

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
DE PRODUÇÃO**

Hidelbrando Ferreira Rodrigues

**MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO E
OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE ENSINO**

Florianópolis

2018

Hidelbrando Ferreira Rodrigues

**MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO E
OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE ENSINO**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Produ-
ção para a obtenção do Grau de Dou-
tor em Engenharia de Produção.
Orientador: Sérgio Fernando Mayerle,
Dr.

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rodrigues, Hidelbrando Ferreira
Modelo Matemático para o Planejamento e
Otimização de Sistemas Públicos de Ensino /
Hidelbrando Ferreira Rodrigues ; orientador,
Sérgio Fernando Mayerle, 2018.
156 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós
Graduação em Engenharia de Produção, Florianópolis,
2018.

Inclui referências.

1. Engenharia de Produção. 2. Modelagem
Matemática. 3. Otimização. 4. Planejamento
Educativo. 5. Programação Inteira Mista. I.
Fernando Mayerle, Sérgio. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção. III. Título.

Hidelbrando Ferreira Rodrigues

**MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO E
OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE ENSINO**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Florianópolis, 04 de abril 2018.

Profa. Dra. Lucila Maria de Souza Campos
Coordenadora
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Banca Examinadora:

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Antônio Sérgio Coelho, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Enzo Morosini Frazzon , Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Rafael Tezza, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado à minha mãe e maior incentivadora, Dona Tereza, como ela gosta de ser chamada.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, em quem insisto em acreditar, mesmo sem evidências científicas.

À minha esposa Fran, por ser uma companheira tão fiel. Eu não teria conseguido sem seu apoio.

Às minhas filhas Maria Clara e Bianca e às minhas enteadas Vanessa e Andressa, tudo fez mais sentido com a chegada de vocês.

Ao meu orientador, professor Sérgio Mayerle, minha admiração e respeito não cabem em tão poucas linhas. Caminhar ao seu lado durante esse período foi um privilégio, e fez de mim um ser humano melhor. Sua maior lição foi a generosidade. Confesso que já o estou imitando em minhas orientações. Quando eu crescer quero ser igual ao senhor.

Ao professor João Neiva de Figueiredo, por ver mérito em nosso trabalho e levá-lo onde eu jamais imaginei que ele pudesse chegar. Muito obrigado!

Aos meus irmãos, irmãs e familiares, por saber que estão orgulhosos com esta minha conquista.

Aos meus companheiros de PPGEP, Daiane Chirolí e Rafael Glavan, por dividirem as mesmas angústias e expectativas.

Ao Dr. Eduardo Deschamp, Secretário de Estado de Educação de Santa Catarina (SED), por permitir desenvolver minhas pesquisas nas dependências da Secretaria. À sempre atenciosa Maristeele da SED, seu apoio foi fundamental em várias etapas deste trabalho.

À professora Ester Figueiredo, Secretária Municipal de Educação de Itacoatiara (SEMED-ITA) e aos técnicos educacionais Sônia, Jonas e Dilma Braga. O apoio e empenho de vocês foi fundamental na etapa de estudo de caso.

Ao professor Reinaldo, Coordenador Regional de Educação do Estado do Amazonas, em Itacoatiara, por ser um entusiasta da educação, nos receber tão bem e abrir as portas das escolas estaduais, e mais que isso, nos apoiar incondicionalmente.

A todos os gestores e secretários das escolas estaduais e municipais de Itacoatiara, por se empenharem em fornecer a localização dos seus mais de quatorze mil alunos. Não foi fácil levantar estes dados.

Ao Leyveson e a Edilena, por participarem da fase final da pesquisa. O empenho de vocês na construção da rede de transporte e da tabulação dos dados aliviou minha tão pesada carga.

Ao Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Amazonas, por entender a importância e incentivar a capa-

citação de seus servidores.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM, pela bolsa de doutorado, sem a qual seria inviável desenvolver meus estudos fora do meu estado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGEP-UFSC), por me proporcionar uma ambiente adequado para o desenvolvimento de minhas pesquisas doutorais.

Ao bispo Ireno Lucas, aos pastores Kennedy e Célia Prado, aos pastores Ademir Jr. e Patrícia Corrêa, Rafael Spudeit e Bárbara Bittencourt da Igreja Sara Nossa Terra de Florianópolis, por cuidarem de mim e de minha família numa dimensão inimaginável.

Aos muitos amigos que fiz em Florianópolis, pelo constante incentivo.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram nesta caminhada. Ninguém conquista nada sozinho.

Muito obrigado.

Uma criança, um professor, um livro e
um lápis podem mudar o mundo.

Malala Yousafzai

RESUMO

A Educação é um direito subjetivo previsto na Constituição Federal de 1988. Isto quer dizer que o acesso ao ensino fundamental é obrigatório e gratuito, e a sua oferta irregular, importa responsabilidade da autoridade competente. Desde o ano de 2013, este direito passou a incorporar a Educação Infantil e o Ensino Médio. Agora, todo brasileiro tem direito à educação dos quatro aos dezessete anos. Além da ampliação da oferta obrigatória, que implica de imediato em uma pressão extra sobre a rede escolar existente, a educação vem sofrendo uma série de modificações estruturais, como a implantação da educação em tempo integral e o novo Ensino Médio. Estas modificações podem representar uma série de dificuldades aos sistemas escolares que não estiverem atentos a estas mudanças. Para enfrentar esses desafios, esta tese propõe um modelo para ser usado no planejamento estratégico, tático e operacional de Sistemas Públicos de Ensino. Trata-se de um *Model Developed for the Educational System Level* (MDESL), estruturado na forma de um *Mixed Integer Programming* (MIP), por isso denominado, MDESL-MIP, o qual foi resolvido com a utilização do software GAMS/CPLEX. Este modelo permite otimizar os recursos educacionais disponíveis, resolvendo o problema do atendimento da demanda por matrículas, formação de turmas, contratação de professores, ao mesmo tempo que minimizar o deslocamento dos alunos até as escolas. Além disso, permite avaliar o impacto no sistema, dos custos relativos à construção ou desmobilização de escolas. O modelo foi aplicado a um estudo de caso em uma cidade de médio porte na Região Amazônica, onde foram testadas várias configurações para um sistema composto por escolas estaduais e municipais. O MDESL-MIP, mostrou-se capaz de resolver o problema da superlotação das turmas, de diminuir o descolamento médio dos alunos e a aumentar a eficiência na utilização das horas de trabalhos dos professores.

Palavras-chave: Programação Matemática; Modelagem Matemática; Otimização; Planejamento Educacional; Modelos Educacionais; Programação Inteira Mista; Sistemas Públicos de Ensino.

ABSTRACT

The 1988 Brazilian Constitution established education as a basic human right. This means that in Brazil children's access to basic education is required and free and public authorities are responsible for providing it. Since 2013, this human right has included all levels of schooling through twelfth grade (lower, middle, and high schools) meaning that every Brazilian has the right to education from ages four to seventeen. In addition to the growth in required public responsibility, which implies immediate pressure on the existing public school network, education in Brazil is undergoing several structural changes, such as the implementation of full-time schooling and a new and more flexible high school curriculum. These changes can cause difficulties to local school systems if they are not adequately prepared. This doctoral thesis proposes a methodology to help address these challenges in all planning stages (strategic, tactical, and operational). It is the Model Developed for the Educational System Level (MDESL), which was structured as a Mixed Integer Programming model called MDESL-MIP that is solved using GAMS/CPLEX. The model optimizes available educational resources, providing a solution for enrollment demand, teacher supply, while at the same time optimizing costs, including student transportation to and from home. In addition, the model evaluates the impact of school construction and deactivation. The model was applied to a case study in a medium-sized city in the Amazon, for which various different configurations of municipal- and state-run schools were tested. MDESL-MIP solved the problem of student overcapacity in classrooms, shortened the average student transportation time, and raised the efficiency of teacher utilization rates.

Keywords: Mathematical Programming; Mathematical Modeling; Optimization; Educational Planning; Educational Models; Mixed Integer Programming; Public Education Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Número de matrícula, educação básica, Brasil 2007-2014	31
Figura 2	Quantidade de escolas, educação básica, Brasil 2007-2014	31
Figura 3	Total de professores, educação básica, Brasil 2007-2014	32
Figura 4	Estimativa do Percentual do Investimento Público Total em Educação em Relação ao Produto Interno Bruto (PIB), por Nível de Ensino - Brasil, 2000-2014	33
Figura 5	Investimento Público Direto Cumulativo por Estudante, por Nível de Ensino - Brasil 2000-2014	34
Figura 6	Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Fundamental: Anos Iniciais, Brasil 2005-2015	36
Figura 7	Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Fundamental: Anos Finais, Brasil 2005-2015	36
Figura 8	Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Médio, Brasil 2005-2015	37
Figura 9	Evolução da proficiência média em ciências, 2006-2015	37
Figura 10	Evolução da proficiência média em leitura, 2000-2015	38
Figura 11	Evolução da proficiência em Matemática, 2003-2015	38
Figura 12	Metodologia	43
Figura 13	Perguntas sobre planejamento educacional	46
Figura 14	Esquema representativo de um planejamento educacional simples, antes da Segunda Guerra Mundial	47
Figura 15	Modelos Educacionais: Macro Modelos	49
Figura 16	Fluxo entre os anos t e $t+1$, para o sistema escolar brasileiro de 8 anos e primeiro ano do ensino médio	54
Figura 17	Visualização esquemática da formação e alocação de turmas nas escolas (e nas salas de aula)	89
Figura 18	Mapa do Brasil (à esquerda) e mapa do estado do Amazonas (à direita) com o município de Itacoatiara	104
Figura 19	Cidade de Itacoatiara com suas 26 seções urbanas e a região rural	105
Figura 20	Principais vias da cidade, centroides dos bairros (B), escolas estaduais (E) e municipais (M), Itacoatiara, 2016	106
Figura 21	Taxa de crescimento da matrícula para uma coorte de 6 anos utilizando o modelo PROFLUXO	108

Figura 22 Interface do Sistema de Planejamento e Apoio à Decisão para uma escola e CEN01.	123
Figura 23 Padrão de convergência para diferentes configurações no caso de Itacoatiara.	130
Figura 24 Padrão de convergência para diferentes custos de transporte no caso de Florianópolis.	131
Figura 25 Visualização esquemática do sistema de planejamento e apoio à decisão em educação para a alocação de turmas e escolas/-sala de aula.	156
Figura 26 Interface de importação dos dados.	157
Figura 27 Interface principal.	157
Figura 28 Interface SQL.	158
Figura 29 Interface SQL.	158

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Número de estudantes da educação básica matriculados na rede pública de ensino, por etapa e região, Itacoatiara, 2016.	107
Tabela 2	Capacidade da rede pública: Número de salas e assentos (<i>slots</i>), por região e dependência administrativa, Itacoatiara, 2016	109
Tabela 3	Número de turmas, por região e etapa de ensino, Itacoatiara, 2016.	110
Tabela 4	Número de professores contratados em tempo parcial (20 horas/semana), por disciplina e dependência administrativa, Itacoatiara, 2016	111
Tabela 5	Horas-aula exigidas de cada disciplina, e número correspondente de turmas e professores	112
Tabela 6	Descrição dos cenários alternativos	114
Tabela 7	Número de turmas, por série e cenário.	116
Tabela 8	Demanda não atendida em número de alunos por grau para cada cenário	117
Tabela 9	Distância média percorrida por estudante.	119
Tabela 10	Número de professores necessários para atender a demanda em cada cenário	120
Tabela 11	Fator de carga efetiva do professor para cada cenário e disciplina	122
Tabela 12	Valores médios da variáveis duais associadas com a restrição de demanda (2).	125
Tabela 13	Valores das variáveis duais associadas à Restrição de Capacidade (3), por escola/grau para o cenário CEN01.	126
Tabela 14	Características computacionais do estudo de caso de Itacoatiara	129

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PIB	Produto Interno Bruto
PISA	Programme for International Student Assessment
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
SPE	Sistema Públicos de Ensino
MIP	Mixed Integer Programming
GAMS	General Algebraic Modeling System
PNE	Plano Nacional de Educação
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study
PIRLS	Progress in International Mathematics and Science Studies
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
IIPÉ	Instituto Internacional de Planejamento Educacional
MDIL	Models Developed at the Institutional Level
MDESL	Models Developed for the Educational System Level
CELM	Comprehensive-Externally Linked Models
MBM	Mathematical Bases for Models
PMC	Problema das P-Medianas Capacitado
HCM	Hierarchical Capacitated Median Model
EF I	Ensino Fundamental Anos Iniciais
EF II	Ensino Fundamental Anos Finais
EM	Ensino Médio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	25
1.2	RELEVÂNCIA, MOTIVAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO	27
1.2.1	Relevância	27
1.2.2	Motivação	27
1.2.3	Problematização	28
1.2.3.1	O desafio de dimensionar SPE frente às modificações conjunturais	29
1.2.3.2	O desafio do uso eficiente dos recursos destinados à educação	32
1.2.3.3	O desafio da melhoria nos indicadores educacionais	34
1.2.3.4	Como esta tese pretende enfrentar os desafios postos à educação no Brasil?	39
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	40
1.3.1	Objetivo Geral	40
1.3.2	Objetivos Específicos	40
1.4	INEDITISMO, ORIGINALIDADE E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA	40
1.5	LIMITAÇÕES	41
1.6	CARACTERIZAÇÃO METODOLÓGICA DO TRABALHO	41
1.7	ORGANIZAÇÃO DA TESE	44
2	REVISÃO DA LITERATURA	45
2.1	PLANEJAMENTO EDUCACIONAL/ESCOLAR	45
2.2	MODELOS EDUCACIONAIS	48
2.3	MODELOS DE FLUXO	52
2.3.1	Modelos de Fluxo/PROFLUXO	53
2.3.2	Método Probabilidade de Progressão por Série (PPS)	55
2.3.3	Modelo Idade-Período-Coorte (IPC)	56
2.4	TEORIA DA LOCALIZAÇÃO	57
2.4.1	Modelos de Localização Contínuos	61
2.4.2	Modelos de Localização em Rede	64
2.4.3	Modelos de Programação Inteira Mista	68
2.4.3.1	Modelos Não-Capacitados - Único Estágio	68
2.4.3.2	Modelos Capacitados - Único Estágio	71
2.4.3.3	Modelos Multiestágios	73
2.4.3.4	Modelo Multiprodutos	74

2.4.4	Aplicação dos Modelos Matemáticos no Contexto Educacional	75
2.4.4.1	Modelo Multiproduto para Resolver o Problema de Segregação Racial nos EUA	75
2.4.4.2	Problema de Localização de Instalações Públicas Utilizando Modelo Multicritério	77
2.4.4.3	Problema de Localização de Escolas Utilizando P-Mediana e SIG	80
2.4.4.4	Modelo de Localização Hierárquica	81
2.4.4.5	Outra Aplicações	83
2.5	RESUMO DO CAPÍTULO	84
3	PROPOSTA DE UM MODELS DEVELOPED FOR THE EDUCATIONAL SYSTEM LEVEL (MDESL-MIP)	87
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	87
3.2	CARACTERIZAÇÃO FORMAL DO PROBLEMA	88
3.3	MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE ENSINO	89
3.3.1	Conjuntos e Subconjuntos do Modelo	90
3.3.2	Parâmetros do Modelo	90
3.3.3	Modelo Matemático MDESL-MIP	91
3.3.4	Variáveis do Modelo	93
3.4	DISCUSSÃO DO MODELO MDESL-MIP E SUAS VARIAÇÕES	94
3.5	MODELO PARA O PROCESSO DE MATRÍCULA E APOIO À IMPLEMENTAÇÃO GRADUAL DO MDESL-MIP	97
3.6	TÉCNICA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DO MODELO	99
3.7	SÍNTESE DO CAPÍTULO	100
4	APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO MDESL-MIP	103
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	103
4.2	INFRAESTRUTURA DA REDE ESCOLAR DE ITACOATIARA	103
4.3	CENÁRIOS ALTERNATIVOS	113
4.4	RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO MODELO MDESL-MIP	115
4.4.1	Número de turmas	115
4.4.2	Alunos não alocados	116
4.4.3	Deslocamento médio	118
4.4.4	Professores	119

4.4.5	Fator carga efetiva do professor	120
4.5	INTERPRETAÇÃO DAS VARIÁVEL DUAS	124
4.6	ANÁLISE DOS CENÁRIOS E RECOMENDAÇÕES	127
4.7	DESEMPENHO COMPUTACIONAL	129
4.8	ESTRATÉGIA PARA A GESTÃO DA INFRAESTRUTURAS	131
4.9	SÍNTESE DO CAPÍTULO	132
5	CONCLUSÃO E OPORTUNIDADES DE PESQUISA	135
5.1	CONCLUSÃO	135
5.2	OPORTUNIDADES DE PESQUISAS	137
	REFERÊNCIAS	139
	ANEXO A – Sistema Desenvolvido como Suporte à Aplicação do Modelo de MDESL-MIP	155

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A educação tem sido reconhecida como uma pedra angular do desenvolvimento econômico e social (HADDAD et al., 1990). Com as mudanças tecnológicas e a transformação na economia mundial, a educação tornou-se ainda mais importante. Para Steiner (2006), no mundo contemporâneo, o conhecimento é o maior gerador de riquezas, seja ele o conhecimento puro (ciência), o aplicado (tecnologia), ou a capacidade de, a partir dele, produzir riqueza (inovação).

Apesar de sua importância, o direito à educação incorporou-se com grande atraso ao seletor grupo dos Direitos Humanos (HORTA, 1998). Para Oliveira e Araujo (2005), este direito deve incluir o acesso, a permanência na escola, além de um padrão mínimo de qualidade sob o qual o ensino deve estar estruturado. Já Barros e Mendonça (1997), consideram a educação de um país, uma riqueza que se acumula ao longo de décadas de investimento, da mesma forma que o estoque de capital físico da economia é o resultado de décadas de investimento em máquinas, equipamentos e infraestrutura. Segundo Balassiano, Seabra e Lemos (2005), há evidências empíricas que comprovam que investimentos na educação formal e no treinamento da força de trabalho desempenham um papel crucial no desenvolvimento econômico de uma sociedade.

No Brasil, a educação é um dos direitos sociais previstos na Constituição de 1988. Apesar disso, segundo Oliveira (2007), a cobertura de matrículas em todo o território nacional ainda é um desafio a ser vencido. Nos últimos anos, houve um avanço neste sentido, mas ainda há um grande caminho a ser percorrido até que a quantidade de vagas oferecidas pelos Sistemas Públicos de Ensino (SPE), seja suficiente para atender a demanda da população em idade escolar. A legislação que regulamentava o direito à educação, bem como todo o sistema educacional, seja ele público ou privado, é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96). Esta é a segunda vez que a educação conta com uma Lei específica, a primeira foi em 1961 (LDB 4.024/61).

Embora a participação do PIB brasileiro nos gastos com educação pública seja alta, mesmo quando comparada aos padrões internacionais, segundo Bruns, Evans e Luque (2012), os resultados do *Programme for International Student Assessment* (PISA) não refletem esse investimento. Estes exames são realizados a cada três anos pela

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), e são voltados para jovens de 15 anos. Apesar de ter melhorado de 2003 a 2009, os resultados do Brasil estão consistentemente no quartil inferior, tendo diminuído em 2012 e 2015, se comparado a 2009 (PISA, 2012, 2015). A busca de uma solução para esta realidade inclui estabelecer objetivos educacionais alcançáveis e, a outra, é alcançá-los de maneira eficiente com os recursos disponíveis.

A busca por uma educação pública eficiente e eficaz em anos formativos (isto é, educação infantil, ensino fundamental e ensino médio) é um objetivo comum declarado por todas as sociedades, em todos os lugares. Para Johnes, Portela e Thanassoulis (2017), a eficiência se dá quando os resultados são produzidos com o menor nível de recurso, seja financeiro, ou da capacidade inata dos alunos. Por outro lado, segundo Barrett et al. (1991), a educação eficaz é aquela que beneficia tanto os estudantes individualmente, como toda a sociedade, que ajuda os alunos a aprenderem de um modo mais rápida do que de outra forma, e que usa métodos positivos em vez de coercivos. Como a educação pública é um esforço no qual a evidência apropriada de resultados duradouros só pode ser verificada a longo prazo, não é raro que esses objetivos escapem, mesmo aos formuladores de políticas mais bem-intencionados.

Esta tese parte da premissa de que muito poderia ser conseguido através da racionalização de procedimentos, a fim de aproveitar ao máximo os recursos pedagógicos já comprometidos e a infraestrutura existente. Isso é particularmente relevante no Brasil, uma vez que, conforme será demonstrado ao longo deste trabalho, apesar do aumento nos gastos com a melhoria da educação nas últimas décadas, os resultados, em geral, não tem correspondido às expectativas.

É neste contexto que esta pesquisa encontrou nos *Models Developed for the Educational System Level* (MDESL), uma classe de modelos adequados para as diversas etapas do planejamento de Sistema Públicos de Ensino (SPE). O problema em questão foi modelado matematicamente utilizando Programação Matemática, sendo desenvolvido um *Mixed Integer Programming* (MIP), implementado em GAMS/CPLEX.

1.2 RELEVÂNCIA, MOTIVAÇÃO E PROBLEMATIZAÇÃO

1.2.1 Relevância

A legislação brasileira garante a todos os cidadãos acesso ao ensino público, gratuito e de qualidade. O *acesso* e *permanência* na escola são considerados princípios básicos previstos em lei. Todo cidadão deve gozar de igualdade de condições para cursar a educação básica de forma gratuita, inclusive os que não tiveram acesso na idade própria. Cabe, portanto, ao Estado criar estas condições, sendo o seu não oferecimento ou sua oferta regular, passíveis de responsabilização junto às autoridades competentes.

A acessibilidade é tratada nesta pesquisa, a partir de sua perspectiva logística e do conceito definido por Menezes e Pizzolato (2014) apud Brau, Merce e Tarrago (1980). Segundo os autores, uma escola de Ensino Infantil ou de Ensino Fundamental possui uma excelente acessibilidade se estiver a uma distância de até 500 metros das casas dos estudantes; entre 500 e 1.000 metros, a acessibilidade é classificada como ótima; entre 1.000 e 1.500 metros, como regular; entre 1.500 a 2.000 metros, a acessibilidade é baixa; e distâncias acima deste valor são classificadas como acessibilidade péssima.

Ao se propor um modelo matemático voltado para o planejamento de Sistemas Públicos de Ensino (SPE), busca-se otimizar a utilização dos recursos públicos destinados à educação, contribuindo com o cumprimento constitucional de que todos têm direito à educação pública, gratuita e de qualidade.

1.2.2 Motivação

O Brasil passou por um processo de transição a partir do século XIX até meados da década de 1940, caracterizado pelas altas taxas de natalidade e mortalidade. A partir desse período, com a incorporação às políticas públicas dos avanços na medicina, o país experimentou uma primeira fase na transição demográfica com a queda na taxa de mortalidade e a permanência das altas taxas de natalidade, onde o crescimento da população e a disposição do governo em fomentar o desenvolvimento, criaram o ambiente propício para um período de expansão generalizada (FURTADO, 1959).

Todos esses fatores lançaram bases para uma expansão da eco-

nomia, através da industrialização e, como consequência, do aumento da demanda por serviços públicos sobre tutela do Estado, algo sem precedente. As taxas de natalidade começam sua trajetória de queda em meados de 1960. Na década de 1970, tanto a mortalidade quanto a fecundidade encontravam-se em franco processo de declínio de seus níveis gerais. Nos anos 1980 e 1990, a diminuição da taxa de natalidade, devido a esterilização feminina no país, concorreu para a continuidade das quedas de taxas de crescimento, sendo que em 2043, segundo previsões feitas pelo IBGE, o Brasil deve alcançar sua população máxima, algo em torno de 243 milhões de habitantes. Entretanto, esta saturação não deve ocorrer de forma homogênea. Grandes centros urbanos devem atingir esta situação bem antes disso, enquanto regiões menos adensadas estarão mais sensíveis a variações de sua população (FONSECA, 2004; IBGE, 2006, 2014a).

No Brasil, os Sistemas Públicos de Ensino (SPE) são os responsáveis por oferecer educação gratuita, e apesar do processo de universalização do acesso ao ensino ter-se iniciado no Brasil, Lima (2011) afirma que ele ainda não está inteiramente concluído, o que torna desafiador a criação de mecanismos que permitam que indivíduos que ainda não concluíram sua formação básica, prossigam nos estudos de modo a ter acesso à cultura e ao conhecimento científico.

Diante da dinâmica demográfica, considerando ser possível a otimização dos SPE no Brasil, e do intrínseco direito à educação formal, decidiu-se investigar o planejamento educacional a partir de sua perspectiva logística, no que tange a localização das escolas instaladas e em funcionamento, do acesso dos alunos a estas escolas, da formação de turmas para atender a demanda, do número necessário de professores a serem alocados às turmas formadas, e do impacto dos custos associados à ampliação de escolas ou sua eventual desmobilização, a partir do princípio da economicidade, do espírito público e da eficiência/eficácia na utilização dos recursos destinados à educação.

1.2.3 Problematização

A Constituição Brasileira declara que é dever dos pais matricular seus filhos assim que estes atinjam a idade de 4 anos, e é responsabilidade dos SPE fornecerem educação a todos que procuram por matrícula. Entretanto, diferente do que ocorre em outros países, os estudantes em idade escolar no Brasil não são obrigados a frequentar uma escola de uma determinada região, ou mesmo de um município,

com base na localização geográfica de sua residência. Estas características dificultam o dimensionamento e otimização de SPE baseados unicamente na localização das escolas e dos estudantes.

Em geral, todos são livres para se matricularem em qualquer escola pública, independentemente de onde moram. Nos casos onde a demanda por vagas em uma determinada escola é muito grande, a matrícula pode ocorrer por ordem de inscrição, através de sorteio ou aplicando exames de admissão, sendo garantida a permanência na escola, salvo em caso de reprovação. O objetivo desta seção é contextualizar os desafios enfrentados pela educação pública no Brasil, a partir das seguintes dimensões:

- Capacidade dos Sistemas Públicos de Ensino - Nesta dimensão, busca-se verificar se os SPE possuem capacidade de atender a demanda por vagas. Isto é particularmente importante, ao se considerar que as leis brasileiras garantem educação básica formal a todos os cidadãos, dos quatro aos dezessete anos;
- Financiamento da Educação - Para que todo cidadão tenha acesso à educação pública, gratuita e de qualidade, é fundamental a garantia de seu financiamento;
- Indicadores Educacionais - Uma forma de medir a eficiência e a eficácia na utilização dos recursos destinados à educação é através de indicadores educacionais.

As próximas subseções trazem estatísticas sobre estas dimensões, de modo que a conjuntura na qual a educação brasileira se encontra seja melhor compreendida.

1.2.3.1 O desafio de dimensionar SPE frente às modificações conjunturais

Dados apresentados por Oliveira e Araujo (2005) mostram que desde 1985, o número de vagas oferecidas no Brasil supera a população com idade entre 7 e 14 anos. No ano de 2002, essa relação chegou 130%, ou seja, o Ensino Fundamental no Brasil possui mais vagas que alunos matriculados. Mas isso não acontece em todos os lugares. Os autores alertam para a existência de regiões onde haveria falta de vagas, sendo a incúria administrativa e os processos migratórios apontados como motivos para isto. Os locais onde a oferta de vagas não são

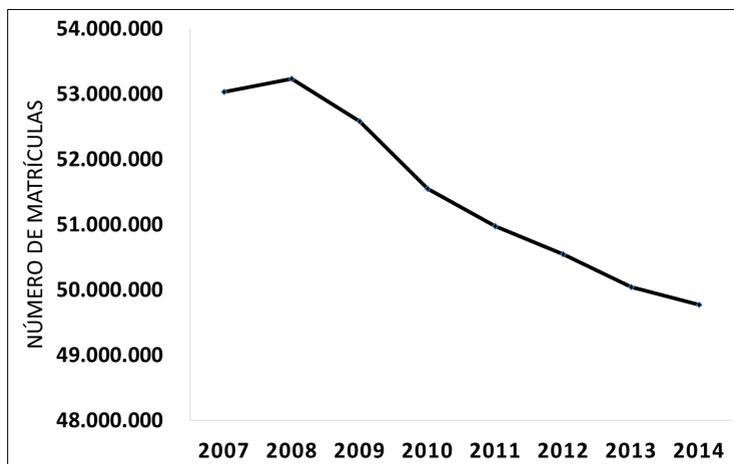
suficientes para atender a demanda, contradizem as garantias previstas na legislação brasileira.

Segundo a LDB, os Estados, os Municípios e o Distrito Federal devem se articular para oferecer educação básica gratuita, dos quatro aos dezessete anos, organizada em Pré-Escola (4 a 6 anos de idade), Ensino Fundamental (6 a 14 anos de idade) e Ensino Médio (15 a 17 anos de idade), sendo o Ensino Fundamental dividido em dois ciclos, com o primeiro de cinco anos (Ensino Fundamental Anos Iniciais), e o segundo de quatro anos (Ensino Fundamental Anos Finais). Mas nem sempre foi assim. Até 1971, a educação era obrigatória apenas nos quatro primeiros anos do ensino básico, e por oito anos até 2010, quando a exigência da pré-escola foi introduzida. (BRASIL, 2015).

Em 2014, o Congresso Nacional aprovou o Plano Nacional de Educação (PNE) através da Lei n.º 13.005. Esta lei define objetivos e metas para o ensino infantil, básico e superior, que devem ser realizados entre os anos de 2014 e 2024 (BRASIL, 2014). O PNE considera que os sistemas educacionais devem ser inclusivos em todas as etapas, de modo a viabilizar o acesso à educação básica obrigatória e gratuita. Para que as metas previstas no PNE sejam atendidas, há a questão do seu financiamento. A vinculação de um percentual do PIB para a execução do PNE representa um avanço nesta direção. Grande parte das metas previstas no PNE estão associadas a ampliação da estrutura existente, na busca pela universalização do acesso a educação infantil e básica, e pela oferta da educação em tempo integral, o que exigirá que se planeje o aumento de capacidade das redes estaduais e municipais de ensino. Este planejamento, por sua vez, deve ocorrer de forma articulada, visto a complementaridade intrínseca existente entre as várias modalidades de ensino oferecidas.

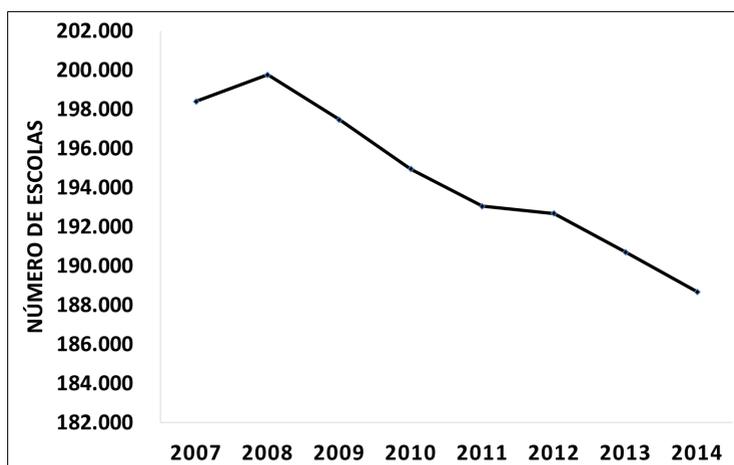
O número de alunos matriculados na educação básica, em 2014, superava a quarenta e nove milhões e setecentos mil estudantes, distribuídos em uma rede escolar com mais de cento e oitenta e oito mil escolas espalhadas por todo o território nacional, atendidos por mais de dois milhões, cento e noventa mil professores. Entretanto, como é possível observar nas Figuras 1 e 2, entre os anos 2007 e 2014, houve uma diminuição, tanto no número de alunos matriculados, quanto de escolas. Para *Ervatti, Borges e Jardim (2015)*, a população brasileira vem passando por uma significativa transformação, caracterizada por alterações em seu regime demográfico e estrutura etária. A redução da matrícula, portanto, pode ser explicada, pelo menos em parte, pela diminuição da população de crianças e jovens.

Figura 1 – Número de matrícula, educação básica, Brasil 2007-2014



Fonte: INEP, 2016

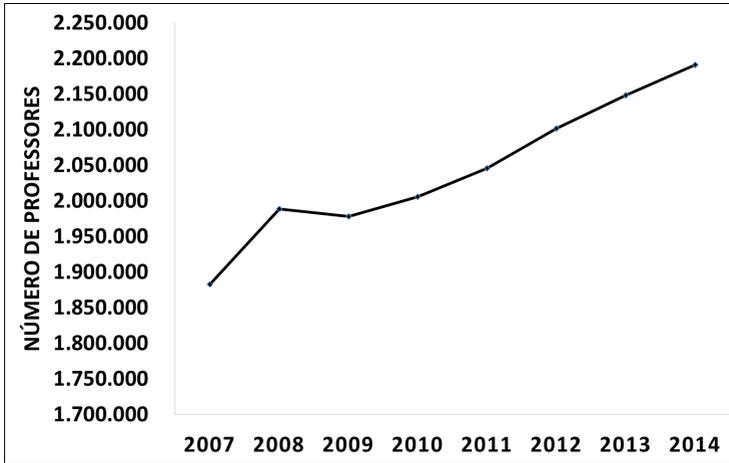
Figura 2 – Quantidade de escolas, educação básica, Brasil 2007-2014



Fonte: INEP, 2016.

Por outro lado, como é possível ver na Figura 3, a quantidade de professores apresenta comportamento contrário, com uma forte tendência de crescimento entre os anos 2007 e 2014.

Figura 3 – Total de professores, educação básica, Brasil 2007-2014



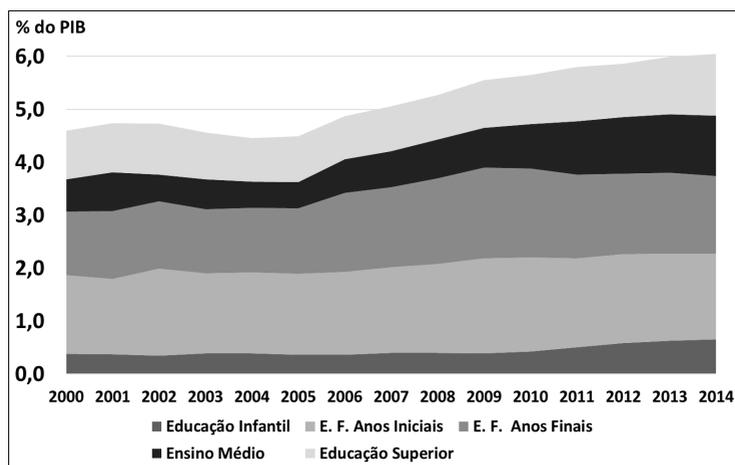
Fonte: INEP, 2016.

1.2.3.2 O desafio do uso eficiente dos recursos destinados à educação

Quanto ao financiamento da educação pública, diferente do que ocorre em outros países onde a escolarização é financiada principalmente por impostos locais, no Brasil, grande parte dos recursos destinados às escolas públicas chegam através de transferências federais para estados e municípios. Estes recursos, segundo o INEP (2017b), têm aumentando ao longo dos últimos anos. A Figura 4 apresenta a evolução da participação percentual do PIB destinada à educação entre os anos de 2000 e 2014 para todos os níveis de ensino.

Os investimentos em educação passaram de 4,6% para 6,0% do PIB em menos de duas décadas. Entretanto, este crescimento não se deu de forma homogênea. Os maiores aumentos ocorreram na Educação Infantil, que atende alunos da pré-escola, passando de 0,4% para 0,7% do PIB, e no Ensino Médio, que passou de 0,6% para 1,1% do PIB. O Ensino Fundamental possui a maior parcela dos recursos, sendo que estes representavam 2,7% em 2004, passando para 3,1% em 2014. Os investimento no Ensino Fundamental sofreram variações ao longo desses anos, oscilando entre aumentos e diminuições do percentual em relação ao PIB. Apesar de não ser foco desta pesquisa, registra-se que neste mesmo período os investimentos na Educação Superior passaram

Figura 4 – Estimativa do Percentual do Investimento Público Total em Educação em Relação ao Produto Interno Bruto (PIB), por Nível de Ensino - Brasil, 2000-2014



Fonte: INEP, 2016.

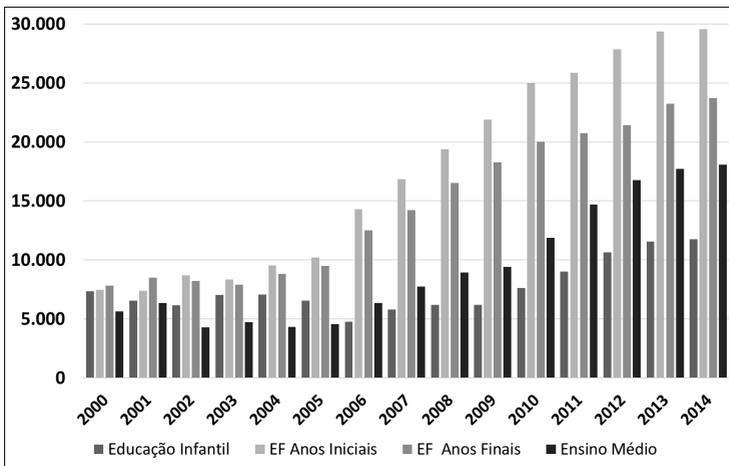
de 0,9% para 1,2% do PIB brasileiro. Em 2004, de todo o recurso destinado à educação, 79,9% foram para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), enquanto 20,1%, para a Educação Superior. Em 2014 este percentual variou para 80,7% para a Educação Básica, e 19,3% para a Educação Superior.

A Figura 5 apresenta a evolução da estimativa do investimento público direto em educação cumulativo por estudante, ao longo da duração teórica dos estudos¹, entre os anos 2000 e 2014 (com valores atualizados para 2014). No ano 2000, o gasto estimado por estudante da Educação Infantil durante toda a sua formação teórica era de R\$ 7.365,00, passando para R\$ 11.757,00 em 2014, o que representa um incremento de 59,6%. A etapa correspondente à Educação Infantil - Anos Iniciais - foi a que recebeu maior aumento em termos nominiais. No ano 2000, o valor gasto era de R\$ 7.463,00, passando para R\$ 29.556,00 no ano 2014, ou seja, um aumento de 296%. Já o Ensino Fundamental - Anos Finais - recebeu um incremento de 203%, passando de R\$ 7.818,00

¹ A duração teórica de ensino, corresponde ao tempo ideal que um aluno deveria permanecer em cada ciclo de estudo. Para a educação básica, são 14 anos, divididos em: 3 anos na Educação Infantil, 8 anos no Ensino Fundamental (recentemente este ciclo passou a durar 9 anos), e 3 anos no Ensino Médio

no ano 2000, para R\$ 23.703,00, em 2014. O Ensino Médio passou de R\$ 5.643,00 em 2000 para R\$ 18.064,00 em 2014, com um aumento de 220,6%. O gasto total estimado, no ano 2000 para os 14 anos de estudo, correspondente ao Ensino Fundamental, era de R\$ 28.280,00, com uma média anual de R\$ 2.020,00. Em 2014, este valor correspondia a R\$ 83.083,00, com uma média de R\$ 5.943,50 por ano de estudo. Este aumento representa um incremento da ordem 194,0% nos investimentos em educação por anos de formação entre o ano 2000 e 2014.

Figura 5 – Investimento Público Direto Cumulativo por Estudante, por Nível de Ensino - Brasil 2000-2014



Fonte: INEP, 2016.

As estatísticas apresentadas nesta seção, evidenciam um expressivo aumento nos investimentos em educação entre os anos 2000 e 2014, em todas as etapas da Educação Básica. Entretanto, segundo Barrett et al. (1991), a eficácia dos investimentos em educação só pode ser percebida ao longo dos anos, a partir da apropriação social do conhecimento por ele gerado. Já a sua eficiência pode ser medida a partir de metas estabelecidas.

1.2.3.3 O desafio da melhoria nos indicadores educacionais

A literatura apresenta uma série de trabalhos que se dedicam em medir os ganhos alcançados por meio dos investimentos em educação.

Segundo Biesta (2012), nas últimas décadas houve um aumento notável da mensuração educacional. Esse interesse tem sua manifestação mais proeminente em estudos comparativos internacionais, tais como o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), o *Progress in International Reading Literacy Study* (PIRLS), e o *Programme for International Student Assessment* (PISA). Esse estudos resultam em tabelas classificatórias ou *ranking* e fornecem informações sobre os sistemas de educação nacionais em relação a outros países.

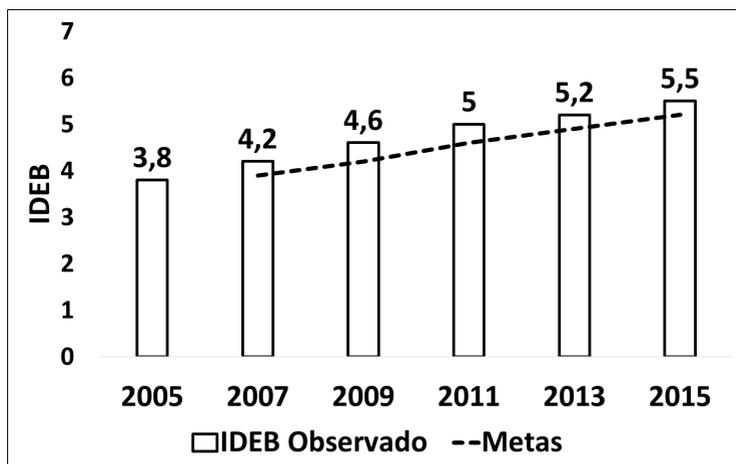
Em 2007, o governo brasileiro criou o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), que reúne os resultados de dois conceitos importantes: fluxo escolar e o desempenho nas avaliações. Ele é calculado a partir dos dados sobre aprovação, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho nas avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) - para as unidades da federação e a Prova Brasil - para os municípios. É a ferramenta para o acompanhamento das metas de qualidade da educação básica, estabelecidas pelo Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) .

Segundo o INEP (2017a), os indicadores educacionais são uma forma de medir a qualidade do ensino, analisando os dados referente ao desempenho dos alunos em seu contexto econômico e social. Servem para o monitoramento dos sistemas educacionais, tendo como principais parâmetros o acesso, a permanência e a aprendizagem de todos os alunos, contribuindo, dessa forma, para a criação de políticas públicas voltadas para a melhoria da qualidade da educação e dos serviços oferecidos à sociedade pela escola. As Figuras 6, 7 e 8 apresentam as metas e os resultados do IDEB consolidados para o Brasil, entre os anos de 2005 e 2015, para o Ensino Fundamental: Anos Iniciais e Anos Finais, e Ensino Médio. Nelas, é possível ver que o Ensino Fundamental: Anos Iniciais superou suas metas em todos os anos observados (Figuras 6). Já o Ensino Fundamental: Anos Finais (Figuras 7) e o Ensino Médio (Figura 8), não alcançaram suas metas nos anos de 2013 e 2015.

Apesar de importante, o IDEB é um olhar para a educação a partir de parâmetros internos. Para avaliar o rendimento escolar dos alunos no Brasil em relação a outros países, deve-se usar outro indicador. O PISA é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 8º ano do ensino fundamental na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. As Figuras 9, 10 e 11 apresentam séries históricas dos resultados brasileiros na avaliação de ciências, leitura e matemática, respectivamente.

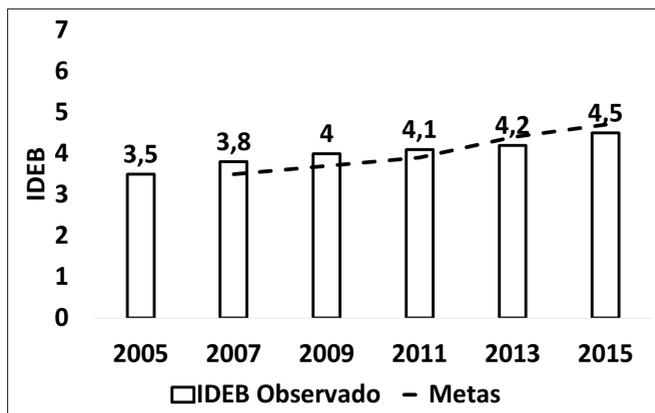
Segundo o INEP (2017b), o desempenho dos alunos no Brasil

Figura 6 – Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Fundamental: Anos Iniciais, Brasil 2005-2015



Fonte: INEP, 2016.

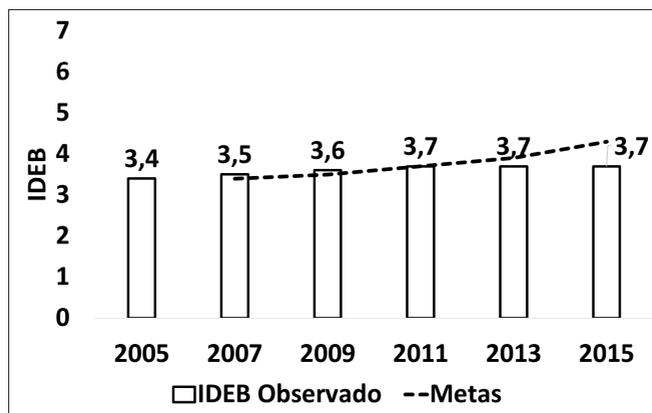
Figura 7 – Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Fundamental: Anos Finais, Brasil 2005-2015



Fonte: INEP, 2016.

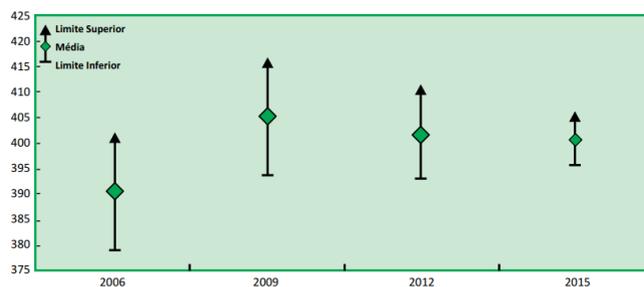
está abaixo da média em relação a alunos de outros países membros da OECD em ciências (401 pontos, comparados à média de 493 pon-

Figura 8 – Metas X Desempenho no IDEB - Ensino Médio, Brasil 2005-2015



Fonte: INEP, 2016.

Figura 9 – Evolução da proficiência média em ciências, 2006-2015



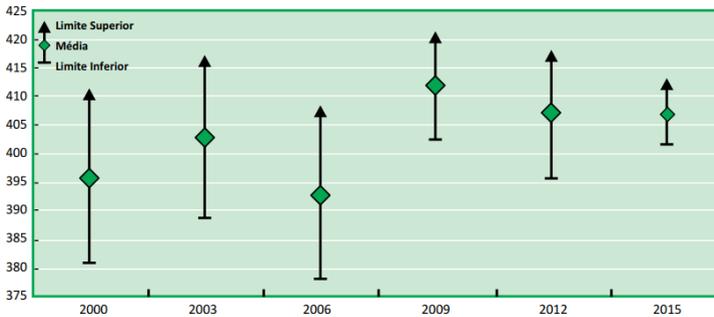
Fonte: INEP (2017b).

tos), em leitura (407 pontos, comparados à média de 493 pontos) e em matemática (377 pontos, comparados à média de 490 pontos). (OECD, 2016). O aumento nos investimentos em educação também aparecem nesse relatório. O gasto acumulado por aluno entre 6 e 15 anos de idade no Brasil (USD 38.190) equivale a 42% da média de gasto por aluno em países da OECD (USD 90.294), sendo que esta proporção correspondia a 32% em 2012. O relatório ainda destaca que os aumentos no investimento em educação precisam agora ser convertidos em melhores

resultados na aprendizagem dos alunos.

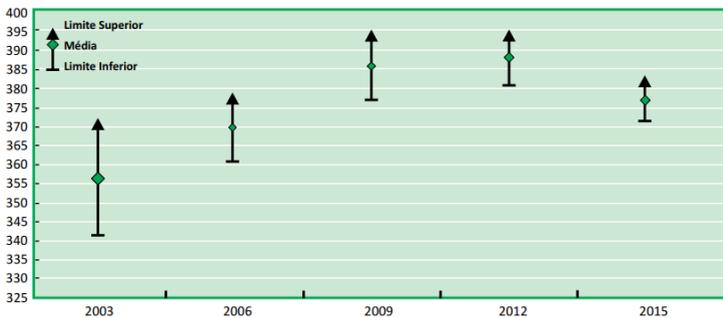
Outros países, como a Colômbia, o México e o Uruguai obtiveram resultados melhores em 2015 em comparação ao Brasil, muito embora tenham um custo médio por aluno inferior. O Chile, com um gasto por aluno semelhante ao do Brasil (USD 40.607), também obteve uma pontuação melhor (477 pontos) em ciências.

Figura 10 – Evolução da proficiência média em leitura, 2000-2015



Fonte: INEP (2017b).

Figura 11 – Evolução da proficiência em Matemática, 2003-2015



Fonte: INEP (2017b).

Em relação ao desempenho em ciências, o relatório afirma que não foram encontradas evidências empíricas que apontem diferenças estatisticamente significativas entre o desempenho dos estudantes brasileiros nas três últimas edições da avaliação. Em comparação ao ano

2000, verificou-se um pequeno aumento (4,7 pontos percentuais) em leitura. Apesar disso, não foram encontradas evidências empíricas que apontem diferenças estatisticamente significativas entre o desempenho nas edições do PISA desde 2000. Já em matemática, o desempenho dos estudantes brasileiros no PISA 2015 foi estatisticamente menor do que na edição de 2012.

1.2.3.4 Como esta tese pretende enfrentar os desafios postos à educação no Brasil?

A conjuntura apresentada até aqui mostra que o direito constitucional à educação vem se ampliando. O oferecimento obrigatório de mais etapas de ensino e a ampliação da educação em tempo integral, atuam de forma conjunta, aumentando cada vez mais a pressão sobre os Sistemas Públicos de Ensino no Brasil. Viu-se que os recursos destinados ao financiamento da educação aumentaram substancialmente nos últimos anos, e que, por outro lado, os indicadores qualitativos ainda não refletem o aumento deste investimento.

Diante dos desafios educacionais apontados, esta tese pretende responder, pelo menos, às seguintes questões:

- Como planejar Sistemas Públicos de Ensino integrando as etapas estratégica, tática e operacional?
- Como dimensionar Sistemas Públicos de Ensino, de modo que este seja capaz de atender a demanda por vagas?
- Como utilizar de forma eficiente os recursos já comprometidos, como por exemplo, salas de aula e o quadro de professores existente?
- É possível resolver o problema da superlotação nas salas de aula?
- Como melhorar a acessibilidade dos alunos, alocando-os em escolas próximas às suas casas?
- Como melhorar a eficiência alocativa da carga horária dos professores?

A partir desta reflexão, os objetivos geral e específicos são definidos na próxima seção, de modo que estes questionamentos sejam respondidos.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo Geral

Propor um modelo de programação matemática para o planejamento de Sistema Públicos de Ensino (SPE), que considere a disponibilidade de recursos humanos e a estrutura física existente, de modo a atender a demanda por vagas de alunos espacialmente distribuídos sob uma determinada região.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Caracterizar conceitualmente o problema de planejamento e otimização de Sistemas Públicos de Ensino (SPE);
2. Identificar os principais parâmetros a serem considerados por ocasião do planejamento de SPE;
3. Enunciar as variáveis que serão utilizadas na tomada de decisão;
4. Construir indicadores para avaliar os resultados obtidos;
5. Desenvolver um Sistema de Apoio a Decisão para o gerenciamento da base de dados necessária à construção do modelo matemático, bem como na análise dos resultados obtidos.

1.4 INEDITISMO, ORIGINALIDADE E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

Esta tese se baseia em um amplo levantamento tipo *survey* para se determinar o estado da arte no que tange aos modelos utilizados no planejamento escolar, e apresenta uma aplicação original na área de Pesquisa Operacional, ao propor um *Mixed Integer Programming* (MIP) da classe dos *Models Developed for the Educational System Level* (MDESL). Foram pesquisados trabalhos publicados nos idiomas inglês, espanhol e português, e estabeleceu-se uma evolução histórica dos MIP, desde o início do século XX, quando os modelos matemáticos foram utilizados para resolver problemas logísticos².

²Como será mostrado na revisão da literatura, o trabalho de Weber (1909) inaugura, o que viria a ser conhecido como Modelos Weberianos de localização industrial.

O modelo MDESL-MIP proposto é inovador, à medida que se concentra em questões táticas do planejamento educacional, ao mesmo tempo que integra o planejamento estratégico ao operacional. Esta integração se dá quando questões como a abertura e o fechamento de escolas, são tratadas juntamente com questões operacionais como, formação de turmas, contratação de professores e alocação de alunos. Além disso, a metodologia utilizada permite a avaliação dos resultados obtidos, como o deslocamento médio dos alunos e medidas de eficiência, como a taxa de utilização das horas de trabalhos dos professores e taxas de utilização das salas de aula.

1.5 LIMITAÇÕES

O modelo foi desenvolvido para ser aplicado em regiões urbanas, adensadas e com uma malha de transporte relativamente bem estruturada. Apesar de sua aplicação ter-se dado em uma cidade da região norte do Brasil, o MDESL-MIP não foi testado em áreas rurais, onde há um espalhamento natural da população local, baixa densidade demográfica e, no caso da região Norte, dificuldades de acesso dos alunos às escolas onde estes foram alocados.

Apesar de integrar várias etapas do planejamento escolar, não estão contempladas neste trabalho:

- a etapa operacional de programação escolar, conhecida na literatura como *timetabling problem*;
- a roteirização escolar (*school routing problem*).

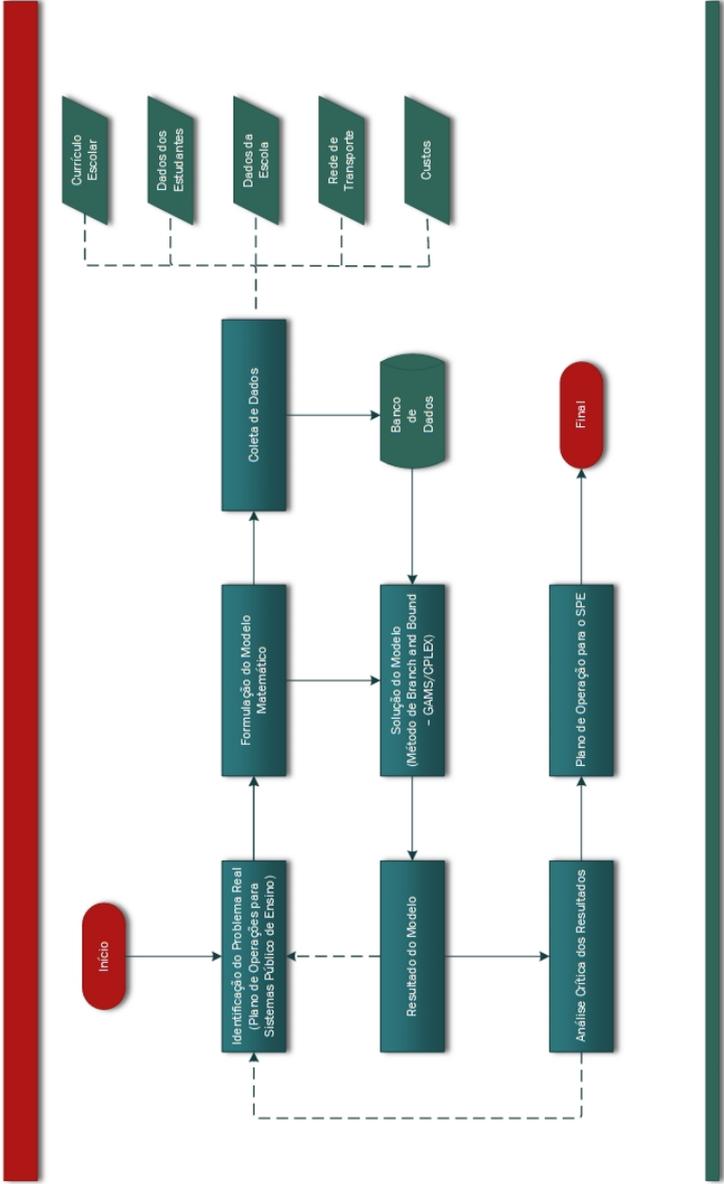
1.6 CARACTERIZAÇÃO METODOLÓGICA DO TRABALHO

Segundo Turrioni e Mello (2011), as principais abordagens científicas são as abordagens indutiva e dedutiva. Os dois tipos de argumentos tem finalidades diversas. O dedutivo tem o objetivo de explicar o conteúdo das premissas e o indutivo tem o desígnio de ampliar o alcance do conhecimento. Miguel (2007) afirma que as abordagens metodológicas mais utilizadas na engenharia de produção e gestão das operações podem ser categorizadas em: levantamentos tipo *survey*, modelamento e simulação, pesquisa-ação e estudo de caso.

Esta tese, é portanto, de natureza aplicada, por possuir características de interesse prático. Quanto aos objetivos, possui características exploratória-normativa, pois envolve levantamento bibliográfico,

análise de exemplos que estimulam a compreensão do problema investigado. Quanto a forma de abordagem, trata-se de uma pesquisa que combina aspectos das pesquisas qualitativa e quantitativa em algumas etapas do processo de pesquisa. Isto fica claro pois, do ponto de vista dos métodos, esta pesquisa realiza um levantamento do tipo *survey* para estabelecer o estado da arte do planejamento escolar, e da modelagem matemática dos *educational models*, mais precisamente dos *Models Developed for the Educational System Level* (MDESL). Em seguida, enuncia-se um modelo *Mixed Integer Programming* (MIP), com o objetivo de otimizar recursos educacionais disponíveis em um Sistema Público de Ensino (SPE). Ao final, um estudo de caso foi realizado, utilizando uma ferramenta computacional desenvolvida. Esta ferramenta implementa o modelo MDESL-MIP proposto e serve como um sistema de apoio à decisão específico para o planejamento educacional. A Figura 12 descreve a metodologia empregada.

Figura 12 – Metodologia



1.7 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este primeiro capítulo faz a introdução ao tema pesquisado, apresenta sua relevância, motivação e o problema tratado, define os objetivos geral e específicos da tese, descreve seu ineditismo, originalidade e sua contribuição científica. Por fim, apresenta suas limitações e a metodologia utilizada. No segundo capítulo é feita a revisão da literatura, dividida em dois grandes grupos. O primeiro fala sobre o planejamento educacional em si, seus conceitos e definições. O segundo, mostra como a Pesquisa Operacional e outras aplicações matemáticas deram suas contribuições ao planejamento educacional. O terceiro capítulo enuncia o problema de otimização e detalha sua formulação matemática, além de descrever sua implementação computacional. Segue-se o capítulo onde é detalhado o estudo de caso e os resultados obtidos com o modelo proposto. O quinto capítulo traz as conclusões e recomendações. Ao final do trabalho são apresentadas as referências utilizadas nesta pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA

No capítulo anterior foi visto que apesar dos esforços governamentais para ampliar a cobertura na oferta de educação pública, e do incremento de verbas para o seu financiamento, os indicadores que medem o desempenho escolar, como o IDEB e PISA, ainda não refletem, de forma efetiva, esses investimentos. Os recursos destinados ao financiamento de uma educação pública e gratuita são limitados e concorridos por outros setores do governo. Seu uso eficiente é, portanto, fundamental. Neste sentido, o planejamento escolar surge como uma importante ferramenta para que as melhorias tão desejadas na educação sejam alcançadas.

Neste capítulo será feita uma revisão bibliográfica, que está dividida em duas partes. A primeira, aborda como o planejamento escolar, em seu sentido *lato*, é tratado pela literatura especializada. A outra, investiga como a Pesquisa Operacional contribuiu ao longo dos anos na modelagem e solução de problemas educacionais. Pretende-se, a partir da análise desses dois tópicos, estabelecer a ligação entre o planejamento educacional e as soluções matemáticas propostas para enfrentar os desafios próprios deste tão complexo tema.

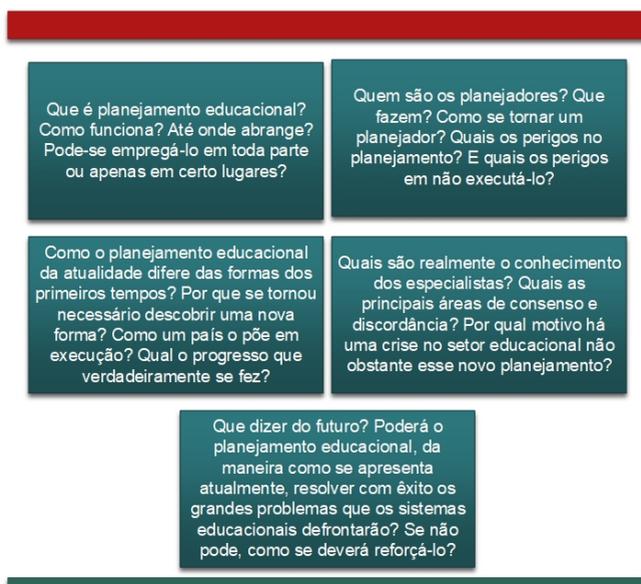
2.1 PLANEJAMENTO EDUCACIONAL/ESCOLAR

Ribeiro (2007) acredita que nenhum planejamento se desenvolve sem uma base filosófica e uma política de ação. Sendo assim, nenhum planejamento por si efetiva a ação objetivada, o que torna indispensável que ele seja seguido das demais etapas do processo administrativo, que por sua vez depende da vontade, do poder de decisão e da posse dos meios de realização. Apesar de possuir características próprias, o planejamento escolar é uma das aplicações do planejamento geral, estando, portanto, sujeito às suas mesmas dependências. Logo, pode-se considerar seu moderno processo de escolarização como um empreendimento semelhante às empresas econômicas em geral, e sua viabilidade se prende ao mesmo processo administrativo.

Em se tratando de planejamento escolar, uma das obras mais completas disponíveis na literatura foi publicada na década de 1970 pelo Instituto Internacional de Planejamento Educacional (IIPE). Trata-se de uma série de trabalhos intitulados *Fundamentos do Planejamento Educacional*. Este opúsculo se dirige a dois grupos de leitores: aos que

exercem funções de planejamento e na administração da educação, e a outro, menos especializados, tais como altos funcionários governamentais e líderes civis que procuram adquirir uma compreensão mais ampla do planejamento educacional e de como podem auxiliar mais eficazmente o desenvolvimento nacional. A Figura 13 apresenta uma série de perguntas próprias deste tipo de planejamento, onde o seu êxito está intrinsecamente relacionado às respostas a esses questionamentos.

Figura 13 – Perguntas sobre planejamento educacional



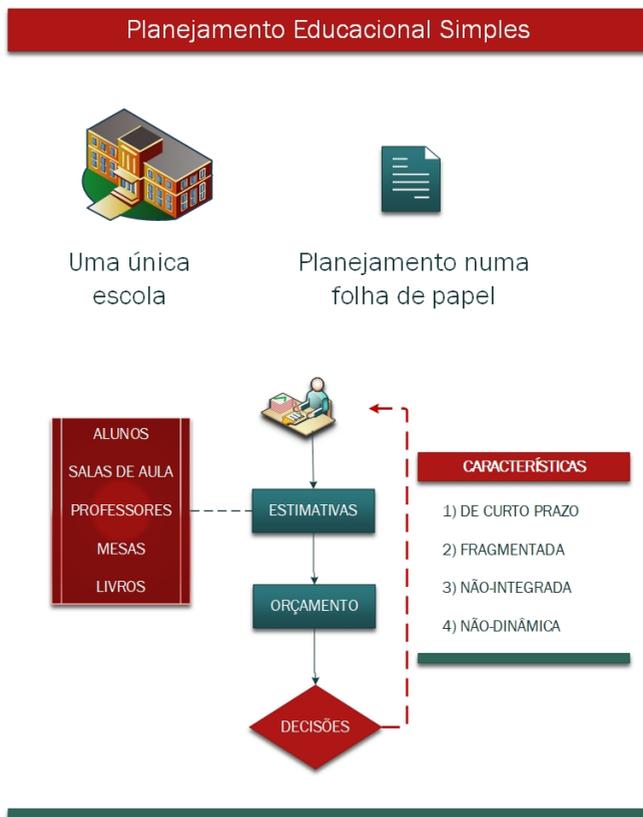
Fonte: Adaptado de Coombs (1970).

Seja o que for o planejamento educacional, Coombs (1970) afirma que este não é um remédio milagroso para curar sistemas educacionais precários, mas algo que trata do futuro, buscando esclarecimentos no passado, e propõe a seguinte definição:

O planejamento educacional é, em seu sentido genérico mais amplo, a aplicação de análise sistemática e racional ao processo de desenvolvimento educacional com o objetivo de tornar a educação mais efetiva e eficiente no atendimento às necessidades e metas dos estudantes e da sociedade. (COOMBS, 1970).

A Figura 14 mostra, esquematicamente, a espécie típica de planejamento que se processava na maioria dos países, antes da Segunda Guerra Mundial.

Figura 14 – Esquema representativo de um planejamento educacional simples, antes da Segunda Guerra Mundial



Fonte: Adaptado de Coombs (1970).

Conforme descreve a figura, o planejamento praticado era de curto prazo, estendendo-se até o orçamento do ano seguinte. Às exceções ocorriam quando era necessário a construção de *facilidades* (escolas), ou por ocasião da implantação de um novo programa escolar, cujo horizonte de planejamento se alargava um pouco mais. Outra característica importante era a fragmentação na cobertura do sistema educa-

cional, visto que as partes do sistema eram planejadas separadamente. Havia, também, a não-integração, no sentido das instituições serem planejadas com autonomia, sem compromissos explícitos com a evolução da sociedade e economia em geral. A última característica, trata do planejamento não-dinâmico, sendo essencialmente estático, mantendo intactas suas principais características ao longo dos anos.

Para Ribeiro (2007), a terminologia correta é *planejamento escolar*. Para o autor, este termo atende melhor às limitações de um campo que visa tratar de empreendimentos que se ajustam à concepção de empresa, do ponto de vista econômico. Diferenciar estes termos é considerado importante, dado o sentido lato da palavra educação. Por outro lado, a palavra *escola* possui características e problemas próprios de uma empresa, como pessoal, material, serviços e financiamento. Assim, o *planejamento escolar* pode ser tratado pela administração, enquanto o *educacional* estaria fora de seu escopo. Um amplo debate sobre o planejamento educacional (ou escolar) pode ser encontrado em Vaizey e Sheehan (1968), Châu (1969), Hallak (1969), Ruscoe (1969), Anderson (1970), Griffiths (1970), Harbison (1970), Poignant (1970), Woodhall (1970), Callaway (1971), Hon-Chan (1971), Phillips (1971), Rowley (1971), Beeby (1973), McKinnon (1973), Montgomery (1976), Furter (1977), Neves et al. (2013), Schultz (1988), Azanha (1993), Baffi (2002), Neri et al. (2009), Goldberg (2013), Fernandes (2014), Ferreira (2014), Fernandes e Gentilini (2014).

Coombs (1970), acredita que as profundas mudanças ocorridas pela sociedade após a Segunda Guerra Mundial, o processo de industrialização presente em muitos países, o surgimento de novas tecnologias e o processo de democratização do acesso à educação, foram fatores que tornaram os sistemas educacionais maiores e mais complexos. Este contexto fez surgir uma nova classe de problemas, que tratam exclusivamente do uso da modelagem matemática em problemas educacionais, e que serão tratados na próxima seção.

2.2 MODELOS EDUCACIONAIS

Segundo Andrade (2015), a expressão *Pesquisa Operacional* foi utilizada pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial. O conhecimento adquirido ao desenvolver métodos para resolver problemas de operações militares, e o sucesso dessas aplicações, levou o mundo acadêmico e empresarial a utilizar essas técnicas em problemas de administração. Desde o início, a educação foi um dos muitos campos que se

beneficiou desse novo conhecimento.

Em março de 1966, o comitê técnico e científico da OECD criou um programa experimental para avaliar o uso da Pesquisa Operacional no planejamento educacional (OECD, 1966). Como resultado, foram publicados uma série de artigos que mostram como aplicar modelos matemáticos, simulação e a teoria do controle sistemático ao planejamento educacional. Em um desses trabalhos, Correa (1967) classificou os modelos educacionais em dois grupos: Micro e Macro Modelos. O primeiro grupo, formado por modelos relacionados ao processo educacional em si, trata de aspectos psicológicos do aprendizado, da interação professor-aluno, e entre os próprios alunos, mas sem aplicação no planejamento e administração educacional. Já os modelos que possuem alguma referência aos sistemas educacionais, fazem parte dos Macro Modelos, onde os principais elementos considerados são *número de estudantes, de professores, de prédios*, dentre outros aspectos, sem fazer menção ao que acontece em sala de aula, ou aos processos psicológicos envolvidos. Os macro modelos estão divididos em duas categorias, detalhadas na Figura 15.

Figura 15 – Modelos Educacionais: Macro Modelos



Fonte: Adaptado de Correa (1967).

Dentre as muitas técnicas descritas para a modelagem e solução de problemas relacionados ao planejamento educacional, a Programação Linear possui papel de destaque, e por essa razão, Correa (1967) se limita em tratar apenas das situações em que ela é aplicada.

McNamara (1970), apresenta um trabalho na mesma linha, mas direcionado ao chamado *vocational technical education*, onde destaca o uso de modelos de Programação Matemática na tomada de decisões, no contexto educacional. Os temas recorrentes em sua pesquisa são: to-

mada de decisão, planejamento educacional, programação linear/não-linear/dinâmica, modelos matemáticos/educacionais, modelos espaciais, produtividade, educação vocacional, análise econômica/econométrica, eficiência na alocação de recursos e economia da educação. Além da ampla discussão, este trabalho apresenta resultados da aplicação de um modelo matemático na Philadelphia, Pennsylvania. Kahn (1970), nesta mesma época identificou pelo menos cento e vinte e três modelos matemático de planejamento educacional sendo desenvolvidos em mais de vinte países membros da OECD.

A revisão feita por Johnstone (1974), emprega uma estrutura bidimensional para classificar e rever as pesquisas concluídas até àquela data. A primeira dimensão se refere à amplitude do sistema educacional, e a segunda diz respeito à base matemática sobre a qual o modelo repousa. A primeira dimensão divide os modelo em três níveis:

1. *Models Developed at the Institutional Level (MDIL)*

Modelos Institucionais - o primeiro nível, trata de modelos que se referem a uma única unidade de ensino ou a um pequeno grupo intimamente relacionado de instituições, e que possuem características semelhantes. Este tipo de modelo são os que tentam estimar o número de estudantes de uma escola/faculdade para um determinado ano. Também fazem parte dos MDIL, modelos usados para estimar o número de funcionários, o orçamento escolar, a quantidade de equipamentos e o número de instalações.

2. *Models Developed for the Educational System Level (MDESL)*

Modelos para Sistemas Educacionais - o segundo nível de modelos são aqueles desenvolvidos para o planejamento de sistemas educacionais. Os MDESL têm como foco a previsão de matrículas, o número de professores e o financiamento educacional, a partir de uma perspectiva mais ampla, que pode ser um país, um estado, um município ou uma parte significativa do sistema.

3. *Comprehensive-Externally Linked Models (CELM)*.

Modelos Agregados - Esses modelos examinam a relação entre o sistema educacional (ou parte dele) e as dimensões econômicas e de força de trabalho mais amplas da sociedade. A complexidade e alcance dos dados exigidos pelos CELM, bem como a própria natureza do relacionamento envolvido, fizeram com que apenas alguns pesquisadores desenvolvessem modelos nessa área.

A segunda dimensão trata dos modelos matemáticos, chamados por Johnstone (1974), de *Mathematical Bases for Models* (MBM). A base matemática empregada no desenvolvimento de modelos vai desde a simples manipulações aritméticas, até modelos que requerem sofisticados cálculos matemáticos. Há uma grande diversidade na forma como os MBM são tratados. Entretanto, Johnstone (1974) se restringe a quatro grande grupos: Modelos Determinísticos, Modelos de Cadeia de Markov, Modelos de Regressão e Modelos de Programação Matemática, todos produzindo informações valiosas.

Johnes (2015), realizou uma revisão sobre a aplicação da Pesquisa Operacional na Educação. Neste trabalho, cada seção aborda um tópico específico desse campo do conhecimento, e discute as técnicas que foram usadas para abordá-lo. A primeira seção inclui ferramentas que auxiliam a formulação de políticas, e compreende essencialmente, sistemas de planejamento de longo prazo e de apoio à decisão na alocação de recursos, estando assim relacionada com a eficácia da educação. A segunda, examina medidas de desempenho e eficiência como um meio para a avaliação da utilização dos recursos. A terceira, centra-se na atribuição de alunos a cursos e escolas, em operações escolares no curto prazo, tais como roteamento e programação de transporte estudantil, bem como a aplicação de exames e quadro de horário. Os tópicos tratados no artigo são: modelos de planejamentos, modelos de eficiência e avaliação de desempenho e os modelos de programação e roteirização.

Recentemente, Johnes, Portela e Thanassoulis (2017), apresentaram uma revisão sobre a eficiência na educação. Os autores afirmam que diante da concorrência por financiamentos públicos, é importante que a educação seja fornecida da forma mais eficiente possível. Neste sentido, a eficiência ocorre quando os resultados da educação são produzidos com a menor quantidade de recursos (seja financeiro ou, por exemplo, a capacidade inata dos alunos). Os temas tratados no trabalho são: métodos de estimativa de fronteira, avaliação de equidade e eficácia na alocação de recursos para o ensino primário e secundário, avaliação de aspectos de eficiência e produtividade no ensino superior, uso de classificações de alunos para avaliar o desempenho no ensino superior e, trabalhos metodológicos com especial referência à educação. Outros trabalhos apresentam o uso de modelos matemáticos em contextos similares, tais como a gestão de universidades e no planejamento de cursos técnicos, e podem ser visto em Arora (1972), Schroeder (1973), Halstead (1979), Bleau (1981), Pizzolato, Raupp e Alzamora (2012).

Outro problema com importantes registros na literatura, da classe dos *location problems*, é a localização de escolas, sendo o modelo de

P-Mediana, a principal técnica utilizada. No Brasil, os primeiros registros são de Pizzolato (1994), Pizzolato e Silva (1997), que propôs uma heurística para problemas de P-Mediana de grande porte, com aplicação em escolas em uma área urbanizada com sérios problemas de escolarização, e mostrou a utilização deste modelo em duas escolas do ensino básico na região metropolitana do Rio de Janeiro, onde andar é o meio mais comum de ir para a escola. Este trabalho avaliou a distribuição espacial das escolas e propôs sua localização ideal. Uma série de outros trabalhos que tratam da localização de escolas podem ser vistos em Pizzolato e Silva (1993), Dutra (1998), Barcelos (2002), Pires (2002), Lobo et al. (2003), Pizzolato et al. (2004a, 2004b), Menezes (2010), Menezes, Diallo e Pizzolato (2011), Araya et al. (2012), Carvalho (2012), Pizzolato, Raupp e Alzamora (2012), Pizzolato e Menezes (2013), Menezes e Pizzolato (2014), Rodrigues e Mayerle (2014), Castillo-López e López-Ospina (2015).

Johnes (2015), afirma que as técnicas de atribuição de alunos a escolas, salas e turmas tem sido aplicadas com bastante sucesso (*assignment problems*). No início, grande parte da literatura estava interessada na alocação, de modo que o número total de alunos, o tempo de viagem, ou o tamanho das turmas, fossem minimizados. Entretanto, uma importante questão racial, que será vista mais adiante, foi resolvida utilizando Programação Matemática.

Uma das técnicas mais indicadas para este tipo de problema, a Programação Inteira, pode apresentar tempos computacionais proibitivos. O desenvolvimento de heurísticas que enfrentam estes problemas, podem ser vistas em Cooper (1963), Clarke e Surkis (1968), Scott (1970), McDaniel (1975), Knutson et al. (1980), Drezner (1984), Narula (1984), Sutcliffe, Board e Cheshire (1984), Federgruen e Groenevelt (1986), Tewari et al. (1987), Chu e Chu (2000), Gamal e Salhi (2003), Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003), Abdulkadiroğlu, Pathak e Roth (2005), Abdulkadiroğlu, Che e Yasuda (2015).

Diante da importância para o tema pesquisado, nas próximas seções, os Modelos de Fluxo e a Teoria da Localização serão tratados com mais profundidade. Segue-se uma seção onde são destacados os modelos de Programação Matemática utilizados no contexto educacional.

2.3 MODELOS DE FLUXO

As estatísticas oficiais têm importante papel no planejamento e avaliação dos sistemas educacionais. Para Fletcher, Ribeiro e Sawyer

(1988), a função da estatística educacional é de fornecer informações sobre o estado e funcionamento do sistema de ensino, que acompanhadas das informações demográficas e de custos, podem ser úteis para projetar a evolução do sistema em seus aspectos quantitativos e permitir a administração de seu patrimônio. No Brasil, os modelos de fluxo tiveram importante papel na análise de estatísticas oficiais, no planejamento e na avaliação dos sistemas educacionais.

Segundo Fletcher, Ribeiro e Sawyer (1988) e Fletcher e Ribeiro (1989), os indicadores educacionais obtidos a partir do modelo PROFLUXO são úteis na estimativa de demandas futuras, no planejamento da contratação de professores, na construção de novas escolas, na compra de material em geral, de livros didático, todos fundamentais para o adequado atendimento da população estudantil.

A seguir, serão detalhados os modelos PROFLUXO, Probabilidade de Progressão por Série (PPS) e o Idade-Período-Coorte (IPC).

2.3.1 Modelos de Fluxo/PROFLUXO

Uma discussão detalhada sobre os modelos de Fluxo Escolar e o Modelo PROFLUXO pode ser vista em Thonstad (1980), Klein e Ribeiro (1991), Golgher (2005).

O Modelo de Fluxo pode ser descrito pelas equações (1) e (2).

$$R_{k,t+1} + I_{k+1,t+1} + E_{k,t} = M_{k,t} \quad (1)$$

$$R_{k,t+1} + I_{k,t+1} = M_{k,t+1} \quad (2)$$

onde temos:

$M_{k,t}$ = Número de matriculados na série k no ano t, $k = 1, \dots, 9$ ¹

$I_{k,t}$ = Número de ingressos novos na série k (promovidos da série k-1) no ano t, $k = 1, \dots, 9$,

$R_{k,t+1}$ = Número de repetentes na série k no ano t + 1,

$E_{k,t}$ = Número de evadidos entre a série k e a série k+1 no ano t, $k = 1, \dots, 8$.

Para o modelo PROFLUXO, um aluno evadido pode ser um aluno aprovado ou um aluno não aprovado, o que permite adicionar ao

¹A 9ª série, $k=9$, representa a 1ª série do ensino médio, no antigo sistema formado por oito séries do ensino básico.

modelo a equação (3):

$$E_{k,t} = E_{k,t,a} + E_{k,t,n} \tag{3}$$

onde $E_{k,t,a}(E_{k,t,n})$ é o número de evadidos aprovados (não aprovados) na série k.

Seja $A_{k,t}$, o número de aprovados na série k no ano t.

Então,

$$E_{k,t,a} = A_{k,t} - I_{k+1,t+1} \tag{4}$$

$$E_{k,t,n} = M_{k,t} - R_{k,t+1} - I_{k+1,t+1} - E_{k,t,a} \tag{5}$$

As hipóteses básicas do Modelo de Fluxo são apresentadas pela equação (2), onde um aluno matriculado no ano (t+1) é um aluno novo ou um aluno repetente, e pela equação (1), onde este aluno estava matriculado no ano t. Um aluno novo na série k, no ano (t+1) é, por definição, um aluno aprovado na série (k-1), se $k \geq 2$, no ano t, e que se matricula pela primeira vez na série k e, portanto, é um aluno promovido. Para a 1ª série, um aluno novo é simplesmente um aluno que se matricula pela primeira vez nesta série. Portanto, um aluno repetente é qualquer aluno que se matriculou no ano t na série k, e se rematriculou na mesma série no ano t+1. A Figura 16 representa as equações (1), (2) e (3).

Figura 16 – Fluxo entre os anos t e t+1, para o sistema escolar brasileiro de 8 anos e primeiro ano do ensino médio.

Série no ano t	Série no ano t + 1									Ea	En	(E)	Soma
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª				
1ª	R _{1,t+1}	I _{2,t+1}								E _{1,t,a}	E _{1,t,n}	(E _{1,t})	M _{1,t}
2ª		R _{2,t+1}	I _{3,t+1}							E _{2,t,a}	E _{2,t,n}	(E _{2,t})	M _{2,t}
3ª			R _{3,t+1}	I _{4,t+1}						E _{3,t,a}	E _{3,t,n}	(E _{3,t})	M _{3,t}
4ª				R _{4,t+1}	I _{5,t+1}					E _{4,t,a}	E _{4,t,n}	(E _{4,t})	M _{4,t}
5ª					R _{5,t+1}	I _{6,t+1}				E _{5,t,a}	E _{5,t,n}	(E _{5,t})	M _{5,t}
6ª						R _{6,t+1}	I _{7,t+1}			E _{6,t,a}	E _{6,t,n}	(E _{6,t})	M _{6,t}
7ª							R _{7,t+1}	I _{8,t+1}		E _{7,t,a}	E _{7,t,n}	(E _{7,t})	M _{7,t}
8ª								R _{8,t+1}	I _{9,t+1}	E _{8,t,a}	E _{8,t,n}	(E _{8,t})	M _{8,t}
9ª									R _{9,t+1}	E _{9,t,a}	E _{9,t,n}	(E _{9,t})	M _{9,t}
Novos	I _{1,t+1}												
Soma	M _{1,t+1}	M _{2,t+1}	M _{3,t+1}	M _{4,t+1}	M _{5,t+1}	M _{6,t+1}	M _{7,t+1}	M _{8,t+1}	M _{9,t+1}				

Fonte: Klein e Ribeiro (1991)

Segundo Rios-Neto (2004), o modelo PROFLUXO permite fazer

análises precisas com relação ao ensino brasileiro, constituindo-se em importante ferramenta para a demografia da educação. Além disso, o modelo possibilita a obtenção de resultados com diferentes recortes analíticos: por sexo, por região, por idade do aluno, por renda, dentre outros. Outra vantagem do método, comum aos modelos matemáticos, é permitir uma análise rápida, sistemática e consistente, inclusive para estudos com grandes quantidades de informação. Com ele é possível também captar as relações entre muitas características internas do sistema educacional e algumas variáveis econômicas. O modelo permite, se utilizado em conjunto com progressões demográficas e análise de custos, prever futuras demandas dos insumos básicos do sistema educacional, por exemplo, recursos financeiros, professores, livros e escolas. Alguns indicadores derivados da aplicação do modelo PROFLUXO são: proporção de ingressados e aprovados, taxa de cobertura e evasão escolar, proporção de ingressados e aprovados e idades modais.

2.3.2 Método Probabilidade de Progressão por Série (PPS)

Conforme é possível ver em Rios-Neto (2004), o método Probabilidade de Progressão por Série (PPS) inspira-se no método demográfico de estimativa da fecundidade intitulado Razão de Progressão por Parturição (Parity Progression Ratios). Em essência, o método estima a fecundidade e o seu padrão a partir do número de filhos nascidos vivos de uma determinada coorte de mulheres. Esta medida permite estimar a taxa de fecundidade total, bem como analisar o padrão de controle da natalidade a partir de uma determinada parturição. No caso educacional, a proposta é trocar filhos por séries concluídas. Assim, a metodologia pode gerar o cálculo dos anos médios de estudo concluídos (análogo à taxa de fecundidade total), além de ajudar na análise do padrão de evasão definitiva por série escolar, padrão este que é similar à terminação por parturição no caso da fecundidade.

Este método permite a criação de cenários através dos anos médios de estudo, considerando tanto a tendência histórica quanto a formulação de cenários de políticas públicas. É possível especular, por exemplo, sobre quais seriam os anos médios de estudo concluídos de uma coorte que entrasse no Ensino Fundamental num momento em que a repetência nas três primeiras séries fosse totalmente eliminada. O método também permite a projeção de segmentos de escolaridade em uma determinada coorte, por exemplo, porcentagem de analfabetos, porcentagem de pessoas com até quatro anos de estudo, com de

cinco a oito anos de estudo, e assim por diante.

Para uma determinada coorte, temos a seguinte definição:

$$e_i = \frac{P_{i+1}}{P_i}$$

onde:

e_i = probabilidade de progressão da série i para a série $i + 1$;

P_{i+1} = pessoas na coorte que concluíram pelo menos a série $i + 1$;

P_i = pessoas na coorte que concluíram pelo menos a série i .

Com as PPSs é possível definir a proporção da coorte que possui pelo menos k anos de estudo. É possível, também, o cálculo da probabilidade de uma população possuir exatos k anos de estudo, ou qualquer outro intervalo de escolaridade, o número médio de anos de estudo de uma coorte, ou seja, a escolaridade média obtida através do somatório do conjunto da população com pelo menos k anos de estudo, com k variando de 1 ao maior número possível de anos de estudo completo, dentre outras estimativas.

2.3.3 Modelo Idade-Período-Coorte (IPC)

Segundo Golgher (2005), o método IPC (Modelo Idade-Período-Coorte), consiste no ajuste de um modelo estatístico tendo como base os dados empíricos anuais. No caso da *proporção de aprovados*, utilizam-se os valores de PPS como variável dependente. São três variáveis explicativas: a idade do indivíduo (I), o período da pesquisa (P) e a coorte do indivíduo (C), o que dá origem aos nome do modelo. Para os aprovados, o modelo toma a seguinte forma:

$$\ln \left(\frac{e_k}{1 - e_k} \right) = \alpha + \beta_{id}X_{id} + \beta_pX_p + \beta_cX_c \quad (6)$$

onde e_k é a probabilidade de progressão por série da série k para a série $k + 1$; X_{id} é a idade do indivíduo; X_p é o período; X_c é a coorte. Os coeficientes α e os β s são obtidos pela regressão. A partir dos coeficientes obtidos na regressão (6), obtêm-se os valores de PPS esperados. O modelo IPC permite também fazer projeções com relação ao número de aprovados e matriculados tendo como base os coeficientes

das regressões dos modelos lineares generalizados.

A partir dos coeficiente obtidos na regressão dada por (6), é possível obter-se os valore PPS esperados. Para estimar os matriculados, a metodologia é similar ao descrito anteriormente, conforme pode ser visto em (7), a seguir:

$$\ln\left(\frac{m_k}{1 - m_k}\right) = \alpha + \beta_{id}X_{id} + \beta_pX_p + \beta_cX_c \quad (7)$$

onde m_k é a proporção de matriculados por série.

O modelo IPC permite, também, realizar projeções com relação ao número de aprovados e matriculados, tendo como base, os coeficientes das regressões dos modelos lineares generalizados. A variação temporal observada nos coeficientes é extrapolada para um futuro próximo, a partir da simulação de cenários.

2.4 TEORIA DA LOCALIZAÇÃO

Em tempos mais recentes, a abordagem matemática em relação aos Problemas de Localização aparecem com Cavalieri em 1647, que considerou o problema de encontrar um ponto, cuja a soma das distâncias a três pontos dados, fosse mínima. Ele mostrou que cada lado deve fazer um ângulo inferior a 120° com o ponto mínimo dado. Heinen em 1834, observou que em um triângulo com ângulo de 120° , o vértice deste ângulo, é em si, o ponto mínimo. Fagnano em 1775, mostrou que o ponto para o qual a soma das distâncias dos vértices de um quadrilátero é mínima, é dado pela intersecção das diagonais. Tedenat em 1810, encontrou, para o caso de n pontos que, a soma dos cossenos dos ângulos entre qualquer linha arbitrária no plano e o conjunto de linhas que ligam os pontos dados com o ponto mínimo, deve ser igual a zero. Finalmente, Steiner provou em 1837, que as condições necessárias e suficientes são que, a soma dos cossenos e senos dos ângulos acima mencionados, seja igual a zero. (COOPER, 1963).

O trabalho de Weber (1909) representa um marco nos estudo de Localização e Transporte, tanto que esta classe de problemas é conhecida como *problemas de Weber* ou *problemas weberianos*. O apêndice matemático apresenta o problema da localização geométrica, onde se pretende obter o menor custo de transporte, ao se enunciar o *triângulo locacional*, onde A_1 representa um depósito de materiais, A_2 um depósito de combustível e A_3 um lugar de consumo. Supõem-se que serão necessários a_1 toneladas de materiais e a_2 toneladas de combustíveis

para produzir a_3 toneladas de produtos. Sendo r_1 , r_2 e r_3 as distâncias em relação a A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente, serão necessárias para a produção, $k = a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3$ toneladas-milhas de custos de transporte. A questão dada é, para que posições de P , estes custos são os menores possíveis? Enquanto, P estiver do lado de fora do triângulo locacional $A_1A_2A_3$, qualquer aproximação de P para um dos lados do triângulo deve resultar na redução de todas as três distâncias r_1 , r_2 , r_3 , e, assim, na redução dos custos de transporte. Portanto, a localização geométrica do ponto mínimo, não se encontra no lado exterior do triângulo, devendo encontrar-se ou no interior do triângulo ou em sua borda.

Os estudos sobre localização tomaram um novo impulso com a publicação de Hakimi (1964), que generalizou os conceitos de *centro* e *vértice mediano* de um grafo para o *centro absoluto* e *mediano absoluto* de um grafo ponderado. Estes resultados foram utilizados para encontrar a localização ideal de um *centro de comutação* em uma rede de comunicação e para localizar o melhor lugar onde construir uma delegacia de polícia em um sistema de rodovias. Neste trabalho foi mostrado que a localização ideal de um centro de comutação é sempre um vértice da rede de comunicação, enquanto a melhor localização para a delegacia de polícia não é necessariamente em um cruzamento. Desde então, são inúmeras as publicações relacionadas ao tema. Segundo Drezner (2013), nos últimos 50 anos, com o advento dos computadores, os profissionais de pesquisa operacional e de logística reconheceram a importância dos modelos de localização planares, até então investigados basicamente por matemáticos, por oferecerem soluções eficientes e de baixo custo, para problemas de logística. São muitas as aplicações para os modelos de localização de instalações. Por exemplo:

- Instalações desejáveis: armazéns, escolas, correios, piscinas públicas, posicionamento do produto, torres de transmissão de telefonia celular.
- Instalações competitivas: lojas, shoppings, restaurantes, postos de gasolina, agências bancárias.
- Instalações de emergência: hospitais, quartéis de bombeiros, postos de ambulâncias, delegacias de polícia.
- Instalações indesejáveis: aeroportos, prisões, usinas de energia nuclear, lixões, fábricas poluidoras.
- Modelos diversos: órbitas dos satélites, estradas, redes.

Comum a estes modelos é que (a) um conjunto de pontos de demanda é dado, e (b) a função objetivo é uma função das distâncias entre os pontos de demanda e os locais desconhecidos das instalações. O modelo proposto por WEBER, por exemplo, está na categoria de instalações desejáveis, pois a distância mais curta entre os locais de demanda e os de produção são preferíveis. Já os *modelos de localização de instalações competitivas*, tem como objetivo localizar instalações que atraiam os que possuem poder de compra, mas este local deve está associado aos pontos de demanda e próximos aos seus concorrentes. A função objetivo típica de *modelos instalações de emergência*, é a minimização da distância máxima a todos os pontos de demanda. A função objetivo típica dos *modelos de instalações indesejáveis*, é a maximização da distância mínima para pontos de demanda.

Para ReVelle e Eiselt (2005), existem quatro componentes que caracterizam os Problemas de Localização: (1) os clientes, que se presumem serem já localizados em pontos ou em vias, (2) as instalações, a serem localizadas, (3) um espaço, no qual os clientes e instalações estão localizados, e (4) uma métrica, que indica as distâncias ou os tempos entre os clientes e as instalações. Neste trabalho, os autores fazem uma revisão onde apresentam modelos de localização no plano, problemas de localização em rede e, do que o autor chama de *outros* modelos de localização, ou seja, modelo com foco em novas estruturas, em ambientes inusitados e objetivos inteligentes, até então desenvolvidos, como por exemplo, a localização de instalações indesejáveis, balanceamento de objetivos, problemas de localização hierárquicos, problemas de localização de *hubs*, problemas de localização competitivos, problemas combinados de implantação e roteamento, e problemas de capturas.

Segundo Pizzolato, Raupp e Alzamora (2012) os problemas de localização podem ocorrer em dois ambientes de referência: *o plano* e a *rede*. O trabalho de Klose e Drexl (2005), apresenta uma revisão dos modelos contínuos, modelos de localização em rede, modelos de programação inteira mista e algumas outras aplicações, que podem ser, de uma forma bem ampla, classificados da seguinte maneira:

1. A forma ou a topografia do conjunto das potenciais plantas, produz modelos planos, modelos de localização em redes e modelos localização discretos ou de programação inteira mista. Para cada uma destas subclasses, as distâncias são calculadas usando alguma métrica
2. Os objetivos podem ser do tipo *minsum* ou *minmax*. Os modelos *minsum* são projetados para minimizar distâncias médias, e

abrangem predominantemente problemas de localização no setor privado. Os problemas do tipo *minimax* estão interessados em minimizar distâncias máximas, e focam em problemas que surgem no setor público.

3. Modelo sem restrições de capacidade não limitam a alocação da demanda. Se há restrição de capacidade nas potenciais instalações, esta precisa ser considerada. Neste último caso, deve-se observar quando se trata de único ou múltiplos fornecedores.
4. Os modelos de estágio único focalizam em sistemas de distribuição que abrangem apenas uma etapa explicitamente. Em modelos multiestágios devem ser examinados quando o fluxo de mercadorias compreender várias etapas hierárquicas.
5. Os modelos *single-product* são caracterizados pelo fato de que a demanda, o custo e a capacidade de vários produtos podem ser agregados a um único produto homogêneo. Se os produtos são não-homogêneos, seu efeito sobre a concepção do sistema de distribuição tem de ser analisada, isto é, modelos multiproduto precisam ser estudados.
6. Muitas vezes, os modelos de localização baseiam-se no pressuposto de que a demanda é inelástica, ou seja, a demanda independe de decisões espaciais. Se a demanda é elástica a relação entre, por exemplo, a distância e a demanda deve ser considerada de forma explícita. Neste último caso, a minimização dos custos deve ser substituída, por exemplo, pela maximização das receitas.
7. Modelos estáticos tentam otimizar o desempenho de um sistema durante um período representativo. Por outro lado, os modelos dinâmicos refletem dados (custos, demanda, capacidades, etc) que variam ao longo do tempo, dentro de um determinado horizonte de planejamento.
8. Na prática, os dados de entrada dos modelos geralmente não são conhecidos ou possuem incertezas por serem baseados em previsões. Isto define, portanto, duas classes de modelos: os modelos determinísticos, quando as entradas de dados no modelo são (supostamente) conhecidas e os modelos probabilísticos, quando as entradas estão sujeitas a incertezas.
9. Em modelos clássicos a qualidade da alocação da demanda é medida isoladamente para cada par de pontos de oferta e demanda.

Infelizmente, se a demanda é satisfeita completamente durante as visitas de entrega, o custo de entrega não pode ser calculado para cada par de pontos de oferta e demanda separadamente, por exemplo. Modelos combinados de localização/roteamento tratam desta inter-relação.

Nas próximas subseções, será feita uma abordagem matemática para os Problemas de Localização. Serão revisitados os modelos contínuos, os modelos de localização em rede e os modelos de programação inteira mista.

2.4.1 Modelos de Localização Contínuos

Os modelos contínuos (ou de localização planares) são mais importante pela percepção que fornecem do que pela precisão com que modelam problemas de interesse. Isto se dá, visto que alguns dos seus pressupostos básicos serem pouco realistas. Estes modelos podem ser caracterizados por meio de dois atributos essenciais: (a) o espaço de solução é contínuo, ou seja, é possível localizar instalações em qualquer lugar do plano; (b) a distância será medida através de uma métrica adequada, sendo as mais utilizadas, a Manhattan ou distância em ângulo reto, distância Euclidiana ou distância em linha reta e a métrica l_p -distância. Os modelos de localização contínuos requerem o cálculo das coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ para as p instalações. O objetivo é minimizar a soma das distâncias entre as instalações e os m pontos de demandas dados. (FRANCIS; MCGINNIS; WHITE, 1983; KLOSE; DREXL, 2005).

Nestes problemas, também conhecidos como *problema de Weber*, as coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de uma única instalação, devem ser determinadas, de tal modo que a soma (ponderada) das distâncias $w_k d_k(x, y)$ para os pontos de demandas $k \in K$ localizados em (a_k, b_k) , seja mínima. O problema de otimização correspondente é:

$$\min_{(x,y)} \sum_{k \in K} w_k d_k(x, y), \quad \text{onde} \quad d_k(x, y) = \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2} \quad (8)$$

Este problema pode ser resolvido de maneira eficiente através de métodos iterativos. O método de busca *gradient-like* foi proposto originalmente por Weiszfeld (1937), publicado em francês em uma revista Japonesa de matemática, sob o título *Sur le point pour lequel la somme*

des distances de n points donnés est minimum, sendo redescoberto e melhorado por Miehle (1958). Recentemente este artigo foi traduzido para o inglês, e nele, o autor enuncia e prova, de três maneiras diferentes e independentes, o seguinte teorema:

Teorema de Weiszfeld 1 *Seja n pontos distintos A_1, A_2, \dots, A_n , não alinhados sob uma mesma reta no espaço. Então, existe um único ponto, de tal modo que a soma das distâncias a estes n pontos, é mínima. Para um determinado ponto M , temos a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^n \overline{XA_i} > \sum_{i=1}^n \overline{MA_i} \quad (9)$$

válido para qualquer ponto X diferente de M , podendo haver, é claro, mais de um ponto dessa natureza. Este ponto, chamado de ponto mínimo, possui as seguintes características:

Lema 1 *Se existir um único ponto no espaço diferente de A_1, A_2, \dots, A_n , para o qual*

$$\sum_{i=1}^n U(MA_i) = 0 \quad (10)$$

este ponto será o ponto mínimo. Onde $U(R, S)$, corresponde a um vetor que parte de R e aponta para S .

Lema 2 *Se existir um único ponto A_k , entre A_1, A_2, \dots, A_n , tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^n {}'U A_k A_i \leq 1 \right| \quad (11)$$

o símbolo \sum' indica que o k ésimo termo deve ser excluído do somatório, e o ponto A_k será, então, o ponto mínimo.

As melhorias feitas por Miehle (1958) consistiram na análise de três métodos que atacaram os problema de minimização *link-length*. Todos os métodos analisados, partem de um sistema com um conjunto de pontos fixos a serem interligados a uma rede, cuja soma das distâncias, seja mínima.

Nos métodos *mecânicos* e *numérico-analítico*, as interconexões são feitas através de um número específico de pontos de junção, cujas ligações precisam ser determinadas, embora estas conexões sejam especificadas inicialmente. No método de *soap-film*, configurações de rede

são produzidas diretamente, sem assumir pontos variáveis ou junções. Cada método discutido apresenta vantagens e limitações, mas contribuem de alguma forma para a compreensão e solução do problema.

O método *mecânico* possui as seguintes características: 1) Um sistema relativamente grande pode ser tratado; 2) Pesos podem ser integralmente atribuídos a links individuais; 3) Praticamente nenhum cálculo é necessário; 4) É relativamente rápido em relação aos cálculos manuais; 5) Princípios geométricos podem ser aplicados no posicionamento dos pinos móveis; 6) Possui a inconveniência da *working slack* na cadeia de sua extremidade livre; 7) É necessário um modelo de pontos fixos e outros equipamentos; 8) Restrições podem ser aplicadas a pontos móveis; 9) Permite a atribuição arbitrária de interconexões.

O método *analítico-numérico* possui as seguintes características: 1) Qualquer ponderação relativa pode ser atribuído a um link; 2) Não requer nenhum modelo; 3) Para qualquer tamanho de sistema é necessário cálculo computacional; 4) Possui alta precisão; 5) Restrições podem ser colocadas em pontos móveis; 6) Permite a atribuição arbitrária de interconexões e o número de pontos móveis; 7) Pode ser estendido para três dimensões.

O método *soap-film* possui as seguintes características: 1) Cria automaticamente os pontos de junção necessários e suas localizações; 2) Por outro lado, pontos móveis e interconexões não podem ser especificados; 3) Links não podem ser ponderados; 4) Requer um modelo de pontos fixos, equipamentos e materiais; 5) Restrições não são permitidas; 6) Sistemas de grande porte não costumam dar soluções mínimas absolutas.

Uma versão estendida deste problema, também conhecido como *Multisource Weber Problem* (MWP), pretende localizar p , $1 < p < |K|$ instalações e alocar a demanda nas instalações escolhidas. Esta classe de problemas é classificada como NP-hard e pode ser modelado como um problema de programação não-linear inteira mista

$$\min z = \sum_{k \in K} \sum_{j=1}^p (w_k d_k(x_j, y_j)) z_{kj} \quad (12)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^p z_{kj} = 1 \quad \forall k \in K \quad (13)$$

$$z_{kj} \in \mathbb{B}, \quad \forall k \in K, \quad j = 1, \dots, p, \quad (14)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^p, \quad (15)$$

onde $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ e $z_{kj} = 1$, se a demanda do ponto k é atribuída à instalação j . Procedimentos de solução exata reformulam o modelo como um problema de particionamento de conjuntos, as relaxações lineares podem ser resolvidas através da geração de colunas proposta, por exemplo, por Rosing (1992) e Merle et al. (1999), são alguns exemplos de procedimentos para a obtenção de soluções exatas. Algoritmos heurísticos com soluções rápidas foram propostos (p.e. Hansen, Mladenovic e Taillardb (1998), Gamal e Salhi (2003), Zainuddin e Salhi (2007)). O caso específico para $p = 2$ instalações, foi bem analisado por Dearing (1985), Rosing (1992), Chen et al. (1998).

2.4.2 Modelos de Localização em Rede

Nos modelos de localização em rede, as distâncias são calculadas como o caminho mais curtos em um grafo. Os nós representam pontos de demanda, e os potenciais locais de instalação correspondem a um subconjunto de nós e pontos dos arcos. Trata-se de modelos do tipo MWP contínuo, e conhecidos como *problema de p -mediana*. Nestes tipos de problemas, p instalações precisam ser localizadas em um grafo, de tal modo que, a soma das distâncias entre os nós do grafo e a instalação localizada, seja mínima. Como visto anteriormente, Hakimi (1964) mostrou que, no caso de funções distâncias côncavas, é suficiente restringir os nós a um conjunto de pontos candidatos à localização das instalações.

Seja K o conjunto de nós, $J \subseteq K$ o conjunto de instalações em potencial, $w_k d_{kj}$ a distância ponderada entre os nós k e j , y_i é a variável de decisão binária, igual a 1, se o nó j é escolhido como uma instalação (0, caso contrário), e $x_{k,j}$, uma variável de decisão binária que reflete a

atribuição da demanda do nó $k \in K$ para o potencial local de instalação j . Então,

$$\min z = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} (w_k d_{kj}) z_{kj} \quad (16)$$

s.a.:

$$\sum_{j \in J} z_{kj} = 1 \quad \forall k \in K \quad (17)$$

$$z_{kj} - y_j \leq 0 \quad \forall k \in K, j \in J \quad (18)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p \quad (19)$$

$$z_{kj}, y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (20)$$

formalmente descrito como o problema de p -mediana. A função objetivo (16) minimiza a soma das distâncias considerando as demandas; a restrição (17) garante que a demanda será atendida por apenas uma instalação; a inequação (18) impede que a demanda seja alocada em uma instalação não definida como mediana; a equação (19) fixa o número de instalações selecionadas em p . Métodos de solução para o problema de p -mediana foram apresentados por Christofides e Beasley (1982), Hanjoul e Peeters (1985) e Beasley, Bull e Martin (1993).

Agora, considere um problema de p -centro, cujo objetivo é minimizar a distância máxima entre clientes e um número fixo de instalações de serviços a serem determinadas. Infelizmente, para o problema de p -centro, não é possível restringir o conjunto de potenciais locais de instalação a um conjunto de nós, por se tratar de um conjunto côncavo. Entretanto, basta considerar um conjunto finito de pontos sobre os arcos. Estes pontos podem ser determinadas pela interseção dos pontos q para os quais a distância ponderada $w_i d_{iq}$, entre q e o nó $i \in K$, é igual a distância ponderada $w_i d_{iq}$ entre q e outro nó $k \in K$. Nesse problema os vértices não têm peso. Considerando-se os mesmos parâmetros, exceto os pesos, e as mesmas variáveis de decisão e J o conjunto formado pelos pontos de interseção. Então, o modelo de otimização discreto será dado por:

$$\min r \quad (21)$$

s.a.:

$$r - \sum_{j \in J} w_k d_k z_{kj} \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (22)$$

$$\sum_{j \in J} z_{kj} = 1 \quad \forall k \in K \quad (23)$$

$$z_{kj} - y_j \leq 0, \quad \forall k \in K, \quad j \in J \quad (24)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p, \quad (25)$$

$$z_{kj}, y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (26)$$

que descreve formalmente o problema p -centro, que pode ser transformado, a seguir no problema de *cobertura*.

Considere um conjunto $S \subseteq J$, $s \leq p$, de centros com raio $r = \max_{k \in K} \min_{j \in S} \{w_k d_{kj}\}$. Então, o modelo de *cobertura* é dado por

$$\min z = \sum_{j \in J} y_j, \quad (27)$$

s.a.:

$$\sum_{j \in J} a_{kj} y_j \geq 1, \quad \forall k \in K \quad (28)$$

$$y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall j \in J \quad (29)$$

com $a_{kj} = 1$ para $w_k d_{kj} < r$ e $a_{kj} = 0$ para $w_k d_{kj} > r$, calcula um conjunto, de no máximo, p -centros com um raio menor que r , ou mostra que tal conjunto não existe.

O *discrete ordered median problem* (DOMP) contém, entre outros, o problemas de p -mediana e p -centro como casos especiais. O DOMP é uma generalização do clássico problema de localização discreto, definido por Boland et al. (2006), com segue.

Faça A denotar um determinado conjunto de m locais, identificados como um inteiro de $1, \dots, m$, isto é, $A = 1, \dots, m$. Seja $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ uma matriz de custo não-negativos, onde c_{ij} denota o custo de atender a demanda do cliente i a partir de uma instalação localizada no local j . Como é usual em problemas de localização discretos, assumi-se sem perda de generalidade, que o número de locais

candidatos é igual ao número de clientes. Seja, $p \leq m$ o número de instalações a serem localizadas nos locais candidatos. Desde que não se considere nenhuma restrição de capacidade, uma solução para o problema de localização é dada por um conjunto $X \subseteq A$ de p locais, isto é, $|X| = p$. Em tal solução, cada cliente i será servido por uma instalação localizada no local j de X com o menor custo para satisfazer sua demanda, isto é

$$c_{ij} = ci(X) := \min_{k \in K} c_{ik}$$

O que distingue o DOMP do usual problema de localização de instalação não-capacita com um único fornecedor é a função objetivo. Para calcular esta função, os custos para o fornecimento dos clientes, c_1X, \dots, c_mX , são classificados em ordem não-decrescente. Defini-se σ_x como uma permutação em $\{1, \dots, m\}$, para as quais as desigualdades

$$c_{\sigma_x(1)}X \leq c_{\sigma_x(2)}X \leq c_{\sigma_x(m)}X$$

é mantida. Em seguida, aplica-se à função objetivo o fator de custo linear, com coeficiente $\lambda_i \geq 0$, ao j -ésimo menor custo de fornecimento de um cliente, $c_{\sigma_x(i)}X$, para cada $i = 1, \dots, m$. Seja $\Lambda = \lambda_i$, com $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. O *Discrete Ordered Median Problem* (DOMP), é definido como

$$\min_{X \subseteq A, |X|=p} \sum_{i=1}^m \lambda_i c_{\sigma_x(i)}(X)$$

Para diferentes opções de Λ , obtêm-se diferentes tipos de funções objetivo. Para ver como o DOMP generaliza funções objetivos bem conhecidas, basta modificarmos os valores de Λ , como nos exemplos a seguir. Se fizermos $\Lambda = (1, 1, \dots, 1)$, tem-se o problema de p -mediana; fazendo $\Lambda = (0, 0, \dots, 0, 1)$, tem-se o problema de p -centro; $\Lambda = (\mu, \mu, \dots, \mu, 1)$, $0 < \mu < 1$ leva ao problema μ -centdian, que é uma combinação convexa da mediana e o centro das funções objetivos; e fazendo $\lambda = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, onde as primeiras $M - K$ entradas são zero e a k últimas entradas são um, o que leva o problema k -centra minimizar o custo médio dos clientes mais caros. Ressalta-se que o DOMP pode ser usado em outras funções objetivo de interesse prático. Domínguez-Marín et al. (2005) propõem dois métodos heurísticos para resolução do DOMP, enquanto Boland et al. (2006) propõem um método exato.

2.4.3 Modelos de Programação Inteira Mista

Partindo de um conjunto de potenciais locais de instalação, muitos problemas de localização podem ser modelados como programação inteira mista. Aparentemente, apenas os modelos de localização em rede diferem gradualmente a partir de modelos de programação inteira mista, porque os anteriores podem ser iniciados como modelos de otimização discreta.

Uma classificação aproximada dos modelos de localização de instalações discretos pode ser dada como se segue: (a) modelos único X multiestágios; (b) modelos não-capacitados X capacitados; (c) única X multi-origem; (d) único X multiprodutos; (e) modelos estáticos X dinâmicos, e último, mas não menos importante; (f) modelos com e sem a opção de roteamento incluído.

2.4.3.1 Modelos Não-Capacitados - Único Estágio

O modelo mais simples desta categoria, apenas considera o *tradeoff* entre o custo fixo de operação e o custo de entrega. Segundo Krarup e Pruzan (1983), dado um conjunto finito de possíveis localizações para o estabelecimento de novas instalações ou redimensionamento instalações existentes, o *Simple Plant Location Problem* (SPLP) ou *Uncapacitated Facility Location Problem* (UFLP) lida com a oferta de um único produto (ou mix de produtos standard), onde *simples* significa sem limite de capacidade (KÖRKEL, 1989). Assume-se, portanto, que as instalações não possuem limites de capacidade, de tal forma que, em princípio, qualquer instalação pode satisfazer todas as demandas. Para os custos associados às instalações e ao transporte, busca-se um plano que minimize o número de instalações, suas localizações, bem como o montante enviado de cada unidade aos clientes, de tal modo que toda a demanda seja satisfeita. Descrito matematicamente, a seguir:

$$\min z = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} z_{kj} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (30)$$

s. a.:

$$\sum_{j \in J} z_{kj} = 1, \quad \forall k \in K \quad (31)$$

$$z_{kj} - y_j \leq 0, \quad \forall k \in K, \quad j \in J \quad (32)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq 1, \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad j \in J \quad (33)$$

$$y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall j \in J, \quad (34)$$

O UFLP pode ser formulado de uma forma mais compacta, agregando-se as restrições (32) para $\sum_{k \in K} z_{kj} \leq |K| y_j$. A relaxação-LP deste modelo mais “fraco” pode ser resolvido analiticamente. Entretanto, os limites inferiores são muito fracos. Os problemas de p-mediana e o UFLP estão próximos uns dos outros. Enquanto o número de instalações é fixo no problema de p-mediana, o número de depósitos abertos é uma parte da solução no UFLP. Ambos os modelos podem ser combinados se as restrições de cardinalidade,

$$p_L \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p_U \quad (35)$$

forem adicionadas ao modelo. Este modelo é conhecido como *Account Location Problem* ou problema de p-mediana generalizado. A restrição de capacidade agregada

$$\sum_{j \in J} s_j y_j \geq d(K), \quad (36)$$

onde $s_j > 0$ denota a capacidade máxima dos j depósitos e $d(K) = \sum_{k \in K} d_k$, a demanda total, garantem que as instalações abertas, em uma solução viável, possuem capacidade suficiente para satisfazer toda a demanda. Adicionando a restrição (36) ao UFLP, temos o que Klose e Drexl (2005) chama de *Aggregate Capacity Plant Location Problem - APLP* ou problema de localização de plantas com capacidade total, e que possui a seguinte estrutura,

$$\min z = \left\{ \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} z_{kj} + \sum_{j \in J} f_j y_j : (31) - (34) \text{ e } (36) \right\} \quad (37)$$

Algoritmos de solução exatas para APLP foram desenvolvidos por Thizy (1993), Ryu e Guignard (1992), Klose (1998). A APLP não é importante como um modelo autônomo, mas tem um importante papel como uma relaxação na resolução de modelos capacitados.

O UFLP está intimamente relacionado com problemas de cobertura (ver Balas e Padberg (1976)). Formalmente, o problema de cobertura de conjunto (*Set Covering Problem* - SCP) calcula um conjunto mínimo $\{M_j : j \in S\}$ de uma família $\{M_j : j \in N\}$ de subconjuntos de um conjunto M , tal que $\bigcup_{j \in S} M_j = M$. Fazendo $a_{kj} = 1$ para $k \in K$ e $a_{kj} = 0$ para $k \notin K$, o modelo se converte no modelo de Cobertura dado pelas equações (27) - (29). Segundo Klose e Drexl (2005), o modelo de Cobertura é, em si, um modelo de localização e uma solução ótima para este modelo determina um subconjunto mínimo $S = \{j \in J : y_j = 1\}$ de instalações de modo que cada cliente possa ser alcançado, dentro de uma determinada distância máxima de um dos depósitos escolhidos.

Já o SCP está relacionado com o problema de particionamento de conjuntos (*set partitioning problems* - SPP).

$$\min z = \sum_{j \in J} y_j \quad (38)$$

s. a.:

$$\sum_{j \in J} a_{kj} y_j = 1, \quad \forall k \in K \quad (39)$$

$$y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall j \in J \quad (40)$$

Segundo Garfinkel e Nemhauser (1969), a interpretação deste modelo é obtida considerando um conjunto S de m elementos a serem *particionados* em subconjuntos escolhidos a partir da família $\{S_1, \dots, S_m\}$ de subconjuntos de S . O subconjunto S_j , $j = 1, \dots, n$, é representado por um vetor binário A_j , onde $a_{ij} = 1$, se $i \in S_j$, e 0, caso contrário. A solução do problema de cobertura é uma subfamília $\{S_{j(1)}, \dots, S_{j(p)}\}$, tal que a partição de S (isto é, $S_{j(r)} \cap S_{j(s)} = \Phi$, para todo $r \neq s$ e $\bigcup_{k=1}^{k=p} S_{j(k)} = S$). Uma solução ótima é uma partição que minimize $\sum_j c_j x_j$, onde c_j é o custo de S_j e $x_j = 1$ se S_j está na partição.

Outra importante variação, é o modelo de localização de máxima cobertura (*Maximum Covering Location Problem* - MCLP). Segundo Church e Velle (1974), o MCLP busca maximizar a população a ser atendida dentro de um tempo ou distância estabelecidos a um limitado número de instalações. Definidos em uma rede de nós e arcos, uma

formulação matemática deste problema pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\min z = \sum_{i \in I} a_i y_i \quad (41)$$

s.a.:

$$\sum_{j \in N_i} x_j - y_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (42)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \quad (43)$$

$$z_k, y_j \in \mathbb{B}, \quad \forall j \in J, \quad i \in I \quad (44)$$

onde I denota o conjunto dos nós de demanda; J é o conjunto de locais das instalações; S é a distância além da qual o ponto de demanda é considerado “descoberto” (o valor de S pode ser escolhido de maneira diferente para cada ponto de demanda, se desejar); $d_{i,j}$ é a menor distância entre o nó i e o nó j ; $x_j = 1$ se a instalação é alocada e 0, caso contrário; $N_i = \{j \in J | d_{ij} \leq S\}$ é o conjunto de locais de instalações elegíveis para prover a “cobertura” dos pontos de demanda i . a_i é a população a ser atendida no nó de demanda i ; p número de unidades a serem localizadas.

O MCLP requer o cálculo do subconjunto $S = \{j \in J : y_j = 1\}$ de instalações com cardinalidade p , tal que um número máximo de w_k nós $k \in K$ de demanda ponderada, podem ser cobertos por $j \in S$ instalações dentro de uma distância máxima dada (ver Schilling, Jayaraman e Barkhi (1993), Daskin (2011), Galvão e ReVelle (1996)).

Definindo os parâmetros

$$c_{kj} = \begin{cases} 0 & \forall a_{kj} = 1 \\ \infty & \forall a_{kj} = 0 \end{cases} \quad \text{e } f_j = 1 \quad \forall j \in J$$

expressa SCP como um UFLP.

2.4.3.2 Modelos Capacitados - Único Estágio

Se os depósitos têm escassez de capacidade, as restrições

$$\sum_{k \in K} d_{kj} z_{kj} \leq s_j y_j \quad \forall j \in J \quad (45)$$

limitando o transbordo $\sum_k d_k z_{kj}$ para o depósito selecionado ($y_j = 1$) a sua capacidade s_j precisa ser adicionada. Assim, no caso de escassez de capacidade, o UFLP se transforma no problema de localização de instalações capacitado (*Capacitated Facility Location Problem - CFLP*). Além disso, o UFLP com o aumento do custo unitário de produtividade pode ser modelado como programação inteira mista (*Mixed Integer Programming - MIP*), que se assemelham a estrutura da CFLP, descrito a seguir:

$$\min z = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} z_{kj} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (46)$$

s.a.:

$$\sum_{j \in J} z_{kj} = 1 \quad \forall k \in K \quad (47)$$

$$\sum_{k \in K} d_k z_{kj} - s_j y_j \leq 0 \quad \forall j \in J \quad (48)$$

$$z_{kj} - y_j \leq 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (49)$$

$$\sum_{j \in J} s_j y_j \geq d(K) \quad (50)$$

$$\sum_{j \in J} z_{kj} \leq 1 \quad \forall k \in K, \quad \forall q \in Q \quad (51)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (52)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (53)$$

A formulação estendida do CFLP é um bom ponto de partida, a fim de estudar várias relaxações. Um modo comum para obter limites inferiores para a CFLP é relaxar as restrições (48) e/ou (47) de forma Lagrangeana e acrescentar algumas inequações adicionais que estão implícitas pelas restrições relaxadas e algumas outras restrições. As inequações válidas que são geralmente considerados para esses fins são os limites superiores da variável ou *trivial clique constraints* (49) e da restrição de capacidade agregada (50). Além das duas restrições adicionais (49) e (50), pode-se elaborar uma série de desigualdades válidas que podem ser úteis para aguçar uma relaxação, desde que o subproblema resul-

tante seja tratável. Um grupo de restrições redundantes é facilmente construído como se segue. Seja $\{J_q : q \in Q\}$, $J_q \cap J_k = \emptyset \forall q \neq h$, denote um particionamento do conjunto J de potenciais locais de instalações. Então, as “clique constraints” (51) estão implícitas em (47); no entanto, elas podem ser úteis se as restrições (47) forem relaxadas. Sem considerar as restrições (51), Cornuejols, Sridharan e Thizy (1991) examinaram todas as possíveis aplicações da relaxação/decomposição Lagrangeana para o CFLP.

2.4.3.3 Modelos Multiestágios

Considere um sistema de distribuição composto por instalações em várias camadas de níveis hierárquicos. A localização de instalações em um nível mais alto pode ser determinada independentemente dos locais escolhidos em um nível inferior, se forem atendidas as seguintes condições: os nós de nível superior têm capacidade suficientemente elevada e os custos de manutenção, bem como os custos de transbordo associados a esses nós são proporcionais à quantidade de itens recarregados e enviados, respectivamente. Custo de transbordo da fonte para o depósito podem ser cobrados proporcionalmente ao custo da demanda atribuída. Caso contrário, transbordos abrangendo várias etapas do sistema de distribuição devem ser considerados explicitamente. Claramente, problemas de localização de instalação multiestágios são apresentados se depósitos precisarem estar localizados simultaneamente em várias camadas do sistema de distribuição.

O CFLP pode ser generalizado para o *Two-Stage Capacitated Facility Location Problems* (TSCFLP) ou *modelo de localização de instalações em dois estágios*, se o fluxo de produtos de um estágio predecessor com restrição de capacidade (por exemplo, uma fábrica ou uma central de distribuição) para um potencial depósito, for uma variável de decisão. Seja x_{ij} a quantidade que precisa ser enviada do nó predecessor $i \in I$, com capacidade p_i , para um depósito localizado no nó j . Além disso, seja t_{ij} o custo de transbordo por unidade (contendo, também, o custo manipulação no nó i). Então, o TSCFLP pode ser definido como:

$$\min z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} t_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} z_{kj} + \sum_{j \in J} f_{ij} y_i \quad (54)$$

$$\text{s.a.:} \quad (31) - (35) \quad \text{e} \quad (45)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \in I \quad (55)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = \sum_{k \in K} d_k z_{kj}, \quad \forall j \in J, \quad (56)$$

$$x_{ij} - p_i y_i \leq 0, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (57)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J. \quad (58)$$

2.4.3.4 Modelo Multiprodutos

Os modelos discutidos até agora consideram na demanda agregada, produção, manipulação, bem como do custo de distribuição. Além disso, a capacidade de produção, os nós de depósito e de transbordo devem ser dado a todos os produtos. Tal agregação não é válida, se vários produtos necessitam de diferentes capacidades dos nós da rede. Neste caso, deve-se recorrer a um modelo multiproduto, onde, por exemplo, as capacidades dos nós, a procura, bem como os fluxos, são separados, respeitando grupos de produtos homogêneos.

Seja I o conjunto de famílias de produtos $i \in I$ e (em adição ao custo fixo f_i) $g_{i,j}$, o custo fixo do produto. Então, o *Multi-Commodity* ou *Multi-Activity Uncapacitated Facility Location Problem* (MUFLP), pode ser descrito como a seguir:

$$\min z = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} q_{ijk} w_{ijk} + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} g_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in J} f_i y_i \quad (59)$$

$$\text{s.a.:$$

$$\sum_{j \in J} w_{ijk} = 1, \quad \forall i \in I, \quad k \in K \quad (60)$$

$$z_{ij} - y_i \leq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J \quad (61)$$

$$w_{ijk} - z_{ij} \leq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (62)$$

$$z_{ij}, y_i \in \mathbb{B}, \quad \forall i \in I, \quad j \in J \quad (63)$$

$$w_{ijk} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K \quad (64)$$

Neste caso, z_{ij} é uma variável binária igual a 1 se o produto/serviço do tipo i é proveniente do depósito j . A variável w_{ijk} denota a fração da demanda d_{ik} de demanda do nó k para o produto i que é coberto por depósito j . Da mesma forma que q_{ijk} denota o custo de fornecimento de d_{ik} unidades do produto i e do depósito j , para atender a demanda do nó $k \in K$. As restrições 60 garante que a demanda de cada cliente seja coberto; as restrições de acoplamento (61) e (62) impedem a atribuição de produtos a depósitos fechados, e a entrega do produto i ao nó j , se o produto não estiver disponível no depósito. No caso de *mult-type*, cada instalação pode fornecer um produto ou serviço e, portanto, as restrições

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J \quad (65)$$

devem ser acrescentadas.

2.4.4 Aplicação dos Modelos Matemáticos no Contexto Educacional

O uso da Pesquisa Operacional para resolver problemas educacionais suscitou um importante debate. Segundo Lancaster, Morris e Nicel (1983), há um desacordo entre os profissionais da área sobre o seu escopo na gestão educacional. Os autores defendem sua aplicação, afirmando que esta existe para resolver problemas complexos, o que inclui, portanto, o planejamento escolar. Este debate, entretanto, não impediu sua aplicação ao longo dos anos.

A seguir, são apresentadas importantes aplicações na área de planejamento educacional, que mesmo não esgotando o tema, servem de exemplos e ilustram o caminho percorrido pela Pesquisa Operacional ao longo dos anos, até a aplicação proposta nesta tese.

2.4.4.1 Modelo Multiproduto para Resolver o Problema de Segregação Racial nos EUA

O primeiro trabalho resgatado nesta revisão possui uma singular importância social e histórica. Diante da decisão da Suprema Corte dos Estados Unidos, de proibir a segregação racial nas escolas, Clarke e Surkis (1968) desenvolveram um sistema chamado 'MINTRAN' para

resolver o problema de distribuir alunos em escolas, respeitando uma distância máxima a ser percorrida pelos alunos, além de uma composição étnica preestabelecida.

Este problema foi resolvido como um problema de distribuição de múltiplos produtos, definido da seguinte forma: Dada a distribuição por raça de estudantes em uma comunidade, a localização e capacidade das escolas, a composição étnica desejada e a configuração de linhas de transporte de massa, devia-se encontrar um plano de designação de alunos, que alcançasse a composição étnica desejada para cada escola, que nenhum aluno viajasse mais do que um determinado número de minutos por dia, e que o tempo total de viagem diário do aluno fosse mínimo. O trabalho foi formulado, como descrito, a seguir:

- X_{ijk} = Nível de atividade do k -ésimo grupo étnico, atribuído da i -ésima região à j -ésima escola.
 C_j = Capacidade da j -ésima escola.
 U_{jk} = Número máximo de estudantes do k -ésimo grupo étnico alocados na j -ésima escola.
 L_{jk} = Número mínimo de estudantes do k -ésimo grupo étnico alocados na j -ésima escola.
 S_{ik} = Número de estudantes disponíveis do k -ésimo grupo étnico provenientes da i -ésima região
 t_{ij} = Tempo diário de transporte unidirecional, em minutos, de uma rota mínima da i -ésima região até a j -ésima escola.
 K = Número de grupos étnicos.
 m = Número de regiões.
 n = Número de escolas.

Para satisfazer os requisitos étnicos em cada escola j :

$$\left. \begin{array}{l}
 L_{j1} \leq X_{1j1} + X_{2j1} + \dots + X_{mj1} \leq U_{j1} \\
 L_{j2} \leq X_{1j2} + X_{2j2} + \dots + X_{mj2} \leq U_{j2} \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 L_{jk} \leq X_{1jk} + X_{2jk} + \dots + X_{mjk} \leq U_{jk}
 \end{array} \right\} \text{para } K \text{ grupos étnicos}$$

A capacidade de cada escola j não pode ser excedida. Portanto, para qualquer j :

$$\sum_k \sum_i X_{ijk} \leq C_j$$

Para a disponibilidade de estudantes de cada região i e grupo étnico k :

$$\begin{array}{cccccc} X_{i11} & + & X_{i21} & + & \dots & + & X_{in1} & = & Si1 \\ X_{i12} & + & X_{i22} & + & \dots & + & X_{in2} & = & Si2 \\ \cdot & + & \cdot & + & \cdot & + & \cdot & = & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + & \cdot & + & \cdot & = & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + & \cdot & + & \cdot & = & \cdot \\ X_{i1k} & + & X_{i2k} & + & \dots & + & X_{ink} & = & Sik \end{array}$$

A função objetivo a ser minimizada é:

$$Z = \sum_k \sum_j \sum_i t_{ij} X_{ijk}$$

Assume-se que $\sum_i \sum_j S_{ik} \leq \sum_j C_j$, isto é, que a capacidade total da escola é pelo menos tão grande quanto o número total de alunos. Se esta relação não se sustentar em um caso real, o sistema MINTRAN, a critério do usuário, simplesmente distribuirá a capacidade extra necessária sobre todas as capacidades da escola, de modo que cada C_i reflita um ajuste para cima.

2.4.4.2 Problema de Localização de Instalações Públicas Utilizando Modelo Multicritério

Para Ross e Soland (1980), os problemas práticos envolvendo a localização de instalações públicas devem ser tratados e modelados como problemas multicritérios, sendo, em geral, *custo* e *serviço* os principais critérios a serem considerados.

O modelo descrito, a seguir, utilizou uma abordagem multicritério para selecionar um subconjunto de potenciais estabelecimentos públicos, a fim de atender grupos de clientes distribuídos em N pontos distintos. Os autores empregam o termo “grupo de clientes” para denotar o conjunto de usuários (ou usuários em potencial) de um sistema de instalação pública. Trata-se de escolher um subconjunto de locais nos quais se deve estabelecer (ou manter) instalações e atribuir um grupo de clientes a exatamente uma das instalações.

Para $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$. Seja:

$$\begin{aligned} z_i &= 1, \text{ se uma instalação for estabelecida no local } i \\ &= 0, \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1, \text{ se o grupo de clientes } j \text{ for atribuído à instalação no local } i \\ &= 0, \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

$$d_{ij} = 1, \text{ se os recurso do local } i \text{ forem utilizados por um grupo de clientes } j, \text{ alocados a essa instalação}$$

$$\begin{aligned} a_i, b_i &= \text{número mínimo e máximo de clientes permitido na instalação } i \\ n &= \text{Número de escolas.} \end{aligned}$$

As soluções viáveis do modelo de localização discreta são, então, aquelas escolhas de z_i e x_i que satisfazem as seguintes restrições:

$$a_i z_i \leq \sum_{j=1}^N d_{ij} x_{ij} \leq b_i z_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, M \quad (66)$$

$$\sum_{j=1}^M x_{ij} = 1, \text{ para todo } j = 1, \dots, N \quad (67)$$

$$z_i, x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \text{ para todo } i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N \quad (68)$$

$$\sum_{i=1}^M F_{il} z_i \quad (69)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijl} d_{ij} x_{ij} \quad (70)$$

$$\sum_{i=1}^M F_{il} z_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ijl} d_{ij} x_{ij} \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^{j=M} \sum_{j=1}^N (-d_{ij}) x_{ij} \quad (72)$$

$$\sum_{j=1}^N (-d_{ij}) x_{ij} \quad (73)$$

$$\sum_{i=1}^M (-d_{ij}) x_{ij} \quad (74)$$

$$\sum_{i=1}^M (t_{ij}) x_{ij} \quad (75)$$

$$D^{-1} \sum_{i=1}^M d_j t_{ij} x_{ij} \quad (76)$$

$$e_i z_i \quad (77)$$

$$\sum_{i=1}^M e_i z_i \quad (78)$$

o modelo é definido pelas restrições (66)-(68), nas variáveis x_{ij} e z_{ij} . As equações (69)-(74) são as funções de critério a serem usadas com este

modelo, as quais deseja-se que sejam minimizadas. Elas ainda podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^M f_i z_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N s_{ij} x_{ij} \quad (79)$$

onde f_i e s_{ij} são constantes adequadamente definidas.

2.4.4.3 Problema de Localização de Escolas Utilizando P-Mediana e SIG

Barcelos, Pizzolato e Lorena (2004), Pizzolato et al. (2004b), Menezes, Diallo e Pizzolato (2011), Pizzolato, Raupp e Alzamora (2012), apresentam uma série de aplicações utilizando técnicas relativamente similares. Nestes trabalhos são feitas avaliações das atuais localizações das escolas públicas, em seguida são identificadas as regiões onde há excesso ou escassez de vagas. Os estudos destacam a evolução metodológica, desde o uso dos mapas até o emprego de softwares da família SIG (Sistemas de Informação Geográficos), como o ArcView e o GeoRedes.

Segundo Barcelos, Pizzolato e Lorena (2004), o problema das P-Mediana Capacitado (PMC) considera a capacidade de cada mediana, ou seja, a oferta de vagas em cada região. Parte da premissa que a demanda total dos vértices alocados a uma mediana não pode ser maior que a capacidade da respectiva escola. A formulação do PMC é a seguinte:

$$\text{PMC} = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (80)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; i \in N \quad (81)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = p \quad (82)$$

$$\sum_{i \in N} q_i x_{ij} \leq Q_j x_{jj}; j \in N \quad (83)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; i, j \in N \quad (84)$$

onde,

q_i = demanda associada ao vértice i

Q_j = capacidade da escola j ;

$[x_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz de alocação

$[d_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz de distância

p é o número de medianas

n é o número de nós e $N = \{1, \dots, n\}$

As restrições (81) e (82) garantem que cada nó é alocado a somente uma mediana. A restrição (83) impõe que a capacidade total das medianas deve ser respeitada, e (84) define as variáveis binárias.

2.4.4.4 Modelo de Localização Hierárquica

Teixeira e Antunes (2007), apresentam um modelo de localização hierárquica discreta para o planejamento de instalações públicas. As principais características do modelo são: um objetivo de maximização da acessibilidade; vários níveis de demanda e de instalações; uma hierarquia aninhada de instalações (ou seja, uma instalação de um determinado nível pode atender a demanda de níveis iguais e inferiores); restrições de capacidade máxima e mínima; e restrições de atribuição de usuário para instalação.

A partir do modelo básico de P-Medianas, os autores desenvolvem o Modelo de Mediana Capacitado Hierárquico (*Hierarchical Capacitated Median Model*) (HCM), descrito a seguir:

$$\text{HCM} = \text{Min} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} d_{ij} u_{is} x_{ijs} \quad (85)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in J} x_{ijs} = 1, \quad \forall i \in I, s \in S \quad (86)$$

$$x_{ijs} \leq \sum_{t \in S | t \geq s} y_{it}, \quad \forall i \in I, j \in J, s \in S \quad (87)$$

$$\sum_{t \in S | t \geq s} z_{jst} = \sum_{i \in I} u_{is} x_{ijs}, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (88)$$

$$\sum_{t \in S | t \leq s} z_{jst} \geq b_{jt} y_{jt}, \quad \forall i \in I, t \in S \quad (89)$$

$$\sum_{t \in S | t \leq s} z_{jst} \leq B_{jt} y_{jt}, \quad \forall i \in I, t \in S \quad (90)$$

$$\sum_{k \in J | d_{ik} \leq d_{ij}} x_{iks} \geq y_{jt}, \quad \forall i \in I, j \in J, s \in S, \forall t \in S | t \geq s \quad (91)$$

$$\sum_{y \in J \setminus J_s^0} y_{js} \leq p_s, \quad \forall s \in S \quad (92)$$

$$\sum_{y \in J_s^0} y_{js} \geq |J_s^0| - q_s, \quad \forall s \in S \quad (93)$$

$$x_{ijs} = 0, \quad \forall i \in I, j \in J, s \in S | d_{ij} > D_s \quad (94)$$

$$x_{ijs} \in \{0, 1\}, y_{js} \in \{0, 1\}, z_{jst} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J, s \in S \quad (95)$$

As restrições de atribuição de proximidade (91) podem ser substituídas por restrições de atribuição de caminho, declaradas separadamente por nível de demanda:

$$\sum_{k \in P_{ij}} x_{kjs} \geq |P_{ij}| x_{ijs}, \quad \forall i \in I, j \in J, s \in S \quad (96)$$

A formulação do modelo (HCM) dada acima permite a colocação das instalações, isto é, a localização de diferentes tipos de

instalações no mesmo local. Isso pode ser vantajoso para satisfazer as restrições de capacidade máxima. Se a colocalização não for permitida, a seguinte restrição deverá ser adicionada ao modelo:

$$\sum_{t \in S} y_{jt} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (97)$$

Além disso, se a colocalização não for permitida, as restrições de capacidade (88) - (90) podem ser substituídas pela seguintes restrições simplificadas:

$$\sum_{t \in S} z_{jt} = \sum_{s \in S} \sum_{i \in I} u_{is} x_{ijs} \quad \forall j \in J \quad (98)$$

$$z_{jt} \geq b_{jt} y_{jt} \quad \forall j \in J, t \in S \quad (99)$$

$$z_{jt} \leq B_{jt} y_{jt} \quad \forall j \in J, t \in S \quad (100)$$

onde as restrições (98) definem as variáveis z_{jt} , como a demanda total de todos os níveis serviços da região j , por uma instalação do tipo t , e as restrições (99) e (100) impõem capacidades mínimas e máximas.

2.4.4.5 Outra Aplicações

O modelo proposto por Araya et al. (2012), busca melhorar a distribuição das escolas rurais no Chile, que conta com mais de 4.000 escolas rurais (quase 38% de todas as escolas no Chile) e 9,5% dos estudantes no país. Muitas das escolas rurais são pequenas, com apenas um professor responsável pela instrução de todos os estudantes locais (escolas multisseriadas). A falta de coordenação na distribuição geográfica das escolas rurais, resultou na utilização desigual das escolas existentes e, em alguns casos, viagem excessivamente longas dos estudantes. Para resolver o problema, os autores propuseram um modelo programação linear inteira que foi incorporado em um sistema de informação geográfica. O objetivo era o de reduzir o número de escolas multisseriadas e as distâncias de deslocamento dos estudantes, mantendo custos razoáveis.

Já Figueiredo, Barrientos e Angel (2012), apresentaram uma metodologia de apoio à decisão baseada em Análise de Envolvimento de Dados (DEA). Esta metodologia ofereceu uma maneira objetiva de comparar as escolas de rede entre si e com as escolas fora da rede, fornecendo uma compreensão mais profunda dos níveis de eficiência es-

colar em face dos recursos escassos e permitindo o compartilhamento dos melhores práticas em toda a rede.

Com o objetivo de reduzir as desigualdades na educação rural no Chile, Castillo-López e López-Ospina (2015) propuseram um modelo matemático para determinar a localização e o tamanho de novas escolas, além do tipo de intervenção que devia ser feita nas escolas atuais. Os autores acreditam que uma alternativa para reduzir as desigualdades na educação rural poderia ser a localização e modificação das escolas. Uma nova configuração, que melhorasse as variáveis estruturais da escola, poderiam afetar o desempenho dos alunos, levando a uma educação de maior qualidade.

O modelo proposto incorpora duas abordagens: a teoria da escolha discreta, pela qual o comportamento dos alunos é modelado, e a Programação Matemática, que otimiza as variáveis que influenciam o desempenho escolar. No Chile, assim como em outros países, a escolha de uma escola estudantil é um processo que depende não apenas das restrições de tempo e renda, mas também das decisões tomadas por outros estudantes (segregação). Esse comportamento é modelado usando uma abordagem microeconômica, desse modo, um modelo de escolha discreta logit multinomial restrito é derivado. Ao incorporar a escolha da escola do aluno em um modelo de otimização, ela se torna não linear. Uma meta-heurística *Tabu Search* é proposta, que, ao contrário de outras implementações, requer a solução de um sistema de equações de ponto fixo para avaliar cada solução.

2.5 RESUMO DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou uma revisão da literatura a partir de duas vertentes: o Planejamento Educacional e os Modelos Educacionais, mas precisamente, como aponta Correa (1967), os Macro Modelos Educacionais. A revisão evidenciou como se tornou complexo planejar a educação a partir da Segunda Guerra Mundial, e como este se beneficiou de todo o conhecimento adquirido pela área de Pesquisa Operacional.

Outro ponto importante, diz respeito à taxonomia da pesquisa em questão. Esta tese busca desenvolver um modelo matemático que seja capaz de otimizar os insumos educacionais, de modo a atender adequadamente a demanda dos Sistemas Públicos de Ensino (SPE), minimizando os custos sociais envolvidos. Como a amplitude do planejamento aqui tratado envolve sistemas escolares, esta pesquisa se

encaixa no que Johnstone (1974) classificou como *Models Developed for the Educational System Level*, ou simplesmente, MDESL. Já as principais bases matemáticas utilizadas no desenvolvimento dos *Educational Models*, chamados por Johnstone (1974) de *Mathematical Bases for Models* (MBL), são os Modelos Determinísticos, os Modelos de Fluxo, os Modelos de Regressão e a Programação Matemática.

A revisão bibliográfica evidenciou que o problema de atribuição de alunos às escolas foi extensivamente examinado na literatura a partir da perspectiva de gênero, etnia, localização e outros objetivos de equilíbrio, além da restrição de capacidade da escola. Em geral, considera-se a oferta de vagas como *slots*, e examina-se o problema de atribuição a partir dos alunos que entram no sistema (incluindo as características demográficas, o local de residência, dentre outros fatores). Embora alguns modelos baseados na demanda estudantil, vistos nesta revisão, incluam o dimensionamento da capacidade da infraestrutura, estes não consideram fatores importante em sua concepção como, por exemplo, a customização da correspondência *professor-turma-escola-sala de aula* às condições de demandas específicas.

Dentro do aspecto das macropolíticas educacionais, tem-se o desafio da projeção da demanda, tão importante no planejamento estratégico. Os modelos PROFLUXO, PPS e IPC, e seus indicadores derivativos, vistos nesta revisão, atendem perfeitamente a esta necessidade. Entretanto, diante da ausência de trabalhos que integrem o planejamento estratégico-tático-operacional do planejamento de SPE, no próximo capítulo será enunciado um modelo matemático, apresentado na forma de um problema de Programação Inteira Mista (MIP), da classe dos *Educational Models*, identificado como MDESL-MIP.

3 PROPOSTA DE UM MODELS DEVELOPED FOR THE EDUCATIONAL SYSTEM LEVEL (MDESL-MIP)

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A revisão bibliográfica feita no capítulo anterior, apresentou o estado da arte do planejamento educacional e de modelos matemáticos utilizados nesse contexto. Nela, foi constatado que o planejamento educacional tornou-se complexo a partir da Segunda Guerra Mundial e que estes modelos contribuíram na solução dessas nova classe de problemas. Apesar da programação matemática ser bastante utilizada, a revisão não identificou trabalhos da classe dos *educational models* que integrem etapas distintas do planejamento escolar. O mais comum é o que poderia ser chamado de um planejamento hierarquizado, onde primeiro são resolvidos os problemas estratégicos, depois os táticos e os operacionais.

Problemas estratégicos como a alocação de recursos para o desenvolvimento educacional ou a construção (ou fechamento) de escolas são normalmente resolvidos por modelos econométricos e, no segundo caso, através dos *allocation models*, sendo p-mediana a técnica mais usual. Já problemas táticos e operacionais como alocação de alunos (*allocation problem*), a contratação de professores e a formação de turmas (*assignment problem*), a criação de quadro de horários (*timetabling problem*) e o roteamento de ônibus escolares (*school bus routing problem*), costumam ser tratados separadamente. Este trabalho contribui com a literatura ao propor um modelo matemático que integra etapas distintas do planejamento escolar, algo não encontrado na literatura levantada.

Na próxima seção, o problema em destaque será caracterizado. Em seguida, os conjuntos, subconjuntos e parâmetros do modelo serão enunciados. Finalmente, o modelo é descrito e suas modificações discutidas. A técnica utilizada na implementação do modelo também é tratado neste capítulo, e no final, considerações são tecidas sobre os temas tratados ao longo do capítulo.

3.2 CARACTERIZAÇÃO FORMAL DO PROBLEMA

A busca por eficiência em Sistemas Públicos de Ensino (SPE) parte da premissa que os recursos públicos são limitados e, portanto, devem ser empregados com parcimônia. Outra consideração importante é que, salvo raríssimas exceções, os SPE onde o modelo proposto será aplicado existe, e está em pleno funcionamento. É difícil imaginar regiões urbanizadas onde uma sistema precisaria ser implantado desde o seu início. Mas caso essa situação venha a ocorrer, o modelo proposto também pode ser utilizado.

Considere, portanto, uma região subdividida geograficamente. Estas regiões devem representar aglomerados populacionais, tais como: setores censitários, bairros, municípios, uma região metropolitana, ou qualquer outra subdivisão espacial. O importante é que nessas áreas residam estudantes de diversas séries e etapas de ensino, e que precisam ser alocados em escolas participantes de um SPE. Estas escolas, por sua vez, estão contidas nos limites regionais que compõe o SPE. Admite-se, também, que as escolas possuem salas de aula de diversos tamanhos em plena condições de serem usadas.

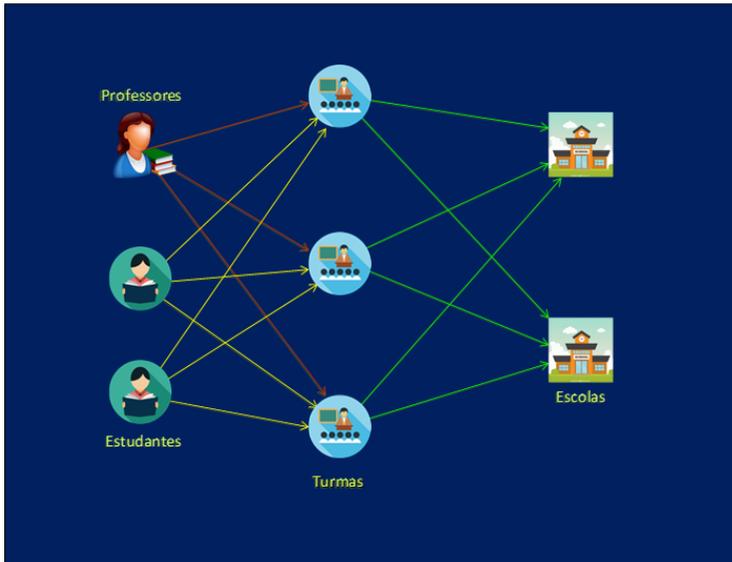
O processo de alocação deve considerar a distância percorrida pelos alunos de suas casas até a escola mais próxima e que ofereça a etapa/série demandada, mas não só isso. Caso o custo marginal de abrir uma vaga na escola mais próxima seja muito alto, duas outras situações podem ocorrer. O aluno pode ser alocado em outra escola com custo marginal menor, limitado a um raio pré-estabelecido, ou ele pode ser transferido para a rede privada de ensino, através de subsídios públicos, sempre o menor. Ao final deste processo, turmas são criadas e alunos alocados em salas de aulas de escolas segundo suas etapas/séries e capacidade.

Nesta pesquisa, *capacidade de uma sala de aula*, ou simplesmente *capacidade*, será definida pelo espaço físico preparado para receber uma quantidade limitada de alunos. Entretanto, esta capacidade pode ser reduzida por critérios pedagógicos. Apesar do modelo garantir o atendimento de toda a demanda, em hipótese alguma a capacidade das salas de aula poderá ser violada. Estes casos serão resolvidos, redistribuindo os alunos não alocados em escolas da rede privada por meio subsídios governamentais.

Outra questão fundamental é o número necessário de professores a serem contratados para atender às turmas criadas. Neste item especificamente, deve ser levado em conta a carga horária semanal das matérias e as horas efetivas disponíveis nos contrato de trabalho dos

professores. As turmas criadas e os professores contratados serão atribuídos em salas de aula que receberão os alunos definidos no processo de alocação. A Figura 17 mostra esquematicamente o processo pelo qual alunos e professores são combinados para formar turmas, e depois atribuídos em escolas da região em análise.

Figura 17 – Visualização esquemática da formação e alocação de turmas nas escolas (e nas salas de aula).



Fonte: Elaborado pelo autor

Na próxima seção será enunciado o modelo matemático proposto para solucionar o problema em questão.

3.3 MODELO MATEMÁTICO PARA O PLANEJAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS PÚBLICOS DE ENSINO

O modelo matemático proposto para o planejamento de Sistemas Públicos de Ensino considera os seguintes custos: custo de transporte dos alunos, custo de contratação de professores, custos associados ao fornecimento de bolsas de estudo aos alunos que não puderam ser matriculados em escolas públicas devido à falta de opções e, portanto, pre-

cisam frequentar escolas particulares por meio de subsídios do governo, custos incorridos na construção ou remodelagem das escolas existentes e a redução dos custos devido ao encerramento de escolas.

Portanto, resolver o problema de alocação de professores e alunos, consiste em determinar o número de turmas da série $k \in K$ a serem abertas na escola $i \in I$, em salas do tipo/tamanho $l \in L$, denotadas pela variável y_{ikl} , bem como o número de alunos x_{ijk} , provenientes dos núcleos habitacionais $j \in J$, que deverão ser matriculados na série $k \in K$, da escola $i \in I$, de modo a minimizar o custo total do sistema.

3.3.1 Conjuntos e Subconjuntos do Modelo

A seguir, tem-se a definição dos conjuntos e subconjuntos que serão utilizados no modelo matemático.

I	conjunto de escolas;
J	conjunto de bairros ou municípios;
K	conjunto de séries escolares;
L	conjunto dos tipos/tamanhos das salas de aula;
M	conjunto de disciplinas a serem oferecidas;
R	conjunto dos diferentes regimes de trabalhos (10h, 20h, 30h, 40h);
$I_{jk} \subseteq I$	subconjunto de potenciais escolas que podem atender ao bairro $j \in J$, e que oferecem a série $k \in K$, de acordo com um critério de proximidade desejado;
$J_i \subseteq J$	subconjunto de bairros potencialmente atendido pela escola $i \in I$, de acordo com um critério de proximidade desejado;
$K_i \subseteq K$	subconjunto de séries oferecidas pela escola $i \in I$;
$L_i \subseteq S$	subconjunto de tipos/tamanhos das salas disponíveis na escola $i \in I$;

3.3.2 Parâmetros do Modelo

A seguir, tem-se a definição dos parâmetros que serão utilizados no modelo matemático.

TC_{ij}	custo mensal de transporte de um aluno entre o bairro $j \in J$ e a escola $i \in I$;
AC_{Jk}	custo mensal de matrícula de um aluno do bairro $j \in J$ não atendido pela rede pública e que recebe uma bolsa para estudar na rede privada para cursar a série $k \in K$
FC_{mr}	custo mensal de contratação de um professor para a disciplinas $m \in M$ e regime de trabalho $r \in R$;
EC_i	custo equivalente mensal referente a abertura ou expansão da escola $i \in I$;
CC_i	custo equivalente mensal referente ao fechamento da escola $i \in I$;
SP_{jk}	número de alunos existentes no bairro $j \in J$ que demandam matrícula na série $k \in K$;
NS_k	número máximo de alunos permitido na formação de uma turma da série $k \in K$;
NR_l	número máximo de alunos permitido por sala do tipo $l \in L$;
CH_{km}	carga horária semanal do professor da disciplina $m \in M$ e série $k \in K$;
FH_{mr}	carga horária semanal do professor da disciplina $m \in M$ trabalho $r \in R$;
SH_i	horas semanais de funcionamento da escola $i \in I$;
N_{il}	número de salas do tipo/tamanho $l \in L$ da escola $i \in I$;
\overline{NS}_{il}	número de salas do tipo $l \in L$ a serem consideradas na construção/expansão da escola $i \in I$;
HN_{il}	horas semanais de salas do tipo/tamanho $l \in L$ da escola $i \in I$ alocadas para outras atividades;
M_{ijk}	número mínimo de alunos do bairro $j \in J$ que podem ser alocados na escola $i \in I$ e série $k \in K$;
W_{mr}	número mínimo de professores a serem alocados nas disciplinas $m \in M$ e regime de trabalho $r \in R$.

3.3.3 Modelo Matemático MDESL-MIP

O modelo de planejamento proposto nesta tese envolve escolas participantes de sistemas escolares, portanto, trata-se de um *Models Developed for the Educational System Level* (MDESL). Já a técnica matemática utilizada apresenta-se na forma de um *Mixed Integer Model* (MIP). As equações (1) a (13) descrevem o que será denominado de **Modelo MDESL-MIP**, descrito a seguir:

Minimize

$$\begin{aligned}
 CT = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \sum_{k \in K_i} TC_{ij} x_{ijk} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} AC_{jk} z_{jk} + \\
 & \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} \sum_{r \in R} FC_{mr} w_{imr} + \sum_{i \in I} EC_i \delta_i - \sum_{i \in I} CC_i \eta_i \quad (1)
 \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_{jk}} x_{ijk} + z_{jk} = SP_{jk} \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J_i} x_{ijk} \leq \sum_{l \in L_i} \min(NS_k, NR_l) y_{ikl} \quad \forall i \in I, \forall k \in K_i \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K_i} CH_{km} y_{ikl} \leq \sum_{r \in R} FH_{mr} w_{imr} \quad \forall i \in I, \forall m \in M \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in K_i} \sum_{m \in M} CH_{km} y_{ikl} \leq SH_i [N_{il}(1 - \eta_i) + \overline{NS}_{il} \delta_i] - HN_{il} \\
 \forall i \in I, \forall k \in K_i \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I} w_{imr} \geq W_{mr} \quad \forall m \in M, \forall r \in R \quad (6)$$

$$\delta_i + \eta_i \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (7)$$

$$x_{ijk} \geq M_{ijk} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (8)$$

$$z_{jk} \geq 0 \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (9)$$

$$w_{im} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in I, \forall m \in M \quad (10)$$

$$y_{ikl} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall l \in L \quad (11)$$

$$\delta_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$\eta_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (13)$$

3.3.4 Variáveis do Modelo

Tem-se, a seguir, as definições das variáveis utilizadas no modelo MDESL-MIP.

x_{ijk}	número de alunos do bairro $j \in J$ a serem alocados na série $k \in K$ da escola $i \in I$;
z_{jk}	número de alunos do bairro $j \in J$ a serem alocados em escola privadas para cursarem a série $k \in K$;
w_{imr}	número de professores da disciplina $m \in M$ contratados para atuarem na escola $i \in I$ sob o regime de trabalho $r \in R$;
y_{ikl}	número de turmas da série $k \in K$ criadas na escola $i \in I$ em sala do tipo $l \in L$;
δ_i	$(\delta_i = 1)$ define se a escola $i \in I$ será implantada/ampliada $(\delta_i = 0)$, caso contrário;
η_i	$(\eta_i = 1)$ define se a escola $i \in I$ será fechada $(\eta_i = 0)$, caso contrário;
CT	Custo total da solução, incluindo o custo de transporte dos alunos, da contratação de professores, da concessão de bolsas de estudo aos alunos não atendidos pelos SPE e da reformulação da estrutura física da rede de ensino

Neste modelo, a função objetivo (1) busca minimizar o custo total do sistema, composto pelo custo de transporte dos alunos, pelo custo referente às matrículas dos alunos na rede privada (por falta de oferta na rede pública), pelo custo da contratação de professores, e pelos custos de implantação/ampliação e fechamento de escolas. Incorporar os custos de transporte no modelo implica um esforço para alocar os alunos em escolas próximas às suas casas, evitando a fragmentação na hora de alocar os alunos. Minimizar os custos com a contratação de professores irá contribuir para formar turmas com a capacidade máxima permitida, o que implicará em um menor uso do número de salas/escolas. Com a possibilidade de implantar, ampliar ou fechar escolas, ou ainda, de alocar alunos em escolas da rede privada, o modelo proporciona ao decisor, a análise de vários cenários e conjunto de decisões viáveis, com um alto grau de flexibilidade, fazendo com que os custos destas alternativas sejam contrapostos ao custo de contratação de novos professores, aos custos de transportes e ampliação/redução das escolas.

Quanto às restrições, a expressão (2) garante que a demanda por matrículas na série $k \in K$ do bairro $j \in J$ será integralmente atendida,

seja pela rede pública ou pela rede privada de ensino. A restrição (3) garante que o número de turmas abertas numa dada série $k \in K$ e escola $i \in I$ seja suficiente para atender a quantidade de alunos alocados nesta escola e série. A restrição (4) garante que o número de professores contratados para atuarem numa dada disciplina $m \in M$ e escola $i \in I$ sejam suficientes para atender a demanda desta disciplina em todas as turmas desta escola. A restrição (5) garante a existência de espaço físico adequado e suficiente para suprir a demanda por criação de turmas em cada escola. A restrição (6) reflete a necessidade de atribuir um número mínimo de professores contratados para cada disciplina e regime de trabalho. A restrição (7) garante que uma escola só será remodelada se ela permanecer no sistema. Finalmente, a restrição (8) assegura a permanência do estudante na mesma escola durante o ciclo escolar, enquanto este obtiver aprovação. As equações (9) a (13) definem os tipos de variáveis do modelo.

O modelo MDESL-MIP foi implementado e resolvido utilizando o sistema GAMS/CPLEX. Um Sistema de Informação Computacional foi desenvolvido em Delphi 7.0, em uma plataforma Windows e serviu de suporte para a aplicação do modelo. Uma descrição deste sistema pode ser encontrado no Anexo A.

3.4 DISCUSSÃO DO MODELO MDESL-MIP E SUAS VARIAÇÕES

Na seção anterior foi apresentado o modelo MDESL-PLIM que resolve o problema de alunos que precisam ser alocados em escolas participantes de um SPE. A Equação (1) foi elaborada de modo a minimizar os custos de deslocamento dos alunos às escolas (TC_{ij}), da concessão de bolsa de estudos aos alunos não alocados (AC_{xj}) e da contratação de professores para atender às turmas criadas (FC_{mr}). Além dos custos diretos, a função objetivo considera o custo de expansão (EC_i) e de contração (CC_i) da rede. A Função Objetivo está sujeita às restrições descritas nas equações (2) a (13). Agora, o que ocorreria se fossem impostas alterações aos parâmetros do modelo? Quais as consequências do relaxamento de algumas restrições? A seguir, passa-se a discutir as consequências dessas variações.

Na primeira análise não são considerados os custos de transporte ($TC_{ij} = 0$). Nestas condições, a alocação se dará em uma escola desde haja disponibilidade de vaga, independentemente da distância, o que deve aumentar consideravelmente o deslocamento médio dos alunos. Ao não se considerar os custos de deslocamento, o planejamento esco-

lar privilegia a eficiência na contratação de professores. Esta política pode trazer grandes transtornos aos alunos, visto que estes podem vir a ter que percorrer grandes distâncias, o que é um grande problema principalmente nos primeiros anos de estudo.

Os custos associados às bolsas de estudo (AC_{jk}) devem refletir a média dos preços das mensalidades escolares praticadas por instituições particulares de ensino. A análise desse parâmetro é particularmente importante pois possibilita aos formuladores de políticas públicas decidirem sobre a expansão da rede de ensino a partir dos custos marginais obtidos. A análise econômica dos custos marginais pode indicar se é mais viável a ampliação da rede através da construção de novas unidades escolares ou aumento da capacidade das escolas existentes, ou a concessão de bolsas de estudos aos alunos que, por algum motivo, não foram alocados no SPE. Entretanto, caso os custos com as bolsas de estudos cresçam de forma a se tornarem impeditivos ($AC_{jk} \rightarrow \infty$), um contingente maior serão alocados no SPE, pois cada aluno alocado representará uma maior economia na concessão de bolsa.

O parâmetro FC_{mr} não possibilita modificações, pois diz respeito aos custos de contratação de professores para a matéria m , sob regime de trabalho r , o que se espera é que estes correspondam aos valores de mercado. Já os parâmetros EC_i e CC_i correspondem aos custos econômicos referentes à expansão da escola i ($\delta_i = 1, \eta_i = 0$), ou encerramento de suas atividades ($\delta_i = 0, \eta_i = 1$), respectivamente.

A restrição (2), como visto anteriormente, garante que toda a demanda SP_{jk} deve ser atendida, seja por meio do resultado da alocação ($\sum_{i \in I_{jk}} x_{ijk}$), ou da transferência de alunos para a rede de ensino privada (z_{jk}). Será, portanto, necessário o levantamento de toda a demanda por séries k , espacialmente distribuída pelas regiões j . Ressalta-se que ao realizar a alocação, o modelo restringe sua busca ao subconjunto formado pelas escolas $i \in I_{jk}$, dentro do raio $r \leq d$. Como a alocação depende do raio r , é possível “calibrar” o resultado, onde um número maior ou menor de escolas será considerado no processo alocativo, conforme a variação dos valores do raio.

Na restrição (3), quando uma turma for criada (y_{ikl}), esta não receberá mais alunos que sua capacidade física permite (NS_l), ou mesmo tendo capacidade, que ultrapasse o número de alunos estabelecido a partir de critérios pedagógicos (NS_k). Um bom exemplo são as séries iniciais do ciclo básico, preferencialmente formadas por turmas pequenas, independente do tamanho das salas. Já os últimos anos escolares permitem turmas com uma quantidade maior de alunos. Entretanto, a realidade de muitos SPE pode inviabilizar a formação de turmas ideais,

sendo necessária a utilização de toda a capacidade existente.

Se considerarmos o problema de restrição de capacidade a partir de sua premissa mais básica, ou seja, aquela que considera que o número de salas existentes não são capazes de atender à demanda, pode-se tentar outra solução em contraponto à expansão da capacidade por meio da ampliação das salas ou da construção de novas escolas. A alternativa a ser considerada parte de uma perspectiva ergonômica dos espaços utilizados, onde estes poderiam ter suas capacidades ampliadas a partir da reconfiguração dos móveis utilizados.

Na restrição (4), a definição do número de professores necessários para atender às turmas criadas, depende diretamente da política de contratação adotada pelos gestores públicos. Caso o número de horas semanais que um professor passe efetivamente em sala de aula seja igual às horas semanais para o qual ele foi contratado, o número de professores necessários será menor. Esta decisão, entretanto, significa que o professor não contará com horas para preparação de suas aulas, para o atendimento de seus alunos, nem para sua capacitação, o que impactará diretamente na qualidade do ensino. O grande desafio seria determinar a proporção do número de horas, dentro do contrato dos professores, para cada atividade. Por sua generalidade, o modelo permite que cada rede estabeleça este valores, segunda a realidade econômica de cada município.

O parâmetro HN_{il} presente na restrição (5), representa as salas de aula “bloqueadas”. São salas, expressas em horas semanais, a princípio disponíveis para alocação, mas que por algum motivo não estão disponíveis. Seria o caso, por exemplo, de uma séria k que é oferecida em um turno e em outra não, ou que foi transformada em sala de leitura, depósito, ou outro fim. Caso este parâmetro seja zerado, o processo de otimização encontrará mais possibilidades de solução.

Em um SPE capaz, tem-se $\eta_i = \delta_i = 0$, ou seja, as horas semanais disponíveis nas escolas e o número de salas de aula são suficientes para o atendimento da demanda. Caso seja necessário o aumento de capacidade, faz-se $\eta_i = 0$ e $\delta_i = 1$, e o parâmetro \overline{NS}_{il} representará o número de salas do tipo $l \in L$ aberta na escola $i \in I$.

A restrição (6) trata de uma situação muito comum no Brasil, mas que pode ocorrer em outros países. O parâmetro W_{mr} se refere ao total de professores da disciplina m e regime de trabalho r , vinculados a uma escola $i \in I$. Esta restrição implica que ao buscar uma solução, o modelo ficará limitado ao número de de professore W_{mr} . Caso esta restrição seja relaxada, há a possibilidade do modelo encontrar uma solução melhor.

3.5 MODELO PARA O PROCESSO DE MATRÍCULA E APOIO À IMPLEMENTAÇÃO GRADUAL DO MDESL-MIP

Um aspecto crítico do esforço descrito neste trabalho está relacionado à política de implementação. A prática atual é alocar alunos e professores em escolas com base no número de séries/turmas previamente criadas, sendo um processo de planejamento pouco abrangente, pois não inclui todas as escolas que compõem o sistema, que normalmente é de curto prazo, e se detém a situações localizadas. Esse processo de planejamento restrito, resulta na formação de turmas com deficiência em seu dimensionamento, onde alunos são alocados sem a devida consideração de caráter pedagógico, ou que considere a eficiência geral do sistema. Como consequência, há uma fraca correspondência na relação professores/alunos/turmas/salas de aula, causando subutilização da capacidade de trabalho dos professores, tendo como uma comum solução para este problema, a atribuição de disciplinas fora da formação primária do professor.

Entretanto, para que as mudanças propostas nesta tese ocorram de modo a não criar resistência por parte dos alunos ou professores, recomenda-se uma implementação gradual da metodologia proposta e do uso do sistema desenvolvido. A seguir, algumas diretrizes que devem ser seguidas por ocasião do processo de matrícula:

a) deve-se evitar oferecer turmas ou alocar alunos que não seja como o que foi sugerido pelo modelo (1) - (13);

b) alunos matriculados numa determinada escola e que não tenham concluído uma das três etapas (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio), têm a garantia de matrícula na mesma escola, desde que optem em permanecer, principalmente, se não houverem sido reprovados na série anterior;

c) alunos que haviam abandonado a escola nos anos anteriores (aluno desistente) têm prioridade em se matricular na mesma escola, em relação aos alunos solicitaram transferência optativa;

d) todos os outros casos - isto é: 1) estudantes de outras escolas que procuram matrícula (ou seja, que procuram se transferir para a respectiva escola), reprovados ou não; ou 2) os alunos que procuram a matrícula na primeira série de cada um dos três ciclos (primeira, sexta e décima) - podem ser alocados seguindo os critérios de distância geográfica *casa-escola*, ou por sorteio. Nestes casos, as preferências dos alunos podem ser consideradas.

Para que a diretriz (b) seja seguida, é necessário considerar a restrição (8) do modelo, no qual o valor M_{ijk} é o número de estudantes

da região $j \in J$, que concluíram com sucesso a série $k - 1 \in K$, e que desejam cursar a série $k \in K$, na mesma escola $i \in I$. Isso garante que a resolução do modelo (1) - (13) resultará em sala para, pelo menos, M_{ijk} estudantes (ou seja, *slots*) na classe $k \in K$ na escola $i \in I$, de modo a garantir a matrícula dos alunos no bairro $j \in J$, que não foram reprovados na série $k - 1 \in K$, nesta respectiva escola. Este será o caso para a maioria dos alunos no sistema.

Outros alunos precisam ser alocados de acordo com as diretrizes (c) e (d). Para isso, considere que a casa do $a_{\text{ésimo}}$ aluno pertencente à região $j_a \in J$, precisa de um *slot* na série $k_a \in K$, e tem preferência por matricular-se nas escolas na ordem de priorização descrita no subconjunto $I_a \subseteq I$. Considere que o $v_{\text{ésimo}}$ *slot* corresponde à série $k_v \in K$ e está disponível na escola $i_v \in I$. Uma solução viável para a alocação desses alunos é obtida resolvendo o seguinte problema de atribuição do aluno e *slot* para cada série $k \in K$.

Minimize

$$z = \sum_{a|k_a=k} \sum_{v|k_v=k} c_{av} \xi_{av} \quad (14)$$

sujeito a:

$$\sum_{a|k_a=k} \xi_{av} = 1 \quad \forall v|k_v = k \quad (15)$$

$$\sum_{v|k_v=k} \xi_{av} = 1 \quad \forall a|k_a = k \quad (16)$$

$$\xi_{av} \in \{0, 1\} \quad (17)$$

onde $\xi_{av} = 1$ se o $a_{\text{ésimo}}$ estudante é atribuído ao $v_{\text{ésimo}}$ *slot* disponível ($\xi_{av} = 0$ caso contrário); c_{av} é uma penalidade associada à atribuição do aluno a para o *slot* v . Na implementação do sistema, esta penalidade é dada pela seguinte expressão:

$$c_{av} = \alpha d(j_a, i_v) + \beta \text{ord}(I_a, i_v) + \epsilon \quad (18)$$

onde

$d(j_a, i_v)$	é a distância da região j_a para a escola i_v
$ord(I_a, i_v)$	é a ordem da escola i_v no conjunto de preferências do aluno i ;
α, β	são fatores de peso para critérios de alocação (nomeadamente distância e preferência dos alunos);
ϵ	é um número aleatório gerado para casos a serem resolvidos através da sorteio.

No modelo acima, a expressão (14) minimiza a soma das penalidades; a restrição (15) garante que cada *slot* seja atribuído a um, e apenas um aluno; a restrição (16) garante que cada aluno será atribuído a um e apenas um *slot*. A restrição (17) caracteriza as variáveis.

3.6 TÉCNICA PROPOSTA PARA SOLUÇÃO DO MODELO

A resolução do modelo MDESL-MIP utilizou a linguagem de modelagem General Algebraic Modeling System 23.5.1 (GAMS, 2010a) e o Solver CPLEX 12.0. O software GAMS, desenvolvido pela GAMS *Development Corporation*, é um sistema de modelagem algébrica de alto nível muito utilizado na resolução de problemas complexos e de grande porte. Segundo Belfiore e Fávero (2012), o CPLEX é um pacote de otimização, originalmente desenvolvido por Robert Bixby da empresa CPLEX *Optimization*, adquirido posteriormente pela IBM. O CPLEX é normalmente utilizado na solução de problemas de programação linear, inteira e não linear de grande porte, servindo, muitas vezes, como um solver dentro de sistemas de modelagem algébrica, como o GAMS. Segundo GAMS (2010b), GAMS/CPLEX é um solver que permite aos usuários combinar os recursos de modelagem de alto nível do GAMS com o poder dos otimizadores do CPLEX. O CPLEX utiliza o método Simplex e o método de pontos interiores para determinar a solução ótima em problemas de programação linear.

Os métodos usados para resolver problemas programação inteira e inteira mista requerem uma computação matemática superior a de programas lineares puros de tamanho similar. Modelos de programação inteira podem demorar muito tempo para encontrar uma solução para problemas relativamente pequenos. Em problemas com variáveis inteiras, o CPLEX usa o algoritmo de *branch and cut*, e como um único problema pode gerar muitos subproblemas, mesmo pequenos problemas de MIP podem ser muito intensivos computacionalmente e virem a re-

quer quantidades significativas de memória física.

Uma das dificuldades na resolução de MIP é o consumo de memória computacional. Este problema surge quando o algoritmo de *branch and bound* se expande e a memória se torna insuficiente para resolver os subproblema programação linear. O CPLEX oferece algumas formas de contornar este problema. Em um sistema com N processadores ou N *threads*, é possível definir o parâmetro n, onde $N > n > 0$. O CPLEX usa no máximo n *threads* para tarefas auxiliares e no máximo N-n threads para resolver o nó raiz. Os requisitos de memória podem ser limitados usando o *workmem*, com a opção *nodefileind*. Ao configurar *nodefileind* para 2 ou 3, isso fará com que o CPLEX armazene porções do *branch and bound* encadernada no disco rígido, sempre que este crescer para além do tamanho especificado pela opção *workmem*. A configuração utilizada para resolver o MDESL-MIP, foi:

```
$onecho > cplex.opt
  threads      8
  startalg     0
  mipsearch    0
  workmem      2000
  nodefileind  3
$offecho
```

3.7 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou um modelo matemático para ser usado no planejamento de Sistemas de Públicos de Ensino. O modelo em questão contribui com o estado da arte ao propor uma abordagem até então não encontrada na literatura visitada. Os aspectos que tornam o modelo inovador, serão detalhados, a seguir. Antes disso, vale ressaltar que ao tratar o planejamento educacional de forma sistêmica, o modelo proposto passa a ser classificado como *Model Developed for the Educational System Level* (MDESL). Já sua formulação matemática se deu como um *Mixed Integer Programming* (MIP). A partir destes dois aspectos, o modelo foi denominado MDESL-MIP.

A abordagem mais comum encontrada na literatura, trata da localização de escolas e da alocação dos alunos. Em geral, os modelos estão interessados no nível de serviço prestado. Para isso, verifica-se se o número de instalações é suficientes para atender a demanda, se os locais onde elas estão instaladas são adequados, e se o deslocamento dos alunos, é mínimo.

O modelo proposto nesta tese contempla os aspectos citados anteriormente e vai além, ao incorporar na função objetivo, outras duas componentes: a contratação de professores e a ampliação de capacidade da rede. Desta forma, os aspectos estratégicos (ampliação do sistema), táticos e operacionais (alocação de alunos e contratação de professores), são tratados no mesmo modelo.

Ao se buscar a minimização no deslocamento dos alunos e na contratação de professores, estabelece-se um paradoxo de difícil solução. Isto ocorre porque estes objetivos são conflitantes. Minimizar o deslocamento dos alunos implica em alocá-los em escolas próximas às suas casas, o que pode significar na pulverização do número de unidade escolares, caso o raio de busca para a alocação dos alunos seja relativamente pequeno, o que por sua vez pode implicar em alunos não atendidos, sendo necessária a ampliação do número de instalações. Vale lembrar que o modelo permite avaliar o impacto desta ampliação.

Por outro lado, a minimização do número de professores, tende a concentrar os alunos em uma quantidade menor de unidades escolares. Isto ocorre devido a maior eficiência alocativa alcançada quando os professores podem atender a um número maior de turmas. Ao se fragmentar as turmas criadas em várias unidades escolares, perde-se eficiência na utilização das horas disponíveis de cada professor.

Em termos dos objetivos traçados nesta pesquisa, uma importante restrição do modelo MDESL-MIP, diz respeito ao atendimento da demanda. Como a Constituição brasileira garante educação pública e gratuita dos quatro aos dezessete anos, ou a demanda é atendida pelos SPE ou pela rede privada, a partir de subsídios governamentais. Mesmo que isso não ocorra na prática, esta restrição permite aos planejadores e tomadores de decisão, dimensionar a necessidade de ampliação da rede escolar, utilizando para isso, a análise dos custos marginais.

Em relação ao número de professores necessários para atender as turmas criadas, o modelo garante a melhor utilização da carga horária dos professor, respeitando o regime de trabalho a que eles estão submetidos.

O modelo proposto garante, também, a melhor utilização das salas de aula, evitando a formação de turmas pequenas, ou sua superlotação. A quantidade de alunos alocados nas turmas criadas será limitada pelo espaço físico existente, ou a partir de critérios pedagógicos, o que for menor. Isto significa que mesmo que uma sala de aula possua capacidade para receber mais alunos, o modelo não permite que a turma receba uma quantidade maior que a previamente estabelecida a partir de critérios pedagógicos. Nada impede, entretanto, que esta

restrição seja relaxada, e que as turmas criadas recebam a quantidade máxima de alunos que a sala permite. O fundamental nesta restrição é impedir a superlotação, visto ser este um problema enfrentado pelos SPE no Brasil.

Pontua-se, a seguir, alguns aspectos importantes contemplados pelo modelo. Todo aluno alocado em uma escola possui sua matrícula garantida para os anos subsequentes, até o final de cada ciclo escolar, desde que este manifeste interesse e/ou não reprove. Esta garantia é uma das vantagens do modelo MDESL-MIP em relação ao PROFLEXO, uma vez que este se concentra basicamente na previsão total de demanda futura. Outro ponto importante respeitado pelo modelo, diz respeito ao quadro de professores fixos, ou seja, aqueles que não podem ser desligados. Esta restrição penaliza o sistema e o torna menos eficiente, uma vez que “obriga” a permanência de uma determinada quantidade de professores, mesmo que estes não sejam necessários. Como no caso da formação de turmas, esta restrição também pode ser relaxada.

Os parâmetros do modelo MDESL-MIP permitem a criação e análise de indicadores, outro objetivo estabelecido no início desta tese. São eles: deslocamento médios dos alunos, taxa de ocupação das salas de aula (lotação) e fator carga efetiva dos professores. No próximo capítulo, será apresentada a aplicação do modelo a partir de um estudo de caso em uma cidade de médio porte na região norte do Brasil.

4 APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO MDESL-MIP

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O capítulo anterior dedicou-se à formulação matemática do modelo MDESL-MIP. Trata-se de um *Mixed Integer Programming* (MIP), desenvolvido para resolver o problema da alocação de recursos educacionais em Sistemas Públicos de Ensino (SPE).

A fase final do desenvolvimento do MDESL-MIP e da ferramenta computacional que o implementou, ocorreu em duas etapas. A primeira, correspondeu a um exaustivo estudo piloto que utilizou dados educacionais da rede pública de ensino da cidade de Florianópolis, capital de Santa Catarina. Esta rede, composta por setenta e nove escolas, atende a alunos do ensino fundamental e médio, provenientes da região metropolitana, que junto com a capital, formam uma população de mais de um milhão de habitantes. A aplicação piloto utilizou informações do censo escolar de 2016, que apresentou naquele ano, uma demanda de 41.676 alunos. Os resultados desta aplicação apontaram para oportunidades de melhorias no processo alocativo de professores e alunos, e nos indicadores considerados. Entretanto, apesar dos bons resultados obtidos, estes não foram conclusivos devido ao tamanho da rede e da dificuldade de se obter dados com maior acuracidade.

Diante disso, decidiu-se realizar *um estudo de caso* em uma cidade de menor porte, onde fosse possível o levantamento de dados e a posterior análise de cenários, utilizando a metodologia proposta e a ferramenta computacional desenvolvida. A cidade escolhida foi Itacoatiara, no estado do Amazonas. As próximas seções apresentam os resultados deste estudo.

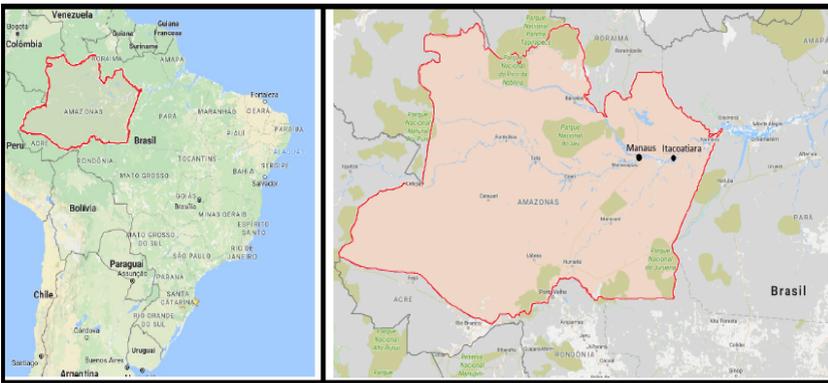
4.2 INFRAESTRUTURA DA REDE ESCOLAR DE ITACOATIARA

O Amazonas é o maior estado do Brasil, com uma área de 1,6 milhão de quilômetros quadrados, dividido longitudinalmente pelo rio Amazonas e localizado inteiramente na Floresta Amazônica. O estado tem cerca quatro milhões de habitantes, sendo que a metade vive na capital, Manaus. O índice de desenvolvimento humano no estado do Amazonas é um dos mais baixos do país. Já a cidade de Itacoatiara é a terceira maior cidade do estado, com aproximadamente 100.000

habitantes, dos quais pouco mais de três quartos, ou quase 80.000, vivem na sede do município (IBGE, 2014a).

A realização do estudo de caso contou com apoio da Secretaria Municipal de Educação (SEMED-ITA), e da Coordenadoria Regional de Educação de Itacoatiara (CREI), esta última, vinculada ao governo estadual. Os resultados da aplicação serão apresentados e discutidos ao longo deste capítulo. A Figura 18 mostra a localização da cidade de Itacoatiara.

Figura 18 – Mapa do Brasil (à esquerda) e mapa do estado do Amazonas (à direita) com o município de Itacoatiara



Fonte: Elaborado pelo autor, Google Earth.

A cidade de Itacoatiara tornou-se um importante centro do agrogócio regional, uma vez que está localizado às margens do rio Amazonas, a 190 quilômetros a jusante de Manaus, próxima à foz do rio Madeira, importante canal por onde escoam parte da produção de grãos provenientes do Centro-Oeste do país, que após armazenados no terminal graneleiro da cidade, são exportados para a Europa e Ásia. Nos últimos vinte anos, além da construção de um grande terminal de logístico, outros fatores intervieram na dinâmica do município. A inauguração de um campi da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) e outro da Universidade do Estado do Amazonas (UEA), contribuíram para o aumento da migração de pessoas das áreas rurais e ribeirinhas, bem como de outros municípios, tanto para estudarem nas recém instaladas universidades, como em busca de oportunidades de trabalho.

A Figura 19 representa a cidade, com suas cinco regiões administrativas, quatro das quais são urbanas, denominadas Leste, Norte,

Figura 19 – Cidade de Itacoatiara com suas 26 seções urbanas e a região rural

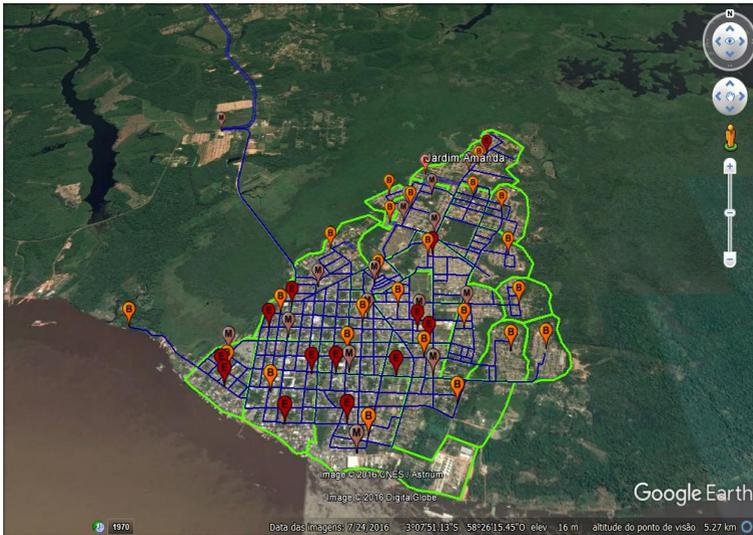


Fonte: Elaborado pelo autor, Google Earth.

Oeste e Sul, e uma adjacente, chamada Rural. Nesta figura é possível ver as 26 seções (bairros) da cidade, conforme identificadas pela prefeitura, e que serão utilizados nesta aplicação.

Em Itacoatiara, a Educação Básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio) é atendida, principalmente, pelas escolas da rede pública municipal e estadual de ensino, dividida em três etapas. A primeira, denominada Ensino Fundamental Anos Iniciais, ou Ensino Fundamental I (EF I), atende aos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental (1º ao 5º anos). A segunda etapa, denominada Ensino Fundamental Anos Finais, ou Ensino Fundamental II (EF II), atende aos últimos quatro anos escolares do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos). Já o Ensino Médio (EM) possui três anos escolares (1º ao 3º ano). A Figura 20 apresenta a localização das escolas municipais (M), das escola esta-

Figura 20 – Principais vias da cidade, centroides dos bairros (B), escolas estaduais (E) e municipais (M), Itacoatiara, 2016



Fonte: Elaborado pelo autor, Google Earth.

duais (E), e os centroides dos bairros (B), além da rede de transporte da cidade.

A Tabela 1 mostra a demanda atendida pelo SPE de Itacoatiara no ano de 2016, por região administrativa e etapa de ensino. Ao todo são 14.361 alunos distribuídos da seguinte maneira: 6.404 alunos (44,6%) no EF I, 4.154 (28,9%) no EF II e 3.803 (26,5%) no EM. Como o número de anos escolares difere em cada etapa, calculou-se a média de alunos por ano escolar. Este cálculo permite a análise de fluxo, tanto entre as séries, quanto entre as etapas. Os resultados obtidos foram: média de 1.280 alunos no EF I, 1.038 no EF II e 1.268 no EM. Portanto, a média de alunos no EF II, é menor que nas duas outras etapas, o que pode indicar, dependendo das taxas de repetência e evasão, uma pressão do EF I sobre o EF II, nos próximos anos.

Ainda na análise do fluxo escolar, a Figura 21 apresenta o gráfico para uma coorte de seis anos, utilizando o modelo PROFLUXO aos dados da rede escolar de Itacoatiara. Para simular esta coorte, utilizou-se como hipótese, uma taxa constante de entrada de alunos no sistema. Além disso, em um cenários otimista, utilizou-se uma taxa de

Tabela 1 – Número de estudantes da educação básica matriculados na rede pública de ensino, por etapa e região, Itacoatiara, 2016.

Região	Etapas												Total
	Ensino Fundamental I					Ensino Fundamental II				Ensino Médio			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	
Leste	512	479	558	575	562	447	364	354	385	435	351	732	5.754
Norte	408	293	378	390	399	343	263	282	297	279	202	308	3.842
Oeste	74	79	71	100	115	69	90	85	73	110	86	149	1.101
Sul	176	153	213	167	211	174	151	165	172	208	162	366	2.318
Rural	106	92	97	102	94	126	110	98	106	139	97	179	1.346
Total	1.276	1.096	1.317	1.334	1.381	1.159	978	984	1.033	1.171	898	1.734	14.361
	6.404					4.154				3.803			

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

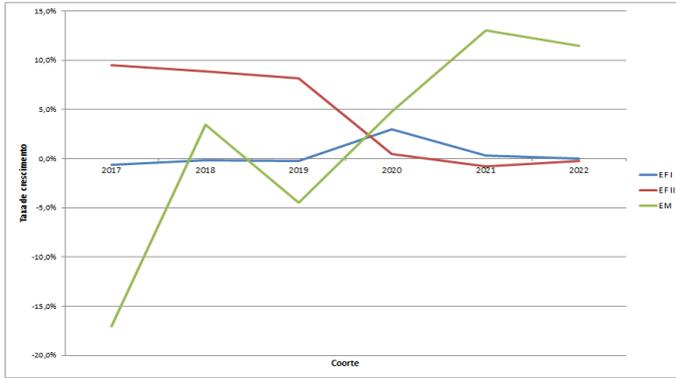
aprovação de 99,0%, e uma taxa de reprovação e abandono de 1,0%. Nestas condições, as taxas de crescimento do EF I mantiveram-se relativamente estáveis, com um pequeno crescimento no quarto ano da coorte. Por outro lado, o EF II apresentou crescimento nos três primeiros anos (média de 9,0% a.a.), estabilizando-se a partir do quarto ano. Já o EM apresentou alta variabilidade, com um decréscimo no primeiro ano de 17,0%, crescimento de 3,5% no segundo ano, queda de 4,5% no terceiro ano e, a partir do quarto ano, um viés de crescimento.

A alta volatilidade nos indicadores de fluxo escolar pode representar um complicador, caso os planejadores escolares não estejam atentos às tendências, tanto de crescimento, quanto de folga nos SPE. Tomando como exemplo o EM, cuja responsabilidade é exclusivamente da rede estadual, a não identificação da tendência de crescimento a partir de 2020, pode ocasionar sérios transtornos em relação à oferta de vagas.

O SPE de Itacoatiara dispõe, na zona urbana da cidade, de vinte e sete escolas públicas, sendo quatorze municipais e treze estaduais. A capacidade das salas de aula variam de 30 a 50 alunos. A Tabela 2 descreve a disponibilidade de assentos (*slots*), considerando dois turnos de ensino (manhã e tarde), por região e responsabilidade administrativa (estado ou município).

Embora o número de vagas da rede de ensino seja capaz de atender a demanda por vagas em dois turnos, as Tabelas 1, 2 mostram um desequilíbrio espacial dos assentos escolares (*slots*). Além disso,

Figura 21 – Taxa de crescimento da matrícula para uma coorte de 6 anos utilizando o modelo PROFLEXO



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

os assentos disponíveis em uma determinada região administrativa não correspondem, necessariamente, à etapa/série demandada por uma específica região, uma vez que se referem a demanda em toda a área. Portanto, uma medida mais efetiva para se determinar o grau de desequilíbrio espacial no fornecimento de assentos (*slots*), é examinar os custos do transporte estudantil. Para isso, calculou-se, para cada aluno matriculado, a distância entre a escola onde os alunos foram alocados, e suas casas (na metodologia empregada, representadas pelo centroide do bairro): Quanto maior a distância, menor o grau de equilíbrio espacial entre a oferta e demanda de assentos escolares (*slots*). A distância média percorrida pelos estudantes em 2016 foi de 1,7 quilômetros, distância significativa, se considerarmos que a temperatura média anual é de, aproximadamente, 27 graus centígrados, e que o deslocamento à pé, é algo relativamente comum.

A quantidade ideal de alunos ao se formar uma turma deve variar de acordo com etapa de ensino. Segundo os técnicos em educação do município de Itacoatiara, turmas do EF I (1.º ao 5.º ano) deveriam funcionar com, no máximo, vinte e cinco alunos, as turmas do EF II (6.º ao 9.º. ano) não deveriam exceder trinta alunos, e as turmas do EM (1.º ao 5.º. ano) deveriam ter, no máximo, trinta e cinco alunos. Entretanto, a atual infraestrutura não permite que estes critérios sejam atendidos.

Portanto, ao se analisar a *status quo* do SPE de Itacoatiara, houve uma flexibilização nestes parâmetros, aumentando em cinco unidades a tolerância máxima de alunos por turma, ou seja, trinta alunos no EF I, trinta e cinco no EF II, e quarenta alunos no EM.

Tabela 2 – Capacidade da rede pública: Número de salas e assentos (*slots*), por região e dependência administrativa, Itacoatiara, 2016

Região	Rede Municipal			Rede Estadual			Total		
	Salas	Slots	Capac.	Salas	Slots	Capac.	Salas	Slots	Capac.
Leste	15	680	1.360	32	1.300	2.600	48	1.980	3.960
Norte	49	2.060	4.120	10	450	900	59	2.510	5.020
Oeste	21	840	1.680	54	2.035	4.070	75	2.875	5.750
Sul	21	825	1.650	26	1.010	2.020	47	1.835	3.670
Rural	12	576	1.152	-	-	-	12	576	1.152
Total	119	4.981	9.962	122	4.795	9.590	241	9.776	19.552

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

A Tabela 3 apresenta o número de turmas criadas para atender o SPE, detalhada por região e etapa de ensino, para o ano de 2016. A tabela apresenta, também, a média de alunos por turma. Mesmo com a flexibilização, atualmente a média de alunos nas turmas do EF I é superior a trinta alunos por sala, o que caracteriza superlotação, em todas as cinco etapas de estudo desta etapa, sendo a pior situação observada no 5º, com uma média de 36,3 alunos por turma. Os anos escolares correspondentes ao EF II, em geral não apresentaram superlotação. A média de alunos no EM está dentro do desejado, nos dois primeiros anos (36,6 aluno no primeiro ano e 27,2 no segundo). Por outro lado, o número de alunos em turmas do terceiro ano está muito acima da quantidade definida pelos técnicos em educação, com uma média de 51,4 alunos por turma. Estes indicadores apontam para um forte desbalanceamento na relação aluno/turma/escola.

Em 2016, foram criadas 423 turmas para atender à todo SPE de Itacoatiara. Para isso, foram designados 866 professores, sendo 478 da rede municipal e 388 da rede estadual de ensino. A carga horária de cada professor é de 20 horas semanais, correspondendo a um turno escolar (manhã ou tarde), distribuídos conforme a Tabela 4. Esta tabela detalha, também, a quantidade de professores por disciplina e dependência administrativa (município ou estado). No EF I, aloca-se um professor por uma turma (o professor é responsável por ensinar todas

Tabela 3 – Número de turmas, por região e etapa de ensino, Itacoatiara, 2016

Região	Etapas												Total
	Ensino Fund. I					Ensino Fund. II				Ensino Médio			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	
Leste	6	5	6	7	7	-	-	-	-	-	-	-	31
Norte	18	13	15	17	15	23	19	15	20	14	17	18	204
Oeste	8	7	8	9	8	10	11	8	9	18	16	16	128
Sul	7	5	7	5	6	4	4	4	-	-	-	-	44
Rural	2	2	2	2	2	2	2	1	-	-	-	-	16
Total	41	32	38	40	38	39	36	28	32	32	33	34	423
Estudantes/Sala	31,1	34,3	34,7	33,4	36,3	34,3	29,7	35,1	32,3	36,6	27,2	51,0	34,0

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

as áreas, exceto Educação Física), caso o número de alunos ultrapasse uma quantidade máxima estabelecida (30 alunos), um segundo professor é alocado. Nas outras etapas, os professores são alocados em turmas equivalentes a uma hora-aula (45 minutos), sendo que o número de professores depende dos requisitos curriculares de cada matéria/série. O número de horas que um professor irá efetivamente cumprir depende, também, de tipo de contrato (10h, 20h, 30h ou 40h semanais), sendo que 20% do seu tempo deve ser utilizado no planejamento escolar.

A partir das Tabelas 1 e 4, pode-se observar que, no EF I (1^o. ao 5^o. ano), $6.404/358 = 17,9$ alunos são alocados por professor. Para as outras etapas (EF II e EM), em que o ensino é multidisciplinar, abrangendo vários temas, dependendo das necessidades curriculares de cada série, em média $(4.154 + 3.803)/(866 - 358) = 15,7$ alunos são alocados para cada professor. Essas proporções estudante/professor são inferiores ao desejável.

Neste sistema, todos os professores do EF I são contratados em regime de meio-período, e trabalham 20 horas-aula, das quais 15 horas em sala de aula (as outras cinco horas são dedicadas ao planejamento, capacitação, e outras atividades relacionadas). Como visto anteriormente, o número máximo de alunos nesta etapa é de 30 alunos por turma, todos alocados em escolas que oferecem 5 horas-aula por dia, de segunda a sexta-feira, num total de 25 horas-aula por semana. Os professores que atuam no EF II e EM, sob o regime de contratação 20 horas semanais, utilizam 16 horas-classe de trabalho, correspondendo

Tabela 4 – Número de professores contratados em tempo parcial (20 horas/semana), por disciplina e dependência administrativa, Itacoatiara, 2016

Professores	Municipal	Estadual	Total
Artes	22	27	49
Biologia	-	8	8
Ciências	27	25	52
Educação Física	39	20	59
Religião	12	18	30
Língua Estrangeira	5	16	21
Filosofia	-	5	5
Física	-	9	9
Geografia	26	30	56
História	27	31	58
1º. a 5º. ano	256	102	358
Literatura	-	20	20
Matemática	31	35	66
Língua Portuguesa	33	28	61
Química	-	9	9
Sociologia	-	5	5
Total	478	388	866

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

a 12 horas semanais, em sala de aula, sendo as demais horas (8 horas ao total), dedicadas ao planejamento, preparação, capacitação e outras atividades relacionadas. O número máximo de alunos por turma nessas duas etapas é de 35 e 40 alunos, respectivamente, todos em escolas com cinco horas-aula por dia, de segunda a sexta-feira, num total de 25 horas-aula por semana.

A Tabela 5 mostra a distribuição da carga de trabalho do professor entre as várias disciplinas. O número necessário de turmas para atender a demanda, pode ser obtido dividindo-se o número de alunos matriculados, pelo número máximo de alunos permitidos em cada série.

Com o número de turmas definido, é possível determinar a quantidade de professores para atender ao sistema. Seriam, portanto, necessários, no mínimo, 621 professores, dos quais 249 para o EF I e 372 para as diversas disciplinas de EF II e EM. Esta quantidade de professores representa números teóricos, pois para que todos os requisitos do sistema público de ensino em Itacoatiara fossem atendidos, teria-se que se obter a máxima eficiência alocativa dos recursos disponíveis, ou seja, da distribuição de alunos por turma, escola e professores de cada disciplina. Alcançar esta eficiência, também dependeria da possibilidade de cooperação entre o Estado e o Município, no intuito de se otimizar a cobertura da demanda de todos os estudantes.

Tabela 5 – Horas-aula exigidas de cada disciplina, e número correspondente de turmas e professores

Disciplinas	Horas-aula obrigatórias por semana												No de Prof.
	Ens. Fund. I					Ens. Fund. II				Ens. Médio			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	
Artes						1	1	1	1				8
Biologia										2	2	2	13
Ciências						3	3	3	3				23
Ed.Física	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	55
Religião						1	1	1	1				8
Língua Est.						2	2	2	2	2	2	2	28
Filosofia										2	2	2	13
Física										2	2	2	13
Geografia						3	3	3	3	2	2	2	35
História						3	3	3	3	2	2	2	35
1o. a 5o. ano	23	23	23	23	23								249
Literatura										4	4	4	25
Matemática						5	5	5	5	3	3	3	54
Língua Port.						5	5	5	5				36
Química										2	2	2	13
Sociologia										2	2	2	13
Nro. de Estud.	1276	1096	1317	1334	1385	1159	978	984	1033	1171	898	1734	621
Estud./Turma	30	30	30	30	30	35	35	35	35	40	40	40	
Nro. de Turmas	43	37	44	44	47	34	28	29	30	30	23	44	

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados coletados junto à SEMED-ITA/CREI.

A partir dos dados obtidos junto às Secretarias de Educação, verifica-se que:

1. Apesar do SPE possuir capacidade teórica para atender a demanda, há superlotação, principalmente nos anos escolares correspondente ao EF I;
2. Há um desbalanceamento espacial, com vagas sendo oferecidas longe de suas demandas, aumentando o deslocamento dos alunos até as escolas onde foram alocados;
3. O desbalanceamento na formação de turmas gera ineficiência alocativa em relação ao quadro de professores. Isto é particularmente crítico em relação às turmas do EF I, que contratam dois professores para turmas superiores a 30 aluno.

Há, portanto, no SPE de Itacoatiara, oportunidades de melhorias. Na próxima seção, serão propostos cenários alternativos utilizando o modelo MDESL-MIP. A criação dos cenários possibilitará a validação do modelo e a avaliação das melhorias obtidas a partir da análise dos indicadores criados.

4.3 CENÁRIOS ALTERNATIVOS

Nesta seção, passa-se à construção e análise de seis cenários alternativos, utilizando-se o modelo MDESL-MIP. Nestes cenários, denominados CEN01, CEN02, CEN03, CEN04, CEN05, CEN06, modificações são propostas à configuração do atual SPE de Itacoatiara, e objetiva encontrar soluções aos problemas identificados, como a superlotação das turmas, a ineficiência na contratação de professores, e o deslocamento médio dos alunos, dentre outros. A Tabela 6 descreve cada cenário.

Tabela 6 – Descrição dos cenários alternativos

CEN01	<p>Considera a situação atual, limitando a 30, 35 e 40 o número de alunos por turma no EF I, EF II e EM, respectivamente. Este cenário tem como objetivo equilibrar o tamanho das turmas a fim de melhorar o aprendizado e aumentar a eficiência alocativa do professor, a partir do que é observado atualmente, ou seja, o fato de turmas excederem o número máximo de alunos permitidos. Este é o caso base, pois examina a situação atual, supondo que as escolas cumprem os limites regulamentares de tamanho de turmas (algo que de fato não acontece em todas as escolas).</p>
CEN02	<p>Considera o planejamento a médio prazo, e inclui uma escola em construção, localizada na região leste do município e que atenderá ao EF II. Considera, também, a transferência de uma escola EF II, para o EM.</p>
CEN03	<p>Mantém as mudanças do CEN02 e especializa a oferta de ensino por dependência administrativa. Neste cenário, o município fica responsável por oferecer exclusivamente o EF I. A oferta do EF II, que hoje é compartilhado pelo município, passa a ser oferecido exclusivamente pelo Estado, que já era responsável pelo EM.</p>
CEN04	<p>Igual ao CEN01, mas diminui o número de alunos Ensino Fundamental para 25 alunos (ao contrário de 30). O EF II permanece com 35 alunos e o EM, com 40 alunos. Na impossibilidade de se criar todas as turmas seguindo as especificações pedagógicas, este cenário avalia o impacto da decisão de formar turmas reduzidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando a infraestrutura existente.</p>
CEN05	<p>Igual ao CEN03, mas diminui o número de alunos EF I para 25 alunos (ao contrário de 30). O Ensino Fundamental e permanece com 35 alunos e o EM, com 40 alunos.</p>
CEN06	<p>Igual ao CEN01, com as seguintes modificações: a representa a alocação atual do professor/aluno/turma/escola com a limitação de 30, 35 e 40 alunos no EF I, EF II e EM, respectivamente, sendo que neste cenário todas as escolas podem oferecer qualquer série, de qualquer uma das três etapas de ensino, sem qualquer restrição relacionada com a dependência administrativa.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o objetivo é aumentar a eficiência na alocação de professores e alunos nas escolas e turmas, de modo que as recomendações pedagógicas sejam atendidas, o modelo MDESL-MIP foi aplicado a cada cenário, de modo a maximizar a eficiência alocativa dos estudante/-

professor/turma/sala de aula. A próxima seção apresenta os resultados desta aplicação, comparando cada um dos cenários com a situação atual em Itacoatiara, examinando os seguintes indicadores:

1. número de turmas necessárias para atender a demanda;
2. número de alunos não alocados;
3. distância média percorrida pelos alunos;
4. número de professores contratados, por disciplina;
5. fator de carga efetiva do professor, medido como a razão entre o número de horas de aula atribuídas a cada professor e o número máximo de horas de aula para a respectiva categoria de professores, em média para todos os professores;
6. fator de carga de turma, medido como a razão entre o número de alunos em cada turma e o número máximo de alunos permitido na respectiva turma, com média de todas as turmas.

4.4 RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO MODELO MDESL-MIP

4.4.1 Número de turmas

Conforme descrito anteriormente, o total de alunos que precisavam de um *slot* (isto é, precisam ser matriculados no SPE de Itacoatiara) no ano escolar de 2016, era de 14.361. Estes alunos eram atendido por 423 turmas. Após a aplicação do modelo MDESL-MIP, houve aumento no número de turmas criadas para atender a demanda.

A Tabela 7 descreve o número de turmas que maximiza a eficiência de alocação de alunos e professores nos seis cenários propostos. Cenário CEN01 requer 434 turmas para alocação ótima, e representa um número maior do que o observado atualmente, exigindo que 11 novas turmas fossem abertas. Entretanto, como será visto a seguir, apesar do novos cenários indicarem a necessidade de turmas adicionais para assegurar que o número de alunos por turma esteja abaixo do limiar permitido, o número de professores alocados é menor, o que evidencia a atual inadequação do uso das horas de trabalho dos professores.

O cenário CEN04, que impõe a formação de turmas do Ensino Fundamental com no máximo 25 alunos, exige uma adição de 25 turmas

Tabela 7 – Número de turmas, por série e cenário

Etapa		Atual	Cenários Alternativos						
			CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06	
Ensino Fundamental	I	1	41	43	43	40	45	39	43
		2	32	37	37	34	39	35	37
		3	38	44	44	43	48	42	44
		4	40	45	45	44	48	44	45
		5	38	46	46	45	50	46	46
	II	6	39	33	33	34	33	34	34
		7	36	28	28	28	28	28	28
		8	28	28	28	29	28	29	29
		9	32	30	30	30	29	30	30
Ensino Médio	1	32	31	31	31	31	31	29	
	2	33	24	24	24	24	24	23	
	3	34	45	45	45	45	45	44	
Total		423	434	434	427	448	427	432	

Fonte: Elaborado pelo autor.

a mais (ou 5,9%), com um total de 448 turmas. O maior ganho, em termos absolutos, se dá nas turmas do EF II e do EM. Nestas etapas, o número de turmas necessárias para atender a demanda é menor que o cenário atual, a única exceção acontece no terceiro ano do EM, onde o número de turmas aumenta.

4.4.2 Alunos não alocados

Os resultados mostram que o modelo foi capaz de formar turmas respeitando a capacidade preestabelecida (o que não acontece no cenário atual). A Tabela 8 apresenta a demanda não atendida, ou seja, o total de alunos que o sistema não foi capaz de alocar em uma série/turma, em cada cenário. Nos cenários CEN01 e CEN06, apenas 9 e 12 alunos, respectivamente, não foram alocados. Estes casos poderiam ser facilmente resolvidos com medidas administrativas.

As alterações no CEN02, que considera uma nova escola do EF II (administrada pelo estado), não altera a demanda não atendida quando

Tabela 8 – Demanda não atendida em número de alunos por grau para cada cenário

Etapa		Atual	Cenários Alternativos						
			CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06	
Ensino Fundamental	I	1	-	-	-	76	151	301	-
		2	-	-	-	76	121	221	-
		3	-	-	-	27	117	267	-
		4	-	-	-	14	134	234	-
		5	-	1	1	31	131	231	1
	II	6	-	4	4	-	4	-	-
		7	-	-	-	-	-	-	-
		8	-	4	4	-	4	-	-
		9	-	-	-	-	18	-	-
Ensino	1	-	-	-	-	-	-	11	
	2	-	-	-	-	-	-	-	
Médio	3	-	-	-	-	-	-	-	
Total		-	9	9	224	680	1.254	12	

Fonte: Elaborado pelo autor.

comparada com o CEN01. A capacidade extra obtida com a instalação da nova escola não foi capaz de suprir toda a demanda segundo os parâmetros atuais. O aumento da oferta ocorre exatamente na etapa onde a taxa média de alunos por turma não representava um problema, conforme discutido anteriormente (ver Tabela 3). Esta situação evidencia o problema da utilização não compartilhada das instalações escolares e da falta de cooperação e planejamento mútuo, ou seja, enquanto o Estado constrói uma escola que deve atender aos alunos da segunda etapa do Ensino Fundamental, a real necessidade se encontra nos anos iniciais, onde há superlotação.

O cenário 3 (CEN03) propõe mudanças drásticas em relação à realidade atual. Nele, a rede municipal atenderia ao Ensino Fundamental Anos Iniciais, enquanto a rede estadual atenderia ao Ensino Fundamental Anos Finais e ao Ensino Médio. Os resultados apresentados na Tabela 8 indicam que a atual estrutura não é capaz de suportar essas mudanças, visto que 224 alunos deixariam de ser atendidos. O cenário 5 (CEN05), semelhante ao cenário 3, muda a estrutura atual em

relação ao oferecimento de ensino e as dependências administrativas, e impõe uma outra alteração. Aqui, as turmas do Ensino Fundamental, que neste cenário são oferecidas apenas por escolas municipais, obedecem à restrição de 25 alunos por turma. O resultado é naturalmente pior em relação ao cenário 3, que já havia apresentado problemas de capacidade. Agora, são 1.254 alunos não alocados.

O cenário 4 (CEN04) propõe uma modificação mais sutil. Considerando a estrutura atual, o que aconteceria se impuséssemos apenas uma alteração no Ensino Fundamental Anos Iniciais, formando turmas com 25, e não mais com 30 alunos. Mesmo essa mudança não seria tolerada, visto que 680 alunos deixariam de ser atendidos. Finalmente, o cenário 6 (CEN06), que possibilita a oferta de turmas por qualquer escola sem restrições relacionadas à dependência administrativa, não apresenta resultados melhores que os obtidos nos cenários CEN01 e CEN02. Isto indica que a situação atual em termos de capacidade e localização espacial parecem satisfatórias.

Os diversos cenários analisados mostram que o sistema é capaz de atender a demanda por vagas, desde não ocorram maiores modificações (CEN01). A tentativa de formar turmas com menos alunos mostrou-se inviável, como visto nos CEN03, CEN04 e CEN05. Mostra, também, que é possível resolver o problema da superlotação, com os novos parâmetros estabelecidos. A mera inclusão de uma nova unidade não representa, necessariamente, ganhos de eficiência. Uma avaliação prévia de onde estão as demandas parece fundamental na hora de decidir onde construir uma nova escola e quais etapas de ensino atender. Isto fica claro no cenário CEN02, onde a construção de uma nova escola não altera os resultados da alocação, pois a escola está sendo construída em uma área relativamente bem atendida e oferece vagas para uma etapa que não possui problemas de lotação.

4.4.3 Deslocamento médio

A Tabela 9 apresenta os resultados das distâncias médias percorridas pelos estudantes. No cenário atual, a média percorrida, incluindo a Zona Rural, é de 2.126 quilômetros. Considerando apenas os estudantes da Zona Urbana, a distância média é de 1.133 quilômetro.

Em todos os cenários propostos, a distância média percorrida pelos estudantes é menor que o cenário atual, sendo o cenário CEN06, o que apresenta o melhor resultado. Em média, a melhoria é de 0,346 quilômetro (16,3%) considerando as Zonas Urbana e Rural, e de 0,174

Tabela 9 – Distância média percorrida por estudante

Estatísticas	Atual	Cenários Alternativos					
		CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06
Todas as Regiões	2,126	1,860	1,828	1,822	1,746	1,758	1,66
Área Urbana	1,133	0,944	0,902	1,002	1,072	1,027	0,810

Fonte: Elaborado pelo autor.

(15,3%) quilômetro, quando considerada apenas a Zona Urbana.

4.4.4 Professores

O cenário atual mostra que o SPE de Itacoatiara é atendido por 866 professores. A partir da aplicação do modelo MDES-MIP, conforme é possível ver na Tabela 10, uma redução significativa no número de professores necessários para atender a demanda, pode ser observado.

Os cenários CEN01, CEN02 e CEN06 apresentam resultados semelhantes. São 645, 645 e 633, respectivamente, com uma redução de 25,5% no melhor dos casos. Os cenários CEN03, CEN04 e CEN05, apesar de apresentarem bons resultados não serão analisados, pois o número de professores foram calculados para uma demanda parcialmente atendida, conforme discutido anteriormente. Os cenários CEN01, CEN02 e CEN06 apresentam uma redução média de 117 (23,0%) dos 508 professores ativos no EF II e EM. O EF I apresenta uma redução média de 28,8% no número de professores, passando de 358 para 255, em média, considerando os cenários CEN01, CEN02 e CEN06, o que representa uma redução de 103 professores.

A Tabela 10 mostra, também, que o quadro de professores que atuam nas disciplinas Religião, Arte, Ciência, Geografia, História e Língua Estrangeira, é significativamente maior do que o calculado para cada cenário alternativo. Por outro lado, as demais disciplinas (Educação Física, Língua Estrangeira, Literatura, Química, Física, Biologia, Sociologia e Filosofia) o quadro atual de professores é inferior ao calculado nos vários cenários. Isso sugere que a contratação de professores ocorreu sem a suficiente atenção às necessidades específicas e que a alocação de professores não possui a correspondência desejada, o que confirma a oportunidade de aumento na eficiência do sistema.

Tabela 10 – Número de professores necessários para atender a demanda em cada cenário

Professores	Atual	Cenários Alternativos					
		CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06
Arte	49	8	8	8	10	8	9
Biologia	8	13	13	13	13	13	12
Ciências	52	23	23	24	25	24	24
Educação Física	59	63	62	60	65	60	64
Religião	30	8	8	8	10	8	9
Língua Estrangeira	21	29	29	29	30	29	29
Filosofia	5	13	13	13	13	13	12
Física	9	13	13	13	13	13	12
Geografia	56	36	36	37	38	37	36
História	58	36	36	37	38	37	36
1º. ao 5º. ano	358	254	255	242	273	242	255
Literatura	20	25	25	25	24	25	24
Matemática	66	59	59	59	60	59	61
Ling. Portuguesa	61	39	39	39	40	39	40
Química	9	13	13	13	13	13	12
Sociologia	5	13	13	13	13	13	12
Total	866	645	645	633	679	633	647

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4.5 Fator carga efetiva do professor

As escolas estaduais podem alocar até 16 horas-aula para os professores do EF II e EM, enquanto os professores do EF I, essa quantidade pode chegar a 20 horas-aula. Essas diferenças são resultados das negociações trabalhistas conduzidas pelo sindicato de professores do estado. Apesar da diferença legal nas exigências de trabalho, na prática a alocação de pelo menos 16 horas de aula é seguida pelo estado e pelo município.

As tabelas 3 e 4 retratam a situação atual, na qual 358 professores do EF I são alocados em 189 turmas. Uma política do município aloca dois professores quando o número de alunos em turmas do EF

I for superior a trinta. No entanto, apenas 80 turmas estão nesta situação, o que representaria uma necessidade total de 269 professores. Isso indica que há turmas com menos de 30 alunos atendidas por dois professores.

Na Tabela 11, temos os fatores de carga efetiva média dos professores. Este fator indica a relação entre o número de aulas efetivamente alocado para cada professor e sua carga máxima de trabalho (15 horas-aula para os professores do EF I e 16 horas-aula para professores do EF II e Médio). Nesta tabela é possível ver que os indicadores do EF I são superiores a 90% em todos os cenários.

A disciplina Literatura foi a única que apresentou fator de alocação de 100%. Isto ocorreu por ela possuir 4 horas-aula semanais. Logo, um professor pode assumir três turmas com carga horária completa. Como o modelo proposto não possibilita que um professor complete sua carga horária com disciplinas afins, o que é relativamente comum, todas as vezes que a uma disciplina não for múltipla do número de horas de trabalho do professor, será difícil atingir-se o grau máximo de eficiência das horas de trabalho do professor.

A título de exemplo, a Figura 22 reproduz a tela de relatório do sistema desenvolvido. Nela é possível ver os resultados propostos para a escola Maria Nira Guimarães, no contexto do cenário CEN01. Nesta tela estão relacionadas todas as escolas que compõem o sistema escolar público de Itacoatiara. Conforme cada escola é selecionada, a solução para aquela escola é detalhada nas demais guias do relatório.

Tabela 11 – Fator de carga efetiva do professor para cada cenário e disciplina

Professores	Cenários Alternativos					
	CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06
Arte	93,0%	93,0%	94,5%	73,7%	94,5%	84,0%
Biologia	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	100,0%
Ciências	97,0%	97,0%	94,5%	88,5%	94,5%	94,5%
Educação Física	86,1%	87,5%	89,0%	86,2%	89,0%	84,4%
Religião	93,0%	93,0%	94,5%	73,7%	94,5%	84,0%
Língua Estrangeira	94,4%	94,4%	95,3%	73,7%	94,5%	84,0%
Filosofia	96,2%	96,2%	96,2%	90,8%	94,3%	93,5%
Física	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	100,0%
Geografia	96,7%	96,7%	95,1%	96,2%	96,2%	100,0%
História	96,7%	96,7%	95,1%	91,1%	95,1%	96,4%
1º. ao 5º. ano	97,3%	97,3%	97,0%	91,1%	95,1%	94,4%
Literatura	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Matemática	94,8%	94,8%	95,9%	92,7%	95,9%	91,5%
Ling. Portuguesa	95,4%	95,4%	97,0%	92,2%	97,0%	94,5%
Química	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	100,0%
Sociologia	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	96,2%	100,0%
Total	95,3%	95,4%	95,6%	91,1%	95,6%	94,8%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 – Interface do Sistema de Planejamento e Apoio à Decisão para uma escola e CEN01.

File Help Model | SQL Query | Tables | Results

School System Planning - F:\duplobox\H4\brando\GAMP\DadosBase\H4brando\H4brando\Estudo de Caso\Cen01\VEECOLA.GDB

Teacher Allocation

Code	Subject Description	Engrty	# Prev	# Total	Total Hours
ART	ARTE	20H	0	1	20,00
DE	DENCAS	20H	0	3	60,00
EPT	EDUÇAO FISICA	20H	0	1	100,00
ERE	ENSINO RELIGIOSO	20H	0	1	20,00
EST	LINGUA ESTRANGEIRA	20H	0	2	40,00
GED	GEOGRAFIA	20H	0	3	60,00
HIS	HISTORIA	20H	0	3	60,00
LET	PEDAGOGIA - LAD S/A	20H	0	17	340,00
MAT	MATEMATICA	20H	0	9	180,00
PIR	LINGUA PORTUGUESA	20H	0	9	180,00

Class Allocation

Code	Subject Description	Factor	Available	Allocated	%
ART	ARTE	0,80	20,00	0,00	100,00 %
DE	DENCAS	0,80	60,00	0,00	100,00 %
ERE	ENSINO RELIGIOSO	0,80	100,00	0,00	100,00 %
EST	LINGUA ESTRANGEIRA	0,80	20,00	16,00	80,00 %
GED	GEOGRAFIA	0,80	40,00	32,00	100,00 %
HIS	HISTORIA	0,80	60,00	48,00	100,00 %
LET	PEDAGOGIA - LAD S/A	1,00	340,00	340,00	100,00 %
MAT	MATEMATICA	0,80	180,00	80,00	100,00 %
PIR	LINGUA PORTUGUESA	0,80	180,00	80,00	100,00 %

Class Allocation

Code	Classrooms	Capacity	Student/Class	# Classes	Enrollment
001	01	90	30	4	120
002	02	90	30	4	120
003	03	90	30	3	90
004	04	90	30	3	90
005	05	90	30	2	60
006	06	50	30	1	30
007	07	50	30	1	30
008	08	50	30	1	30
009	09	50	30	1	30
010	10	50	30	1	30
011	11	50	30	1	30
012	12	50	30	1	30
013	13	50	30	1	30
014	14	50	30	1	30
015	15	50	30	1	30
016	16	50	30	1	30
017	17	50	30	1	30
018	18	50	30	1	30
019	19	50	30	1	30
020	20	50	30	1	30
021	21	50	30	1	30
022	22	50	30	1	30
023	23	50	30	1	30
024	24	50	30	1	30
025	25	50	30	1	30
026	26	50	30	1	30
027	27	50	30	1	30
028	28	50	30	1	30
029	29	50	30	1	30
030	30	50	30	1	30

Available Classrooms

Type	Classroom Description	Capacity	# Rooms	Total Hours	Booked	Allocated	Slack	% Idle
S1	Sala de aula tipo 1	30	1	50,00	44,00	6,00	12,00 %	
S3	Sala de aula tipo 3	40	3	150,00	150,00	0,00	0,00 %	
S5	Sala de aula tipo 5	50	12	600,00	560,00	20,00	3,33 %	

Students by Grade

Grade	Grade Description	Enrollment
K10	1º ANO - ENS FUND	120
K12	2º ANO - ENS FUND	90
K13	3º ANO - ENS FUND	120
K14	4º ANO - ENS FUND	90
K15	5º ANO - ENS FUND	140
K16	6º ANO - ENS FUND	100
K17	7º ANO - ENS FUND	175
K18	8º ANO - ENS FUND	140
K19	9º ANO - ENS FUND	140

Students by Neighborhood

Code	Neighborhood Description	Distance	Enrollment
ERRA	EDUARDO BRAGA I	1,040	65
ERRA	EDUARDO BRAGA II	1,334	137
APLOR	JACOM FLORINDA	0,896	688
NOGLEN	MOLENA JUNIOR	1,078	98
SRIST	SAO CRISTOVAO	0,993	44
SRFAC	SAO FRANCISCO	0,896	137

Consolidated Worksheet by Subject

Code	Subject Description	Factor	Available	Allocated	%
ART	ARTE	0,80	20,00	0,00	100,00 %
DE	DENCAS	0,80	60,00	0,00	100,00 %
ERE	ENSINO RELIGIOSO	0,80	100,00	0,00	100,00 %
EST	LINGUA ESTRANGEIRA	0,80	20,00	16,00	80,00 %
GED	GEOGRAFIA	0,80	40,00	32,00	100,00 %
HIS	HISTORIA	0,80	60,00	48,00	100,00 %
LET	PEDAGOGIA - LAD S/A	1,00	340,00	340,00	100,00 %
MAT	MATEMATICA	0,80	180,00	80,00	100,00 %
PIR	LINGUA PORTUGUESA	0,80	180,00	80,00	100,00 %

4.5 INTERPRETAÇÃO DAS VARIÁVEL DUAIS

Em um ambiente urbano que possua uma dinâmica demográfica intensa, como a observada nas últimas décadas no município de Itacoatiara, políticas municipais de urbanização, como a decisão de onde construir uma nova escola, um posto de saúde, dentre outros serviços, tornam-se especialmente importantes. Neste sentido, as variáveis duais associadas às restrições de demanda por parte dos alunos, e as restrições de oferta de *slots* por parte das escolas, são informações particularmente úteis aos tomadores de decisão.

Como exemplo, os valores das variáveis duais, associados a restrição (2) do modelo MDESL-MIP, calculados para cada bairro, apresentam estimativas do custo médio de alocação de um aluno adicional em um bairro específico. Estas estimativas fornecem informações valiosas aos formuladores de políticas urbanas, que podem, por exemplo, incentivar iniciativas habitacionais em bairros com os menores custos. A Tabela 12 apresenta as informações dos custos, onde é possível notar as variações entre os diferentes bairros e regiões da cidade.

Os menores custos marginais estão associados aos bairros localizados na região Oeste (Centro, Colônia e Pedreiras), que estão na região urbana mais antiga da cidade e, portanto, possuem a maioria das escolas, logo um grande número de oferta de vagas, além de uma questão demográfica, visto que os bairros mais antigos tendem a possuir uma população mais velha. Como resultado, as políticas municipais que encorajam investimentos em habitação para famílias com crianças seriam consistentes com o objetivo de reduzir os custos totais de educação pública.

Por outro lado, os valores das variáveis duais associadas às restrições (3) do modelo MDESL-MIP, fornecem estimativas para a redução dos custos no sistema escolar, quando uma unidade adicional é oferecida por uma respectiva escola/série. A comparação dessas estimativas fornece informações aos gestores educacionais, uma vez que pode ser usado para priorizar os esforços de expansão escolar, de tal modo a aumentar a capacidade da escola e da sala de aula, nos locais (bairros) em que tais reduções de custos são mais elevadas.

A Tabela 13 apresenta os custos de oportunidades, que cobrem uma faixa significativa dos bairros pesquisados. A partir desta tabela, pode-se entender porque existe demandas não atendidas para o 5º ano no EF I e para o 6º e 8º anos do EF II no cenário CEN01. Isso ocorre devido ao custos marginais muito altos para essas séries, em comparação com os outros custos marginais descritos, ou seja, um aluno (*slot*) adi-

Tabela 12 – Valores médios da variáveis duais associadas com a restrição de demanda (2)

Região	Bairro	Cenários Alternativos					
		CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06
Leste	Araújo Costa	158,05	149,50	250,11	396,68	272,82	111,04
	Bairro da Paz	182,00	172,49	273,90	418,41	294,77	135,04
	Eduardo Braga I	190,49	180,34	278,78	427,79	298,82	144,39
	Eduardo Braga II	196,16	186,64	284,72	433,82	302,49	150,69
	Jardim Adrina	151,01	143,99	284,22	389,64	270,93	140,46
	Jardim Florestal	189,89	182,38	282,71	428,60	302,66	147,09
	Jardim Lorena	179,68	170,17	271,58	416,09	292,74	134,20
	Santo Antônio	160,54	152,08	252,83	397,73	275,54	115,41
	São Cristovão	179,14	171,89	271,25	416,42	291,20	133,05
	Tiradentes	170,38	159,20	260,48	406,80	283,10	124,90
Leste	Iracy	152,98	145,51	246,86	392,91	266,85	109,15
	Bairro Florestal	189,89	182,38	282,71	428,60	302,66	147,09
	Mamoud Amed	186,80	179,02	280,16	427,19	300,39	143,68
	Mutirão II	180,83	173,36	273,15	417,68	292,52	135,82
	Nogueira Júnior	192,86	185,45	285,30	429,11	304,67	147,22
	Prainha	164,69	156,68	255,89	403,46	276,17	117,12
	São Francisco	185,84	178,43	278,27	422,09	297,63	140,20
Oeste	Centenário	161,11	154,45	261,48	401,42	287,13	120,94
	Centro	140,47	133,81	240,38	379,64	266,03	99,82
	Colônia	140,47	133,81	240,38	379,64	266,03	99,82
	Pedreira	144,22	136,75	240,50	385,14	266,21	101,54
Oeste	Jauari I	151,01	143,99	248,22	389,64	270,93	104,46
	Jauari II	157,60	148,09	252,59	394,01	274,55	112,33
	Santa Luzia	151,34	143,02	246,06	389,90	268,77	112,27
	São Jorge	158,63	149,12	251,51	395,04	273,47	114,31
Total		323,65	346,25	403,37	535,25	403,37	317,47

Fonte: Elaborado pelo autor.

cional em uma dessas séries pode resultar em economias significativas, e evitar a alocação desses alunos escolas da rede privada, subsidiado pelo município. No entanto, é preciso cuidados ao se fazer esta análise, visto se tratar de custos marginais, e o estabelecimento de *slots* adicionais para atender os estudantes, pode exigir a contratação de novos

Tabela 13 – Valores das variáveis duais associadas à Restrição de Capacidade (3), por escola/grau para o cenário CEN01

Região	Bairro	Ensino Fundamental I					Ensino Fundamental II				EM			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	
Leste	13035100	-32,94	-63,36	-63,90	-63,90	-440,72								
	13035240										-4,5	-4,50	-4,50	
	13096621						-567,90	-20,52	-567,18	-20,52				
	13034260	-52,92	-82,08	-83,34	-83,34	-458,90					-20,52	-20,52	-18,18	
	13032968	-30,06	-60,48	-60,48	-60,48	-437,30								
Leste	13261207	-74,88	-104,04	-105,30	-105,30	-462,32								
	13304356	-39,60	-70,02	-70,56	-70,56	-447,38								
	13084356	-67,86	-97,02	-98,28	-98,28	-455,30								
	13059670	-55,08	-84,24	-85,50	-85,50	-461,06								
	13073087	-57,24	-86,40	-87,66	-87,66	463,22								
	13084283	-64,62	-95,04	-95,04	-95,04	-471,86								
	13032941	-16,20	-46,62	-46,62	-46,62	-423,44	-547,92	-0,54	-547,92	-0,54				
Oeste	13035274	-5,04	-35,46	-35,28	-35,46	-412,28								
	13084267						-548,82	-1,98	-548,82	-1,98				
	13033620										0,00	0,00	0,00	
	13035304	0,00	-30,24	-30,24	-30,42	-407,24								
	13090542	-4,14	-34,56	-34,56	-34,56	-411,38								
	13035312						-547,38	0,00	-547,38	0,00				
	13059599										-0,90	-0,90	-0,90	
Oeste	13034251	-14,22	-44,64	-44,64	-43,20	-420,02								
	13035282						-552,24	-5,40	-551,52	-5,40				
	13035290	-15,66	-46,08	-45,90	-46,08	-422,90								
	13100254	-25,02	-55,44	-55,44	-55,44	-432,26								
	13033646						-562,87	-15,84	-561,96	-15,84				
	13034243	-36,54	-66,78	-66,78	-66,96	-443,78	-566,64	-19,62	-565,74	-19,62				
Rural	13103490	0,00	0,00	0,00	0,00	-497,60								

Fonte: Elaborado pelo autor.

professores ou a necessidade de expansão das salas de aula existentes, o que por sua vez pode limitar as opções disponíveis. A Tabela 13 também mostra que a oferta de *slots* para o EF I tem os maiores custos marginais, especialmente nas regiões Rural e Norte. Um aumento nos *slots* de quinta série do EF I e/ou nos *slots* do sexto e oitavo anos do EF

II nessas duas regiões, levaria a maiores economias do que em qualquer outra parte do sistema.

Por fim, vale ressaltar o fato de certas regiões não terem custos marginais para certos serviços de escolares, uma vez que nenhuma escola na respectiva região oferecer o serviço específico. Essas são as combinações de regiões e serviços educacionais que devem ser direcionados para o projeto de expansão escolar. A inclusão de tais projetos em análises subseqüentes utilizando o modelo proposto, permitiria avaliar a sua conveniência, considerando o seu impacto nos custos de todo o sistema escolar.

4.6 ANÁLISE DOS CENÁRIOS E RECOMENDAÇÕES

A aplicação do modelo MDESL-MIP resultou em várias recomendações aplicáveis ao SPE em Itacoatiara, descritas a seguir:

a) ao se comparar a situação atual com a CEN01, houve uma redução na distância média percorrida pelos estudantes de aproximadamente 12,5%, e uma redução 16,7%, quando considerados apenas os alunos da área urbana. As alocações de professores também resultaram em reduções significativas, de 29% para EF I e de 23% para o EF II e EM. Outro resultado foi uma maior aproximação dos professores à observação das necessidades individuais de cada escola, tendo recebido turmas específicas em cada série. A utilização do modelo para racionalizar a distribuição de recursos pedagógicos, incluindo salas de aula e professores, levou a significativas melhorias de eficiência.

b) a não alocação de professores resultante da implementação de cenários após o processo de otimização, sobretudo no caso da CEN01, pode ter um impacto pedagógico muito positivo. Como resultado da disponibilidade de tempo, estes professores poderiam participar de programas de capacitação profissional, através dos quais as práticas bem sucedidas seriam compartilhadas e divulgadas, além de outras iniciativas, como atualizações pedagógicas.

c) o CEN02 foi motivado pela situação atual em que o Estado está financiando a construção de uma nova escola EF II na região Leste, ao mesmo tempo em que uma escola do EF II passará a atender o EM, o que representa um aumento líquido na oferta de *slots* estudantis para esta etapa. Como pode ser observado na Tabela 13, os maiores custos marginais estão associados ao EF II na região norte, enquanto os custos marginais são baixos para o EM. Apesar da ligeira melhoria do CEN02 em relação ao CEN01, o plano atual de aumentar a capacidade

do EM quando as necessidades mais urgentes se situam noutra local, e inaugurar uma escola EF II em uma região sem ganhos marginais significativos, não é claramente o mais eficiente. A recomendação derivada da metodologia é conduzir uma análise da variável dual para focalizar melhor os recursos financeiros e de capital ao expandir o sistema de escolarização, seja através de aumentos de capacidade das escolas existentes ou construção de novas escolas.

d) o CEN03 examina uma possível mudança nas responsabilidades institucionais, onde o município torna-se exclusivamente responsável pelo EF I, enquanto o Estado se torna único responsável pelo EF II e EM. Esta mudança administrativa, junto com a instalação de uma nova escola da região Leste, não aumenta a eficiência quando comparada à CEN01. Logo, os governos municipal e estadual precisam avaliar se os benefícios da especialização na escolarização administrativa no nível institucional são suficientes para compensar os investimento em uma nova escola, uma vez que não houve diferença significativa nos número de professores, nem na média das distâncias no deslocamento dos alunos. Quando comparado com o CEN02, esta especialização administrativa resulta em um aumento de 11,1% na média das distâncias percorrida pelos estudantes das regiões urbanas, e um aumento substancial da demanda não atendida, apesar da diminuição significativa na necessidade de contratar professores.

e) os cenários CEN04 e CEN05 mostram que neste momento a estrutura escolar do município não está preparada para mudanças como a diminuição do número máximo de alunos por turma no EF I ou a transição para a escolaridade a tempo integral. Uma vez que o aumento da especialização administrativa afeta negativamente a disponibilidade de *slots* estudantis no sistema de ensino público de Itacoatiara, especialmente no EF I (conforme ilustrado na Tabela 8. Portanto, recomenda-se que as escolas continuem sendo gerenciadas com flexibilidade do ponto de vista da dependência administrativa.

f) implementar o ensino a tempo integral, começando com os alunos do EM, e progressivamente para os anos escolares anteriores, parece ser a melhor estratégia de transição, por três razões: i) atualmente não há restrição de capacidade associada à adição de *slots* no EM; ii) o sistema de ensino público terá uma folga nas alocações de professores, desde que a recomendação (a) acima seja seguida, levando a um aumento geral da eficiência do sistema; iii) os benefícios econômicos resultantes da aplicação gradual da escolaridade em tempo integral serão sentidos mais rapidamente pela sociedade em geral

4.7 DESEMPENHO COMPUTACIONAL

Esta seção analisa o desempenho computacional do sistema utilizado na solução do modelo MDESL-MIP. Trata-se do GAMS/CPLEX, um sistema que utiliza o método *brach-and-bound*, com limites de convergência e de tempo de processamento. É importante notar que a solução algorítmica é NP-hard, o que implica o tempo de processamento cresce exponencialmente com o tamanho do problema. Esta complexidade, por sua vez, depende de vários parâmetros intrínsecos a cada situação analisada, incluindo o número de escolas, bairros, configuração geográfica, dependência administrativa (ou seja, se a escola é administrada pelo estado ou pelo município), os níveis de custo de transporte e outros. Para ilustrar esta variabilidade, duas aplicações serão analisadas a partir dos seus tempos de convergências.

A primeira situação foi descrita neste capítulo, e diz respeito ao estudo de caso realizado no município de Itacoatiara, no estado do Amazonas. As características computacionais de cada uma das seis configurações descritas acima estão resumidas na Tabela 14, enquanto que a Figura 6 traça o espaço entre a solução ótima e a solução parcial versus o tempo de convergência para a respectiva solução parcial para cada uma das seis configurações.

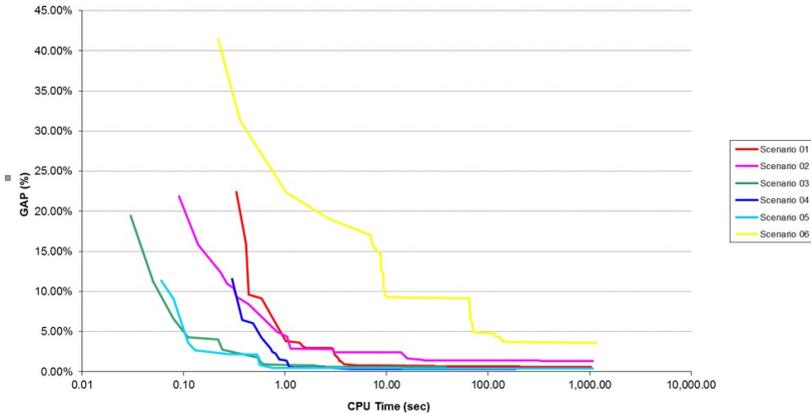
Tabela 14 – Características computacionais do estudo de caso de Itacoatiara

Parâmetros	Cenários Alternativos					
	CEN01	CEN02	CEN03	CEN04	CEN05	CEN06
Número de escolas	27	28	28	27	28	27
Número de bairros	24	24	24	24	24	24
Número de estudantes	14.361	14.361	14.361	14.361	14.361	14.361
Número de anos escolares	12	12	12	12	12	12
Number of subjects	16	16	16	16	16	16
Número de variáveis	5.029	5.142	4.491	5.29	4.491	9.961
Número de variáveis discretas	1.033	1.068	1.036	1.033	1.036	1.236
Número de restrições	1.060	1.083	1.035	1.060	1.035	1.424
Elementos diferentes de zero na matriz	18.218	18.633	15.945	18.218	15.945	39.158

Fonte: Elaborado pelo autor.

A segunda situação se refere ao estudo piloto realizado em Flo-

Figura 23 – Padrão de convergência para diferentes configurações no caso de Itacoatiara

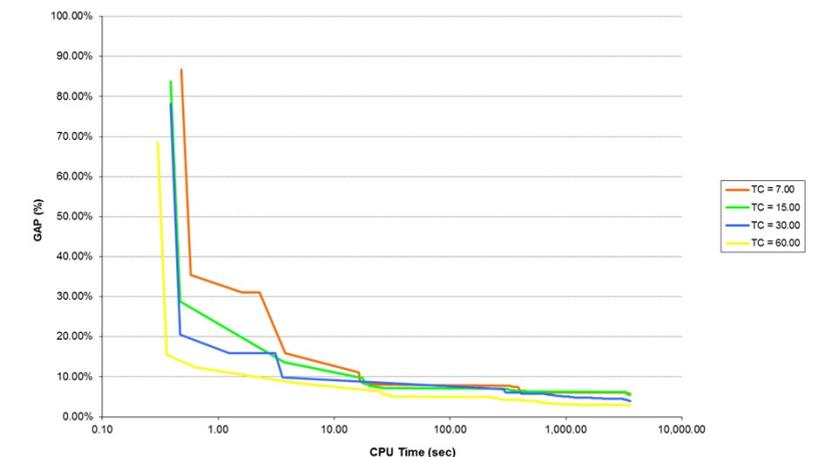


Fonte: Elaborado pelo autor.

rianópolis, Santa Catarina, município com quase meio milhão de habitantes. Este SPE conta com 79 escolas públicas e 66 bairros em seis diferentes regiões. A aplicação do modelo MDESL-MIP resultou em 28.841 variáveis (6.508 variáveis binárias), 4.074 restrições, levando a uma matriz esparsa com apenas 111.288 elementos diferentes de zero. A Figura 24 traça a diferença entre a solução ótima e solução parcial versus tempo de convergência para a respectiva solução parcial para quatro custos de transporte diferentes.

É importante notar que o desempenho computacional não é um fator decisivo para sucesso do uso do modelo MDESL-MIP em situações reais. Como ele deve ser usado como um sistema de apoio à decisão no processo de planejamento estratégico-operacional, que normalmente possui um ciclo de aplicação anual, o tempo computacional pode ser razoavelmente longo. Nos casos em que o tempo computacional eventualmente se revela proibitivo (como o problema é realmente NP-hard), é possível adotar uma estratégia de dividir a região considerada em sub-regiões menores, seguindo características geográficas ou demográficas e executar o modelo para cada sub-região separadamente.

Figura 24 – Padrão de convergência para diferentes custos de transporte no caso de Florianópolis



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.8 ESTRATÉGIA PARA A GESTÃO DA INFRAESTRUTURAS

As escolas pública no Brasil, em sua grande maioria, funcionam em tempo parcial, onde cada sala de aula é utilizada em pelo menos dois turnos (manhã e tarde). A implementação da educação em tempo integral é uma meta do governo federal e deve ser implementada gradualmente nos próximos anos. Conforme visto na Tabela 2, a cidade de Itacoatiara possui capacidade nominal para 19.552 alunos, considerando dois turnos letivos. Em 2016 havia 14.361 alunos matriculados em dois turnos (Tabela 1), número que deve crescer nos próximos anos, conforme projetado pelo modelo PROFLEXO (Figura 21).

Embora na atual estrutura exista algum excesso de capacidade, a escolaridade em tempo integral só pode ser implementada em toda a cidade se houver investimento na ampliação da infraestrutura, pois um aluno em tempo integral corresponde a dois alunos em regime de tempo parcial. Estima-se que o aumento da capacidade de infraestrutura física para atender os alunos em tempo integral seja algo em torno de 50%.

As fortes restrições orçamentárias fazem com que os investimentos necessários sejam graduais. Entretanto, com a reestruturação do

ensino médio e a alocação de recursos oriundos do governo federal, esta etapa, em particular, deve aumentar a oferta da educação em tempo integral. Não obstante a isso, uma opção seria iniciar o ensino em tempo integral nas séries finais do Ensino Médio (começando com o 12º, seguido do 11º e o 10º anos), de forma que os efeitos positivos da mudança tenham impacto sobre a economia da região mais rapidamente. O ensino em tempo integral seria gradualmente implementado, em ordem decrescente, até que todos as séries dos três ciclos se tornassem em tempo integral. A cada ano, as autoridades de educação da região poderiam alocar recursos para a expansão da capacidade escolar, adicionando salas de aula às escolas existentes e/ou construindo novas escolas.

A alocação de recursos para a expansão da rede deve ser realizada através da análise das variáveis duais, conforme descrito na seção 4.5. À medida que a necessária expansão da capacidade das escolas se der, a implantação do ensino em tempo integral pode ocorrer nas séries restantes.

4.9 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentados vários cenários alternativos ao *status quo* do SPE de Itacoatiara. A construção destes cenários mostrou como o modelo MDESL-MIP pode ser útil no planejamento estratégico-operacional de SPE, sendo esta a principal característica que o difere de outros modelos presentes na literatura. O estudo de caso apresentado neste capítulo provou que isso é possível.

O diagnóstico do SPE de Itacoatiara apontou grandes oportunidades de ganhos de eficiência no uso dos recursos públicos. Mas mostrou, também, a chance na melhora de indicadores que afetam indiretamente a qualidade de vida dos alunos e, por conseguinte, de seu aprendizado, como é o caso do deslocamento médio dos alunos de suas casas às escolas.

O uso eficiente dos recursos públicos é uma das principais motivações dessa tese. Entretanto, essa busca não deve se dá a qualquer custo. No caso específico do uso da força de trabalho dos professores, deve-se grifar que a metodologia utilizada ao se aplicar o modelo MDESL-MIP não pretende sobrecarregar de forma alguma estes profissionais, nem fechar postos de trabalho. Os parâmetros usados neste item em específico, consideraram o tempo estrito reservado para ser usado em sala de aula, e consideraram, também, o tempo para pla-

nejamento e capacitação dos docentes previstos pelos órgãos gestores. O que se busca, portanto, é o melhor uso das horas reservada para a efetiva atividade docente.

Outro fator que impacta diretamente a qualidade de ensino e o planejamento de curto prazo é a formação de turmas. O modelo se mostrou adequado para equacionar o problema da superlotação das salas de aula, ao mesmo tempo que diminuiu o deslocamento médio dos alunos, dois indicadores extremamente sensíveis aos estudantes. Já o cenário que incluiu a escola em construção mostrou a capacidade de planejamento estratégico apresentado pelo modelo MDESL-MIP. Como o modelo calcula o número mínimo de professores necessários para atender às turmas e escolas do SPE, fica evidenciada sua utilização em várias etapas do planejamento escolar.

5 CONCLUSÃO E OPORTUNIDADES DE PESQUISA

5.1 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal, o desenvolvimento de um modelo matemático que pudesse ser utilizado no planejamento e otimização de Sistemas Públicos de Ensino (SPE). Na busca por esse objetivo, um amplo levantamento do tipo *survey* foi realizado. A partir dele, estabeleceu-se o estado do arte em duas importantes áreas: o Planejamento Escolar e os Modelos Matemáticos utilizados neste contexto. Este levantamento revelou uma classe de modelos dedicados ao planejamento de sistemas escolares. Trata-se dos *Models Developed for the Educational System Level* (MDESL). Além disso, a revisão mostrou que a Programação Matemática é uma das principais técnicas utilizadas nesta classe de problemas. Como o modelo matemático desenvolvido apresenta-se na forma de um *Mixed Integer Programming* (MIP), o modelo foi denominado MDESL-MIP, que foi resolvido utilizando-se o software GAMS/CPLEX.

Para gerenciar a base de dados necessária para gerar o código GAMS, e que por sua vez resolvesse o modelo MDESL-MIP, um sistema em Delphi 7.0, denominado *School System Planning* (SSP), foi desenvolvido. Este sistema serve como um Sistema de Apoio à Decisão, pois além do código GAMS, ele gera uma série de relatórios a partir dos resultados obtidos com o GAMS/CPLEX.

Durante o desenvolvimento do modelo, um estudo piloto foi realizado na cidade Florianópolis, Santa Catarina. Ao final, com o modelo pronto, decidiu-se realizar um estudo de caso em uma cidade de menor porte, que possibilitasse o levantamento de dados, a construção de cenários e a análise dos resultados. A cidade escolhida foi Itacoatiara, no estado do Amazonas. O estudo de caso contou com o apoio da Secretaria Municipal de Educação (SEMED-ITA) e da Coordenadoria Regional de Educação (CREI), órgão vinculado ao governo estadual.

Segundo os dados levantados, o Ensino Fundamental Anos Iniciais é a etapa que mais apresenta o problema de superlotação. Em média, os cinco primeiros anos escolares ultrapassam a 30 alunos por turma. Para mitigar este problema, a prefeitura utiliza um segundo. Esta política, entretanto, aumenta a ineficiência do SPE, em pelo menos dois aspectos. O primeiro diz respeito à utilização dos espaços. Como existem salas suficientes para acomodar todos os alunos, turmas superlotadas significa subutilização de salas de aula em outros luga-

res. O outro fator está associado à ineficiência gerada por conta da contratação de um segundo professor. Formar turmas respeitando as restrições impostas ao sistema, resolve estes dois problemas.

Quanto à acessibilidade, o deslocamento médio dos alunos localizados na zona urbana é de 1,1 quilômetro. Se forem incluídos nesta análise os alunos provenientes da zona rural, o deslocamento médio passa para 2,1 quilômetros. Estas estatísticas apontam para uma acessibilidade ruim dos alunos em relação às escolas onde estes foram alocados.

Para avaliar o potencial do modelo MDESL-MIP na resolução dos problemas de superlotação das turmas, na ineficiência na contratação de professores, e no deslocamento médio dos alunos, seis cenários foram criados, onde modificações foram propostas à configuração do atual SPE de Itacoatiara. Neles, foram analisados os seguintes parâmetros:

- Número de turmas criadas;
- Alunos não alocados;
- Deslocamento médio dos alunos;
- Número de professores necessários;
- Fator carga efetiva dos professores;
- Interpretação das variáveis duais;

Dentro os vários cenários analisados, vale destacar o Cenário 1. Nele, foi possível verificar a real aplicabilidade do modelo MDESL-MIP. Este cenário propunha formar turmas respeitando a lotação de 30 alunos no Ensino Fundamental Anos Iniciais, 35 alunos no Ensino Fundamental Anos Finais e 40 alunos no Ensino Médio, no que teve pleno êxito, visto que todos os indicadores analisados apresentaram melhoria em relação ao estado atual. Os demais cenários serviram para mostrar o potencial do modelo para o planejamento estratégico.

A análise de cenário é extremamente útil, pois permite avaliar os impactos de mudanças, bem como sua viabilidade de forma rápida e a baixo custo. Tome-se como exemplo o Cenário 4. Nele, apenas uma modificação em relação ao Cenário 1 foi imposta, ou seja, que as turmas do Ensino Fundamental Anos Iniciais fossem formadas com, no máximo, 25 alunos. Esta modificação resultou em 680 alunos não alocados, o que evidenciou a não capacidade SPE em implementar esta

mudança, ou a necessidade de ampliação do SPE, caso se insistisse na decisão de formar turmas com menos alunos.

Os resultados demonstraram ampla oportunidade de se elevar os níveis de eficiência na utilização do capital humano (alocação de professores) e a utilização da infraestrutura (capacidade de sala de aula), na diminuição do deslocamento médio dos alunos até a escola e a possibilidade de uma substancial melhora na correspondência professor-turma-escola-sala de aula.

O modelo proposto, além dos sistema desenvolvido, são particularmente importantes no momento em que tantas mudanças estão sendo proposta na área de educação. Apesar de necessárias, mudanças em setores tão delicados como a educação e a saúde, costumam trazer uma apreensão generalizada aos seus usuários, bem como aos seus planejadores. A implementação bem sucedida da metodologia proposta nesta tese, depende de uma abordagem gradual e progressiva, uma vez que tanto a alocação de professores, como de aluno, deve ser racionalizada de forma a abordar os objetivos de todas as partes interessadas.

5.2 OPORTUNIDADES DE PESQUISAS

Apesar dos bons resultados obtidos nos seis cenários analisados, o modelo MDESL-MIP ainda precisa ser testado em condições reais. Somente assim suas limitações e vulnerabilidade poderão ser exploradas, e ele poderá ser aperfeiçoado. A seguir são descritas algumas oportunidades de pesquisa que podem derivar ou dar continuidade a este trabalho.

1. Um parâmetro fundamental para a solução do modelo é a localização de todos os estudantes a serem alocados. Este problema foi resolvido utilizando os centroides dos bairros de onde moram os estudantes. A principal vantagem é a simplificação conseguida no momento de sua aplicação. Além disso, o esforço computacional para resolver o problema é significativamente menor. No momento que for possível se obter a localização exata de todos os estudantes, o tamanho do problema analisado cresce e a obtenção de uma solução se torna mais difícil. Para estas situações, um caminho seria estudo/desenvolvimento de heurísticas que resolvam problemas desta magnitude em um tempo computacional viável.
2. Em relação à formação de turmas e alocação destas para os professores, o modelo MDESL-MIP não permite que professor atue

em disciplinas diferentes, o que na prática isso é relativamente comum. Um caso ilustrativo seria um professor de Filosofia que trabalha com turmas do Ensino Médio. Como a carga horária dessa disciplina costuma ser baixa, a carga horária do professor poderia ser complementada com outra disciplina, como Sociologia, por exemplo. A integração entre diversas disciplinas pode aumentar ainda mais a eficiência alocativa.

REFERÊNCIAS

- ABDULKADIROĞLU, A.; CHE, Y.-K.; YASUDA, Y. Expanding "choice" in school choice. **American Economic Journal: Microeconomics**, v. 7, n. 1, p. 1–42, 2015.
- ABDULKADIROĞLU, A.; PATHAK, P. A.; ROTH, A. E. The new york city high school match. **American Economic Review**, v. 95, n. 2, p. 364–367, 2005.
- ABDULKADIROĞLU, A.; SÖNMEZ, T. School choice: A mechanism design approach. **American economic review**, v. 93, n. 3, p. 729–747, 2003.
- ANDERSON, C. Contexto social do planejamento educacional. **Cadernos de Pesquisa**, n. 8, p. 113–129, 1970.
- ANDRADE, E. L. de. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2015.
- ARAYA, F. et al. Optimizing location and size of rural schools in chile. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 19, n. 5, p. 695–710, 2012.
- ARORA, M. Survey of literature regarding production functions of education and their applications specially in educational planning. **Socio-Economic Planning Sciences**, Elsevier, v. 6, n. 6, p. 507–522, 1972.
- AZANHA, J. M. P. Política e planos de educação no Brasil: alguns pontos para reflexão. **Cadernos de Pesquisa**, v. 85, p. 70–78, 1993.
- BAFFI, M. A. T. O planejamento em educação: revisando conceitos para mudar concepções e práticas. **Pedagogia em Foco, Petrópolis**, 2002.
- BALAS, E.; PADBERG, M. W. Set partitioning: A survey. **SIAM review**, SIAM, v. 18, n. 4, p. 710–760, 1976.
- BALASSIANO, M.; SEABRA, A. A. d.; LEMOS, A. H. Escolaridade, salários e empregabilidade: tem razão a teoria do capital humano? **Revista de Administração Contemporânea**, SciELO Brasil, v. 9, n. 4, p. 31–52, 2005.

BARCELOS, F. B. Avaliação da localização de escolas com modelo capacitado e não-capacitado e uso de uma ferramenta GIS: Estudo de caso da cidade de Vitória/es. **Avaliação da Localização de Escolas com Modelo Capacitado e Não-Capacitado e Uso de uma Ferramenta GIS: Estudo de Caso da Cidade de Vitória/ES**, 2002.

BARCELOS, F. B.; PIZZOLATO, N. D.; LORENA, L. A. N. Localização de escolas do ensino fundamental com modelos capacitado e não-capacitado: caso de Vitória/es. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 24, n. 1, p. 133–149, 2004.

BARRETT, B. H. et al. The right to effective education. **The Behavior Analyst**, Association for Behavior Analysis International, v. 14, n. 1, p. 79, 1991.

BARROS, R. P. d.; MENDONÇA, R. Investimentos em educação e desenvolvimento econômico. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 1997.

BEASLEY, D.; BULL, D. R.; MARTIN, R. R. An overview of genetic algorithms: Part 1, fundamentals. **University computing**, v. 15, n. 2, p. 56–69, 1993.

BEEBY, E. O planejamento e o administrador educacional. **Cadernos de Pesquisa**, n. 7, p. 75–91, 1973.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa Operacional para Cursos de Administração**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2012.

BIESTA, G. Good education in an age of measurement. **Cadernos de Pesquisa**, SciELO Brasil, v. 42, n. 147, p. 808–825, 2012.

BLEAU, B. L. Planning models in higher education: Historical review and survey of currently available models. **Higher Education**, Springer, v. 10, n. 2, p. 153–168, 1981.

BOLAND, N. et al. Exact procedures for solving the discrete ordered median problem. **Computers & Operations Research**, v. 33, n. 11, p. 3270 – 3300, 2006. ISSN 0305-0548. Part Special Issue: Operations Research and Data Mining. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054805001206>>.

BRASIL. **Planejando a Próxima Década: Conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação**. Brasília: Ministério da

Educação, 2014. Disponível em:
 <http://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20 metas.pdf>.

BRASIL. LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação

Nacional: Lei N° 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2015. Disponível em:
 <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/proen/ldb_11ed.pdf>.

BRAU, L.; MERCE, M.; TARRAGO, M. **Manual de urbanismo**. [S.l.: s.n.], 1980.

BRUNS, B.; EVANS, D.; LUQUE, J. Achieving world-class education in brazil: The next agenda. World Bank, 2012.

CALLAWAY, A. **Educational planning and unemployed youth**. [S.l.]: Unesco, International Institute for Educational Planning, 1971.

CARVALHO, W. L. **Metodologia de análise para a localização de escolas em áreas rurais**. Tese (Tese de), 2012.

CASTILLO-LÓPEZ, I.; LÓPEZ-OSPINA, H. A. School location and capacity modification considering the existence of externalities in students school choice. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 80, p. 284–294, 2015.

CHÂU, T. N. Aspectos demográficos do planejamento educacional. **Cadernos de Pesquisa**, n. 11, p. 73–114, 1969.

CHEN, P.-C. et al. Solution of the multisource weber and conditional weber problems by d.-c. programming. **Operations Research**, v. 46, n. 4, p. 548 – 562, 1998. ISSN 0030364X.

CHRISTOFIDES, N.; BEASLEY, J. A tree search algorithm for the p-median problem. **European Journal of Operational Research**, v. 10, n. 2, p. 196 – 204, 1982. ISSN 0377-2217. Disponível em:
 <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221782901606>>.

CHU, S. C.; CHU, L. A modeling framework for hospital location and service allocation. **International transactions in operational research**, Wiley Online Library, v. 7, n. 6, p. 539–568, 2000.

CHURCH, R.; VELLE, C. R. The maximal covering location problem. **Papers in regional science**, Wiley Online Library, v. 32, n. 1, p. 101–118, 1974.

CLARKE, S.; SURKIS, J. An operations research approach to racial desegregation of school systems. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 1, n. 3, p. 259 – 272, 1968. ISSN 0038-0121. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038012168900141>>.

COOMBS, P. H. Que é planeamento educacional? **Cadernos de Pesquisa**, n. 4, p. 53–94, 1970. ISSN 1980-5314. Fundamentos do Planeamento Educacional, Paris, 1970.

COOPER, L. Location-allocation problems. **Operations Research**, v. 11, n. 3, p. 331 – 343, 1963. ISSN 0030364X. Disponível em: <<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=7683486&lang=pt-br&site=ehost-live>>.

CORNUEJOLS, G.; SRIDHARAN, R.; THIZY, J. A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem. **European Journal of Operational Research**, v. 50, n. 3, p. 280 – 297, 1991. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179190261S>>.

CORREA, H. Models and mathematics in educational planning. ERIC, 1967.

DASKIN, M. S. **Network and discrete location: models, algorithms, and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

DEARING, P. Location problems. **Operations Research Letters**, v. 4, n. 3, p. 95 – 98, 1985. ISSN 0167-6377. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167637785900100>>.

DOMÍNGUEZ-MARÍN, P. et al. Heuristic procedures for solving the discrete ordered median problem. **Annals of Operations Research**, Kluwer Academic Publishers, v. 136, n. 1, p. 145–173, 2005. ISSN 0254-5330. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10479-005-2043-3>>.

DREZNER, Z. The planar two-center and two-median problems. **Transportation Science**, v. 18, n. 4, p. 351, 1984. ISSN 00411655. Disponível em: <<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=&db=iih&AN=4474837&lang=pt-br&site=ehost-live>>.

DREZNER, Z. Solving planar location problems by global optimization. **Logistics Research**, Springer-Verlag, v. 6, n. 1, p.

17–23, 2013. ISSN 1865-035X. Disponível em:
<<http://dx.doi.org/10.1007/s12159-012-0093-x>>.

DUTRA, N. G. d. S. **Planejando uma rede escolar municipal para reduzir custos de deslocamentos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1998.

ERVATTI, L.; BORGES, G. M.; JARDIM, A. de P. **Mudança demográfica no Brasil no início do século XXI: subsídios para as projeções da população**. [S.l.: s.n.], 2015.

FEDERGRUEN, A.; GROENEVELT, H. The greedy procedure for resource allocation problems: Necessary and sufficient conditions for optimality. **Operations research, INFORMS**, v. 34, n. 6, p. 909–918, 1986.

FERNANDES, F. S. Approaches on educational planning in cadernos de pesquisa (1972-1986). **Cadernos de Pesquisa, SciELO Brasil**, v. 44, n. 153, p. 522–546, 2014.

FERNANDES, F. S.; GENTILINI, J. A. Planejamento, políticas públicas e educação. **Cadernos de Pesquisa, SciELO Brasil**, v. 44, n. 153, p. 486–492, 2014.

FERREIRA, E. B. Federalismo e planejamento educacional no exercício do par. **Cadernos de Pesquisa**, v. 44, n. 153, p. 602–623, 2014.

FIGUEIREDO, J. N. de; BARRIENTOS, M.; ANGEL, M. A decision support methodology for increasing school efficiency in bolivia's low-income communities. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 19, n. 1-2, p. 99–121, 2012.

FLETCHER, P. R.; RIBEIRO, S. C. Modeling education system performance with demographic data: an introduction to the profluxe model. **Brasília: IPEA**, 1989.

FLETCHER, P. R.; RIBEIRO, S. C.; SAWYER, D. A educação na estatística nacional. **PNADs em foco: anos**, v. 80, p. 13–32, 1988.

FONSECA, P. C. D. Gênese e precursores do desenvolvimentismo no brasil. **Pesquisa & Debate. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Economia Política**. ISSN 1806-9029, v. 15, n. 2 (26), 2004.

FRANCIS, R. L.; MCGINNIS, L. F.; WHITE, J. A. Locational analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 12, n. 3, p. 220 – 252, 1983. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221783901947>>.

FURTADO, C. Formação econômica do Brasil. Editora Fundo de Cultura, 1959.

FURTER, P. O planejador e a educação permanente. **Cadernos de Pesquisa**, 1977.

GALVÃO, R. D.; REVELLE, C. A lagrangean heuristic for the maximal covering location problem. **European Journal of Operational Research**, v. 88, n. 1, p. 114 – 123, 1996. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221794001596>>.

GAMAL, M.; SALHI, S. A cellular heuristic for the multisource weber problem. **Computers & Operations Research**, v. 30, n. 11, p. 1609 – 1624, 2003. ISSN 0305-0548. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054802000953>>.

GAMS. **General Algebraic Modeling System**. 2010.

GAMS. **A User's Guide**: Tutorial by Richard E. Rosenthal. 2010.

GARFINKEL, R. S.; NEMHAUSER, G. L. The set-partitioning problem: set covering with equality constraints. **Operations Research**, INFORMS, v. 17, n. 5, p. 848–856, 1969.

GOLDBERG, M. A. A. Avaliação e planejamento educacional: problemas conceituais e metodológicos. **Cadernos de pesquisa**, n. 7, p. 62–7, 2013.

GOLGHER, A. B. **Uma comparação entre os modelos profluxo e IPC quando aplicados aos dados do sistema educacional brasileiro**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.

GRIFFITHS, V. Problemas da educação rural. **Cadernos de Pesquisa**, n. 10, p. 41–55, 1970.

HADDAD, W. D. et al. **Education and Development: Evidence for New Priorities**. **World Bank Discussion Papers No. 95**. [S.l.]: ERIC, 1990.

HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. **Operations Research, INFORMS**, v. 12, n. 3, p. 450–459, 1964.

HALLAK, J. Custos e despesas em educação. **Cadernos de Pesquisa**, n. 12, p. 65–102, 1969.

HALSTEAD, D. K. Higher education planning. a bibliographic handbook. ERIC, 1979.

HANJOUL, P.; PEETERS, D. A comparison of two dual-based procedures for solving the p-median problem. **European Journal of Operational Research**, v. 20, n. 3, p. 387 – 396, 1985. ISSN 0377-2217. First {EURO} Summer Institute. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221785900128>>.

HANSEN, P.; MLADENOVIC, N.; TAILLARD, E. Heuristic solution of the multisource weber problem as a p-median problem. **Operations Research Letters**, v. 22, p. 55 – 62, 1998. ISSN 0167-6377. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637798000042>>.

HARBISON, F. Planejamento educacional e desenvolvimento de recursos humanos. **Cadernos de Pesquisa**, n. 6, p. 85–104, 1970.

HON-CHAN, C. Planejamento educacional para uma sociedade plural. **Cadernos de Pesquisa**, n. 19, p. 89–115, 1971.

HORTA, J. S. B. Direito à educação e obrigatoriedade escolar. **Cadernos de Pesquisa**, n. 104, p. 5–34, 1998.

IBGE. **Indicadores Sociodemográficos: prospectivos para o Brasil 1991-2030**. [S.l.]: Arbeit Rio de Janeiro, 2006.

IBGE. **Projeção da População do Brasil por Sexo e Idade: 2000-2060**. [S.l.: s.n.], 2014.

IBGE. **Séries Históricas e Estatísticas**. 2014. Disponível em: <<http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/default.aspx>>.

INEP. **Indicadores Educacionais**. 2017.

INEP. **Informações Estatísticas**. 2017. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/guest/dados>>.

JOHNES, J. Operational research in education. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 243, n. 3, p. 683–696, 2015.

JOHNES, J.; PORTELA, M.; THANASSOULIS, E. Efficiency in education. **Journal of the Operational Research Society**, v. 68, n. 4, p. 331–338, Apr 2017. ISSN 1476-9360. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/s41274-016-0109-z>>.

JOHNSTONE, J. N. Mathematical models developed for use in educational planning: A review. **Review of Educational Research**, v. 44, n. 2, p. 177–201, 1974. Disponível em: <<https://doi.org/10.3102/00346543044002177>>.

KAHN, A. G. A survey of educational planning models in the oecd member countries. **AR Smith Models of manpower systems**. London: The English Universities Press, Ltd, p. 107–149, 1970.

KLEIN, R.; RIBEIRO, S. C. O censo educacional e o modelo de fluxo: o problema da repetência. **Revista Brasileira de Estatística**, v. 52, n. 197/198, p. 5–45, 1991.

KLOSE, A. A branch and bound algorithm for an uncapacitated facility location problem with a side constraint. **International Transactions in Operational Research**, v. 5, n. 2, p. 155, 1998. ISSN 09696016.

KLOSE, A.; DREXL, A. Facility location models for distribution system design. **European Journal of Operational Research**, v. 162, n. 1, p. 4 – 29, 2005. ISSN 0377-2217. Logistics: From Theory to Application. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221703008191>>.

KNUTSON, D. L. et al. A goal programming model for achieving racial balance in public schools. **Socio-Economic Planning Sciences**, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 109–116, 1980.

KÖRKEL, M. On the exact solution of large-scale simple plant location problems. **European Journal of Operational Research**, v. 39, n. 2, p. 157 – 173, 1989. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221789901896>>.

KRARUP, J.; PRUZAN, P. M. The simple plant location problem: Survey and synthesis. **European Journal of Operational Research**, v. 12, n. 1, p. 36 – 81, 1983. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221783901819>>.

LANCASTER, D.; MORRIS, K.; NICEL, P. Operational research and its application in education management. **Educational Management & Administration**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 11, n. 3, p. 193–204, 1983.

LIMA, L. C. A. Da universalização do ensino fundamental ao desafio de democratizar o ensino médio em 2016: o que evidenciam as estatísticas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 92, n. 231, 2011.

LOBO, D. d. S. et al.

Dimensionamento e otimização locacional de unidades de educação infantil, 2003.

MCDANIEL, R. D. Case study of the use of the transportation algorithm for school districting under federal integration guidelines. **Socio-Economic Planning Sciences**, Elsevier, v. 9, n. 6, p. 271–272, 1975.

MCKINNON, K. Planejamento educacional realista. **Cadernos de Pesquisa**, n. 23, p. 93–111, 1973.

MCNAMARA, J. F. A mathematical programming model for the efficient allocation of vocational technical education funds. ERIC, 1970.

MENEZES, R.; DIALLO, M.; PIZZOLATO, N. D. Escolas públicas em guaratiba, rio de janeiro: Aplicação de modelo da p-mediana capacitado e de máxima cobertura rafael menezes. **SOBRAPO**, 2011.

MENEZES, R. C. **O uso do SIG-Sistema de informação geográfico—para o apoio à decisão no planejamento da localização das Escolas Municipais em Guaratiba, Rio de Janeiro**. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.

MENEZES, R. C.; PIZZOLATO, N. D. Locating public schools in fast expanding areas: application of the capacitated p-median and maximal covering location models. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 34, n. 2, p. 301–317, 2014.

MERLE, O. du et al. Stabilized column generation. **Discrete Mathematics**, v. 194, p. 229 – 237, 1999. ISSN 0012-365X.

Disponível em:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X98002131>>.

MIEHLE, W. Link-length minimization in networks. **Operations Research**, v. 6, n. 2, p. 232, 1958. ISSN 0030364X. Disponível em: <<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=7681249&lang=pt-br&site=ehost-live>>.

MIGUEL, P. A. C. Estudo de caso na engenharia de produção: estruturação e recomendações para sua condução. **Revista Produção**, SciELO Brasil, v. 17, n. 1, p. 216–229, 2007.

MONTGOMERY, J. D. Alternatives and decisions in educational planning. *fundamentals of educational planning* 22. ERIC, 1976.

NARULA, S. C. Hierarchical location-allocation problems: a classification scheme. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 93–99, 1984.

NERI, M. et al. Motivos da evasão escolar. **Brasília: Fundação Getúlio Vargas**, 2009.

NEVES, L. M. W. et al. Estado e planejamento educacional no Brasil: a formação do planejador. **Cadernos de Pesquisa**, n. 51, p. 55–63, 2013.

OECD. **Education and Development**. [S.l.: s.n.], 1966.

OECD. **Resumo de resultados nacionais do PISA 2015**. 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa_2015>

OLIVEIRA, R. P. d. Da universalização do ensino fundamental ao desafio da qualidade: uma análise histórica. **Educação & Sociedade**, SciELO Brasil, v. 28, n. 100, p. 661–690, 2007.

OLIVEIRA, R. P. d.; ARAUJO, G. C. d. Educational quality: a new dimension of the struggle for the right to education. **Revista Brasileira de Educação**, SciELO Brasil, n. 28, p. 5–23, 2005.

PHILLIPS, H. M. Planejamento da assistência educacional para a segunda década de desenvolvimento. **Cadernos de Pesquisa**, n. 21, p. 69–101, 1971.

PIRES, L. **Algoritmo genético aplicado na localização de escolas do município de Coronel Vivida-PR**. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2002.

PISA. **OECD - Programme for International Student Assessment ? Results: Country Note ? Brazil**. 2012. Acessado em 14 de novembro de 2016. Disponível em: <<https://www.oecd.org/brazil/PISA-2012-results-brazil.pdf>>.

PISA. **OECD - Programme for International Student Assessment ? Results: Country Note ? Brazil**. 2015. Acessado em 14 de novembro de 2016. Disponível em: <<https://www.oecd.org/brazil/PISA-2012-results-brazil.pdf>>.

PIZZOLATO, N.; SILVA, H. Proposta metodológica de localização de escolas: estudo do caso de nova iguaçu. **Pesquisa Operacional**, v. 14, n. 2, p. 1–13, 1993.

PIZZOLATO, N. D. A heuristic for large-size-p-median location problems with application to school location. **Annals of operations research**, Springer, v. 50, n. 1, p. 473–485, 1994.

PIZZOLATO, N. D. et al. School location methodology in urban areas of developing countries. **International Transactions in Operational Research**, Wiley Online Library, v. 11, n. 6, p. 667–681, 2004.

PIZZOLATO, N. D. et al. Localização de escolas públicas: síntese de algumas linhas de experiências no Brasil. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 24, n. 1, p. 111–131, 2004.

PIZZOLATO, N. D.; MENEZES, R. Localização de escolas públicas em Guaratiba, Rio de Janeiro, usando critérios de acessibilidade. **Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento**, v. 5, n. 1, p. 71–83, 2013.

PIZZOLATO, N. D.; RAUPP, F. M.; ALZAMORA, G. S. Revisão de desafios aplicados em localização com base em modelos da p-mediana e suas variantes. **Pesq Oper Desenv**, v. 4, n. 1, p. 13–42, 2012.

PIZZOLATO, N. D.; SILVA, H. B. F. D. The location of public schools: Evaluation of practical experiences. **International Transactions in Operational Research**, v. 1, n. 4, p. 13–22, 1997.

POIGNANT, R. Os planos de desenvolvimento da educação e o planejamento econômico e social. **Cadernos de Pesquisa**, n. 5, p. 77–104, 1970.

REVELLE, C.; EISELT, H. Location analysis: A synthesis and survey. **European Journal of Operational Research**, v. 165, n. 1, p. 1 – 19, 2005. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221704002139>>.

RIBEIRO, J. Q. Planificação educacional (planejamento escolar). **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 86, n. 212, 2007.

RIOS-NETO, E. L. G. O método probabilidade de progressão por série. **RIOS-NETO, ELG; RIANI, J. de LR (Ed.). Introdução à Demografia da Educação. Campinas: Associação Brasileira de Estudos Populacionais**, 2004.

RODRIGUES, H. F.; MAYERLE, S. F. Modelo capacitado para alocação de alunos em redes públicas de ensino. **XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, 2014.

ROSING, K. An optimal method for solving the (generalized) multi-weber problem. **European Journal of Operational Research**, v. 58, n. 3, p. 414 – 426, 1992. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037722179290072H>>.

ROSS, G. T.; SOLAND, R. M. A multicriteria approach to the location of public facilities. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 4, n. 5, p. 307–321, 1980.

ROWLEY, C. D. The politics of educational planning in developing countries. *fundamentals of educational planning-15*. ERIC, 1971.

RUSCOE, G. Condições para o êxito no planejamento educacional. **Cadernos de Pesquisa**, n. 14, p. 111–130, 1969.

RYU, C.; GUIGNARD, M. An exact algorithm for the simple plant location problem with an aggregate capacity constraint. In: **Proc. of TIMS/ORSA Meeting**. [S.l.: s.n.], 1992.

SCHILLING, D. A.; JAYARAMAN, V.; BARKHI, R. A review of covering problem in facility location. **Computers & Operations Research**, 1993.

SCHROEDER, R. G. A survey of management science in university operations. **Management Science**, INFORMS, v. 19, n. 8, p. 895–906, 1973.

SCHULTZ, T. P. Education investments and returns. **Handbook of development economics**, Elsevier, v. 1, p. 543–630, 1988.

SCOTT, A. J. Location-allocation systems: A review. **Geographical Analysis**, Blackwell Publishing Ltd, v. 2, n. 2, p. 95–119, 1970. ISSN 1538-4632. Disponível em:
<<http://dx.doi.org/10.1111/j.1538-4632.1970.tb00149.x>>.

STEINER, J. E. Conhecimento: gargalos para um brasil no futuro. **Estudos Avançados**, SciELO Brasil, v. 20, n. 56, p. 75, 2006.

SUTCLIFFE, C.; BOARD, J.; CHESHIRE, P. Goal programming and allocating children to secondary schools in reading. **Journal of the Operational Research Society**, Springer, v. 35, n. 8, p. 719–730, 1984.

TEIXEIRA, J. C.; ANTUNES, A. P. A hierarchical location model for public facility planning. **European Journal of Operational Research**, v. 185, n. 1, p. 92 – 104, 2007. ISSN 0377-2217. Disponível em:
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221707000240>>.

TEWARI, V. K. et al. High school location decision making in rural india and location-allocation models. **Spatial analysis and location-allocation models**, Van Nostrand Reinhold Company, Inc. New York, p. 137–162, 1987.

THIZY, J.-M. **A facility location problem with aggregate capacity**. [S.l.]: Administration, University of Ottawa= Administration, Université d'Ottawa, 1993. And University of Ottawa. Faculty of Administration.

THONSTAD, T. **Analysing and projecting school enrolment in developing countries: a manual of methodology**. [S.l.]: Unesco, 1980.

TURRIONI, J. B.; MELLO, C. H. P. Metodologia de pesquisa em engenharia de produção: estratégias, métodos e técnicas para condução de pesquisas quantitativas e qualitativas. **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Itajubá–UNIFEI**. Minas Gerais: UNIFEI, 2011.

VAIZEY, J. E.; SHEEHAN, J. **Resources for education**. [S.l.]: Allen & Unwin, 1968.

WEBER, A. **Über den standort der industrien**. [S.l.]: JCB Mohr, 1909.

WEISZFELD, E. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum. **Annals of Operations Research**, Springer US, v. 167, n. 1, p. 7–41, 1937. ISSN 0254-5330. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z>>.

WOODHALL, M. Análise de custo-benefício no planejamento educacional. **Cadernos de pesquisa**, n. 16, p. 91–113, 1970.

ZAINUDDIN, Z. M.; SALHI, S. A perturbation-based heuristic for the capacitated multisource weber problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 179, n. 3, p. 1194–1207, 2007.

**ANEXO A – Sistema Desenvolvido como Suporte à
Aplicação do Modelo de MDESL-MIP**

A Figura 25 ilustra a estrutura deste sistema desenvolvido e apresenta, esquematicamente, os seus componentes principais. Tem-se, a seguir, uma lista das informações coletadas e armazenadas no banco de dados relacional Interbase 6.5.

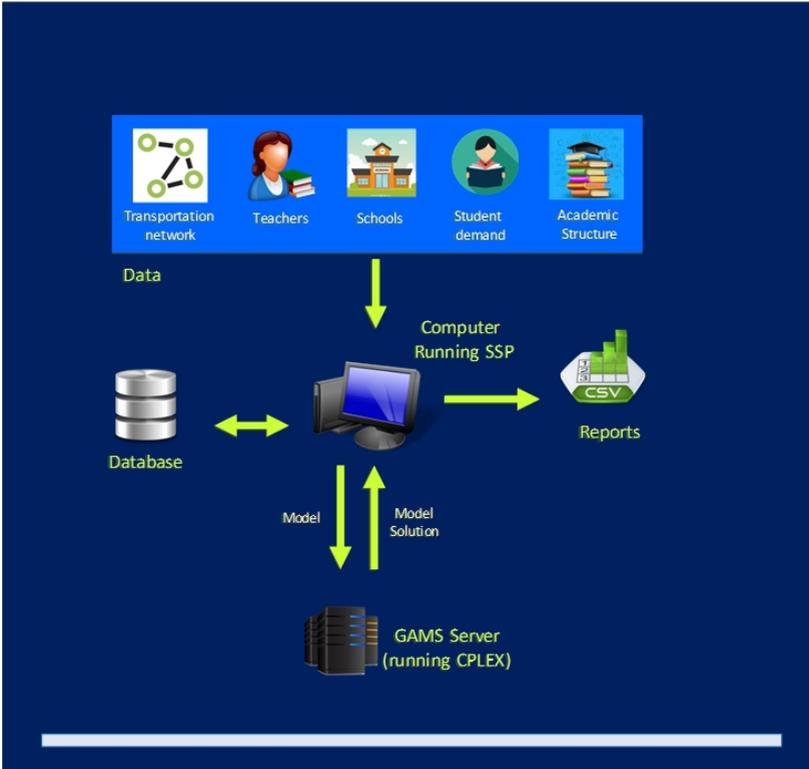
1. Informações sobre as escolas, incluindo sua localização, número de salas de aula, características físicas das salas, tais como tamanho e capacidade, além de informações de natureza administrativa como, se a escola pertence à rede municipal ou estadual;
2. Informações sobre abertura, remodelagem e encerramento de escolas, incluindo custos e flexibilidade das séries;
3. Informações sobre a demanda dos alunos, tais como o centroide da vizinhança onde estes alunos moram, número de alunos por bairro e série, total de alunos já matriculados em uma determinada escola no ano anterior;
4. Informações sobre o currículo das turmas, incluindo as horas de aulas exigidas por cada turma e série;
5. Informação sobre o regime de trabalho dos professor, incluindo compromisso contratual e salário;
6. Informações espaciais sobre a rede de transporte da região em questão, inclusive os custos de transporte dos estudantes.

A Figura 26 mostra a interface responsável pela importação das tabelas com os dados necessários para geração do código GAMS. A partir dessas informações, o sistema gera um arquivo de texto em um formato apropriado para submissão em um servidor GAMS.

A interface principal do sistema inclui várias opções de configuração do modelo, permitindo ao analista adaptar especificações à diversas situações particulares, ajustando ou eliminando restrições de modelo e/ou componentes de função objetivo, conforme o caso. Na Figura 27 é possível ver estas funcionalidades, além de um código GAMS gerado, e pronto para ser processado. Após o processamento pelo solver GAMS/CPLEX, os resultados são importados e armazenados em um banco de dados, e interpretados em tabelas específicas (Figura 28). Os seguintes resultados são armazenados:

1. Número de alunos por série e bairro alocados em cada escola;
2. Número de alunos por série e bairro que precisam se matriculados em escolas particulares por meio de subsídios do governo;

Figura 25 – Visualização esquemática do sistema de planejamento e apoio à decisão em educação para a alocação de turmas e escolas/sala de aula



Fonte: Elaborado pelo autor

3. Número de professores necessários para atender a todas as disciplinas em cada escola;
4. Número de turmas criadas para atender a todas as séries oferecidas por determinada escola;
5. Custo total da alocação ótima, bem como o custo de cada componente individual (transporte, subsídio escolar privado, contratação de professores e aberturas, remodelagem e fechamentos de escolas).

Figura 28 – Interface SQL

The screenshot displays the 'School System Planning' application with several data tables:

- Schools:** A table listing schools with columns: Code, School Description, Location, Hours/Week, Adm. Depend., Min. Grade, and Max. Grade. Schools include Centro Educacional Municipal, Ipiranga, Maria Fone de Azevedo, Dom Paulo Hering, João Peres, Prof. Elsa de Moraes Rego Figueiredo, Yeda Henriques de Souza Azeredo, and José Carlos Martins Mestranho.
- Teacher Allocation:** A table showing teacher assignments with columns: Code, Subject Description, Employ, # Perm, # Temp, and Total Hours. Teachers are assigned to subjects like Arte, Ciências, Educação Física, Inglês, História, and Matemática.
- Available Classrooms:** A table with columns: Type, Classroom Description, Capacity, # Rooms, Total Hours, Blocked, Allocated, Slack, and % Idle. It shows 40 classrooms with a total capacity of 16 rooms and 800.00 total hours.
- Students by Neighborhood:** A table listing neighborhoods and their enrollment. Neighborhoods include Afraçicos, Eram, Ipiraci, Mal. Tr. Mal. Tr. II, Santo Antonio, and SFRANC.
- Students by Grade:** A table showing student counts by grade level. Grades range from 1º ANO to 7º ANO.
- Class Allocation:** A table showing class allocations with columns: Code, Classroom, Capacity, Student/Class, # Classes, and Enrollment. It details the distribution of students across different classrooms.

Fonte: Elaborado pelo autor

informações que sirvam de suporte aos tomadores de decisão, na análise de aspectos específicos que vierem a ser necessário.

Figura 29 – Interface SQL

The screenshot shows the SQL query editor and results window:

SQL Statement:

```

SELECT P.idInep, P.idMateria,
SUM((P.NumProfTemp + P.NumProfPerm) * T.HorasContrato) AS Contratado,
(SELECT SUM(E.NumFurnas + CN.HorasSemanais)
FROM EscolaMateria E, CapMateriaSemana CN
WHERE P.idMateria = CN.idMateria AND
E.idInep = CN.idInep) AS NECESSIDADES
FROM Professores P, TipoContrato T
WHERE P.TipoCo = T.TipoCo
    
```

Results Table:

IDNEP	IDMATERIA	CONTRATADO	NECESSIDADES
13002941	ART	20	16
13002941	BIQ	0	0
13002941	DE	60	48
13002941	EP	80	58
13002941	ERE	20	16
13002941	EST	40	32
13002941	FA	0	0
13002941	FE	0	0
13002941	GEO	60	48
13002941	HIS	60	48
13002941	LEI	300	295
13002941	LIT	0	0
13002941	MAT	100	80
13002941	POR	100	80
13002941	QUI	0	0
13002941	SOC	0	0
13002969	ART	0	0
13002969	BIQ	0	0
13002969	DE	0	0
13002969	EP	40	20
13002969	ERE	0	0
13002969	EST	0	0
13002969	FA	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor