

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

**INTERAÇÃO KÁON-HÍPERON (KY) A BAIXAS
ENERGIAS**

Florianópolis

2018

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

**INTERAÇÃO KÁON-HÍPERON (KY) A BAIXAS
ENERGIAS**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física da Uni-
versidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do Grau de Mestre
em Física.
PPGFSC/UFSC-Orientador: Prof. Dr.
Celso de Camargo Barros Junior

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Nogueira Santos, Marcelo Gabriel Luiz
Interação Káon-Híperon (KY) a Baixas Energias /
Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos ; orientador,
Celso de Camargo Barros Jr., 2018.
217 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física,
Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

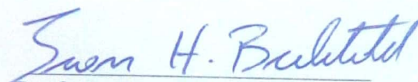
1. Física. 2. Híperons. 3. Baixas energias. 4.
Lagrangianas quirais. 5. Espalhamento elásticos. I.
Barros Jr., Celso de Camargo . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação
em Física. III. Título.

Marcelo Gabriel Luiz Nogueira Santos

INTERAÇÃO KÁON-HÍPERON (KY) A BAIXAS ENERGIAS

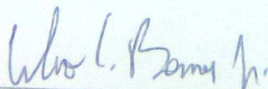
Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de MESTRE EM FÍSICA na área de concentração Física Matemática e Teoria de Campos e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Florianópolis, 27 de março de 2018.

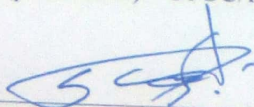


Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador do Programa

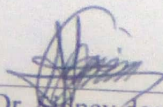
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
(presidente) - UFSC/FSC



Prof. Dr. Paulo Juliano Liebgott
(membro externo) - UFSC/FSC



Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(membro titular) - UFSC/FSC

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por serem sempre o apoio estrutural e existencial.

Ao orientador prof. Dr. Celso de Camargo Barros junior pela orientação e ensinamentos.

Ao professor prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg pela ajuda em questões regimentais.

À coordenação e secretaria do PPGFSC/UFSC.

Aos amigos Brayan Marcelo Paredes, Giovanni Bratti e Gustavo Myrria pela ajuda em relação às técnicas.

Às amigas Juliana Rabelo do Carmo e Andressa Bernardes pela revisão e correção de alguns textos.

”A ideia de que quem espera sempre alcança tem algo de arriscado: a noção de esperança como espera, como ficar aguardando, ficar na expectativa. [...] Não é verdade. [...] É preciso trazer a esperança como verbo e não apenas como substantivo. Portanto, o verbo esperança é ir atrás, buscar, ter persistência, ter paciência, ter resistência, mas, acima de tudo, ter energia para movimentar na direção daquilo que se espera que se deseja. É preciso esperar.”

(Mario Sergio Cortella, 2012)

”Eu preferiria perder meu poder de movimento ao perder minha utilidade. Eu preferiria a morte à inatividade... Nunca me canso de ser útil.”

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

Neste trabalho será feito o estudo da interação káon-híperon a baixas energias, através de lagrangianas efetivas quirais não lineares, considerando a troca de mésons ρ , σ , bárions e ressonâncias bariônicas. O formalismo básico necessário será desenvolvido e então calcularemos os observáveis, seção de choque total, seção de choque diferencial, defasagens e polarização no referencial centro de massa, levando em conta até as ondas parciais S e P .

Palavras-chave: Híperons. Baixas energias. Lagrangianas quirais. Espalhamento elásticos. Káons. Seção de choque. Defasagem. Polarização.

ABSTRACT

In this work a study of low energy kaon-hyperon interaction will be done taking into account nonlinear effective chiral Lagrangians considering ρ , σ mesons, baryons and baryons resonances. The basic formalism that is needed will be shown and then we will calculate the observable quantities, the total cross section, the angular distributions, the polarization, and the phase shifts in the center-of-mass frame considering to low energy S- and P-wave.

Keywords: Hyperons. Low energy. Chiral lagrangians. Cross section. Polarization. Phase shifts. Scattering. Kaon.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Espalhamento	30
Figura 2	Diagrama simples	33
Figura 3	Linhas externas	34
Figura 4	Vértices	35
Figura 5	Propagadores	36
Figura 6	Ondas Parciais	44
Figura 7	Soma de todos as amplitudes possíveis	48
Figura 8	Diagramas diretos considerado para $K\Sigma$	56
Figura 9	Diagramas diretos e cruzados	57
Figura 10	Troca de um méson- ρ na interação $K\Sigma$	75
Figura 11	Troca de um méson- σ	79
Figura 12	Diagramas considerados para $K\Lambda$	81
Figura 13	Diagramas considerados para $K\Xi$ e $\bar{K}\Xi$	85
Figura 14	Diagramas $K\Sigma$	99
Figura 15	Diagramas $\bar{K}\Sigma$	100
Figura 16	Diagramas $K\Lambda$	102
Figura 17	Diagramas $\bar{K}\Lambda$	103
Figura 18	Diagramas $K\Xi$	106
Figura 19	Diagramas $\bar{K}\Xi$	107
Figura 20	Seção de Choque Total e Defasagens $K\Sigma$	110
Figura 21	Seção de Choque Diferencial e Polarização $K\Sigma$	111
Figura 22	Seção de Choque Total e Defasagens de $\bar{K}\Sigma$	112
Figura 23	Seção de Choque Diferencial e Polarização de $\bar{K}\Sigma$	113
Figura 24	Resultados $K\Lambda$	114
Figura 25	Resultados $\bar{K}\Lambda$	114
Figura 26	Secção de Choque Total e Defasagens de $K\Xi$	115
Figura 27	Seção de Choque Diferencial e Polarização de $K\Xi$	116
Figura 28	Seção de Choque Total e Defasagens de $\bar{K}\Xi$	117
Figura 29	Seção de Choque Diferencial e Polarização de $\bar{K}\Xi$	118
Figura 30	Variação de g_s para $\bar{K}\Lambda$	119
Figura 31	Formas possíveis do potencial.	144
Figura 32	Quebra espontânea de simetria em uma tira de plastico.	147

Figura 33	Cinco acoplamentos	149
Figura 34	Quebra de simetria	149
Figura 35	Simetria Quiral	151
Figura 36	Helicidade	151
Figura 37	Decaimento do pión	161
Figura 38	Quebra de simetria quiral para os mésons π e σ	167
Figura 39	Massas na quebra de simetria quiral	171
Figura 40	Quebra explícita de simetria quiral	171
Figura 41	Potencial $\lambda \rightarrow \infty$	173
Figura 42	Dinâmica restrita ao círculo	174
Figura 43	Vértices de interação	178
Figura 44	Diagramas	191

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Correspondência de notações	47
Tabela 2	Propriedades das ressonâncias de $K\Sigma$	99
Tabela 3	Troca de um ρ em $K\Sigma$	99
Tabela 4	Propriedades das ressonâncias de $\overline{K}\Sigma$	101
Tabela 5	Propriedades das ressonâncias de $K\Lambda$	102
Tabela 6	Propriedades das ressonâncias de $\overline{K}\Lambda$	103
Tabela 7	Propriedades das partículas de $K\Xi$	106
Tabela 8	Troca de um ρ em $K\Xi$	106
Tabela 9	Razão das seções de choque totais KY	108
Tabela 10	Razão das seções de choque totais $\overline{K}Y$	108
Tabela 11	Porcentagens relativas dos valores dos picos de $\overline{K}\Lambda$	109
Tabela 12	Grupos.....	139

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	FORMALISMO GERAL PARA O ESPALHAMENTO MÉSON-BÁRION	29
2.1	AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO	29
2.1.1	Variáveis de Mandelstam	29
2.1.2	Diagramas de Feynman, Matrizes S , T e \mathcal{M}	31
2.1.3	Regras de Feynman: Calculando a amplitude \mathcal{M} ..	34
2.1.4	Interação πN : Matriz de Transição T	36
2.1.4.1	Operador de projeção de isospin	37
2.1.4.2	Amplitude de espalhamento T	39
2.1.5	Amplitude de espalhamento para um dado estado de isospin	41
2.1.5.1	Ondas Parciais	43
2.1.5.2	Unitarização	47
2.2	OBSERVÁVEIS	49
2.2.1	Seção de Choque	49
2.2.1.1	Seção de Choque Diferencial	49
2.2.1.2	Seção de Choque Total	50
2.2.2	Phase Shift	51
2.2.2.1	Deslocamentos de fase unitarizados	52
2.2.3	Polarização	53
3	INTERAÇÃO KÁON-HÍPERON	55
3.1	INTERAÇÃO $K\Sigma$	56
3.1.1	Troca de um N e um Ξ	57
3.1.1.1	Cálculo das amplitudes A^\pm e B^\pm	57
3.1.1.2	Amplitudes de ondas parciais	60
3.1.2	Troca de um Δ	64
3.1.2.1	Cálculo das amplitudes A^\pm e B^\pm	64
3.1.2.2	Amplitudes de ondas parciais para o canal $I = 3/2$	67
3.1.2.3	Amplitudes de ondas parciais para o canal $I = 1/2$	69
3.1.3	Troca de um N^* e Ξ^*	70
3.1.3.1	Cálculo das ondas parciais	72
3.1.4	Troca de um méson-ρ	75
3.1.4.1	Amplitude com isospin-3/2	77
3.1.4.2	Amplitude com isospin-1/2	78
3.1.5	Troca de um σ	79
3.2	INTERAÇÃO $K\Lambda$	80

3.2.1	Ondas parciais para N e Ξ	81
3.2.2	Ondas parciais para N^* e Ξ^*	83
3.3	INTERAÇÕES $K\Xi$ E $\bar{K}\Xi$	85
3.3.1	Amplitudes de ondas parciais com spin- $\frac{1}{2}$	86
3.3.1.1	Canal de isospin-0 para Λ	86
3.3.1.2	Canal de isospin-0 para Σ	87
3.3.2	Troca do méson- ρ	88
3.3.3	Interação $\bar{K}\Xi$, troca de uma Ω	89
3.3.4	Diagramas cruzados spin-1/2 para $\bar{K}\Xi$	89
3.3.4.1	Canal de isospin-0	89
3.3.4.2	Canal de isospin-1	90
3.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
4	INTERAÇÃO KÁON-HYPERON RESULTADOS FINAIS	93
4.1	DEFASAGEM DE BREIT-WIGNER E AS CONSTANTES DE ACOPLAMENTO	93
4.2	INTERAÇÃO DE Σ	95
4.2.1	Multiplete de partículas	95
4.2.2	Resultados finais para $K\Sigma$	98
4.2.3	Resultados finais para $\bar{K}\Sigma$	100
4.3	INTERAÇÃO DE Λ	101
4.3.1	Resultados finais para $K\Lambda$	101
4.3.2	Resultados finais para $\bar{K}\Lambda$	103
4.4	INTERAÇÃO DE Ξ	104
4.4.1	Reações de partículas	104
4.4.2	Resultados finais para $K\Xi$	105
4.4.3	Resultados finais para $\bar{K}\Xi$	107
4.5	OUTROS RESULTADOS	108
4.5.1	Razão entre σ_T para ressonâncias em comum	108
4.5.2	Varição da constante de acoplamento para a parametrização $\sigma(g_S)$	109
5	CONCLUSÃO	121
	REFERÊNCIAS	125
	APÊNDICE A - Formalismo Quiral	133
	APÊNDICE B - Detalhes dos cálculos dos observáveis	185
	APÊNDICE C - Cálculo Detalhado do Diagrama de Feynmann para Spin-1/2	191
	APÊNDICE D - Separação dos Diagrama Direto e Cruzado para Partículas de Spin-3/2	199

APÊNDICE E - Constantes de Acoplamento e o	
SU(3)	209
APÊNDICE F - Integrais I_n	217

1 INTRODUÇÃO

Uma questão básica de interesse para este trabalho é por que estudar as interações entre mésons e híperons a baixas energias (energia comparada a momentos típicos no sistema do centro de massa $k \leq 300 - 400 \text{ MeV}$). Experimentalmente, esse interesse é muito pequeno, talvez pela dificuldade de gerar feixes de híperons, talvez, pelo rápido desenvolvimento tecnológico que levou rapidamente aos domínios das altas energias. Mas o fato é que um estudo experimental preciso e completo tal como o realizado para as interações πN não foi feito e atualmente o único resultado existente é o valor de uma diferença de defasagens ($\delta_S - \delta_P$) obtido para análise de dados da colaboração HyperCP do Fermilab (BURNSTEIN et al., 2005) em 2004.

A questão então é por que estudar esse tipo de interação, e a resposta é muito simples, porque é um elemento fundamental para o entendimento de diversos sistemas físicos. Em primeiro lugar, devemos observar que é uma interação fundamental, e sempre deve ocorrer onde existem híperons. Além disso esta interação é um ingrediente básico no entendimento da interação núcleon-híperon (NY), que é necessária para o entendimento da estrutura dos hipernúcleos, o que, por motivos óbvios ainda apresenta muitas questões em aberto.

Outro sistema de interesse é o da estrutura de estrelas de nêutrons, onde existem modelos considerando a existência de híperons, e nesse caso, mais uma vez o entendimento dessa interação é necessário. Em processos a altas energias onde existe a produção de híperons, essas interações são fundamentais nos estados finais e desse modo precisam ser compreendidos de forma precisa.

Neste trabalho, vamos então estudar as interações $K(\bar{K})$ -Híperons de acordo com o modelo proposto para o estudo das interações πY (BARROS; HAMA, 2001), generalizando e adaptando as ideias para descrever essas interações.

Inicialmente, vamos fazer uma breve apresentação histórica do desenvolvimento da física de partículas. Pode-se afirmar, de modo geral, que a física das partículas elementares nasceu com a descoberta do elétron por J. J. Thompson, em 1897, através da análise de raios catódicos, os quais eram defletidos quando submetidos a um campo magnético, evidenciando sua carga negativa (GRIFFITHS, 1987). Thompson, cruzando e variando a intensidade de um campo elétrico e um magnético foi capaz de determinar a velocidade e a razão entre a carga e a massa do elétron (nome atribuído à George Johnstone Stoney em 1891).

Rutherford, em 1911, influenciado pela descoberta da radioatividade por Becquerel, em 1896, e pela identificação das substâncias radioativas por Pierre e Marie Curie em 1898, realizou seu famoso experimento de espalhamento de partículas α em folhas de ouro extremamente finas. Tal experimento demonstrou que uma carga positiva continha quase que toda a massa e estava concentrada em um pequeno núcleo no centro do átomo (KRANE; HALLIDAY, 1988; WONG, 1999). Em seguida, novos experimentos concluíram que tal núcleo possuía subestruturas, os prótons portadores das cargas positivas e os nêutrons este descobertos por Chadwick em 1932, de carga neutra e com aproximadamente mesma massa do próton.

Com a descoberta do nêutron, levantou-se a questão: de qual forma os prótons de cargas positivas poderiam ser mantidos unidos em uma região tão pequena, apesar da forte repulsão eletromagnética, uma vez que, nêutrons em nada colaboram com sua carga nula? Assim, nasceu o conceito da força forte, que seria responsável por manter o núcleo atômico coeso, vencendo a forte repulsão Coulombiana. Sabendo-se que tal força forte deveria ser de curto alcance, Yukawa, em 1934, propôs uma teoria de interação, através de uma partícula responsável pela interação de curto alcance com massa entre a massa do elétron e a do próton, por isso recebeu o nome do grego de méson que significa “intermediário” (*‘middle-weight’*). Em 1947, após a segunda guerra mundial, ocorreu uma paralisação nas pesquisas da física de partículas, mas apesar do esforço de guerra, Cecil Power, César Lattes e Giuseppe Occhialini descobriram o méson- π estudando os raios cósmicos. Esta partícula se encaixava nas previsões do modelo de Yukawa. Ali se encontrava o primeiro méson, o pión, tido como o responsável por transmitir a força forte, mantendo o núcleo atômico coeso.

No final do ano de 1947 Rochester e Butler, analisando chapas fotográficas de raios cósmicos, notaram uma partícula de carga nula decaindo em dois pions de cargas opostas (π^+ e π^-). Tal partícula, tendo mais do dobro da massa do pión, recebeu o nome de káon (K^0). Brown e seus colaboradores descobriram, em 1949, uma partícula carregada decaindo em três pions, que mais tarde, em 1956, demonstrou-se tratar de uma versão carregada do káon, sendo este denominado K^+ . Os káons descobertos apresentavam um comportamento similar ao dos pions, concluindo-se que se tratava de um novo tipo de méson. Com o passar dos anos muitos outros méson foram descobertos, tais como o eta (η) e o rô (ρ). Sabe-se hoje que tais mésons também participam com maior ou menor importância da interação nuclear.

No ano de 1950 o grupo de Anderson encontrou uma partícula

muito similar ao K^0 , mas dessa vez decaindo em um próton (p^+) e um π^- , consideravelmente mais massiva que o próton. Hoje tal partícula é conhecida como Λ^0 . O Λ , juntamente com o próton e o nêutron, pertence à família dos bárions (*heavy-weight*). Ainda em 1938, a fim de explicar o motivo do próton não decair em partículas mais leves, tal como o nêutron, Stückelberg associou números quânticos aos bárions, os quais, deveriam ser conservados em todas as reações. Dessa forma, o nêutron poderia decair em um próton (bárion mais leve), mas, não o contrário. Com a descoberta de novos bárions como Σ , Ξ , tais partículas, juntamente com o Λ apresentavam suas taxas de criação e de decaimento muito diferentes, algo considerado estranho, por isso, foram chamadas de partículas estranhas. Pais sugeriu que a produção de partículas estranhas era causada pela interação forte e seu decaimento por uma outra força chamada de força fraca, responsável pela desintegração β . Assim, em 1953, Gell-Mann e Nishijima, propuseram a utilização de um novo número quântico, que deveria ser conservado quando eram produzidas tais partículas, porém, não quando decaíam. Este novo número quântico recebeu o nome de estranheza. Os bárions estranhos são chamados hoje de híperons. Por sua vez, os cáons também possuem estranheza, sendo assim conhecidos como mésons estranhos.

Em 1961 Gell-Mann e independentemente Ne'eman, propuseram uma maneira de classificação dos bárions e dos mésons, uma espécie da tabela periódica, chamada de *Eightfold Way*. Esta classificação era feita considerando os números quânticos, como carga, estranheza e isospin. Através dessa ideia, Gell-Mann previu a existência de uma nova partícula, que foi descoberta em 1964, o conhecido bárion Ω^- e tal descoberta trouxe grande confiança no modelo.

O sucesso do *Eightfold Way*, levantou a questão, do motivo de as partículas terem características distribuídas desta forma e, novamente, Gell-Mann e Zweig independentemente propuseram que os hádrons (bárions e mésons) eram compostos por partículas ainda mais elementares, os *quarks*. Para descrever todos os hádrons conhecidos até então, deveriam existir três tipos diferentes de quarks, chamados de *up* (u), *down* (d) e *strange* (s), que quando combinados eram capazes de explicar a carga, estranheza, massa, spin e isospin de cada bárion e méson. Porém até aquele momento nenhum quark isolado havia sido encontrado, por melhor que fossem os esforços, levando ao postulado da existência do confinamento dos quarks, ou seja, eles estariam sempre confinados dentro dos hádrons inevitavelmente. Nos anos 1960, foram usados no *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC), elétrons com altas energias no chamado espalhamento profundo inelástico, remontando à experiên-

cia de Rutherford. Logo após os anos 1970, os mesmo experimentos foram realizados utilizando neutrinos e também prótons, concluindo-se que o próton era composto por três pequenos carços, trazendo grande evidências ao modelo de quarks.

O modelo de quarks se mostrou incompleto com a introdução do princípio de exclusão de Pauli, pois os quarks possuíam spin semi-inteiro, resultando na impossibilidade da existência dos bárions de três quarks idênticos, como o Δ^{++} (uuu), Δ^{-} (ddd) e Ω^{-} (sss). A solução do problema veio com Greenberg em 1964, propondo a existência de um novo numero quântico, chamado *cor*, sendo uma espécie de carga da interação forte de três tipos: “vermelho”, “azul” e “verde”. Estes, quando combinados, resultavam na cor neutra “branca”, isto é, tal como uma carga forte neutra. O desenvolvimento teórico desse modelo foi capaz de explicar o confinamento dos quarks, as composições dos bárions por três quarks e dos mésons por somente dois quarks, assim como a não observância de partículas com quatro ou mais quarks, ficando conhecido como Quantum Chromodynamics (QCD).

Na QCD temos ainda os portadores da força de interação entre os quarks, os chamados *glúons*, cuja características se assemelham aos do fóton, na eletrodinâmica quântica (QED). Porém, diferentemente deste, porta “duas cargas” de cor simultaneamente, levando a interações entre si. Tal característica do glúon é capaz de explicar a chamada liberdade assintótica dos quarks, uma vez que quanto maior a energia menor é a força de interação. Sendo assim, quanto menores as energias, maiores as forças de interação, levando ao já mencionado confinamento dos quarks. Na eletrodinâmica quântica, o modelo que explica a interação eletromagnética, tem-se associada à interação entre o fóton e cargas elétricas uma constante, que recebe o nome de constante de acoplamento, sendo esta um fator multiplicador para cada vértice nos diagramas de Feynman, que representa muitos processos físicos que podem ocorrer em uma interação. As amplitudes relativísticas dos diagramas são multiplicadas n vezes (número de vértices) pela constante de acoplamento, assim quanto mais complexo forem os diagrama de Feynman, mais improváveis serão de ocorrerem fisicamente, já que a constante de acoplamento possui valor menor que um. Uma vez que todos os diagramas possíveis devem ser somados, pois têm alguma probabilidade de ocorrerem, pode existir a possibilidade de uma amplitude de interação infinita. Na QCD, pelo fato dos glúons interagirem entre si, a constante de acoplamento resulta maior que um para a interação entre quarks a baixas energias, levando a uma divergência nas amplitudes, o que impossibilita o uso direto do modelo, neste regime de energia.

Devido às muitas evidências da existência de quarks a QCD foi tida como a teoria fundamental das interações fortes. Porém, a dinâmica de interação no núcleo atômico a baixas energias, nos moldes do modelo de Yukawa, não pôde ser diretamente descrita, cuja necessidade levou ao desenvolvimento de outros modelos através de simetrias da QCD, como por exemplo a simetria quiral.

As ideias associadas à simetria quiral (ROCHA, 1993) surgiram, ainda, com o trabalho de Pauli, em 1933, nos estudos de decaimento beta, postulando a existência do neutrino. Fermi, em seguida, postulou a base para a teoria da interação fraca no molde da QED. A teoria foi formulada de forma a conter a invariância de Lorentz, reversão temporal e reflexão espacial. Dessa forma, a interação poderia ser descrita por cinco tipos de vértices diferentes: escalar, pseudo-escalar, vetorial, vetor-axial e tensorial. Ao medir as constantes de acoplamentos do decaimento beta, constatou-se que os acoplamentos escalar e vetorial eram aproximadamente os mesmos dos acoplamentos vetor-axial e tensorial, levando-se a acreditar que, o modelo de interação proposto por Fermi era de natureza universal.

Esta universalidade da interação fraca foi corroborada através do estudo dos modos de decaimento do múon, descoberto em 1936, e do pión, descoberto em 1947, e logo foi demonstrado que tais decaimentos podiam ser descritos pelo mesmo modelo.

Em 1956, Lee e Yang demonstraram que a existência de pares carregados dos káons neutros (K^0 e \bar{K}^0) violavam a conservação de paridade, constatando-se, então, após vários experimentos que, de fato, a interação fraca não conserva a paridade e também confirmou-se a universalidade das constantes de acoplamentos. A não conservação da paridade está associada a uma corrente com uma parte vetorial (V) e uma parte vetor-axial (A), neste caso então a interação de Fermi, pode ser descrita por uma corrente do tipo $V - A$, e leva à hipótese da conservação da corrente vetorial forte (CVC), ou corrente de isospin, pelos trabalhos de Feynman e Gell-Mann, em 1958, através do estudo das correntes no decaimento do múon no decaimento beta. Desta forma, as simetrias das interações, e suas correntes associadas, passaram a ser fonte importante no estudo das interações fraca e forte nucleares.

As constantes de acoplamento vetorial e axial eram aproximadamente iguais, porém existia uma pequena diferença, assim, Gell-Mann e Lévy, em 1960, propuseram a hipótese da conservação parcial da corrente axial ($PCAC$), ao estudarem o decaimento do pión, onde a divergência da corrente axial é pequena e diretamente proporcional à massa do pión. Desta forma, a interação forte passou a ter uma cor-

rente vetorial conservada (*CVC*) e uma corrente axial quase conservada (*PCAC*). Aplicando a corrente axial aos estados dos núcleons (próton ou nêutron) interagindo entre si e impondo sua conservação constata-se que sua interação deve ser feita através de uma partícula de massa nula. Sabe-se que tal partícula não existe e que a interação de longo alcance entre núcleons é feita através do pión, segundo o modelo de Yukawa. Tal resultado é considerável, já que muitas vezes podemos considerar a massa do pión em relação às energias das interações forte pequena e aproximadamente desprezível. Concluí-se então, que na interação forte existem associada à corrente vetorial a simetria de isospin e associada à corrente axial uma nova simetria aproximadamente exata, a Simetria Quiral. Os modelos mais comuns decorrentes da simetria quiral foram os σ -linear e σ não-linear.

O estudo da interação πN é de grande importância para a física nuclear e foi exaustivamente estudado, sendo o ingrediente básico para processos mais complexos como: a produção de píons, espalhamentos NN e πd , absorção de píons e potenciais nucleares (MENEZES, 1985). Ainda que existam outros modelos para descrever tais interações, o modelo baseado na simetria quiral se mostrou através das teorias de interação efetivas, simples e com bom acordo experimental, nos levando a desenvolver um modelo com essas características neste trabalho.

Um caminho natural de ser percorrido é dar prosseguimento aos estudos de interações de hádrons de forma análoga ao que foi desenvolvido para estudar as interações do tipo pión-híperon (πY) (BARROS; HAMA, 2001) que foi baseado em um modelo proposto para estudar as interações πN . Porém, devido às dificuldades experimentais, como por exemplo tempo de vida média dos híperons, existem muito poucos dados experimentais, mantendo os cálculos teóricos na vanguarda. Tal cenário pode ser mudado com o advento de novos laboratórios de pesquisas.

Segundo o referido roteiro, nos propomos a investigar a interação, ainda experimentalmente pouco conhecida, káon-híperon (KY), considerando a troca de bárions, ressonâncias, méson vetorial ρ e do σ , até as ondas parciais S e P , que dominam a amplitude de espalhamento a baixas energias.

Espera-se que a interação KY , juntamente com as interações πN , πY e KN , possibilite, em um futuro, calcular precisamente potenciais de tipo NY , YY e NNY , importantes no estudos de estrelas de nêutrons, hipernúcleos e, possivelmente, aplicações tecnológicas.

Este trabalho está dividido em três capítulos além da introdução, conclusão e cinco apêndices.

No capítulo 2, iremos introduzir o formalismo necessário para o cálculo das amplitudes de interações de interesse. Começamos definindo as variáveis de Mandelstan, em seguida a representação por diagramas de Feynman e seus cálculos, por fim, após demonstrando a forma geral da amplitude de interação méson-bárion, apresentamos os observáveis que nos interessam e como podem ser calculados.

No capítulo 3, efetuamos os cálculos das amplitudes de interação de forma determinada para cada caso, $K\Sigma$, $K\Lambda$ e $K\Xi$ de acordo com seu spin e isospin.

No capítulos 4, serão expostos os resultados numéricos dos cálculos dos observáveis de acordo com os canais de isospin e a determinação das constantes de acoplamento das ressonâncias através da defasagem de Breit-Wigner.

O Capítulo 5 é dedicado às conclusões do trabalho e perspectivas futuras.

No apêndice A, iremos apresentar uma ideia geral do formalismo quiral necessário à dedução das lagrangianas efetivas do modelo, começando pelos ingredientes básicos da teoria quântica de campos, passando pelo conceitos de simetria até os modelos σ -linear e não-linear.

Alguns detalhamentos de cálculos da seção de choque total e da defasagens, deduzidos no capítulo 2, são mostrados no apêndice B.

No apêndice C será exposto como calcular as constantes de acoplamento através do uso da $SU(3)$. No apêndice D será detalhado o cálculo do diagrama de Feynman para spin-1/2 apresentado no capítulo 4. Finalmente, no apêndice E são indicadas as integrais necessárias aos cálculos do capítulo 4.

2 FORMALISMO GERAL PARA O ESPALHAMENTO MÉSON-BÁRION

Neste capítulo, iremos fornecer o formalismo geral que pretendemos utilizar para a descrição da interação entre um méson de spin-0 e um bárion de spin- $\frac{1}{2}$ e então determinar as expressões gerais dos observáveis. Usaremos como base a descrição para a interação πN , já bem estabelecida.

Em um primeiro momento iremos definir o formalismo geral da cinemática relativística no referencial do centro de massa. Em seguida mostraremos brevemente conceitos associados aos diagramas de Feynman, e às matrizes de espalhamento S , T e \mathcal{M} . Também definiremos operadores de projeção de isospin, os quais nos permitem introduzir os estados de isospin das interações nas matrizes de espalhamento. Estenderemos as amplitudes de interação às amplitudes de ondas parciais, e por fim encontraremos os observáveis seções de choque diferencial e total, defasagem (ou *phase shift*) e a polarização.

2.1 AMPLITUDES DE ESPALHAMENTO

2.1.1 Variáveis de Mandelstam

Para descrever o espalhamento de partículas no referencial do centro de massa, devemos fazer um tratamento relativístico desse sistema e assim, inicialmente determinaremos a cinemática das partículas. Para tanto temos de levar em conta os quadrimomentos dessas partículas. A conservação do quadrimomento (energia-momento) total inicial deve ser

$$p + k = p' + k', \quad (2.1)$$

onde temos os quadrimomentos iniciais de duas partículas p , k e os respectivos quadrimomentos finais p' , k' conforme indicado na Figura 1.

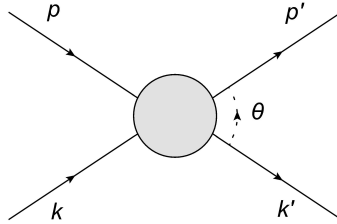
Os quadrimomentos do bárion e do méson podem ser definidos como

$$p = p^\mu = (E, \vec{p}), \quad p = p_\mu = (E, -\vec{p}), \quad (2.2)$$

$$k = k^\mu = (k_0, \vec{k}), \quad k = k_\mu = (k_0, -\vec{k}). \quad (2.3)$$

E expressos semelhantemente para os 4-momentos finais p' e k' .

Figura 1 – Espalhamento



Vamos definir as energias das partículas no referencial do centro de massa (cm)

$$E = E' = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}, \quad (2.4)$$

$$k_0 = k'_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.5)$$

sendo a parte espacial dos momentos os vetores \vec{p} e \vec{k} , M e m são as massas do bárion e do méson respectivamente.

Iremos usar as variáveis relativísticas dos 4-momentos, conhecidas como variáveis de Mandelstam (PESKIN; SCHROEDER, 1995), definidas como

$$s \equiv (p + k)^2 = (p' + k')^2, \quad (2.6)$$

$$u \equiv (p - k')^2 = (p' - k)^2, \quad (2.7)$$

$$t \equiv (k - k')^2 = (p - p')^2. \quad (2.8)$$

No referencial do centro de massa temos que $\vec{p} = -\vec{k}$, assim a energia total do sistema é, dada por

$$W = E + k_0 = \sqrt{s}. \quad (2.9)$$

Na camada de massa das partículas consideramos

$$p^2 = p'^2 = M^2, \quad k^2 = k'^2 = m^2, \quad (2.10)$$

usando a relação (2.1), escrevemos

$$s + u + t = 2(M^2 + m^2). \quad (2.11)$$

Lembrando que $p \cdot k = p^\mu k_\mu$ e $\vec{p} \cdot \vec{k} = |\vec{p}| |\vec{k}| \cos \theta$ no referencial do centro de massa, onde θ é o ângulo de espalhamento (Figura 1), as

variáveis de Mandelstam podem ser escritas como

$$\begin{aligned} s &= M^2 + m^2 + 2k.p = M^2 + m^2 + 2Ek_0 - 2\vec{k}.\vec{p} \\ \Rightarrow s &= M^2 + m^2 + 2Ek_0 + 2\vec{k}^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u &= M^2 + m^2 - 2k'.p = M^2 + m^2 - 2Ek'_0 + 2\vec{k}'.\vec{p} \\ \Rightarrow u &= M^2 + m^2 - 2\vec{k}'^2 x - 2Ek_0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} t &= 2m^2 - 2k'.k = 2m^2 - 2k'_0k_0 + 2\vec{k}.\vec{k}' \\ \Rightarrow t &= 2\vec{k}^2(x-1), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$s - u = 4Ek_0 + 2\vec{k}^2 + 2\vec{k}'^2 x, \quad (2.15)$$

onde $x = \cos\theta$. Podemos ainda, escrever outra variável útil a partir dessas

$$\nu = \frac{s - u}{4M} = \frac{2Ek_0 + \vec{k}^2 + \vec{k}'^2 x}{2M}. \quad (2.16)$$

2.1.2 Diagramas de Feynman, Matrizes S , T e \mathcal{M}

Os diagramas de Feynman são uma forma pictorial de representar processos na teoria quântica de campos. Na teoria quântica, para estudarmos uma quantidade relacionada a um processo, temos que calcular a amplitude de probabilidade deste processo ocorrer (ROMAN, 1969; KAKU, 1993; PESKIN; SCHROEDER, 1995; ZEE, 2003; MCMAHON, 2008).

Um processo físico que podemos considerar é a transição de um estado inicial $|i\rangle = |a_i(t_0)\rangle$ no tempo t_0 , para um estado final $|f\rangle = |a_f(t)\rangle$ no tempo t , assim

$$|i\rangle \rightarrow |f\rangle.$$

Podemos descrever essa transição através de um operador unitário U , tal como

$$U|i\rangle = |f\rangle. \quad (2.17)$$

A amplitude de transição é dada por

$$\langle f|U|i\rangle = \langle a_f(t)|U|a_i(t_0)\rangle. \quad (2.18)$$

Para processos de espalhamento utilizamos o operador unitário S ,¹ para o qual definimos seu elemento de matriz através de

$$S_{fi} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} \langle a_i(t_0)|U|a_f(t)\rangle. \quad (2.19)$$

Tomamos o limite, porque a partícula antes de interagir, no tempo t_0 , está em um estado livre, assim como, após a interação no tempo t , em um novo estado livre.

Podemos escrever a matriz S de forma mais geral, separando as partes de interação e de não interação

$$S = 1 + iT, \quad (2.20)$$

onde introduzimos uma nova matriz ² T , a qual, descreve a parte interagente do espalhamento. Sendo somada à identidade, pois podemos ter uma parte não interagente do espalhamento.

Ao considerarmos as interações devemos impor a conservação da energia-momento, assim os elementos de matriz T_{fi} devem ser multiplicados pelo fator $\delta^4(p_f - p_i)$, onde p_i e p_f são os 4-momentos totais do sistema inicial e final, respectivamente. A matriz T deve ser normalizada, assim relacionamos o elemento de matriz S_{fi} no espaço dos momentos à matriz \mathcal{M}_{fi} , a qual, descreve a amplitude de uma dada interação ocorrer, como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\mathcal{N}\delta^4(p_f - p_i)\mathcal{M}_{fi}, \quad (2.21)$$

comparando com (2.20), vemos

$$T_{fi} = \mathcal{N}\mathcal{M}_{fi}. \quad (2.22)$$

O termo \mathcal{N} está associado ao espaço de fase (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Para os espalhamentos estudados nesse trabalho, usamos

¹Conhecida comumente como matriz S . O "S" vem da palavra inglesa para espalhamento, *scattering*.

²Também usaremos o nome amplitude de espalhamento. Pode receber outros nomes, tais como: reatância e operador de transição.

$\mathcal{N} = 8\pi W$. Logo, podemos escrever de forma geral, a relação

$$\mathcal{M} = \frac{T}{8\pi W}, \quad (2.23)$$

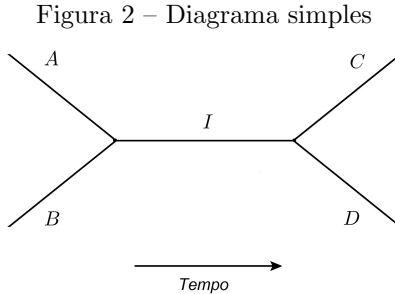
que será utilizada nas próximas seções.

A amplitude \mathcal{M}_{fi} é calculada perturbativamente, onde os termos da série são representados pelos diagramas de Feynman. Assim, a princípio \mathcal{M}_{fi} contém todos os processos possíveis de ocorrer. A função delta de Dirac é introduzida para garantir a conservação da energia e do momento em cada processo.

Um diagrama de Feynman simples, para um espalhamento do tipo

$$A + B \rightarrow I \rightarrow C + D,$$

pode ser representado como na Figura 2.



A flecha do tempo determina o sentido da reação e também, se temos uma partícula ou antipartícula. Isso depende de qual sentido representamos a flecha do momento (não representado na figura acima), assim no mesmo sentido temos uma partícula, no sentido oposto uma antipartícula.

A linha interna do diagrama acima representa o estado intermediário, o qual, é responsável pela interação entre as partículas. Dois vértices conectam as partículas ao estado intermediário, as quais são associadas as constantes de acoplamento características de cada tipo de reação.

2.1.3 Regras de Feynman: Calculando a amplitude \mathcal{M}

Nesta seção vamos estudar o modo de descrever matematicamente cada parte do diagrama, e então prescrever as regras de Feynman para o calculo de \mathcal{M} (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

(1) Linhas externas

No modelo usado nesta dissertação os bárions de spin-1/2 são representados pelos espinores determinadas pela equação de Dirac $u(p)$ quando incidentes e $\bar{u}(p')$ quando emergentes. Para os mésons com spin-0 caracterizados pela equação de Klein-Gordon, as partículas incidentes e emergentes são representadas pela constante 1 (Figura 3).

Figura 3 – Linhas externas

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \quad k & = 1 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad k' & = 1 \\
 \\
 \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \quad p & = u(p) & \begin{array}{c} \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \end{array} \quad p' & = \bar{u}(p')
 \end{array}$$

(2) Vértices

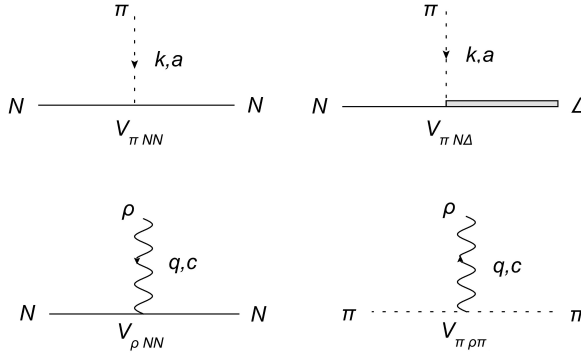
Os vértices dos diagramas de Feynman são determinados a partir das lagrangianas de interação, as quais relacionam os modos de interação entre os campos (linhas do diagrama) envolvidos no diagrama. Desse modo, dispomos das constantes de acoplamento associadas às diferentes interações consideradas.

Os vértices são os coeficientes dos campos presentes em uma lagrangiana de interação, assim para determinar os vértices dos diagramas, “retiramos” os campos da lagrangiana de interação, o que resultar dessa operação será o vértice do diagrama. A partir das lagrangianas deduzidas no Apêndice A, (A.180), (A.189), (A.192) e (A.196), encontramos os vértices de interações (2.24-2.27) mostrados na Figura 4,

$$V_{\pi NN} = \frac{g}{2M} \not{k} \gamma_5 \tau^a, \quad (2.24)$$

$$V_{\pi N\Delta} = g_{\Delta} \left[k^{\mu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^{\mu} \not{k} \right] M^a, \quad (2.25)$$

Figura 4 – Vértices



$$V_{\rho NN} = \frac{g_0}{2} \left[\gamma^\mu + \frac{\mu_p - \mu_n}{2M} i\sigma^{\mu\lambda} q_\lambda \right] \tau^c, \quad (2.26)$$

$$V_{\pi\rho\pi} = -g_0 \epsilon_{abc} \left[k^\mu + k'^\mu - \frac{q \cdot k}{2m_\rho^2} (k'^\mu - k^\mu) \right], \quad (2.27)$$

onde $\partial_\mu \phi = k_\mu$ é o momento do pión e $\partial_\mu \rho = q_\mu$ o momento do rô, sendo ϕ e ρ os campos do pions e do rô respectivamente. Os a, b, c são os índices de isospin.

(3) Linha interna

Linhas internas (Figura 5) sempre ficam entre dois vértices, e recebem o nome de propagador. O propagador está relacionado à uma partícula, que se propaga de um vértice ao outro, assim sua forma matemática vêm das equações de movimento de acordo com seu spin. Vamos considerar os seguintes spins: 0, 1, 1/2 e 3/2. Para os quais os propagadores podem ser deduzidos a partir das equação de Klein-Gordon, Dirac, Proca e Rarita-Schwinger.

Assim os propagadores para o Pión (0), Rô (1), Núcleon (1/2) e Delta (3/2), são respectivamente

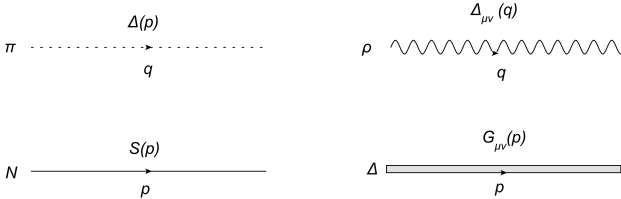
$$\Delta(q) = \frac{i}{q^2 - m_\pi^2}, \quad (2.28)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = -i \frac{(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_\rho^2)}{q^2 - m_\rho^2}, \quad (2.29)$$

$$S(p) = i \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2}, \quad (2.30)$$

$$G_{\mu\nu}(p) = -i \frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu p_\nu}{3m_\Delta} + \frac{p_\mu \gamma_\nu}{3m_\Delta} - \frac{2p_\mu p_\nu}{3m_\Delta^2} \right]. \quad (2.31)$$

Figura 5 – Propagadores



(4) Conservação dos momentos

Para garantir a conservação do momento no diagrama, vamos introduzir uma função delta de Dirac para cada vértice. Todo momento no sentido à um vértice (entrando) será positivo (p_e), no sentido contrario ao vértice (saindo), negativo (p_s).

$$\delta^4 \left(\sum p_e - \sum p_s \right). \quad (2.32)$$

Por fim, a matriz \mathcal{M} será, para diagramas do tipo árvore

$$\mathcal{M} = [\text{linhas externas (entrando)}][\text{vértice 1}][\text{propagador}][\text{vértice 2}][\text{linhas externas (saída)}][\delta^4(\sum p_e - \sum p_s)],^3$$

onde integramos sobre o momento do propagador.⁴

2.1.4 Interação πN : Matriz de Transição T

Em primeiro lugar iremos estudar propriedades da amplitude do espalhamento píon-núcleon (πN) com um modelo bem estabelecido teoricamente (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983; ELLIS; TANG, 1997), já que existem muitos dados experimentais disponíveis, e então o aplicaremos à interação de nosso interesse, káon-híperon (KY), analogamente ao estudo feito em Barros e Hama (2001).

³Lembrando que temos de impor a conservação de momento para cada vértice do diagrama, assim temos nesse caso dois deltas $\delta^4(p_e - p_s)$.

⁴Considerando a propriedade da função de Dirac: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')dx = f(x')$.

Para tal usaremos a relação (2.20) entre S e T (ERICSON; WEISE, 1988; EISENBERG; KOLTUN, 1989; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Queremos calcular a amplitude de espalhamento T , entre os estados de núcleon e pión, iniciais e finais, assim

$$T_{N\pi}^{ba} = \langle \bar{N}(p')\pi_b(k') | S - 1 | N(p)\pi_a(k) \rangle = i\delta^4(p'+k'-p-k)\bar{N}(p')T_{ba}N(p), \quad (2.33)$$

em que

$$T_{ba} = \langle \pi_b(k') | T | \pi_a(k) \rangle, \quad (2.34)$$

onde a, b são o índices de isospin na notação cartesiana. Os N são espinores de quatro componentes, que representa o próton ou o nêutron.

A matriz T pode ser decomposta em dois canais de isospin $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, com o uso dos operadores de projeção de isospin $P_{\frac{1}{2}}$ e $P_{\frac{3}{2}}$, assim escrevemos

$$T = T_{\frac{1}{2}}P_{\frac{1}{2}} + T_{\frac{3}{2}}P_{\frac{3}{2}}. \quad (2.35)$$

2.1.4.1 Operador de projeção de isospin

Nesta seção iremos fazer uma breve revisão dos operadores de projeção de isospin (ERICSON; WEISE, 1988).

A partir de um operador e de seus autovalores, podemos estabelecer um operador projeção de forma geral como

$$P_i = \frac{\Omega - \omega_j}{\omega_i - \omega_j}, \quad i \neq j, \quad (2.36)$$

onde Ω é um operador com autovalores ω_i . O operador atua como

$$P_i |d\rangle = \delta_{id} |d\rangle, \quad (2.37)$$

sendo que $\Omega |d\rangle = \omega_d |d\rangle$.

Para determinar os operadores de projeção de isospin de interesse, precisamos em primeiro lugar observar que os estados de isospin do πN são combinações do isospin do pión (1) e do núcleon (1/2), resultando em canais de isospin 1/2 e 3/2.

Desse modo vamos considerar o operador de isospin para núcleon e o pión, dado por

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\vec{\tau} + \vec{t}, \quad (2.38)$$

onde $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ é o operador de isospin 1, para o pión e $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli que descrevem o isospin 1/2 do núcleon.

Elevando I ao quadrado temos

$$I^2 = \left(\frac{\vec{\tau}}{2}\right)^2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t} + t^2, \quad (2.39)$$

e aplicando na relação

$$I(I+1)\psi = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \vec{\tau} \cdot \vec{t} + 1(1+1)\right]\psi, \quad (2.40)$$

isolando $\vec{\tau} \cdot \vec{t}$ e aplicando em uma auto estado ψ chegamos à

$$(\vec{\tau} \cdot \vec{t})\psi = \left[I(I+1) - \frac{11}{4}\right]\psi = \omega_I\psi. \quad (2.41)$$

Desse modo obtemos para os canais de isospin $1/2$ e $3/2$ respectivamente, os seguintes autovalores

$$I = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_{\frac{1}{2}} = -2, \quad (2.42)$$

$$I = \frac{3}{2} \rightarrow \omega_{\frac{3}{2}} = 1. \quad (2.43)$$

Considerando o operador $\Omega = \vec{\tau} \cdot \vec{t}$ e usando a definição (2.36) chegamos aos operadores projeção de isospin

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \vec{\tau} \cdot \vec{t}}{3}, \quad (2.44)$$

$$P_{\frac{3}{2}} = \frac{2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t}}{3}. \quad (2.45)$$

O operador \vec{t} atuando em estados de píons resulta

$$\langle \pi_b | t_c | \pi_a \rangle = -i\epsilon_{bac}, \quad (2.46)$$

onde a, b, c são os índices cartesianos de isospin. Podemos escrever também na forma

$$\langle \pi_b | \vec{t} | \pi_a \rangle = -i\epsilon_{bac}\hat{e}_c, \quad (2.47)$$

sendo \hat{e}_c versor na direção c .

Assim o operador Ω atuando nos estados do pión, resulta

$$\langle \pi_b | \vec{\tau} \cdot \vec{t} | \pi_a \rangle = -i\epsilon_{bac}\tau_c. \quad (2.48)$$

Finalmente, chegamos à

$$\langle \pi_b | P_{\frac{1}{2}} | \pi_a \rangle = \frac{1}{3} \langle \pi_b | 1 - \vec{\tau} \cdot \vec{t} | \pi_a \rangle = \frac{1}{3} [\delta_{ba} + i\epsilon_{bac}\tau_c], \quad (2.49)$$

e

$$\langle \pi_b | P_{\frac{3}{2}} | \pi_a \rangle = \frac{1}{3} \langle \pi_b | 2 + \vec{\tau} \cdot \vec{t} | \pi_a \rangle = \frac{1}{3} [2\delta_{ba} - i\epsilon_{bac}\tau_c]. \quad (2.50)$$

Os operadores de projeção de isospin neste caso podem então serem escritos como

$$(P_{\frac{1}{2}})_{ba} = \frac{1}{3}\delta_{ba} + \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c, \quad (2.51)$$

$$(P_{\frac{3}{2}})_{ba} = \frac{2}{3}\delta_{ba} - \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c. \quad (2.52)$$

2.1.4.2 Amplitude de espalhamento T

A fim de incorporarmos o isospin é conveniente escrever a amplitude T em função de novas amplitudes onde essa dependência apareça explicitamente.

Substituindo (2.51) e (2.52) em (2.34) temos

$$\langle \pi_b | T | \pi_a \rangle = T_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} [\delta_{ba} + i\epsilon_{bac}\tau_c] + T_{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} [2\delta_{ba} - i\epsilon_{bac}\tau_c],$$

essa expressão pode ser separada da seguinte forma

$$\langle \pi_b | T | \pi_a \rangle = \frac{1}{3} (T_{\frac{1}{2}} + 2T_{\frac{3}{2}}) \delta_{ba} + \frac{1}{3} (T_{\frac{1}{2}} - T_{\frac{3}{2}}) i\epsilon_{bac}\tau_c,$$

onde podemos definir

$$T^+ = \frac{1}{3} (T_{\frac{1}{2}} + 2T_{\frac{3}{2}}), \quad (2.53)$$

$$T^- = \frac{1}{3} (T_{\frac{1}{2}} - T_{\frac{3}{2}}), \quad (2.54)$$

logo,

$$T_{\frac{1}{2}} = T^+ + 2T^-, \quad (2.55)$$

$$T_{\frac{3}{2}} = T^+ - T^-. \quad (2.56)$$

A fim de simplificarmos as expressões, escrevemos as amplitudes T^\pm em função de novos parâmetros invariantes de Lorentz (funções de s, t, u) A e B , deixando explícita a dependência nos momentos dos píons.⁵

$$T^\pm = A^\pm + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^\pm. \quad (2.57)$$

Substituindo em (2.55) e (2.56) temos

$$T_{\frac{1}{2}} = \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+ \right] + 2 \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^- \right],$$

$$T_{\frac{3}{2}} = \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+ \right] - \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^- \right],$$

e assim concluímos que

$$A_{\frac{1}{2}} = A^+ + 2A^-, \quad B_{\frac{1}{2}} = B^+ + 2B^-, \quad (2.58)$$

$$A_{\frac{3}{2}} = A^+ - A^-, \quad B_{\frac{3}{2}} = B^+ - B^-. \quad (2.59)$$

Finalmente, substituímos (2.57) em

$$T_{ba} = \langle \pi_b | T | \pi_a \rangle = T^+ \delta_{ba} + T^- i\epsilon_{bac}\tau_c, \quad (2.60)$$

temos

$$T_{ba} = \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^- \right] i\epsilon_{bac}\tau_c. \quad (2.61)$$

A amplitude de espalhamento $N\pi$ dada por (2.33), para colisões elásticas pode ser escrita como

$$T_{N\pi}^{ba} = \overline{N}(p') \left\{ \left[A^+ + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}')B^- \right] i\epsilon_{bac}\tau_c \right\} N(p). \quad (2.62)$$

O formalismo até aqui apresentado para o caso do pión e do núcleon (lembrando que os índices a, b e c são relativos ao pión), pode ser generalizado para qualquer caso de interação hadrônica entre mésons e bárions. O papel de cada partícula nessa formulação pode ser adaptado de acordo com seu spin e isospin.

⁵Existem outras formas equivalentes de escrever essa amplitude que poderiam ser usadas de acordo com a conveniência. A forma vai depender do tipo de diagramas considerados e quais termos deseja-se manter em evidencia.

2.1.5 Amplitude de espalhamento para um dado estado de isospin

Vamos então para um determinado processo, explicitar os estados de isospin (I) da amplitude (2.62), como uma somatória⁶

$$T_{mB} = \sum_I \bar{u}(p') \left[A_I + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}') B_I \right] u(p) P_I, \quad (2.63)$$

de onde podemos definir

$$T_I = \bar{u}(p') \left[A_I + \frac{1}{2}(\not{k} + \not{k}') B_I \right] u(p), \quad (2.64)$$

que é a amplitude para um determinado estado de isospin. Os índices m e B representam a interações entre um méson de spin 0 e um bárion de spin 1/2, P_I são os operadores de projeção de estados de isospin.

Desenvolveremos agora o formalismo para calcular as amplitudes de espalhamento para os processos de interesse, válidos para os diversos estados de isospin.

Usando a relação (2.23), para um dado estado de isospin temos

$$\mathcal{M}_I = \frac{T_I}{8\pi W} = \frac{1}{8\pi W} \bar{u}(\vec{p}') \left[A_I + \frac{\not{k} + \not{k}'}{2} B_I \right] u(\vec{p}), \quad (2.65)$$

considerando os espinores de férmios livres de Dirac como

$$u^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \chi^\alpha, \quad (2.66)$$

onde m é a massa do bárion, $\alpha = \pm$ representa a orientação do spin (\uparrow e \downarrow), e os espinores χ^\pm são definidos como

$$\chi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Na expressão (2.65) temos ainda \not{k} (*slash*) definido em termos do mo-

⁶Note que é somente uma generalização de (2.35), onde mudamos os espinores $N(p)$ relativo ao núcleon para o caso geral $u(p)$ que a princípio pode ser qualquer bárion de spin 1/2.

mento do méson

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

No referencial do centro de massa calculamos as relações de interesse

$$\bar{u}(\vec{p}') u(\vec{p}) = (E + m) - (E - m) \cos \theta - i(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{k}' \times \hat{k}, \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) u(\vec{p}) &= (E + m)(W - m) + (W + m)(E - m) \cos \theta \\ &+ i(W + m)(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{k}' \times \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ e $\hat{k}' = \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}$ são vetores unitários na direção dos momentos iniciais e finais do méson, e

$$\hat{k}' \times \hat{k} = \frac{|\vec{k}'| |\vec{k}| \hat{n} \sin \theta}{|\vec{k}'| |\vec{k}|} = \hat{n} \sin \theta, \quad (2.71)$$

a partir desses vetores é possível definir

$$\hat{n} = \frac{\vec{k}' \times \vec{k}}{|\vec{k}' \times \vec{k}|}, \quad (2.72)$$

que é um vetor unitário na direção perpendicular ao plano de espalhamento.

Desse modo

$$\bar{u}(\vec{p}') u(\vec{p}) = (E + m) - (E - m) \cos \theta - i(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) u(\vec{p}) &= (E + m)(W - m) + (W + m)(E - m) \cos \theta \\ &+ i(W + m)(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo essas relações na expressão para a amplitude de espalhamento (2.64) temos

$$T_I = \bar{u}(\vec{p}') A_I u(\vec{p}) + \bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) B_I u(\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
&= A_I \left[(E + m) - (E - m) \cos \theta - i(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta \right] \\
&\quad + B_I \left[(E + m)(W - m) + (W + m)(E - m) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + i(W + m)(E - m) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta \right]. \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Separando os termos de forma apropriada

$$\begin{aligned}
T_I &= A_I \left[(E + m) - (E - m) \cos \theta \right] \\
&\quad + B_I \left[(E + m)(W - m) + (E - m)(W + m) \cos \theta \right] \\
&\quad + \left[-A_I(E - m) + B_I(E - m)(W + m) \right] i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta \tag{2.76}
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
T_I &= (E + m) \left[A_I + (W - m) B_I \right] + (E - m) \left[-A_I + (W + m) B_I \right] \cos \theta \\
&\quad + (E - m) \left[-A_I + (W + m) B_I \right] i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta. \tag{2.77}
\end{aligned}$$

A amplitude \mathcal{M}_I pode ser genericamente representada em função das amplitudes $G_I(W, \theta)$ e $H_I(W, \theta)$, sendo o primeiro responsável pela não variação de spin (Spin-non-flip) e o segundo pela sua variação (Spin-flip) e assim ficará na forma

$$\mathcal{M}_I = G_I 1 + H_I i \vec{\sigma} \cdot \hat{n}. \tag{2.78}$$

Comparando com (2.65) e (2.77), temos

$$\begin{aligned}
G_I &= \frac{1}{8\pi W} \left\{ (E + m) \left[A_I + (W - m) B_I \right] \right. \\
&\quad \left. + (E - m) \left[-A_I + (W + m) B_I \right] \cos \theta \right\}, \tag{2.79}
\end{aligned}$$

$$H_I = \frac{(E - m)}{8\pi W} \left[-A_I + (W + m) B_I \right] \sin \theta. \tag{2.80}$$

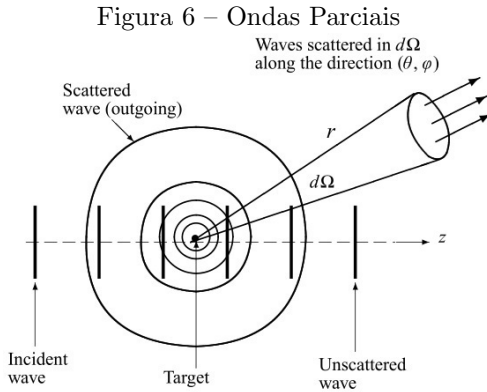
2.1.5.1 Ondas Parciais

Uma forma vantajosa e usual para o cálculo de amplitude de espalhamento é a sua representação em ondas parciais, uma vez que, esta

expansão separa os níveis de energia do sistema em função do momento angular total (SAKURAI, 1993; ZETILI, 2009; BASSALO, 2010). Assim podemos descrever todo o sistema como uma soma de onda parciais ($f_{l\pm}^I$) em função dos estados de momento orbital (l_{2J}) do sistema.⁷ Na teoria de espalhamento quântico descrevemos o sistema em termos de ondas, assim a onda total do sistema após o espalhamento é a superposição da onda incidente (plana) com a onda espalhada (esférica) a uma grande distância do centro espalhador $r \rightarrow \infty$ (Figura 6).

$$\Psi(r, \theta) = e^{i|\vec{k}|z} + \mathcal{M} \frac{e^{i|\vec{k}|r}}{r}, \quad (2.81)$$

onde $|\vec{k}|$ é o módulo do vetor de onda incidente na direção z e espalhado na direção r respectivamente, \mathcal{M} é a matriz de espalhamento (2.78) para um dado canal de isospin.



Fonte: Zettili (2009)

Podemos utilizar o formalismo geral de ondas parciais para o caso de partículas com spin. Assim temos de expandir a amplitude de espalhamento \mathcal{M} da seguinte forma para cada estado de isospin

⁷A notações $l\pm$ e l_{2J} são equivalentes, onde l é o momento orbital e J é o momento orbital total $J = l \pm \frac{1}{2}$. Consideramos que a notação $l+$ e $l-$ significa $J = l + \frac{1}{2}$ e $J = l - \frac{1}{2}$ respectivamente, usamos essa notação pois evidencia os sinais a serem usados nas contas. Uma ultima observação a ser feita é que a definição de momento orbital total é $J = l + s$, onde s é o spin do sistema méson-báron, que para nosso caso o méson possui spin 0.

(ERICSON; WEISE, 1988)

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[f_{l+}\hat{Q}_{l+} + f_{l-}\hat{Q}_{l-}]P_l(x), \quad (2.82)$$

onde \hat{Q}_{l+} , \hat{Q}_{l-} são projetores de momento angular orbital ($J = l + \frac{1}{2}$) definidos como

$$\hat{Q}_{l+} = \frac{l+1 + \vec{L}\cdot\vec{\sigma}}{2l+1}, \quad \hat{Q}_{l-} = \frac{l - \vec{L}\cdot\vec{\sigma}}{2l+1}, \quad (2.83)$$

com \vec{L} o vetor momento angular orbital e x o cosseno do angulo de espalhamento (Seção 2.1.1).

Desse modo a relação (2.82) pode ser escrita como

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}]P_l(x) + [f_{l+} - f_{l-}]\vec{L}\cdot\vec{\sigma}P_l(x). \quad (2.84)$$

Usando a relação $\vec{L} = -i\vec{r}\times\vec{\nabla}_r$ e sabendo que $P_l^{(1)}(x) = (\sqrt{1-x^2})(\partial/\partial x)P_l(x)$ ⁸ chegamos à

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}]P_l(x) + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma} \sum_{l=1}^{\infty} [f_{l-} - f_{l+}]P_l^{(1)}(x), \quad (2.85)$$

onde \hat{n} é dado por (2.72).

Comparando (2.85) com (2.78), podemos escrever G e H em amplitudes de ondas parciais, tal que

$$G_I = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+}^I + lf_{l-}^I]P_l(x), \quad (2.86)$$

$$H_I = \sum_{l=1}^{\infty} [f_{l-}^I - f_{l+}^I]P_l^{(1)}(x). \quad (2.87)$$

Multiplicando estas relações respectivamente por $P_l(x)$ e $P_l^{(1)}(x)$ e integrando em relação a x , temos

$$\int_{-1}^1 G_I \cdot P_l(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{l'} [(l'+1)f_{l'+}^I + l'f_{l'-}^I] P_{l'}(x) P_l(x) dx,$$

⁸ $P_l^{(1)}(x)$ é a função associada de Legendre de primeira ordem.

$$\int_{-1}^1 H_I P_l^{(1)}(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{l'} \left[f_{l'-}^I - f_{l'+}^I \right] P_{l'}^{(1)}(x) P_l^{(1)}(x) dx,$$

evidenciando as amplitudes de ondas parciais, encontramos⁹

$$f_{l+}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_I P_l(x) dx - \frac{1}{2(l+1)} \int_{-1}^1 H_I P_l^{(1)}(x) dx$$

$$f_{l-}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_I P_l(x) dx + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 H_I P_l^{(1)}(x) dx$$

Para eliminar $P_l^{(1)}(x)$, usamos a relação

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} P_l^{(1)}(x) &= (1-x^2) P_l' = l[P_{l-1}(x) - x P_l(x)] \\ &= (l+1)[x P_l(x) - P_{l+1}(x)], \end{aligned}$$

então

$$f_{l+}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overbrace{\left[G_I - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} H_I \right]}^{f_1^I} P_l(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overbrace{\frac{H_I}{\sqrt{1-x^2}}}^{f_2^I} P_{l+1}(x) dx,$$

$$f_{l-}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overbrace{\left[G_I - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} H_I \right]}^{f_1^I} P_l(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overbrace{\frac{H_I}{\sqrt{1-x^2}}}^{f_2^I} P_{l-1}(x) dx.$$

Sendo assim, podemos escrever de forma compacta as amplitudes de ondas parciais

$$f_{l\pm}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[P_l(x) f_1^I + P_{l\pm 1}(x) f_2^I \right] dx, \quad (2.90)$$

onde as amplitudes para cada isospin são

$$f_1^I = \frac{(E+m)}{8\pi W} [A^I + (W-m)B^I], \quad (2.91)$$

⁹Usando as relações de ortogonalidade dos polinômios e das funções associadas de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (2.88)$$

$$\int_{-1}^1 P_l^{(m)}(x) P_{l'}^{(m)}(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (2.89)$$

$$f_2^I = \frac{(E - m)}{8\pi W} [-A^I + (W + m)B^I]. \quad (2.92)$$

Usaremos a notação espectroscópica para os momentos angulares

$$l = 0, 1, 2, \dots \equiv S, P, D, \dots \quad (2.93)$$

a correspondência de notação $l_{\pm} \equiv l_{2J}$ para $l = 0, 1, 2, \dots$ é mostrada na Tabela 1.

Tabela 1 – Correspondência de notações

l	0	1	2	...
-	0	P_1	D_3	...
+	S	P_3	D_5	...

Escrevemos as amplitudes G e H em termos da notação espectroscópica explicada anteriormente como

$$\begin{aligned} G_I &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)f_{l+} + lf_{l-} \right] P_l(x) \\ &= f_S + (2f_{P_3} + f_{P_1})P_1 + (3f_{D_5} + 2f_{D_3})P_2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} H_I &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[f_{l-}^I - f_{l+}^I \right] P_l^{(1)}(x) \\ &= (f_{P_3} - f_{P_1})P_1^{(1)} + (f_{D_5} - f_{D_3})P_2^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.95)$$

esta forma será usada nos cálculos dos observáveis até os termos $l = 1$ (P).

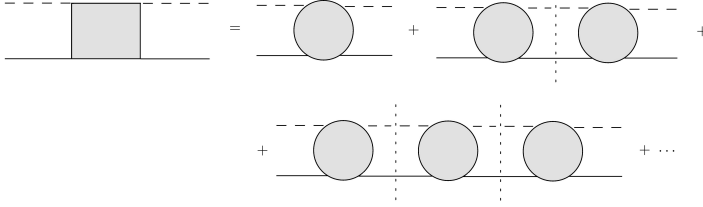
2.1.5.2 Unitarização

Quando calculamos os diagramas na teoria quântica de campos que é um processo perturbativo, algumas vezes é preciso fazer uma correção na amplitude final.

O que evidencia a necessidade desta correção é o fato de as amplitudes $f_{l_{\pm}}$ para os diagramas considerados neste trabalho serem reais, contrariando a unitariedade da matriz S (2.20) (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; MENEZES, 1985; ERICSON; WEISE, 1988), de forma que para com-

paração com dados experimentais deve ser determinada uma parte imaginária, a qual, é proveniente da correção. Esta correção é interpretada como a soma de infinitas interações sucessivas (Figura 7).

Figura 7 – Soma de todas as amplitudes possíveis



Para cada interação (círculos) no diagrama esta associada uma amplitude do tipo $i|\vec{k}|F$, assim a interação da Figura 7 equivale à

$$i|\vec{k}|F^U = i|\vec{k}|F + (i|\vec{k}|F)^2 + (i|\vec{k}|F)^3 + \dots, \quad (2.96)$$

onde $i|\vec{k}|F^U$ é a soma de todos os diagramas, e é representado pelo quadrado na figura, sendo $|\vec{k}|$ o módulo dos momentos lineares do méson no centro de massa.

Somando infinitos diagramas chegamos à expressão

$$F^U = \frac{F}{1 - i|\vec{k}|F}. \quad (2.97)$$

Cada interação é uma soma de estados intermediários como N , Δ , ρ , etc. Assim temos a soma para um mesmo canal de isospin

$$F_{l\pm} = \sum_c f_{l\pm}^{(c)}, \quad (2.98)$$

onde c é o índice relativo aos estados intermediários.

Aplicando (2.98) em (2.97) chegamos à relação final de unitarização que deverá ser usada em todas as amplitudes de ondas parciais de acordo com o momento orbital e canal de isospin como uma correção, assim

$$F_{l\pm}^U = \frac{F_{l\pm}}{1 - i|\vec{k}|F_{l\pm}}. \quad (2.99)$$

2.2 OBSERVÁVEIS

Os observáveis são todas as variáveis com realidade física, ou seja, podem ser observadas experimentalmente. São basicamente funções da matriz \mathcal{M} a qual contém toda a informação da dinâmica do sistema físico. Neste trabalho temos interesse em estudar quatro observáveis: (I) Seção de Choque Diferencial; (II) Seção de Choque Total; (III) *Phase Shift* ou Defasagem, (IV) Polarização.

Vamos então, a seguir, definir cada um desses observáveis.

2.2.1 Seção de Choque

A seção de choque é um observável que determina a probabilidade de determinados eventos acontecerem. A seção de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ nos fornece a distribuição angular de probabilidade no referencial do centro de massa. Se integramos $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ em relação ao ângulo sólido Ω encontramos a seção de choque total σ_T , a qual fornece a probabilidade total de ocorrerem tais eventos.

2.2.1.1 Seção de Choque Diferencial

A partir da relação (2.78) para a matriz \mathcal{M}

$$\mathcal{M}_I = G_I 1 + H_I i\vec{\sigma} \cdot \hat{n},$$

calculamos os possíveis estados de spin dos bárions¹⁰ (spin-1/2) iniciais e finais, pois, experimentalmente as orientações dos spins das partículas são aleatórias e estamos interessado no seu valor médio. As amplitudes para cada canal de isospin I são (ERICSON; WEISE, 1988)

$$\langle +|\mathcal{M}|+ \rangle = G + iH, \quad (2.100)$$

$$\langle -|\mathcal{M}|- \rangle = G - iH, \quad (2.101)$$

$$\langle +|\mathcal{M}|- \rangle = \langle -|\mathcal{M}|+ \rangle = 0, \quad (2.102)$$

sendo $|\pm\rangle = \chi^\pm$ espinores definidos em (2.67).

A seção de choque diferencial é definida como a média dos estados

¹⁰A rigor deve-se levar em conta os spins dos mésons (π ou K) também mas, para nosso caso sabemos que são de spin nulo.

de spin

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \frac{1}{2} \sum_{spin} |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2, \quad (2.103)$$

em que a soma é sobre os estados de spins iniciais e finais i e f do bárion, e o ângulo sólido (Figura 6) é definido no referencial do centro de massa (cm).

Efetuando o cálculo obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \frac{1}{2} \left\{ |G + iH|^2 + |G - iH|^2 \right\} = |G|^2 + |H|^2. \quad (2.104)$$

Para obtermos o valor da seção de choque diferencial, temos de substituir as relações (2.86), (2.87), (2.90) e (2.99) em (2.104).

2.2.1.2 Seção de Choque Total

Para o calculo da seção de choque total devemos integrar a relação (2.104)

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta, \quad (2.105)$$

pois, estamos considerando a seção de choque diferencial simétrica em relação ao ângulo φ .

Feita a integração (Apêndice B) chegamos à relação final para a seção de choque total

$$\sigma_T = 4\pi \sum_l \left[(l+1) |F_{l+}^U|^2 + l |F_{l-}^U|^2 \right]. \quad (2.106)$$

Para $l = 0, 1$ temos

$$\sigma_T = 4\pi \left[(0+1) |F_S^U|^2 + (1+1) |F_{P_3}^U|^2 + 1 |F_{P_1}^U|^2 \right],$$

logo

$$\sigma_T = 4\pi \left(|F_S^U|^2 + 2 |F_{P_3}^U|^2 + |F_{P_1}^U|^2 \right). \quad (2.107)$$

Nos interessa expressar a seção de choque total em unidades de *milibarn* (mb), muito comum nos experimentos. Os módulos das

amplitudes ao quadrado são calculados como

$$|F_\alpha^U|^2 = \frac{F_\alpha^2}{(1 - i|\vec{k}|F_\alpha)(1 + i|\vec{k}|F_\alpha)} = \frac{F_\alpha^2}{1 + |\vec{k}|^2 F_\alpha^2}, \quad (2.108)$$

com unidade dada em GeV^{-2} .

No sistema de unidades unitárias temos as equivalências:

$$GeV^{-1} \equiv 0,1973 \times 10^{-13} cm = 0,1973 fm;$$

$$1 fm^2 = 10 mb.$$

Logo concluímos que

$$GeV^{-2} = 0,03893 fm^2 = 0,3893 mb.$$

Então (2.108) em mb será

$$|F_\alpha^U|^2 = 0,3893 \frac{F_\alpha^2}{1 + |\vec{k}|^2 F_\alpha^2}, \quad (2.109)$$

sendo 0,3893 o fator de conversão.

2.2.2 Phase Shift

De acordo com a seção (2.1.5.1) a função de onda total é dada pela onda incidente e pela onda espalhada (2.81)

$$\Psi(r, \theta) = e^{i|\vec{k}|z} + \mathcal{M} \frac{e^{i|\vec{k}|r}}{r}, \quad (2.110)$$

que pode ser escrita como a soma (ZETTILI, 2009; BASSALO, 2010)

$$\Psi \cong \Psi_{in} + \Psi_{es}. \quad (2.111)$$

A matriz de espalhamento pode para um dado isospin ser expandida em ondas parciais para cada momento angular orbital $(l, 2J)$ da seguinte

forma¹¹

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_{l,2J} P_l(x). \quad (2.112)$$

Após alguns procedimentos (Apêndice B) a matriz \mathcal{M} pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_{l,2J}} - 1}{2i|\vec{k}|} P_l(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_{l,2J}}}{|\vec{k}|} \sin \delta_{l,2J} P_l(x). \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde o parâmetro $\delta_{l,2J}$ recebe o nome de *deslocamento de fase* (*Phase Shift*) ou ainda *defasagem* do espalhamento.

Comparando com (2.112), podemos escrever a amplitude de ondas parciais em função de suas defasagens

$$f_{l,2J} = \frac{e^{i\delta_{l,2J}}}{|\vec{k}|} \sin \delta_{l,2J}, \quad (2.114)$$

que é equivalente a notação com a amplitude de ondas parciais unitarizadas

$$f_{l\pm}^U = \frac{e^{i\delta_{l\pm}}}{|\vec{k}|} \sin \delta_{l\pm}. \quad (2.115)$$

2.2.2.1 Deslocamentos de fase unitarizados

Consideramos a unitarização das amplitudes (2.115) em função das amplitude de ondas parciais reais, através da relação de unitarização (2.99). Assim isolando a amplitude real $f_{l\pm}$ (MENEZES, 1985),

$$f_{l\pm} = \frac{f_{l\pm}^U}{1 + i|\vec{k}|f_{l\pm}^U}, \quad (2.116)$$

¹¹Esta forma de expandir a matriz de espalhamento \mathcal{M} difere, mas, é equivalente a expansão feita em (2.82), na qual queríamos separar os termos de spin, a fim de conseguirmos uma amplitude correspondente ao termo de não variação de spin (*spin-non-flip*) e pela sua variação (*spin-flip*). Também nesse caso a amplitude $f_{l,2J}$ é uma variável complexa. Para não haver confusão entre ambas as descrições usamos a notação $(l, 2J)$, a qual faremos a correspondência ao final com a notação que usaremos para cálculos ($l\pm$).

fatorando

$$f_{l\pm} = \frac{f_{l\pm}^U (1 - i|\vec{k}|f_{l\pm}^{U*})}{1 + |\vec{k}|^2 |f_{l\pm}^U|^2 + i|\vec{k}|(f_{l\pm}^U - f_{l\pm}^{U*})},$$

e substituindo (2.115), temos

$$\begin{aligned} f_{l\pm} &= \frac{\frac{e^{i\delta_{l\pm}}}{|\vec{k}|} \sin \delta_{l\pm} - i \sin^2 \delta_{l\pm}}{1 + \sin^2 \delta_{l\pm} - 2 \sin^2 \delta_{l\pm}} \\ &= \frac{\cos \delta_{l\pm} \sin \delta_{l\pm} + i \sin^2 \delta_{l\pm} - i \sin^2 \delta_{l\pm}}{1 - \sin^2 \delta_{l\pm}}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Desta forma, obtemos

$$f_{l\pm} = \frac{1}{|\vec{k}|} \tan \delta_{l\pm}, \quad (2.118)$$

e então o deslocamento de fase finalmente será

$$\delta_{l\pm} = \tan^{-1}(|\vec{k}|f_{l\pm}). \quad (2.119)$$

2.2.3 Polarização

A polarização é outro observável de interesse, pois pode ser comparado com dados experimentalmente, como é comumente feito no estudo da interação πN . Ela pode ser calculada a partir da diferença entre o número de híperons (núcleons) emergentes com spin na direção (N_+) e na direção oposta (N_-) do vetor normal ao plano de espalhamento \hat{n} determinado por (2.72),

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}. \quad (2.120)$$

Para o cálculo usamos a relação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{spin} |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2, \quad (2.121)$$

sendo a polarização então definida como

$$P = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega_+} - \frac{d\sigma}{d\Omega_-}}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}, \quad (2.122)$$

em que $d\sigma/d\Omega_+ = |\langle +|\mathcal{M}|+\rangle|^2$ e $d\sigma/d\Omega_- = |\langle -|\mathcal{M}|-\rangle|^2$ são as seções de choque diferenciais (2.100) e (2.101). Assim

$$P = \frac{4i(G^*H)}{2(|G|^2 + |H|^2)} = \frac{2iG^*H}{|G|^2 + |H|^2}. \quad (2.123)$$

Então temos o vetor polarização

$$\vec{P} = -2 \frac{Im(G^*H)}{|G|^2 + |H|^2} \hat{n}. \quad (2.124)$$

Neste capítulo demonstramos o formalismo geral necessário para o cálculo dos observáveis de interesse para as interações KY a baixas energias cujo os resultados numéricos serão apresentado no capítulo 4.

No próximo capítulo iremos demonstrar os cálculos analíticos para as ondas parciais, que serão utilizadas para obtermos os observáveis aqui apresentados.

3 INTERAÇÃO KÁON-HÍPERON

Neste capítulo iremos estudar as interações káon-híperon desenvolvendo um modelo baseado nos modelos propostos para estudar a interação πN como nos realizados por Olsson, Turner e Osypowski (1973), Coelho, Das e Robilotta (1983), Menezes (1985), Goudsmit et al. (1994), Ellis e Tang (1997) e também nos trabalhos feitos para a interação πY em Barros (2001), Barros e Hama (2001) o modelo é baseado nas lagrangianas quirais efetivas mostradas no Apêndice A que serão adaptadas para as diversas interações de interesse. É importante observar que uma das características principais do modelo é a inclusão de ressonâncias nas interações πN , é sabido que as ressonâncias Δ dominam as amplitudes de espalhamento a baixas energias, e imaginamos que semelhantemente é esse o nosso caso nas interações KY , e desse modo, os diagramas mais simples (os tipo árvore) devem ser os mais importantes. Foi exatamente esse o procedimento adaptado em Barros e Hama (2001) e neste trabalho iremos proceder da mesma maneira. Diferentemente do caso πN , é importante observar que para a interação KY não existem dados experimentais disponíveis até o momento.

Serão calculadas as amplitudes para ondas parciais que dependem dos spin, isospin e das massas das partículas interagentes. Os espalhamentos são descritas pelas lagrangianas de interação, propagadores e projetores de isospin. Consideramos bárions N , Ξ , N^* , Ξ^* , Δ , Λ , Σ e Ω como partículas intermediárias, também a troca de mésons ρ e σ . Em uma primeira aproximação iremos desprezar as correções das ondas D em diante (que são pequenas), e efetuaremos nossos cálculos para ondas S e P .

No primeiro momento iremos calcular as amplitudes para ondas parciais $f_{l\pm}^I$, através dos diagramas para a interação $K\Sigma$, considerando as trocas de N , Ξ , N^* , Ξ^* , Δ e mésons ρ e σ . Nesta parte detalharemos os cálculos para cada caso, que uma vez determinados serão adaptados quando possível para as demais interações.

Em seguida encontraremos as onda parciais para a interação $K\Lambda$ com as partículas intermediárias N , Ξ , N^* , Ξ^* e σ . Por fim as amplitudes para ondas parciais das interações $K\Xi$ e $\bar{K}\Xi$ com a troca de híperons Λ , Σ e Ω , também dos mésons ρ e σ , serão calculadas. Nas interações KY , temos para a maioria dos casos diagramas diretos e cruzados com partículas diferentes, isso demanda uma cuidado maior, diferente dos casos πN e πY onde os diagramas diretos e cruzados tem mesma partícula intermediária.

Neste capítulo iremos então, calcular todas as amplitudes dos diagramas que iremos necessitar, e obter as amplitudes S e P relativas a esses diagramas. No próximo capítulo, esses resultados serão utilizados no cálculo dos observáveis.

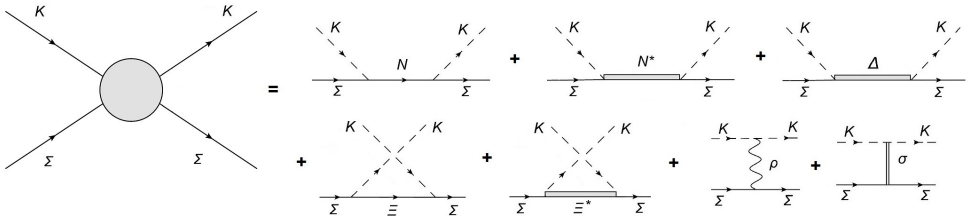
3.1 INTERAÇÃO $K\Sigma$

A Figura 8 mostra os processos diretos que iremos considerar para o estudo da interação $K\Sigma$, para o caso cruzado temos as permutações para as partículas intermediárias $N \rightarrow \Xi$ e $N^* \rightarrow \Xi^*$.

No caso dessa interação temos os isospin $I_\Sigma = 1$ e $I_K = \frac{1}{2}$, logo podemos ter dois valores de canais de isospin, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Sendo assim, as partículas intermediárias poderão ter esses dois isospin. Tal preocupação com o isospin se justifica, uma vez que, na interação forte o isospin é sempre conservado, além de determinar os multipletos de partículas interagentes. Com esse procedimento, calculamos as amplitudes para todas as reações ao mesmo tempo.

Quanto aos spins envolvidos nas interações não existe uma restrição, porém, temos dificuldades técnicas para calcular interações com spins maiores que $\frac{3}{2}$, mas, isso não é um grande limitador, já que partículas intermediárias com tais valores de spin tendem a ser menos importantes para as amplitudes de interação. Portanto, consideraremos somente partículas com spin $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 1, as quais representaremos de forma genérica por N (Ξ para o caso cruzado), Δ (ou N^* e Ξ^* para o cruzado) e ρ respectivamente, em analogia ao modelo πN já bem conhecido.

Figura 8 – Diagramas diretos considerado para $K\Sigma$



3.1.1 Troca de um N e um Ξ

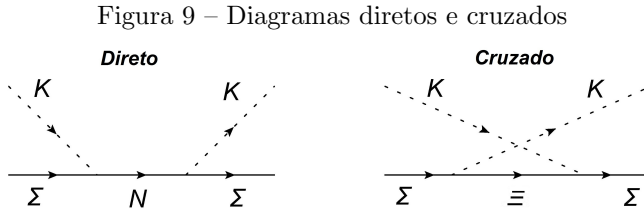
Para descrever os vértices dos diagramas de Feynman, precisamos da lagrangiana de interação entre as partículas ligadas pelo vértice, tal interação como já mencionado depende do spin e do isospin. Para o caso ΣKN (ou $\Sigma K\Xi$) adaptaremos a lagrangiana (A.180), fazendo as devidas substituições nos campos

$$\mathcal{L}_{\Sigma KN} = \frac{g_{\Sigma KN}}{2m_{\Sigma}} (\bar{N} \gamma_{\mu} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\Sigma}) \partial^{\mu} \phi, \quad (3.1)$$

onde \bar{N} é o campo a partícula intermediária de spin- $\frac{1}{2}$ saindo do vértice; $\vec{\Sigma}$ o campo do híperon Sigma, o vetor significa que é uma partícula de com três componentes de isospin no plano cartesiano; ϕ é o campo do káon e $g_{\Sigma KN}$ é a contante de acoplamento da interação.

3.1.1.1 Calculo das amplitudes A^{\pm} e B^{\pm}

Iremos calcular as amplitudes A^{\pm} e B^{\pm} descritas na seção (2.1.4) usando os diagramas mostrados na Figura 9. O cálculo é feito de modo detalhado no Apêndice C.



Seguindo o procedimento da seção (2.1.3) para o calculo da matriz espalhamento devemos fazer

$$\mathcal{M} = [\text{linhas externas (entrando)}][\text{vértice 1}][\text{propagador}][\text{vértice 2}][\text{linhas externas (saída)}][\delta^4(\sum p_e - \sum p_s)].$$

Onde para o caso de partículas intermediárias de spin- $\frac{1}{2}$ temos, para os vértices

$$V_{\Sigma KN} = \frac{g_{\Sigma KN}}{2m_{\Sigma}} \not{k} \gamma_5 \tau_a, \quad (3.2)$$

e para o propagador

$$S(p) = i \frac{\not{p} + m_N}{p^2 - m_N^2}. \quad (3.3)$$

Por fim para as linhas externas para partículas de spin- $\frac{1}{2}$ devemos considerar os espiniores $\bar{u}(p')$, $u(p)$ e para partículas de spin-0 uma constante igual à 1.

A amplitude total do espalhamento é dada pela soma das partes direta (d) e cruzada (c) do diagrama da Figura 9, e a integração sobre o momento do propagador

$$iT = iT_d + iT_c = \int \frac{d^4q}{(4\pi)^4} \mathcal{M}_d + \int \frac{d^4q}{(4\pi)^4} \mathcal{M}_c. \quad (3.4)$$

Considerando m_Σ a massa do bárion (Sigma) inicial (entrando) e m_N a massa do bárion (N) intermediário, temos para a parte direta

$$\begin{aligned} iT_d &= \int \left(\frac{d^4q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[\frac{g_{\Sigma KN}}{2m_\Sigma} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] (1) \left[i \frac{\not{q} + m_N}{q^2 - m_N^2} \right] (1) \\ &\quad \times \left[\frac{g_{\Sigma KN}}{2m_\Sigma} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] u(p) \left[(4\pi)^4 \delta^4(p + k - q) \right] \\ &\quad \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(q - p' - k') \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

e integrando resulta em

$$T_d = -\frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_\Sigma^2} \bar{u}(p') \left[\not{k}' \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] \underbrace{\left[\frac{\not{p} + \not{k} + m_N}{(p+k)^2 - m_N^2} \right]}_s \left[\not{k} \gamma_5 \tau_a \right] u(p). \quad (3.6)$$

Para o termo cruzado teremos a formação de outro bárion intermediário de spin-isospin-1/2 (Ξ) com massa m_Ξ . Assim

$$\begin{aligned} iT_c &= \int \left(\frac{d^4q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[\frac{g_{\Sigma K \Xi}}{2m_\Sigma} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] (1) \left[i \frac{\not{q} + m_\Xi}{q^2 - m_\Xi^2} \right] (1) \\ &\quad \times \left[\frac{g_{\Sigma K \Xi}}{2m_\Sigma} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] u(p) \left[(4\pi)^4 \delta^4(p - k' - q) \right] \\ &\quad \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(q + k - p') \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

logo

$$T_c = -\frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_{\Sigma}^2} \bar{u}(p') \left[\not{k} \gamma_5 \tau_a \right] \underbrace{\left[\frac{\not{p} - \not{k}' + m_{\Xi}}{(p - k')^2 - m_{\Xi}^2} \right]}_u \left[\not{k}' \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] u(p). \quad (3.8)$$

Assim, a amplitude total será dada por

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4m_{\Sigma}^2} \bar{u}(p') \left\{ \left[g_{\Sigma KN}^2 (m_N + m_{\Sigma}) \left(\frac{s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2} \right) + g_{\Sigma K\Xi}^2 (m_{\Xi} + m_{\Sigma}) \left(\frac{u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2} \right) \right. \right. \\ & + \left(g_{\Sigma K\Xi}^2 \frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi}) + u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2} \right. \\ & \left. \left. - g_{\Sigma KN}^2 \frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N) + s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2} \right) \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] \delta_{ab} \\ & + \left[g_{\Sigma KN}^2 (m_N + m_{\Sigma}) \left(\frac{s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2} \right) - g_{\Sigma K\Xi}^2 (m_{\Xi} + m_{\Sigma}) \left(\frac{u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(g_{\Sigma K\Xi}^2 \frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi}) + u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2} \right) \right. \\ & \left. + g_{\Sigma KN}^2 \frac{2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N) + s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2} \right) \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] i\epsilon_{abc} \tau_c \left. \right\} u(p), \end{aligned}$$

onde

$$s = m_{\Sigma}^2 + m_K^2 + 2Ek_0 + 2\vec{k}^2 x,$$

e

$$u = m_{\Sigma}^2 + m_K^2 - 2Ek_0 - 2\vec{k}^2 x.$$

Comparando com a amplitude geral (2.62)

$$T = \bar{u}(p') \left\{ \left[A^+ + \left(\frac{k' + k}{2} \right) B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \left(\frac{k' + k}{2} \right) B^- \right] i\epsilon_{abc} \tau_c \right\} u(p),$$

encontramos as amplitudes A^{\pm} e B^{\pm} para o caso geral de uma partícula intermediária (N) com massa m_N , de spin- $\frac{1}{2}$

$$A_N^+ = \frac{g_{\Sigma KN}^2}{4m_{\Sigma}^2} (m_N + m_{\Sigma}) \left(\frac{s - m_{\Sigma}^2}{s - m_N^2} \right) + \frac{g_{\Sigma K\Xi}^2}{4m_{\Sigma}^2} (m_{\Xi} + m_{\Sigma}) \left(\frac{u - m_{\Sigma}^2}{u - m_{\Xi}^2} \right), \quad (3.9)$$

$$B_N^+ = \frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right] - \frac{g_{\Sigma K N}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N) + s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right], \quad (3.10)$$

$$A_N^- = \frac{g_{\Sigma K N}^2}{4m_\Sigma^2} (m_N + m_\Sigma) \left(\frac{s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right) - \frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{4m_\Sigma^2} (m_\Xi + m_\Sigma) \left(\frac{u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right), \quad (3.11)$$

$$B_N^- = -\frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right] - \frac{g_{\Sigma K N}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N) + s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right]. \quad (3.12)$$

3.1.1.2 Amplitudes de ondas parciais

Tendo obtido as amplitudes A^\pm e B^\pm considerando a interação através de N , vamos agora desenvolver as amplitudes em ondas parciais de acordo com o canal de isospin-1/2.

De acordo com a seção (2.1.4), foram calculadas as relações (2.58), dadas por

$$A_N^{\frac{1}{2}} = A_N^+ + 2A_N^-, \quad (3.13)$$

e

$$B_N^{\frac{1}{2}} = B_N^+ + 2B_N^-. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) nas expressões acima, encontramos as amplitudes A e B para isospin- $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A_N^{\frac{1}{2}} &= 3 \frac{g_{\Sigma K N}^2}{4m_\Sigma^2} (m_N + m_\Sigma) \left(\frac{s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right) \\ &\quad - \frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{4m_\Sigma^2} (m_\Xi + m_\Sigma) \left(\frac{u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} B_N^{\frac{1}{2}} &= -\frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Xi^2} \right] \\ &\quad - 3 \frac{g_{\Sigma K N}^2}{4m_\Sigma^2} \left[\frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N) + s - m_\Sigma^2}{s - m_N^2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

As amplitudes $A_{\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}}$ e $B_{\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}}$ se relacionam com as amplitudes de ondas parciais através de f_1 (2.91) e f_2 (2.92), dadas por

$$f_1^I = \frac{(E + m_\Sigma)}{8\pi W} [A^I + (W - m_\Sigma)B^I],$$

$$f_2^I = \frac{(E - m_\Sigma)}{8\pi W} [-A^I + (W + m_\Sigma)B^I].$$

Usando (3.15) e (3.16) em f_1 ($I = \frac{1}{2}$), encontramos

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_\Sigma)}{32\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ \frac{3g_{\Sigma KN}^2}{s - m_N^2} \left[(m_N + 2m_\Sigma - W)(s - m_\Sigma^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N)(m_\Sigma - W) \right] \right. \\ \left. - \frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{u - m_\Xi^2} \left[2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi)(W - m_\Sigma) \right. \right. \\ \left. \left. + (m_\Xi + W)(u - m_\Sigma^2) \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Podemos então separar os termos que possuem dependência em x

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_\Sigma)}{32\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ a'_1 + \frac{b'_1 + c'_1 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.18)$$

onde

$$a'_1 = 3g_{\Sigma KN}^2 \left[\frac{(m_N + 2m_\Sigma - W)(s - m_\Sigma^2) + 2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N)(m_\Sigma - W)}{s - m_N^2} \right];$$

$$b'_1 = g_{\Sigma K \Xi}^2 [2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Xi)(W - m_\Sigma) + (m_\Xi + W)(m_K^2 - 2Ek_0)];$$

$$c'_1 = -2\vec{k}^2 g_{\Sigma K \Xi}^2 (W + m_\Xi);$$

$$\gamma_\Xi = m_\Xi^2 - m_\Sigma^2 - m_K^2 + 2Ek_0.$$

Para f_2 , usando (3.15) e (3.16)

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{(E - m_\Sigma)}{32\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ \frac{3g_{\Sigma KN}^2}{s - m_N^2} \left[(m_N + 2m_\Sigma + W)(m_\Sigma^2 - s) \right. \right. \\ \left. \left. - 2m_\Sigma(m_\Sigma + m_N)(m_\Sigma + W) \right] \right\}$$

$$-\frac{g_{\Sigma K \Xi}^2}{u - m_{\Xi}^2} \left[2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi})(m_{\Sigma} + W) + (W - m_{\Xi})(u - m_{\Sigma}^2) \right] \Bigg\}. \quad (3.19)$$

Mais uma vez explicitando a dependência em x

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{(E - m_{\Sigma})}{32\pi m_{\Sigma}^2 W} \left\{ a'_2 + \frac{b'_2 + c'_2 x}{\gamma_{\Xi} + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.20)$$

onde

$$\begin{aligned} a'_2 &= 3g_{\Sigma KN}^2 \left[\frac{(m_N + 2m_{\Sigma} + W)(m_{\Sigma}^2 - s) - 2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_N)(m_{\Sigma} + W)}{s - m_N^2} \right]; \\ b'_2 &= g_{\Sigma K \Xi}^2 [2m_{\Sigma}(m_{\Sigma} + m_{\Xi})(W + m_{\Sigma}) + (W - m_{\Xi})(m_K^2 - 2Ek_0)]; \\ c'_2 &= -2\vec{k}^2 g_{\Sigma K \Xi}^2 (W - m_{\Xi}). \end{aligned}$$

Utilizando as expressões acima podemos finalmente chegar às amplitudes de ondas parciais (2.90),

$$f_S^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_0 + f_2^{\frac{1}{2}} P_1] dx, \quad (3.21)$$

$$f_{P_1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_1 + f_2^{\frac{1}{2}} P_0] dx, \quad (3.22)$$

$$f_{P_3}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1^{\frac{1}{2}} P_1 + f_2^{\frac{1}{2}} P_2] dx. \quad (3.23)$$

De posse dos polinômios de Legendre

$$P_0 = 1, \quad (3.24)$$

$$P_1 = x, \quad (3.25)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad (3.26)$$

e suas relações de ortogonalidade, desenvolvemos a relação (3.21), com

o auxílio de (3.18) e (3.20), desse modo obtemos¹

$$f_S^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{2(32\pi m_\Sigma^2 W)} \int_{-1}^1 \left[(E + m_\Sigma) \left\{ a'_1 + \frac{b'_1 + c'_1 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} (1) \right. \\ \left. + (E - m_\Sigma) \left\{ a'_2 + \frac{b'_2 + c'_2 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} x \right] dx. \quad (3.27)$$

Usando as integrais do Apêndice F, encontramos a amplitude S

$$f_S^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{64\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ 2(E + m_\Sigma) a'_1 + (E + m_\Sigma) b'_1 I_0 \right. \\ \left. + \left[(E + m_\Sigma) c'_1 + (E - m_\Sigma) b'_2 \right] I_1 + (E - m_\Sigma) c'_2 I_2 \right\}. \quad (3.28)$$

Para a amplitude P_1

$$f_{P_1}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{2(32\pi m_\Sigma^2 W)} \int_{-1}^1 \left[(E + m_\Sigma) \left\{ a'_1 + \frac{b'_1 + c'_1 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} x \right. \\ \left. + (E - m_\Sigma) \left\{ a'_2 + \frac{b'_2 + c'_2 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} (1) \right] dx, \quad (3.29)$$

logo

$$f_{P_1}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{64\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ 2(E - m_\Sigma) a'_2 + (E - m_\Sigma) b'_2 I_0 \right. \\ \left. + \left[(E + m_\Sigma) b'_1 + (E - m_\Sigma) c'_2 \right] I_1 + (E + m_\Sigma) c'_1 I_2 \right\}. \quad (3.30)$$

Utilizando (3.23)

$$f_{P_3}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{2(32\pi m_\Sigma^2 W)} \int_{-1}^1 \left[(E + m_\Sigma) \left\{ a'_1 + \frac{b'_1 + c'_1 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} x \right. \\ \left. + \frac{(E - m_\Sigma)}{2} \left\{ a'_2 + \frac{b'_2 + c'_2 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\} (3x^2 - 1) \right] dx, \quad (3.31)$$

¹Em um primeiro momento escrevemos dentro da integral os termos 1, x e x^2 como polinômios de Legendre (3.24-3.26), e todos termos que sobreviverem as condições de ortogonalidade serão contantes das integrais I_0 , I_1 , I_2 e I_3 .

finalmente para a amplitude P_3

$$f_{P_3}^{\frac{1}{2}(N)} = \frac{1}{128\pi m_\Sigma^2 W} \left\{ (m_\Sigma - E)b'_2 I_0 + \left[2(E + m_\Sigma)b'_1 + (m_\Sigma - E)c'_2 \right] I_1 \right. \\ \left. + \left[3(E - m_\Sigma)b'_2 + 2(E + m_\Sigma)c'_1 \right] I_2 + 3(E - m_\Sigma)c'_2 I_3 \right\}. \quad (3.32)$$

Como para este trabalho não utilizamos partículas com spin-1/2 e isospin-3/2, não precisamos calcular o canal de isospin-3/2.

Neste caso foram calculados o um diagrama direto (N) e um cruzado (Ξ), caso existam mais de um diagrama direto ou cruzado deverão ser calculados da mesma forma caso a caso, o mesmo vale para as demais interações estudadas nesse trabalho.

3.1.2 Troca de um Δ

Nesta seção vamos calcular a contribuição da troca de um Δ para a interação $K\Sigma$.

O Δ é uma partícula com spin e isospin- $\frac{3}{2}$, a lagrangiana para este tipo interação é adaptada da lagrangiana (A.196). Assim,

$$\mathcal{L}_{\Sigma K \Delta} = g_\Delta \left\{ \bar{\Delta}^\mu [g_{\mu\nu} - (Z + 1/2)\gamma_\mu \gamma_\nu] \vec{M} \cdot \vec{\Sigma} \right\} \partial^\nu \phi, \quad (3.33)$$

aqui g_Δ representa a constante de acoplamento associada ao vértice da interação $K\Sigma\Delta$.

3.1.2.1 Cálculo das amplitudes A^\pm e B^\pm

Usando o mesmo tipo de diagrama da Figura 9, calculamos as amplitudes de espalhamento direta e cruzada utilizando a lagrangiana (3.33), os vértices e propagador são os mostrados nas expressões (2.25) e (2.31) respectivamente. Nesse trabalho iremos usar o valor que é usualmente considerado, $Z = -1/2$, para todas as partículas de spin-3/2 (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983; BARROS; HAMA, 2001).

A amplitude direta fica, por exemplo

$$iT_d = \int \left(\frac{d^4 q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[g_\Delta(-k'^\nu) - (Z + \frac{1}{2})\gamma^\nu(-\not{k}') \right] M_b^\dagger$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-i \frac{\not{q} + m_\Delta}{q^2 - m_\Delta^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu q_\nu}{3m_\Delta} + \frac{q_\mu \gamma_\nu}{3m_\Delta} - \frac{2q_\mu q_\nu}{3m_\Delta^2} \right) \right] \\
& \times \left[g_\Delta(k'^\mu) - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\mu \not{k}' \right] M_a u(p) \\
& \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(p + k - q) \right] \left[(4\pi)^4 \delta^4(q - p' - k') \right], \quad (3.34)
\end{aligned}$$

lembrando que $M_b^\dagger M_a = \frac{2}{3} \delta_{ba} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau_c$.

O cálculo da amplitude T para esse caso é mais extenso, mas mesmo assim o resultado é análogo ao caso anterior com uma partícula intermediária de spin- $\frac{1}{2}$, resultando em amplitudes A e B com mais termos, dadas por

$$\begin{aligned}
A_\Delta^+ &= \frac{2g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2} (m_\Sigma + m_\Delta) t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} + \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] \right. \\
&\quad - \frac{(m_\Sigma + m_\Delta)}{m_\Delta^2} (2m_\Delta^2 + m_\Sigma m_\Delta - m_\Sigma^2 + 2m_K^2) \\
&\quad \left. + \frac{4}{m_\Delta^2} \left[(m_\Delta + m_\Sigma) Z + (2m_\Delta + m_\Sigma) Z^2 \right] k k' \right\}, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$B_\Delta^+ = \frac{2g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2} t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} - \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] - \frac{8m_\Sigma}{m_\Delta^2} Z^2 \nu \right\}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
A_\Delta^- &= -\frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2} (m_\Sigma + m_\Delta) t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} - \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{8m_\Sigma}{m_\Delta^2} \left[(m_\Delta + m_\Sigma) Z + (2m_\Delta + m_\Sigma) Z^2 \right] \nu \right\}, \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\Delta^- &= -\frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2} t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} + \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] \right. \\
&\quad - \frac{(m_\Sigma + m_\Delta)^2}{m_\Delta^2} - \frac{8}{m_\Delta^2} \left[(m_\Sigma^2 + m_\Sigma m_\Delta - m_K^2) Z \right. \\
&\quad \left. \left. + (2m_\Sigma m_\Delta + m_\Sigma^2) Z^2 \right] - \frac{4Z^2}{m_\Delta^2} k k' \right\}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Sendo,

$$\hat{A} = 3(m_\Sigma + m_\Delta)(\vec{q}_\Delta)^2 + (m_\Delta - m_\Sigma)(E_\Delta + m_\Sigma)^2, \quad (3.39)$$

$$\hat{B} = 3(\vec{q}_\Delta)^2 - (E_\Delta + m_\Sigma)^2, \quad (3.40)$$

$$t = 2\vec{k}^2 x - 2\vec{k}'^2, \quad (3.41)$$

$$\nu = \frac{2Ek_0 + k^2 + k'^2 x}{2m_\Sigma}, \quad (3.42)$$

$$kk' = \mu^2 + k^2 - k'^2 x = k_0^2 - k'^2 x, \quad (3.43)$$

onde

$$(E_\Delta \pm m_\Sigma) = \frac{(m_\Delta \pm m_\Sigma)^2 - m_K^2}{2m_\Delta}, \quad (3.44)$$

$$(\vec{q}_\Delta)^2 = E_\Delta^2 - m_\Sigma^2 = (E_\Delta + m_\Sigma)(E_\Delta - m_\Sigma). \quad (3.45)$$

observando que E_Δ e \vec{q}_Δ é a energia e o momento em relação ao centro de massa no valor correspondente à massa do Δ , respectivamente.

Essas expressão são calculadas para os diagramas direto e cruzado (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983), mas por nosso vez, no caso da interação KY temos partículas diferentes para cada tipo de diagrama, sendo assim, teremos que separar a parte direta da cruzada e então calcular as novas amplitudes A e B de casa um.

De posse das relações

$$A_d = \frac{3}{4}(A^+ - 2A^-), \quad B_d = \frac{3}{4}(B^+ - 2B^-), \quad (3.46)$$

podemos encontrar as amplitudes para o diagrama direto da maneira como foi feito no Apêndice D.

Dessa forma as amplitudes diretas serão

$$A_\Delta^{+(d)} = \frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_\Delta)t \right] \left[\frac{2}{m_\Delta^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (3.47)$$

$$B_\Delta^{+(d)} = \frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_\Delta^2 - s} \right] - b_0 \right\}, \quad (3.48)$$

$$A_\Delta^{-(d)} = \frac{g_\Delta^2}{18} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_\Delta)t \right] \left[\frac{2}{m_\Delta^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (3.49)$$

$$B_{\Delta}^{-(d)} = \frac{g_{\Delta}^2}{18} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] - b_0 \right\}, \quad (3.50)$$

onde

$$a_0 = -\frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})}{m_{\Delta}^2} (2m_{\Delta}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_{\Sigma}^2 + 2m_K^2) + \frac{4}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z + (2m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z^2 \right] [s - m_{\Sigma}^2], \quad (3.51)$$

$$b_0 = \frac{8}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Sigma}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_K^2)Z + (2m_{\Sigma}m_{\Delta} + m_{\Sigma}^2)Z^2 \right] + \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})^2}{m_{\Delta}^2} + \frac{4Z^2}{m_{\Delta}^2} [s - m_{\Sigma}^2]. \quad (3.52)$$

A partir dessas ultimas expressões iremos calcular as amplitudes de ondas parciais para spin- $\frac{3}{2}$.

3.1.2.2 Amplitudes de ondas parciais para o canal $I = 3/2$

A partícula Δ contribui em dois canais de isospin $3/2$ e de isospin $1/2$. Para o cálculo das amplitudes com isospin- $3/2$ utilizando a relação (2.59)

$$A_{\Delta}^{\frac{3}{2}} = A_{\Delta}^{+} - A_{\Delta}^{-}, \quad (3.53)$$

$$B_{\Delta}^{\frac{3}{2}} = B_{\Delta}^{+} - B_{\Delta}^{-}, \quad (3.54)$$

as amplitudes f_1 e f_2 são

$$f_1^{\frac{3}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{8\pi W} [A_{\Delta}^{\frac{3}{2}} + (W - m_{\Sigma})B_{\Delta}^{\frac{3}{2}}], \quad (3.55)$$

$$f_2^{\frac{3}{2}} = \frac{(E - m_{\Sigma})}{8\pi W} [-A_{\Delta}^{\frac{3}{2}} + (W + m_{\Sigma})B_{\Delta}^{\frac{3}{2}}]. \quad (3.56)$$

A fim de ajudar no entendimento dos cálculos, demostramos mais uma relação

$$f_1^{\frac{3}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{8\pi W} \left\{ [A_{\Delta}^{+} + (W - m_{\Sigma})B_{\Delta}^{+}] - [A_{\Delta}^{-} + (W - m_{\Sigma})B_{\Delta}^{-}] \right\}, \quad (3.57)$$

$$f_2^{\frac{3}{2}} = \frac{(E - m_\Sigma)}{8\pi W} \left\{ [-A_\Delta^+ + (W + m_\Sigma)B_\Delta^+] - [-A_\Delta^- + (W + m_\Sigma)B_\Delta^-] \right\}, \quad (3.58)$$

substituindo as amplitudes (3.47-3.50), encontramos

$$f_1^{\frac{3}{2}} = \frac{g_\Delta^2 (E + m_\Sigma)}{18 \cdot 8\pi W} \left\{ \frac{2\hat{A} + 2(W - m_\Sigma)\hat{B} + 3(W + m_\Delta)t}{m_\Delta^2 - s} + a_0 - (W - m_\Sigma)b_0 \right\}, \quad (3.59)$$

e também

$$f_2^{\frac{3}{2}} = \frac{g_\Delta^2 (E - m_\Sigma)}{18 \cdot 8\pi W} \left\{ \frac{-2\hat{A} + 2(W + m_\Sigma)\hat{B} + 3(W - m_\Delta)t}{m_\Delta^2 - s} - a_0 - (W + m_\Sigma)b_0 \right\}. \quad (3.60)$$

Mais uma vez separando os termos conforme sua dependência em x , para f_1

$$f_1^{\frac{3}{2}} = \frac{g_\Delta^2 (E + m_\Sigma)}{144\pi W} \left\{ \alpha_1 + \beta_1 x \right\}, \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3(W + m_\Delta)}{2m_\Delta^2 s} \left[m_\Delta^2 s - (m_\Sigma^2 - m_K^2)^2 \right] + 2 \frac{(E_\Delta + m_\Sigma)^2}{W + m_\Delta} + a_0 - (W - m_\Sigma)b_0; \\ \beta_1 &= \frac{6\vec{k}^2}{m_\Delta - W}. \end{aligned}$$

Já para f_2

$$f_2^{\frac{3}{2}} = \frac{g_\Delta^2 (E - m_\Sigma)}{144\pi W} \left\{ \alpha_2 + \beta_2 x \right\}, \quad (3.62)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -6 \frac{q_\Delta^2 - \vec{k}^2}{W + m_\Delta} + 2 \frac{(E_\Delta + m_\Sigma)^2}{W - m_\Delta} - a_0 - (W + m_\Sigma)b_0; \\ \beta_2 &= \frac{-6\vec{k}^2}{m_\Delta + W}; \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (3.21), (3.22) e (3.23), teremos

as amplitudes de ondas parciais. Para a onda S

$$f_S^{\frac{3}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{288\pi W} \left\{ 3(E + m_\Sigma)\alpha_1 + (E - m_\Sigma)\beta_2 \right\}, \quad (3.63)$$

para a onda P_1

$$f_{P_1}^{\frac{3}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{288\pi W} \left\{ 3(E - m_\Sigma)\alpha_2 + (E + m_\Sigma)\beta_1 \right\}, \quad (3.64)$$

e finalmente para onda P_3

$$f_{P_3}^{\frac{3}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{288\pi W} \left\{ \frac{2}{3}(E + m_\Sigma)\beta_1 \right\}. \quad (3.65)$$

3.1.2.3 Amplitudes de ondas parciais para o canal $I = 1/2$

De (2.58) para o caso do isospin-1/2, temos

$$A_\Delta^{\frac{1}{2}} = A_\Delta^+ + 2A_\Delta^-, \quad (3.66)$$

$$B_\Delta^{\frac{1}{2}} = B_\Delta^+ + 2B_\Delta^-. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.47-3.50) nas relações anteriores, encontramos as amplitudes f_1 e f_2

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{2g_\Delta^2}{9} \frac{(E + m_\Sigma)}{8\pi W} \left\{ \frac{2\hat{A} + 2(W - m_\Sigma)\hat{B} + 3(W + m_\Delta)t}{m_\Delta^2 - s} + a_0 - (W - m_\Sigma)b_0 \right\}, \quad (3.68)$$

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{2g_\Delta^2}{9} \frac{(E - m_\Sigma)}{8\pi W} \left\{ \frac{-2\hat{A} + 2(W + m_\Sigma)\hat{B} + 3(W - m_\Delta)t}{m_\Delta^2 - s} - a_0 - (W + m_\Sigma)b_0 \right\}. \quad (3.69)$$

Separando os termos nas amplitudes de acordo com a dependência de x , observamos as mesmas estruturas do caso anterior,

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{g_\Delta^2(E + m_\Sigma)}{36\pi W} \left\{ \alpha'_1 + \beta'_1 x \right\}, \quad (3.70)$$

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{g_\Delta^2(E - m_\Sigma)}{36\pi W} \left\{ \alpha'_2 + \beta'_2 x \right\}, \quad (3.71)$$

onde

$$\alpha'_1 = \frac{3(W+m_\Delta)}{2m_\Delta^2 s} \left[m_\Delta^2 s - (m_\Sigma^2 - m_K^2)^2 \right] + 2 \frac{(E_\Delta + m_\Sigma)^2}{W + m_\Delta} + a_0 - (W - m_\Sigma) b_0;$$

$$\beta'_1 = \frac{6\vec{k}^2}{m_\Delta - W}.$$

e

$$\alpha'_2 = -6 \frac{q_\Delta^2 - \vec{k}^2}{W + m_\Delta} + 2 \frac{(E_\Delta + m_\Sigma)^2}{W - m_\Delta} - a_0 - (W + m_\Sigma) b_0;$$

$$\beta'_2 = \frac{-6\vec{k}^2}{m_\Delta + W};$$

Assim, para a onda S ,

$$f_S^{\frac{1}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{72\pi W} \left\{ 2(E + m_\Sigma) \alpha'_1 + \frac{2}{3}(E - m_\Sigma) \beta'_2 \right\}, \quad (3.72)$$

para P_1 ,

$$f_{P_1}^{\frac{1}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{72\pi W} \left\{ 2(E - m_\Sigma) \alpha'_2 + \frac{2}{3}(E + m_\Sigma) \beta'_1 \right\}, \quad (3.73)$$

e então para P_3 ,

$$f_{P_3}^{\frac{1}{2}(\Delta)} = \frac{g_\Delta^2}{72\pi W} \left\{ \frac{2}{3}(E + m_\Sigma) \beta'_1 \right\}. \quad (3.74)$$

3.1.3 Troca de um N^* e Ξ^*

Este caso é análogo ao anterior, porém consideramos os diagramas com a troca de N^* e Ξ^* que possuem isospin-1/2, e assim somos obrigados a adaptar a lagrangiana (A.196) introduzindo a matriz $\vec{\tau}$ ao

invés da matriz \vec{M} , pois esta relaciona o canal de isospin-1/2. Assim,

$$\mathcal{L}_{\Sigma KN^*} = g_{N^*} \left\{ \overline{N^*}^\mu [g_{\mu\nu} - (Z + 1/2)\gamma_\mu\gamma_\nu] \vec{\tau} \cdot \vec{\Sigma} \right\} \partial^\nu \phi. \quad (3.75)$$

e para o diagrama cruzado

$$\mathcal{L}_{\Sigma K\Xi^*} = g_{\Xi^*} \left\{ \overline{\Xi^*}^\mu [g_{\mu\nu} - (Z + 1/2)\gamma_\mu\gamma_\nu] \vec{\tau} \cdot \vec{\Sigma} \right\} \partial^\nu \phi. \quad (3.76)$$

Logo as amplitudes A e B serão as mesmas do caso de isospin-3/2 ($Z = -1/2$), mas fazendo a permutação das partículas $\Delta \rightarrow N^*$ para \hat{A} , \hat{B} , a_0 e b_0 . Nesse caso temos também o diagrama cruzando com partícula intermediária Ξ^* , a qual podemos calcular juntamente com a parte direta, assim temos a permutação $\Delta \rightarrow \Xi^*$ para \hat{A}' e \hat{B}' .

Dessa forma

$$A_*^+ = \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{A} + 3(m_\Sigma + m_{N^*})t}{m_{N^*}^2 - s} + a_0 \right] + g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{A}' + 3(m_\Sigma + m_{\Xi^*})t}{m_{\Xi^*}^2 - u} + c_0 + c_z(u - m_\Sigma^2) \right] \right\}, \quad (3.77)$$

$$B_*^+ = \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{B} + 3t}{m_{N^*}^2 - s} - b_0 \right] - g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{B}' + 3t}{m_{\Xi^*}^2 - u} - d_0 - d_z(u - m_\Sigma^2) \right] \right\}, \quad (3.78)$$

$$A_*^- = \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{A} + 3(m_\Sigma + m_{N^*})t}{m_{N^*}^2 - s} + a_0 \right] - g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{A}' + 3(m_\Sigma + m_{\Xi^*})t}{m_{\Xi^*}^2 - u} + c_0 + c_z(u - m_\Sigma^2) \right] \right\}, \quad (3.79)$$

$$B_*^- = \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{B} + 3t}{m_{N^*}^2 - s} - b_0 \right] + g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{B}' + 3t}{m_{\Xi^*}^2 - u} - d_0 - d_z(u - m_\Sigma^2) \right] \right\}, \quad (3.80)$$

onde

$$c_0 = -\frac{(m_\Sigma + m_{\Xi^*})}{m_{\Xi^*}^2} (2m_{\Xi^*}^2 + m_\Sigma m_{\Xi^*} - m_\Sigma^2 + 2m_K^2), \quad (3.81)$$

$$c_z = \frac{4}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi^*} + m_\Sigma)Z + (2m_{\Xi^*} + m_\Sigma)Z^2 \right], \quad (3.82)$$

$$d_0 = \frac{8}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Sigma}^2 + m_{\Sigma} m_{\Xi^*} - m_K^2) Z + (2m_{\Sigma} m_{\Xi^*} + m_{\Sigma}^2) Z^2 \right] + \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Xi^*})^2}{m_{\Xi^*}^2}, \quad (3.83)$$

$$d_z = \frac{4Z^2}{m_{\Xi^*}^2}. \quad (3.84)$$

3.1.3.1 Cálculo das ondas parciais

De (2.58) temos as amplitudes de isospin- $\frac{1}{2}$, dadas por

$$A_*^{\frac{1}{2}} = A_*^+ + 2A_*^-, \quad (3.85)$$

$$B_*^{\frac{1}{2}} = B_*^+ + 2B_*^-, \quad (3.86)$$

e conseqüentemente as amplitudes f_1 e f_2 serão da forma

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{8\pi W} [A_*^{\frac{1}{2}} + (W - m_{\Sigma}) B_*^{\frac{1}{2}}], \quad (3.87)$$

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{(E - m_{\Sigma})}{8\pi W} [-A_*^{\frac{1}{2}} + (W + m_{\Sigma}) B_*^{\frac{1}{2}}]. \quad (3.88)$$

Substituindo (3.85) e (3.86), temos

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_{\Sigma})}{8\pi W} \left\{ [A_*^+ + (W - m_{\Sigma}) B_*^+] + 2[A_*^- + (W - m_{\Sigma}) B_*^-] \right\}, \quad (3.89)$$

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{(E - m_{\Sigma})}{8\pi W} \left\{ [-A_*^+ + (W + m_{\Sigma}) B_*^+] + 2[-A_*^- + (W + m_{\Sigma}) B_*^-] \right\}. \quad (3.90)$$

Finalmente, utilizando as expressões (3.77-3.80), encontramos

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \frac{(E + m_{\Sigma})}{8\pi W} \left\{ 3g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{A} + 2(W - m_{\Sigma})\hat{B} + 3(W + m_{N^*})t}{m_{N^*}^2 - s} \right] + a_0 - (W - m_{\Sigma})b_0 \right\} - g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{A}' + 2(m_{\Sigma} - W)\hat{B}' + 3(m_{\Xi^*} + 2m_{\Sigma} - W)t}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right]$$

$$+c_0 + d_0(W - m_\Sigma) + [c_z + d_z(W - m_\Sigma)](u - m_\Sigma)] \Big\}, \quad (3.91)$$

e

$$\begin{aligned} f_2^{\frac{1}{2}} = & \frac{1}{6} \frac{(E - m_\Sigma)}{8\pi W} \left\{ 3g_{N^*}^2 \left[\frac{-2\hat{A} + 2(W + m_\Sigma)\hat{B} + 3(W - m_{N^*})t}{m_{N^*}^2 - s} \right. \right. \\ & \left. \left. - a_0 - (W + m_\Sigma)b_0 \right] \right. \\ & \left. + g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{A}' + 2(W + m_\Sigma)\hat{B}' + 3(W + 2m_\Sigma + m_{\Xi^*})t}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right. \right. \\ & \left. \left. + c_0 - d_0(W + m_\Sigma) + [c_z - d_z(W + m_\Sigma)](u - m_\Sigma) \right] \right\} \quad (3.92) \end{aligned}$$

Determinando a dependência em x

$$f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{(E + m_\Sigma)}{48\pi W} \left\{ \alpha'_1 + \beta'_1 x - \frac{a'_1 + b'_1 x}{\gamma_{\Xi^*} + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.93)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= 3g_{N^*}^2 \left\{ \frac{3(W + m_{N^*})}{2m_{N^*}^2 s} \left[m_{N^*}^2 s - (m_\Sigma^2 - m_K^2)^2 \right] + 2 \frac{(E_{N^*} + m_\Sigma)^2}{W + m_{N^*}} + a_0 - (W - m_\Sigma)b_0 \right\} \\ &\quad - g_{\Xi^*}^2 \left[c_0 + d_0(W - m_\Sigma) + [c_z + d_z(W - m_\Sigma)](m_K^2 - 2Ek_0) \right]; \\ \beta'_1 &= g_{N^*}^2 \frac{18\vec{k}^2}{m_{N^*} - W} + 2g_{\Xi^*}^2 [c_z + d_z(W - m_\Sigma)]\vec{k}^2; \\ a'_1 &= 2g_{\Xi^*}^2 \left[3(2m_\Sigma + m_{\Xi^*} - W)(q_{\Xi^*}^2 - \vec{k}^2) + (m_{\Xi^*} - 2m_\Sigma + W)(E_{\Xi^*} + m_\Sigma)^2 \right]; \\ b'_1 &= 6g_{\Xi^*}^2 \vec{k}^2 (2m_\Sigma + m_{\Xi^*} - W); \\ \gamma_{\Xi^*} &= m_{\Xi^*}^2 - m_\Sigma^2 - m_K^2 + 2Ek_0, \end{aligned}$$

e

$$f_2^{\frac{1}{2}} = \frac{(E - m_\Sigma)}{48\pi W} \left\{ \alpha'_2 + \beta'_2 x + \frac{a'_2 + b'_2 x}{\gamma_{\Xi^*} + 2\vec{k}^2 x} \right\} \quad (3.94)$$

com

$$\alpha'_2 = 3g_{N^*}^2 \left[-6 \frac{q_{N^*}^2 - \vec{k}^2}{W + m_{N^*}} + 2 \frac{(E_{N^*} + m_\Sigma)^2}{W - m_{N^*}} - a_0 - (W + m_\Sigma)b_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
& +g_{\Xi^*}^2 \left[c_0 - d_0(W + m_\Sigma) + [c_z - d_z(W + m_\Sigma)](m_K^2 - 2Ek_0) \right]; \\
\beta'_2 &= g_{N^*}^2 \frac{-18\vec{k}^2}{m_{N^*} + W} - 2g_{\Xi^*}^2 [c_z - d_z(W + m_\Sigma)]\vec{k}^2; \\
a'_2 &= 2g_{\Xi^*}^2 \left[3(2m_\Sigma + m_{\Xi^*} + W)(q_{\Xi^*}^2 - \vec{k}^2) + (m_{\Xi^*} - 2m_\Sigma - W)(E_{\Xi^*} + m_\Sigma)^2 \right]; \\
b'_2 &= 6g_{\Xi^*}^2 \vec{k}^2 (2m_\Sigma + m_{\Xi^*} + W).
\end{aligned}$$

Chegamos às amplitudes para as onda parciais, S ,

$$\begin{aligned}
f_S^{\frac{1}{2}(\ast)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ 2(E + m_\Sigma)\alpha'_1 + \frac{2}{3}(E - m_\Sigma)\beta'_2 - (E + m_\Sigma)\alpha'_1 I_0 \right. \\
&\quad \left. + [(E - m_\Sigma)\alpha'_2 - (E + m_\Sigma)b'_1] I_1 + (E - m_\Sigma)b'_2 I_2 \right\}, \quad (3.95)
\end{aligned}$$

para P_1 ,

$$\begin{aligned}
f_{P_1}^{\frac{1}{2}(\ast)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ 2(E - m_\Sigma)\alpha'_2 + \frac{2}{3}(E + m_\Sigma)\beta'_1 + (E - m_\Sigma)\alpha'_2 I_0 \right. \\
&\quad \left. + [(E - m_\Sigma)b'_2 - (E + m_\Sigma)\alpha'_1] I_1 - (E + m_\Sigma)b'_1 I_2 \right\}, \quad (3.96)
\end{aligned}$$

e P_3 ,

$$\begin{aligned}
f_{P_3}^{\frac{1}{2}(\ast)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ \frac{2}{3}(E + m_\Sigma)\beta'_1 + \left(\frac{E - m_\Sigma}{2} \right) \alpha'_2 I_0 \right. \\
&\quad + \left[\left(\frac{E - m_\Sigma}{2} \right) b'_2 - (E + m_\Sigma)\alpha'_1 \right] I_1 \\
&\quad + \left[\frac{3}{2}(E - m_\Sigma)\alpha'_2 - (E + m_\Sigma)b'_1 \right] I_2 \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}(E - m_\Sigma)b'_2 I_3 \right\}. \quad (3.97)
\end{aligned}$$

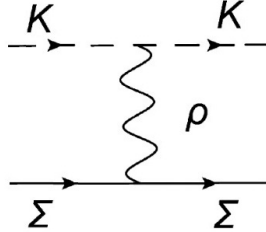
onde as integrais do tipo I_n são mostradas no Apêndice F.

É importante lembrar que caso aja mais de um diagrama direto ou cruzado para partículas de spin-isospin-1/2, teremos de calcular os diagramas separadamente para cada diagrama. No cálculo aqui demonstrado consideramos um diagrama direto (N^*) e um cruzado (Ξ^*).

3.1.4 Troca de um méson- ρ

A interação trocando um méson vetorial ρ pode ser estudada através de um diagrama conforme o mostrado na Figura 10. Para efe-

Figura 10 – Troca de um méson- ρ na interação $K\Sigma$



tuarmos o cálculo desse diagrama, devemos levar em conta as interações de K e de Σ com ρ . Desse modo, duas lagrangianas devem ser consideradas. Essas lagrangianas são adaptadas de (A.189) e de (A.192), atentando para o fato de que o méson K tem isospin $\frac{1}{2}$ ao invés do isospin 1 do pión, o que leva à introdução de uma matriz $\vec{\tau}$ relativa aos campos associados ao méson K , logo temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Sigma\rho\Sigma} &= \frac{g_{\Sigma\rho\Sigma}}{2} \left[\vec{\Sigma} \gamma_{\mu} \vec{t} \cdot \vec{\Sigma} \right] \cdot \vec{\rho}^{\mu} \\ &+ \frac{g_{\Sigma\rho\Sigma}}{2} \left[\vec{\Sigma} \left(\frac{\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}}{4m_{\Sigma}} \right) i\sigma_{\mu\nu} \vec{t} \cdot \vec{\Sigma} \right] \cdot (\partial^{\mu} \vec{\rho}^{\nu} - \partial^{\nu} \vec{\rho}^{\mu}), \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K\rho K} &= g_{K\rho K} \vec{\rho}^{\mu} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} (\phi \cdot \partial_{\mu} \phi) \\ &- \frac{g_{K\rho K}}{4m_{\rho}^2} (\partial_{\mu} \rho_{\nu} - \partial_{\nu} \rho_{\mu}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} (\partial^{\mu} \phi \cdot \partial^{\nu} \phi), \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde m_{ρ} é a massa do ρ , $g_{\Sigma\rho\Sigma}$ e $g_{K\rho K}$ são as constantes de acoplamento, μ_{Σ^0} e μ_{Σ^-} são os momentos magnéticos do Σ e \vec{t} é a matriz de isospin envolvendo partículas com isospin 1 que respeita a regra $\langle b | \vec{t} | a \rangle = \epsilon_{bac} \hat{e}_c$.

Para o cálculo do diagrama de Feynman, temos

$$iT = \int \left(\frac{d^4 q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[i \frac{g_{\Sigma\rho\Sigma}}{2} \left[\gamma^{\nu} + \frac{\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}}{2m_{\Sigma}} i\sigma^{\nu\lambda} q_{\lambda} \right] \tau^c \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-i \frac{(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_\rho^2)}{q^2 - m_\rho^2} \right] \left[-g_{K\rho K} \epsilon_{abc} \left[k^\mu + k'^\mu + \frac{q \cdot k}{2m_\rho^2} (k'^\mu - k^\mu) \right] \right] u(p) \\
& \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(p + k - q) \right] \left[(4\pi)^4 \delta^4(q - p' - k') \right], \tag{3.100}
\end{aligned}$$

que após a integração resulta em

$$\begin{aligned}
T &= \bar{u}(p') i \frac{G_0}{2} \left[\gamma^\nu + \frac{\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}}{2m_\Sigma} i \sigma^{\nu\lambda} (p + k)_\lambda \right] \left[\frac{(g_{\mu\nu} - (p + k)_\mu (p + k)_\nu / m_\rho^2)}{s - m_\rho^2} \right] \\
& \times \left[k^\mu + k'^\mu + \frac{(p + k)^\mu k}{2m_\rho^2} (k'^\mu - k^\mu) \right] \epsilon_{abc} \tau^c u(p), \tag{3.101}
\end{aligned}$$

onde $G_0 = (g_{\Sigma\rho\Sigma})(g_{K\rho K})$. Depois de uma boa quantidade de algebrismo, encontramos as amplitudes

$$A_\rho^+ = B_\rho^+ = 0, \tag{3.102}$$

$$A_\rho^- = -\frac{G_0}{m_\rho^2} (\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}) \nu \left[\frac{1 + \frac{t}{4m_\rho^2}}{1 - \frac{t}{m_\rho^2}} \right], \tag{3.103}$$

$$B_\rho^- = \frac{G_0}{m_\rho^2} (1 + \mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}) \left[\frac{1 + \frac{t}{4m_\rho^2}}{1 - \frac{t}{m_\rho^2}} \right]. \tag{3.104}$$

Sabendo que $t = 2\vec{k}^2 x - 2\vec{k}'^2$, podemos escrever as amplitudes em função de x de forma conveniente

$$A_\rho^- = -\frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{4(-m_\rho^2 - 2\vec{k}'^2 + 2\vec{k}^2 x)}, \tag{3.105}$$

sendo

$$A_1 = a[(2Ek_0 + \vec{k}'^2)(2m_\rho^2 - \vec{k}'^2)]; \tag{3.106}$$

$$A_2 = a[2m_\rho^2 + 2Ek_0] \vec{k}'^2; \tag{3.107}$$

$$A_3 = a \vec{k}'^4; \tag{3.108}$$

$$a = -\frac{G_0}{m_\rho^2 m_\Sigma} (\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}), \tag{3.109}$$

e

$$B_\rho^- = -\frac{B_1 + B_2 x}{4(-m_\rho^2 - 2\vec{k}'^2 + 2\vec{k}^2 x)}, \tag{3.110}$$

onde

$$B_1 = b[2m_\rho^2 - \vec{k}^2]; \quad (3.111)$$

$$B_2 = 2b\vec{k}^2; \quad (3.112)$$

$$b = \frac{2G_0}{m_\rho^2}(1 + \mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}). \quad (3.113)$$

3.1.4.1 Amplitude com isospin-3/2

Do mesmo modo que procedemos nos casos anteriores, iremos encontrar as amplitudes da troca de ρ no caso de isospin-3/2.

De (2.59), temos

$$A^{\frac{3}{2}} = -A_\rho^-, \quad (3.114)$$

$$B^{\frac{3}{2}} = -B_\rho^-, \quad (3.115)$$

então,

$$f_1^{\frac{3}{2}} = -\frac{(E + m_\Sigma)}{8\pi W}[A_\rho^- + (W - m_\Sigma)B_\rho^-], \quad (3.116)$$

$$f_2^{\frac{3}{2}} = -\frac{(E - m_\Sigma)}{8\pi W}[-A_\rho^- + (W + m_\Sigma)B_\rho^-]. \quad (3.117)$$

Separando a expressão de acordo com a dependência em x

$$f_1^{\frac{3}{2}} = \frac{(E + m_\Sigma)}{32\pi W} \left\{ \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + A_3 x^2}{\gamma + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.118)$$

onde

$$\alpha_1 = A_1 + (W - m_\Sigma)B_1; \quad (3.119)$$

$$\beta_1 = A_2 + (W - m_\Sigma)B_2; \quad (3.120)$$

$$\gamma = -m_\rho^2 - 2\vec{k}^2, \quad (3.121)$$

e

$$f_2^{\frac{3}{2}} = \frac{(m_\Sigma - E)}{32\pi W} \left\{ \frac{\alpha_2 + \beta_2 x + A_3 x^2}{\gamma + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.122)$$

onde

$$\alpha_2 = A_1 - (W + m_\Sigma)B_1; \quad (3.123)$$

$$\beta_2 = A_2 - (W + m_\Sigma)B_2. \quad (3.124)$$

As amplitudes de ondas parciais são então

$$f_S^{\frac{3}{2}(\rho)} = \frac{1}{64\pi W} \left\{ (E + m_\Sigma)\alpha_1 I_0 + [(E + m_\Sigma)\beta_1 + (m_\Sigma - E)\alpha_2] I_1 \right. \\ \left. + [(E + m_\Sigma)A_3 + (m_\Sigma - E)\beta_2] I_2 \right. \\ \left. + (m_\Sigma - E)A_3 I_3 \right\}, \quad (3.125)$$

$$f_{P_1}^{\frac{3}{2}(\rho)} = \frac{1}{64\pi W} \left\{ (m_\Sigma - E)\alpha_2 I_0 + [(E + m_\Sigma)\alpha_1 + (m_\Sigma - E)\beta_2] I_1 \right. \\ \left. + [(E + m_\Sigma)\beta_1 + (m_\Sigma - E)A_3] I_2 \right. \\ \left. + (E + m_N)A_3 I_3 \right\}, \quad (3.126)$$

e

$$f_{P_3}^{\frac{3}{2}(\rho)} = \frac{1}{128\pi W} \left\{ (E - m_N)\alpha_2 I_0 + [2(E + m_\Sigma)\alpha_1 + (E - m_\Sigma)\beta_2] I_1 \right. \\ \left. + [3(m_\Sigma - E)\alpha_2 + 2(E + m_\Sigma)\beta_1 + (E - m_\Sigma)A_3] I_2 \right. \\ \left. + [3(m_\Sigma - E)\beta_2 + 2(E + m_\Sigma)A_3] I_3 \right. \\ \left. + 3(m_\Sigma - E)A_3 I_4 \right\}. \quad (3.127)$$

3.1.4.2 Amplitude com isospin-1/2

Notamos que pela condição (3.102) as relações (2.58) e (2.59) estão relacionadas como se segue

$$A^{\frac{1}{2}} = 2A_\rho^- = -2A^{\frac{3}{2}}, \quad (3.128)$$

$$B^{\frac{1}{2}} = 2B_\rho^- = -2B^{\frac{3}{2}}. \quad (3.129)$$

De forma que podemos diretamente achar uma relação direta entre as amplitudes de ondas parciais em termos dos resultados da seção anterior, portanto

$$f_S^{\frac{1}{2}(\rho)} = -2f_S^{\frac{3}{2}(\rho)}, \quad (3.130)$$

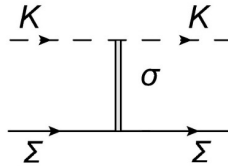
$$f_{P_1}^{\frac{1}{2}}(\rho) = -2f_{P_1}^{\frac{3}{2}}(\rho), \quad (3.131)$$

$$f_{P_3}^{\frac{1}{2}}(\rho) = -2f_{P_3}^{\frac{3}{2}}(\rho). \quad (3.132)$$

3.1.5 Troca de um σ

A última interação que precisamos levar em conta é determinada pela troca de um σ , mostrada na Figura 11. Essa interação, onde o méson σ é escalar e de isospin 0, é comumente considerada como uma parametrização na variável t , que é a forma esperada ao que se obtêm em um cálculo desse tipo de diagrama (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983; BARROS; HAMA, 2001). Esta forma

Figura 11 – Troca de um méson- σ



para a interação será considerada em todas as interações KY .

As amplitudes possuem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_\sigma &= a + bt \\ &= a - 2\vec{k}^2 b + 2\vec{k}^2 bx \\ &= \alpha + \beta x, \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$B_\sigma = 0, \quad (3.134)$$

onde $\alpha = a - 2\vec{k}^2 b$ e $\beta = 2\vec{k}^2 b$.

Há muitas discussões a respeito da existência desta interação, bem como dificuldades no entendimento das propriedades dessa partícula e por esse motivos, consideramos a parametrização proposta. Discussões a esse respeito podem ser encontradas em Gasser, Leutwyler e Sainio (1991), Robilotta (2001), Barros e Robilotta (2006).

Escrevendo (3.133) através dos polinômios de Legendre (3.24) e (3.25) obtemos

$$A_\sigma = \alpha P_0 + \beta P_1. \quad (3.135)$$

Essa forma de escrever deixa bem claro como usamos as relações de

ortogonalidade dos polinômios de Legendre, assim as amplitudes f_1 e f_2 são

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{E + m_\Sigma}{8\pi W} \left[A_\sigma + (W - m_\Sigma) B_\sigma \right] \\ &= \frac{E + m_\Sigma}{8\pi W} \left[\alpha P_0 + \beta P_1 \right], \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{E - m_\Sigma}{8\pi W} \left[-A_\sigma + (W + m_\Sigma) B_\sigma \right] \\ &= \frac{m_\Sigma - E}{8\pi W} \left[\alpha P_0 + \beta P_1 \right], \end{aligned} \quad (3.137)$$

logo as amplitudes de ondas parciais resultam em

$$\begin{aligned} f_s^{(\sigma)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1 P_0 + f_2 P_1] dx \\ &= \frac{1}{8\pi W} \left[\alpha(E + m_\Sigma) + \frac{\beta}{3}(m_\Sigma - E) \right], \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} f_{P_1}^{(\sigma)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1 P_1 + f_2 P_0] dx \\ &= \frac{1}{8\pi W} \left[\alpha(m_\Sigma - E) + \frac{\beta}{3}(E + m_\Sigma) \right], \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} f_{P_3}^{(\sigma)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1 P_0 + f_2 P_2] dx \\ &= \frac{E + m_\Sigma}{24\pi W} \beta. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Iremos considerar os seguintes parâmetros, $a = 0, 25m_\pi^{-1}$ e $b = 0, 4m_\pi^{-3}$, onde $m_\pi = 140MeV$ é a massa do pión, encontrados nas referencias (OLSSON; OSYPOWSKI, 1975; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983), para todos os casos KY .

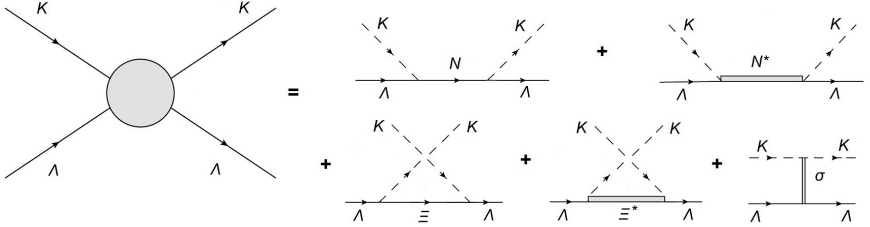
No futuro devemos fazer cálculos através de métodos mais complexos, considerando modelos como por exemplo Barros e Robilotta (2006), através do fator de forma dos híperons para então determinar esses parâmetros com um fundamento teórico melhor.

3.2 INTERAÇÃO $K\Lambda$

A interação $K\Lambda$ é mais simples que as estudadas na seção anterior. Uma vez que $I_\Lambda = 0$ e $I_K = \frac{1}{2}$, temos somente uma amplitude de

isospin, assim, não precisamos de projetores de isospin e temos somente uma amplitude para cada spin.

Figura 12 – Diagramas considerados para $K\Lambda$



Para esta interação vamos considerar as seguintes partículas: N , N^* , Ξ , Ξ^* e σ , conforme a Figura 12.

3.2.1 Ondas parciais para N e Ξ

Como Λ tem isospin nulo retiramos a matriz $\vec{\tau}$ da lagrangiana. A lagrangiana com partícula intermediária de spin e isospin $\frac{1}{2}$, o nêutron (N), é dada por

$$\mathcal{L}_{K\Lambda N} = \frac{g_{\Lambda KN}}{2m_{\Lambda}} (\bar{N}\gamma_{\mu}\gamma_5\Lambda) \cdot \partial^{\mu}\phi, \quad (3.141)$$

e para o Ξ

$$\mathcal{L}_{K\Lambda\Xi} = \frac{g_{\Lambda K\Xi}}{2m_{\Lambda}} (\bar{\Xi}\gamma_{\mu}\gamma_5\Lambda) \cdot \partial^{\mu}\phi \quad (3.142)$$

Como não há a necessidade de operador de projeção, iremos usar a relação para isospin- $\frac{1}{2}$, dada por (2.59), com a condição (ausência de $\vec{\tau}$)

$$A^{-} = 0, \quad B^{-} = 0, \quad (3.143)$$

portanto temos que

$$A^{\frac{1}{2}} = A^{+} = A, \quad (3.144)$$

$$B^{\frac{1}{2}} = B^{+} = B. \quad (3.145)$$

Realizando os mesmos procedimentos das outras interações temos

$$f_1 = \frac{(E + m_{\Lambda})}{32\pi m_{\Lambda}^2 W} \left\{ a_1 + \frac{b_1 + c_1 x}{\gamma_{\Xi} + 2k^2 x} \right\}, \quad (3.146)$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_1 &= g_{K\Lambda N}^2 \frac{(m_N + 2m_\Lambda - W)(s - m_\Lambda^2) + 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_N)(m_\Lambda - W)}{s - m_N^2}; \\
 b_1 &= -g_{K\Lambda\Xi}^2 [2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Xi)(W - m_\Lambda) + (m_\Xi + W)(m_K^2 - 2Ek_0)]; \\
 c_1 &= 2g_{K\Lambda\Xi}^2 \vec{k}^2 (W + m_\Xi); \\
 \gamma_\Xi &= m_\Xi^2 - m_\Lambda^2 - m_K^2 + 2Ek_0.
 \end{aligned}$$

e

$$f_2 = \frac{(E - m_\Lambda)}{32\pi m_\Lambda^2 W} \left\{ a_2 + \frac{b_2 + c_2 x}{\gamma_\Xi + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.147)$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_2 &= g_{K\Lambda N}^2 \frac{(m_N + 2m_\Lambda + W)(m_\Lambda^2 - s) - 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_N)(m_\Lambda + W)}{s - m_N^2}; \\
 b_2 &= -g_{K\Lambda\Xi}^2 [2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Xi)(W + m_\Lambda) + (W - m_\Xi)(m_K^2 - 2Ek_0)]; \\
 c_2 &= 2g_{K\Lambda\Xi}^2 \vec{k}^2 (W - m_\Xi).
 \end{aligned}$$

E então

$$\begin{aligned}
 f_S^{(N)} &= \frac{1}{64\pi m_\Lambda^2 W} \left\{ 2(E + m_\Lambda)a_1 + (E + m_\Lambda)b_1 I_0 \right. \\
 &\quad \left. + [(E + m_\Lambda)c_1 + (E - m_\Lambda)b_2] I_1 + (E - m_\Lambda)c_2 I_2 \right\}, \quad (3.148)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{P_1}^{(N)} &= \frac{1}{64\pi m_\Lambda^2 W} \left\{ 2(E - m_\Lambda)a_2 + (E - m_\Lambda)b_2 I_0 \right. \\
 &\quad \left. + [(E + m_\Lambda)b_1 + (E - m_\Lambda)c_2] I_1 + (E + m_\Lambda)c_1 I_2 \right\}, \quad (3.149)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{P_3}^{(N)} &= \frac{1}{64\pi m_\Lambda^2 W} \left\{ \left(\frac{m_\Lambda - E}{2} \right) b_2 I_0 + [(E + m_\Lambda)b_1 + \left(\frac{m_\Lambda - E}{2} \right) c_2] I_1 \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{3}{2} (E - m_\Lambda) b_2 + (E + m_\Lambda) c_1 \right] I_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} (E - m_\Lambda) c_2 I_3 \right\}. \quad (3.150)
 \end{aligned}$$

3.2.2 Ondas parciais para N^* e Ξ^*

De forma análoga ao caso de spin- $\frac{1}{2}$, eliminamos a matriz $\vec{\tau}$ uma vez que temos somente o canal de isospin- $\frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}_{K\Lambda N^*} = g_{N^*} \left\{ \overline{N^*}^{\mu} \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \right] \Lambda \right\} \cdot \partial^{\nu} \phi \quad (3.151)$$

e

$$\mathcal{L}_{K\Lambda \Xi^*} = g_{\Xi^*} \left\{ \overline{\Xi^*}^{\mu} \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \right] \Lambda \right\} \cdot \partial^{\nu} \phi \quad (3.152)$$

no caso da interação $K\Lambda$ utilizamos as relações (3.77-3.78), com a mudança $m_{\Sigma} \rightarrow m_{\Lambda}$.

Novamente teremos o caso $A^- = B^- = 0$, temos

$$\begin{aligned} A_* &= \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{A} + 3(m_{\Lambda} + m_{N^*})t}{m_{N^*}^2 - s} + a_0 \right] \right. \\ &\quad \left. + g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{A}' + 3(m_{\Lambda} + m_{\Xi^*})t}{m_{\Xi^*}^2 - u} + c_0 + c_z(u - m_{\Lambda}^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} B_* &= \frac{1}{6} \left\{ g_{N^*}^2 \left[\frac{2\hat{B} + 3t}{m_{N^*}^2 - s} - b_0 \right] \right. \\ &\quad \left. - g_{\Xi^*}^2 \left[\frac{2\hat{B}' + 3t}{m_{\Xi^*}^2 - u} - d_0 - d_z(u - m_{\Lambda}^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.154)$$

De posse de (2.58),

$$A_*^{\frac{1}{2}} = A_*^+ = A_*, \quad (3.155)$$

$$B_*^{\frac{1}{2}} = B_*^+ = B_*. \quad (3.156)$$

Para f_1 , temos

$$f_1 = \frac{(E + m_{\Lambda})}{48\pi W} \left\{ \alpha_1 + \beta_1 x + \frac{a_1 + b_1 x}{\gamma_{\Xi^*} + 2k^2 x} \right\}, \quad (3.157)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= g_{N^*}^2 \left\{ \frac{3(W + m_{N^*})}{2m_{N^*}^2 s} \left[m_{N^*}^2 s - (m_{\Lambda}^2 - m_K^2)^2 \right] + 2 \frac{(E_{N^*} + m_{\Lambda})^2}{W + m_{N^*}} + a_0 - (W - m_{\Lambda}) b_0 \right\} \\ &\quad + g_{\Xi^*}^2 \left[c_0 + d_0(W - m_{\Lambda}) + [c_z + d_z(W - m_{\Lambda})](m_K^2 - 2Ek_0) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= g_{N^*}^2 \frac{6\vec{k}^2}{m_{N^*} - W} - 2g_{\Xi^*}^2 [c_z + d_z(W - m_\Lambda)]\vec{k}^2; \\
a_1 &= 2g_{\Xi^*}^2 \left[3(2m_\Lambda + m_{\Xi^*} - W)(q_{\Xi^*}^2 - \vec{k}^2) + (m_{\Xi^*} - 2m_\Lambda + W)(E_{\Xi^*} + m_\Lambda)^2 \right]; \\
b_1 &= 6g_{\Xi^*}^2 \vec{k}^2 (2m_\Lambda + m_{\Xi^*} - W); \\
\gamma_{\Xi^*} &= m_{\Xi^*}^2 - m_\Lambda^2 - m_K^2 + 2Ek_0,
\end{aligned}$$

e então para f_2

$$f_2 = \frac{(E - m_\Lambda)}{48\pi W} \left\{ \alpha_2 + \beta_2 x - \frac{a_2 + b_2 x}{\gamma_{\Xi^*} + 2\vec{k}^2 x} \right\}, \quad (3.158)$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= g_{N^*}^2 \left[-6 \frac{q_{N^*}^2 - \vec{k}^2}{W + m_{N^*}} + 2 \frac{(E_{N^*} + m_\Lambda)^2}{W - m_{N^*}} - a_0 - (W + m_\Lambda)b_0 \right] \\
&\quad - g_{\Xi^*}^2 \left[c_0 - d_0(W + m_\Lambda) + [c_z - d_z(W + m_\Lambda)](m_K^2 - 2Ek_0) \right]; \\
\beta_2 &= g_{N^*}^2 \frac{-6\vec{k}^2}{m_{N^*} + W} + 2g_{\Xi^*}^2 [c_z - d_z(W + m_\Lambda)]\vec{k}^2; \\
a_2 &= 2g_{\Xi^*}^2 \left[3(2m_\Lambda + m_{\Xi^*} + W)(q_{\Xi^*}^2 - \vec{k}^2) + (m_{\Xi^*} - 2m_\Lambda - W)(E_{\Xi^*} + m_\Lambda)^2 \right]; \\
b_2 &= 6g_{\Xi^*}^2 \vec{k}^2 (2m_\Lambda + m_{\Xi^*} + W).
\end{aligned}$$

Finalmente as amplitudes de ondas parciais do ultimo caso, são

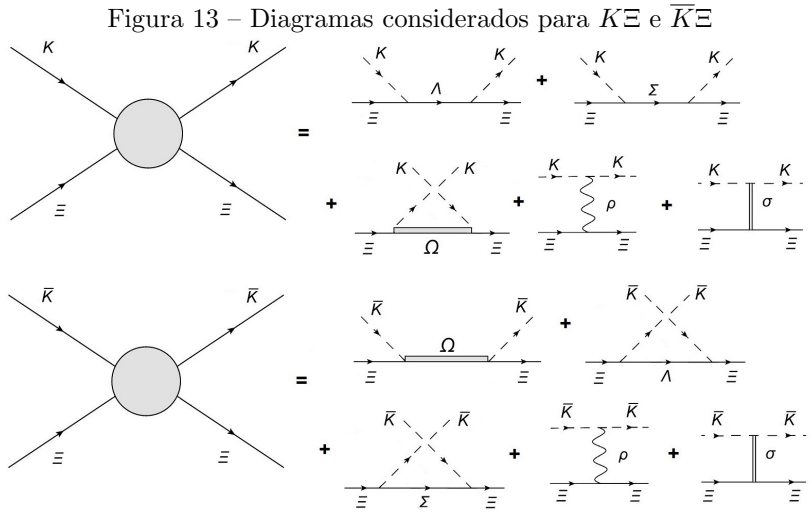
$$\begin{aligned}
f_S^{(*)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ 2(E + m_\Lambda)\alpha_1 + \frac{2}{3}(E - m_\Lambda)\beta_2 + (E + m_\Lambda)a_1 I_0 \right. \\
&\quad \left. + [(E + m_\Lambda)b_1 - (E - m_\Lambda)a_2] I_1 - (E - m_\Lambda)b_2 I_2 \right\}, \quad (3.159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{P_1}^{(*)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ 2(E - m_\Lambda)\alpha_2 + \frac{2}{3}(E + m_\Lambda)\beta_1 - (E - m_\Lambda)a_2 I_0 \right. \\
&\quad \left. + [(E + m_\Lambda)a_1 - (E - m_\Lambda)b_2] I_1 \right. \\
&\quad \left. + (E + m_\Lambda)b_1 I_2 \right\}, \quad (3.160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{P_3}^{(*)} &= \frac{1}{96\pi W} \left\{ \frac{2}{3}(E + m_\Lambda)\beta_1 - \left(\frac{E - m_\Lambda}{2}\right)a_2 I_0 \right. \\
&\quad + \left[(E + m_\Lambda)a_1 - \left(\frac{E - m_\Lambda}{2}\right)b_2 \right] I_1 - \left[\frac{3}{2}(E - m_\Lambda)a_2 \right. \\
&\quad \left. \left. + (E + m_\Lambda)b_1 \right] I_2 - \frac{3}{2}(E - m_\Lambda)b_2 I_3 \right\}. \quad (3.161)
\end{aligned}$$

3.3 INTERAÇÕES $K\Xi$ E $\bar{K}\Xi$

Para as interações $K\Xi$ e $\bar{K}\Xi$ consideraremos os híperons intermediários Λ , Σ e Ω , também os mésons ρ e σ , conforme mostrados na Figura 13.



A interação $K\Xi$ difere da interação $K\Sigma$ por agora envolver partículas com isospin $\frac{1}{2}$ ($I_K = I_\Xi = \frac{1}{2}$), permitindo canais de isospin 0 e 1, portanto teremos que deduzir um novo projetor de isospin da mesma forma que fizemos na seção 2.1.4.1. Para esse caso teremos

$$I^2 = \left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2 + \frac{\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{2} + \left(\frac{\tau_2}{2}\right)^2, \quad (3.162)$$

resultando em

$$I = 0 \rightarrow \omega_0 = -3, \quad (3.163)$$

$$I = 1 \rightarrow \omega_1 = 1, \quad (3.164)$$

escolhendo ω_j de forma a ter uma estrutura similar à (2.58) e (2.59), tal que, $\omega_j = 0$ e $\omega_j = 2$, chegamos aos projetores de isospin

$$P_0 = \frac{-\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{3} = -\frac{\delta_{ab} + i\epsilon_{bac}\tau_c}{3}, \quad (3.165)$$

$$P_1 = 2 - \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = \delta_{ab} - i\epsilon_{bac}\tau_c. \quad (3.166)$$

Assim concluímos que as amplitudes são

$$A^0 = -\frac{3}{2}(A^+ + A^-), \quad B^0 = -\frac{3}{2}(B^+ + B^-), \quad (3.167)$$

$$A^1 = \frac{1}{2}(A^+ - A^-), \quad B^1 = \frac{1}{2}(B^+ - B^-). \quad (3.168)$$

3.3.1 Amplitudes de ondas parciais com spin- $\frac{1}{2}$

No caso da interação $K\Xi$ teremos somente duas partículas intermediárias possíveis, Λ e Σ , com isospin 0 e 1, respectivamente.

Por terem isospins diferentes precisam de lagrangianas de interação de formas diferentes. Para o Λ não temos a matriz $\vec{\tau}$ mesmo caso de (3.141), logo

$$\mathcal{L}_{\Xi K \Lambda} = \frac{g_{\Xi K \Lambda}}{2m_{\Xi}} (\bar{\Lambda} \gamma_{\mu} \gamma_5 \Xi) \partial^{\mu} \phi, \quad (3.169)$$

já para o caso do Σ , com isospin 1, temos que

$$\mathcal{L}_{\Xi K \Sigma} = \frac{g_{\Xi K \Sigma}}{2m_{\Xi}} (\vec{\Sigma} \cdot \vec{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_5 \Xi) \partial^{\mu} \phi. \quad (3.170)$$

Estas diferenças são consideráveis para as amplitudes A e B , portanto iremos separar cada caso.

3.3.1.1 Canal de isospin-0 para Λ

Como a lagrangiana (3.169) associada ao Λ não contém uma matriz de isospin, então obrigatoriamente temos a condição (diagrama direto)

$$A_{\Lambda}^{-} = B_{\Lambda}^{-} = 0 \quad (3.171)$$

logo, usando (3.9), (3.10) em (3.167), encontramos

$$A_{\Lambda}^0 = \frac{-3g_{\Lambda}^2}{8m_{\Xi}^2}(m_{\Lambda} + m_{\Xi})\left(\frac{s - m_{\Xi}^2}{s - m_{\Lambda}^2}\right), \quad (3.172)$$

$$B_{\Lambda}^0 = \frac{-3g_{\Lambda}^2}{8m_{\Xi}^2}\left[-\frac{2m_{\Xi}(m_{\Xi} + m_{\Lambda}) + s - m_{\Xi}^2}{s - m_{\Lambda}^2}\right]. \quad (3.173)$$

Essas amplitudes são equivalente ao caso $K\Lambda$ (3.144-3.145) para partículas com intermediária com spin- $\frac{1}{2}$, uma vez que,

$$A_{\Lambda}^0 = -\frac{3}{2}A^+ = -\frac{3}{2}A^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}A, \quad (3.174)$$

$$B_{\Lambda}^0 = -\frac{3}{2}B^+ = -\frac{3}{2}B^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}B. \quad (3.175)$$

Sendo assim, fazendo as permutações de partículas $\Lambda \rightarrow \Xi$ e $N \rightarrow \Lambda$ e multiplicando as amplitudes f_1 e f_2 por $-3/2$ encontramos as amplitudes de ondas parciais.

3.3.1.2 Canal de isospin-0 para Σ

Através das amplitudes (3.9-3.12) e das relações (3.167), permutando as massas da forma $m_{\Sigma} \rightarrow m_{\Xi}$ e $m_N \rightarrow m_{\Sigma}$, temos as amplitudes

$$A_{\Sigma}^0 = \frac{-3g^2}{4m_{\Xi}^2}(m_{\Sigma} + m_{\Xi})\left(\frac{s - m_{\Xi}^2}{s - m_{\Sigma}^2}\right), \quad (3.176)$$

$$B_{\Sigma}^0 = \frac{3g^2}{4m_{\Xi}^2}\left[\frac{2m_{\Xi}(m_{\Xi} + m_{\Sigma}) + s - m_{\Xi}^2}{s - m_{\Sigma}^2}\right]. \quad (3.177)$$

Logo, para f_1 e f_2 ,

$$f_1^0 = \frac{3g^2(E + m_{\Xi})}{32\pi m_{\Xi}^2 W}\{a_1\}, \quad (3.178)$$

onde

$$a_1 = \frac{(W - m_{\Sigma} - 2m_{\Xi})(s - m_{\Xi}^2) + 2m_{\Xi}(m_{\Xi} + m_{\Sigma})(W - m_{\Xi})}{s - m_{\Sigma}^2},$$

$$f_2^0 = \frac{3g^2(E - m_{\Xi})}{32\pi m_{\Xi}^2 W}\{a_2\} \quad (3.179)$$

sendo

$$a_2 = \frac{(m_\Sigma + 2m_\Xi + W)(s - m_\Xi^2) + 2m_\Xi(m_\Xi + m_\Sigma)(W + m_\Xi)}{s - m_\Sigma^2}.$$

Para as ondas parciais, temos

$$f_S^{0(\Sigma)} = \frac{3g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ (E + m_\Xi) a_1 \right\}, \quad (3.180)$$

$$f_{P_1}^{0(\Sigma)} = \frac{3g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ (E - m_\Xi) a_2 \right\}, \quad (3.181)$$

$$f_{P_3}^{0(\Sigma)} = \frac{3g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ \left(\frac{m_\Xi - E}{2} \right) a_2 \right\}. \quad (3.182)$$

Nos diagrama direto não existe formação de Σ no canal de isospin-1, devido aos projetores de isospin.

Na interação $K\Xi$ não há partículas intermediárias com spin- $\frac{3}{2}$ no diagrama direta, portem existe a parte cruzada de Ω que será mostrado na seção 3.3.3.

As ressonâncias conhecidas tem spin superior a 3/2 (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016), por questões técnicas e conceituais, é extremamente complexo calcular tais interações, portanto iremos considerar somente partículas intermediárias de spin- $\frac{1}{2}$.

3.3.2 Troca do méson- ρ

A troca de uma méson- ρ é feita de forma análoga ao caso do $K\Sigma$, temos as relações

$$f_S^{1(\rho)} = \frac{1}{2} f_S^{\frac{3}{2}(\rho)}, \quad (3.183)$$

$$f_{P_1}^{1(\rho)} = \frac{1}{2} f_{P_1}^{\frac{3}{2}(\rho)}, \quad (3.184)$$

$$f_{P_3}^{1(\rho)} = \frac{1}{2} f_{P_3}^{\frac{3}{2}(\rho)}, \quad (3.185)$$

retirada da comparação entre (3.114), (3.115) e (3.168).

3.3.3 Interação $\overline{K}\Xi$, troca de uma Ω

Na interação $\overline{K}\Xi$ tem uma única partícula intermediária possível para o diagrama direto, um bárion de spin- $\frac{3}{2}$ e isospin-0, o Ω . Assim para esse caso, dado o isospin da partícula utilizamos a lagrangiana mais simples excluimos a matriz \overline{M} , ou seja,

$$\mathcal{L}_{\Xi\overline{K}\Omega} = g_{\Xi\overline{K}\Omega} \left\{ \overline{\Omega}^\mu [g_{\mu\nu} - (Z + 1/2)\gamma_\mu\gamma_\nu] \Xi \right\} \partial^\nu \phi. \quad (3.186)$$

A ausência desta matriz é condição para $A_\Omega^- = B_\Omega^- = 0$. Logo observando as relações (3.167) e (2.59), temos que para essas condições

$$A_\Omega^0 = -\frac{3}{2}A_*^+ = -\frac{3}{2}A_*^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}A_*, \quad (3.187)$$

$$B_\Omega^0 = -\frac{3}{2}B_*^+ = -\frac{3}{2}B_*^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}B_*. \quad (3.188)$$

Através destas condições notamos que as interações $\overline{K}\Xi$ e $K\Lambda$ tem para o caso de spin- $\frac{3}{2}$ a mesmas amplitudes de ondas parciais (3.159-3.161) e obviamente fazendo as devidas adaptações, tais como as permutações de partículas $\Lambda \rightarrow \Xi$, $N^* \rightarrow \Omega$ e $K \rightarrow \overline{K}$.

Para o caso cruzado de $K\Xi$ temos também a troca de um Ω , onde utilizamos a parte cruzadas (proporcionais a u) das relações (3.187) e (3.188) nos cálculos.

3.3.4 Diagramas cruzados spin-1/2 para $\overline{K}\Xi$

Para diagramas cruzados temos Λ e Σ , nos canais de isospin 0 e 1.

3.3.4.1 Canal de isospin-0

Neste canal temos para o diagramas cruzados somente o bárion Λ , análogo ao caso anterior, mas agora

$$A_\Lambda^0 = \frac{-3g_\Lambda^2}{8m_\Xi^2} (m_\Lambda + m_\Xi) \left(\frac{u - m_\Xi^2}{u - m_\Lambda^2} \right), \quad (3.189)$$

$$B_\Lambda^0 = \frac{-3g_\Lambda^2}{8m_\Xi^2} \left[\frac{2m_\Xi(m_\Xi + m_\Lambda) + u - m_\Xi^2}{u - m_\Lambda^2} \right]. \quad (3.190)$$

Essas amplitudes são equivalente ao caso dos diagramas cruzados da interação $K\Lambda$ para partículas com intermediária com spin- $\frac{1}{2}$, assim

$$A_{\Lambda}^0 = -\frac{3}{2}A^+ = -\frac{3}{2}A^{\frac{1}{2}}, \quad (3.191)$$

$$B_{\Lambda}^0 = -\frac{3}{2}B^+ = -\frac{3}{2}B^{\frac{1}{2}}. \quad (3.192)$$

Sendo assim, fazendo as permutações de partículas $\Lambda \rightarrow \Xi$ e $N \rightarrow \Lambda$ e multiplicando as amplitudes f_1 e f_2 por $-\frac{3}{2}$ encontramos as amplitudes de ondas parciais para o diagrama cruzado.

3.3.4.2 Canal de isospin-1

Ao considerarmos o canal de isospin-1 temos somente uma partícula intermediária, o Σ . Utilizando (3.9-3.12) e (3.168), encontramos, permutando as massas: $m_{\Sigma} \rightarrow m_{\Xi}$ e $m_N \rightarrow m_{\Sigma}$,

$$A_{\Sigma}^1 = \frac{g^2}{4m_{\Xi}^2}(m_{\Sigma} + m_{\Xi}) \left(\frac{u - m_{\Xi}^2}{u - m_{\Sigma}^2} \right), \quad (3.193)$$

$$B_{\Sigma}^1 = \frac{g^2}{4m_{\Xi}^2} \left[\frac{2m_{\Xi}(m_{\Xi} + m_{\Sigma}) + u - m_{\Xi}^2}{u - m_{\Sigma}^2} \right]. \quad (3.194)$$

Assim separando em função de x

$$f_1^1 = \frac{g^2(E + m_{\Xi})}{32\pi m_{\Xi}^2 W} \left\{ \frac{a_1 + b_1 x}{\gamma_{\Sigma} + 2\vec{k}^2 x} \right\} \quad (3.195)$$

$$a_1 = -2m_{\Xi}(W - m_{\Xi})(m_{\Xi} + m_{\Sigma}) - (m_{\Sigma} + W)(m_K^2 - 2Ek_0);$$

$$b_1 = 2\vec{k}^2(W + m_{\Sigma});$$

$$\gamma_{\Sigma} = m_{\Sigma}^2 - m_{\Xi}^2 - m_K^2 + 2Ek_0.$$

e

$$f_2^1 = \frac{g^2(E - m_{\Xi})}{32\pi m_{\Xi}^2 W} \left\{ \frac{a_2 + b_2 x}{\gamma_{\Sigma} + 2\vec{k}^2 x} \right\} \quad (3.196)$$

$$a_2 = -2m_{\Xi}(m_{\Xi} + W)(m_{\Xi} + m_{\Sigma}) - (W - m_{\Sigma})(m_K^2 - 2Ek_0);$$

$$b_2 = 2\vec{k}^2(W - m_{\Sigma}).$$

Portanto as amplitudes parciais S e P , são

$$f_S^{1(\Sigma)} = \frac{g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ (E + m_\Xi) a_1 I_0 + \left[(E + m_\Xi) b_1 + (E - m_\Xi) a_2 \right] I_1 + (E - m_\Xi) b_2 I_2 \right\}, \quad (3.197)$$

$$f_{P_1}^{1(\Sigma)} = \frac{g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ (E - m_\Xi) a_2 I_0 + \left[(E + m_\Xi) a_1 + (E - m_\Xi) b_2 \right] I_1 + (E + m_\Xi) b_1 I_2 \right\}, \quad (3.198)$$

$$f_{P_3}^{1(\Sigma)} = \frac{g^2}{64\pi m_\Xi^2 W} \left\{ \left(\frac{m_\Xi - E}{2} \right) a_2 I_0 + \left[(E + m_\Xi) a_1 + \left(\frac{m_\Xi - E}{2} \right) b_2 \right] I_1 + \left[\frac{3}{2} (E - m_\Xi) a_2 + (E + m_\Xi) b_1 \right] I_2 + \frac{3}{2} (E - m_\Xi) b_2 I_3 \right\}. \quad (3.199)$$

No diagramas cruzados o bárion intermediário Σ não tem canal de isospin-0, dada a regra dos projetores de isospin para $K\Xi$.

3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo estudamos então todos os processos a ser considerados nas interações entre káons e híperons, bem como suas amplitudes em ondas parciais.

Tantos cálculos podem parecer um trabalho sem sentido, uma vez que as expressões de ondas parciais são aproximadamente muito parecidas. Porém, devido a extensão e quantidade de elementos, tais cálculos diferem consideravelmente e são passíveis facilmente de erros, sendo assim, decidimos por mostrar cada amplitude de ondas parciais caso-a-caso, por mais trabalhoso que tenha sido.

No próximo capítulo iremos mostrar os resultados dos cálculos numéricos dos observáveis de interesse obtidos a partir do modelo proposto.

4 INTERAÇÃO KÁON-HYPERON RESULTADOS FINAIS

Tendo desenvolvido o modelo e efetuado os cálculos analíticos nos capítulos anteriores, passamos para os cálculos numéricos e então determinando os observáveis de interesse, nos diversos casos, seção de choque, defasagem e polarização.

Para finalizar os cálculos, além das massas que podem ser examinados em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016), necessitamos determinar as constantes de acoplamento. Para isso, vamos utilizar o procedimento realizado em Barros e Hama (2001). A partir das constantes de acoplamentos da interação πN (bem estabelecidas e baseadas em dados experimentais) podemos determinar essas constantes a partir das simetrias do modelo de quarks $SU(3)$ mostrado no Apêndice E. No caso de partículas de massa maior, ou seja, ressonâncias de núcleon e assim por diante, deve-se observar os dados para a largura de decaimento no canal de interesse e então comparar a amplitude teórica resultante com a expressão de Breit-Wigner. Desse modo obtemos todos os parâmetros necessários.

A seguir vamos descrever brevemente como utilizar a expressão de Breit-Wigner e então mostraremos os resultados para as interações de K (\bar{K}) com Λ , Σ e Ξ .

4.1 DEFASAGEM DE BREIT-WIGNER E AS CONSTANTES DE ACOPLAMENTO

Nesta seção iremos brevemente desenvolver como obter as constantes de acoplamentos a partir da expressão de Breit-Wigner. Nos espalhamentos πN , frequentemente as seções de choque são dominadas por ressonâncias para diversos valores de energia, podemos utilizar esses picos para determinar as constantes de acoplamento, ajustando até reproduzir os resultados experimentais.

A partir da amplitude espalhamento (2.113), podemos calcular a seção de choque total elástica (SAKURAI, 1993; CHUNG, 2001; ZETILI, 2009; BASSALO, 2010)

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i|\vec{k}|} P_l(x), \quad (4.1)$$

logo temos

$$\sigma_{el} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i|\vec{k}|} \right|^2 = \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (4.2)$$

Notamos que a seção de choque total é máxima quando $\delta_l = (n + \frac{1}{2})\pi$, com n inteiro.

Experimentalmente as seções de choque total tem forma de pico no valor da energia equivalente à massa de uma ressonância. Assim, a defasagem neste pico deve ter algum valor correspondente a $\delta_l = (n + \frac{1}{2})\pi$. A fim de estudar o comportamento da defasagem próxima do valor máximo, podemos deduzir uma expressão que seja somente função da energia E do centro de massa e leve em conta o ponto de máximo. Notamos que a função $\cot \delta_l$ é nula para $\delta_l = (n + \frac{1}{2})\pi$, então, expandindo em torno de zero, temos para os termos lineares não nulos (RATCLIFF, 2016)

$$\cot \delta_l(E) \approx -(\delta_l(E) - \delta_l(E_0)) \quad (4.3)$$

onde E_0 é a energia no referencial do centro de massa no ponto de máximo. Temos agora de escrever δ_l em função da energia, assim, sabendo que a defasagem é adimensional podemos escrever

$$\delta_l(E) = \frac{2Et}{\hbar} = 2E\tau = \frac{2E}{\Gamma}, \quad (4.4)$$

onde 2 é por convenção, τ é o tempo de vida média, $\Gamma = \tau^{-1}$ é a taxa de decaimento ou largura da ressonância e $\hbar = 1$. Consideramos $t = \tau$ justamente porque estamos analisando o deslocamento de fase em um tempo associado à existência da ressonância, ou seja, o tempo de vida média.

Substituindo (4.4) em (4.3), temos

$$\cot \delta_l(E) = -\frac{2}{\Gamma}(E - E_0) = \frac{2}{\Gamma}(m_r - W) \quad (4.5)$$

sendo m_r a massa da ressonância e W a energia no cm (2.9). Como queremos comparar a defasagem calculada através das amplitudes de ondas parciais (3.141), vamos inverter a função

$$\tan \delta_l(E) = \frac{\Gamma}{2(m_r - W)}. \quad (4.6)$$

Antes de usarmos a relação (4.6) temos de fazermos uma correção na taxa de decaimento, levando em conta o momento do méson e o múltiplo de spin associado à ressonância

$$\Gamma = \left| \frac{\vec{k}}{\vec{k}_0} \right|^{2J+1} \Gamma_0, \quad (4.7)$$

onde Γ_0 é a largura da ressonância na camada de massa no canal da reação desejada, J é o spin da ressonância, \vec{k} o momento do méson e \vec{k}_0 o momento do méson, cuja energia correspondente é igual à massa da ressonância. Substituindo (4.6) em (4.7) encontramos

$$\tan \delta_l(E) = \frac{\left| \frac{\vec{k}}{\vec{k}_0} \right|^{2J+1} \Gamma_0}{2(m_r - W)}, \quad (4.8)$$

assim finalmente temos a expressão da defasagem de Breit-Wigner relativística

$$\delta_l(E) = \tan^{-1} \left[\frac{\left| \frac{\vec{k}}{\vec{k}_0} \right|^{2J+1} \Gamma_0}{2(m_r - W)} \right], \quad (4.9)$$

a qual, será comparada as defasagens calculadas através de (3.141) para ajustar as constantes de acoplamento das ressonâncias.

4.2 INTERAÇÃO DE Σ

4.2.1 Multipletto de partículas

As amplitudes de ondas parciais calculadas no capítulo 4 para o caso $K\Sigma$ podem ser também estendidas para o caso $\bar{K}\Sigma$. Os multipletto de bárions de isospin 1/2, 1 e 3/2 os que serão estudados neste trabalho, são respectivamente (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016)

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N^+ \\ N^0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

A notação N^+ e N^0 , representam não só prótons e nêutrons, mas também ressonâncias destes com massas mais altas.

Separamos as reações possíveis entre as partículas para cada reação de acordo com o isospin, e assim encontramos

para $K\Sigma$:

$$I = \frac{3}{2}^1$$

$$K^+\Sigma^+ \rightarrow \Delta^{++};$$

$$K^0\Sigma^- \rightarrow \Delta^-,$$

$$I = \frac{1}{2}^2$$

$$K^0\Sigma^+ \rightarrow N^+, \Delta^+;$$

$$K^+\Sigma^0 \rightarrow N^+, \Delta^+;$$

$$K^0\Sigma^0 \rightarrow N^0, \Delta^0;$$

$$K^+\Sigma^- \rightarrow N^0, \Delta^0,$$

para $\bar{K}\Sigma$:

$$I = \frac{3}{2}$$

$$\bar{K}^0\Sigma^+ \rightarrow \bar{K}^0 + \Sigma^+, \pi^+ + \Xi^0;$$

$$K^-\Sigma^- \rightarrow K^- + \Sigma^-, \pi^- + \Xi^-$$

$$I = \frac{1}{2}^3$$

$$K^-\bar{\Sigma}^+ \rightarrow \Xi^0;$$

$$\Sigma^0 K^- \rightarrow \Xi^-;$$

$$\bar{K}^0\Sigma^0 \rightarrow \Xi^0;$$

$$\bar{K}^0\Sigma^- \rightarrow \Xi^-,$$

onde se trata do multipletto de isospin, os spin a princípio são arbitrários

¹Não existe diagramas cruzados nesse canal.

²Para os diagramas cruzados temos $K\Xi \rightarrow \Sigma$ mostrados na seção 4.4.1.

³Para os diagramas cruzados temos $\bar{K}N \rightarrow \Sigma$ não estudados nesse trabalho. As constantes de acoplamento podem ser as mesma usadas nos caso diretos.

podendo ser $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ por exemplo. As reações $\Sigma^+ \bar{K}^0$ e $\Sigma^- K^-$ não conseguem produzir um único bárion ressonante, pois a composição de quarks não permite, portanto, neste caso deve ser formado por pelo menos um par méson-bárion.

Os estados das partículas antes e após o espalhamento são determinados pelas regras de Clebsch-Gordon. Desse modo podemos relacionar os diversos processos com as amplitudes de isospin totais de espalhamento $T_{\frac{3}{2}}$ e $T_{\frac{1}{2}}$.

Os estados de Clebsch-Gordon (GRIFFITHS, 2004; PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016) para isospin- $\frac{3}{2}$ são

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |K^+ \Sigma^+ \rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |K^0 \Sigma^+ \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |K^+ \Sigma^0 \rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |K^0 \Sigma^0 \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |K^+ \Sigma^- \rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |K^0 \Sigma^- \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Já os estados para isospin- $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |K^0 \Sigma^+ \rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |K^+ \Sigma^0 \rangle, \\
 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |K^0 \Sigma^0 \rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |K^+ \Sigma^- \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Desse modo podemos escrever as amplitudes totais como

$$T_{\frac{3}{2}} = \left\langle \frac{3}{2}, z \left| T \right| \frac{3}{2}, z \right\rangle, \tag{4.13}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{1}{2}, z \left| T \right| \frac{1}{2}, z \right\rangle, \tag{4.14}$$

onde T é a amplitude de espalhamento definida em (2.35) e independe dos estados individuais de isospin (z).

Combinando (4.23) e (4.12) encontramos os seguintes reações entre K e Σ , que devem respeitar a conservação de carga e de isospin.

Para $K\Sigma$:

$$C_1 \equiv \langle K^+ \Sigma^+ | T | K^+ \Sigma^+ \rangle = \langle K^0 \Sigma^- | T | K^0 \Sigma^- \rangle = T_{\frac{3}{2}}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &\equiv \langle K^0 \Sigma^+ | T | K^0 \Sigma^+ \rangle = \langle K^+ \Sigma^- | T | K^+ \Sigma^- \rangle \\
&= \frac{1}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T_{\frac{1}{2}}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &\equiv \langle K^0 \Sigma^0 | T | K^0 \Sigma^0 \rangle = \langle K^+ \Sigma^0 | T | K^+ \Sigma^0 \rangle \\
&= \frac{2}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} T_{\frac{1}{2}}, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &\equiv \langle K^0 \Sigma^0 | T | K^+ \Sigma^- \rangle = \langle K^0 \Sigma^+ | T | K^+ \Sigma^0 \rangle \\
&= \langle K^+ \Sigma^- | T | K^0 \Sigma^0 \rangle = \langle K^+ \Sigma^0 | T | K^0 \Sigma^+ \rangle \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}} \right). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

E de forma análoga para $\bar{K}\Sigma$:

$$D_1 \equiv \langle \bar{K}^0 \Sigma^+ | T | \bar{K}^0 \Sigma^+ \rangle = \langle \bar{K}^- \Sigma^- | T | \bar{K}^- \Sigma^- \rangle = T_{\frac{3}{2}}, \tag{4.19}$$

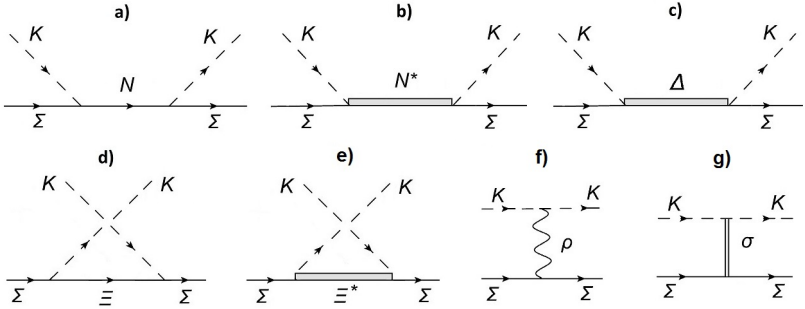
$$\begin{aligned}
D_2 &\equiv \langle K^- \Sigma^+ | T | K^- \Sigma^+ \rangle = \langle \bar{K}^0 \Sigma^- | T | \bar{K}^0 \Sigma^- \rangle \\
&= \frac{1}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T_{\frac{1}{2}}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &\equiv \langle K^- \Sigma^0 | T | K^- \Sigma^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 \Sigma^0 | T | \bar{K}^0 \Sigma^0 \rangle \\
&= \frac{2}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} T_{\frac{1}{2}}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 &\equiv \langle K^- \Sigma^0 | T | \bar{K}^0 \Sigma^- \rangle = \langle K^- \Sigma^+ | T | \bar{K}^0 \Sigma^0 \rangle \\
&= \langle \bar{K}^0 \Sigma^- | T | K^- \Sigma^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 \Sigma^0 | T | K^- \Sigma^+ \rangle \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(T_{\frac{3}{2}} - T_{\frac{1}{2}} \right). \tag{4.22}
\end{aligned}$$

4.2.2 Resultados finais para $K\Sigma$

Finalmente, estamos aptos realizar os cálculos numéricos dos observáveis mostrados na seção (2.2). A Figura 14 mostra os diagramas e as partículas intermediárias consideradas na interação $K\Sigma$. **a)** representa a interação através de partículas intermediárias de spin-1/2 (N), **b)** a interação através de partículas intermediárias de spin-3/2 e de isospin-1/2 (N^*), **c)** a interação de o Δ como spin e isospin-3/2, **d)** e **e)** mostram os diagramas cruzados de spin-1/2 e spin-3/2, respectivamente ambos de isospin-1/2, por fim **f)** e **g)** representam a troca de

Figura 14 – Diagramas $K\Sigma$ 

um ρ e a parametrização do σ .

Nos cálculos dos diagramas diretos consideramos todas as partículas mostradas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades das ressonâncias de $K\Sigma$

Intermediárias	J^π	I	Massa*	Γ^*	%	k_0^*	g
N	$1/2^+$	$1/2$	938	-	-	-	6,9
$N(1710)$	$1/2^+$	$1/2$	1710	100	10	125	8,4†
$N^*(1875)$	$3/2^-$	$1/2$	1875	285	0,9	451	0,70†
$N^*(1900)$	$3/2^+$	$1/2$	1900	225	5	475	1,3†
Δ	$3/2^+$	$3/2$	1920	260	4	495	1,7†

*MeV †GeV⁻¹

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

Tabela 3 – Troca de um ρ em $K\Sigma$

	J^π	I	Massa (MeV)	$g_{K\rho K}$	$g_{\Sigma\rho\Sigma}$	$g_{\bar{K}\rho\bar{K}}$	μ_{Σ^0}	μ_{Σ^-}
ρ	1^-	1	769	6,05	5,04	6,05	1,6	-1,16

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

A Tabela 2 mostra os parâmetros que precisamos das partículas, onde J^π é o spin e a paridade; I é o isospin; Γ_0 é a largura da ressonância; % é a porcentagem de decaimento da partícula no canal $K\Sigma$,

k_0 é o momento do káon no pico da ressonância (4.7) e g é a constante de acoplamento calculada via (4.9) ou pela simetria $SU(3)$ (PILKUHN et al., 1973; STOKS; RIJKEN, 1997).

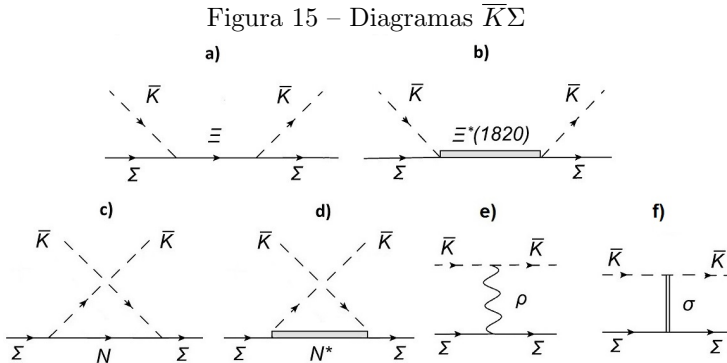
A Tabela 3 mostra as características do méson ρ e as constantes de acoplamento, onde μ_{Σ^+} e μ_{Σ^0} são os momentos magnéticos do Σ^+ e Σ^0 , usados nos cálculos, respectivamente.

Os valores para os diagramas cruzados **d)** e **e)**, são os mesmo usados no caso $\overline{K}\Xi$ mostrando na Tabela 4

Os resultados dos cálculos de $K\Sigma$ são mostrados nos gráficos da figura são mostradas nas Figuras 20-21.

4.2.3 Resultados finais para $\overline{K}\Sigma$

Para a interação $\overline{K}\Sigma$, temos os diagramas mostrados na Figura 15 onde **a)** representa as trocas de partículas com spin-1/2 (Ξ), **b)**



partículas com spin-3/2 (Ξ^*), **c)** e **d)** são os diagramas cruzados com a troca de núcleons de spin 1/2 e 3/2 respectivamente, os diagramas **e)** e **f)** representam as trocas do ρ e o parametrização σ , respectivamente.

A Tabela 4 mostra as características das partículas necessários para o cálculo dos diagramas da Figura 15. Devemos observar que a Tabela 2 mostra os núcleons trocados nos diagramas cruzados **c)** e **d)**, já a Tabela 3 mostra a constante de acoplamento $g_{\overline{k}\rho\bar{k}}$ usada no diagrama **e)** da Figura 15.

Os resultados finais para a interação $\overline{K}\Sigma$ são apresentadas nos gráficos das Figuras 22-23.

Tabela 4 – Propriedades das ressonâncias de $\bar{K}\Sigma$

Intermediárias	J^π	I	$Massa^*$	Γ^*	%	k_0^*	g
Ξ	$1/2^+$	$1/2$	1320	-	-	-	13,4
$\Xi^*(1820)$	$3/2^-$	$1/2$	1820	27	30	315	1,8†

*MeV $^\dagger GeV^{-1}$

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

4.3 INTERAÇÃO DE Λ

No estudo das interações de Λ os seguintes processos são possíveis:

$K\Lambda$: ⁴

$$\Lambda^0 K^+ \rightarrow N^+,$$

$$\Lambda^0 K^- \rightarrow \Xi^-.$$

$\bar{K}\Lambda$: ⁵

$$\Lambda^0 K^0 \rightarrow N^0,$$

$$\Lambda^0 \bar{K}^0 \rightarrow \Xi^0,$$

onde esta incluso spins $1/2$ e $3/2$.

Neste caso só há uma amplitude de isospin possível ($I = \frac{1}{2}$), logo

$K\Lambda$:

$$\langle K^+ \Lambda^0 | T | K^+ \Lambda^0 \rangle = \langle K^0 \Lambda^0 | T | K^0 \Lambda^0 \rangle = T_N,$$

$\bar{K}\Lambda$:

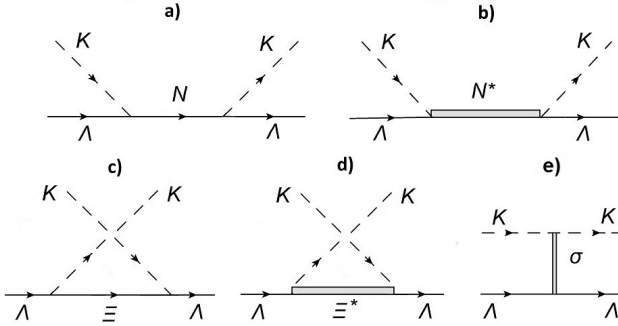
$$\langle \bar{K}^0 \Lambda^0 | T | \bar{K}^0 \Lambda^0 \rangle = \langle K^- \Lambda^0 | T | K^- \Lambda^0 \rangle = T_\Xi.$$

4.3.1 Resultados finais para $K\Lambda$

Na Figura 16, vemos os diagramas considerados para o espalhamento $K\Lambda$. Para a interação com partículas de spin- $1/2$ no estado intermediário temos o diagrama **a**), as de spin- $3/2$ no diagrama **b**), em

⁴Para os diagramas cruzados usamos os mesmos argumentos do caso $K\Sigma$

⁵Para os diagramas cruzados usamos os mesmos argumentos do caso $\bar{K}\Sigma$

Figura 16 – Diagramas $K\Lambda$ 

ambos os spins temos também os diagramas cruzados **c)** e **d)**. Em **e)** temos a interação através de σ . Para este caso não temos a troca de

Tabela 5 – Propriedades das ressonâncias de $K\Lambda$

Intermediárias	J^π	I	$Massa^*$	Γ^*	%	k_0^*	g
N	$1/2^+$	$1/2$	938	-	-	-	11,5
$N(1650)$	$1/2^-$	$1/2$	1950	140	10	165	$10,7^\dagger$
$N(1710)$	$1/2^+$	$1/2$	1710	100	15	270	$5,2^\dagger$
$N^*(1875)$	$3/2^-$	$1/2$	1875	285	0,3	455	$0,53^\dagger$
$N^*(1900)$	$3/2^+$	$1/2$	1900	225	11	475	$2,6^\dagger$

* MeV $^\dagger GeV^{-1}$

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

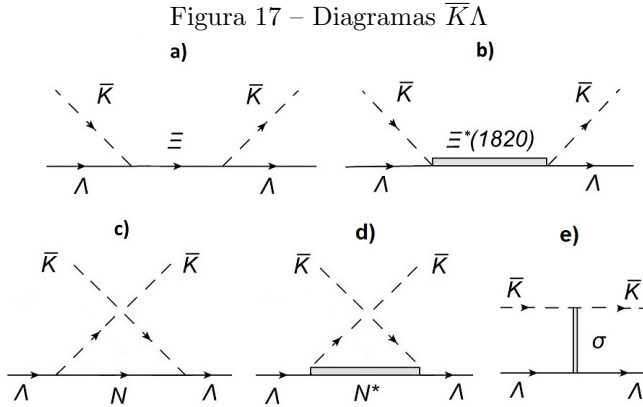
uma méson ρ uma vez que não é permitido o acoplamento com partículas de isospin-1.

Na Tabela 5 encontramos todas as características das partículas participantes dos processos, como feito para o caso $K\Sigma$, onde temos as explicações das variáveis mostradas. Para os diagramas cruzados consideramos a troca do Ξ de massa $1320 MeV$ para **c)** e a ressonância $\Xi^*(1820)$ em **d)**, seus valores são apresentados na Tabela 6.

A Figura 24, mostra os resultados finais para esta interação.

4.3.2 Resultados finais para $\bar{K}\Lambda$

Os diagramas e partículas consideradas para o caso $\bar{K}\Lambda$, são mostrados na Figura 17, onde novamente temos para a), b), c), d) e



e), as interações através das partículas com spin-1/2, spin-3/2 e de σ , respectivamente. Em **c)** é considerado o N de massa 938 MeV e em **d)** a ressonância $N^*(1900)$, cujos detalhes podem ser vistos na Tabela 5.

Tabela 6 – Propriedades das ressonâncias de $\bar{K}\Lambda$

Intermediárias	J^π	I	Massa*	Γ^*	%	k_0^*	g
Ξ	$1/2^+$	$1/2$	1320	-	-	-	0,2
$\Xi^*(1820)$	$3/2^-$	$1/2$	1820	27	25	398	$1,8^\dagger$

* MeV $^\dagger \text{GeV}^{-1}$

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

Por fim, a Tabela 6, mostra os detalhes das partículas intermediárias consideradas neste caso. Os gráficos dos observáveis desta interação são mostrados na Figura 25.

4.4 INTERAÇÃO DE Ξ

4.4.1 Reações de partículas

Devido ao numero de estranheza (numero de quark estranhos) das reações envolvendo o híperon Ξ , encontramos um numero muito restrito e específico de partículas que podem ser formadas nos estados intermediários.

Na interação $K\Xi$, encontramos, de acordo com o isospin, as seguintes reações:⁶

$$I = 0$$

$$\begin{aligned} K^0\Xi^0 &\rightarrow \Lambda^0, \Sigma^0; \\ K^+\Xi^- &\rightarrow \Lambda^0, \Sigma^0, \end{aligned}$$

$$I = 1$$

$$\begin{aligned} K^+\Xi^0 &\rightarrow \Sigma^+; \\ K^0\Xi^- &\rightarrow \Sigma^-. \end{aligned}$$

No caso $\bar{K}\Xi$, temos somente uma possibilidade de partícula intermediária no canal de isospin 0⁷, pois, para isospin 1 não existe uma configuração de quarks que se encaixe em qualquer tipo de partícula conhecida, portanto teremos como produto, um par méson-bárion no mínimo. Assim teremos somente as reações

$$I = 0$$

$$\begin{aligned} K^-\Xi^0 &\rightarrow \Omega^-; \\ \bar{K}^0\Xi^- &\rightarrow \Omega^-, \end{aligned}$$

$$I = 1$$

$$\begin{aligned} \bar{K}^0\Xi^0 &\rightarrow \bar{K}^0 + \Xi^0, \pi^+ + \Omega^-; \\ K^-\Xi^- &\rightarrow K^- + \Xi^-, \pi^- + \Omega^-. \end{aligned}$$

Como temos dois canais de isospin 0 e 1, teremos então, utili-

⁶Para os casos cruzados vale o mesmo raciocínio usado para as interação anteriores, como $K\Sigma$.

⁷Considerando somente o caso direto que é o que mais para a interação. Para o caso cruzado existe o Σ com isospin 1.

zando os coeficientes de Clebsch-Gordon, um estado de tripleto ($I = 1$)

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |K^+\Xi^0\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|K^+\Xi^-\rangle + |K^0\Xi^0\rangle\right), \\ |1, -1\rangle &= |K^0\Xi^-\rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

e um singlete ($I = 0$)

$$|0, 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|K^+\Xi^-\rangle - |K^0\Xi^0\rangle\right). \quad (4.24)$$

Para a interação $K\Xi$ teremos as seguintes reações possíveis

$$R_1 \equiv \langle K^+\Xi^0|T|K^+\Xi^0\rangle = \langle K^0\Xi^-\rangle|T|K^0\Xi^-\rangle = T_1, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} R_2 &\equiv \langle K^+\Xi^-\rangle|T|K^+\Xi^-\rangle = \langle K^0\Xi^0\rangle|T|K^0\Xi^0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(T_1 + T_0\right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} R_3 &\equiv \langle K^0\Xi^0\rangle|T|K^+\Xi^-\rangle = \langle K^+\Xi^-\rangle|T|K^0\Xi^0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(T_1 - T_0\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para $\bar{K}\Xi$ as amplitudes são

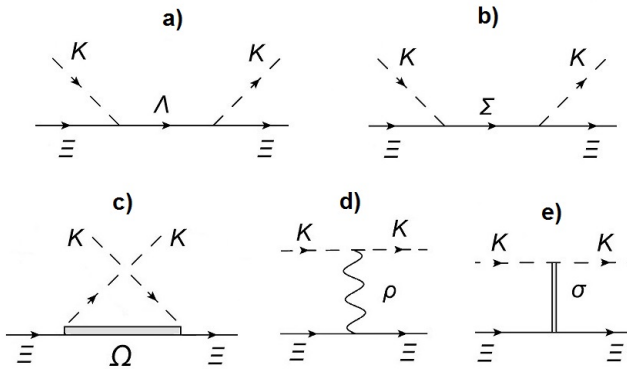
$$U_1 \equiv \langle \bar{K}^0\Xi^0|T|\bar{K}^0\Xi^0\rangle = \langle K^-\Xi^-\rangle|T|K^-\Xi^-\rangle = T_1, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} U_2 &\equiv \langle \bar{K}^0\Xi^-\rangle|T|\bar{K}^0\Xi^-\rangle = \langle K^-\Xi^0\rangle|T|K^-\Xi^0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(T_1 + T_0\right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} U_3 &\equiv \langle K^-\Xi^0\rangle|T|\bar{K}^0\Xi^-\rangle = \langle \bar{K}^0\Xi^-\rangle|T|K^-\Xi^0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(T_1 - T_0\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.4.2 Resultados finais para $K\Xi$

Na interação $K\Xi$, consideramos os diagramas mostrados na Figura 18. Consideramos no estado intermediário somente bárions de spin-1/2, mostrados em **a**) e **b**), uma vez que as ressonâncias de Λ de

Figura 18 – Diagramas $K\Xi$ 

Σ produzidas na interação $K\Xi$ tem spin maiores do que somos capazes de calcular ($>3/2$) (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016).

Tabela 7 – Propriedades das partículas de $K\Xi$

Intermediárias	J^π	I	Massa (MeV)	g
Λ	$1/2^+$	0	1116	0,2
Σ	$1/2^+$	1/2	1190	13,4
Ω	$3/2^+$	0	1672	1,0

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

Tabela 8 – Troca de um ρ em $K\Xi$

	J^π	I	Massa (MeV)	$g_{K\rho K}$	$g_{\Xi\rho\Xi}$	$g_{\bar{K}\rho\bar{K}}$	μ_{Ξ^0}	μ_{Ξ^-}
ρ	1^-	1	770	6,05	5,04	6,05	-1,25	-0,65

Fonte: Baseado em PARTICLE DATA GROUP (PDG), Patrignani et al. (2016).

O diagrama **c)**, mostra a troca de mésons ρ . A interação por σ é representada em **d)**.

As propriedades dos bárions trocados são mostradas na Tabela 7, cujas constantes de acoplamento são calculadas através da simetria

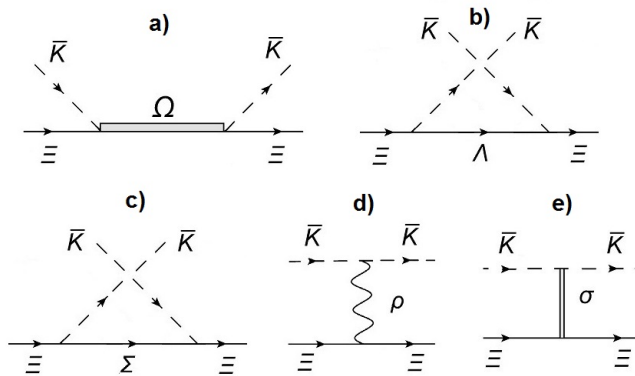
$SU(3)$ (Apêndice E). Por fim na Tabela 8, os valores relacionados ao méson ρ .

Os gráficos dos cálculos da interação $K\Xi$ são mostradas nas Figuras 25 e 26.

4.4.3 Resultados finais para $\bar{K}\Xi$

Esta última interação no estado intermediário, similar ao caso anterior, não apresenta ressonâncias, mas dessa vez, não existe de fato qualquer tipo de ressonância conhecida que decaia em $\bar{K}\Xi$. Portanto,

Figura 19 – Diagramas $\bar{K}\Xi$



consideramos somente o único bárion, o híperon Ω no estado intermediário na Figura 19 a).

Em c) temos a troca do méson vetorial, e em d) a a troca de σ . A tabela 7 apresenta as informações do híperon Ω .

Finalmente os observáveis desta interação estão nas Figuras 28 e 29. Por não ter uma ressonância conhecida, esta interação não apresenta picos expressivos em nenhuma faixa de energia.

Observando os resultados das figuras, vemos que estão de acordo com o esperado para interações em baixas energias. Apresentam picos nas massas das ressonâncias, e fora dessas regiões com crescimento suave. Desse modo conseguimos ter uma ideia geral do comportamento desse sistemas, e baseada no conhecimento experimental que possuímos.

4.5 OUTROS RESULTADOS

4.5.1 Razão entre σ_T para ressonâncias em comum

Uma vez que as interações $K\Sigma$ e $K\Lambda$ têm ressonâncias em comum, assim como também as interações $\bar{K}\Sigma$ e $\bar{K}\Lambda$, podemos comparar as seções de choque totais nos picos relativos às ressonâncias, dessa forma conseguimos determinar quais as interações deverão ser dominantes em reações envolvendo KY .

Tabela 9 – Razão das seções de choque totais KY

Ressonâncias	$\frac{\bar{\sigma}_T(K\Sigma)}{\sigma_T(K\Lambda)}$	%
$N(1710)$	3,33	233
$N^*(1875)$	0,99	1
$N^*(1900)$	0,92	8

A Tabela 9 mostra a razão entre a seção de choque médias dos canais dominantes de $K\Sigma$, $\bar{\sigma}_T(K\Sigma)$ e a seções de choque total de $K\Lambda$, $\sigma_T(K\Lambda)$. Calculamos também na tabela a porcentagem relativa entre as interações, mostrando quantos por cento o valor da maior seção de choque é superior ao de menor seção de choque, é representada por %. Para ressonância $N(1710)$, $K\Sigma$ demonstra um impressionante domínio.

Tabela 10 – Razão das seções de choque totais $\bar{K}Y$

Ressonâncias	$\frac{\bar{\sigma}_T(\bar{K}\Sigma)}{\sigma_T(\bar{K}\Lambda)}$	%
$\Xi^*(1820)$	1,45	45

Na Tabela 10 mostramos a razão entre as seções de choque médias de $\bar{K}\Sigma$ e $\bar{K}\Lambda$ para a única ressonância presente, demonstrando valores razoavelmente próximos.

4.5.2 Variação da constante de acoplamento para a parametrização σ (g_S)

Nos cálculos anteriores nos limitamos a considerar a parametrização da interação através de σ usando os valores de Coelho, Das e Robilotta (1983) para os parâmetros. Nesta seção vamos investigar a sensibilidade dessa parametrização nos resultados.

Para isso vamos supor que, em analogia às outras amplitudes de ondas parciais, a introdução de uma espécie de constante de acoplamento g_S . Este modelo fenomenológico, deixa claro o papel da parametrização σ nas amplitudes finais.

Considerando as amplitudes de ondas parciais (3.138), (3.139) e (3.140), introduzimos a constante de acoplamento g_S da seguinte forma,

$$f_S^{(\sigma)} = \frac{g_S^2}{8\pi W} \left[\alpha(E + m_\Sigma) + \frac{\beta}{3}(m_\Sigma - E) \right], \quad (4.31)$$

$$f_{P_1}^{(\sigma)} = \frac{g_S^2}{8\pi W} \left[\alpha(m_\Sigma - E) + \frac{\beta}{3}(E + m_\Sigma) \right], \quad (4.32)$$

$$f_{P_3}^{(\sigma)} = g_S^2 \frac{E + m_\Sigma}{24\pi W} \beta, \quad (4.33)$$

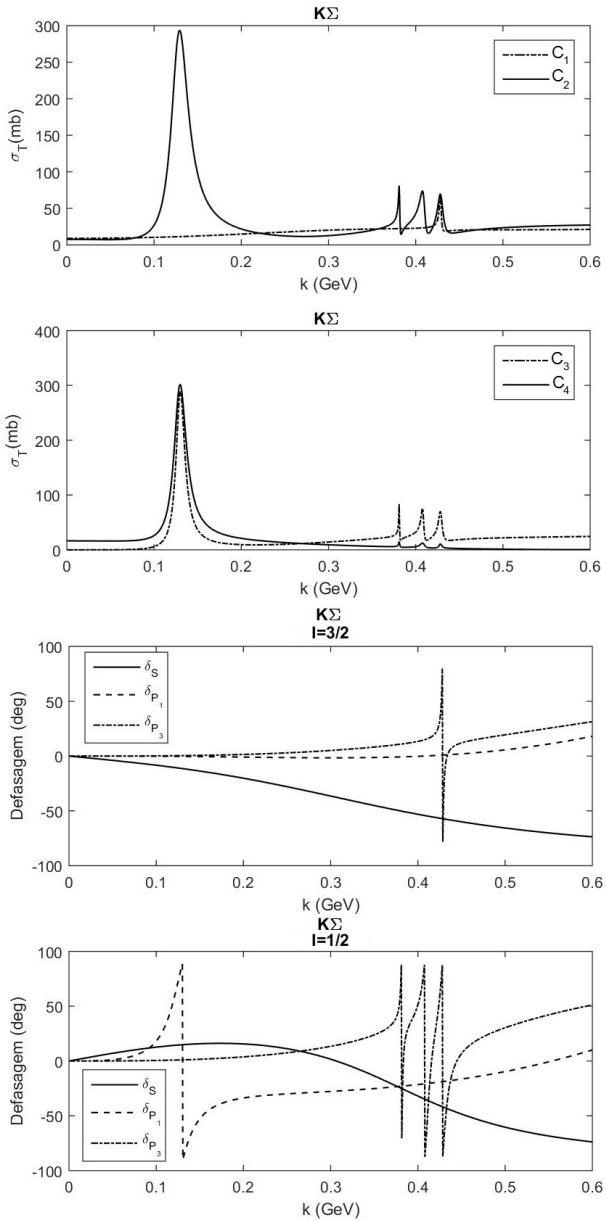
Escolhemos as interações $\bar{K}\Lambda$ para mostrarmos, através de valores arbitrários para g_S a influencia de σ , na seção de choque total e nas defasagens. Arbitramos quatro valores para g_S^2 : 0, 1, 2 e 3. Tais valores parecem muito próximos entre si, mas demonstraram mudanças bastante consideráveis como mostrado na Figura 30. Para os valores 0 e 1 podemos observar o efeito da inclusão da interação através de σ (compare com Figura 25).

Tabela 11 – Porcentagens relativas dos valores dos picos de $\bar{K}\Lambda$

g_S^2	1	2	3
0	28%	54%	69%
1	-	20%	32%
2	-	-	10%

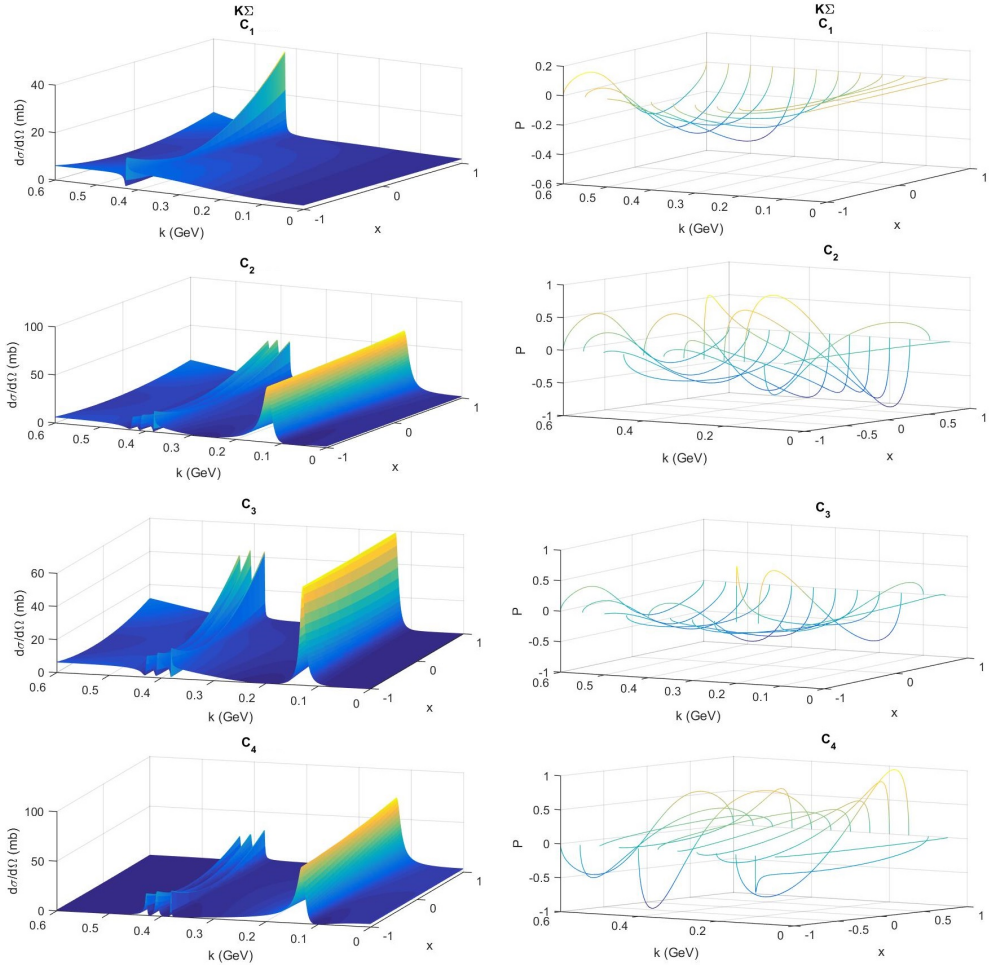
Na Tabela 11 mostramos as porcentagens relativas entre os picos para cada valor da constante g_S , do menor valor para o maior.

Nota-se que a variação da unidade em g_S trás consideráveis diferenças nas amplitudes finais.

Figura 20 – Seção de Choque Total e Defasagens $K\Sigma$ 

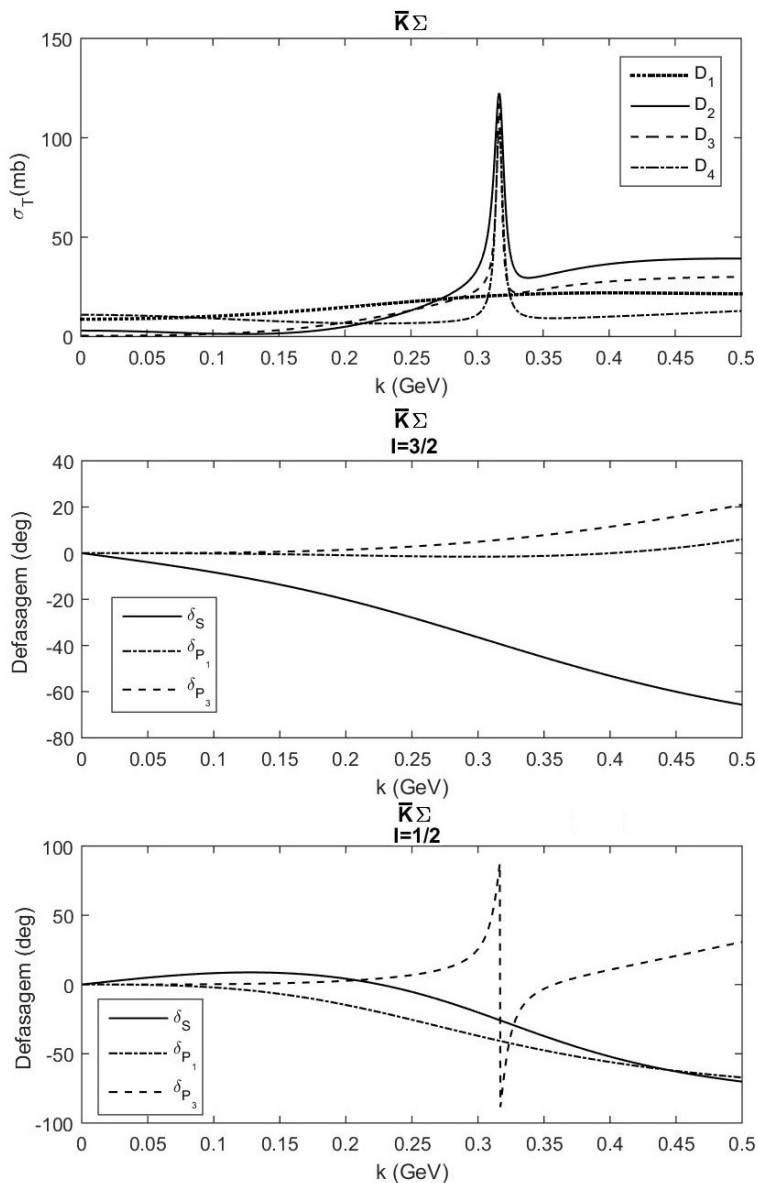
Estão em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV . C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são dados por (4.15-4.18).

Figura 21 – Seção de Choque Diferencial e Polarização $K\Sigma$



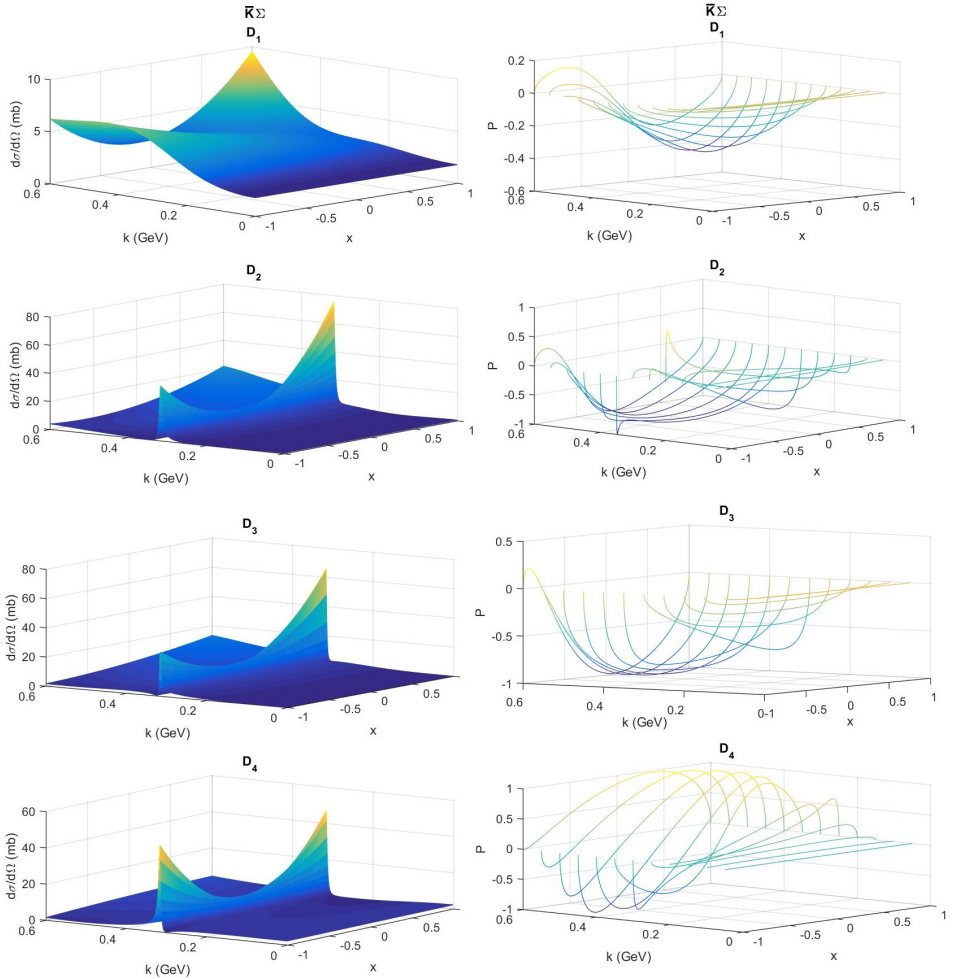
Estão em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV e $x = \cos\theta$. C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são dados por (4.15-4.18). Os valores dos eixo vertical são evidenciados pelas cores, onde os menores valores são as mais escuras e as maiores pelas mais claras. As polarizações foram calculadas com intervalos de $50 MeV$ em k .

Figura 22 – Seção de Choque Total e Defasagens de $\bar{K}\Sigma$



Em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV . D_1 , D_2 , D_3 e D_4 são dados por (4.19-4.22).

Figura 23 – Seção de Choque Diferencial e Polarização de $\overline{K}\Sigma$



Em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV e $x = \cos\theta$.

D_1 , D_2 , D_3 e D_4 são dados por (4.19-4.22) Cores escuras: menores valores, cores claras: maiores. Intervalos das polarizações de $50 MeV$ em k .

Figura 24 – Resultados $K\Lambda$

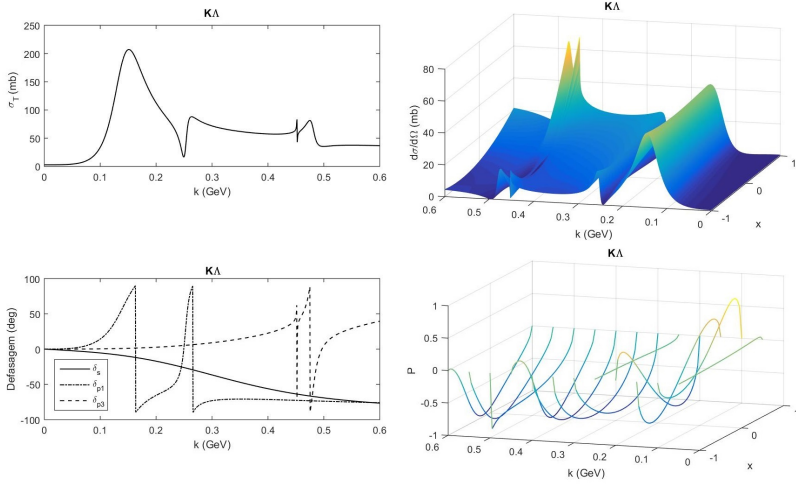
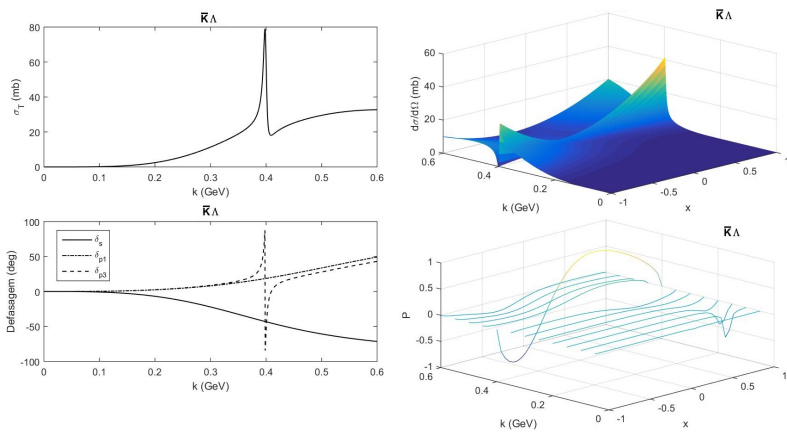
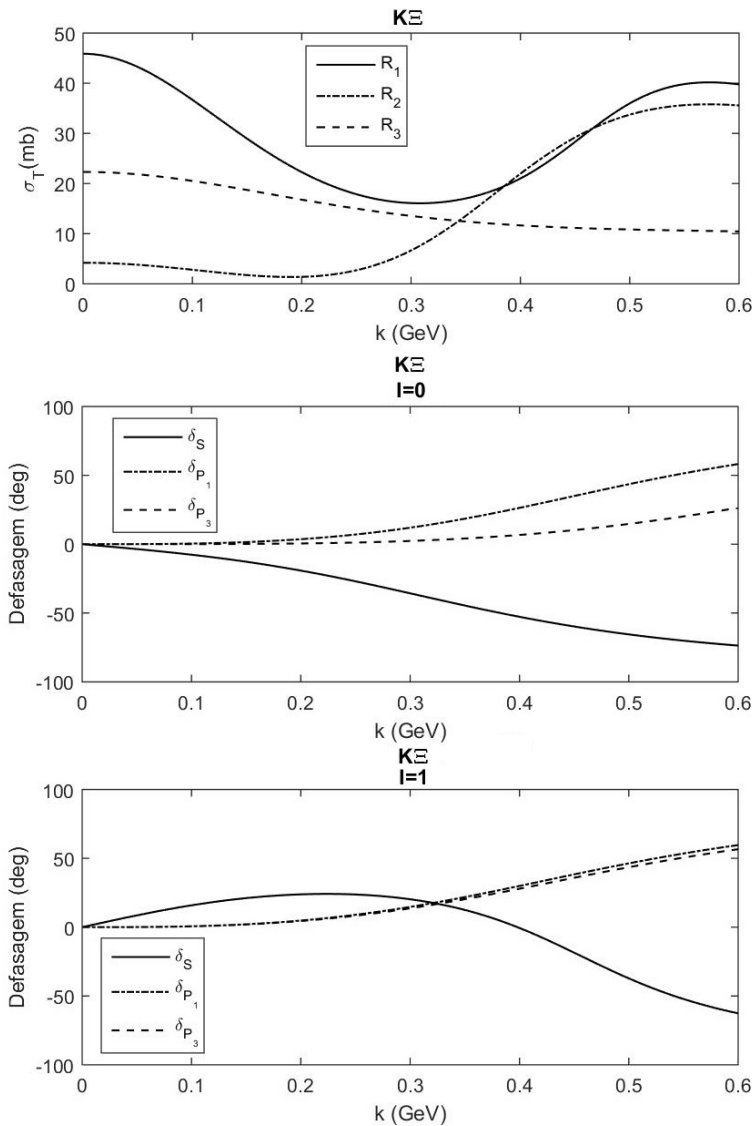


Figura 25 – Resultados $\bar{K}\Lambda$



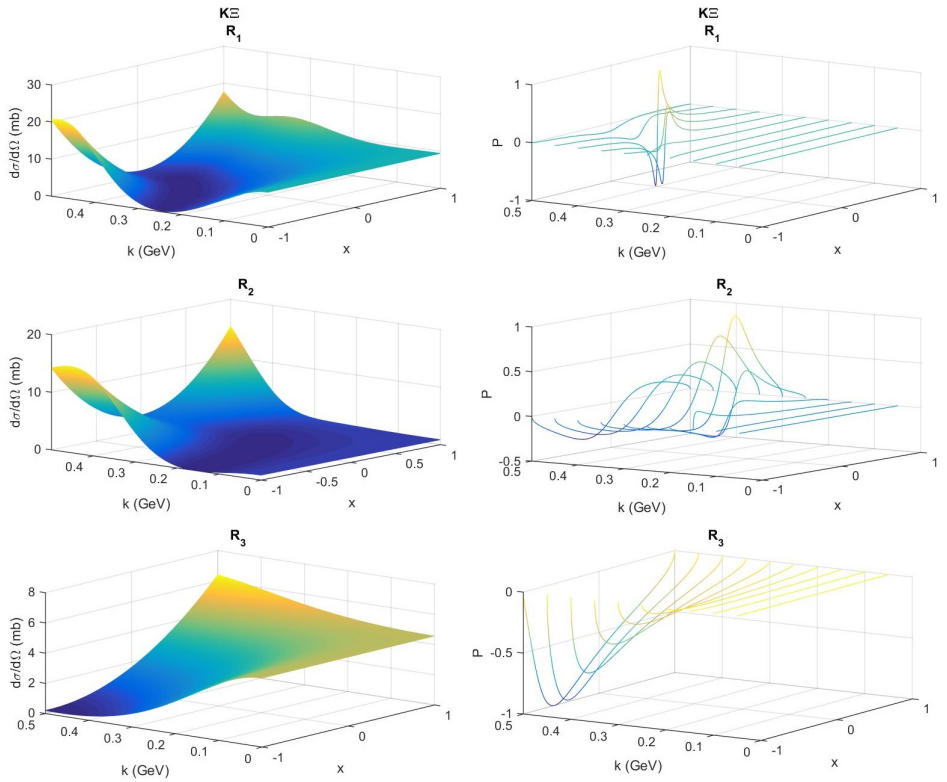
Em função do módulo do 3-momento do cáon k em GeV e $x = \cos \theta$. Cores escuras: menores valores, cores claras: maiores. Intervalos das polarizações de $50 MeV$ em k .

Figura 26 – Secção de Choque Total e Defasagens de $K\Xi$



Função do módulo do 3-momento do káon k em GeV . R_1 , R_2 e R_3 são dados por (4.25-4.27).

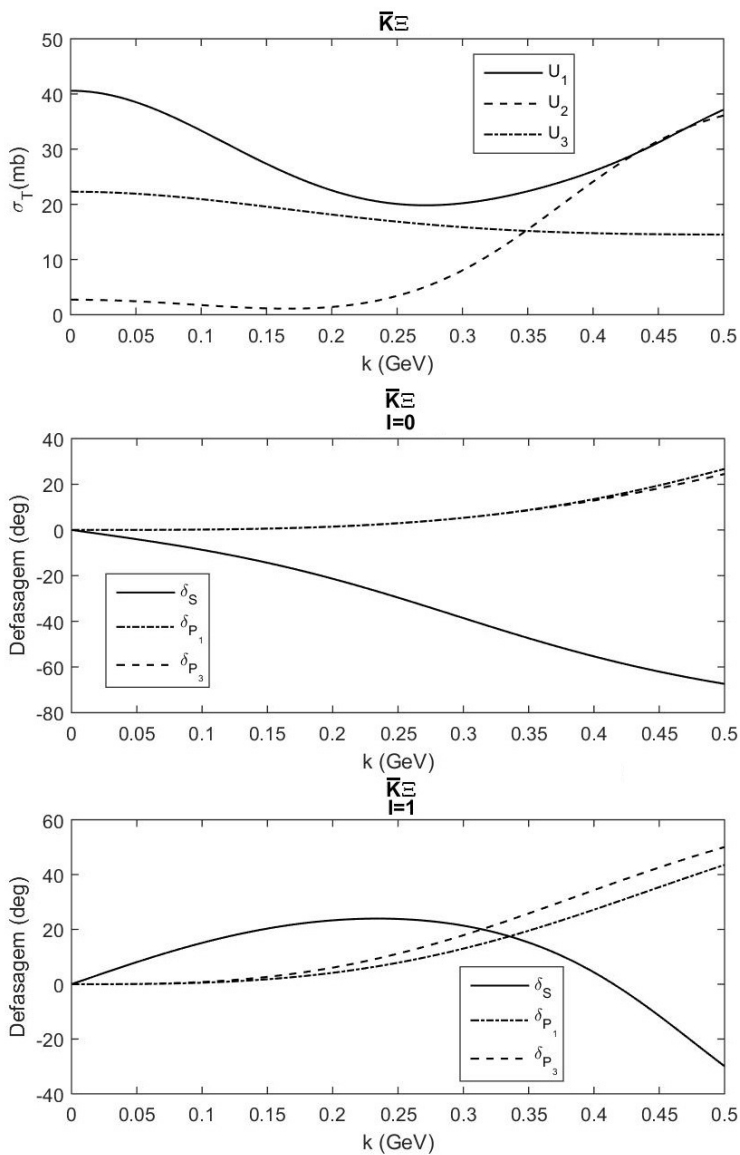
Figura 27 – Seção de Choque Diferencial e Polarização de K^{Ξ}



Em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV e $x = \cos\theta$.

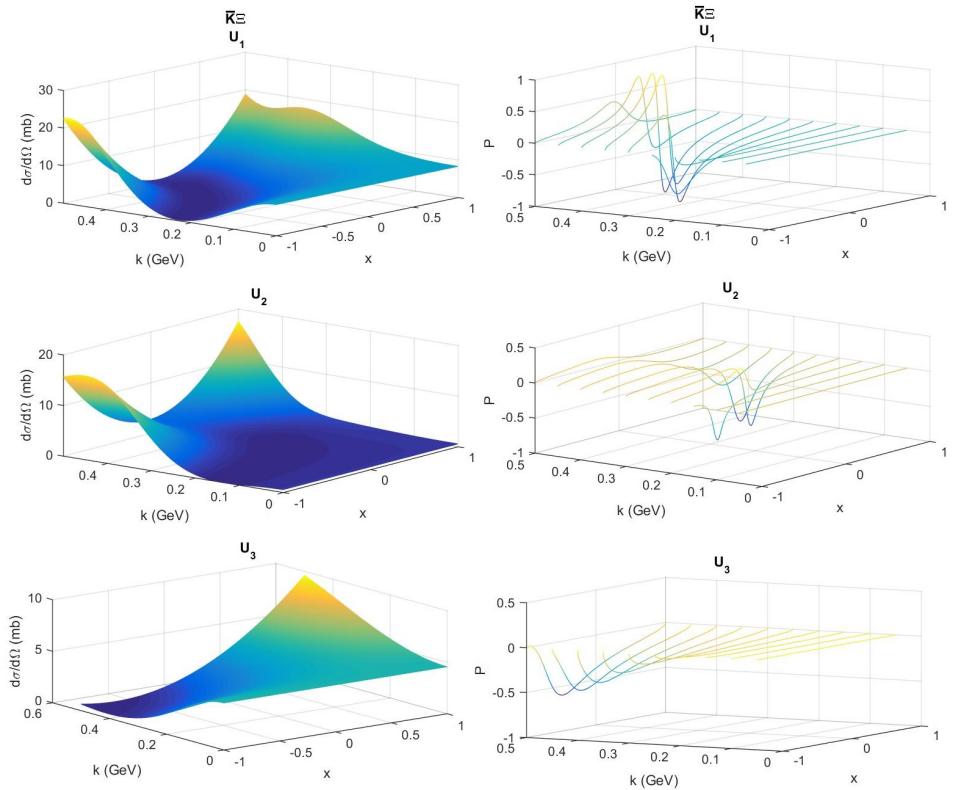
R_1 , R_2 e R_3 são dados por (4.25-4.27). Cores escuras: menores valores, cores claras: maiores. Intervalos das polarizações de $50 MeV$ em k .

Figura 28 – Seção de Choque Total e Defasagens de $\bar{K}\Xi$



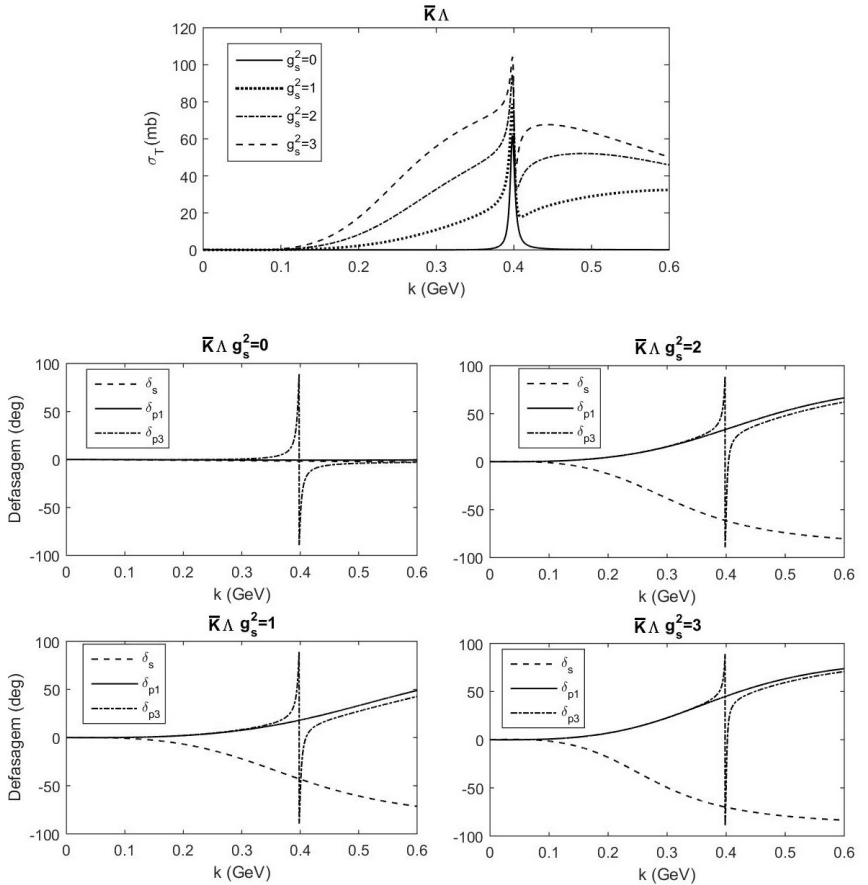
Função do módulo do 3-momento do cáon k em GeV . U_1 , U_2 e U_3 são dados por (4.28-4.30).

Figura 29 – Seção de Choque Diferencial e Polarização de $\overline{K}\Xi$



Em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV e $x = \cos\theta$. U_1 , U_2 e U_3 são dados por (4.28-4.30). Cores escuras: menores valores, cores claras: maiores. Intervalos das polarizações de $50 MeV$ em k .

Figura 30 – Variação de g_s para $\bar{K}\Lambda$



Em função do módulo do 3-momento do káon k em GeV .

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho é feito um estudo da interação káon-híperon a baixas energias. Por meio do ferramental da teoria quântica de campos, consideramos um modelo baseado em lagrangianas quirais efetivas.

O modelo desenvolvido pode ser considerado como uma continuação do estudos proposto em Barros e Hama (2001), onde as interações π -híperons foram estudadas com sucesso. Esse modelo por sua vez é baseado em modelos (OLSSON; TURNER; OSYPOWSKI, 1973; COELHO; DAS; ROBILOTTA, 1983; MENEZES, 1985; GOUDSMIT et al., 1994; ELLIS; TANG, 1997) capazes de explicar os dados experimentais para as interação πN a baixas energias.

Um aspecto fundamental desses modelos, é a utilização das ressonâncias bariônicas intermediárias que, no caso das interações πN a baixas energias dominam as amplitudes de espalhamento. Assim para essas energias diagramas do tipo árvore com ressonâncias (Δ no caso πN) no estado intermediário são os mais importantes e processos mais complexos (com maior número de vértices), só passam a ficar mais importantes com o aumento das energias. Imaginamos então que o mesmo ocorre com as interações de híperons com mésons e o modelo proposto é baseado neste fato.

Também devemos observar, que a baixas energias as amplitudes para as ondas D em diante são muito pequenas, e podem ser consideradas como correções. Em uma primeira aproximação (que é muito boa), decidimos considerar somente as ondas S e P nos cálculos (observamos que nos cálculos das amplitudes, essa aproximação não é feita).

O cálculo das amplitudes dos diagramas de Feynman para processos elásticos $KY \rightarrow KY$, que aplicados às amplitudes T relativas aos estados de isospin, resultaram nas amplitudes de ondas parciais unitarizadas S , P_1 e P_3 , para cada canal de isospin total da interação. Foram calculadas, as amplitudes das colisões elásticas para as interações: $K\Sigma$, $K\Lambda$, $K\Xi$, $\bar{K}\Sigma$, $\bar{K}\Lambda$ e $\bar{K}\Xi$, considerando diagramas envolvendo de acordo com cada caso, bárions, ressonâncias bariônicas de spin-1/2,-3/2 e isospin-1/2,-3/2, também para as interações com mais de um canal de isospin total, consideramos a troca do méson vetorial ρ . A interação através do méson escalar σ , também foi incluída, mas como uma parametrização no canal da variável relativística t até primeira ordem.

Para as ressonâncias, comparamos a defasagem na região da sua massa, à defasagem de Breit-Wigner, utilizando os valores experimentais da taxa de decaimento Γ . Para as demais partículas intermediárias,

usamos os conceito de simetria dos quarks no $SU(3)$. Desse modo empregamos as mesmas constantes de acoplamento da interação já bem conhecida πN e assim, obtivemos todas as constantes de acoplamento necessárias para o desenvolvimento do modelo. Já no caso do Ω consideramos a constante de acoplamento como unitária, uma vez, por ter spin-3/2 faz parte do decuplete dos bárion de spin-3/2.

De posse das amplitudes de ondas parciais unitarizadas para cada uma das ressonâncias, calculamos quatro observáveis para todas as interações, as seções de choque total e diferencial, as defasagens e a polarização para todos os estados de isospin considerados.

A representação gráfica dos observáveis calculados, demonstraram comportamentos similares às reações πN e πY feitas em Olsson e Osypowski (1975), Coelho, Das e Robilotta (1983), Ellis e Tang (1997), Barros e Hama (2001). Apresentamos gráficos tridimensionais de seção de choque diferencial, ficando notória a correspondência com a seção de choque total, assim o predomínio de ângulos de espalhamentos próximos de zero para as ressonância mais pesadas, chegando em alguns casos, à probabilidade quase nula de espalhamentos nos ângulos intermediários. Para polarização também em gráficos nas três dimensões (Figuras 21, 23-25), com intervalos de momento do káon de 50 MeV, fica claro, de modo geral, que para ângulos próximos de zero nas energias das ressonâncias a polarização é negativa e para ângulos próximos de 180° positiva, nos ângulos intermediários existem valores que chegam a polarizarão nula. Percebe-se das interações $K\Xi$ (Figura 27) e $\bar{K}\Xi$ (Figura 29) que existem flutuações em suas polarizações para interações através de Λ , Σ e Ω . Os gráficos da seções de choque total (Figuras 26, 28) e diferencial corroboram com este comportamento.

Quanto aos gráficos das seções de choque totais (Figuras 20, 21, 23-25 e 28), percebemos para $K\Sigma$ e $K\Lambda$ onde foram consideradas múltiplas ressonâncias, o domínio da interação será pelas menores massas, sendo as ressonâncias mais massivas quase de mesma amplitude, porém com larguras de picos diferentes. Também para essas interações, na subseção 4.5.1 fizemos a comparação entre suas ressonâncias em comum mostrando a maior probabilidade de decaimento para o caso $K\Sigma$, notavelmente no caso de $N(1710)$, este resultado, quando comparamos as Tabelas 2 e 5, notamos que a porcentagens de decaimento (%) de $N(1710)$ e $N^*(1900)$ são maiores que $K\Lambda$, sendo portanto aproximadamente proporcionais às constantes de acoplamentos.

Ainda quando comparamos com a interação πY publicada em Barros e Hama (2001), percebe-se que as interações $\pi\Sigma$ possuem seção de choque com picos máximos menores que 30 mb enquanto $\pi\Lambda$ tem

picos máximos em torno de 250 mb , evidenciando que ao contrário dos píons, os káons tem maior interatividade com o bárion Σ , já que nas figuras observa-se que os picos da seção de choque total chegam ao valor próximo de 300 mb e para Λ próximos de 200 mb . Quando consideramos a interação de Σ e Λ com o \bar{K} , novamente Σ tem maior predomínio para a ressonância $\Xi^*(1820)$. Nota-se também a pouca interação de $K\Sigma$ com o $\Delta(C_1)$ (4.15), sendo tais partículas as dominantes nas interações πN .

Algumas outras análises quanto a seção de choque total podem ser feitas. Na Figura 22, percebe-se que as reações associadas à D_1 (4.19) são na prática desprezíveis para colisões elásticas por não formarem ressonâncias, sendo possivelmente importantes em colisões inelásticas, onde podem aparecer picos de mésons e bárions separadamente. O mesmo raciocínio pode ser aplicado à seção de choque total da colisão $\bar{K}\Xi$ (Figura 28) para a amplitude U_1 (4.28), onde o regime elástico apresenta valores consideráveis.

Identificamos que para a interação $K\Sigma$ as defasagens para momento angular orbital nulo (S), são positivas a baixas energias e estados de isospins menores, ou seja, são atrativas. Com o aumento da energia passam a ser repulsivas (negativas) (MACHLEIDT, 1989). $K\Xi$ segue o mesmo comportamento, mas para isospin maiores. A exceção deste comportamento se manifesta nos espalhamentos envolvendo o Λ , em que predomina a repulsão em S . Para momentos angulares P , a maioria dos casos tem defasagens positivas, com exceção ao caso do $K\Lambda$ e isospin menores de $K\Sigma$.

Calculamos as defasagens forte para $\bar{K}\Lambda \rightarrow \Omega$ com valores para energia do centro de massa da ordem da massa do Ω ($m_\Omega = 1672\text{ MeV}$): $\delta_{P_1} = 2,71^\circ$; $\delta_{P_3} = 2,90^\circ$; $\delta_{D_3} = -0,0008^\circ$; $\delta_{D_5} = -0,0001^\circ$. Esses resultados podem ser utilizados em estudos que possuam violação de CP em decaimentos de híperons, de forma análoga ao que foi feito em trabalhos como He e Velencia (1995), Barros (2003). As defasagens das ondas D são altamente dependentes dos diagramas cruzados da interação, sendo assim, pode haver mudanças nesses valores quando considerar mais ressonâncias cruzadas. No nosso cálculos utilizamos somente N e $N(1900)$ nos diagramas cruzados.

Até o momento e de acordo com nosso conhecimento, não existem resultados experimentais para os espalhamentos do tipo $KY \rightarrow KY$ calculados neste trabalho, tornando modelo aqui empregado, o qual, tem um grande peso fenomenológico, passível de consideráveis alterações em seus observáveis. Na Figura 30, visualiza-se através da variação de uma espécie de constante de acoplamento, o quão sensível à parametrização para σ é o modelo, levando a mudanças visíveis na seção de choque

total como demonstrado na subseção 4.5.2. Desta forma, torna-se relevante em perspectivas futuras o ajuste junto à dados experimentais dos parâmetros livres como g_s ou a e b , das constantes de acoplamento para o ρ , até mesmo do parâmetro das partículas de spin-3/2, Z .

Em trabalhos futuros, pretendemos calcular com este modelo as interações do tipo $\pi N \rightarrow KY$ (JULIA-DIAZ et al., 2006), uma vez que existem dados experimentais de seção de choque diferencial (BAKER et al., 1978) e polarização (HART et al., 1980), servindo assim, após ajustar os parâmetros livres, como um teste ao modelo.

Outro problema fundamental, é o da interação NY (núcleon-híperon), que com os resultados desta dissertação, juntamente com os de Barros e Hama (2001) pode agora começar a ser formulado.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. B. **Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física**. [S.l.]: Elsevier, 2007. ISBN 85-352-2050-X.

BAKER, R. et al. The reaction $\pi-p \rightarrow K^0 \Lambda^0$ up to 1334 MeV/c. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 141, n. 1-2, p. 29–47, 1978.

BANDO, M.; KUGO, T.; YAMAWAKI, K. Nonlinear realization and hidden local symmetries. **Physics Reports**, Elsevier, v. 164, n. 4-5, p. 217–314, 1988.

BARROS, C. $\pi\Xi$ phase shifts and CP violation in $\Omega \rightarrow \pi\Xi$ decay. **Physical Review D**, APS, v. 68, n. 3, p. 034006, 2003.

BARROS, C.; ROBILOTTA, M. Hyperon scalar form factors. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 45, n. 2, p. 445–450, 2006.

BARROS, C. C.; HAMA, Y. Low energy pion-hyperon interaction. **Physical Review C**, APS, v. 63, n. 6, p. 065203, 2001.

BARROS, C. de C. **Polarização de híperons e de anti-híperons em processos inclusivos a altas energias**. Tese (Doutorado), 2001.

BASSALO, J. M. F. **Teoria de Grupos**. [S.l.]: Livraria da Física, 2008. ISBN 9788578610005.

BASSALO, J. M. F. **Eletrodinâmica Quântica**. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. ISBN 85-88325-52-7.

BERNARD, V.; KAISER, N.; MEISSNER, U.-G. Chiral dynamics in nucleons and nuclei. **International Journal of Modern Physics E**, World Scientific, v. 4, n. 02, p. 193–344, 1995.

BIRSE, M. C. Effective chiral lagrangians for spin-1 mesons. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei**, Springer, v. 355, n. 3, p. 231–246, 1996.

BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Fields**. [S.l.]: McGraw-Hill College, 1965. ISBN 0070054940.

BURNSTEIN, R. et al. HyperCP: A high-rate spectrometer for the study of charged hyperon and kaon decays. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment**, Elsevier, v. 541, n. 3, p. 516–565, 2005.

CHENG, T.-P.; LI, L.-F. **Gauge Theory of elementary particle physics**. [S.l.]: Oxford University Press, 1988. ISBN 0198519613.

CHIMENTO, L. P.; COSSARINI, A. E.; PENSA, F. G. Exact solutions of quantum massive spin-1 field equations and their application to the hawking-unruh effect. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 92, n. 1, p. 67–78, 1994.

CHUNG, K. **Introdução a Física Nuclear**. [S.l.]: eduerj, 2001.

COELHO, H.; DAS, T.; ROBILOTTA, M. R. Two-pion-exchange three-nucleon force and the 3H and 3He nuclei. **Physical Review C**, APS, v. 28, n. 4, p. 1812, 1983.

COLEMAN, S.; WESS, J.; ZUMINO, B. Structure of phenomenological lagrangians. i. **Physical Review**, APS, v. 177, n. 5, p. 2239, 1969.

CONTI C GALEAO, A. D.; KRMPOTIE, F. Rho-nucleon tensor coupling and charge-exchange resonances. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 494, n. 1, p. 46–52, 2000.

EISENBERG, J. M.; KOLTUN, D. S. **Theory of Meson Interactions with Nuclei**. [S.l.]: Wiley-VCH, 1989. ISBN 0-471-50675-3.

ELLIS, P. J.; TANG, H.-B. Pion-nucleon scattering at low energies. **Physical Review C**, APS, v. 56, n. 6, p. 3363, 1997.

ERICSON, T.; WEISE, W. **Pions and Nuclei**. [S.l.]: Oxford University Press, 1988. ISBN 0-19-852008-5.

FINELLI, P. Chiral symmetry. **Nuclear Physics Course**, 2011.

FURNSTAHL, R.; SEROT, B. D.; TANG, H.-B. A chiral effective lagrangian for nuclei. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 615, n. 4, p. 441–482, 1997.

GASSER, J.; LEUTWYLER, H.; SAINIO, M. E. Sigma-term update. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 253, n. 1-2, p. 252–259, 1991.

GELL-MANN, M.; LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 16, n. 4, p. 705–726, 1960.

GOUDSMIT, P. et al. The extended tree-level model for the pion-nucleon interaction. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 575, n. 4, p. 673–706, 1994.

GRIFFITHS, D. **Introduction to Elementary Particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1987. ISBN 0-471-60386-4.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN 0131118927.

HABERZETTL, H. Propagation of a massive spin-3/2 particle. **arXiv preprint nucl-th/9812043**, 1998.

HART, J. et al. The reaction $\pi-p \rightarrow K^0\Sigma^0$ up to 2375 MeV/c. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 166, n. 1, p. 73–83, 1980.

HE, X.-G.; VELENCIA, G. CP violation in $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ beyond the standard model. **Physical Review D**, APS, v. 52, n. 9, p. 5257, 1995.

ILIOPOULOS, J. Introduction to the standard model of the electro-weak interactions. **arXiv preprint arXiv:1305.6779**, 2013.

JEGERLEHNER, F. Quantum chromodynamics and strong interaction physics. **Lectures given at University of Silesia, Katowicw, Poland**, 2009.

JULIA-DIAZ, B. et al. Dynamical coupled-channels approach to hadronic and electromagnetic kaon-hyperon production on the proton. **Physical Review C**, APS, v. 73, n. 5, p. 055204, 2006.

KAKU, M. **Quantum Field Theory: A Modern Introduction**. [S.l.]: OXFORD UNIV PR, 1993. ISBN 0195076524.

KIM, Y. et al. Schematic model for ρ -a1 mixing at finite density and in-medium effective lagrangian. **Physical Review C**, APS, v. 62, n. 1, p. 015202, 2000.

KO, P.; RUDAZ, S. Phenomenology of scalar and vector mesons in the linear σ model. **Physical Review D**, APS, v. 50, n. 11, p. 6877, 1994.

KOCH, V. Aspects of chiral symmetry. **International Journal of Modern Physics E**, World Scientific, v. 6, n. 02, p. 203–249, 1997.

KRANE, K. S.; HALLIDAY, D. **Introductory nuclear physics**. [S.l.]: Wiley New York, 1988.

LACROIX, D. Introduction-strong interaction in the nuclear medium: new trends. **arXiv preprint arXiv:1001.5001**, 2010.

LEMONS, N. A. **Mecânica Analítica**. [S.l.]: Livraria da Física, 2007. ISBN 978-8588325241.

LOVAS, I.; SAILER, K.; GREINER, W. Generalized rarita-schwinger equations. **arXiv preprint hep-th/9810103**, 1998.

MACHLEIDT, R. The meson theory of nuclear forces and nuclear structure. In: **Advances in nuclear physics**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 189–376.

MCMAHON, D. **Quantum Field Theory Demystified**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2008. ISBN 978-0071543828.

MENEZES, A. M. M. de. **ESTUDO DO ESPALHAMENTO πN A BAIXAS ENERGIAS**. Dissertação (Mestrado), 1985.

NATH, L.; ETEMADI, B.; KIMEL, J. Uniqueness of the interaction involving spin-3/2 particles. **Physical Review D**, APS, v. 3, n. 9, p. 2153, 1971.

NETO, J. B. **Matemática Para Físicos com Aplicacoes: Vetores, Tensores e Spinors - Vol.1**. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. ISBN 9788578610913.

OLSSON, M.; OSYPOWSKI, E. Systematics of low-energy πN scattering. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 136–158, 1975.

OLSSON, M.; TURNER, L.; OSYPOWSKI, E. Implications for the $\Delta N \pi$ interaction and σ term from low-energy πN scattering. **Physical Review D**, APS, v. 7, n. 11, p. 3444, 1973.

PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. **Chinese physics C**, IOP Publishing, v. 40, n. 10, p. 100001, 2016.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)**. [S.l.]: CRC Press, 1995. ISBN 0-201-50397-2.

PILKUHN, H. et al. Compilation of coupling constants and low-energy parameters. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 65, n. 2, p. 460–517, 1973.

RATCLIFF, P. G. Introduction to nuclear and subnuclear physics. **Università degli Studi dell’Insubria**, Como via Valleggio, 2016.

ROBILOTTA, M. Chiral scalar form factor and central nucleon-nucleon potential. **Physical Review C**, APS, v. 63, n. 4, p. 044004, 2001.

ROCHA, C. A. da. **Potencial nucleon-nucleon devido à troca de dois píons: o papel da simetria quiral**. Tese (Doutorado), 1993.

ROMAN, P. **Introduction to Quantum Field Theory**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1969. ISBN 0471731986.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0521478144.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. [S.l.]: Addison Wesley, 1993. ISBN 0-201-53929-2.

STOKS, V.; RIJKEN, T. A. Meson-baryon coupling constants from a chiral-invariant SU(3) lagrangian and application to NN scattering. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 613, n. 4, p. 311–341, 1997.

SWART, J. D. The octet model and its clebsch-gordan coefficients. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 35, n. 4, p. 916, 1963.

WEINBERG, S. Nonlinear realizations of chiral symmetry. **Physical Review**, APS, v. 166, n. 5, p. 1568, 1968.

WEINBERG, S. Phenomenological lagrangians. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 96, n. 1-2, p. 327–340, 1979.

WESS, J.; ZUMINO, B. Lagrangian method for chiral symmetries. **Physical Review**, APS, v. 163, n. 5, p. 1727, 1967.

WONG, S. S. M. **Introductory Nuclear Physics**. [S.l.]: Wiley-VCH, 1999. ISBN 0-471-23973-9.

ZEE, A. **Quantum Field Theory in a Nutshell**. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. ISBN 0-691-01019-6.

ZETTILI, N. **Quantum Mechanics: Concepts and Applications**. [S.l.]: Wiley, 2009. ISBN 0470026782.

APÊNDICE A - Formalismo Quiral

Neste capítulo introduziremos a base teórica necessária à construção das lagrangianas efetivas quirais. Começando pelos princípios da teoria quântica de campos, passando pelos conceitos básicos de simetria e quebra de simetria, chegando ao modelo sigma não-linear, concluindo-se com a dedução das lagrangianas para a interação $N\pi$, sendo este, nosso modelo de base, que posteriormente será estendido para interação do tipo KY .

A.1 FUNÇÃO LAGRANGIANA

Nos estudos da teoria quântica de campos (BJORKEN; DRELL, 1965; KAKU, 1993; PESKIN; SCHROEDER, 1995; ZEE, 2003; MCMAHON, 2008), utilizamos uma ferramenta matemática muito comum, aplicável em qualquer teoria física fundamental. Esta ferramenta é conhecida como função lagrangiana, sendo frequentemente identificada como a diferença entre as energias cinética e potencial (LEMONS, 2007). No contexto da teoria quântica de campos, temos que usar lagrangianas generalizadas para campos relativísticos, para tanto, temos primeiro que considerar os conceitos básicos da lagrangiana clássica não relativística.

Matematicamente,

$$L = T - V \tag{A.1}$$

onde L é a função lagrangiana clássica, T e V são as energias cinética e potencial respectivamente.

A.1.1 Ação e as equações de movimento

Integrando a lagrangiana (A.1) em função do tempo, definimos uma quantidade chamada *ação* (S),

$$S = \int L dt. \tag{A.2}$$

À S damos o nome de funcional, uma vez que, transforma uma função (neste caso L) em um número. Entre dois pontos (posição no eixo \mathbf{x} em dois instantes diferentes) $\mathbf{x}(t_1)$ e $\mathbf{x}(t_2)$, temos infinitos caminhos para uma mesma partícula, através princípio de Hamilton, a trajetória real (mantido os pontos inicial e final fixos) da partícula será aquela na qual, a ação é mínima. Assim, para encontrarmos o caminho

real temos de usar o princípio variacional, isto é, a variação da ação deve ser nula, logo

$$S \rightarrow S + \delta S, \quad (\text{A.3})$$

$$\delta S = 0. \quad (\text{A.4})$$

Calculando a variação δS nula, chegaremos a equação do movimento da partícula. Para isso, considera-se o caso geral onde L depende de, N coordenadas generalizadas $q_i(t)$, derivadas primeiras em relação ao tempo $\dot{q}_i(t)$, onde $i = 1, \dots, N$ e do tempo t . Assim, temos a variação da ação

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (\text{A.5})$$

com os pontos inicial e final mantidos fixos, isto é,

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

e considerando que

$$\delta(\dot{q}_i) = \frac{d}{dt}(\delta q_i). \quad (\text{A.6})$$

Como L depende das variáveis q_i e \dot{q}_i , temos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

aplicando a relação (A.6),

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) \right] dt$$

a integração por partes fornece

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

a segunda soma é nula, pois os pontos iniciais e finais são fixos. Fazendo $\delta S = 0$, achamos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

como $\delta \mathbf{q}_i$ é arbitrário, a última relação será satisfeita se,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

esta é a equação de *Euler-Lagrange* ($i = 1, \dots, N$), da qual, obtemos as equações de movimento da partícula.

A.1.2 Teoria de campos na forma lagrangiana

Agora estamos interessados em um sistema físico cujas coordenadas não dependam mais de finitos graus de liberdade (discretos), os quais, são descritos pelas coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_i(t)$ e sua derivada em relação ao tempo, mas sim, de um sistema com infinitos graus de liberdade, cuja as coordenadas são contínuas e dependam agora, não só do tempo mas, também do espaço. Esse novo sistema é então descrito pela função $\varphi(\mathbf{x}^k, t)$ com $k=1,2,3$ e de suas derivadas temporal e espaciais. Desse modo, temos a descrição de um campo.

Análogo à lagrangiana do sistema discreto, a qual soma todos os graus de liberdade ($i = 1, \dots, N$), a lagrangiana de um sistema contínuo deverá fazer a soma sobre todo o espaço de interesse, ou seja, uma integração espacial sobre uma *densidade lagrangiana* (\mathcal{L}).

Em síntese podemos fazer a transição do discreto para o contínuo (campo) da seguinte forma:

$$q(t) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}^k, t), \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{q}(t) \rightarrow \partial_\mu \varphi(\mathbf{x}^k, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(\mathbf{x}^k, t), \quad (\text{A.9})$$

$$L = \sum_i L_i \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}^k, t), \partial_\mu \varphi(\mathbf{x}^k, t), t), \quad (\text{A.10})$$

sendo sua ação,

$$S = \sum_i \int L_i dt \rightarrow \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}^k, t), \partial_\mu \varphi(\mathbf{x}^k, t), t). \quad (\text{A.11})$$

A notação L_i se refere a energias cinéticas e potencial relativa a cada coordena generalizadas com índice i , isso é, $L_i = T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - V(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$.

Aqui podemos estabelecer a característica relativística da lagrangiana de campo, impondo que φ , S e \mathcal{L} sejam invariantes sob transfor-

mação de Lorentz (escalares de Lorentz), para tanto temos que definir,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (\text{A.12})$$

$$d^3x = dx \, dy \, dz, \quad (\text{A.13})$$

$$d^4x = c dt \, dx \, dy \, dz, \quad (\text{A.14})$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (\text{A.15})$$

sendo $\partial_\mu \varphi(x^k, t)$ um quadrivetor covariante e c a constante da velocidade da luz no vácuo.

A equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana de campo é deduzida de modo análogo ao caso discreto já feito, resultando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Na situação em que há mais de um campo, tal como é o caso do pión, o qual, tem três tipos diferentes (triplete), temos a mesma equação anterior, porém agora os campos deve ter índice (l) para identificar os diferentes campos considerados. Assim, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_l} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi_l]} \right) = 0. \quad (\text{A.17})$$

As lagrangianas de campo relativísticas não podem ser derivadas de forma simples como no caso clássico ($\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V}$), assim \mathcal{L} deve usualmente ser encontrada de forma *axiomática*, isto é, deduzido a partir de algum ponto.

A.1.2.1 Exemplo equação de Klein-Gordon

Para um campos bosônico (spin-0), usamos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (\text{A.18})$$

onde m é a massa da partícula e consideramos $c = \hbar = 1$.

Como o campo bosônico ϕ é um campo escalar, então \mathcal{L} é um invariante sob transformação de Lorentz (relativístico). Obtemos a

equação de movimento deste campo, através das relações

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} &= \frac{\partial}{\partial[\partial_\mu \phi]} \left(\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\nu \phi \partial_\lambda \phi \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[g^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu \partial_\lambda \phi + g^{\nu\lambda} \partial_\nu \phi \delta_\lambda^\mu \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi + g^{\nu\mu} \partial_\nu \phi \right] \\
 &= \partial^\mu \phi,
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \tag{A.20}$$

onde em (A.19) usamos a relação $\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi = \frac{\partial}{\partial(\partial_{x_\nu})} \partial x_\mu \equiv \delta_\nu^\mu$ e a regra da cadeia.

Aplicando (A.19) e (A.20) em (A.16) chegamos então, à equação (de movimento) de *Klein-Gordon*,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0. \tag{A.21}$$

A.1.2.2 Exemplo equação de Dirac

Outra lagrangiana relativística muito usada é a de Dirac para férmions (spin-1/2),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi, \tag{A.22}$$

onde novamente m é a massa da partícula, γ^μ são as matrizes de Dirac¹ e novamente $c = \hbar = 1$.

Os ψ e $\bar{\psi}$ são espinores (espinor e espinor adjunto, respectivamente), os quais, consideramos como independentes. Aplicando a equação de Euler-Lagrange em relação à $\bar{\psi}$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \bar{\psi}]} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi,$$

¹As matrizes de Dirac são definidas mais adiante em (A.64), não definimos nesse ponto do texto, uma vez que estamos interessados na aplicação da equação de Euler-Lagrange e não nos detalhes da lagrangiana em si.

logo, a equação do movimento para ψ é,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = \mathbf{0}. \quad (\text{A.23})$$

Ao aplicando Euler-Lagrange para ψ , encontramos a outra equação de movimento,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m\bar{\psi} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.24})$$

A equação de movimento (A.23) se refere à partícula de massa m , spin-1/2 e carga positiva, já (A.24) e a equação de movimento da anti-partícula de mesma massa e spin, mas com carga negativa. Estas são as equações de Dirac.

A.2 SIMETRIA

Simetria existe quando, fazendo uma transformação em relação à um determinado parâmetro, não se altere o sistema (invariância). Em um sistema físico isso pode ser visto com uma mudança nas variáveis da lagrangiana [coordenadas generalizadas (\mathbf{q}_i) ou no campo (φ)], sem que se modifiquem, sua lagrangiana ou sua equação do movimento (A.7, A.16). Por exemplo, essas mudanças poderiam ser uma translação no espaço, no tempo, rotações, etc.

As simetrias podem ser classificadas das seguintes formas:

- *externa* \longrightarrow depende de mudanças no espaço-tempo;
- *interna* \longrightarrow não tem dependência do espaço-tempo;
- *discreta* \longrightarrow depende de um ou mais parâmetros descontínuos;
- *contínua* \longrightarrow depende de um ou mais parâmetros contínuos.

A.2.1 Transformação de calibre (*gauge*)

Transformação de calibre é uma extensão do conceito de invariância (simetria), quando fazemos uma mudança no campo, de forma a deixar a lagrangiana invariante, matematicamente

$$\varphi \rightarrow U\varphi, \quad (\text{A.25})$$

aqui consideramos U como uma transformação (BASSALO, 2008; NETO, 2010).

A Tabela 12 mostra os grupos mais comumente usados na física de partículas onde, os grupos unitários U podem ser complexos e não depende do espaço-tempo (simetria *interna*).

Tabela 12 – Grupos

Grupo	Dimensão	Propriedade Matriz
$U(n)$	$n \times n$	unitário ($\bar{U}^*U = \mathbf{1}$)
$SU(n)$	$n \times n$	unitário com $\det U = 1$
$O(n)$	$n \times n$	ortogonal ($\bar{O}O = \mathbf{1}$)
$SO(n)$	$n \times n$	ortogonal com $\det O = 1$

Fonte: Griffiths (1987)

As transformações de calibre podem ser de dois tipos:

- *global* \longrightarrow não depende do espaço-tempo;
- *local* \longrightarrow depende do espaço-tempo.

Na teoria de campos, a transformação de calibre local desempenha papel muito importante, pois é através dessas transformações que são construídas as lagrangianas relativísticas com interações (i.e. a soma das lagrangianas de partícula livre e de interação), algo análogo aos termos, cinético e potencial da lagrangiana clássica não relativística (A.1).

Logo, esta transformação permite deduzir de forma formal, as lagrangianas de interação para campos relativísticos. Esta interação aparece de forma natural devido à transformação do campo, campo este que, não é mais constante em relação a derivada (∂_μ), fazendo aparecer um termo extra na lagrangiana, quebrando sua invariância. Para restabelecer novamente a invariância da lagrangiana temos de acrescentar um novo campo capaz de descrever uma interação com a partícula livre.

Um exemplo da transformação de calibre local é a equação de Dirac para o elétron com interação eletromagnética

$$\mathcal{L}_e = \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_e\bar{\psi}\psi}_{\mathcal{L}_0} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathcal{L}_1}$$

em que:

- $m_e \rightarrow$ massa do elétron;
- $e \rightarrow$ carga elétrica do elétron;

$\mathbf{A}_\mu \rightarrow$ é o quadrivetor do potencial eletromagnético;
 $\mathcal{L}_0 \rightarrow$ é a lagrangiana da partícula livre;
 $\mathcal{L}_1 \rightarrow$ é a lagrangiana de interação.

A equação de movimento fica neste caso

$$(iD_\mu \gamma^\mu - m_e)\psi = 0,$$

sendo

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu.$$

Este exemplo deixa claro a necessidade de somar um termo na derivada, a fim de manter a invariância da lagrangiana. Essa equação do movimento é chamada de equação de Dirac de acoplamento mínimo com o campo eletromagnético. Assim, podemos simplesmente fazer, $\partial \rightarrow D$ diretamente na equação de movimento.

Uma forma geral de representar uma transformação unitária U e sua adjunta U^\dagger é,

$$U = e^{i\theta}, \quad U^\dagger = e^{-i\theta}, \quad (\text{A.26})$$

devido à essas formas de transformação, para θ termos dois casos:

- θ como uma constante ou matriz, que não dependem do espaço-tempo \rightarrow *transformação global*;
- $\theta(\mathbf{x})$ como uma função ou matriz que dependem do espaço-tempo ($\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mu$ é o quadrivetor no espaço-tempo) \rightarrow *transformação local*.

A.2.2 Correntes: Teorema de Noether

Podemos associar simetrias com conservação de correntes e de leis do sistema, isso é conseguido através do teorema de Noether (PESKIN; SCHROEDER, 1995; LEMOS, 2007). Tal teorema consiste em uma transformação continua no campo do sistema sem que a lagrangiana mude de forma (invariante). Aplicando uma variação ao campo ϕ ,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi. \quad (\text{A.27})$$

Com a variação no campo (A.27), temos uma variação na lagrangiana do sistema da forma

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}. \quad (\text{A.28})$$

Mas, nosso interesse é em um sistema não sofra mudanças, ou seja, a lagrangiana do sistema tenha exatamente a mesma forma após a variação do campo, assim, impomos que

$$\delta\mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Daqui procedemos como fizemos na seção (A.2.3.1) para a variação da lagrangiana assim

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\partial_\mu(\delta\phi), \quad (\text{A.30})$$

com ϕ e $\partial_\mu\phi$ tratadas como variáveis independentes.

Usando a equação de Euler-Lagrange (A.16)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\right) \quad (\text{A.31})$$

e substituindo (A.31) em (A.30), temos

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta\phi\right), \quad (\text{A.32})$$

usamos a regra do produto de derivadas na última igualdade.

Igualando (A.29) com (A.32), chegamos a expressão

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta\phi\right) = 0, \quad (\text{A.33})$$

identificamos o termo em parenteses como a corrente do sistema,

$$\mathbf{J}^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta\phi, \quad (\text{A.34})$$

logo, (A.33) é a condição de conservação da corrente (equação da continuidade) análogo ao usado no eletromagnetismo

$$\partial_\mu\mathbf{J}^\mu = 0. \quad (\text{A.35})$$

Assim definimos o teorema de Noether, sendo quando, a variação do campo não modifica a lagrangiana, levando à uma corrente

conservada do sistema. Tal conservação de corrente implica em leis de conservação associadas ao sistema em consideração.

Quanto a expressão (A.34) é usual escrever a corrente relativa à um dado parâmetro constante (ϵ^a), da seguinte maneira (KAKU, 1993)

$$J_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \frac{\delta \phi}{\epsilon^a}. \quad (\text{A.36})$$

Nota-se a motivação em usar uma transformação do tipo (A.26), pois, podemos escrevemos a transformação como uma soma,

$$\phi \rightarrow e^{i\theta^a \Lambda_a} \phi = (1 - i\theta^a \Lambda_a) \phi,$$

onde expandimos a função em relação ao parâmetro constante θ^a para pontos próximos de zero, o parâmetro Λ_a pode ser uma matriz ou uma função. Comparando a ultima igualdade com (A.27) concluímos que,

$$\delta \phi = -i\theta^a \Lambda_a \phi.$$

Finalmente, escrevendo a corrente (A.36) em relação ao parâmetro constante θ^a , temos

$$J_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \frac{\theta^a \Lambda_a \phi}{\theta^a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Lambda_a \phi.$$

Não nos preocupamos com a forma da lagrangiana \mathcal{L} , somente consideramos que ela deva ser invariante em relação à transformação do tipo $U = e^{i\theta^a \Lambda_a}$.

A.2.3 Quebra espontânea de simetria

Consideremos a lagrangiana de um campo escalar real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2, \quad (\mu \in \mathbb{R}), \quad (\text{A.37})$$

podemos facilmente ver que esta lagrangiana (A.37) é invariante sob a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$, dado os campos aos pares.

Ao adicionar um novo termo à esta lagrangiana (sem nos preo-

cupar com sua realidade física), encontramos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\gamma}{3} \varphi^3, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (\text{A.38})$$

essa nova lagrangiana sob a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$, não é invariante, pois, teremos um sinal trocado no ultimo termo ($+\frac{\gamma}{3}\varphi^3$). À esta não invariância, chamamos de *quebra de simetria* em relação à $\varphi \rightarrow -\varphi$ (CHENG; LI, 1988; PESKIN; SCHROEDER, 1995; ZEE, 2003; JEGERLEHNER, 2009).

Estamos interessado em um tipo específico de quebra de simetria, que esta vinculada ao estado fundamental do sistema. Para mostrar isso, vamos usar novamente a lagrangiana (A.37) e adicionar um novo termo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4, \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (\text{A.39})$$

De forma análoga à relação clássica (A.1), iremos separar a lagrangiana de tal forma, que seja igual à $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$, assim

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda^2}{4} \varphi^4, \quad (\text{A.41})$$

são as energias cinética e potencial respectivamente.

Vamos agora encontrar a forma gráfica do potencial (A.41) para tanto, temos que calcular os pontos de mínimo

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\varphi} = \mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0, \quad (\text{A.42})$$

resolvendo essa equação achamos:

(i) $\varphi = 0$;

(ii) $\varphi = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}$.

Se considerarmos $\lambda^2 > 0$, a solução (ii) não pode ser um solução (potencial real) se $\mu^2 > 0$, logo, vamos separar em 2 casos a solução de (A.42):

- a) $\mu^2 > 0$, solução (i);
 b) $\mu^2 < 0$, soluções (i) e (ii).

Calculando a derivada segunda de (A.41), achamos quais são os mínimos ou máximos

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} = \mu^2 + 3\lambda\varphi^2. \quad (\text{A.43})$$

Para o caso (a),

$$\left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \mu^2 > 0,$$

logo temos um só ponto de mínimo em $\varphi = 0$.

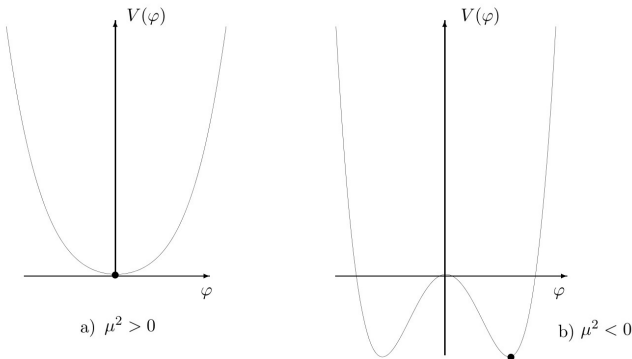
Para o caso (b),

$$\left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \mu^2 < 0, \quad \left. \frac{d^2\mathcal{V}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}} = -2\frac{\mu^2}{\lambda^2} > 0,$$

portanto, temos um máximo em $\varphi = 0$ e mínimos em $\varphi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}$.

Finalmente, na Figura 31 temos a forma dos gráfico possíveis de \mathcal{V} , como podemos notar o caso (b) tem 2 mínimos, isto é, tem o estado

Figura 31 – Formas possíveis do potencial.



Fonte: Jegerlehner (2009)

fundamental degenerado.

Mas, afinal o tudo isso significa? Se compararmos (A.39) com a equação de Klein-Gordon (A.18) somada pelo termo $-\frac{\lambda^2}{4}\varphi^4$, vemos que para a condição $\mu^2 < 0$ a massa (termo que multiplica φ^2) fica com o sinal negativo. Isso acontece porque estamos inicialmente considerando que o mínimo do potencial é em $\varphi = 0$. A massa negativa reflete uma instabilidade neste ponto.

Para resolver esse problema e achar o verdadeiro valor da massa para a situação em que $\mu^2 < 0$, vamos deslocar a função de forma que um novo campo (η) corresponda ao $\mathcal{V}(\eta) = 0$, quando $\eta = 0$. O que vamos fazer afinal, é uma expansão em relação a um dos mínimos do potencial (Figura 31 (b)). Ao escolhermos o mínimo direito, temos

$$\varphi = \varphi_0 + \eta, \quad \varphi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}, \quad (\text{A.44})$$

podemos escrever deixando esse novo campo (η) em evidencia

$$\eta = \varphi - \varphi_0,$$

ficando claro o deslocamento da função para a esquerda.

Substituindo (A.44) em (A.39), temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{\mu^2}{2}(\varphi_0 + \eta)^2 - \frac{\lambda^2}{4}(\varphi_0 + \eta)^4, \quad (\text{A.45})$$

fazendo a expansão de Taylor de $\mathcal{V}(\eta)$ em torno do ponto $\eta = 0$ chegamos à

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 - \sqrt{-\mu^2}\lambda\eta^3 - \frac{\lambda^2}{4}\eta^4, \quad (\text{A.46})$$

agora podemos ver que a massa é (comparando com (A.18)) $m^2 = -2\mu^2 > 0$ (lembrando: $\mu^2 < 0$), sendo agora positiva, logo o ponto $\eta = 0$ é estável.

Aqui chegamos ao ponto que nos interessa a respeito da simetria que consideramos no começo dessa seção ($\varphi \rightarrow -\varphi$) imposta à (A.39), pois, se aplicarmos na lagrangiana (A.46) a mesma transformação no novo campo ($\eta \rightarrow -\eta$), teremos não mais uma invariância (termo ímpar η^3), ocorrendo uma quebra de simetria. Essa quebra de simetria leva o nome de *quebra espontânea de simetria*, porque esta relacionada ao vácuo (estado fundamental ou de menor energia) que não mais tem simetria, isto é, tem mais de um valor mínimo do potencial (estados

degenerado). Portanto, para uma expansão em torno do estado de mínima energia teríamos de escolher um dos dois mínimos.

Se analisarmos essa situação do ponto de vista da mecânica quântica a quebra espontânea de simetria não ocorre, uma vez que pode-se tunelar [barreira dada por $V(\mathbf{0}) - V(\pm\varphi_0)$] de um mínimo para o outro, sendo assim, é desnecessário escolher um ou outro mínimo, pois, têm igual possibilidade de estar à esquerda ou à direita. Portanto, a simetria $\eta \rightarrow -\eta$ continua válida na lagrangiana (A.46). Porém, na teoria quântica de campos, a barreira a ser tunelada é $[V(\mathbf{0}) - V(\pm\varphi_0)] \int d^4x$, isso é, tal barreira integra-se em todo o espaço, sendo portanto, uma barreira infinita, assim, a probabilidade de tunelar de um mínimo para outro será zero. Nesse caso, haverá a quebra espontânea de simetria, uma vez que o sistema não possui iguais probabilidades de estar à direita ou à esquerda, teremos então que escolher qual dos mínimo usar, a transformação $\eta \rightarrow -\eta$ não será mais válida.

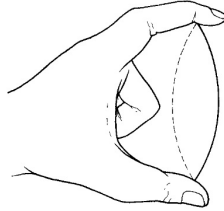
Matematicamente, a simetria $\eta \rightarrow -\eta$ na mecânica quântica não pode ser aplicada diretamente em (A.46), já que esta lagrangiana foi calculada para o estado particular de $\varphi_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda^2}$ (mínimo direito). Neste caso teríamos que levar em conta também a segunda solução (mínimo esquerdo) $\varphi_0 = -\sqrt{-\mu^2/\lambda^2}$, assim combinando ambas as soluções para o potencial a parte η^3 desaparecerá, mantendo válida a simetria $\eta \rightarrow -\eta$. Essa escolha particular de um estado fundamental na teoria quântica de campos esta de acordo com o formalismo dos diagramas de Feynman (ZEE, 2003).

É chamada de quebra "espontânea" de simetria, porque não foi causada por um agente externo (interações). Um exemplo da quebra de simetria seria uma tira rígida de plástico, que quando espremida suas extremidades uma contra à outra, aparece uma curvatura em relação a posições inicial (Figura 32), essa curvatura poderia tanto ser para o lado direito quanto para o esquerdo, assim, dois estados de mínima energia (estáveis). Ambos os estados de energia não existem fisicamente ao mesmo tempo, logo, resulta em uma quebra de simetria, uma vez que teremos que escolher uma das duas configurações (GRIFFITHS, 1987).

A.2.3.1 Quebra de simetria continua

Até aqui consideramos a quebra de simetria *discreta* (também *interna*), mas a simetria que realmente nos interessa é a simetria *contínua*.

Figura 32 – Quebra espontânea de simetria em uma tira de plástico.



Fonte: Griffiths (1987)

Para isso vamos considerar a mesma lagrangiana (A.39), agora com dois campos, isto é, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, vamos trocar o sinal de μ^2 , sendo este o caso em que a quebra de simetria ocorre ($\mu < 0$). De modo que temos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 + \frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2, \quad (\text{A.47})$$

considerando a condição de ortogonalidade, $\varphi_1 \varphi_2 = 0$. Por envolver a somas dos quadrados do campos, essa lagrangiana é invariante sob rotações (SO(2)) no espaço de φ_1, φ_2 . Isso é (BASSALO, 2008; NETO, 2010),

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

resultando nas transformações

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1 = \varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta,$$

$$\varphi_2 \rightarrow \varphi'_2 = -\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta.$$

fazendo diretamente a soma dos quadrados, temos

$$\begin{aligned} \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 &= (\varphi'_1, \varphi'_2) \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2. \end{aligned}$$

O potencial é o mesmo que (A.41), mas com as mudanças já

mencionadas, assim (Figura 34 **a**))

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (\text{A.49})$$

Fazendo o mesmo que foi feito para o caso discreto, encontramos o ponto de mínimo do potencial

$$\varphi_{10}^2 + \varphi_{20}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad (\text{A.50})$$

isso significa que o mínimo está localizado em uma circunferência de raio (com a origem no eixo do potencial) igual à μ/λ , já que a relação é exatamente a equação de uma circunferência.

De acordo com a teoria quântica de campos temos de escolher um mínimo em torno do qual, possamos fazer uma expansão (perturbação). Portanto vamos deslocar a função na direção φ_1 (ou equivalentemente deslocar a origem), para o ponto

$$\varphi_{10} = \frac{\mu}{\lambda}; \quad \varphi_{20} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.51})$$

Introduzimos novos campos deslocados em função dos antigos, tal que

$$\eta = \varphi_1 - \varphi_{10}; \quad \xi = \varphi_2 - \varphi_{20} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.52})$$

Nestes novos campos, a lagrangiana (A.47) tem a forma (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \mu^2 \eta^2 \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \right]_{(2)} \\ &+ \left[\mu \lambda (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) \right]_{(3)} \\ &+ \left[\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \right]_{(4)}, \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

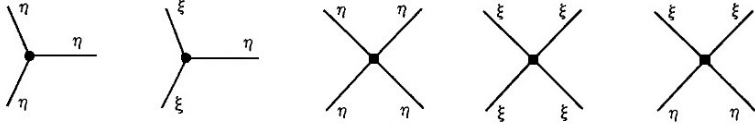
aqui temos:

(1) → Lagrangiana de Klein-Gordon (A.18) com massa $m_\eta = \sqrt{2}\mu$;

(2) → Lagrangiana do campo livre ξ sem massa $m_\xi = \mathbf{0}$;

- (3) → Lagrangiana com cinco acoplamentos (Figura 33);
- (4) → Uma constante, podendo ser desprezada.

Figura 33 – Cinco acoplamentos

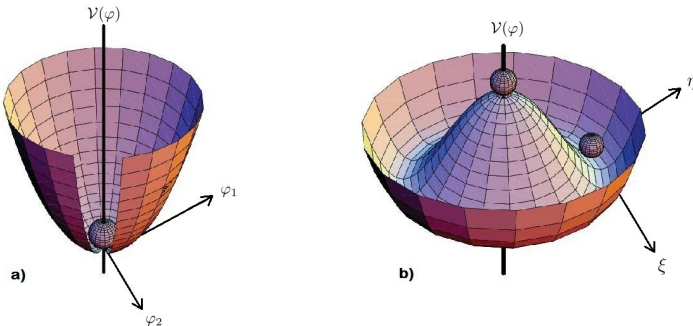


Fonte: Griffiths (1987)

A lagrangiana (A.53) não tem invariância sob rotações, como era de se esperar quando escolhemos o ponto de mínimo. As mesmas explicações dadas à lagrangiana (A.46) para caso discreto valem aqui, porém, agora o campo η representa oscilações na direção radial e o novo campo ξ oscilações na direção tangencial (Figura 34 b)) (ILIOPOULOS, 2013).

A característica importante deste caso é a separação entre o campo sem massa (η) e o campo massivo (ξ) automaticamente na lagrangiana. Esse resultado é previsto pelo teorema de Goldstone, que veremos mais adiante. Este teorema estabelece que toda quebra de simetria contínua é acompanhada por um ou mais campos sem massa que descrevem partículas de spin-0 chamados *bósons de Goldstone*.

Figura 34 – Quebra de simetria



Fonte: Adaptado de Iliopoulos (2013)

Podemos ainda generalizar para N campos (φ^i) . Assim a lagrangiana (A.47) será escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i + \frac{\mu^2}{2} (\varphi^i)^2 - \frac{\lambda^2}{4} [(\varphi^i)^2]^2. \quad (\text{A.54})$$

Esta lagrangiana é simétrica sob a transformação

$$\varphi^i \longrightarrow R^i_j \varphi^j, \quad (\text{A.55})$$

onde R^i_j é qualquer matriz ortogonal $N \times N$ (grupo $O(N)$), sendo φ^i ortogonais entre si.

Fazendo os mesmos procedimentos temos que para um dos campos φ^i o potencial será mínimo no ponto, como antes

$$\varphi^i_0 = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (\text{A.56})$$

Estabelecendo que a direção de φ^i_0 é a N -ésima, temos

$$\varphi^i_0 = (0, 0, \dots, 0, \mu/\lambda). \quad (\text{A.57})$$

Representando φ^i em função de novos campos π^k e σ ,

$$\varphi^i = (\pi^k, \sigma + \mu/\lambda), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.58})$$

a lagrangiana (A.55) terá a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \mu^2 \sigma^2 \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \pi^k \partial^\mu \pi^k \right]_{(2)} \\ & + \left[\mu \lambda (\sigma^3 + \sigma (\pi^k)^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\sigma^4 + (\pi^k)^4 + 2\sigma^2 (\pi^k)^2) \right]_{(3)} + \left[\frac{\mu^4}{4\lambda^2} \right]_{(4)}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Novamente temos que: (1) é um campo massivo; (2) é associado aos $N-1$ campos sem massa; (3) o conjunto de interações; (4) uma constante a ser desprezada.

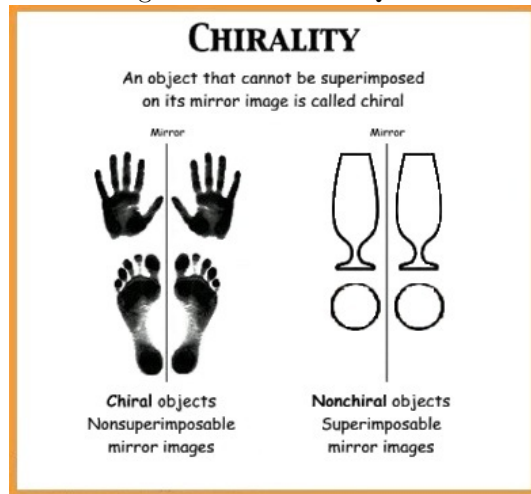
A.2.4 Simetria Quiral

Estamos hábeis enfim, para introduzir a simetria que de fato nos interessa a *Simetria Quiral*. A palavra quiral vem do grego, cujo

significado é "mão", nome bastante apropriado, pois, é análoga à simetria de espelho, isso é, o objeto e sua imagens devem ser diferentes, exatamente como os são, as mãos direita e esquerda (Figura 35). Assim todos os objetos que se comportam dessa forma, são invariantes quirais (ERICSON; WEISE, 1988; PESKIN; SCHROEDER, 1995; BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995; KOCH, 1997; FINELLI, 2011).

A relação da simetria quiral com a física de partículas se dá através da helicidade. Helicidade é o alinhamento paralelo ou anti-paralelo do spin (caso dos férmios) com a direção de movimento da partícula. Quando é paralelo (mesmo sentido, helicidade positiva) dizemos que é de mão-direita e quando anti-paralelo (sentidos opostos, helicidade negativa), mão-esquerda (Figura 36).

Figura 35 – Simetria Quiral



Fonte: Finelli (2011)

Figura 36 – Helicidade



Fonte: Griffiths (1987)

A helicidade não é invariante de Lorentz para o caso de partículas fermiônicas massivas, isto é, existem referenciais inerciais nos quais as partículas podem ter outra helicidade. Para entendermos isso vamos imaginar uma partícula viajando para a direita com seu spin paralelo (mesmo sentido) à velocidade \mathbf{v} ($\mathbf{v} < \mathbf{c}$) e um observador movendo-se também para a direita com velocidade \mathbf{V} , então se $\mathbf{v} < \mathbf{V}$, veríamos no referencial do observador a partícula se mover para a esquerda ($\mathbf{V} - \mathbf{v}$) sem alterar seu spin, logo seu spin passa agora a ser anti-paralelo, ou seja, sua helicidade mudou (GRIFFITHS, 1987).

Para que a helicidade seja então bem definida, ela deve ter uma velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{c}$, portanto ter massa nula, mas podemos impor que a massa de uma partícula em relação à determinados regimes de energias, seja aproximadamente zero.

Os estados de helicidade de uma partícula sem massa são desacoplados, isso quer dizer que ou é de mão-direita ou de mão-esquerda. Então para que a simetria quiral seja satisfeita, temos que o estado da partícula (ψ) deve ser a soma dos dois estados possíveis de helicidade direita (ψ_R) e esquerda (ψ_L),

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (\text{A.60})$$

sendo na verdade espinores, que escrevemos como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}}_{\psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\psi_R} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_L \end{pmatrix}}_{\psi_L}. \quad (\text{A.61})$$

Vamos definir projetores que, aplicados à ψ resultem em ψ_R e ψ_L . Como estamos considerando férmios, então o estado ψ deve satisfazer a equação de Dirac (A.23) para uma partícula sem massa

$$i\cancel{\partial}\psi = \mathbf{0}, \quad (\text{A.62})$$

aqui usamos a forma compacta através da notação *slash*, $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

Definimos convenientemente uma nova matriz γ_5 a partir das matrizes de Dirac, tal que

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.63})$$

onde são as matrizes de Dirac definidas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.64})$$

sendo σ^i as matrizes de Pauli² e $i = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$. A partir dessa definição achamos o anti-comutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu. \quad (\text{A.66})$$

Desta forma, temos uma outra possível solução para (A.23),

$$i\cancel{\phi}\gamma_5\psi = -i\gamma_5\cancel{\phi}\psi = \mathbf{0}. \quad (\text{A.67})$$

Por fim, concluímos que quaisquer combinações lineares de (A.62) e (A.67) são também soluções de (A.23). Consideramos as seguintes combinações

$$i\cancel{\phi}\frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma_5)\psi = \mathbf{0}, \quad (\text{A.68})$$

temos explicitamente na forma matricial que

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.69})$$

quando aplicados à ${}^3\psi$,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \psi_R, \quad (\text{A.70})$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_L \end{pmatrix} = \psi_L. \quad (\text{A.71})$$

Achamos então os projetores quirais de mãos direita (\mathbf{P}_R) e es-

²As matrizes de Pauli de ordem 2×2 , são definidas como (GRIFFITHS, 1987)

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i \\ i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

³Podemos considerar que $\psi_{R,L}$ são auto-estados da helicidade dado pelo operador \hat{h} , o qual, é igual neste caso (sem massa) à quiralidade dada pelo operador γ_5

$$\hat{h}\psi_{R,L} = \pm\mathbf{1}\psi_{R,L} \equiv \gamma_5\psi_{R,L} = \pm\mathbf{1}\psi_{R,L}.$$

querda (P_L)⁴

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (\text{A.72})$$

de fato respeitam as relações para projetores

$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_R + P_L = 1. \quad (\text{A.73})$$

A.2.4.1 Quarks *up* e *down* e a simetria quiral

Neste trabalho estamos interessados em descrever interações entre hádrons à baixas energias, para tanto, vamos utilizar a simetria quiral, que deverá ser invariante nas interações fortes. Porém, como vimos, a simetria não é bem definida para partículas massivas, logo, teríamos de considerar partículas não massivas para intermediar (bósons de Goldstone) a interação entre hádrons. Sabemos experimentalmente que tais bóson não existem mas, poderíamos considerar as partículas bosônicas mais leves conhecidas, os mésons- π (tripleto) compostos pelos quarks (férmios) *up* (u) e *down* (d).

Assim, buscamos uma forma de conservar a simetria quiral de forma aproximada (parcial) utilizando do argumento que, as massas dos quarks (m_u, m_d) considerados e por consequência a massa dos píons (m_π) são desprezíveis comparadas às energias típicas das interação fortes $M_H \approx 1\text{GeV}$ (BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995), os valores das massas (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016) são

$$m_u = 2.3_{-0.5}^{+0.7} \text{ MeV}, \quad m_d = 4.8_{-0.3}^{+0.7} \text{ MeV}, \\ m_\pi = 139.57 \text{ MeV}. \quad (\text{A.74})$$

Para isso, é necessário encontrar através da lagrangiana para o dubleto de quarks (dubleto de isospin), uma transformação de *gauge*, achando assim as correntes referentes à simetria quiral. Usamos então a lagrangiana de Dirac (A.22)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \hat{m}\bar{\psi}\psi, \quad (\text{A.75})$$

⁴Até aqui consideramos o caso de férmios sem massa, porém este operados são validos para o caso massivo, mas, não dão a helicidade exata.

onde os espinores dos dubletos são⁵ (os super índices se referem aos quarks **up** (u) e **down** (d))

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^u \\ \psi^d \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\psi^{d\dagger}, \psi^{u\dagger}), \quad (\text{A.76})$$

e as massas são descritas pela matriz

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_d \end{pmatrix} \approx \mathbf{0}, \quad (\text{A.77})$$

que neste caso vamos desprezar.

Vamos usar neste primeiro momento, espinores que levam em conta o sabor (u, d) e a quiralidade (mãos direita (R) e esquerda (L)), para explicitarmos os procedimentos dos cálculos, os quais serão escritos mais adiante de forma compacta, assim

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_L^u \\ \psi_R^d \\ \psi_L^d \end{pmatrix}. \quad (\text{A.78})$$

Aplicando (A.78) e seu adjunto em (A.75), considerando (A.77), temos explicitamente

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &= i(\psi_R^{d\dagger}, \psi_L^{d\dagger}, \psi_R^{u\dagger}, \psi_L^{u\dagger}) \\ &\times \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & \mathbf{1}_{2\times 2} \\ \mathbf{1}_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{pmatrix}}_{\gamma^0} \partial_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} & -\sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{pmatrix}}_{\gamma^i} \partial_i \right] \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_L^u \\ \psi_R^d \\ \psi_L^d \end{pmatrix} \\ &= i(\psi_R^{u\dagger} \partial_0 \psi_R^u + \psi_L^{u\dagger} \partial_0 \psi_L^u + \psi_R^{d\dagger} \partial_0 \psi_R^d + \psi_L^{d\dagger} \partial_0 \psi_L^d) \\ &\quad + i(\psi_R^{u\dagger} \sigma^i \partial_i \psi_R^u + \psi_L^{u\dagger} \sigma^i \partial_i \psi_L^u - \psi_R^{d\dagger} \sigma^i \partial_i \psi_R^d - \psi_L^{d\dagger} \sigma^i \partial_i \psi_L^d), \end{aligned}$$

multiplicando ambos os parenteses por $\mathbf{1} = (\gamma^0)^2$ e o segundo paren-

⁵O adjunto do espinor é calculado da seguinte forma

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi^{u\dagger}, \psi^{d\dagger}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\psi^{d\dagger}, \psi^{u\dagger}),$$

onde \dagger representa o adjunto do estado.

teses por $\mathbf{1} = (\gamma_5)^2$ na ordem apropriada,⁶ para que os espinores à esquerda tomem a forma adjunta

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &= i(\bar{\psi}_R^u\gamma^0\partial_0\psi_R^u + \bar{\psi}_L^u\gamma^0\partial_0\psi_L^u + \bar{\psi}_R^d\gamma^0\partial_0\psi_R^d + \bar{\psi}_L^d\gamma^0\partial_0\psi_L^d) \\ &\quad + i(\bar{\psi}_R^u\gamma^i\partial_i\psi_R^u + \bar{\psi}_L^u\gamma^i\partial_i\psi_L^u + \bar{\psi}_R^d\gamma^i\partial_i\psi_R^d + \bar{\psi}_L^d\gamma^i\partial_i\psi_L^d), \end{aligned}$$

onde usamos $\gamma^0\sigma^i\gamma_5 = \gamma^i$ e $\gamma_5\psi_{R,L}^d = -\psi_{R,L}^d$.

Logo,

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}_R^u\not{\partial}\psi_R^u + i\bar{\psi}_L^u\not{\partial}\psi_L^u + i\bar{\psi}_R^d\not{\partial}\psi_R^d + i\bar{\psi}_L^d\not{\partial}\psi_L^d. \quad (\text{A.79})$$

Escrevendo (A.79) de forma compacta, deixando a quiralidade explicita

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}_R^j\not{\partial}\psi_R^j + i\bar{\psi}_L^j\not{\partial}\psi_L^j, \quad (\text{A.80})$$

onde $j = u, d$ (válido também para o quark estranho (s)). Podemos considerar os espinores tendo somente duas componentes $\psi_{R,L}^j$.

Queremos que a lagrangiana (A.80) seja invariante sob a transformação de *gauge* do tipo (global),

$$U = e^{-iH} \quad (\text{A.81})$$

onde H é uma matriz 2×2 ⁷Hermitiana ($H^\dagger = H$). A forma mais geral de escrever H é,

$$H = \alpha\mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta} \quad (\text{A.82})$$

⁶Consideremos como exemplo de cálculos os espinores

$$\psi_R^u = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_R^d \\ 0 \end{pmatrix},$$

multiplicados pelas matrizes γ^0 e γ_5 de forma conveniente, temos

$$\psi_R^{u\dagger} \overbrace{\gamma^0\gamma^0}^{\mathbf{1}} \sigma^i \overbrace{\gamma_5\gamma_5}^{\mathbf{1}} \partial_i\psi_R^u = \bar{\psi}_R^u\gamma^i\partial_i\psi_R^u, \quad -\underbrace{\psi_R^{d\dagger}\gamma^0}_{\bar{\psi}_R^d} \underbrace{\gamma^0\sigma^i\gamma_5}_{\gamma^i} \partial_i \underbrace{\psi_R^d}_{-\psi_R^d} = \bar{\psi}_R^d\gamma^i\partial_i\psi_R^d,$$

onde

$$\gamma^0\sigma^i\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \gamma^i.$$

⁷Pois temos dois sabores de quarks ($j = u, d$).

sendo $\vec{\tau}$ as matrizes de Pauli (τ_1, τ_2, τ_3) , $\vec{\theta}$ e α são parâmetros reais arbitrários $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e o produto $\vec{\tau} \cdot \vec{\theta} = \tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2 + \tau_3 \theta_3$.⁸

Separamos essa transformação em duas partes: parte de mão-direita (R) e parte de mão-esquerda (L)⁹

$$\psi_R^j \rightarrow \psi_R'^j = e^{-\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}_R}{2}} \psi_R^j, \quad (\text{A.83})$$

$$\psi_L^j \rightarrow \psi_L'^j = e^{-\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}_L}{2}} \psi_L^j. \quad (\text{A.84})$$

Este é o grupo de simetria $SU(2)_R \times SU(2)_L$ (a lagrangiana deve satisfazer ambas as transformações neste grupo de simetria).

Fazendo uma expansão de (A.83) e (A.84) para pequenos valores de $\theta_{R,L}$ e então, aplicando à (A.80), temos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R'^j \not{\partial} \psi_R'^j &= \bar{\psi}_R^j (1 + i \frac{\tau^k}{2} \theta_R^k) \not{\partial} (1 - i \frac{\tau^k}{2} \theta_R^k) \psi_R^j \\ &= \bar{\psi}_R^j \not{\partial} \psi_R^j + \mathcal{O}(\theta_R^2) \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L'^j \not{\partial} \psi_L'^j &= \bar{\psi}_L^j (1 + i \frac{\tau^k}{2} \theta_L^k) \not{\partial} (1 - i \frac{\tau^k}{2} \theta_L^k) \psi_L^j \\ &= \bar{\psi}_L^j \not{\partial} \psi_L^j + \mathcal{O}(\theta_L^2). \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Foi usada a relação de comutação $[\vec{\tau}, \gamma^\mu] = \mathbf{0}$, pois, $\vec{\tau}$ tem espaço de atuação diferente de γ^μ e o índice $k = 1, 2, 3$ é relativo ao isospin.

Vemos de (A.85) e (A.86) que a lagrangiana (A.80) é em primeira ordem invariante sob as transformações (A.83) e (A.84). Esta é a chamada *Simetria Quiral*.

As correntes associadas à estas transformações podem ser encon-

⁸Aqui são as matrizes de Pauli relacionadas aos isospin e θ são os ângulos de rotação no espaço dos isospin.

⁹A parte da transformação dada por

$$e^{-i\alpha},$$

também pode ser separadas na partes R e L e ser consideradas do grupo $U_R(1) \times U_L(1)$ (para cada sabor u e d separadamente). Mas, não temos interesse nesse trabalho nestas transformações, ainda que façam parte da simetria quiral, pois, estão associadas à férmios únicos livres.

Estão associados a correntes de conservação do número de férmios e da chamada *anomalia axial*.

tradas usando a relação (A.36)

$$J^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \psi]} \frac{\delta \psi}{\epsilon^a}$$

resulta em

$$J_{R(L)}^{k\mu} = \bar{\psi}_{R(L)} \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi_{R(L)} \quad (\text{A.87})$$

onde usamos $\epsilon^a = i\theta_{R(L)}^k$ e $\delta\psi = i\frac{\tau^k}{2}\theta_{R(L)}^k$.

A simetria é mantida, quando a corrente (A.87) é conservada

$$\partial_\mu J_{R(L)}^{k\mu} = 0 \quad (\text{A.88})$$

A.2.4.2 Correntes: Vetor e Vetor-axial

Vamos definir duas novas correntes a partir das corretes calculadas em (A.87),

Corrente vetor:

$$V^{k\mu} = J_R^{k\mu} + J_L^{k\mu} \quad (\text{A.89})$$

Corrente vetor-axial:

$$A^{k\mu} = J_R^{k\mu} - J_L^{k\mu} \quad (\text{A.90})$$

sendo ainda $k = 1, 2, 3$.

Para calcularmos essas correntes temos de fazer uso das relações (A.70), (A.71) e seus adjuntos

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, & \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \\ \bar{\psi}_R &= \bar{\psi}\frac{1}{2}(1 - \gamma_5), & \bar{\psi}_L &= \bar{\psi}\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

substituindo essas relações em (A.87), (A.89) e (A.90) chegamos à

¹⁰Uma quantidade matemática pode ser classificada de acordo com sua transformação à paridade \mathbf{P} (GRIFFITHS, 1987). As mais comuns e do nosso interesse são:

<i>Escalar</i> :	$P(s) = s$
<i>Pseudoescalar</i> :	$P(p) = -p$

$$V^{k\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau^k}{2}\psi \quad A^{k\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2}\psi \quad (\text{A.92})$$

A transformações associadas são das seguintes formas (fazendo o caminho inverso)

$$\Lambda_V : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}}\psi \quad (\text{A.93})$$

$$\Lambda_V : \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{+i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}} \quad (\text{A.94})$$

$$\Lambda_A : \psi \rightarrow \psi' = e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}}\psi \quad (\text{A.95})$$

$$\Lambda_A : \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}} \quad (\text{A.96})$$

Estas transformações quando aplicadas a lagrangiana (A.80) se transformam de forma similar ao feito em (A.85) e (A.86)¹¹. Logo esta lagrangiana de férmios livres e não massivos é invariante sob Λ_V e Λ_A , os quais são uma nova forma de representar a simetria quiral.

A.2.4.3 Quebra de simetria: termo da massa

Mas, o que acontece se utilizarmos a lagrangiana para férmios com massa? Como já foi discutido, a massa impede a definição precisa da helicidade da partícula.¹² Portanto, esperamos que o formalismo construído ate aqui, nos mostre explicitamente como o termo da massa afeta as transformações Λ_V e Λ_A , e assim, a quebra da simetria quiral.

Usando a lagrangiana (A.75),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \hat{m}\bar{\psi}\psi,$$

já sabemos que o primeiro termo é invariante sob Λ_V e Λ_A , logo, temos

$$\text{Vetor :} \quad P(\vec{v}) = -\vec{v}$$

$$\text{Pseudovetor (ou vetor axial):} \quad P(\vec{a}) = \vec{a}$$

¹¹Levando em conta as relações de comutação

$$[\gamma_0, \gamma_5] = 0,$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_5] = 0.$$

¹²O termo da massa mistura os espiniores: $\hat{m}\bar{\psi}\psi = \hat{m}(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$.

somente que fazer as transformações para o termo da massa.

$$\begin{aligned}
 \Lambda_V : -\hat{m}\bar{\psi}\psi &= -\bar{\psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\hat{m}(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\psi \\
 &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi + \mathcal{O}(\theta_R^2) \\
 &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi
 \end{aligned} \tag{A.97}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_A : -\hat{m}\bar{\psi}\psi &= -\bar{\psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\hat{m}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\psi \\
 &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi - 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}\psi + \mathcal{O}(\theta_R^2) \\
 &= -\hat{m}\bar{\psi}\psi - 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}\psi
 \end{aligned} \tag{A.98}$$

Notamos que não alcançamos o mesmo termo em primeira ordem para Λ_A . Assim, a simetria foi quebrada e o vetor-axial não é uma boa simetria para o caso de férmios massivos.

Porém, como a massa dos quarks considerados (\mathbf{u}, \mathbf{d}) são pequenos relativos a ordem de energia das interações fortes, podemos dizer que a simetria Λ_A é aproximadamente conservada (parcial).

Escrevemos essa quebra de simetria, em termos da divergência da corrente $\mathbf{A}^{k\mu}$, a qual, é proporcional ao termo não simétrico (termo extra)

$$\partial_\mu \mathbf{A}^{k\mu} = 2i\hat{m}\bar{\psi}\gamma_5\frac{\tau^k}{2}\psi = i\bar{\psi}\left\{\hat{m}, \frac{\tau^k}{2}\right\}\gamma_5\psi. \tag{A.99}$$

A.2.5 Decaimento do pión e a relação PCAC

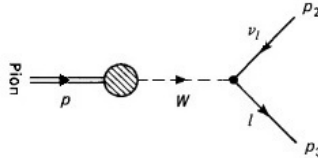
O processo de decaimento do pión é do tipo: $\pi^- \rightarrow l + \bar{\nu}_l$, isto é, o pión decai em um lépton e um anti-neutrino à este lépton associado ($l = e, \mu$).

A partir do diagrama de Feynman desse decaimento (Figura 37), podemos deduzir que a amplitude de espalhamento desse processo deve ter a forma geral

$$\mathcal{M} = \frac{g_W^2}{M_W^2} [\bar{\psi}_l(p_3)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_l}(p_2)]F^\mu, \tag{A.100}$$

onde $\bar{\psi}_l(\mathbf{p}_3)$ e $\psi_{\nu_l}(\mathbf{p}_2)$ são os espiniores dos léptons, o termo $\frac{g_W^2}{M_W^2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)$ é o fator do vértice da interação entre os léptons e o bóson \mathbf{W} (interação fraca) e por fim temos o *fator de forma* \mathbf{F}^μ . O fator de forma

Figura 37 – Decaimento do pión



Fonte: Adaptado de Griffiths (1987)

descreve a interação entre o π e o \mathbf{W} o qual, deve ser um quadrivetor para que (A.100) seja um invariante (escalar) de Lorentz (transformações relativísticas). Porém o pión é um pseudo-escalar¹³ (spin 0), isso é, seu estado (ϕ) não tem parte vetorial (claro é um pseudoescalar).

O único quadrivetor associado ao pión é o seu quadrimomento (\mathbf{p}^μ), relacionado ao estado do pión através de sua derivada ($\mathbf{p}^\mu = \partial^\mu \phi$). Então o fator de forma deve ser igual à

$$\mathbf{F}^\mu = \mathbf{f}_\pi \mathbf{p}^\mu, \quad (\text{A.101})$$

sendo \mathbf{f}_π um número chamado *constante de decaimento do pión*. Seu valor definido experimentalmente é $\mathbf{f}_\pi = 93 \text{ MeV}$ (GRIFFITHS, 1987; PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Da teoria de Fermi para interações fracas (estabelecida antes da teoria de *gauge*), temos um modelo com lagrangiana do tipo *corrente-corrente* chamada de *efetive four-fermion*¹⁴, a qual, já incluem as interações entre os bósons (intermediadores da interação) \mathbf{W} e \mathbf{Z} com os léptons e hádrons. A lagrangiana tem a forma geral

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum J_\mu^\dagger J^\mu, \quad (\text{A.102})$$

¹³Ver a nota de rodapé número 10.

¹⁴Fermi propôs esse modelo nos anos de 1960, quando não se conhecia ainda a terceira geração de léptons, isso é, não era descoberto ainda a partícula tau (τ) e seu neutrino. Por isso nesse primeiro momento só se levou em conta os 4 léptons da primeira e segunda geração do modelo padrão.

Como temos interesse somente na primeira geração, no nosso estudo, não temos a pretensão de aprofundar questões da teoria da interação fraca.

onde $G_F/\sqrt{2}$ é a constante efetiva de interação que usaremos como $\approx g_W^2/M_W^2$.

A corrente fraca \mathbf{J}^μ é a soma entre a parte leptônica e hadrônica:

$$\mathbf{J}^\mu = \mathbf{J}_{lept}^\mu + \mathbf{J}_{had}^\mu. \quad (\text{A.103})$$

A parte leptônica é dada por

$$\mathbf{J}_{lept}^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu}, \quad (\text{A.104})$$

e a parte hadrônica é dado pela combinação linear das corrente vetor e vetor-axial

$$\mathbf{J}_{had}^\mu = \mathbf{V}^\mu - \mathbf{A}^\mu. \quad (\text{A.105})$$

Podemos separar em três partes da lagrangiana **(A.102)**, que representam as interações: lépton-lépton, lépton-hádron e hádron-hádron.

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g_W^2}{M_W^2} \sum (\mathbf{J}_{lept} + \mathbf{J}_{had})_\mu^\dagger (\mathbf{J}_{lept} + \mathbf{J}_{had})^\mu. \quad (\text{A.106})$$

A parte de nosso interesse é a interação entre lépton-hádron, a qual, pode descrever o decaimento do pión (Figura 37). Usando a primeira parte de **(A.104)** e a segunda de **(A.105)**, temos

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{g_W^2}{M_W^2} [\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}] \mathbf{A}^\mu, \quad (\text{A.107})$$

usamos vetor \mathbf{A}^μ , uma vez que o pión é descrito por um campo pseudo-vetorial (axial). Não poderia ser diferente, já que a relação **(A.100)** tem exatamente a mesma forma.

Logo, concluímos que

$$\mathbf{A}^\mu = \mathbf{F}^\mu = f_\pi \mathbf{p}^\mu. \quad (\text{A.108})$$

A.2.5.1 A relação PCAC

Justificado a relação entre o decaimento do pión com o vetor-axial \mathbf{A}^μ , vamos proceder de uma outra forma para descrever o decaimento do pión (ERICSON; WEISE, 1988; CHENG; LI, 1988; KOCH, 1997; ZEE, 2003; FINELLI, 2011).

Considerando que $|\mathbf{0}\rangle$ (vácuo) e $|\pi\rangle$ (estado do pión) são auto-estados do operador quadrimomento \mathbf{P}_μ , com auto-valores, $\mathbf{0}$ e \mathbf{p}_μ res-

pectivamente. Podemos descrever o decaimento do pión através do elemento de matriz $\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) | \pi \rangle$, isto é, a transição do estado de pión para o estado de vácuo.

Levando em conta a equação de movimento de Heisenberg na forma relativística

$$[\mathbf{P}_\lambda, \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x})] = -i\partial_\lambda \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) \quad (\text{A.109})$$

fazemos,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{P}_\lambda \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) \mathbf{P}_\lambda | \pi \rangle &= -i\partial_\lambda \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) | \pi \rangle \\ \Rightarrow -\mathbf{p}_\mu \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) | \pi \rangle &= -i\partial_\lambda \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) | \pi \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

integrando no intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ ¹⁵ chegamos à¹⁶

$$\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x}) | \pi \rangle = \langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{0}) | \pi \rangle e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.111})$$

Utilizando a mesma justificativa para (A.101), sendo o momento \mathbf{p}_μ vetor¹⁷ para o pión, temos

$$\langle 0 | \mathbf{A}_\mu^a(\mathbf{0}) | \pi^b \rangle = -i f_\pi \mathbf{p}_\mu \delta^{ab}, \quad (\text{A.112})$$

onde impomos a conservação de isospin através de δ^{ab} , sendo $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ índices dos estados de isospin, $-i$ é convencional.

Desta forma com (A.111), chegamos ao elemento de matriz para o decaimento do pión

$$\langle 0 | \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x})^a | \pi^b \rangle = -i f_\pi \mathbf{p}_\mu \delta^{ab} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.113})$$

o divergente desta relação, será

$$\langle 0 | \partial^\mu \mathbf{A}_\mu(\mathbf{x})^a | \pi^b \rangle = -f_\pi \mathbf{p}^2 \delta^{ab} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.114})$$

Sabendo-se que $\delta^{ab} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \langle 0 | \phi^a(\mathbf{x}) | \pi^b \rangle$ é a normalização dos estados de isospin do pión, que aplicada à expressão anterior, resulta em

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu^a = -f_\pi m_\pi^2 \phi^a(\mathbf{x}), \quad (\text{A.115})$$

¹⁵Lembrando que

$$\partial_\lambda = \partial / \partial x^\lambda.$$

¹⁶Essa expressão reflete a invariância por translação.

¹⁷Umás vez que \mathbf{A}_μ é um pseudovetor e $|\pi\rangle$ um pseudoescalar, o produto de ambos só pode resultar em um vetor.

esta relação é conhecida como *relação PCAC*^{18 19}.

De posse da equação de Klein-Gordo sabemos que $-m_\pi^2 \phi(x) = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x)$ quando aplicada à (A.115) conclui-se

$$A_\mu^a = f_\pi \partial_\mu \phi^a(x). \quad (\text{A.116})$$

Da relação (A.115) relacionamos a massa do pión com a divergência do vetor-axial, deixando explícita a quebra da simetria quiral pela massa do pión. Poderíamos pensar que deveríamos usar a relação (A.99), para relacionar a massa do pión com a divergência do vetor-axial, porém a questão é que a corrente A^μ é definida através dos campos de espinores, (partículas com spin $1/2$) dos quarks que compõem o pión. Assim como o pión é uma combinação de quarks, todos os hádrons também o são, logo é de se esperar que, será possível encontrar relações entre as correntes quirais e os hádrons.

Observamos também que a massa do pión é considerada pequena em relação as escalas de energias da interação forte, assim a simetria quiral é aproximadamente (parcial) conservada. Esta é a essência da hipótese PCAC.

A.2.6 Relação de Goldberger-Treiman

Vamos encontrar uma relação para a interação pión-núcleon. Esse método pode ser usado para relacionar diferentes processos de interação (ERICSON; WEISE, 1988; KOCH, 1997; FINELLI, 2011).

Como o A_μ é em função de espinores, podemos então relacionar com o núcleon ($\psi_N = (\textit{proton}, \textit{neutron})$)

$$A_\mu^N = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N. \quad (\text{A.117})$$

onde $g_a = \mathbf{1}, \mathbf{25}$ é um fator de normalização do núcleon (extraído do decaimento β do nêutron).

Com auxílio da equação de Dirac achamos a divergência de (A.117),

$$\partial^\mu A_\mu^N = i g_a m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N, \quad (\text{A.118})$$

a qual, certamente não é nula.

Pelo fato do núcleon interagir fortemente com o pión, podemos

¹⁸As relações (A.114) e (A.116) são as vezes também reconhecidas como relação PCAC.

¹⁹PCAC é a sigla para Partially Conserved Axial Current.

escrever o vetor-axial como a soma das partes do pión (PCAC) (A.116) e do núcleon (A.117)

$$\mathbf{A}_\mu = g_\alpha \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \Phi(x). \quad (\text{A.119})$$

Agora tirando sua divergência e igualando a zero para que o sistema pión-núcleon seja invariante quirial

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = i g_\alpha m_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi_N + f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \Phi = \mathbf{0}. \quad (\text{A.120})$$

Deixando o campo escalar (pion) em evidencia

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = -i g_\alpha \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi_N. \quad (\text{A.121})$$

Chegamos a uma relação entre equação de Klein-Gordon (pion) sem massa, acoplado ao núcleon.

Da condição PCAC e da conservação da corrente-axial ($\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = \mathbf{0}$), concluímos que o pión deveria ter uma massa nula. Porém, a massa do pión, por ser pequena, pode ser considerada, assim reescrevemos (A.121) como

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \Phi = -i g_\alpha \frac{m_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi_N. \quad (\text{A.122})$$

Então, temos um pión massivo interagindo com um núcleon, a constante de acoplamento pión-núcleon é

$$g_{\pi NN} = g_\alpha \frac{m_N}{f_\pi} \approx 12.5, \quad (\text{A.123})$$

esta é a relação de *Goldberger-Treiman*.

A relação PCAC obteve grande sucesso, quando da dedução da relação de Goldberger-Treiman, pois o valor experimental para o acoplamento pión-núcleon é

$$g_{\pi NN}^{exp} = 13.4. \quad (\text{A.124})$$

Tal concordância é bastante impressionante, já que a interação forte pión-núcleon contem fatores da interação fraca (g_α e f_π). Isso só foi possível devido a simetria quirial, a qual, através do vetor-axial pode relacionar partes físicas diferentes.

A.3 LAGRANGIANAS QUIRAIS

A.3.1 Modelo sigma-linear

O modelo sigma-linear (GELL-MANN; LÉVY, 1960; KOCH, 1997; FINELLI, 2011), tem por objetivo sistematizar as interações hadrônicas em baixas energias, usando da simetria quiral e sua ligação com as relações até aqui estabelecidas, que esta de acordo com o modelo de quarks. Este modelo foi proposto antes da teoria de interações fortes atual, a QCD.

Vamos deduzir a seguir um modelo simples para a interação pión-núcleon, construindo uma lagrangiana que seja, um invariante de Lorentz, assim como, invariante das transformações da simetria quiral: vetor (Λ_V) e vetor-axial (Λ_A).

De acordo com o modelo de quarks, podemos combiná-los de forma a descrever os campos dos mésons: $\vec{\pi}$ e σ . Assim temos um campo triplete pseudo-escalar e um campo singlete escalar, respectivamente

$$\vec{\pi} = i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi, \quad \sigma = \bar{\psi}\psi. \quad (\text{A.125})$$

Logo suas transformações são,
para o pión:

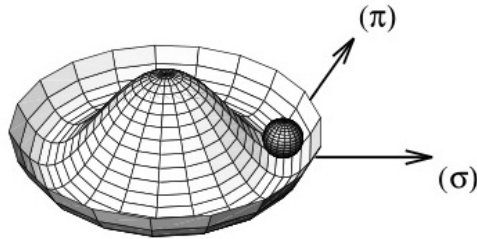
$$\Lambda_V : \pi_i \longrightarrow \pi_i + \epsilon_{ijk}\theta_j\pi_k, \quad \Lambda_A : \pi_i \longrightarrow \pi_i + \theta_i\sigma, \quad (\text{A.126})$$

para o sigma:

$$\Lambda_V : \sigma \longrightarrow \sigma, \quad \Lambda_A : \sigma \longrightarrow \sigma - \theta_i\pi_i. \quad (\text{A.127})$$

Vemos que a transformação vetorial (Λ_V) rotaciona o pión no espaço do isospin (tripleto) em um ângulo θ . Por σ ser um singleto de isospin, não sofre mudanças. A transformação vetor-axial (Λ_A) rotacionam um campo no outro e vice-versa, o que implica que os mésons devem ter massas iguais. Aqui encontramos um problema, pois, os mésons π e σ possuem massas diferentes, logo, vemos que a transformação (Λ_A) não é uma boa simetria. Então, temos aqui uma quebra espontânea de simetria.

Para entender o que isso significa, vamos voltar à seção (A.2.3.1), na qual, tratamos da quebra espontânea de simetria para duas variáveis.

Figura 38 – Quebra de simetria quiral para os mésons π e σ 

Fonte: Adaptado de Koch (1997)

Vamos considerar que os campos π_i e σ são os campos da lagrangiana (A.47), em que, ocorre a quebra da simetria radial, mas mantém válida a simetria de rotação (sem considerar um ponto em particular). Lembramos também que esta lagrangiana tem a si associada o teorema de Goldstone, o qual diz que toda quebra espontânea de simetria tem um campo massivo e os demais (caso com mais de duas variáveis) sem massa (bósons de Goldstone).

Assim, escolhemos o pión como o campo não massivo, cujo estado excitado equivale a rotações e o sigma como o campo massivo (por ter o número quântico do vácuo diferente de zero $\langle \sigma \rangle = \sigma_0$, mínimo do potencial), o qual adquire massa quando varia na direção radial (estado excitado), causando a quebra a simetria (Figura 38).

Vemos na Figura 38 que a direção do pión é exatamente a direção do vetor rotação (talvez não tão claro na figura), e que na direção do sigma temos o vetor da direção radial, considerando que a esfera é a origem deslocada devida a quebra de simetria. Quando da transformação vetor-axial, o pión (π) é rotacionado para a direção do sigma (σ), adquirindo massa causada pela quebra de simetria, assim os mésons têm massa diferentes, isso está de acordo com o experimento.

Precisamos encontrar uma relação entre os campos, tal que, consigamos um invariante da simetria, e assim construir um modelo. A transformação Λ_V provoca uma rotação de isospin, logo essa transformação do quadrado dos campos deve ser invariante, isto é

$$\Lambda_V : \quad \pi^2 \longrightarrow \pi^2, \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2, \quad (\text{A.128})$$

já no caso de Λ_A temos

$$\Lambda_A : \pi^2 \longrightarrow \pi^2 - 2\sigma\theta_i\pi_i, \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 + 2\sigma\theta_i\pi_i. \quad (\text{A.129})$$

Notemos que a soma dos campos ao quadrado deve ser invariante em relação a ambas as transformações

$$\Lambda_{V,A} : \quad (\pi^2 + \sigma^2) \longrightarrow (\pi^2 + \sigma^2), \quad (\text{A.130})$$

sendo também invariante de Lorentz.

A partir de **(A.130)** podemos achar os termos de interações entre o núcleon e os mésons considerados. Fazemos isso combinando o espinores do núcleon (ψ_N) de forma a ter os mesmos números quânticos do pión e do sigma, isto é, um pseudo-escalar e um escalar. Dessa forma quando multiplicados por π e σ respectivamente, obtermos os mesmo números quânticos de π^2 e σ^2 .

Para a interação com o pión (pseudo-escalar) temos

$$g_\pi(i\bar{\psi}_N\gamma_5\vec{\tau}\psi_N) \cdot \vec{\pi} \quad (\text{A.131})$$

onde $g_\pi = g_{\pi NN}$ é a constante de acoplamento pión-núcleon.

A interação mais simples com o sigma (escalar) é

$$g_\pi(\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma \quad (\text{A.132})$$

Essas interações são invariantes quirais quando somadas **(A.130)**, fazendo isso temos finalmente a lagrangiana de interação mais simples

$$\mathcal{L}_{int} = -g_\pi[(i\bar{\psi}_N\gamma_5\vec{\tau}\psi_N) \cdot \vec{\pi} + (\bar{\psi}_N\psi_N)\sigma] \quad (\text{A.133})$$

O próximo elemento intuitivo que deve conter no modelo, são os termos cinéticos do núcleon e dos mésons

$$\mathcal{L}_{cin} = i\bar{\psi}_N\not{\partial}\psi_N + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \partial^\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \quad (\text{A.134})$$

Esse termo é composto por termos invariantes de Lorentz e quirais, logo é também um invariante. O primeiro termo é um férmio sem massa e os demais ter a mesma estrutura da relação invariante quiral **(A.130)**.

Mas onde estão os termos de massa? Estamos procurando um modelo o mais realista possível, logo, deveríamos esperar que os termos de massa do núcleon e dos mésons apareçam de alguma forma no

modelo. E de fato, podemos fazer isto.

Primeiro vamos tratar da massa do núcleon e mais adiante voltaremos às massas dos mésons. A massa do núcleon quebra a explicitamente simetria quiral, é consideravelmente grande para que, se possa fazer qualquer aproximação do tipo *PCAC*.

Se repararmos na relação (A.132) e lembrando a relação de *Goldberger-Treiman* (A.123) temos

$$g_\pi (\bar{\psi}_N \psi_N) \sigma = g_a \frac{m_N}{f_\pi} (\bar{\psi}_N \psi_N) \sigma \quad (\text{A.135})$$

se consideramos $g_a \approx 1$ e lembrando que o termo de massa das partículas estão sempre relacionadas ao termo $\bar{\psi}_N \psi_N$ nas lagrangianas, então concluímos

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0 = f_\pi \quad (\text{A.136})$$

Esta relação nos diz que o valor de vácuo²⁰ do campo σ deve ser diferente de zero, o que de fato já sabíamos, esse termo é o ponto de mínimo do potencial, que para conter a massa do núcleon deve ter o valor f_π . Portanto concluímos a massa do núcleon aparece no modelo como resultado da interação entre o núcleon com σ e não aparece no modelo explicitamente. Seu valor é

$$M_N = g_\pi \sigma_0 = g_\pi f_\pi \quad (\text{A.137})$$

Como sabemos que o mínimo do potencial não nulo, logo temos uma quebra de simetria, portanto temos um potencial invariante (A.130) descrito por (Figura 38)

$$V = V(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) = \frac{\lambda}{4} ((\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 \quad (\text{A.138})$$

com o mínimo no ponto $\vec{\pi} = \mathbf{0}$, $\sigma = f_\pi$.

Tudo até aqui esta consistente com nossos objetivos e resumimos escrevendo a lagrangiana do modelo sigma linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LS} = & \left[i\bar{\psi}_N \not{\partial} \psi_N \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \right]_{(2)} + \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \right]_{(3)} \\ & + \left[-g_\pi (i\bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau} \psi_N \cdot \vec{\pi} + \bar{\psi}_N \psi_N \sigma) \right]_{(4)} \end{aligned}$$

²⁰A massa está relacionado ao valor de vácuo do campo, pois, quando não temos energia cinética e estamos no valor mínimo do potencial, tudo o que resta é a partícula em si, ou seja, sua massa de repouso.

$$-\left[\frac{\lambda}{4}((\boldsymbol{\pi}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2) - f_\pi^2)^2\right]_{(5)} \quad (\text{A.139})$$

aqui temos:

(1) → Termo cinético do núcleon;

(2) → Termo cinético do pión;

(3) → Termo cinético do sigma;

(4) → Termos de interação $\boldsymbol{\pi}$ - $\boldsymbol{\sigma}$ - núcleon, com a massa do núcleon implícita;

(5) → Potencial do sistema $\boldsymbol{\pi}$ - $\boldsymbol{\sigma}$.

E então, onde estão os termos de massa dos mésons? A resposta é simples, estão de alguma forma relacionadas ao potencial (5). Vamos então expandir os campos do potencial para valores próximos do mínimo ($\tilde{\boldsymbol{\pi}}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_0$). Temos, portanto, pequenas perturbações dos campos

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \delta\boldsymbol{\sigma} \quad \tilde{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{0} + \delta\tilde{\boldsymbol{\pi}} \quad (\text{A.140})$$

As perturbações $\delta\boldsymbol{\sigma}$ e $\delta\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ são de fato os campos relacionados às partículas reais (observáveis). O potencial expandido em relação a ambos os campos fica

$$V(\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\pi}}) \Big|_{\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\sigma}_0} = \lambda f_\pi^2 (\delta\boldsymbol{\sigma})^2 + \mathcal{O}(\delta)^3 \quad (\text{A.141})$$

Como os termos de massa estão sempre relacionados com os termos quadráticos dos campos, achamos finalmente, as massas dos mésons comparando com a lagrangiana para bósons

$$m_\pi^2 = 0, \quad (\text{A.142})$$

$$m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 \neq 0 \quad (\text{A.143})$$

a massa do pión ta de acordo com o teorema de Goldstone, como havíamos assumido.

A.3.1.1 Quebra explícita de simetria

Se ainda neste modelo quisermos considerar o pión como massivo, mesmo que com pequena massa de acordo com a relação *PCAC*, temos

Figura 39 – Massas na quebra de simetria quiral

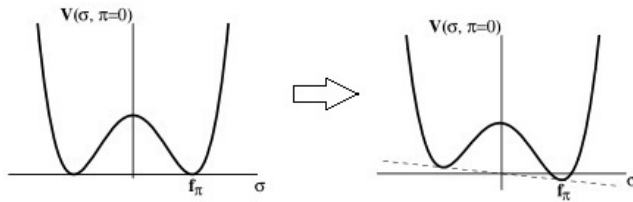
$$\begin{aligned}
 m_\sigma^2 = 0 &\Rightarrow m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 \\
 m_\pi^2 = 0 &\Rightarrow m_\pi^2 = 0 \text{ Goldstone bosons} \\
 m_N = 0 &\Rightarrow m_N = g_\pi f_\pi
 \end{aligned}$$

Fonte: Adaptado de Finelli (2011)

que adicionar um termo de quebra explícita de simetria. Essa quebra explícita não é o mesmo que quebra espontânea de simetria.

A quebra espontânea de simetria quebra a simetria radial, mas ainda é invariante por rotações, já a quebra explícita de simetria quebra também a simetria por rotações. Para tanto, adicionamos um termo ao potencial, isso equivale a inclinar ("afundar") o potencial em qualquer direção, escolhemos a direção σ (Figura 40).

Figura 40 – Quebra explícita de simetria quiral



Fonte: Adaptado de Finelli (2011)

Sabemos que o termo de massa dos quarks quebra a simetria, portanto esperamos que o fator de quebra explícita de simetria, seja da forma

$$\mathcal{L}_{quebra} = -m\bar{\psi}\psi \quad (\text{A.144})$$

Podemos escrever esse fator em função de σ , assim

$$\mathcal{L}_{quebra} = \epsilon\sigma \quad (\text{A.145})$$

onde ϵ é o parâmetro de quebra e deve ser de valor pequeno, uma vez que a quebra explícita de simetria é pequena (como deveríamos esperar, de acordo com *PCAC*).

Adicionando ao potencial fica

$$V(\boldsymbol{\sigma} + \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}((\pi^2 + \sigma^2) - \nu_0^2)^2 - \epsilon \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.146})$$

o termo f_π foi trocado pelo fator genérico ν_0 , pois queremos que o mínimo do potencial ainda seja o mesmo (f_π). E deve satisfazer $\nu_0 = f_\pi$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Calculando o mínimo de forma a manter $\boldsymbol{\sigma}_0 = f_\pi$ e considerando que $\epsilon^2 \rightarrow 0$ ²¹ por ser muito pequeno, temos para ν_0

$$\nu_0 = f_\pi - \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2} \quad (\text{A.147})$$

Se observarmos a Figura 40, notamos que (A.147) esta de acordo com essa pequena inclinação do potencial, logo ν_0 é o valor do mínimo no eixo $\boldsymbol{\sigma}$, enquanto o mínimo do potencial permanece sendo f_π .

De posse desse novo potencial vamos novamente expandir o potencial em torno dos mesmo mínimos $(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$, como fizemos em (A.141), assim as novas massas proporcionais as segundas derivadas (que multiplicam os termos $\delta\pi^2$ e $\delta\sigma^2$) são

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\sigma}_0} = 2\lambda\nu_0^2 = 2\lambda f_\pi^2 + \frac{\epsilon}{f_\pi}, \quad (\text{A.148})$$

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\sigma}_0} = \frac{\epsilon}{f_\pi} \neq 0. \quad (\text{A.149})$$

Constatamos que as massas ficaram maior, a massa do pión como queríamos não é mais nula, e daqui tiramos o valor do parâmetro de quebra

$$\epsilon = f_\pi m_\pi^2 \quad (\text{A.150})$$

era de se esperar que este parâmetro fosse proporcional a massa do pión, afinal quando $\epsilon \rightarrow 0$ temos $m_\pi = 0$.

Como o termo $\boldsymbol{\sigma}_0 = f_\pi$ continua o mesmo, a massa do núcleo continua a mesma (A.137). Porém a quebra explícita de simetria tem parte nessa massa, usando a relação (A.147) chegamos à

$$M_N = g_\pi \boldsymbol{\sigma}_0 = g_\pi \left(\nu_0 + \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2} \right) \quad (\text{A.151})$$

²¹O detalhe aqui é que no potencial ν_0 está ao quadrado, logo isolando-o tivemos que completar quadrado, sobrando um termo proporcional à ϵ^2 .

onde temos o termo *núcleon-píon-sigma*²²

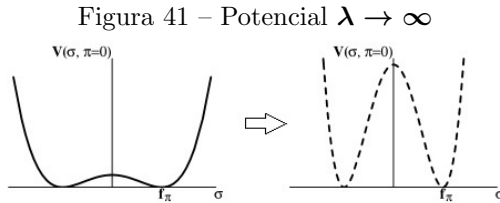
$$\Sigma_{\pi N} = g_{\pi} \frac{\epsilon}{2\lambda f_{\pi}^2} \approx g_{\pi} f_{\pi} \frac{m_{\pi}^2}{m_{\sigma}^2} \quad (\text{A.152})$$

Esse termo é medido experimentalmente

A.3.2 Modelo sigma não-linear

Nosso interesse é em um modelo que descreve a interação entre píon e o núcleon. Então queremos que o σ saia de cena, deixando a lagrangiana do modelo somente em termos do píon e do núcleon (WEINBERG, 1968).

Se considerarmos uma escala de energia bem abaixo da massa do σ , poderemos deixar o modelo em função do campo de píons, que tem massa menor.²³ Assim, consideramos a condição $m_{\sigma} \rightarrow \infty$, que significa de acordo com (A.143) fazer o parâmetro $\lambda \rightarrow \infty$ mantendo o mesmo mínimo do potencial. Mudando o parâmetro λ e também o potencial (A.138), de forma que ele fique infinito, isso implica que a forma do potencial ficou muito mais "profunda" com "paredes" em volta do mínimo (Figura 41).



Fonte: Adaptado de Koch (1997)

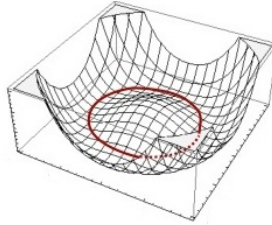
Isso implica que toda a dinâmica do modelo fica restrita aos pontos de mínimo, isto é, ao círculo com centro no eixo do potencial e raio f_{π} (Figura 42). Assim temos a condição que deve ser repetida nesse novo modelo

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_{\pi}^2 \quad (\text{A.153})$$

²²Tradução livre do nome em inglês *pion-nucleon sigma-term*.

²³Estamos novamente considerando o píon como um bóson Goldstone, isto é, massa zero.

Figura 42 – Dinâmica restrita ao círculo



Fonte: Finelli (2011)

Essa condição remove um grau de liberdade, agora temos somente a liberdade de rotação do píons (excitações). Podemos definir funções para σ e $\vec{\pi}$ que satisfaçam a relação (A.153) e dependam somente do angulo de rotação $\vec{\Phi}(x)$

$$\sigma(x) = f_{\pi} \cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_{\pi}}\right) = f_{\pi} + \mathcal{O}(\Phi^2) \quad (\text{A.154})$$

$$\vec{\pi}(x) = f_{\pi} \hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_{\pi}}\right) = \vec{\Phi}(x) + \mathcal{O}(\Phi^3) \quad (\text{A.155})$$

onde $\Phi = |\vec{\Phi}| = \sqrt{\vec{\Phi}\vec{\Phi}}$ e $\hat{\Phi} = \vec{\Phi}/\Phi$. Fazendo uma expansão podemos identificar como sendo o campo de pión o ângulo de rotação.

Vamos definir a transformação unitária em termo do angulo $\vec{\Phi}$

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\Phi}(x)}{f_{\pi}}} = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_{\pi}}\right) + i\vec{\tau}\cdot\hat{\Phi}\sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_{\pi}}\right) \\ &= \frac{1}{f_{\pi}}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

sendo U uma matriz 2×2 .

Tirando o traço²⁴ desta relação, temos

$$\frac{1}{2}\text{Tr}(U^{\dagger}U) = \frac{1}{f_{\pi}^2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = 1 \quad (\text{A.157})$$

essa transformação é unitária e satisfaz a relação (A.153).

²⁴O traço e a soma da diagonal é usada aqui para sair da forma matricial para a forma escalar.

Vamos construir a partir de (A.156) os termos cinéticos dos campos pión e sigma. Fazendo suas derivadas temos

$$\partial_\mu U = \frac{1}{f_\pi} (\partial_\mu \sigma + i\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) \quad (\text{A.158})$$

$$\partial_\mu U^\dagger = \frac{1}{f_\pi} (\partial_\mu \sigma - i\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) \quad (\text{A.159})$$

Multiplicando essas derivadas e tirando o traço, chegamos à

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) \quad (\text{A.160})$$

Para o termo de interação (A.133) usamos (A.154) e (A.155), assim

$$\begin{aligned} & -g_\pi [(i\bar{\psi}_N \gamma_5 \vec{\tau} \psi_N) \cdot \vec{\pi} + (\bar{\psi}_N \psi_N) \sigma] = \\ & = -g_\pi \bar{\psi}_N f_\pi \left[\cos\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{f_\pi}\right) \right] \psi_N \\ & = -g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \left(e^{i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \hat{\Phi}(x)}{f_\pi}} \right) \psi_N \\ & = -g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \Lambda \Lambda \psi_N, \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

sendo aqui definido

$$\Lambda \equiv e^{i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \hat{\Phi}(x)}{2f_\pi}}. \quad (\text{A.162})$$

Reescrevemos o campos do núcleon como

$$\Psi_N = \Lambda \psi_N \quad (\text{A.163})$$

$$\bar{\Psi}_N = \psi_N^\dagger \Lambda^\dagger \gamma^0 = \psi_N^\dagger \gamma^0 \Lambda = \bar{\psi}_N \Lambda \quad (\text{A.164})$$

onde na ultima relação usamos $\{\gamma_0, \gamma_5\} = 0$. Então (A.161) fica em relação a estes campos ($g_\alpha = 1$)

$$-g_\pi f_\pi \bar{\psi}_N \Lambda \Lambda \psi_N = -g_\pi f_\pi \bar{\Psi}_N \Psi_N = -m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N \quad (\text{A.165})$$

Desse modo, todo o termo de interação neste novo campo do núcleon

se resume à massa do núcleon.

Vamos escrever o termo cinético do núcleon nesse novo campo. Sabendo que $\Lambda^\dagger \Lambda = \Lambda \Lambda^\dagger = \mathbf{1}$, fazemos

$$i\bar{\psi}_N \not{\partial} \psi_N = i\bar{\psi}_N \Lambda \Lambda^\dagger \not{\partial} \Lambda^\dagger \Lambda \psi_N = i\bar{\Psi}_N \Lambda^\dagger \not{\partial} \Lambda^\dagger \Psi_N \quad (\text{A.166})$$

Aqui usamos a relação $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \mathbf{0}$, chegamos à

$$i\Lambda^\dagger \not{\partial} \Lambda^\dagger = i\gamma_\mu \Lambda \partial^\mu \Lambda^\dagger \quad (\text{A.167})$$

Vamos escrever Λ em função de um campo auxiliar ξ definido por

$$\xi = e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}(x)}{2f_\pi}} \quad U(x) = \xi^2 \quad (\text{A.168})$$

explicitamente temos

$$\xi = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) + i\vec{\tau} \cdot \hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) \quad (\text{A.169})$$

$$\xi^\dagger = \cos\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) - i\vec{\tau} \cdot \hat{\Phi} \sin\left(\frac{\Phi(x)}{2f_\pi}\right) \quad (\text{A.170})$$

Finalmente combinando linearmente o campo, encontramos

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\xi + \xi^\dagger) + \frac{1}{2}\gamma_5(\xi - \xi^\dagger) \quad (\text{A.171})$$

$$\Lambda^\dagger = \frac{1}{2}(\xi + \xi^\dagger) - \frac{1}{2}\gamma_5(\xi - \xi^\dagger) \quad (\text{A.172})$$

Voltando à (A.166) passando por (A.167) e sabendo que $\Lambda(\Phi(x))$, chegamos

$$i\bar{\Psi}_N \Lambda^\dagger \not{\partial} (\Lambda^\dagger \Psi_N) = \bar{\Psi}_N (i\not{\partial} + \gamma^\mu V_\mu + \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu) \Psi_N \quad (\text{A.173})$$

onde temos o corrente vetor

$$V_\mu = \frac{i}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \quad (\text{A.174})$$

e a corrente axial-vetor

$$A_\mu = \frac{i}{2} \left(\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger \right) \quad (\text{A.175})$$

Expandindo essas correntes e a relação (A.160) para pequena flutuações $\vec{\Phi}/f_\pi \ll 1$, temos^{25 26}

$$V_\mu \approx - \frac{\vec{\tau} \cdot (\vec{\Phi} \times \partial_\mu \vec{\Phi})}{4f_\pi^2} \quad (\text{A.176})$$

$$A_\mu \approx - \frac{\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\Phi}}{2f_\pi} \quad (\text{A.177})$$

$$\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) \approx \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 \quad (\text{A.178})$$

Não precisamos de um potencial nesse modelo, uma vez que, toda a dinâmica ocorre no círculo da condição (A.153). Então, já temos todas as partes para escrever a lagrangiana sigma não-linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SNL} = & \left[\bar{\Psi}_N (i\not{\partial} - m_N) \Psi_N \right]_{(1)} + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\Phi})^2 \right]_{(2)} \\ & + \left[\frac{1}{2f_\pi} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \Psi_N) \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} \right]_{(3)} \\ & + \left[\frac{1}{4f_\pi^2} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi_N) \cdot (\vec{\Phi} \times \partial_\mu \vec{\Phi}) \right]_{(4)} \end{aligned} \quad (\text{A.179})$$

aqui temos:

(1) → Termo cinético do núcleon;

(2) → Termo cinético do pión;

²⁵Expandindo os campos:

$$\begin{aligned} \xi &\approx 1 + i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{2f_\pi} \\ \xi^\dagger &\approx 1 - i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}}{2f_\pi} \end{aligned}$$

²⁶Usamos as relações de comutação e anti-comutação:

$$[(\vec{a} \cdot \vec{\tau}), (\vec{b} \cdot \vec{\tau})] = 2i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\tau}; \quad \{(\vec{a} \cdot \vec{\tau}), (\vec{b} \cdot \vec{\tau})\} = 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(3) → Termo de interação entre pión-núcleon, vértice do tipo πNN (Figura 43 (b));

(4) → Termo de interação entre pión-núcleon, vértice do tipo $\pi N \pi N$ (Figura 43 (a)).

Figura 43 – Vértices de interação

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4f_\pi^2} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi) \cdot (\vec{\Phi} \times (\partial^\mu \vec{\Phi})) & + \frac{1}{2f_\pi} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \Psi) \partial^\mu \vec{\Phi} \\
 \text{a)} & \quad \begin{array}{c} \text{---} \pi \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} N \text{---} \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{c} \text{---} \pi \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} N \text{---} \end{array}
 \end{aligned}$$

Fonte: Finelli (2011)

Notamos que o campo σ , de fato desapareceram, e os termos de interação dependem do momento do pión ($\partial_\mu \vec{\Phi}$) e descrevem dois tipos de vértices. Mais tipos de interação podem aparacer se considerarmos termos de ordens maiores na expansão do campo $\vec{\Phi}$. Ambos o modelos sigma linear e não-linear dão resultados similares. Poderíamos também adicionar a massa do pión neste ultimo modelo, fazendo novamente uma quebra explicita de simetria.

A.3.3 Lagrangianas quirais

A.3.3.1 $\mathcal{L}_{\pi NN}$

Neste trabalho nosso interesse são as lagrangianas de interação, de onde iremos tirar os vértices para os diagrama de Feynmann, assim no caso da modelo sigma não-linear deduzimos a lagrangiana do vértice πNN (COLEMAN; WESS; ZUMINO, 1969; WEINBERG, 1979).

Fazendo as substituições (BANDO; KUGO; YAMAWAKI, 1988): $\Psi_N \rightarrow N$; $\vec{\Phi} \rightarrow \vec{\phi}$; $m_N \rightarrow M$; $g_\pi \rightarrow g$ e $f_\pi \rightarrow M/g$, temos do termo (3) de (A.179)

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \frac{g}{2M} (\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} N) \cdot \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (\text{A.180})$$

sendo aqui $\vec{\tau}$ uma matriz de isospin que combina um π e um N em um N , tal como $1 + 1/2 \rightarrow 1/2$.

A.3.3.2 $\mathcal{L}_{\rho NN}$ e $\mathcal{L}_{\pi\rho\pi}$

Outra interação de nosso interesse é com o méson vetorial de spin-isospin-1 rô ($\vec{\rho}$), com os vértices do tipo ρNN e $\pi\rho\pi$. Para tanto, temos de considerar a simetria quiral não mais como *global*, mas agora como *local*. Fazemos assim, a substituição da derivada ordinária ∂_μ para a derivada covariante D_μ (CHIMENTO; COSSARINI; PENSA, 1994; KO; RUDAZ, 1994; KIM et al., 2000; CONTI C GALEAO; KRMPOTIE, 2000). Assim,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i\Gamma_\mu, \quad (\text{A.181})$$

onde Γ_μ é o termo de conexão.

O termo em (A.173) terá uma nova transformação (BIRSE, 1996; STOKS; RIJKEN, 1997)

$$i\bar{\Psi}_N \Lambda^\dagger \not{D} (\Lambda^\dagger \Psi_N) = \bar{\Psi}_N (i\not{\partial} + g_0 \gamma^\mu v_\mu + \gamma^\mu \gamma_5 \chi_\mu) \Psi_N, \quad (\text{A.182})$$

onde

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{2} (\xi^\dagger D_\mu \xi + \xi D_\mu \xi^\dagger) = V_\mu + \frac{g_0}{2} (\xi^\dagger v_\mu \xi + \xi v_\mu \xi^\dagger), \quad (\text{A.183})$$

$$\chi_\mu = \frac{i}{2} (\xi^\dagger D_\mu \xi - \xi D_\mu \xi^\dagger) = A_\mu + \frac{g_0}{2} (\xi^\dagger v_\mu \xi - \xi v_\mu \xi^\dagger). \quad (\text{A.184})$$

sendo $v_\mu = \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\tau}/2$ o campo do méson rô e g_0 a constante de acoplamento universal do rô (WESS; ZUMINO, 1967).

Vemos que somente o termo $g_0 \gamma^\mu v_\mu$ de (A.182) é proporcional à \bar{N} , N e $\vec{\rho}$ de forma que podemos obtermos uma interação do tipo ρNN , esse termo é

$$\mathcal{L}_{\rho NN}^{(1)} = \frac{g_0}{2} [\bar{N} \gamma_\mu \vec{\tau} N] \cdot \vec{\rho}^\mu. \quad (\text{A.185})$$

Definimos o tensor de ρ (associado com a equação de Proca), como

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu + \vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu + \frac{g_0}{m_\rho^2} (D_\mu \vec{\phi} \times D_\nu \vec{\phi}). \quad (\text{A.186})$$

Podemos construir a partir de (A.186) mais termos para ρNN , que sejam invariantes quiral e de Lorentz, tal como

$$\frac{g_0}{4M} \left[\bar{N} \mu_a i \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} N \right] \cdot \rho_{\mu\nu} = \frac{g_0}{4M} \left[\bar{N} \mu_a i \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} N \right] \cdot (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) + \mathcal{C}, \quad (\text{A.187})$$

aqui $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$, o termos $\mu_a = (\mu_p - \mu_n)/2$ são os momentos magnético anômalos (isovetorial) do próton e do neutro, esta associado à saturação eletromagnética do núcleon, análogo à interação com o fóton. \mathcal{C} os termos que não são do tipo ρNN .

Logo temos a segunda parte da lagrangiana de interação ρNN ,

$$\mathcal{L}_{\rho NN}^{(2)} = \frac{g_0}{2} \left[\bar{N} \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{4M} \right) i \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} N \right] \cdot (\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu). \quad (\text{A.188})$$

Juntando ambas as lagrangianas ($\mathcal{L}_{\rho NN}^{(1)} + \mathcal{L}_{\rho NN}^{(2)}$) temos, finalmente a lagrangiana de interação entre o rô e o núcleon,

$$\mathcal{L}_{\rho NN} = \frac{g_0}{2} \left[\bar{N} \gamma_\mu \vec{\tau} N \right] \cdot \vec{\rho}^\mu + \frac{g_0}{2} \left[\bar{N} \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{4M} \right) i \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} N \right] \cdot (\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu), \quad (\text{A.189})$$

a primeira esta associada à interação com o campo vetorial ρ^μ e a segunda com a derivada do campo $\partial_\mu \rho_\nu$.

Para o vértice de interação $\pi \rho \pi$, podemos usar os termos invariante quiral e de Lorentz como

$$-\frac{1}{4} \text{Tr}(\rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}) = -\frac{g_0}{4m_\rho^2} (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi}) + \mathcal{A} \quad (\text{A.190})$$

e

$$-8g_0 f_\pi^2 \text{Tr}(v_\mu \Gamma^\mu) = g_0 \vec{\rho}^\mu \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}) + \mathcal{B} \quad (\text{A.191})$$

sendo \mathcal{A} e \mathcal{B} , termos que não contribuem pra a interação do tipo $\pi \rho \pi$, as contantes do lado esquerdo de (A.190) e (A.191) são escolhidas de forma conveniente, já que escalares não afetam a invariância da lagrangiana (FURNSTAHL; SEROT; TANG, 1997).

Deste modo, temos a lagrangiana de interação entre os mésons π e ρ do tipo $\pi \rho \pi$

$$\mathcal{L}_{\pi \rho \pi} = g_0 \vec{\rho}^\mu \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}) - \frac{g_0}{4m_\rho^2} (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi}) \quad (\text{A.192})$$

A.3.3.3 $\mathcal{L}_{\pi N \Delta}$

Para interação com partícula com spin- $\frac{3}{2}$, vamos recorrer as equações de Rarita-Schwinger (LOVAS; SAILER; GREINER, 1998),

$$(\not{\partial} - m_{\Delta})\psi^{\mu} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.193})$$

$$\gamma_{\mu}\psi^{\mu} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.194})$$

onde m_{Δ} é a massa do Δ a qual, representa nossa partícula de spin- $\frac{3}{2}$ e ψ^{μ} é o espinor-vetorial, que contem quatro espinores de índice μ .

Sabendo que partículas de spin- $\frac{3}{2}$ tem também projeções de spin- $\frac{1}{2}$ (HABERZETTL, 1998) e que lagrangiana de Rarita-Schwinger é invariante sob a transformação

$$\bar{\psi}_{\mu} \longrightarrow \bar{\psi}^{\nu} [g_{\mu\nu} + (Z + 1/2)\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}], \quad (\text{A.195})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e Z um parâmetro a ser determinado associado à possibilidade de que Δ , fora da camada de massa, possuir spin- $\frac{1}{2}$, uma vez que esta projeção de spin não respeita as equação (A.194).

Sendo assim, podemos construir uma interação do tipo $\pi\Delta N$, respeitando a transformação (A.195) e o parâmetro Z (NATH; ETE-MADI; KIMEL, 1971; OLSSON; TURNER; OSYPOWSKI, 1973), da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\pi N \Delta} = g_{\Delta} \left\{ \bar{\Delta}^{\mu} [g_{\mu\nu} - (Z + \frac{1}{2})\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}] \vec{M} N \right\} \cdot \partial^{\nu} \vec{\phi}, \quad (\text{A.196})$$

onde g_{Δ} é a constante de acoplamento, $\bar{\Delta}^{\mu}$ é o campo da partícula de spin- $\frac{3}{2}$ e \vec{M} é a matriz de combinação de isospin do tipo $\mathbf{1} + \mathbf{1}/2 \rightarrow \mathbf{3}/2$, combinando um π e um N em um Δ . A matriz \vec{M} respeita a seguinte propriedade

$$M_b^{\dagger} M_a = \frac{2}{3} \delta_{ba} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau_c. \quad (\text{A.197})$$

A.3.4 Considerações finais

Convém lembrar que, o objetivo é utilizarmos as lagrangianas quirais para as interações entre káons e híperons, porem ate aqui emerge do modelo somente píons, núcleos e méson- ρ através do dubleto de

quarks u e \bar{d} , ou seja do grupo $SU(2)$.

Podemos utilizar do mesmo argumento feito em (A.2.4.1) para as massa do u , d e do π , as quais são aproximadamente desprezadas quando comparadas com a escala de energias típicas das interações fortes (1GeV) (BERNARD; KAISER; MEISSNER, 1995), dando origem à uma simetria aproximadamente conservada. Portanto, se considerarmos a massa do quark estranho (s) de aproximadamente $\approx 100\text{MeV}$ (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016), podemos incluir em uma modelo $SU(3)$ (STOKS; RIJKEN, 1997) os mésons estranhos K e \bar{K} (káons), como também os bárions estranhos, os híperons (LACROIX, 2010).

APÊNDICE B – Detalhes dos cálculos dos observáveis

B.1 SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL

Substituindo (2.86) e (2.87) em (2.104) já com a unitarização (2.99), para cada canal de isospin, temos (ZETTILI, 2009)

$$\begin{aligned} \sigma_T = 2\pi \int_0^\pi & \left| \sum_{l'=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty [(l'+1)F_{l'+}^U + l'F_{l'-}^U] [(l+1)F_{l+}^U + lF_{l-}^U] P_{l'}(x)P_l(x) \right| \\ & + \left| \sum_{l'=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty [F_{l'-}^U - F_{l'+}^U] [F_{l-}^U - F_{l+}^U] P_{l'}^{(1)}(x)P_l^{(1)}(x) \right| \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Usando a relação de ortogonalidade do polinômios e função associada de Legendre,¹ chegamos à

$$\begin{aligned} \sigma_T &= 2\pi \left| \sum_{l'=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty [(l'+1)F_{l'+}^U + l'F_{l'-}^U] [(l+1)F_{l+}^U + lF_{l-}^U] \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \right| \\ &+ \left| \sum_{l'=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty [F_{l'-}^U - F_{l'+}^U] [F_{l-}^U - F_{l+}^U] \frac{2l(l+1)}{2l+1} \delta_{ll'} \right| \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \left\{ \left| \sum_{l=0}^\infty [(l+1)F_{l+}^U + lF_{l-}^U] \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + l(l+1) \left| \sum_{l'=1}^\infty [F_{l'-}^U - F_{l'+}^U] \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Sabemos que as amplitudes parciais unitarizadas são complexas, assim podemos usar a propriedade do valor absoluto $|\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2|^2 = (|\mathbf{Z}_1| + |\mathbf{Z}_2|)^2$, aplicando esta propriedade em (B.3) resulta

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{2l+1} \left\{ \sum_{l=0}^\infty [(l+1)|F_{l+}^U| + l|F_{l-}^U|]^2 \right\}$$

¹Relações de ortogonalidade dos polinômios e função associada de Legendre em coordenadas esféricas

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (\text{B.1})$$

$$\int_0^\pi P_l^{(m)}(\cos\theta)P_{l'}^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (\text{B.2})$$

$$+l(l+1) \sum_{l=1}^{\infty} \left[|F_{l-}^U| - |F_{l+}^U| \right]^2 \}. \quad (\text{B.4})$$

Desenvolvendo os quadrados das somas e dividindo por $2l+1$ chegamos a relação final para a seção de choque total

$$\sigma_T = 4\pi \sum_l \left[(l+1) |F_{l+}^U|^2 + l |F_{l-}^U|^2 \right]. \quad (\text{B.5})$$

Para $l = 0, 1$ temos

$$\sigma_T = 4\pi \left[(0+1) |F_S^U|^2 + (1+1) |F_{P_3}^U|^2 + 1 |F_{P_1}^U|^2 \right],$$

logo

$$\sigma_T = 4\pi \left(|F_S^U|^2 + 2 |F_{P_3}^U|^2 + |F_{P_1}^U|^2 \right). \quad (\text{B.6})$$

B.2 PHASE SHIFT

A matriz de espalhamento pode para um dado isospin ser expandida em ondas parciais para cada momento angular orbital $(l, 2J)$ da seguinte forma²

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_{l,2J} P_l(x), \quad (\text{B.7})$$

fazemos ainda a substituição por conveniência de cálculos

$$f_{l,2J} = \frac{a_{l,2J}}{2ik}, \quad (\text{B.8})$$

resultando finalmente na expansão

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{a_{l,2J}}{2ik} P_l(x). \quad (\text{B.9})$$

²Esta forma de expandir a matriz de espalhamento \mathcal{M} difere, mas, é equivalente a expansão feita em (2.82), na qual queríamos separar os termos de spin, a fim de conseguirmos uma amplitude correspondente ao termo de não variação de spin (*spin-non-flip*) e pela sua variação (*spin-flip*). Também nesse caso a amplitude $f_{l,2J}$ é uma variável complexa. Para não haver confusão entre ambas as descrições usamos a notação $(l, 2J)$, a qual faremos a correspondência ao final com a notação que usaremos para cálculos ($l\pm$).

Vamos escrever e expandir a onda incidente em função de \mathbf{r} , da seguinte forma

$$\begin{aligned} e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(x), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde $j_l(kr)$ são as funções esféricas de Bessel (ARFKEN, 2007).

Aplicando (B.10) e (B.9) em (2.110), temos

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} + a_{l,2J} e^{ikr}] P_l(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikr} \left[\overbrace{(1 + a_{l,2J}) e^{ikr}}^{(I)} - \overbrace{(-1)^l e^{-ikr}}^{(II)} \right] P_l(x), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

em que, (I) e (II) indicam as ondas esféricas espalhada e incidente, respectivamente.

O fluxo de onda incidente (II) é proporcional a função de onda, tal que

$$|\Psi_{in}|^2 = |(-1)^l e^{-ikz}|^2 = 1, \quad (\text{B.12})$$

pelo o princípio da conservação do fluxo, ou seja, o numero de partícula que incide, deve ser igual ao numero de partículas que emergem, então o termo (I) em (B.11) deve ser igual a

$$|\Psi_{es}|^2 = |(1 + a_{l,2J}) e^{ikr}|^2 = |(S_{l,2J}) e^{ikr}|^2 = 1, \quad (\text{B.13})$$

onde

$$S_{l,2J} = a_{l,2J} + 1, \quad (\text{B.14})$$

assim, escrevemos

$$|S_{l,2J}| = 1. \quad (\text{B.15})$$

A relação (B.15) nos permite escrever o temo $S_{l,2J}$ proporcional

à uma parâmetro real $\delta_{l,2J}$, assim definimos

$$S_{l,2J} = e^{2i\delta_{l,2J}}, \quad (\text{B.16})$$

ao parâmetro $\delta_{l,2J}$ damos o nome de *deslocamento de fase* (*Phase Shift*) ou ainda Defasagem do espalhamento.

Substituindo (B.14) em (B.9), temos

$$\mathcal{M} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{S_{l,2J} - 1}{2ik} P_l(x), \quad (\text{B.17})$$

usando (B.16), chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_{l,2J}} - 1}{2ik} P_l(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_{l,2J}}}{k} \sin \delta_{l,2J} P_l(x). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Comprando com (B.7), podemos escrever a amplitude de ondas parciais em função do deslocamento de fase

$$f_{l,2J} = \frac{e^{i\delta_{l,2J}}}{k} \sin \delta_{l,2J}, \quad (\text{B.19})$$

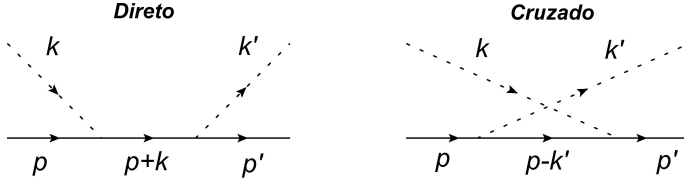
que é equivalente a notação com a amplitude de ondas parciais unitarizadas

$$f_{l\pm}^U = \frac{e^{i\delta_{l\pm}}}{k} \sin \delta_{l\pm}. \quad (\text{B.20})$$

A interpretação física do deslocamento de fase decorre das relações (2.111), (B.12), (B.13) e (B.16) onde notamos que as ondas incidente e espalhadas tem mesmo módulo, porem a onda espalhada tem um deslocamento $\delta_{l\pm}$ em relação a onda incidente.

**APÊNDICE C – Cálculo Detalhado do Diagrama de
Feynmann para Spin-1/2**

Figura 44 – Diagramas



- Vértices: $V_{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{g}{2M} \not{k} \gamma_5 \tau_a$;
- Propagador *spin* $\frac{1}{2}$: $S(p) = i \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2}$;
- Linhas externas:
 - *spin* $\frac{1}{2}$: $\bar{u}(p')$, $u(p)$;
 - *spin* $0 : 1$

Amplitude:

$$\mathcal{M} = [\text{linhas externas (entrando)}] \times [\text{vértice 1}] \times [\text{propagador}] \times [\text{vértice 2}] \times [\text{linhas externas (saída)}] \times \delta^4(\sum \mathbf{p}_e - \sum \mathbf{p}_s);$$

Amplitude final:

$$iT = iT_d + iT_c = \int \frac{d^4 q}{(4\pi)^4} \mathcal{M}_d + \int \frac{d^4 q}{(4\pi)^4} \mathcal{M}_c \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} iT_d &= \int \left(\frac{d^4 q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[\frac{g}{2m_N} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] (1) \left[i \frac{\not{q} + m_*}{q^2 - m_*^2} \right] (1) \\ &\quad \times \left[\frac{g}{2m_N} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] u(p) \left[(4\pi)^4 \delta^4(p + k - q) \right] \\ &\quad \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(q - p' - k') \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Integrando:

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') \left[\not{k}' \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] \underbrace{\left[\frac{\not{p} + \not{k} + m_*}{(p+k)^2 - m_*^2} \right]}_s \left[\not{k} \gamma_5 \tau_a \right] u(p)$$

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) [\not{k}' \gamma_5] \left[\frac{\not{p}\not{k} + \overbrace{\not{k}\not{k}}^{\mu^2} + m_* \not{k}}{s - m_*^2} \right] \gamma_5 u(p)$$

usando a relação: $\not{k}\gamma_5 = -\gamma_5\not{k}$, trocamos γ_5 de lado:

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) [\not{k}' \overbrace{\gamma_5 \gamma_5}^1] \left[\frac{\not{p}\not{k} + \mu^2 - m_* \not{k}}{s - m_*^2} \right] u(p)$$

usando agora as relações:

$$\not{p}\not{k} + \not{k}\not{p} = 2pk$$

$$\not{p}u(p) = m_N u(p)$$

$$\bar{u}\not{k}'\not{k}u = (s - m_N^2)\bar{u}u - 2m_N\bar{u}\not{k}u$$

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) \left[\frac{\not{k}'(2pk - m_N\not{k} + \mu^2) - m_*\not{k}'\not{k}}{s - m_*^2} \right] u(p)$$

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) \left[\frac{\overbrace{(2pk + \mu^2)}^{s - m_N^2} \not{k}' - (m_N + m_*)\not{k}'\not{k}}{s - m_*^2} \right] u(p)$$

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) \left[\frac{(s - m_N^2)\not{k}' - (m_N + m_*)(s - m_N^2 - 2m_N\not{k})}{s - m_*^2} \right] u(p)$$

$$T_d = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) \frac{1}{s - m_*^2} \left[\overbrace{(s - m_N^2)\not{k}' + 2m_N(m_N + m_*)\not{k}}^{[2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2] \left(\frac{\not{k}' + \not{k}}{2}\right)} - (m_N + m_*)(s - m_N^2) \right] u(p)$$

Finalmente

$$T_d = \frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') (\tau_b^\dagger \tau_a) \frac{1}{s - m_*^2} \left[(m_N + m_*)(s - m_N^2) - [2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2] \left(\frac{\not{k}' + \not{k}}{2}\right) \right] u(p)$$

usando: $\tau_b^\dagger \tau_a = \delta_{ab} + i\epsilon_{bac} \tau_c$

Chegamos então à amplitude direta:

$$\begin{aligned}
 T_d = & \frac{g^2}{4m_N^2(s - m_*^2)} \bar{u}(p') \left\{ \left[(m_N + m_*)(s - m_N^2) \right. \right. \\
 & - \left. \left. [2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2] \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] \delta_{ab} + \left[(m_N + m_*)(s - \right. \right. \\
 & \left. \left. - [2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2] \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] i\epsilon_{abc}\tau_c \right\} u(p)
 \end{aligned}$$

Para o termo cruzado com uma partícula com massa m_\odot , temos

$$\begin{aligned}
 iT_c = & \int \left(\frac{d^4q}{(4\pi)^4} \right)^2 \bar{u}(p') \left[\frac{g}{2m_N} \not{k} \gamma_5 \tau_a \right] (1) \left[i \frac{\not{q} + m_\odot}{q^2 - m_\odot^2} \right] (1) \\
 & \times \left[\frac{g}{2m_N} (-\not{k}') \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] u(p) \left[(4\pi)^4 \delta^4(p - k' - q) \right] \\
 & \times \left[(4\pi)^4 \delta^4(q + k - p') \right] \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

Integrando:

$$T_c = -\frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') \left[\not{k} \gamma_5 \tau_a \right] \underbrace{\left[\frac{\not{p} - \not{k}' + m_\odot}{(p - k')^2 - m_\odot^2} \right]}_u \left[\not{k}' \gamma_5 \tau_b^\dagger \right] u(p)$$

Fazendo o mesmo procedimento e usando as relações:

$$\begin{aligned}
 \bar{u} \not{k} \not{k}' u &= (u - m_N^2) \bar{u} u - 2m_N \bar{u} \not{k}' u \\
 2pk' - \mu^2 &= u - m_N^2 \\
 (u - m_N^2) \not{k} + 2m_N(m_N + m_\odot) \not{k}' &= [2m_N(m_N + m_\odot) + \\
 u - m_N^2] \left(\frac{k' + k}{2} \right) \\
 [\tau_b^\dagger, \tau_a] &= -2i\epsilon_{abc}\tau_c \rightarrow \tau_a \tau_b^\dagger = \delta_{ab} - i\epsilon_{bac}\tau_c
 \end{aligned}$$

Chegamos à:

$$\begin{aligned}
 T_c = & \frac{g^2}{4m_N^2(u - m_\odot^2)} \bar{u}(p') \left\{ \left[(m_N + m_\odot)(u - m_N^2) \right. \right. \\
 & + \left. \left. [2m_N(m_N + m_\odot) + u - m_N^2] \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] \delta_{ab} \right. \\
 & \left. - \left[(m_N + m_\odot)(u - m_N^2) + [2m_N(m_N + m_\odot) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+u - m_N^2] \left(\frac{k' + k}{2} \right) \left. i\epsilon_{abc}\tau_c \right\} u(p) \quad (C.5)$$

A amplitude total final será:

$$\begin{aligned} T = & \frac{g^2}{4m_N^2} \bar{u}(p') \left\{ \left[(m_* + m_N) \left(\frac{s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) + (m_\odot + m_N) \left(\frac{u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right) \right. \right. \\ & + \left(\frac{2m_N(m_N + m_\odot) + u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] \delta_{ab} \\ & + \left[(m_* + m_N) \left(\frac{s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) - (m_\odot + m_N) \left(\frac{u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{2m_N(m_N + m_\odot) + u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) \left(\frac{k' + k}{2} \right) \right] i\epsilon_{abc}\tau_c \left. \right\} u(p) \end{aligned}$$

Comparando com a amplitude geral:

$$T = \bar{u}(p') \left\{ \left[A^+ + \left(\frac{k' + k}{2} \right) B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \left(\frac{k' + k}{2} \right) B^- \right] i\epsilon_{abc}\tau_c \right\} u(p)$$

Achamos então:

$$A_*^+ = \frac{g^2}{4m_N^2} \left[(m_* + m_N) \left(\frac{s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) + (m_\odot + m_N) \left(\frac{u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right) \right] \quad (C.6)$$

$$B_*^+ = \frac{g^2}{4m_N^2} \left[\frac{2m_N(m_N + m_\odot) + u - m_N^2}{u - m_\odot^2} - \frac{2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2}{s - m_*^2} \right] \quad (C.7)$$

$$A_*^- = \frac{g^2}{4m_N^2} \left[(m_* + m_N) \left(\frac{s - m_N^2}{s - m_*^2} \right) - (m_\odot + m_N) \left(\frac{u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right) \right] \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned}
 B_*^- = & -\frac{g^2}{4m_N^2} \left[\frac{2m_N(m_N + m_\odot) + u - m_N^2}{u - m_\odot^2} \right. \\
 & \left. + \frac{2m_N(m_N + m_*) + s - m_N^2}{s - m_*^2} \right] \quad (\text{C.9})
 \end{aligned}$$

**APÊNDICE D – Separação dos Diagrama Direto e Cruzado
para Partículas de Spin-3/2**

D.1 PARA Δ DE ISOSPIN-3/2

Da soma das amplitudes dos diagramas direto e cruzado $T = T_d + T_c$, para a partícula de spin-isospin-3/2 (Δ) temos as amplitudes A^\pm e B^\pm , dadas por

$$A_\Delta^+ = \frac{2g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_\Delta)t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} + \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] - \frac{(m_\Sigma + m_\Delta)}{m_\Delta^2} (2m_\Delta^2 + m_\Sigma m_\Delta - m_\Sigma^2 + 2m_K^2) + \frac{4}{m_\Delta^2} \left[(m_\Delta + m_\Sigma)Z + (2m_\Delta + m_\Sigma)Z^2 \right] kk' \right\}, \quad (\text{D.1})$$

$$B_\Delta^+ = \frac{2g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} - \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] - \frac{8m_\Sigma}{m_\Delta^2} Z^2 \nu \right\} \quad (\text{D.2})$$

$$A_\Delta^- = -\frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_\Delta)t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} - \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] + \frac{8m_\Sigma}{m_\Delta^2} \left[(m_\Delta + m_\Sigma)Z + (2m_\Delta + m_\Sigma)Z^2 \right] \nu \right\}, \quad (\text{D.3})$$

$$B_\Delta^- = -\frac{g_\Delta^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{1}{m_\Delta^2 - s} + \frac{1}{m_\Delta^2 - u} \right] - \frac{(m_\Sigma + m_\Delta)^2}{m_\Delta^2} - \frac{8}{m_\Delta^2} \left[(m_\Sigma^2 + m_\Sigma m_\Delta - m_K^2)Z + (2m_\Sigma m_\Delta + m_\Sigma^2)Z^2 \right] - \frac{4Z^2}{m_\Delta^2} kk' \right\}. \quad (\text{D.4})$$

A amplitude direta (T_d) é calculada da seguinte maneira

$$T_d = \bar{\Sigma} \left[A_d + B_d \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\overbrace{\frac{2}{3} \delta_{ab} - \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau^c}^{M_b^\dagger M_a} \right),$$

já a amplitude cruzada (T_c),

$$T_c = \bar{\Sigma} \left[A_c + B_c \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\overbrace{\frac{2}{3} \delta_{ab} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau^c}^{M_a M_b^\dagger} \right),$$

onde $\bar{\Sigma}$ e Σ representa os espinores do híperon Σ .

De forma que temos a amplitude total T ,

$$\begin{aligned} T = T_d + T_c &= \bar{\Sigma} \left[A_d + B_d \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} - \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau^c \right) \\ &+ \bar{\Sigma} \left[A_c + B_c \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau^c \right), \end{aligned}$$

separando os termos apropriadamente, temos

$$\begin{aligned} T &= \bar{\Sigma} \left\{ \left[\overbrace{\frac{2}{3} (A_d + A_c)}^{A^+} + \overbrace{\frac{2}{3} (B_d + B_c)}^{B^+} \right] \left(\frac{\not{k} + \not{k}'}{2} \right) \delta_{ab} \right. \\ &\quad \left. + \left[\overbrace{\frac{1}{3} (A_c - A_d)}^{A^-} + \overbrace{\frac{1}{3} (B_c - B_d)}^{B^-} \right] i \epsilon_{bac} \tau^c \right\} \Sigma. \end{aligned}$$

Dessa maneira temos as relações

$$A^+ = \frac{2}{3} (A_d + A_c), \quad B^+ = \frac{2}{3} (B_d + B_c),$$

$$A^- = \frac{1}{3} (A_c - A_d), \quad B^- = \frac{1}{3} (B_c - B_d),$$

isolando as amplitudes diretas e cruzadas, encontramos

$$A_d = \frac{3}{4} (A^+ - 2A^-), \quad B_d = \frac{3}{4} (B^+ - 2B^-),$$

$$A_c = \frac{3}{4} (A^+ + 2A^-), \quad B_c = \frac{3}{4} (B^+ + 2B^-).$$

Agora aplicando as amplitudes (D.1-D.4) para A_d e B_d , temos

$$\begin{aligned}
A_{\Delta}^{(d)} &= \frac{3}{4} \frac{2g_{\Delta}^2}{9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_{\Sigma} + m_{\Delta})t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] \right. \\
&\quad - \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})}{m_{\Delta}^2} (2m_{\Delta}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_{\Sigma}^2 + 2m_K^2) \\
&\quad + \frac{4}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z + (2m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z^2 \right] \\
&\quad \left. \times \left[k_0^2 + 2Ek_0 + \vec{k}^2 \right] \right\}, \tag{D.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\Delta}^{(d)} &= \frac{3}{4} \frac{2g_{\Delta}^2}{9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] - \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})^2}{m_{\Delta}^2} \right. \\
&\quad - \frac{8}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Sigma}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_K^2)Z + (2m_{\Sigma}m_{\Delta} + m_{\Sigma}^2)Z^2 \right] \\
&\quad \left. - \frac{4Z^2}{m_{\Delta}^2} \left[k_0^2 + 2Ek_0 + \vec{k}^2 \right] \right\}, \tag{D.6}
\end{aligned}$$

onde

$$\nu = \frac{2Ek_0 + k^2 + k^2x}{2m_{\Sigma}}, \tag{D.7}$$

$$kk' = k_0^2 - k^2x. \tag{D.8}$$

Podemos agora encontrar as amplitudes $A_{\Delta}^{\pm(d)}$ e $B_{\Delta}^{\pm(d)}$ do diagrama direto, através de (D.5-D.6), fazemos então

$$\begin{aligned}
T_d &= \bar{\Sigma} \left[A_{\Delta}^{(d)} + B_{\Delta}^{(d)} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau^c \right) \\
&= \bar{\Sigma} \left\{ \left[\overbrace{\frac{2}{3} A_{\Delta}^{(d)}}^{A_{\Delta}^{+(d)}} + \overbrace{\frac{2}{3} B_{\Delta}^{(d)}}^{B_{\Delta}^{+(d)}} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \delta_{ab} \right. \\
&\quad \left. + \left[\overbrace{\frac{1}{3} A_{\Delta}^{(d)}}^{A_{\Delta}^{-(d)}} + \overbrace{\frac{1}{3} B_{\Delta}^{(d)}}^{B_{\Delta}^{-(d)}} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] i \epsilon_{bac} \tau^c \right\} \Sigma. \tag{D.9}
\end{aligned}$$

Finalmente teremos

$$A_{\Delta}^{+(d)} = \frac{\overbrace{2 \ 3 \ 2g_{\Delta}^2}^{g_{\Delta}^2/9}}{3 \ 4 \ 9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_{\Sigma} + m_{\Delta})t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (D.10)$$

$$B_{\Delta}^{+(d)} = \frac{\overbrace{2 \ 3 \ 2g_{\Delta}^2}^{g_{\Delta}^2/9}}{3 \ 4 \ 9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] - b_0 \right\}, \quad (D.11)$$

$$A_{\Delta}^{-(d)} = \frac{\overbrace{1 \ 3 \ 2g_{\Delta}^2}^{g_{\Delta}^2/18}}{3 \ 4 \ 9} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_{\Sigma} + m_{\Delta})t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (D.12)$$

$$B_{\Delta}^{-(d)} = \frac{\overbrace{1 \ 3 \ 2g_{\Delta}^2}^{g_{\Delta}^2/18}}{3 \ 4 \ 9} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{\Delta}^2 - s} \right] - b_0 \right\}, \quad (D.13)$$

onde

$$a_0 = -\frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})}{m_{\Delta}^2} (2m_{\Delta}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_{\Sigma}^2 + 2m_K^2) + \frac{4}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z + (2m_{\Delta} + m_{\Sigma})Z^2 \right] \overbrace{\left[k_0^2 + 2Ek_0 + \vec{k}^2 \right]}^{s - m_{\Sigma}^2},$$

$$b_0 = \frac{8}{m_{\Delta}^2} \left[(m_{\Sigma}^2 + m_{\Sigma}m_{\Delta} - m_K^2)Z + (2m_{\Sigma}m_{\Delta} + m_{\Sigma}^2)Z^2 \right] + \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Delta})^2}{m_{\Delta}^2} + \frac{4Z^2}{m_{\Delta}^2} \overbrace{\left[k_0^2 + 2Ek_0 + \vec{k}^2 \right]}^{s - m_{\Sigma}^2}.$$

D.2 PARA N^* E Ξ^* DE ISOSPIN-1/2

Fazemos de forma análoga ao feito para o Δ para a ressonância de spin-3/2 e isospin-1/2 (N^*), onde fazemos a substituição $M_{\alpha} \rightarrow \tau_{\alpha}$

e também os coeficientes de (D.1-D.4), tal que, $\frac{2g_\Delta^2}{9} \rightarrow \frac{g_\Delta^2}{3}$ e $-\frac{g_\Delta^2}{9} \rightarrow -\frac{g_\Delta^2}{3}$.

A amplitude total T ,

$$T = T_d + T_c = \bar{\Sigma} \left[A_d + B_d \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \Sigma (\delta_{ab} - i\epsilon_{bac} \tau^c) \\ + \bar{\Sigma} \left[A_c + B_c \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \Sigma (\delta_{ab} + i\epsilon_{bac} \tau^c),$$

separando os termos

$$T = \bar{\Sigma} \left\{ \left[\overbrace{(A_d + A_c)}^{A^+} + \overbrace{(B_d + B_c)}^{B^+} \right] \left(\frac{k + k'}{2} \right) \delta_{ab} \right. \\ \left. + \left[\overbrace{(A_c - A_d)}^{A^-} + \overbrace{(B_c - B_d)}^{B^-} \right] \left(\frac{k + k'}{2} \right) i\epsilon_{bac} \tau^c \right\} \Sigma.$$

Logo as relações

$$A^+ = A_d + A_c, \quad B^+ = B_d + B_c,$$

$$A^- = A_c - A_d, \quad B^- = B_c - B_d,$$

resultam nas amplitudes diretas e cruzadas

$$A_d = \frac{1}{2}(A^+ - A^-), \quad B_d = \frac{1}{2}(B^+ - B^-),$$

$$A_c = \frac{1}{2}(A^+ + A^-), \quad B_c = \frac{1}{2}(B^+ + B^-).$$

Completando as últimas etapas dos cálculos, notamos que somente ocorreu mudanças nos coeficientes. Dessa maneira as amplitudes finais para o caso direto serão

$$A_{N^*}^{+(d)} = \frac{g_{N^*}^2/6}{2 \cdot 3} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_{N^*})t \right] \left[\frac{2}{m_{N^*}^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (\text{D.14})$$

$$B_{N^*}^{+(d)} = \frac{\overbrace{g_{N^*}^2/6}^{g_{N^*}^2/6}}{2} \frac{1}{3} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{N^*}^2 - s} \right] - b_0 \right\}, \quad (\text{D.15})$$

$$A_{N^*}^{-(d)} = \frac{\overbrace{g_{N^*}^2/6}^{g_{N^*}^2/6}}{2} \frac{1}{3} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_{N^*})t \right] \left[\frac{2}{m_{N^*}^2 - s} \right] + a_0 \right\}, \quad (\text{D.16})$$

$$B_{N^*}^{-(d)} = \frac{\overbrace{g_{N^*}^2/6}^{g_{N^*}^2/6}}{2} \frac{1}{3} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[\frac{2}{m_{N^*}^2 - s} \right] - b_0 \right\}. \quad (\text{D.17})$$

Já para o caso cruzados (Ξ^*), temos

$$\begin{aligned} A_{\Xi^*}^{(c)} &= \frac{1}{2} \frac{g_{\Xi^*}^2}{3} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2}(m_\Sigma + m_{\Xi^*})t \right] \left[\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] \right. \\ &\quad - \frac{(m_\Sigma + m_{\Xi^*})}{m_{\Xi^*}^2} (2m_{\Xi^*}^2 + m_\Sigma m_{\Xi^*} - m_\Sigma^2 + 2m_K^2) \\ &\quad + \frac{4}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi^*} + m_\Sigma)Z + (2m_{\Xi^*} + m_\Sigma)Z^2 \right] \\ &\quad \left. \times \left[\overbrace{k_0^2 - 2Ek_0 - \vec{k}^2 - 2\vec{k}^2 x}^{u - m_\Sigma^2} \right] \right\}, \quad (\text{D.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\Xi^*}^{(c)} &= \frac{1}{2} \frac{g_{\Xi^*}^2}{3} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2}t \right] \left[-\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] + \frac{(m_\Sigma + m_{\Xi^*})^2}{m_{\Xi^*}^2} \right. \\ &\quad + \frac{8}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_\Sigma^2 + m_\Sigma m_{\Xi^*} - m_K^2)Z + (2m_\Sigma m_{\Xi^*} + m_\Sigma^2)Z^2 \right] \\ &\quad \left. + \frac{4Z^2}{m_{\Xi^*}^2} \left[\overbrace{k_0^2 - 2Ek_0 - \vec{k}^2 - 2\vec{k}^2 x}^{u - m_\Sigma^2} \right] \right\}. \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

As amplitudes $A_{\Xi^*}^{\pm(c)}$ e $B_{\Xi^*}^{\pm(c)}$ do diagrama cruzado, através de (D.18-

D.19), serão

$$\begin{aligned}
T_c &= \bar{\Sigma} \left[A_{\Xi^*}^{(c)} + B_{\Xi^*}^{(c)} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \Sigma \left(\delta_{ab} - i\epsilon_{bac} \tau^c \right) \\
&= \bar{\Sigma} \left\{ \left[\overbrace{A_{\Xi^*}^{(c)}}^{A_{\Xi^*}^{+(c)}} + \overbrace{B_{\Xi^*}^{(c)}}^{B_{\Xi^*}^{+(c)}} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] \delta_{ab} \right. \\
&\quad \left. + \left[\overbrace{-A_{\Xi^*}^{(c)}}^{A_{\Xi^*}^{-(c)}} + \overbrace{(-B_{\Xi^*}^{(c)})}^{B_{\Xi^*}^{-(c)}} \left(\frac{k + k'}{2} \right) \right] i\epsilon_{bac} \tau^c \right\} \Sigma. \quad (D.20)
\end{aligned}$$

Logo,

$$A_{\Xi^*}^{+(c)} = \frac{g_{\Xi^*}^2}{6} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2} (m_{\Sigma} + m_{\Xi^*}) t \right] \left[\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] + c_0 + c_z (u - m_{\Sigma}^2) \right\}, \quad (D.21)$$

$$B_{\Xi^*}^{+(c)} = \frac{g_{\Xi^*}^2}{6} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2} t \right] \left[-\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] + d_0 + d_z (u - m_{\Sigma}^2) \right\}, \quad (D.22)$$

$$A_{\Xi^*}^{-(c)} = -\frac{g_{\Xi^*}^2}{6} \left\{ \left[\hat{A} + \frac{3}{2} (m_{\Sigma} + m_{\Xi^*}) t \right] \left[\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] + c_0 + c_z (u - m_{\Sigma}^2) \right\}, \quad (D.23)$$

$$B_{\Xi^*}^{-(c)} = -\frac{g_{\Xi^*}^2}{6} \left\{ \left[\hat{B} + \frac{3}{2} t \right] \left[-\frac{2}{m_{\Xi^*}^2 - u} \right] + d_0 + d_z (u - m_{\Sigma}^2) \right\}, \quad (D.24)$$

onde

$$c_0 = -\frac{(m_{\Sigma} + m_{\Xi^*})}{m_{\Xi^*}^2} (2m_{\Xi^*}^2 + m_{\Sigma} m_{\Xi^*} - m_{\Sigma}^2 + 2m_K^2), \quad (D.25)$$

$$c_z = \frac{4}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi^*} + m_{\Sigma}) Z + (2m_{\Xi^*} + m_{\Sigma}) Z^2 \right], \quad (D.26)$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{8}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Sigma}^2 + m_{\Sigma} m_{\Xi^*} - m_K^2) Z + (2m_{\Sigma} m_{\Xi^*} + m_{\Sigma}^2) Z^2 \right] \\
&\quad + \frac{(m_{\Sigma} + m_{\Xi^*})^2}{m_{\Xi^*}^2}, \quad (D.27)
\end{aligned}$$

$$d_z = \frac{4Z^2}{m_{\Xi^*}^2}. \quad (\text{D.28})$$

APÊNDICE E – Constantes de Acoplamento e o $SU(3)$

Neste apêndice iremos generalizar as lagrangianas quirais através do modelo sigma não-linear, apresentado para o caso pión-núcleon ($SU(2)$) na seção (A.3), de forma a encontramos, através do conceito de simetria, relações entre constantes de acoplamento dos diversos tipos de vértices. Nesta generalização iremos incluir todos os bárions de spin-1/2, mésons pseudo-escalares e vetoriais, que contenham os quarks u , d e s (ver A.3.4), estendendo assim o modelo para o caso $SU(3)$ (SWART, 1963; PILKUHN et al., 1973; STOKS; RIJKEN, 1997).

Reescrevemos a relação (A.136), para um novo estado mínimo de energia generalizado (f_0)

$$\langle \sigma \rangle = f_0, \quad (E.1)$$

com isso modificamos a transformação unitária (A.156), dada por

$$U(x) = \frac{1}{f_\pi} (\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}),$$

da seguinte forma

$$U(x) = \frac{1}{f_0} (\sigma + i\lambda_a \pi'_a) \quad (E.2)$$

onde $a = 0, \dots, 8$, λ_a são as matrizes de Gell-Mann e π_a representa o octeto de mésons pseudo-escalares ($\vec{\pi}, K, \bar{K}, \eta$).

A transformação do campo do núcleon Ψ_N (A.163), da lugar a transformação generalizada para bárions de spin-1/2 (Ψ_B)

$$\Psi_B = \Lambda \psi_B \Lambda^\dagger, \quad (E.3)$$

onde agora temos o fator,

$$\Lambda = e^{i \frac{\lambda_a \pi'_a}{2f_0}}. \quad (E.4)$$

O octeto de mésons pseudo-escalar é dado pela matriz

$$\frac{\lambda_a \pi'_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (E.5)$$

o campo octeto η_8 juntamente com o campo singleto η_0 , quando misturado originam os mésons η e η' . O octeto de bárions de spin-1/2,

fica

$$\Psi_B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

Como estendemos o modelo sigma não-linear para o $SU(3)$, e modificamos tanto o campo dos mésons pseudo-escalares e também dos bárions é natural esperar que o campo dos méson σ precise ser generalizado da mesma forma. Isso se mostra evidente pois, f_0 por mais que seja generalizado, prediz que a massa do octeto dos bárions Ψ_B , sejam as mesma. Vamos então, encontrar uma nova expressão para (E.2), tal que

$$U(x) = F + \lambda_0 \sigma_0 + \lambda_a \sigma'_a + i \lambda_a \pi'_a, \quad (\text{E.7})$$

onde $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, $\lambda_a \sigma_a$ representa o octeto dos mésons escalares e F é o novo valor mínimo da energia (vácuo), dado por

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.8})$$

sendo f_1 e f_2 funções do valor esperado dos campos isoescalares singleto (σ_0) e octeto (σ_8). Portanto,

$$f_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \sigma_0 \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle \sigma_8 \rangle, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \sigma_0 \rangle - 2\sqrt{\frac{1}{3}} \langle \sigma_8 \rangle. \quad (\text{E.9})$$

O octeto dos mésons isoescalares é dado pela matriz

$$\frac{\lambda_a \sigma'_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{a_0^0}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_8}{\sqrt{6}} & a_0^+ & \kappa^+ \\ a_0^- & -\frac{a_0^0}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_8}{\sqrt{6}} & \kappa^0 \\ \kappa^- & \kappa^0 & -\frac{2\sigma_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.10})$$

a mistura dos campos σ_0 e σ_8 resultam nos mésons $f_0(980)$ e $\epsilon(760)$.

Para a interação com mésons vetoriais, generalizamos a transformação local (A.181) como

$$D_\mu \Psi_B = \partial_\mu \Psi_B - i[\Gamma_\mu, \Psi_B] \quad (\text{E.11})$$

sendo Γ_μ definido em (A.183), onde agora definimos $v_\mu = \lambda_a \rho'_a$. As-

sim o octeto dos méson vetoriais é dado por

$$\frac{\lambda_a \rho'_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & K^{*0} & -\frac{2\omega_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.12})$$

onde os campos singleto e octeto ω_0 e ω_8 quando misturados forma os mésons vetoriais ω e ϕ .

Apresentado todas as matrizes com os campos de bárions e mésons e sabendo que todas as matrizes dos mésons se transformam da mesma forma que a matriz dos bárions, podemos definir para as interações as seguinte combinações invariantes quirais

$$[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F = \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Phi \Psi_B) - \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi), \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D &= \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Phi \Psi_B) + \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi) \\ &\quad - \frac{2}{3} \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Psi_B) \text{Tr}(\Phi), \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_S = \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \Psi_B) \text{Tr}(\Phi). \quad (\text{E.15})$$

onde $\Phi = \lambda_c \phi_c$ representa as matrizes de mésons com $c = 0, \dots, 8$. Os octetos de mésons tem traço nulo, logo podemos escrever $[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F = \text{Tr}(\bar{\Psi}_B [\Phi, \Psi_B])$ e $[\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D = \text{Tr}(\bar{\Psi}_B \{\Phi, \Psi_B\})$.

Definindo a constante de acoplamento do tipo bárion-bárion-méson(octeto) como g^{oct} e do tipo bárion-bárion-méson(singleto) como g^{sin} , definimos a forma geral da lagrangiana de interação como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -g^{oct} \sqrt{2} \left\{ \alpha [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_F + (1 - \alpha) [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_D \right\} \\ &\quad - g^{sin} \sqrt{\frac{1}{3}} [\bar{\Psi}_B \Psi_B \Phi]_S, \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

sendo $\alpha = F/(F + D)$ onde F e D são proporcionais às constantes de acoplamento dos octetos de bárions simétrico e antissimétricos (PARTICLE DATA GROUP (PDG); PATRIGNANI et al., 2016), as raízes são colocadas por conveniência.

Considerando a interação dos mésons pseudo-escalares, a qual, deve ter um acoplamento pseudo-vetorial (PV) (ERICSON; WEISE, 1988), a lagrangiana de interação será

$$\mathcal{L}_{PV} = \mathcal{L}_{PV}^{\{1\}} + \mathcal{L}_{PV}^{\{8\}}. \quad (\text{E.17})$$

Não levando em conta o caráter de Lorentz das interações (ex.: $\gamma_5 \gamma_\mu \partial^\mu$ para mésons pseudo-escalares), a lagrangiana singlete é dada pela amplitude do tipo-S de (E.16) e resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PV}^{\{1\}} = & -g_{NN\eta_0}(\bar{N}N)\eta_0 - g_{\Xi\Xi\eta_0}(\bar{\Xi}\Xi)\eta_0 \\ & -g_{\Sigma\Sigma\eta_0}(\bar{\Sigma}\cdot\vec{\Sigma})\eta_0 - g_{\Lambda\Lambda\eta_0}(\bar{\Lambda}\Lambda)\eta_0, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

onde as constantes de acoplamentos adimensionais,¹ são

$$g_{NN\eta_0} = g_{\Xi\Xi\eta_0} = g_{\Sigma\Sigma\eta_0} = g_{\Lambda\Lambda\eta_0} = g_{PV}^{sin}. \quad (\text{E.19})$$

A lagrangiana de interação para o octeto dos mésons são do tipo-F e -D de (E.16), assim temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PV}^{\{8\}} = & -g_{NN\pi}(\bar{N}N\vec{\tau})\cdot\vec{\pi} - g_{\Xi\Xi\pi}(\bar{\Xi}\Xi\vec{\tau})\cdot\vec{\pi} - g_{\Lambda\Sigma\pi}(\bar{\Lambda}\vec{\Sigma})\cdot\vec{\pi} \\ & + ig_{\Sigma\Sigma\pi}(\bar{\Sigma} \times \vec{\Sigma})\cdot\vec{\pi} - g_{NN\eta_8}(\bar{N}N)\eta_8 - g_{\Xi\Xi\eta_8}(\bar{\Xi}\Xi)\eta_8 \\ & -g_{\Lambda\Lambda\eta_8}(\bar{\Lambda}\Lambda)\eta_8 - g_{\Sigma\Sigma\eta_8}(\bar{\Sigma}\cdot\vec{\Sigma})\eta_8 - g_{\Lambda NK}(\bar{N}K)\Lambda \\ & -g_{\Xi\Lambda\bar{K}}(\bar{\Lambda}\Xi)\bar{K} - g_{\Sigma NK}(\bar{\Sigma}\cdot\vec{\tau}N)K \\ & -g_{\Xi\Sigma\bar{K}}(\bar{\Sigma}\cdot\vec{\tau}\Xi)\bar{K}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Considerando os multipletos de quarks, encontramos as seguintes relações para as constantes de acoplamento

$$\begin{aligned} g_{NN\pi} = f, & \quad g_{\Xi\Xi\eta_8} = \frac{1}{\sqrt{3}}f(4\alpha-1), & \quad g_{\Lambda NK} = \frac{1}{\sqrt{3}}f(1+2\alpha), \\ g_{\Xi\Xi\pi} = -f(1-2\alpha), & \quad g_{\Xi\Xi\eta_8} = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(1+2\alpha), & \quad g_{\Xi\Lambda\bar{K}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}f(4\alpha-1), \\ g_{\Lambda\Sigma\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}f(1-\alpha), & \quad g_{\Lambda\Lambda\eta_8} = -\frac{2}{\sqrt{3}}f(1-\alpha), & \quad g_{\Sigma NK} = f(1-2\alpha), \\ g_{\Sigma\Sigma\pi} = 2f\alpha, & \quad g_{\Sigma\Sigma\eta_8} = \frac{2}{\sqrt{3}}f(1-\alpha), & \quad g_{\Xi\Sigma\bar{K}} = f, \end{aligned}$$

onde $f \equiv g_{PV}^{oct}$. De posse das constantes de acoplamentos $g_{NN\pi} = 13,4$ e $g_{\Lambda\Sigma\pi} = 11,7$ (PILKUH et al., 1973) encontramos o valor $\alpha = 0,244$, o valor da constante das demais interações de interesse são

¹Estamos aqui considerando um caso geral, pode haver a necessidade de multiplicarmos algum fator à lagrangiana, a fim de garantir a adimensionalidade das constantes.

mostradas nas tabelas do Capítulo 5.

Fazendo o mesmo procedimento, podemos encontrar as constantes de acoplamento para o caso com mésons vetoriais. As constantes de nosso interesse são $g_{\Xi\Xi\rho} = -f'(1 - 2\alpha')$ e $g_{\Sigma\Sigma\rho} = 2f'\alpha'$.

Podemos ainda, construir relações para constantes de acoplamento entre mésons pseudo-escalares e vetoriais. Fazendo as substituições $\Psi_B \rightarrow (1/\sqrt{2})\lambda_a\pi'_a$ e considerando $\Phi = (1/\sqrt{2})\lambda_a\rho'_a$, encontramos para interações de interesse, tais como, $g_{KK\rho} = f''$ e $g_{\bar{K}\bar{K}\rho} = -f''(1 - 2\alpha'')$.

APÊNDICE F – Integrais I_n

No desenvolvimentos dos cálculos das amplitudes de ondas parciais utilizamos integrais da forma geral dada por

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{\gamma + 2k^2 x} \quad (\text{F.1})$$

Sendo γ definido para cada caso de espalhamento, temos explicitamente

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{1}{2k^2} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right) \quad (\text{F.2})$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{2}{2k^2} - \frac{\gamma}{(2k^2)^2} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right) \quad (\text{F.3})$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\gamma + 2k^2 x} = -\frac{2\gamma}{(2k^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(2k^2)^3} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right) \quad (\text{F.4})$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{\gamma + 2k^2 x} = \frac{2(2k^2)^2 + 6\gamma^2}{3(2k^2)^3} - \frac{\gamma^3}{(2k^2)^4} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right) \quad (\text{F.5})$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{\gamma + 2k^2 x} = -\frac{2(2k^2)^2 \gamma + 6\gamma^3}{3(2k^2)^4} + \frac{\gamma^4}{(2k^2)^5} \ln \left(\frac{\gamma + 2k^2}{\gamma - 2k^2} \right) \quad (\text{F.6})$$

As variáveis x e k foram definidas de forma a serem as mesmas para todos os casos de espalhamento, são respectivamente o cosseno do ângulo de espalhamento e o momento do méson no centro de massa.