

**Paulo Victor Ribeiro Martins**

**Fluxo de Energia Vibratória em Tubos com  
Curvatura**

**Florianópolis**

**18 de maio de 2018**



**Paulo Victor Ribeiro Martins**

## **Fluxo de Energia Vibratória em Tubos com Curvatura**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Florianópolis

18 de maio de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Martins, Paulo Victor Ribeiro Martins  
Fluxo de Energia Vibratória em Tubos com  
Curvatura : Efeitos de Curvatura / Paulo Victor  
Ribeiro Martins Martins ; orientador, Arcanjo  
Lenzi, 2018.  
170 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2018.

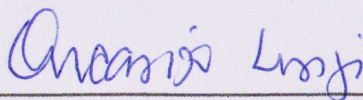
Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Curvatura. 3. Fluxo de  
Potência. 4. Método das Ondas Propagantes. 5.  
Quatérnios. I. Lenzi, Arcanjo. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Mecânica. III. Título.



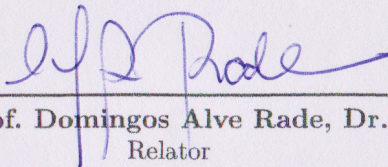


Trabalho aprovado. Florianópolis, 08 de março de 2018:



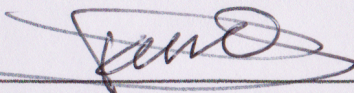
---

**Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.**  
Orientador



---

**Prof. Domingos Alve Rade, Dr.**  
Relator



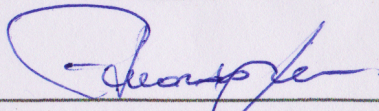
---

**Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka, Ph.D.**  
Convidado 2



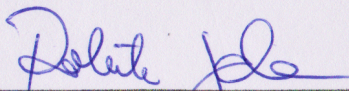
---

**Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr. Eng.**  
Convidado 3



---

**Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.**  
Convidado 4



---

**Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.**  
Convidado 5

Florianópolis  
9 de abril de 2018

# Resumo

Este trabalho analisa o efeito de curvaturas no fluxo de potência vibratória de vigas delgadas. Um modelo de elementos finitos (FEM) foi desenvolvido e usado para calcular os coeficientes de potência transmitida e refletida via método de ondas em propagação. Este modelo foi validado analítica e experimentalmente, atingindo a maturidade de uma ferramenta para análises mais complexas. Esta ferramenta foi desenvolvida tendo como objetivo a usabilidade e versatilidade para ser aplicada em várias configurações geométricas. Foi utilizada a fórmula de quatérnios para definir uma nova parametrização das curvaturas. Também foi desenvolvido um elemento de viga curva 3D combinando duas formulações, sendo uma no plano e outra perpendicular ao plano de curvatura. Os efeitos de curvatura foram explorados, iniciando com curvas simples e excitação dentro e fora do plano. Em seguida foram analisados os efeitos de curvas sequenciais, com variação de raio, ângulo e quantidade de curvas. Verificou-se o potencial atenuador para geometrias periódicas, portanto seus efeitos também foram analisados. Finalmente, foi desenvolvido um algoritmo de otimização utilizando abordagem genética para projetar filtros geométricos de forma automatizada. Para a função objetivo desta otimização, utilizou-se a ferramenta em FEM de forma adaptada, mantendo, portanto, a versatilidade de geração das geometrias. Finalmente, resultados numéricos são confirmados experimentalmente.

**palavras-chave:** curvatura, fluxo de potência, *wave approach*.



# Abstract

This paper discusses an approach to analyze curvature effects on the vibrational powerflow of slender beams. A finite element method (FEM) model was used to calculate transmitted and reflected power via the “propagating wave approach”. This model was validated by using both analytical and experimental methods, reaching the maturity of a tool capable of carrying more complex analysis. The objective of developing this tool was to maintain its usability and versatility to be applied in various geometric configurations. The formula of quaternions was used to define a new curvature parametrization. Also, a new 3D curved element was developed by combining two formulations, being one in-plane and the other out-of-plane of curvature. The curvature effects were explored, beginning with simple curves with in and out-of-plane excitations. Then, sequential curvature effects were analyzed, with variation of radius, angle and number of curves. The “wave blocking” potential was verified within periodic curvatures, therefore their effects were also analyzed. Finally, an optimization algorithm was developed by using the genetic approach to design geometric filters in an automatic way. The objective function of this optimization depended on an adapted version of the developed FEM tool, hence, maintaining the versatility of geometry generation. Lastly, the numerical results are confirmed experimentally.

**keywords:** curvature, powerflow, quaternion, FEM, wave approach.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Vista em corte lateral (sup.) e vista do topo da unidade compressora (inf.) de um compressor hermético típico. . . . .	30
Figura 2 – Elemento infinitesimal de uma viga curva. . . . .	41
Figura 3 – Variação dos números de onda $\gamma$ com a frequência adimensional $\Omega$ para parâmetro de curvatura $K = 0,025$ . Os valores de $\gamma_u$ e $\gamma_v$ representam números de onda longitudinal e de flexão para uma viga reta, respectivamente. . . . .	51
Figura 4 – Números de onda $\gamma$ com $K = 0,25$ , com <i>shift</i> de $\Omega_1$ e $2$ causado pelo deslocamento de $\Omega_3$ . . . . .	53
Figura 5 – Números de onda $\gamma$ com $K = 2,5$ , com <i>shift</i> de $\Omega_1$ e $2$ causado pelo deslocamento de $\Omega_3$ . . . . .	54
Figura 6 – Variação dos números de onda $\gamma$ aumentando o valor de $K$ , demonstrando o deslocamento das frequências $\Omega_1$ e $2$ . . . . .	55
Figura 7 – Variação das relações de acoplamento $\beta^a$ com a frequência adimensional $\Omega$ para parâmetro de curvatura $K = 0,025$ . . . . .	56
Figura 8 – Diagrama de uma configuração típica do método da onda propagante. . . . .	59
Figura 9 – Geometria para cálculo dos coeficientes de potência. Curva simples com $R = 30\text{ mm}$ e $\Theta_y = 90^\circ$ . Propriedades do material iguais às de um tubo de descarga típico. . . . .	64

Figura 10 – Coeficientes de potência para a geometria mostrada na Figura 9. Subscrito (a) para uma onda incidente longitudinal, (b) para uma onda torcional, (c) para flexão no plano da curva e (d), flexão perpendicular ao plano da curva. Resultados na forma de coeficientes de potência separados, de transmissão e reflexão, para cada guia de onda. . . . .	65
Figura 11 – Fluxograma exemplificando o processo de simulação e análise utilizando a ferramenta <i>NuSim</i> . . . . .	68
Figura 12 – Fluxograma exemplificando o processo de construção/atualização da malha desenvolvido para o <i>NuSim</i> . . . . .	69
Figura 13 – Exemplo de parametrização da geometria utilizando referência da aeronáutica . . . . .	71
Figura 14 – Esquema de elemento de viga curva para vibrações alinhadas ao plano de curvatura. . . . .	76
Figura 15 – Esquema de elemento de viga curva para vibrações perpendiculares ao plano de curvatura. . . . .	78
Figura 16 – Esquema mostrando a orientação dos graus de liberdade utilizada no trabalho para o elemento de viga curva. . . . .	79
Figura 17 – Esquema mostrando ponto da aplicação da força numa viga semi-infinita para cálculo das rigidezes dinâmicas. . . . .	80
Figura 18 – Diferenças percentuais entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda longitudinal, utilizando elementos de viga reta. . . . .	85
Figura 19 – Diferenças percentuais entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural alinhada com o plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta. . . . .	86
Figura 20 – Coeficientes de potência para uma curva de ângulo de $\Theta_y = 300^\circ$ e raio $R = 100$ mm com uma excitação flexural na entrada. Linha cheia representa a ferramenta numérica utilizando elementos de viga reta; linha tracejada, resultados analíticos. . . . .	86



Figura 21 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de $\Theta_y = 300^\circ$ e raio $R = 100$ mm com uma excitação flexural na entrada. Utilizando elementos de viga reta . . . . .	87
Figura 22 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural perpendicular ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta. . . . .	87
Figura 23 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda torsional, utilizando elementos de viga reta. . . . .	88
Figura 24 – Números de onda de uma vibração fora-do-plano para uma viga curva de raio $R = 100$ mm. . . . .	88
Figura 25 – Coeficientes de potência para uma curva de ângulo de $\Theta_y = 300^\circ$ e raio $R = 100$ mm com uma excitação flexural perpendicular ao plano de curvatura na entrada. Linha cheia representa a ferramenta numérica; linha tracejada, resultados analíticos. . . . .	89
Figura 26 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural perpendicular ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga curva. . . . .	90
Figura 27 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda torsional, utilizando elementos de viga curva. . . . .	91
Figura 28 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de $\Theta_y = 348^\circ$ e raio $R = 100$ mm com uma excitação flexural fora-do-plano. Utilizando elementos de viga curva. . . . .	92
Figura 29 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de $\Theta_y = 203^\circ$ e raio $R = 100$ mm com uma excitação torsional. Utilizando elementos de viga curva. . . . .	93

Figura 30 – Estrutura para fixação no conjunto interno da unidade compressora. . . . .	95
Figura 31 – Montagem do tubo de descarga no <i>shaker</i> utilizando a fixação própria do conjunto interno. . . . .	96
Figura 32 – Montagem do tubo de descarga no <i>shaker</i> utilizando a fixação especial. . . . .	96
Figura 33 – Fixação na base inercial com transdutor de força. . .	97
Figura 34 – Primeira configuração padrão. Não era possível garantir as condições de contorno. . . . .	97
Figura 35 – Configuração adotada nas medições (vista lateral). Fixação adequada no <i>shaker</i> e viga livre se mostraram adequados a serem reproduzidos em simulações usando FEM. . . . .	98
Figura 36 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 100 mm da base. . . . .	99
Figura 37 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 200 mm da base. . . . .	99
Figura 38 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 300 mm da base. . . . .	100
Figura 39 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 400 mm da base. . . . .	100
Figura 40 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 500 mm da base. . . . .	101
Figura 41 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF da extremidade do tubo. . . . .	101
Figura 42 – Esquema das medições de curvas simples. . . . .	102

Figura 43 – Caso de $90^\circ$ com $R = 10$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base. . . . .	103
Figura 44 – Caso de $90^\circ$ com $R = 10$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo. . . . .	103
Figura 45 – Caso de $90^\circ$ com $R = 25$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base. . . . .	104
Figura 46 – Caso de $90^\circ$ com $R = 25$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo. . . . .	104
Figura 47 – Caso de $90^\circ$ com $R = 75$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base. . . . .	105
Figura 48 – Caso de $90^\circ$ com $R = 75$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo. . . . .	105
Figura 49 – Caso de $180^\circ$ com $R = 75$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base. . . . .	106
Figura 50 – Caso de $180^\circ$ com $R = 75$ mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo. . . . .	106
Figura 51 – Filtro geométrico composto por 2 células periódicas com $\Theta_y \approx 120^\circ$ e $R = 27$ mm por quarto de célula periódica. . . . .	107
Figura 52 – Resultados do filtro geométrico de 2 células periódicas com $\Theta_y \approx 120^\circ$ e $R = 27$ mm por quarto de célula, excitação alinhada ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo. . . . .	108

Figura 53 – Resultados do filtro geométrico de 2 células periódicas com $\Theta_y \approx 120^\circ$ e $R = 27$ mm por quarto de célula, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo. . . . .	108
Figura 54 – Filtro geométrico composto por 3 células periódicas com $\Theta_y \approx 125^\circ$ e $R = 12$ mm por célula. . . . .	109
Figura 55 – Resultados do filtro geométrico de 3 células periódicas com $\Theta_y \approx 125^\circ$ e $R = 12$ mm por quarto de célula, excitação alinhada ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo. . . . .	110
Figura 56 – Resultados do filtro geométrico de 3 células periódicas com $\Theta_y \approx 125^\circ$ e $R = 12$ mm por quarto de célula, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo. . . . .	110
Figura 57 – Exemplo do mapeamento dos efeitos de curvatura. . . . .	112
Figura 58 – Exemplo da geometria testada para obter as curvas de nível. . . . .	112
Figura 59 – Coeficientes de potência como curvas mestras para curvaturas simples. Raios variando de $R = 30$ mm (a), com $R = 100$ mm (b) e $R = 200$ mm (c), sob efeito de uma excitação flexural no plano da curvatura. No eixo das abcissas varia-se a frequência em Hz, e nas ordenadas os ângulos $\Theta_y$ em graus. . . . .	113
Figura 60 – Mapa da soma dos coeficientes de transmissão para uma excitação flexural para uma curva simples. $\Theta_y$ variando de $0^\circ$ a $360^\circ$ e $R = 100$ mm. . . . .	114
Figura 61 – Variação dos números de onda $\gamma$ com a frequência adimensional $\Omega$ para parâmetro de curvatura $K = 0,025$ . . . . .	115
Figura 62 – Destaque da região de forte transmissão longitudinal sob excitação de onda flexural dentro-do-plano. $\Theta_y$ variando de $150^\circ$ a $360^\circ$ e $R = 100$ mm. . . . .	116

Figura 63 – Mapa de cores hipotético mostrando $\Theta_y$ crescendo até $1080^\circ$ , com regiões de interesse destacadas sendo mantidas. . . . .	117
Figura 64 – Soma dos coeficientes de transmissão de uma curva sob excitação de uma onda de flexão fora-do-plano, plotadas como curvas de nível. . . . .	118
Figura 65 – Semelhança entre diferentes números de onda. Linhas cheias representam vibrações dentro do plano e pontilhadas, fora do plano. Caso hipotético com $R = 250$ mm. . . . .	118
Figura 66 – Configuração proposta para investigar efeitos de curvatura sobre vibrações fora-do-plano. Com ângulo de arfagem sendo $\Theta_y$ , e ângulo de rolagem, $\Theta_x$ . . . . .	119
Figura 67 – Transmissão média condensada para uma vibração unitária flexural fora do plano, excitando uma curva de $R = 6$ mm . . . . .	120
Figura 68 – Transmissão de potência para uma vibração flexural fora-do-plano sobre uma única curva de $R = 6$ mm (sem a aplicação da “rolagem”). . . . .	121
Figura 69 – Melhor configuração possível para um raio pequeno ( $R = 6$ mm neste caso). . . . .	121
Figura 70 – Transmissão média condensada para vibração flexural fora-do-plano atuando sobre uma curva de $R = 50$ mm. . . . .	122
Figura 71 – Transmissão média condensada para vibração flexural fora-do-plano atuando sobre uma curva de $R = 100$ mm. . . . .	123
Figura 72 – Melhor configuração possível para um raio grande ( $R = 100$ mm neste caso). . . . .	123
Figura 73 – Exemplo de célula periódica utilizada nas simulações.	125
Figura 74 – Célula periódica para teste de relevância. $\Theta_y = 90^\circ$ e $R = 80$ mm. . . . .	125
Figura 75 – Variação do fluxo de potência $W$ com o número de células periódicas. . . . .	126

Figura 76 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação dos raios de todas as células simultaneamente. . . . .	127
Figura 77 – Variação do fluxo de potência $W$ em relação à variação simultânea do raio de todas as células periódicas. . . . .	127
Figura 78 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação dos ângulos de todas as células simultaneamente. . . . .	128
Figura 79 – Variação do fluxo de potência $W$ com o aumento do ângulo $\Theta_y$ de todas células periódicas simultaneamente. . . . .	129
Figura 80 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação crescente dos raios. . . . .	130
Figura 81 – Variação do fluxo de potência $W$ com o aumento do raio da última célula periódica. O raio das células intermediárias crescem numa interpolação linear entre a primeira e a última. . . . .	130
Figura 82 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação decrescente dos raios. . . . .	132
Figura 83 – Variação do fluxo de potência $W$ com o aumento do raio da primeira célula periódica. O raio das células intermediárias crescem numa interpolação linear entre a primeira e a última. . . . .	132
Figura 84 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos antissimétricos crescentes, evidenciando a progressão das mesmas em cada simulação. . . . .	133
Figura 85 – Resultados de potência transmitida para o caso crescente antissimétrico. A interpolação linear entre os raios da primeira e última célula se mantêm, adicionando-se apenas a rolagem $\Theta_x = 180^\circ$ ao final de cada seção. . . . .	133
Figura 86 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos antissimétricos decrescentes. . . . .	134

Figura 87 – Resultados de potência transmitida para o caso de crescente antissimétrico. A interpolação linear entre os raios da primeira e última célula se mantêm, adicionando-se apenas a rolagem $\Theta_x = 180^\circ$ ao final de cada seção.	134
Figura 88 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos de uma estrutura tipo-mola variando o número de espiras. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade. . . . .	135
Figura 89 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o número de espiras. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade. . . . .	136
Figura 90 – Exemplo de vibração de corpo rígido da mola em aproximadamente 16,8 Hz para 12 espiras (localizado bem no meio da região de baixa transmissão da Fig. 89). . . . .	136
Figura 91 – Geometrias do primeiro (a) ( $R = 6$ mm) e último (b) ( $R = 36$ mm) casos de uma estrutura tipo-mola respectivamente. . . . .	137
Figura 92 – Detalhe da região de baixa transmissibilidade com a mola tendo um comportamento de corpo rígido. Raio $R = 27$ mm, $f = 20,6$ Hz. . . . .	138
Figura 93 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o raio de 6 mm a 36 mm. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade. . . . .	138
Figura 94 – Geometria com o passo da mola de 5 mm (a) e 20 mm (b). Raio da mola de 20 mm, com 8 espiras. . . . .	139
Figura 95 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o passo da mola de 5 mm a 20 mm. . . . .	139

Figura 96 – Geometrias das configurações $c1$ , $c2$ e $c3$ descritas anteriormente. . . . .	142
Figura 97 – Coeficiente de potência transmitida total $W$ para a configuração $c1$ em $dB$ . . . . .	143
Figura 98 – Coeficiente de potência transmitida total $W$ para a configuração $c2$ em $dB$ . . . . .	143
Figura 99 – Coeficiente de potência transmitida total $W$ para a configuração $c3$ em $dB$ . . . . .	143
Figura 100–Geometria para uma combinação entre os filtros $c1$ e $c2$ . . . . .	144
Figura 101–Coeficiente de potência transmitida total $W$ para uma combinação entre os filtros $c1$ e $c2$ . . . . .	144
Figura 102–Geometria para uma combinação inversa entre os filtros $c2$ e $c1$ . . . . .	145
Figura 103–Coeficiente de potência transmitida total $W$ para uma combinação inversa entre os filtros $c2$ e $c1$ . . . . .	145
Figura 104–Geometrias para combinações entre os filtros $c1$ e $c3$ (a), e $c2$ e $c3$ (b). . . . .	146
Figura 105–Coeficiente de potência transmitida total $W$ para combinações entre os filtros $c1$ e $c3$ (a), e $c2$ e $c3$ (b). . . . .	146
Figura 106–Geometria para uma combinação entre os três filtros simultaneamente. . . . .	147
Figura 107–Coeficiente de potência transmitida total $W$ para uma combinação entre os três filtros simultaneamente. . . . .	147
Figura 108–Geometria do filtro escolhida arbitrariamente ( $L_s = 2\text{ mm}$ , $R = 8\text{ mm}$ , $\Theta_y = 140^\circ$ , $n_c = 2$ ). . . . .	148
Figura 109–Coeficiente de potência transmitida total para o filtro com geometria dada por $L_s = 2\text{ mm}$ , $R = 8\text{ mm}$ , $\Theta_y = 140^\circ$ , $n_c = 2$ . . . . .	148
Figura 110–Geometria-portadora que irá abrigar as diferentes configurações de filtros. Simulações feitas com deslocamento unitário prescrito nas 3 direções em uma das extremidades (seta), e engaste na outra (cruz). . . . .	149



Figura 111–Forças e momentos totais no engaste da estrutura sem filtro geométrico. Excitação na forma de deslocamento unitário nas 3 direções, prescrito na extremidade contrária à do engaste. . . . .	149
Figura 112–Configurações da geometria-portadora com filtro posicionado nas curvas 1 (a), 2 (b) e 3 (c). . . . .	150
Figura 113–Forças (sup.) e momentos totais (inf.) no engaste da estrutura com filtro geométrico na reta 1. Condições de contorno idênticas às da simulação sem filtro. . .	151
Figura 114–Forças (sup.) e momentos totais (inf.) no engaste. Comparação entre diferentes posições do filtro geométrico (Fig. 112). Condições de contorno idênticas à simulação sem filtro. . . . .	152
Figura 115–Fluxograma exemplificando o funcionamento do algoritmo genético (Fonte: Jeronimo (2014)). . . . .	154
Figura 116–Geometrias geradas através de diferentes simulações utilizando o algoritmo genético, para o caso com 3 células periódicas. Percebe-se uma tendência às curvas “tipo <i>chip</i> ”. . . . .	156
Figura 117–Resultados das diferentes simulações utilizando o algoritmo genético com 3 células periódicas. Frequência de <i>band gap</i> desejada entre $2 \rightarrow 3 \text{ kHz}$ . . . . .	157
Figura 118–Progressões na convergência das simulações #1 e #4 respectivamente, demonstrando uma rápida otimização na primeira e uma bastante lenta na última. . .	157



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Equações de deslocamento, relação deformação-deslocamento, e relação tensão-deformação das diferentes teorias para uma viga curva (movimento alinhado ao plano de curvatura). . . . .	45
Tabela 2 – Diferenças analítico-numéricas, prescrevendo ondas alinhadas com o plano de curvatura. . . . .	89
Tabela 3 – Diferenças analítico-numéricas, prescrevendo ondas perpendiculares ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta. . . . .	90



# Lista de símbolos

## Alfabeto Latino

a	direção do giro do quatérnio
A	área da seção transversal
b	vetor arbitrário
CS	sistema de coordenadas atual
DOF	graus de liberdade (degrees-of-freedom)
DS	rigidez dinâmica ( <i>Dynamic Stiffness</i> )
E	módulo de Young
el	elementar
$f$	frequência em Hertz
F	vetor de força
f,l	(subscritos) flexural, longitudinal
FEM	método de elementos finitos
gl	global
G	módulo de cisalhamento
i	(subscrito) contador
i,j,k	relativo ao sistema de coordenadas global
I	segundo momento de inércia
I,R	(sobrescrito) ondas incidente e refletida
j	$\sqrt{-1}$

J	constante de rigidez torsional
k	número de onda
K	matriz de rigidez
L	comprimento da viga
$L_c$	comprimento total da célula periódica
$L_s$	comprimento da parte reta da célula periódica
M	matriz de massa (entre colchetes) ou momento
nf	discretização na frequência
N	força longitudinal
p,e	(sobrescrito) ondas propagante e evanescente
q	quatérnio
Q	força cisalhante
R	raio da curva
s	posição sobre uma viga curva ( $R\theta$ )
s,c	(sobrescrito) reto ( <i>straight</i> ), curvo
t	relativo a tempo
T	torção
u,w,v, $\theta$	relativo a deslocamentos
W	potência
x	posição sobre uma viga reta
x,y,z	relativo ao sistema de coordenadas atual

### **Alfabeto Grego**

$\beta$  relações de deslocamento (razão de dispersão)

$\gamma$	números de onda segundo Lee <i>et al</i>
$\epsilon$	relativo à erro
$\theta$	rotação da seção transversal
$\Theta$	ângulo de curva
$\kappa$	relativo à constante de ajuste
$\lambda$	comprimento de onda
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	densidade mássica
$\phi$	ângulo de giro do quatérnio
$\omega$	frequência angular
$\Omega$	frequência de corte

### **Operadores**

$( )'$	operador que indica rotação
$\partial( )$	operador de derivada parcial





# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	29
2	REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	33
3	EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA ON- DAS EM VIGAS COM CURVATURA . . . . .	41
3.1	Ondas no plano de curvatura . . . . .	42
3.1.1	Comparação entre Teorias de Vigas Curvas . . . . .	44
3.2	Movimentos perpendiculares ao plano de cur- vatura . . . . .	46
3.3	Parâmetros adimensionais para vibrações no plano da curvatura . . . . .	48
3.4	Análise dos números de onda no plano da curvatura . . . . .	49
3.5	Análise do acoplamento entre os deslocamen- tos no plano da curva . . . . .	55
4	SOLUÇÃO ANALÍTICA PELO MÉTODO DE ONDAS PROPAGANTES . . . . .	59
4.1	Resultados Analíticos . . . . .	63
5	SOLUÇÃO NUMÉRICA . . . . .	67
5.1	Configuração da Malha . . . . .	67
5.1.1	Classe MeshConfig . . . . .	68
5.1.2	Padronização das Curvaturas . . . . .	70
5.2	Solucionadores . . . . .	73
5.3	Estruturas-Base . . . . .	74
5.3.1	Vigas Retas . . . . .	74
5.3.2	Vigas Curvas . . . . .	76
5.3.3	Elemento de Viga Reta Semi-Infinita . . . . .	79
5.3.4	Esforços que simulam uma onda em propagação . . . . .	82

5.3.5	Amplitudes de Ondas . . . . .	83
5.4	Validação com Resultados Analíticos . . . . .	84
6	<b>VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL . . . . .</b>	<b>95</b>
6.1	Validação do Workflow . . . . .	95
6.2	Curvas Simples . . . . .	102
6.3	Filtros Geométricos . . . . .	107
7	<b>ANÁLISE DOS EFEITOS DE CURVATURA</b>	<b>111</b>
7.1	Efeitos de Vibrações no Plano da Curvatura .	111
7.2	Efeitos de Vibrações Fora-do-Plano da Curvatura . . . . .	117
7.3	Curvaturas em Sequência - Estruturas Periódicas . . . . .	124
7.3.1	Relevância da quantidade de células periódicas . . .	124
7.3.2	Análise de sensibilidade dos parâmetros das células periódicas . . . . .	126
7.4	Conclusões sobre Efeitos de Curvaturas . . . .	139
8	<b>FILTROS GEOMÉTRICOS . . . . .</b>	<b>141</b>
8.1	Relação entre duas Estruturas Periódicas . . .	141
8.2	Relação entre filtro e Geometria Arbitrária .	147
8.3	Otimização de uma Estrutura Periódica (Filtro) . . . . .	152
8.3.1	Otimização de Múltiplos Parâmetros - Algoritmo Genético . . . . .	152
8.3.2	Resultados da Otimização . . . . .	155
8.4	Resumo de Filtros Periódicos . . . . .	157
9	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>159</b>
9.1	Recomendações para Trabalhos Futuros . . . .	162
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>165</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Esta tese investiga os efeitos de curvatura no fluxo de potência vibratória de estruturas delgadas tipo viga. O objetivo deste estudo está voltado para problemas de ruído e vibração de sistemas de refrigeração, mais especificamente em compressores herméticos, cujo conjunto interno contém tubulação fina com curvaturas. Com o avanço tecnológico destes sistemas, as formas de reduzir os níveis de ruído estão atingindo limites tais que a otimização dos mais simples componentes tornou-se necessária.

A alta competitividade nos mercados nacional e internacional obrigam os fabricantes a aprimorar as características de ruído e vibração dos seus produtos, com uma significativa redução de custo. Isto nem sempre é possível através de novos conceitos do produto como um todo, ou de seus componentes. Frequentemente, estes objetivos são alcançados através de redução de dimensões.

O fluxo de energia vibratória do conjunto interno bloco-motor elétrico para a carcaça de compressores herméticos através do tubo de descarga é significativa, principalmente na região de altas frequências onde situam-se as primeiras ressonâncias da carcaça. A relativamente alta densidade modal do tubo de descarga contribui para este significativo fluxo de energia vibratória. Os demais caminhos de transmissão de energia são as molas metálicas de suspensão do conjunto interno, a radiação sonora do conjunto interno para a cavidade do compressor e a pulsação do filtro acústico de sucção, contribuindo para a excitação do campo acústico na cavidade.

O tubo de descarga é fabricado em aço, com camada externa de cobre, tendo dimensões aproximadas de 50 cm de comprimento, diâmetros externo de 3 mm e interno de 1 mm. Sua geometria irregular, como mostra a Figura 1, é muitas vezes definida de forma empírica, com o objetivo de minimizar a transmissão vibração para a carcaça. Tem-se observado na prática que geometrias diferentes resultam em diferentes níveis de ruído do compressor.

Os tubos de sucção e de descarga que unem o compressor ao gabinete do sistema de refrigeração também representam caminhos significativos de transmissão de energia vibratória ao gabinete e sua consequente radiação sonora.

A forte demanda por redução de custo requer que estes compo-

centes (tubos) tenham dimensões mínimas, porém sem comprometer as características de ruído e vibração do produto. Isto implica a necessidade de conhecer o comportamento físico da propagação de ondas em estruturas tipo tubo com curvaturas e a disponibilidade de uso de ferramentas de cálculo do fluxo de energia vibratória de forma rápida e precisa. Estas duas aplicações práticas motivaram o desenvolvimento deste trabalho.

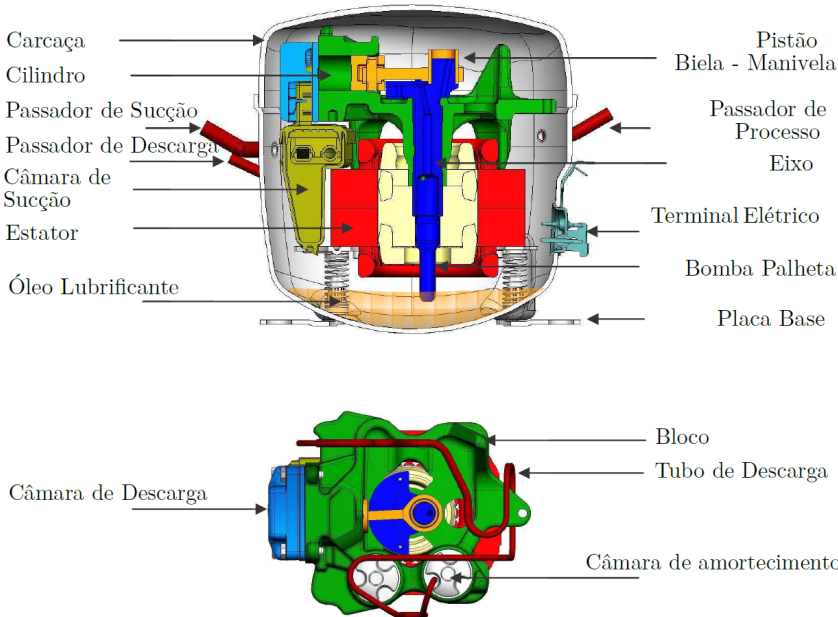


Figura 1 – Vista em corte lateral (sup.) e vista do topo da unidade compressora (inf.) de um compressor hermético típico.

Assim, este estudo está direcionado ao tubo de descarga do compressor hermético, cujo projeto impacta diretamente no nível de ruído produzido pelo dispositivo, uma vez que o tubo de descarga é um importante caminho de propagação de vibração. Por si só não gera ruído, porém contribui para que a vibração seja transmitida da unidade compressora para a carcaça (Figura 1), que é ótima radiadora, além das demais fixações ainda continuarem transmitindo a vibração para o gabinete do refrigerador, outro excelente radiador. Portanto, controlar a vibração logo nos primeiros caminhos de propagação é de suma importância para diminuir o nível global de ruído radiado. Deseja-se também analisar os efeitos das curvaturas no

---

fluxo de potência, de forma a agregar informações para auxiliar em novos projetos de compressores.

## Objetivos Gerais

Caracterizar os efeitos de curvaturas na propagação de ondas em estruturas delgadas, avaliando a relevância dos parâmetros de curvatura no comportamento vibratório. Desta forma, obter informações suficientes para facilitar o projeto de novas geometrias sob o ponto de vista vibro-acústico.

## Objetivos Específicos

- Desenvolver uma ferramenta numérico-computacional para calcular o fluxo de potência de forma adequada.
- Mapear os efeitos da variação dos parâmetros de curvatura no fluxo de potência.
- Analisar geometrias de maior complexidade (molas e estruturas periódicas).

Optou-se por uma abordagem com elementos finitos para a ferramenta citada, permitindo uma versatilidade na construção de geometrias e utilizando o método das ondas em propagação. A originalidade encontra-se no mapeamento dos efeitos de curvatura, buscando analisar a relação entre parâmetros da curva e tipo de onda propagada através da estrutura vibrante. Esta tese também analisa quais combinações de curva são melhores para refletir a energia vibratória, principalmente caracterizando como estes mecanismos interagem. Deseja-se obter uma maior quantidade de informações que permitam projetar estruturas delgadas que sejam eficazes no bloqueio de ondas em propagação e, conseqüentemente, reduzindo o ruído em sistemas que utilizem esse tipo de estruturas.

Para tal fim, este documento contém 9 capítulos além deste de introdução, distribuídos conforme descritos a seguir.

O Capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica, mostrando os principais trabalhos que motivaram este documento, e também o estado da arte no estudo sobre curvaturas.

O Capítulo 3 mostra as equações que regem o movimento, e discute as diferentes teorias de vigas curvas. Mostra como obter os números de onda e discute o significado destes comparando com números de onda de uma viga reta. Também analisa a natureza do acoplamento entre movimento

longitudinal-flexão para casos com excitação alinhada ao plano de curvatura, e entre o movimento torsional-flexão para casos com excitação perpendicular ao plano de curvatura.

No Capítulo 4 é apresentado o modelo de análise utilizando o método de ondas em propagação (*wave propagation approach*). O modelo analítico é introduzido e resultados preliminares são obtidos. Mostra-se, também, que vibrações no plano de curvatura e perpendicular a este são muito similares. Este modelo será usado para validar analiticamente a ferramenta numérica.

No Capítulo 5 é apresentada a ferramenta em Elementos Finitos que foi desenvolvida para resolver casos utilizando o método de ondas em propagação. Nesta etapa também foi proposta uma parametrização para as curvaturas, aproximando-se a um controle de comando numérico programável (CNC), com uma parametrização baseada na teoria de quatérnios. Também neste capítulo a ferramenta é validada analiticamente, segundo a formulação introduzida no capítulo anterior.

O Capítulo 6 é dedicado à validação experimental da ferramenta, com informações sobre a metodologia utilizada nos experimentos e obtenção de resultados para viga reta, curvas simples e filtros geométricos.

O Capítulo 7 destina-se à análise dos efeitos de curvatura, discutindo inicialmente sobre a vibração alinhada ao plano da curva, com o mapeamento de regiões de interesse na variação de seu ângulo de arfagem. Segue com resultados sobre vibrações perpendiculares ao plano da curvatura, também identificando regiões de interesse com variações combinadas de ângulos de arfagem e rolagem. Finalmente, apresenta uma seção sobre estruturas periódicas, e como obter regiões de atenuação na frequência a partir de curvas em sequência.

O Capítulo 8, após verificado o potencial atenuante em geometrias periódicas, dedica-se exclusivamente aos filtros geométricos, mostrando como podem ser utilizados em uma estrutura arbitrária, e sua natureza cumulativa ao serem utilizados em série. Também é mostrado como utilizar a ferramenta num algoritmo de otimização para alcançar um filtro adequado à faixa de frequência onde deseja-se a atenuação.

As contribuições deste trabalho estão resumidas no Capítulo 9, que também traz recomendações para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Uma revisão de todos os modelos e métodos de análise dinâmica de arcos circulares foi apresentada por Auciello e Rosa (1994), com várias comparações numéricas e exemplos. Observou-se a eficácia do método de Rayleigh-Ritz e do programa de elementos finitos SAP90. As equações do movimento de vigas curvas foram obtidas nos trabalhos de Walsh e White (2000), Leissa e Qatu (2011), Misra, Païdoussis e Van (1988), Wang, Nettleton e Keita (1980), Li (2000), Zhu e Zhao (2008), Tüfekçi e Arpaci (1998), Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008), Lee e Hsiao (2002), Yoon et al. (2006) e Lim, Wang e Kitipornchai (1997). Através de Graff (1975) pode-se confirmar a similaridade entre equações de anéis e vigas curvas.

Walsh e White (2000) abordaram a potência vibratória transmitida por ondas propagando-se no mesmo plano da curvatura (vibrações no plano). São apresentadas as equações de movimento considerando diferentes teorias, inclusive as aproximações de Love, utilizadas nesse trabalho. Leissa e Qatu (2011) obtiveram as mesmas equações de movimento organizadas numa forma matricial, cuja apresentação facilita a identificação de acoplamentos entre guias de onda dentro e fora do plano de curvatura. Portanto, estes estudos estabelecem uma base analítica para o desenvolvimento desta tese.

Outro trabalho que trata mais especificamente do acoplamento de guias de onda é o de Lee e Hsiao (2002), que demonstraram explicitamente esse fenômeno.

Wang, Nettleton e Keita (1980) obtiveram as equações do movimento para vibrações ocorrendo perpendicularmente ao plano da curvatura (vibrações fora do plano). Os efeitos de amortecimento, inércia rotatória e empenamento da seção transversal (*warping*) foram desprezados.

Outra excelente referência, que trouxe as formulações para vibrações alinhadas com, e perpendiculares ao, plano da curvatura, é o trabalho de Misra, Païdoussis e Van (1988).

Zhu e Zhao (2008) apresentaram uma solução analítica explícita das forças internas e deformações de uma viga encurvada sob carregamentos complexos. A forma de descrever a curvatura, assim como a representação em tensores e matrizes, auxiliou para aplicação das transformações com quatérnios posteriormente. Também, o trabalho de Li (2000) é uma literatura que detalha transformações de sistemas de coordenadas utilizando tensores e quatérnios, para descrever de forma espacial e material um elemento

finito de viga curva.

Tüfekçi e Arpacı (1998) apresentaram uma análise modal variando condições de contorno e compararam com resultados numéricos, que ajudou na etapa de validação da ferramenta desenvolvida. Também, Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008) apresentaram resultados de frequências naturais, formas modais e configurações de deformação para diferentes tipos de vigas curvas com várias propriedades geométricas e condições de contorno.

Yoon et al. (2006) derivaram novas equações do movimento para vigas curvas baseadas na teoria de Kang e Yoo (1994), mas não foi utilizada nesta tese pelas considerações da abordagem: o raio de curvatura deveria ser suficientemente grande para que a distribuição dos carregamentos normais à flexão permanecessem lineares. Entretanto, foi um trabalho importante para entender a derivação de um elemento finito.

Dos trabalhos que focaram nos números de onda para analisar os efeitos de curvatura, pode-se destacar novamente Walsh e White (2000), Lee, Mace e Brennan (2007) e Kang, Riedel e Tan (2003). Lee, Mace e Brennan (2007) associaram o parâmetro ao fluxo de potência, determinando analiticamente como os números reais ou imaginários podem influenciar na transmissão de potência. Lee relatou as equações de dispersão, também referidas por Kang, Riedel e Tan (2003) como relações de acoplamento, fazendo uma análise robusta para caracterizar como curvaturas acoplam os movimentos flexurais e longitudinais. Além disso, Lee, Mace e Brennan (2007) identificaram diferentes regiões no espectro de frequências do comportamento dinâmico das vigas curvas e apresentaram as características do fluxo de potência em cada região.

Pode-se destacar o trabalho de Kang, Riedel e Tan (2003), sobre a análise vibratória de vigas curvas planares (curvaturas descritas apenas em um plano) pelo método de ondas em propagação, que apresentou uma abordagem sistemática para o problema incluindo múltiplas descontinuidades pontuais, como adição de massas ou suportes elásticos. Os autores formularam matrizes de reflexão e transmissão da onda, obtiveram equações de dispersão e determinaram frequências de corte (*cut-off frequencies*). Entretanto, as fórmulas apresentadas desprezam os efeitos de deformação por cisalhamento e inércia rotatória, o que implica uma simplificação da representação matemática das curvaturas.

Ao utilizar uma parametrização adimensional, os autores Wu e Lundberg (1996), Kang, Riedel e Tan (2003), Walsh e White (2000) e Lee, Mace e Brennan (2007) simplificaram as equações do movimento de vigas curvas enquanto deixaram evidente quais grandezas são mais relevantes



para as análises.

Wu e Lundberg (1996) também analisaram vibrações no plano de curvatura usando o método de ondas em propagação, que serviu de base para este documento. Propuseram um conjunto de parâmetros adimensionais para a análise, o que fortaleceu o entendimento sobre as influências das propriedades do material e características geométricas no comportamento de curvaturas.

Também Kang, Riedel e Tan (2003), Walsh e White (2000) e Lee, Mace e Brennan (2007) parametrizaram as curvaturas para tornar as equações de movimento adimensionais. É um passo importante para simplificar as fórmulas e ajudar a discernir sobre quais termos são significativos quando se estudam curvas suaves. Esta tese utiliza a parametrização sugerida por Kang, Riedel e Tan (2003) e Walsh e White (2000).

Outro trabalho interessante é o de Beccu, Wu e Lundberg (1996), no qual buscaram validar o modelo usado por Wu e Lundberg (1996) focando nas ondas longitudinais através de análise transiente e experimental.

Dos trabalhos que utilizaram abordagens analíticas para resolver problemas de vigas curvas, podem-se destacar os de Kang, Riedel e Tan (2003), Wu e Lundberg (1996), Lee (2003), Søe-Knudsen e Sorokin (2010), Søe-Knudsen (2011) e Tong, Mrad e Tabarrok (1998).

Por outro lado, Lee (2003) apontou que, dentre os vários métodos na literatura para analisar vigas curvas, um dos mais comuns é o método de elementos finitos.

Já os trabalhos de Søe-Knudsen e Sorokin (2010) e Søe-Knudsen (2011) exploram o potencial das estruturas periódicas para aplicação em filtros geométricos, utilizando a teoria de Floquet para simular esses efeitos.

O trabalho de Søe-Knudsen e Sorokin (2010) é uma referência excelente para validar analiticamente os resultados obtidos neste documento, principalmente na análise do fluxo de potência vibratória de ondas propagando-se em tubos com curvaturas periódicas. Também verificaram que a localização das curvas de dispersão para tubos elásticos preenchidos com fluido e com parâmetros relevantes às aplicações industriais é fracamente afetado pela pressão e velocidade do fluido.

Søe-Knudsen (2011) expandiu o trabalho anterior ao escrever as equações numa forma adimensional escalonada, apropriada para aplicação de um algoritmo de otimização heurístico.

Vários trabalhos utilizaram abordagem numérica para resolver problemas com curvaturas. Davis, Henshell e Warburton (1972) descreveram

o processo para obter um elemento de viga curva, baseado nas relações cinemáticas de Love e de Flügge. Apresentaram as matrizes de massa e rigidez do elemento baseado na integração das equações diferenciais exatas de um elemento infinitesimal em equilíbrio estático.

O trabalho de Prathap e Babu (1986) apresentou um elemento de viga curva de três nós, baseado em interpolações quadráticas. Entretanto, os autores indicaram problemas com inconsistências de campo (*field-inconsistencies*) que degradam a performance da formulação.

Langhe, Sas e Vandepitte (1997) apresentaram um trabalho similar ao desta tese, utilizando terminações anecóicas para analisar o fluxo de potência vibratória em descontinuidades do tipo dobra usando o método de elementos finitos. Entretanto, o procedimento adotado para obter as potências de entrada, refletida e transmitida foi distinto, e os autores apenas comentaram a respeito de poucos resultados sem se aprofundarem no mapeamento dos efeitos de curvatura.

Hu (2009) observou e explicou, através da análise modal, o fenômeno de sobreposição dos modos (*mode overlapping phenomena*), identificado previamente por Petyt e Fleischer (1971). Este fenômeno também foi observado nos resultados preliminares desta tese, mesmo utilizando formulações diferentes.

Petyt e Fleischer (1971) constataram que resultados mais precisos são obtidos quando se utilizam ambos deslocamentos normais e tangentes em funções de forma descritas como polinômios cúbicos. Essa representação também foi obedecida nessa tese.

Outro trabalho que abordou a transição dos modos de vigas curvas é o de Tarnopolskaya, Hoog e Fletcher (1999). Observaram este efeito ao variar a curvatura, a seção transversal e condições de contorno. Os autores apresentaram uma condição integral simples para calcular quais modos seriam mudados e demonstraram analiticamente várias condições que caracterizam este fenômeno.

Shabana e Yakoub (2001) descreveram uma teoria para uma formulação tridimensional usando coordenadas nodais absolutas para elementos de viga. Com esta abordagem, o campo de deslocamentos proposto é suficiente para descrever exatamente os movimentos de corpo rígido. Então, a cinemática da seção transversal do elemento também é examinada e comparada com o sistema de Serret-Frenet, descrito em Burke (1985) e Greenberg (1998).

Ashwell, Sabir e Roberts (1971) avaliaram a performance de elementos finitos curvos aplicando-os em arcos circulares. É uma boa referência

para entender como funções de forma são escolhidas e como verificar a performance do elemento. Também, Litewka e Rakowski (1997) descrevem um elemento curvo exato, consistente, adequado para análises estáticas.

Sobre o método numérico adotado, Gavric (1992) forneceu um elemento de viga reta semi-infinita na forma de rigidez dinâmica. Apesar de não apresentar como este elemento foi obtido, sua formulação pôde ser derivada a partir das equações do movimento de uma viga semi-infinita. Esta condição de contorno especial é interessante pois permite uma absorção das ondas sem alterar a impedância, viabilizando o uso do método de elementos finitos para calcular ondas em propagação pura.

O trabalho de Morsbøl e Sorokin (2015) abordou as propriedades das guias de ondas elásticas em três regimes de vibração de um tubo curvo: tubo, circunferência e toróide. Esta tese aborda principalmente o primeiro, uma vez que as dimensões dos tubos encontrados em sistemas de refrigeração são consideravelmente pequenos, fazendo com que a excitação dos demais regimes necessite de frequências extremamente altas, fora do escopo do trabalho

O artigo de Provasi e Martins (2014) forneceu outra formulação de um elemento de viga curva 3D incluindo os efeitos de curvatura e tortuosidade. A adição de tortuosidade leva a um elemento mais robusto e mais adequado para analisar diferentes tipos de carregamentos, entretanto, buscou-se manter a simplicidade e abordar apenas estruturas planares nesse trabalho. Também, Lopez (2013) propôs um elemento parcialmente baseado na formulação do elemento de viga clássico (Euler-Bernoulli), incluindo os efeitos torcionais de Saint-Venant para materiais isotrópicos. Trata-se de uma boa referência sobre como calcular um novo elemento e como utilizar dentro de um algoritmo. Finalmente, Choi e Lim (1995) apresentaram todo o procedimento para obtenção de elementos de viga curva, de dois nós e de três nós, ambos baseados na teoria de vigas de Timoshenko.

Outros trabalhos que, apesar de não possuírem uma ligação direta com curvaturas, serviram de inspiração para esta tese ao apresentarem conceitos que poderiam ser usados para expandir o entendimento sobre vigas curvas, pode-se citar Horner e White (1991) apresentaram a transmissão de potência através de dobras ou juntas de estruturas tipo viga, tanto por ondas longitudinais quanto por ondas de flexão. Foi um trabalho interessante para a validação da ferramenta desta tese, já que considerou dobras bruscas na sua formulação, quando  $R \rightarrow 0$ . Também Chen e Chen (2015) abordaram propagação em molas espirais. Estas molas foram também estudadas no decorrer deste trabalho, a título de validação das ideias sobre a curvatura, comportando-se como molas espirais. Já Doyle (2012) é uma boa

literatura sobre análise espectral de estruturas. Desenvolveu a formulação para vigas curvas e anéis, e como acoplá-los às vigas retas. O problema desta abordagem é a dificuldade de representar ondas evanescentes com elementos espectrais. Finalmente, Xiuchang et al. (2013) utilizaram o método das ondas em propagação e matrizes de transferência para analisar o fluxo de potência em estruturas tipo viga com combinações complexas de curvatura, seções retas, massas pontuais e rigidez prescrita. Apesar de utilizarem uma abordagem diferente desta tese, os resultados mostraram-se bastante similares.

Esta tese não leva em consideração efeitos de não-linearidades na formulação de vigas curvas para preservar a simplicidade. Para a sua análise, recomendam-se os trabalhos de Kang e Yoo (1994) e Kang e Yoo (1995).

Observou-se, portanto, que há uma literatura relativamente extensa sobre curvaturas, podendo ser dividida quando ao tipo de abordagem utilizada. Primeiro, utilizando abordagens numéricas, verificou-se que os trabalhos tratam a obtenção de elementos finitos que descrevem bem o comportamento da curvatura. Buscaram sanar problemas com representatividade do movimento de corpo rígido, com travamento de membrana, ordem adequada das funções de forma, representação de tortuosidade e consideração de movimento em três dimensões. Destes estudos, apenas o de Langhe, Sas e Vandepitte (1997) buscou analisar os efeitos de vibrações dentro do plano, porém a forma como se obtinha a potência incidente não foi bem explicada, não se mostrou de forma clara como foi considerada a condição de contorno de viga semi-infinita, e foram apresentados apenas dois resultados com vibrações no plano da curvatura. Portanto, encontra-se uma vasta biblioteca de elementos disponíveis na literatura para utilizar nas mais variadas aplicações com curvaturas, porém poucos trabalhos abordam a análise dos efeitos das curvas na propagação de ondas em si, que é o objetivo central desta tese.

Já com abordagem analítica, tem-se muitos estudos que abordam os efeitos de curvas simples no fluxo de energia vibratória. Tem-se disponível soluções baseadas em várias teorias (Love, Flügge e Timoshenko), considerando múltiplas condições de contorno, como massa concentrada e rigidez pontual. Entretanto, estes estudos estão limitados na dificuldade em representar formas geométricas complexas, como curvas em espiral ou molas. Portanto, baseiam-se em curvaturas simples, planares, ou periódicas (alinhadas num mesmo plano). A forma de obter resultados varia, apresentando-se o uso do método de ondas em propagação, análise dos números de onda da curvatura, na parametrização das curvas para simplificar cálculos analíticos, matrizes de transferência e análise espectral. Destes,

destaca-se o trabalho de S oe-Knudsen e Sorokin (2010), que utiliza um modelo de integrais de contorno com a teoria de Floquet para analisar o comportamento atenuante da vibra ao em estruturas periódicas.

Portanto, este estudo visa dar um passo adiante da literatura estudada, utilizando uma abordagem robusta com elementos finitos, que permita a versatilidade da constru ao de geometrias complexas, da mesma forma que padroniza os resultados na forma de energia vibratória, utilizando o método das ondas em propaga ao. Aborda também o mapeamento dos efeitos de curvatura, buscando caracterizar quais parâmetros têm mais influência no tipo de onda da estrutura vibrante. E, finalmente, também busca-se caracterizar quais combina oes de curva são melhores para refletir ou transmitir vibra ao, e como funcionam estes mecanismos de propaga ao, para melhor projetar geometrias delgadas do ponto de vista vibratório.



### 3 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA ONDAS EM VIGAS COM CURVATURA

As equações do movimento para vibrações dentro e fora-do-plano de curvatura descritas neste capítulo, baseiam-se nos trabalhos de Wu e Lundberg (1996) e Wang, Nettleton e Keita (1980), respectivamente. No trabalho de Misra, Païdoussis e Van (1988) encontrou-se uma forma diferente de alcançar os mesmos resultados. O presente documento apresenta como obter analiticamente os coeficientes de potência usando as equações de movimento de vigas curvas.

Considere um elemento infinitesimal de uma viga curva, mostrado na Figura 2. Na prática, os deslocamentos dentro e fora do plano estão acoplados, porém este acoplamento pode ser desprezado ao assumir a perfeita simetria na seção transversal da viga, logo as equações que regem o movimento podem ser tratadas separadamente.

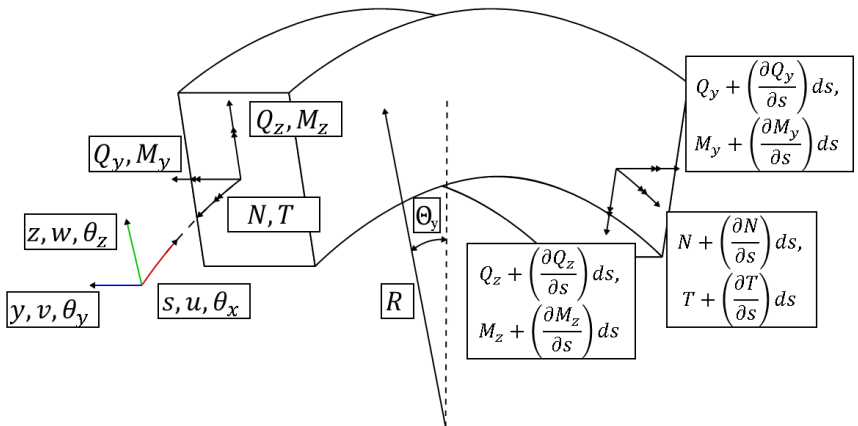


Figura 2 – Elemento infinitesimal de uma viga curva.

Walsh e White (2000) concluíram que, de acordo com a primeira

aproximação de Love (1906) para vigas com pequenos deslocamentos, pode-se considerar:

- i. a espessura da viga no plano de curvatura é pequeno comparado com outras dimensões, *e.g.* raio de curvatura  $R$ ;
- ii. tensões e deslocamentos são pequenos o suficiente para que termos de magnitude de segunda ou maior ordens nas relações tensão-deformação possam ser desprezados em comparação com termos de primeira ordem;
- iii. a tensão normal transversal é pequena comparada com outras tensões normais e também pode ser desprezada;
- iv. vetores normais à superfície transversal continuam normais mesmo após a deformação.

Esta última suposição é conhecida como a hipótese de Kirchhoff, e impõe as relações de deslocamento apresentadas a seguir.

A linha central de uma viga curva é definida pela coordenada polar  $s$ , dada por:

$$s = R\Theta_y, \quad (3.1)$$

na qual  $R$  é o raio até a linha central da viga e  $\Theta_y$  é o ângulo da curva.

### 3.1 Ondas no plano de curvatura

Pela teoria de Love, a deformação da linha central  $\epsilon_s$  e a rotação da seção transversal sobre o eixo  $y$  ( $\psi_y$ ) são dadas por:

$$\epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \psi_y = \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s}, \quad (3.2)$$

em que  $u$  e  $w$  são os deslocamentos da linha central da viga nas direções  $s$  e  $z$ , respectivamente.

A força longitudinal  $N$  e o momento  $M_y$  são as integrais da tensão axial que atua na seção transversal da viga, dados por:

$$N = EA\epsilon_s, \quad M_y = EI_y \frac{\partial \psi_y}{\partial s}, \quad (3.3)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material;  $A$ , a área da seção transversal e  $I_y$  o segundo momento de área na direção  $y$  (para que o movimento acompanhe a curvatura da viga). Assume-se que estes parâmetros sejam constantes.



Observando um elemento infinitesimal da viga (Fig. 2) é possível fazer o balanço de forças e momentos para obter as equações do movimento, desprezando efeitos de inércia rotatória e deformação por cisalhamento, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} + \frac{Q_z}{R} + p_s &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ -\frac{N}{R} + \frac{\partial Q_z}{\partial s} + p_z &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial s} - Q_z &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo  $N$  a força extensional;  $Q_z$ , a força cortante na direção  $z$ ;  $M_y$ , o momento resultante com eixo em  $y$  (rotação acompanha a curvatura), e  $p_s$  e  $p_z$  são componentes externas (ou forças de corpo) tangente e normal à linha central, por unidade de comprimento, respectivamente. É interessante notar que estas equações são as mesmas que regem o movimento de um anel, encontradas em Graff (1975).

Ao substituir as Equações 3.2 e 3.3 na Eq. 3.4, Leissa e Qatu (2011) simplificaram as fórmulas do movimento para:

$$\frac{EI_y}{R} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) + EA \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

$$EI_y \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left( \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{EA}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Considerando deslocamento harmônico, tem-se que:

$$u = \check{u}e^{-j(k^a s + \omega t)}, \quad w = \check{w}e^{-j(k^a s + \omega t)}, \quad (3.7)$$

com  $j = \sqrt{-1}$ ,  $k^a$  sendo o número de onda (no mesmo plano da curva),  $\omega$  a frequência em *rad/s* e  $t$  o tempo. Logo, as Equações 3.5 e 3.6 podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -k^{a2} \left( \frac{EI_y}{R^2} + EA \right) + \omega^2 \rho A & jk^{a3} \frac{EI_y}{R} + jk^a \frac{EA}{R} \\ jk^{a3} \frac{EI_y}{R} + jk^a \frac{EA}{R} & k^{a4} EI_y + \frac{EA}{R^2} - \omega^2 \rho A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{w} \end{bmatrix} = [0], \quad (3.8)$$

Portanto, para que haja uma solução não trivial, o determinante da matriz deve ser igual a zero. Esta verificação implica uma equação característica que pode ser resolvida para o número de onda  $k^a$ . Esta é uma equação de sexta ordem da qual resultam seis números de onda (três pares de complexos conjugados). As soluções para as equações do movimento de

uma viga curva podem ser escritas como:

$$u = \sum_{i=1}^6 \check{u}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}, \quad w = \sum_{i=1}^6 \check{w}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}. \quad (3.9)$$

Outra simplificação pode ser aplicada antes de usar estas soluções. A partir da forma matricial pode ser definida uma “razão de acoplamento” (referida por Wu e Lundberg (1996) como “*displacement ratio*”, também denominada “*modal component*”), definida como:

$$\beta_i^a = \frac{\check{u}_i}{\check{w}_i} = \frac{j k_i^a \frac{3EI_y}{R} + j k_i^a \frac{EA}{R}}{k_i^{a2} \left( \frac{EI_y}{R^2} + EA \right) - \omega^2 \rho A}. \quad (3.10)$$

Deste modo, as soluções das equações do movimento podem ser escritas como simples funções de apenas um tipo de deslocamento, no caso  $\check{w}_i$ , como segue:

$$u = \sum_{i=1}^6 \beta_i^a \check{w}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}, \quad w = \sum_{i=1}^6 \check{w}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}. \quad (3.11)$$

As soluções escritas na forma da Eq. 3.11 são de grande interesse para resolver o problema analiticamente e serão citadas novamente no capítulo que aborda o método das ondas em propagação.

### 3.1.1 Comparação entre Teorias de Vigas Curvas

Apesar de o trabalho focar na Teoria de Love para investigar os efeitos de curvatura, existem outras maneiras de modelar a estrutura. Esta seção tem como objetivo comparar o modelo baseado na teoria de Love com a teoria de Flügge, com a inclusão de efeitos de inércia rotatória (Rayleigh) e considerando deformação da seção transversal devido ao cisalhamento (Timoshenko).

Esta análise permite uma visão geral de como as propriedades se relacionam nestas formulações e quais suas principais diferenças. Na Tabela 1 tem-se as equações para os deslocamentos na direção  $s$  e  $z$  a partir da linha central, rotação da seção transversal  $\psi_y$ , a relação deformação-deslocamento extensional  $\epsilon_s$  e flexural  $\beta_s$ , a deformação total  $e_s$ , a relação tensão-deformação circunferencial  $\sigma_s$  e radial  $\gamma_{sr}$ , e a tensão cisalhante transversal  $\sigma_{sr}$ . Os símbolos “=” indicam que o valor é igual à formulação imediatamente anterior.

Tabela 1 – Equações de deslocamento, relação deformação-deslocamento, e relação tensão-deformação das diferentes teorias para uma viga curva (movimento alinhado ao plano de curvatura).

	Love	Flügge	Timoshenko
deslocamentos $s$ e $z$	$u + z\psi$ e $w$	=	=
rotação $\psi_y$	$\frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s}$	=	$\psi_y$ indep.
deformação longitudinal $\epsilon_s$	$\frac{w}{R} + \frac{\partial u}{\partial s}$	=	=
deformação flexural $\beta_s$	$\frac{\partial \psi}{\partial s}$	=	=
deformação total $e_s$	$\epsilon_s + z\beta_s$	$\frac{\epsilon_s + z\beta_s}{1 + z/R}$	=
tensão-deformação $\sigma_s$	$Ee_s$	=	=
deformação radial $\gamma_{sr}$	0	=	$\frac{\gamma}{1 + z/R}$
tensão cisalhante $\sigma_{sr}$	0	=	$G\gamma_{sr}$

Observa-se, a partir da Tab. 1, que as equações baseadas na teoria de Flügge são as mesmas que as da teoria de Love com exceção da deformação total  $e_s = e_s^{Love}/(1 + z/R)$ , que mostra um fator de correção da posição a partir da linha central  $z$  em relação ao raio da curvatura  $R$ . Na equação segundo Love isto não é necessário pois assume-se que  $R \gg h$ , no qual  $h$  é a espessura da viga, o que faria  $h/R \rightarrow 0$ .

Os efeitos de inércia rotatória não estão demonstrados na tabela pois possuem as propriedades de deslocamento, deformação e tensão idênticos à teoria de Flügge. Entretanto, ao considerar empenamento da seção transversal devido ao cisalhamento, a rotação da seção transversal com relação à linha central  $\psi_y$  torna-se uma variável independente. A relação deformação-deslocamento radial  $\gamma_{sr}$  e a tensão de cisalhamento transversal  $\sigma_{sr}$  tornam-se diferentes de zero.

A partir das relações de força apresentadas nas Eqs. 3.12 a 3.15 ficam mais evidentes as diferenças entre as teorias. Observa-se que segundo a teoria de Flügge, um ajuste de força relacionado à tração da viga em flexão já ocorre no cálculo da direção circunferencial  $N$ , com um termo relativo a  $-M_y/R$ . Esse ajuste também acontece para o caso da inércia rotatória incluída, bem como para a deformação por cisalhamento, sendo que esta última possui uma equação diferente para o momento, atualizando o termo de ajuste analogamente.

- Love:

$$\begin{cases} N = EA\epsilon_s \\ M_y = EI_y \frac{\partial \psi_y}{\partial s} \\ Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial s} = EI_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial s^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

- Flügge

$$\begin{cases} N = EA\epsilon_s + \frac{EI_y}{R} \left( \frac{w}{R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ M_y = -EI_y \left( \frac{w}{R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial s} = -EI_y \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

- c/ Inércia Rotatória:

$$\begin{cases} N = EA\epsilon_s + \frac{EI_y}{R} \left( \frac{w}{R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ M_y = -EI_y \left( \frac{w}{R^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial s} - \rho I_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{2u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

- Timoshenko:

$$\begin{cases} N = EA\epsilon_s + \frac{EI_y}{R} \left( \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial \psi_y}{\partial s} \right) \\ M_y = -EI_y \left( \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial \psi_y}{\partial s} \right) \\ Q_z = \kappa G \left( A + \frac{1}{R^2} \right) \left[ \psi_y - \left( \frac{u}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \end{cases} \quad (3.15)$$

O ângulo da seção transversal independente  $\psi_y$  na formulação da deformação por cisalhamento destaca uma diferença na equação do momento  $M_y$  ao substituir o termo  $\partial^2 w / \partial s^2$  por  $R^{-1} \partial u / \partial s - \partial \psi_y / \partial s$ . Observa-se, também, que a forma de calcular a força cisalhante depende de um fator de forma da seção transversal  $\kappa$  e do módulo de cisalhamento  $G$ . Caso deseje-se aprofundar mais sobre o fator de correção  $\kappa$ , recomenda-se o trabalho de Cowper (1966).

### 3.2 Movimentos perpendiculares ao plano de curvatura

Analogamente à seção anterior, também considerando a teoria de Love, a deformação da flexão na direção  $y$  ( $\xi_y$ ) e a deformação torsional  $\xi_s$ , segundo Wang, Nettleton e Keita (1980), podem ser escritas como:

$$\xi_y = \frac{\psi_s}{R} - \frac{\partial \psi_z}{\partial s}, \quad \xi_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\psi_z}{R}, \quad (3.16)$$

sendo  $\psi_s$  o movimento de torção da seção transversal sobre o eixo da linha central  $s$  e  $\psi_z$  a rotação sobre o eixo  $z$ . Partindo das relações abaixo:

$$\psi_z = -\frac{\partial v}{\partial s}, \quad M_z = -EI_z \xi_y, \quad T_s = GJ \xi_s, \quad (3.17)$$

onde  $M_z$  é o momento em relação ao eixo  $z$ ,  $T_s$  o momento sobre o eixo  $s$ ,  $I_z$  o segundo momento de inércia da seção transversal sobre o eixo  $z$ ,  $G$  o módulo de cisalhamento do material e  $J$  o momento de inércia torcional (sobre o eixo  $s$ ) e considerando as seguintes condições para o equilíbrio dinâmico:

$$Q_y = \frac{1}{R} \frac{\partial M_z}{\partial s} - \frac{T_s}{R}, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial s} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{M_z}{R} + \frac{\partial T_s}{\partial s} = \rho J \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2}, \quad (3.18)$$

pode-se escrever as equações que regem o movimento perpendicular ao plano de curvatura:

$$\frac{GJ}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} \right) - EI_z \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (3.19)$$

$$GJ \left( \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) - \frac{EI_z}{R} \left( \frac{\psi_s}{R} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) = \rho J \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2}. \quad (3.20)$$

Considerando movimento harmônico na forma:

$$v = \check{v} e^{-j(k^b s + \omega t)}, \quad \psi_s = \check{\psi}_s e^{-j(k^b s + \omega t)}, \quad (3.21)$$

sendo  $k^b$  o número de onda para movimento perpendicular ao plano de curvatura, pode-se escrever as Equações 3.19 e 3.20 na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -EI_z k^b{}^4 - \frac{GJ}{R^2} k^b{}^2 + \rho A \omega^2 & \frac{EI_z}{R} k^b{}^2 + \frac{GJ}{R} k^b{}^2 \\ \frac{EI_z}{R} k^b{}^2 + \frac{GJ}{R} k^b{}^2 & \rho J \omega^2 - \frac{EI_z}{R^2} - GJ k^b{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{v} \\ \check{\psi}_s \end{bmatrix} = [0]. \quad (3.22)$$

Para soluções não-triviais, faz-se o determinante da matriz igual a zero, obtendo-se outra equação característica de sexta ordem. Ou seja, de forma semelhante aos movimentos dentro do plano de curvatura, existem três pares de números de onda complexos conjugados para deslocamentos perpendiculares à curvatura, cujas soluções podem ser escritas na forma:

$$v = \sum_{i=1}^6 \check{v}_i e^{-j(k_i^b s + \omega t)}, \quad \psi_s = \sum_{i=1}^6 \check{\psi}_{s_i} e^{-j(k_i^b s + \omega t)}. \quad (3.23)$$

A simplificação baseada na razão de acoplamento também é válida, dada a partir da matriz na Eq. 3.22:

$$\beta_i^b = \frac{\check{v}_i}{\check{\psi}_{si}} = \frac{\omega^2 \rho J R^2 - G J R^2 k^{b2} - E I_z}{(G J + E I_z) R k^{b2}}, \quad (3.24)$$

que permite escrever as soluções apenas em função de  $\psi_s$ ,

$$v = \sum_{i=1}^6 \beta_i^b \check{\psi}_{si} e^{-j(k_i^b s + \omega t)}, \quad \psi_s = \sum_{i=1}^6 \check{\psi}_{si} e^{-j(k_i^b s + \omega t)}. \quad (3.25)$$

Finalmente, as Equações 3.25, assim como as 3.11, são importantes para resolver problemas através método das ondas em propagação, e serão endereçadas mais adiante no capítulo que trata especificamente deste método.

### 3.3 Parâmetros adimensionais para vibrações no plano da curvatura

A utilização de parâmetros adimensionais tem o objetivo de simplificar as equações mostradas anteriormente, mantendo as características peculiares da curvatura. Sua escolha é arbitrária e depende basicamente dos fenômenos que se desejam analisar. Kang, Riedel e Tan (2003), Walsh e White (2000), Wu e Lundberg (1996) e Lee, Mace e Brennan (2007) usaram parametrização distintas, porém esta seção focará nos dois primeiros trabalhos por compartilharem as mesmas variáveis adimensionais.

Os parâmetros foram escolhidos de forma a integrar o raio da curvatura, as propriedades geométricas e propriedades do material da viga. A parametrização utilizada por Walsh e White (2000) e Kang, Riedel e Tan (2003) é introduzida a seguir:

$$\gamma = R k^a, \quad (3.26)$$

$$\Omega = \frac{\omega R^2}{c_e r_g} = \frac{2\pi R^2}{\lambda_e r_g} = \frac{(2\pi R)^2}{\lambda_f^2}, \quad (3.27)$$

$$K = \frac{r_g}{R}, \quad (3.28)$$

com o raio de giração  $r_g = \sqrt{I_y/A}$  e  $c_e = \sqrt{E/\rho}$ , na qual  $\gamma$  e  $\Omega$  são o número de onda e frequência adimensionais, e  $K$  o parâmetro de curvatura baseado no raio de giração. Wu e Lundberg (1996) utilizam uma parametrização ligeiramente diferente com  $\gamma = k^a r_g$  e  $\Omega = \omega r_g / c_e$ , assim como Lee, Mace e Brennan (2007) cujo  $\Omega = \omega R^2 / c_e$ .

Então, substituindo os parâmetros das Eqs. 3.26 a 3.28 na Eq. 3.8, pode-se escrever uma equação do movimento simplificada para vibrações dentro do plano da curvatura em sua forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -\gamma^2 + K^2 (\Omega^2 - \gamma^2) & i\gamma(1 + \gamma^2 K^2) \\ \text{sim.} & 1 + K^2 (\gamma^4 - \Omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \check{u} \\ \check{w} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.29)$$

O parâmetro de curvatura  $K$  foi escolhido de forma a relacionar a seção transversal (propriedade geométrica local) com o raio da curvatura (propriedade geométrica global), e merece atenção como um parâmetro de validação para a formulação que se deseja utilizar.

Por exemplo, caso a seção transversal possua dimensões próximas à do raio de curvatura  $R$  a equação do movimento descrita na Equação 3.8 perde o sentido físico por não considerar inércia rotatória nem deformação por cisalhamento. Para uma seção circular de raio  $r$ , considerando que:

$$K = \frac{r_g}{R} = \frac{\sqrt{I_y/A}}{R}, \quad \text{e se: } I_y = \frac{\pi r^4}{4}, \quad A = \pi r^2, \quad R = r, \quad (3.30)$$

$$\text{então: } K = \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

Neste caso, portanto,  $K = 1/2$  é o limite para que a relação de geometrias faça sentido e para que a Eq. 3.29 seja válida, então  $K \ll 1/2$ .

Já o parâmetro de frequência  $\Omega$  foi determinado desta forma pois engloba relações diretas entre o raio de curvatura  $R$  e comprimentos de onda longitudinal  $\lambda_e$  e flexural (no plano da curva)  $\lambda_f$ .

Por hora estes conceitos requerem atenção para assimilar, portanto a explicação será retomada nos próximos itens, juntamente com análise dos números de onda.

### 3.4 Análise dos números de onda no plano da curvatura

Devido à complexidade envolvida nos números de onda e razões de deslocamento, julgou-se apropriado detalhar estes conceitos. Estes diferem essencialmente de uma viga reta pelo surgimento de regiões peculiares abaixo da frequência de corte do anel, chamada *ring frequency*. Também serão brevemente discutidos outros detalhes acerca do fluxo de energia vibratória e sua relação com os números de onda.

Lembra-se que, através das etapas detalhadas nas Seções 3.1 e 3.2, os números de onda são obtidos ao considerar um deslocamento harmônico nas equações que regem o movimento e resolvendo a *equação característica*

garante-se uma solução não trivial para os deslocamentos. Usando a expressão parametrizada 3.29, introduzida na seção anterior, pode-se escrever

$$\gamma^6 - (2 + K^2\Omega^2)\gamma^4 + \{1 - (1 + K^2)\Omega^2\}\gamma^2 + K^2\Omega^4 - \Omega^2 = 0. \quad (3.32)$$

A solução da Equação 3.32 resulta em seis números de onda, ou três pares de complexos conjugados, que variam em função da frequência adimensional  $\Omega$  e do parâmetro de curvatura  $K$ .

A Figura 3 apresenta as partes real e imaginária dos números de onda adimensionais  $\gamma_{i=1,2,3}$ . Como os  $\gamma_i$  são funções da frequência e curvatura, estipulou-se arbitrariamente um valor  $K = 0,025$  a fim de destacar a variação do número de onda com  $\Omega$ .

Sabe-se que para valores de  $\gamma_i$  reais tem-se uma onda na forma  $e^{\pm i\gamma_i\theta}$ , ou seja, representa uma onda em propagação na direção positiva, ou negativa, relativa ao eixo da linha central  $s$ . Para  $\gamma_i$  imaginários tem-se  $e^{\pm\gamma_i\theta}$ , ou apenas ondas em decaimento (evanescentes), que podem ser desprezadas (*i.e.* dependendo do comprimento da viga analisada, como será explicado adiante na análise das regiões dos números de onda). Finalmente, valores de  $\gamma_i$  complexos indicam que as ondas possuem tanto propagação quanto uma parcela evanescente.

Portanto, os números de onda se encaixam em três casos distintos. Lee, Mace e Brennan (2007) comentam que a energia pode ser transportada da seguinte forma:

**Caso I** Por um modo isolado desde que seu número de onda seja real (*i.e.*, uma onda propagante);

**Caso II** Pela interação entre duas ondas opostas de um mesmo modo, desde que o número de onda seja puramente imaginário (*i.e.*, duas ondas evanescentes opostas);

**Caso III** Pela interação entre duas ondas opostas de modos diferentes, se os números de onda destes modos forem complexos conjugados.

Apesar de o artigo de Lee, Mace e Brennan (2007) trazer todo o equacionamento e a forma matricial das equações do fluxo de energia, o mesmo está embasado na teoria de Flügge, que é ligeiramente diferente e, portanto, será omitida para manter a simplicidade.

Após introdução destes conceitos, observa-se na Fig. 3 quatro regiões:



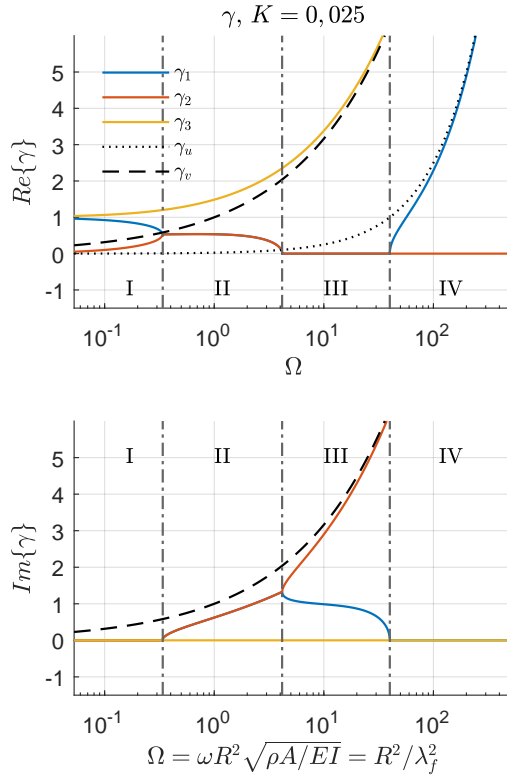


Figura 3 – Variação dos números de onda  $\gamma$  com a frequência adimensional  $\Omega$  para parâmetro de curvatura  $K = 0,025$ . Os valores de  $\gamma_u$  e  $\gamma_v$  representam números de onda longitudinal e de flexão para uma viga reta, respectivamente.

**Região I** Tem-se  $\gamma_{1,2,3}$  reais (ou  $\gamma_{1\dots 6}$ ), ou seja todas as ondas estão em propagação sem atenuação. De acordo com Lee, Mace e Brennan (2007), cada modo é responsável por transmitir energia independentemente, *i.e.* cada modo  $\gamma_{1\dots 6}$  tem a capacidade de transmitir energia sem interação entre si.

**Região II** Observa-se que  $\gamma_2(-\gamma_5)$  é real enquanto  $\gamma_1(-\gamma_4)$  e  $\gamma_3(-\gamma_6)$  são complexos e iguais em módulo, indicando o surgimento de uma parte evanescente nestes dois últimos. Para tal,  $\gamma_2$  continua transmitindo energia sozinha enquanto os modos  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  apresentam interação entre si para que a energia se transmite através destes.

**Região III** Nesta região,  $\gamma_{1 \text{ e } 3}$  tornam-se puramente imaginários indicando que, para a energia propagar através destes, as ondas positivas e negativas de mesmo tipo precisam interagir, *i.e.*  $\gamma_{1 \text{ e } 4}$  e  $\gamma_{3 \text{ e } 6}$ . Pode-se notar também que  $\gamma_2$  aproxima-se de  $\gamma_v$ , número de onda adimensional de flexão para uma viga reta, e que  $\gamma_3 \rightarrow j\gamma_v$ , sugerindo que  $\gamma_{2 \text{ e } 3}$  estão diretamente relacionados com o movimento de flexão.

**Região IV** Há  $\gamma_{1 \text{ e } 2}$  reais e  $\gamma_3$  puramente imaginário. Nesta região,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_u$ , número de onda longitudinal para uma viga reta. Portanto, a partir desta frequência de corte, fica evidente que o comportamento de uma curva suave é semelhante ao de uma viga reta, *i.e.* a curvatura não é mais responsável por alterações significativas na propagação de ondas.

Ainda, na Fig. 3, observam-se frequências de transição entre as regiões, denominadas  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ . Para determinar esta última, também conhecida como a frequência de corte do anel (*ring frequency*), analisa-se a eq. característica (3.32) quando  $\gamma \rightarrow 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} (3.32) = (K^2 \Omega^2 - 1) \Omega^2 = 0. \quad (3.33)$$

A solução deste limite resulta em 4 raízes, sendo duas nulas, uma  $\Omega_a = -1/K$  que não oferece conteúdo relevante, e finalmente  $\Omega_b = \Omega_3 = 1/K$ . Esta pode ser encontrada na literatura como a frequência de anel, e possui algumas propriedades interessantes. Por exemplo, usando a relação da frequência adimensional introduzida na Eq. 3.27,

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \frac{2\pi R^2}{r_g \lambda_e}, & \text{e se } K &= \frac{r_g}{R}, \\ \Omega_3 &= \frac{2\pi R}{K \lambda_e}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

observa-se que o comprimento de onda longitudinal de uma viga reta é igual ao perímetro de uma circunferência de mesmo raio da dobra  $R$ , pois

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R}{K \lambda_e} &= \frac{1}{K}, \\ 2\pi R &= \lambda_e. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ainda, pode-se constatar que na Fig. 3, o número de onda  $\gamma_1$  se aproxima de  $\gamma_e$  longitudinal de uma viga reta, o que permite especular uma forte ligação dessa frequência com ondas longitudinais. De fato  $\Omega_3$  marca

o limiar para que uma onda deste tipo se propague através da curvatura. Esta discussão será retomada adiante com mais detalhes.

Lee, Mace e Brennan (2007) relatam que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  possuem valor aproximado de  $\Omega_1 \approx 1/3$  e  $\Omega_2 \approx 4$ . Ou ainda, de forma análoga à dedução na Eq. 3.35,  $\Omega_1$  ocorre quando  $\lambda_f \approx 2\pi R\sqrt{3}$  e  $\Omega_2$  quando  $\lambda_f \approx \pi R$ . De fato, esta regra valerá para  $\Omega_3 \gg 4$ , isto é  $R \gg 4r_g$ , caso contrário a frequência de anel deslocará as outras duas, como mostrado nas Figuras 4 e 5.

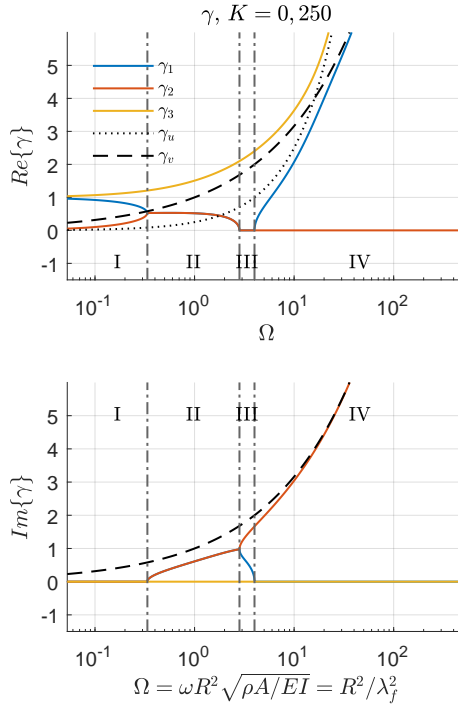


Figura 4 – Números de onda  $\gamma$  com  $K = 0,25$ , com *shift* de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  causado pelo deslocamento de  $\Omega_3$ .

Este comportamento é interessante pois não só diminui proporcionalmente os valores das frequências de corte, como em casos mais extremos suprime completamente algumas regiões (reg. III na Fig. 5).

Outra informação relevante refere-se ao cruzamento dos números de onda extensional e transversal, melhor observado com o aumento do valor de  $K$ . Entretanto, para dar prosseguimento a esta análise, faz-se

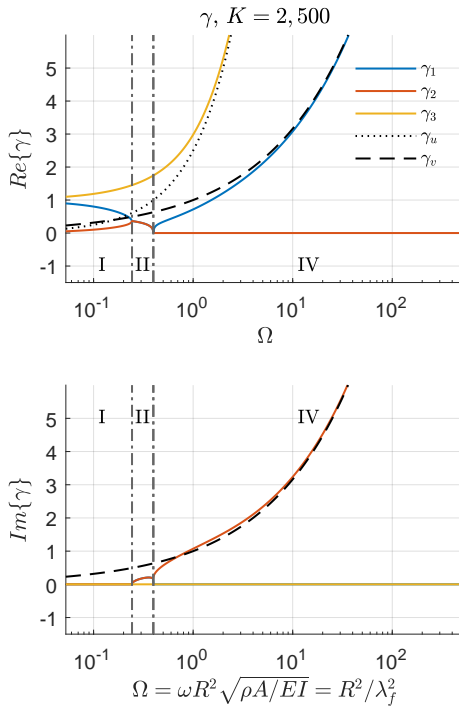


Figura 5 – Números de onda  $\gamma$  com  $K = 2, 5$ , com *shift* de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  causado pelo deslocamento de  $\Omega_3$ .

necessário introduzir os conceitos a seguir.

A frequência adimensional, além das formas mostradas na Eq. 3.27, também pode ser escrita como

$$\Omega = \frac{2\pi r_g}{\lambda_e K^2}. \tag{3.36}$$

Se há um alcance limitado para valores de  $\Omega$  e há um aumento de  $K$ , a escala das figuras também crescerá numa proporção  $K^2$ , como um *zoom* afastando-se e permitindo uma visão mais ampla do espectro *dimensional*. Pode-se escrever os números de onda de uma viga reta como

$$\begin{aligned} \gamma_u &= Rk_u, \quad \text{se } k_u = \frac{\omega}{c_e} \\ \gamma_u &= \frac{\omega R}{c_e} = \Omega K, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} \gamma_v &= Rk_v, \quad \text{se } k_v = \frac{\omega}{c_e r_g} \\ \gamma_v &= \frac{\sqrt{\omega}R}{c_e r_g} = \sqrt{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

indicando que, com esta parametrização, seus valores também são sensíveis a  $K$ , cuja transformação ocorre de forma diretamente proporcional para ambos. Também pode-se determinar a frequência quando  $\gamma_u = \gamma_v$  como  $\Omega = 1/K^2$ , *i.e.*, o quadrado da frequência de anel ( $\Omega_3^2$ ). Na Figura 6 utilizou-se um  $K$  arbitrário de 0,064 para observar o comportamento de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  no momento que  $\gamma_u$  e  $\gamma_v$  se cruzam

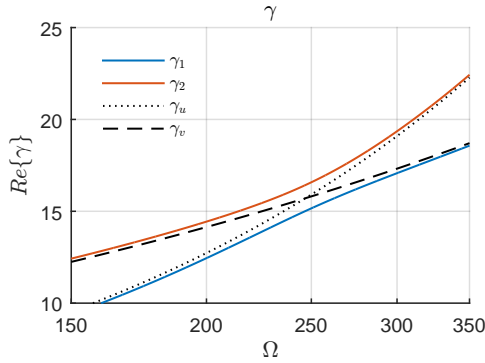


Figura 6 – Variação dos números de onda  $\gamma$  aumentando o valor de  $K$ , demonstrando o deslocamento das frequências  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

Observa-se que ocorre uma inversão na tendência dos dois números de onda, no qual  $\gamma_1$  passa a acompanhar  $\gamma_v$  enquanto  $\gamma_2$  segue  $\gamma_u$ . Como  $\gamma_3$  continua próximo de  $i\gamma_v$ , a partir de  $\Omega_3^2$  tem-se que  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  representam uma onda majoritariamente flexural, enquanto que  $\gamma_2$  assume o comportamento de uma onda extensional. Esta ligeira descontinuidade é curiosa pois levará a pontos de inversão nos valores dos coeficientes de transmissão e reflexão de energia vibratória. Estas ideias serão retomadas quando os resultados preliminares de fluxo de potência forem discutidos.

### 3.5 Análise do acoplamento entre os deslocamentos no plano da curva

Outra maneira de observar as particularidades das diferentes regiões do espectro causadas pela curvatura consiste em analisar o compor-

tamento do acoplamento entre ondas longitudinais e flexurais. A Figura 7 mostra as relações de deslocamento  $\beta_{1...3}^a$ , introduzido na Equação 3.10, para os três números de onda  $\gamma_{1...3}$ . Novamente, foi escolhido um valor

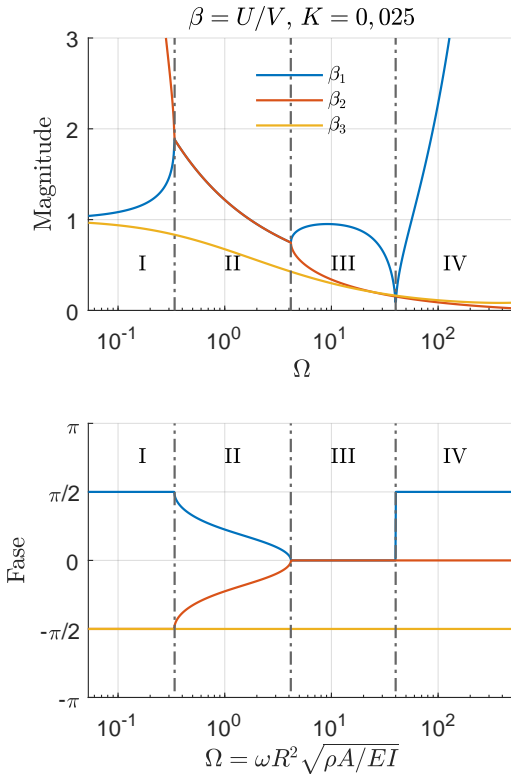


Figura 7 – Variação das relações de acoplamento  $\beta^a$  com a frequência adimensional  $\Omega$  para parâmetro de curvatura  $K = 0,025$ .

arbitrário de  $K = 0,025$  e o gráfico mostra magnitude e fase de  $\beta^a$  também com as 4 regiões bem definidas.

Percebe-se que na região I,  $\beta_3^a$  possui uma alta magnitude porém seu valor diminui até tornar-se igual a  $\beta_1^a$  em  $\Omega_1$ , valendo aproximadamente 1,89. Neste mesmo intervalo, a magnitude de  $\beta_2^a$  diminui moderadamente para  $\approx 0,83$ . Apesar do valor  $\beta_2^a = \tilde{u}/\tilde{w}$  ser  $\approx 0,83$  indicando que  $\tilde{w} > \tilde{u}$ , a relação entre as duas amplitudes ainda é muito próxima, sem grande relevância para a flexão. Conclui-se que o movimento é predominantemente longitudinal nesta região.

A região II mostra as razões de deslocamento variando entre 2 e 0, na qual ainda indica uma maior contribuição das ondas longitudinais para  $\Omega < \sqrt{3}$ , já que  $\beta_1^a = \beta_3^a \geq 1$  e  $\beta_2^a$  varia de  $\approx 0,83$  a  $\approx 0,58$ . Para  $\sqrt{3} \leq \Omega \leq \Omega_2$ , todos  $\beta_{1\dots 3}^a$  são menores que 1, logo espera-se que as maiores contribuições sejam de ondas flexurais.

Pode-se observar na região III que todos os  $\beta_{1\dots 3}^a$  estão entre 0 e 1, permitindo propor que esta região é mais propícia à propagação de ondas flexurais. Nota-se também que  $\beta_{2 \text{ e } 3}^a$  aproximam-se enquanto seus valores tendem a 0, cuja característica já foi observada anteriormente nos números de onda quando  $|\gamma_{2 \text{ e } 3}| \rightarrow \gamma_v$ , e quanto mais se aproximam do número de onda da viga reta, mais a razão de deslocamentos se aproxima de 0, sugerindo uma grande contribuição de  $\check{w}$  em relação a  $\check{u}$ . Similarmente, quando o número de onda  $\gamma_1 \rightarrow 0$  em  $\Omega = \Omega_3$ , então  $\beta_1^a \rightarrow 0$  (vide Fig. 3), confirmando que essa frequência de corte é a que mais potencializa ondas flexurais.

Finalmente, na região IV observa-se a transformação do comportamento de curvatura em viga reta, com  $\beta_{2 \text{ e } 3}^a$  aproximando-se mais de 0 e  $\beta_1^a$  aumentando com a frequência. Isto significa que o modo 1 estará priorizando ondas longitudinais enquanto os modos 2 e 3 estarão priorizando o comportamento flexural.

Analisando a fase dessas razões de deslocamento, percebe-se que quando o número de onda  $\gamma$  é real, há uma mudança na fase de  $\pm\pi/2$ , e quando este é imaginário, o ângulo de fase é nulo. O número de onda complexo marca uma transição contínua de avanço, ou atraso, como pode ser observado na região II.





## 4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PELO MÉTODO DE ONDAS PROPAGANTES

Para estudar os efeitos de curvatura sobre o fluxo de potência vibratória, decidiu-se utilizar o método das ondas em propagação (*wave propagation approach*). Este método analisa as ondas refletida e transmitida por uma descontinuidade ao ser excitada por uma onda incidente. Isto é interessante pois permite que os resultados sejam padronizados e possam ser comparados, mesmo com diferentes configurações geométricas e/ou propriedades mecânicas. Este capítulo detalha a abordagem e estabelece uma base para as soluções numérica e analítica propostas nos capítulos seguintes.

Considere uma onda arbitrária propagando-se em uma viga semi-infinita, podendo ser longitudinal, torsional ou flexural (Figura 8). Quando esta onda incidente (sobrescrito  $I$ ) encontra uma curvatura (descontinuidade), parte dela é refletida (sobrescrito  $R$ ) e parte é transmitida, *i.e.*, continua propagando-se após a curva (sobrescrito  $T$ ). O método das ondas propagantes calcula as constantes de amplitude para cada tipo de onda. Os efeitos de amortecimento serão desprezados para manter a simplicidade, uma vez que o foco está na análise exclusivamente das curvaturas.

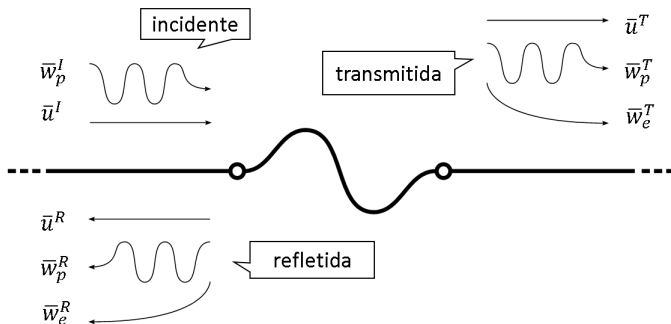


Figura 8 – Diagrama de uma configuração típica do método da onda propagante.

Para obter as amplitudes das ondas, a continuidade na interface entre a parte reta e curva deve ser garantida, *i.e.*, todas as forças e deslocamentos devem ser iguais em suas extremidades. Portanto, são necessárias

as formulações de ambas as partes.

Primeiramente, sabe-se que uma onda longitudinal de uma viga reta possui dois números de onda (um para cada direção de propagação). Entretanto, para uma única direção, pode-se escrever

$$u(x, t) = \bar{u}e^{-j(k_u x + \omega t)}, \quad (4.1)$$

onde  $\bar{u}$  representa a amplitude da onda,  $k_u$  o número de onda longitudinal e  $x$  a posição relativa sobre a linha central da viga.

De maneira similar, a onda torcional (omitida na Figura 8) pode ser especificada da seguinte forma

$$\psi_x(x, t) = \bar{\psi}_x e^{-j(k_\psi x + \omega t)}. \quad (4.2)$$

A onda flexural de uma viga reta possui quatro números de onda (dois pares de complexos conjugados), porém para uma única direção de propagação, a solução pode ser escrita como

$$w(x, t) = \bar{w}_p e^{-j(k_w x + \omega t)} + \bar{w}_e e^{-(k_w x + j\omega t)}, \quad (4.3)$$

onde  $\bar{w}_p$  é a amplitude da parte propagante da onda e  $\bar{w}_e$  representa a parte evanescente. De forma similar, o movimento flexural num plano perpendicular ao anterior terá a mesma forma, considerando uma viga simétrica, com a seção transversal centralizada no eixo de referência.

Relembrando os números de onda para uma viga reta,

$$k_u = \omega \sqrt{\rho/E}, \quad (4.4)$$

$$k_w = \sqrt{\omega^2 \rho A / EI_y}, \quad (4.5)$$

$$k_v = \sqrt{\omega^2 \rho A / EI_z}, \quad (4.6)$$

$$k_\psi = \omega \sqrt{\rho/G}, \quad (4.7)$$

então, para a configuração mostrada na Figura 8, pode-se escrever as seguintes equações para uma vibração dentro-do-plano de curvatura

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{entrada} = \bar{u}^I e^{-j(k_u x + \omega t)} + \bar{u}^R e^{+j(k_u x - \omega t)}, \\ w_{entrada} = \bar{w}_p^I e^{-j(k_w x + \omega t)} + \bar{w}_p^R e^{+j(k_w x - \omega t)} + \bar{w}_e^R e^{(k_w x - j\omega t)}, \\ u_{saída} = \bar{u}^T e^{-j(k_u x + \omega t)}, \\ w_{saída} = \bar{w}_p^T e^{-j(k_w x + \omega t)} + \bar{w}_e^T e^{-(k_w x + j\omega t)}. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Dado que  $\bar{u}^I$  e  $\bar{w}_p^I$  são conhecidos, precisa-se determinar seis amplitudes para esta configuração. A terminologia “dentro-do-plano” adotada

para uma viga reta neste contexto diz respeito somente à curva à qual será acoplada, como forma de padronizar a nomenclatura para as diferentes formas de vibração.

De forma similar, para vibrações “fora-do-plano”, pode-se escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{entrada} = \bar{v}_p^I e^{-j(k_v x + \omega t)} + \bar{v}_p^R e^{+j(k_v x - \omega t)} + \bar{v}_e^R e^{(k_v x - j\omega t)}, \\ \psi_{xentrada} = \bar{\psi}_x^I e^{-j(k_\psi x + \omega t)} + \bar{\psi}_x^R e^{+j(k_\psi x - \omega t)}, \\ v_{saida} = \bar{v}_p^T e^{-j(k_v x + \omega t)} + \bar{v}_e^T e^{-(k_v x + j\omega t)}, \\ \psi_{xsaida} = \bar{\psi}_x^T e^{-j(k_\psi x + \omega t)}, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

que também fornece seis incógnitas a serem determinadas nesta configuração. Walsh e White (2000) usaram as amplitudes de ondas em propagação para obter as potências longitudinais e flexurais “dentro-do-plano”, e flexurais e torcionais “fora-do-plano” como

$$\left\{ \begin{array}{l} W_u = \frac{1}{2} EA \omega k_u \bar{u}^2, \\ W_w = EI_y \omega k_w^3 \bar{w}^2, \\ W_v = EI_z \omega k_v^3 \bar{v}^2, \\ W_\psi = \frac{1}{2} GJ \omega k_\psi \bar{\psi}_x^2, \end{array} \right. \quad (4.10)$$

lembrando que  $J$  é o momento de inércia torcional, e se a viga for simétrica (centróide alinhado com a linha central), é dado como  $I_z + I_y$ .

O conceito de coeficiente de potência neste trabalho é usado para padronizar os resultados, como uma razão entre a potência transmitida (ou refletida) e a potência incidente. Por exemplo,  $W_u^T/W^I$  seria o coeficiente de transmissão longitudinal, com  $W^I = W_u^I + W_w^I + W_v^I + W_\psi^I$ .

A aplicação deste método será detalhada adiante, quando explicadas as abordagens analítica e numérica, adaptadas para resolvê-lo.

A solução analítica do método proposto consiste em calcular todas as amplitudes de ondas desconhecidas usando formulações de ambas partes reta e curva, relacionando suas equações de deslocamento, forças e momentos. A configuração utilizada neste trabalho utiliza a montagem de um sistema de equações que conecta as forças e deslocamentos em ambas interfaces entre as partes retas e a parte curva.

Portanto, considere as Equações 4.8 e 4.9 para vigas retas, e as Equações 3.11 e 3.25 para vigas curvas. Um rápido sumário das equações é apresentado a seguir. Para uma parte reta, antes da interseção com a curva

(entrada)

$$\begin{aligned}
 u_{entrada}^r &= \bar{u}^I e^{-j(k_u x + \omega t)} + \bar{u}^R e^{+j(k_u x - \omega t)}, \\
 w_{entrada}^r &= \bar{w}_p^I e^{-j(k_w x + \omega t)} + \bar{w}_p^R e^{+j(k_w x - \omega t)} + \bar{w}_e^R e^{(k_w x - j\omega t)}, \\
 v_{entrada}^r &= \bar{v}_p^I e^{-j(k_v x + \omega t)} + \bar{v}_p^R e^{+j(k_v x - \omega t)} + \bar{v}_e^R e^{(k_v x - j\omega t)}, \\
 \psi_{x_{entrada}} &= \bar{\psi}_x^I e^{-j(k_\psi x + \omega t)} + \bar{\psi}_x^R e^{+j(k_\psi x - \omega t)},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

nas quais o sobrescrito  $(.)^I$  representa onda incidente e, portanto, são valores conhecidos. Para parte curva da viga tem-se

$$\begin{aligned}
 u^c &= \sum_{i=1}^6 \beta_i^a \check{w}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}, \\
 w^c &= \sum_{i=1}^6 \check{w}_i e^{-j(k_i^a s + \omega t)}, \\
 v^c &= \sum_{i=1}^6 \beta_i^b \check{\psi}_{s_i} e^{-j(k_i^b s + \omega t)}, \\
 \psi_s &= \sum_{i=1}^6 \check{\psi}_{s_i} e^{-j(k_i^b s + \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

e, para a parte reta após da curva (saída):

$$\begin{aligned}
 u_{saída}^r &= \bar{u}^T e^{-j(k_u x + \omega t)}, \\
 w_{saída}^r &= \bar{w}_p^T e^{-j(k_w x + \omega t)} + \bar{w}_e^T e^{-(k_w x + j\omega t)}, \\
 v_{saída}^r &= \bar{v}_p^T e^{-j(k_v x + \omega t)} + \bar{v}_e^T e^{-(k_v x + j\omega t)}, \\
 \psi_{x_{saída}} &= \bar{\psi}_x^T e^{-j(k_\psi x + \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

As forças e momentos da parte reta, segundo a teoria de Love, podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
 \psi_y^r &= -\frac{\partial v^r}{\partial x}, & \psi_z^r &= -\frac{\partial w^r}{\partial x}, \\
 N^r &= EA \frac{\partial u^r}{\partial x}, & Q_y^r &= EI_y \frac{\partial^2 \psi_y^r}{\partial x^2}, & Q_z^r &= EI_z \frac{\partial^2 \psi_z^r}{\partial x^2}, \\
 T_x &= GJ \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & M_y^r &= EI_y \frac{\partial \psi_y^r}{\partial x}, & M_z^r &= EI_z \frac{\partial \psi_z^r}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde o sobrescrito  $(.)^r$  significa a parte reta e pode ser substituído por ambas soluções 4.11 e 4.13. As forças e momentos da parte curva, também

segundo Love, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \psi_y^c &= -\frac{\partial v^c}{\partial s}, & \psi_z^c &= \frac{u^c}{R} - \frac{\partial w^c}{\partial s}, \\ N^c &= EA \left[ \frac{\partial u^c}{\partial s} + \frac{w^c}{R} \right], & Q_y^c &= \frac{\partial M_y^c}{\partial s} - \frac{T_x}{R}, & Q_z^c &= EI_z \frac{\partial^2 \psi_z^c}{\partial s^2}, \\ T_s &= GJ \left[ \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\psi_y^c}{R} \right], & M_y^c &= -EI_y \left[ \frac{\psi_s}{R} - \frac{\partial \psi_y^c}{\partial s} \right], & M_z^c &= EI_z \frac{\partial \psi_z^c}{\partial s}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pode-se, então, relacionar estas informações nos pontos de união do trecho reto com a parte curva da seguinte forma

$$\begin{aligned} u^r &= u^c, & w^r &= w^c, & v^r &= v^c, \\ \psi_x &= \psi_s, & \psi_{yx} &= \psi_y^c, & \psi_{zx} &= \psi_z^c, \\ N^r &= N^c, & Q_y^r &= Q_y^c, & Q_z^r &= Q_z^c, \\ T_x &= T_s, & M_y^r &= M_y^c, & M_z^r &= M_z^c. \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde novamente o sobrescrito  $(.)^r$  pode ser substituído por ambas  $(.)^r_{entrada}$  e  $(.)^r_{saída}$ . Assumem-se arbitrariamente os valores de  $x = 0$  e  $s = 0$  na interseção de entrada, e  $x = 0$  e  $s = L$  na saída, sendo  $L$  o comprimento da curvatura.

Substituindo as Equações 4.11, 4.12 e 4.13 em nas suas respectivas relações cinemáticas, 4.14 e 4.15, e substituindo nas relações das interfaces 4.16, obtém-se um sistema de 24 equações com 24 incógnitas:

$$\begin{cases} \bar{u}^R, \bar{w}_p^R, \bar{w}_e^R, \bar{v}_p^R, \bar{v}_e^R, \bar{\psi}_x^R, \\ \check{w}_i \text{ e } \check{\psi}_{si}, \text{ com } i = 1, \dots, 6, \\ \bar{u}^T, \bar{w}_p^T, \bar{w}_e^T, \bar{v}_p^T, \bar{v}_e^T, \bar{\psi}_x^T. \end{cases} \quad (4.17)$$

Finalmente, destas 24 amplitudes de onda calculadas utilizam-se as oito amplitudes seguintes na Equação 4.10 para obter as potências desejadas:

$$\begin{cases} \bar{u}^R, \bar{w}_p^R, \bar{v}_p^R, \bar{\psi}_x^R, \\ \bar{u}^T, \bar{w}_p^T, \bar{v}_p^T, \bar{\psi}_x^T. \end{cases} \quad (4.18)$$

## 4.1 Resultados Analíticos

Com a formulação anterior, podem-se gerar resultados na forma de coeficientes de potência, como será mostrado a seguir. Calculou-se,

inicialmente, uma curva simples com dimensões arbitrárias de  $\Theta_y = 90^\circ$  e  $R = 30 \text{ mm}$  (Fig. 9). O material da viga é idêntico ao de um tubo de descarga típico, com  $E = 195 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ , e as dimensões de seção transversal sendo diâmetro de 2,65 mm e espessura de 0,52 mm.

Em decorrência do elevado número de variáveis do sistema de equações e da complexidade das substituições envolvidas, decidiu-se utilizar os softwares Maxima e MatLab para auxiliar nos cálculos.

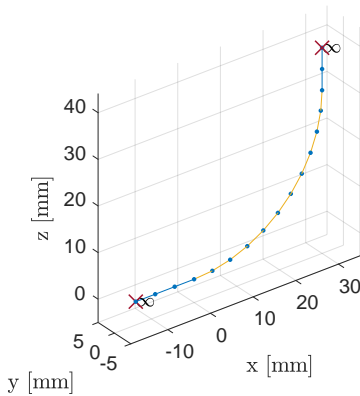


Figura 9 – Geometria para cálculo dos coeficientes de potência. Curva simples com  $R = 30 \text{ mm}$  e  $\Theta_y = 90^\circ$ . Propriedades do material iguais às de um tubo de descarga típico.

Os resultados para esta geometria arbitrária são mostrados na Figura 10. Tem-se os coeficientes de transmissão e reflexão separados em tipo de onda para cada tipo de excitação. Um comportamento interessante dos coeficientes de potência é observado nessas figuras. Os resultados para excitações dentro e fora do plano de curvatura são muito similares devido à semelhança dos números de onda.

O desenvolvimento da ferramenta numérica em MatLab é explicado a seguir, juntamente com a comparação da sua performance em relação à abordagem analítica, mostrada neste capítulo.

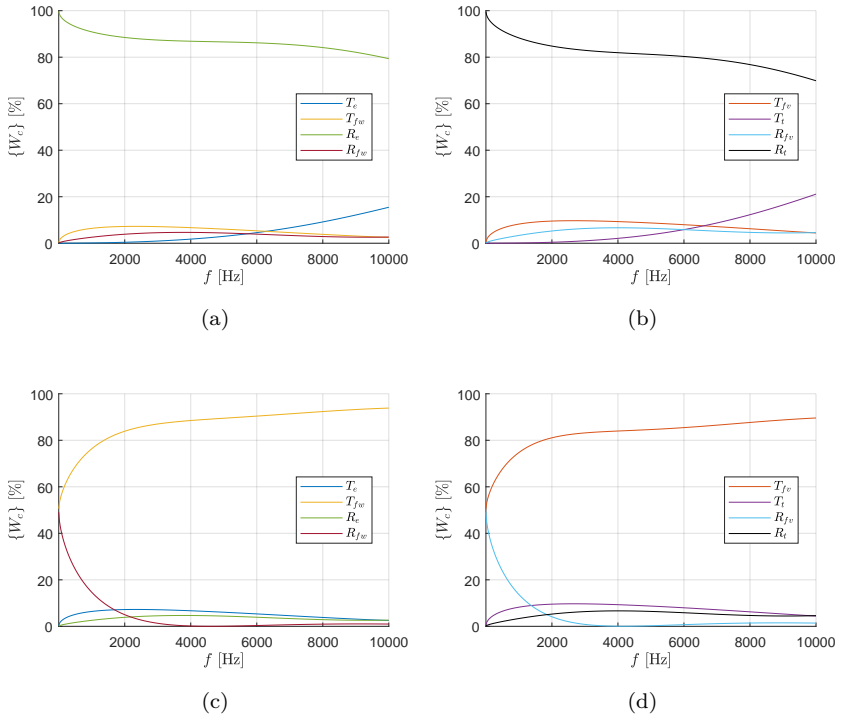


Figura 10 – Coeficientes de potência para a geometria mostrada na Figura 9. Subscrito (a) para uma onda incidente longitudinal, (b) para uma onda torcional, (c) para flexão no plano da curva e (d), flexão perpendicular ao plano da curva. Resultados na forma de coeficientes de potência separados, de transmissão e reflexão, para cada guia de onda.





## 5 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A ferramenta descrita neste capítulo utiliza o Método de Elementos Finitos (MEF) para analisar o problema de propagação de ondas em vigas curvas. Inicia com a etapa de construção da geometria, que apesar de ser um anexo do algoritmo da solução, apresenta-se de extrema importância para facilitar/automatizar as análises. Outro destaque é preocupação com a modularidade empregada neste trabalho, visando realçar a versatilidade da ferramenta.

O código foi desenvolvido em MatLab denominado NuSim (*Numerical Simulation*) com o propósito de simular curvaturas e otimizá-las. Optou-se por não utilizar softwares comerciais por sua dificuldade de personalização, às vezes resultando na dificuldade da escrita de elementos específicos, como a condição de contorno de viga semi-infinita necessária à solução pelo método de propagação de onda.

Portanto, este capítulo aborda o desenvolvimento da ferramenta numérica, descreve detalhadamente os itens que possibilitaram o método de ondas em propagação, e apresenta as matrizes dos elementos implementados.

O código-base está dividido em três partes principais:

- configuração da malha;
- Solucionadores (*solvers*);
- estruturas-base.

Cada uma dessas etapas possui propósitos bem definidos e independentes, visando a modularidade da ferramenta. Um esquema dos passos necessários à utilização do algoritmo está presente na Fig. 11.

### 5.1 Configuração da Malha

Essa seção descreve a criação, configuração e edição da malha de elementos finitos. Portanto, tem-se disponível as seguintes classes:

- classe-mãe (*MeshConfig*);
- editor de curvaturas (*GeometryEditor*);

- deslocamento;
- força.

A classe-mãe foi desenvolvida visando conter todas as informações relevantes para a montagem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. As demais classes são auxiliares e foram criadas para uso em conjunto com a classe-mãe.

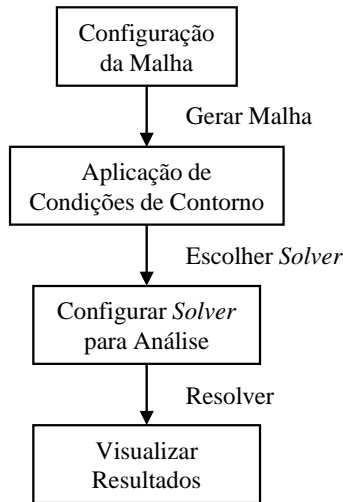


Figura 11 – Fluxograma exemplificando o processo de simulação e análise utilizando a ferramenta *NuSim*.

A classe *GeometryEditor* possui uma série de funções que auxiliam a importação, construção e edição de geometrias. Decidiu-se separar da classe-mãe para não sobrecarregá-la e facilitar a depuração do código e reservar pequenas funções às referências exclusivas da geometria.

### 5.1.1 Classe MeshConfig

Esta classe contém as informações relevantes para montagem de matrizes (massa, rigidez e amortecimento) e aplicação das condições de contorno. Portanto, contém o número de graus de liberdade do problema, o sistema de coordenadas inicial para orientação da geometria, a referência para geometria de curvaturas, a matriz de coordenadas dos nós, as matrizes de conectividade dos elementos, e *arrays* contendo informação de deslocamentos e forças prescritos.

Além dessas informações, essa classe também conta com funções para facilitar o seu uso: uma função para construir a malha a partir da referência de geometria, outra para atualizar esta malha caso a referência tenha sido alterada; uma função que retorna a matriz de coordenadas em forma de *array* (que facilita outras aplicações em Matlab); uma função que seleciona e retorna o nó baseado em suas coordenadas; uma função que retorna o número máximo de graus de liberdade do sistema; uma função para carregar e acoplar um super-elemento à geometria, e finalmente uma para plotar a geometria.

Destas funções, duas merecem destaque especial e serão melhor explicadas nesta seção: a de atualização da malha baseada na referência de geometria, e a que importa e acopla um super-elemento externo. A função que constrói a malha apenas reinicia as matrizes de coordenadas e conectividades aos seus estados iniciais antes de chamar a função de atualização; por isso a importância da função de atualização ser maior que a de criação da malha.

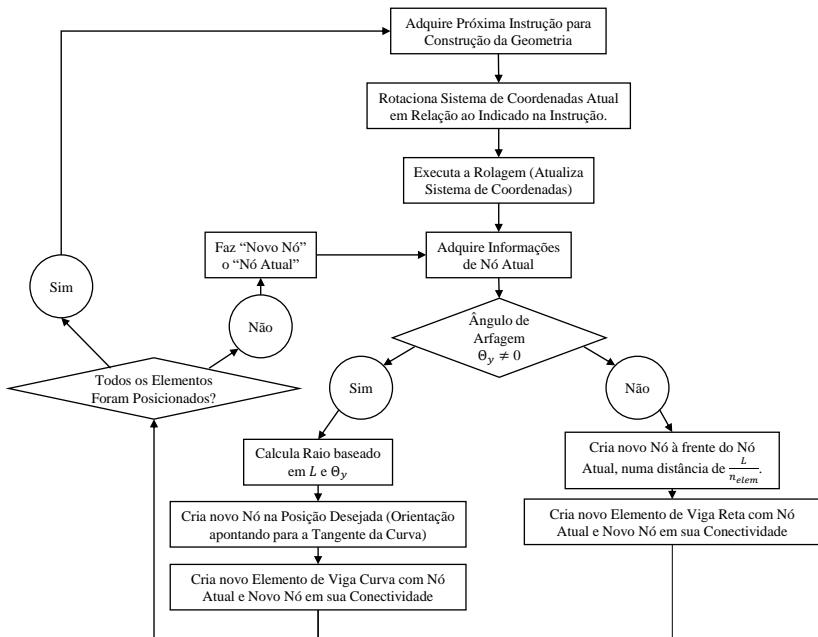


Figura 12 – Fluxograma exemplificando o processo de construção/atualização da malha desenvolvido para o *NuSim*.

Basicamente, a função de atualização da malha executa cada uma

das instruções contidas na referência da geometria e cria nós e elementos de forma automática, como pode ser observado no fluxograma mostrado na Figura 12.

No ciclo principal o algoritmo adquire as informações de cada seção de geometria, aplica a rotação no sistema de coordenadas atual e executa a “rolagem” antes de iniciar o ciclo de criação dos elementos. Ao ingressar neste ciclo interno, o algoritmo adquire as informações do nó atual e as utiliza para posicionar o próximo nó, repetindo até que todos os elementos da seção tenham sido criados. Maiores detalhes sobre como essas “instruções de geometria” foram definidas estão disponíveis na Seção 5.1.2.

A função de importação e acoplamento do super-elemento é uma rotina procedural, *i.e.*, simples passo-a-passo. Inicialmente, importam-se as matrizes de massa e rigidez (e amortecimento, se disponível) externas no formato Haswell-Boeing. A função *parser* deste formato foi apresentada por John Burkardt, modificada em 20 de janeiro de 2014 e distribuída sob a licença GNU LGPL.

Na sequência, importa-se a matriz de mapeamento dos graus de liberdade, que indica a forma como as matrizes importadas devem ser montadas. Após, cria-se uma matriz de interface, que indica quais graus de liberdade deste super-elemento devem ser acoplados aos da geometria gerada no MatLab.

Essa matriz de interface é, então, usada para criar uma nova matriz de mapeamento, desta vez organizando quais graus de liberdade externos irão assumir índices locais. Os graus de liberdade extras serão contabilizados e seus índices condensados e posicionados logo após aos locais para reduzir custo computacional.

O super-elemento é, finalmente, criado com as informações desta nova matriz de mapeamento e das matrizes de massa, rigidez e amortecimento importadas. Um passo opcional é a aplicação de condições de contorno especiais ainda dentro desta função, como prescrição de deslocamento em graus de liberdade não acoplados com os do MatLab.

### 5.1.2 Padronização das Curvaturas

Esta seção dedica-se ao procedimento adotado para a padronização das curvaturas utilizado nas simulações. A concepção deste algoritmo foi extremamente importante por padronizar as geometrias segundo uma parametrização simples e robusta, similar à programação por Comando Numérico Computadorizado (CNC).

Sabe-se que construir curvaturas num único plano é um tanto

trivial (um único ângulo e único raio são suficientes para sua definição). Porém, para aplicações em três dimensões, torna-se mais complexo. Pode-se trabalhar com ângulos de Euler, ou rotação de Rodrigues (para mais informações, recomenda-se a leitura de Arfken e Weber (2005) e Rodrigues (1840)), porém todas estas abordagens necessitam de três raios (um para cada plano) e três ângulos independentes.

Para simplificar esta parametrização, buscou-se inspiração na aviação, com conceitos de “rolamento” (*roll*) e “arfagem” (*pitch*), como mostrado na Figura 13. Esta escolha particular de ângulos permite o encadeamento de partes curvas e retas a serem construídas, usando apenas três parâmetros conhecidos por seção: comprimento  $L$ , ângulo de rolamento  $\Theta_x$  e o ângulo de arfagem  $\Theta_y$ . O raio da curva  $R$  é obtido como uma função de  $L$  e  $\Theta_y$ .

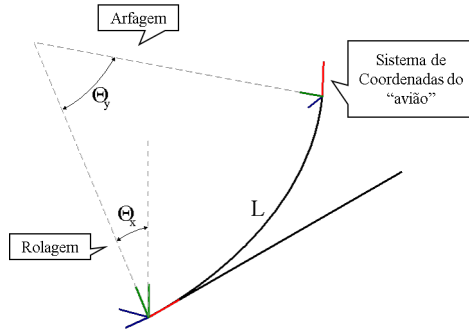


Figura 13 – Exemplo de parametrização da geometria utilizando referência da aeronáutica

O processo da construção da geometria foi dividido em duas etapas. A primeira lê a informação do ângulo de rolamento  $\Theta_x$  e rotaciona o sistema de coordenadas sobre seu eixo longitudinal  $x$ , estabelecendo um plano para a curvatura. A segunda etapa constrói a curva propriamente dita, ao interpretar ambos ângulo de arfagem  $\Theta_y$  e comprimento  $L$  neste sistema de coordenadas local. Finalmente, o sistema de coordenadas é deslocado para a extremidade final da curva, e tem seu eixo  $x$  alinhado na mesma direção  $s$  (da linha central) neste ponto. Esta atualização do sistema de coordenadas permite que o algoritmo repita as etapas até que todas as instruções tenham sido lidas.

Por exemplo, considere a instrução  $L = 10$  mm,  $\theta_x = 30^\circ$  e  $\theta_y = 90^\circ$ . Primeiro, o sistema de coordenadas se inclina  $30^\circ$  sobre o próprio eixo  $x$  (primeira etapa), descreve uma subida na qual seu pivô está  $\approx 6,73$  mm ( $R = L/\Theta_y$ ) distante da origem pelo eixo  $z$ , percorrendo um

semicírculo entre sua posição atual e final de  $90^\circ$ , percorrendo assim um total de 10 mm.

Para automatizar este conjunto de instruções, o algoritmo de construção de geometria necessita de um sistema de coordenadas na forma de um tensor, que possui três colunas, cada uma representando uma direção relativa à base Cartesiana:

$$CS = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde os subscritos  $i$ ,  $j$  e  $k$  representam suas coordenadas globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Por exemplo, o sistema de coordenadas Cartesiano amplamente conhecido ( $x = 1i + 0j + 0k$ ,  $y = j$  e  $z = k$ ) pode ser escrito como uma matriz identidade.

Dado que cada conjunto de instruções a serem executadas depende do sistema de coordenadas atual (local), operações com quatérnios podem ser utilizadas para facilitar a implementação. Quatérnio é um vetor de quatro números, idealizado por Hamilton (1843), escrito como

$$q(\phi, a) = [q_0, q_1, q_2, q_3] = \left[ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \{a_i, a_j, a_k\} \right], \quad (5.2)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de rotação desejado (em *radianos*) sobre o objeto arbitrário, e  $\{a_i, a_j, a_k\}$  é o vetor que especifica a direção sobre o qual a rotação será executada. A função de rotação pode ser definida na forma

$$b' = \begin{bmatrix} b'_i \\ b'_j \\ b'_k \end{bmatrix} = RT(q(\phi, a), b) = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde  $b'$  é o vetor rotacionado,  $RT$  é a função de rotação,  $q$  é o quatérnio, e  $b$  é o vetor original (antes da rotação). Portanto, como necessita-se apenas rotacionar sobre os eixos  $x$  (rolagem) e  $y$  (arfagem), o “construtor de geometria” concebido aqui depende apenas de  $RT(q(\Theta_x, \bar{x}), CS)$  e  $RT(q(\Theta_y, \bar{y}), CS)$ , sendo  $\bar{x} = \{x_i, x_j, x_k\}$  e  $\bar{y} = \{y_i, y_j, y_k\}$  para calcular

novos sistemas de coordenadas:

$$CS' = \begin{bmatrix} x'_i & y'_i & z'_i \\ x'_j & y'_j & z'_j \\ x'_k & y'_k & z'_k \end{bmatrix} = RT(q(\phi, a), CS) = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Uma vez apresentada a forma de descrição da curvatura, a próxima seção apresenta os solucionadores (*solvers*) disponíveis para esta ferramenta.

## 5.2 Solucionadores

Atualmente, existem três solucionadores disponíveis na ferramenta, sendo um para análise harmônica, um segundo que utiliza o método *wave approach* e um para casos transientes.

O solucionador de análise harmônica inicia com a montagem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento fixas (independentes da frequência) com as informações configuradas na classe mãe (*MeshConfig*).

O problema configurado é, então, processado, *i.e.*, resolve o problema  $([K] - \omega^2[M])\{u\} = \{F\}$  a cada passo de frequência. Portanto, nesta etapa também se aplicam as condições de contorno, deslocamentos e forças prescritas desde que sejam funções da frequência. Ao final da execução desta etapa, obtêm-se os deslocamentos e rotações globais  $\{u\}$  para todas as frequências desejadas.

O solucionador do método *wave approach* realiza os mesmos procedimentos da análise harmônica. A diferença está numa função desenvolvida especialmente para representar os deslocamentos em coeficientes de potência. Esta obtém automaticamente as amplitudes de onda relevantes (Eq. 4.18) segundo as soluções do movimento para uma viga reta (Eqs. 4.12 e 4.13). O requisito para esta função operar corretamente é a utilização de elementos de viga reta semi-infinita como condição de contorno em ambas extremidades da geometria, caso contrário as soluções do movimento apresentadas não podem ser empregadas.

Já o solucionador para análise transiente resolve o problema pelo método direto. Portanto, é necessário um incremento de tempo  $\Delta t$  adequado quando utilizar este solucionador. Decidiu-se incluir este solucionador na ferramenta para analisar visualmente o que ocorre em determinadas curvaturas para uma onda em propagação. Entretanto, lembra-se que os

elementos de viga semi-infinita são dependentes da frequência e seu uso requer a entrada de um valor de frequência específico para calcular suas matrizes de massa e rigidez. Portanto, não são utilizados em análises transiente, e apenas para condições de contorno típicas estão disponíveis.

### 5.3 Estruturas-Base

Esta seção faz uma breve revisão das matrizes de massa e rigidez dos elementos utilizados na ferramenta. Também explica como calcular o elemento de viga reta semi-infinita, como aplicar uma força que simule uma onda incidente (vinda do infinito), e expõe como adquirir as amplitudes de onda para o cálculo dos coeficientes de potência, ou seja, a base para aplicação do *wave approach* em elementos finitos.

#### 5.3.1 Vigas Retas

Elementos comuns de viga reta usando a teoria de Euler-Bernoulli são frequentemente utilizados para montar as matrizes de massa e rigidez globais. Estes elementos de dois nós, seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações), podem ser determinados usando formulações facilmente encontradas na literatura. Recomendam-se os trabalhos de Zienkiewicz e Taylor (2005) e Lopez (2013), de onde as matrizes elementares  $K_{el}$  e  $M_{el}$  foram obtidas, na forma:

$$[K_{el}] = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ sym. & [K_3] \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

sendo  $[K_1]$ ,  $[K_2]$  e  $[K_3]$  dadas por:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2\xi} & & & & & \\ & \frac{3EI_z}{2\xi^3} & & & & \\ & & \frac{3EI_y}{2\xi^3} & & & \\ & & & \frac{GJ}{2\xi} & & \\ sym. & & & & \frac{2EI_y}{\xi} & \\ & & & & & \frac{2EI_z}{\xi} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$



$$[K_2] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{2\xi} & & & 0 & & 0 \\ & -\frac{3EI_z}{2\xi^3} & & & & \frac{3EI_z}{2\xi^2} \\ & & -\frac{3EI_y}{2\xi^3} & & -\frac{3EI_y}{2\xi^2} & \\ 0 & & & -\frac{GJ}{2\xi} & & 0 \\ & & \frac{3EI_y}{2\xi^2} & & \frac{EI_y}{\xi} & \\ 0 & -\frac{3EI_z}{2\xi^2} & & 0 & & \frac{EI_z}{\xi} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2\xi} & & & 0 & & 0 \\ & \frac{3EI_z}{2\xi^3} & & & & -\frac{3EI_z}{2\xi^2} \\ & & \frac{3EI_y}{2\xi^3} & & \frac{3EI_y}{2\xi^2} & \\ & & & \frac{GJ}{2\xi} & & 0 \\ & & & & \frac{2EI_y}{\xi} & \\ & & & & & \frac{2EI_z}{\xi} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

*sym.*

e a matriz de massa como:

$$[M_{el}] = \begin{bmatrix} [M_1] & [M_2] \\ & [M_3] \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

sendo,

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 70 & & & 0 & & 0 \\ & 78 & & & & 22\xi \\ & & 78 & & -22\xi & \\ & & & \frac{70J}{A} & & 0 \\ & & & & 8\xi^2 & \\ & & & & & 8\xi^2 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

*sym.*

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 35 & & & 0 & & 0 \\ & 27 & & & & -13\xi \\ & & 27 & & 13\xi & \\ 0 & & & \frac{-35J}{A} & & 0 \\ 0 & & -13\xi & & -6\xi^2 & \\ 0 & 13\xi & & & & -6\xi^2 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$[M_3] = \begin{bmatrix} 70 & & & 0 & & 0 \\ & 78 & & & & -22\xi \\ & & 78 & & 22\xi & \\ & & & \frac{70J}{A} & & 0 \\ & & & & 8\xi^2 & \\ & & & & & 8\xi^2 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

*sym.*

nas quais  $\xi = L_{el}/2$ , onde  $L_{el}$  é o comprimento do elemento, definido pela distância entre dois nós.

### 5.3.2 Vigas Curvas

O elemento de viga curva também foi obtido segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Este elemento possui a curvatura definida em apenas um plano, cuja formulação depende apenas de um ângulo  $\Theta_y$  e um raio  $R$ , como pode ser visto nas Figuras 14 e 15. Desta forma, os movimentos dentro e fora do plano podem ser completamente independentes, uma vez que seu acoplamento é fraco, podendo ser desprezado. Portanto, foram utilizadas as equações apresentadas por Davis, Henshell e Warburton (1972) para movimento dentro do plano, e Wang, Nettleton e Keita (1980) para movimento fora do plano na concepção deste elemento curvo.

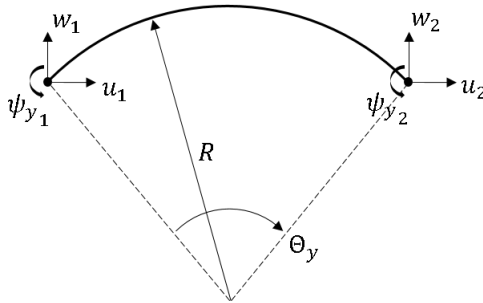


Figura 14 – Esquema de elemento de viga curva para vibrações alinhadas ao plano de curvatura.

Segundo Davis, Henshell e Warburton (1972), para graus de liberdade  $\{u\}^T = \{u_1, w_1, \psi_{y1}, u_2, w_2, \psi_{y2}\}$ , define-se a matriz de rigidez dentro do plano de curvatura como:

$$[K_{el}] = [Y][X]^{-1}, \quad (5.13)$$

sendo a matriz  $[X]$  definida por:

$$[X] = \begin{bmatrix} [X_1] & [X_2] \\ [X_3] & [X_4] \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$[X_1] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \phi \cos(\phi) - \sin(\phi) & 1 \\ \sin(\phi) & \phi \sin(\phi) + \cos(\phi) & 0 \\ -1/R & -\phi/R & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$[X_2] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi - C_4 \sin(\phi) \cos(\phi) & C_4 \sin(\phi)^2 \\ 1 & C_4 \cos(\phi)^2 & \phi - C_4 \sin(\phi) \cos(\phi) \\ 0 & -C_5 \sin(\phi)/R & -C_5 \cos(\phi)/R \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$[X_3] = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) - \phi \cos(\phi) & 1 \\ -\sin(\phi) & \phi \sin(\phi) + \cos(\phi) & 0 \\ -1/R & \phi/R & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$[X_4] = \begin{bmatrix} 0 & \phi + C_4 \sin(\phi) \cos(\phi) & C_4 \sin(\phi)^2 \\ 1 & C_4 \cos(\phi)^2 & -\phi + C_4 \sin(\phi) \cos(\phi) \\ 0 & C_5 \sin(\phi)/R & -C_5 \cos(\phi)/R \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

e a matriz  $[Y]$  dada como:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -C_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 \\ 0 & -C_1 & 0 & 0 & -C_6 \cos(\phi) & C_6 \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_7 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & C_6 \cos(\phi) & C_6 \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

onde as constantes introduzidas acima são dadas por:

$$\phi = \frac{\Theta_y}{2}, \quad \begin{cases} C_1 = \frac{EI_y}{R^2}, \\ C_3 = \frac{EA}{R}, \\ C_4 = \frac{C_1 - RC_3}{C_1 + RC_3}, \\ C_5 = 1 - C_4, \\ C_6 = C_1 C_5, \\ C_7 = C_3(1 + C_4). \end{cases} \quad (5.21)$$

A matriz de massa é dada por:

$$[M_{el}] = \rho AR ([X]^{-1})^T H [X]^{-1}, \quad (5.22)$$

sendo  $[X]$  a mesma da Eq. 5.14 anterior, e  $[H]$  é definida por:

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_1] & [H_2] \\ sym. & [H_3] \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 2\phi & 0 & 2\sin(\phi) \\ 0 & 2\frac{\phi^3+3\phi}{3} & 0 \\ 2\sin(\phi) & 0 & 2\phi \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\sin(\phi) - 2\phi\cos(\phi) \\ 4\sin(\phi) - 2\phi\cos(\phi) & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & -C_4\frac{\sin(2\phi)-2\phi}{2} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$[H_3] = \begin{bmatrix} 2\phi & C_4\frac{\sin(2\phi)-2\phi}{2} & 0 \\ C_4\frac{\sin(2\phi)-2\phi}{2} & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} D_1 = 2(\sin(\phi)C_4 + (3 - \phi^2)\sin(\phi) - 3\phi\cos(\phi)), \\ D_2 = (\frac{\sin(2\phi)}{2} + \phi)C_4^2 + (\frac{\sin(2\phi)}{2} - \phi)C_4 + 4\frac{2\phi^3}{3}, \\ D_3 = (\phi - \frac{\sin(2\phi)}{2})C_4 - (\frac{\sin(2\phi)}{2} + \phi)C_4^2 - 4\frac{2\phi^3}{3}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Entretanto, mesmo baseando a formulação para vibrações fora do plano de curvatura no trabalho de Wang, Nettleton e Keita (1980), necessitou-se de uma série de adaptações incluindo os trabalhos de Zhu e Meguid (2008) e Misra, Païdoussis e Van (1988). A princípio foram utilizadas as equações que governam o movimento para obter as matrizes de massa e rigidez cujos graus de liberdade  $\{v\}^T = \{v_1, \psi_{x1}, \psi_{z1}, v_2, \psi_{x2}, \psi_{z2}\}$  estivessem alinhados à linha central da viga, como na Figura 15.

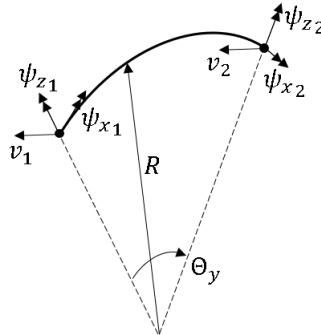


Figura 15 – Esquema de elemento de viga curva para vibrações perpendiculares ao plano de curvatura.

Utilizou-se uma função de forma polinomial de grau 3 para translação na direção de  $v$ , grau 2 para rotação na direção de  $\psi_z$ , e linear para a torção em  $x$ . Esta etapa contou com o apoio do software Maxima para

gerar as matrizes do elemento baseadas nos funcionais:

$$\begin{cases} [K_{el}] = \int_0^{R\Theta_y} (EI_z \mathcal{M}_x^2 + GJT_x^2) ds, \\ [M_{el}] = \rho \int_0^{R\Theta_y} (Av^2 + J\Theta_x^2 + I_z \Theta_z^2) ds, \end{cases} \quad (5.28)$$

nos quais:

$$\mathcal{M}_z = \frac{\Theta_x}{R} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \quad \mathcal{T}_x = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \Theta_x}{\partial s}. \quad (5.29)$$

Entretanto, devido à forma como o algoritmo “gerador de geometrias” foi concebido, era necessário que esse elemento de viga curva possuísse as orientações da Fig. 16, cujos graus de liberdade estivessem alinhados a uma linha reta que interseccione as extremidades da viga, e que a curvatura do elemento ocorra abaixo desta reta. Para tal, é necessário

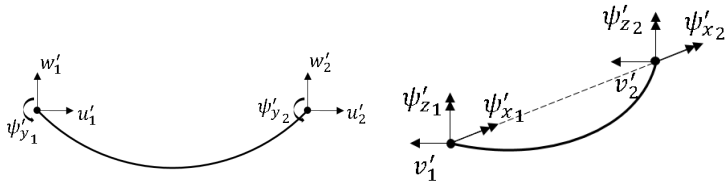


Figura 16 – Esquema mostrando a orientação dos graus de liberdade utilizada no trabalho para o elemento de viga curva.

rotacionar as matrizes de massa e rigidez dentro e fora do plano para que estas sejam adequadas para o código desenvolvido em MatLab.

O primeiro caso, dentro do plano, é trivial desde que a orientação só precise de um ajuste de  $180^\circ$  em relação ao original, rotacionado sobre o eixo  $y$  (alinhado com  $v'_1$  e  $\psi_{y1}$ ). É importante, nesta etapa, manter a consistência dos G.L.s, por exemplo inverter as contribuições de  $y$ , *e.g.*  $\psi_{y1}' = -\psi_{y1}$ .

Já o segundo caso, fora do plano, requer que as matrizes sejam rotacionadas cada nó separadamente. O primeiro nó com um ângulo de  $180 + \Theta_y/2$  e o segundo com  $180 - \Theta_y/2$ . Desta vez, ambos  $v$  e  $\psi_z$  precisam ser invertidos para manter a consistência dos G.L.s. Lembra-se que esta reorientação é opcional e foi adotada apenas para facilitar no desenvolvimento do gerador de malhas.

### 5.3.3 Elemento de Viga Reta Semi-Infinita

As condições de contorno especiais foram escritas em termos da rigidez dinâmica  $DS$  (*dynamic stiffness*) de vigas semi-infinitas (Fig. 17).

Esta parte do trabalho está pautada no artigo de Gavric (1992), e detalha a obtenção destas rigidezes dinâmicas apenas no plano  $x - z$ , já que o procedimento é idêntico no plano  $x - y$ .

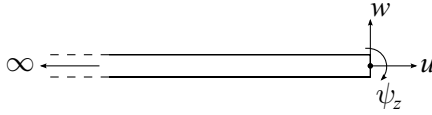


Figura 17 – Esquema mostrando ponto da aplicação da força numa viga semi-infinita para cálculo das rigidezes dinâmicas.

O processo para calcular os valores de rigidez dinâmica para uma onda longitudinal é trivial, e basta calcular a relação  $N/u$  usando as relações cinemáticas de uma viga reta. Já para uma onda de flexão, é necessário considerar o acoplamento entre deslocamento transversal e a rotação no ponto de aplicação da força. É possível escrever essas rigidezes numa equação matricial para facilitar a visualização:

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} DS_u^N & 0 & 0 \\ 0 & DS_w^{Q_y} & DS_{\psi_y}^{Q_y} \\ 0 & DS_w^{M_y} & DS_{\psi_y}^{M_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi_z \end{Bmatrix}. \quad (5.30)$$

Lembra-se que uma onda longitudinal propagando-se numa viga semi-infinita pode ser representada por (introduzidas anteriormente nas Eqs. 4.1 e 4.14):

$$\begin{cases} u(x, t) = (\bar{u}e^{jk_u x}) e^{-j\omega t}, \\ N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} = EA (jk_u \bar{u}e^{jk_u x}) e^{-j\omega t}, \end{cases} \quad (5.31)$$

das quais pode-se obter a relação direta  $DS_u^N = N/u = jk_u EA$ .

Já a onda de flexão pode ser representada na forma (introduzidas nas Eqs. 4.3 e novamente 4.14):

$$\begin{cases} w(x, t) = (\bar{w}_p e^{jk_w x} + \bar{w}_e e^{k_w x}) e^{-j\omega t}, \\ \psi_y(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} = (jk_w \bar{w}_p e^{jk_w x} + k_w \bar{w}_e e^{k_w x}) e^{-j\omega t}, \\ M_y(x, t) = EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = EI_y (-k_w^2 \bar{w}_p e^{jk_w x} + k_w^2 \bar{w}_e e^{k_w x}) e^{-i\omega t}, \\ Q_y(x, t) = -EI_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -EI_y (-jk_w^3 \bar{w}_p e^{jk_w x} + k_w^3 \bar{w}_e e^{k_w x}) e^{-j\omega t}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Ao multiplicar a matriz da Eq. 5.30 tem-se um dos termos como  $Q_y = DS_w^{Q_y} w + DS_{\psi_y}^{Q_y} \psi_y$ . Logo, para se obter o primeiro valor desejado de

$DS_w^{Q_y}$  estabelece-se que  $Q_y(0, t)$  é uma força arbitrária  $Qe^{-j\omega t}$ , e  $\psi_y(0, t) = 0$ . Portanto, tem-se que:

$$\begin{cases} jk_w^3 \bar{w}_p - k_w^3 \bar{w}_e = \frac{Q}{EI_y}, \\ jk_w \bar{w}_p + k_w \bar{w}_e = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Resolvendo este sistema de equações para  $\bar{w}_p$  e  $\bar{w}_e$ , obtém-se:

$$\bar{w}_p = -\frac{jQ}{2k_w^3 EI_y}, \text{ e } \bar{w}_e = -\frac{Q}{2k_w^3 EI_y}, \quad (5.34)$$

de onde pode-se escrever  $DS_w^{Q_y} = Q_y(0, t)/w(0, t)$  como:

$$\begin{aligned} DS_w^{Q_y} &= -\frac{Qe^{-j\omega t}}{\left(\frac{jQ}{2k_w^3 EI_y} + \frac{Q}{2k_w^3 EI_y}\right) e^{-j\omega t}}, \\ &= -\frac{2k_w^3 EI_y}{1 + j}, \\ &= (j - 1)k_w^3 EI_y. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Utilizando o mesmo procedimento para  $DS_{\psi_y}^{Q_y}$ , agora fazendo  $w(0, t) = 0$ , e novamente uma força qualquer  $Q_y(0, t) = Qe^{-j\omega t}$ , que permite escrever:

$$\begin{cases} jk_w^3 \bar{w}_p - k_w^3 \bar{w}_e = \frac{Q}{EI_y}, \\ \bar{w}_p + \bar{w}_e = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Neste caso,

$$\bar{w}_p = -\frac{Q}{k_w^3(j+1)EI_y}, \text{ e } \bar{w}_e = +\frac{Q}{k_w^3(j+1)EI_y}, \quad (5.37)$$

cujos resultados da razão  $DS_{\psi_y}^{Q_y} = Q_y(0, t)/\psi_y(0, t)$  fica:

$$\begin{aligned} DS_{\psi_y}^{Q_y} &= \frac{EI_y k_w^2 (j+1)}{(1-j)}, \\ &= jk_w^2 EI_y. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Fazendo o mesmo para  $DS_w^{M_y}$  e  $DS_{\psi_y}^{M_y}$  tem-se:

$$\begin{aligned} DS_w^{M_y} &= jk_w^2 EI_y, \\ DS_{\psi_y}^{M_y} &= (1+j)k_w EI_y. \end{aligned} \quad (5.39)$$

O elemento representando a rigidez dinâmica no plano  $x - z$  de uma viga semi-infinita pode, então, ser escrito como:

$$[\tilde{K}_{si}] = \begin{bmatrix} jk_u EA & 0 & 0 \\ 0 & (j-1)k_w^3 EI_y & jk_w^2 EI_y \\ 0 & jk_w^2 EI_y & (j+1)k_w EI_y \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Finalmente, para obter o elemento completo, basta estender a rigidez da flexão  $x - z$  para  $x - y$ , e considerar que  $DS_{\psi_x}^{T_x} = T_x/\psi_x = jk_{\psi} GJ$ . Sua forma final (GAVRIC, 1992), é dada por:

$$[\tilde{K}_{si}^c] = \begin{bmatrix} jk_u EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (j-1)k_v^3 EI_z & 0 & 0 & 0 & jk_v^2 EI_z \\ 0 & 0 & (j-1)k_w^3 EI_y & 0 & -jk_w^2 EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & jk_{\psi} JG & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -jk_w^2 EI_y & 0 & (j+1)k_w EI_y & 0 \\ 0 & jk_v^2 EI_z & 0 & 0 & 0 & (j+1)k_v EI_z \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

que é aplicado em um único nó e simula a condição de acoplamento a uma viga semi-infinita.

### 5.3.4 Esforços que simulam uma onda em propagação

Para calcular os esforços que simulam uma onda propagando-se através da viga semi-infinita, o procedimento parte da diferença entre a resposta dada pelo elemento especial (semi-infinito) e os esforços que seriam gerados por uma onda arbitrária propagante. Tem-se então que, no plano  $x - z$ :

$$[\tilde{K}_{si}] \left\{ \begin{array}{l} u_{\infty} e^{j(k_u x - \omega t)} \\ w_{\infty} e^{j(k_w x - \omega t)} \\ jk_w w_{\infty} e^{j(k_w x - \omega t)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} N_{in} \\ Q_{in} \\ M_{in} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{\infty} \\ Q_{\infty} \\ M_{\infty} \end{array} \right\}, \quad (5.42)$$

onde os valores com subscrito  $\infty$  dizem respeito às ondas propagando-se pelo meio infinito, como em

$$\begin{aligned} N_{\infty} &= -jEAk_u u_{\infty} e^{j(k_u x - \omega t)}, \\ Q_{\infty} &= -jEI_y k_w^3 w_{\infty} e^{j(k_w x - \omega t)}, \\ M_{\infty} &= EI_y k_w^2 w_{\infty} e^{j(k_w x - \omega t)}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Os subscritos  $in$  dizem respeito aos esforços que devem ser prescritos para ter o efeito desejado. Uma vez resolvida a Equação 5.42, obtêm-se



os valores dos esforços na forma:

$$\begin{aligned} N_{in} &= -2jEAk_u u_\infty e^{j(k_u x - \omega t)}, \\ Q_{in} &= -2(1-j)EI_y k_w^3 w_\infty e^{j(k_w x - \omega t)}, \\ M_{in} &= 2(1-j)EI_y k_w^2 w_\infty e^{j(k_w x - \omega t)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Finalmente, para simular uma onda propagando-se ao infinito, deve-se prescrever o seguinte conjunto de esforços no mesmo nó do elemento especial (Eq. 5.41):

$$F_{in} = -2 \begin{Bmatrix} jk_u EA u_\infty \\ (1-j)k_w^3 EI_z v_\infty \\ (1-j)k_w^3 EI_y w_\infty \\ jk_\psi GJ \psi_{x_\infty} \\ (j-1)k_w^2 EI_y w_\infty \\ (j-1)k_w^2 EI_z v_\infty \end{Bmatrix}. \quad (5.45)$$

### 5.3.5 Amplitudes de Ondas

Após a etapa de processamento, para utilizar o método das ondas em propagação, faz-se necessário transformar os deslocamentos/rotações globais em amplitudes de onda nas extremidades. As amplitudes foram calculadas por meio da composição de um sistema de equações que iguale as soluções do movimento (Cap. 4) à resposta numérica, como por exemplo:

$$\begin{array}{c} \text{calculados com mesmo } x \text{ e } \omega \text{ da numérica} \\ \left[ \begin{array}{ccc} e^{-jk_u x_1} & e^{+jk_u x_1} & 0 \\ e^{-jk_u x_2} & e^{+jk_u x_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jk_u x_3} \end{array} \right] \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}^I \\ \bar{u}^R \\ \bar{u}^T \end{bmatrix}}_{\text{incógnitas}} = \overbrace{\begin{bmatrix} u^{ri} \\ u^{ri} \\ u^r \end{bmatrix}}^{\text{solução numérica}} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

A Equação 5.46 é um exemplo de como as amplitudes de ondas longitudinais são obtidas por este método. É importante notar que as posições  $x_{1,2}$  e  $x_3$  estão relacionadas à linha central da viga, transformadas para coordenada  $s$  local.

De forma análoga, os cálculos para ondas de flexão dentro e fora do plano são feitos usando as Equações 4.11 e 4.13 para  $w_{saída}^r$  e  $w_{saída}^r$ ,  $v_{saída}^r$  e  $v_{saída}^r$ , finalmente  $\psi_{xsaída}$  e  $\psi_{xsaída}$ .

## 5.4 Validação com Resultados Analíticos

Neste item são comparados os resultados obtidos analítica e numericamente. Primeiramente, serão analisados os casos de vibração dentro do plano de curvatura, seguido pelos casos de vibração fora do plano. Esta seção apresenta inicialmente resultados de curvas simples, variando apenas o ângulo  $\Theta_y$ , o raio  $R$  e os tipos de onda na excitação. Os gráficos em mapas de cores foram obtidos pela soma das diferenças entre todos os coeficientes de ambas as formulações, ou seja

$$\epsilon = \sum_j \sum_i \sqrt{\left(W_{ni}^j - W_{ai}^j\right)^2}, \quad (5.47)$$

com  $i$  representando o tipo de onda (longitudinal, de flexão dentro e fora do plano, e torsional), e  $j$  representando o tipo de coeficiente (transmissão e reflexão); subscrito  $n$  indica formulação numérica e  $a$ , analítica. O resultado de  $\epsilon$  é dado em porcentagem, desde que os coeficientes também sejam valores percentuais.

As propriedades mecânicas são as mesmas para ambas as formulações, iguais as de um tubo de descarga típico de um compressor, com módulo de elasticidade  $E = 195$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ ; densidade  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, e seção transversal tubular com diâmetro  $\varnothing = 2,65$  mm e espessura igual a 0,52 mm.

Para uma curvatura de raio arbitrário,  $R = 100$  mm, a performance de ambas as ferramentas é praticamente idêntica, com valores de  $\epsilon$  abaixo de 0,2%, como pode-se observar nas Figuras 18 e 19. Os resultados são muito similares, dada a natureza do acoplamento entre os movimentos.

Entretanto, pequenas diferenças podem ser observadas. Por exemplo, os resultados com excitação de flexão possuem um erro mais distribuído ao longo do espectro de frequências, na maior parte com valores abaixo de 0,14% para as altas frequências. Valores maiores são observados numa região de descontinuidade abaixo dos 20 Hz, para ângulos maiores que 200° (pico em 14,1 Hz). Essa descontinuidade também apresenta um erro menor quando a excitação é longitudinal (Fig. 18), sugerindo que há um forte acoplamento longitudinal-flexural nestas frequências específicas. Esta peculiaridade será melhor analisada na sequência como uma região de propagação longitudinal.

Outro detalhe importante referente a esta região de alta propagação longitudinal é a grande descontinuidade nos coeficientes, como pode ser observado na Figura 20. Em outras palavras, este pico de erro é esperado nesta região de variações muito bruscas (observado na Fig. 21). Qualquer

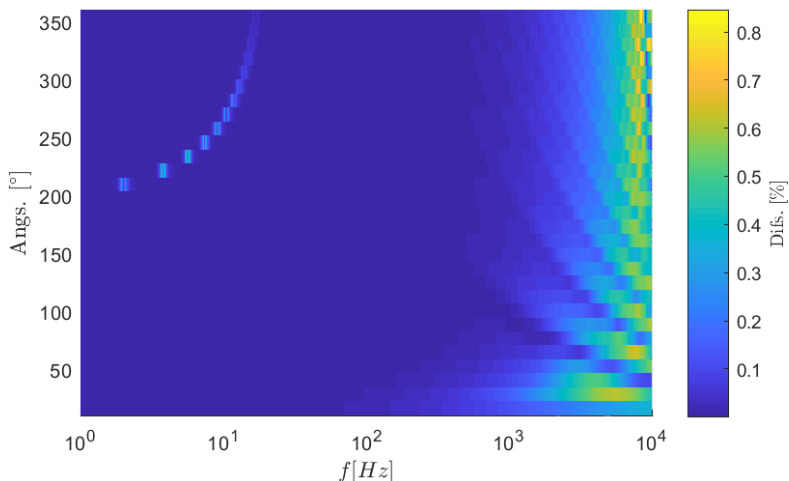


Figura 18 – Diferenças percentuais entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda longitudinal, utilizando elementos de viga reta.

defasagem mínima na frequência é suficiente para elevar a diferença entre os coeficientes.

Pode-se, assim, concluir que os resultados para vibrações dentro do plano de curvatura são excelentes, e não há diferenças significativas entre as duas formulações.

Entretanto, ao excitar a curvatura com ondas fora do plano, os resultados são um pouco diferentes, como pode-se observar nas Figuras 22 e 23.

Atenta-se também às escalas de cores, que indicam os erros bem maiores quando comparados ao caso anterior. Para o caso de flexão fora do plano, percebe-se que a diferença máxima agora está abaixo de 15%. O caso torcional, à primeira vista, aparenta ser insatisfatório desde que as diferenças possam ultrapassar 100%. Porém, algumas ressalvas podem ser feitas. Esta diferença elevada ocorre numa região muito específica de frequência, acima dos 5500 Hz. Como pode ser observado na Figura 24, analogamente à análise dos números de onda dentro do plano de curvatura, numa frequência de 5643 Hz ocorre uma frequência de corte (que seria similar à frequência do anel, ou  $\Omega_3$ ), sendo o marco que define a queda na concordância entre os resultados das duas formulações.

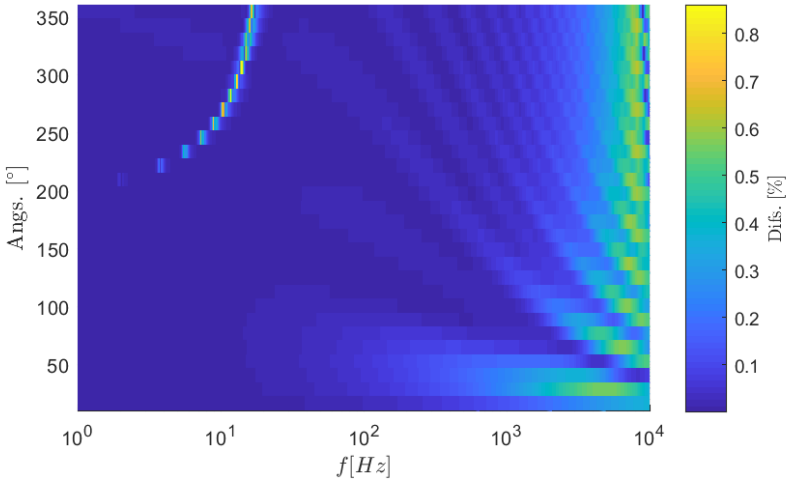


Figura 19 – Diferenças percentuais entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural alinhada com o plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta.

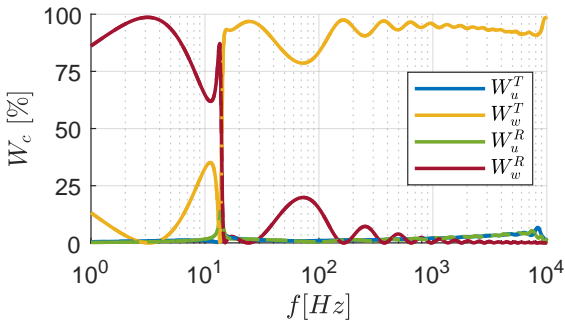


Figura 20 – Coeficientes de potência para uma curva de ângulo de  $\Theta_y = 300^\circ$  e raio  $R = 100$  mm com uma excitação flexural na entrada. Linha cheia representa a ferramenta numérica utilizando elementos de viga reta; linha tracejada, resultados analíticos.

Acima desta frequência de corte, o comprimento de onda torna-se cada vez mais próximo das dimensões da seção transversal, o que acarreta uma perda de representatividade por parte das soluções numéricas utili-

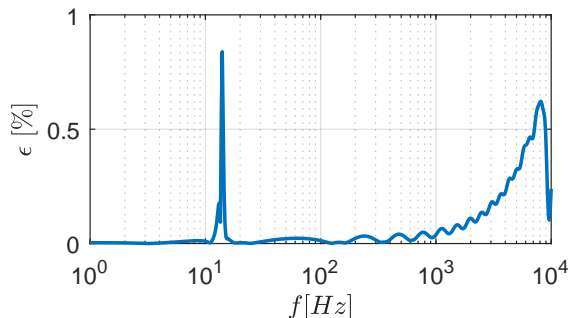


Figura 21 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de  $\Theta_y = 300^\circ$  e raio  $R = 100$  mm com uma excitação flexural na entrada. Utilizando elementos de viga reta

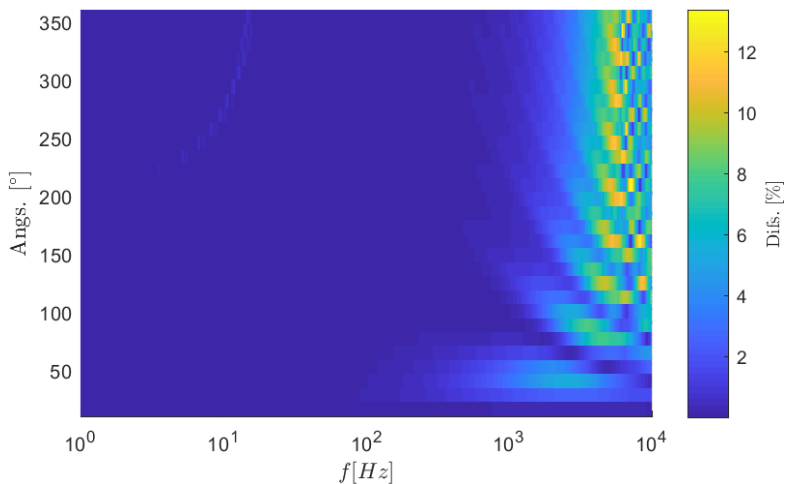


Figura 22 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural perpendicular ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta.

zando elementos de viga reta baseados no modelo de Love. Por outro lado, a Figura 25 mostra que há uma excelente concordância entre os resultados analíticos e numéricos, divergindo apenas acima de 5 kHz.

Para raios menores, verificou-se uma melhor concordância. As

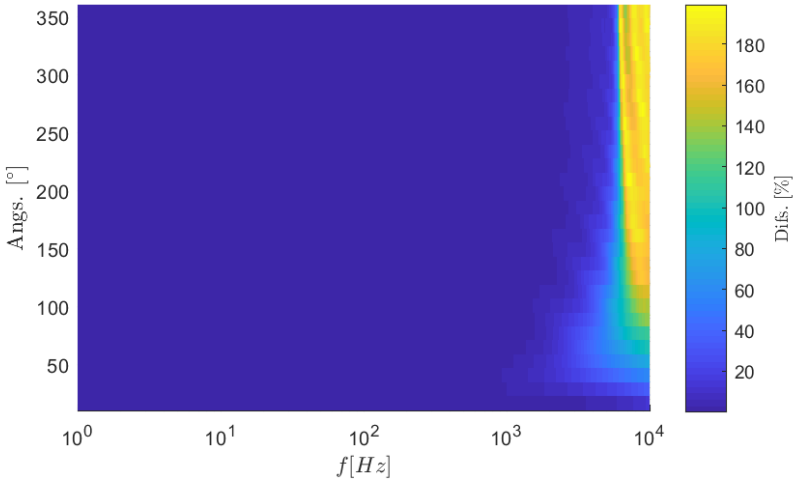


Figura 23 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda torsional, utilizando elementos de viga reta.

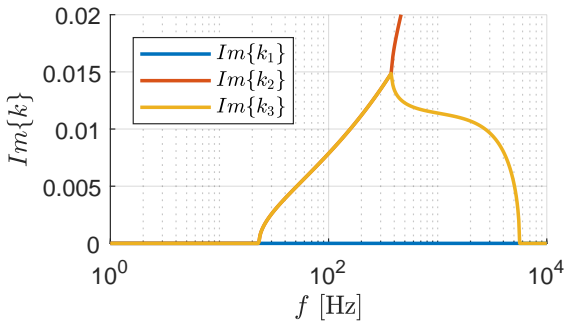


Figura 24 – Números de onda de uma vibração fora-do-plano para uma viga curva de raio  $R = 100$  mm.

tabelas abaixo foram elaboradas visando uma análise do efeito da variação do ângulo nestas diferenças.

As Tabelas 2 e 3 mostram o maior valor da diferença analítico-numérica, para casos com  $\theta_y$  variando  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ , e círculo completo ( $360^\circ$ ), todos com  $R = 38,2$  mm, e calculando-se para toda a faixa de frequências  $0 - 10$  kHz. O pior valor encontrado ocorreu em

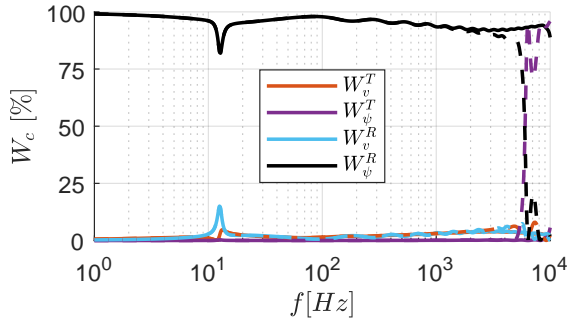


Figura 25 – Coeficientes de potência para uma curva de ângulo de  $\Theta_y = 300^\circ$  e raio  $R = 100$  mm com uma excitação flexural perpendicular ao plano de curvatura na entrada. Linha cheia representa a ferramenta numérica; linha tracejada, resultados analíticos.

Tabela 2 – Diferenças analítico-numéricas, prescrevendo ondas alinhadas com o plano de curvatura.

<i>Input</i>	$\theta_y$ [°]	$W_u^T$ [%]	$W_w^T$ [%]	$W_u^R$ [%]	$W_w^R$ [%]
$\bar{u}^I$	30	0,018	0,009	0,002	0,007
	60	0,015	0,008	0,004	0,004
	90	0,003	0,002	0,007	0,006
	180	0,002	0,003	0,012	0,008
	270	0,016	0,043	0,089	0,045
	360	0,008	0,006	0,013	0,011
$\bar{w}^I$	30	0,009	0,022	0,007	0,006
	60	0,008	0,014	0,004	0,007
	90	0,002	0,009	0,006	0,005
	180	0,003	0,014	0,007	0,005
	270	0,043	0,114	0,045	0,169
	360	0,006	0,141	0,011	0,144

$\theta_y = 30^\circ$ , para uma onda torcional prescrita ( $\bar{\psi}_x^I$ ), com diferença máxima de aproximadamente 6%.

Portanto, buscando mitigar esta divergência em altas frequências, foi utilizada a formulação de um elemento de viga curva. Apesar de ser ligeiramente mais caro computacionalmente, a sua concordância com a formulação analítica é bastante superior. Assim, ao utilizar o elemento curvo percebe-se uma melhora significativa na concordância analítico-numérica

Tabela 3 – Diferenças analítico-numéricas, prescrevendo ondas perpendiculares ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga reta.

<i>Input</i>	$\theta_y$ [°]	$W_v^T$ [%]	$W_\theta^T$ [%]	$W_v^R$ [%]	$W_\theta^R$ [%]
$\bar{v}^I$	30	0,595	0,302	0,110	0,241
	60	0,350	0,206	0,086	0,167
	90	0,970	0,097	0,063	0,804
	180	0,793	0,123	0,075	0,618
	270	0,721	0,080	0,100	0,581
	360	0,698	0,065	0,089	0,619
$\bar{\psi}_x^I$	30	0,802	5,153	0,185	6,012
	60	0,448	2,054	0,098	2,474
	90	0,418	0,353	0,664	1,159
	180	0,435	0,154	0,474	0,796
	270	0,388	0,029	0,441	0,793
	360	0,396	0,040	0,479	0,872

para vibrações fora do plano, como pode ser observado nas Figuras 26 e 27.

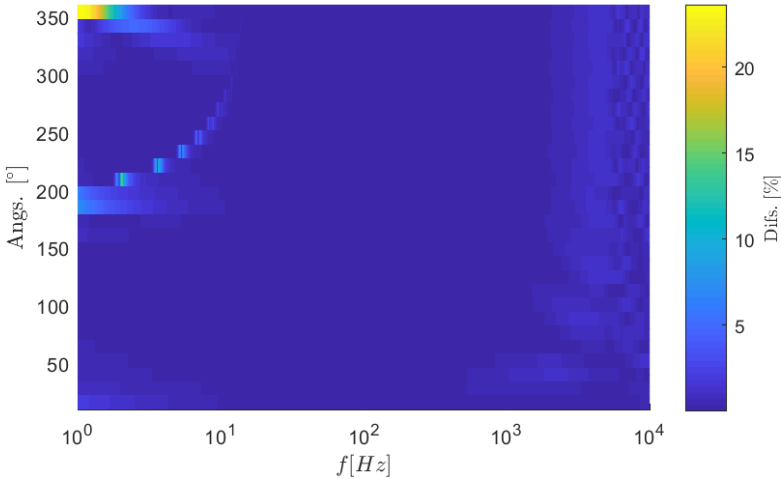


Figura 26 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda flexural perpendicular ao plano de curvatura, utilizando elementos de viga curva.



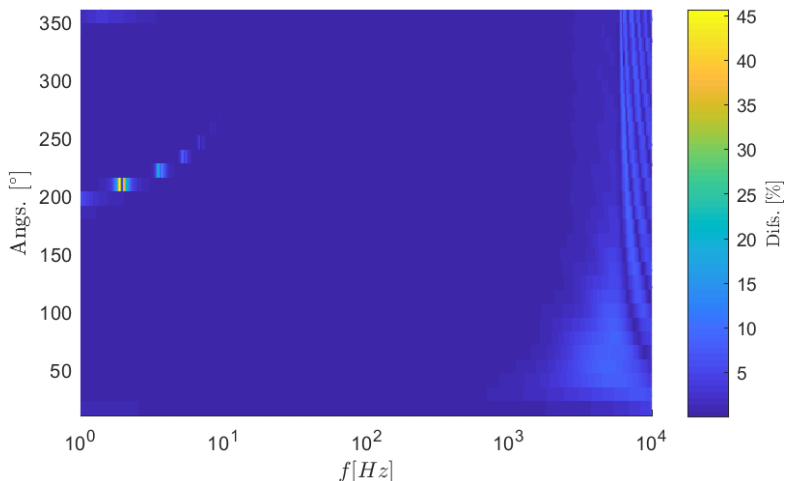


Figura 27 – Diferenças entre coeficientes de potência numéricos e analíticos ao prescrever uma onda torsional, utilizando elementos de viga curva.

Na região de altas frequência, onde anteriormente tinham-se as maiores discrepâncias, agora têm-se valores com no máximo 9% de diferença para simulações com 12 elementos curvos por comprimento de onda. O resultado é ainda melhor com o refino desta malha, alcançando máximos de 2% para 30 elementos por comprimento de onda.

Entretanto, alguns acréscimos ocorrem nas baixas frequências em decorrência do refino da malha. Dá-se atenção aos casos de  $348^\circ$  com entrada flexural e  $203^\circ$  com entrada torsional. As Figuras 28 e 29 destacam estes casos e pode-se observar que as maiores diferenças ocorrem numa região de rápida variação dos coeficientes, e onde o elemento especial subestima os valores na frequência causando uma pequena defasagem. Porém, de forma geral os resultados apresentam uma boa concordância.

Conclui-se que, para a faixa de frequências desejada, as abordagens numéricas utilizando tanto elementos de viga reta quanto de viga curva são consideradas validadas e adequadas, salvo frequências maiores de 5 kHz com entradas fora do plano para as retas. Portanto, serão utilizados elementos curvos para as próximas análises.

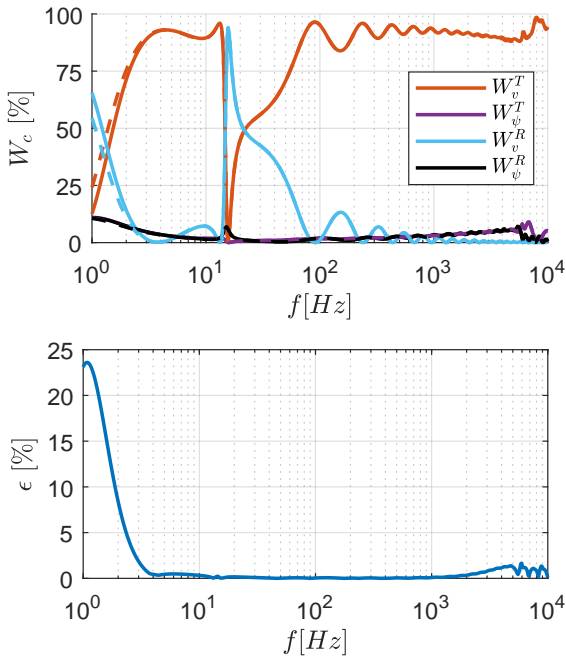


Figura 28 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de  $\Theta_y = 348^\circ$  e raio  $R = 100$  mm com uma excitação flexural fora-do-plano. Utilizando elementos de viga curva.

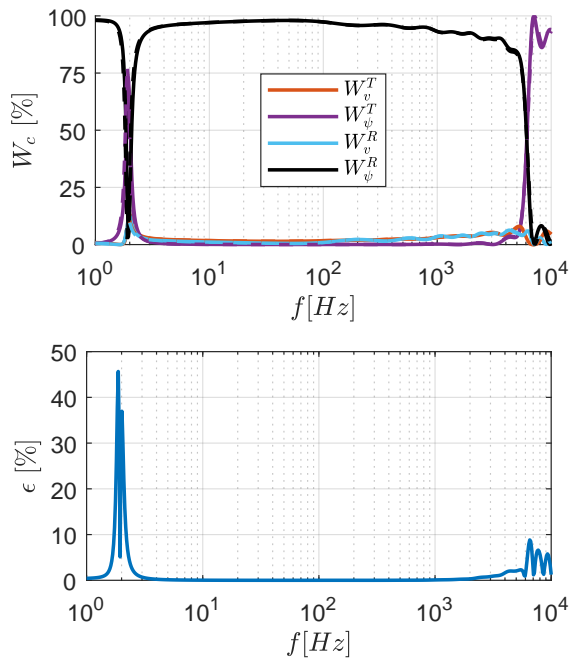


Figura 29 – Soma das diferenças entre todos os coeficientes para uma curva de ângulo de  $\Theta_y = 203^\circ$  e raio  $R = 100$  mm com uma excitação torsional. Utilizando elementos de viga curva.



## 6 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

A validação experimental dos resultados deste trabalho, baseada no método das ondas em propagação, deve ser cuidadosa, uma vez que a reprodução das condições de contorno especiais semi-infinitas não é uma atividade trivial. Desta forma, a validação dos resultados numéricos obtidos por elementos finitos será restrita aos segmentos de viga tendo como condição de contorno engaste e livre.

Todos os experimentos foram feitos em tubos de descarga de aço cobreado de 540 mm de comprimento, conformados manualmente. Estes corpos de prova possuem seção transversal de 2,65 mm de diâmetro e paredes com 0,52 mm de espessura. As propriedades mecânicas possuem valores aproximados de 195 GPa para o módulo de elasticidade ( $E$ ), densidade de  $7850 \text{ kg/m}^3$  ( $\rho$ ), coeficiente de Poisson de 0.3 ( $\nu$ ) e módulo de cisalhamento dado por  $G = E/(2(1 + \nu))$ .

### 6.1 Validação do Workflow

Geralmente, ensaios de vibração com tubos de descarga são difíceis de obter boas respostas devido à leveza e baixa rigidez destes corpos de prova. Então, num primeiro momento, optou-se por utilizar engaste em ambas extremidades do corpo de prova. O tubo de descarga já possui uma extremidade soldada a uma estrutura anelar, usada para acoplar ao conjunto interno (bloco e motor elétrico) da unidade compressora (Figura 30). Portanto, basta um parafuso de 6 mm comum para esta fixação.



Figura 30 – Estrutura para fixação no conjunto interno da unidade compressora.

A outra extremidade necessitou de uma peça especial para a fixação. Foi usinado um cubo de aproximadamente 8 mm de lado, com um furo passante de 3 mm de diâmetro e outro furo rosqueado, perpendicular ao primeiro, formando um T. Este segundo furo permite que um parafuso

seja inserido servindo a dois propósitos: para fixar o tubo (que passa no primeiro furo), e também para fixar esta peça em outra rosca qualquer.

Para analisar se a montagem era adequada ao tipo de medição, duas configurações foram testadas: base do conjunto interno acoplada diretamente ao *shaker* com um acelerômetro (Figura 31); e base acoplada a um transdutor de força fixado numa massa inercial.

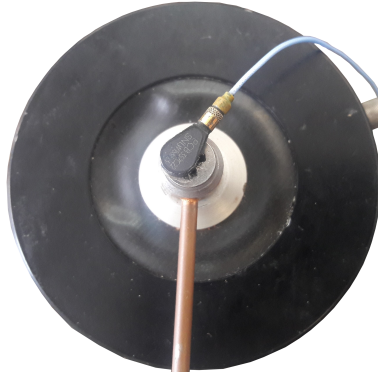


Figura 31 – Montagem do tubo de descarga no *shaker* utilizando a fixação própria do conjunto interno.



Figura 32 – Montagem do tubo de descarga no *shaker* utilizando a fixação especial.

Apesar da montagem ser robusta, dois problemas inviabilizaram estas duas configurações. Primeiramente, a característica da peça especial de fixação não garantia uma condição de contorno de engaste e qualquer desalinhamento era suficiente para alterar as respostas consideravelmente. Segundo, o transdutor de força é muito sensível à inércia do acoplamento.



Figura 33 – Fixação na base inercial com transdutor de força.

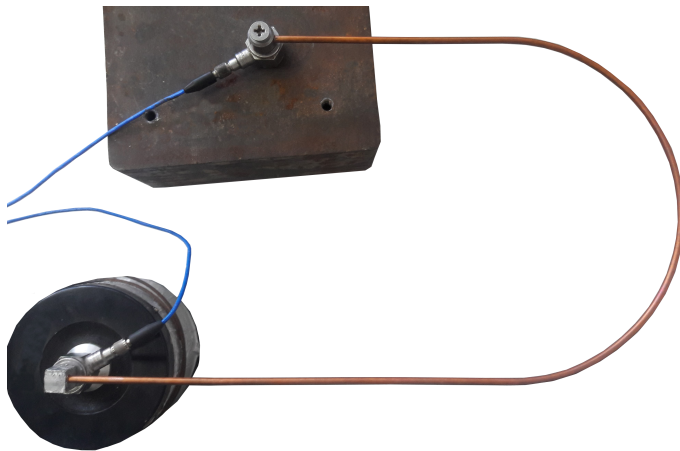


Figura 34 – Primeira configuração padrão. Não era possível garantir as condições de contorno.

Logo, qualquer diferença de massa sobre o transdutor também modifica os dados obtidos, mesmo numa resposta em frequência.

Portanto, buscando melhorar a repetibilidade dos testes, decidiu-se utilizar a fixação diretamente no excitador eletrodinâmico através da extremidade anelar adquirindo o sinal de referência neste ponto com um acelerômetro. Ao longo do tubo utilizou-se um vibrômetro a *laser* para medição de velocidade em vários pontos da estrutura (Figura 35).

Para o caso do tubo reto, apenas para efeito de validação da ferramenta desenvolvida, foram medidas funções resposta em frequência a cada 100 mm da base (*shaker*) até a extremidade, num total de seis medições.

O inconveniente desta configuração é o fato do *laser* ser bastante

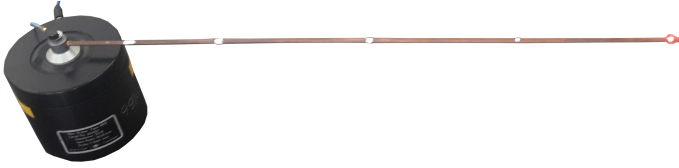


Figura 35 – Configuração adotada nas medições (vista lateral). Fixação adequada no *shaker* e viga livre se mostraram adequados a serem reproduzidos em simulações usando FEM.

sensível a qualquer excitação externa (inclusive ruído de fundo). Isso afetou ligeiramente o resultado sendo o principal motivo para a coerência não ter valor máximo. Entretanto, ao alcançar uma boa coerência, os resultados simulados se aproximam bastante dos medidos.

A ferramenta desenvolvida em MatLab conseguiu prever com boa precisão o comportamento do corpo de prova, como pode ser observado nas Figuras 36 a 41.

Observa-se ótima concordância entre os resultados experimentais e simulados, salvo faixa acima de 6 kHz na qual frequências de ressonância experimentais são ligeiramente menores que as numéricas. Entretanto, essas discrepâncias são esperadas, já que o algoritmo não considera inércia rotatória nem deformação por cisalhamento.

Portanto, considera-se a medição utilizando fixação no excitador eletrodinâmico com acelerômetro acoplado e vibrômetro *laser* uma forma adequada e relativamente fácil de obter os resultados, sendo utilizada nas análises seguintes.



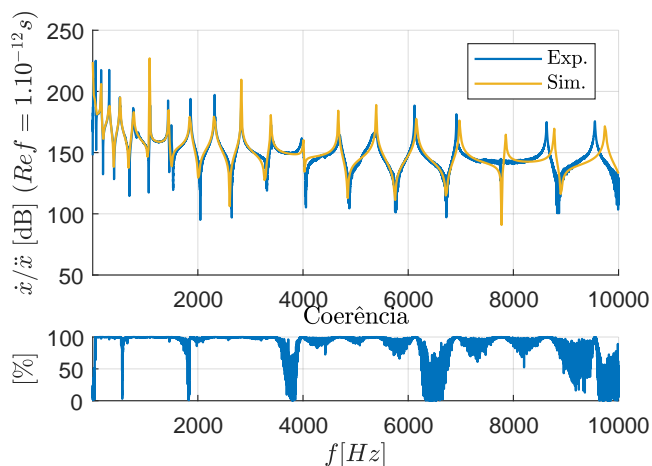


Figura 36 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 100 mm da base.

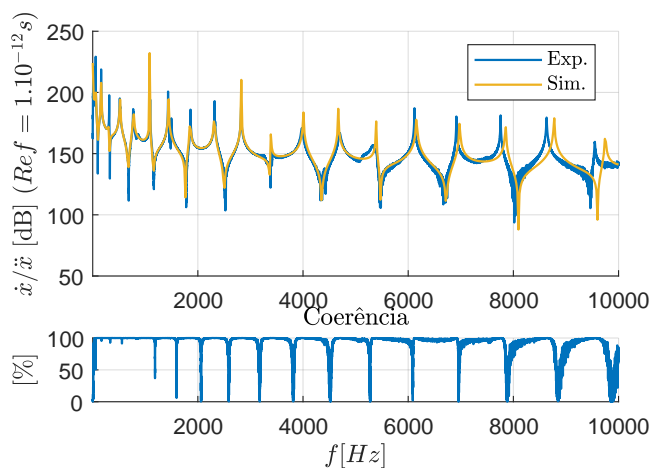


Figura 37 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 200 mm da base.

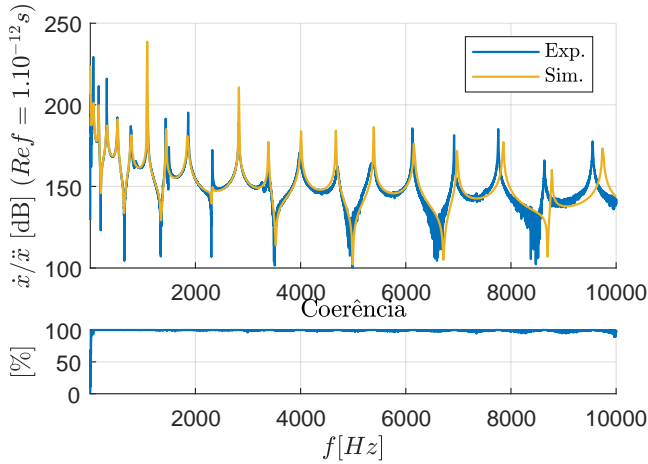


Figura 38 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 300 mm da base.

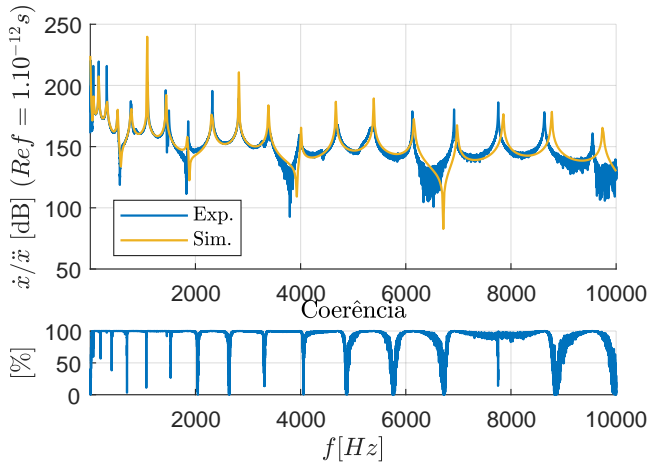


Figura 39 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 400 mm da base.

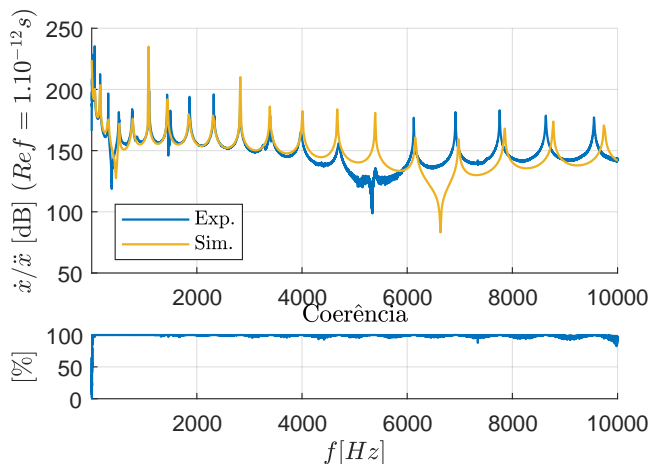


Figura 40 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF do ponto de 500 mm da base.

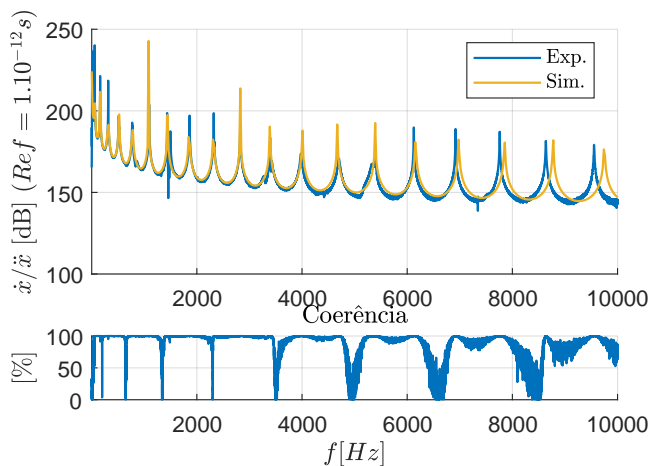


Figura 41 – Comparações entre resultados experimentais e simulados para um tubo de descarga reto. FRF da extremidade do tubo.

## 6.2 Curvas Simples

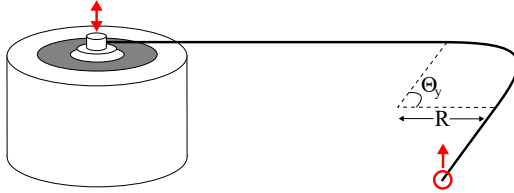


Figura 42 – Esquema das medições de curvas simples.

Esta seção diz respeito aos corpos de prova contendo apenas uma curvatura. Foram ensaiados casos com três raios diferentes (10 mm, 25 mm e 75 mm), com ângulos de arfagem ( $\Theta_y$ ) de  $90^\circ$  e  $180^\circ$ . A conformação das geometrias foi feita utilizando um gabarito para os raios. Um esquema pode ser visto na Figura 42.

As Figuras 43 e 44 comparam os resultados medidos e simulados para uma curva simples de  $90^\circ$  e 10 mm de raio, com FRFs medidas a 100 mm da base e na extremidade livre do tubo.

Percebe-se uma discrepância ligeiramente maior, porém sabe-se das incertezas no processo de conformação da geometria e também na leve mudança do módulo elástico por encruamento. Mesmo assim os resultados obtidos são considerados suficientemente precisos para assegurar a ferramenta.

Para análises com raios maiores, os resultados numéricos e experimentais apresentam concordância ainda melhor em relação aos de menor raio. Isso pois quanto maior o raio, mais suave é a deformação do tubo, resultando em menores mudanças nas propriedades mecânicas. No caso foi feito um ajuste no módulo de elasticidade para  $E = 205$  GPa. Os resultados podem ser observado nas Figuras 45 a 48.

Finalmente, uma geometria de  $180^\circ$  foi medida, enrijecendo ainda mais a estrutura como um todo (maior comprimento do tubo alterado na conformação). Os resultados das Figuras 49 e 50 tiveram um ajuste de  $E = 210$  GPa.

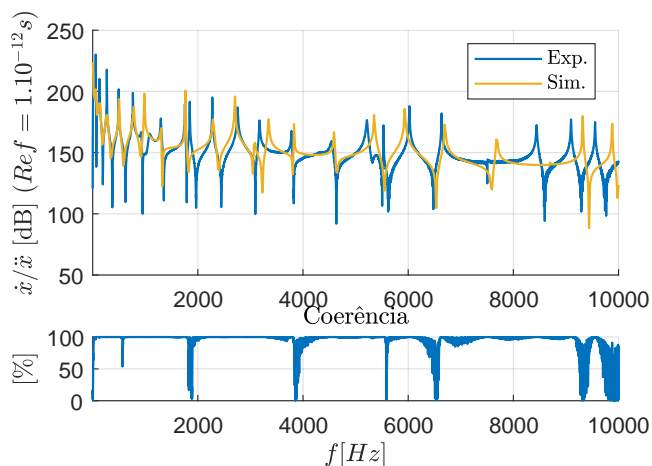


Figura 43 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 10$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base.

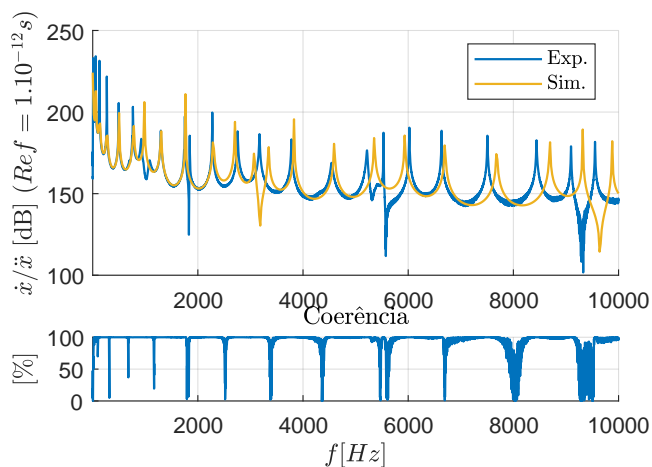


Figura 44 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 10$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo.

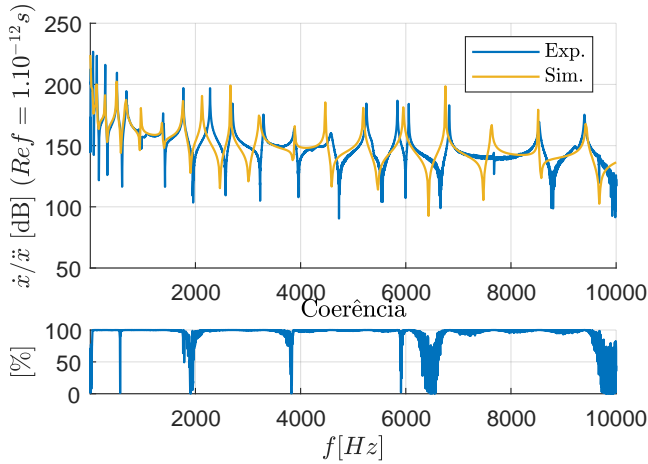


Figura 45 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 25$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base.

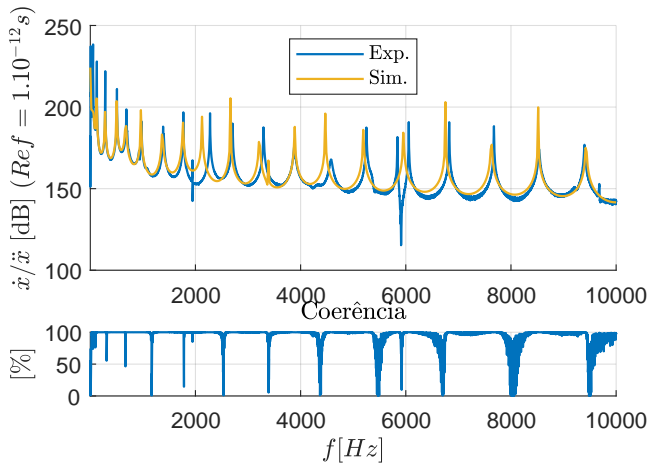


Figura 46 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 25$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo.

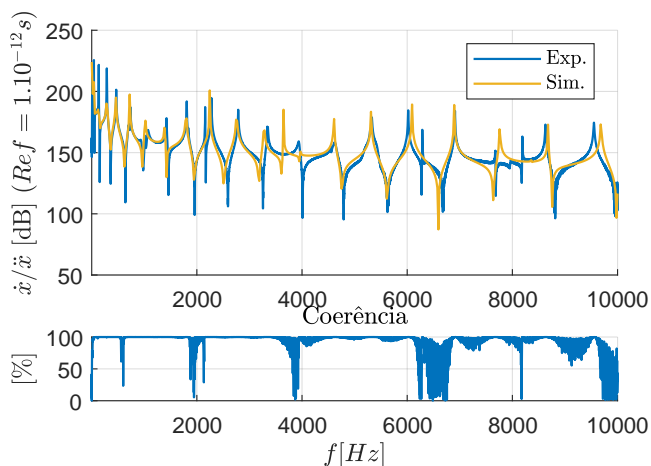


Figura 47 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 75$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base.

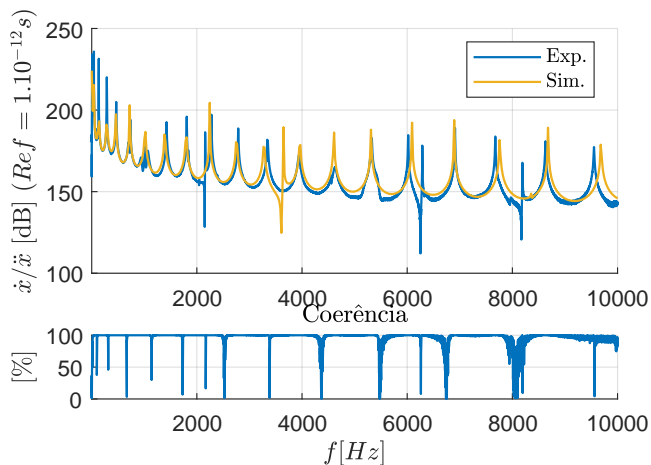


Figura 48 – Caso de  $90^\circ$  com  $R = 75$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo.

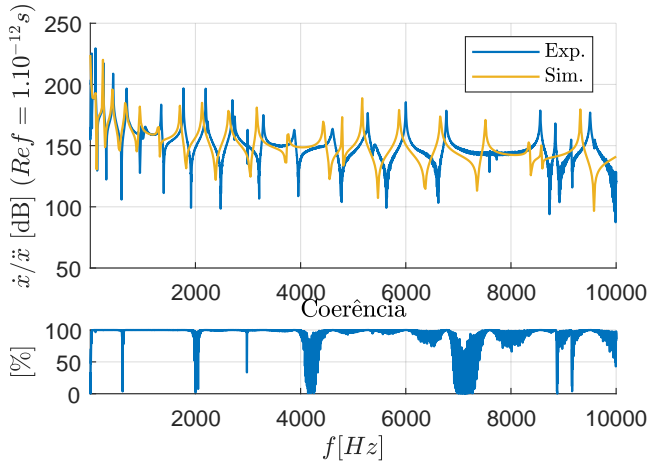


Figura 49 – Caso de  $180^\circ$  com  $R = 75$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto a 100 mm da base.

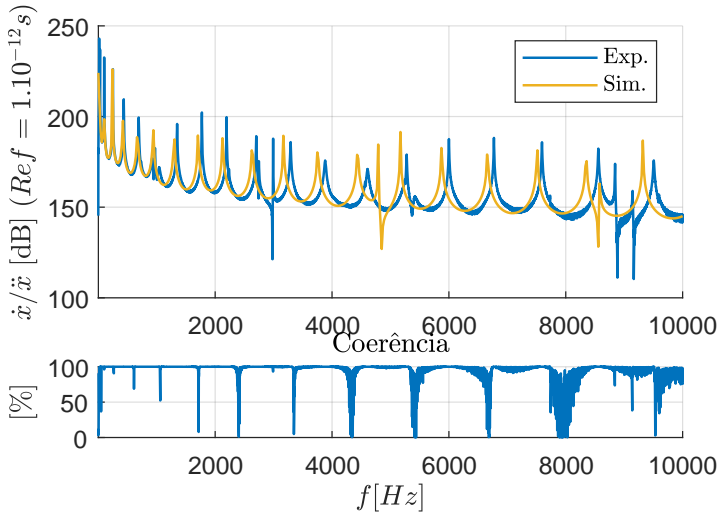


Figura 50 – Caso de  $180^\circ$  com  $R = 75$  mm, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF da extremidade do tubo.



Fica evidente que as propriedades do tubo são bastante sensíveis ao processo de conformação manual. Isso por causa do material que compõe o tubo de descarga ser um aço revestido por uma lâmina de cobre combinados a partir de um processo químico. Essa não-homogeneidade do material torna-o muito sensível às mudanças de comportamento quando deformado plasticamente.

Outro ponto importante é a sensibilidade em relação à geometria. Verificou-se que pequenas variações de ângulo (em torno de  $1^\circ$ ) são suficientes para deslocar alguns modos de frequências mais altas. Essa sensibilidade ficará mais evidente na próxima sessão de ensaios com filtros geométricos.

### 6.3 Filtros Geométricos

Observou-se ao longo do trabalho o potencial de utilizar determinadas curvaturas padrão para reduzir o fluxo de energia vibratória em determinadas faixas de frequência.

Foram testadas estruturas tipo “chip”, variando a quantidade, o raio e o ângulo das células periódicas. O primeiro caso testado foi de um filtro geométrico composto por duas células periódicas, cada uma com aproximadamente  $120^\circ$  e  $R = 27$  mm para cada quarto de seção, como mostra a Figura 51. Foram medidos tubos com excitação no plano e perpendicular ao plano das curvas.



Figura 51 – Filtro geométrico composto por 2 células periódicas com  $\Theta_y \approx 120^\circ$  e  $R = 27$  mm por quarto de célula periódica.

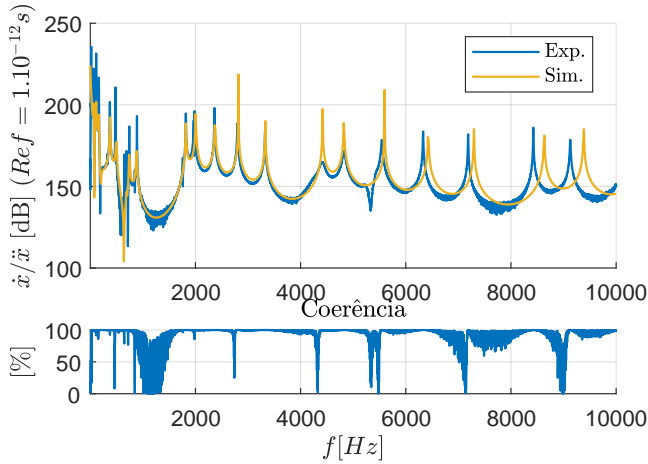


Figura 52 – Resultados do filtro geométrico de 2 células periódicas com  $\Theta_y \approx 120^\circ$  e  $R = 27$  mm por quarto de célula, excitação alinhada ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo.

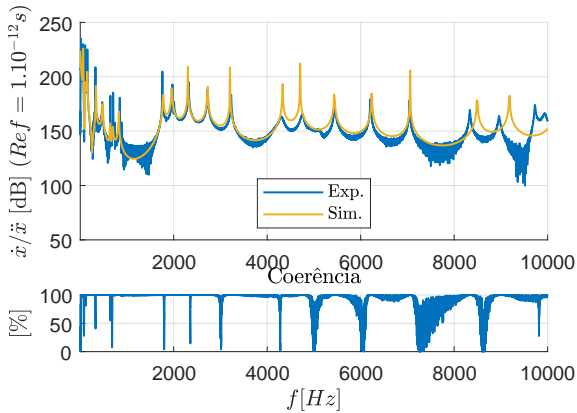


Figura 53 – Resultados do filtro geométrico de 2 células periódicas com  $\Theta_y \approx 120^\circ$  e  $R = 27$  mm por quarto de célula, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo.

Observa-se boa concordância entre os resultados experimental e numérico para esta configuração. Apesar desta geometria ter sido de fácil conformação utilizando um gabarito, algumas dificuldades surgiram em relação ao controle preciso do ângulo de curvatura.

A Figura 53 mostra a mesma configuração quando excitada perpendicularmente ao plano de curvatura, também com resultados bastante próximos.

É interessante notar uma região entre 900 Hz e 1500 Hz, onde há uma queda brusca da coerência na Fig. 52 e uma porção bastante ruidosa na FRF da Fig. 53. Essa região é exatamente o *band-gap* deste filtro, ou seja, é a banda de frequência na qual atua.

O segundo filtro testado possui três células periódicas, cada uma com raio de aproximadamente 12 mm e ângulo  $125^\circ$  por quarto de seção (Fig. 54). Com esta configuração fica mais evidente o efeito do *band-gap*, atuando na região de 1500 Hz até em torno de 7 kHz (Figs. 55 e 56).



Figura 54 – Filtro geométrico composto por 3 células periódicas com  $\Theta_y \approx 125^\circ$  e  $R = 12$  mm por célula.

Observa-se, também, um aumento nas diferenças entre os resultados experimental e numérico. Dentre outros fatores, isto deve-se à deformação do tubo ser mais acentuada (maiores ângulos e menores raios). A região de atenuação se destacou também por haver uma célula periódica a mais, potencializando o efeito do filtro.

Algo que pode ser caracterizada como um problema para esta medição é a diferença entre sensibilidade dos transdutores: o acelerômetro, por ser menos sensível que o vibrômetro *laser*, requer uma amplitude de excitação maior, enquanto que o vibrômetro pode perder o foco caso a vibração do corpo ultrapasse um determinado limite. Portanto, achar um ponto ótimo para a medição pode ser tedioso.

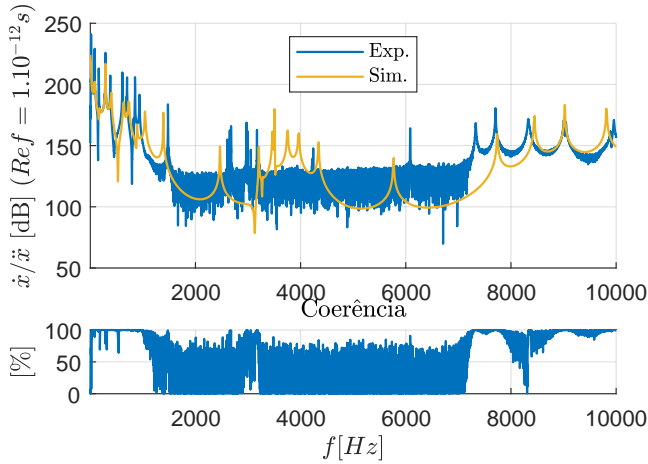


Figura 55 – Resultados do filtro geométrico de 3 células periódicas com  $\Theta_y \approx 125^\circ$  e  $R = 12$  mm por quarto de célula, excitação alinhada ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo.

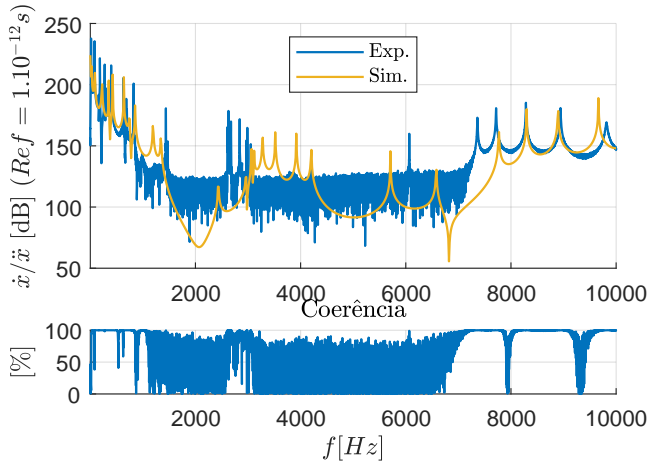


Figura 56 – Resultados do filtro geométrico de 3 células periódicas com  $\Theta_y \approx 125^\circ$  e  $R = 12$  mm por quarto de célula, excitação perpendicular ao plano de curvatura. FRF do ponto na extremidade livre do tubo.

## 7 ANÁLISE DOS EFEITOS DE CURVATURA

Este capítulo apresenta uma análise dos efeitos de diferentes configurações de curvaturas na reflexão e transmissão de ondas. Este conhecimento permitirá um mapeamento dos efeitos da curva no fluxo de potência vibratória. As seções a seguir focam nos casos de vibrações no mesmo plano de curvatura, vibrações perpendiculares a este plano e estruturas periódicas (curvas em sequência).

### 7.1 Efeitos de Vibrações no Plano da Curvatura

Esta análise envolve três parâmetros (raio de curvatura  $R$ , ângulo  $\Theta_y$  e frequência  $f$ ), e um somatório das potências transmitidas é plotado na forma de curvas de nível (Figura 57). Desta maneira, para um dado raio  $R$ , cada linha horizontal da figura mostra o coeficiente de potência transmitida em função da frequência, e as linhas verticais mostram o mesmo coeficiente em função do ângulo de curvatura  $\Theta_y$ .

O material utilizado para as simulações seguintes foi o de um tubo de descarga típico, com  $E = 195$  GPa,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ , e a seção transversal com diâmetro igual a 2,65 mm e espessura de 0,52 mm. Porém, é observado que as mesmas curvas mestras poderiam ser obtidas com qualquer outro tipo de material, apenas mostrando mudanças nas frequências de corte. A Figura 58 mostra um exemplo típico de geometria analisada.

As mudanças no raio simplesmente deslocam as curvas de nível para esquerda ou direita no espectro de frequências, como mostrado na Figura 59 para casos com  $R = 30, 100$  e  $200$  mm. Portanto, esta forma de análise 3D é considerada suficiente para mapear os efeitos no fluxo de potência.

Para um caso arbitrário de  $R = 100$  mm e prescrevendo uma onda incidente de flexão com amplitude unitária, várias regiões comuns podem ser identificadas no coeficiente de transmissão como podem ser vistas na Figura 60.

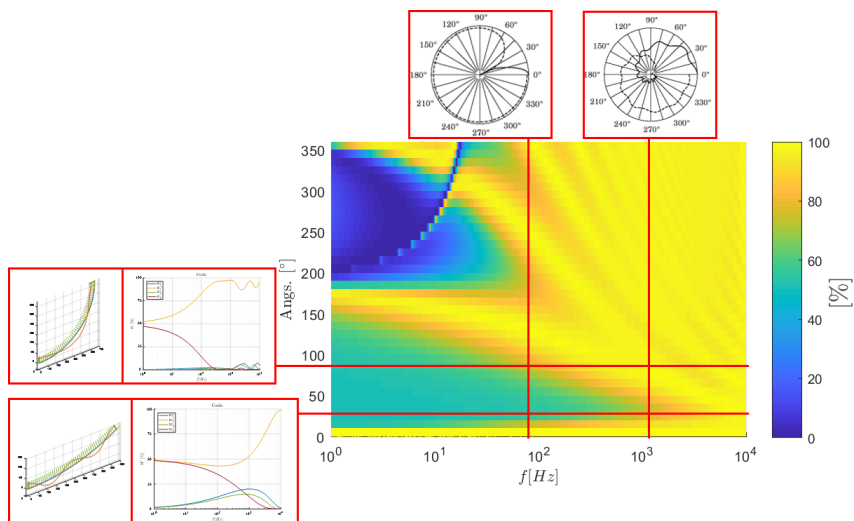


Figura 57 – Exemplo do mapeamento dos efeitos de curvatura.

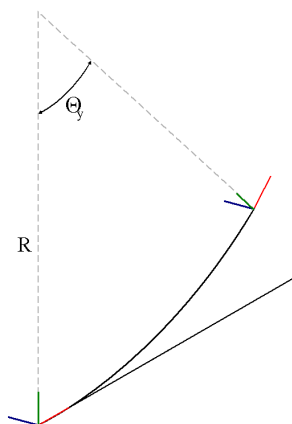
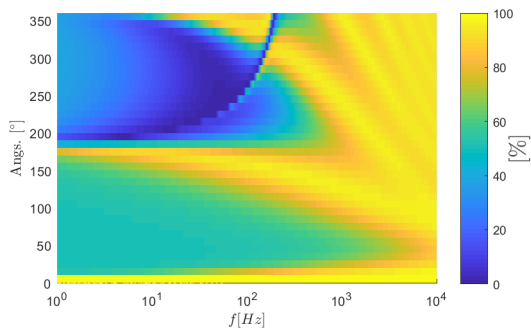
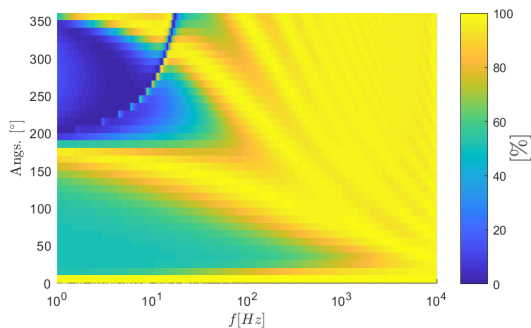


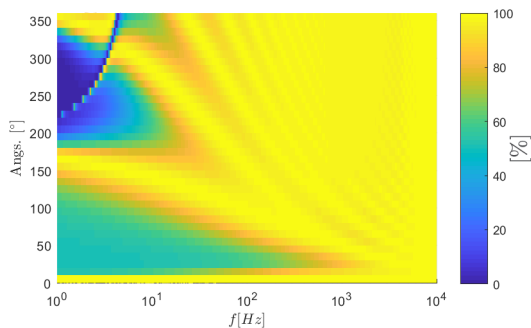
Figura 58 – Exemplo da geometria testada para obter as curvas de nível.



(a)



(b)



(c)

Figura 59 – Coeficientes de potência como curvas mestras para curvaturas simples. Raios variando de  $R = 30 \text{ mm}$  (a), com  $R = 100 \text{ mm}$  (b) e  $R = 200 \text{ mm}$  (c), sob efeito de uma excitação flexural no plano da curvatura. No eixo das abcissas varia-se a frequência em Hz, e nas ordenadas os ângulos  $\Theta_y$  em graus.

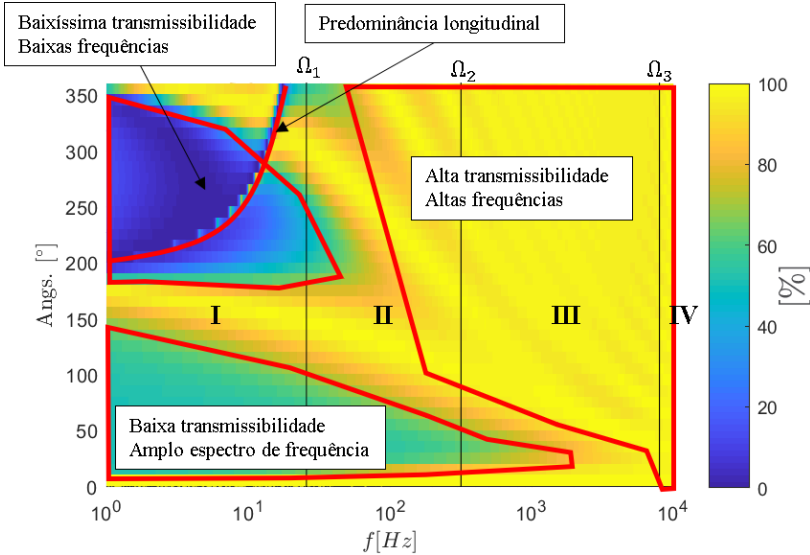


Figura 60 – Mapa da soma dos coeficientes de transmissão para uma excitação flexural para uma curva simples.  $\Theta_y$  variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  e  $R = 100 \text{ mm}$ .

Uma região de baixa transmissão está presente em uma larga faixa de frequências, que ocorre para ângulos  $0^\circ < \Theta_y < 150^\circ$ . Esta área é particularmente interessante por sua característica reflexiva. Uma região de alta transmissão flexural existe na região superior direita da figura, revelando que mudanças no coeficiente se tornam desprezíveis para pequenos comprimentos de onda. A região de menor transmissibilidade pode ser observada na área superior esquerda da figura (entre  $180^\circ < \Theta_y < 350^\circ$ ). Esta região depende fortemente do comprimento de onda de flexão ser maior que  $2\pi R\sqrt{3}$ , que é a condição para a primeira frequência de corte  $\Omega_1$ , e será discutida posteriormente. Uma linha vermelha pode ser observada a partir de  $\Theta_y \approx 200^\circ$  sobre uma descontinuidade na transmissão flexural, causada por uma predominância de transmissão longitudinal (melhor observada na Figura 62).

Conforme observado por Wu e Lundberg (1996), Walsh e White (2000) e Lee, Mace e Brennan (2007), existem três frequências de corte atribuídas aos números de onda de vigas curvas. Seu comportamento característico envolve uma região anterior a  $\Omega_1$  onde todos os números de onda são reais (denominada região I na Figura 60), com dois deles tornando-se complexos na região II e puramente imaginários na região III,



e finalmente um destes voltando a ser um número puramente real na região IV.

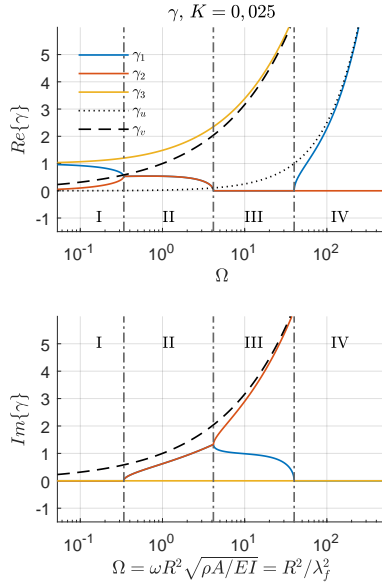


Figura 61 – Variação dos números de onda  $\gamma$  com a frequência adimensional  $\Omega$  para parâmetro de curvatura  $K = 0,025$ .

A Figura 61 mostra a variação do número de onda  $\gamma$  em função de  $\Omega$ . Lee, Mace e Brennan (2007) indicam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  como sendo aproximadamente

$$\Omega_1 \approx \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}, \quad \Omega_2 \approx \sqrt{\frac{EI_z}{R^2 \rho A}}, \quad (7.1)$$

que leva a  $\lambda_f \approx 2\pi R\sqrt{3}$  e  $2\pi R$  respectivamente. Esta última, a frequência de corte, frequência de anel, é expressa por

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (7.2)$$

que depende apenas das propriedades geométricas e do material da viga e ocorre num comprimento de onda longitudinal  $\lambda_e = 2\pi R$ , como já mostrado anteriormente de forma adimensional.

Observa-se que, para uma excitação flexural, existem duas regiões-chave: uma primeira de transmissão média-baixa como  $0^\circ < \Theta_y < 150^\circ$

menor que  $\Omega_3$ , e uma outra de baixíssima transmissão como  $180^\circ < \Theta_y < 350^\circ$  até uma frequência intermediária da região II (entre  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ ). Todas as demais regiões são de alta transmissão de vibração flexural.

A Figura 62 mostra apenas a transmissão longitudinal  $W_u^T$  para a mesma excitação flexural prescrita. Pode-se observar uma região de baixa transmissão à esquerda da figura e uma pequena faixa de aproximadamente 25% na linha de descontinuidade.

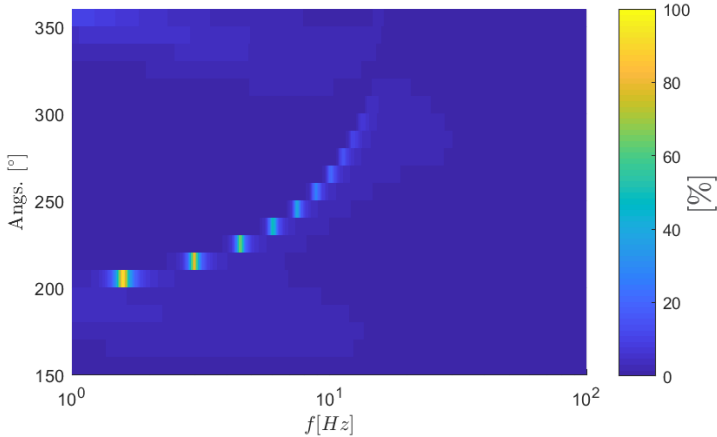


Figura 62 – Destaque da região de forte transmissão longitudinal sob excitação de onda flexural dentro-do-plano.  $\Theta_y$  variando de  $150^\circ$  a  $360^\circ$  e  $R = 100 \text{ mm}$ .

Para a linha que representa a transmissão longitudinal, a seguinte expressão aproximada foi obtida:

$$\Omega_d(\Theta_y) \approx 0.9\Omega_1 - \frac{4.3}{\Theta_y^2 + \sqrt{\Theta_y}}, \quad (7.3)$$

$$\approx \frac{0.3\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}}}{R^2} - \frac{4.3}{\Theta_y^2 + \sqrt{\Theta_y}}, \quad (7.4)$$

que depende apenas do ângulo  $\Theta_y$  e de  $\Omega_1$ , pois a descontinuidade cresce assintoticamente a esta frequência de corte, como mostrado na Figura 60.

A Figura 63 mostra uma configuração hipotética na qual o *loop* continua até  $\Theta_y = 1080^\circ$ , ou seja, percorre três voltas no mesmo plano de curvatura. Observa-se que a transmissão longitudinal aproxima-se de  $\Omega_1$

enquanto são destacadas as regiões explicadas anteriormente. A partir desta figura também pode-se entender que a região mais ampla da atenuação só ocorre para curvas com  $\Theta_y < 180^\circ$ .

Portanto, caso deseja-se atingir maiores níveis de atenuação, deve-se buscar ângulos mais acentuados, acima de  $180^\circ$ , e raios menores para aumentar as frequências de corte, fazendo uso da região de baixa transmissibilidade. Caso contrário, numa situação onde não se consiga atingir uma alta tortuosidade na geometria, deve-se buscar ângulos abertos (menores que  $90^\circ$ ) para usufruir da região de baixa transmissibilidade em amplo espectro de frequência.

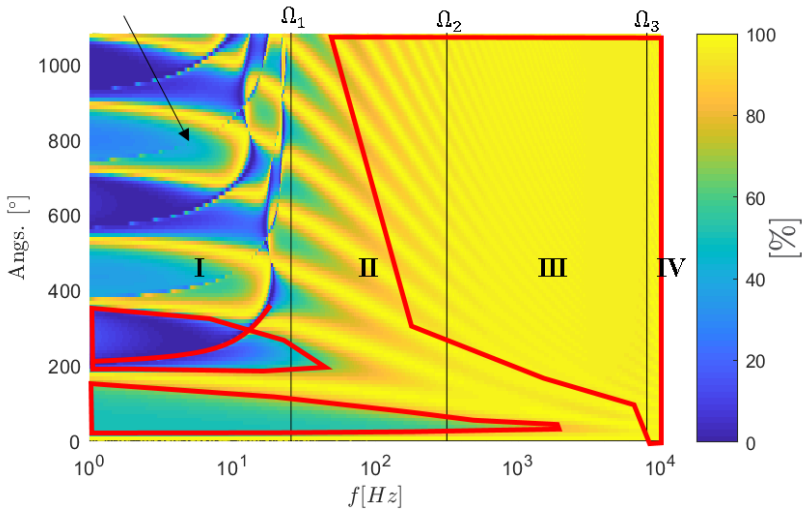


Figura 63 – Mapa de cores hipotético mostrando  $\Theta_y$  crescendo até  $1080^\circ$ , com regiões de interesse destacadas sendo mantidas.

## 7.2 Efeitos de Vibrações Fora-do-Plano da Curvatura

Os resultados obtidos para vibrações perpendiculares ao plano da curvatura são quase idênticos aos da vibração no plano (Figura 64). Estes resultados foram obtidos prescrevendo uma onda de flexão unitária incidindo fora do plano, e calculando a soma dos coeficientes de transmissão.

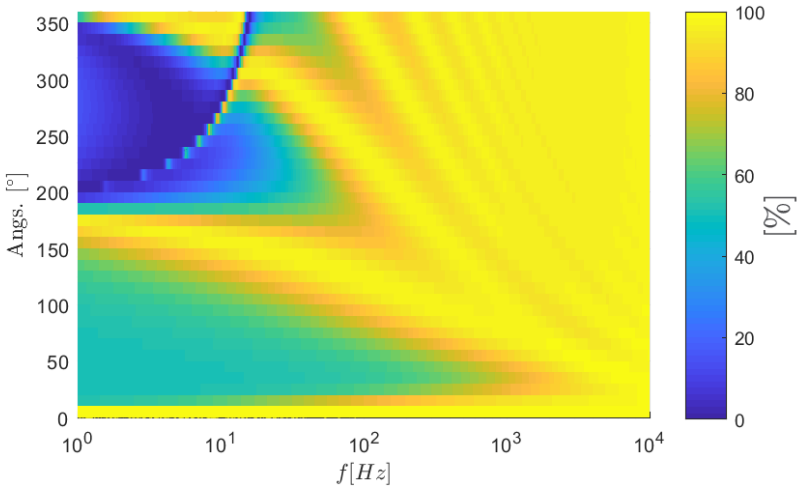


Figura 64 – Soma dos coeficientes de transmissão de uma curva sob excitação de uma onda de flexão fora-do-plano, plotadas como curvas de nível.

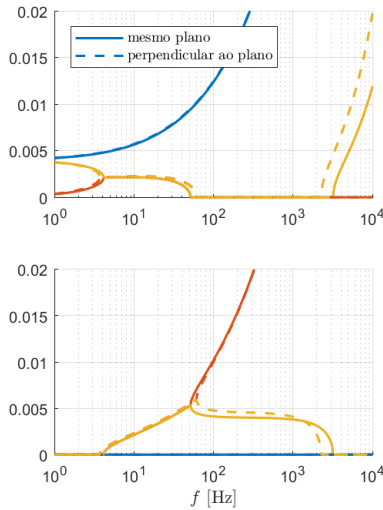


Figura 65 – Semelhança entre diferentes números de onda. Linhas cheias representam vibrações dentro do plano e pontilhadas, fora do plano. Caso hipotético com  $R = 250$  mm.

A principal diferença é o acoplamento entre as vibrações torcional e de flexão. Entretanto, dado que os números de onda fora do plano são bastante similares aos no plano de curvatura (evidenciado na Fig. 65), toda a explicação sobre as regiões de transmissão continua válida por analogia (ondas de flexão dentro do plano relacionam-se com aquelas fora do plano, enquanto as longitudinais relacionam-se com as torcionais).

Logo, faz-se necessária uma nova abordagem para investigar os efeitos causados por curvaturas em 3D.

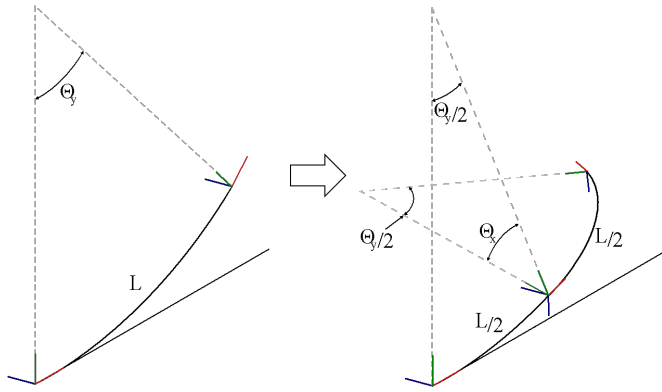


Figura 66 – Configuração proposta para investigar efeitos de curvatura sobre vibrações fora-do-plano. Com ângulo de arfagem sendo  $\Theta_y$ , e ângulo de rolagem,  $\Theta_x$ .

Considere uma curva simples com ângulo  $\Theta_y$  (mesmo da seção anterior) e comprimento  $L$  com uma onda flexural prescrita, inicialmente no mesmo plano da curvatura. Esta curva será dividida ao meio ( $\Theta_y/2$ , logo  $L/2$ ) e será aplicada uma “rolagem” na segunda seção da curvatura (rotação sobre o eixo  $x/s$  no ponto da divisão), com ângulo  $\Theta_x$  (Fig. 66).

Serão testados os ângulos de arfagem,  $\Theta_y$ , de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , rolagem,  $\Theta_x$ , de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , e frequência  $f$  de  $0 \text{ Hz}$  a  $10 \text{ kHz}$ . Como agora têm-se três parâmetros variáveis, a análise em curvas de nível não será suficiente se for aplicada diretamente. Portanto, utilizou-se uma média da potência em função da frequência, na forma

$$\bar{W} = \frac{1}{n_f} \sum_{i=1}^{n_f} W, \quad (7.5)$$

para que a frequência seja abstraída, permitindo que as curvas sejam

plotadas em função apenas de  $\Theta_x$  e  $\Theta_y$ . Para simplificar ainda mais, nestas análises a potência observada é uma soma de todos os coeficientes de transmissão (longitudinal, flexão dentro do plano e fora do plano, e torcional)

$$W = W_u^T + W_w^T + W_v^T + W_{\theta x}^T. \quad (7.6)$$

Desta forma, simplifica-se a quantidade de detalhes sobre a direcionalidade da onda.

Os resultados da Figura 67 referem-se a uma curva de raio  $R = 6 \text{ mm}$ , onde o eixo horizontal mostra a variação do ângulo de arfagem  $\Theta_y$  e o eixo vertical mostra a variação do ângulo de rolagem  $\Theta_x$ . Portanto, tem-se uma visão geral de como a transmissibilidade ocorre para cada combinação de curva/rolamento.

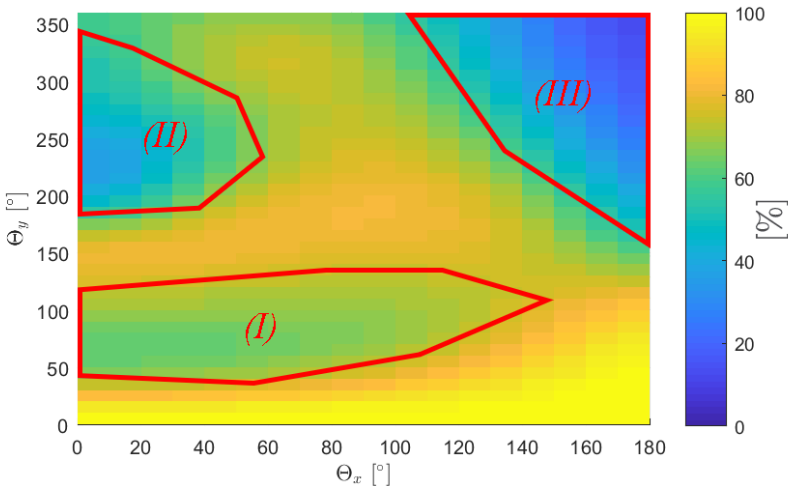


Figura 67 – Transmissão média condensada para uma vibração unitária flexural fora do plano, excitando uma curva de  $R = 6 \text{ mm}$

Pode-se identificar imediatamente algumas áreas de baixa transmissão, destacadas por contornos vermelhos: a região (I) esquerda, com curvas de  $\Theta_y$  entre  $30^\circ$  e  $120^\circ$ , e rolagem até  $140^\circ$  (cerca de 37% de atenuação); uma pequena região (II) com cerca de 66% de atenuação, com curvas de  $180^\circ$  até  $330^\circ$ , e rolagem até  $60^\circ$ ; e finalmente a região (III) de menor transmissão (alcançando marcas acima dos 88% de atenuação), com curvas de  $\Theta_y > 180^\circ$  e  $\Theta_x > 120^\circ$ .

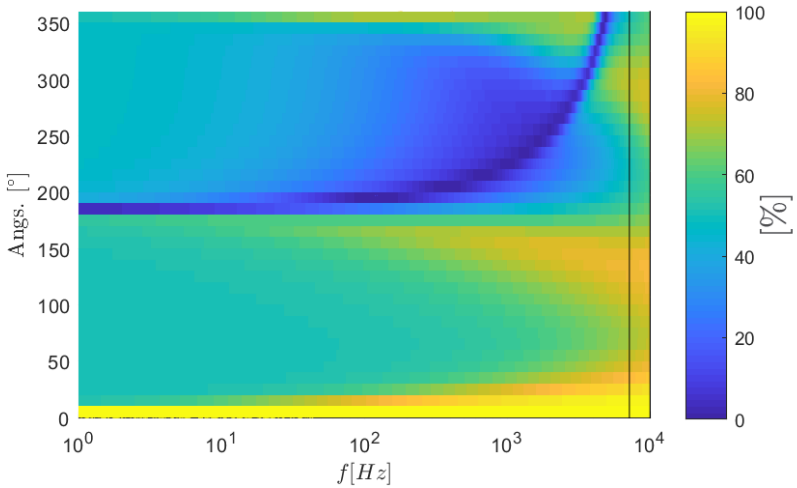


Figura 68 – Transmissão de potência para uma vibração flexural fora-do-plano sobre uma única curva de  $R = 6 \text{ mm}$  (sem a aplicação da “rolagem”).

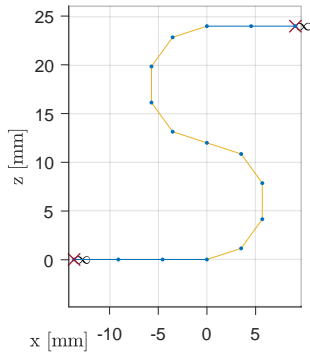


Figura 69 – Melhor configuração possível para um raio pequeno ( $R = 6 \text{ mm}$  neste caso).

Pode-se explicar a localização destas regiões ao retomar a análise de curvas de nível para ondas no plano de curvatura, desta vez calculando para o mesmo raio de  $R = 6 \text{ mm}$ , mostrado na Figura 68. Para um raio pequeno, a primeira frequência de corte  $\Omega_1 \approx \sqrt{EI_z/\rho A}/3R^2$  aumenta,

e neste caso ocorre em  $\approx 7,2 \text{ kHz}$ . Portanto, tem-se a área de grande atenuação para  $\Theta_y > 180^\circ$  exagerada nesta faixa de frequência até  $10 \text{ kHz}$ .

Portanto, para um raio pequeno, a melhor configuração possível para reduzir a transmissão da vibração é uma série de curvas com  $\Theta_y/2 = 360^\circ$  alinhadas num mesmo plano, formando um "S", como pode ser visualizado na Figura 69.

Aumentando o raio, a região de baixa transmissão para ângulos de arfagem  $\Theta_y > 180^\circ$  desaparece, como mostra a Figura 70.

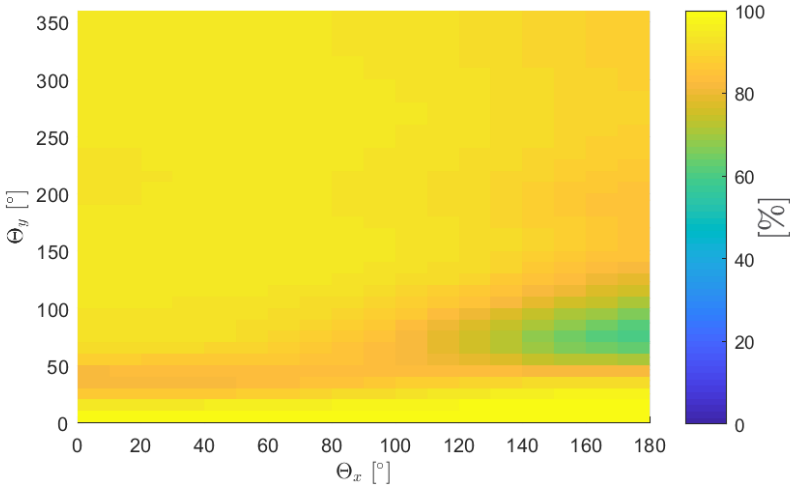


Figura 70 – Transmissão média condensada para vibração flexural fora-do-plano atuando sobre uma curva de  $R = 50 \text{ mm}$ .

Este fenômeno está relacionado às baixas frequências de corte, que resultam na região de alta transmissibilidade nas altas frequências, discutida na seção anterior. Portanto, para  $50 \text{ mm}$  de raio, pode-se focar na região de média para baixa transmissibilidade, cujo ângulo da curvatura  $\Theta_y$  varia de  $20^\circ$  a  $120^\circ$ , e ângulos de rolagem maiores que  $95^\circ$ .

Ao aumentar ainda mais o raio, observa-se a tendência de obter uma transmissão uniforme para todas as configurações, desde que a frequência de anel diminua, aumentando a região de alta transmissão em todo o espectro. Entretanto, como mostrado na Figura 71, para  $R = 100 \text{ mm}$  têm-se uma concentração de atenuação na região de  $30^\circ < \Theta_y < 60^\circ$  e valores altos de  $\Theta_x$ .



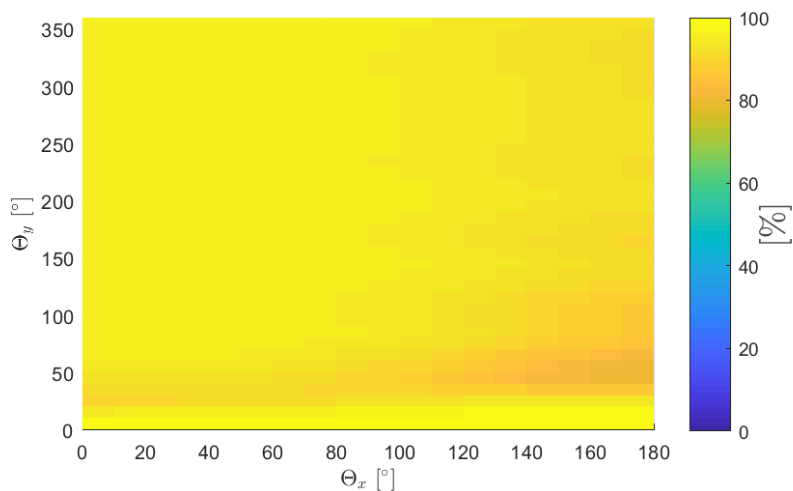


Figura 71 – Transmissão média condensada para vibração flexural fora-do-plano atuando sobre uma curva de  $R = 100$  mm.

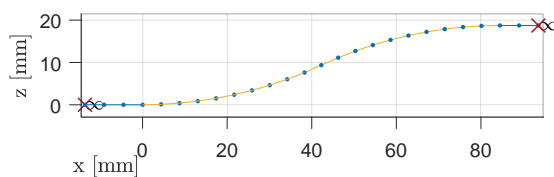


Figura 72 – Melhor configuração possível para um raio grande ( $R = 100$  mm neste caso).

Em geral, sob uma perspectiva de análise vibratória, o melhor cenário é quando a estrutura possui uma sucessão de curvas com  $2\Theta_y \approx 50^\circ$  (Fig. 72), alinhadas no mesmo plano. Evidentemente, para estruturas mais

complexas, o raio da curva deve ser levado em consideração para melhores resultados.

### 7.3 Curvaturas em Sequência - Estruturas Periódicas

Considere uma aplicação composta por pequenas células idênticas, igualmente espaçadas. Estas células serão denominadas células periódicas. Ao utilizar este tipo de configuração, é natural focar em algum resultado relacionado ao espectro de frequência. Neste caso, tem-se mais especificamente regiões no espectro de frequência onde a transmissão da potência vibratória é atenuada. Estas regiões em particular são denominadas *band gaps* ou *stop bands*. Segundo Søe-Knudsen e Sorokin (2010), esse comportamento pode ser explicado pela interferência das ondas refletidas sobre as transmitidas em cada trecho de célula periódica.

Søe-Knudsen e Sorokin (2010) analisaram três casos. Primeiramente, utilizaram a teoria de Floquet juntamente com o método das equações integrais de contorno (*boundary integral equations method*) numa estrutura infinitamente longa para determinar a localização das bandas de atenuação. Em seguida, ainda considerando um meio infinito, analisaram os efeitos de um número finito de células periódicas. Por último, utilizaram uma abordagem numérica para analisar uma estrutura finita usando o *software* comercial ANSYS 11.

Portanto, essa seção será uma extensão do trabalho de Søe-Knudsen e Sorokin (2010), porém utilizando uma abordagem numérica para testar diferentes geometrias periódicas e observar seus respectivos comportamentos.

#### 7.3.1 Relevância da quantidade de células periódicas

Para analisar os efeitos da periodicidade, é importante encontrar um número razoável de células (Fig. 73) que mantenham relevância dos efeitos sem que haja mascaramento de informações. Portanto, esta subseção tratará especificamente de encontrar o menor número de células que não alterem os resultados de potência transmitida.

Testes foram realizados com uma configuração arbitrária contendo três seções curvas em sequência: a primeira e a terceira com  $\Theta_y = 90^\circ$ , a segunda  $180^\circ$ , todas com  $R = 80 \text{ mm}$ , a segunda e terceira “roladas” com  $\Theta_x = 180^\circ$ , adquirindo uma forma conforme mostrada na Figura 74. Por fim, esta seção encurvada está acoplada a uma parte reta de  $50 \text{ mm}$ , também mostrada na mesma figura.

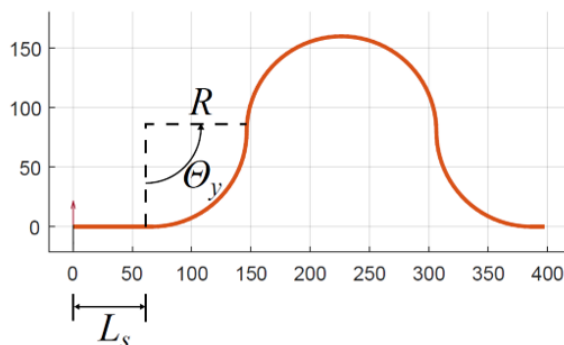


Figura 73 – Exemplo de célula periódica utilizada nas simulações.

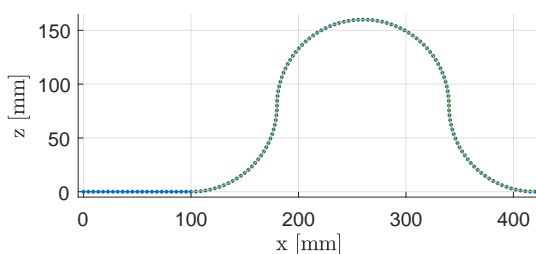


Figura 74 – Célula periódica para teste de relevância.  $\Theta_y = 90^\circ$  e  $R = 80 \text{ mm}$ .

A Figura 75 mostra que, com a abordagem numérica descrita anteriormente, a partir de 2 células as alterações nos níveis de transmissão são poucas, sendo significativas apenas nas faixas de  $475 \text{ Hz}$  e acima de  $1 \text{ kHz}$ , e observa-se que as frequências de *band gaps* permanecem constantes. A partir de cinco células, essas diferenças podem ser desprezadas, confirmando as conclusões de uma análise similar realizada por Sørensen e Sorokin (2010).

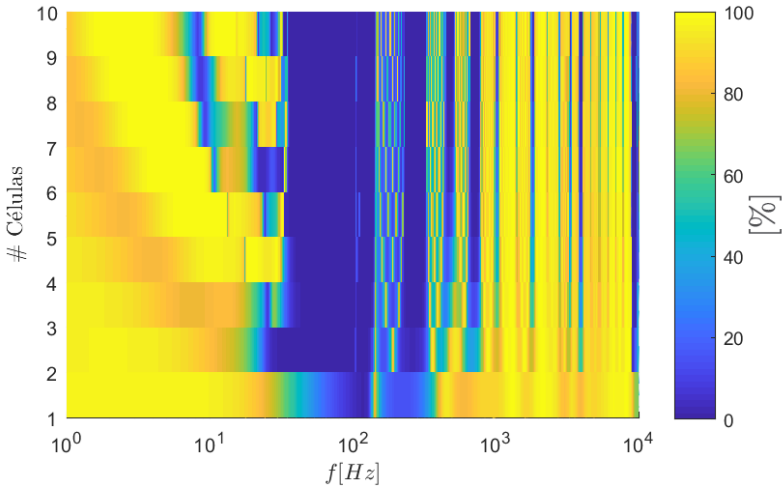


Figura 75 – Variação do fluxo de potência  $W$  com o número de células periódicas.

Portanto, nas subseções posteriores serão analisadas diferentes aplicações com apenas cinco células periódicas de forma a obter informações confiáveis e garantir a rapidez nas simulações.

### 7.3.2 Análise de sensibilidade dos parâmetros das células periódicas

Neste item será analisada a influência dos parâmetros de uma estrutura periódica no fluxo de energia vibratória. Portanto, as mudanças no fluxo foram catalogadas a partir de várias séries de simulações, variando cada parâmetro separadamente de uma geometria com cinco células periódicas. O material utilizado é aço cobreado, com módulo de elasticidade  $E = 195 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , densidade  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ; e seção transversal circular com diâmetro  $2,65 \text{ mm}$ , espessura de  $0,52 \text{ mm}$ .

A excitação padrão escolhida foi uma onda flexural incidente unitária alinhada ao plano de curvatura.

#### 7.3.2.1 Vigas com Variação Simultânea do Raio

Primeiramente, foi analisada a variação do raio em todas as cinco células, simultaneamente, de  $6 \text{ mm}$  a  $100 \text{ mm}$ . Na Figura 77 pode-se observar os resultados do primeiro caso, cujas geometrias inicial e final

estão mostradas na Figura 76 (A figura (a) representa a geometria de 6 mm da Fig. 77. A figura (b), 100 mm).

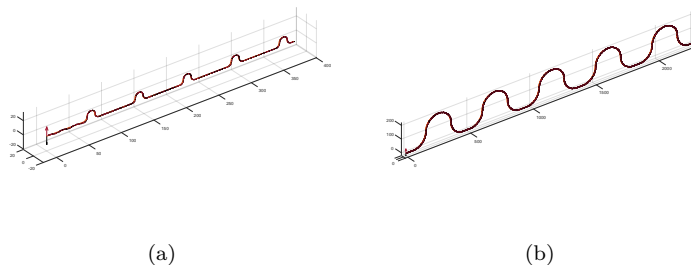


Figura 76 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação dos raios de todas as células simultaneamente.

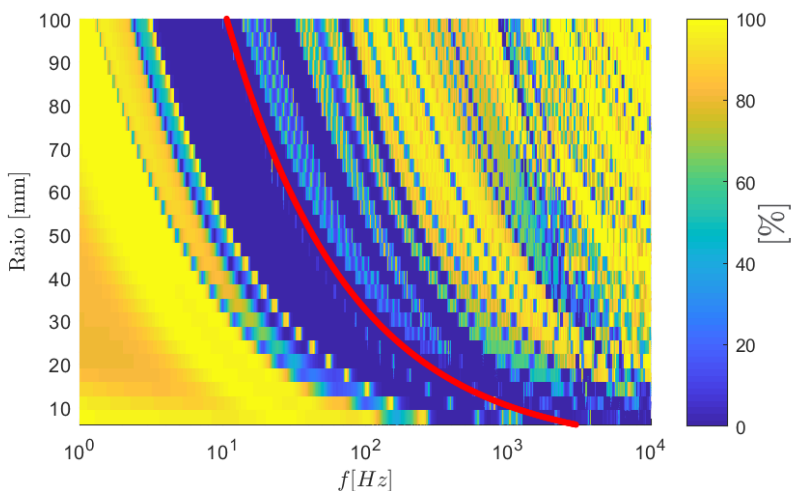


Figura 77 – Variação do fluxo de potência  $W$  em relação à variação simultânea do raio de todas as células periódicas.

Observa-se que, com o aumento do raio das células periódicas, a *band gap* é deslocada para frequências mais baixas, numa taxa que acompanha a linha vermelha. Esta linha foi obtida igualando o comprimento

de onda de flexão dentro do plano com o comprimento total de uma célula, colocando-se o raio em evidência, na forma

$$R = \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\rho A}} - L_s \right] \frac{180}{4\pi\Theta_y}, \quad (7.7)$$

onde  $L_s$  é o comprimento da seção reta que separa as curvas, e  $\Theta_y$  é o ângulo em graus. Esta equação da linha sugere que há uma relação direta entre *band gap*, comprimento da célula e comprimento de onda de flexão.

Pode-se observar que a frequência da *band gap* varia mais rapidamente para raios pequenos. Porém, quanto maior o raio, menor a taxa dessa variação.

### 7.3.2.2 Vigas com Variação Simultânea do Ângulo

Na sequência, variou-se o ângulo  $\Theta_y$ , também simultaneamente, em todas as cinco células, de  $0^\circ$  a  $135^\circ$ . A Figura 79 mostra a variação simultânea do ângulo de todas as células periódicas, como mostrado na Fig. 78. De baixo para cima, tem-se as configurações de  $0^\circ$  (tubo reto) até  $135^\circ$ . Observa-se um comportamento semelhante ao anterior, com frequência de início da *stop band* diminuindo com o aumento do ângulo.

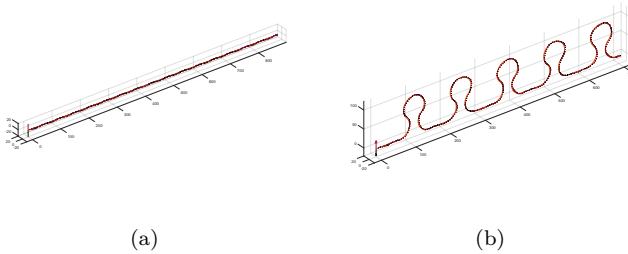


Figura 78 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação dos ângulos de todas as células simultaneamente.

A linha vermelha da Figura 79 também foi obtida através da relação entre o comprimento da célula periódica e o comprimento da onda de flexão, com  $\Theta_y$  em evidência, dada pela equação

$$\Theta_y = \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\rho A}} - L_s \right] \frac{180}{4\pi R}, \quad (7.8)$$

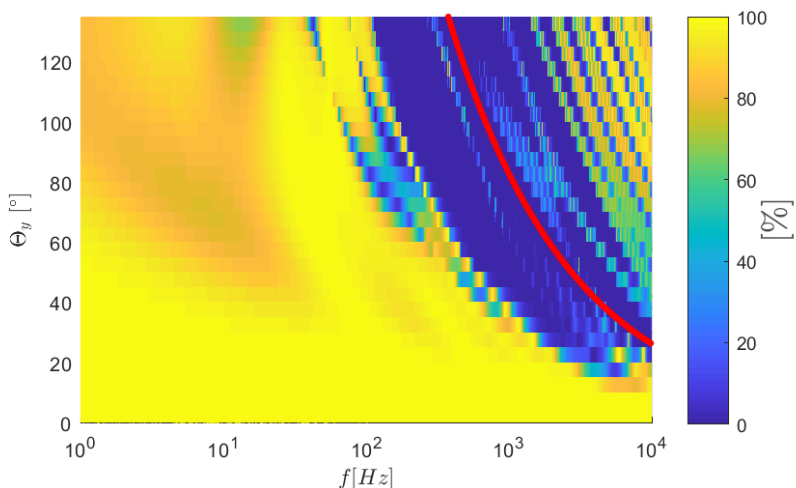


Figura 79 – Variação do fluxo de potência  $W$  com o aumento do ângulo  $\Theta_y$  de todas células periódicas simultaneamente.

e também mostra a taxa de variação da *band gap* com o ângulo das células periódicas, que, mais uma vez, sugere uma forte relação entre comprimento da célula com o comprimento de onda de flexão.

### 7.3.2.3 Vigas com Variação Linear Crescente do Raio

Nesta seção, foram analisados casos de raios crescentes, *i.e.*, a variação cada célula ocorre obedecendo uma inclinação, onde a célula de uma extremidade permanece constante com  $R = 6 \text{ mm}$ , e a da outra extremidade varia de  $R = 6 \text{ mm}$  a  $R = 100 \text{ mm}$  (Figura 80). A Figura 81 mostra os resultados para o caso de raios crescentes.

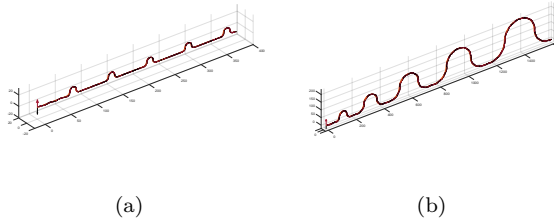


Figura 80 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação crescente dos raios.

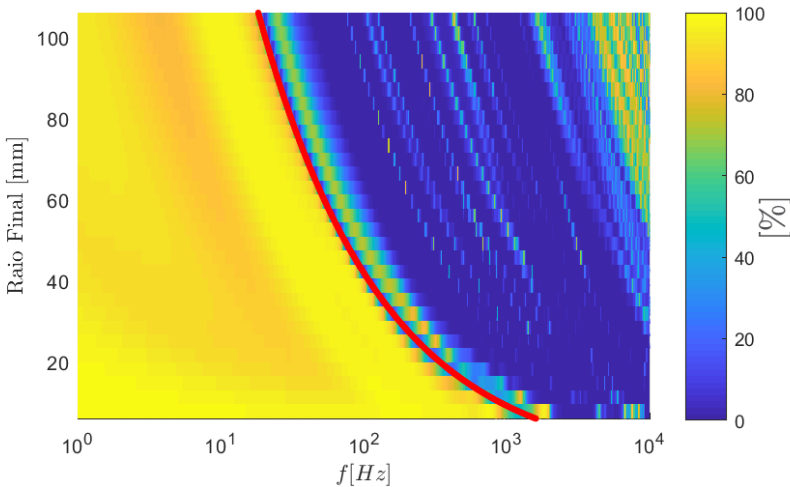


Figura 81 – Variação do fluxo de potência  $W$  com o aumento do raio da última célula periódica. O raio das células intermediárias crescem numa interpolação linear entre a primeira e a última.

Percebe-se um comportamento semelhante ao primeiro caso (variação do raio de todas as células simultaneamente), porém desta vez com a largura da banda de atenuação aumentando com o aumento do raio. Isto indica um comportamento cumulativo no qual há uma soma dos efeitos de cada célula periódica. Esta informação é importante para o projeto de novos filtros utilizando a abordagem de estruturas periódicas.



### 7.3.2.4 Vigas com Variação Linear Decrescente do Raio e Alternando a Orientação das Células

Na sequência, são analisadas células com raio decrescente usando a mesma metodologia anterior, com a primeira célula também variando de 6 a 100 *mm*. Após os resultados com raios decrescentes, decidiu-se testar as versões antissimétricas de suas respectivas geometrias. As Figuras 83, 85 e 87 mostram os resultados para estes casos, enquanto as Figs. 82, 84 e 86 mostram suas respectivas geometrias.

Percebe-se que a forma de transmitir energia é muito semelhante, apesar de, nos casos simétricos, *i.e.*, onde todas as curvas estão alinhadas do mesmo lado, a banda de atenuação inicia numa frequência ligeiramente maior, segundo a referência da linha vermelha. Esta linha de referência também foi obtida por ajuste, e escrita na forma

$$R_a = -6 + 0,55 \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\rho A}} - L_s \right] \frac{180}{4\pi\Theta_y}, \quad (7.9)$$

sendo  $R_a$  o raio variante da última célula para os casos crescentes ou da primeira célula para os casos decrescentes.

Entretanto, mesmo que a *band gap* inicie numa frequência maior, há uma região de pequena atenuação nas baixas frequências, dada pela cor amarela-escura. Nesta região, o coeficiente de transmissão máximo é de 85%, aproximadamente, enquanto a menor transmissão em baixas frequências dos casos antissimétricos aproxima-se de 96%.

Portanto, pode-se concluir que não há um caso que se destaca em relação aos demais neste formato de geometrias crescentes ou decrescentes de células periódicas, e alerta-se apenas para a frequência de início da *stop band*.

Finalmente, foram analisados os efeitos de antissimetria para os casos crescente e decrescente, com as células alternando sua orientação. Lembra-se também que todos os casos possuem as mesmas propriedades mecânicas do material e geométricas da seção transversal iguais às de um tubo de descarga convencional.

Conclui-se que os efeitos de antissimetria são bastante similares aos anteriores, com pequenas diferenças em regiões específicas do espectro de frequência (como era esperado). O comportamento global permanece o mesmo, com o aumento da faixa de frequência do *band gap* com o aumento da inclinação dos raios. Entretanto, a única diferença significativa é a frequência do início do *band gap*, que diminui em relação aos resultados simétricos.

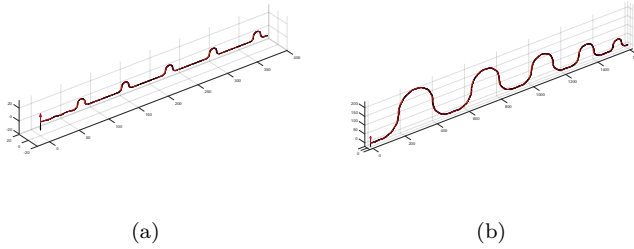


Figura 82 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos testados para a variação decrescente dos raios.

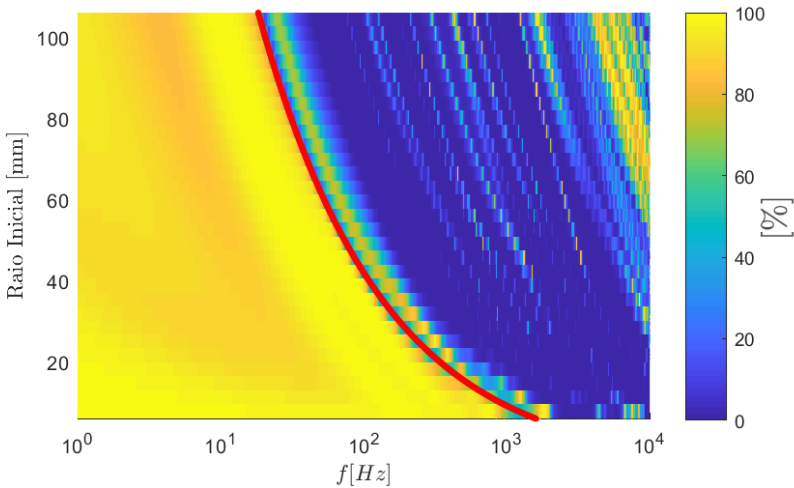


Figura 83 – Variação do fluxo de potência  $W$  com o aumento do raio da primeira célula periódica. O raio das células intermediárias crescem numa interpolação linear entre a primeira e a última.

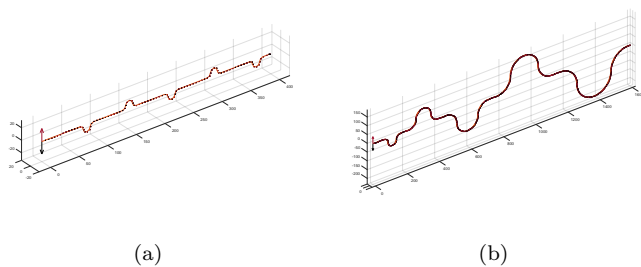


Figura 84 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos antissimétricos crescentes, evidenciando a progressão das mesmas em cada simulação.

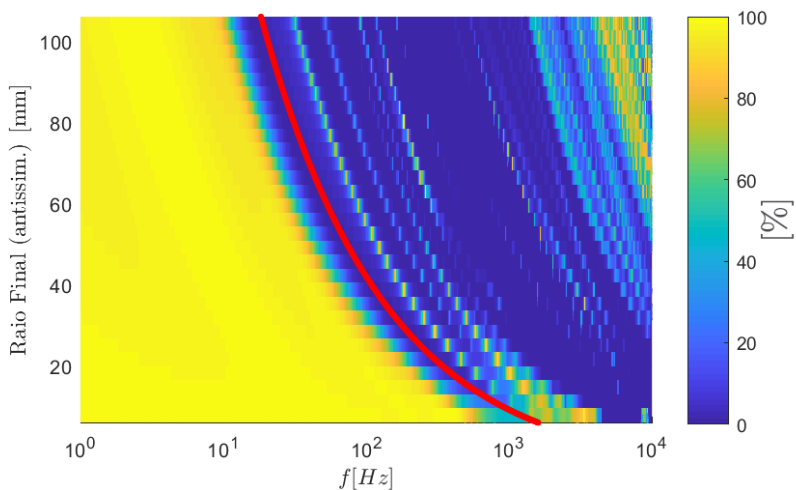


Figura 85 – Resultados de potência transmitida para o caso crescente antissimétrico. A interpolação linear entre os raios da primeira e última célula se mantém, adicionando-se apenas a rolagem  $\Theta_x = 180^\circ$  ao final de cada seção.

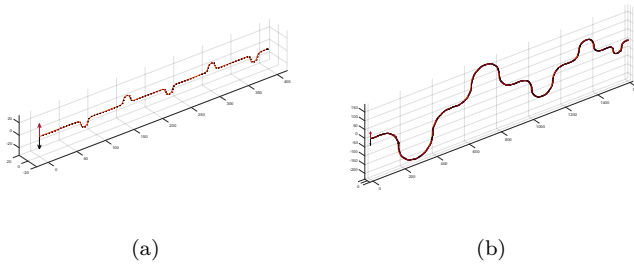


Figura 86 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos antissimétricos decrescentes.

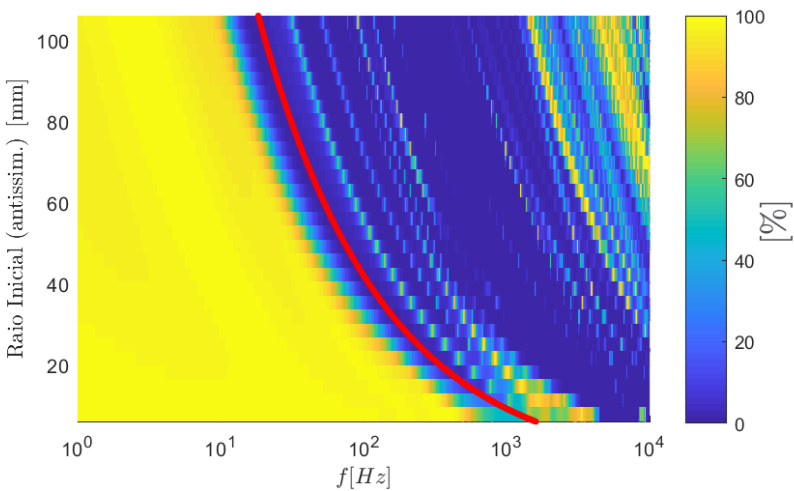


Figura 87 – Resultados de potência transmitida para o caso decrescente antissimétrico. A interpolação linear entre os raios da primeira e última célula se mantém, adicionando-se apenas a rolagem  $\Theta_x = 180^\circ$  ao final de cada seção.

### 7.3.2.5 Análise de uma Estrutura tipo Mola

A Figura 89 mostra o efeito da variação do número de espiras para uma estrutura do tipo mola, mostrada na Fig. 88. O material utilizado é o mesmo de aço cobreado das análises anteriores, a seção transversal da mola também igual à do tubo de descarga, o passo da mola é de 10 mm e um raio arbitrário de 20 mm. A princípio, observa-se que quanto maior o número de espiras a região de atenuação nas baixas frequências se alonga mais enquanto a região de altas frequências, a partir de aproximadamente 500 Hz, permanece inalterada.

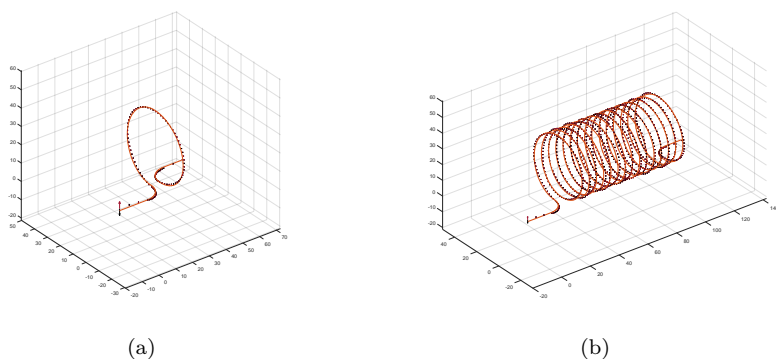


Figura 88 – Geometrias do primeiro (a) e último (b) casos de uma estrutura tipo-mola variando o número de espiras. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade.

As simulações indicaram que esta região de atenuação de baixas frequências está relacionada ao movimento de corpo rígido da mola, como mostrado na Figura 90. Isto é, nessas frequências, a mola atua como uma massa concentrada, valendo-se apenas da sua inércia rotatória e rigidez das extremidades semi-infinitas.

Para as altas frequências, observa-se uma quantidade significativa de picos e vales, relacionados às frequências cujo comprimento de onda são da mesma ordem de grandeza que o comprimento de cada espira. Entretanto, considera-se uma região de alta transmissibilidade, uma vez que os vales possuem uma largura de banda pequena e podem ser desprezadas.

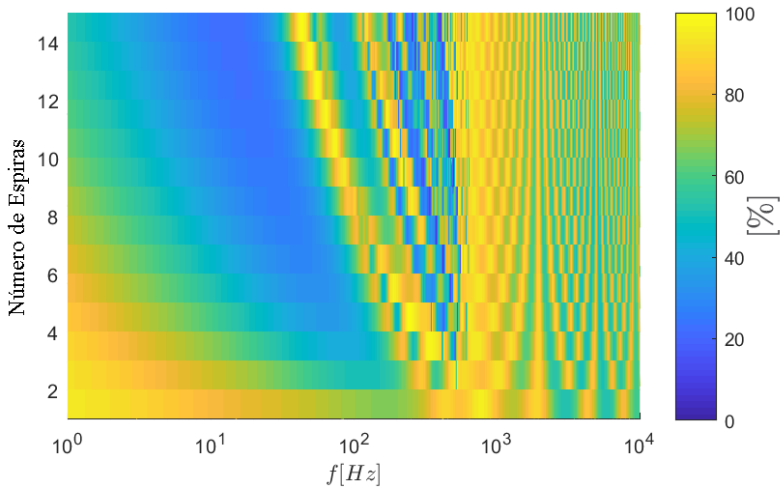


Figura 89 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o número de espiras. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade.

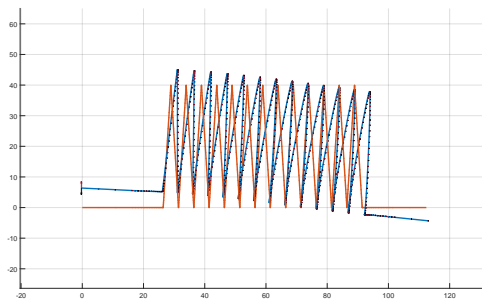


Figura 90 – Exemplo de vibração de corpo rígido da mola em aproximadamente 16,8 Hz para 12 espiras (localizado bem no meio da região de baixa transmissão da Fig. 89).

Portanto, sabendo-se que o número de espiras apenas altera potencialmente as baixas frequências, decidiu-se simular também a variação do raio para uma estrutura tipo mola com oito espiras ao invés de cinco. Isto pois algumas faixas de frequência não mostraram uma diferença de comportamento significativa com apenas cinco espiras. A Figura 93 mostra como em uma mola de oito espiras o coeficiente de transmissão varia quando seu raio varia de 6 mm a 36 mm (geometrias na Fig. 91, respectivamente).

Observa-se, novamente, uma diminuição nas frequências que formam a *band gap*, com um comportamento similar ao da variação do número de espiras. Inclusive, o mesmo comportamento de corpo rígido é observado na região de baixa transmissibilidade. A Figura 92 mostra esse fenômeno para uma estrutura tipo mola de passo 5 mm, 27 mm de raio, em 20,6 Hz.

Outro teste interessante é o do tamanho do passo da mola, cujo resultado encontra-se na Figura 95. Nesta simulação em particular, variou-se o passo da mola de 5 mm a 20 mm, com 8 espiras, 20 mm de raio (referência das geometrias na Fig. 94).

O passo da mola ainda controla a região de baixa frequência, porém desta vez os resultados de baixa transmissibilidade concentram-se em passos pequenos. Isso pode ser explicado pois, quanto maior o passo, menos brusca é a descontinuidade entre a parte reta e a parte curva. Também, aumenta-se a inércia rotatória do conjunto, inibindo o comportamento de corpo rígido.

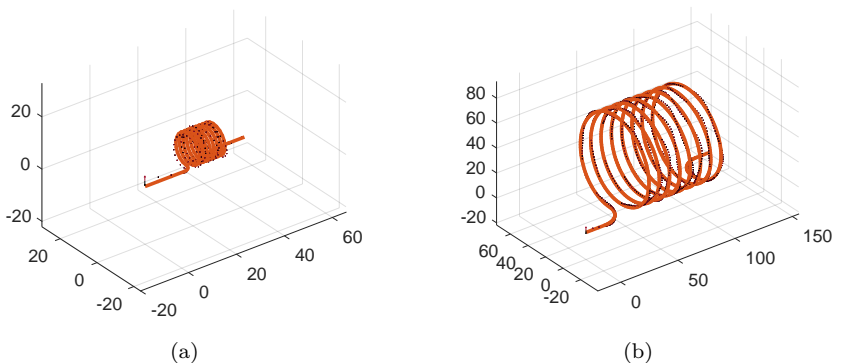


Figura 91 – Geometrias do primeiro (a) ( $R = 6$  mm) e último (b) ( $R = 36$  mm) casos de uma estrutura tipo-mola respectivamente.

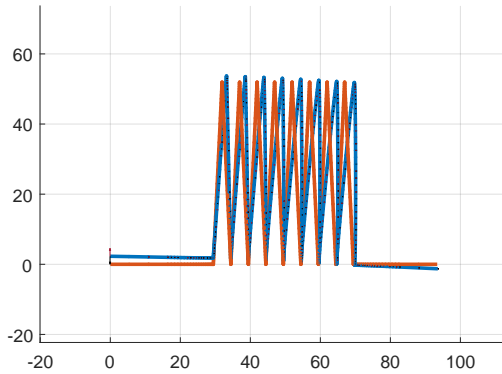


Figura 92 – Detalhe da região de baixa transmissibilidade com a mola tendo um comportamento de corpo rígido. Raio  $R = 27$  mm,  $f = 20,6$  Hz.

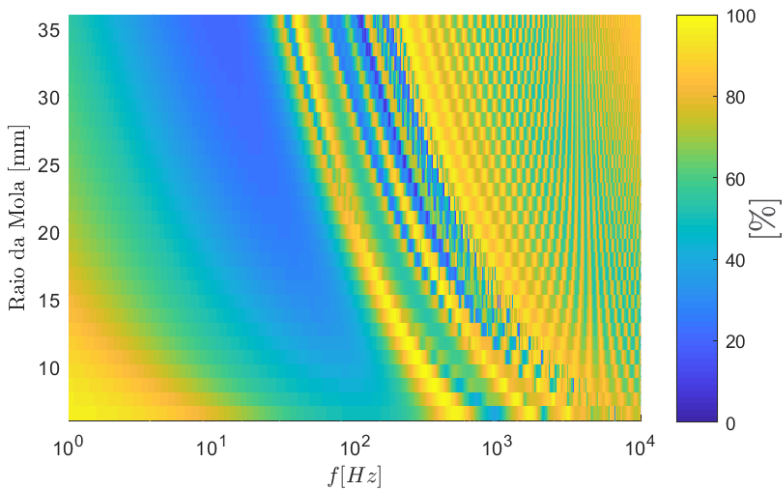


Figura 93 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o raio de 6 mm a 36 mm. A excitação é uma onda de flexão em uma extremidade e os resultados são a soma de todos os coeficientes de transmissão na outra extremidade.



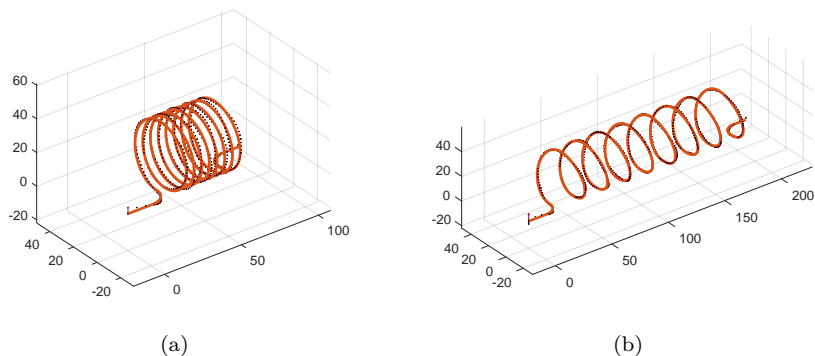


Figura 94 – Geometria com o passo da mola de 5 mm (a) e 20 mm (b). Raio da mola de 20 mm, com 8 espiras.

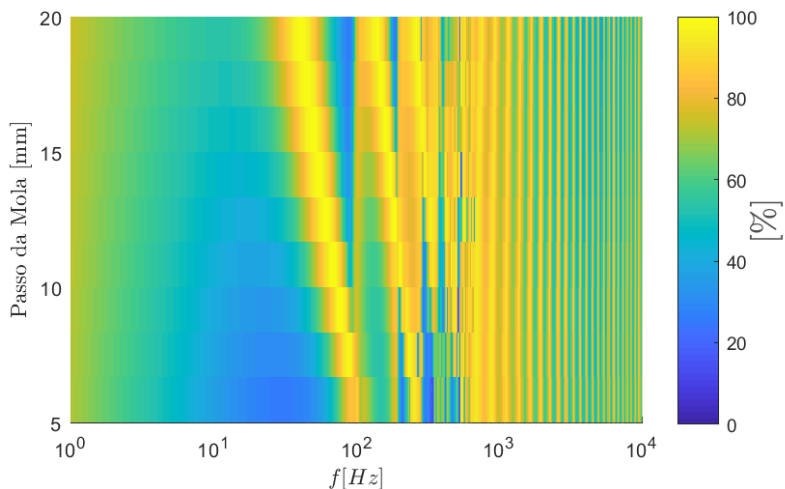


Figura 95 – Resultados de potência transmitida para uma estrutura tipo-mola variando-se o passo da mola de 5 mm a 20 mm.

## 7.4 Conclusões sobre Efeitos de Curvaturas

Observou-se que a visualização da soma de todas as potências transmitidas na forma de mapa de cores é eficaz para uma visão geral do comportamento das curvaturas, principalmente em cenários que necessitam

da variação dos parâmetros de curvatura. Verificou-se também que estes mapas de cores podem ser usadas como curvas-mestras e são adequados para a análise de variação destes parâmetros sem perda de representatividade, sendo empregados em análises comparativas.

Observou-se que o comportamento de curvas simples está diretamente ligado a quatro regiões principais, cujas interseções são dadas por frequências de corte diretamente relacionadas aos seus números de onda. Estas frequências de corte também estão relacionadas ao raio de curvatura  $R$ , e às propriedades mecânicas e geométricas da estrutura. Quanto menor o raio, mais as frequências de corte são deslocadas para altas frequências, potencializando os efeitos de curvatura verificados, como regiões de baixa transmissibilidade e acoplamento entre ondas de diferentes tipos. Por exemplo, há uma linha na região I (baixa frequência) para ângulos  $\Theta_y$  maiores que  $180^\circ$ , que possui um forte acoplamento entre ondas longitudinais e de flexão no plano de curvatura, e entre ondas torcionais e de flexão perpendiculares ao plano de curvatura.

A análise da influência de duas curvas acopladas para analisar o comportamento de ondas propagando fora do plano de curvatura mostrou que os efeitos, apesar de não seguirem uma característica linear, apresentam uma superposição dos efeitos observados através das curvas independentes. Logo, regiões de maiores atenuações foram observadas em estruturas tipo-S.

A análise de estruturas periódicas, que apresentam este comportamento cumulativo, evidenciou a relevância do número de células periódicas e constatou-se que a partir de apenas duas células já é possível obter atenuação em uma faixa de frequência (*band gap*). Observou-se também que a partir de cinco células já não se obtêm diferenças significativas na performance do filtro geométrico, como foi observado por Søe-Knudsen e Sorokin (2010). Outra informação importante é a da forte ligação da frequência que ocorre o *band gap*, o comprimento total da célula periódica e o comprimento de onda de flexão. Esse comportamento foi demonstrado através de equações ajustadas que acompanham as faixas de atenuação.

Finalmente, a análise do comportamento de estruturas tipo mola, resultou nos mesmos efeitos encontrados nas estruturas periódicas. Entretanto, um novo comportamento de corpo rígido também foi observado, na faixa de frequência em que a mola desenvolve o *band gap*.

No próximo capítulo, estas estruturas periódicas serão tratadas como um filtro geométrico e uma metodologia para otimizá-las será apresentada.

## 8 FILTROS GEOMÉTRICOS

Após testes com células periódicas, decidiu-se utilizar o potencial de geração de *band-gaps* para projetar filtros geométricos. Ao analisar a relevância da quantidade de células periódicas ficou claro que, a partir de cinco células já não se obtêm mudanças significativas sobre a frequência de atuação do filtro. Entretanto, com apenas duas células periódicas, alguma atenuação já se torna perceptível na região de *band-gap* e esta informação foi um importante ponto de partida para as análises realizadas neste capítulo.

Portanto, o objetivo deste capítulo é explorar as alternativas presentes para o desenvolvimento de um filtro geométrico utilizando curvaturas, procurando manter a maior simplicidade possível no *design* e objetivando a maior eficiência possível.

Inicialmente, foi realizada uma série de testes sobre como diferentes configurações se relacionavam entre si, como estruturas diferentes com efeito cumulativo ou como um filtro se comporta quando posicionado ao longo de uma estrutura maior, chamada a seguir de geometria portadora.

Após observar que a posição do filtro interfere pouco no resultado da geometria-portadora, fica evidente a possibilidade de aplicar uma otimização apenas no filtro. O algoritmo de otimização escolhido foi o Algoritmo Genético por não necessitar conhecer as derivadas da função objetivo e ser de fácil aplicação.

### 8.1 Relação entre duas Estruturas Periódicas

Considere as seguinte configurações de estruturas periódicas, baseadas no *design* do tipo chip descrito na Seção 7.3 (Fig. 73):

$$c1: L_s = 0 \text{ mm}, R = 8 \text{ mm}, \Theta_y = 140^\circ, n_c = 5;$$

$$c2: L_s = 2 \text{ mm}, R = 10 \text{ mm}, \Theta_y = 120^\circ, n_c = 3;$$

$$c3: L_s = 5 \text{ mm}, R = 15 \text{ mm}, \Theta_y = 90^\circ, n_c = 2.$$

Portanto, nesta seção serão abordadas combinações entre estas configurações, cujas formas finais estão mostradas na Figura 96. Vale lembrar que as dimensões da seção transversal e as propriedades geométricas são similares às de um tubo de descarga típico de compressores herméticos,

onde o módulo de elasticidade  $E = 195 \text{ GPa}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , a densidade  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , o módulo de cisalhamento é dado pela relação  $G = E/2(1 + \nu)$ , o diâmetro do tubo de  $2,65 \text{ mm}$  e a espessura de  $0,52 \text{ mm}$ .

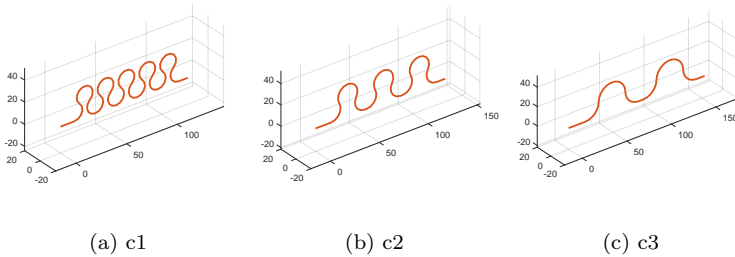


Figura 96 – Geometrias das configurações  $c1$ ,  $c2$  e  $c3$  descritas anteriormente.

Observa-se que as maiores atenuações são apresentadas pela configuração  $c1$  por ter maior quantidade de células periódicas. Espera-se, também, que o *band gap* de  $c3$  esteja localizado numa região de mais baixas frequências, em função do comprimento de sua célula periódica ser maior que os demais, permitindo que o filtro atue num comprimento de onda maior.

Todas as três configurações foram testadas individualmente. Foi prescrita uma onda flexural unitária na entrada, alinhada com o plano das curvas, e foi calculado o coeficiente de potência transmitida total, dado pela soma de todos os coeficientes de transmissão ( $W = W_u^T + W_w^T + W_v^T + W_{\theta x}^T$ ).

As Figuras 97 a 99 mostram os coeficientes totais das três configurações. Nota-se que as escalas estão alteradas para facilitar a identificação do *band gap*, e que as expectativas quanto à amplitude de atenuação e frequência foram atendidas.

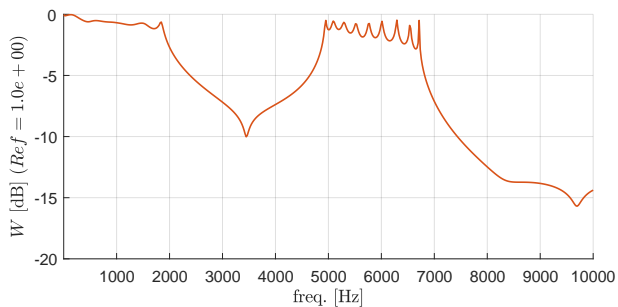


Figura 97 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para a configuração  $c1$  em  $dB$ .

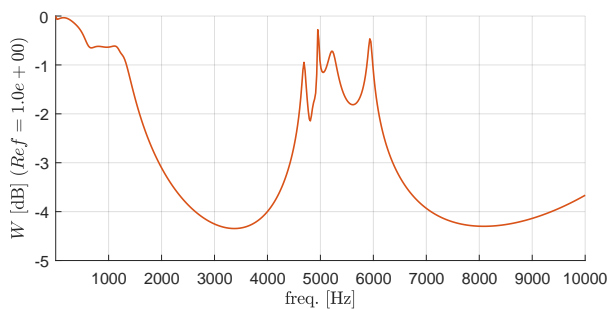


Figura 98 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para a configuração  $c2$  em  $dB$ .

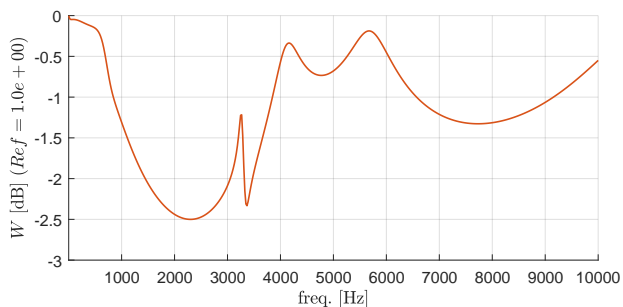


Figura 99 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para a configuração  $c3$  em  $dB$ .

Na seqüência, foram feitas combinações, duas a duas entre os filtros. A Figura 100 mostra a combinação para os filtros  $c1$  e  $c2$ , e seus respectivos resultados estão na Figura 101, cujos resultados individuais de cada filtro continuam com as mesmas cores, e a linha tracejada refere-se à combinação.

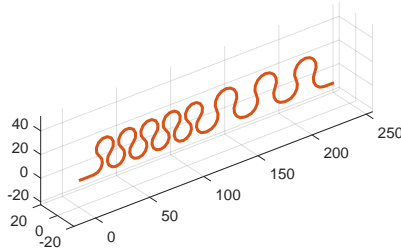


Figura 100 – Geometria para uma combinação entre os filtros  $c1$  e  $c2$ .

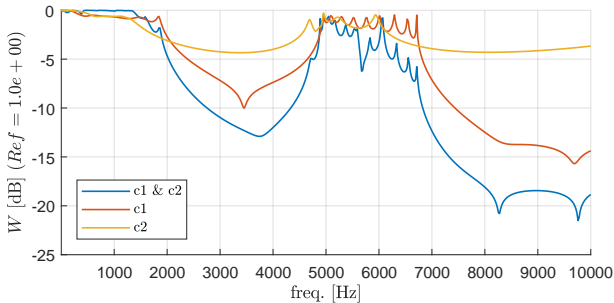


Figura 101 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para uma combinação entre os filtros  $c1$  e  $c2$ .

Observa-se que as regiões de atenuação são potencializadas por cada filtro, correspondendo a uma soma de suas propriedades (Fig. 101). Também, para comprovar que a ordem dos filtros não influencia este resultado, foi testada também a combinação inversa (Fig. 102). Os resultados de todas as configurações estão na Figura 103.

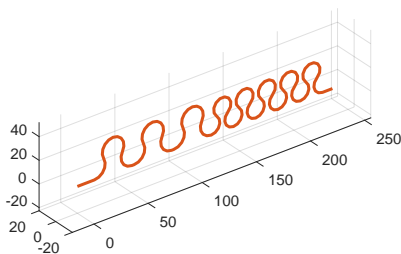


Figura 102 – Geometria para uma combinação inversa entre os filtros  $c2$  e  $c1$ .

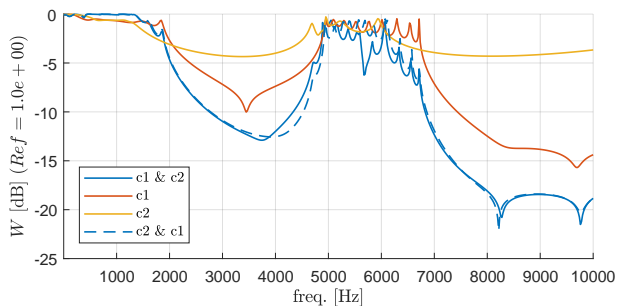


Figura 103 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para uma combinação inversa entre os filtros  $c2$  e  $c1$ .

Pode-se perceber que as diferenças entre as duas combinações (direta na cor vinho e inversa na cor preta) são desprezíveis, e desencadeadas por descontinuidades pontuais de cada filtro.

Os resultados de  $c1$  com  $c3$  e  $c2$  com  $c3$  também foram calculados e são mostrados nas Figuras 104 e 105. Observa-se o mesmo comportamento da combinação dos efeitos de filtros individuais. Esta informação é bastante importante pois permite ao projetista uma maior versatilidade, desde que possa sintonizar *designs* periódicos para faixas de frequência separadas e posteriormente combinar estas configurações numa só geometria.

Finalmente, o último caso foi testado como a combinação dos três filtros simultaneamente, cuja geometria pode ser conferida na Figura 106 e os resultados na Figura 107.

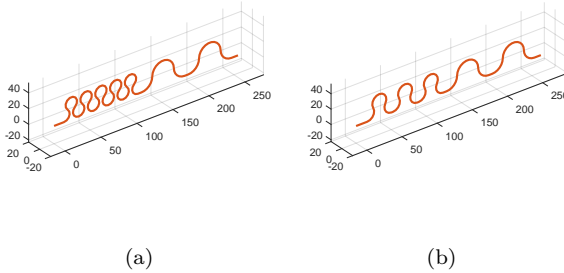


Figura 104 – Geometrias para combinações entre os filtros  $c1$  e  $c3$  (a), e  $c2$  e  $c3$  (b).

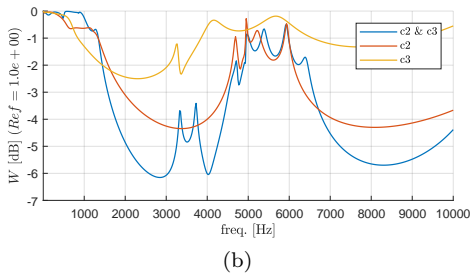
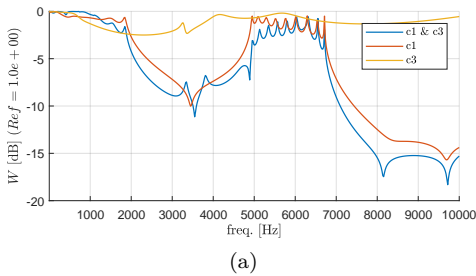


Figura 105 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para combinações entre os filtros  $c1$  e  $c3$  (a), e  $c2$  e  $c3$  (b).



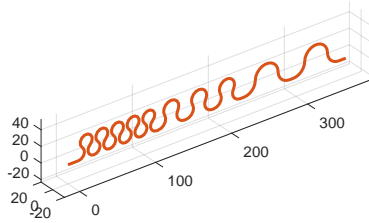


Figura 106 – Geometria para uma combinação entre os três filtros simultaneamente.

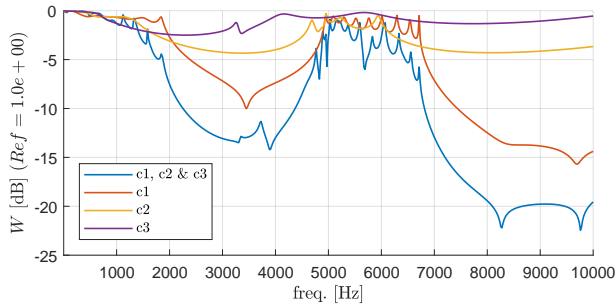


Figura 107 – Coeficiente de potência transmitida total  $W$  para uma combinação entre os três filtros simultaneamente.

Agora, após confirmar que os filtros fornecem uma relação construtiva entre si, resta conhecer seu comportamento quando posicionado dentro de outras geometrias arbitrárias, como por exemplo, em um tubo de descarga típico.

## 8.2 Relação entre filtro e Geometria Arbitrária

Considere um filtro geométrico com as propriedades  $L_s = 2 \text{ mm}$ ,  $R = 8 \text{ mm}$ ,  $\Theta_y = 140^\circ$ ,  $n_c = 2$ , similar ao caso c1 da seção anterior, cuja geometria está plotada na Fig. 108, e possui as mesmas dimensões da seção

transversal e propriedades mecânicas. Observa-se na Fig. 109 que esta configuração atua entre aproximadamente  $2\text{ kHz}$  e  $10\text{ kHz}$ , exceto por uma região de baixa atenuação na faixa entre  $5,0\text{ Hz}$  a  $6,5\text{ kHz}$ .

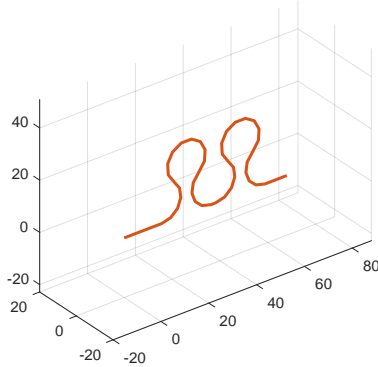


Figura 108 – Geometria do filtro escolhida arbitrariamente ( $L_s = 2\text{ mm}$ ,  $R = 8\text{ mm}$ ,  $\Theta_y = 140^\circ$ ,  $n_c = 2$ ).

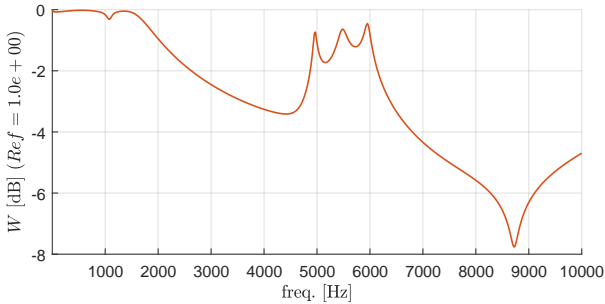


Figura 109 – Coeficiente de potência transmitida total para o filtro com geometria dada por  $L_s = 2\text{ mm}$ ,  $R = 8\text{ mm}$ ,  $\Theta_y = 140^\circ$ ,  $n_c = 2$ .

A geometria portadora foi escolhida arbitrariamente, tendo um desenho relativamente tortuoso, porém ainda com capacidade de abrigar o filtro em questão, em diferentes posições (Fig. 110).

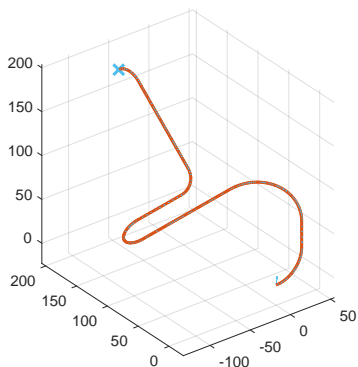


Figura 110 – Geometria-portadora que irá abrigar as diferentes configurações de filtros. Simulações feitas com deslocamento unitário prescrito nas 3 direções em uma das extremidades (seta), e engaste na outra (cruz).

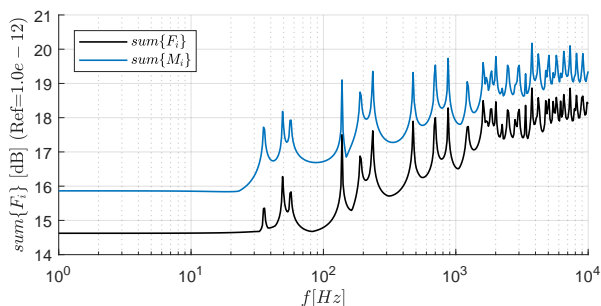


Figura 111 – Forças e momentos totais no engaste da estrutura sem filtro geométrico. Excitação na forma de deslocamento unitário nas 3 direções, prescrito na extremidade contrária à do engaste.

A fim de alcançar resultados mais próximos de uma aplicação real, decidiu-se simular a estrutura prescrevendo deslocamentos unitários nas três direções em uma extremidade e engastar a extremidade oposta. Foram obtidos dois resultados: a soma de todas as forças de translação e a soma de todos os momentos no engaste.

Para essa estrutura, pode-se observar na Figura 111 os resultados obtidos. Percebe-se que, como esperado para uma estrutura delgada e tortuosa, os momentos no engaste são consideravelmente maiores que as forças transmitidas. Isto pois a estrutura se comporta como um braço de alavanca, enquanto a tortuosidade contribui para desalinhar a direção da aplicação do carregamento com o ponto de engaste, potencializando a característica de braço de alavanca.

Em seguida, o filtro é inserido na geometria portadora e seu posicionamento será alterado para analisar esta influência. As condições dos testes são idênticas ao caso sem filtro, mostrado anteriormente.

Foram simulados os casos onde o filtro foi posicionado em cada uma das três retas principais da curva-portadora, como mostradas na Figura 112.

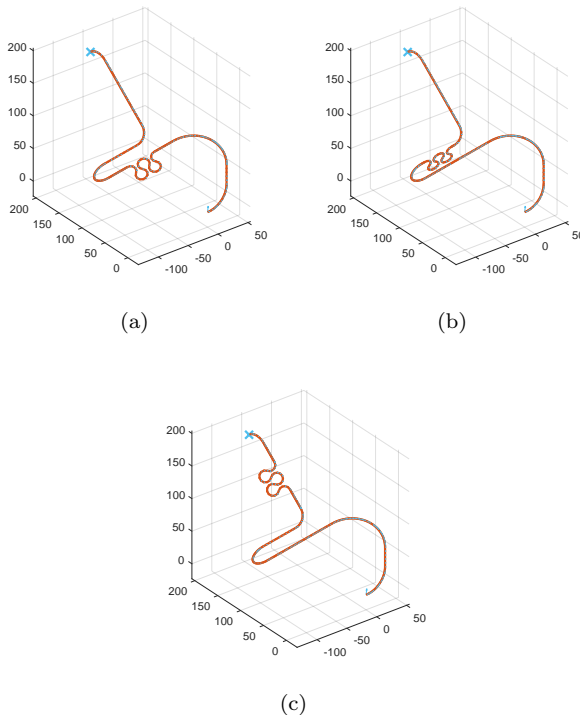


Figura 112 – Configurações da geometria-portadora com filtro posicionado nas curvas 1 (a), 2 (b) e 3 (c).

As Figuras 113 e 114 mostram que o filtro continua atuando na forma de soma das forças e dos momentos, principalmente nas frequências acima dos  $6,5 \text{ kHz}$  (região de maior atenuação).

Portanto, pode-se concluir que, independente da geometria em que o filtro está aplicado, seu efeito predomina na região de *band gap*, para a qual foi projetado. Percebe-se também que algumas ressonâncias são deslocadas, como já era esperado da adição de material.

Para as outras posições, compara-se o resultado do filtro 1 com os demais. A Figura 114 mostra que, mesmo com uma grande dispersão entre frequências naturais, pode-se observar que todos possuem o mesmo comportamento global, mostrando uma pequena queda entre  $2 \text{ kHz}$  a  $5 \text{ kHz}$  e uma considerável atenuação na região entre  $6,5 \text{ kHz}$  a  $10 \text{ kHz}$ .

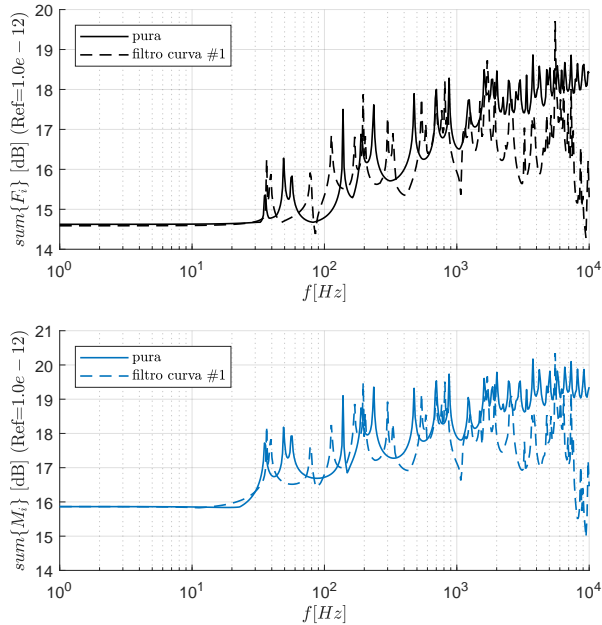


Figura 113 – Forças (sup.) e momentos totais (inf.) no engaste da estrutura com filtro geométrico na reta 1. Condições de contorno idênticas às da simulação sem filtro.

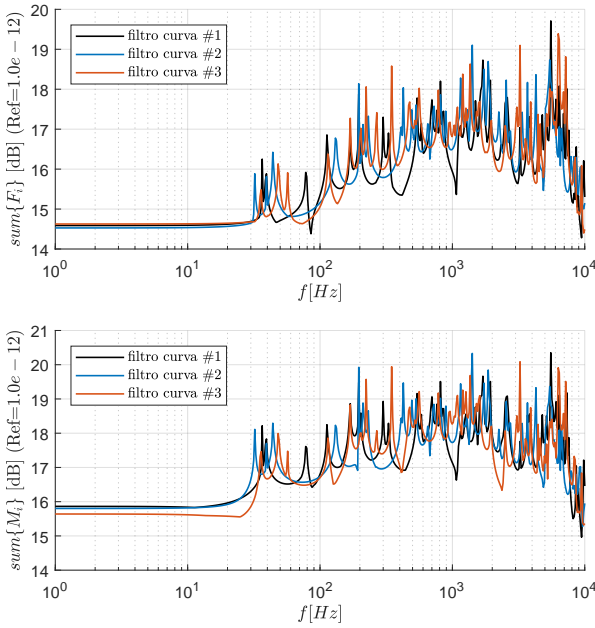


Figura 114 – Forças (sup.) e momentos totais (inf.) no engaste. Comparação entre diferentes posições do filtro geométrico (Fig. 112). Condições de contorno idênticas à simulação sem filtro.

### 8.3 Otimização de uma Estrutura Periódica (Filtro)

Após a simulação dos efeitos de estruturas periódicas no fluxo de potência, observou-se o potencial dessas geometrias e decidiu-se aplicar um algoritmo de otimização. O *design* do filtro convergiu para uma geometria semelhante, utilizada anteriormente.

Portanto, nesta seção será apresentado o procedimento para otimizar uma estrutura periódica, ao mesmo tempo em que serão apresentadas sugestões para parametrizar estas estruturas.

#### 8.3.1 Otimização de Múltiplos Parâmetros - Algoritmo Genético

Uma análise de sensibilidade já foi apresentada no capítulo anterior, quando foram variados os parâmetros geométricos das estruturas periódicas. Lembra-se, entretanto, que o parâmetro geométrico mais importante na definição da frequência do *band gap* é o comprimento da célula periódica.

Para garantir a versatilidade do algoritmo em relação ao comprimento, definiu-se que cada célula periódica terá quatro parâmetros, sendo o comprimento reto  $L_s$  para espaçar a célula, o raio  $R$ , o ângulo de arfagem  $\Theta_y$  e o ângulo de rolagem  $\Theta_x$ , que gira a célula como um todo.

Esses quatro parâmetros são otimizados individualmente para cada célula periódica presente na estrutura, tal que se houver duas células, serão otimizados oito parâmetros no total. O número de células periódicas também foi variado a cada simulação, porém mantém-se constante durante a execução do algoritmo.

As propriedades mecânicas e dimensões da seção transversal são mantidas constantes e iguais às de um tubo de descarga típico, já que desejam-se analisar apenas as curvaturas.

Foi utilizado o Algoritmo Genético para otimizar estes parâmetros, dada sua aplicabilidade em problemas de otimização de múltiplos parâmetros. Também, a facilidade em desenvolver o algoritmo de otimização acoplado ao problema FEM foi um fator decisivo na escolha desta abordagem. Um ponto positivo é não necessitar o cálculo da derivada do problema, tendo em vista que se tornaria muito complexa a construção de uma função objetivo, principalmente em caso de uma geometria ainda mais tortuosa.

Detalhes relativos à eficácia do algoritmo não serão discutidos aqui. Recomendam-se os trabalhos de Holland (1992), Goldberg (1989), Chelouah e Siarry (2000) como uma boa literatura para otimização usando métodos heurísticos. John Holland foi o precursor desta forma de otimização, seguido pelo seu aluno Goldberg, que usou algoritmo genético para problemas práticos e popularizou seu uso.

A aplicação do algoritmo consistiu em definir a faixa de frequência para minimizar os esforços transmitidos pela estrutura periódica, através dos parâmetros  $L_s$ ,  $R$ ,  $\Theta_y$  e  $\Theta_x$ . Os limites inferior e superior de cada um destes parâmetros também foram definidos. Um esquema do fluxograma do algoritmo está mostrado na Figura 115.

As seguintes etapas foram realizadas:

- i. Inicialização: Carrega todos os dados de entrada do usuário e cria uma primeira geração de indivíduos a serem avaliados. É o ponto de partida para o algoritmo e deseja-se que os indivíduos desta primeira geração sejam o mais distintos possíveis, de forma a cobrir uma maior porção do domínio disponível;
- ii. Avaliação dos indivíduos: Nesta etapa, todos os indivíduos da gera-

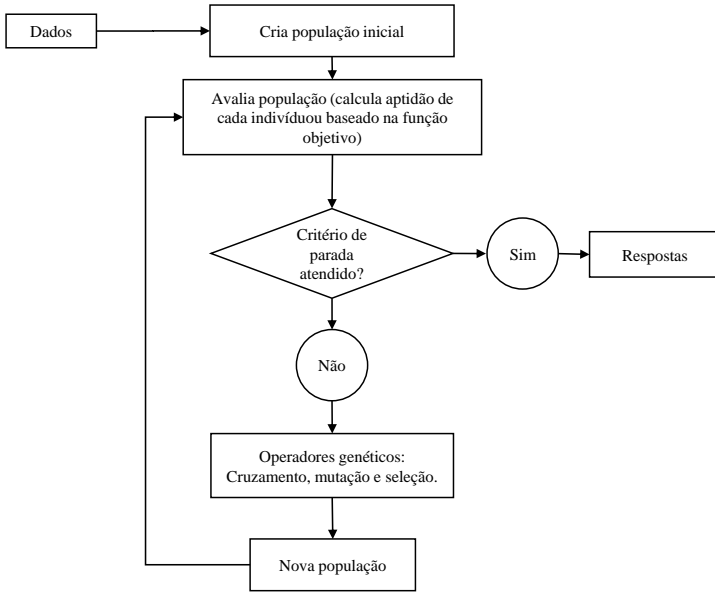


Figura 115 – Fluxograma exemplificando o funcionamento do algoritmo genético (Fonte: Jeronimo (2014)).

ção atual são testados e organizados. Cada teste de indivíduo diz respeito ao cálculo da função objetivo que, no caso deste trabalho, é a tradução dos parâmetros geométricos numa malha de elementos finitos, culminando no cálculo da potência transmitida total pelo *wave propagation approach*;

- iii. Cruzamento: Nesta fase ocorre o cruzamento de parâmetros entre indivíduos, obedecendo ao elitismo. Dado um indivíduo  $\{A\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , onde  $n$  é o número total de parâmetros geométricos, o cruzamento deste com um indivíduo  $\{B\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , poderia originar um indivíduo  $\{C\}$  arbitrário sendo  $\{a_1, b_2, a_3, \dots, a_n\}$ . No caso, a ordem e quantidade dos genes trocados seriam escolhidas aleatoriamente. Esta fase funciona como um ajuste da convergência do algoritmo, uma vez que quanto mais indivíduos bons partilham os seus genes, há menos discrepância entre a avaliação dos mesmos;
- iv. Mutação: Esta última fase visa dar ao algoritmo uma discrepância característica para evitar uma convergência prematura a um mínimo local. Portanto, escolhe-se aleatoriamente alguns genes dos indivíduos



para aplicar uma mudança, seja baseada num peso ou mesmo a introdução de um valor aleatório completamente novo.

Ao final etapa de mutação tem-se uma nova geração a ser testada, portanto o algoritmo deve ciclar novamente a partir da Avaliação dos indivíduos para que a nova geração seja processada. O fim das iterações se dará com os critérios de parada, caso o algoritmo atinja o número máximo de gerações ou caso o melhor indivíduo atinja o objetivo desejado.

### 8.3.2 Resultados da Otimização

Primeiramente, foram testadas geometrias com três células periódicas, totalizando 12 parâmetros a serem otimizados. Foi escolhida uma faixa de frequência de  $2\text{ kHz}$  a  $3\text{ kHz}$ , subdividida em 500 passos. A função objetivo visou minimizar a soma de todos os coeficientes de transmissão em todos os passos de frequência:

$$W = \sum_f \sum_i (W_i^T(f)), \quad i = \{u, v, w, \theta_x\}. \quad (8.1)$$

Com estas simulações, os algoritmos convergiram para pelo menos duas curvas tipo chip, com ângulo  $\Theta_y = 140^\circ$  e raio  $R$  variando entre 14 e 16  $mm$ , como pode ser observado nas Figuras 116.

A Figura 117 mostra os resultados de cada simulação. Observa-se que o algoritmo otimizou a faixa de frequência desejada de forma satisfatória, gerando um *band gap* até mais largo que o esperado (estende-se de 900  $Hz$  até 4  $kHz$ ).

Observa-se, também, que as curvas do filtro não necessitam estar vinculadas à excitação, como já foi discutido anteriormente. E, por fim, percebe-se que a porção reta que separa os filtros também não possui grande relevância nos resultados, como pode-se perceber das simulações #1 e #2, cujos  $L_s$  são bastante diferentes.

Entretanto, a desvantagem de utilizar um método heurístico está na não garantia do melhor resultado. Por exemplo, este comportamento pôde ser observado na Figura 118, que mostra o número de gerações atingindo o critério de parada (máximo de 500) sem levar a função objetivo abaixo do valor estipulado.

Isto ocorre pois o algoritmo pode oscilar em torno de um mínimo local enquanto a etapa de mutação, que é inerentemente aleatória, não consiga alterar os indivíduos de uma forma satisfatória em direção ao mínimo global. Neste caso, a etapa de cruzamento se encarrega de diminuir

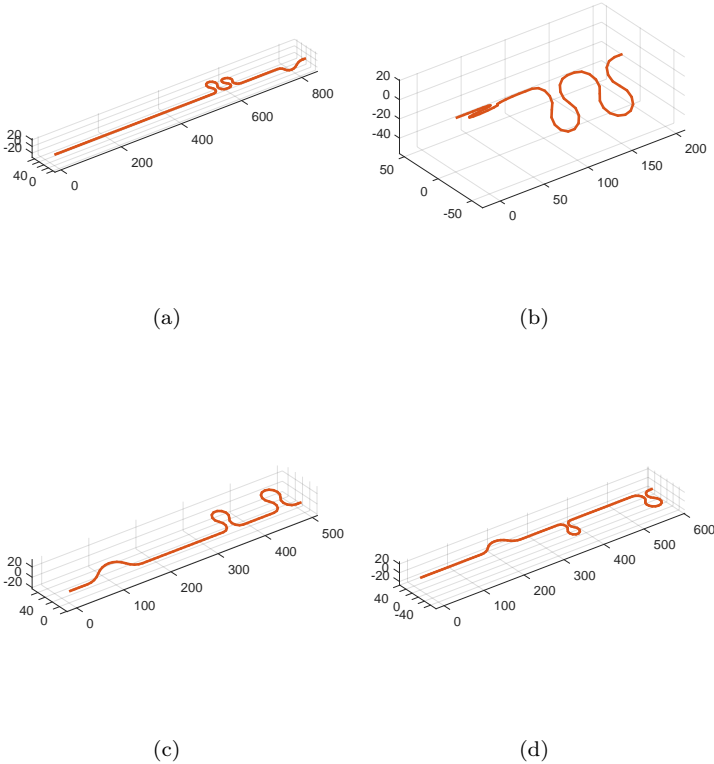


Figura 116 – Geometrias geradas através de diferentes simulações utilizando o algoritmo genético, para o caso com 3 células periódicas. Percebe-se uma tendência às curvas “tipo *chip*”.

a dispersão entre os resultados (desde que haja elitismo, como é o caso), e faça com que o código requeira muitas gerações para reduzir o valor da função objetivo. Por este motivo o algoritmo foi executado várias vezes e foram escolhidos os resultados que atingiram melhores valores para a função objetivo.

Assim, ficou evidente que mesmo com diferentes populações iniciais e mutações, o algoritmo conseguiu convergir para respostas bastante similares, tanto na forma geométrica quanto no coeficiente total de transmissão.

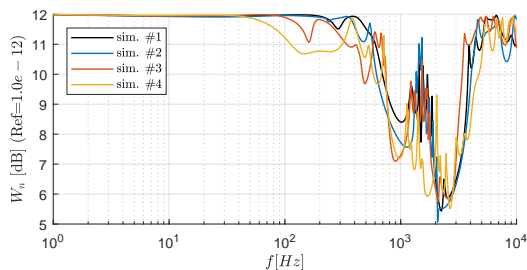


Figura 117 – Resultados das diferentes simulações utilizando o algoritmo genético com 3 células periódicas. Frequência de *band gap* desejada entre  $2 \rightarrow 3$  kHz.

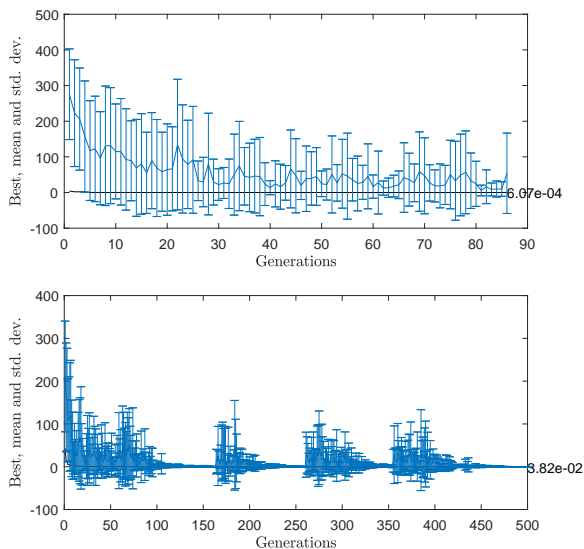


Figura 118 – Progressões na convergência das simulações #1 e #4 respectivamente, demonstrando uma rápida otimização na primeira e uma bastante lenta na última.

## 8.4 Resumo de Filtros Periódicos

Primeiramente, mostrou-se o comportamento cumulativo dos filtros periódicos. Foram obtidos os fluxos de potência transmitida total de três configurações distintas e esses filtros foram, então, combinados, observando-se que os efeitos se somam. Após confirmar esta natureza cumulativa

de filtros geométricos, foi testada a influência da inserção de um filtro numa geometria portadora. Portanto, foram obtidos os esforços gerados numa extremidade desta geometria, quando a mesma está sujeita a um deslocamento unitário na outra extremidade. Um filtro geométrico foi posicionado em três locais diferentes da geometria portadora, confirmando que o efeito do filtro se soma ao da geometria, independente de sua posição.

Finalmente, sabendo-se que os filtros podem ser tratados de forma independente, mostrou-se como foi configurada a etapa de otimização. Mostrou-se como o algoritmo genético funciona em conjunto com a ferramenta desenvolvida, foi sugerida uma parametrização das curvaturas e mostrou-se a função objetivo utilizada. Desejava-se minimizar o fluxo de potência transmitida total na faixa de frequência de interesse (onde será gerado o *band gap*). Os quatro melhores resultados foram mostrados para uma configuração arbitrária com três células periódicas, desejando-se uma atenuação na faixa entre 2 kHz e 3 kHz. Portanto, uma forma simples e relativamente rápida de projetar um filtro geométrico.

## 9 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou, inicialmente, uma revisão das teorias usadas no desenvolvimento das equações que regem o movimento de uma viga curva e discutiu o acoplamento entre ondas longitudinais e flexurais alinhadas ao plano de curvatura, e torsionais-flexurais perpendiculares a este plano.

Foram apresentadas as simplificações usadas na solução das equações do movimento. Estas simplificações, que condensam vários parâmetros em variáveis adimensionais, são escolhidas de forma a auxiliar na observação de determinadas peculiaridades das vigas curvas. Neste caso, foi usado um parâmetro de curvatura dependente da relação entre o raio de giração  $r_g$ , propriedade inerente à seção transversal da estrutura, e o raio da curvatura  $R$ . Já a frequência adimensional foi definida como uma relação direta entre o comprimento da circunferência do anel e o comprimento de onda de flexão. Observou-se que curvaturas apresentam três importantes frequências de corte. A primeira separa o comportamento do trecho curvo do trecho reto, quando a onda não enxerga mais a curvatura, denominada frequência do anel (*ring frequency*); em sua forma adimensional está diretamente relacionada ao inverso do parâmetro de curvatura. A segunda, que separa as regiões com números de onda complexos e puramente imaginários, onde nos gráficos de mapeamento aparece como uma região de transição para um comportamento puramente de viga curva. E, finalmente, a frequência de corte que define o comportamento de curvatura pura, onde há a maior atenuação para ângulos acima de  $180^\circ$ , e também a descontinuidade da predominância longitudinal.

Observou-se o comportamento dos números de onda em função do raio da curva. Quanto maior o raio, a frequência do anel é deslocada para baixas frequências, eventualmente sobrepondo-se às outras duas frequências de corte. Isso é interessante pois traz uma noção sobre como as curvas-mestras dos coeficientes de transmissão se comportam. Além do deslocamento das frequências de corte, observa-se também as regiões de interesse entre estas do ponto de vista do fluxo de potência. Por fim, foram analisados os acoplamentos entre ondas longitudinais e de flexão, torsionais e flexão, segundo as componentes modais ( $\beta_i^a = \check{u}_i/\check{w}_i$  e  $\beta_i^b = \check{v}_i/\check{\psi}_{s_i}$ ).

Foi proposto o método de ondas em propagação para analisar os efeitos de curvatura. A transmissão de energia foi analisada através de modelos analítico e numérico, e desenvolvida uma ferramenta numérica. A

parametrização das curvaturas fez uso de quatérnios, baseada nas instruções de ângulo de rolagem, de arfagem, comprimento e deslocamento lateral, semelhante às linhas de comando de uma ferramenta CNC. Esta ferramenta numérica foi validada analiticamente para analisar sua performance quanto à obtenção dos coeficientes de potência.

Foram observadas algumas limitações relativas ao elemento de viga reta, como a perda de representatividade para excitações fora do plano de curvatura (dificuldade na representação do acoplamento torsional-flexural). Para os elementos de viga curva observou-se que o erro é pequeno, aumentando apenas em regiões onde há mudança brusca de coeficiente de potência. Portanto, considerou-se a ferramenta validada para uso na faixa de frequência até 10 kHz, com caso mais difícil de representar sendo a entrada de onda torsional. A ferramenta também foi validada experimentalmente cujos resultados apresentaram boa concordância. Testou-se uma configuração com viga reta, com uma curva simples apenas e com curvas em sequência.

A ferramenta numérica foi utilizada para o mapeamento dos efeitos de curvas simples. Verificou-se que quanto o maior o raio, menos relevante se torna a curvatura, pois o aumento do raio diminui a frequência de anel, *i.e.*, aumenta a região de transmissibilidade, aproximando-se do comportamento de uma viga reta. Por outro lado, há uma região de média transmissibilidade para ângulos de arfagem pequenos, da ordem de  $20^\circ$  a  $30^\circ$ , que se estende por uma larga faixa de frequência. Por outro lado, raios menores impactam numa região de baixíssima transmissibilidade, que está localizada em ângulos de arfagem maiores que  $180^\circ$ . Nesta mesma região, há uma descontinuidade notada como interessante, pois representa uma faixa de transmissão longitudinal. Ou seja, há uma linha de descontinuidade na qual predominam ondas longitudinais, mesmo quando a estrutura for excitada por ondas de flexão.

Também foram simuladas duas curvas em sequência, buscando analisar os efeitos de acoplamento fora do plano de dobra. Identificou-se uma natureza cumulativa na sequência das curvaturas, nas quais podem-se prever regiões de baixa transmissibilidade do conjunto observando o comportamento de uma curva simples. Por exemplo, para raios pequenos, observou-se que há regiões de baixa transmissibilidade para ângulos de arfagem acima de  $180^\circ$  quando o ângulo de rolagem entre as duas curvas é máximo, *i.e.*, formam uma configuração tipo S. Para raios maiores, a característica da configuração tipo S ainda permanece, mas com ângulos de arfagem dentro da região de média transmissibilidade, entre  $20^\circ$  e  $30^\circ$ .

A análise do efeito de estruturas periódicas mostrou regiões de

frequências com baixíssima transmissibilidade, denominadas *band gaps*. Essas bandas de atenuação sofrem influência da quantidade de células periódicas presentes na estrutura e da característica dessas células (comprimento, ângulo de arfagem, etc.). Portanto, foram simulados vários casos como uma análise de sensibilidade destes parâmetros.

No primeiro teste foi variado o raio da célula periódica sem mudar a distância relativa entre seus centros e sem variar as outras propriedades. Isto fez com que o *band gap* fosse deslocado para frequências mais baixas. Ao variar o ângulo de arfagem da célula periódica, mantendo as demais propriedades, observou-se que quanto maior o ângulo o *band gap* desloca-se às baixas frequências. Isto permite inferir que as faixas de atenuação de estruturas periódicas estão diretamente ligadas ao comprimento da célula e ao comprimento de onda na frequência que ocorre o *band gap*. Foram também simulados casos nos quais os raios das células periódicas variam linearmente, inicialmente de forma crescente, depois de forma decrescente. Os resultados mostraram o potencial cumulativo deste tipo de estrutura, cujo *band gap* aumentou em largura com o aumento da inclinação da variação dos raios.

A simulação de uma estrutura periódica tipo mola na qual cada espira representa uma célula de periodicidade, mostrou que ao variar o número de espiras ocorre um aumento da região de média transmissibilidade nas baixas frequências, porém não foi observada uma evidência de *band gap* desde que a transmissibilidade mínima era da ordem de 40%, em comparação aos quase 0% dos outros casos. A variação do raio das espiras também apresentou um comportamento bastante similar ao anterior. Finalmente, simulou-se a mola variando o passo entre as espiras. Neste caso, a região de média transmissibilidade diminui com o aumento do passo. Entende-se que, com o crescimento das espiras, o efeito de curvatura diminui, uma vez que a estrutura aproxima-se de uma viga reta.

Observado o potencial das estruturas periódicas na banda de atenuação, decidiu-se utilizar este tipo de geometria como um padrão para desenvolver uma função objetivo compatível com um método de otimização. Primeiramente, foi confirmada a natureza cumulativa dos filtros, combinando três diferentes configurações estruturais e comparando seus coeficientes de transmissão. A ordem do arranjo pode influenciar em algumas frequências localmente, porém o comportamento global é mantido, principalmente nas frequências de *band gap*. Verificou-se a relevância do filtro quando aplicado a uma estrutura arbitrária, sendo observado que a combinação possui a mesma tendência nas respostas, com o efeito do filtro somando-se ao da estrutura-mãe.

Finalmente, desenvolveu-se uma função objetivo onde os parâmetros de entrada são propriedades independentes das células periódicas, e cada célula possui uma porção reta  $L_s$ , um ângulo de arfagem  $\Theta_y$  de quarto de célula e raio  $R$ . O número de células periódicas não varia ao longo da execução do algoritmo. O valor da função objetivo é calculado a partir da solução do problema de elementos finitos usando o método das ondas em propagação, somando todos os coeficientes de transmissão. Ou seja, quanto maior a transmissibilidade da seção, maior o valor da função. Com isso, pôde-se configurar e otimizar filtros geométricos para faixas de frequência desejadas. Observou-se que a tendência do algoritmo de otimização era maximizar o ângulo de arfagem enquanto controlava o raio da curvatura para sintonizar o comprimento da célula com a faixa de frequência desejada. Já a parte reta  $L_c$  mostrou pouca relevância nas respostas, sem nenhuma tendência óbvia.

## 9.1 Recomendações para Trabalhos Futuros

A ferramenta em elementos finitos, desenvolvida e validada neste trabalho, possui partes que ainda requerem aprimoramentos e, mesmo funcionando adequadamente, não estão prontas a níveis de produção. Portanto, recomenda-se a atualização do código para melhorar sua eficiência, utilizando rotinas paralelizáveis ou uma linguagem compilada que execute as funções com maior rapidez.

Recomenda-se o cálculo dos efeitos de curvatura juntamente com os efeitos de pulsação interna e deslocamento do fluido. Tem-se interesse em conhecer as contribuições da pulsação do fluido nos resultados de vibrações puramente estruturais. Como o foco do trabalho era a análise dos efeitos de curvatura, para manter a simplicidade decidiu-se deixar essa aplicação como trabalho futuro.

Recomenda-se o aprofundamento na área de otimização, explorando a parametrização proposta. Alguns protótipos de algoritmos de otimização heurísticos foram desenvolvidos, com geometrias livre e fixa, apresentando bons resultados. Porém, sabe-se que estes códigos não estão utilizando todo o potencial computacional, ou seja, não fazem uso de ferramentas de paralelização, nem controle para execução em placas de vídeo, tornando-se lentos.

Recomenda-se também a utilização da ferramenta desenvolvida para gerar um campo amostral para treino de redes neurais, explorando a caracterização inversa. Ao invés do usuário desenhar uma geometria para avaliar se esta atende os requisitos de projeto, a idéia é desenhar a forma do filtro desejado e o algoritmo retornar a geometria adequada para aquela



configuração. Este gerador de filtros teria uma excelente aplicação para problemas na indústria.

Recomenda-se também, a adição de outros tipos de elementos finitos à ferramenta para que esta torne-se mais versátil nas simulações com variados tipos de estruturas. Sugerem-se testes considerando o funcionamento do compressor, com o tubo de descarga diretamente acoplado à carcaça, todos devidamente modelados e calculados como elementos finitos, analisando o comportamento das ondas com as condições de contorno mais representativas para uma situação real.



## Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists, 6th Edition*. Academic Press, 2005. ISBN 0-12-059876-0. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Mathematical-Methods-Physicists-George-Arfken/dp/0120598760?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0120598760>>. Citado na página 71.
- ASHWELL, D. G.; SABIR, A. B.; ROBERTS, T. M. Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 13, p. 507–517, 1971. Citado na página 36.
- AUCIELLO, N. M.; ROSA, M. A. D. Free vibrations of circular arches: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 1994. Citado na página 33.
- BECCU, R.; WU, C. M.; LUNDBERG, B. Reflection and transmission of the energy of transient elastic extensional waves in a bent bar. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 190, n. 4, p. 645–659, 1996. Citado na página 35.
- BURKE, W. L. *Applied Differential Geometry*. CAMBRIDGE UNIV PR, 1985. ISBN 0521269296. Disponível em: <[http://www.ebook.de/de/product/3248818/william\\_1\\_burke\\_applied\\_differential\\_geometry.html](http://www.ebook.de/de/product/3248818/william_1_burke_applied_differential_geometry.html)>. Citado na página 36.
- CHELOUAH, R.; SIARRY, P. A continuous genetic algorithm designed for the global optimization of multimodal functions. *Journal of Heuristics*, 2000. Citado na página 153.
- CHEN, J.-S.; CHEN, I.-S. Deformation and vibration of a spiral spring. *International Journal of Solids and Structures*, v. 64-65, p. 166–175, 2015. Citado na página 37.
- CHOI, J.-k.; LIM, J.-k. General curved beam elements based on the assumed strain fields. *Computer & Structures*, v. 55, n. 3, p. 379–386, 1995. ISSN 0045-7949(94)00469-2. Citado na página 37.
- COWPER, G. R. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1966. Citado na página 46.

DAVIS, R.; HENSHELL, R.; WARBURTON, G. Constant curvature beam finite elements for in-plane vibration. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 561–576, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 76.

DOYLE, J. F. *Wave Propagation in Structures*. 2. ed. Springer, 2012. ISBN 1461273048. Disponível em: <[http://www.ebook.de/de/product/20093545/james\\_f\\_doyle\\_wave\\_propagation\\_in\\_structures.html](http://www.ebook.de/de/product/20093545/james_f_doyle_wave_propagation_in_structures.html)>. Citado na página 37.

GAVRIC, L. Power-flow analysis using infinite beam elements. *Le Journal de Physique IV*, EDP Sciences, v. 2, n. C1, p. C1–511, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 37, 80 e 82.

GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. ADDISON WESLEY PUB CO INC, 1989. ISBN 0201157675. Disponível em: <[http://www.ebook.de/de/product/3236625/david\\_e\\_goldberg\\_genetic\\_algorithms\\_in\\_search\\_optimization\\_and\\_machine\\_learning.html](http://www.ebook.de/de/product/3236625/david_e_goldberg_genetic_algorithms_in_search_optimization_and_machine_learning.html)>. Citado na página 153.

GRAFF, K. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, 1975. (Dover Books on Engineering Series). ISBN 9780486667454. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=5cZFRwLuhdQC>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.

GREENBERG, M. *Advanced Engineering Mathematics (2nd Edition)*. Pearson, 1998. ISBN 978-0133214314. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Advanced-Engineering-Mathematics-Michael-Greenberg/dp/0133214311?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0133214311>>. Citado na página 36.

HAMILTON, W. R. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra (letter to john t. graves, dated october 17, 1843). *Philos. Magazine*, v. 25, p. 489–495, 1843. Citado na página 72.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence (Complex Adaptive Systems)*. The MIT Press, 1992. ISBN 0262082136. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Adaptation-Natural-Artificial-Systems-Introductory/dp/0262082136?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0262082136>>. Citado na página 153.

HORNER, J. L.; WHITE, R. Prediction of vibrational power transmission through bends and joints in beam-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1991. Citado na página 37.

HU, B. *An investigation of the effects of curvatures on natural vibration characteristics of curved beams and plates*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 2009. Citado na página 36.

JERONIMO, J. L. *Otimização de estruturas de materiais compósitos baseada em algoritmos genéticos contínuos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 154.

KANG, B.; RIEDEL, C.; TAN, C. Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 260, n. 1, p. 19–44, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 48.

KANG, Y. J.; YOO, C. H. Thin-walled curved beams. i: Formulation of nonlinear equations. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.

KANG, Y. J.; YOO, C. H. Thin-walled curved beams. ii: Analytical solutions for buckling of arches. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995. Citado na página 38.

LANGHE, K. D.; SAS, P.; VANDEPITTE, D. The use of wave-absorbing elements for the evaluation of transmission characteristics of beam junctions. *Journal of vibration and acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 119, n. 3, p. 293–303, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.

LEE, J. In-plane free vibration analysis of curved timoshenko beams by the pseudospectral method. *KSME international journal*, Springer, v. 17, n. 8, p. 1156–1163, 2003. Citado na página 35.

LEE, S. K.; MACE, B. R.; BRENNAN, M. J. Wave propagation, reflection and transmission in curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 306, p. 636–656, 2007. Citado 8 vezes nas páginas 34, 35, 48, 50, 51, 53, 114 e 115.

LEE, S. Y.; HSIAO, J. Y. Free in-plane vibrations of curved nonuniform beams. *Acta Mechanica*, 2002. Citado na página 33.

LEISSA, A.; QATU, M. *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 9780071714808. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=59R1oLzNvCQC>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.

- LI, J. *A geometrically exact curved beam theory and its finite element formulation/implementation*. Dissertação (Mestrado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000. Citado na página 33.
- LIM, C. W.; WANG, C. M.; KITIPORNCHAI, S. Timoshenko curved beam bending solutions in terms of euler-bernoulli solutions. *Archive of Applied Mechanics*, 1997. Citado na página 33.
- LITEWKA, P.; RAKOWSKI, J. An efficient curved beam finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 2629–2652, 1997. Citado na página 37.
- LOPEZ, R. de F. *A 3D finite beam element for the modelling of composite wind turbine wings*. Dissertação (Mestrado) — Royal Institute of Technology (KTH), 2013. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 74.
- LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1906. v. 2. Citado na página 42.
- MISRA, A. K.; PAÏDOUSSIS, M. P.; VAN, K. S. On the dynamics of curved pipes transporting fluid. part i: Inextensible theory. *Journal of Fluids and Structures*, v. 2, p. 221–244, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 33, 41 e 78.
- MORSBØL, J.; SOROKIN, S. V. Elastic wave propagation in curved flexible pipes. *International Journal of Solids and Structures*, v. 75-76, p. 143–155, 2015. Citado na página 37.
- PETYT, M.; FLEISCHER, C. Free vibration of a curved beam. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 17–30, 1971. Citado na página 36.
- PRATHAP, G.; BABU, C. R. An isoparametric quadratic thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 23, n. 9, p. 1583–1600, 1986. Citado na página 36.
- PROVASI, R.; MARTINS, C. de A. A three-dimensional curved beam element for helical components modeling. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 136, p. 041601–1,041601–7, 2014. Citado na página 37.
- RODRIGUES, O. Des lois géométriques qui regissent les déplacements d' un système solide dans l' espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacement considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire. *J. Math. Pures Appl.*, v. 5, p. 380–440, 1840. Citado na página 71.

SHABANA, A. A.; YAKOUB, R. Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Theory. *Journal of Mechanical Design*, v. 123, p. 606–6013, december 2001. Citado na página 36.

SØE-KNUDSEN, A. Design of stop-band filter by use of curved pipe segments and shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer Nature, v. 44, n. 6, p. 863–874, aug 2011. Citado na página 35.

SØE-KNUDSEN, A.; SOROKIN, S. V. Modelling of linear wave propagation in spatial fluid filled pipe systems consisting of elastic curved and straight elements. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, p. 5116–5146, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 35, 39, 124, 125 e 140.

TARNOPOLSKAYA, T.; HOOG, F. R.; FLETCHER, N. H. Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1999. Citado na página 36.

TüFEKÇİ, E.; ARPACI, A. Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

TONG, X.; MRAD, N.; TABARROK, B. In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 1998. Citado na página 35.

WALSH, S. J.; WHITE, R. Vibrational power transmission in curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 233, n. 3, p. 455–488, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 33, 34, 35, 41, 48, 61 e 114.

WANG, T. M.; NETTLETON, R. H.; KEITA, B. Natural frequencies for out-of-plane vibrations of continuous curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 68, n. 3, p. 427–436, 1980. Citado 5 vezes nas páginas 33, 41, 46, 76 e 78.

WU, C.; LUNDBERG, B. Reflection and transmission of the energy of harmonic elastic waves in a bent bar. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 190, n. 4, p. 645–659, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 34, 35, 41, 44, 48 e 114.

XIUCHANG, H. et al. Research on wave mode conversion of curved beam structures by the wave approach. *Journal of Sound and Vibration*, v. 135(3), p. 16, 2013. Citado na página 38.

YANG, F.; SEDAGHATI, R.; ESMAILZADEH, E. Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier BV, v. 318, n. 4-5, p. 850–867, dec 2008. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

YOON, K. et al. Natural frequencies of thin-walled curved beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

ZHU, L.; ZHAO, Y. Exact solution for warping of spatial curved beams in natural coordinates. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008. Citado na página 33.

ZHU, Z.; MEGUID, S. Vibration analysis of a new curved beam element. *Journal of Sound and Vibration*, v. 309, p. 86–95, 2008. Citado na página 78.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 6th. ed. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2005. 736 p. Citado na página 74.