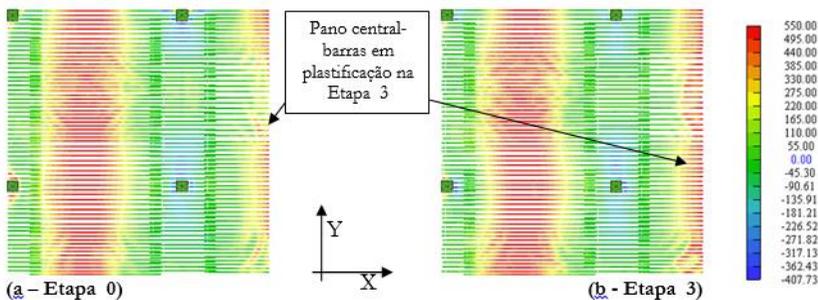


Figura 19-11 – Tensão nas armaduras – Direção X - *Step* final – face inferior [MPa]

Na Etapa 0, o rompimento ocorreu nas barras negativas sobre o P3, ratificando a deficiente das armaduras detalhadas em uma faixa muito extensa. Na Etapa 3, o rompimento ocorreu junto ao P4, pois, pelo Gráfico 19-13, os momentos negativos na região do P4 são ligeiramente inferiores aos momentos na região do P3.

No Método B, a alteração no detalhamento das armaduras da Etapa 0 para a Etapa 3 foi fundamental para se ter maior eficiente nas barras

negativas da Seção S1 e S3 como também na malha positiva do pano central (Seção S4). Como resultado, tem-se um ganho na carga última, calculada a seguir.

Etapa 0:

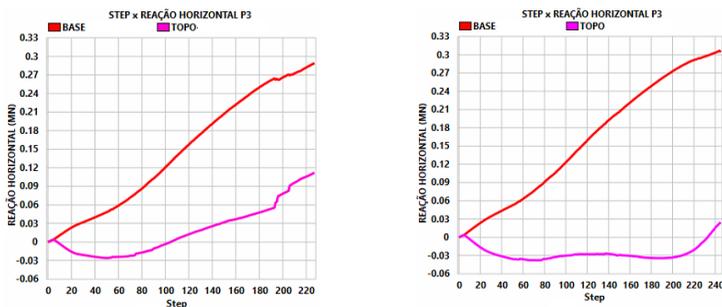
$$P_{S227} = \frac{1835 + 750 \times 2 + 322}{12 \times 12} = 25,6 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S227} = \frac{25,6}{1,27} = 20,2 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.10]}$$

Etapa 3:

$$P_{S244} = \frac{1936 + 854 \times 2 + 377}{12 \times 12} = 28,1 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-NL-S244} = \frac{28,1}{1,27} = 22,1 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.11]}$$

Mesmo com a deficiência na ligação Laje/P3 da Etapa 0, as armaduras positivas da seção S2 do modelo elástico permitiram uma carga última maior se comparado ao Método A2, inclusive ligeiramente superior a carga de projeto. Na Etapa 3, como já era de se esperar, a carga última foi maior que a Etapa 0 e também superior a carga de projeto.

O Gráfico 19-15 apresenta os momentos fletores para o pilar P3, base e topo, para a Etapa 0 e Etapa 3, respectivamente.



(a – Etapa 0)

(b - Etapa 3)

Gráfico 19-15 – Reações horizontais – Direção X – P3 – Método A - [MN]

A descontinuidade no Gráfico 19-15a da Etapa 0 ocorrida no Step 193 ratifica o rompimento das armaduras negativas, junto ao P3. A Tabela 19-13 apresenta os valores dos momentos para o Step 193 (Etapa 0) e Step 220 (Etapa 3).

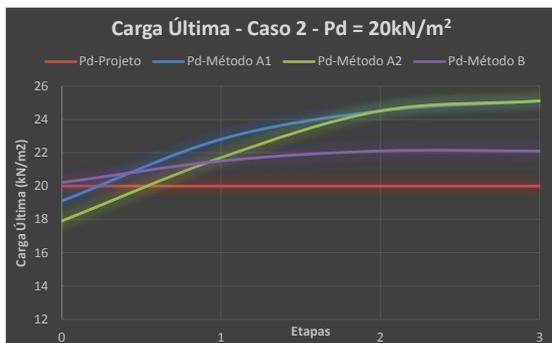
| | | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|----------------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| <i>Etapa 0</i> | <i>P3</i> | 530 | 112 | 418 |
| <i>Etapa 3</i> | <i>P3</i> | 582 | -40 | 622 |

Tabela 19-13 – Momentos pilares P3 e laje – Método B

O momento de dimensionamento da ligação laje/P1 e laje/P3 são iguais a 152,60 kNm e 340,70 kNm, respectivamente. Já os valores obtidos pela análise não linear são superiores (Tabela 19-13), mesmo para a Etapa 0 (fato esse também observado para a carga $P_d=15\text{kN/m}^2$ - Tabela 12-10). O dimensionamento resultante do modelo elástico permitiu balancear melhor os esforços na Seção S1 e S2, resultando em taxa de armadura maior no seção dos positivos (S2) se comparado ao Método A2.

19.2.4. Considerações sobre a carga última

O Gráfico 19-16 apresenta a carga última obtida na análise não linear segundo o Método A1, A2 e B, em comparação com a carga de projeto $P_d=20\text{kN/m}^2$, para a Etapa 0, Etapa 1, Etapa 2 e Etapa 3.

Gráfico 19-16 – Carga Última – Caso 2 – $P_d=20\text{kN/m}^2$

Para a Etapa 0, somente o Método B apresentou carga última levemente superior a carga de projeto (apenas 1% - Gráfico 19-17). Já na Etapa 1, o método A1 e A2 tiveram um acréscimo considerável na carga última em relação a Etapa 0 (Gráfico 19-18), ficando acima da carga de projeto. Da Etapa 1 até a Etapa 3, os ganhos em relação a carga última foram em menor proporção, sendo a maior vantagem o pequeno aumento dos patamares de escoamento no comportamento pré-ruptura.



Gráfico 19-17 – Carga Última x Carga de Projeto



Gráfico 19-18 – Carga Última x Carga anterior

Com o aumento da carga de projeto para $P_d = 20 \text{ kN/m}^2$, notou-se uma redução acentuada da ductilidade da estrutura e, junto com ela, da capacidade de redistribuição dos esforços. A deficiência na ligação laje/P3 da Etapa 0 para os Métodos A1 e A2, foi um bom exemplo desse comportamento mais frágil. Nesse caso, a aplicação do critério em concentrar as armaduras em uma faixa afastada “2h” das faces dos pilares, torna-se fundamental para o bom comportamento último da estrutura, já que ambas apresentaram carga última inferior à carga de projeto.

O Gráfico 19-19 apresenta no eixo positivo das ordenadas os momentos fletores da ligação Laje/Pilar de projeto (Mlig) e da análise não-linear (M-NL) e, no eixo negativo das ordenadas, o percentual de redução, considerando o Método A1/A2, carga de 15 e 20 kN/m^2 .

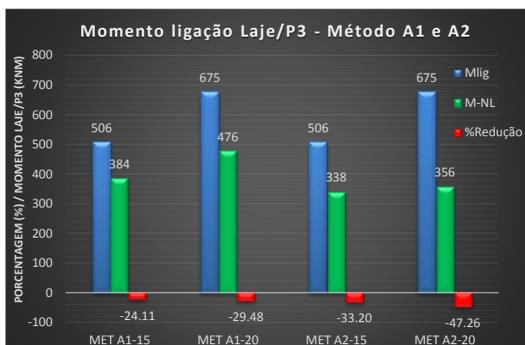


Gráfico 19-19 – Redução momento ligação laje/P3 – Método A1 e A2

Para a carga de projeto $P_d=20\text{kN/m}^2$, a perda do momento de projeto na ligação laje/P3 é maior (principalmente no Método A2), pois a estrutura torna-se menos dúctil.

Ao contrário do ocorrido no Método A1 e A2, para o Método B – Etapa 0, o momento obtido na análise não linear para a ligação laje/P3 foi

em média 25% superior ao momento de dimensionamento das armaduras (fato esse também observado para a carga $P_d=15 \text{ kN/m}^2$). Mesmo assim, a carga última da análise não linear foi apenas 1% superior a carga de projeto $P_d=20\text{kN/m}^2$ (Gráfico 19-17). Para $P_d=15\text{kN/m}^2$, o valor foi 12% superior (Gráfico 12-25) para a Etapa 0. Ou seja, a redução na ductilidade da laje fez reduzir também a capacidade de redistribuição dos esforços. Sendo assim, no Método B, a aplicação do critério “2h” nos pilares P3 (bordo) e P1 (canto) também é importante para a segurança da estrutura.

Outro fator que fez reduzir a carga última em comparação com $P_d=15\text{kN/m}^2$, porém em menor proporção, é a influência da compressão axial devido ao efeito não linear do concreto. Com o aumento da taxa de armadura, o valor que era de 8% para $P_d=15\text{kN/m}^2$ agora reduziu para 5% apenas.

O Gráfico 19-20 apresenta as taxas de armaduras para os três métodos e para todas as Etapas dos modelos com carga 20 kN/m^2 .

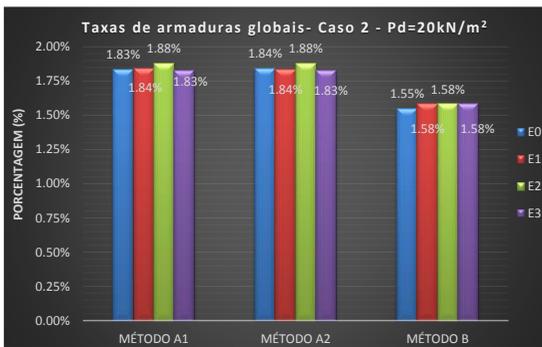


Gráfico 19-20 – Taxas de armadura globais - Caso 2 – $P_d=20\text{kN/m}^2$

O Método B resultou em menor taxa de armadura, o que justifica a menor carga última obtida na etapa final. Mesmo assim, foi sempre superior a carga de projeto, inclusive para a Etapa 0, sendo o maior valor obtido na Etapa 3 (Gráfico 19-16), igual a 11% superior à carga de projeto (Gráfico 19-17).

Com exceção da Etapa 0 do Método A1 e A2, pode-se afirmar que todos os casos analisados para a carga de projeto $P_d=20\text{kN/m}^2$ são soluções em equilíbrio, respeitam o teorema estático, estando por consequência, a favor da segurança.

19.3.CASO 1: ETAPA 1 E ETAPA 3

Os resultados da Etapa 0 mostraram que a viga de bordo melhora a condição de engastamento da laje com os pilares dos bordos (P1 e P3), mesmo possuindo o detalhamento das armaduras em faixas de 2 metros para o P1 e 4 metros para o P3. Prova disso foi o valor da carga última alcançada, igual a 20 kN/m².

No entanto, como houve o rompimento precoce das armaduras negativas junto ao P3, será realizada a alteração no detalhamento também para o Caso 1 (com vigas de bordo e sem balanço).

A primeira alteração consistiu em concentrar as armaduras negativas da seção S1 sobre o P1 e P3 (Etapa 1). Nesse caso, o critério permitiu utilizar faixas maiores se comparadas ao Caso 2 (sem vigas e sem balanço), justificada pela presença da viga de bordo e também pela distribuição dos momentos no modelo elástico, com comprimento igual a “3h” a partir das faces dos pilares (ou seja, 2 metros para o P3 e 0,75 m para o P1), mantendo o $\mu_{RED,LIM} = 0,2$. Sendo assim, tem-se:

Para o pilar P1:

$$M_d = 22,07 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{22,07}{0,75 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,029 \quad [\text{EQ } 19.12]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA0,75} = 29,43 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 8,0c/16$$

Para o pilar P3:

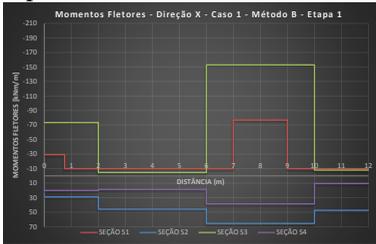
$$M_d = 153,6 \text{ kNm} \rightarrow \mu_{red} = \frac{153,6}{2,0 \times 0,22^2 \times 21,25 \times 1000} = 0,075 \quad [\text{EQ } 19.13]$$

$$\mu_{red} \leq \mu_{red,LIM} \rightarrow M_{d,FAIXA2,0} = 76,80 \text{ kNm/m} \rightarrow \phi 12,5c/14,5$$

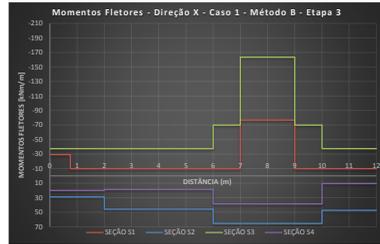
Tanto para o pilar P1 como para o pilar P3, o μ_{RED} foi inferior ao $\mu_{RED,LIM} = 0,2$. Com isso, não houve redistribuição dos momentos para as armaduras inferiores da Seção S2.

A segunda alteração consistiu em escalonar os momentos sobre o pilar P4 da Seção S3 (na proporção de 70% para a faixa interna central e 30% para a faixa interna lateral) e utilizar a armadura mínima ($\phi 10,0c/20$) entre o P2 e P4. Já para os momentos sobre o P2 manteve-se o dimensionamento sem escalonar, uma vez que são valores baixos e próximos do momento mínimo.

O Gráfico 19-21 apresenta a distribuição dos momentos fletores para a nova disposição de armaduras, tanto para a Etapa 1 como para a Etapa 3.



(a – Etapa 1)



(b - Etapa 3)

Gráfico 19-21 - Momentos fletores - Direção X – Caso 1 – Método B – Pd15 S1/S2/S3/S4

No Gráfico 19-21b, o fato de utilizar a armadura mínima entre o P2 e P4, fez reduzir a armadura sobre o P2 e P4, também ocorrido no Caso 2. A Tabela 19-14 e Tabela 19-15 apresentam o dimensionamento das armaduras com base nas quatro seções em estudo mostradas no Gráfico 19-21 para a Etapa 1 e Etapa 3, respectivamente.

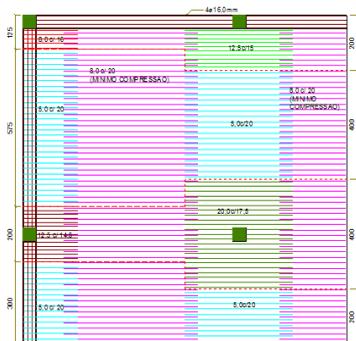
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>T1</i> | φ8,0c/16 | φ12,5c/15 | φ10,0c/25 | φ8,0c/25 |
| <i>T2</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ12,5c/25 | φ8,0c/25 |
| <i>T3</i> | φ12,5c/14,5 | φ20,0c/17,5 | φ12,5c/17 | φ10,0c/19 |
| <i>T4</i> | φ5,0c/20 | φ5,0c/20 | φ12,5c/25 | φ6,3c/25 |

Tabela 19-14 – Dimensionamento das armaduras – Caso 1 – Método B – Pd15 Etapa 1

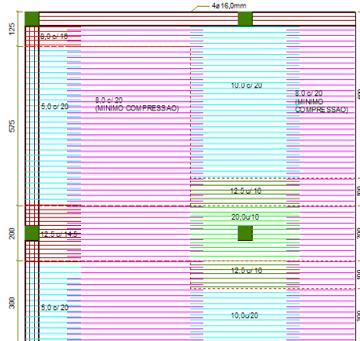
| | <i>Seção S1</i> | <i>Seção S3</i> | <i>Seção S2</i> | <i>Seção S4</i> |
|-----------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|
| <i>T1</i> | φ8,0c/16 | φ10,0c/20 | φ10,0c/25 | φ8,0c/25 |
| <i>T2</i> | φ5,0c/20 | φ10,0c/20 | φ12,5c/25 | φ8,0c/25 |
| <i>T3</i> | φ12,5c/14,5 | φ12,5c/16/20,0c/16 | φ12,5c/17 | φ10,0c/19 |
| <i>T4</i> | φ5,0c/20 | φ10,0c/20 | φ12,5c/25 | φ6,3c/25 |

Tabela 19-15 – Dimensionamento das armaduras – Caso 1 – Método B – Pd15 Etapa 3

A Figura 19-12 mostra o detalhamento das armaduras superiores para a Etapa 1 e Etapa 3. As armaduras inferiores não serão apresentadas, pois são iguais as armaduras da Etapa 0.



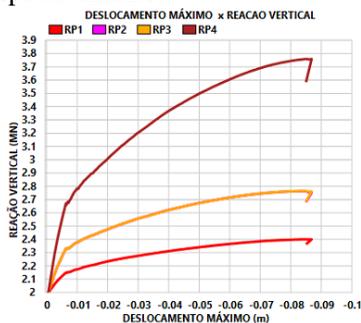
(Face superior – Etapa 1)



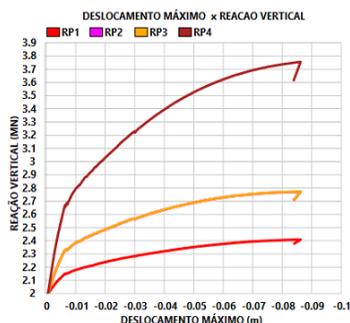
(Face superior – Etapa 3)

Figura 19-12 – Distribuição das armaduras – Direção X - Caso 1 – Método B Pd15

O Gráfico 19-22a e Gráfico 19-22b apresentam as reações verticais nos pilares e o deslocamento máximo para a Etapa 1 e Etapa 3, respectivamente.



(a – Etapa 1)



(b – Etapa 3)

Gráfico 19-22 – Reações verticais nos pilares e deslocamento máximo na laje – Método B

Nesse caso, não houve ruptura precoce das armaduras negativas sobre o pilar P3, seja na Etapa 1 e na Etapa 3. Mesmo existindo um patamar de escoamento nos pilares P2 e P3 antes do colapso, há um pequeno aumento de carga, fato que não ocorreu na Etapa 0 (Gráfico 13-2). A carga última ocorreu no *Step* 247 (Etapa 1) e *Step* 253 (Etapa 3), sendo o colapso ocorrido no *Step* seguinte em ambas as Etapas.

A Figura 19-13 apresenta as tensões nas armadura superiores para a Direção X para a carga última, Etapa 1 e Etapa 3.

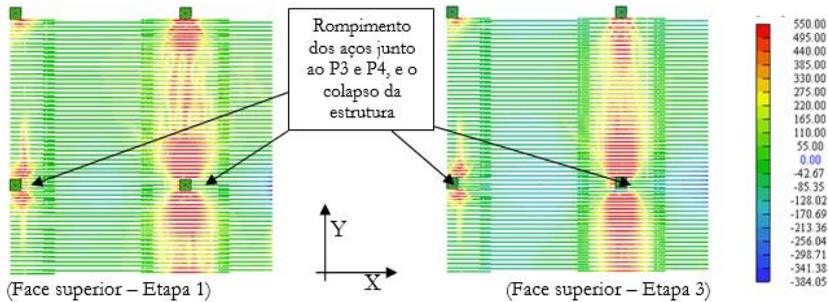


Figura 19-13 – Tensão nas armaduras superiores – Direção X – Carga última Método B – [MPa]

A Figura 19-14 apresenta as tensões nas armadura inferiores para a Direção X para a carga última, Etapa 1 e Etapa 3.

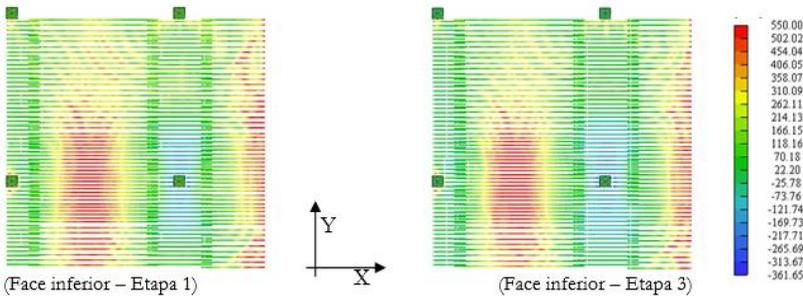


Figura 19-14 – Tensão nas armaduras inferiores – Direção X – Carga última Método B – [MPa]

Tanto na Etapa 1 como na Etapa 3, o colapso ocorreu nas armaduras negativas sobre o P3 e também junto ao P4, do lado do pano central, e não lateral, como ocorrido frequentemente no Caso 2 (sem vigas e sem balanço). Ao analisar os momentos na seção S1 e S3, sobre o P3 e P4 (Gráfico 19-21), nota-se uma disparidade enorme nos valores, maiores sobre o P4. Mesmo assim, tem-se um colapso concomitante das armaduras negativas junto ao P3 e P4. Isso mostra mais uma vez que a presença da viga melhora a distribuição dos esforços na ligação Laje/P3.

A carga última calculada está mostrada a seguir.

Etapa 1:

$$P_{STEP247} = \frac{1759 + 764 \times 2 + 400}{12 \times 12} = 25,6 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP247} = \frac{25,6}{1,27} = 20,2 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.14]}$$

Etapa 3:

$$P_{STEP253} = \frac{1756 + 772 \times 2 + 409}{12 \times 12} = 25,8 \text{ kN/m}^2 \rightarrow P_{d-STEP253} = \frac{25,8}{1,27} = 20,3 \text{ kN/m}^2 \text{ [EQ 19.15]}$$

Os valores das cargas últimas são muito parecidos do valor encontrado para a Etapa 0. Mais uma evidência de que a presença da viga de bordo melhora a distribuição das tensões na ligação Laje/P3, e não condiciona a ruptura da estrutura nos bordos.

O Gráfico 19-23 mostra as reações horizontais no pilar P3, direção X, para a Etapa 1 somente, pois a Etapa 3 resultará em valores parecidos, uma vez que tem o mesmo detalhamento na seção S1.

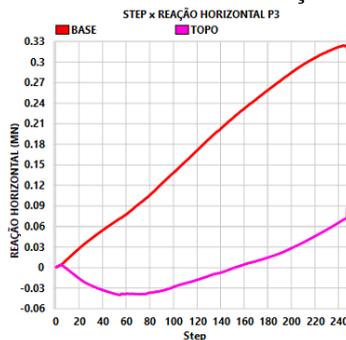


Gráfico 19-23 – Reações horizontais P3 – Caso 1 - Método B – Etapa 1/3

A Tabela 19-16 apresenta o momento fletor no pilar P3 como também na ligação Laje/P3 para o Step 247 da Etapa 1/3.

| | <i>Pilar inferior</i> (kNm) | <i>Pilar superior</i> (kNm) | <i>Laje</i> (kNm) |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------|
| P3 | 650 | 144 | 506 |

Tabela 19-16 – Momentos pilares P1, P3 e laje – Step 247 – Método B Etapa 1/3

Em comparação com a Etapa 0, o momento na laje foi 9 % superior. Trata-se de um pequeno aumento em relação ao Caso 2, da Etapa 1 para a Etapa 0, justificado pela presença da viga de bordo.