UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Diego Emilio Zanellato

CORREÇÕES RADIATIVAS AO MODELO DE THIRRING GAUGEADO COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ NA REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Florianópolis
2018

Diego Emilio Zanellato

CORREÇÕES RADIATIVAS AO MODELO DE THIRRING GAUGEADO COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ NA REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a obtenção do Grau de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Florianópolis
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zanellato, Diego Emilio
Correções Radiativas ao Modelo de Thirring Gaugeado com Quebra da Simetria de Lorentz na Representação de Heisenberg / Diego Emilio Zanellato ; orientador, Jeferson de Lima Tomazelli , 2018.
220 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Física. 2. violação da simetria de Lorentz. 3. simetria BRST. 4. modelo de Thirring. 5. teoria de perturbação na representação de Heisenberg. I. , Jeferson de Lima Tomazelli. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Diego Emilio Zanellato

CORREÇÕES RADIATIVAS AO MODELO DE THIRRING GAUGEADO COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ NA REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM FÍSICA, na área de concentração Física Matemática e Teoria de Campos e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 16 de março de 2018.

Ivan Helmuth Bechtold
(Coordenador do Programa)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
(presidente - UFSC)

Dr. Rodrigo Turcati
(membro titular - UFSC/FSC)

Prof. Dr. Cesar Rogério de Oliveira
(membro externo - UFSCar)

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(membro titular - UFSC/FSC)

Aos meus pais, Gilberto e Neide.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer especialmente:

ao Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli pela orientação e pela grande contribuição à minha formação durante todos estes anos de trabalho.

Aos meus pais pelo apoio incondicional.

Aos meus colegas de grupo Gabriel, Renan e Gerson pela amizade e pelas discussões enriquecedoras.

Aos meus colegas da sala da mecânica estatística e do departamento de física pela amizade e momentos de descontração.

À CAPES pelo fuporte financeiro.

To be conscious that you are ignorant is a great step to knowledge.

Benjamin Disraeli

RESUMO

Nesta investigação apresentamos um modelo do tipo Thirring em (3+1) dimensões com violação das simetrias de Lorentz e CPT. Embora o modelo original não apresente simetria de *gauge*, um *gaugeamento* é possível por intermédio do procedimento de Stückelberg, que resulta em um modelo com simetria BRST. Utilizando uma abordagem perturbativa na representação de Heisenberg, calculamos o tensor de polarização do vácuo do modelo, bem como o propagador bosônico corrigido em primeira ordem no parâmetro de quebra, investigando a geração dinâmica de massa e determinando as correções quânticas à ação original. Discutimos o reflexo da violação da simetria de Lorentz na escala de energia considerada.

Palavras chaves: violação da simetria de Lorentz, violação de CPT, teoria de perturbação na representação de Heisenberg, simetria BRST, modelo de Thirring.

ABSTRACT

In this investigation we present a Thirring type model in $(3+1)$ dimensions with violation of the Lorentz and CPT symmetries. Although the original model does not exhibit gauge symmetry, a gauging is possible by means of the Stückelberg procedure, which results in a model with BRST symmetry. Using a perturbative approach in the Heisenberg picture, we calculated the vacuum polarization tensor of the model, as well as the first-order corrected bosonic propagator in the breaking parameter, investigating the dynamic mass generation and determining the quantum corrections to the original action. We discuss the consequences of the Lorentz symmetry violation on the energy scale considered.

Key-words: Lorentz symmetry breaking, CPT violation, perturbation theory in Heisenberg picture, BRST symmetry, Thirring model.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O modelo padrão da física de partículas é a teoria que descreve as interações fundamentais entre partículas elementares. Embora seja fenomenologicamente bem sucedido, o modelo padrão não inclui a interação gravitacional e, por conta disso, é atualmente considerado como o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental ainda desconhecida.

Em teoria quântica de campos, o teorema CPT afirma que se uma teoria satisfaz os requerimentos de localidade, invariância de Lorentz e analiticidade das representações do grupo de Lorentz nos parâmetros de *boost*, a transformação CPT - conjugação de carga, transformação de paridade e inversal temporal, simultaneamente - é uma simetria da teoria.

Por possuir amplo respaldo experimental e uma previsão teórica baseada em hipóteses tão gerais, a violação da simetria CPT pode ser encarada como um indício de uma física de partículas além do modelo padrão.

As possíveis quebras da invariância de Lorentz e CPT têm sido objeto de estudo em extensões do modelo padrão que incluem termos renormalizáveis não invariantes [8, 12]. Em particular, o setor da eletrodinâmica quântica (QED) tem sido explorado considerando-se a possibilidade de quebra dinâmica de simetria de Lorentz.

Limites experimentais podem ser impostos sobre o termo que viola CPT na lagrangiana de Maxwell estendida, o análogo quadridimensional do termo de Chern-Simons da QED em (2+1) dimensões [13]. Em princípio, tanto o experimento quanto a teoria sugerem que o coeficiente do termo do tipo Chern-Simons deve se anular [7, 11]. Entretanto, algumas teorias de unificação preveem a possibilidade de quebra espontânea da simetria de Lorentz e CPT a energias mais baixas, onde extensões do modelo padrão emergem como teorias efetivas.

A ação para um único campo fermiônico na versão estendida da QED, incluindo o termo de corrente axial que viola a simetria de Lorentz e CPT, é dada por

$$S^{\rm CPT} = \int d^4x \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/ - m - b\!\!\!/\gamma_5)\psi\,,$$

onde b_μ é um objeto constante com 4 componentes.

A questão que se coloca é se um termo do tipo Chern-Simons,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} k^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\nu F^{\alpha\beta} \, ,$$

com $k_\mu \propto b_\mu$ pode ser gerado através de correções radiativas.

Muitos autores têm tentado responder essa questão, realizando cálculos perturbativos em segunda ordem, nas variáveis do fóton, retendo a principal contribuição em b_μ [9, 24]. Entretanto, surge uma ambiguidade no coeficiente k_μ: embora o resultado seja finito, este depende, em princípio, do método de regularização utilizado no tratamento da amplitude de polarização do vácuo.

A contribuição em ordem mais baixa em b para o tensor de polarização do vácuo é linearmente divergente por contagem de potências e proporcional ao gráfico de triângulo que corresponde à anomalia ABJ e sua expressão cruzada com momento axial nulo. Utilizando argumentos de simetria pode-se mostrar que a parte divergente desse tensor se cancela e o coeficiente do termo do tipo Chern-Simons é não nulo [30]. Esse resultado coincide com o cálculo "exato" da correção a um *loop*, efetuando-se a integração nos momentos internos na camada de massa [30].

Entretanto, os procedimentos acima não são completamente satisfatórios, uma vez que não foram levadas em conta as demais inserções próprias de auto-energia do fóton. Assim, a contribuição linear em b para o tensor de polarização do vácuo corresponde a um termo de ordem e^2 que viola a simetria de Lorentz e CPT numa teoria efetiva para a QED. Desta forma, faz-se necessária uma análise completa das correções radiativas em ordem α em teoria de perturbação, levando em conta termos de ordem superior no parâmetro de quebra b. Por outro lado, investigando a simetria de *gauge* da teoria estendida através da equação de Schwinger-Dyson para o propagador do fóton vestido permite analisar o deslocamento do polo no propagador do fóton bem como consequências físicas mensuráveis, como o Lamb-shift [5].

Partindo de um modelo do tipo Thirring em (3+1) dimensões com violação das simetrias de Lorentz e CPT para férmions sem massa e introduzindo a simetria de gauge através do formalismo de Stückelberg [28], calcularemos o tensor de polarização do vácuo do modelo na representação de Heisenberg, onde os campos interagentes estão bem definidos[41].

De posse do tensor de polarização, procederemos à análise do propagador corrigido do bóson de *gauge*, discutindo a geração dinâmica de massa e os contratermos, de natureza quântica, que devem ser adicionados à ação efetiva original para que o modelo seja consistente na escala de energia adotada. Salientamos que o caráter original da presente investigação consiste tanto no tratamento perturbativo de uma ação não renormalizável na representação de Heisenberg, através das equações de movimento, quanto na introdução da violação da simetria de Lorentz num modelo do tipo corrente-corrente.

O texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 apresentamos o procedimento de quantização canônica, os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para campos e o teorema de Noether. No capítulo 2 a quantização canônica dos campos de radiação e de Dirac livres é feita. O capítulo 3 trata de campos interagentes e as teorias de perturbação nas representações de interação e de Heisenberg são descritas. No capítulo 4 apresentamos o formalismo do campo B de Nakanishi para a teoria de Yang-Mills e mostramos como a simetria BRST surge dentro deste contexto. No capítulo 5 o formalismo de Stückelberg para o campo vetorial massivo é apresentado e adaptado para o *gaugeamento* do modelo de Thirring em (2+1) dimensões. No capítulo 6 um modelo do tipo Thirring em (3+1) dimensões com violação da simetria de Lorentz é proposto, o tensor de polarização do vácuo e o propagador corrigido são obtidos. Finalmente, no capítulo seguinte os resultados são compilados e as perspectivas futuras delineadas.

Capítulo 1

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA E TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

1.1 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Chamamos de quantização o método de construção da teoria quântica de um sistema físico a partir da sua correspondente teoria clássica. O procedimento que utilizaremos é chamado de quantização canônica e consiste, grosso modo, das seguintes etapas:

1. Através da formulação hamiltoniana da mecânica, obtém-se a descrição clássica do sistema.

   Classicamente, o estado de um sistema com n graus de liberdade é especificado pelas coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$ e pelos momentos conjugados $p^1, \ldots, p^n$.

   A evolução temporal do seu estado é descrita pelas equações de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}\,, \qquad \frac{dp^i}{dt} = \{p^i, H\}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{1.1}$$

   onde $H(q,p)$ é o hamiltoniano do sistema[1] e os parênteses de Poisson para duas funções (variáveis dinâmicas) $f = f(q,p)$ e $g = g(q,p)$ são definidos por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)\,. \tag{1.2}$$

   Em particular,

$$\{q_i, p^j\} = \delta_i^j\,, \qquad \{q_i, q_j\} = 0\,, \qquad \{p^i, p^j\} = 0\,, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{1.3}$$

[1] Por simplicidade assumiremos que o hamiltoniano não depende explicitamente do tempo.

Para uma variável dinâmica $\mathcal{A} = \mathcal{A}(q, p, t)$, a evolução temporal é dada por

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \{\mathcal{A}, H\} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \,. \tag{1.4}$$

2. O estado do sistema quântico é especificado por um vetor Ψ em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$.

3. Para cada variável dinâmica $\mathcal{A}$, dada na teoria clássica pela função $\mathcal{A}(p, q, t)$, associa-se, na teoria quântica, um operador $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(\hat{p}, \hat{q}, t)$ que atua em $\mathscr{H}$.

4. Postula-se que os operadores posição $\hat{q}$ e momento $\hat{p}$ satisfazem as relações canônicas de comutação[2]

$$[\hat{q}_i, \hat{p}^j] = i\delta_i^j \,, \qquad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \,, \qquad [\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0 \,. \tag{1.5}$$

5. A evolução temporal do estado Ψ é descrita pela equação de Schrödinger

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \,, \tag{1.6}$$

onde $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano correspondente ao hamiltoniano H clássico do sistema.

Podemos também utilizar a representação de Heisenberg, onde a evolução temporal reflete-se sobre os operadores, e não no estado do sistema. Nessa representação, um operador $\hat{\mathcal{A}}$ obedece a equação de Heisenberg

$$\frac{d\hat{\mathcal{A}}}{dt} = -i[\hat{\mathcal{A}}, H] + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}}{\partial t} \,, \tag{1.7}$$

e as relações canônicas de comutação (1.5) são tomadas a tempos iguais:

$$[\hat{q}_i(t), \hat{p}^j(t)] = i\delta_i^j \,, \qquad [\hat{q}_i(t), \hat{q}_j(t)] = 0 \,, \qquad [\hat{p}^i(t), \hat{p}^j(t)] = 0 \,. \tag{1.8}$$

Comparando (1.1), (1.3) e (1.4) com (1.7) e (1.8), vemos que a quantização canônica equivale, formalmente, à substituição:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \to -i[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] \,. \tag{1.9}$$

No que seguirá, aplicaremos a quantização canônica a sistemas físicos contínuos, isto é, que possuem infinitos graus de liberdade. Estes sistemas serão descritos por funções ϕ das coordenadas e do tempo, que são chamadas de campos.

[2]Adotaremos ao longo do texto o sistema de unidades naturais, em que $\hbar = c = 1$.

1.2 O FORMALISMO LAGRANGIANO PARA CAMPOS

De acordo com a metodologia descrita acima, partimos da formulação hamiltoniana para campos. Poderíamos pensar em obter diretamente do hamiltoniano clássico as equações de movimento; entretanto, esta formulação possui a desvantagem das equações de Hamilton não serem manifestamente covariantes, o que torna difícil a elaboração de uma teoria relativística [15].

Uma teoria relativística pode ser obtida diretamente a partir da formulação lagrangiana da mecânica clássica. Nesta formulação, toda a informação sobre a dinâmica do sistema está contida no lagrangiano $L = \int d^3x\mathcal{L}$ e as equações de movimento seguem de um princípio variacional que envolve a ação

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}\,, \tag{1.10}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana do sistema. Assim, como o determinante jacobiano de uma transformação de Lorentz própria é igual à unidade[3], se a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ for invariante de Lorentz, então a ação também o será. Por conseguinte, as equações de movimento serão covariantes.

Após a formulação lagrangiana do sistema ter sido construída, podemos passar à formulação hamiltoniana de forma análoga ao que é feito para um sistema de partículas. No que segue, adotaremos a formulação lagrangiana para campos.

Seja um sistema físico especificado por um determinado número de campos $\phi_r(x)$, onde $r = 1, \ldots, N$. Assumiremos que a dinâmica deste sistema possa ser obtida a partir de um princípio variacional que envolve uma densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)\,. \tag{1.11}$$

Tal dependência assegura a localidade da teoria, pois a densidade lagrangiana depende apenas do campo em uma vizinhança do ponto x. Além disso, tal dependência será suficiente para os campos que estamos interessados.

Definindo a ação S para uma região Ω do espaço-tempo de Minkowski $\mathcal{M}$, tal que os campos se anulam fora desta, por

$$S[\phi_1, \ldots, \phi_N] = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}(\phi_1, \ldots, \phi_N, \partial_\mu\phi_1, \ldots, \partial_\mu\phi_N)\,, \tag{1.12}$$

[3]Por definição, as transformações de Lorentz são transformações lineares que deixam invariante a forma quadrática $x_\mu x^\mu$. Sendo linear, a transformação é da forma $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, cujo determinante jacobiano é $\frac{\partial(x^1,x^2,x^3,x^4)}{\partial(x'^1,x'^2,x'^3,x'^4)} = \det\Lambda$. As transformações de Lorentz próprias são, por definição, as que possuem determinante 1.

as equações de movimento são obtidas pela extremização da ação S. Matematicamente, este princípio variacional expressa-se

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)} = 0 \,, \qquad\qquad r = 1, \ldots, N \,, \tag{1.13}$$

onde a derivada funcional $\delta F/\delta\phi_r$ para um funcional $F[\phi_1, \ldots, \phi_N]$ é definida implicitamente por

$$\frac{d}{d\epsilon} F[\phi_1 + \epsilon\sigma_1, \ldots, \phi_N + \epsilon\sigma_N]\bigg|_{\epsilon=0} = \int d^4x\, \sigma_k(x) \frac{\delta F}{\delta \phi_k(x)} \,. \tag{1.14}$$

Calculando o lado esquerdo de (1.14) para o funcional (1.12), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} S[\phi_1 + \epsilon\sigma_1, \ldots, \phi_N + \epsilon\sigma_N]\bigg|_{\epsilon=0} &= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r}\sigma_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\partial_\mu \sigma_r \right] \\ &= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \right] \right\} \sigma_r + \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r \right] \,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Pelo teorema da divergência, a segunda integral acima é

$$\int_\Omega d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r \right] = \int_{\partial\Omega} da_\mu(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r = 0 \,, \tag{1.16}$$

onde assumimos que os campos $\sigma_r(x)$ se anulam na fronteira $\partial\Omega$ da região Ω e $da_\mu(x)$ é o elemento de superfície definido por

$$\begin{aligned} da_0 &= dx^1 dx^2 dx^3 = d^3\mathbf{x}, \\ da_1 &= dx^0 dx^2 dx^3, \\ da_2 &= dx^0 dx^3 dx^1, \\ da_3 &= dx^0 dx^1 dx^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Assim, de (1.14),

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \right] = 0 \,, \qquad\qquad r = 1, \ldots, N \,, \tag{1.18}$$

que constituem as equações de Euler-Lagrange para campos.

1.3 O FORMALISMO HAMILTONIANO PARA CAMPOS

Para passarmos à formulação hamiltoniana, além das coordenadas generalizadas, precisamos dos momentos canonicamente conjugados e do hamiltoniano.

O campo conjugado a ϕ_r é definido por

$$\pi^r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi_r)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r}\,, \qquad\qquad r = 1, \ldots, N\,. \tag{1.19}$$

Supondo que possamos escrever $\dot{\phi}_r$ em termos de π^r, ou seja, que a teoria é não-singular, definimos a densidade hamiltoniana por

$$\mathcal{H}(x) = \pi^r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)\,, \tag{1.20}$$

cuja integração em todo o espaço fornece o hamiltoniano do sistema

$$H = \int d^3\mathbf{x}\; \mathcal{H}(x) = \int d^3\mathbf{x} \left[\pi^r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)\right]\,. \tag{1.21}$$

A suposição de não-singularidade é essencial, pois a passagem à formulação hamiltoniana de teorias singulares é feita de maneira diferente daquela que apresentaremos aqui, tendo dado origem ao estudo de sistemas hamiltonianos na presença de vínculos [17, 14].

Da mesma forma que no formalismo lagrangiano, as equações de movimento seguem do princípio variacional (1.13) empregado à ação

$$S[\phi, \pi] = \int_\Omega d^4x\, [\pi^r \dot{\phi}_r - \mathcal{H}(\phi_r, \partial_k \phi_r, \pi^r, \partial_k \pi^r)]. \tag{1.22}$$

Assim, de (1.14)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon} S[\phi + \epsilon\sigma, \pi + \epsilon\varrho]\bigg|_{\epsilon=0} = \\
&= \int_\Omega d^4x \left[\pi^r \dot{\sigma}_r + \dot{\phi}_r \varrho^r - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_r}\sigma_r - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \phi_r)}(\partial_k \sigma_r) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^r}\varrho^r - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \pi^r)}(\partial_k \varrho^r)\right] \\
&= \int_\Omega d^4x \left\{ \left[-\dot{\pi}^r - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_r} + \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \phi_r)}\right]\sigma_r + \left[\dot{\phi}_r - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^r} + \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \pi^r)}\right]\varrho^r \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

tendo sido realizada uma integração por partes em que, como no caso lagrangiano, os termos de superfície foram descartados. Logo, de (1.13), seguem as equações de Hamilton para campos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_r &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^r} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \pi^r)} = \frac{\delta H}{\delta \pi^r}, \\
\dot{\pi}^r &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_r} + \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_k \phi_r)} = -\frac{\delta H}{\delta \phi_r},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

onde a segunda igualdade acima segue do fato que H é independente de $\dot{\phi}_r, \dot{\pi}^r$ e da equação (1.18), com H no lugar de S.

Na formulação hamiltoniana para campos, uma variável dinâmica X é um funcional dos campos ϕ_r, π^r da forma

$$X[\phi,\pi]=\int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{X}(\phi_r,\partial_k\phi_r,\pi^r,\partial_k\pi^r,\mathbf{x},t), \tag{1.25}$$

ficando implícita a hipótese que os campos ϕ_r, π^r se anulam no infinito de maneira a garantir a existência da integração. Derivando (1.25) em relação ao tempo, realizando uma integração por partes, desconsiderando os termos de superfície e usando as equações de Hamilton (1.24), a evolução temporal de uma variável dinâmica é descrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}&=\int d^3\mathbf{x}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\phi_r}-\partial_k\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial(\partial_k\phi_r)}\right)\dot{\phi}_r+\left(\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial\pi^r}-\partial_k\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial(\partial_k\pi^r)}\right)\dot{\pi}^r+\frac{\partial\mathcal{X}}{\partial t}\right]\\&=\int d^3\mathbf{x}\left[\frac{\delta X}{\delta\phi_r(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi^r(x)}-\frac{\delta X}{\delta\pi^r(x)}\frac{\delta H}{\delta\phi_r(x)}\right]+\frac{\partial X}{\partial t}\\&=\{X,H\}+\frac{\partial X}{\partial t},\end{aligned} \tag{1.26}$$

onde os parênteses de Poisson são definidos para duas variáveis dinâmicas $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\phi,\pi)$ e $\mathcal{G}=\mathcal{G}(\phi,\pi)$ por

$$\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}=\int d^3\mathbf{x}\left[\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_r(x)}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\pi^r(x)}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\pi^r(x)}\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\phi_r(x)}\right]. \tag{1.27}$$

Em particular, no caso em que $\mathcal{F}=\phi_r(x)$ e $\mathcal{G}=\pi^s(y)$, temos[4]

$$\{\phi_r(x),\pi^s(y)\}_0=\int d^3\mathbf{x}\left[\frac{\delta\phi_r(t,\mathbf{x})}{\delta\phi_q(t,\mathbf{x}')}\frac{\delta\pi^s(t,\mathbf{y})}{\delta\pi^q(t,\mathbf{x}')}-\frac{\delta\phi_r(t,\mathbf{x})}{\delta\pi^q(t,\mathbf{x}')}\frac{\delta\pi^s(t,\mathbf{y})}{\delta\phi_q(t,\mathbf{x}')}\right]. \tag{1.28}$$

Escrevendo o campo ϕ_r como um funcional $G[\phi_1,\ldots,\phi_N]$ dos N campos,

$$\phi_r(t,\mathbf{x})\equiv G[\phi_1,\ldots,\phi_N]=\int d^3\,\mathbf{x}'\,\delta_r^q\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi_q(t,\mathbf{x}'), \tag{1.29}$$

segue que

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}G[\phi_1+\epsilon\sigma_1,\ldots,\phi_N+\epsilon\sigma_N]\right|_{\epsilon=0}=\int d^3\,\mathbf{x}'\,\delta_r^q\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\sigma_q(t,\mathbf{x}'). \tag{1.30}$$

Assim, de (1.14),

$$\frac{\delta\phi_r(t,\mathbf{x})}{\delta\phi_q(t,\mathbf{x}')}=\delta_r^q\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{1.31}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{\delta\pi^s(t,\mathbf{y})}{\delta\pi^q(t,\mathbf{x}')}=\delta_q^s\,\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}') \tag{1.32}$$

[4]Ao longo deste texto, o subscrito 0 em um comutador ou anticomutador indicará comutação ou anticomutação a tempos iguais.

e, como os campos e os respectivos campos conjugados são independentes, segue também

$$\frac{\delta\phi_r(t,\mathbf{x})}{\delta\pi^q(t,\mathbf{x}')} = 0 = \frac{\delta\pi^s(t,\mathbf{y})}{\delta\phi_q(t,\mathbf{x}')}\,. \tag{1.33}$$

Dessa forma,

$$\{\phi_r(x),\pi^s(y)\}_0 = \int d^3\mathbf{x}\,\delta_r^q\,\delta_q^s\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}') = \delta_r^s\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{1.34}$$

Fazendo $\mathcal{F} = \phi_r(x)$, $\mathcal{G} = \phi_s(y)$ e depois $\mathcal{F} = \pi^r(x)$ e $\mathcal{G} = \pi^s(y)$ obtemos as generalizações de (1.3) para campos:

$$\{\phi_r(x),\pi^s(y)\}_0 = \delta_r^s\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{1.35a}$$

$$\{\phi_r(x),\phi_s(y)\}_0 = 0\,, \tag{1.35b}$$

$$\{\pi^r(x),\pi^s(y)\}_0 = 0\,. \tag{1.35c}$$

Estes parênteses de Poisson são o ponto de partida para a quantização canônica de campos não-singulares, sendo substituídos por comutadores no caso de campos bosônicos e anticomutadores no caso de campos fermiônicos de acordo com o postulado de Schwinger [33].

Para campos singulares, os parênteses de Poisson devem ser substituídos pelos chamados parênteses de Dirac e a quantização é feita conforme o parágrafo acima.

1.4 SIMETRIAS E TEOREMA DE NOETHER

Chamamos de transformação de simetria a qualquer transformação envolvendo coordenadas espaço-temporais $\{x^\mu\}$ e/ou os campos ϕ_r que deixam a ação (1.12) invariante.

Como já conhecido do caso discreto, a conexão entre transformações de simetrias e quantidades conservadas, i.e., quantidades que, independentemente da evolução dinâmica do sistema, são invariantes no tempo, é feita por intermédio do teorema de Noether.

Nesta seção apresentaremos a generalização deste teorema para sistemas contínuos.

Consideremos uma transformação contínua das coordenadas espaço-temporais que, na sua forma infinitesimal, é dada por

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu. \tag{1.36}$$

Por sua vez, tanto os campos ϕ_r quanto a densidade lagrangiana $\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ se modificam frente a esta transformação. Descreveremos estas mudanças por

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \tag{1.37}$$

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial\phi'(x')/\partial_\mu x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x). \tag{1.38}$$

Além deste tipo de transformação, estamos interessados em transformações que modificam a forma funcional dos campos sem afetar as coordenadas espaço-temporais. Por este motivo, é conveniente definirmos a variação funcional dos campos:

$$\tilde{\delta}\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x). \tag{1.39}$$

A relação entre as duas transformações envolvendo campos pode ser estabelecida a partir das definições (1.37) e (1.39):

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\phi_r(x) &= \phi'_r(x) - \phi_r(x) = \phi'_r(x') - \phi_r(x) + \phi'_r(x) - \phi'_r(x') \\ &= \delta\phi_r(x) - [\phi'_r(x') - \phi'_r(x)] = \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi'_r(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\ &= \delta\phi_r(x) - \partial_\mu\phi_r(x)\delta x^\mu,\end{aligned} \tag{1.40}$$

onde a diferença $\phi'_r(x') - \phi'_r(x)$ foi expandida em série de Taylor até primeira ordem e, dentro desta ordem de aproximação, ϕ'_r foi substituído por ϕ_r.

Vejamos agora como estas transformações afetam a ação (1.12). Por definição, a variação da ação é

$$\delta S := \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}'(x') - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x) = \int_{\Omega'} d^4x' \left[\delta\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x)\right] - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x). \tag{1.41}$$

Até primeira ordem, o determinante Jacobiano da transformação (1.36) é

$$\left|\frac{\partial(x^\mu)}{\partial(x'^\nu)}\right| = (1 + \partial_\mu\delta x^\mu)\,. \tag{1.42}$$

Assim, (1.41) fica, em até primeira ordem, usando (1.40) com $\mathcal{L}$ no lugar de ϕ:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_\Omega d^4x\,(1 + \partial_\mu\delta x^\mu)\left[\delta\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x)\right] - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x) \\ &= \int_\Omega d^4x\,\delta\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu \\ &= \int_\Omega d^4x\left[\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right] + \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu \\ &= \int_\Omega d^4x\left[\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \partial_\mu(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)\right].\end{aligned} \tag{1.43}$$

Expressemos agora $\tilde{\delta}\mathcal{L}$ em termos da variação dos campos até primeira ordem

$$\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}(\phi + \tilde{\delta}\phi, \partial_\mu(\phi + \tilde{\delta}\phi)) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r}\tilde{\delta}\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}(\partial_\mu \phi_r) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r}\tilde{\delta}\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\partial_\mu(\tilde{\delta}\phi_r) \\
&= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\right]\tilde{\delta}\phi_r + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}\phi_r\right] = \frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)}\tilde{\delta}\phi_r + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}\phi_r\right].
\end{aligned}
$$

Logo, (1.43) torna-se

$$
\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)}\tilde{\delta}\phi_r + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}\phi_r + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right]\right\}. \tag{1.44}
$$

No caso em que as transformações (1.36) e (1.37) são de simetria, a variação da ação é nula, i.e., $\delta S = 0$. Neste caso, da arbitráriedade do volume de integração Ω, segue que o integrando de (1.44) deve se anular

$$
\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)}\tilde{\delta}\phi_r + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}\phi_r + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\right] = 0. \tag{1.45}
$$

Além disso, supondo que os campos satisfaçam as equações de Euler-Lagrange (1.18), decorre da equação acima a equação da continuidade

$$
\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{1.46}
$$

onde a quadricorrente J^μ é definida por

$$
J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\tilde{\delta}\phi_r + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu. \tag{1.47}
$$

A equação da continuidade expressa numa equação diferencial uma lei de conservação. A verificação deste fato é consequência da integração de (1.46) e uso do teorema da divergência:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_V d^3\mathbf{x}\, \partial_\mu J^\mu(x) = \frac{d}{dx^0}\int_V d^3\mathbf{x} J^0 + \int_V d^3\mathbf{x}\, \nabla \cdot \mathbf{J} \\
&= \frac{d}{dx^0}\int_V d^3\mathbf{x} J^0 + \oint_{\partial V} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}.
\end{aligned}
$$

Assim, supondo que os campos e as suas derivadas vão rapidamente a zero no infinito, de maneira a garantir que a integral de superfície acima se anule, conclui-se que a seguinte carga é conservada:

$$
Q = \int d^3\mathbf{x} J^0. \tag{1.48}
$$

Capítulo 2

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DOS CAMPOS LIVRES

2.1 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE RADIAÇÃO

Na presença de uma densidade de carga $\rho(t, \mathbf{x})$ e de uma densidade de corrente $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$, os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ são descritos pelas equações de Maxwell[1]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \,, \tag{2.1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,, \tag{2.1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,, \tag{2.1c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \,. \tag{2.1d}$$

Das equações (2.1b) e (2.1c), assumiremos a existência dos potenciais escalar $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$ e vetor $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ tais que

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} \,, \qquad \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \,. \tag{2.2}$$

Estas equações não determinam unicamente os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, pois as transformações

$$\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} \,, \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla f \,, \tag{2.3}$$

onde $f = f(t, \mathbf{x})$ é uma função de classe C^2, deixam os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ inalterados:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \,,$$
$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} - \nabla f) = \mathbf{E} - \frac{\partial (\nabla f)}{\partial t} + \frac{\partial (\nabla f)}{\partial t} = \mathbf{E} \,.$$

[1] Adotaremos o sistema de unidades Heaviside-Lorentz.

Estas transformações são chamadas de transformações de *gauge* de segunda espécie [27].

Podemos obter uma formulação covariante da eletrodinâmica clássica introduzindo o tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ e o seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Em termos destes, as equações de Maxwell (2.1) escrevem-se

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \text{e} \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.5a}$$

onde $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ é a quadridensidade de corrente.

A introdução do quadripotencial vetor $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, permite, utilizando (2.2), escrevermos

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\,, \tag{2.6}$$

o qual, substituído em (2.5a), fornece

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\mu A_\sigma \\ &= \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2}\epsilon^{\rho\nu\mu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma - \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.7a}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu\,, \tag{2.7b}$$

ou seja, em termos do quadripotencial A^μ, a segunda equação em (2.5a) é identicamente satisfeita, enquanto que a primeira torna-se

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu\,. \tag{2.8}$$

Nesta formulação covariante, as transformações de *gauge* (2.3) adquirem a forma

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x). \tag{2.9}$$

Para procedermos à quantização do campo eletromagnético, partimos da sua formulação lagrangiana. Isto pode ser feito tratando cada componente A^μ como um campo independente e introduzindo a densidade lagrangiana[2]

[2]Como a densidade lagrangiana deve ser invariante de Lorentz para que as equações de movimento sejam covariantes, a densidade lagrangiana mais geral para o campo eletromagnético é da forma

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + b(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + c(\partial_\mu A_\mu)(\partial^\nu A^\nu) + d(A_\mu A^\mu) + e(j_\mu A^\mu)\,.$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \,, \tag{2.10}$$

o que, pelas equações de Euler-Lagrange (1.18), leva às equações de movimento (2.8).

De (1.19), os campos conjugados são

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial\dot{A}_\mu}F^{\lambda\nu} + \frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial\dot{A}_\mu}F_{\lambda\nu}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial\dot{A}_\mu}F^{\lambda\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{A}_\mu}(\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda)\right]F^{\lambda\nu} = -\frac{1}{2}\left(\delta^0_\lambda\delta^\mu_\nu - \delta^0_\nu\delta^\mu_\lambda\right)F^{\lambda\nu} = F^{\mu 0}\end{aligned} \tag{2.11}$$

e então, de (2.6),

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0} = F^{00} = 0\,, \qquad\qquad \pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = F^{i0} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i\,. \tag{2.12}$$

Como podemos ver, o campo conjugado π^0 é nulo, tornando impossível expressarmos $\dot{A}^0$ em termos dos outros campos, ou seja, estamos diante de uma teoria singular.

Para contornarmos esse problema, sem adentrarmos no formalismo hamiltoniano com vínculos, podemos prosseguir de duas maneiras:

1. *Fixando o gauge.* As equações (2.8) podem ser escritas

$$-\nabla^2 A^0 + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = \rho\,, \tag{2.13a}$$

$$\Box\mathbf{A} + \nabla\left(\frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) = \mathbf{j}\,. \tag{2.13b}$$

Escolhendo o *gauge* de Coulomb, onde[3] $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, a solução de (2.13a) é

$$A^0(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{\rho(t,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,, \tag{2.14}$$

e (2.13b) torna-se

$$\Box\mathbf{A} = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi}\nabla\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{\partial\rho\,(t,\mathbf{x}')}{\partial t}\,. \tag{2.15}$$

Para o campo de radiação, ou seja, o campo eletromagnético na ausência de fontes

Aplicando as equações de Euler-Lagrange e comparando com (2.8), obtemos (2.10).

[3] Aqui estamos cometendo um abuso de notação. Na verdade, impomos que seja nulo o divergente do potencial vetor $\mathbf{A}'(t,\mathbf{x})$ obtido pela transformação (2.9). Assim, (2.14) e (2.15) se referem a A'^0 e $\mathbf{A}'$, respectivamente.

de carga e corrente, temos

$$A^0(t,\mathbf{x}) = 0\,, \qquad\qquad \Box\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = 0\,. \tag{2.16}$$

Assim, no *gauge* de Coulomb, o campo A^0 também é nulo, permitindo a passagem para a formulação hamiltoniana e a quantização canônica. Entretanto, estamos quebrando a covariância da teoria, que é um requisito para se investigar a renormalizabilidade da mesma em nível quântico [27].

2. *Quantização Covariante.* No lugar da densidade lagrangiana (2.10) utilizamos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)\,, \tag{2.17}$$

a qual fornece campos conjugados não-nulos para $\lambda \neq 0$:

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - \lambda\, g^{\mu 0}(\partial_\sigma A^\sigma)\,. \tag{2.18}$$

Entretanto, as equações de movimento obtidas a partir da densidade lagrangiana (2.17) não são as equações (2.8), como podemos constatar a partir das equações de Euler-Lagrange (1.18):

$$\begin{aligned}
\partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \partial_\nu\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}F^{\rho\sigma} - \lambda\,\frac{\partial(\partial_\rho A^\rho)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}(\partial_\sigma A^\sigma)\right] + j^\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial A_\mu} \\
&= \partial_\nu\left[-\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma)F^{\rho\sigma} - \lambda\, g^{\rho\alpha}\frac{\partial(\partial_\rho A_\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}(\partial_\sigma A^\sigma)\right] + j^\rho\delta^\mu_\rho \\
&= \partial_\nu\left[-F^{\nu\mu} - \lambda\, g^{\rho\alpha}\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\alpha(\partial_\sigma A^\sigma)\right] + j^\mu \\
&= -\Box A^\mu + \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) - \lambda\,\partial^\mu(\partial_\sigma A^\sigma) + j^\mu = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \Box A^\mu + (\lambda - 1)\partial^\mu(\partial_\sigma A^\sigma) = j^\mu\,. \tag{2.19}$$

Porém, tomando a quadridivergência da equação acima e supondo que a quadridensidade de corrente seja conservada ($\partial_\mu j^\mu = 0$), ficamos com

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Box A^\mu + (\lambda - 1)\Box(\partial_\sigma A^\sigma) &= \partial_\mu j^\mu \\
\therefore \qquad \lambda\,\Box\,\partial_\mu A^\mu &= 0\,,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

equação que, junto com condições de contorno adequadas, possui solução $\partial_\mu A^\mu = 0$ [23, 18]. Logo, (2.19) fica

$$\Box A^\mu = j^\mu\,, \tag{2.21}$$

que é a equação (2.8) no *gauge* de Lorentz, ou seja, $\partial_\nu A^\nu = 0$.

Em suma, embora as equações (2.8) e (2.19) sejam diferentes, a densidade lagrangiana (2.17), junto com condições de contorno, leva às equações de Maxwell no *gauge* de Lorentz.

Temos então uma formulação lagrangiana covariante para o campo de radiação a partir da qual podemos, a princípio, proceder à quantização canônica da teoria. Entretanto, a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$, em termos de operadores, é incompatível com as relações canônicas de comutação, análogas às equações (1.8), que impomos a A_μ e π^μ. Este problema pode ser resolvido utilizando o formalismo de Gupta-Bleuler [19].

2.1.1 QUANTIZAÇÃO NO GAUGE DE COULOMB

Dado um quadripotencial $A^\mu(x)$, é possível encontrarmos uma transformação de *gauge* (2.3) na qual $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Para isso, é suficiente que f satisfaça à equação

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \mathbf{A}\,, \tag{2.22}$$

pois, neste caso,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} - \nabla f) = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 f = 0\,. \tag{2.23}$$

A solução da equação (2.22) é dada por

$$f(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\, \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}'), \tag{2.24}$$

onde $G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ é a bem conhecida função de Green do operador laplaciano, definida pela equação

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{2.25}$$

Assim, o potencial vetor $\mathbf{A}'$ procurado é

$$\mathbf{A}'(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) + \nabla \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}')\,. \tag{2.26}$$

Pelo teorema de Helmholtz [32], podemos escrever

$$\mathbf{A} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W} \equiv \mathbf{A}_{||} + \mathbf{A}_{\perp}\,, \tag{2.27}$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0$, $\nabla \times \mathbf{A}_{||} = 0$ e

$$U = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}')\,, \tag{2.28}$$

$$\mathbf{W} = \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' \times \mathbf{A}(t,\mathbf{x}')\,. \tag{2.29}$$

Da decomposição (2.27), segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_{||} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{||}) + \mathbf{A}_{||} \\
&= \left[\mathbf{A} + \nabla \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}')\right] - \nabla \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t,\mathbf{x}') \\
&\equiv (P_\perp + P_{||})\mathbf{A}\,, \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

onde os operadores de projeção $P_\perp$ e $P_{||}$ são definidos por

$$(P_\perp)_{ij} = \delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j\,, \qquad (2.31)$$

$$(P_{||})_{ij} = \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j\,, \qquad (2.32)$$

e $\frac{1}{\nabla^2}$ é o operador laplaciano inverso, cuja atuação em um campo vetorial $V(\mathbf{x})$ é

$$\frac{1}{\nabla^2} V(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, V(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\, \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, V(\mathbf{x}')\,. \qquad (2.33)$$

Assim, comparando (2.30) com (2.26) vemos que

$$\mathbf{A}'(t,\mathbf{x}) = P_\perp \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\perp(t,\mathbf{x})\,, \qquad (2.34)$$

ou seja, a escolha do *gauge* de Coulomb anula a parte longitudinal de $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$, mantendo a sua parte transversal[4] $\mathbf{A}_\perp(t,\mathbf{x})$, .

No que segue, ficará subentendido que estamos nos referindo ao campo transverso e eliminaremos o símbolo "$\perp$".

Como já discutido, as equações de movimento para o campo de radiação são dadas por (2.16) e, de acordo com (2.12),

$$\pi^i(t,\mathbf{x}) = -\dot{A}^i(t,\mathbf{x})\,. \qquad (2.35)$$

A densidade hamiltoniana é obtida de (1.20), (2.16) e (2.35):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \\
&= -\pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\left(\partial_0 A_i \partial^0 A^i + \partial_i A_j \partial^i A^j - \partial_i A_j \partial^j A^i\right) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\left(\partial_i A^j \partial_i A^j - \partial_j A^i \partial_i A^j\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_l A^m \partial_i A^j
\end{aligned}$$

[4] $\mathbf{A}_\perp$ é chamado de campo transverso porque a equação que o descreve, $\Box\mathbf{A}_\perp = 0$, admite como solução a onda plana $\mathbf{A}_\perp(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ se $\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\perp = 0$, para que a condição $\nabla\cdot\mathbf{A}_\perp = 0$ seja satisfeita. Portanto, $\mathbf{A}_\perp$ é transverso à direção de propagação da onda.

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\partial_l A^m \partial_i A^j = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} + (\nabla\times\mathbf{A})\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\right]$$
$$\equiv \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\pi}^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right] . \tag{2.36}$$

O hamiltoniano para o campo de radiação é obtido pela integração da densidade hamiltoniana (2.36) em todo o espaço,

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left[\boldsymbol{\pi}^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right] . \tag{2.37}$$

Além disso, de (1.35) e (2.35) os parenteses de Poisson são

$$\begin{aligned} &\left\{A_i(x)\,,\pi^j(y)\right\}_0 = \left\{A^i(x)\,,\dot{A}^j(y)\right\}_0 = \delta_i^j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\\ &\left\{A_i(x)\,,A_j(y)\right\}_0 = 0\,,\\ &\left\{\dot{A}_i(x)\,,\dot{A}_j(y)\right\}_0 = 0\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

A solução geral da segunda equação em (2.16) é dada em termos da sua transformada de Fourier[5] [18],

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}}}\sum_{r=1}^{2}\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right] , \tag{2.39}$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = k^0 = |\mathbf{k}|$ e o fator de normalização $[2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}]^{-1/2}$ foi introduzido por conveniência. Além disso, a forma de (2.39) garante que $\mathbf{A}$ seja um campo vetorial real.

Os vetores de polarização $\boldsymbol{\epsilon}_1$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2$ são escolhidos de modo a serem reais, ortogonais entre si e a $\mathbf{k}$, ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}\,, \qquad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) = 0\,, \qquad r,s = 1,2\,, \tag{2.40}$$

assegurando que $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.

Podemos discretizar os vetores de onda $\mathbf{k}$ considerando o potencial vetor $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$ dentro de um volume $V = L^3$ e impondo condições de periodicidade:

$$\mathbf{A}(t,x,y,z) = \mathbf{A}(t,x+L,y,z) = \mathbf{A}(t,x,y+L,z) = \mathbf{A}(t,x,y,z+L)\,. \tag{2.41}$$

Assim, (2.39) torna-se [27]

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\,\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right] , \tag{2.42}$$

[5] Em (2.39) kx denota um invariante no espaço de Minkowski.

onde $\mathbf{k}$ é da forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)\,, \qquad\qquad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}\,. \tag{2.43}$$

Os coeficientes $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^*(\mathbf{k})$ são dados em termos de $\mathbf{A}(x)$ e $\dot{\mathbf{A}}(x)$ por

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x}\; \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \Big[\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) + i\dot{\mathbf{A}}(x)\Big] e^{ikx}\,, \\ a_r^*(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x}\; \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \Big[\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) - i\dot{\mathbf{A}}(x)\Big] e^{-ikx}\,. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Podemos agora quantizar o campo de radiação. Efetuando a quantização canônica dos campos e seus conjugados, $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ torna-se um operador sujeito às seguintes relações de comutação

$$\big[A_j(x)\,, \pi^l(y)\big]_0 = \big[A^j(x)\,, \dot{A}^l(y)\big]_0 = i\delta_j^l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,, \tag{2.45a}$$

$$\big[A_j(x)\,, A_l(y)\big]_0 = 0\,, \tag{2.45b}$$

$$\big[\dot{A}_j(x)\,, \dot{A}_l(y)\big]_0 = 0\,, \tag{2.45c}$$

obtidas realizando-se a substituição (1.9) em (2.38). Entretanto, a relação de comutação (2.45a) é incompatível com a condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \big[0\,, \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')\big] = \big[\partial_j A^j(t, \mathbf{x})\,, \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')\big] \\ &= \partial_j \big[A^j(t, \mathbf{x})\,, \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')\big] + \big[\partial_j \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')\big] A^j(t, \mathbf{x}) - \big[\partial_j A^j(t, \mathbf{x})\big] \dot{A}^l(t, \mathbf{x}') \\ &= i\partial_j \big[\delta^{jl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\big] = i\partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Esta inconsistência é sanada substituindo a relação de comutação (2.45a) por [18]

$$\big[A^j(x)\,, \dot{A}^l(y)\big]_0 = i\delta_\perp^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,, \tag{2.47}$$

onde a delta de Dirac transversa é definida por [10]

$$\delta_{\perp jl}(\mathbf{x} - y) = (P_\perp)_{jl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,, \tag{2.48}$$

a qual, por construção, possui divergência nula:

$$\partial_j \delta_\perp^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0\,. \tag{2.49}$$

Além disso, para um campo vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_{||}$, temos

$$\int d^3\mathbf{y}\, V^j(\mathbf{y})\, \delta_\perp^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = V_\perp^l(\mathbf{x})\,. \tag{2.50}$$

Assumiremos então que as relações de comutação para o campo de radiação no *gauge* de Coulomb são:

$$\big[A_j(x)\,,\pi^l(y)\big]_0 = \big[A^j(x)\,,\dot{A}^l(y)\big]_0 = i\delta_\perp^{jl}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{2.51a}$$

$$\big[A_j(x)\,,A_l(y)\big]_0 = 0\,, \tag{2.51b}$$

$$\big[\dot{A}_j(x)\,,\dot{A}_l(y)\big]_0 = 0\,. \tag{2.51c}$$

As equações de movimento para $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\pi}(t,\mathbf{x})$ são obtidas a partir da equação de Heisenberg (1.7). Para encontrá-las, faremos uso dos seguintes comutadores:

$$\begin{aligned}\big[A^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\big] &= \epsilon^{jlm}\big[A^i(t,\mathbf{x}),\partial'_l A^m(t,\mathbf{x}')\big]\\ &= \epsilon^{jlm}\partial'_l\big[A^i(t,\mathbf{x}),A^m(t,\mathbf{x}')\big] = 0\,.\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\big] &= \epsilon^{jlm}\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),\partial'_l A^m(t,\mathbf{x}')\big]\\ &= \epsilon^{jlm}\partial'_l\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),A^m(t,\mathbf{x}')\big] = i\epsilon^{jlm}\partial'_l\delta_\perp^{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Assim, de (1.7), (2.37), (2.51) e dos comutadores acima, temos

$$\begin{aligned}\dot{A}^i(t,\mathbf{x}) &= -i\big[A^i(t,\mathbf{x}),H\big]\\ &= -\frac{i}{2}\int d^3\mathbf{x}'\Big(\big[A^i(t,\mathbf{x}),(\boldsymbol{\pi}(t,\mathbf{x}'))^2\big] + \big[A^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^2\big]\Big)\\ &= -\frac{i}{2}\int d^3\mathbf{x}'\Big\{\pi^j(t,\mathbf{x}')\big[A^i(t,\mathbf{x}),\pi^j(t,\mathbf{x}')\big] + \big[A^i(t,\mathbf{x}),\pi^j(t,\mathbf{x}')\big]\pi^j(t,\mathbf{x}')\Big\}\\ &= -\int d^3\mathbf{x}'\delta_\perp^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\pi^j(t,\mathbf{x}')\\ &= -\pi^i(t,\mathbf{x})\,,\end{aligned} \tag{2.54a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^i(t,\mathbf{x}) &= -i\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),H\big]\\ &= -\frac{i}{2}\int d^3\mathbf{x}'\Big(\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),(\boldsymbol{\pi}(t,\mathbf{x}'))^2\big] + \big[\pi^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^2\big]\Big)\\ &= -\frac{i}{2}\int d^3\mathbf{x}'\Big\{(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\big[\pi^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\big]\\ &+ \big[\pi^i(t,\mathbf{x}),(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\big](\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\Big\}\\ &= \int d^3\mathbf{x}'\epsilon^{jlm}(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\partial'_l\delta_\perp^{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\\ &= -\int d^3\mathbf{x}'\epsilon^{jlm}\partial'_l(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))^j\delta_\perp^{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\\ &= \int d^3\mathbf{x}'\big[\nabla'\times(\nabla'\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}'))\big]^m\delta_\perp^{mi}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\\ &= \big[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x}))\big]^i = \big[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}(t,\mathbf{x})) - \nabla^2\mathbf{A}(t,\mathbf{x})\big]^i\\ &= -\big[\nabla^2\mathbf{A}(t,\mathbf{x})\big]^i\,,\end{aligned} \tag{2.54b}$$

onde usamos a identidade $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp$ e $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_\perp$.

Derivando (2.54a) em relação ao tempo e substituindo (2.54b), resulta

$$\Box \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0\,, \tag{2.55}$$

expressão formalmente idêntica à equação para o campo clássico (2.16).

Analogamente ao caso clássico, a solução geral de (2.55) é

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\, \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \big[a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}\big]\;, \tag{2.56}$$

onde $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ são agora operadores, dados por

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x}\; \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \Big[\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) + i\dot{\mathbf{A}}(x)\Big] e^{ikx}\,, \\ a_r^\dagger(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x}\; \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \Big[\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) - i\dot{\mathbf{A}}(x)\Big] e^{-ikx}\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

De (2.51), (2.57) e utilizando

$$\int_V d^3\mathbf{x}\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\,, \tag{2.58}$$

obtemos as relações de comutação entre $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} \big[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big] &= \frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-1/2}}{2V} \int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\, e^{i(kx - k'x')} \\ &\times \Big[\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \Big(\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) + i\dot{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\Big), \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}') \cdot \Big(\omega_{\mathbf{k}'} \mathbf{A}(t,\mathbf{x}') - i\dot{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x}')\Big)\Big] \\ &= -\frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V} \int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\, e^{i(kx - k'x')} \Big\{ i\,\omega_{\mathbf{k}} \epsilon_r^j(\mathbf{k}) \epsilon_s^l(\mathbf{k}') \overbrace{\Big[A^j(t,\mathbf{x}), \dot{A}^l(t,\mathbf{x}')\Big]}^{=i\delta_\perp^{jl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &- i\,\omega_{\mathbf{k}'} \epsilon_r^j(\mathbf{k}) \epsilon_s^l(\mathbf{k}') \underbrace{\Big[\dot{A}^j(t,\mathbf{x}), A^l(t,\mathbf{x}')\Big]}_{=-i\delta_\perp^{jl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \Big\} \\ &= \frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}')\, (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}) \underbrace{\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\, \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{rs}\, \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,, \end{aligned} \tag{2.59a}$$

$$\big[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')\big] = \frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-1/2}}{2V} \int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\, e^{i(kx + k'x')}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Big[\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\Big(\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(t,\mathbf{x})+i\dot{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})\Big)\,,\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}')\cdot\Big(\omega_{\mathbf{k}'}\mathbf{A}(t,\mathbf{x}')+i\dot{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x}')\Big)\Big]\\
&=\frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V}\int d^3\mathbf{x}\;d^3\mathbf{x}'\;e^{i(kx+k'x')}\Big\{i\,\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_r^j(\mathbf{k})\epsilon_s^l(\mathbf{k}')\;\overbrace{\Big[A^j(t,\mathbf{x}),\dot{A}^l(t,\mathbf{x}')\Big]}^{=i\delta^{jl}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\\
&+i\,\omega_{\mathbf{k}'}\epsilon_r^j(\mathbf{k})\epsilon_s^l(\mathbf{k}')\;\underbrace{\Big[\dot{A}^j(t,\mathbf{x}),A^l(t,\mathbf{x}')\Big]}_{=-i\delta^{jl}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\Big\}\\
&=-\frac{(\omega_{\mathbf{k}}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V}\underbrace{\int d^3\mathbf{x}\,e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}}\,e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}')\,(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})\\
&=0\,,
\end{aligned}
\tag{2.59b}
$$

$$
\begin{aligned}
\big[a_r^\dagger(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big]&=a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')-a_s^\dagger(\mathbf{k}')a_r^\dagger(\mathbf{k})=-[a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')-a_s(\mathbf{k}')a_r(\mathbf{k})]^\dagger\\
&=-[a_r(\mathbf{k}),a_s(\mathbf{k}')]^\dagger=0\,.
\end{aligned}
\tag{2.59c}
$$

Como vemos, $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ possuem as mesmas relações de comutação que os operadores de levantamento e abaixamento do oscilador harmônico.

Podemos também escrever o operador hamiltoniano em função de $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$. Note que, de (2.56),

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}=\dot{\mathbf{A}}(t,\mathbf{x})&=-i\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}}\,\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\big[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\big]\;,\\
\nabla\times\mathbf{A}(t,\mathbf{x})&=i\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\,\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\big[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx}-a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}\big]\;.
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^2=&-\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\sum_{r,s=1}^{2}\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}}{2V}\,\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}')\Big[a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(k+k')x}-a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k')x}\\
&-a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(k-k')x}+a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k')x}\Big]\,,
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

enquanto que

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\mathbf{A})^2=&-\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\sum_{r,s=1}^{2}\frac{(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V}\Big[\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})\Big]\cdot\Big[\mathbf{k}'\times\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}')\Big]\Big\{a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(k+k')x}\\
&-a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k')x}-a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(k-k')x}+a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k')x}\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Portanto, de (2.37) e (2.40) segue

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\left[a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k})\right] \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\left[a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+\frac{1}{2}\right], \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

que corresponde ao hamiltoniano de um sistema de osciladores harmônicos independentes.

Em analogia ao método de operadores para o oscilador harmônico, vamos definir o operador número por

$$
N=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}N_r(\mathbf{k})\equiv\sum_i N_{r_i}(\mathbf{k}_i)=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\,. \qquad (2.64)
$$

Este operador comuta com o hamiltoniano, isto é,

$$
\big[H,N\big]=\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\sum_{r,s=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\big[N_r(\mathbf{k}),N_s(\mathbf{q})\big]=0 \qquad (2.65)
$$

pois, de (2.59),

$$
\begin{aligned}
\big[N_r(\mathbf{k}),N_s(\mathbf{q})\big] &= \big[a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{q})a_s(\mathbf{q})\big] \\
&= a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{q})\big[a_r(\mathbf{k}),a_s(\mathbf{q})\big]+a_r^\dagger(\mathbf{k})\big[a_r(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{q})\big]a_s(\mathbf{q}) \\
&+ a_s^\dagger(\mathbf{q})\big[a_r^\dagger(\mathbf{k}),a_s(\mathbf{q})\big]a_r(\mathbf{k})+\big[a_r^\dagger(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{q})\big]a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{q}) \\
&= a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{q})\delta_{rs}\delta_{\mathbf{kq}}-a_s^\dagger(\mathbf{q})a_r(\mathbf{k})\delta_{rs}\delta_{\mathbf{kq}}=0\,. \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

Assim, o hamiltoniano e o operador número possuem o mesmo conjunto de autovetores. Estes autovetores podem ser caracterizados pelos autovalores n dos autoestados de cada operador $N_r(\mathbf{k})$, que correspondem ao número de partículas (bósons) no estado $|n,r,\mathbf{k}\rangle$:

$$
N_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots;n_i,r_i,\mathbf{k}_i;\ldots\big\rangle=n_i\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots;n_i,r_i,\mathbf{k}_i;\ldots\big\rangle\,. \qquad (2.67)
$$

O número total de partículas n no estado $\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots\big\rangle$ é dado por

$$
\begin{aligned}
N\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots\big\rangle &= \sum_i N_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots\big\rangle=\Big(\sum_i n_i\Big)\big|n_1,r_1,\mathbf{k}_1;\ldots\big\rangle \\
&= n\,|n_{r_1}(\mathbf{k}_1),\ldots\rangle\,. \qquad (2.68)
\end{aligned}
$$

Vamos agora mostrar que a atuação dos operadores $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ e $a_r(\mathbf{k})$ em um autoestado de N leva a um outro autoestado de N. Temos que

$$
\begin{aligned}
Na_r^\dagger(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle &= \sum_{s_i,\mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) a_{s_i}(\mathbf{k}_i) a_r^\dagger(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \\
&= \sum_{s_i,\mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i)\big[\delta_{rs_i}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_i} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_{s_i}(\mathbf{k}_i)\big]\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \\
&= a_r^\dagger(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle + a_r^\dagger(\mathbf{k}) N\, |n_{r_1}(\mathbf{k}_1), \dots\rangle \\
&= (1+n) a_s^\dagger(\mathbf{q})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \,,
\end{aligned} \tag{2.69}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Na_r(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle &= \sum_{s_i,\mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) a_{s_i}(\mathbf{k}_i) a_r(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \\
&= \sum_{s_i,\mathbf{k}_i} \big[a_r(\mathbf{k}) a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) - \delta_{rs_i}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_i}\big] a_{s_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \\
&= a_r(\mathbf{k}) N\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle - a_r(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \\
&= (n-1) a_r(\mathbf{k})\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\big\rangle \,.
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

Pelos resultados acima, vemos que a atuação do operador $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ corresponde a acrescentar uma partícula ao total de partículas do sistema enquanto que a de $a_r(\mathbf{k})$ a diminuir em um esse número. Dessa forma, interpretaremos $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ e $a_r(\mathbf{k})$, respectivamente, como operadores de criação e aniquilação de fótons de momento $\mathbf{k}$ e polarização $\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k})$:

$$
a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i)\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\big\rangle \propto \big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i+1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\big\rangle \,, \tag{2.71a}
$$

$$
a_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\big\rangle \propto \big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i-1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\big\rangle \,. \tag{2.71b}
$$

Supondo que os estados $|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle$, $|n_1, \dots, n_i+1, \dots\rangle \equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i+1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle$ e $|n_1, \dots, n_i-1, \dots\rangle \equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i-1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle$ estejam normalizados, temos que

$$
\begin{aligned}
n_i + 1 &= \big\langle n_1, \dots, n_i, \dots\big|N_{r_i} + 1\big|n_1, \dots, n_i, \dots\big\rangle \\
&= \big\langle n_1, \dots, n_i, \dots\big|a_{r_i}(\mathbf{k}_i) a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i)\big|n_1, \dots, n_i, \dots\big\rangle \\
&= |C|^2\big\langle n_1, \dots, n_i+1, \dots\big|n_1, \dots, n_i+1, \dots\big\rangle = |C|^2 \,.
\end{aligned} \tag{2.72}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
n_i &= \big\langle n_1, \dots, n_i, \dots\big|N_{r_i}\big|n_1, \dots, n_i, \dots\big\rangle \\
&= \big\langle n_1, \dots, n_i, \dots\big|a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) a_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1, \dots, n_i, \dots\big\rangle \\
&= |D|^2\big\langle n_1, \dots, n_i-1, \dots\big|n_1, \dots, n_i-1, \dots\big\rangle = |D|^2 \,.
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

Assim, as equações (2.71) tornam-se

$$a^\dagger_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \ldots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \ldots\big\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \ldots; n_i + 1, r_i, \mathbf{k}_i; \ldots\big\rangle\,, \tag{2.74a}$$
$$a_{r_i}(\mathbf{k}_i)\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \ldots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \ldots\big\rangle = \sqrt{n_i}\,\big|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \ldots; n_i - 1, r_i, \mathbf{k}_i; \ldots\big\rangle\,. \tag{2.74b}$$

Podemos agora definir o vácuo $|0\rangle$, isto é, o estado que não possui partículas, por

$$a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \qquad\qquad \forall\,\mathbf{k} \;\text{ e }\; r = 1, 2. \tag{2.75}$$

A partir do estado de vácuo, podemos construir estados contendo fótons de número, polarizações e momentos arbitrários aplicando em $|0\rangle$ operadores de criação apropriados. Por exemplo, o estado normalizado contendo um fóton de momento $\mathbf{k}_1$ e polarização $\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{k}_1)$ e dois fótons de momento $\mathbf{k}_2$ e de polarização $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{k}_2)$ é dado por

$$|1, 2, \mathbf{k}_1; 2, 1, \mathbf{k}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,a^\dagger_2(\mathbf{k}_1)\big[a^\dagger_1(\mathbf{k}_2)\big]^2|0\rangle\,. \tag{2.76}$$

De maneira geral

$$|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; n_2, r_2, \mathbf{k}_2; \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!\,\ldots}}\big[a^\dagger_{r_1}(\mathbf{k}_1)\big]^{n_1}\big[a^\dagger_{r_2}(\mathbf{k}_1)\big]^{n_2}\ldots|0\rangle\,, \tag{2.77}$$

onde o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!\ldots}}$ pode ser demonstrado por indução [18].

Assumindo que o estado de vácuo esteja normalizado, $\langle 0|0\rangle = 1$, de (2.63) obtemos o valor esperado da energia do vácuo do campo eletromagnético quantizado, também chamada de energia de ponto zero:

$$\langle 0|H|0\rangle = \sum_{\mathbf{k},r}\omega_{\mathbf{k}}\langle 0|a^\dagger_r(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|0\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},r}\omega_{\mathbf{k}}\langle 0|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},r}\omega_{\mathbf{k}}\,, \tag{2.78}$$

que claramente é infinita.

A ocorrência de energias de ponto zero divergentes é uma característica inerente à teoria quântica de campos. Sua origem se deve ao fato de que a quantização canônica não estabelece um ordenamento entre operadores que não comutam entre si. Esta “constante” infinita é desprezada argumentando-se que apenas diferenças de energia possuem significado físico, ao contrário de valores intrínsecos atribuídos à mesma. Assim, o valor esperado da energia de um estado é determinado relativamente ao valor esperado da energia do vácuo. Isto corresponde a deslocarmos o zero da escala de energia de maneira que este coincida com a energia do estado de vácuo.

Uma maneira de contornar esse problema é introduzir o ordenamento normal de operadores para bósons. Neste ordenamento normal, é assumido que todos os operadores de criação e aniquilação de bósons (no nosso caso fótons) comutam entre si e que todos os operadores de aniquilação aparecem à direita dos operadores de criação. Por exemplo, o ordenamento normal dos operadores $a_2(\mathbf{k_1})a_1^\dagger(\mathbf{k_2})a_1^\dagger(\mathbf{k_3})a_1(\mathbf{k_4})$ é

$$N\big[a_2(\mathbf{k_1})a_1^\dagger(\mathbf{k_2})a_1^\dagger(\mathbf{k_3})a_1(\mathbf{k_4})\big] = a_1^\dagger(\mathbf{k_2})a_1^\dagger(\mathbf{k_3})a_2(\mathbf{k_1})a_1(\mathbf{k_4})\,. \tag{2.79}$$

No caso do operador hamiltoniano, temos de (2.63) e (2.75)

$$\begin{aligned}
\langle 0|N[H]|0\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\left\langle 0\middle|N\big[a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k})\big]\middle|0\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\left\langle 0\middle|a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\middle|0\right\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}\left\langle 0\middle|a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\middle|0\right\rangle = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

ou seja, o ordenamento normal impõe que a energia de ponto zero seja nula.

2.1.2 QUANTIZAÇÃO COVARIANTE

Para $j^\mu = 0$ e considerando $\lambda = 1$, a densidade lagrangiana (2.17) torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\left[A_\nu(\partial^\nu A^\mu) - A^\mu(\partial_\nu A^\nu)\right] \sim -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu\,,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

pois densidades lagrangianas que diferem por uma quadridivergência levam às mesmas equações de movimento, desde que os campos e suas derivadas se anulem na fronteira da região em que estão definidos.

Como vimos, os campos conjugados são

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)}{\partial\dot{A}_\mu}\partial^\lambda A^\sigma + \frac{\partial(\partial^\lambda A^\sigma)}{\partial\dot{A}_\mu}\partial_\lambda A_\sigma\right] = -\partial^0 A^\mu = -\dot{A}^\mu\,, \tag{2.82}$$

e as equações de movimento (2.19) reduzem-se a

$$\Box A^\mu = 0\,. \tag{2.83}$$

A solução geral desta equação é [18]

$$A^\mu(x) = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}}}\sum_{r=0}^{3}\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\big[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}\big]\,, \tag{2.84}$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = k^0 = |\mathbf{k}|$ e, novamente, o fator $[2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}]^{-1/2}$ foi introduzido por conveniência.

Os quatro vetores de polarização ε_r^μ correspondem ao fato de que, para A^μ, existem quatro estados de polarização independentes, para cada $\mathbf{k}$. Desta maneira, a quantização covariante introduz dois estados de polarização não-físicos, além dos transversos que também surgiram na quantização no *gauge* de Coulomb. A remoção desses estados espúrios será feita mais adiante.

Os vetores de polarização podem ser escolhidos como

$$\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1,0,0,0)\,, \qquad \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}))\,, \qquad r = 1,2,3\,, \tag{2.85}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ são vetores normalizados, ortogonais a $\mathbf{k}$, entre si e a $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, definido por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,, \tag{2.86}$$

ou seja,

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) = 0\,, \qquad r = 1,2\,, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}\,, \qquad r,s = 1,2,3\,. \tag{2.87}$$

Dessa definição, podemos mostrar que

$$\varepsilon_r(\mathbf{k})\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r\,\delta_{rs}\,, \qquad r,s = 0,1,2,3\,, \tag{2.88a}$$

$$\sum_{r=0}^{3}\zeta_r\,\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu}\,, \tag{2.88b}$$

onde $\zeta_0 = -1$ e $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$.

Impondo condições de periodicidade análogas às (2.41), podemos discretizar os vetores de onda $\mathbf{k}$ que aparecem na expressão (2.84). Neste caso, a solução geral de (2.96) torna-se [27]

$$A^\mu(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\,\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\left[a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}\right]\,, \tag{2.89}$$

onde $\mathbf{k}$ é da forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3)\,, \qquad n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.90}$$

Utilizando (2.88) e (2.89) temos que

$$a_r(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\int d^3\mathbf{x}\,\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\zeta_r\left[\omega_{\mathbf{k}}A_\mu(x) + i\dot{A}_\mu(x)\right]e^{ikx}\,, \tag{2.91a}$$

$$a_r^*(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\int d^3\mathbf{x}\,\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\zeta_r\left[\omega_{\mathbf{k}}A_\mu(x) - i\dot{A}_\mu(x)\right]e^{-ikx}\,. \tag{2.91b}$$

A densidade hamiltoniana para o campo de radiação é obtida de (1.20) e (2.81):

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \\ &= -\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{2}\partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \frac{1}{2}\partial_i A_\nu \partial^i A^\nu = -\frac{1}{2}\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \frac{1}{2}\partial_i A_\nu \partial_i A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu, \end{aligned} \tag{2.92}$$

cuja integração em todo o espaço fornece o hamiltoniano:

$$H = -\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu \,. \tag{2.93}$$

Os parenteses de Poisson são obtidos de (1.35) e (2.82)

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}_0 = -\{A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)\}_0 = \delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{2.94a}$$

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_0 = 0\,, \tag{2.94b}$$

$$\{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}_0 = \{\dot{A}_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)\}_0 = 0\,. \tag{2.94c}$$

Podemos agora quantizar o campo eletromagnético. Utilizando (1.9) e (2.94), postulamos que os campos A^μ e π^μ obedecem às seguintes relações de comutação

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_0 = -[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)]_0 = i\delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \tag{2.95a}$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_0 = 0\,, \tag{2.95b}$$

$$[\dot{A}_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)]_0 = 0\,. \tag{2.95c}$$

Além disso, da equação de Heisenberg (1.7), obtemos as equações de movimento para os campos

$$\Box A^\mu(t, \mathbf{x}) = 0\,, \tag{2.96}$$

cuja solução geral é [27]

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A^{\mu+} + A^{\mu-} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon^\mu_r(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon^\mu_r(\mathbf{k}) a^\dagger_r(\mathbf{k}) e^{ikx}\,, \end{aligned} \tag{2.97}$$

análoga à solução (2.89).

Da solução acima e de (2.88), os operadores $a_r(\mathbf{k})$ e $a^\dagger_r(\mathbf{k})$ são dados por

$$a_r(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x}\, \varepsilon^\mu_r(\mathbf{k}) \zeta_r \Big[\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(x) + i\dot{A}_\mu(x)\Big] e^{ikx}\,, \tag{2.98a}$$

$$a_r^\dagger(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_\mathbf{k}}}\int d^3\mathbf{x}\,\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\zeta_r\Big[\omega_\mathbf{k}A_\mu(x) - i\dot{A}_\mu(x)\Big]e^{-ikx}\,, \tag{2.98b}$$

e satisfazem às seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
\big[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big] &= \frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}\int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\; e^{i(kx-k'x')} \\
&\times\Big[\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\Big(\omega_\mathbf{k}A_\mu(t,\mathbf{x}) + i\dot{A}_\mu(t,\mathbf{x})\Big)\,, \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\Big(\omega_{\mathbf{k}'}A_\nu(t,\mathbf{x}') - i\dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}')\Big)\Big] \\
&= -\frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}\int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\; e^{i(kx-k'x')}\Big\{i\,\omega_\mathbf{k}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\overbrace{\Big[A_\mu(t,\mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}')\Big]}^{=-ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&- i\,\omega_{\mathbf{k}'}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\underbrace{\Big[\dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}), A_\mu(t,\mathbf{x}')\Big]}_{=ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\Big\} \\
&= -\frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}e^{i(\omega_\mathbf{k}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}')\,(\omega_\mathbf{k}+\omega_{\mathbf{k}'})\underbrace{\int d^3\mathbf{x}\,e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} \\
&= \zeta_r\delta_{rs}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] &= \frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}\int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\; e^{i(kx+k'x')} \\
&\times\Big[\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\Big(\omega_\mathbf{k}A_\mu(t,\mathbf{x}) + i\dot{A}_\mu(t,\mathbf{x})\Big)\,, \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\Big(\omega_{\mathbf{k}'}A_\nu(t,\mathbf{x}') + i\dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}')\Big)\Big] \\
&= \frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}\int d^3\mathbf{x}\; d^3\mathbf{x}'\; e^{i(kx+k'x')}\Big\{i\,\omega_\mathbf{k}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\overbrace{\Big[A_\mu(t,\mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}')\Big]}^{=-ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&+ i\,\omega_{\mathbf{k}'}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_s^\nu(\mathbf{k}')\underbrace{\Big[\dot{A}_\nu(t,\mathbf{x}), A_\mu(t,\mathbf{x}')\Big]}_{=ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\Big\} \\
&= \frac{\zeta_r\zeta_s}{2V(\omega_\mathbf{k}\,\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}}e^{i(\omega_\mathbf{k}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}')\,(\omega_\mathbf{k}-\omega_{\mathbf{k}'})\underbrace{\int d^3\mathbf{x}\,e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big] &= a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}') - a_s^\dagger(\mathbf{k}')a_r^\dagger(\mathbf{k}) = -[a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}') - a_s(\mathbf{k}')a_r(\mathbf{k})]^\dagger \\
&= -[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')]^\dagger = 0\,.
\end{aligned}$$

Em síntese, temos

$$\big[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big] = \zeta_r\delta_{rs}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,, \tag{2.99a}$$

$$\big[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')\big] = 0\,, \tag{2.99b}$$

$$\big[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')\big] = 0\,. \tag{2.99c}$$

De (2.88), temos que $\zeta_r = 1$ para $r = 1, 2, 3$ e, portanto, as relações de comutação (2.99) são idênticas às (2.59), ou seja, interpretaremos $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ como operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente. Entretanto, $\zeta_r = -1$ para $r = 0$ e assim, aparentemente, $a_0(\mathbf{k})$ e $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ possuem papéis trocados, ou seja, $a_0(\mathbf{k})$ seria o operador de criação e $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ o de aniquilação. Para evitar novas dificuldades [27], não faremos esta troca, adotando o procedimento de Gupta-Bleuler.

Na teoria de Gupta-Bleuler, os operadores $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ para $r = 0, 1, 2, 3$ são interpretados como operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente.

O estado de vácuo é definido por

$$a_r(\mathbf{k}))|0\rangle = 0\,, \qquad\qquad \forall\mathbf{k},\ r = 0, 1, 2, 3\,, \tag{2.100}$$

ou, equivalentemente,

$$A^{\mu+}(x)|0\rangle = 0\,, \qquad\qquad \forall x,\ \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.101}$$

Os estados contendo um fóton são criados a partir do estado de vácuo

$$|1, \mathbf{k}, r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle\,, \tag{2.102}$$

em que um fóton transverso ($r = 1, 2$), longitudinal ($r = 3$) ou escalar ($r = 0$) com momento $\mathbf{k}$ está presente.

Para justificar esta interpretação, determinaremos o operador hamiltoniano. De (2.93) e (2.97), obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\left[a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\, a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}(\zeta_r)^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\, a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\,. \end{aligned} \tag{2.103}$$

O hamiltoniano acima também leva a uma energia de ponto zero divergente,

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\,, \tag{2.104}$$

onde assumimos que o estado de vácuo esteja normalizado.

Esta energia de ponto zero é diferente daquela obtida na quantização do *gauge* de Coulomb, pois a quantização covariante introduz graus de liberdade além dos necessários para a descrição do campo eletromagnético. Desta forma, além dos fótons transversais, também contribuem para a energia de ponto zero fótons longitudinais e escalares, os quais não possuem realidade física. A contribuição destes últimos pode ser removida pela introdução de campos "fantasmas"[6] de Fadeev-Popov que, por possuírem energia de ponto zero negativa, levam à expressão (2.78) [22]. Neste sentido, ambos os procedimentos de quantização são equivalentes.

Para evitarmos o aparecimento da energia de ponto zero, introduziremos o ordenamento normal de operadores da mesma forma que fizemos na quantização no *gauge* de Coulomb. Desta forma, o hamiltoniano (2.103) torna-se

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^{3} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r \, a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \,. \tag{2.105}$$

Embora o fator $\zeta_0 = -1$ tenha aparecido em (2.105), os autovalores de H são positivos. Por exemplo, para o estado contendo um fóton temos

$$\begin{aligned} H|1,\mathbf{k},r\rangle &= \sum_{\mathbf{q},s} \omega_{\mathbf{q}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q}) a_s(\mathbf{q}) a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = \sum_{\mathbf{q},s} \omega_{\mathbf{q}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q}) \big(\underbrace{[a_s(\mathbf{q}), a_r^\dagger(\mathbf{k})]}_{\zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{k}}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{q}) \big)|0\rangle \\ &= \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r^2 a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = \omega_{\mathbf{k}} |1,\mathbf{k},r\rangle \,, \end{aligned} \tag{2.106}$$

ou seja, a energia é positiva para os três tipos de fótons.

Um problema surge no cálculo da normalização de estados contendo fótons. Por exemplo, considerando o vácuo normalizado, temos

$$\begin{aligned} \langle 1,\mathbf{k},r|1,\mathbf{k},r\rangle &= \langle 0|a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})|o\rangle = \langle 0|[a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})|0\rangle \\ &= \zeta_r \langle 0|0\rangle = \zeta_r \,, \end{aligned} \tag{2.107}$$

ou seja, a norma é negativa para fótons escalares, o que é inconsistente com a mecânica quântica. Entretanto, fótons escalares e longitudinais nunca foram observados.

Até agora, nada nos garante que a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ seja válida. De fato, esta condição é incompatível com as relações canônicas de comutação (2.95), pois, supondo que a primeira seja válida, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \big[\partial_\mu A^\mu(t,\mathbf{x}), A^\nu(t,\mathbf{x}')\big] = \big[\partial_0 A^0(t,\mathbf{x}) + \partial_i A^i(t,\mathbf{x}), A^\nu(t,\mathbf{x}')\big] \\ &= -\big[\pi^0, A^\nu(t,\mathbf{x}')\big] + \partial_i \big[A^i(t,\mathbf{x}), A^\nu(t,\mathbf{x}')\big] = i g^{\nu 0} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \neq 0 \,, \end{aligned} \tag{2.108}$$

o que representa uma contradição.

Na teoria de Gupta-Bleuler, a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ é substituída pela

[6]Tais campos fictícios são introduzidos na densidade lagrangiana, porém comparecem somente em estados intermediários, não estando associados a partículas reais.

condição mais fraca

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x)|\psi\rangle = 0\,, \tag{2.109}$$

que envolve somente operadores de aniquilação.

Da condição acima segue que

$$\langle\psi|\partial_\mu A^\mu(x)|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_\mu A^{\mu+}(x)|\psi\rangle + \langle\psi|\partial_\mu A^{\mu-}(x)|\psi\rangle = 0\,, \tag{2.110}$$

ou seja, a condição de Lorentz e, como consequência, as equações de Maxwell são válidas no limite clássico.

Para entendermos melhor a condição (2.109), vamos expressá-la no espaço de Fourier. Utilizando (2.97) e (2.40), temos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A^{\mu+}(x)|\psi\rangle &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\varepsilon_r^\mu k_\mu(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})e^{-ikx}|\psi\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\big[k^0\varepsilon_r^0(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\big]a_r(\mathbf{k})e^{-ikx}|\psi\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\big[k^0 a_0(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}{k}a_3(\mathbf{k})\big]e^{-ikx}|\psi\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\frac{ik}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}}\big[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\big]e^{-ikx}|\psi\rangle = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.111}$$

e, portanto,

$$\big[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\big]|\psi\rangle = 0, \qquad \forall\mathbf{k}\,. \tag{2.112}$$

Obtemos então um vínculo nas combinações lineares dos fótons escalares e longitudinais, para cada valor de $\mathbf{k}$, que podem estar presentes em um determinado estado. Deste modo, os estados $|\psi\rangle$ fisicamente aceitáveis são aqueles que satisfazem (2.112).

O efeito da condição (2.109) torna-se aparente quando calculamos os valores esperados da energia para um estado arbitrário $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|H|\psi\rangle &= \langle\psi|\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=0}^{3}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|\psi\rangle + \langle\psi|\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\big[a_3^\dagger(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})\big]|\psi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Agora, de (2.112) temos que $\langle\psi|a_3^\dagger(\mathbf{k}) = \langle\psi|a_0^\dagger(\mathbf{k})$, de modo que

$$\langle\psi|\big[a_3^\dagger(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k})-a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})\big]|\psi\rangle=\langle\psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k})|\psi\rangle-\langle\psi|a_0^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})|\psi\rangle$$
$$=\langle\psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})a_3(\mathbf{k})|\psi\rangle-\langle\psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})a_0(\mathbf{k})|\psi\rangle=\langle\psi|a_3^\dagger(\mathbf{k})\big[a_3(\mathbf{k})-a_0(\mathbf{k})\big]|\psi\rangle=0\,. \quad (2.113)$$

Logo,

$$\langle\psi|H|\psi\rangle=\langle\psi|\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r=1}^{2}\omega_{\mathbf{k}}a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|\psi\rangle\,, \quad (2.114)$$

ou seja, somente os fótons transversos contribuem para o valor esperado da energia, como consequência da condição (2.109).

2.1.3 O PROPAGADOR DO FÓTON

Nesta seção, obteremos o propagador do fóton. Este resultado será importante no capítulo seguinte, em que trataremos os campos em interação.

O propagador do fóton é definido por

$$\langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle\,, \quad (2.115)$$

onde $T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}$ denota o produto ordenado temporalmente para operadores bosônicos, dado por

$$T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}=\begin{cases}A^\mu(x)A^\nu(y)\,, & \text{se } x^0>y^0\\ A^\nu(y)A^\mu(x)\,, & \text{se } y^0>x^0\end{cases}. \quad (2.116)$$

Definindo

$$\Theta(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x>0\\ 0, & \text{se } x<0\end{cases}\,, \quad (2.117)$$

podemos escrever (2.115) como

$$T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}=\Theta(x^0-y^0)A^\mu(x)A^\nu(y)+\Theta(y^0-x^0)A^\nu(y)A^\mu(x)\,. \quad (2.118)$$

Pelo fato de $A^{\mu+}(x)|0\rangle=0$ e $\langle 0|A^{\mu-}(x)=0$, segue da expressão acima que

$$\langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle$$
$$=\Theta(x^0-y^0)\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle+\Theta(y^0-x^0)\langle 0|A^\nu(y)A^\mu(x)|0\rangle$$
$$=\Theta(x^0-y^0)\langle 0|A^{\mu+}(x)A^{\nu-}(y)|0\rangle+\Theta(y^0-x^0)\langle 0|A^{\nu+}(y)A^{\mu-}(x)|0\rangle$$
$$=\Theta(x^0-y^0)\langle 0|[A^{\mu+}(x),A^{\nu-}(y)]|0\rangle+\Theta(y^0-x^0)\langle 0|[A^{\nu+}(y),A^{\mu-}(x)]|0\rangle. \quad (2.119)$$

Da expansão (2.97) e das relações de comutação (2.99), os comutadores são calculados:

$$[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \sum_{r,s=0}^{3} \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{q}}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_s^\nu(\mathbf{q}) \underbrace{[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})]}_{=\zeta_r\delta_{rs}\delta_{\mathbf{kq}}} e^{-i(kx-qy)}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^{3} \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})\zeta_r \, e^{-ik(x-y)} \,. \tag{2.120}$$

No limite em que $V \to \infty$, podemos fazer $\sum\limits_{\mathbf{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}$ e, usando (2.88b), segue que

$$[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] = \frac{-g^{\mu\nu}}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\,e^{-ik(x-y)} = -g^{\mu\nu} i\Delta^+(x-y)\,, \tag{2.121}$$

onde

$$\Delta^+(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\,e^{-ikx}\,. \tag{2.122}$$

Utilizando o resultado acima, temos

$$[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)] = \frac{-g^{\nu\mu}}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\,e^{-ik(y-x)} = \frac{-g^{\mu\nu}}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\,e^{ik(x-y)}$$

$$= g^{\mu\nu} i\Delta^-(x-y)\,, \tag{2.123}$$

onde

$$\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\,e^{ikx}\,. \tag{2.124}$$

Assim,

$$\langle 0|[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)]|0\rangle = -g^{\mu\nu} i\Delta^+(x-y)\,, \tag{2.125a}$$

$$\langle 0|[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)]|0\rangle = g^{\mu\nu} i\Delta^-(x-y)\,. \tag{2.125b}$$

Substituindo os resultados acima em (2.119), encontramos que o propagador do fóton é dado por

$$\langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle = -g^{\mu\nu} i\Theta(x^0-y^0)\Delta^+(x-y) + g^{\mu\nu} i\Theta(y^0-x^0)\Delta^-(x-y)$$

$$= -ig^{\mu\nu}[\Theta(x^0-y^0)\Delta^+(x-y) - \Theta(y^0-x^0)\Delta^-(x-y)]$$

$$= -ig^{\mu\nu}\Delta_F(x-y) \equiv iD_F^{\mu\nu}(x-y)\,, \tag{2.126}$$

onde $\Delta_F(x) = \Theta(x^0)\Delta^+(x) - \Theta(-x^0)\Delta^-(x)$.

Utilizando a representação integral da função θ,

$$\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda - i\varepsilon} \,, \tag{2.127}$$

podemos escrever Δ_F de uma maneira manifestamente covariante:

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x) &= \Theta(x^0)\Delta^+(x) - \Theta(-x^0)\Delta^-(x) \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{e^{i\lambda x^0} e^{-ikx}}{\lambda - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{e^{-i\lambda x^0} e^{ikx}}{\lambda - i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{e^{-i(\omega_\mathbf{k} - \lambda)x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \frac{e^{i(\omega_\mathbf{k} - \lambda)x^0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \frac{e^{-i\tau x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_\mathbf{k} - \tau - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \frac{e^{-i\tau x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_\mathbf{k} + \tau - i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \, e^{-ik^0 x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{1}{\omega_\mathbf{k} - k^0 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_\mathbf{k} + k^0 - i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \,,
\end{aligned} \tag{2.128}$$

onde usamos $k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2$, ficando subentendido que devemos tomar o limite $\varepsilon \to 0$. Portanto,

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \,. \tag{2.129}$$

2.2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE DIRAC

2.2.1 REPRESENTAÇÃO DE NÚMERO PARA FÉRMIONS

Até agora lidamos com operadores a_r e $a_r^\dagger$ $(r = 1, 2, \ldots)$ satisfazendo as relações de comutação

$$[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} \,, \qquad [a_r, a_s] = 0 \,, \qquad [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0 \,, \tag{2.130}$$

e definimos os operadores

$$N_r = a_r^\dagger a_r \,, \qquad r = 1, 2, \ldots \,. \tag{2.131}$$

Da identidade $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, segue que

$$\begin{aligned}
[N_r, a_s] &= [a_r^\dagger a_r, a_s] = a_r^\dagger [a_r, a_s] + [a_r^\dagger, a_s] a_r = -\delta_{rs} a_s \,, \\
[N_r, a_s^\dagger] &= [a_r^\dagger a_r, a_s^\dagger] = a_r^\dagger [a_r, a_s^\dagger] + [a_r^\dagger, a_s^\dagger] a_r = \delta_{rs} a_s^\dagger \,.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

De (2.131) e (2.132), interpretamos a_r, $a_r^\dagger$ e N_r como operadores de aniquilação, criação e número, respectivamente. Além disso, N_r possui autovalores $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ e definimos o estado de vácuo $|0\rangle$ por

$$a_r|0\rangle = 0, \qquad \forall r\,. \tag{2.133}$$

A partir do vácuo $|0\rangle$, podemos construir estados contendo um número arbitrário de fótons como superposições de estados da forma $(a_{r_1}^\dagger)^{n_1}(a_{r_2}^\dagger)^{n_2}\ldots|0\rangle$.

É importante lembrar que as relações de comutação (2.130) são decorrência direta da quantização canônica. Desta forma, a quantização canônica nos leva diretamente a bósons.

Uma maneira alternativa de derivarmos relações análogas às (2.130), consiste em empregarmos o anticomutador de dois operadores A e B, definido por

$$[A\,,B]_+ = AB + BA\,. \tag{2.134}$$

Vamos supor que os operadores a_r, $a_r^\dagger$ $(r = 1, 2, \ldots)$, ao invés de satisfazerem as relações de comutação (2.130), satisfaçam as relações de anticomutação

$$[a_r, a_s^\dagger]_+ = \delta_{rs}\,, \qquad [a_r, a_s]_+ = 0\,, \qquad [a_r^\dagger, a_s^\dagger]_+ = 0\,. \tag{2.135}$$

Em particular, temos

$$a_r^2 = \frac{1}{2}[a_r, a_r]_+ = 0\,, \tag{2.136}$$

$$(a_r^\dagger)^2 = \frac{1}{2}[a_r^\dagger, a_r^\dagger]_+ = 0\,. \tag{2.137}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [N_r, a_s]_+ &= [a_r^\dagger a_r, a_s]_+ = a_r^\dagger[a_r, a_s]_+ - [a_r^\dagger, a_s]_+ a_r = -\delta_{rs}a_s\,, \\ [N_r, a_s^\dagger]_+ &= [a_r^\dagger a_r, a_s^\dagger]_+ = a_r^\dagger[a_r, a_s^\dagger]_+ - [a_r^\dagger, a_s^\dagger]_+ a_r = \delta_{rs}a_s^\dagger\,, \end{aligned} \tag{2.138}$$

que são análogas às relações (2.130). Desta maneira, a_r, $a_r^\dagger$ e N_r também serão interpretados como operadores de aniquilação, criação e número.

De (2.135) e (2.136) segue que

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger(1 - a_r^\dagger a_r)a_r = a_r^\dagger a_r - (a_r^\dagger)^2(a_r)^2 = N_r\,, \tag{2.139}$$

ou seja, $N_r(N_r - 1) = 0$. Denotando por $|n\rangle$ um autoestado de N_r, temos que

$$N_r(N_r - 1)|n\rangle = n_r(n_r - 1)|n\rangle = 0\,, \tag{2.140}$$

logo, os autovalores de N_r são 0 ou 1, isto é, estamos lidando com a estatística de Fermi-Dirac.

O estado de vácuo $|0\rangle$ foi definido em (2.133), então o estado de uma partícula no estado r é

$$|1, r\rangle = a_r^\dagger |0\rangle \,. \tag{2.141}$$

O estado de duas partículas, com $r \neq s$, é dado por

$$|1, r; 1, s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -|1, s; 1, r\rangle, \tag{2.142}$$

ou seja, este é antissimétrico por troca de rótulos, como requerido para férmions. No caso em que $r = s$,

$$|2, r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0 \tag{2.143}$$

e, portanto, duas partículas não podem estar no mesmo estado quântico, traduzindo-se no princípio de exclusão de Pauli.

2.2.2 EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Dirac é a equação relativística que descreve férmions de spin 1/2. Essa equação pode ser escrita como

$$i\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{x}, t) \,, \tag{2.144}$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t)$ é um spinor de dimensão N, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e β são matrizes hermitianas de dimensão N que satisfazem

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I} \,, \qquad \{\alpha_i, \beta\} = O \,, \qquad \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{I} \,, \qquad i, j = 1, 2, 3 \,. \tag{2.145}$$

onde $\mathbb{I}$ e O são, respectivamente, a matriz identidade $N \times N$ e a matriz nula $N \times N$.

Multiplicando (2.144) por β pela esquerda e definindo $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0 \,, \tag{2.146}$$

onde γ^μ são matrizes $N \times N$ que satisfazem as relações de anticomutação

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \,, \qquad \text{(Álgebra de Clifford)} \tag{2.147}$$

e as condições de hermiticidade $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e $(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$. Estas últimas podem ser combinadas na forma

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\,, \qquad\qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{2.148}$$

Pode-se mostrar [23] que a menor dimensão na qual existem matrizes que satisfazem (2.147) é $N = 4$. Assumiremos então que em (2.146) $\psi(x)$ é uma função de onda spinorial com quatro componentes $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2,3,4$, que explicitamente se escreve

$$\sum_{\beta=1}^{4} i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta(x)}{\partial x^\mu} - \psi_\alpha(x) = 0\,, \qquad\qquad \alpha = 1,2,3,4\,. \tag{2.149}$$

Tomando o conjugado hermitiano da equação (2.146), multiplicando por γ^0 pela direita e usando (2.147), obtemos a equação de Dirac adjunta

$$i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0\,, \tag{2.150}$$

onde o campo adjunto é definido por

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0\,. \tag{2.151}$$

As equações de Dirac (2.146) e (2.150) podem ser derivadas a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Big]\psi(x)\,, \tag{2.152}$$

e das equações de Euler-Lagrange para campos (1.18), tratando $\bar{\psi}_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha(x)$ como campos independentes.

Os campos conjugados a ψ_α e $\bar{\psi}_\alpha$ são

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} &= i\sum_{\beta,\gamma=1}^{4}\bar{\psi}_\beta\gamma^\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial(\partial_\mu\psi_\gamma)}{\partial\partial_0\psi_\alpha} = i\sum_{\beta=1}^{4}\bar{\psi}_\beta\gamma^0_{\beta\alpha} = i\sum_{\beta,\lambda=1}^{4}\psi^\dagger_\lambda\gamma^0_{\lambda\beta}\gamma^0_{\beta\alpha}\\ &= i\sum_{\lambda=1}^{4}\psi^\dagger_\lambda\delta_{\lambda\alpha} = i\psi^\dagger_\alpha\,,\end{aligned} \tag{2.153a}$$

$$\bar{\pi}_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0\,, \tag{2.153b}$$

O hamiltoniano é obtido de (1.21), (2.152) e (2.153)

$$\begin{aligned}H &= \int d^3\mathbf{x}\Big[\pi\dot{\psi} + \bar{\pi}\dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L}\Big] = \int d^3\mathbf{x}\Big[i\psi^\dagger\dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi\Big]\\ &= \int d^3\mathbf{x}\Big[i\psi^\dagger\dot{\psi} - i\psi^\dagger\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{I}}\dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + m\bar{\psi}\psi\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^3\mathbf{x}\,\bar{\psi}\big[-i\gamma^j\partial_j + m\big]\psi\,. = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big[-i\gamma^0\gamma^j\partial_j + m\gamma^0\big]\psi \\
&= \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta\big]\psi\,. \qquad (2.154)
\end{aligned}
$$

Considerando uma região cúbica de volume V, com condições de fronteira periódicas, temos que, para cada momento $\mathbf{p}$ permitido pelas condições de fronteira e energia positiva

$$
p_0 = E = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}\,, \qquad (2.155)
$$

a equação de Dirac (2.146) possui quatro soluções de ondas planas independentes

$$
\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}\,u_r(\mathbf{p})e^{-ipx}\,, \qquad \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}\,v_r(\mathbf{p})e^{ipx}\,, \qquad r = 1,2\,, \qquad (2.156)
$$

onde os spinores u_r e v_r satisfazem as equações

$$
(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0\,, \qquad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0\,, \qquad r = 1,2\,, \qquad (2.157)
$$

obtidas substituindo (2.156) em (2.146) e introduzindo a notação $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$.

Devido às suas dependências temporais, as soluções envolvendo u_r e v_r são referidas como soluções de energia positiva e negativa, respectivamente.

As degenerescências das duas soluções de energia positiva e negativa, para um dado momento $\mathbf{p}$, resultam das possíveis orientações de spin. Para a equação de Dirac, somente as componentes de spin paralelas ou antiparalelas a $\mathbf{p}$ são constantes de movimento e serão estes autoestados de spin que serão escolhidos para as soluções (2.156).

O operador de spin "na direção do movimento", ou operador helicidade, é definido como [27]

$$
\sigma_p = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\,, \qquad (2.158)
$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Assim, escolhemos os spinores em (2.156) tais que

$$
\sigma_p u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1}u_r(\mathbf{p})\,, \qquad \sigma_p v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p})\,. \qquad r = 1,2\,. \qquad (2.159)
$$

A assimetria na indexação dos spinores será conveniente para identificarmos as propriedades de partículas e antipartículas.

Normalizando os spinores,

$$
u_r^\dagger(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\,, \qquad (2.160a)
$$

$$
v_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\,, \qquad (2.160b)
$$

pode-se mostrar que as seguintes relações de ortonormalidade são satisfeitas [27]

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}\frac{E_\mathbf{p}}{m}\,, \tag{2.161}$$

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = 0\,. \tag{2.162}$$

As soluções (2.156) formam um conjunto completo, de modo que a solução geral da equação de Dirac (2.146) pode ser escrita como

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\sqrt{\frac{m}{VE_\mathbf{p}}}\big[c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_r^*(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx}\big]\,, \tag{2.163}$$

enquanto que o campo conjugado $\psi^\dagger$ possui a expansão

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\sqrt{\frac{m}{VE_\mathbf{p}}}\big[c_r^*(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}\big]\,. \tag{2.164}$$

Para obtermos o coeficiente $c_r(\mathbf{p})$, multiplicamos (2.163) por $\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}}e^{ip'x}$, integramos em todo o espaço e usamos (2.161):

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}}\int d^3\mathbf{x}\,u_s^\dagger(\mathbf{p}')\psi(x)e^{ip'x}\\
&\quad= \sum_{r,\mathbf{p}}\frac{m}{V\sqrt{E_\mathbf{p}E_{\mathbf{p}'}}}\int d^3\mathbf{x}\left[c_r(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p-p')x} + d_r^*(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p+p')x}\right]\\
&\quad= \sum_{r,\mathbf{p}}\frac{m}{V\sqrt{E_\mathbf{p}E_{\mathbf{p}'}}}\left[c_r(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})V\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} + d_r^*(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p_0+p_0')x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'}\right]\\
&\quad= \sum_{r=1}^{2}\frac{m}{E_{\mathbf{p}'}}\left[c_r(\mathbf{p}')\underbrace{u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p}')}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}'}/m} + d_r^*(\mathbf{p}')\underbrace{u_s^\dagger(-\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p}')}_{=0}e^{2ip_0x_0}\right]\\
&\quad= c_s(\mathbf{p}')\,.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}}\int d^3\mathbf{x}\,v_s^\dagger(\mathbf{p}')\psi(x)e^{-ip'x}\\
&\quad= \sum_{r,\mathbf{p}}\frac{m}{V\sqrt{E_\mathbf{p}E_{\mathbf{p}'}}}\int d^3\mathbf{x}\left[c_r(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p+p')x} + d_r^*(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p-p')x}\right]\\
&\quad= \sum_{r,\mathbf{p}}\frac{m}{V\sqrt{E_\mathbf{p}E_{\mathbf{p}'}}}\left[c_r(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p_0+p_0')x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} + d_r^*(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})V\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\right]\\
&\quad= \sum_{r=1}^{2}\frac{m}{E_{\mathbf{p}'}}\left[c_r(\mathbf{p}')\underbrace{v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p}')}_{=0}e^{-2ip_0x_0} + d_r^*(\mathbf{p}')\underbrace{v_s^\dagger(-\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p}')}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}'}/m}\right]
\end{aligned}$$

$$= d_s^*(\mathbf{p}')\,.$$

Assim,

$$c_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}\int d^3\mathbf{x}\, u_r^\dagger(\mathbf{p})\psi(x)e^{ipx}\,, \tag{2.165a}$$

$$d_r^*(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}\int d^3\mathbf{x}\, v_r^\dagger(\mathbf{p})\psi(x)e^{-ipx}\,. \tag{2.165b}$$

Para quantizarmos o campo de Dirac, postularemos que os campos $\psi(x)$ e $\psi^\dagger(x)$ satisfazem as relações de anticomutação a tempos iguais

$$\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\big]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,, \tag{2.166a}$$

$$\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta(t,\mathbf{x}')\big]_+ = 0\,, \tag{2.166b}$$

$$\big[\psi_\alpha^\dagger(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\big]_+ = 0\,, \tag{2.166c}$$

que, como veremos, nos levará a uma representação de número para férmions.

Usando a identidade $[A,BC] = [A,B]_+C - B[A,C]_+$, as equações de movimento para os campos $\psi_\alpha(x)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_\alpha(t,\mathbf{x}) &= -i[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), H] \\
&= -i\int d^3\mathbf{x}'\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), -i\psi^\dagger(t,\mathbf{x}')\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla'\psi(t,\mathbf{x}') + m\psi^\dagger(t,\mathbf{x}')\beta\psi(t,\mathbf{x}')\big] \\
&= -\sum_{\beta,\gamma=1}^{4}\int d^3\mathbf{x}'\Big\{\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma}\cdot\nabla'\psi_\gamma(t,\mathbf{x}')\big] \\
&\quad + im\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\beta_{\beta\gamma}\psi_\gamma(t,\mathbf{x}')\big]\Big\} \\
&= -\sum_{\beta,\gamma=1}^{4}\int d^3\mathbf{x}'\Big\{\underbrace{\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\big]_+}_{=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma}\cdot\nabla'\psi_\gamma(t,\mathbf{x}') \\
&\quad - \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma}\cdot\nabla'\underbrace{\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\gamma(t,\mathbf{x}')\big]_+}_{=0} + im\underbrace{\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\big]_+}_{=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\beta_{\beta\gamma}\psi_\gamma(t,\mathbf{x}') \\
&\quad - im\psi_\beta^\dagger(t,\mathbf{x}')\beta_{\beta\gamma}\underbrace{\big[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\gamma(t,\mathbf{x}')\big]_+}_{=0}\Big\} \\
&= -\sum_{\gamma=1}^{4}\big[\boldsymbol{\alpha}_{\alpha\gamma}\cdot\nabla\psi_\gamma(t,\mathbf{x}) + im\beta_{\alpha\gamma}\psi_\gamma(t,\mathbf{x}')\big] \\
&= -i\sum_{\gamma=1}^{4}\big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta\big)_{\alpha\gamma}\psi_\gamma(t,\mathbf{x})\,,
\end{aligned} \tag{2.167}$$

que são análogas às equações (2.144).

A solução geral de (2.167) é [27]

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} d_r^{\dagger}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}\,,
\end{aligned} \tag{2.168}
$$

sendo o campo conjugado $\psi^{\dagger}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\psi^{\dagger}(x) &= \psi^{\dagger +}(x) + \psi^{\dagger -}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} d_r(\mathbf{p}) v_r^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) u_r^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{ipx}\,.
\end{aligned} \tag{2.169}
$$

Analogamente a (2.165), os operadores c_r, $c_r^{\dagger}$, d_r e $d_r^{\dagger}$ são dados por

$$c_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x}\, u_r^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) e^{ipx}\,, \tag{2.170a}$$

$$c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x}\, \psi^{\dagger}(x) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx}\,, \tag{2.170b}$$

$$d_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x}\, \psi^{\dagger}(x) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}\,, \tag{2.170c}$$

$$d_r^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x}\, v_r^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) e^{-ipx}\,. \tag{2.170d}$$

Utilizando (2.170) e as relações de anticomutação (2.166), podemos mostrar que os operadores c_r, $c_r^{\dagger}$, d_r e $d_r^{\dagger}$ satisfazem às seguintes relações de anticomutação

$$\left[c_r(\mathbf{p}), c_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\,, \qquad \left[d_r(\mathbf{p}), d_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\,, \tag{2.171}$$

além de

$$
\begin{aligned}
&\left[c_r(\mathbf{p}), c_s(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \quad \left[c_r^{\dagger}(\mathbf{p}), c_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \quad \left[d_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \\
&\left[d_r^{\dagger}(\mathbf{p}), d_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \quad \left[c_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \quad \left[c_r(\mathbf{p}), d_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \\
&\left[c_r^{\dagger}(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,, \quad \left[c_r^{\dagger}(\mathbf{p}), d_s^{\dagger}(\mathbf{p}')\right]_{+} = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.172}
$$

que são justamente as relações de anticomutação para férmions (2.135) discutidas na seção 2.2.1. Definindo os operadores

$$N_r(\mathbf{p}) = c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p})\,, \qquad \bar{N}_r(\mathbf{p}) = d_r^{\dagger}(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})\,, \tag{2.173}$$

interpretaremos c_r, $c_r^{\dagger}$, N_r, d_r, $d_r^{\dagger}$, $\bar{N}_r$ como operadores de aniquilação, criação e número de dois tipos de férmions.

O estado de vácuo $|0\rangle$ é definido por

$$c_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0\,, \qquad d_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0\,, \qquad \forall\mathbf{p},\ r = 1,2\,, \tag{2.174}$$

ou, equivalentemente,

$$\psi^+(x)|0\rangle = 0\,, \qquad \psi^{\dagger+}(x)|0\rangle = 0\,, \tag{2.175}$$

Utilizando o hamiltoniano (2.154), a equação de movimento para os campos (2.167), as soluções de ondas planas (2.168) e (2.169) e as relações de ortonormalidade (2.161), o operador hamiltoniano para o campo de Dirac é dado por

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta\big]\psi = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta\big]\psi = i\int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\partial_o\psi \\
&= \sum_{r,s=1}^{2}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}}}\big[c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}\big] \\
&\times\big[c_s(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')e^{-ip'x} - d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_s(\mathbf{p}')e^{ip'x}\big] \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{i(p-p')x} - c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p+p')x} \\
&+ d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-i(p+p')x} - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{-i(p-p')x}\Big] \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'}\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')V\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} - c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{2ip_0x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} \\
&+ d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-2ip_0x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')V\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\Big] \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p}} m\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})\underbrace{u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m} - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p})\underbrace{v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m}\Big] \\
&= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})\Big] = \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p}) - 1\Big] \\
&= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})\Big] - \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\,.
\end{aligned} \tag{2.176}$$

Como podemos perceber, o campo de Dirac quantizado também possui energia de ponto zero divergente, pois assumindo que o vácuo $|0\rangle$ esteja normalizado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle 0|H|0\rangle &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\Big[\langle 0|c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p})|0\rangle + \langle 0|d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})|0\rangle\Big] - \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\langle 0|0\rangle \\
&= -\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\,.
\end{aligned} \tag{2.177}$$

Para eliminarmos esta divergência, assim como fizemos na quantização do campo eletromagnético, vamos introduzir o ordenamento normal de operadores. No caso de operadores fermiônicos, escrevemos os operadores de criação sempre à esquerda dos operadores de aniquilação e assumimos que estes anticomutam. Por exemplo, para $[c_1^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)][c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_2(\mathbf{p}_1)]$ temos

$$\begin{aligned} &N\big([c_1^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)][c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_2(\mathbf{p}_1)]\big) \\ &\qquad = N\big(c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1)) \\ &\qquad = c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) - c_2^\dagger(\mathbf{p}_1)c_1(\mathbf{p}_1) + c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1)\,. \end{aligned} \tag{2.178}$$

Assim, incorporando o ordenamento normal ao operador hamiltoniano (2.176), temos que

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x}\, N\big(\psi^\dagger\big[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta\big]\psi\big) \\ &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} N\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})\Big) \\ &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}\Big[c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})\Big]\,, \end{aligned} \tag{2.179}$$

o qual claramente possui energia de ponto zero nula.

A densidade lagrangiana (2.152) é invariante pelas transformações

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta}\bar{\psi}(x). \end{aligned} \tag{2.180}$$

De acordo então com o teorema de Noether, segue de (1.47) que a corrente

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{2.181}$$

é conservada. Por sua vez, a carga associada é definida como o operador de carga elétrica:

$$\begin{aligned} Q &= -e\int d^3\mathbf{x}\,\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = -e\int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(x)\psi(x) \\ &= -e\sum_{r,s=1}^{2}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{m}{V}\frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}}\Big(\big[c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}\big] \\ &\times\big[c_s(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')e^{-ip'x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_s(\mathbf{p}')e^{ip'x}\big]\Big) \\ &= -e\sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'}\int d^3\mathbf{x}\,\frac{m}{V}\frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}}\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{i(p-p')x} \\ &+ c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p+p')x} + d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-i(p+p')x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{-i(p-p')x}\Big) \\
&= -e\sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'}\frac{m}{V}\frac{1}{\sqrt{E_\mathbf{p}E_{\mathbf{p}'}}}\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')V\delta_{\mathbf{pp}'} \\
&+ c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{2ip_0x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} + d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-2ip_0x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} \\
&+ d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')V\delta_{\mathbf{pp}'}\Big) \\
&= -e\sum_{r,s,\mathbf{p}}\frac{m}{E_\mathbf{p}}\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})\underbrace{u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_\mathbf{p}/m}+d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p})\underbrace{v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_\mathbf{p}/m}\Big) \\
&= -e\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})\Big) = -e\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\Big(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p}) + 1\Big) \\
&= -e\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\Big(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})\Big) - \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} e. \qquad (2.182)
\end{aligned}
$$

Logo, o valor esperado do operador carga elétrica no vácuo é divergente. Por este motivo, redefiniremos o operador Q em termos do ordenamento normal:

$$
\begin{aligned}
Q &= -e\int d^3\mathbf{x}\, N(\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)) = -e\int d^3\mathbf{x}\, N(\psi^\dagger(x)\psi(x)) \\
&= -e\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}} N\Big(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})\Big) = -e\sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\Big(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})\Big), \qquad (2.183)
\end{aligned}
$$

que implica em $\langle 0|Q|0\rangle = 0$.

Desta forma, interpretamos m como a massa dos férmions na equação de Dirac e associamos os operadores c e d ao elétron e ao pósitron, respectivamente.

A imposição que o valor esperado no vácuo do operador carga elétrica seja nula pode ser formulada de outra forma. De fato, é possível mostrar através do cálculo explícito [18] que

$$
N(j^\mu(x)) = -eN(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) = -\frac{e}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)], \qquad (2.184)
$$

onde $[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] \coloneqq \gamma^\mu_{\alpha\beta}[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(x)]$. Assim, redefinindo j^μ para

$$
J^\mu(x) = -\frac{e}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)], \qquad (2.185)
$$

segue de (2.184)

$$
\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle = -e\langle 0|N(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))|0\rangle = 0. \qquad (2.186)
$$

2.2.3 O PROPAGADOR FERMIÔNICO

O propagador fermiônico é definido por

$$
\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle\,, \qquad (2.187)
$$

onde o produto ordenado temporalmente para operadores fermiônicos é dado por

$$T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\} = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y), & \text{se } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x), & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases} . \tag{2.188}$$

Introduzindo novamente a função de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases} ,$$

podemos escrever (2.187) como

$$T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\} = \Theta(x^0 - y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) - \Theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) . \tag{2.189}$$

Da expressão (2.169) e lembrando que $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}d_r(\mathbf{p})\bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx} + \sum_{r=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}}c_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} , \end{aligned} \tag{2.190}$$

onde $\bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$ e $\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p}) = u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$, com as seguintes propriedades [27]:

$$\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} , \tag{2.191a}$$

$$\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0 , \tag{2.191b}$$

$$\sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}\bar{u}_{r\beta} = \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2m} , \tag{2.191c}$$

$$\sum_{r=1}^{2} v_{r\alpha}\bar{v}_{r\beta} = \frac{(\not{p} - m)_{\alpha\beta}}{2m} . \tag{2.191d}$$

Calculemos agora (2.187). Como $\psi^+(x)|0\rangle = 0$, $\bar{\psi}^+(x)|0\rangle = 0$, $\langle 0|\psi^-(x) = 0$ e $\langle 0|\bar{\psi}^-(x) = 0$, de (2.189) temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle &= \Theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle - \Theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle \\ &= \Theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_\alpha^+(x)\bar{\psi}_\beta^-(y)|0\rangle - \Theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_\beta^+(y)\psi_\alpha^-(x)|0\rangle \\ &= \Theta(x^0 - y^0)\langle 0|[\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+|0\rangle - \Theta(y^0 - x^0)\langle 0|[\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)]_+|0\rangle . \end{aligned} \tag{2.192}$$

Das expansões (2.169), (2.190) e das relações de comutação (2.171), temos

$$
\begin{aligned}
[\psi^+_\alpha(x), \bar{\psi}^-_\beta(y)]_+ &= \sum_{r,s=1}^{2} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \frac{m}{V\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{k}}} \underbrace{[c_r(\mathbf{p}), c^\dagger_s(\mathbf{k})]_+}_{=\delta_{rs}\delta_{\mathbf{pk}}} u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{k})e^{-i(px-ky)} \\
&= \sum_{r=1}^{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{VE_\mathbf{p}} u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p})e^{-ip(x-y)} \,. \qquad (2.193)
\end{aligned}
$$

No limite em que $V \to \infty$, fazemos novamente $\sum\limits_{\mathbf{p}} \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}$ e, usando (2.191c), segue que

$$
\begin{aligned}
[\psi^+_\alpha(x), \bar{\psi}^-_\beta(y)]_+ &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}}\, (\not{p} + m)_{\alpha\beta}\, e^{-ip(x-y)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\left\{ \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}}\, \underbrace{\not{p}_{\alpha\beta}\, e^{-ip(x-y)}}_{=i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu e^{-ip(x-y)}} + \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}} m_{\alpha\beta}\, e^{-ip(x-y)} \right\} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}} e^{-ip(x-y)} \\
&= i(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\, \Delta^+(x-y) \,, \qquad (2.194)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Delta^+(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}} e^{-ipx} \,. \qquad (2.195)
$$

Analogamente,

$$
[\bar{\psi}^+_\beta(y), \psi^-_\alpha(x)]_+ = \sum_{r=1}^{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{VE_\mathbf{p}} v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})e^{ip(x-y)}. \qquad (2.196)
$$

Nesse mesmo limite, usando (2.191d), segue

$$
\begin{aligned}
[\bar{\psi}^+_\beta(y), \psi^-_\alpha(x)]_+ &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}}\, (\not{p} - m)_{\alpha\beta}\, e^{ip(x-y)} \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^3}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}} e^{ip(x-y)} \\
&= i(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\, \Delta^-(x-y) \,, \qquad (2.197)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, \frac{1}{E_\mathbf{p}}\, e^{ipx} \,. \qquad (2.198)
$$

Assim,

$$\langle 0|[\psi^+_\alpha(x), \bar{\psi}^-_\beta(y)]_+|0\rangle = i(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\,\Delta^+(x-y) \equiv iS^+_{\alpha\beta}(x-y)\,, \tag{2.199}$$
$$\langle 0|[\bar{\psi}^+_\beta(y), \psi^-_\alpha(x)]_+|0\rangle = i(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\,\Delta^-(x-y) \equiv iS^-_{\alpha\beta}(x-y)\,, \tag{2.200}$$

as quais, substituídas em (2.192), fornecem

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle &= i\Theta(x^0-y^0)S^+_{\alpha\beta}(x-y) - i\Theta(y^0-x^0)S^-_{\alpha\beta}(x-y)\\ &= iS_{F\alpha\beta}(x-y)\,,\end{aligned} \tag{2.201}$$

onde

$$\begin{aligned}S_{F\alpha\beta}(x) &= \Theta(x^0)S^+_{\alpha\beta}(x) - \Theta(-x^0)S^-_{\alpha\beta}(x)\\ &= \Theta(x^0)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta^+(x) - \Theta(-x^0)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta^-(x)\\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\big[\Theta(x^0)\Delta^+(x) - \Theta(-x^0)\Delta^-(x)\big]\,.\end{aligned} \tag{2.202}$$

Podemos escrever $S_{F\alpha\beta}$ em uma forma manifestamente covariante. Analogamente a (2.128), temos

$$\begin{aligned}S_{F\alpha\beta}(x) &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\big[\Theta(x^0)\Delta^+(x) - \Theta(-x^0)\Delta^-(x)\big]\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\int d^4p\,\frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2+i\varepsilon}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ipx}\frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}\,,\end{aligned} \tag{2.203}$$

onde fica subentendido que se deve tomar o limite $\varepsilon \to 0$ ao final dos cálculos.

2.2.4 A INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA E A INVARIÂNCIA DE GAUGE

Na mecânica clássica, a função hamiltoniana que descreve uma partícula de massa m e carga q na presença de um campo eletromagnético, caracterizado pelos potenciais $\phi(t,\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(t,\mathbf{x})$, é

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi\,. \tag{2.204}$$

Pelo princípio da correspondência, este mesmo hamiltoniano leva à equação de Schrödinger para uma partícula carregada interagindo com um campo eletromagnético

$$i\frac{\partial\psi(t,\mathbf{x})}{\partial t} = H\psi(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2m}\big[(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\phi\big]\psi(t,\mathbf{x})\,. \tag{2.205}$$

Como podemos perceber, a equação acima pode ser obtida a partir da equação de Schrödinger para uma partícula livre através das substituições

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi(t, \mathbf{x})\,, \qquad\qquad \nabla \longrightarrow \nabla - iq\mathbf{A}(t, \mathbf{x})\,, \tag{2.206}$$

que é usualmente referida como substituição mínima.

Em termos do quadripotencial $A^\mu(x) = (\phi, \mathbf{A})$, a substitui mínima adquire a forma explicitamente covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)\,. \tag{2.207}$$

No que segue, assumiremos que a substituição (2.207) introduz corretamente a interação eletromagnética na equação de Dirac. Desta forma, considerando $q = -e < 0$, a equação de Dirac (2.146) torna-se

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) = 0\\ \therefore\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) &= -e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{2.208}$$

e a densidade lagrangiana (2.152) fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x)\\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I\,,\end{aligned} \tag{2.209}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a já conhecida densidade lagrangiana do campo de Dirac livre,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)\,, \tag{2.210}$$

e $\mathcal{L}_I$ é a densidade lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\,. \tag{2.211}$$

Para descrevermos completamente a dinâmica dos campos clássicos, devemos adicionar a (2.209) a densidade lagrangiana do campo de radiação $\mathcal{L}_{\text{rad}}$, que já conhecemos da seção 2.1. De (2.10), temos

$$\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,. \tag{2.212}$$

Assim, de (2.209) e (2.212) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\,. \tag{2.213}$$

Uma diferença entre as densidades lagrangianas (2.209) e (2.212), é que, frente a uma transformação de *gauge* (2.9)

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)\,,$$

a primeira é invariante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{\text{rad}} &= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x)][\partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x)] \\ &= -\frac{1}{4}[\partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu f)][\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f)] \\ &= -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)][\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)] = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\text{rad}}\,, \end{aligned} \tag{2.214}$$

enquanto que a segunda não:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A'_\mu(x) \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(A_\mu + \partial_\mu f) = \mathcal{L} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f\,. \end{aligned} \tag{2.215}$$

A invariância de *gauge* pode ser restabelecida impondo que, junto com a transformação dos potenciais eletromagnéticos, os campos de Dirac se transformem de acordo com as transformações de fase locais

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{ief(x)}\,, \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)}\,. \end{aligned} \tag{2.216}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I = \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) + e\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\psi'(x)A'_\mu(x) \\ &= \bar{\psi}e^{-ief}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi e^{ief} + e\bar{\psi}e^{-ief}\gamma^\mu\psi e^{ief}(A_\mu + \partial_\mu f) \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f + \mathcal{L}_I + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}\,. \end{aligned} \tag{2.217}$$

Daqui em diante, adotaremos a densidade lagrangiana (2.211) para descrever a interação entre partículas fermiônicas carregadas na eletrodinâmica quântica. Outros termos que são invariantes de *gauge* e de Lorentz poderiam ser adicionados; entretanto, tais termos são geralmente excluídos pela condição de renormalizibilidade da teoria [27]. A interação (2.211) produz previsões teóricas com excelente concordância experimental.

Capítulo 3

CAMPOS INTERAGENTES

3.1 A REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

Como é bem conhecido, a mecânica quântica pode ser formulada em várias representações que diferem na maneira em que a evolução temporal de estados e operadores é tratada. Estas representações se relacionam através de transformações unitárias que levam aos mesmos valores esperados de observáveis.

Na representação de Schrödinger, a evolução temporal de um estado $|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}}$ é regida pela equação

$$i\frac{d}{dt}|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}} = H_{\mathrm{S}}|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}}\,, \tag{3.1}$$

onde H_{S} é o hamiltoniano do sistema nesta representação. A equação acima pode ser resolvida formalmente em termos do estado do sistema em um instante t_0 por

$$|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}} = U_{\mathrm{S}}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle_{\mathrm{S}}\,, \tag{3.2}$$

onde U_{S} é o operador de evolução temporal.

Além da propriedade $U_{\mathrm{S}}(t, t) = \mathbb{I}$, o operador U_{S} é unitário,

$$U_{\mathrm{S}}^{\dagger} = U_{\mathrm{S}}^{-1}, \tag{3.3}$$

é fechado na composição

$$U_{\mathrm{S}}(t_2, t_1)U_{\mathrm{S}}(t_1, t_0) = U_{\mathrm{S}}(t_2, t_0) \tag{3.4}$$

e obedece à equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_{\mathrm{S}}(t, t_0) = H_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}(t, t_0)\,. \tag{3.5}$$

No caso em que $H_{\rm S}$ é independente do tempo, a equação (3.5) possui como solução

$$U_{\rm S}(t,t_0) = e^{-iH_{\rm S}(t-t_0)}\,. \tag{3.6}$$

Para um observável $O_{\rm S}$, o seu valor esperado em um estado $|\alpha,t\rangle_{\rm S}$ é dado por

$$_{\rm S}\langle\alpha,t|O_{\rm S}|\alpha,t\rangle_{\rm S} = {}_{\rm S}\langle\alpha,t_0|U^\dagger_{\rm S}(t,t_0)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle_{\rm S}\,, \tag{3.7}$$

ou seja, o valor esperado de $O_{\rm S}$ no estado $|\alpha,t\rangle_{\rm S}$ é igual ao valor esperado do operador $U^\dagger_{\rm S}(t,t_0)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,t_0)$ no estado $|\alpha,t_0\rangle_{\rm S}$. Isto sugere a representação de Heisenberg, na qual a evolução temporal reflete-se nos operadores, e não no estado do sistema.

Para passarmos da representação de Schrödinger à de Heisenberg, consideraremos que no instante τ os estados e os operadores sejam idênticos em ambas as representações, definindo

$$|\alpha\rangle_{\rm H} = U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)|\alpha,t\rangle_{\rm S} = |\alpha,\tau\rangle_{\rm S} = |\alpha,\tau\rangle_{\rm H}, \tag{3.8a}$$
$$O_{\rm H}(t) = U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau)\,. \tag{3.8b}$$

Desta forma, (3.7) expressa-se

$$_{\rm S}\langle\alpha,t|O_{\rm S}|\alpha,t\rangle_{\rm S} = {}_{\rm H}\langle\alpha|O_{\rm H}(t)|\alpha\rangle_{\rm H}\,. \tag{3.9}$$

No caso em que $H_{\rm S}$ é independente do tempo, de (3.6) e (3.8b) vemos que o operador hamiltoniano é o mesmo em ambas as representações,

$$H_{\rm H}(t) = U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)H_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau) = e^{iH_{\rm S}(t-\tau)}H_{\rm S}e^{-iH_{\rm S}(t-\tau)} = H_{\rm S} \equiv H\,. \tag{3.10}$$

Para obtermos a equação que descreve a evolução temporal de um operador $O_{\rm H}(t)$, derivemos (3.8b) em relação a t, utilizando (3.5):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}O_{\rm H}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau) + U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)\left(\frac{\partial O_{\rm S}}{\partial t}\right)U_{\rm S}(t,\tau) + U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}\frac{\partial}{\partial t}U_{\rm S}(t,\tau)\\
&= iU^\dagger_{\rm S}(t,\tau)H_{\rm S}O_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau) + U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)\left(\frac{\partial O_{\rm S}}{\partial t}\right)U_{\rm S}(t,\tau) - iU^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}H_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau)\\
&= iU^\dagger_{\rm S}(t,\tau)H_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau)U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau) + U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)\left(\frac{\partial O_{\rm S}}{\partial t}\right)U_{\rm S}(t,\tau)\\
&- iU^\dagger_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau)U^\dagger_{\rm S}(t,\tau)H_{\rm S}U_{\rm S}(t,\tau)\\
&= iH_{\rm H}(t)O_{\rm H}(t) + \left(\frac{\partial O}{\partial t}\right)_{\rm H} - iO_{\rm H}(t)H_{\rm H}(t)\\
&= -i[O_{\rm H}(t),H_{\rm H}(t)] + \left(\frac{\partial O}{\partial t}\right)_{\rm H}\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

No caso em que O_{S} não depende explicitamente do tempo, a equação acima torna-se

$$\frac{d}{dt}O_{\mathrm{H}}(t) = -i[O_{\mathrm{H}}(t), H_{\mathrm{H}}(t)]\,. \tag{3.12}$$

Uma característica importante entre as representações é a invariância das relações de comutação e anticomutação, ou seja, a transição entre as representações é feita por intermédio de uma transformação canônica. Por exemplo, supondo que $\left[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}\right]_{\pm} = C_{\mathrm{S}}$, temos que

$$\begin{aligned}
[A_{\mathrm{H}}(t), B_{\mathrm{H}}(t)]_{\pm} &= [U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)A_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}(t,\tau), U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)B_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}(t,\tau)]_{\pm} \\
&= U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)A_{\mathrm{S}}B_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}(t,\tau) \pm U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)B_{\mathrm{S}}A_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}(t,\tau) \\
&= U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)\left[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}\right]_{\pm}U_{\mathrm{S}}\,(t,\tau) = U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)C_{\mathrm{S}}U_{\mathrm{S}}\,(t,\tau) = C_{\mathrm{H}}(t)\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Reciprocamente, supondo que $\left[A_{\mathrm{H}}(t), B_{\mathrm{H}}(t)\right]_{\pm} = C_{\mathrm{H}}(t)$:

$$\begin{aligned}
[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}]_{\pm} &= [U_{\mathrm{S}}(t,\tau)A_{\mathrm{H}}(t)U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau), U_{\mathrm{S}}(t,\tau)B_{\mathrm{H}}(t)U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau)]_{\pm} \\
&= U_{\mathrm{S}}(t,\tau)A_{\mathrm{H}}(t)B_{\mathrm{H}}(t)U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau) \pm U_{\mathrm{S}}(t,\tau)B_{\mathrm{H}}(t)A_{\mathrm{H}}(t)U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau) \\
&= U_{\mathrm{S}}(t,\tau)\left[A_{\mathrm{H}}(t), B_{\mathrm{H}}(t)\right]_{\pm}U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau) = U_{\mathrm{S}}(t,\tau)C_{\mathrm{H}}(t)U_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t,\tau) = C_{\mathrm{S}}\,.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Anteriormente, quantizamos os campos eletromagnético e de Dirac livres utilizando a representação de Heisenberg. Existe ainda uma terceira representação, chamada representação de interação, que será conveniente ao tratarmos campos interagentes.

Supondo que possamos separar o hamiltoniano do sistema em duas partes

$$H_{\mathrm{S}} = H_{\mathrm{S}}^{0} + H_{\mathrm{S}}^{I}, \tag{3.15}$$

onde H_{S}^{0}, assumido independente do tempo, é o hamiltoniano dos campos livres e H_{S}^{I} o hamiltoniano de interação, a representação de interação é obtida da representação de Schrödinger através das transformações unitárias

$$|\alpha, t\rangle_{\mathrm{I}} = U_{0}^{\dagger}(t,\tau)|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}}\,, \tag{3.16a}$$

$$O_{\mathrm{I}}(t) = U_{0}^{\dagger}(t,\tau)O_{\mathrm{S}}U_{0}(t,\tau)\,, \tag{3.16b}$$

onde U_0 obedece a equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_0(t,\tau) = H_{\mathrm{S}}^{0}U_0(t,\tau)\,. \tag{3.17}$$

Como H_{S}^{0} é independente do tempo, a solução da equação acima é um operador unitário análogo a (3.6),

$$U_0(t,\tau) = e^{-iH^0_{\mathrm{S}}(t-\tau)}\,, \tag{3.18}$$

e então, de (3.16b), temos $H^0_{\mathrm{I}} = H^0_{\mathrm{S}}$. Além disso, em $t = \tau$ todas as três representações são idênticas:

$$\begin{aligned} |\alpha,\tau\rangle_{\mathrm{I}} &= |\alpha,\tau\rangle_{\mathrm{H}} = |\alpha,\tau\rangle_{\mathrm{S}}\,, \\ O_{\mathrm{I}}(\tau) &= O_{\mathrm{H}}(\tau) = O_{\mathrm{S}}\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Vemos então que a relação entre as representações de interação e de Schrödinger é semelhante à relação entre as representações de Schrödinger e de Heisenberg, diferindo pelo fato da transformação U_0 envolver somente a parte H^0_{S} do hamiltoniano H_{S}.

Pela semelhança entre (3.16b) e (3.17) com (3.8b) e (3.5), podemos concluir que a equação de movimento para um operador O_{I} é

$$\frac{d}{dt}O_{\mathrm{I}}(t) = -i[O_{\mathrm{I}}(t), H^0_{\mathrm{I}}(t)], \tag{3.20}$$

onde assumimos que O_{S} não depende explicitamente do tempo.

Derivando (3.16a) em relação a t, usando (3.1) e (3.16b), obtemos a equação de Schrödinger para o estado $|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}}$ na representação de interação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} &= \frac{\partial}{\partial t}U_0^\dagger(t,\tau)|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} + U_0^\dagger(t,\tau)\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= iU_0^\dagger(t,\tau)H^0|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} - iU_0^\dagger(t,\tau)H|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= iU_0^\dagger(t,\tau)H^0U(t,\tau)U_0^\dagger(t,\tau)|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} - iU_0^\dagger(t,\tau)HU(t,\tau)U_0^\dagger(t,\tau)|\alpha,t\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= iH^0_{\mathrm{I}}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} - iH_{\mathrm{I}}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} = -iH^I_{\mathrm{I}}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad i\frac{d}{dt}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} = H^I_{\mathrm{I}}|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}}\,. \tag{3.21}$$

Assim, de (3.20) e (3.21) vemos que os estados evoluem de acordo com uma equação do tipo Schrödinger envolvendo somente o hamiltoniano de interação H^I_{I}, enquanto que os operadores evoluem de acordo com uma equação do tipo Heisenberg que envolve apenas o hamiltoniano livre H^0_{I}.

A equação (3.21) também pode se resolvida em termos do estado do sistema num instante t_0

$$|\alpha,t\rangle_{\mathrm{I}} = U_{\mathrm{I}}(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle_{\mathrm{I}}\,, \tag{3.22}$$

onde U_{I} obedece a equação

$$i\partial_t U_{\mathrm{I}}(t,t_0) = H^I_{\mathrm{I}}U_{\mathrm{I}}(t,t_0)\,. \tag{3.23}$$

Uma solução para (3.23) pode ser obtida notando-se que, de (3.2) e (3.16a),

$$\begin{aligned}|\alpha, t\rangle_{\mathrm{I}} &= U_0^\dagger(t,\tau)|\alpha, t\rangle_{\mathrm{S}} = U_0^\dagger(t,\tau)U_{\mathrm{S}}(t,t_0)|\alpha, t_0\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= U_0^\dagger(t,\tau)U_{\mathrm{S}}(t,t_0)U_0(t_0,\tau)|\alpha, t_0\rangle_{\mathrm{I}};\end{aligned}$$

comparando com (3.22), segue que

$$U_{\mathrm{I}}(t,t_0) = U_0^\dagger(t,\tau)U_{\mathrm{S}}(t,t_0)U_0(t_0,\tau)\,. \tag{3.24}$$

A partir desta solução obtemos algumas propriedades de U_{I}. De (3.18) temos

$$U_{\mathrm{I}}(t_0,t_0) = U_0^\dagger(t_0,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_0,t_0)U_0(t_0,\tau) = U_0^\dagger(t_0,\tau)U_0(t_0,\tau) = \mathbb{I}\,. \tag{3.25}$$

A composição de operadores U_{I} é fechada:

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{I}}(t_2,t_1)U_{\mathrm{I}}(t_1,t_0) &= U_0^\dagger(t_2,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_2,t_1)U_0(t_1,\tau)U_0^\dagger(t_1,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_1,t_0)U_0(t_0,\tau) \\ &= U_0^\dagger(t_2,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_2,t_1)U_{\mathrm{S}}(t_1,t_0)U_0(t_0,\tau) = U_0^\dagger(t_2,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_2,t_0)U_0(t_0,\tau) \\ &= U_{\mathrm{I}}(t_2,t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde utilizamos (3.4). Tomando $t_2 = t_0$ na equação acima, segue que $U_{\mathrm{I}}(t_0,t_1)U_{\mathrm{I}}(t_1,t_0) = U_{\mathrm{I}}(t_0,t_0) = \mathbb{I}$, ou seja:

$$U_{\mathrm{I}}^{-1}(t,t_0) = U_{\mathrm{I}}(t_0,t)\,. \tag{3.27}$$

Além disso, U_{I} é unitário:

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{I}}^\dagger(t,t_0) &= U_0^\dagger(t_0,\tau)U_{\mathrm{S}}^\dagger(t,t_0)U_0(t,\tau) = U_0^\dagger(t_0,\tau)U_{\mathrm{S}}^{-1}(t,t_0)U_0(t,\tau) \\ &= U_0^\dagger(t_0,\tau)U_{\mathrm{S}}(t_0,t)U_0(t,\tau) = U_{\mathrm{I}}(t_0,t) = U_{\mathrm{I}}^{-1}(t,t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Outra característica da transformação que leva à representação de interação é que as relações de comutação e anticomutação também são preservadas. Supondo $\big[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}\big]_\pm = C_{\mathrm{S}}$, segue que

$$\begin{aligned}[A_{\mathrm{I}}(t), B_{\mathrm{I}}(t)]_\pm &= [U_0^\dagger(t,\tau)A_{\mathrm{S}}U_0(t,\tau), U_0^\dagger(t,\tau)B_{\mathrm{S}}U_0(t,\tau)]_\pm \\ &= U_0^\dagger(t,\tau)A_{\mathrm{S}}B_{\mathrm{S}}U_0(t,\tau) \pm U_0^\dagger(t,\tau)B_{\mathrm{S}}A_{\mathrm{S}}U_0(t,\tau) \\ &= U_0^\dagger(t,\tau)\big[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}\big]_\pm U_0\,(t,\tau) = U_0^\dagger(t,\tau)C_{\mathrm{S}}U_0\,(t,\tau) = C_{\mathrm{I}}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Reciprocamente, supondo que $\big[A_{\mathrm{I}}(t), B_{\mathrm{I}}(t)\big]_\pm = C_{\mathrm{I}}(t)$:

$$[A_{\mathrm{S}}, B_{\mathrm{S}}]_\pm = [U_0(t,\tau)A_{\mathrm{I}}(t)U_0^\dagger(t,\tau), U_0(t,\tau)B_{\mathrm{I}}(t)U_0^\dagger(t,\tau)]_\pm$$

$$
\begin{aligned}
&= U_0(t,\tau)A_{\rm I}(t)B_{\rm I}(t)U_0^\dagger(t,\tau) \pm U_0(t,\tau)B_{\rm I}(t)A_{\rm I}(t)U_0^\dagger(t,\tau) \\
&= U_0(t,\tau)\big[A_{\rm I}(t), B_{\rm I}(t)\big]_\pm U_0^\dagger(t,\tau) = U_0(t,\tau)C_{\rm I}(t)U_0^\dagger(t,\tau) = C_{\rm S}\,. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

A relação entre as representações de interação e Heisenberg pode ser estabelecida utilizando-se (3.8a), (3.8b), (3.16a) e (3.16b),

$$|\alpha, t\rangle_{\rm I} = U_0^\dagger(t,\tau)U_{\rm S}(t,\tau)|\alpha, t\rangle_{\rm H}\,, \qquad (3.31a)$$

$$O_{\rm I}(t) = U_0^\dagger(t,\tau)U_{\rm S}(t,\tau)O_{\rm H}U_{\rm S}^\dagger(t,\tau)U_0(t,\tau)\,. \qquad (3.31b)$$

Estas transformações também preservam relações de comutação e anticomutação. De (3.14) e (3.29), supondo que $\big[A_{\rm H}(t), B_{\rm H}(t)\big]_\pm = C_{\rm H}(t)$, temos

$$\big[A_{\rm I}(t), B_{\rm I}(t)\big]_\pm = C_{\rm I}(t). \qquad (3.32)$$

Em particular, se $C_{\rm H}(t)$ for um c-número $c(t)$, então

$$[A_{\rm I}(t), B_{\rm I}(t)]_\pm = c(t). \qquad (3.33)$$

Reciprocamente, de (3.30) e (3.13), se $\big[A_{\rm I}(t), B_{\rm I}(t)\big]_\pm = C_{\rm I}(t)$ então $\big[A_{\rm H}(t), B_{\rm H}(t)\big]_\pm = C_{\rm H}(t)$.

Na representação de interação, os efeitos da interação se manifestam nos estados $|\alpha, t\rangle_{\rm I}$. Como estaremos interessados em processos de espalhamento, será conveniente trabalharmos com uma equação integral, equivalente à equação de evolução temporal (3.23). Tal equação, que já leva em conta a condição de contorno (3.25), é

$$U_{\rm I}(t,t_0) = \mathbb{I} - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\rm I}^I(t_1)U_{\rm I}(t_1,t_0)\,, \qquad (3.34)$$

cuja derivada em relação a t nos leva a (3.23).

A solução desta equação integral é dada por um série iterativa que consiste em reinserções sucessivas do lado direito de (3.34):

$$
\begin{aligned}
U_{\rm I}(t,t_0) &= \mathbb{I} - i\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_{\rm I}^I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_{\rm I}^I(t_1)H_{\rm I}^I(t_2) \\
&+ \ldots + (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_{\rm I}^I(t_1)H_{\rm I}^I(t_2)\ldots H_{\rm I}^I(t_n) \\
&+ \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U_{{\rm I}n}(t,t_0)\,, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

onde os termos da série são dados por:

$$
\begin{aligned}
&U_{\text{I}0}(t,t_0) = \mathbb{I}\,,\\
&U_{\text{I}1}(t,t_0) = -i\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_{\text{I}}^{I}(t_1)\,,\\
&U_{\text{I}n}(t,t_0) = (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_{\text{I}}^{I}(t_1)H_{\text{I}}^{I}(t_2)\ldots H_{\text{I}}^{I}(t_n), \qquad n\geq 2\,.
\end{aligned}
$$

Como vemos, a série (3.35) é constituída por integrais múltiplas cujos integrandos são produtos do hamiltoniano de interação, H_{I}^{I}, tomados a tempos diferentes e em ordem decrescente, em instantes intermediários dentro do intervalo $[t,t_0]$. Um simplificação nessa série ocorre se conseguirmos definir os mesmos limites de integração para todas as integrais de (3.35). Isto pode ser obtido pela introdução do ordenamento temporal de operadores.

Considere o produto de n operadores $A_1(t_1), A_2(t_2), \ldots, A_n(t_n)$, que podem ser bosônicos ou fermiônicos. Suponha que $t_{i_1}\geq t_{i_2}\geq\ldots\geq t_{i_n}$ onde os índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ são elementos do conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$. O ordenamento temporal do operador $A_1(t_1)A_2(t_2)\ldots A_n(t_n)$ é definido por

$$
T\{A_1(t_1)A_2(t_2)\ldots A_n(t_n)\} = (-1)^\eta A_{i_1}(t_{i_1})A_{i_2}(t_{i_2})\ldots A_{i_n}(t_{i_n})\,, \tag{3.36}
$$

onde η é o número de trocas entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $A_1(t_1)\ldots A_n(t_n)$ em $A_{i_1}(t_{i_1})A_{i_2}(t_{i_2})\ldots A_{i_n}(t_{i_n})$.

Uma definição equivalente a (3.36) é

$$
T\{A_1(t_1)A_2(t_2)\ldots A_n(t_n)\} = \sum_p (-1)^\eta \theta(t_{p_1},\ldots,t_{p_n})A_{p_1}(t_{p_1})A_{p_2}(t_{p_2})\ldots A_{p_n}(t_{p_n})\,, \tag{3.37}
$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações dos índices $p_1,\ldots,p_n$ que são elementos de $\{1,2,\ldots,n\}$, η é o número de trocas entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $A_1(t_1)\ldots A_n(t_n)$ em $A_{p_1}(t_{p_1})A_{p_2}(t_{p_2})\ldots A_{p_n}(t_{p_n})$ e

$$
\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\,,\\ 0, & \text{do contrário.}\end{cases} \tag{3.38}
$$

Considere o n-ésimo termo ($n\geq 2$) da série (3.35). Pela definição de (3.38) temos

$$
\begin{aligned}
U_{\text{I}n}(t,t_0) &= (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_{\text{I}}^{I}(t_1)\ldots H_{\text{I}}^{I}(t_n)\\
&= (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H_{\text{I}}^{I}(t_1)\ldots H_{\text{I}}^{I}(t_n)\theta(t_1,t_2,\ldots,t_n)\\
&= (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t} dt_n\, H_{\text{I}}^{I}(t_1)\ldots H_{\text{I}}^{I}(t_n)\theta(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,.
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

Na expressão acima, podemos fazer $n!$ trocas envolvendo os índices $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Assim, somando sobre todas as permutações possíveis, temos:

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{I}n}(t,t_0) &= \frac{(-i)^n}{n!}\sum_p (-1)^\eta \int_{t_0}^{t} dt_{p_1}\int_{t_0}^{t} dt_{p_2}\ldots\int_{t_0}^{t} dt_{p_n}\, H_{\mathrm{I}}^I(t_{p1})\ldots H_{\mathrm{I}}^I(t_{p_n})\theta(t_{p_1},t_{p_2},\ldots,t_{p_n}) \\
&= \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t} dt_n \sum_p (-1)^\eta H_{\mathrm{I}}^I(t_{p_1})\ldots H_{\mathrm{I}}^I(t_{p_n})\theta(t_{p_1},t_{p_2},\ldots,t_{p_n}) \\
&= \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t} dt_n\, T\{H_{\mathrm{I}}^I(t_1)H_{\mathrm{I}}^I(t_2)\ldots H_{\mathrm{I}}^I(t_n)\}\,. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (3.35), obtemos

$$U_{\mathrm{I}}(t,t_0) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int_{t_0}^{t} dt_n\, T\{H_{\mathrm{I}}^I(t_1)H_{\mathrm{I}}^I(t_2)\ldots H_{\mathrm{I}}^I(t_n)\}, \qquad (3.41)$$

expressão que pode ser escrita compactamente como

$$U_{\mathrm{I}}(t,t_0) = T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\mathrm{I}}^I(t_1)\right)\,. \qquad (3.42)$$

3.2 A MATRIZ S

Na teoria clássica de campos, a interação elétron-pósitron com o campo eletromagnético é descrita pela densidade lagrangiana (2.213)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\mathrm{Rad}} + \mathcal{L}_I \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\,. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Entretanto, como vimos na seção 2.1, a densidade lagrangiana do campo de radiação, $\mathcal{L}_{\mathrm{Rad}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, não é adequada para se efetuar a quantização canônica. Adotaremos então como $\mathcal{L}_{\mathrm{Rad}}$ a densidade lagrangiana da quantização covariante (2.81). Assim,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\mathrm{Rad}} + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I\,, \qquad (3.44)$$

onde, já adiantando o ordenamento normal,

$$\mathcal{L}_0 = N\left[\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu\right]\,, \qquad (3.45a)$$

$$\mathcal{L}_I = N\big[e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\big] = N\big[e\overline{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)\big]\,. \qquad (3.45b)$$

O hamiltoniano é dado por

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x}\big[\pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}_{QED}\big] = \int d^3\mathbf{x}\big[\pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}_0\big] - \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}_I \\
&= \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}_0 + \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}_I = H_0 + H_I\,.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

A partir de agora, utilizaremos a representação de interação, que leva às seguintes simplificações:

- Os operadores satisfazem equações do tipo Heisenberg que envolvem apenas H_0,

$$
\frac{d}{dt}O(t) = -i\big[O(t), H_0\big]\,; \tag{3.47}
$$

- se $\mathcal{L}_I$ não envolve derivadas, como no caso da densidade lagrangiana (3.45b), os campos conjugados π_r aos campos interagentes ϕ_r são os mesmos campos conjugados aos campos livres, isto é

$$
\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}_r}\,; \tag{3.48}
$$

- as representações de interação e de Heisenberg se relacionam pela transformação (3.31a), a qual preserva relações de comutação. Desta forma os campos interagentes satisfazem as mesmas relações de comutação que os campos livres.

Assim, tudo o que obtivemos anteriormente para os campos livres, como as soluções em ondas planas, representação número e propagadores, permanece válido para os campos interagentes.

Esta representação é também adequada para processos de espalhamento. Tais processos são descritos da seguinte maneira:

seja $|\psi(t)\rangle$ o vetor de estado que nos limites $t \to -\infty$ e $t \to \infty$ é auto-estado de H_0, ou seja, vamos considerar que $H_I = 0$ quando $t \to -\infty$ e $t \to \infty$. Suponha que o estado

$$
|i\rangle = \lim_{t\to-\infty} |\psi(t)\rangle = |\psi(-\infty)\rangle\,, \tag{3.49}
$$

seja conhecido, ou seja, que neste estado esteja especificado o número de elétrons, pósitrons, fótons e os seus respectivos momentos, spins e polarizações. A matriz S relaciona $|\psi(\infty)\rangle = \lim_{t\to\infty} |\psi(t)\rangle$ com $|i\rangle$ por

$$
|\psi(\infty)\rangle = S|i\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle\,, \tag{3.50}
$$

ou seja, de (3.22),

$$S = U(-\infty, \infty)\,. \tag{3.51}$$

A interação pode levar a diversos autoestados finais $|f\rangle$ de H_0, onde cada um especifica o número de partículas, os respectivos momentos, etc. Como os autoestados de H_0 formam um conjunto completo, podemos escrever

$$|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle\langle f|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle\langle f|S|i\rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi}\,, \tag{3.52}$$

onde $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ é a chamada de amplitude de probabilidade. Logo, a probabilidade de que o sistema evolua para o estado $|f\rangle$ em $t \to \infty$ é

$$|S_{fi}|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = |\langle f|\psi(\infty)\rangle|^2\,. \tag{3.53}$$

Assumindo que $|\psi(\infty)\rangle$ esteja normalizado, podemos verificar a conservação da probabilidade

$$\begin{aligned}\sum_f |S_{fi}|^2 &= \sum_f \langle f|\psi(\infty)\rangle^* \langle f|\psi(\infty)\rangle = \sum_f \langle\psi(\infty)|f\rangle\langle f|\psi(\infty)\rangle \\ &= \langle\psi(\infty)|\psi(\infty)\rangle = 1\,,\end{aligned} \tag{3.54}$$

que é um resultado mais geral que na mecânica quântica não relativística, pois partículas podem ser criadas e destruídas.

Vamos agora obter uma expressão para a matriz S. De (3.51), (3.41) e (3.46), obtemos a expansão de Dyson da matriz S:

$$\begin{aligned}S &= U(-\infty, \infty) \\ &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\, T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n)\} \\ &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \ldots \int d^4x_n\, T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\ldots\mathcal{H}_I(x_n)\}\,,\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde

$$\mathcal{H}_I(x) = N\left[e\overline{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)\right]\,. \tag{3.56}$$

3.2.1 O TEOREMA DE WICK

Como vimos, a matriz S é o operador evolução temporal $U(-\infty, \infty)$ que "conecta" os estados assintóticos $|i\rangle$, conhecido, e $|\psi(\infty)\rangle$.

A interação pode levar a vários estados finais $|f\rangle$ que são resultados de processos de aniquilação e criação de partículas. Pelo fato da matriz S envolver a densidade hamiltoniana de interação $\mathcal{H}_I$, que consiste do produto de operadores de criação e aniquilação de partículas, a matriz S descreverá um número substancial de processos distintos. Desta forma, nem todos os termos da matriz S contribuem para uma particular transição $|i\rangle \to |f\rangle$.

Dada uma transição $|i\rangle \to |f\rangle$, os termos da matriz S que contribuem são os que possuem operadores de aniquilação à direita, para que todas as partículas presentes em $|i\rangle$ sejam aniquiladas, e operadores de criação à esquerda, para que as partículas presentes em $|f\rangle$ sejam criadas. Pode ocorrer também que partículas não presentes em $|f\rangle$ sejam criadas em $|i\rangle$ e depois aniquiladas em $|f\rangle$. Tais partículas são chamas de virtuais e só estarão presentes em estados intermediários.

Uma simplificação nos cálculos é obtida evitando-se a criação e aniquilação de partículas virtuais. Isto pode ser feito através da expansão da matriz S em um somatório de produtos normais, pois estes possuem todos os operadores de criação à esquerda dos operadores de aniquilação. Assim, cada produto normal corresponderá a uma particular transição $|i\rangle \to |f\rangle$ que poderá, por exemplo, ser representada por um *diagrama de Feynman*. Essa expansão em um somatório de produtos normais é conhecida como teorema de Wick.

Antes de enunciarmos o teorema, vamos apresentar algumas definições. Lidaremos com operadores, bosônicos ou fermiônicos, que são da forma $A = A^+ + A^-$, onde A^+ e A^- são as partes do operador responsáveis pela aniquilação e criação de partículas, respectivamente.

Dados dois operadores A e B, bosônicos ou fermiônicos, e definindo

$$\epsilon_{\text{AB}} = \begin{cases} -1, & \text{se } A \text{ e } B \text{ são fermiônicos}\,, \\ 1, & \text{do contrário}, \end{cases} \tag{3.57}$$

temos

$$\begin{aligned} N(AB) &= N[(A^+ + A^-)(B^+ + B^-)] = N(A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^-) \\ &= A^+B^+ + \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- \\ &= \epsilon_{\text{AB}}B^+A^+ + \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ + A^-B^+ + \epsilon_{\text{AB}}B^-A^- \\ &= \epsilon_{\text{AB}}(B^+A^+ + B^-A^+ + \epsilon_{\text{AB}}A^-B^+ + B^-A^-) = \epsilon_{\text{AB}}N[(B^+ + B^-)(A^+ + A^-)] \\ &= \epsilon_{\text{AB}}N(BA)\,. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Da definição do ordenamento temporal (3.36), também segue que

$$T\{A(x), B(x')\} = \epsilon_{\text{AB}}T\{B(x'), A(x)\}\,. \tag{3.59}$$

Calculemos agora $T\{A(x_1), B(x_2)\}$, para $x_1^0 \neq x_2^0$. Temos dois casos.
Caso 1: suponha que $x_1^0 > x_2^0$. Então

$$T\{A(x_1), B(x_2)\} = A(x_1)B(x_2) = A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^- .$$

Agora, note que

$$A^+B^- = \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ + A^+B^- - \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ = \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ + [A^+, B^-]_{\pm} , \tag{3.60}$$

onde se utiliza o anticomutador no caso em que A e B são fermiônicos e, em caso contrário, o comutador. Assim,

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= A^+B^+ + \epsilon_{\text{AB}}B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- + [A^+, B^-]_{\pm} \\ &= N(A(x_1)B(x_2)) + [A^+, B^-]_{\pm} . \end{aligned}$$

Pelo fato de $[A^+, B^-]_{\pm}$ ser um c-número, como vimos ao calcularmos os propagadores dos campos de Dirac e de radiação, podemos escrevê-lo de uma maneira conveniente:

$$\begin{aligned} [A^+, B^-]_{\pm} &= \langle 0|[A^+, B^-]_{\pm}|0\rangle = \langle 0|A^+B^- \pm B^-A^+|0\rangle = \langle 0|A^+B^-|0\rangle \\ &= \langle 0|A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^+B^+|0\rangle = \langle 0|AB|0\rangle , \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde usamos o fato que $A^+|0\rangle = B^+|0\rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= N(A(x_1)B(x_2)) + \langle 0|A(x_1)B(x_2)|0\rangle \\ &= N(A(x_1)B(x_2)) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle . \end{aligned}$$

Caso 2: suponha que $x_1^0 < x_2^0$. Então

$$T\{A(x_1), B(x_2)\} = \epsilon_{\text{AB}}B(x_2)A(x_1) = \epsilon_{\text{AB}}(B^+A^+ + B^+A^- + B^-A^+ + B^-A^-) .$$

Como $B^+A^- = \epsilon_{\text{AB}}A^-B^+ + [B^+, A^-]_{\pm}$, temos

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= \epsilon_{\text{AB}}(B^+A^+ + \epsilon_{\text{AB}}A^-B^+ + B^-A^+ + B^-A^-) + \epsilon_{\text{AB}}[B^+, A^-]_{\pm} \\ &= \epsilon_{\text{AB}}N(BA) + \langle 0|\epsilon_{\text{AB}}BA|0\rangle = N(AB) + \langle 0|\epsilon_{\text{AB}}\, T\{B(x_2)A(x_1)\}|0\rangle \\ &= N(AB) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle . \end{aligned}$$

Portanto, para $x_1^0 \neq x_2^0$, temos

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= N(AB) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle \\ &= N(AB) + N\big(\langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle\big) , \end{aligned} \tag{3.62}$$

pois $\langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle$ é um escalar.

O valor esperado no vácuo do produto ordenado temporalmente ocorrerá com muita frequência. Por esse motivo definiremos a contração de dois operadores A e B por

$$\underbracket{A(x_1)B}(x_2) = \overbracket{A(x_1)B}(x_2) = \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle\,. \tag{3.63}$$

No capítulo anterior, estas contrações foram obtidas a partir de comutadores e anticomutadores dos campos livres. Como estamos utilizando a representação de interação, estes comutadores e anticomutadores permanecem inalterados. Assim, de (2.129) e (2.203)

$$\underbracket{A^\mu(x)A}{}^\nu(y) = iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}\,, \tag{3.64a}$$

$$\underbracket{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}}{}_\beta(y) = iS_{F\alpha\beta}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)}\,. \tag{3.64b}$$

As contrações também podem aparecer dentro do argumento de um ordenamento normal. Por exemplo,

$$N(ABCDEF\ldots JKLM\ldots) := (-1)^p \underbracket{AK}\,\underbracket{BC}\,\underbracket{EL}\;N(DF\ldots JM\ldots)\,, \tag{3.65}$$

onde p é o número de permutações entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $ABC\ldots$ em $AKBC\ldots$. Este é um exemplo de um ordenamento normal generalizado.

Em termos da notação (3.63), podemos escrever (3.62) como

$$T\{A(x_1),B(x_2)\} = N(AB) + N(\underbracket{AB})\,. \tag{3.66}$$

Este é o caso base para o teorema de Wick.

Para operadores $A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots, A_n(x_n)$, com $x_i^0 \neq x_j^0$ para $i \neq j$, o teorema de Wick afirma que

$$\begin{aligned}
T\{A_1A_2\ldots A_n\} = {} & N(A_1A_2\ldots A_n)\\
& + N(\underbracket{A_1A_2}A_3\ldots A_n) + N(\underbracket{A_1A_2A_3}\ldots A_n) + \ldots + N(A_1A_2A_3\ldots \underbracket{A_{n-1}A_n})\\
& + N(\underbracket{A_1A_2}\,\underbracket{A_3A_4}\ldots A_n) + N(\underbracket{A_1A_2A_3}A_4\ldots A_n) + \ldots +\\
& + N(A_1A_2A_3\ldots \underbracket{A_{n-3}A_{n-2}}\,\underbracket{A_{n-1}A_n})\\
& + \text{ soma sobre termos triplamente contraídos}\\
& + \text{ soma sobre termos com mais contrações.}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

A demonstração deste teorema é feita por indução matemática e pode ser encontrada em [18].

No caso da matriz S, pelo fato da densidade hamiltoniana de interação (3.56) ser dada em termos de um produto normal, o n-ésimo termo da matriz S contém um produto misto da forma

$$T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\ldots\mathcal{H}_I(x_n)\} = T\big\{N(AB\ldots)_{x_1}N(AB\ldots)_{x_2}\ldots N(AB\ldots)_{x_n}\big\}\,, \quad (3.68)$$

e o teorema de Wick pode ser estendido para estes produtos mistos.

Em cada fator $N(AB\ldots)_{x_i}$, onde $i = 1,\ldots,n$, substituímos cada $x_i = (x_i^0, \mathbf{x}_i)$ por $\zeta_i = (x_i^0 + \epsilon, \mathbf{x}_i)$ nos operadores de criação e $\zeta_i = (x_i^0 - \epsilon, \mathbf{x}_i)$ nos operadores de aniquilação, onde $\epsilon > 0$. Desta maneira, em cada fator $N(AB\ldots)_{\zeta_i}$ o ordenamento normal também ordena temporalmente os operadores e podemos escrever

$$T\big\{N(AB\ldots)_{x_1}\ldots N(AB\ldots)_{x_n}\big\} = \lim_{\epsilon\to 0} T\big\{(AB\ldots)_{\zeta_1}\ldots(AB\ldots)_{\zeta_n}\big\}\,, \quad (3.69)$$

onde o ordenamento temporal deve ser feito antes do limite ser tomado.

Expandindo o lado direito de (3.69) com o teorema de Wick, vemos que as contrações dentro de um mesmo grupo $(AB\ldots)_{\zeta_1}$ se anularão no limite $\epsilon \to 0$. Assim, o teorema de Wick pode ser aplicado omitindo-se as contrações a tempos iguais (c.t.i.).

$$T\big\{N(AB\ldots)_{x_1}\ldots N(AB\ldots)_{x_n}\big\} = T\big\{(AB\ldots)_{x_1}\ldots(AB\ldots)_{x_n}\big\}_{\text{sem c.t.i.}}\,. \quad (3.70)$$

Este resultado permite expandirmos a matriz S em um somatório de produtos normais generalizados. Cada um destes produtos corresponde a um processo definido, caracterizado por operadores não contraídos que absorvem e criam as partículas presentes nos estados iniciais e finais. As contrações são os *propagadores de Feynman*, que correspondem às partículas virtuais que são "criadas" e "aniquiladas" nos estados intermediários.

3.3 TEORIA DA PERTURBAÇÃO NA REPRESENTAÇÃO DE HEISENBERG

Nesta seção apresentaremos uma série perturbativa construída diretamente na representação de Heisenberg [25], onde os campos físicos estão bem definidos, bem como o estado de vácuo. Segundo o teorema de Haag-van Hoove a representação de interação só é bem definida para um número conjunto enumerável de graus de liberdade [41], enquanto no modelo padrão da física de partículas elementares os campos interagentes constituem sistemas com infinitos graus de liberdade.

Consideremos a densidade lagrangiana, equivalente à (3.44), para a QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \frac{e}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)]A_\mu(x), \quad (3.71)$$

onde, conforme observado na seção 2.2.2, o termo $J^\mu := -\frac{e}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)]$ corresponde à imposição do ordenamento normal à corrente $j^\mu = -e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$.

Das equações de Euler-Lagrange (1.18), seguem as equações de movimento para os campos

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) &= -eA_\mu(x)\gamma^\mu\psi(x),\\ \Box A^\mu(x) &= -\frac{e}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] = J^\mu.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Pelo fato do termo de interação $J^\mu A_\mu$ não conter derivadas, os momentos conjugados aos campos A_μ e ψ são idênticos àqueles obtidos nas seções 2.1.2 e 2.2.2, quando lidamos com campos livres. Consequentemente, as relações de comutação a tempos iguais obtidas anteriormente permanecem válidas:

$$\begin{aligned}&[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)]_0 = -i\delta^\nu_\mu\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ &[A_\mu(x), A_\nu(y)]_0 = 0 = [\dot{A}_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)]_0,\\ &[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi^\dagger_\beta(t,\mathbf{x}')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ &[\psi_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi_\beta(t,\mathbf{x}')]_+ = 0 = \left[\psi^\dagger_\alpha(t,\mathbf{x}), \psi^\dagger_\beta(t,\mathbf{x}')\right]_+,\\ &[A_\mu(x), \psi_\alpha(y)]_0 = 0 = [A_\mu(x), \psi^\dagger_\alpha(y)]_0,\\ &[\dot{A}^\mu(x), \psi_\alpha(y)]_0 = 0 = [A^\mu(x), \psi^\dagger_\alpha(y)]_0.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Entretanto, devido à complexidade das equações (3.72), a expressão dos comutadores a tempos distintos em uma forma fechada não é conhecida.

De maneira a desenvolvermos a teria de perturbação na representação de Heisenberg, escreveremos as equações (3.72) nas suas formas integrais através do método das funções de Green

$$\psi(x) = \psi_f(x) - \int S_R(x-y)eA_\mu(y)\gamma^\mu\psi(y)d^4y, \tag{3.74a}$$

$$\begin{aligned}A^\mu(x) &= A^\mu_f(x) + \int D^{\mu\nu}_R(x-y)J_\nu(y)d^4y = A^\mu_f(x) - \int g^{\mu\nu}D_R(x-y)J_\nu(y)d^4y\\ &= A^\mu_f(x) + \int D_R(x-y)\frac{e}{2}[\overline{\psi}(y), \gamma^\mu\psi(y)]d^4y,\end{aligned} \tag{3.74b}$$

onde S_R e D_R denotam, respectivamente, as funções de Green retardadas dos campos de Dirac e eletromagnético deduzidas no apêndice B.

Utilizando a relação de Sokhotski-Plemelj

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{3.75}$$

podemos escrever S_R e D_R na forma

$$
\begin{aligned}
S_R(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\left\{\mathcal{P}\frac{1}{p^2-m^2} - i\pi\delta(p^2-m^2)\epsilon(p_0)\right\}e^{-ipx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,(\not{p} + m)\left\{\mathcal{P}\frac{1}{p^2-m^2} - i\pi\delta(p^2-m^2)\epsilon(p_0)\right\}e^{-ipx}, \\
D_R(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\left\{\mathcal{P}\frac{1}{p^2} - i\pi\delta(p^2)\epsilon(p_0)\right\}e^{-ipx}.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Nas expressões acima, $\mathcal{P}$ denota o valor principal de Cauchy e ϵ é a função sinal definida por

$$
\epsilon(p_0) = \begin{cases} 1, & \text{para } p_0 > 0 \\ -1, & \text{para } p_0 < 0 \end{cases}.
$$

Além disso, as funções de Green retardadas possuem suporte no cone futuro, i.e., são não nulas somente em $\mathcal{C}^+ := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0, x_0 > 0\}$, onde $\mathcal{M}$ denota o espaço-tempo de Minkowski.

Tendo em vista o caráter singular das funções de Green (3.76), a convergência das integrais que aparecem em (3.74) não é garantida. Por este motivo, adotaremos a técnica do *switching* adiabático que consiste na introdução do fator de convergência $e^{-\alpha|y_0|}$ nos integrandos em (3.74). O parâmetro positivo e real α pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira e, ao final de todos os cálculos, o limite $\alpha \to 0^+$ é tomado. Assim, no lugar das equações (3.74) consideraremos a partir de agora, embora não escrevamos explicitamente,

$$
\begin{aligned}
\psi(x,\alpha) &= \psi_f(x) - \int S_R(x-y)e^{-\alpha|y_0|}eA_\mu(y)\gamma^\mu\psi(y)d^4y, \\
A^\mu(x,\alpha) &= A_f^\mu(x) + \int D_R(x-y)e^{-\alpha|y_0|}\frac{e}{2}[\bar{\psi}(y),\gamma^\mu\psi(y)]d^4y,
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

e, como já comentado, os campos com significado físico são dados por

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \lim_{\alpha\to 0^+}\psi(x,\alpha), \\
A^\mu(x) &= \lim_{\alpha\to 0^+}A^\mu(x,\alpha).
\end{aligned} \tag{3.78}
$$

Analogamente, podemos escrever (3.72) em função das funções de Green avançadas

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \tilde{\psi}_f(x) - \int S_A(x-y)eA_\mu(y)\gamma^\mu\psi(y)d^4y, \\
A^\mu(x) &= \tilde{A}_f^\mu(x) + \int D_A(x-y)\frac{e}{2}[\bar{\psi}(y),\gamma^\mu\psi(y)]d^4y,
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

com (vide apêndice B)

$$\begin{aligned} S_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2 - m^2} + i\pi \delta(p^2 - m^2)\epsilon(p_0) \right\} e^{-ipx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \,(\not{p} + m) \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2 - m^2} + i\pi \delta(p^2 - m^2)\epsilon(p_0) \right\} e^{-ipx}, \\ D_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{p^2} + i\pi \delta(p^2)\epsilon(p_0) \right\} e^{-ipx}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Estas possuem suporte no cone passado $\mathcal{C}^- := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0, x_0 < 0\}$ e se relacionam com as funções de Green retardadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_R(-x) =& S_A(x), \\ D_R(-x) =& D_A(x). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Nas equações integrais (3.74) e (3.79), foram introduzidos os campos ψ_f,A^μ_f,$\tilde{\psi}_f$ e $\tilde{A}^\mu_f$. Estes são soluções das equações de campo livre

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_f(x) = 0, \\ &\Box A^\mu_f = 0, \\ &(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\tilde{\psi}_f(x) = 0, \\ &\Box \tilde{A}^\mu_f = 0. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Pelo fato das expressões (3.74) envolverem funções de Green retardadas, ψ_f e A^μ_f são, formalmente, os "valores iniciais" dos campos ψ e A_μ para $x_0 \to -\infty$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \to -\infty} A^\mu(x) &= \lim_{x_0 \to -\infty} A^\mu_f(x), \\ \lim_{x_0 \to -\infty} \psi(x) &= \lim_{x_0 \to -\infty} \psi_f(x). \end{aligned} \tag{3.83}$$

Analogamente, $\tilde{\psi}_f$ e $\tilde{A}^\mu_f$ são, formalmente, os "valores finais" dos campos ψ e A_μ para $x_0 \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \to \infty} A^\mu(x) &= \lim_{x_0 \to \infty} \tilde{A}^\mu_f(x), \\ \lim_{x_0 \to \infty} \psi(x) &= \lim_{x_0 \to \infty} \tilde{\psi}_f(x). \end{aligned} \tag{3.84}$$

A partir das equações (3.74) e (3.79), podemos relacionar os campos "iniciais" ψ_f e A^μ_f com os campos "finais" $\tilde{\psi}_f$ e $\tilde{A}^\mu_f$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi_f(x) &= \tilde{\psi}_f(x) + \int S(x-y) e A_\mu(y) \gamma^\mu \psi(y) d^4y, \\ A^\mu_f(x) &= \tilde{A}^\mu_f(x) - \int D(x-y) \frac{e}{2} [\overline{\psi}(y), \gamma^\mu \psi(y)] d^4y, \end{aligned} \tag{3.85}$$

onde as funções singulares S e D são definidas por

$$
\begin{aligned}
S(x) &:= S_R(x) - S_A(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\epsilon(p_0)\delta(p^2-m^2)(\not{p}+m)e^{-ipx},\\
D(x) &:= D_R(x) - D_A(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx}.
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

De (1.21) e (3.71) obtemos o hamiltoniano do sistema

$$
\begin{aligned}
H(A^\mu,\psi) &= H^{(0)}(A^\mu) + H^{(0)}(\psi) + H^{(1)}(A^\mu,\psi),\\
H^{(0)}(A^\mu) &= -\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu,\\
H^{(0)}(\psi) &= \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\big[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta\big]\psi,\\
H^{(1)}(A^\mu,\psi) &= -\frac{e}{2}\int d^3\mathbf{x}[\bar{\psi},\gamma^\mu\psi]A_\mu.
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

Considerando os limites (3.83) e (3.84), temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x_0\to-\infty} H(A^\mu,\psi) &= H^{(0)}(A^\mu_f) + H^{(0)}(\psi_f),\\
\lim_{x_0\to\infty} H(A^\mu,\psi) &= H^{(0)}(\tilde{A}^\mu_f) + H^{(0)}(\tilde{\psi}_f),
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

ou seja, o hamiltoniano assintótico é o hamiltoniano do sistema sem interação. Este é independente do tempo e, portanto, a representação de número, conforme descrita no capítulo 2, pode ser introduzida nos limites assintóticos.

Para campos interagentes, uma solução explícita das equações (3.74) não é conhecida. Por este motivo, buscaremos uma solução na forma de uma série de potências no parâmetro e:

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \cdots,\\
\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(0)}(x) + e\bar{\psi}^{(1)}(x) + e^2\bar{\psi}^{(2)}(x) + \cdots\\
A_\mu(x) &= A^{(0)}_\mu(x) + eA^{(1)}_\mu(x) + e^2A^{(2)}_\mu(x) + \cdots,
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

as quais, substituídas nas equações de movimento (3.74), levam às seguintes relações de recorrência

$$
\begin{aligned}
\psi^{(0)}(x) &= \psi_f(x),\\
\psi^{(n+1)}(x) &= -\int S_R(x-y)\gamma^\mu\sum_{m=0}^{n}A^{(m)}_\mu(y)\psi^{(n-m)}(y)d^4y,\\
A^{(0)}_\mu(x) &= A_{\mu f}(x),\\
A^{(n+1)}_\mu(x) &= \frac{1}{2}\int D_R(x-y)\sum_{m=0}^{n}[\bar{\psi}^{(m)}(y),\gamma^\mu\psi^{(n-m)}(y)]d^4y.
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

Assim, em ordem mais baixa de perturbação temos

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}(x) &= -\int S_R(x-y)\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(y)\psi^{(0)}(y)d^4y, \\
\bar{\psi}^{(1)}(x) &= (\psi^{(1)})^\dagger\gamma^0(x) = -\int \bar{\psi}^{(0)}(y)\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(y)S_A(y-x)d^4y, \\
A_\mu^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}\int D_R(x-y)[\bar{\psi}^{(0)}(y),\gamma^\mu\psi^{(0)}(y)]d^4y, \\
\psi^{(2)}(x) &= \int S_R(x-y)\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(y)\left[\int S_R(y-z)\gamma^\nu A_\nu^{(0)}(z)\psi^{(0)}(z)d^4z\right]d^4y \\
&\quad -\frac{1}{2}\int S_R(x-y)\gamma^\mu\left\{\int D_R(y-z)[\bar{\psi}^{(0)}(z),\gamma^\mu\psi^{(0)}(z)]d^4z\right\}\psi^{(0)}(y)d^4y, \\
A_\mu^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2}\int D_R(x-y)\left[\bar{\psi}^{(0)}(y),\gamma^\mu\int S_R(y-z)\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(z)\psi^{(0)}(z)d^4z\right]d^4y \\
&\quad -\frac{1}{2}\int D_R(x-y)\left[\int \bar{\psi}^{(0)}(z)\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(z)S_A(z-y)d^4z,\gamma^\mu\psi^{(0)}(y)\right]d^4y.
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

De maneira similar, os observáveis físicos podem ser construídos perturbativamente. Por exemplo, para o operador corrente

$$
J_\mu = -\frac{e}{2}[\bar{\psi}(x),\gamma_\mu\psi(x)] = J_\mu^{(0)}(x) + eJ_\mu^{(1)}(x) + e^2J_\mu^{(2)}(x) + \cdots, \tag{3.92}
$$

temos, em virtude das séries (3.89),

$$
\begin{aligned}
J_\mu^{(0)}(x) &= 0, \\
J_\mu^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2}[\bar{\psi}^{(0)}(x),\gamma_\mu\psi^{(0)}(x)], \\
J_\mu^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}^{(0)}(x),\gamma_\mu\int S_R(x-y)\gamma^\nu A_\nu^{(0)}(y)\psi^{(0)}(y)d^4y\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[\int \bar{\psi}^{(0)}(y)\gamma^\nu A_\nu^{(0)}(y)S_A(y-x)d^4y,\gamma_\mu\psi^{(0)}(x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\int\Big\{\left[\bar{\psi}^{(0)}(x),\gamma_\mu S_R(x-y)\gamma^\nu\psi^{(0)}(y)\right] \\
&\quad +\left[\bar{\psi}^{(0)}(y)\gamma^\nu S_A(y-x),\gamma_\mu\psi^{(0)}(x)\right]\Big\}A_\nu^{(0)}(y)d^4y.
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

Conforme pode ser visto a partir de (3.91) e (3.93), as soluções perturbativas das equações (3.74) contêm produtos de operadores $A_\mu^{(0)},\psi^{(0)}$ e funções singulares. Por este motivo, o operador ψ não possui elemento de matriz nulo entre o vácuo $|0\rangle$ e um estado $|q,k\rangle$ contendo um fóton e um elétron. Mesmo em ordem mais baixa de perturbação, pode-se mostrar que [25]

$$
\langle 0|\psi(x)|q,k\rangle = -\int S_R(x-y)\gamma^\mu\langle 0|A_\mu^{(0)}(y)|k\rangle\langle 0|\psi^{(0)}(y)|q\rangle d^4y \neq 0. \tag{3.94}
$$

Este resultado é muito diferente do caso não interagente, onde o operador ψ cria a partir do vácuo um estado contendo apenas um elétron.

3.4 CÁLCULO DO TENSOR DE POLARIZAÇÃO DO VÁCUO

A título de referência futura, mostraremos como o tensor de polarização do vácuo pode ser calculado no contexto deste formalismo. Para isso, adicionaremos à densidade lagrangiana (3.71) o termo $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^{\text{ext}}$, que corresponde a introdução de um campo externo A_μ^{ext}. Por sua vez, as equações de movimento tornam-se

$$\begin{aligned}\Box A^\mu(x) &= -\frac{e}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] = J^\mu, \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) &= -e\left[A_\mu(x) + A_\mu^{\text{ext}}(x)\right]\gamma^\mu\psi(x),\end{aligned} \tag{3.95}$$

com as correspondentes equações integrais

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_f(x) - \int S_R(x-y)e\left[A_\mu(y) + A_\mu^{\text{ext}}(y)\right]\gamma^\mu\psi(y)d^4y, \\ A^\mu(x) &= A_f^\mu(x) + \int D_R(x-y)\frac{e}{2}[\overline{\psi}(y), \gamma^\mu\psi(y)]d^4y.\end{aligned} \tag{3.96}$$

Considerando as expansões (3.89) e a aproximação de primeira ordem no parâmetro e, temos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_f(x) - e\int S_R(x-y)\gamma^\mu\left[A_\mu^{(0)}(y) + A_\mu^{\text{ext}}(y)\right]\psi_f(y)d^4y \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}_f(x) - e\int \bar{\psi}^{(0)}(y)\gamma^\mu\left[A_\mu^{(0)}(y) + A_\mu^{\text{ext}}(y)\right]S_A(y-x)d^4y,\end{aligned} \tag{3.97}$$

que, por sua vez, levam ao seguinte operador corrente

$$\begin{aligned}J_\mu(x) = -\frac{e}{2}[\bar{\psi}_f(x), \gamma_\mu\psi_f(x)] + \frac{e^2}{2}\int \Big\{ &\left[\bar{\psi}_f(x), \gamma_\mu S_R(x-y)\gamma^\nu\psi_f(y)\right] \\ &+ \left[\bar{\psi}_f(y)\gamma^\nu S_A(y-x), \gamma_\mu\psi_f(x)\right]\Big\}\left[A_\nu^{(0)}(y) + A_\nu^{\text{ext}}(y)\right]d^4y.\end{aligned} \tag{3.98}$$

Tomando o valor esperado no vácuo do operador acima, obtemos

$$\begin{aligned}\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle &= \frac{e^2}{2}\langle 0|\int\left[\bar{\psi}_f(x), \gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu\psi_f(y)\right]A_\nu^{\text{ext}}(y)d^4y|0\rangle d^4y \\ &+ \frac{e^2}{2}\langle 0|\int\left[\bar{\psi}_f(y)\gamma^\nu S_A(y-x), \gamma^\mu\psi_f(x)\right]A_\nu^{\text{ext}}(y)d^4y|0\rangle d^4y \\ &= \frac{e^2}{2}\int(\gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu)_{\alpha\beta}\langle 0|\left[\bar{\psi}_{f\alpha}(x), \psi_{f\beta}(y)\right]|0\rangle A_\nu^{\text{ext}}(y)d^4y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{e^2}{2}\int \gamma^\mu_{\beta\lambda}(\gamma^\nu S_A(y-x))_{\alpha\beta}\langle 0|\left[\bar{\psi}_{f\alpha}(y),\psi_{f\lambda}(x)\right]|0\rangle A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y\\
&=\frac{e^2}{2}\int(\gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu)_{\alpha\beta}S^{(1)}_{\beta\alpha}(y-x)A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y\\
&+\frac{e^2}{2}\int(\gamma^\nu S_A(y-x))_{\alpha\beta}\gamma^\mu_{\beta\lambda}S^{(1)}_{\lambda\alpha}(x-y)A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y\\
&=\frac{e^2}{2}\int {\rm Tr}\big[\gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu S^{(1)}(y-x)+\gamma^\nu S_A(y-x)\gamma^\mu S^{(1)}(x-y)\big]A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y\\
&=\int \Pi^{\mu\nu}(x-y)A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y, \qquad (3.99)
\end{aligned}
$$

onde fizemos $S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) \coloneqq \langle 0|[\bar{\psi}_{f\beta}(y),\psi_{f\alpha}(x)]|0\rangle$ e definimos o tensor de polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ por

$$
\Pi^{\mu\nu}(x-y)=\frac{e^2}{2}{\rm Tr}\big[\gamma^\mu S_R(x-y)\gamma^\nu S^{(1)}(y-x)+\gamma^\nu S_A(y-x)\gamma^\mu S^{(1)}(x-y)\big]. \qquad (3.100)
$$

Uma representação integral para a função singular $S^{(1)}$ pode ser obtida pelo emprego das decomposições (2.168) e (2.169), da propriedade (2.175), das relações (2.199) e (2.200) e das representações (B.56):

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) &\coloneqq \langle 0|[\bar{\psi}_{f\beta}(y),\psi_{f\alpha}(x)]|0\rangle = \langle 0|\bar{\psi}^+_{f\beta}(y)\psi^-_{f\alpha}(x)|0\rangle - \langle 0|\psi^+_{f\alpha}(x)\bar{\psi}^-_{f\beta}(y)|0\rangle\\
&= \langle 0|\left[\bar{\psi}^+_{f\beta}(y),\psi^-_{f\alpha}(x)\right]_+|0\rangle - \langle 0|\left[\psi^+_{f\alpha}(x),\bar{\psi}^-_{f\beta}(y)\right]_+|0\rangle\\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\left[i\Delta^-(x+y)-i\Delta^+(x+y)\right]\\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3}(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\int\left[\Theta(-p^0)+\Theta(p^0)\right]e^{-ip(x-y)}\delta(p^2-m^2)d^4p\\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int e^{-ip(x-y)}(\not{p}+m)_{\alpha\beta}\delta(p^2-m^2)d^4p. \qquad (3.101)
\end{aligned}
$$

Para o cálculo do tensor de polarização do vácuo, é conveniente o emprego do espaço dos momentos. Considerando $\Pi^{\mu\nu}$ como a transformada inversa de Fourier

$$
\Pi^{\mu\nu}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-y)}\Pi^{\mu\nu}(p)d^4p, \qquad (3.102)
$$

e utilizando as representações integrais (3.76) e (3.80) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(x-y) = &-\frac{e^2}{2(2\pi)^7}\int d^4p\,d^4p'\,d^4p''\delta(p-p'+p''){\rm Tr}[\gamma^\mu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}''+m)]\\
&\times\left\{\delta(p''^2-m^2)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2-m^2}-i\pi\delta(p'^2-m^2)\epsilon(p'_0)\right]+\right.\\
&\left.+\,\delta(p'^2-m^2)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2-m^2}+i\pi\delta(p''^2-m^2)\epsilon(p''_0)\right]\right\}e^{-ip(x-y)}. \qquad (3.103)
\end{aligned}
$$

Comparando a expressão acima com (3.102), concluímos que $\Pi^{\mu\nu}(p)$, o núcleo da transformada inversa de Fourier, é

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(p) = &-\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}''+m)]\\ &\times\left\{\delta(p'^2-m^2)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2-m^2}+i\pi\delta(p''^2-m^2)\epsilon(p''_0)\right]+\right.\\ &\left.+\,\delta(p''^2-m^2)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2-m^2}-i\pi\delta(p'^2-m^2)\epsilon(p'_0)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{3.104}$$

O traço que aparece em $\Pi^{\mu\nu}(p)$ pode ser facilmente calculado. Levando-se em conta que $\mathrm{Tr}[\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\cdots\gamma^{\alpha_n}]=0$ para um número n ímpar e demais propriedades referentes ao traço de um produto de matrizes de Dirac [27], temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}''+m)] &= p'_\alpha p''_\beta\underbrace{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta]}_{=4(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}+g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu})}+m^2\underbrace{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu]}_{=4g^{\mu\nu}}\\ &= 4[p'^\mu p''^\nu+p'^\nu p''^\mu+g^{\mu\nu}(m^2-p'p'')].\end{aligned} \tag{3.105}$$

Mostremos agora que $\Pi^{\mu\nu}$ é simétrico. Inicialmente, notemos que o termo entre chaves em (3.104) é invariante pela troca $p'\leftrightarrow -p''$. Denotando este último por $\{\cdots\}$, segue que

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\mu}(p) &= -\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\mathrm{Tr}[\gamma^\nu(\not{p}'+m)\gamma^\mu(\not{p}''+m)]\{\cdots\}\\ &\overset{p'\leftrightarrow -p''}{=} -\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\underbrace{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(-\not{p}'+m)\gamma^\nu(-\not{p}''+m)]}_{\overset{(3.105)}{=}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}'+m)\gamma^\nu(\not{p}''+m)]}\{\cdots\}\\ &= \Pi^{\mu\nu}(p),\end{aligned}$$

conforme o desejado.

Pelo fato da teoria sob consideração apresentar simetria de *gauge*, sabemos, como resultado do teorema de Noether, que ocorre conservação de carga. Consequentemente, de (3.99)

$$0=\langle 0|\partial_\mu J^\mu|0\rangle=\int\partial_\mu^{(x)}\Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu^{\mathrm{ext}}(y)d^4y,$$

ou seja,

$$\partial_\mu\Pi^{\mu\nu}(x)=0. \tag{3.106}$$

Equivalentemente, no espaço dos momentos

$$\begin{aligned}0=\partial_\mu\Pi^{\mu\nu}(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int e^{-ipx}p_\mu\Pi^{\mu\nu}(p)d^4p\\ \therefore\qquad p_\mu\Pi^{\mu\nu}(p) &= 0.\end{aligned} \tag{3.107}$$

Por ser um tensor simétrico de segunda ordem dependente apenas de p, podemos inferior da invariância de Lorentz da teoria que $\Pi^{\mu\nu}$ é da forma

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = G(p)p^\mu p^\nu + H(p)g^{\mu\nu}. \tag{3.108}$$

Em virtude da restrição (3.107) imposta pela simetria de *gauge* ao tensor $\Pi^{\mu\nu}(p)$, as funções $G(p)$ e $H(p)$ estão diretamente relacionadas entre si

$$\begin{aligned} p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) &= p^\nu[G(p)p^2 + H(p)] = 0. \\ \therefore \qquad H(p) &= -G(p)p^2. \end{aligned}$$

Portanto, o tensor de polarização do vácuo no espaço dos momentos tem a forma funcional

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = G(p)[p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2]. \tag{3.109}$$

Tomando o traço do tensor $\Pi^{\mu\nu}$ em (3.109), obtemos que $G(p)$ é dado por

$$\begin{aligned} G(p) &= -\frac{1}{3p^2}\Pi^\mu{}_\mu \\ &= \frac{e^2}{48\pi^3 p^2}\int d^4p' d^4p'' \delta(p - p' + p'')\underbrace{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{p}'' + m)]}_{\overset{(3.105)}{=} -8(p'p''-2m^2)}\{\cdots\} \\ &= \frac{-e^2}{6\pi^3 p^2}\int d^4p' d^4p''(p'p'' - 2m^2)\delta(p - p' + p'')\Bigg\{\delta(p'^2 - m^2)\Bigg[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2 - m^2} \\ &+ i\pi\delta(p''^2 - m^2)\epsilon(p'')\Bigg] + \delta(p''^2 - m^2)\Bigg[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2 - m^2} - i\pi\delta(p'^2 - m^2)\epsilon(p')\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Conforme será visto *a posteriori*, o cálculo individual das partes real e imaginária de $G(p)$ mostra-se vantajoso. Fazendo $\omega_{\mathbf{p}'} = \sqrt{\mathbf{p'^2} + m^2}$ em (3.110), a parte imaginária de $G(p)$ é

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}\, G(p) &= \frac{-e^2}{6\pi^2 p^2}\int d^4p' d^4p''(p'p'' - 2m^2)\delta(p - p' + p'')\delta(p'^2 - m^2)\delta(p''^2 - m^2) \\ &\times \big[\epsilon(p_0'') - \epsilon(p_0')\big] \\ &= \frac{-e^2}{6\pi^2 p^2}\int d^4p'\big[p'(p' - p) - 2m^2\big]\delta(p'^2 - m^2)\delta((p' - p)^2 - m^2)\big[\epsilon(p' - p) - \epsilon(p_0')\big] \\ &= \frac{-e^2}{12\pi^2 p^2}\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}'}}\int dp_0'\big[p'(p' - p) - 2m^2\big]\delta((p' - p)^2 - m^2) \\ &\times \Big[\delta(p_0' - \omega_{\mathbf{p}'}) + \delta(p_0' + \omega_{\mathbf{p}'})\Big]\big[\epsilon(p_0'') - \epsilon(p_0')\big] \\ &= \frac{-e^2}{12\pi^2 p^2}\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}'}}\Big\{\big(\underbrace{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} - p_0\omega_{\mathbf{p}'}}_{=-\frac{p}{2}} - m^2\big)\delta\big(p^2 - 2p_0\omega_{\mathbf{p}'} + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}\big)\left[\frac{\omega_{\mathbf{p}'} - p_0}{|\omega_{\mathbf{p}'} - p_0|} - 1\right] \end{aligned}$$

$$+\,\big(\underbrace{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+p_0\omega_{\mathbf{p}'}}_{=-\frac{p}{2}}-m^2\big)\delta\big(p^2+2p_0\omega_{\mathbf{p}'}+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}\big)\left[\frac{-\omega_{\mathbf{p}'}-p_0}{|\omega_{\mathbf{p}'}+p_0|}+1\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{-e^2}{12\pi^2p^2}\left(\frac{p^2}{2}+m^2\right)\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}'}}\Bigg\{\delta\big(p^2-2p_0\omega_{\mathbf{p}'}+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}\big)\left[1+\frac{p_0-\omega_{\mathbf{p}'}}{|p_0-\omega_{\mathbf{p}'}|}\right]$$
$$+\,\delta\big(p^2+2p_0\omega_{\mathbf{p}'}+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}\big)\left[-1+\frac{p_0+\omega_{\mathbf{p}'}}{|p_0+\omega_{\mathbf{p}'}|}\right]\Bigg\}. \tag{3.111}$$

Sendo $\mathfrak{Im}\, G(p)$ um invariante de Lorenz, a integral (3.111) é simplificada pela adoção de um referencial inercial em que $\mathbf{p}=\mathbf{0}$. Neste referencial

$$\mathfrak{Im}\, G(p)=\frac{-e^2}{24\pi^2}\left(1+\frac{2m^2}{p_0^2}\right)\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}'}}\Bigg\{\delta\big(p_0^2-2p_0\omega_{\mathbf{p}'}\big)\left[1+\frac{p_0-\omega_{\mathbf{p}'}}{|p_0-\omega_{\mathbf{p}'}|}\right]$$
$$+\,\delta\big(p_0^2+2p_0\omega_{\mathbf{p}'}\big)\left[-1+\frac{p_0+\omega_{\mathbf{p}'}}{|p_0+\omega_{\mathbf{p}'}|}\right]\Bigg\}$$
$$=\frac{-e^2}{6\pi}\left(1+\tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\Bigg\{\delta\Big(p_0^2-2p_0\sqrt{x^2+m^2}\Big)\left[1+\frac{p_0-\sqrt{x^2+m^2}}{\big|p_0-\sqrt{x^2+m^2}\big|}\right]$$
$$+\,\delta\Big(p_0^2+2p_0\sqrt{x^2+m^2}\Big)\left[-1+\frac{p_0+\sqrt{x^2+m^2}}{\big|p_0+\sqrt{x^2+m^2}\big|}\right]\Bigg\}. \tag{3.112}$$

Analisaremos esta integral por casos.

Caso 1: $0<\sqrt{x^2+m^2}<p_0$.
Neste caso, $\delta(p_0^2+2\sqrt{x^2+m^2}p_0)=0$ e $\left[1+\frac{p_0-\sqrt{x^2+m^2}}{|p_0-\sqrt{x^2+m^2}|}\right]=2$. Logo,

$$\mathfrak{Im}\, G(p)=\frac{-e^2}{3\pi}\left(1+\tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\delta\Big(p_0^2-2p_0\sqrt{x^2+m^2}\Big)$$
$$=\frac{-e^2}{3\pi}\left(1+\tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\delta\Big(p_0^2-2|p_0|\sqrt{x^2+m^2}\Big)\,\frac{p_0}{|p_0|}.$$

Caso 2: $0<p_0<\sqrt{x^2+m^2}$.
Neste caso, $\delta(p_0^2+2\sqrt{x^2+m^2}p_0)=0$ e $\left[1+\frac{p_0-\sqrt{x^2+m^2}}{|p_0-\sqrt{x^2+m^2}|}\right]=0$. Logo, $\mathfrak{Im}\, G(p)=0$.

Caso 3: $p_0<-\sqrt{x^2+m^2}<0$.
Neste caso, $\delta(p_0^2-2\sqrt{x^2+m^2}p_0)=0$ e $\left[-1+\frac{p_0+\sqrt{x^2+m^2}}{|p_0+\sqrt{x^2+m^2}|}\right]=-2$. Logo,

$$\mathfrak{Im}\, G(p)=\frac{e^2}{3\pi}\left(1+\tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\delta\Big(p_0^2+2p_0\sqrt{x^2+m^2}\Big)$$
$$\frac{-e^2}{3\pi}\left(1+\tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\delta\Big(p_0^2-2|p_0|\sqrt{x^2+m^2}\Big)\,\frac{p_0}{|p_0|}.$$

Caso 4: $-\sqrt{x^2+m^2}<p_0<0$.

Neste caso, $\delta(p_0^2 - 2\sqrt{x^2+m^2}p_0) = 0$ e $\left[-1 + \frac{p_0+\sqrt{x^2+m^2}}{\left|p_0+\sqrt{x^2+m^2}\right|}\right] = 0$. Logo, $\mathfrak{Im}\, G(p) = 0$.

Vemos, portanto, que $\mathfrak{Im}\, G(p) \neq 0$ somente se $0 < \sqrt{x^2+m^2} < p_0$ ou $p_0 < -\sqrt{x^2+m^2} < 0$. Em termos da variável x, estas condições são equivalentes a $0 < x < \sqrt{p_0^2 - m^2}$. Além disso, $p_0^2 - 2|p_0|\sqrt{x^2+m^2}$ só possui raízes reais se $\frac{p_0^2}{m^2} \geq m^2$, ou seja, $\mathfrak{Im}\, G(p) = 0$ se $\frac{p_0^2}{4} < m^2$.

Da análise apresentada acima conclui-se

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\, G(p) &= \frac{-e^2}{3\pi}\left(1 + \tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int\limits_0^{\sqrt{p_0^2-m^2}} \frac{dx\, x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\delta\left(p_0^2 - 2|p_0|\sqrt{x^2+m^2}\right)\frac{p_0}{|p_0|}\Theta\left(\tfrac{p_0^2}{4} - m^2\right) \\
&= \frac{-e^2}{3\pi}\left(1 + \tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\int\limits_0^{\sqrt{p_0^2-m^2}} \frac{dx\, x^2}{\sqrt{x^2+m^2}}\frac{p_0}{|p_0|}\Theta\left(\tfrac{p_0^2}{4} - m^2\right)\times \\
&\times \tfrac{1}{2\sqrt{p_0^2-4m^2}}\left[\delta\left(x - \tfrac{1}{2}\sqrt{p_o^2-4m^2}\right) + \underbrace{\delta\left(x + \tfrac{1}{2}\sqrt{p_o^2-4m^2}\right)}_{=0}\right] \\
&= \frac{-e^2}{3\pi}\left(1 + \tfrac{2m^2}{p_0^2}\right)\frac{\sqrt{p_0^2-4m^2}}{8}\frac{2}{|p_0|}\frac{p_0}{|p_0|}\Theta\left(\tfrac{p_0^2}{4} - m^2\right) \\
&= \frac{-e^2}{12\pi}\left(1 + \frac{2m^2}{p_0^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p_0^2}}\epsilon(p)\Theta\left(\tfrac{p_0^2}{4} - m^2\right).
\end{aligned} \tag{3.113}
$$

Lembremos que $\mathfrak{Im}\, G(p)$ foi calculado num referencial em que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Em um referencial inercial arbitrário

$$
\mathfrak{Im}\, G(p) = \frac{-e^2}{12\pi}\left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}\epsilon(p)\Theta\left(\frac{p^2}{4} - m^2\right). \tag{3.114}
$$

Assumindo que os campos $A_\nu^{\text{ext}}(y)$ e $\partial_\mu A_\nu^{\text{ext}}(y)$ se anulam no limite $|y^2| \to \infty$, decorre do teorema da divergência que

$$
\int d^4y p^\mu p^\nu e^{-ip(x-y)} A_\nu^{\text{ext}}(y) = -\int d^4y e^{-ip(x-y)}[\partial^\mu\partial^\nu A_\nu^{\text{ext}}(y)], \tag{3.115a}
$$

$$
-g^{\mu\nu}\int d^4y p^2 e^{-ip(x-y)} A_\nu^{\text{ext}}(y) = \int d^4y e^{-ip(x-y)}[\Box A^\mu_{\text{ext}}(y)]. \tag{3.115b}
$$

Assim, das expressões acima e de (3.99), (3.102) e (3.109), o valor esperado do operador corrente pode ser escrito em função de $G(p)$ na forma

$$
\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\, G(p)[p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2]e^{-ip(x-y)}A_\nu^{\text{ext}}(y)
$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\, G(p) e^{-ip(x-y)} \underbrace{[\Box A^\mu_{\text{ext}}(y) - \partial^\mu\partial^\nu A^{\text{ext}}_\nu(y)]}_{=:J^\mu_{\text{ext}}(y)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\, G(p) e^{-ip(x-y)} J^\mu_{\text{ext}}(y). \tag{3.116}$$

Para que a teoria exposta até aqui seja causal, é necessário que

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, G(p) e^{-ip(x-y)} = 0 \quad \text{se} \quad x^0 - y^0 < 0. \tag{3.117}$$

conforme podemos ver da expressão (3.116) pois, do contrário, a corrente induzida dependeria da corrente externa fora do cone de luz retardado.

A propriedade (3.117) permite a extensão analítica de $G(p)$ ao semi-plano complexo $I_+ \coloneqq \{p^0 + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$. Com efeito,

$$G(p^0+i\eta, \mathbf{p}) = \int d^4x\, G(x) e^{i[(p^0+i\eta)x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]} = \int d^3\mathbf{x} \int_0^\infty dx^0\, G(x) e^{i(p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} e^{-\eta x^0}, \tag{3.118}$$

que converge, pelo fato de η ser positivo e assumirmos que $G(p)$ está bem definida (o fator $e^{-\eta x^0}$ "melhora" a convergência da integral).

A função $G(p^0 + i\eta)$ definida acima é analítica em I_+ e pelo teorema de Titchmarsh, sua parte real relaciona-se com a sua parte imaginária pela transformada de Hilbert

$$\mathfrak{Re}\, G(p) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{Im}\, G(x, \mathbf{p})}{x - p^0} dx. \tag{3.119}$$

Definindo

$$\Pi^{(0)}(p^2) \coloneqq -\frac{e^2}{12\pi^2}\left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}\Theta\left(\frac{p^2}{4} - m^2\right), \tag{3.120}$$

podemos escrever $\mathfrak{Im}\, G(p) = \pi\epsilon(p)\Pi^{(0)}(p^2)$. Desta forma, de (3.119)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}\, G(p) &= \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|}\frac{\Pi^{(0)}(x^2 - \mathbf{p}^2)}{x - p^0} dx = \mathcal{P}\int_0^\infty \Pi^{(0)}(x^2 - \mathbf{p}^2)\left[\frac{1}{x - p^0} + \frac{1}{x + p^0}\right] dx \\
&= \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\Pi^{(0)}(x^2 - \mathbf{p}^2)}{x^2 - p_0^2} d(x^2) \overset{x^2 - \mathbf{p}^2 \to a}{=} \mathcal{P}\int_{-\mathbf{p}^2}^\infty \frac{\Pi^{(0)}(a)}{a - p^2} da \\
&= \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\Pi^{(0)}(a)}{a - p^2} da =: \bar{\Pi}^{(0)}(p^2),
\end{aligned} \tag{3.121}$$

que diverge e, portanto, $G(p)$ não está bem definido.

Para obtermos um resultado finito, notemos inicialmente que a quantidade medida experimentalmente é a soma da corrente externa original J^μ_{ext} com a corrente induzida

(3.116)

$$J^{\mu}_{\text{ext}}(x) + \langle 0|J^{\mu}(x)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\ [1 - G(p)]\ J^{\mu}_{\text{ext}}(y)e^{-ip(x-y)}. \tag{3.122}$$

Caso $G(p)$ fosse uma constante, o resultado da interação entre o campo externo com a corrente fermiônica seria a multiplicação da corrente externa por uma constante. Por sua vez, isso corresponderia a uma mudança na unidade de carga de J^{μ}_{ext}. Embora $G(p)$ não seja constante, este raciocínio demonstra que a adição de uma constante arbitrária à função $G(p)$ representa fisicamente uma mudança na unidade de carga.

Para que seja possível uma comparação inequívoca de (3.122) com o experimento, é necessário que especifiquemos a unidade de carga de acordo com alguma convenção. Por esse motivo, exigiremos, para campos externos que variam muito lentamente no espaço e no tempo, que a corrente observada seja idêntica à corrente externa. Isso é equivalente à imposição de que $G(p)$ se anule em (3.122) para $p = 0$. Portanto, a corrente observada é definida por

$$J^{\mu}_{\text{obs.}}(x) := \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\ [1 - G(p) - G(0)]\ J^{\mu}_{\text{ext}}(y)e^{-ip(x-y)}.$$

A determinação inequívoca da unidade de carga realizada acima é um procedimento conhecido por renormalização da carga.

Da expressão (3.114), vemos que $\mathfrak{Im}\, G(p) = 0$ para $p = 0$. Portanto, a renormalização da carga modifica apenas a parte real de $G(p)$ e podemos escrever

$$G(p) - G(0) = \bar{\Pi}^{(0)}(p^2) - \bar{\Pi}^{(0)}(0) + i\pi\epsilon(p)\Pi^{(0)}(p^2). \tag{3.123}$$

A expressão acima é ainda divergente. Porém, ao considerarmos formalmente a diferença $\bar{\Pi}^{(0)}(p^2) - \bar{\Pi}^{(0)}(0)$, obtemos o resultado finito [25]

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}^{(0)}(p^2) - \bar{\Pi}^{(0)}(0) &= \mathcal{P}\int_0^{\infty} \Pi^{(0)}(a)\left(\frac{1}{a-p^2} - \frac{1}{a}\right) da = p^2\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{\Pi^{(0)}(a)}{a(a-p^2)}da \\
&= \frac{-e^2}{12\pi}p^2\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{1}{a(a-p^2)}\left(1+\frac{2m^2}{a}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{a}}da \qquad (p^2 > 4m) \\
&= \frac{-e^2}{12\pi}p^2\left[\frac{5}{3} + \frac{4m^2}{a} - \left(1+\frac{2m^2}{a}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{a}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}{\left|1-\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\right|}\right],
\end{aligned} \tag{3.124}$$

que é válido para $1 - \frac{4m^2}{p^2} > 0$. Caso contrário, o logarítmo natural é substituído pela função arcotangente.

Capítulo 4

O FORMALISMO DO CAMPO B

4.1 CASO ABELIANO

Conforte visto na seção 2.1, o procedimento de quantização canônica em teorias que apresentam simetria de *gauge* apresenta dificuldades na definição dos momentos canônicos. Por este motivo, a introdução de termos de fixação de *gauge* na densidade lagrangiana original da teoria se torna indispensável.

Ainda que já tenhamos apresentado duas maneiras distintas de quantizarmos o campo eletromagnético na seção 2.1, apresentaremos aqui um procedimento alternativo que, embora não seja necessário no caso eletromagnético, torna-se indispensável na quantização de teorias com simetria de *gauge* não-abelianas [29].

A quantização do campo eletromagnético pode ser efetuada de uma maneira covariante através da introdução de um campo auxiliar B, escalar e real, na densidade lagrangiana que descreve a teoria livre da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2, \tag{4.1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é chamado de parâmetro de *gauge*. Como casos particulares, temos o *gauge* de Landau e o *gauge* de Feynman dados por $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, respectivamente.

Por intermédio de (4.1), a densidade lagrangiana para a QED torna-se

$$\mathcal{L}_{\text{QED}_B} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j_\mu A^\mu, \tag{4.2}$$

com $j^\mu = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ e seguem das equações de Euler-Lagrange (1.18) as equações de movimento para A^μ

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(-\frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + B\partial_\lambda A^\lambda\right)\right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left(-j_\lambda A^\lambda\right) \\
&= \partial_\mu \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\lambda\rho} + Bg^{\lambda\rho}\delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho\right] + g^{\lambda\rho}\delta^\nu_\rho j_\lambda
\end{aligned}$$

$$= \partial_\mu \left[-\frac{1}{2}(\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\lambda) F^{\lambda\rho} + B g^{\mu\nu} \right] + j^\nu = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial^\nu B + j^\nu$$

$$\therefore \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial^\nu B = j^\nu. \tag{4.3}$$

Analogamente, para o campo auxiliar B:

$$0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu B)} (0) \right] - \frac{\partial}{\partial B} \left(B \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \alpha B^2 \right)$$

$$\therefore \quad \partial_\mu A^\mu + \alpha B = 0. \tag{4.4}$$

Notemos que da equação (4.4), a condição de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ é satisfeita somente no *gauge* de Landau, ou seja, quando $\alpha = 0$. Além disso, isolando B em (4.4) e substituindo em (4.3), uma equação análoga a (2.19) é obtida

$$\Box A^\nu + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \tag{4.5}$$

Entretanto, as equações que envolvem B e A^μ podem ser desacopladas. De fato, contraindo (4.3) com ∂_ν, segue da antissimetria do tensor do campo eletromagnético e da conservação de j^ν a seguinte equação para B:

$$\Box B = 0. \tag{4.6}$$

Portanto, o campo B é livre e não-massivo.

4.1.1 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Para efetuarmos a quantização canônica, consideraremos somente o campo A^μ como variável canônica. De (1.19) e (4.2), os momentos canônicos são dados por

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}_B}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial}{\partial(\partial \dot{A}_\mu)} \left(-\frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} + B \partial_\lambda A^\lambda \right) = -F^{0\mu} + g^{0\mu} B. \tag{4.7}$$

Além disso, são impostas as seguintes relações de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_0 &= i\delta^\nu_\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [A_\mu(x), A_\nu(y)]_0 &= 0, \\ [\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)]_0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Da definição dos momentos conjugados (4.7), vemos que os campos B e $\dot{A}^k$ podem ser expressos em termos de π^μ:

$$\begin{aligned} B &= \pi^0, \\ \dot{A}^k &= \partial^k A^0 - \pi^k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Porém, o mesmo não ocorre com $\dot{A}^0$ e $\dot{B}$. Estes se relacionam com os outros campos através das equações de movimento (4.3) e (4.4):

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \partial_\mu F^{\mu 0} + j^0 = \partial_k F^{k0} + j^0, \\ \dot{A}^0 &= -\partial_k A^k - \alpha B. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Assim, levando em conta que $j^0 = e\bar{\psi}\gamma^0\psi$ comuta com A_μ e π^μ a tempos iguais, segue de (4.8), (4.9) e (4.10) as relações de comutação

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \dot{A}_0(y)]_0 &= -[A_\mu(x), \partial_k A^k(y)]_0 - \alpha[A_\mu(x), B(y)] \\ &= -\partial_k^{(y)}[A_\mu(x), A^k(y)]_0 - \alpha[A_\mu(x), \pi^0(y)]_0 = -i\alpha\delta_\mu^0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= -i\big[g_{\mu 0} - (1-\alpha)\delta_\mu^0\delta_0^0\big]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ [A_\mu(x), \dot{A}_k(y)]_0 &= [A_\mu(x), \partial_k A(y)]_0 - [A_\mu(x), \pi_k(y)]_0 \\ &= \partial_k^{(y)}[A_\mu(x), A(y)]_0 - ig_{\mu k}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -ig_{\mu k}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ &= -i\big[g_{\mu k} - (1-\alpha)\delta_\mu^0\delta_k^0\big]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad [A_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)]_0 = -i\big[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\delta_\mu^0\delta_\nu^0\big]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$[A_\mu(x), B(y)]_0 = [A_\mu(x), \pi^0(y)]_0 = i\delta_\mu^0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = ig_{\mu 0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \dot{B}(y)]_0 &= [A_\mu(x), \partial_k F^{k0}(y)]_0 + [A_\mu(x), j^0]_0 \\ &= \Box^{(y)}[A_\mu(x), A^0(y)]_0 - \partial_k^{(y)}[A_\mu(x), \dot{A}^k(y)]_0 \\ &= -ig_{\mu k}\partial_k^{(y)}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -i\delta_\mu^k\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$[B(x), B(y)]_0 = [\pi^0(x), \pi^0(y)]_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} [\dot{A}_0(x), B(y)]_0 &= -[\partial_k A^k(x), B(y)]_0 - \alpha[B(x), B(y)]_0 \\ &= -\partial_k^{(x)}[A^k(x), B(y)]_0 = 0 = i\delta_0^k\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ [\dot{A}_k(x), B(y)]_0 &= [\partial_k A^0(x), B(y)]_0 - [\pi_k(x), B(y)]_0 \\ &= \partial_k^{(x)}[A^0(x), B(y)]_0 - [\pi_k(x), \pi_0(y)]_0 \\ &= i\partial_k^{(x)}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = i\delta_k^l\partial_l\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad [\dot{A}_\mu(x), B(y)]_0 = i\delta_\mu^k\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$\begin{aligned} [B(x), \dot{B}(y)]_0 &= [B(x), \partial_k F^{k0}(y)]_0 + [B(x), j^0]_0 \\ &= \Box^{(y)}[B(x), A^0(y)]_0 - \partial_k^{(x)}[B(x), \dot{A}^k(y)]_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\Box^{(y)}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - i\partial_k^{(x)}\partial_k^{(x)}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\
&= -i\Box\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + i\Box^{(x)}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\
&= -i\Box\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + i\Box\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0,
\end{aligned}
$$

Em suma:

$$
\begin{aligned}
&[A_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)]_0 = -i\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\delta_\mu^0\delta_\nu^0\right]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
&[A_\mu(x), B(y)]_0 = ig_{\mu 0}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
&[A_\mu(x), \dot{B}(y)]_0 = -[\dot{A}_\mu(x), B(y)]_0 = -i\delta_\mu^k\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
&[B(x), B(y)]_0 = 0, \\
&[B(x), \dot{B}(y)]_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Para o campo de Dirac ψ, sabemos que $[\psi(x), A_\mu(y)]_0 = [\psi(x), \dot{A}_\mu(y)]_0 = [\psi(x), B(y)]_0 = 0$. Entretanto, de (4.10) e (2.166)

$$
\begin{aligned}
[\psi(x), \dot{B}(y)]_0 &= [\psi(x), \partial_k F^{k0}(y)]_0 + [\psi(x), j^0(y)]_0 = e[\psi(x), \bar{\psi}(y)\gamma^0\psi(y)]_0 \\
&= e[\psi(x), \psi^\dagger(y)\psi(y)]_0 = e[\psi(x), \psi^\dagger(y)]_+^0\psi(y) - e\psi^\dagger(y)[\psi(x), \psi(y)]_+^0 \\
&= e\psi(x)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

4.1.2 PROPRIEDADES DO CAMPO B E CONDIÇÃO SUBSIDIÁRIA

Pelo fato do campo B satisfazer a equação de campo livre (4.6)

$$
\Box B(x) = 0,
$$

o conhecimento de B e das suas derivadas $\partial_\mu B$ em uma superfície de tipo espaço σ, permite escrevermos a seguinte solução para o problema de Cauchy associado [2]

$$
B(y) = \int_\sigma d\sigma^\mu(z)\left[\partial_\mu^{(z)} D(y-z)B(z) - D(y-z)\partial_\mu B(z)\right], \tag{4.13}
$$

onde

$$
D(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx}, \tag{4.14}
$$

é a função singular, invariante de Lorentz e solução do seguinte problema de contorno (vide apêndice B)

$$
\begin{aligned}
&\Box D(x) = 0, \\
&D(x) = 0 \text{ para } x^2 < 0, \\
&\partial_0 D(x)|_0 = -\delta(\mathbf{x}).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Além disso, segue de (4.14) que a função singular D é ímpar e que $\partial_k D(x)|_0 = 0$.

Em particular, quando σ for uma superfície plana a tempo constante, i.e., σ é determinada por uma expressão da forma $z_0 = a \in \mathbb{R}$, o elemento de superfície torna-se $d\sigma = (d\mathbf{x}, 0, 0, 0)$ e de (4.13) se obtém a seguinte representação integral para B:

$$B(y) = \int d^3\mathbf{z} \left[\partial_0^{(z)} D(y-z)B(z) - D(y-z)\partial_0 B(z) \right]. \tag{4.16}$$

Por intermédio das relações de comutação a tempos iguais (4.11), de (4.12) e da representação integral acima, os comutadores a tempos distintos podem ser calculados. De fato, tomando $z_0 = x_0$:

$$\begin{aligned}[B(x), B(y)] &= \int d^3\mathbf{z} \left\{ \partial_0^{(z)} D(y-z)[B(x), B(z)]_0 - D(y-z)[B(x), \dot{B}(z)]_0 \right\} \\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}[A_\mu(x), B(y)] &= \int d^3\mathbf{z} \left\{ \partial_0^{(z)} D(y-z)[A_\mu(x), B(z)]_0 - D(y-z)[A_\mu(x), \dot{B}(z)]_0 \right\} \\ &= \int d^3\mathbf{z} \left\{ -i\delta_\mu^0 \partial_0 D(y-z)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + i\delta_\mu^k D(y-z)\partial_k \delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \right\} \\ &= -i\delta_\mu^0 \partial_0 D(y-x) - i\delta_\mu^k \partial_k D(y-x) = -i\partial_\mu D(y-x) \\ &= -i\partial_\mu D(x-y),\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}[\psi(x), B(y)] &= \int d^3\mathbf{z} \left\{ \partial_0^{(z)} D(y-z)[\psi(x), B(z)]_0 - D(y-z)[\psi(x), \dot{B}(z)]_0 \right\} \\ &= -e \int d^3\mathbf{z} D(y-z)\psi(x)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) = -e\psi(x)D(y-x) \\ &= e\psi(x)D(x-y).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Além disso, dos comutadores acima e de (4.3) seguem

$$\begin{aligned}[F_{\mu\nu}(x), B(y)] &= \partial_\mu^{(x)}[A_\nu(x), B(y)] - \partial_\nu^{(x)}[A_\mu(x), B(y)] \\ &= -i\partial_\mu\partial_\nu D(x-y) + i\partial_\nu\partial_\mu D(x-y) = 0,\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}[j^\nu(x), B(y)] &= [\partial_\mu F^{\mu\nu}(x), B(y)] - [\partial^\nu B(x), B(y)] \\ &= \partial_\mu^{(x)}[F^{\mu\nu}(x), B(y)] - \partial^{\nu(x)}[B(x), B(y)] = 0.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Os resultados acima sugerem uma similaridade entre o comutador de B com os campos A_μ, ψ e suas respectivas transformações de *gauge*. Mais precisamente, consideremos as versões infinitesimais das transformações de *gauge* (2.9) e (2.216)

$$
\begin{aligned}
A'_\mu(x) - A_\mu(x) &= \partial_\mu \varepsilon(x) \coloneqq \mathcal{D}(A_\mu)\varepsilon(x), \\
\psi'(x) - \psi(x) &= ie\psi(x)\varepsilon(x) \coloneqq \mathcal{D}(\psi)\varepsilon(x),
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

onde $\mathcal{D}(A_\mu) \coloneqq \partial_\mu$ e $\mathcal{D}(\psi) \coloneqq ie\psi(x)$. Então 4.18 e 4.19 podem ser escritos nas formas

$$
\begin{aligned}
[A_\mu(x), B(y)] &= -i\mathcal{D}(A_\mu)^{(x)} D(x-y), \\
[\psi(x), B(y)] &= -i\mathcal{D}(\psi)^{(x)} D(x-y).
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Esse resultado se generaliza para os outros termos da densidade lagrangiana (4.2). De fato, consideremos o conjunto $\mathcal{C} = \{A_\mu, \psi, \bar{\psi}, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, B, B\partial_\mu A^\mu, B^2, \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \bar{\psi}\psi, j_\mu A^\mu\}$ e uma quantidade local $\Phi(x) \in \mathcal{C}$. Através do cálculo direto, é possível mostrar que sob as transformações (4.22), $\Phi(x)$ se transforma na forma

$$
\Phi'(x) - \Phi(x) = \mathcal{D}(\Phi)\varepsilon(x), \tag{4.24}
$$

onde $\mathcal{D}$ é um operador diferencial definido por $\mathcal{D}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 0$, $\mathcal{D}(A_\mu) = \partial_\mu$, $\mathcal{D}(\psi) = ie\psi$, $\mathcal{D}(\bar{\psi}) = -ie\bar{\psi}$, $\mathcal{D}(B) = 0$, $\mathcal{D}(B\partial_\mu A^\mu) = B\Box$, $\mathcal{D}(B^2) = 0$, $\mathcal{D}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu$, $\mathcal{D}(\bar{\psi}\psi) = 0, \mathcal{D}(j_\mu A^\mu) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu$. Além disso,

$$
[\Phi(x), B(y)] = -i\mathcal{D}(\Phi)^{(x)} D(x-y). \tag{4.25}
$$

Da representação integral (4.16) define-se as partes de frequência positiva e negativa de B

$$
B^\pm(x) = \int d^3\mathbf{z} \left[\partial_0^{(z)} D^\pm(x-z)B(z) - D^\pm(x-z)\partial_0 B(z)\right], \tag{4.26}
$$

onde

$$
D^\pm(x) = \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\Theta(\pm p_0)\delta(p^2)e^{-ipx}, \tag{4.27}
$$

de modo que D e $D^\pm$ se relacionam da seguinte forma

$$
D^+(x) + D^-(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\underbrace{[\Theta(p_0) - \Theta(-p_0)]}_{=\epsilon(p_0)}\delta(p^2)e^{-ipx} = iD(x). \tag{4.28}
$$

No formalismo do campo B, a condição subsidiária que define o subespaço físico da teoria V_{phys}, análoga à condição (2.109), é

$$
B^+(x)|f\rangle = 0, \tag{4.29}
$$

ou seja, $|f\rangle \in V_{phys}$ se e somente se $B^+(x)|f\rangle = 0$.

Vejamos agora algumas consequências desta condição subsidiária . Em primeiro lugar, (4.29) garante que V_{phys} é invariante sob a evolução temporal do sistema, i.e., $HV_{phys} = \{H|f\rangle : |f\rangle \in V_{phys}\} \subset V_{phys}$, pois como consequência da equação de Heisenberg

$$\partial_0 B^+(x) = [iH, B^+(x)], \tag{4.30}$$

segue para $|f\rangle \in V_{phys}$:

$$\begin{aligned} -iB^+(x)H|f\rangle &= i(HB^+(x) - B^+(x)H)|f\rangle = [iH, B^+(x)]|f\rangle = (\partial_0 B^+(x))|f\rangle \\ &= \partial_0(B^+(x)|f\rangle) - B^+(x)(\partial_0|f\rangle) = 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Logo, $H|f\rangle \in V_{phys}$.

A condição (4.29) também garante que as equações de Maxwell sejam válidas como valores esperadores em V_{phys}. Dados $|f\rangle, |g\rangle \in V_{phys}$, das equações de movimento (4.3), (4.4) temos

$$\begin{aligned} \langle f|\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - j^\nu(x)|g\rangle &= \langle f|\partial^\nu B(x)|g\rangle = \langle f|\partial^\nu B^+(x) + \partial^\nu B^-(x)|g\rangle \\ &= \langle f|\partial^\nu B^+(x)|g\rangle + \langle f|\partial^\nu B^+(x)|g\rangle = 0, \\ \langle f|\partial_\mu A^\mu(x)|g\rangle &= -\alpha\langle f|B(x)|g\rangle = -\alpha\langle f|B^+(x) + B^-(x)|g\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde utilizamos a propriedade $(B^-)^\dagger = B^+$ e que

$$\begin{aligned} \langle f|\partial_\nu B^\pm(x)|g\rangle &= \int d^3\mathbf{z} \left[\partial_\nu^{(x)}\partial_0^{(z)} D^\pm(x-z) \underbrace{\langle f|B(z)|g\rangle}_{=0} - \partial_\nu^{(x)} D^\pm(x-z) \underbrace{\langle f|\partial_0 B(z)|g\rangle}_{=0} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, as equações de Maxwell, no *gauge* de Lorenz, são válidas como valores esperados em V_{phys}.

Além disso, a condição subsidiária também garante a positividade da norma dos estados em V_{phys}. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [29].

Embora tenhamos introduzido um termo de fixação de *gauge* em (4.1), a densidade lagrangiana (4.2) possui ainda a seguinte simetria residual

$$\begin{aligned} &A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \\ &\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), \\ &B(x) \to B'(x) = B(x), \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde Λ satisfaz a equação

$$\Box\Lambda(x) = 0. \tag{4.34}$$

Comparando (4.2) com (2.213), podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}_B} = \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + B\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2.$$

Conforme demonstrado na seção 2.2.4, $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ é invariante de *gauge*. Assim, frente a transformação (4.33)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\mathrm{QED}_B} &= \mathcal{L}'_{\mathrm{QED}} + B'\partial_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}\alpha B'^2 = \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + B\partial_\mu\left[A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)\right] + \frac{1}{2}\alpha B^2 \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + B\partial_\mu A^\mu(x) + B\underbrace{\Box\Lambda(x)}_{=0} + \frac{1}{2}\alpha B^2 = \mathcal{L}_{\mathrm{QED}_B}.
\end{aligned}$$

Por intermédio das equações (4.6) e (4.34), verifica-se que a quadricorrente

$$J^\mu(x) = \partial^\mu\Lambda(x)B(x) - \Lambda(x)\partial^\mu B(x),$$

satisfaz a equação da continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = \Box\Lambda(x)B(x) + \partial^\mu\Lambda(x)\partial_\mu B(x) - \partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu B(x) - \Lambda(x)\Box B(x) = 0.$$

Logo, conforme visto na seção (1.4), a seguinte carga é conservada em decorrência do teorema de Noether:

$$Q_\Lambda = \int d^3\mathbf{x} J_0 = \int d^3\mathbf{x}\left[\partial_0\Lambda(x)B(x) - \Lambda(x)\partial_0 B(x)\right]. \tag{4.35}$$

Esta carga de Noether está intimamente relacionada com as transformações de *gauge* infinitesimais (4.22). Considerando $\Phi \in \mathcal{C}$, (4.24) e (4.25), segue da análise por casos que

$$\begin{aligned}
[iQ_\Lambda, \Phi(x)] &= i\int d^3\mathbf{y}\left\{\partial_0\Lambda(y)[B(y),\Phi(x)]_0 - \Lambda(y)[\partial_0 B(y),\Phi(x)]_0\right\} \\
&= -\int d^3\mathbf{y}\left\{\partial_0\Lambda(y)\mathcal{D}(\Phi)^{(x)}D(x-y) - \Lambda(y)\partial_0^{(y)}\mathcal{D}(\Phi)^{(x)}D(x-y)\right\} \\
&= -\int d^3\mathbf{y}\left\{\partial_0\Lambda(y)\mathcal{D}(\Phi)^{(x)}D(x-y) - \Lambda(y)\mathcal{D}(\Phi)^{(x)}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right\} \\
&= \mathcal{D}(\Phi)\Lambda(x).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Portanto, Q_Λ é o gerador da simetria de *gauge* infinitesimal.

4.2 CASO NÃO-ABELIANO

Como já mencionado, a quantização de teorias com simetria de *gauge* leva necessariamente à introdução de termos de fixação de *gauge*. No caso da teoria de Yang-Mills, além destes termos, torna-se necessário a introdução de fantasmas de Faddeev-Popov para a obtenção de uma matriz S unitária [29].

Veremos nesta sessão como estes termos surgem dentro do contexto da quantização canônica.

4.2.1 O PRINCÍPIO DE *GAUGE*

Na seção 2.2.4, a interação entre matéria e radiação foi obtida através da substituição mínima (2.207). Este procedimento resultou em uma densidade lagrangiana, equação (2.215), que não possuía simetria de *gauge*. Vimos que esta simetria poderia ser estabelecida impondo as transformações (2.216) para os campos de matéria.

Nesta seção, mostraremos que este procedimento pode ser invertido, i.e., que a interação entre matéria e radiação pode ser obtida pela imposição da simetria de *gauge* local. De fato, será mostrado que este princípio leva naturalmente à existência de um campo que interage com os campos de matéria e ao termo de interação (2.211). Este campo será identificado posteriormente com o quadripotencial eletromagnético.

Por conta disso, o princípio de *gauge* é de extrema importância em física, pois é através dele que a interação entre as partículas elementares é determinada.

Consideremos a densidade lagrangiana do campo de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \tag{4.37}$$

Frente a ação do grupo $U(1)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta}\bar{\psi}(x), \end{aligned} \tag{4.38}$$

com $\theta \in \mathbb{R}$, a densidade lagrangiana (4.37) é claramente invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \psi'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) = e^{-i\theta}\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\theta}\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_D. \end{aligned}$$

Vejamos agora o que acontece se permitirmos que o argumento da exponencial em (4.38) dependa das coordenadas espaço-temporais. Mais precisamente, consideremos uma função $\Lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, e a ação do grupo $U(1)$ da forma

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\bar{\psi}(x), \end{aligned} \tag{4.39}$$

em que q é um parâmetro real que será identificado posteriormente. Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iq\Lambda(x)}\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\Lambda(x) = \mathcal{L}_D - q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\Lambda(x),\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{L}_D$ não é invariante pelas transformações (4.39).

Analisando $\mathcal{L}_D$ e a forma de (4.39), vemos que o problema está na transformação do termo $\partial_\mu\psi(x)$:

$$\partial_\mu\psi'(x) = \partial_\mu\left[e^{iq\Lambda(x)}\psi(x)\right] = e^{iq\Lambda(x)}\left[\partial_\mu\psi(x) + iq\psi(x)\partial_\mu\Lambda(x)\right],$$

pois, se o segundo termo entre colchetes acima não existisse, $\mathcal{L}_D$ seria invariante. Assim, uma maneira de impormos a invariância frente a (4.39), é substituirmos a derivada $\partial_\mu\psi(x)$ por outro objeto matemático $D_\mu\psi(x)$ que se transforma covariantemente

$$(D_\mu\psi)' = e^{iq\Lambda(x)}D_\mu\psi. \tag{4.40}$$

Para isso, introduziremos um campo de *gauge* A_μ definindo

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \tag{4.41}$$

Busquemos agora a transformação do campo A_μ para que (4.40) seja satisfeita:

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi)' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)e^{iq\Lambda}\psi = iqe^{iq\Lambda}(\partial_\mu\Lambda)\psi + e^{iq\Lambda}\partial_\mu\psi + iqA'_\mu e^{iq\Lambda}\psi \\ &= iqe^{iq\Lambda}\left[\partial_\mu\Lambda + A'_\mu\right]\psi + e^{iq\Lambda}\partial_\mu\psi \\ &\overset{(4.40)}{=} e^{iq\Lambda}D_\mu\psi = e^{iq\Lambda}\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\psi = e^{iq\Lambda}\partial_\mu\psi + iqe^{iq\Lambda}A_\mu \\ \Longrightarrow \quad & A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Portanto, a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x), \tag{4.43}$$

é invariante pelas transformações de *gauge* locais

$$\begin{aligned}&\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)}\psi(x), \\ &\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\bar{\psi}(x), \\ &A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Notemos agora que $-q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x)$ é análogo ao termo de interação (2.211) e que (4.42) é análoga à transformação de *gauge* (2.9). Desta forma, identificaremos A_μ como o quadripotencial eletromagnético e q como a constante de acoplamento entre os campos de matéria ψ e de radiação A_μ.

Para obtermos a densidade lagrangiana da QED, introduziremos em (4.43) o termo $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$ que descreve o campo de radiação e é invariante sob às transformações (4.44). Logo, o princípio de invariância de *gauge* local leva a

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x).$$

Na próxima seção, a invariância de *gauge* local $U(1)$ obtida aqui será generalizada para o grupo $SU(2)$.

4.2.2 SIMETRIA DE *GAUGE* LOCAL$SU(2)$

A proximidade entre as massas do nêutron e do próton, a irrelevância da carga elétrica em relação à interação forte e o fato de ambas as partículas possuírem *spin* $\frac{1}{2}$ levaram Heisenberg [21] a propor que o nêutron e o próton seriam estados de uma mesma partícula, o nucleon.

Em completa analogia com o formalismo que descreve partículas de *spin* $\frac{1}{2}$, o nucleon é representado pelo vetor

$$N = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \qquad \text{com} \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{4.45}$$

Assim, o próton e o nêutron são dados, respectivamente, por

$$p = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Tendo em analogia o operador de *spin* $\mathbf{S}$, define-se as componentes do operador de *isospin* $\mathbf{I}$

$$I_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Deste modo, o nucleon possui, por definição, *isospin* $\frac{1}{2}$ e os autoestados de I_3 com autovalores $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ correspondem, respectivamente, ao próton e ao nêutron

$$p = |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle, \qquad n = |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{4.48}$$

Da mesma forma que a invariância frente a rotações espaciais leva à conservação do momento angular, Heisenberg propôs, a fim de garantir a invariância do *isospin*, que uma teoria que descrevesse a interação forte deveria ser invariante sob rotações no espaço de *isospin*, i.e., frente à ação do grupo[12] $SU(2)$ [31].

A densidade lagrangiana que descreve um sistema contendo um próton e um nêutron livres, assumindo que os mesmos possuem massas iguais, é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{p}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)p + \bar{n}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)n. \tag{4.49}$$

Introduzindo o spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^8, \tag{4.50}$$

podemos escrever (4.49) na forma

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\Gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \tag{4.51}$$

onde Γ^μ é uma representação em dimensão 8 das matrizes de Dirac

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & O_{4\times 4} \\ O_{4\times 4} & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

e $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\Gamma^0$.

Por definição, $SU(2)$ é o grupo formado pelas matrizes unitárias de dimensão 2, cujo determinante é 1. Pode-se mostrar que

$$SU(2) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}. \tag{4.53}$$

Mostremos que (4.51) é invariante pela transformação

$$\psi(x) \to \psi'(x) = G\psi(x), \tag{4.54}$$

com $G \in SU(2)$.

Como $\psi \in \mathbb{C}^8$, utilizaremos a seguinte representação[3] de $SU(2)$ em $\mathbb{C}^8$

$$SU(2) \ni G = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a\mathbb{I}_{4\times 4} & -b^*\mathbb{I}_{4\times 4} \\ b\mathbb{I}_{4\times 4} & a^*\mathbb{I}_{4\times 4} \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{C}^8). \tag{4.55}$$

A partir de agora, quando nos referirmos a um elemento $G \in SU(2)$ consideraremos a representação deste elemento em $\mathbb{C}^8$ definida acima.

[1] O apêndice A fornece as definições e resultados necessários para a leitura desta seção.

[2] Este fato se baseia no homomorfismo de grupos existente [16] entre $SO(3)$ e $SU(2)$ que são, respectivamente, os grupos de rotação em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{C}^2$.

[3] Claramente este mapeamento preserva a estrutura de grupo e uma matriz da forma $\begin{pmatrix} a\mathbb{I}_{4\times 4} & -b^*\mathbb{I}_{4\times 4} \\ b\mathbb{I}_{4\times 4} & a^*\mathbb{I}_{4\times 4} \end{pmatrix}$ é unitária com determinante 1.

Notemos inicialmente que Γ^μ comuta com os elementos de $SU(2)$. Dado $G \in SU(2)$, temos

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu G &= \begin{pmatrix} \gamma^\mu & O_{4\times 4} \\ O_{4\times 4} & \gamma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathbb{I}_{4\times 4} & -b^*\mathbb{I}_{4\times 4} \\ b\mathbb{I}_{4\times 4} & a^*\mathbb{I}_{4\times 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma^\mu & -b^*\gamma^\mu \\ b\gamma^\mu & a^*\gamma^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\mathbb{I}_{4\times 4} & -b^*\mathbb{I}_{4\times 4} \\ b\mathbb{I}_{4\times 4} & a^*\mathbb{I}_{4\times 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^\mu & O_{4\times 4} \\ O_{4\times 4} & \gamma^\mu \end{pmatrix} = G\Gamma^\mu. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Assim, de (4.54) a transformação de $\bar{\psi}$ é dada por

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = (G\psi(x))^\dagger \Gamma^0 = \psi^\dagger(x) G^\dagger \Gamma^0 = \psi^\dagger(x)\Gamma^0 G^\dagger = \bar{\psi}(x) G^\dagger, \tag{4.57}$$

e segue a invariância de (4.51) frente a (4.54) e (4.57):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0' &= \bar{\psi}'(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \bar{\psi}G^\dagger(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m)G\psi \\ &= \bar{\psi}G^\dagger G(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}\mathbb{I}_{8\times 8}(i\Gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Tendo em vista a invariância local de *gauge* do eletromagnetismo, Yang e Mills [42, 43] estenderam a invariância $SU(2)$ global, descrita acima, a uma invariância $SU(2)$ local. Vejamos como esta construção é feita.

Consideremos uma função do espaço-tempo $\mathcal{M}$ em $SU(2)$

$$\mathcal{M} \ni x \longmapsto G(x) = \begin{pmatrix} a(x) & -b^*(x) \\ b(x) & a^*(x) \end{pmatrix} \in SU(2), \tag{4.59}$$

e, ficando subentendida a correspondência (4.55), as respectivas transformações de ψ e $\bar{\psi}$

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = G(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)G^\dagger(x). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Por sua vez, o gradiente transforma-se na forma

$$\partial_\mu\psi(x) \to \partial_\mu\psi'(x) = G(x)(\partial_\mu\psi(x)) + (\partial_\mu G(x))\psi(x). \tag{4.61}$$

Analogamente ao caso $U(1)$ da seção anterior, o termo $(\partial_\mu G)\psi$ impede a invariância de (4.51) frente a (4.60). A fim de eliminá-lo, introduziremos a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu, \tag{4.62}$$

onde $g \in \mathbb{R}$ e B_μ pertence à álgebra de Lie do grupo $SU(2)$, que, de acordo com o resultado

(A.7), é formada pelos vetores

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(2) &:= \{X \in M(2,\mathbb{C}) : X^\dagger = -X \text{ e } \mathrm{Tr}(X) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Pelo fato de $\mathfrak{su}(2)$ ser, em particular, um espaço vetorial, pode-se introduzir uma base. Notemos que dado $X \in \mathfrak{su}(2)$,

$$\begin{aligned}X &= \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= a(i\sigma_3) + b(i\sigma_2) + c(i\sigma_1) = -2a\tau_3 - 2b\tau_2 - 2c\tau_1,\end{aligned}$$

onde $\tau_a := -\frac{i}{2}\sigma_a$. Portanto, $\mathcal{B} := \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ gera $\mathfrak{su}(2)$ e, claramente, é um conjunto linearmente independente. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathfrak{su}(2)$. Além disso, da identidade $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{I}_{2\times 2} + i\epsilon_{abc}\sigma_c$ segue a "álgebra dos geradores" de $\mathfrak{su}(2)$

$$\begin{aligned}[\tau_a, \tau_b] &= \tau_a\tau_b - \tau_b\tau_a = -\frac{1}{4}\sigma_a\sigma_b + \frac{1}{4}\sigma_b\sigma_a \\ &= -\frac{1}{4}\delta_{ab}\mathbb{I}_{2\times 2} + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\tau_c + \frac{1}{4}\delta_{ba}\mathbb{I}_{2\times 2} - \frac{1}{2}\epsilon_{bac}\tau_c \\ &= \epsilon_{abc}\tau_c.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Da mesma forma que empregamos a representação (4.55), utilizaremos para $\mathfrak{su}(2)$ a seguinte representação

$$\mathfrak{su}(2) \ni X = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ia\mathbb{I}_{4\times 4} & (b+ic)\mathbb{I}_{4\times 4} \\ (-b+ic)\mathbb{I}_{4\times 4} & -ia\mathbb{I}_{4\times 4} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^8). \tag{4.65}$$

No que segue, ficará implícito o uso desta representação quando nos referirmos a um elemento de $\mathfrak{su}(2)$. Em particular, as seguintes identidades são verdadeiras

$$\begin{aligned}\sigma_a\sigma_b &= \delta_{ab}\mathbb{I}_{8\times 8} + i\epsilon_{abc}\sigma_c, \\ \tau_a\tau_b &= -\frac{1}{4}\delta_{ab}\mathbb{I}_{8\times 8} + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\tau_c, \\ \mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b) &= -\frac{1}{4}\delta_{ab}\mathrm{Tr}(\mathbb{I}_{8\times 8}) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\underbrace{\mathrm{Tr}(\tau_c)}_{=0} = -2\delta_{ab}.\end{aligned} \tag{4.66}$$

Busquemos agora a transformação do campo B_μ. Por definição, a derivada covariante transforma-se sob (4.60) na forma

$$D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) = G(x)(D_\mu\psi(x)). \tag{4.67}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &= (\partial_\mu + igB'_\mu)G\psi = G(\partial_\mu\psi) + \partial_\mu G\psi + igB'_\mu G\psi \\ &\overset{(4.67)}{=} G(D_\mu\psi) = G(\partial_\mu + igB_\mu)\psi = G\partial_\mu\psi + igGB_\mu\psi \\ \Longrightarrow \quad & igB'_\mu G\psi = igGB_\mu\psi - \partial_\mu G\psi. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Multiplicando (4.68) por G^{-1} pela direita, segue da arbitrariedade de ψ

$$B'_\mu = GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1}. \tag{4.69}$$

Portanto, a densidade lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \mathcal{L}_0 - g\bar{\psi}\Gamma^\mu B_\mu\psi, \end{aligned} \tag{4.70}$$

é invariante de *gauge* local e análoga à densidade (4.43).

Para obtermos a parte cinética do campo de *gauge* B_μ, buscaremos um análogo do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ expresso por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\tau_a. \tag{4.71}$$

Tendo o eletromagnetismo como modelo, consideraremos

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} = -\frac{1}{4}\delta_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b} = \frac{1}{8}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}\text{Tr}(\tau_a\tau_b) = \frac{1}{8}\text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}), \tag{4.72}$$

onde usamos $\text{Tr}(\tau_a\tau_b) = -2\delta_{ab}$. Para que (4.72) seja invariante sob (4.69), é suficiente que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se transforme na forma

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = G\mathcal{F}_{\mu\nu}G^{-1}, \tag{4.73}$$

pois, da invariância cíclica do traço segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{gauge}} &= \frac{1}{8}\text{Tr}(\mathcal{F}'_{\mu\nu}\mathcal{F}'^{\mu\nu}) = \frac{1}{8}\text{Tr}(G\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}G^{-1}) = \frac{1}{8}\text{Tr}(G^{-1}G\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{8}\text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{\text{gauge}}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Como inspiração, notemos que no caso abeliano o tensor do campo eletromagnético pode ser escrito em termos dos colchetes de Lie e da derivada covariante $\partial_\mu + iqA_\mu$,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{iq}[\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq\underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=0} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Portanto, em analogia ao resultado acima, definiremos

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu], \tag{4.76}$$

que de fato satisfaz (4.73):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu + ig[B'_\mu, B'_\nu] \\
&= \partial_\mu \left[G B_\nu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\nu G)G^{-1} \right] - \partial_\nu \left[G B_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \right] \\
&+ ig \left[G B_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1}, G B_\nu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\nu G)G^{-1} \right] \\
&= (\partial_\mu G) B_\nu G^{-1} + G(\partial_\mu B_\nu)G^{-1} + G B_\nu(\partial_\mu G^{-1}) + \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\mu \partial_\nu G)G^{-1}} + \frac{i}{g}(\partial_\nu G)(\partial_\mu G^{-1}) \\
&- (\partial_\nu G) B_\mu G^{-1} - G(\partial_\nu B_\mu)G^{-1} - G B_\mu(\partial_\nu G^{-1}) - \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\nu \partial_\mu G)G^{-1}} - \frac{i}{g}(\partial_\mu G)(\partial_\nu G^{-1}) \\
&+ \left[ig G B_\mu G^{-1}, G B_\nu G^{-1} \right] + \left[ig G B_\mu G^{-1}, \frac{i}{g}(\partial_\nu G)G^{-1} \right] - \left[(\partial_\mu G)G^{-1}, G B_\nu G^{-1} \right] \\
&- \left[(\partial_\mu G)G^{-1}, \frac{i}{g}(\partial_\nu G)G^{-1} \right] \\
&= \cancel{(\partial_\mu G) B_\nu G^{-1}} + G(\partial_\mu B_\nu)G^{-1} + \cancel{G B_\nu(\partial_\mu G^{-1})} + \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\nu G)(\partial_\mu G^{-1})} \\
&- \cancel{(\partial_\nu G) B_\mu G^{-1}} - G(\partial_\nu B_\mu)G^{-1} - \cancel{G B_\mu(\partial_\nu G^{-1})} - \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\mu G)(\partial_\nu G^{-1})} \\
&+ ig G B_\mu B_\nu G^{-1} - ig G B_\nu B_\mu G^{-1} - \cancel{G B_\mu G^{-1} \underbrace{(\partial_\nu G)G^{-1}}_{=-G(\partial_\nu G^{-1})}} + \cancel{(\partial_\nu G) B_\mu G^{-1}} \\
&- \cancel{(\partial_\mu G) B_\nu G^{-1}} + \cancel{G B_\nu G^{-1} \underbrace{(\partial_\mu G)G^{-1}}_{=-G(\partial_\mu G^{-1})}} - \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} \underbrace{(\partial_\nu G)G^{-1}}_{=-G(\partial_\nu G^{-1})}} \\
&+ \cancel{\frac{i}{g}(\partial_\nu G)G^{-1} \underbrace{(\partial_\mu G)G^{-1}}_{=-G(\partial_\mu G^{-1})}} \\
&= G \left[\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig\left(B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu \right) \right] G^{-1} = G\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu] \right) G^{-1} \\
&= G \mathcal{F}_{\mu\nu} G^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Assim, a teoria de Yang-Mills com simetria de *gauge* local $SU(2)$ é dada por

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m)\psi + \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}). \tag{4.78}$$

4.2.3 INVARIÂNCIA DE *GAUGE* LOCAL NA TEORIA CLÁSSICA DE YANG-MILLS

Sejam G um grupo linear[4] e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Os colchetes de Lie são a forma bilinear $[\,,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ definida por $[X,Y]=XY-YX$. Estes satisfazem

$$\begin{aligned}&[X,Y]=-[Y,X],\\&[[X,Y],Z]+[[Y,Z]X]+[[Z,X],Y]=0 \qquad \text{(identidade de Jacobi)}.\end{aligned}\tag{4.79}$$

Como $\mathfrak{g}$ é, em particular, um espaço vetorial real de dimensão n, podemos escolher uma base $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Desta forma, os colchetes de Lie ficam caracterizados em termos de constantes de estrutura reais $f^a_{\ bc}$, $a,b,c\in\{1,\ldots,n\}$, definidas por

$$[X_a,X_b]=f^c_{\ ab}X_c. \tag{4.80}$$

Como consequência da introdução de uma base, as identidades (4.79) originam as seguintes relações entre constantes de estrutura:

$$\begin{aligned}&f^c_{\ ab}=-f^c_{\ ba},\\&f^d_{\ ab}f^e_{\ dc}+f^d_{\ bc}f^e_{\ da}+f^d_{\ ca}f^e_{\ db}=0 \qquad \text{(identidade de Jacobi)}.\end{aligned}\tag{4.81}$$

Consideremos uma teoria envolvendo campos de matéria $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ invariante pela transformação destes campos de acordo com uma representação ρ do grupo linear G, i.e.[5],

$$\varphi^\alpha(x)\to\varphi'^\alpha(x)=\rho(u)^\alpha_\beta\varphi^\beta(x), \tag{4.82}$$

onde $u\in G$. Uma transformação de *gauge* local é definida como uma função do espaço-tempo $\mathcal{M}$ em G

$$\mathcal{M}\ni x\mapsto u(x)\in G,$$

que atua em $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ na forma

$$\varphi^\alpha(x)\to\varphi'^\alpha(x)=\rho(u^{-1}(x))^\alpha_\beta\varphi^\beta(x). \tag{4.83}$$

A invariância de *gauge* local será obtida pela introdução de um campo de *gauge* não-abeliano A_μ que toma valores em $\mathfrak{g}$. Este campo é conhecido como campo de Yang-Mills.

---

[4] O apêndice A forne as definições e resultados necessários para a leitura desta seção.

[5] A representação ρ do grupo G associará a cada $u\in G$ um operador linear inversível $\rho(u)$ que atuará nos vetores de um espaço vetorial complexo V de dimensão N. A introdução de uma base $\mathcal{B}=\{b_1,\ldots,b_N\}$ para V permite definirmos o campo $\varphi:=\varphi^\alpha b_\alpha$. Assim, a transformação do campo é na verdade dada por $\varphi'=\rho(u)\varphi$. Entretanto, como fato bem conhecido, a introdução da base $\mathcal{B}$ estabelece uma correspondência entre o conjunto dos operadores lineares de V e o conjunto das matrizes de dimensão N. Desta forma, o que aparece em (4.82) é a representação matricial de $\rho(u)$.

Para isso, substituímos o operador diferencial ∂_μ pela derivada covariante ∇_μ definida por

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \bar{\rho}(gA_\mu) = \partial_\mu + gA^a_\mu \bar{\rho}(X_a), \tag{4.84}$$

onde $\bar{\rho}$ é a representação de $\mathfrak{g}$ induzida pela representação ρ de G definida em (A.15) e g é a constante de acoplamento entre os campos de matéria e o campo de *gauge*.

No que segue, assumiremos que ρ é um representação unitária[6]. Desta forma, é possível mostrar que a representação matricial dos operadores $\bar{\rho}(X_a)$ é hermitiana [29]. Definindo $\tau_a \coloneqq i\bar{\rho}(X_a)$, temos

$$[\tau_a, \tau_b] = -[\bar{\rho}(X_a), \bar{\rho}(X_b)] = -f^c{}_{ab}\bar{\rho}(X_c) = if^c{}_{ab}\tau_c, \tag{4.85}$$

e a derivada covariante (4.84) torna-se

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu \tau_a. \tag{4.86}$$

A transformação do campo de Yang-Mills A_μ é determinada pela covariância de ∇_μ sob (4.83) definida por

$$\nabla'_\mu \varphi'^\alpha(x) = \rho(u^{-1}(x))^\alpha_\beta \nabla_\mu \varphi^\beta(x). \tag{4.87}$$

Assim, omitindo os índices das componentes e a dependência espaço-temporal

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu \varphi' &= \left[\partial_\mu + \bar{\rho}(gA'_\mu)\right] \rho(u^{-1})\varphi \\
&= \left[\partial_\mu \rho(u^{-1}) + \bar{\rho}(gA'_\mu)\rho(u^{-1})\right] \varphi + \rho(u^{-1})\partial_\mu \varphi \\
&\overset{(4.87)}{=} \rho(u^{-1})\nabla_\mu \varphi = \rho(u^{-1}) \left[\partial_\mu + \bar{\rho}(gA_\mu)\right] \varphi \\
&= \rho(u^{-1})\partial_\mu \varphi + \rho(u^{-1})\bar{\rho}(gA_\mu)\varphi.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Logo, da arbitrariedade de φ, devemos ter

$$\partial_\mu \rho(u^{-1}) + \bar{\rho}(gA'_\mu)\rho(u^{-1}) = \rho(u^{-1})\bar{\rho}(gA_\mu). \tag{4.89}$$

Multiplicando (4.89) por $\rho(u)$ pela direita, usando $\rho(u^{-1})\rho(u) = \rho(u^{-1}u) = \rho(e) = \mathbb{I}$, $\partial_\mu \rho(u^{-1}) = -\rho(u^{-1})\bar{\rho}(\partial_\mu u\, u^{-1})$ e o resultado (A.16), segue de (4.89)

$$\begin{gathered}
-\rho(u^{-1})\bar{\rho}(\partial_\mu u\, u^{-1})\rho(u) + \bar{\rho}(gA'_\mu)\rho(u^{-1})\rho(u) = \rho(u^{-1})\bar{\rho}(gA_\mu)\rho(u) \\
-\bar{\rho}(u^{-1}\partial_\mu u\, u^{-1}u) + \bar{\rho}(gA'_\mu) = \bar{\rho}(u^{-1}gA_\mu u) \\
\bar{\rho}(gA'_\mu - u^{-1}\partial_\mu u - u^{-1}gA_\mu u) = 0.
\end{gathered}$$

[6]Operadores unitários são importantes em mecânica quântica, pois garantem a invariância da norma dos estados e operadores.

Portanto, é suficiente considerarmos

$$\begin{aligned} gA'_\mu(x) &= u^{-1}(x)gA_\mu(x)u(x) + u^{-1}(x)\partial_\mu u(x) \\ &= Ad(u^{-1}(x))gA_\mu(x) + u^{-1}(x)\partial_\mu u(x), \end{aligned} \tag{4.90}$$

onde Ad é a representação adjunta do grupo G, definida no apêndice A.

Queremos agora encontrar uma densidade lagrangiana para o campo de Yang-Mills A_μ. Buscamos um campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ que faça o papel do tensor $F_{\mu\nu}$ do campo eletromagnético. Em analogia ao caso abeliano, esperamos que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ contenha um termo $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Impondo que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se transforme na forma

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu}(x) = Ad(u^{-1}(x))\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = u^{-1}(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)u(x), \tag{4.91}$$

segue da transformação do campo A_μ (4.90) que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu], \tag{4.92}$$

satisfaz (4.91):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + g[A'_\mu, A'_\nu] \\ &= \partial_\mu \left(u^{-1}A_\nu u + \frac{1}{g}u^{-1}\partial_\nu u \right) - \partial_\nu \left(u^{-1}A_\mu u + \frac{1}{g}u^{-1}\partial_\mu u \right) \\ &+ g\left[u^{-1}A_\mu u + \frac{1}{g}u^{-1}\partial_\mu u, u^{-1}A_\nu u + \frac{1}{g}u^{-1}\partial_\nu u \right] \\ &= \partial_\mu u^{-1}A_\nu u + u^{-1}\partial_\mu A_\nu u + u^{-1}A_\nu\partial_\mu u + \frac{1}{g}\left(\partial_\mu u^{-1}\partial_\nu u + u^{-1}\partial_\mu\partial_\nu u\right) \\ &- \partial_\nu u^{-1}A_\mu u - u^{-1}\partial_\nu A_\mu u - u^{-1}A_\mu\partial_\nu u - \frac{1}{g}\left(\partial_\nu u^{-1}\partial_\mu u + u^{-1}\partial_\nu\partial_\mu u\right) \\ &+ g\left(u^{-1}A_\mu A_\nu u - u^{-1}A_\nu A_\mu u\right) + u^{-1}A_\mu\partial_\nu u - u^{-1}\underbrace{\partial_\nu u u^{-1}}_{=-u\partial_\nu u^{-1}} A_\mu u \\ &+ \underbrace{u^{-1}\partial_\mu u}_{=-\partial_\mu u^{-1}u} u^{-1}A_\nu u - u^{-1}A_\nu\partial_\mu u + \frac{1}{g}(u^{-1}\underbrace{\partial_\mu u u^{-1}}_{=-u\partial_\mu u^{-1}}\partial_\nu u - u^{-1}\underbrace{\partial_\nu u u^{-1}}_{=-u\partial_\nu u^{-1}}\partial_\mu u) \\ &= u^{-1}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]\right)u = u^{-1}\mathcal{F}_{\mu\nu}u. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Fazendo $u(x) = e^{t\Lambda} = e^{t\Lambda^a X_a}$ e derivando em $t = 0$, as versões infinitesimais das transformações de *gauge* locais são obtidas:

$$\begin{aligned} \delta\varphi^\alpha(x) &= \frac{d}{dt}\left\{\rho\left(e^{-t\Lambda^a X_a}\right)^\alpha_\beta \varphi^\beta(x)\right\}\Bigg|_{t=0} = -\Lambda^a\bar{\rho}(X_a)^\alpha_\beta\varphi^\beta(x) = -\left[\bar{\rho}(\Lambda)\varphi(x)\right]^\alpha \\ &= i\Lambda^a(\tau_a)^\alpha_\beta\varphi^\beta(x), \end{aligned} \tag{4.94}$$

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu(x) &= \frac{d}{dt}\left\{ e^{-t\Lambda^a X_a} A_\mu(x) e^{t\Lambda^a X_a} + \frac{1}{g} \underbrace{e^{-t\Lambda^a X_a}\partial_\mu e^{t\Lambda^a X_a}}_{=t\partial_\mu \Lambda^a X_a} \right\}\Bigg|_{t=0} \\
&= -\Lambda^a X_a A_\mu + A_\mu \Lambda^a X_a + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda^a X_a = [A_\mu, \Lambda] + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda^a X_a \\
&= A_\mu^b \Lambda^c [X_b, X_c] + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda^a X_a = \frac{1}{g}\left(\partial_\mu \Lambda^a + f^a_{\ bc} A^b_\mu \Lambda^c\right) X_a,
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &= \frac{d}{dt}\left\{ e^{-t\Lambda^a X_a} \mathcal{F}_{\mu\nu} e^{t\Lambda^a X_a} \right\}\Bigg|_{t=0} = -\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}\Lambda = [\mathcal{F}_{\mu\nu}, \Lambda] \\
&= F^b_{\mu\nu} \Lambda^c [X_b, X_c] = f^a_{\ bc} F^b_{\mu\nu} \Lambda^c X_a..
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

Portanto, por construção, a densidade lagrangiana do campo de Yang-Mills invariante por (4.96) é [29]

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4} K_{ab} F_{\mu\nu}^{\ \ a} F^{\mu\nu b}, \tag{4.97}
$$

onde K_{ab} é a forma de Killing definida por

$$
K_{ab} := -\mathrm{Tr}\left(ad(X_a) ad(X_b)\right) = -f^c_{\ ad} f^d_{\ bc} = K_{ba}. \tag{4.98}
$$

De fato, de (4.96) e das identidades (4.81)

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} &= -\frac{1}{4}\Big[K_{ab}\delta F_{\mu\nu}^{\ \ a} F^{\mu\nu b} + \underbrace{K_{ab} F_{\mu\nu}^{\ \ a} \delta F^{\mu\nu b}}_{=K_{ab}\delta F_{\mu\nu}^{\ \ a} F^{\mu\nu b}}\Big]` = -\frac{1}{2} K_{ab} \delta F_{\mu\nu}^{\ \ a} F^{\mu\nu b} \\
&= -\frac{1}{2} K_{ab} f^a_{\ de} \Lambda^e F^d_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} = \frac{1}{2} f^a_{\ de} f^f_{\ ag} f^g_{\ bf} \Lambda^e F^d_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} \\
&= \frac{1}{2} f^g_{\ bf}\left(-f^a_{\ eg} f^f_{\ ad} - f^a_{\ gd} f^f_{\ ae}\right) \Lambda^e F^d_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} \\
&= -\frac{1}{2} f^g_{\ bf} f^a_{\ eg} f^f_{\ ad} \Lambda^e F^d_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} - \frac{1}{2} \underbrace{f^a_{\ ge}}_{-f^a_{\ eg}} \underbrace{f^g_{\ fb}}_{-f^g_{\ bf}} \underbrace{f^f_{\ da}}_{-f^f_{\ ad}} \Lambda^e F^b_{\mu\nu} F^{\mu\nu d} = 0.
\end{aligned}
$$

No caso de G ser compacto[7], é possível introduzir uma base para $\mathfrak{g}$ na qual [29]

$$
K_{ab} = \delta_{ab}. \tag{4.99}
$$

Além disso, $f^a_{\ bc}$ torna-se totalmente antissimétrico por permutação de índices. Neste caso,

[7]Compacidade é um conceito topológico cuja definição geral foge ao escopo deste texto. Pelo fato dos grupos lineares serem subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$ e como este pode ser identificado como um subconjunto de $\mathbb{R}^{2n^2}$, segue do teorema de Heine-Borel [35] que um grupo linear é compacto se for fechado e limitado. Os grupos $O(n), U(n), SO(n)$ e $SU(n)$ são compactos.

as constantes de estrutura passam a ser denotadas por f^{abc}.

De agora em diante, faremos a suposição que G é compacto. Assim, (4.97) torna-se

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\ a}F^{\mu\nu a}. \tag{4.100}$$

4.2.4 FIXAÇÃO DE *GAUGE* E FANTASMAS DE FADDEEV-POPOV NA TEORIA DE YANG-MILLS

Consideremos o lagrangiano invariante por transformações locais de *gauge*

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu\varphi) = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu\varphi),$$

com $\mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu\varphi)$ sendo obtido a partir da densidade lagrangiana de matéria $\mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, invariante por transformação global de *gauge*, através da substituição $\partial_\mu \to \nabla_\mu$.

O formalismo do campo B para a teoria de Yang-Mills é desenvolvido a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{GF}}, \tag{4.101}$$

onde $\mathcal{L}_{\text{GF}}$ é a generalização do termo de fixação de *gauge* da teoria abeliana

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = B^a\partial_\mu A^{\mu a} + \frac{\alpha}{2}B^aB^a. \tag{4.102}$$

No caso abeliano, este termo levou ao vínculo

$$\partial_\mu A^\mu + \alpha B = 0,$$

e a teoria era invariante frente a transformação de *gauge* residual (4.33)

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x),\\
&\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}\psi(x),\\
&B(x) \to B'(x) = B(x),
\end{aligned}$$

com $\Box\Lambda(x) = 0$. Além disso, pelo fato do campo B satisfazer a equação de movimento $\Box B(x) = 0$, tornou-se possível dividirmos B, de forma covariante, em partes de frequência positiva e negativa. Esta divisão permitiu a imposição da condição subsidiária (4.29), que definiu o subespaço físico da teoria.

No caso não-abeliano, está separação não é factível, pois a equação de movimento que descreve o campo B está acoplada ao campo de Yang-Mills A_μ. De fato, definindo a corrente

$$gj^{\nu a} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A^a_\nu}, \tag{4.103}$$

segue da densidade lagrangiana (4.101) e das equações de Euler-Lagrange (1.18) que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^a_\nu} &= \partial_\mu \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\lambda\rho}{}^b}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} F^{\lambda\rho b} + B^b g^{\lambda\rho} \frac{\partial(\partial_\lambda A^b_\rho)}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{\lambda\rho}{}^b}{\partial A^a_\nu} F^{\lambda\rho b} - g j^{\nu a} \\
&= \partial_\mu \left[-\frac{1}{2} (\delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho \delta^a_b - \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\lambda \delta^a_b) F^{\mu\nu b} + B^b g^{\lambda\rho} \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho \delta^a_b \right] - \frac{1}{2} g f^{bcd} (\delta^\nu_\lambda \delta^a_c A^d_\rho + \delta^\nu_\rho \delta^a_d A^c_\lambda) F^{\lambda\rho b} - g j^{\nu a} \\
&= -\partial_\mu F^{\mu\nu a} + \partial^\nu B^a - g f^{abc} A^b_\mu F^{\mu\nu c} - g j^{\nu a} = 0, \\
\therefore \quad & (D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial^\nu B^a - g j^\nu, \qquad (4.104)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que na representação adjunta, a derivada covariante adquire a forma:

$$\begin{aligned}
D_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + [g A_\mu, F^{\mu\nu}] = \partial_\mu F^{\mu\nu a} X_a + g A^b_\mu F^{\mu\nu c} [X_b, X_c] \\
&= \left(\partial_\mu F^{\mu\nu a} + g f^{abc} A^b_\mu F^{\mu\nu c} \right) X_a = (D_\mu F^{\mu\nu})^a X_a.
\end{aligned}$$

Contraindo (4.104) com D_ν e supondo que $(D_\nu j^\nu) = 0$, obtém-se a equação de movimento do campo B:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{(D_\nu D_\mu F^{\mu\nu})^a}_{=0} = (D_\nu \partial^\nu B)^a - g \underbrace{(D_\nu j^\nu)^a}_{=0} \\
\therefore \quad & (D_\nu \partial^\nu B)^a = 0, \qquad (4.105)
\end{aligned}$$

ou, explicitamente,

$$\Box B^a + g f^{abc} A^b_\mu \partial^\mu B^c = 0. \qquad (4.106)$$

Assim, a condição de Gupta (4.29) não pode ser estendida de maneira consistente para o caso não-abeliano.

O que pode ser generalizado do caso abeliano é a invariância da teoria sob transformações de *gauge* residuais. Desta forma, a condição subsidiária que definirá o subespaço físico da teoria será imposta por intermédio do gerador dessa simetria. A fim de realizarmos isso, essa simetria da teoria abeliana será deformada e adaptada para o caso não-abeliano. Como consequência, os fantasmas de Faddeev-Popov e a transformação BRST surgirão naturalmente.

Inicialmente, notemos a relação entre o campo B com gerador das transformações de *gauge*. Como visto na seção (4.1.2), a teoria abeliana é invariante frente a transformação de *gauge* residual (4.33) e a carga associada

$$Q_\Lambda = \int d^3\mathbf{x} \left[\partial_0 \Lambda(x) B(x) - \Lambda(x) \partial_0 B(x) \right],$$

é o gerador das transformações de *gauge* infinitesimais residuais

$$[iQ_\Lambda, \Phi(x)] = \mathcal{D}(\Phi)\Lambda(x).$$

Para incorporarmos esta simetria na teoria não-abeliana, definiremos, em analogia ao caso abeliano, a carga "quase conservada"

$$G_\Lambda = \frac{1}{g}\int d^3\mathbf{x}\left[B^a(x)(D_0\Lambda(x))^a - \dot{B}(x)^a\Lambda^a(x)\right]. \tag{4.107}$$

Se G_Λ estivesse associado a uma corrente conservada, esperaríamos que G_Λ fosse o gerador das transformações de *gauge* infinitesimais residuais

$$\begin{aligned}
[iG_\lambda, A^a_\mu(x)] &= \frac{1}{g}D_\mu\Lambda^a(x), \\
[iG_\lambda, \varphi^\alpha(x)] &= i\Lambda^a(x)(\tau)^\alpha_\beta\varphi^\beta.
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Entretanto, G_Λ não está associado a uma corrente conservada, pois de (4.105) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g}\partial^\mu[B^a(D_\mu\Lambda)^a - \partial_\mu B^a\Lambda^a] &= \frac{1}{g}[\partial^\mu B^a(D_\mu\Lambda)^a + B^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a - \partial^\mu(\partial_\mu B^a)\Lambda^a - \partial_\mu B^a\partial^\mu\Lambda^a] \\
&= \frac{1}{g}\big[\partial^\mu B^a(\partial_\mu\Lambda^a + gf^{abc}A^b_\mu\Lambda^c) + B^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a - \partial^\mu(\partial_\mu B^a)\Lambda^a - \partial_\mu B^a\partial^\mu\Lambda^a\big] \\
&= \frac{1}{g}\big[B^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a - gf^{cba}A^b_\mu\partial^\mu B^a\Lambda^c - \partial^\mu(\partial_\mu B^c)\Lambda^c\big] \\
&= \frac{1}{g}[B^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a - (D^\mu\partial_\mu B)^c\Lambda^c] = \frac{1}{g}B^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Portanto, nosso objetivo será alterar G_Λ e $\mathcal{L}'$ de maneira a tornar G_Λ uma carga conservada e $\mathcal{L}'$ uma densidade lagrangiana invariante pelas transformações geradas por G_Λ.

Em primeiro lugar, definiremos para o operador Λ a equação de movimento

$$\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a = \Box\Lambda^a + gf^{abc}\partial^\mu(A^b_\mu\Lambda^c) = 0. \tag{4.110}$$

De maneira a garantirmos esta equação, introduziremos o multiplicador de Lagrange $\eta^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a$ na densidade lagrangiana (4.101) definindo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'' &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \eta^a\partial^\mu(D_\mu\Lambda)^a \\
&= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \partial^\mu\left[\eta^a(D^\mu\Lambda)^a\right] - \partial^\mu\eta^a(D_\mu\Lambda)^a \\
&\sim \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} - \partial^\mu\eta^a(D_\mu\Lambda)^a.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Como consequência, as equações de movimento para o campo de Yang-Mills A^μ passam a ser

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial A_\nu^a} &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_\nu^a} - \partial_\mu \frac{\partial \left[\partial^\lambda \eta^b (D_\lambda \Lambda)^b\right]}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} + \frac{\partial \left[\partial^\lambda \eta^b (D_\lambda \Lambda)^b\right]}{\partial A_\nu^a} \\
&= -(D_\mu F^{\mu\nu})^a + \partial^\nu B^a - g j^{\nu a} + \partial^\lambda \eta^b \frac{\partial \left[\partial_\lambda \Lambda^b + g f^{bcd} A_\lambda^c \Lambda^d\right]}{\partial A_\nu^a} \\
&= -(D_\mu F^{\mu\nu})^a + \partial^\nu B^a - g j^{\nu a} - g f^{abc} \partial^\nu \eta^b \Lambda^c = 0 \\
\therefore \quad (D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial^\nu B^a - g j^{\nu a} - g f^{abc} \partial^\nu \eta^b \Lambda^c. &
\end{aligned} \tag{4.112}
$$

Além disso, para o campo η:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\partial_\mu \Lambda^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \Lambda^a} &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \Lambda^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \Lambda^a} - \partial_\mu \frac{\partial \left[\partial^\lambda \eta^b (D_\lambda \Lambda)^b\right]}{\partial(\partial_\mu \Lambda^a)} + \frac{\partial \left[\partial^\lambda \eta^b (D_\lambda \Lambda)^b\right]}{\partial \Lambda^a} \\
&= -\partial_\mu \left[\partial^\lambda \eta^b \frac{\partial \left(\partial_\lambda \Lambda^b + g f^{bcd} A_\lambda^c \Lambda^d\right)}{\partial(\partial_\mu \Lambda^a)}\right] + \partial^\lambda \eta^b \frac{\partial \left(\partial_\lambda \Lambda^b + g f^{bcd} A_\lambda^c \Lambda^d\right)}{\partial \Lambda^a} \\
&= -\partial_\mu(\partial^\mu \eta^a) + g f^{bca} A_\nu^c \partial^\nu \eta^b = -\partial_\mu(\partial^\mu \eta^a) - g f^{acb} A_\nu^c \partial^\nu \eta^b = 0 \\
\therefore \quad (D_\mu \partial^\mu \eta)^a = 0, &
\end{aligned} \tag{4.113}
$$

e da contração de (4.112) com D_ν seguem as novas equações para o campo B:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{(D_\nu D_\mu F^{\mu\nu})^a}_{=0} = -g \underbrace{(D_\nu j^\nu)^a}_{=0} + (D_\nu \partial^\nu B)^a - g f^{abc} \left[\underbrace{(D_\nu \partial^\nu \eta)^b}_{=0} \Lambda^c + \partial^\nu \eta^b D_\nu \Lambda^c\right] \\
&\therefore \quad (D_\nu \partial^\nu B)^a = g f^{abc} \partial^\nu \eta^b D_\nu \Lambda^c.
\end{aligned} \tag{4.114}
$$

Em virtude das novas equações de movimento (4.110) e (4.114), a quadridivergência (4.109) torna-se

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu \left[B^a (D_\mu \Lambda)^a - \partial_\mu B^a \Lambda^a\right] &= B^a \underbrace{\partial^\mu (D_\mu \Lambda)^a}_{=0} - (D^\mu \partial_\mu B)^c \Lambda^c \\
&= -g f^{abc} \partial_\mu \eta^a (D^\mu \Lambda)^b \Lambda^c,
\end{aligned} \tag{4.115}
$$

ou seja, a corrente $\frac{1}{g}\left[B^a (D_\mu \Lambda)^a - \partial_\mu B^a \Lambda^a\right]$ ainda não é conservada. Entretanto, faremos uma imposição nos campos Λ e η que resultará numa quadridivergência no lado direito de (4.115) e que resultará numa corrente conservada. Assumiremos que Λ e η são <u>campos fermiônicos</u>, ou seja, que os campos Λ e η <u>anticomutam</u> (variáveis de Grassmann).

Desta imposição, decorre da identidade de Jacobi que

$$
\left[(A_\mu \times \Lambda) \times \Lambda\right]^a = \frac{1}{2}\left[A_\mu \times (\Lambda \times \Lambda)\right]^a, \tag{4.116}
$$

onde $(A \times B)^a := f^{abc} A^b B^c$. De fato,

$$
\begin{aligned}
[A_\mu \times (\Lambda \times \Lambda)]^a &= f^{abc} A^b_\mu (\Lambda \times \Lambda)^c = f^{abc} f^{cde} A^b_\mu \Lambda^d \Lambda^e = -f^{cde} f^{acb} A^b_\mu \Lambda^d \Lambda^e \\
&= (f^{ceb} f^{acd} + f^{cbd} f^{ace}) A^b_\mu \Lambda^d \Lambda^e = f^{ceb} f^{acd} A^b_\mu \Lambda^d \Lambda^e + f^{cbd} f^{ace} A^b_\mu \Lambda^d \Lambda^e \\
&= f^{abc} \underbrace{f^{bed}}_{=-f^{bde}} A^d_\mu \underbrace{\Lambda^c \Lambda^e}_{=-\Lambda^e \Lambda^c} + f^{abc} f^{bde} A^d_\mu \Lambda^e \Lambda^c = 2 f^{abc} f^{bde} A^d_\mu \Lambda^e \Lambda^c \\
&= 2 f^{abc} (A_\mu \times \Lambda)^b \Lambda^c = 2 \left[(A_\mu \times \Lambda) \times \Lambda \right]^a .
\end{aligned}
$$

Assim, de (4.113),(4.115) e (4.116):

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu \left[B^a (D_\mu \Lambda)^a - \partial_\mu B^a \Lambda^a \right] &= -g f^{abc} \partial_\mu \eta^a (D^\mu \Lambda)^b \Lambda^c \\
&= -g f^{abc} \partial_\mu \eta^a \left(\partial^\mu \Lambda^b + g f^{bde} A^{\mu d} \Lambda^e \right) \Lambda^c \\
&= -g f^{abc} \partial_\mu \eta^a \partial^\mu \Lambda^b \Lambda^c - g^2 \underbrace{f^{abc} f^{bde} \partial_\mu \eta^a A^{\mu d} \Lambda^e \Lambda^c}_{\substack{= \frac{1}{2} f^{abc} f^{cde} \partial_\mu \eta^a A^{\mu b} \Lambda^d \Lambda^e \\ = -\frac{1}{2} f^{abc} f^{ade} \partial_\mu \eta^e A^{\mu d} \Lambda^b \Lambda^c}} \\
&= -g f^{abc} \left[\partial^\mu (\partial_\mu \eta^a \Lambda^b) - \partial^\mu (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b - \frac{1}{2} g f^{ade} \partial_\mu \eta^e A^{\mu d} \Lambda^b \right] \Lambda^c \\
&= -g f^{abc} \left[\partial^\mu (\partial_\mu \eta^a \Lambda^b) - \frac{1}{2} \partial^\mu (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b - \frac{1}{2} \underbrace{(D^\mu \partial_\mu \eta)^a}_{=0} \right] \Lambda^c \\
&= -g f^{abc} \left[\partial^\mu (\partial_\mu \eta^a \Lambda^b \Lambda^c) - (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b (\partial^\mu \Lambda^c) - \frac{1}{2} \partial^\mu (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b \Lambda^c \right] . \qquad (4.117)
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b (\partial^\mu \Lambda^c) &= \frac{1}{2} f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b (\partial^\mu \Lambda^c) + \frac{1}{2} \underbrace{f^{acb}}_{=-f^{abc}} (\partial_\mu \eta^a) \underbrace{\Lambda^c (\partial^\mu \Lambda^b)}_{=-(\partial^\mu \Lambda^b) \Lambda^c} \\
&= \frac{1}{2} f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b (\partial^\mu \Lambda^c) + \frac{1}{2} f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) (\partial^\mu \Lambda^b) \Lambda^c ,
\end{aligned}
$$

que após substituir em (4.117) leva a

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{g} \partial^\mu \left[B^a (D_\mu \Lambda)^a - \partial_\mu B^a \Lambda^a \right] &= -f^{abc} \left[\partial^\mu (\partial_\mu \eta^a \Lambda^b \Lambda^c) - \frac{1}{2} \partial^\mu (\partial_\mu \eta^a \Lambda^b \Lambda^c) \right] \\
&= \partial^\mu \left[-\frac{1}{2} f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b \Lambda^c \right] , \qquad (4.118)
\end{aligned}
$$

ou seja, obtemos a equação da continuidade

$$
\frac{1}{g} \partial^\mu \left[B^a (D_\mu \Lambda)^a - \partial_\mu B^a \Lambda^a + \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu \eta^a) \Lambda^b \Lambda^c \right] = 0. \qquad (4.119)
$$

Desta forma, a carga de Noether associada

$$Q_B = \frac{1}{g}\int d^3\mathbf{x}\left[B^a(D_0\Lambda)^a - \dot{B}^a\Lambda^a + \frac{1}{2}gf^{abc}\dot{\eta}^a\Lambda^b\Lambda^c\right], \tag{4.120}$$

é conservada durante a evolução temporal do sistema descrito por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}}, \tag{4.121}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = -\partial^\mu\eta^a(D_\mu\Lambda)^a.$$

A densidade lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ é o termo de Faddeev-Popov obtido na formulação via integrais de trajetória com a fixação de *gauge* covariante padrão. Para vermos isso, basta mudarmos a notação

$$\Lambda^a(x) \to C^a(x). \tag{4.122}$$

Como consequência de Λ ter surgido como uma quantidade real, o fantasma de Faddeev-Popov C^a é um campo hermitiano

$$C^{a\dagger}(x) = C^a(x). \tag{4.123}$$

Além disso, pelo fato dos campos Λ e η aparecerem aos pares em $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ e como esta última, por construção, deve ser hermitiana, conclui-se a partir da anticomutatividade de Λ e η que o campo η deve ser anti-hermitiano. Assim, η é da forma

$$\eta^a(x) = i\bar{C}^a(x), \tag{4.124}$$

onde o campo $\bar{C}(x)$ é hermitiano

$$\bar{C}^{a\dagger}(x) = \bar{C}^a(x), \tag{4.125}$$

e conhecido como anti-fantasma de Faddeev-Popov. Assim, nessa nova notação

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = -i\partial^\mu\bar{C}^a(D_\mu C)^a = \mathcal{L}^\dagger{}_{\mathrm{FP}}, \tag{4.126}$$

$$Q_B = \int d^3\mathbf{x}\left[B^a(D_0C)^a - \dot{B}^aC^a + \frac{i}{2}gf^{abc}\dot{\bar{C}}^aC^bC^c\right]. \tag{4.127}$$

A transformação gerada por Q_B é uma transformação BRST[29]

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta} A_\mu^a := [iQ_B, A_\mu^a] = \frac{1}{g}(D_\mu C)^a,\\
&\boldsymbol{\delta} \varphi^\alpha := [iQ_B, \varphi^\alpha] = iC^a(\tau_a)^\alpha_\beta \varphi^\beta,\\
&\boldsymbol{\delta} B^a := [iQ_B, B^a] = 0,\\
&\boldsymbol{\delta} C^a := [iQ_B, C^a]_+ = -\frac{1}{2}(C\times C)^a = -\frac{1}{2}f^{abc}C^bC^c,\\
&\boldsymbol{\delta} \bar{C}^a := [iQ_B, \bar{C}^a]_+ = \frac{i}{g}B^a.
\end{aligned}
\tag{4.128}
$$

A transformação BRST acima implica na nilpotência da variação $\boldsymbol{\delta}$, i.e., $\boldsymbol{\delta}^2 = 0$. Antes de demonstrarmos isso, é importante salientarmos que pelo fato de estarmos lidando com os campos C e $\bar{C}$ que são anticomutantes, a variação $\boldsymbol{\delta}$ obedece às mesmas regras da derivada de Berezin [3]. Desta forma, para monômios A e B envolvendo os campos A_μ, φ, B, C e $\bar{C}$ o operador diferencial $\mathcal{D}_{\rm B}$ possui a seguinte identidade

$$
\mathcal{D}_{\rm B}(AB) = \mathcal{D}_{\rm B}(A)B + (-1)^{P_A} A\mathcal{D}_{\rm B}(B),
\tag{4.129}
$$

onde P_A indica o número de campos anticomutantes no monômio A.

Para os campos B e $\bar{C}$, a verificação que $\boldsymbol{\delta}^2 = 0$ é imediata

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta}^2 B^a = \boldsymbol{\delta} 0 = 0,\\
&\boldsymbol{\delta}^2 \bar{C}^a = \frac{i}{g}\boldsymbol{\delta} B^a = 0.
\end{aligned}
\tag{4.130}
$$

Usando (4.85),

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}^2\varphi^\alpha &= i\boldsymbol{\delta}\left[C^a(\tau_a)^\alpha_\beta\varphi^\beta\right] = i\left[(\boldsymbol{\delta} C^a)(\tau_a)^\alpha_\beta\varphi^\beta - C^a(\tau_a)^\alpha_\beta(\boldsymbol{\delta}\varphi^\beta)\right]\\
&= i\left[-\tfrac{1}{2}f^{abc}C^bC^c(\tau_a)^\alpha_\beta\varphi^\beta - iC^a(\tau_a)^\alpha_\beta C^b(\tau_b)^\beta_\gamma\varphi^\gamma\right]\\
&= i\Big[-\tfrac{1}{2}f^{abc}C^aC^b(\tau_c)^\alpha_\gamma\varphi^\gamma - i\underbrace{C^aC^b(\tau_a\tau_b)^\alpha_\gamma}_{=\frac{1}{2}C^aC^b[(\tau_a\tau_b)^\alpha_\gamma-(\tau_b\tau_a)^\alpha_\gamma]}\varphi^\gamma\Big]\\
&= \frac{1}{2}C^aC^b\left\{\underbrace{[\tau_a,\tau_b]^\alpha_\gamma - if^{abc}(\tau_c)^\alpha_\gamma}_{=0}\right\}\varphi^\gamma = 0.
\end{aligned}
\tag{4.131}
$$

Da identidade de Jacobi (4.81)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}^2 C^a &= -\tfrac{1}{2}f^{abc}\boldsymbol{\delta}(C^bC^c) = -\tfrac{1}{2}f^{abc}\boldsymbol{\delta}(C^b)C^c + \tfrac{1}{2}f^{abc}C^b\boldsymbol{\delta}(C^c)\\
&= -\tfrac{1}{2}f^{abc}\boldsymbol{\delta}(C^b)C^c + \tfrac{1}{2}f^{acb}C^c\boldsymbol{\delta}(C^b) = -\tfrac{1}{2}f^{abc}\boldsymbol{\delta}(C^b)C^c + \tfrac{1}{2}f^{acb}\boldsymbol{\delta}(C^b)C^c\\
&= -f^{abc}\boldsymbol{\delta}(C^b)C^c = -\tfrac{1}{2}f^{abc}f^{bde}C^dC^eC^c = -\tfrac{1}{2}f^{bde}f^{abc}C^cC^dC^e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2} f^{bec} f^{abd} C^c C^d C^e \\
&= -\tfrac{1}{2} f^{bcd} f^{abe} C^c C^d C^e
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \qquad \boldsymbol{\delta}^2 C^a = -\frac{1}{6} \underbrace{\left(f^{bde} f^{abc} + f^{bec} f^{abd} + f^{bcd} f^{abe}\right)}_{=0} C^c C^d C^e = 0. \tag{4.132}
$$

Finalmente, para o campo de *gauge* A_μ segue de (4.128)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}^2 A^a_\mu &= \frac{1}{g} \boldsymbol{\delta}(D_\mu C)^a = \frac{1}{g} \left[\partial_\mu \boldsymbol{\delta} C^a + g f^{abc} \boldsymbol{\delta}(A^b_\mu C^c)\right] \\
&= \frac{1}{g} \Big[\partial_\mu \boldsymbol{\delta} C^a + g f^{abc} A^b_\mu \boldsymbol{\delta}(C^c) + g f^{abc} \boldsymbol{\delta}(A^b_\mu) C^c\Big] = \frac{1}{g} \Big[(D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a + f^{abc} (D_\mu C)^b C^c\Big] \\
&= \frac{1}{g} \Big[(D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a + \underbrace{f^{abc} \partial_\mu C^b C^c}_{\substack{= \frac{1}{2} f^{abc}(\partial_\mu C^b C^c - \partial_\mu C^c C^b) \\ = \frac{1}{2} f^{abc}(\partial_\mu C^b C^c + C^b \partial_\mu C^c) \\ = \frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu (C^b C^c)}} + g \underbrace{f^{abc} f^{bde} A^d_\mu C^e C^c}_{= \frac{1}{2} f^{abc} f^{cde} A^b_\mu C^d C^e}\Big] \\
&= \frac{1}{g} \Big\{(D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a + \partial_\mu \Big[\tfrac{1}{2}(C \times C)^a\Big] + g f^{abc} A^b_\mu \Big[\tfrac{1}{2}(C \times C)^c\Big]\Big\} \\
&= \frac{1}{g} \left\{(D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a + \left(D_\mu \left[\tfrac{1}{2}(C \times C)\right]\right)^a\right\} = \frac{1}{g} \left\{(D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a - (D_\mu \boldsymbol{\delta} C)^a\right\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.133}
$$

Portanto, $\boldsymbol{\delta}^2 = 0$ como enunciado.

Mostremos agora que a transformação BRST acima deixa a densidade lagrangiana (4.121)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} \\
&= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu \varphi) + B^a \partial_\mu A^{\mu a} + \frac{\alpha}{2} B^a B^a - i \partial^\mu \bar{C}^a (D_\mu C)^a \\
&\sim -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu \varphi) - \partial_\mu B^a A^{\mu a} + \frac{\alpha}{2} B^a B^a - i \partial^\mu \bar{C}^a (D_\mu C)^a,
\end{aligned} \tag{4.134}
$$

invariante.

Inicialmente, notemos que o termo $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}} + \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} = -\partial_\mu B^a A^{\mu a} + \frac{\alpha}{2} B^a B^a - i \partial^\mu \bar{C}^a (D_\mu C)^a$, pode ser expresso na forma $ig\boldsymbol{\delta}\big(\partial^\mu \bar{C}^a A^a_\mu - \frac{\alpha}{2} \bar{C}^a B^a\big)$. De fato, de (4.128):

$$
\begin{aligned}
ig\boldsymbol{\delta}\Big(\partial^\mu \bar{C}^a A^a_\mu - \frac{\alpha}{2} \bar{C}^a B^a\Big) &= ig\Big[\partial^\mu (\boldsymbol{\delta} \bar{C}^a) A^a_\mu - \partial^\mu \bar{C}^a (\boldsymbol{\delta} A^a_\mu) - \frac{\alpha}{2} (\boldsymbol{\delta} \bar{C}^a) B^a + \frac{\alpha}{2} \bar{C}^a (\boldsymbol{\delta} B^a)\Big] \\
&= ig \left[\frac{i}{g} B^a A^a_\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \bar{C}^a (D_\mu C^a) - \frac{i\alpha}{2g} B^a B^a\right] \\
&= -B^a A^a_\mu - i \partial^\mu \bar{C}^a (D_\mu C^a) + \frac{\alpha}{2} B^a B^a = \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}}.
\end{aligned} \tag{4.135}
$$

Logo,

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^a F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_M(\varphi, \nabla_\mu \varphi) + ig\boldsymbol{\delta}\Big(\partial^\mu \bar{C}^a A^a_\mu - \frac{\alpha}{2} \bar{C}^a B^a\Big). \tag{4.136}
$$

As variações dos campos φ e A_μ em (4.128) são análogas, respectivamente, às transformações de *gauge* infinitesimais (4.94) e (4.95). Estas foram construídas de maneira a impor a invariância de *gauge* local em $\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_M$. Por este motivo e da nilpotência de $\boldsymbol{\delta}$ segue

$$\boldsymbol{\delta}\mathcal{L} = \boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_{\text{YM}} + \boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_M + ig\boldsymbol{\delta}^2\Big(\partial^\mu \bar{C}^a A^a_\mu - \frac{\alpha}{2}\bar{C}^a B^a\Big) = 0. \tag{4.137}$$

Isso demonstra que a simetria BRST de $\mathcal{L}$ é uma consequência da invariância de *gauge* local de $\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_M$ e da nilpotência de $\boldsymbol{\delta}$. Este fato permite generalizarmos a escolha do termo de fixação de *gauge*. Para isso, é suficiente considerarmos

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} = ig\boldsymbol{\delta}\left\{\bar{C}\left(\mathcal{F}[A] - \frac{\alpha}{2}B^a\right)\right\}, \tag{4.138}$$

onde $\mathcal{F}[A]$ é um funcional arbitrário do campo A_μ.

4.2.5 CONDIÇÃO SUBSIDIÁRIA

No caso abeliano, o subespaço físico da teoria foi definido como o conjunto dos estados que satisfaziam a condição de Gupta

$$B^+(x)|phys\rangle = 0,$$

ou seja, $V_{phys} \coloneqq \{|\Phi\rangle : B^+(x)|\Phi\rangle = 0\}$.

No caso não-abeliano, V_{phys} é definido em termos da carga BRST (4.127)

$$V_{phys} = \{|\Phi\rangle : Q_B|\Phi\rangle = 0\}. \tag{4.139}$$

Mostremos que a condição $Q_B|\Phi\rangle = 0$ se reduz à $B^+(x)|\Phi\rangle = 0$ como caso particular.

Conforme obtido em (4.110),(4.112),(4.113) e (4.114), as equações de movimento são

$$\begin{aligned} &\partial^\mu (D_\mu C)^a = 0, \\ &(D_\mu \partial^\mu \bar{C})^a = 0, \\ &(D_\mu \partial^\mu B)^a = igf^{abc}\partial_\mu \bar{C}^b (D^\mu C)^c. \end{aligned} \tag{4.140}$$

Para o caso abeliano, as constantes de estrutura são todas nulas, $f^{abc} = 0$, assim as equações acima e a carga BRST se reduzem a

$$\Box B = \Box C = \Box \bar{C} = 0, \tag{4.141}$$

$$Q_B = \int d^3\mathbf{x}\left[B\dot{C} - \dot{B}C\right]. \tag{4.142}$$

Introduzindo as soluções de onda plana análogas a (2.42)

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2Vk_0}} \left[B(\mathbf{k}) e^{-ikx} + B^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right], \\
C(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2Vk_0}} \left[C(\mathbf{k}) e^{-ikx} + C^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \right],
\end{aligned}
$$

e o ordenamento normal, segue de (4.142)

$$
Q_B = \int d^3\mathbf{x} N \left[B\dot{C} - \dot{B}C \right] = -i \sum_{\mathbf{k}} \left[C^\dagger_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} - B^\dagger_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \right]. \tag{4.143}
$$

Conforme as equações (4.141), os fantasmas de Faddev-Popov C e $\bar{C}$ não estão acoplados aos outros campos. Portanto, são graus de liberdade irrelevantes na formulação padrão das teorias de *gauge* abelianas. Por este motivo, o espaço de Hilbert pode ser decomposto na forma

$$
\mathcal{V} = \mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}_{\mathrm{FP}}, \tag{4.144}
$$

onde $\mathcal{V}'$ é o espaço de estados gerados a partir do vácuo por operadores de criação e aniquilação da teoria sem os fantasmas de Faddeev-Popov e $\mathcal{V}_{\mathrm{FP}}$ é o espaço gerado pelos operadores de criação e aniquilação dos campos C e $\bar{C}$ a partir de $|0\rangle_{\mathrm{FP}}$. Portanto, $\mathcal{V}'$ é identificado em $\mathcal{V}$ como o subespaço $\mathcal{V}' \otimes |0\rangle_{\mathrm{FP}}$.

Em termos dos operadores de aniquilação de C e $\bar{C}$, $\mathcal{V}'$ pode ser caracterizado pelas condições subsidiárias

$$
C^\dagger |\Phi\rangle = \bar{C}^\dagger |\Phi\rangle = 0, \tag{4.145}
$$

ou seja, o estado $|\Phi\rangle$ de $\mathcal{V}$ pertence a $\mathcal{V}'$ se e somente se as condições acima são satisfeitas.

Fazendo $|\Phi\rangle = |f\rangle \otimes |0\rangle_{\mathrm{FP}}$ e usando (4.143), a condição $Q_B|\Phi\rangle = 0$ torna-se em $\mathcal{V}' \otimes |0\rangle_{\mathrm{FP}}$

$$
\begin{aligned}
Q_B|\Phi\rangle &= i \sum_{\mathbf{k}} \left[C^\dagger_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} - B^\dagger_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \right] |f\rangle \otimes |0\rangle_{\mathrm{FP}} \\
&= i \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} |f\rangle \otimes C^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle_{\mathrm{FP}} = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $B_{\mathbf{k}}|f\rangle = 0$ para todo $\mathbf{k}$ que é nada mais é que a condição $B^+(x)|f\rangle = 0$.

Capítulo 5

MODELO DE THIRRING GAUGEADO EM (2+1) DIMENSÕES

5.1 TEORIA DE PROCA PARA O CAMPO VETORIAL MASSIVO

Em teoria de campos, partículas massivas, não carregadas e de spin 1 são descritas pela equação de Proca. Esta pode ser obtida a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 U_\mu U^\mu, \tag{5.1}$$

onde m é a massa da partícula e $\bar{F}_{\mu\nu}$ é o tensor, análogo ao do campo eletromagnético, definido por

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu. \tag{5.2}$$

Das equações de Euler-Lagrange (1.18) e de (5.1) seguem as equações de movimento para o campo de Proca

$$\begin{aligned}
\partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial(\partial_\nu U_\mu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial U_\mu} &= \partial_\nu\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{F}_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\nu U_\mu)}\bar{F}^{\rho\sigma}\right] - m^2 U^\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial U_\mu} \\
&= \partial_\nu\left[-\frac{1}{2}(\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma)\bar{F}^{\rho\sigma}\right] - m^2 U^\rho \delta^\mu_\rho \\
&= -\partial_\nu\bar{F}^{\nu\mu} - m^2 U^\mu = 0 \\
\therefore \qquad \partial_\nu\bar{F}^{\nu\mu} + m^2 U^\mu = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Contraindo (5.3) com ∂_μ, da antissimetria de $\bar{F}^{\mu\nu}$ e pelo fato de U^μ ser um campo massivo, vemos que a condição de Lorenz é automaticamente satisfeita

$$\frac{1}{m^2}\partial_\mu U^\mu = 0 \implies \partial_\mu U^\mu = 0. \tag{5.4}$$

Assim, utilizando (5.4) podemos reescrever (5.3)

$$(\Box + m^2)U^\mu = 0. \tag{5.5}$$

Em virtude da condição de Lorenz, somente três componentes de U^μ são independentes. Portanto, o campo de Proca descreve uma partícula com três polarizações. Além disso, ao contrário do campo eletromagnético, a teoria de Proca não possui simetria de *gauge*. De fato, o termo de massa $\frac{1}{2}m^2 U_\mu U^\mu$ quebra a invariância da teoria frente à transformação $U^\mu \to U'^\mu = U^\mu + \partial^\mu \Lambda$,

$$U'_\mu U'^\mu = (U_\mu + \partial_\mu \Lambda)(U^\mu + \partial^\mu \Lambda) = U_\mu U^\mu + 2U_\mu \partial^\mu \Lambda + \partial_\mu \Lambda \partial^\mu \Lambda. \tag{5.6}$$

Os momentos canônicos são dados por

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 U_\mu)} = -\bar{F}^{0\mu}, \tag{5.7}$$

ou, explicitamente

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0, \\ \pi^k &= -\dot{U}^k + \partial^k U^0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Do resultado acima, vemos que as componentes $\dot{U}^k$ podem ser escritas em termos dos momentos conjugados e dos outros campos. Entretanto, pelo fato de $\pi^0 = 0$, o mesmo não ocorre com $\dot{U}^0$. Isto sugeriria que a quantização canônica não fosse aplicável ao campo de Proca, pois não seria possível impormos as relações de comutação a tempos iguais. Porém, como já comentado anterior, nem todas as componentes de U^μ são independentes. Com efeito, das equações de movimento (5.3) e da condição de Lorenz (5.4) decorrem

$$\begin{aligned} U^0 &= -\frac{1}{m^2}\partial_\nu \bar{F}^{\nu 0} = -\frac{1}{m^2}\partial_k \pi^k, \\ \dot{U}^0 &= -\partial_k U^k. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por este motivo, as relações de comutação a tempos iguais tornam-se

$$\begin{aligned} &[U_l(x), \pi^k(y)]_0 = i\delta_l^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ &[U_l(x), U_k(y)]_0 = 0, \\ &[\pi^l(x), \pi^k(y)]_0 = 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

e como consequência dos vínculos (5.9)

$$\begin{aligned}
[U_0(x), U_0(y)]_0 &= \frac{1}{m^4}\partial_k^{(x)}\partial_m^{(y)}[\pi^k(x), \pi^m(y)]_0 = 0, \\
[U_0(x), U_l(y)]_0 &= -\frac{1}{m^2}\partial_k^{(x)}[\pi^k(x), U_l(y)]_0 = i\frac{1}{m^2}\delta_l^k\partial_k^{(x)}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{i}{m^2}\partial_l\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\
[U_0(x), \pi^l(y)]_0 &= -\frac{1}{m^2}\partial_k^{(x)}[\pi^k(x), \pi^l(y)]_0 = 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Neste ponto, podemos buscar soluções de onda plana para a equação (5.5) de maneira análoga ao que foi feito no capítulo 2 para os campos de radiação e de Dirac. A partir destas soluções, os comutadores a tempos diferentes e o propagador de Feynman podem ser calculados [18]. Em particular, o propagador de Feynman é dado por

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x) = -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta_F(x) - \frac{1}{m^2}g^{\mu 0}g^{\nu 0}\delta(x), \tag{5.12}$$

onde Δ_F é o propagador de Feynman do campo de Klein-Gordon

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Como consequência do termo $m^{-2}\partial^\mu\partial^\nu$ no propagador $\Delta_F^{\mu\nu}$, divergências quadráticas no ultravioleta ocorrem e estas não podem ser eliminadas pelo procedimento de renormalização [36], ou seja, a teoria de Proca não é renormalizável.

5.2 O FORMALISMO DE STÜCKELBERG

Como uma alternativa à teoria de Proca, consideraremos o formalismo de Stückelberg [38, 39, 40]

Em 1935, de modo a explicar a estabilidade nuclear, Yukawa [44] propôs que a interação entre nucleons seria mediada por uma partícula vetorial, massiva e carregada, da mesma forma que o fóton media a força eletromagnética. Isso levou Stückelberg, tendo a QED como modelo, a propor a seguinte equação de movimento para o méson de Yukawa

$$(\Box + m^2)A^\mu(x) = 0, \tag{5.14}$$

que pode ser derivada a partir da densidade lagrangiana[1]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu. \tag{5.15}$$

[1] Na formulação original, o campo A^μ é complexo, pois o méson é uma partícula carregada. Aqui consideraremos A^μ real.

A partir de (5.15), os momentos canônicos são dados por

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{\partial(\partial_\lambda A_\rho)}{\partial(\partial_0 A_\mu)}(\partial^\lambda A^\rho) = -\delta^0_\lambda \delta^\mu_\rho (\partial^\lambda A^\rho) = -\partial_0 A^\mu, \tag{5.16}$$

que por sua vez levam à densidade hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L} = -\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\ &= -\frac{1}{2}\left[\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu - (\partial_k A_\nu)(\partial^k A^\nu) + m^2 A_\mu A^\mu\right] = -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A^\nu) + m^2 A_\mu A^\mu\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A^0)(\partial_\mu A^0) - (\partial_\mu A^k)(\partial_\mu A^k) + m^2 (A^0)^2 - m^2 \mathbf{A}^2\right].\end{aligned} \tag{5.17}$$

Como pode-se observar, os termos que envolvem componentes espaciais do campo A^μ são não negativos, enquanto que aqueles que envolvem a componente temporal são não positivos. Por este motivo, a densidade hamiltoniana não é necessariamente positiva definida. O mesmo ocorre na teoria de Proca, entretanto, como visto na seção anterior, a componente U_0 não era independente das outras componentes de U^μ. Assim, levando-se em conta as relações (5.9), pode-se mostrar que o hamiltoniano de Proca é positivo definido [18].

Isso não ocorre no formalismo de Stückelberg, pois nenhuma condição análoga à de Lorenz resulta das equações de movimento. Conforme visto na seção 2.1.2, o mesmo ocorre na quantização canônica covariante do campo eletromagnético. Naquele caso, a imposição de uma condição subsidiária garantia a positividade do hamiltoniano no subespaço físico da teoria.

De modo a obter uma condição subsidiária consistente com as relações de comutação dos campos, Stückelberg introduziu um campo escalar B descrito pela mesma equação de movimento que o campo vetorial massivo A^μ

$$(\Box + m^2)B(x) = 0, \tag{5.18}$$

e impôs a seguinte condição subsidiária

$$S(x)|phys\rangle \coloneqq \left(\partial^\mu A^+_\mu(x) + mB^+(x)\right)|phys\rangle = 0, \tag{5.19}$$

onde $\partial^\mu A^+_\mu$ e B^+ são as partes, respectivamente, dos campos $\partial^\mu A_\mu$ e B que envolvem os operadores de aniquilação. Assim, quando restrita ao subespaço físico

$$\mathcal{V}_{phys} = \{|\Phi\rangle : S(x)|\Phi\rangle = 0\},$$

a densidade hamiltoniana (5.17) é positiva definida [36].

Uma vantagem do formalismo de Stückelberg em relação ao de Proca, é que o primeiro possui simetria de *gauge*. De fato, as equações de movimento 5.14 e 5.18 podem ser derivadas a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{Stück}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - \frac{1}{2}m^2 B^2, \tag{5.20}$$

que é invariante pelas transformações restritas

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \\ B(x) &\to B'(x) = B(x) + m\Lambda(x), \end{aligned} \tag{5.21}$$

onde Λ satisfaz

$$(\Box + m^2)\Lambda(x) = 0. \tag{5.22}$$

Para demonstrarmos esse fato e por conveniência futura, notemos que definindo para o campo vetorial massivo o análogo do tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \tag{5.23}$$

a densidade lagrangiana (5.20) é equivalente a

$$\mathcal{L}_{\text{Stück}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\left(A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(A^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu + mB\right)^2. \tag{5.24}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &+ \frac{1}{2}m^2\left(A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(A^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu + mB\right)^2 \\ &= \mathcal{L}_{\text{Stück}} + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - mA_\mu\partial^\mu B - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) - mB\partial_\mu A^\mu \\ &= \mathcal{L}_{\text{Stück}} + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu) - \partial_\mu(mBA^\mu) - \frac{1}{2}\partial_\mu(A^\mu\partial_\nu A^\nu) \\ &\sim \mathcal{L}_{\text{Stück}}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Assim, realizando as transformações (5.21) e usando (5.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{Stück}} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\left(A'_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B'\right)\left(A'^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B'\right) - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A'^\mu + mB'\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu + \cancel{\partial_\mu\partial_\nu\Lambda} - \partial_\nu A_\mu - \cancel{\partial_\nu\partial_\mu\Lambda}\right)\left(\partial^\mu A^\nu + \cancel{\partial^\mu\partial^\nu\Lambda} - \partial^\nu A^\mu - \cancel{\partial^\nu\partial^\mu\Lambda}\right) \\ &+ \left(A_\mu + \cancel{\partial_\mu\Lambda} - \frac{1}{m}\partial_\mu B - \cancel{\partial_\mu\Lambda}\right)\left(A^\mu + \cancel{\partial^\mu\Lambda} - \frac{1}{m}\partial^\mu B - \cancel{\partial^\mu\Lambda}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu + mB + \underbrace{(\Box + m^2)\Lambda}_{=0}\right]^2 \\ &= \mathcal{L}_{\text{Stück}}. \end{aligned}$$

Portanto, a introdução do campo auxiliar B proporciona uma teoria com simetria de *gauge* para o bóson vetorial massivo.

A relação entre o formalismo de Proca, o de Stückelberg e a simetria de *gauge* pode ser estabelecida fazendo

$$U_\mu = A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B. \tag{5.26}$$

Desta forma, de (5.2)

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\nu = \partial_\mu \left(A_\nu - \frac{1}{m}\partial_\nu B\right) - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{5.27}$$

e de (5.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Proca}} &= -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 U_\mu U^\mu = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\left(A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B\right)\left(A^\mu - \frac{1}{m}\partial^\mu B\right) \\ &= \mathcal{L}_{\text{Stück}} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu + mB\right)^2,\end{aligned} \tag{5.28}$$

ou seja, a teoria de Proca pode ser vista como oriunda de uma fixação de *gauge* da teoria de Stückelberg. Além disso, para $|f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{V}_{phys}$

$$\langle f|(\partial^\mu A_\mu + mB)^2|g\rangle = 0, \tag{5.29}$$

que implica na equivalência dos dois formalismos, em termos de valores esperados, no subespaço físico da teoria $\mathcal{V}_{phys}$.

Consideremos agora um campo fermiônico interagindo minimamente com o campo de Proca

$$\bar{\mathcal{L}}_f = \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igU_\mu\right) + M\right]\psi. \tag{5.30}$$

Fazendo novamente $U_\mu = A_\mu - \frac{1}{m}\partial_\mu B$, temos

$$\bar{\mathcal{L}}_f = \bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igA_\mu\right) + M\right]\psi - \frac{g}{m}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu B\psi, \tag{5.31}$$

que, a menos do termo $-\frac{g}{m}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu B\psi$, corresponde à densidade lagrangiana do campo fermiônico em interação com o campo de Stückelberg. O termo extra pode ser eliminado através das transformações

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = e^{-igB(x)/m}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{igB(x)/m}\bar{\psi}(x).\end{aligned} \tag{5.32}$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}'_f &= \bar{\psi}' \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu \right) + M \right] \psi' - \frac{g}{m} \bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu B \psi' \\
&= e^{igB/m} \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu \right) + M \right] e^{-igB/m} \psi - \frac{g}{m} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu B \psi \\
&= \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu \right) + M \right] \psi + \cancel{\frac{g}{m} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu B \psi} - \cancel{\frac{g}{m} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu B \psi} \\
&:= \mathcal{L}_f .
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Logo, partindo da densidade lagrangiana (5.30), usando a identificação (5.26) e fazendo as transformações (5.32), obtemos

$$
\mathcal{L}_f = \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu \right) + M \right] \psi, \tag{5.34}
$$

que, pela semelhança com o caso não massivo, é claramente invariante pelas transformações de *gauge*

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \\
&\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ig\Lambda(x)} \psi(x), \\
&\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{-ig\Lambda(x)} \bar{\psi}(x).
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

O procedimento descrito acima será importante na próxima seção, onde faremos o *gaugeamento* do modelo de Thirring, i.e., partiremos de uma teoria sem invariância de *gauge* e construiremos uma que goza de tal simetria. Por sua vez, a teoria original passa a ser obtida através da fixação de *gauge*.

5.3 O MODELO DE THIRRING COMO UMA TEORIA DE *GAUGE*

Em (2+1) dimensões, a densidade lagrangiana para o modelo de Thirring massivo é dada por

$$
\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{G}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \tag{5.36}
$$

onde ψ é um campo fermiônico de duas componentes cuja partícula associada possui massa m. A constante de acoplamento G possui dimensão $[\text{massa}]^{-1}$ e será redefinida para $G = e^2/M^2$, cujo parâmetro e é adimensional.

Nesta dimensionalidade, as matrizes gama são representadas por intermédio das matrizes de Pauli da seguinte forma

$$
\gamma^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = i\sigma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 = i\sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.37}
$$

e satisfazem as identidades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad\qquad \gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\delta}\gamma_\delta, \tag{5.38}$$

onde $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ e $\epsilon^{\mu\nu\delta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

Analisando a densidade lagrangiana (5.36), vemos que o termo de interação é do tipo corrente-corrente, i.e., sem campo mediador e envolve quatro férmions. Este termo pode ser linearizado pela introdução do campo vetorial

$$\tilde{A}_\mu = -\frac{e}{M^2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{5.39}$$

que permite reescrevermos (5.36) na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}\frac{e^2}{M^2}\left(-\frac{M^2}{e}\right)^2\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu \\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \underbrace{-M^2\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu}_{=e\bar{\psi}\gamma^\mu\tilde{A}_\mu\psi} + \frac{M^2}{2}\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu \\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu\tilde{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

onde $\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - ie\tilde{A}_\mu$. É importante salientar que, embora pareça, $\tilde{D}_\mu$ não é uma derivada covariante, pois (5.40) não possui simetria de *gauge* local.

A menos do fator $-\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}$, (5.40) se parece com a densidade lagrangiana que descreve um campo fermiônico interagindo com o campo de Proca. Na seção 5.2, vimos que a decomposição (5.26) e as transformações (5.32) levaram um sistema interagindo com uma campo sem simetria de *gauge* (Proca) a um sistema interagindo com o campo de Stückelberg. Procederemos de maneira análoga.

Introduzindo o campo de Stückelberg θ através da decomposição

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta, \tag{5.41}$$

e efetuando as transformações

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\to \psi'(x) = e^{-ie\theta(x)}\psi(x), \\
\bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{ie\theta(x)}\bar{\psi}(x),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

em (5.40), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}'i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu + ie\partial_\mu\theta)\psi' - m\bar{\psi}'\psi' + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)(A^\mu - \partial^\mu\theta) \\
&= e^{ie\theta}\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu + ie\partial_\mu\theta)e^{-ie\theta}\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2
\end{aligned}$$

$$= \bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu + \cancel{ie\partial_\mu\theta})\psi + \cancel{\bar{\psi} i\gamma^\mu(-i)e\partial_\mu\theta\psi} - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2$$
$$= \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2, \tag{5.43}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Esta densidade lagrangiana é invariante pela transformação de *gauge*

$$\begin{aligned} &A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \\ &\theta(x) \to \theta'(x) = \theta(x) + \Lambda(x), \\ &\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), \\ &\bar{\psi(x)} \to \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}(x). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Com efeito, de (5.43) segue

$$\mathcal{L}'' = \bar{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' + \frac{M^2}{2}(A'_\mu - \partial_\mu\theta')^2$$
$$= e^{-ie\Lambda}\bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu\Lambda)e^{ie\Lambda}\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu + \cancel{\partial_\mu\Lambda} - \partial_\mu\theta - \cancel{\partial_\mu\Lambda})^2$$
$$= \bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu - \cancel{ie\partial_\mu\Lambda})\psi + \cancel{\bar{\psi} i\gamma^\mu ie\partial_\mu\Lambda\psi} - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2$$
$$= \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}(A_\mu - \partial_\mu\theta)^2 = \mathcal{L}' \tag{5.45}$$

Logo, D_μ é uma derivada covariante. Além disso, vemos de (5.43) que para $\theta' = 0$, a densidade lagrangiana original (5.40) é reobtida, ou seja, o modelo de Thirring é uma versão de 5.43com fixação de *gauge.*

Conforme visto na seção 4.2.4, pelo fato de (5.43) possuir simetria local de *gauge*, a introdução de um termo $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ contendo fantasmas de Faddeev-Popov e de fixação de *gauge,* permite obtermos uma teoria com simetria BRST. Assim, o modelo de Thirring gaugeado é definido por

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Th,G}} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}, \tag{5.46}$$

onde $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ é da forma

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} = -i\boldsymbol{\delta}\left[\bar{C}\left(\mathcal{F}[A,\theta] + \frac{\xi}{2}B\right)\right]. \tag{5.47}$$

Em (5.47), B é o campo auxiliar de Nakanishi, descrito no capítulo 4, $\mathcal{F}[A,\theta]$ é um funcional arbitrário envolvendo os campos A_μ e θ e a transformação BRST, que deixa invariante (5.46), é definida por

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\delta}\psi(x) = ieC(x)\psi(x),\\
&\boldsymbol{\delta}\theta(x) = C(x),\\
&\boldsymbol{\delta}A_\mu(x) = \partial_\mu C(x),\\
&\boldsymbol{\delta}\bar{C}(x) = iB(x),\\
&\boldsymbol{\delta}C(x) = 0,\\
&\boldsymbol{\delta}B(x) = 0,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

onde C e $\bar{C}$ campos que anticomutam, conforme visto no capítulo anterior.

Mostremos que (5.46) de fato possui simetria BRST. Notemos inicialmente que para os campos ψ, A_μ e θ, as transformações (5.48) coincidem com as versões infinitesimais das transformações de *gauge* (5.44). Logo, $\mathcal{L}'$ é invariante frente a (5.48). Além disso, da nilpotência de $\boldsymbol{\delta}$, segue $\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} = 0$. Portanto, $\boldsymbol{\delta}\mathcal{L}_{\text{Th,G}} = 0$.

O campo B de Nakanishi pode ser eliminado de (5.47) através da sua equação de movimento. Para isso, inicialmente reescreveremos (5.47) na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} &= -i\left\{(\boldsymbol{\delta}\bar{C})\left(\mathcal{F}[A,\theta] + \frac{\xi}{2}B\right) - \bar{C}\left[\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta] + \underbrace{\frac{\xi}{2}(\boldsymbol{\delta}B)}_{=0}\right]\right\}\\
&= -i\left[iB\left(\mathcal{F}[A,\theta] + \frac{\xi}{2}B\right) - \bar{C}\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta]\right], && (5.49)\\
&= B\mathcal{F}[A,\theta] + \frac{\xi}{2}B^2 + i\bar{C}\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta] && (5.50)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\xi}B + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathcal{F}[A,\theta]\right)^2 - \frac{1}{2\xi}(\mathcal{F}[A,\theta])^2 + i\bar{C}\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta]. && (5.51)
\end{aligned}$$

Assim, a equação de movimento de B é

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Th,G}}}{\partial(\partial_\mu B)} - \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Th,G}}}{\partial_\mu B} = 0 \iff &\left(\sqrt{\xi}B + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathcal{F}[A,\theta]\right)\sqrt{\xi} = 0\\
\iff &B = -\frac{1}{\xi}\mathcal{F}[A,\theta], && (5.52)
\end{aligned}$$

que após a substituição em (5.51) leva a

$$\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} = -\frac{1}{2\xi}(\mathcal{F}[A,\theta])^2 + i\bar{C}\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta]. \tag{5.53}$$

Quando o funcional $\mathcal{F}[A,\theta]$ em A_μ e θ, os campos fantasmas C e $\bar{C}$ se desacoplam dos campos de matéria. Em particular, para o funcional

$$\mathcal{F}[A,\theta] = \partial_\mu A^\mu + \xi M^2\theta, \tag{5.54}$$

o campo de Stückelberg também se desacopla. Desta forma, de (5.53)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \xi M^2\theta)^2 + i\bar{C}\left[\partial_\mu(\boldsymbol{\delta} A^\mu) + \xi M^2(\boldsymbol{\delta}\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - M^2\partial_\mu A^\mu\theta - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2 + i\bar{C}\partial_\mu\partial^\mu C + i\xi M^2\bar{C}C \\
&= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu(M^2 A^\mu\theta) + M^2 A^\mu\partial_\mu\theta - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2 + \partial_\mu(i\bar{C}\partial^\mu C) - i\partial_\mu\bar{C}\partial^\mu C \\
&+ i\xi M^2\bar{C}C \\
&\sim -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + M^2 A^\mu\partial_\mu\theta - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2 - i\partial_\mu\bar{C}\partial^\mu C + i\xi M^2\bar{C}C,
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

que leva à seguinte densidade lagrangiana para o modelo de Thirring gaugeado

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Th,G}} &= \mathcal{L}' + \mathcal{L}_{\text{GF+FP}} \\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}A_\mu A^\mu - \cancel{M^2 A_\mu\partial^\mu\theta} + \frac{1}{2}M^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta \\
&- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \cancel{M^2 A^\mu\partial_\mu\theta} - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2 - i\partial_\mu\bar{C}\partial^\mu C + i\xi M^2\bar{C}C \\
&= \mathcal{L}_{A,\psi} + \mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_{gh},
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A,\psi} &= \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \frac{M^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \\
\mathcal{L}_\theta &= \frac{1}{2}M^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2, \\
\mathcal{L}_{gh} &= -i\left(\partial_\mu\bar{C}\partial^\mu C - \xi M^2\bar{C}C\right).
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

Capítulo 6

MODELO DE THIRRING GAUGEADO COM QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ

6.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Considere o modelo do tipo Thirring não massivo

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieW_{\mu} - ieA_{\mu}^{\text{ext}} + ib_{\mu}\gamma_5)\psi - GJ^{\mu}J_{\mu}, \tag{6.1}$$

onde A_{μ}^{ext} denota um campo externo fixo, b^{μ} representa uma quantidade constante de quatro componentes e

$$W_{\mu} = G\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}\tilde{A}^{\alpha}b^{\beta}, \tag{6.2a}$$

$$J_{\mu} = -e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi, \tag{6.2b}$$

sendo $\tilde{A}^{\alpha}$ um campo auxiliar sujeito ao vínculo

$$\tilde{A}^{\alpha} = 2(GJ^{\alpha} - W^{\alpha}). \tag{6.3}$$

A presença do não quadrivetor b_{μ} na densidade lagrangiana (6.1), faz com que o termo $b_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ não seja um escalar de Lorentz. Além disso, é bem conhecido que esse último é um pseudo-vetor em relação à transformação de paridade [23]. Portanto, $b_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ viola as simetrias de Lorentz e CPT.

Embora o modelo exposto em (6.1) dependa do campo auxiliar $\tilde{A}$, a existência do vínculo (6.3) torna possível a eliminação desta dependência pela iteração de (6.2a) com (6.3). Ao fazermos isso, uma série para a corrente W_{μ} em função do parâmetro de quebra

b^μ é obtida:

$$W_\mu = 2G^2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu J^\alpha b^\beta - 4G^3 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\rho\tau\delta}\partial^\nu\partial_\rho J_\tau b_\delta b^\beta + \mathcal{O}(b^3). \tag{6.4}$$

A interação do tipo Thirring presente em (6.1), o fato de $J_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ se transformar como um vetor, bem como a densidade lagrangiana e os campos fermiônicos ψ, $\bar{\psi}$ possuírem as dimensões canônicas [1] $[M]^4$ e $[M]^{3/2}$, respectivamente, sugerem que definamos

$$H_\mu = \frac{1}{M^2} J_\mu \quad \text{e} \quad G = \frac{1}{2M^2}, \tag{6.5}$$

onde M é uma grandeza com unidade de massa que estabelece o valor da constante de acoplamento G.

Utilizando (6.4) e as definições (6.5) acima, podemos escrever a densidade lagrangiana (6.1), até primeira ordem no parâmetro b^μ, como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ie}{2M^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu H^\alpha b^\beta - ieA_\mu^{\text{ext}} + ib_\mu\gamma_5\right)\psi - \frac{1}{2}M^2 H_\mu H^\mu \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ie}{2M^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu H^\alpha b^\beta - ieA_\mu^{\text{ext}} + ib_\mu\gamma_5 - ieH_\mu\right)\psi + \frac{1}{2}M^2 H_\mu H^\mu. \end{aligned}\tag{6.6}$$

É importar frisar que os conteúdos físicos presentes nos modelos (6.1) e (6.6), em nível clássico, são idênticos até a ordem aqui considerada no parâmetro de quebra b^μ. Apenas linearizamos o termo responsável pela interação no modelo original através de uma representação conveniente da corrente J_μ.

6.2 GAUGEAMENTO DO MODELO

Introduzindo os campos auxiliares A^μ, θ e realizando o procedimento de Stückelberg através das transformações

$$H_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta, \quad \psi \to e^{-ie\theta}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{ie\theta}\bar{\psi}, \tag{6.7}$$

obtemos de (6.6) a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}'' = i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ie}{2M^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu A^\alpha b^\beta - ieA_\mu^{\text{ext}} + ib_\mu\gamma_5 - ieA_\mu\right)\psi + \frac{1}{2}M^2(A-\partial\theta)^2, \tag{6.8}$$

que é invariante pela transformação de *gauge*

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \\ \theta(x) &\to \theta'(x) = \theta(x) + \Lambda(x),\end{aligned}\tag{6.9}$$

[1] Estamos assumindo $\hbar$=c=1.

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}\psi(x),$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}(x).$$

Conforme visto nos capítulos 4 e 5, pelo fato da densidade lagrangiana (6.8) possuir simetria local de *gauge*, a introdução de um termo contendo fantasmas de Faddeev-Popov e de fixação de *gauge* da forma

$$\mathcal{L}_{\text{GF+FP}} = -\frac{1}{2\xi}(\mathcal{F}[A,\theta])^2 + i\bar{C}\boldsymbol{\delta}\mathcal{F}[A,\theta], \tag{6.10}$$

estabelece uma teoria com simetria BRST. Além disso, escolhendo $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}[A,\theta] = \partial_\mu A^\mu + \xi M^2\theta,$$

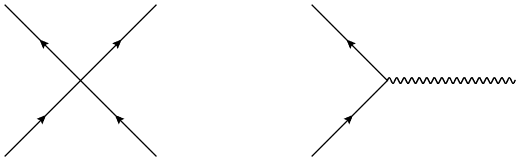
faz com que os campos fantasmas C, $\bar{C}$ e o campo de Stückelberg θ se desacoplem dos campos A^μ e ψ, fornecendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & i\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{ie}{2M^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu A^\alpha b^\beta - ieA_\mu^{\text{ext}} + ib_\mu\gamma_5 - ieA_\mu\right)\psi + \frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}M^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \frac{1}{2}\xi M^4\theta^2 - i\left(\partial_\mu\bar{C}\partial^\mu C - \xi M^2\bar{C}C\right).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Em (6.11), o campo A^μ não possui termo cinético. Por este motivo, não podemos interpretar, em nível clássico, o termo $\frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu$ como um termo massivo para o campo de *gauge*. Isto se deve ao fato de que o parâmetro na densidade lagrangiana do sistema que representa a massa da partícula deve aparecer no polo do propagador bosônico (spin 1) e este último está diretamente relacionado ao termo cinético.

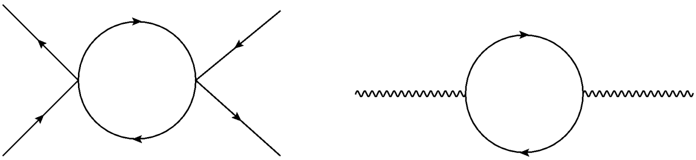
O modelo aqui estudado é um exemplo de um processo de bosonização parcial, onde uma teoria originalmente constituída de campos fermiônicos foi transformada, através de um procedimento matemático, em uma teoria equivalente que apresenta campos bosônicos e fermiônicos interagentes. Portanto, (6.11) é ainda equivalente ao modelo originalmente proposto, entretanto a nova simetria que está presente no modelo *gaugeado* facilita o seu estudo. Mais tarde veremos que esta simetria reduz o grau superficial das divergências presentes nas amplitudes de transição.

A título de ilustração, as figuras 6.1a e 6.1b são os vértices fundamentais de cada modelo, enquanto que as figuras 6.2a e 6.2b representam o processo de polarização do vácuo em ordem mais baixa de perturbação.



(a) (b)

Figura 6.1: (a) Vértice do modelo original (b) vértice do modelo *gaugeado* .



(a) (b)

Figura 6.2: Diagramas de polarização do vácuo em ordem mais baixa para (a) modelo original (b) modelo *gaugeado*.

Das equações de Euler-Lagrange e da densidade lagrangiana (6.11), obtemos as equações de movimento para os campos ψ e A_μ:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu(\partial_\mu + ib_\mu\gamma_5)\psi &= \frac{-e}{2M^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu A^\alpha b^\beta\gamma^\mu\psi - e\gamma^\mu(A_\mu + A_\mu^{\text{ext}})\psi, \\ \frac{1}{\xi}\partial^\lambda(\partial_\nu A^\nu) + M^2A^\lambda &= -e\bar{\psi}\gamma^\lambda\psi - \frac{e}{M^2}\epsilon_{\alpha\nu\mu\beta}g^{\lambda\alpha}\partial^\nu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)b^\beta. \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.3 PROPAGADORES

O propagador $S^b(x)$ para o campo ψ é definido pela equação

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \not{b}\gamma_5)_{\alpha\beta}S^b_{\beta\eta}(x) = \delta(x)\delta_{\alpha\eta}. \tag{6.13}$$

Escrevendo $S^b(x)$ como a transformada inversa de Fourier

$$S^b_{\beta\eta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4pS^b_{\beta\eta}(p)e^{-ipx}, \tag{6.14}$$

e substituindo em (6.13), obtemos simbolicamente

$$S^b(p) = \frac{1}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\not{p}}\left[\frac{-\not{b}\gamma_5}{\not{p}}\right]^n,$$

cuja aproximação de primeira ordem em b é

$$S^b(p) = \frac{1}{\not{p}} - \frac{\not{b}\gamma_5}{\not{p}} = \frac{\not{p} - \not{b}\gamma_5}{p^2}. \tag{6.15}$$

Pela semelhança de (6.15) com o propagador fermiônico no caso $m = 0$, definiremos os propagadores avançado e retardado por

$$S^b_{R/A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{\not{p} - \not{b}\gamma_5}{p^2 \pm i\eta p^0} \right] e^{-ipx}, \tag{6.16}$$

e, da mesma forma, os propagadores de Feynman e Dyson

$$S^b_{F/D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{\not{p} - \not{b}\gamma_5}{p^2 \pm i\eta} \right] e^{-ipx}. \tag{6.17}$$

Para o campo A^μ, o propagador $D^b_{\mu\nu}$ é definido pela equação

$$\left(\partial_\lambda \partial^\mu + \xi M^2 \delta^\mu_\lambda\right) D^b_{\mu\nu}(x) = g_{\lambda\nu} \delta(x). \tag{6.18}$$

Considerando

$$D^b_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, D^b_{\mu\nu}(p) e^{-ipx}, \tag{6.19}$$

segue a equação

$$\left(-p_\lambda p^\mu + \xi M^2 \delta^\mu_\lambda\right) D^b_{\mu\nu}(p) = g_{\lambda\nu}. \tag{6.20}$$

Da equação (6.20), o propagador deve ter a forma $D^b_{\mu\nu}(p) = A p_\mu p_\nu + B g_{\mu\nu}$, com

$$A = \frac{-1}{M^2\xi(p^2 - M^2\xi)} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{1}{M^2\xi}. \tag{6.21}$$

Portanto, no espaço das posições

$$\begin{aligned} D^b_{\mu\nu}(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 - M^2\xi} \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2\xi} p_\mu p_\nu - \frac{p^2}{M^2\xi} g_{\mu\nu} \right) e^{-ipx} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2\xi} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{M^2\xi} \Box \right) \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - M^2\xi} \\ &= -\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2\xi} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{M^2\xi} \Box \right) G(x, \xi), \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde definimos

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - M^2\xi}. \tag{6.23}$$

No caso em que $\xi > 0$, $G(x, \xi)$ coincide com a função de Green do campo de Klein-Gordon com $m^2 = M^2\xi$. Assim, os propagadores retardado, avançado, de Feynman e de

Dyson são definidos por

$$(D^b_{R/A})_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi^4}\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2\xi}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{M^2\xi}\Box\right)\int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - M^2\xi \pm i\eta p^0}, \tag{6.24}$$

$$(D^b_{F/D})_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi^4}\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2\xi}\partial_\mu\partial_\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{M^2\xi}\Box\right)\int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - M^2\xi \pm i\eta}. \tag{6.25}$$

No caso $\xi < 0$, a definição dos suportes causais da distribuição $G(x, \xi)$ não é possível. Por este motivo, assumiremos a partir de agora que $\xi > 0$, pois futuramente utilizaremos relações de dispersão causais que envolvem distribuições com suportes causais bem definidos.

Vale ressaltar que no caso $\xi < 0$, o parâmetro M que aparece em $G(x, \xi)$ estaria associado a uma massa imaginária e esta não possui realidade física para campos de matéria. Isso se reflete na representação espectral dos propagadores, cujas massas devem ser reais e positivas. Porém, se insistirmos em tomar tal parâmetro como real, devemos modificar o contorno dos polos acarretando a existência de modos tachyônicos ($p^2 < 0$).

6.4 TENSOR DE POLARIZAÇÃO DO VÁCUO

Para obtermos o tensor de polarização do vácuo do modelo em questão na representação de Heisenberg, passaremos às equações integrais associadas às equações de movimento (6.12)

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi_f(x) - e\int S^b_R(x-y)\Big[\frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{2M^2}\partial^\nu A^\alpha(y)\gamma^\mu b^\beta + \gamma^\mu(A_\mu + A^{\text{ext}}_\mu)(y)\Big]\psi(y)d^4y,\\
A^\mu(x) &= A^\mu_f(x) - e\int (D^b_R)^{\mu\nu}(x-y)\Big\{(\bar\psi\gamma_\nu\psi)(y) + \frac{b_\beta g_{\nu\alpha}}{M^2}\epsilon^{\alpha\lambda\rho\beta}\partial_\lambda\Big[(\bar\psi\gamma_\rho\psi)(y)\Big]\Big\}d^4y,
\end{aligned} \tag{6.26}$$

onde os propagadores retardados foram definidos em (6.16) e (6.24).

Assumindo que os campos A^μ e ψ possam ser escritos como uma série de potências no parâmetro e

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \cdots,\\
A_\mu(x) &= A^{(0)}_\mu(x) + eA^{(1)}_\mu(x) + e^2A^{(2)}_\mu(x) + \cdots,
\end{aligned} \tag{6.27}$$

e substituindo as expansões acima em (6.26), obtemos

$$\psi^{(0)}(x) = \psi_f(x), \tag{6.28a}$$

$$A^{(0)}_\mu(x) = (A_f)_\mu(x), \tag{6.28b}$$

$$\psi^{(1)}(x) = -\int S^b_R(x-y)\Big[\frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{2M^2}\partial^\nu A^{(0)\alpha}(y)\gamma^\mu b^\beta + \gamma^\mu(A^{(0)}_\mu + \mathcal{A}^{\text{ext}}_\mu)(y)\Big]\psi^{(0)}(y)d^4y, \tag{6.28c}$$

$$A^{(1)}_\mu(x) = -\!\int\!(D^b_R)_{\mu\nu}(x-y)\Big\{(\bar\psi^{(0)}\gamma^\nu\psi^{(0)})(y) + \frac{b^\beta g^{\nu\alpha}}{M^2}\epsilon_{\alpha\lambda\rho\beta}\partial^\lambda\Big[(\bar\psi^{(0)}\gamma^\rho\psi^{(0)})(y)\Big]\Big\}d^4y, \tag{6.28d}$$

$$\bar\psi^{(1)}(x) = -\int\bar\psi^{(0)}(y)\Big[\frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{2M^2}\partial^\nu A^{(0)\alpha}(y)\gamma^\mu b^\beta + \gamma^\mu(A^{(0)}_\mu + \mathcal{A}^{\rm ext}_\mu)(y)\Big]S^b_A(y-x)d^4y, \tag{6.28e}$$

onde usamos $(S^b_R)^\dagger(x)\gamma^0 = \gamma^0 S^b_A(x)$.

Conforme visto na seção 3.3, o operador corrente é dado por

$$J_\mu(x) = -\frac{e}{2}[\bar\psi(x),\gamma_\mu\psi(x)] = J^{(0)}_\mu(x) + eJ^{(1)}_\mu(x) + e^2J^{(2)}_\mu(x) + \cdots, \tag{6.29}$$

onde, já fazendo uso de (6.28),

$$J^{(0)}_\mu(x) = 0; \tag{6.30a}$$

$$J^{(1)}_\mu(x) = -\frac{1}{2}[\bar\psi^{(0)}(x),\gamma_\mu\psi^{(0)}(x)]; \tag{6.30b}$$

$$\begin{aligned}J^{(2)}_\mu(x) &= -\frac{1}{2}[\bar\psi^{(0)}(x),\gamma_\mu\psi^{(1)}(x)] - \frac{1}{2}[\bar\psi^{(1)}(x),\gamma_\mu\psi^{(0)}(x)]\\ &= \frac{1}{2}\int\Big\{\big[\bar\psi_f(x),\gamma_\mu S^b_R(x-y)\gamma^\lambda\psi_f(y)\big] + \big[\bar\psi_f(y)\gamma^\lambda S^b_A(y-x),\gamma_\mu\psi_f(x)\big]\Big\}\\ &\times\left[\frac{\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}}{2M^2}\partial^\nu A^{(0)\alpha}(y)b^\beta + A^{(0)}_\lambda(y) + A^{\rm ext}_\lambda(y)\right]d^4y.\end{aligned} \tag{6.30c}$$

Tomando o valor esperado no vácuo do operador corrente em segunda ordem em e, concluímos, em completa analogia com (3.99)

$$\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle = \int\Pi^{\mu\nu}(x-y)A^{\rm ext}_\nu(y)d^4y, \tag{6.31}$$

onde o tensor de polarização do vácuo é dado agora por

$$\Pi^{\mu\nu}(x) = \frac{e^2}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu S^b_R(x)\gamma^\nu S^{(1)}_b(-x) + \gamma^\nu S^b_A(-x)\gamma^\mu S^{(1)}_b(x)\right], \tag{6.32}$$

e a função especial $S^{(1)}_b$, cujo cálculo está no apêndice C, é

$$\begin{aligned}(S^{(1)}_b)_{\alpha\beta}(x) &\coloneqq \langle 0|[\bar\psi_{f\beta}(y),\psi_{f\alpha}(x)]|0\rangle\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int d^4p\Big\{\delta[(p-b)^2]\Big[\not p - \not b - \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p-b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\\ &+ \delta[(p+b)^2]\Big[\not p + \not b + \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p+b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\Big\}e^{-ipx}.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Por conveniência, escreveremos os propagadores avançado e retardado na forma

$$S^b_{R/A}(x) = \frac{1}{2\pi^4}\int d^4p\frac{\not p}{p^2\pm i\eta p^0}e^{-ipx} - \frac{1}{2\pi^4}\int d^4p\frac{\not b\gamma_5}{p^2\pm i\eta p^0}e^{-ipx}$$

$$= \mathcal{S}^0_{R/A} + \mathcal{S}^b_{R/A}, \tag{6.34}$$

que permite a decomposição do tensor de polarização do vácuo em

$$\Pi^{\mu\nu}(x) = \Pi^{\mu\nu}_0(x) + \Pi^{\mu\nu}_b(x), \tag{6.35}$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu}_0(x) = \frac{e^2}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \mathcal{S}^0_R(x)\gamma^\nu S^{(1)}_b(-x) + \gamma^\mu S^{(1)}_b(x)\gamma^\nu \mathcal{S}^0_A(-x)\right], \tag{6.36}$$

$$\Pi^{\mu\nu}_b(x) = \frac{e^2}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \mathcal{S}^b_R(x)\gamma^\nu S^{(1)}_b(-x) + \gamma^\mu S^{(1)}_b(x)\gamma^\nu \mathcal{S}^b_A(-x)\right]. \tag{6.37}$$

Decorre das definições (6.33), (6.34) e da relação de Sokhotski-Plemelj

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, \tag{6.38}$$

que o termo $\Pi^{\mu\nu}_0$ do tensor de polarização do vácuo é

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}_0(x) = \frac{-e^2}{2(2\pi)^7}\int d^4p\, d^4p' d^4p'' e^{-ipx}\delta(p - p' + p'')\Bigg\{ \\
\Bigg[\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu \not{p}'\gamma^\nu\Big[(\not{p}'' - \not{b}) - \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'' - b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\Big\}\delta[(p'' - b)^2] + \\
+ \mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu \not{p}'\gamma^\nu\Big[(\not{p}'' + \not{b}) + \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'' + b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\Big\}\delta[(p'' + b)^2]\Bigg]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\delta(p'^2)\epsilon(p')\Big] \\
+ \Bigg[\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\Big[(\not{p}' - \not{b}) - \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p' - b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\gamma^\nu\not{p}'\Big\}\delta[(p' - b)^2] + \\
+ \mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\Big[(\not{p}' + \not{b}) + \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p' + b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\gamma^\nu\not{p}'\Big\}\delta[(p' + b)^2]\Bigg]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\delta(p''^2)\epsilon(p'')\Big]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Os traços que aparecem na expressão acima são calculados facilmente através das propriedades bem conhecidas das matrizes de Dirac [27]

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu \not{p}'\gamma^\nu(\not{p}''-\not{b})\big] = 4\big[p'^\mu(p''-b)^\nu - g^{\mu\nu}p'(p''-b) + p'^\nu(p''-b)^\mu\big],\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu \not{p}'\gamma^\nu(\not{p}''+\not{b})\big] = 4\big[p'^\mu(p''+b)^\nu - g^{\mu\nu}p'(p''+b) + p'^\nu(p''+b)^\mu\big],\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}'-\not{b})\gamma^\nu\not{p}''\big] = 4\big[(p'-b)^\mu p''^\nu - g^{\mu\nu}(p'-b)p'' + (p'-b)^\nu p''^\mu\big],\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}'+\not{b})\gamma^\nu\not{p}''\big] = 4\big[(p'+b)^\mu p''^\nu - g^{\mu\nu}(p'+b)p'' + (p'+b)^\nu p''^\mu\big],\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p''-b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\not{p}'\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\big] = 24\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p''-b)_\alpha p'_\beta,\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p''+b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\not{p}'\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\big] = 24\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p''+b)_\alpha p'_\beta,\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'-b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\nu\not{p}''\big] = -24\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p'-b)_\alpha p''_\beta,\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'+b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\nu\not{p}''\big] = -24\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p'+b)_\alpha p''_\beta.
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

Escrevendo

$$
\Pi_0^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\Pi_0^{\mu\nu}(p)e^{-ipx},
$$

e fazendo uso das identidades (6.40), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\Pi_0^{\mu\nu}(p) = \frac{-2e^2}{(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\Bigg\{&\\
\bigg(\Big[p'^\mu(p''-b)^\nu - g^{\mu\nu}p'(p''-b) + p'^\nu(p''-b)^\mu - i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p''-b)_\alpha p'_\beta\Big]\delta[(p''-b)^2]&\\
+\Big[p'^\mu(p''+b)^\nu - g^{\mu\nu}p'(p''+b) + p'^\nu(p''+b)^\mu + i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(p''+b)_\alpha p'_\beta\Big]\delta[(p''+b)^2]\bigg)&\\
\times\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right] + \bigg(\Big[(p'-b)^\mu p''^\nu - g^{\mu\nu}(p'-b)p'' + (p'-b)^\nu p''^\mu&\\
- i\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu}(p'-b)_\alpha p''_\beta\Big]\delta[(p'-b)^2] + \Big[(p'+b)^\mu p''^\nu - g^{\mu\nu}(p'+b)p'' + (p'+b)^\nu p''^\mu&\\
+ i\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu}(p'+b)_\alpha p''_\beta\Big]\delta[(p'-b)^2]\delta[(p'+b)^2]\bigg)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}.&
\end{aligned}
\tag{6.41}
$$

Procedendo de maneira análoga, vemos que $\Pi_b^{\mu\nu}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu}(x) = \frac{e^2}{2(2\pi)^7}\int d^4p\,d^4p'd^4p''e^{-ipx}\delta(p-p'+p'')\Bigg\{&\\
\bigg(\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\not{b}\gamma_5\gamma^\nu\Big[(\not{p}''-\not{b}) - \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p''-b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\Big\}\delta[(p''-b)^2]+&\\
+\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\not{b}\gamma_5\gamma^\nu\Big[(\not{p}''+\not{b}) + \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p''+b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\Big\}\delta[(p''+b)^2]\bigg)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\delta(p'^2)\epsilon(p')\right]&\\
+\bigg(\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\Big[(\not{p}'-\not{b}) - \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'-b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\Big\}\delta[(p'-b)^2]+&\\
+\mathrm{Tr}\Big\{\gamma^\mu\Big[(\not{p}'+\not{b}) + \frac{i}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'+b)^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\Big]\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\Big\}\delta[(p'+b)^2]\bigg)&
\end{aligned}
$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\delta(p''^2)\epsilon(p'')\right]\Bigg\}. \tag{6.42}$$

Por sua vez, os traços que aparecem na expressão acima são dados por

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu \not{b}\gamma_5\gamma^\nu(\not{p}'' - \not{b})\big] = 4ib_\alpha(p'' - b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu},\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu \not{b}\gamma_5\gamma^\nu(\not{p}'' + \not{b})\big] = 4ib_\alpha(p'' + b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu},\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}' - \not{b})\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\big] = 4ib_\alpha(p' - b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu},\\
&\bullet\ \mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu(\not{p}' + \not{b})\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\big] = 4ib_\alpha(p' + b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu},\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p' - b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\big] = 24i\big[(p' - b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p' - b)b + (p' - b)^\nu b^\mu\big],\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p' + b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\nu\not{b}\gamma_5\big] = 24i\big[(p' + b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p' + b)b + (p' + b)^\nu b^\mu\big],\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'' - b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\not{b}\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\big] = 24i\big[(p'' - b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p'' - b)b + (p'' - b)^\nu b^\mu\big],\\
&\bullet\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(p'' + b)^\alpha\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\not{b}\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\big] = 24i\big[(p'' + b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p'' + b)b + (p'' + b)^\nu b^\mu\big].
\end{aligned} \tag{6.43}
$$

Utilizando as identidades acima e comparando com

$$\Pi_b^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\Pi_b^{\mu\nu}(p)e^{-ipx},$$

vemos que

$$
\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int d^4p' d^4p''\delta(p - p' + p'')\Bigg\{&\\
&\Bigg(\big[ib_\alpha(p'' - b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + (p'' - b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p'' - b)b + (p'' - b)^\nu b^\mu\big]\delta[(p'' - b)^2]\\
&+ \big[ib_\alpha(p'' + b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - (p'' + b)^\mu b^\nu + g^{\mu\nu}(p'' + b)b - (p'' + b)^\nu b^\mu\big]\delta[(p'' + b)^2]\Bigg)\\
&\times\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right] + \Bigg(\big[ib_\alpha(p' - b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu} + (p' - b)^\mu b^\nu - g^{\mu\nu}(p' - b)b\\
&+ (p' - b)^\nu b^\mu\big]\delta[(p' - b)^2] + \big[ib_\alpha(p' + b)_\beta\epsilon^{\alpha\beta\nu\mu} - (p' + b)^\mu b^\nu + g^{\mu\nu}(p' + b)b\\
&- (p' + b)^\nu b^\mu\big]\delta[(p' + b)^2]\Bigg)\left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6.44}
$$

Pode-se monstrar por contagem de potências que o tensor de polarização é quadraticamente divergente. Por este motivo, assumiremos que este esteja regularizado, como um todo, para que possamos realizar as mais diversas manipulações matemáticas.

A forma geral do tensor de polarização do vácuo é

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(p) = {}& A(p)p^\mu p^\nu + B(p)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta + C(p)p^\mu b^\nu + D(p)p^\nu b^\mu\\
&+ E(p)g^{\mu\nu} + F(p)b^\mu b^\nu,
\end{aligned} \tag{6.45}
$$

sendo A, B, C, D, E, F seis coeficiente (funções) que dependem de p^μ e b^μ.

A invariância de *gauge* do modelo garante que a corrente J^μ é conservada. Este fato estabele certas relações envolvendo os coeficientes que aparecem em (6.45), pois decorre de (6.31) que

$$\langle 0|\partial_\mu J^\mu(x)|0\rangle = \int \partial_\mu^{(x)}\Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu^{\text{ext}}(y)d^4y = 0,$$

e, portanto, $\partial_\mu \Pi^{\mu\nu}(x) = 0$.

No espaço dos momentos, esta relação torna-se

$$0 = p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = [Ap^2 + (bp)D + E]p^\nu + [Cp^2 + (bp)F]b^\nu, \tag{6.46}$$

que, devido à independência de p^μ e b^μ, leva aos vínculos

$$\begin{aligned} E &= -Ap^2 - (bp)D, \\ C &= -\frac{(bp)}{p^2}F. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Assim, considerando (6.47), concluímos que o tensor de polarização é da forma

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) = {} & A(p)\big[p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\big] + B(p)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta \\ & + D(p)\big[p^\nu b^\mu - (bp)g^{\mu\nu}\big] + F(p)\left[b^\mu b^\nu - \frac{(bp)}{p^2}p^\mu b^\nu\right]. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Decorrem de (6.48) as relações

$$\Pi^\mu{}_\mu = -3p^2A - 3(bp)D + F\left[b^2 - \frac{(bp)^2}{p^2}\right], \tag{6.49}$$

$$p^\rho b^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Pi^{\mu\nu} = -2\big[b^2p^2 - (bp)^2\big]B, \tag{6.50}$$

$$b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu} = D\big[p^2b^2 - (bp)^2\big] + F\left[b^2(bp) - \frac{(bp)^3}{p^2}\right], \tag{6.51}$$

$$b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu} = A\big[(bp)^2 - b^2p^2\big] + F\left[b^4 - \frac{(bp)^2}{p^2}b^2\right], \tag{6.52}$$

que tornam possível a determinação dos coeficientes A, B, D e F em função de termos calculáveis. De (6.50), (6.51) e (6.52), seguem

$$B(p) = \frac{-p^\rho b^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Pi^{\mu\nu}}{2\big[b^2p^2 - (bp)^2\big]}, \tag{6.53}$$

$$F(p) = \frac{p^2 b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}}{b^2\big[b^2p^2 - (bp)^2\big]} + \frac{p^2}{b^2}A(p) \tag{6.54}$$

$$D(p) = \frac{b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}}{b^2p^2 - (bp)^2} - \frac{(bp)}{p^2}F(p)$$

$$= \frac{b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}}{b^2p^2-(bp)^2} - \frac{(bp)b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}}{b^2\left[b^2p^2-(bp)^2\right]} - \frac{(bp)}{b^2}A(p), \tag{6.55}$$

Para descobrirmos A, substituímos (6.54) em (6.52) e obtemos

$$A(p) = \frac{-b^2}{2\left[b^2p^2-(bp)^2\right]}\left\{\frac{3(bp)}{b^2p^2-(bp)^2}\left[b_\mu p_\nu - \frac{(bp)}{b^2}b_\mu b_\nu\right]\Pi^{\mu\nu} - \frac{b_\mu b_\nu}{b^2}\Pi^{\mu\nu} + \Pi^{\mu}{}_{\mu}\right\}. \tag{6.56}$$

O apêndice D contém o cálculo explícito dos coeficientes A, B, D e F realizado para o caso $b = (b_0, 0, 0, 0)$, onde consideramos $b_0 \ll p_0$ e $b_0 \ll |\mathbf{p}|$ (a barra denota os coeficientes obtidos após a renormalização da carga):

$$\begin{aligned}
\bar{A}(p) = {} & \frac{-e^2}{4\pi^2}\left\{\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4}\right)\right\} = \\
& - i\frac{e^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{3}\Theta(p^2)\epsilon(p) + \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2)\right\},
\end{aligned}$$

$$\bar{B}(p) = -\frac{e^2}{8\pi}\Theta(p^2)\epsilon(p), \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}(p) = {} & \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\left\{\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right) - \frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2} + \frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4} + \frac{8}{15}p^0\right\} \\
& + i\frac{e^2}{8\pi b_0}\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2),
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
\bar{F}(p) = {} & \frac{-e^2}{8\pi^2 b_0^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5} - \frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|} - p_0|\mathbf{p}|\right) + \frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4} - \frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2} = \right. \\
& \left. + \frac{11p_0^2}{5} - \frac{16|\mathbf{p}|^2}{35}\right\} - i\frac{e^2p^2}{8\pi b_0^2}\left(\frac{p_0^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2).
\end{aligned} \tag{6.59}$$

No que segue, empregaremos o tensor de polarização obtido nesta seção para o cálculo do propagador bosônico corrigido.

6.5 PROPAGADOR CORRIGIDO

O propagador do campo A^μ interagente é definido na representação de Heisenberg por

$$\mathcal{D}_b{}^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle, \tag{6.60}$$

onde T denota o ordenamento temporal e $|0\rangle$ é o vácuo da teoria interagente, i.e., o estado de menor energia do hamiltoniano total do sistema associado à densidade lagrangiana (6.11).

Da equação de movimento (6.12) referente ao campo A^μ, podemos escrever

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A^\mu_f(x) - e\int (D^b_R)^{\mu\nu}(x-y)\Big\{(\bar\psi\gamma_\nu\psi)(y) + \frac{b_\beta g_{\nu\alpha}}{M^2}\epsilon^{\alpha\lambda\rho\beta}\partial_\lambda\Big[(\bar\psi\gamma_\rho\psi)(y)\Big]\Big\}d^4y \\ &=: A^\mu_f(x) + \int (D^b_R)^{\mu\nu}(x-y)\tilde{j}_\nu(y)d^4y, \end{aligned} \tag{6.61}$$

Substituindo (6.61) em (6.60), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_b)^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|T\{A^\mu_f(x)A^\nu_f(y)\}|0\rangle \\ &+ \int (D^b_R)^{\beta\nu}(y-y'')\big\langle 0\big|T\{A^\mu_f(x)\tilde{j}_\beta(y')\}\big|0\big\rangle d^4y'' \\ &+ \int (D^b_R)^{\mu\alpha}(x-y')\big\langle 0\big|T\{\tilde{j}_\alpha(y')\}A^\nu_f(y)\big|0\big\rangle d^4y' \\ &+ \int (D^b_R)^{\mu\alpha}(x-y')\big\langle 0\big|T\{\tilde{j}_\alpha(y')\tilde{j}_\beta(y'')\}\big|0\big\rangle (D^b_R)^{\beta\nu}(y-y'')d^4y'd^4y''. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Considerando agora as expansões no parâmetro e (6.27) em (6.62), obtemos uma série perturbativa para o propagador $(\mathcal{D}_b)^{\mu\nu}$. Dentre todos os termos desta série, consideraremos a chamada série de Schwinger-Dyson que corresponde a um somatório do tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b{}^{\mu\nu}(x) &\simeq (D^b_F)^{\mu\nu}(x) + i\int (D^b_F)^{\mu\alpha}(x-y')\Pi_{\alpha\beta}(y'-y'')(D^b_F)^{\beta\nu}(y'')dy'dy'' \\ &+i\int (D^b_F)^{\mu\alpha}(x-y')\Pi_{\alpha\beta}(y'-y'')(D^b_F)^{\beta\gamma}(y''-z)\Pi_{\gamma\delta}(z-z')(D^b_F)^{\delta\nu}(z')dy'dy''dzdz'\ldots \end{aligned} \tag{6.63}$$

No espaço dos momentos, a série de Schwinger-Dyson torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b{}^{\mu\nu}(p) &= (D^b_F)^{\mu\nu} + i(D^b_F)^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(D^b_F)^{\beta\nu} + i(D^b_F)^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(D^b_F)^{\beta\gamma}\Pi_{\gamma\delta}(D^b_F)^{\delta\nu} + \ldots \\ &= (D^b_F)^{\mu\nu} + i(D^b_F)^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(\mathcal{D}_b)^{\beta\nu}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Contraindo com $(\mathcal{D}_b^{-1})_{\nu\rho}$ e $(D^b_F)^{-1}_{\lambda\mu}$ obtemos

$$\begin{aligned} (D^b_F)^{-1}_{\lambda\mu}(\mathcal{D}_b)^{\mu\nu}(\mathcal{D}_b^{-1})_{\nu\rho} &= (D^b_F)^{-1}_{\lambda\mu}(D^b_F)^{\mu\nu}(\mathcal{D}_b^{-1})_{\nu\rho} + i(D^b_F)^{-1}_{\lambda\mu}(D^b_F)^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(\mathcal{D}_b)^{\beta\nu}(\mathcal{D}_b^{-1})_{\nu\rho} \\ (D^b_F)^{-1}_{\lambda\rho} &= (\mathcal{D}_b^{-1})_{\lambda\rho} + i\Pi_{\lambda\rho} \\ \therefore \qquad (\mathcal{D}_b^{-1})_{\lambda\rho}(p) &= (D^b_F)^{-1}_{\lambda\rho}(p) - i\Pi_{\lambda\rho}(p). \end{aligned} \tag{6.65}$$

Da equação (6.20), sabemos que

$$(D^b_F)^{-1}_{\mu\nu}(p) = -p_\mu p_\nu + M^2\xi g_{\mu\nu}. \tag{6.66}$$

Assim, de (D.115), (6.65), (6.66)

$$(\mathcal{D}_b^{-1})_{\mu\nu} = -p_\mu p_\nu + M^2\xi g_{\mu\nu} - i\Big\{ A(p)\big[p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\big] + B(p)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha b^\beta + D(p)\big[p_\nu b_\mu - (bp)g_{\mu\nu}\big] + F(p)\Big[b_\mu b_\nu - \frac{(bp)}{p^2}p_\mu b_\nu\Big]\Big\}, \tag{6.67}$$

e considerando a forma geral

$$(\mathcal{D}_b)_{\mu\nu}(p) = Rg_{\mu\nu} + Sp_\mu p_\nu + T\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha b^\beta + Ub_\mu p_\nu + Vp_\mu b_\nu + Xb_\mu b_\nu, \tag{6.68}$$

devemos ter

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= (\mathcal{D}_b^{-1})_{\mu\alpha}(\mathcal{D}_b)^\alpha{}_\nu \\
&= g_{\mu\nu}\left\{Ri\left(p^2\bar{A} + b_0p_0\bar{D} - iM^2\right) - iTb_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}\right\} \\
&+ p_\mu p_\nu\Bigg\{Ui\left(\frac{b_0^3p_0}{p^2}\bar{F} - b_0p_0\bar{A} - \frac{b_0p_0}{i\xi}\right) - R\left(\frac{1}{\xi} + i\bar{A}\right) - Tib_0^2\bar{B} \\
&+ Si\left(b_0p_0\bar{D} + \frac{b_0^2p_0^2}{p^2}\bar{F} - iM^2 - \frac{p^2}{i\xi}\right)\Bigg\} \\
&+ p_\mu b_\nu\Bigg\{Xi\left(\frac{b_0^3p_0}{p^2}\bar{F} - b_0p_0\bar{A} - \frac{b_0p_0}{i\xi}\right) + Tib_0p_0\bar{B} + Vi\left(b_0p_0\bar{D} + \frac{b_0^2p_0^2}{p^2}\bar{F} - iM^2 - \frac{p^2}{i\xi}\right) \\
&+ R\frac{ib_0p_0}{p^2}\bar{F}\Bigg\} \\
&+ b_\mu p_\nu\left\{Ui\left(p^2\bar{A} - b_0^2\bar{F} - iM^2\right) + Tib_0p_0\bar{B} - Si\left(p^2\bar{D} + b_0p_0\bar{F}\right) - Ri\bar{D}\right\} \\
&+ b_\mu b_\nu\left\{Xi\left(p^2\bar{A} - b_0^2\bar{F} - iM^2\right) - Vi\left(p^2\bar{D} + b_0p_0\bar{F}\right) - Tip^2\bar{B} - Ri\bar{F}\right\} \\
&+ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha b^\beta\left\{Ti\left(p^2\bar{A} + b_0p_0\bar{D} - iM^2\right) - iR\bar{B}\right\}.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Comparando os lados esquerdo e direito de (6.69), necessariamente deve ser verdade

$$\begin{cases}
Ri\left(p^2\bar{A} + b_0p_0\bar{D} - iM^2\right) - iTb_0^2\mathbf{p}^2\bar{B} = 1, \\
T\big(p^2\bar{A} + b_0p_0\bar{D} - iM^2\big) - Ri\bar{B} = 0, \\
U\Big(\frac{b_0^3p_0}{p^2}\bar{F} - b_0p_0\bar{A} - \frac{b_0p_0}{i\xi}\Big) + R\Big(\frac{i}{\xi} - \bar{A}\Big) - Tb_0^2\bar{B} + S\Big(b_0p_0\bar{D} + \frac{b_0^2p_0^2}{p^2}\bar{F} - iM^2 - \frac{p^2}{i\xi}\Big) = 0, \\
U\big(p^2\bar{A} - b_0^2\bar{F} - iM^2\big) + Tb_0p_0\bar{B} - S\left(p^2\bar{D} + b_0p_0\bar{F}\right) - R\bar{D} = 0, \\
X\Big(\frac{b_0^3p_0}{p^2}\bar{F} - b_0p_0\bar{A} - \frac{b_0p_0}{i\xi}\Big) + Tb_0p_0\bar{B} + V\Big(b_0p_0\bar{D} + \frac{b_0^2p_0^2}{p^2}\bar{F} - iM^2 - \frac{p^2}{i\xi}\Big) + R\frac{b_0p_0}{p^2}\bar{F} = 0, \\
X\big(p^2\bar{A} - b_0^2\bar{F} - iM^2\big) - V\left(p^2\bar{D} + b_0p_0\bar{F}\right) - Tp^2\bar{B} - R\bar{F} = 0,
\end{cases} \tag{6.70}$$

que é um sistema linear de seis equações nas variáveis R, S, T, U, V e X.

Notemos que as duas primeiras equações envolvem apenas as variáveis R e T. Por conta disso, é imediato que

$$R = \frac{\Xi}{b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2}, \tag{6.71}$$

$$T = \frac{i\bar{B}}{b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2}, \tag{6.72}$$

onde definimos $\Xi = M^2\xi + i(b_0p_0\bar{D} + p^2\bar{A})$.

Da terceira e quarta equação, podemos obter S e U:

$$S = \frac{1}{\Gamma\left(p^2 - M^2\xi\right)\left(b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2\right)}\Big\{p^2\big[b_0^2\bar{B}^2 - \Xi(1+i\bar{A})\big]\big(p^2\bar{A} - b_0^2\bar{F} - iM^2\xi\big)$$
$$+ \big[b_0^2p_0^2\bar{B}^2 + ib_0p_0\bar{D}\Xi\big]\big[b_0^2\bar{F} + p^2(i-\bar{A})\big]\Big\}, \tag{6.73}$$

$$U = \frac{1}{\Gamma\left(p^2 - M^2\xi\right)\left(b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2\right)}\Big\{- ib_0p_0p^2\big[\bar{B}^2\left(p^2 - M^2\xi\right) + \Xi\left(\bar{D}^2 + (\bar{A}-i)\bar{F}\right)\big]$$
$$- p^2\Xi\left(M^2\xi + ip^2\bar{A}\right)\bar{D} + b_0^2\bar{D}\left[p^4\bar{B}^2 - p_0^2(\bar{B}^2p^2 + i\Xi\bar{F})\right] - b_0^3p_0\mathbf{p}^2\bar{B}^2\bar{F}\Big\}, \tag{6.74}$$

sendo $\Gamma = \bar{A}p^4 + (b_0p_0\bar{D} - iM^2\xi)p^2 + b_0^2\mathbf{p}^2\bar{F}$.

Por fim, das duas últimas equações obtemos V e X:

$$V = -\frac{b_0p_0\left(\bar{F}\Xi + i\bar{B}^2p^2\right)}{\Gamma\left(b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2\right)}, \tag{6.75}$$

$$X = \frac{p^2\left(\bar{F}\Xi + i\bar{B}^2p^2\right)}{\Gamma\left(b_0^2\mathbf{p}^2\bar{B}^2 + \Xi^2\right)}. \tag{6.76}$$

Analisando os polos do propagador, verificamos que só existe um polo real e este corresponde à massa física $M\sqrt{\xi}$. Os outros polos estão fora da reta real e representam modos físicos espúrios que são consequência da violação da simetria de Lorentz, da mesma forma que ocorre quando estudamos teorias interagentes em *gauges* não covariantes, como por exemplo o gauge de Coulomb em QED e gauges algébricos (não covariantes) em QCD [26].

Como pode ser constatado ao se analisar a seção 6.3, o propagador inverso $D_b^{-1}(p)$ que aparece em (6.20), corresponde à transformada de Fourier da parte que contém os operadores diferenciais na equação (6.18), que definiu a função de Green para o campo A^μ. Esta parte, por sua vez, é proveniente das equações de Euler-Lagrange. Portanto, podemos inferir a partir de $\mathcal{D}_b^{-1}(p)$ quais são os termos que devem estar presentes na ação do modelo para que tenhamos $\mathcal{D}_b(p)$ como propagador.

Devido à forma complicada do propagador inverso (6.20), ainda não conseguimos identificar os contratermos da densidade lagrangiana que levam aos termos de ordem linear e superiores em b^μ na qual temos interesse, ou seja, ainda não indentificamos os contratermos que levam a $b_\mu b_\nu$, $b_\mu p_\nu$ e $p_\mu b_\nu$.

Em relação aos outros termos, podemos constatar as seguintes correspondências entre termos presentes na ação e termos presentes em (6.20):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\longleftrightarrow p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2}M^2\xi A_\mu A^\mu &\longleftrightarrow M^2\xi g_{\mu\nu}, \\ -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}A_\alpha b_\beta &\longleftrightarrow \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta. \end{aligned} \tag{6.77}$$

Concluímos então que um termo do tipo Chern-Simons $-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}A_\alpha b_\beta$ foi gerado por correções radiativas. Além disso, também foi gerado o termo cinético $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ para o campo bosônico, tornando possível a interpretação deste último como um campo de *gauge* massivo, cuja massa física foi gerada dinâmicamente.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese apresentamos um modelo do tipo Thirring que descreve a interação entre quatro férmions não massivos e que viola as simetrias de Lorentz e CPT. Este modelo pode ser considerado como uma teoria efetiva, em alguma escala de energia, que incorpora efeitos da quebra da simetria de Lorentz no cenário da física de partículas.

Vimos que o procedimento de Stückelberg, através da linearização da interação e introdução de campos auxiliares, permitiu incorporarmos a invariância de *gauge* ao modelo que inicialmente era do tipo corrente-corrente, isto é, sem campo mediador. Vale ressaltar que o modelo obtido por meio deste procedimento é equivalente ao modelo original, corrente-corrente, e exemplifica o processo de bosonização parcial.

De posse de uma densidade lagrangiana com invariância de local *gauge*, vimos que a introdução de um termo de fixação de *gauge* e contendo fantasmas de Fadeev-Popov leva à uma densidade lagrangiana com invariância BRST.

Usando teoria da perturbação na representação de Heisenberg, calculamos o tensor de polarização do vácuo do modelo e o propagador corrigido para o campo vetorial massivo. Como consequência, observamos que o termo cinético do campo vetorial, embora ausente na densidade lagrangiana original, foi gerado pelas correções radiativas, assim como um termo do tipo Chern-Simons.

Como perspectivas futuras, pretendemos

- calcular as demais correções radiativas ao modelo (correção de vértice e auto-energia do férmion);

- estudar o potencial efetivo do modelo introduzindo outras simetrias internas e extendendo o grupo de *gauge*;

- analisar a questão do confinamento em (3+1) dimensões ao estilo do modelo de Gross-Neveau;

- estudar via a formulação da matriz S em outras representações, em particular na de Furry, a estabilidade do vácuo e a produção de pares na presença de campos externos intensos.

Apêndice A

NOÇÕES SOBRE TEORIA DE GRUPOS

Neste apêndice serão abordados algumas definições e resultados da teoria de grupos e álgebras necessários à leitura deste texto.

A teoria de grupos de Lie envolve naturalmente vários conceitos topológicos que fogem ao escopo deste texto. Por este motivo, nos restringiremos aos grupos lineares que, além da grande importância em física, possuem a estrutura de grupo de Lie e a vantagem de poderem ser estudados de maneira mais simples.

As demonstrações de todos os resultados aqui apresentados podem ser encontradas nas referências [20, 34].

A.1 ALGUMAS ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Definição. Um *grupo* consiste num conjunto G e numa aplicação $\cdot : G \times G \to G$ tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in G$;
2. existe $e \in G$, chamado elemento identidade, tal que para todo $a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3. para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$, chamado elemento inverso, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$;

Caso a operação definida em G seja comutativa, i.e., se para quaisquer $a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$ o grupo é dito *abeliano*.

Definição. Um *corpo* consiste num conjunto K e de duas operações $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$ tais que:

1. O par $(K, +)$ forma um grupo abeliano com elemento identidade $0 \in K$;

2. O par $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ forma um grupo abeliano com elemento identidade $1 \in K$;

3. Para quaisquer $a, b, c \in K$, temos $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

Definição. Um *espaço vetorial sobre um corpo* K consiste num conjunto V, cujos elementos são chamados de vetores, e de duas operações $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $v, w \in V$:

1. O par $(V, +)$ forma um grupo abeliano com elemento identidade $0 \in V$;

2. $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$;

3. $1 \cdot v = v$, onde 1 é o elemento identidade referente à operação $\cdot$ em K;

4. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$;

5. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.

Definição. Uma *álgebra de Lie* consiste num espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre o corpo K e de uma operação $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, tal que para quaisquer $u, v, w \in \mathfrak{g}$ e $\alpha, \beta \in K$ são satisfeitas:

1. $[\alpha \cdot u + \beta \cdot v, w] = \alpha \cdot [u, w] + \beta \cdot [v, w]$ e $[u, \alpha \cdot v + \beta \cdot w] = \alpha \cdot [u, v] + \beta \cdot [u, w]$ (bilinearidade);

2. $[u, v] = -[v, u]$ (antissimetria);

3. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (identidade de Jacobi).

A.2 O MAPA EXPONENCIAL

Denotemos por $M(n, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{C}$. Com as operações usuais de multiplicação por escalar e soma de matrizes, $M(n, \mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo.

O mapa exponencial é a função $\exp : M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ definida por

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \tag{A.1}$$

Notemos que a definição do mapa exponencial só tem sentido para as matrizes em que a série acima é convergente. De fato, pode-se mostrar que a série (A.1) converge na norma

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |X_{ij}|^2}, \tag{A.2}$$

para toda matriz $X \in M(n, \mathbb{C})$. A convergência na norma garante os seguintes resultados:

Proposição 1. *Sejam $X, Y \in M(n, \mathbb{C})$ e $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$. São verdadeiras:*

1. $\dfrac{d}{d\tau}\exp(\tau X) = X\exp(\tau X) = \exp(\tau X)X$;
2. Se $[X, Y] \coloneqq XY - YX = 0$ então $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y)$;
3. $\exp(X)$ é inversível e $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$;
4. $\exp((\tau + \sigma)X) = \exp(\tau X)\exp(\sigma X)$;
5. Se Y é inversível, então $Y^{-1}\exp(X)Y = \exp(Y^{-1}XY)$;
6. $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{Tr}(X))$.

A.3 GRUPOS LINEARES

Consideremos o subconjunto $GL(n, \mathbb{C}) \subset M(n, \mathbb{C})$ das matriz inversíveis, i.e., $GL(n, \mathbb{C}) \coloneqq \{X \in M(n, \mathbb{C}) : \det(X) \neq 0\}$.

Com a multiplicação usual de matrizes, temos que para $X, Y \in GL(n, \mathbb{C})$, $\det(XY) = \det(X)\det(Y) \neq 0$, ou seja, $XY \in GL(n, \mathbb{C})$. Além disso, a multiplicação matricial é associativa, a matriz identidade de dimensão n pertence a $GL(n, \mathbb{C})$, pois $\det(\mathbb{I}) = 1$, e $\det(X^{-1}) = \det(X)^{-1} \neq 0$ implicando em $X^{-1} \in GL(n, \mathbb{C})$. Logo, $GL(n, \mathbb{C})$ é um grupo.

Notemos que $GL(n, \mathbb{C})$ possui como alguns de seus subgrupos, i.e., subconjuntos de $GL(n, \mathbb{C})$ que possuem a estrutura de grupo com as operações usuais de matrizes, os seguintes conjuntos:

$$U(n) \coloneqq \{X \in GL(n, \mathbb{C}) : X^{-1} = X^{\dagger}\}, \tag{A.3a}$$

$$SU(n) \coloneqq \{X \in GL(n, \mathbb{C}) : X^{-1} = X^{\dagger} \text{ e } \det(X) = 1\}, \tag{A.3b}$$

$$O(n) \coloneqq \{X \in GL(n, \mathbb{C}) : X^{-1} = X^{T}\}, \tag{A.3c}$$

$$SO(n) \coloneqq \{X \in GL(n, \mathbb{C}) : X^{-1} = X^{T} \text{ e } \det(X) = 1\}. \tag{A.3d}$$

Definição. Um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ é chamado de *grupo linear*.

A.4 A ÁLGEBRA DE LIE DE UM GRUPO LINEAR

Como espaço vetorial, $M(n, \mathbb{C})$ pode ser identificado como $\mathbb{R}^{2n^2}$ através do isomorfismo

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & \cdots & a_{1n} + ib_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ib_{n1} & \cdots & a_{nn} + ib_{nn} \end{bmatrix} \longmapsto (a_{11}, b_{11}, \cdots, a_{1n}, b_{1n}, \cdots, a_{n1}, b_{n1} \cdots, a_{nn}, b_{nn}).$$

Desta forma, todas as noções de limites, continuidade e diferenciabilidade de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, podem ser aplicadas em $M(n, \mathbb{C})$ por intermédio da correspondência acima. Por exemplo, consideremos uma função

$$\mathbb{R} \supset (a,b) \ni t \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} a_{11}(t) + ib_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) + ib_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) + ib_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) + ib_{nn}(t) \end{bmatrix} \in M(n, \mathbb{C}).$$

Então f é contínua (diferenciável) em (a,b) se e somente se para quaisquer $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ as funções componentes a_{ij} e b_{ij} forem contínuas (diferenciáveis) em (a,b). No caso de f ser diferenciável

$$f'(t) = \begin{bmatrix} a'_{11}(t) + ib'_{11}(t) & \cdots & a'_{1n}(t) + ib'_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(t) + ib'_{n1}(t) & \cdots & a'_{nn}(t) + ib'_{nn}(t) \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Segue dos resultados acima a seguinte proposição

Proposição 2. *Sejam $f, g : (a,b) \to M(n, \mathbb{C})$ funções diferenciáveis. Então a função $f \cdot g : (a,b) \to M(n, \mathbb{C})$ definida por $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$ é diferenciável em (a,b) e $(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.*

Definição. Seja G um grupo linear. O *espaço tangente a G em $\mathbb{I}$,* denotado por $\mathfrak{g}$, é o conjunto formado pelos elementos $X \in M(n, \mathbb{C})$ para os quais existe uma curva $(a,b) \ni t \mapsto \sigma(t) \in G$ de classe C^1, tal que[1] $\sigma(0) = \mathbb{I}$ e $\sigma'(0) = X$.

Para $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ segue da definição acima que $\alpha X + \beta Y \in \mathfrak{g}$ e $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, onde $[X, Y] := XY - YX$ é o comutador das matrizes X e Y. Além disso, o comutador possui as propriedades de bilinearidade, antissimetria e satisfaz a identidade de Jacobi. O resultado acima pode ser resumido na seguinte proposição:

Proposição 3. *O* espaço tangente ao grupo linear G em $\mathbb{I}$ é uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Por este motivo, $\mathfrak{g}$ é chamado de *álgebra de Lie* do grupo linear G.

[1] Por hipótese, $0 \in (a,b)$.

Como exemplo, consideremos o grupo linear $SO(n)$ e seja $(a,b) \ni t \mapsto A(t) \in G$ uma curva de classe C^1. Pela definição de $SO(n)$, segue que para todo $t \in (a,b)$, $A(t)A^T(t) = \mathbb{I}$. Derivando em $t = 0$ e fazendo $A(0) = \mathbb{I}, A'(0) = X$, segue da proposição 2 que $A'(0)A^T(0) + A(0)A'^T(0) = X + X^T = 0$, ou seja, $X^T = -X$. Reciprocamente, seja $X \in M(n,\mathbb{C})$ antissimétrico, i.e., $X^T = -X$ e considere a curva $(-1,1) \ni t \mapsto A(t) = \exp(tX) \in M(n,\mathbb{C})$, que é de classe C^1. Utilizando as propriedades do mapa exponencial, temos que $\forall t \in (-1,1), A(t)A^T(t) = \exp(tX)(\exp(tX))^T = \exp(tX)\exp(tX^T) = \exp(t(X+X^T)) = \mathbb{I}$ e $\det(A(t)) = \det(\exp(tX)) = \exp(\mathrm{Tr}(tX)) = 1$. Logo, $A(t) \in SO(n)$.

Assim,

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^T = -X\}. \tag{A.5}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^T = -X\}, \tag{A.6}$$

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^\dagger = -X \text{ e } \mathrm{Tr}(X) = 0\}, \tag{A.7}$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^\dagger = -X\}. \tag{A.8}$$

No exemplo acima vimos que $\exp(X) \in SO(n)$, se $X \in \mathfrak{so}(n)$. De fato, este é um resultado geral entre grupos lineares e a sua correspondente álgebra de Lie:

Proposição 4. *Sejam G um grupo linear e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Então, o mapa exponencial mapeia $\mathfrak{g}$ em G, ou seja, $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$.*

A recíproca desta proposição não é verdadeira, ou seja, nem todo elemento de G pertence ao conjunto $\exp(\mathfrak{g})$. De modo geral, o seguinte resultado é verdadeiro:

Proposição 5. *Em uma vizinhança suficientemente pequena em torno de $\mathbb{I} \in M(n,\mathbb{C})$, todo elemento $a \in G$ conectado à $\mathbb{I}$ por uma curva C^1, contida em G e nesta vizinhança, é da forma $a = \exp(X)$ para algum $X \in \mathfrak{g}$.*

A.5 A REPRESENTAÇÃO ADJUNTA DE UM GRUPO LINEAR

Definição. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma *transformação linear de V em W* é uma função $T : V \to W$ tal que para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in K$, $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$. Em particular, quando $V = W$ a função T é chamada de *operador linear em V.*

Consideremos o conjunto $L(V,W)$ das transformações lineares de V em W. Dados $T,U \in L(V,W)$, $\alpha \in K$ e $v \in V$, podemos definir a soma de transformações lineares e multiplicação por escalar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(T+U)(v) &= T(v)+U(v),\\ (\alpha T)(v) &= \alpha T(v).\end{aligned} \tag{A.9}$$

Segue das definições acima que $T+U$ e αT são transformações lineares de V em W. Além disso, as operações $L(V,W)\times L(V,W) \ni (T,U) \mapsto T+U \in L(V,W)$ e $K \times L(V,W) \ni (\alpha,T) \mapsto \alpha T \in L(V,W)$ satisfazem todos os axiomas de espaço vetorial, cujo elemento identidade referente à operação $+$ é a transformação nula $0 \in L(V,W)$, definida por $0(v)=0, \forall v \in V$. Logo, $L(V,W)$ é um espaço vetorial sobre o corpo K.

Analisemos agora o conjunto $GL(V) \subset L(V,V)$, cujos elementos são operadores lineares inversíveis em V, i.e., os operadores $T \in L(V,V)$ para os quais existe $T^{-1} \in L(V,V)$ tal que[2] $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, onde $I \in L(V,V)$ é o operador identidade.

Com a operação de composição de operadores, $GL(V)$ é um grupo. De fato, sejam $U,T \in GL(V)$. Como U é inversível, segue da definição de inversa que $U^{-1} \in GL(V)$. A composição também é fechada, ou seja, $UT \in GL(V)$, onde $(UT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}$. Além disso, a composição de funções é assossiativa e o operador indentidade também é inversível, provando o desejado.

Definição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e G um grupo. Um *representação de G no espaço vetorial* V é uma função $\rho : G \to GL(V)$ tal que para quaisquer $a,b \in G$,

$$\rho(a\cdot b) = \rho(a)\rho(b). \tag{A.10}$$

Segue imediatamente da definição que $\rho(e) = I$ e $\rho(a^{-1}) = \rho(a)^{-1}, \forall a \in G$.

No caso de V ter dimensão finita, a escolha de uma base permite associar a cada elemento de $L(V,V)$ uma matriz. Desta forma, supondo que V seja um espaço vetorial complexo de dimensão n, $GL(V)$ pode ser identificado com $GL(n,\mathbb{C})$.

Dado um grupo linear G, a sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um um espaço vetorial e pode ser usado como espaço de representação.

[2]Sejam V,W,Z espaços vetoriais sobre um corpo K, $T \in L(V,W)$ e $U \in L(W,Z)$. Então a composição UT é a transformação linear de V em Z definida por $(UT)(v) = U(T(v))$.

Definição. Sejam G um grupo linear e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Chama-se de *representação adjunta de* G à representação:

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad_g \end{aligned} \qquad \text{onde} \qquad \begin{aligned} Ad_g : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ a &\mapsto Ad_g(a) = gag^{-1} \end{aligned} . \tag{A.11}$$

Notemos que para a definição acima ter sentido, precisamos verificar que de fato $Ad_g \in GL(V)$ e que Ad é uma representação de grupo.

Sejam $g, h \in G$, $a, b \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Notemos que a curva $(-1,1) \mapsto g\exp(ta)g^{-1} \in G$ é de classe C^1 e que sua derivada em $t = 0$ é $gag^{-1} \in \mathfrak{g}$. Agora, $Ad_g(\alpha a+b) = g(\alpha a+b)g^{-1} = \alpha gag^{-1} + gbg^{-1} = \alpha Ad_g(a) + Ad_g(b)$, ou seja, Ad_g é um operador linear em $\mathfrak{g}$. Definindo $(Ad_g)^{-1} = Ad_{g^{-1}}$ vemos que $(Ad_g Ad_{g^{-1}})(a) = Ad_g(Ad_{g^{-1}}(a)) = Ad_g(g^{-1}ag) = gg^{-1}agg^{-1} = a = g^{-1}gag^{-1}g = Ad_{g^{-1}}(gag^{-1}) = Ad_{g^{-1}}(Ad_g(a)) = (Ad_{g^{-1}}Ad_g)(a)$, ou seja, $Ad_g Ad_{g^{-1}} = Ad_{g^{-1}}Ad_g = I$ e segue que $Ad_g \in GL(V)$. Da mesma forma, $Ad_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = gAd_h(a)g^{-1} = Ad_g(Ad_h(a)) = (Ad_g Ad_h)(a)$, i.e., $Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$ e segue que de fato Ad é uma representação de grupo.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Como já comentado, o conjunto $L(V,V)$ dos operadores lineares em V é um espaço vetorial sobre K com as operações (A.9). Pode-se definir em $L(V,V)$ uma terceira operação $[\ ,\ ] : L(V,V) \times L(V,V) \to L(V,V)$, onde o *comutador de dois operadores* é $[T,U] \coloneqq TU - UT$. Como facilmente verificado, está operação torna $L(V,V)$ uma álgebra de Lie sobre K e será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

Definição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é uma função $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que para quaisquer $a, b \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in K$:

$$\begin{aligned} \tau(a+b) &= \tau(a) + \tau(b), \\ \tau(\alpha a) &= \alpha\tau(a), \\ \tau([a,b]) &= [\tau(a), \tau(b)]. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Como exemplo, consideremos a representação adjunta de uma álgebra de Lie:

Definição. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo K. Chama-se de *representação adjunta de* $\mathfrak{g}$ à representação:

$$\begin{array}{rl} ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) & \quad \text{onde} \quad & ad_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} & . \\ a \mapsto ad_a & & b \mapsto ad_a(b) = [a,b] & \end{array} \tag{A.13}$$

Da bilinearidade dos colchetes de Lie, segue imediatamente que $ad_a \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Mostremos que ad é de fato uma representação de $\mathfrak{g}$. Sejam $a, b, c \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in K$, então $ad_{a+b}(c) = [a+b, c] = [a, c] + [b, c] = ad_a(c) + ad_b(c) = (ad_a + ad_b)(c)$ e $ad_{\alpha a}(c) = [\alpha a, c] = \alpha[a, c] = \alpha ad_a(c)$. Logo, $ad_{a+b} = ad_a + ad_b$ e $ad_{\alpha a} = \alpha ad_a$. Além disso, da identidade de Jacobi, temos que $ad_{[a,b]}(c) = [[a, b], c] = -[[b, c], a] - [[c, a], b] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] = ad_a([b, c]) - ad_b([a, c]) = ad_a(ad_b(c)) - ad_b(ad_a(c)) = (ad_a ad_b - ad_b ad_a)(c) = [ad_a, ad_b](c)$, ou seja, $ad_{[a,b]} = [ad_a, ad_b]$ e segue que ad é uma representação de $\mathfrak{g}$.

Uma representação de um grupo linear naturalmente induz uma representação da sua álgebra de Lie. Este fato é enunciado da seguinte forma

Proposição 6. *Sejam G um grupo linear, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K. Dada uma representação $\rho : G \to GL(V)$, existe uma única representação $\bar{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que*

$$\rho(\exp(X)) = \exp(\bar{\rho}(X)), \tag{A.14}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. A representação $\bar{\rho}$ pode ser calculada por

$$\bar{\rho}(X) = \frac{d}{dt}\rho(\exp(X))\bigg|_{t=0}, \tag{A.15}$$

e satisfaz

$$\bar{\rho}(aXa^{-1}) = \rho(a)\bar{\rho}(X)\rho(a^{-1}), \tag{A.16}$$

para quaiquer $a \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$.

Apêndice B

FUNÇÕES SINGULARES

B.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Consideremos a equação de Klein-Gordon inomogênea

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \rho(x). \tag{B.1}$$

Com o intuito de encontrarmos uma solução para (B.1), buscaremos inicialmente a *função de Green* G definida pela equação auxiliar

$$(\Box + m^2)G(x) = -\delta(x). \tag{B.2}$$

O conhecimento de G permite a construção da solução particular

$$\phi(x) = -\int G(x-y)\rho(y)d^4y, \tag{B.3}$$

pois, da aplicação do operador de Klein-Gordon $\Box + m^2$ em (B.3) e do uso de (B.2) resulta

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)\phi(x) &= -(\Box + m^2)\int G(x-y)\rho(y)d^4y \\ &= \int \delta(x-y)\rho(y)d^4y = \rho(x),\end{aligned}$$

conforme o desejado.

Considerando as transformadas inversas de Fourier para G e δ

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tilde{G}(k)e^{-ikx}d^4k, \tag{B.4}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}d^4k, \tag{B.5}$$

e substituindo em (B.2), obtemos a equação algébrica que determina $\tilde{G}$

$$(-k^2 + m^2)\tilde{G}(k) = -1. \tag{B.6}$$

Notemos que a equação acima somente é satisfeita quando $-k^2+m^2 = -k_0^2+(\mathbf{k}^2+m^2) \neq 0$. Por este motivo, para que a integral resultante de (B.6) e (B.4)

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}d^4k, \tag{B.7}$$

esteja bem definida, torna-se necessária a especificação de um caminho de integração que contorna os pólos em $k_0 = \pm\omega_{\mathbf{k}},$, onde $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$. A figura abaixo apresenta os possíveis caminhos de integração. Cada caminho associa uma função de Green, satisfazendo condições de contorno específicas, à equação (B.2).

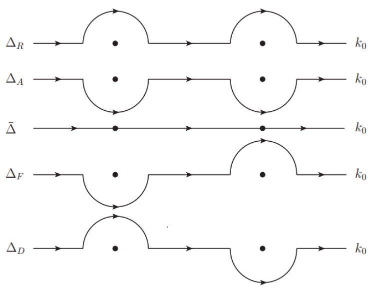


Figura B.1: Possíveis caminhos de integração para G.

Consideremos a função de *Green retardada*, definida pelo primeiro caminho de integração da figura B.1:

$$\Delta_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\limits_{\Delta_R}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0d^3\mathbf{k}. \tag{B.8}$$

No caso em que $x^0 \leq 0$, a integral em k^0 acima pode ser calculada por intermédio do teorema de Cauchy. Para isso, consideremos o caminho de integração auxiliar descrito pela figura B.2. Pelo fato dos pólos $\pm\omega_{\mathbf{k}}$ não pertencerem à região delimitada pelas curvas C_R e Γ, resulta do teorema de Cauchy que

$$\int\limits_{C_R+\Gamma}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 = 0. \tag{B.9}$$

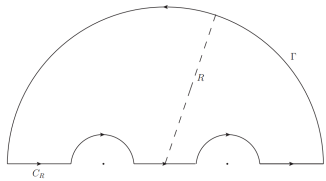


Figura B.2: caminho de integração auxiliar para a evaluação de Δ_R, $x^0 < 0$.

Este resultado permite escrevermos

$$\int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 = \lim_{R\to\infty} \left[\int\limits_{C_R+\Gamma} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 - \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 \right]$$
$$= - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0. \tag{B.10}$$

Utilizando a parametrização $[0, \pi] \ni \theta \longmapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ para o caminho Γ temos

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int\limits_0^\pi \frac{ie^{-ix^0Re^{i\theta}} Re^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, d\theta \right| \leq \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\pi \left| \frac{ie^{-ix^0Re^{i\theta}} Re^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - \omega_{\mathbf{k}}^2} \right| d\theta$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\pi \frac{R\left|e^{-ix^0Re^{i\theta}}\right|}{|R^2e^{2i\theta} - \omega_{\mathbf{k}}^2|} d\theta \leq \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\pi \frac{R\left|e^{-ix^0Re^{i\theta}}\right|}{R^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} d\theta$$
$$\leq \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\pi \frac{Re^{x^0R}}{R^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} d\theta = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi Re^{x^0R}}{R^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = 0, \tag{B.11}$$

pois, por hipótese, $x^0 \leq 0$. Este resultado garante que a integração ao longo do caminho Γ é nula no limite $R \to \infty$. Portanto, de (B.10) e (B.8)

$$\Delta_R(x) = 0, \text{ se } x^0 < 0. \tag{B.12}$$

Notemos agora que por ser um escalar de Lorentz, a dependência espaço-temporal de Δ_R envolve o invariante x^2. Desta forma, dado $a \in \mathbb{R}, \Delta_R$ é constante ao longo das hipérboles $\{x \in \mathcal{M} : x^2 = a\}$, onde $\mathcal{M}$ denota o espaço de Minkowski. Em particular, no caso em que x for do tipo espaço, i.e., $x^2 = a < 0$, existem pontos $y \in \mathcal{M}$, com $y_0 < 0$, tais que $y^2 = a$. Logo, $\Delta_R(x) = \Delta_R(y) = 0$, ou seja,

$$\Delta_R(x) = 0, \quad \text{se} \quad x^2 < 0. \tag{B.13}$$

Para o caso $x^0 > 0$, a integração de (B.8) pode ser efetuada analiticamente [4]:

$$\Delta_R(x) = -\frac{\delta(x^2)}{2\pi} + \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)J_1\left(m\sqrt{x^2}\right). \tag{B.14}$$

Na expressão acima, Θ denota a função de Heaviside e J_1 denota a homônima função de Bessel de primeira espécie, definidas por

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \tag{B.15}$$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}. \tag{B.16}$$

Os dois casos podem ser englobados na expressão

$$\begin{aligned} \Delta_R(x) &= -\frac{\Theta(x^0)}{2\pi}\left[\delta(x^2) - \frac{m}{2\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right] \\ &= \Theta(x^0)\Delta(x), \end{aligned} \tag{B.17}$$

onde, conforme veremos futuramente, Δ é a solução da equação de Klein-Gordon homogênea

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0)\left[\delta(x^2) - \frac{m}{2\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right], \tag{B.18}$$

e ϵ é a função sinal

$$\epsilon(x^0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^0 > 0 \\ -1, & \text{se } x^0 < 0 \end{cases}. \tag{B.19}$$

Conclui-se a partir dos resultados apresentados acima que o suporte de Δ_R é o cone do futuro $\mathcal{C}^+ := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0,\ x_0 > 0\}$. Por este motivo, a solução particular associada

$$\phi_R(x) = -\int \Delta_R(x-y)\rho(y)d^4y,$$

sofre influência de $\rho(y_0, \mathbf{y})$ nos pontos em que $(x-y)^2 > 0$ e $x_0 > y_0$, justificando o adjetivo *retardada.*

Antes de prosseguirmos, faremos menção ao fato de Δ_R, definido por (B.8), ser equivalente a

$$\Delta_R(x) = \lim_{\eta\to 0^+}\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\eta k^0}d^4k =: \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\eta k^0}d^4k, \tag{B.20}$$

ficando subentedido o limite $\eta \to 0^+$ ao final dos cálculos. Este resultado pode ser demonstrado pelo cálculo direto das integrais.

A função de *Green avançada* é definida pelo segundo caminho de integração da figura B.1

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\Delta_A} \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{\Delta_A} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 d^3\mathbf{k} \\ &= \lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2-i\eta k^0} d^4k =: \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2-i\eta k^0} d^4k.\end{aligned} \tag{B.21}$$

De maneira análoga ao caso retardado, mostra-se que [4]

$$\begin{aligned}&\Delta_A(x) = 0, \text{ se } x^0 > 0, \\ &\Delta_A(x) = 0, \text{ se } x^2 > 0, \\ &\Delta_A(x) = -\frac{\delta(x^2)}{2\pi} + \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}}\Theta(x^2) J_1\left(m\sqrt{x^2}\right), \text{ se } x^0 < 0.\end{aligned} \tag{B.22}$$

Portanto, o suporte de Δ_A é o cone do futuro $\mathcal{C}^- := \{x \in \mathcal{M} : x^2 > 0,\, x_0 < 0\}$ e a solução particular associada

$$\phi_A(x) = -\int \Delta_A(x-y)\rho(y) d^4y, \tag{B.23}$$

sofre influência de $\rho(y_0, \mathbf{y})$ nos pontos em que $(x-y)^2 > 0$ e $x_0 < y_0$.

Compactamente, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Delta_A(x) &= -\frac{\Theta(-x^0)}{2\pi}\left[\delta(x^2) - \frac{m}{2\sqrt{x^2}}\Theta(x^2) J_1\left(m\sqrt{x^2}\right)\right] \\ &= -\Theta(-x^0)\Delta(x),\end{aligned} \tag{B.24}$$

As funções de Green Δ_R e Δ_A estão diretamente relacionadas entre si. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta_R(-x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{k^2-m^2+i\eta k^0} d^4k \overset{k\to -k}{=} \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2-i\eta k^0} d^4k \\ &= \Delta_A(x).\end{aligned} \tag{B.25}$$

Este resultado poderia ter sido demonstrado diretamente a partir das equações (B.17) e (B.24) e do fato da função Δ ser ímpar.

O terceiro caminho de integração de B.1 representa a função de Green dada por

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\mathcal{P}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2} d^4k, \tag{B.26}$$

onde $\mathcal{P}$ representa o valor principal de Cauchy.

Claramente $\bar{\Delta}$ é uma função par:

$$\bar{\Delta}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\mathcal{P}\int \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2} d^4k \overset{k \to -k}{=} \frac{1}{(2\pi)^4}\mathcal{P}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} d^4k = \bar{\Delta}(x). \tag{B.27}$$

Estabeleceremos agora a relação

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2}\left(\Delta_R + \Delta_A\right). \tag{B.28}$$

Observemos que em decorrência da utilização do teorema dos resíduos e do fato da integração ao longo do caminho Γ, figura B.2, anular-se no limite $R \to \infty$, a função Δ_R não depende do raio dos semicírculos que contornam os pólos $k^0 = \pm\omega_{\mathbf{k}}$. O mesmo aplica-se, com as devidas adaptações, a Δ_A. Em particular, podemos considerar o limite dos raios destes semicirculos tendendo a zero. Neste caso, a contribuição à integral em k^0 referente ao pedaço do caminho que contorna o pólo $-\omega_{\mathbf{k}}$ é igual a $\frac{i\pi e^{i\omega_{\mathbf{k}}x^0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ para Δ_R e $-\frac{i\pi e^{i\omega_{\mathbf{k}}x^0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ para Δ_A. Por outro lado, o pedaço do caminho de integração que contorna o pólo $\omega_{\mathbf{k}}$ contribui com $-\frac{i\pi e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x^0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ para Δ_R e $\frac{i\pi e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x^0}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$ para Δ_A. Levando em consideração estes resultados, é imediato que $\Delta_R + \Delta_A = 2\bar{\Delta}$.

Como consequência direta dos suportes de Δ_R e Δ_A e da relação (B.28), $\bar{\Delta}$ anula-se fora do cone de luz, i.e,

$$\bar{\Delta}(x) = 0, \text{ se } x^2 < 0. \tag{B.29}$$

O quarto caminho de integração da figura B.1 define a função de Green

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\Delta_F} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}\, d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int\limits_{\Delta_F} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 d^3\mathbf{k}, \tag{B.30}$$

popularmente conhecida por *propagador de Feynman.*

O propagador de Feynman mostra-se equivalente a

$$\begin{aligned}\Delta_F(x) &= \lim_{\eta \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\eta} d^4k \\ &=: \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\eta} d^4k.\end{aligned} \tag{B.31}$$

Efetuando-se a integração [4]

$$\begin{aligned}\Delta_F(x) = &-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)\Big[J_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big) - iN_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big)\Big] \\ &+ \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\Theta(-x^2)K_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big).\end{aligned} \tag{B.32}$$

Na expressão acima aparecem, além da função de Bessel de primeiro tipo já definida em (B.16), as funções de Neumann N_1 e a de Bessel modificada de segundo tipo K_1 dadas por [1]

$$N_1(x) = \frac{2}{\pi} J_1(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left[\psi(k+1) + \psi(k+2) \right] \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+1}, \tag{B.33}$$

$$\psi(1) = -\gamma := -0.577215664901..., \qquad \text{(constante de Euler-Mascheroni)} \tag{B.34}$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{m}^{n} \frac{1}{m}, \qquad n \in \mathbb{N} \qquad \text{(função digama)} \tag{B.35}$$

$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2} \left[J_1(ix) + i N_1(ix) \right]. \tag{B.36}$$

Da expressão (B.32) vemos que Δ_F é uma função par, i.e., $\Delta_F(-x) = \Delta_F(x)$ e, ao contrário de $\Delta_{R,A}$ e $\bar{\Delta}$, não é nula fora do cone de luz.

Por fim, o último caminho de (B.1) define a função de Dyson

$$\Delta_D(x) = \int_{\Delta_D} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \, d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{\Delta_D} \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} \, dk^0 d^3\mathbf{k}, \tag{B.37}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \Delta_D(x) &= \lim_{\eta \to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 - i\eta} d^4k \\ &=: \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 - i\eta} d^4k. \end{aligned} \tag{B.38}$$

O resultado da integração acima é

$$\begin{aligned} \Delta_D = &-\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}}\Theta(x^2)\Big[J_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big) + iN_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big)\Big] \\ &+ \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}}\Theta(-x^2)K_1\Big(m\sqrt{x^2}\Big). \end{aligned} \tag{B.39}$$

A partir das soluções retardada e avançada, constrói-se a seguinte solução da equação de Klein-Gordon homogênea

$$\Delta(x) = \Delta_R(x) - \Delta_A(x). \tag{B.40}$$

Vejamos agora algumas propriedades da função Δ e como esta se relaciona com as funções de Green da equação de Klein-Gordon.

Da relação (B.25) e da definição (B.40) segue que Δ é ímpar

$$\Delta(-x) = \Delta_R(-x) - \Delta_A(-x) = \Delta_A(x) - \Delta_R(x) = -\Delta(x), \tag{B.41}$$

e anula-se fora do cone de luz, i.e.,

$$\Delta(x) = 0, \text{ se } x^2 < 0. \tag{B.42}$$

Além disso, em decorrência dos suportes de Δ_R e Δ_A temos

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_R(x), & \text{se } x^0 > 0 \\ -\Delta_A(x), & \text{se } x^0 < 0 \end{cases}. \tag{B.43}$$

Portanto,

$$\Delta_R(x) = \Theta(x^0)\Delta(x),$$
$$\Delta_A(x) = -\Theta(-x^0)\Delta(x),$$

justificando a notação adotada em (B.17) e (B.24).

Para $\bar{\Delta}$, da relação (B.28)

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(x) &= \frac{1}{2}\left[\Delta_R(x) + \Delta_A(x)\right] = \frac{1}{2}\left[\Theta(x^0) - \Theta(-x^0)\right]\Delta(x) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon(x^0)\Delta(x). \end{aligned} \tag{B.44}$$

A função Δadmite uma representação análoga à função de Green G. Com este fim, definiremos o caminho de integração C abaixo

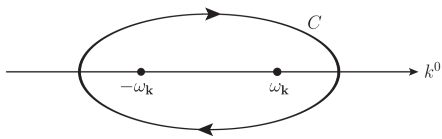


Figura B.3: caminho de integração que define Δ.

Assim,

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}\,d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int_C \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 d^3\mathbf{k}. \tag{B.45}$$

Com efeito, do teorema dos resíduos resulta[1]

$$\int_C \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 = -2\pi i\left[\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}}) + \mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}})\right], \tag{B.46a}$$

$$\int_{\Delta_R} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 = -\Theta(x^0)2\pi i\left[\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}}) + \mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}})\right], \tag{B.46b}$$

[1] $\mathrm{Res}(z)$ denota o resíduo do integrando no ponto $z \in \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\Delta_A} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0 = \Theta(-x^0)2\pi i\left[\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}})+\mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}})\right]. \tag{B.46c}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta(x) = \Delta_R(x)-\Delta_A(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[\int\limits_{\Delta_R}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0-\int\limits_{\Delta_A}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0\right]d^3\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left\{-2\pi i[\underbrace{\Theta(x^0)+\Theta(-x^0)}_{=1}]\left[\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}})+\mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}})\right]\right\}d^3\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\limits_{C}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{C}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k,
\end{aligned} \tag{B.47}$$

como desejado.

Notemos agora que em decorrência do princípio da deformação dos caminhos [6], Δ pode ser decomposta na forma

$$\Delta(x) = \Delta^-(x)+\Delta^+(x), \tag{B.48}$$

definindo

$$\begin{aligned}
\Delta^-(x) &= \int\limits_{C^-}\frac{e^{-ikx}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\limits_{C^-}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0d^3\mathbf{k},\\
\Delta^+(x) &= \int\limits_{C^+}\frac{e^{-ikx}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,d^4k := \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\limits_{C^+}\frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\,dk^0d^3\mathbf{k},
\end{aligned} \tag{B.49}$$

com os caminhos de integração

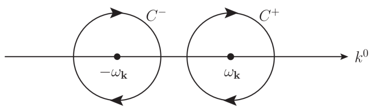


Figura B.4: caminhos de integração C^- e C^+.

Essa decomposição mostra-se útil, pois permitirá que escrevamos Δ de uma maneira covariante e relacioná-la com Δ_F e Δ_D.

Pelo caminho da figura B.1 que define Δ_F, conclui-se a partir do teorema dos resíduos que $\Delta_F = -\Delta^-$ para $x^0<0$ e $\Delta_F=\Delta^+$ para $x^0>0$. Assim,

$$\Delta_F = \Theta(x^0)\Delta^+(x)-\Theta(-x^0)\Delta^-(x). \tag{B.50}$$

Analogamente,

$$\Delta_D = \Theta(x^0)\Delta^-(x)-\Theta(-x^0)\Delta^+(x). \tag{B.51}$$

Busquemos agora a forma covariante da função Δ. Usando os resultados

$$\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}}) = -\frac{e^{ix^0\omega_{\mathbf{k}}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}, \qquad \mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}}) = \frac{e^{-ix^0\omega_{\mathbf{k}}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}, \tag{B.52}$$

e as definições (B.49), temos

$$\begin{aligned}\Delta^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int\limits_{C^-} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[-2\pi i\mathrm{Res}(-\omega_{\mathbf{k}})\right] d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{ix^0\omega_{\mathbf{k}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k} = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{-ikx}}{2\omega_{\mathbf{k}}}\delta(k^0+\omega_{\mathbf{k}})d^4k, \end{aligned}\tag{B.53a}$$

$$\begin{aligned}\Delta^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int\limits_{C^+} \frac{e^{-ik^0x^0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{k}}^2}\, dk^0 d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[-2\pi i\mathrm{Res}(\omega_{\mathbf{k}})\right] d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{-ix^0\omega_{\mathbf{k}}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k} = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{-ikx}}{2\omega_{\mathbf{k}}}\delta(k^0-\omega_{\mathbf{k}})d^4k. \end{aligned}\tag{B.53b}$$

Agora, da identidade

$$\delta(k^2-m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left[\delta(k^0-\omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k^0+\omega_{\mathbf{k}})\right], \tag{B.54}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\delta(k^0-\omega_{\mathbf{k}}) &= \Theta(k^0)\delta(k^2-m^2), \\ \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\delta(k^0+\omega_{\mathbf{k}}) &= -\Theta(-k^0)\delta(k^2-m^2). \end{aligned}\tag{B.55}$$

Assim,

$$\Delta^{\pm}(x) = \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int \Theta(\pm k^0)e^{-ikx}\delta(k^2-m^2)d^4k. \tag{B.56}$$

Este resultado nos leva à forma covariante da função Δ:

$$\begin{aligned}\Delta(x) = \Delta^-(x) + \Delta^+(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int [\underbrace{\Theta(k^0) - \Theta(-k^0)}_{=\epsilon(k^0)}]e^{-ikx}\delta(k^2-m^2)d^4k \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \epsilon(k^0)\delta(k^2-m^2)e^{-ikx}d^4k. \end{aligned}\tag{B.57}$$

Por conveniência momentânea, escreveremos Δ da maneira não covariante

$$\begin{aligned}\Delta(x) = \Delta^-(x) + \Delta^+(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\left(e^{ix^0\omega_{\mathbf{k}}} - e^{-ix^0\omega_{\mathbf{k}}}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\sin(x^0\omega_{\mathbf{k}})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_{\mathbf{k}}} d^3\mathbf{k}, \end{aligned}\tag{B.58}$$

pois a partir desta expressão, são imediatas as seguintes propriedades:

- $\Delta(0) = \Delta(0, \mathbf{x}) = 0,$ (B.59a)

- $$\left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} \coloneqq \left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^0}\right|_0 = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \cos(x^0\omega_{\mathbf{k}})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{k}\Big|_0 = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{k} = -\delta(\mathbf{x}), \tag{B.59b}$$

- $$\left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^l}\right|_0 = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\sin(x^0\omega_{\mathbf{k}})k^l e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_{\mathbf{k}}}d^3\mathbf{k}\Big|_0 = 0. \tag{B.59c}$$

Diante do exposto, Δ pode ser definida como a solução do problema de contorno

$$\begin{aligned} &\left(\Box + m^2\right)\Delta(x) = 0, \\ &\Delta(x) = 0, \ \text{se } x^2 < 0, \\ &\partial_0 \Delta(x)|_0 = -\delta(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{B.60}$$

Para o caso particular $m = 0$, campo de Klein-Gordon não-massivo, definiremos

$$D_R(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\eta k^0}d^4k = -\frac{1}{2\pi}\Theta(x^0)\delta(x^2), \tag{B.61}$$

$$D_A(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - i\eta k^0}d^4k = -\frac{1}{2\pi}\Theta(-x^0)\delta(x^2), \tag{B.62}$$

$$D_F(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\eta}d^4k = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{i}{4\pi^2 x^2}, \tag{B.63}$$

$$D_D(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - i\eta}d^4k = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) - \frac{i}{4\pi^2 x^2}, \tag{B.64}$$

$$D(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \frac{e^{-ikx}}{k^2}\,d^4k = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \epsilon(k^0)\delta(k^2)e^{-ikx}d^4k = -\frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0)\delta(x^2). \tag{B.65}$$

B.2 EQUAÇÃO DE DIRAC

Em relação à equação de Dirac não-homogênea

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = \sigma(x), \tag{B.66}$$

busquemos soluções particulares da forma

$$\psi(x) = \int G^D(x - y)\sigma(y)d^4y, \tag{B.67}$$

onde G^D é uma matriz de dimensão 4 definida pela equação auxiliar

$$\sum_{\beta=1}^{4}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)_{\alpha\beta}\,G^{D}_{\beta\eta}(x)=\delta(x)\delta_{\alpha\eta},\qquad\qquad \alpha,\eta=1,\ldots,4. \tag{B.68}$$

A definição de G^D garante que (B.67) é de fato solução de (B.66) como facilmente observado:

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{4}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)_{\alpha\beta}\,\psi_{\beta}(x)&=\int\sum_{\beta,\eta=1}^{4}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)_{\alpha\beta}\,G^{D}_{\beta\eta}(x-y)\sigma_{\gamma}(y)d^4y\\&=\int\sum_{\gamma=1}^{4}\delta(x-y)\delta_{\alpha\eta}\sigma_{\eta}(y)d^4y=\sigma_{\alpha}(x).\end{aligned} \tag{B.69}$$

A função de Green G^D esta relacionada com G, definida em (B.7), e é prontamente obtida notando-se que

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma=1}^{4}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}-m)_{\alpha\eta}\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)_{\eta\beta}&=-\sum_{\eta=1}^{4}\left(\gamma^{\nu}_{\alpha\eta}\gamma^{\mu}_{\eta\beta}\partial_{\nu}\partial_{\mu}+m^2\delta_{\alpha\eta}\delta_{\eta\beta}\right)\\&=-\sum_{\eta=1}^{4}\big(\underbrace{\gamma^{\mu}_{\alpha\eta}\gamma^{\nu}_{\eta\beta}+\gamma^{\nu}_{\alpha\eta}\gamma^{\mu}_{\eta\beta}}_{=2g^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}}\big)\partial_{\mu}\partial_{\nu}-m^2\delta_{\alpha\beta}=-\left(\Box+m^2\right)\delta_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{B.70}$$

Logo,

$$G^{D}(x)=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\,G(x), \tag{B.71}$$

ou, explicitamente em termos das componentes

$$G^{D}_{\alpha\beta}(x)=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)_{\alpha\beta}\,G(x). \tag{B.72}$$

Como já discutido para a equação de Klein-Gordon, cada caminho de (B.1) especifica uma função G. Portanto, definiremos

$$S_R(x):=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\eta k^0}e^{-ikx}d^4k, \tag{B.73}$$

$$S_A(x):=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2-i\eta k^0}e^{-ikx}d^4k, \tag{B.74}$$

$$S_F(x):=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\eta}e^{-ikx}d^4k, \tag{B.75}$$

$$S_D(x):=(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\Delta_D(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2-i\eta}e^{-ikx}d^4k. \tag{B.76}$$

Além disso, definiremos uma solução para a equação de Dirac homogênea análoga à Δ:

$$\begin{aligned} S(x) &\coloneqq S_R(x) - S_A(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\, \Delta(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_C \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} e^{-ikx}\, d^4k \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \epsilon(k^0)\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m) e^{-ikx} d^4k. \end{aligned} \tag{B.77}$$

Em particular,

$$S(x)\big|_0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\, \Delta(x)\big|_0 = -i\gamma^0 \delta(\mathbf{x}). \tag{B.78}$$

B.3 EQUAÇÃO DE PROCA

A equação de Proca inomogênea é definida, para $\lambda = 0, \ldots, 3$, por

$$\begin{gathered} \Box U_\lambda - \partial_\lambda(\partial_\mu U^\mu) + m^2 U_\lambda = J_\lambda \\ (\delta^\mu_\lambda \Box - \partial_\lambda \partial^\mu + m^2 \delta^\mu_\lambda) U_\mu = g_{\lambda\mu} J^\mu. \end{gathered} \tag{B.79}$$

Procuraremos soluções particulares de (B.79) da forma

$$U_\mu(x) = \int G^V_{\mu\nu}(x - y) J^\nu(y) d^4y, \tag{B.80}$$

onde $G^V_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de segunda ordem definido pela equação auxiliar

$$(\delta^\mu_\lambda \Box - \partial_\lambda \partial^\mu + m^2 \delta^\mu_\lambda) G^V_{\mu\nu}(x) = g_{\lambda\nu} \delta(x). \tag{B.81}$$

Por inspeção, podemos facilmente constatar que

$$G^V_{\mu\nu}(x) = -\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) G(x), \tag{B.82}$$

é a solução de (B.81) procurada. Com efeito, substituindo (B.82) no lado esquerdo de (B.81), temos

$$\begin{aligned} -(\delta^\mu_\lambda \Box - \partial_\lambda \partial^\mu + m^2 \delta^\mu_\lambda) \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) G(x) &= -g_{\lambda\nu} \left(\Box + m^2 \right) G(x) \\ &= g_{\lambda\nu} \delta(x). \end{aligned} \tag{B.83}$$

Como já ocorrido com a equação de Dirac, a função de Green $G^V_{\mu\nu}$ está relacionada com G e, consequentemente, cada caminho da figura B.1 especificará uma possível solução de (B.81):

$$\Delta_R^{\mu\nu}(x) \coloneqq -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta_R(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \frac{(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu)}{k^2 - m^2 + i\eta k^0} e^{-ikx} d^4k, \tag{B.84}$$

$$\Delta_A^{\mu\nu}(x) \coloneqq -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta_A(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \frac{(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu)}{k^2 - m^2 - i\eta k^0} e^{-ikx} d^4k, \tag{B.85}$$

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x) \coloneqq -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta_F(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \frac{(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ikx} d^4k, \tag{B.86}$$

$$\Delta_D^{\mu\nu}(x) \coloneqq -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta_D(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \frac{(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu)}{k^2 - m^2 - i\eta} e^{-ikx} d^4k. \tag{B.87}$$

Definiremos também a solução para a equação de Proca homogênea análoga à Δ:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu\nu}(x) &\coloneqq \Delta_R^{\mu\nu}(x) - \Delta_A^{\mu\nu}(x) = -\left(g^{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu\right)\Delta(x) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_C \frac{(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu)}{k^2 - m^2} e^{-ikx}\, d^4k \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \epsilon(k^0)\delta(k^2 - m^2)\left(g^{\mu\nu} - m^{-2}k^\mu k^\nu\right) e^{-ikx} d^4k.\end{aligned} \tag{B.88}$$

B.4 CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O campo eletromagnético gerado pela quadricorrente J^μ e no gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, é descrito pela equação

$$\Box A^\mu(x) = J^\mu(x). \tag{B.89}$$

Pela equação auxiliar que define o tensor de segunda ordem covariante $G_{\mu\nu}$

$$\Box G_{\mu\nu}(x-y) = \delta(x-y)g_{\mu\nu}, \tag{B.90}$$

construiremos a solução particular

$$A_\mu(x) = \int G_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)d^4y. \tag{B.91}$$

Por inspeção direta, vemos que a função de Green buscada é

$$G_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu}\mathring{G}(x), \tag{B.92}$$

onde $\mathring{G}$ denota a função a função de Green para o campo de Klein-Gordon com $m = 0$

$$\mathring{G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2} d^4k. \tag{B.93}$$

Assim, de (B.61)-(B.64) temos as seguintes soluções de (B.90)

$$D_R^{\mu\nu}(x) := -g^{\mu\nu} D_R(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\eta k^0} d^4k, \tag{B.94}$$

$$D_A^{\mu\nu}(x) := -g^{\mu\nu} D_R(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - i\eta k^0} d^4k, \tag{B.95}$$

$$D_F^{\mu\nu}(x) := -g^{\mu\nu} D_R(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\eta} d^4k, \tag{B.96}$$

$$D_F^{\mu\nu}(x) := -g^{\mu\nu} D_R(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 - i\eta} d^4k, \tag{B.97}$$

e também a solução da equação homogênea

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x) &:= D_R^{\mu\nu}(x) - D_A^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\Delta(x) \\ &= \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int\limits_C \frac{e^{-ikx}}{k^2}\, d^4k = \frac{ig^{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int \epsilon(k^0)\delta(k^2) e^{-ikx} d^4k. \end{aligned} \tag{B.98}$$

Apêndice C

CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO $S^{(1)}$

Na densidade lagrangiana (6.12), a parte correspondente ao setor fermiônico sem interação

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + ib_{\mu}\gamma_5)\psi$$

leva à equação de campo livre

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - b_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma_5)\psi(x) = 0. \tag{C.1}$$

As soluções de onda plana são da forma

$$\psi(x) = v(\mathbf{p})e^{-ipx}, \tag{C.2}$$

que quando substituídas em (C.1) levam à equação algébrica

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{p} - \not{b}\gamma_5)v(\mathbf{p}) \\ &= (E\gamma^0 + p_k\gamma^k - b_0\gamma^0\gamma_5 - b_k\gamma^k\gamma_5)v(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{C.3}$$

Multiplicando por γ^0 pela esquerda, usando $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$, $\gamma^0\gamma^k = \alpha_k$ e adotando a representação de Dirac para as matrizes α_k e γ_5

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.4}$$

obtemos a equação de autovalores

$$\begin{aligned} Ev(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} b_k\sigma_k & b_0\mathbb{I} - p_k\sigma_k \\ b_0\mathbb{I} - p_k\sigma_k & b_k\sigma_k \end{pmatrix} v(\mathbf{p}) \\ &=: \mathcal{T}v(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{C.5}$$

Os autovalores da matriz $\mathcal{T}$ são

$$\begin{aligned} E_1 &= b_0 + |\mathbf{p} - \mathbf{b}|, \\ E_2 &= -b_0 + |\mathbf{p} + \mathbf{b}|, \\ E_3 &= b_0 - |\mathbf{p} - \mathbf{b}|, \\ E_4 &= -b_0 - |\mathbf{p} + \mathbf{b}\,|, \end{aligned} \tag{C.6}$$

e os seus respectivos autovetores são dados por

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{N(\mathbf{p})}{2\left[1 + \frac{(b_3 - p_3 + |\mathbf{p}-\mathbf{b}|)^2}{(b_1-p_1)^2 + (b_2-p_2)^2}\right]}} \begin{pmatrix} \frac{b_3 - p_3 + |\mathbf{p}-\mathbf{b}|}{b_1 - p_1 + i(b_2 - p_2)} \\ 1 \\ \frac{b_3 - p_3 + |\mathbf{p}-\mathbf{b}|}{b_1 - p_1 + i(b_2 - p_2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{N(\mathbf{p})}{2\left[1 + \frac{(b_3 + p_3 + |\mathbf{p}+\mathbf{b}|)^2}{(b_1+p_1)^2 + (b_2+p_2)^2}\right]}} \begin{pmatrix} -\frac{b_3 + p_3 + |\mathbf{p}+\mathbf{b}|}{b_1 + p_1 + i(b_2 + p_2)} \\ -1 \\ \frac{b_3 + p_3 + |\mathbf{p}+\mathbf{b}|}{b_1 + p_1 + i(b_2 + p_2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_3(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N(\mathbf{p})(b_3 - p_3 + |\mathbf{p}-\mathbf{b}|)}{|\mathbf{p}-\mathbf{b}|}} \begin{pmatrix} \frac{b_3 - p_3 - |\mathbf{p}-\mathbf{b}|}{b_1 - p_1 + i(b_2 - p_2)} \\ 1 \\ \frac{b_3 - p_3 - |\mathbf{p}-\mathbf{b}|}{b_1 - p_1 + i(b_2 - p_2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_4(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N(\mathbf{p})(b_3 + p_3 + |\mathbf{p}+\mathbf{b}|)}{|\mathbf{p}+\mathbf{b}|}} \begin{pmatrix} -\frac{b_3 + p_3 - |\mathbf{p}+\mathbf{b}|}{b_1 + p_1 + i(b_2 + p_2)} \\ -1 \\ \frac{b_3 + p_3 - |\mathbf{p}+\mathbf{b}|}{b_1 + p_1 + i(b_2 + p_2)} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

onde $N(\mathbf{p})$ é um fator de normalização não especificado.

Os autovetores apresentados em (C.7) satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} & v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = N(\mathbf{p})\delta_{rs}, \\ & [v_1(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_1(\mathbf{p})]_\beta = \tfrac{N(\mathbf{p})}{4|\mathbf{p}-\mathbf{b}|}\left[\not{p} - \not{b} - \frac{i}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta}(p-b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta\right]_{\alpha\beta} \quad \text{para } p_0 = E_1, \\ & [v_2(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_2(\mathbf{p})]_\beta = \tfrac{N(\mathbf{p})}{4|\mathbf{p}-\mathbf{b}|}\left[\not{p} + \not{b} + \frac{i}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta}(p+b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta\right]_{\alpha\beta} \quad \text{para } p_0 = E_2, \\ & [v_3(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_3(\mathbf{p})]_\beta = \tfrac{-N(\mathbf{p})}{4|\mathbf{p}-\mathbf{b}|}\left[\not{p} - \not{b} - \frac{i}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta}(p-b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta\right]_{\alpha\beta} \quad \text{para } p_0 = E_3, \\ & [v_4(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_4(\mathbf{p})]_\beta = \tfrac{-N(\mathbf{p})}{4|\mathbf{p}-\mathbf{b}|}\left[\not{p} + \not{b} + \frac{i}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta}(p+b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta\right]_{\alpha\beta} \quad \text{para } p_0 = E_1. \end{aligned} \tag{C.8}$$

A solução geral da equação de movimento (C.1) pode ser escrita como uma expansão em ondas planas da forma

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|N(\mathbf{p})|} a_r(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-i(E_r - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tag{C.9}$$

onde os coeficientes $a_r(\mathbf{p})$ são dados por

$$a_r(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{|N(\mathbf{p})|} v_r^\dagger(\mathbf{p}) \psi a(x) e^{i(E_r - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}. \tag{C.10}$$

A quantização do campo ψ é feita através da imposição das relações de anticomutação a tempos iguais

$$[\psi_\alpha(x_0, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(x_0, \mathbf{x}')]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{C.11}$$

que permitirá a interpretação de $a_r(\mathbf{p})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{p})$ como operadores de aniquilação e criação, pois estes satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{p}), a_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}'}{|N(\mathbf{p})N(\mathbf{p}')|} [v_r^\dagger(\mathbf{p})]_\alpha [v_s(\mathbf{p}')]_\beta \\
&\times [\psi_\alpha(x_0, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(x_0, \mathbf{x}')]_+ \; e^{-i(E_s - E_r)x^0} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{|N(\mathbf{p})N(\mathbf{p}')|} [v_r^\dagger(\mathbf{p})]_\alpha [v_s(\mathbf{p}')]_\beta \; e^{-i(E_s - E_r)x^0} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').
\end{aligned} \tag{C.12}$$

De (1.21), o hamiltoniano do sistema é dado por

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x} \left(i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \psi \right) \\
&= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \left(-i\gamma^k \partial_k + \not{b}\gamma_5 \right) \psi = \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \left(i\gamma^0 \partial_0 \right) \psi \\
&= i \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x) \partial_0 \psi(x),
\end{aligned}$$

onde empregamos a equação de movimento (C.1). Usando a expansão (C.9), podemos escrever o hamiltoniano do sistema em termos dos operadores $a_r(\mathbf{p})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{p}'\, d^3\mathbf{x}}{|N(\mathbf{p})N(\mathbf{p}')|} E_s(\mathbf{p}') a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}') v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}') \\
&\times e^{-i(E_s - E_r)x^0} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= \sum_{r,s=1}^{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{N^2(\mathbf{p})} E_s(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{-i(E_s - E_r)x^0}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^{4} E_r(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}). \tag{C.13}$$

O hamiltoniano apresentado acima não é limitado inferiormente, pois as auto-energias E_3 e E_4, que dependem do momento $\mathbf{p}$**,** podem ser arbitrariamente negativas.

Utilizando (C.12) e já eliminando o termo responsável pela energia de ponto zero, definiremos como hamiltoniano do campo ψ livre o operador

$$H = \sum_{r=1}^{2} E_r(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) - \sum_{r=3}^{4} E_r(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}), \tag{C.14}$$

que é limitado inferiormente.

Por sua vez, o estado de vácuo do sistema $|0\rangle$ é definido por

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{p})|0\rangle &= 0, \quad \text{para } r = 1, 2 \\ a_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= 0, \quad \text{para } r = 3, 4. \end{aligned} \tag{C.15}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|N(\mathbf{p})|} a_r(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-i(E_r - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=3}^{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{|N(\mathbf{p})|} a_r(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{-i(E_r - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \\ &= \psi^{(1,2)}(x) + \psi^{(3,4)}(x), \end{aligned} \tag{C.16}$$

segue de (C.15) que

$$\begin{aligned} S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) &\coloneqq \langle 0|[\bar{\psi}_\beta(y), \psi_\alpha(x)]_-|0\rangle \\ &= \langle 0|\bar{\psi}^{(3,4)}_\beta(y)\psi^{(3,4)}_\alpha(x)|0\rangle - \langle 0|\psi^{(1,2)}_\alpha(x)\bar{\psi}^{(1,2)}_\beta(y)|0\rangle \\ &= \langle 0|[\bar{\psi}^{(3,4)}_\beta(y), \psi^{(3,4)}_\alpha(x)]_+|0\rangle - \langle 0|[\psi^{(1,2)}_\alpha(x), \bar{\psi}^{(1,2)}_\beta(y)]_+|0\rangle. \end{aligned} \tag{C.17}$$

Fazendo uso de (C.9) e (C.12), podemos escrever

$$\begin{aligned} [\psi^{(1,2)}_\alpha(x), \bar{\psi}^{(1,2)}_\beta(y)]_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{|N(\mathbf{p})N(\mathbf{p}')|} [a_r(\mathbf{p}), a_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ \\ &\times [v_r(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_s(\mathbf{p}')]_\beta \, e^{-i(E_r x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(E_s x^0 - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{N^2(\mathbf{p})} [v_r(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_r(\mathbf{p}')]_\beta \, e^{-iE_r(x^0 - y^0)} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \end{aligned} \tag{C.18}$$

e, analogamente,

$$[\bar{\psi}^{(3,4)}_\beta(y), \psi^{(3,4)}_\alpha(x)]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r=3}^{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{N^2(\mathbf{p})} [v_r(\mathbf{p})]_\alpha [\bar{v}_r(\mathbf{p}')]_\beta \, e^{-iE_r(x^0-y^0)} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad \text{(C.19)}$$

Assim, resulta de (C.18), (C.19) e (C.8) que

$$\begin{aligned} S^{(1)}(x-y) = \frac{-1}{4(2\pi)^3} \int d^4p \Bigg\{ & \\ & \frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{b}|} [\delta(p_0 - E_1) + \delta(p_0 - E_3)] \Big[\not{p} - \not{b} - \frac{i}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} (p-b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta \Big] \\ & + \frac{1}{|\mathbf{p}+\mathbf{b}|} [\delta(p_0 - E_2) + \delta(p_0 - E_4)] \Big[\not{p} + \not{b} + \frac{i}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} (p+b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta \Big] \Bigg\} \\ & \times e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad \text{(C.20)}$$

Note agora que

$$\begin{aligned} \delta[(p-b)^2] &= \frac{1}{2|\mathbf{p}-\mathbf{b}|} [\delta(p_0 - E_1) + \delta(p_0 - E_3)], \\ \delta[(p+b)^2] &= \frac{1}{2|\mathbf{p}-\mathbf{b}|} [\delta(p_0 - E_2) + \delta(p_0 - E_4)]. \end{aligned} \quad \text{(C.21)}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S^{(1)}(x-y) = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int d^4p \Bigg\{ & \delta[(p-b)^2] \Big[\not{p} - \not{b} - \frac{i}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} (p-b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta \Big] \\ & + \delta[(p+b)^2] \Big[\not{p} + \not{b} + \frac{i}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} (p+b)^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\delta \Big] \Bigg\} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad \text{(C.22)}$$

No caso em que $b = 0$, a função acima torna-se

$$S^{(1)}(x-y) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^4p \, \not{p} \, \delta(p^2) e^{-ip(x-y)}, \quad \text{(C.23)}$$

que coincide com a função $S^{(1)}$ definida em (3.101) para $m = 0$.

Apêndice D

CÁLCULO DOS COEFICIENTES DO TENSOR DE POLARIZAÇÃO

Analisando as expressões (6.53)-(6.56), notamos a necessidade do cálculo dos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
&\Pi^{\mu}_{\ \mu}(p) = \Pi_{0\ \mu}^{\ \mu}(p) + \Pi_{b\ \mu}^{\ \mu}(p),\\
&b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = b_\mu p_\nu \Pi_0^{\ \mu\nu}(p) + b_\mu p_\nu \Pi_b^{\ \mu\nu}(p),\\
&b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = b_\mu b_\nu \Pi_0^{\ \mu\nu}(p) + b_\mu b_\nu \Pi_b^{\ \mu\nu}(p),\\
&\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho b^\sigma \Pi^{\mu\nu}(p) = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\ \mu\nu}(p) + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\ \mu\nu}(p).
\end{aligned} \tag{D.1}$$

Das expressões (6.41) e (6.44), seguem

- $$\begin{aligned}\Pi_{0\ \mu}^{\ \mu}(p) = \frac{e^2}{4\pi^3}\int d^4p' d^4p'' \delta(p - p' + p'')\Bigg\{&\\
&\Big[p'(p''-b)\delta[(p''-b)^2] + p'(p''+b)\delta[(p''+b)^2]\Big]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\Big]\\
&+\Big[p''(p'-b)\delta[(p'-b)^2] + p''(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\Big]\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.2}$$

- $$\begin{aligned}\Pi_{b\ \mu}^{\ \mu}(p) = \frac{-e^2}{4\pi^3}\int d^4p' d^4p'' \delta(p - p' + p'')\Bigg\{&\\
&\Big[b(p''-b)\delta[(p''-b)^2] - b(p''+b)\delta[(p''+b)^2]\Big]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\Big]\\
&+\Big[b(p'-b)\delta[(p'-b)^2] - b(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\Big[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\Big]\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.3}$$

- $$\begin{aligned}b_\mu p_\nu \Pi_0^{\ \mu\nu}(p) = \frac{-e^2}{(2\pi)^3}\int d^4p' d^4p'' \delta(p - p' + p'')\Bigg\{&\\
&\Big\{\Big[(bp')\big[(p''-b)p\big] - (bp)\big[(p''-b)p'\big] + (pp')\big[(p''-b)b\big]\Big]\delta[(p''-b)^2]\end{aligned}$$

$$+ \Big[(bp')\big[(p''+b)p\big] - (bp)\big[(p''+b)p'\big] + (pp')\big[(p''+b)b\big]\Big]\delta[(p''+b)^2]\Big\}$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right]$$

$$+ \Big\{\Big[(bp'')\big[(p'-b)p\big] - (bp)\big[(p'-b)p''\big] + (pp'')\big[(p'-b)b\big]\Big]\delta[(p'-b)^2]$$

$$+ \Big[(bp'')\big[(p'+b)p\big] - (bp)\big[(p'+b)p''\big] + (pp'')\big[(p'+b)b\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\}$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}, \tag{D.4}$$

- $$b_\mu p_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{b^2e^2}{(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\Bigg\{$$

$$\Big[p(p''-b)\delta[(p''-b)^2] - p(p''+b)\delta[(p''+b)^2]\Big]\left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right]$$

$$+ \Big[p(p'-b)\delta[(p'-b)^2] - p(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}, \tag{D.5}$$

- $$b_\mu b_\nu \Pi_0^{\mu\nu}(p) = \frac{-e^2}{(2\pi)^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\Bigg\{$$

$$\Big\{\Big[2(bp')\big[(p''-b)b\big] - b^2\big[(p''-b)p'\big]\Big]\delta[(p''-b)^2]$$

$$+ \Big[\Big[2(bp')\big[(p''+b)b\big] - b^2\big[(p''+b)p'\big]\Big]\delta[(p''+b)^2]\Big\}$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right]$$

$$+ \Big\{\Big[2(bp'')\big[(p'-b)b\big] - b^2\big[(p'-b)p''\big]\Big]\delta[(p'-b)^2]$$

$$+ \Big[2(bp'')\big[(p'+b)b\big] - b^2\big[(p'+b)p''\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\}$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}, \tag{D.6}$$

- $$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi^3}\int d^4p'd^4p''\delta(p-p'+p'')\Bigg\{$$

$$\Big\{\Big[(bp')\big[(p''-b)p\big] - (pp')\big[(p''-b)b\big]\Big]\delta[(p''-b)^2]$$

$$- \Big[(bp')\big[(p''+b)p\big] - (pp')\big[(p''+b)b\big]\Big]\delta[(p''+b)^2]\Big\}$$

$$\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&- \Big\{\Big[(bp'')\big[(p'-b)p\big] - (pp'')\big[(p'-b)b\big]\Big]\delta[(p'-b)^2] \\
&- \Big[(bp'')\big[(p'+b)p\big] - (pp'')\big[(p'+b)b\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\} \\
&\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{D.7}
$$

- $$
\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{4\pi^3}\int d^4p' d^4p''\delta(p-p'+p'')\Bigg\{ \\
&\Big\{\Big[(bp)\big[(p''-b)b\big] - b^2\big[(p''-b)p\big]\Big]\delta[(p''-b)^2] \\
&+ \Big[(bp)\big[(p''+b)b\big] - b^2\big[(p''+b)p\big]\Big]\delta[(p''+b)^2]\Big\} \\
&\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p'^2} - i\pi\epsilon(p')\delta(p'^2)\right] \\
&- \Big\{\Big[(bp)\big[(p'-b)b\big] - b^2\big[(p'-b)p\big]\Big]\delta[(p'-b)^2] \\
&+ \Big[(bp)\big[(p'+b)b\big] - b^2\big[(p'+b)p\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\} \\
&\times \left[\mathcal{P}\frac{1}{p''^2} + i\pi\epsilon(p'')\delta(p''^2)\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{D.8}
$$

Por conveniência, calcularemos inicialmente as partes imaginárias dos termos $\Pi^\mu{}_\mu$, $b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}$ e $b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}$ e a parte real de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi^{\mu\nu}$, que são facilmente obtidas a partir das expressões (D.2)-(D.8):

- $$
\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\,\Pi_0{}^\mu{}_\mu(p) = \frac{-e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\Big\{ \\
&\Big[p'(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] + p'(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]\epsilon(p')\delta(p'^2) \\
&- \Big[(p'-p)(p'-b)\delta[(p'-b)^2] + (p'-p)(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big] \\
&\times \epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)'^2\big]\Big\} \\
&= \frac{-e^2}{2\pi^2}\int d^4p'\Big[p'(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] + p'(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big] \\
&\times \epsilon(p')\delta(p'^2) \\
&=: \frac{-e^2}{2\pi^2}\left[I_1(p+b) + I_1(p-b)\right],
\end{aligned} \tag{D.9}
$$

- $$
\begin{aligned}
\mathfrak{Im}\,\Pi_b{}^\mu{}_\mu(p) = \frac{e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\Big\{ \\
&\Big[b(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - b(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]\delta(p'^2)\epsilon(p')
\end{aligned}
$$

$$- \Big[b(p'-b)\delta[(p'-b)^2] - b(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\}$$

$$= \frac{e^2}{2\pi^2}\int d^4p'\Big[b(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - b(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]$$

$$\times\,\delta(p'^2)\epsilon(p')$$

$$=: \frac{e^2}{2\pi^2}\left[I_2(p+b) - I_2(p-b)\right],$$

- $\mathfrak{Im}\, b_\mu p_\nu \Pi_0^{\mu\nu}(p) = \dfrac{e^2}{8\pi^2}\displaystyle\int d^4p' \Bigg\{$

$$\Bigg\{\Big[(bp')\big[(p'-p-b)p\big] - (bp)\big[(p'-p-b)p'\big] + (pp')\big[(p'-p-b)b\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2]$$

$$+ \Big[(bp')\big[(p'-p+b)p\big] - (bp)\big[(p'-p+b)p'\big] + (pp')\big[(p'-p+b)b\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\Bigg\}$$

$$\times\,\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$+ \Bigg\{\Big[b(p'-p)\big[(p'-b)p\big] - (bp)\big[(p'-b)(p'-p)\big] + p(p'-p)\big[(p'-b)b\big]\Big]\delta[(p'-b)^2]$$

$$+ \Big[b(p'-p)\big[(p'+b)p\big] - (bp)\big[(p'+b)(p'-p)\big] + p(p'-p)\big[(p'+b)b\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Bigg\}$$

$$\times\,\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\epsilon(p')\delta(p'^2)\Bigg\{$$

$$\Big[(bp')\big[(p'-p-b)p\big] - (bp)\big[(p'-p-b)p'\big] + (pp')\big[(p'-p-b)b\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2]$$

$$+ \Big[(bp')\big[(p'-p+b)p\big] - (bp)\big[(p'-p+b)p'\big] + (pp')\big[(p'-p+b)b\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\Bigg\}$$

$$=: \frac{e^2}{4\pi^2}\left[I_3(p+b) + I_3(p-b)\right],$$

- $\mathfrak{Im}\, b_\mu p_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p) = \dfrac{-b^2e^2}{8\pi^2}\displaystyle\int d^4p' \Bigg\{$

$$\Big[p(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - p(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$- \Big[p(p'-b)\delta[(p'-b)^2] - p(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\}$$

$$= \frac{-b^2e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\Big[p(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - p(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]$$

$$\times\,\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$=: \frac{-b^2e^2}{4\pi^2}\left[I_4(p+b) - I_4(p-b)\right],$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, b_\mu b_\nu \Pi_0^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2}\int d^4p'\Bigg\{$$

$$\bigg\{\Big[2(bp')\big[(p'-p-b)b\big] - b^2\big[(p'-p-b)p'\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2]$$

$$+\Big[\Big[2(bp')\big[(p'-p+b)b\big] - b^2\big[(p'-p+b)p'\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\bigg\}$$

$$\times\,\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$-\bigg\{\Big[2b(p'-p)\big[(p'-b)b\big] - b^2\big[(p'-b)(p'-p)\big]\Big]\delta[(p'-b)^2]$$

$$+\Big[2b(p'-p)\big[(p'+b)b\big] - b^2\big[(p'+b)(p'-p)\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\bigg\}$$

$$\times\,\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\epsilon(p')\delta(p'^2)\bigg\{$$

$$\Big[2(bp')\big[(p'-p-b)b\big] - b^2\big[(p'-p-b)p'\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2]$$

$$+\Big[2(bp')\big[(p'-p+b)b\big] - b^2\big[(p'-p+b)p'\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\bigg\}$$

$$\coloneqq \frac{e^2}{4\pi^2}\left[I_5(p+b) + I_5(p-b)\right],$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, b_\mu b_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{-b^2e^2}{8\pi^2}\int d^4p'\Bigg\{$$

$$\Big[b(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - b(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$-\Big[b(p'-b)\delta[(p'-b)^2] - b(p'+b)\delta[(p'+b)^2]\Big]\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Big]\Bigg\}$$

$$= \frac{-b^2e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\Big[b(p'-p-b)\delta[(p'-p-b)^2] - b(p'-p+b)\delta[(p'-p+b)^2]\Big]$$

$$\times\,\epsilon(p')\delta(p'^2)$$

$$\eqqcolon \frac{-b^2e^2}{4\pi^2}\left[I_2(p+b) - I_2(p-b)\right],$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{4\pi^2}\int d^4p'\Bigg\{$$

$$\bigg\{\Big[(bp')\big[(p'-p-b)p\big] - (pp')\big[(p'-p-b)b\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2]$$

$$-\Big[(bp')\big[(p'-p+b)p\big] - (pp')\big[(p'-p+b)b\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\bigg\}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \epsilon(p')\delta(p'^2) \\
&+ \Big\{\Big[b(p'-p)\big[(p'-b)p\big] - p(p'-p)\big[(p'-b)b\big]\Big]\delta[(p'-b)^2] \\
&- \Big[b(p'-p)\big[(p'+b)p\big] - p(p'-p)\big[(p'+b)b\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\} \\
&\times \epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\} \\
&= \frac{e^2}{2\pi^2}\int d^4p'\epsilon(p')\delta(p'^2)\Bigg\{ \\
&\quad \Big[(bp')\big[(p'-p-b)p\big] - (pp')\big[(p'-p-b)b\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2] \\
&- \Big[(bp')\big[(p'-p+b)p\big] - (pp')\big[(p'-p+b)b\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\Bigg\} \\
&=: \frac{e^2}{2\pi^2}\left[I_6(p+b) - I_6(p-b)\right],
\end{aligned}
$$

- $\mathfrak{Re}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_b^{\mu\nu}(p) = \dfrac{e^2}{4\pi^2}\displaystyle\int d^4p'\Bigg\{$

$$
\begin{aligned}
&\quad \Big\{\Big[(bp)\big[(p'-p-b)b\big] - b^2\big[(p'-p-b)p\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2] \\
&+ \Big[(bp)\big[(p'-p+b)b\big] - b^2\big[(p'-p+b)p\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\Big\}\epsilon(p')\delta(p'^2) \\
&+ \Big\{\Big[(bp)\big[(p'-b)b\big] - b^2\big[(p'-b)p\big]\Big]\delta[(p'-b)^2] \\
&+ \Big[(bp)\big[(p'+b)b\big] - b^2\big[(p'+b)p\big]\Big]\delta[(p'+b)^2]\Big\}\epsilon(p'-p)\delta\big[(p'-p)^2\big]\Bigg\} \\
&= \frac{e^2}{2\pi^2}\int d^4p'\epsilon(p')\delta(p'^2)\Bigg\{ \\
&\quad \Big\{\Big[(bp)\big[(p'-p-b)b\big] - b^2\big[(p'-p-b)p\big]\Big]\delta[(p'-p-b)^2] \\
&+ \Big[(bp)\big[(p'-p+b)b\big] - b^2\big[(p'-p+b)p\big]\Big]\delta[(p'-p+b)^2]\Big\} \\
&=: \frac{e^2}{2\pi^2}\left[I_7(p+b) + I_7(p-b)\right],
\end{aligned}
$$

onde definimos, para $Q = p \pm b$, as integrais

$$
I_1(Q) = \int d^4p'\Big[(p'-Q)p'\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10a}
$$

$$
I_2(Q) = \int d^4p'\Big[(p'-Q)b\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10b}
$$

$$
I_3(Q) = \int d^4p'\Big[(bp')\big[(p'-Q)p\big] - (bp)\big[(p'-Q)p'\big] + (pp')\big[(p'-Q)b\big]\Big]
$$

$$\times\, \delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10c}$$

$$I_4(Q) = \int d^4p' \Big[(p'-Q)p\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10d}$$

$$I_5(Q) = \int d^4p' \Big[2(bp')\big[(p'-Q)b\big] - b^2\big[(p'-Q)p'\big]\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10e}$$

$$I_6(Q) = \int d^4p' \Big[(bp')[(p'-Q)p] - (pp')[(p'-Q)b]\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'), \tag{D.10f}$$

$$I_7(Q) = \int d^4p' \Big[(bp)[(p'-Q)b] - b^2\big[(p'-Q)p\big]\Big]\delta[(p'-Q)^2]\delta(p'^2)\epsilon(p'). \tag{D.10g}$$

Portanto,

- $\mathfrak{Im}\,\Pi^{\mu}_{\ \mu}(p) = \mathfrak{Im}\,\Pi_0{}^{\mu}_{\ \mu}(p) + \mathfrak{Im}\,\Pi_b{}^{\mu}_{\ \mu}(p)$

$$= \frac{e^2}{2\pi^2}\left\{(-I_1+I_2)(p+b) + (-I_1-I_2)(p-b)\right\}, \tag{D.11}$$

- $\mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = \mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi_0^{\mu\nu}(p) + \mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p)$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\left\{\big(I_3 - b^2 I_4\big)(p+b) + \big(I_3 + b^2 I_4\big)(p-b)\right\}, \tag{D.12}$$

- $\mathfrak{Im}\,b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = \mathfrak{Im}\,b_\mu b_\nu \Pi_0^{\mu\nu}(p) + \mathfrak{Im}\,b_\mu b_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p)$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\left\{\big(I_5 - b^2 I_2\big)(p+b) + \big(I_5 + b^2 I_2\big)(p-b)\right\}, \tag{D.13}$$

- $\mathfrak{Re}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi^{\mu\nu}(p) = \mathfrak{Re}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p) + \mathfrak{Re}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p)$

$$= \frac{e^2}{2\pi^2}\left\{(I_6+I_7)(p+b) + (-I_6+I_7)(p-b)\right\}. \tag{D.14}$$

Usando a identidade da delta de Dirac

$$\delta(p'^2) = \frac{1}{2|\mathbf{p}'|}\big[\delta(p'_0 - |\mathbf{p}'|) + \delta(p'_0 + |\mathbf{p}'|)\big],$$

e integrando na variável p'_0, obtemos

- $$I_1(Q) = \frac{-Q^2}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q} + Q^2) - \delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q} + Q^2)\Big\}, \tag{D.15}$$

- $$I_2(Q) = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\big[|\mathbf{p}'|b_0 - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{b} - Qb\big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q} + Q^2) + \big[|\mathbf{p}'|b_0 + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{b} + Qb\big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q} + Q^2)\Big\}, \tag{D.16}$$

- $$I_3(Q) = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\Big[(|\mathbf{p}'|b_0 - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|p_0 - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} - Qb) + \tfrac{1}{2}(bp)Q^2$$

$$+\,(|\mathbf{p}'|p_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p})(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}-Qb)\Big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)$$
$$-\,\Big[(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Qb)+\tfrac{1}{2}(bp)Q^2$$
$$+\,(|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p})(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}+Qb)\Big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)\Big\}, \tag{D.17}$$

- $$I_4(Q)=\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\big[|\mathbf{p}'|p_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}-Qp\big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)$$
$$+\,\big[|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Qp\big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)\Big\}, \tag{D.18}$$

- $$I_5(Q)=\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\Big[2(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}-Qb)+b^2(|\mathbf{p}'|Q_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q})\Big]$$
$$\times\,\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)$$
$$-\,\Big[2(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}+Qb)-b^2(|\mathbf{p}'|Q_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q})\Big]$$
$$\times\,\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)\Big\}, \tag{D.19}$$

- $$I_6(Q)=\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\Big[(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|p_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}-Qp)$$
$$-\,(|\mathbf{p}'|p_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p})(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}-Qb)\Big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)$$
$$-\,\Big[(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b})(|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Qp)$$
$$-\,(|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p})(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}+Qb)\Big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)\Big\}, \tag{D.20}$$

- $$I_7(Q)=\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\Big[(bp)(|\mathbf{p}'|b_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}-Qb)-b^2(|\mathbf{p}'|p_0-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}-Qp)\Big]$$
$$\times\,\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)$$
$$+\,\Big[(bp)(|\mathbf{p}'|b_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{b}+Qb)-b^2(|\mathbf{p}'|p_0+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Qp)\Big]$$
$$\times\,\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{Q}+Q^2)\Big\}. \tag{D.21}$$

As integrais acima são bastante complicadas para serem resolvidas analiticamente. Isso se deve ao fato de $\mathbf{p}$ e $\mathbf{b}$ serem independentes um do outro e de não podermos escolher um referencial adequado para o cálculo das integrais, como feito na seção 3.4, pois o modelo em questão não apresenta simetria de Lorentz.

Consideraremos então o caso particular no qual $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, isto é, $b=(b_0,0,0,0)$ e $Q=(p_0+b_0,\mathbf{p})$.

Passando para coordenadas esféricas, obtemos

- $$I_1(Q)=\frac{-Q^2}{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|}\Big\{\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Q^2)-\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0+2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}+Q^2)\Big\}, \tag{D.22}$$

$$= \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int_0^{\infty} dx \Big\{ x\,\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$- x\,\delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\},$$

$$= \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int dx\, x\,\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.23}$$

- $$I_2(Q) = b_0 \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|} \Big\{ \big[|\mathbf{p}'| - Q_0\big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2)$$

$$+ \big[|\mathbf{p}'| + Q_0\big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\infty} dx \Big\{ \big[x^2 - xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$+ \big[x^2 + xQ_0\big]\delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 - xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.24}$$

- $$I_3(Q) = b_0(p_0 - Q_0) \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|} \Big\{ \big[|\mathbf{p}'|^2 - Q_0|\mathbf{p}'| + \tfrac{1}{4}Q^2\big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2)$$

$$- \big[|\mathbf{p}'|^2 + Q_0|\mathbf{p}'| + \tfrac{1}{4}Q^2\big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\infty} dx \Big\{ \big[x^3 - x^2Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$- \big[x^3 + x^2Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.25}$$

- $$I_4(Q) = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|} \Big\{ \Big[|\mathbf{p}'|(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}Q^2 - Qp\Big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2)$$

$$+ \Big[|\mathbf{p}'|(p_0 - Q_0) - \tfrac{1}{2}Q^2 + Qp\Big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\infty} dx \Big\{ \big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$+ \big[x^2(p_0 - Q_0) - \tfrac{1}{2}xQ^2 + xQp\big]\delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.26}$$

- $$I_5(Q) = b_0^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|} \Big\{ \big[|\mathbf{p}'|^2 - Q_0|\mathbf{p}'| + \tfrac{1}{4}Q^2\big]\delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2)$$

$$- \big[|\mathbf{p}'|^2 + Q_0|\mathbf{p}'| + \tfrac{1}{4}Q^2\big]\delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\infty} dx \Big\{ \big[x^3 - x^2Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$- \big[x^3 + x^2Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4} x Q^2\big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.27}$$

- $$I_6(Q) = b_0 Q^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|} \Big\{ \big[-|\mathbf{p}'| + \tfrac{1}{2} Q_0 \big] \delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + Q^2)$$

$$+ \big[|\mathbf{p}'| - \tfrac{1}{2} Q_0 \big] \delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int_0^\infty dx \Big\{ \big[-x^2 + \tfrac{1}{2} x Q_0 \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$- \big[x^2 + \tfrac{1}{2} x Q_0 \big] \delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[-x^2 + \tfrac{1}{2} x Q_0 \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2), \tag{D.28}$$

- $$I_7(Q) = b_0^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{2|\mathbf{p}'|} \Big\{ \big[|\mathbf{p}'|Q_0 - \tfrac{1}{2}(Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(-2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + Q^2)$$

$$+ \big[|\mathbf{p}'|Q_0 + \tfrac{1}{2}(Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(2|\mathbf{p}'|Q_0 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int_0^\infty dx \Big\{ \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2} x (Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$+ \big[x^2 Q_0 + \tfrac{1}{2} x (Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \Big\}$$

$$= \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2} x (Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2). \tag{D.29}$$

Antes de darmos procedimento ao cálculo dessas integrais, notemos inicialmente que o argumento da delta de Dirac que aparece nas expressões (D.23)-(D.29) possue raízes no domínio de integração $[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Temos dois casos:

- **Caso 1:** $Q_0 \neq 0$.
  O par $x = \frac{Q^2}{2Q_0}$ e $y = 0$ é uma solução de $-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2 = 0$.

- **Caso 2:** $Q_0 = 0$.
  O par $x = 0$ e $y = 0$ é uma solução de $-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2 = 0$.

O cálculo das integrais (D.23)-(D.29) será realizado separadamente para cada um dos seguintes casos:

1. $Q^2 > 0$, $Q_0 > 0$;

2. $Q^2 = 0$, $Q_0 \geq 0$;

3. $Q^2 < 0$, $Q_0 < 0$;

4. $Q^2 > 0$, $Q_0 < 0$;

5. $Q^2 = 0$, $Q_0 < 0$;

6. $Q^2 < 0$, $Q_0 \geq 0$;

Caso 1: $Q^2 > 0$, $Q_0 > 0$.

Neste caso, $Q^2 = (Q_0 + |\mathbf{p}|)(Q_0 - |\mathbf{p}|) > 0 \implies (Q_0 - |\mathbf{p}|) > 0$. Assim, $0 < Q_0 - |\mathbf{p}| \leq Q_0 - |\mathbf{p}|y$, para $y \in [-1, 1]$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) &= \frac{1}{2\Big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\Big|}\delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\right) \\
&= \frac{1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\right). \qquad \text{(D.30)}
\end{aligned}$$

Utilizando (D.30) em (D.23)-(D.29), segue que

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_1(Q) &= \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int dx\, x\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \frac{Q^2}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2} \\
&= -\frac{1}{4}\pi Q^2, \qquad \text{(D.31)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_2(Q) &= \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx \left[x^2 - xQ_0\right]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{Q^2 Q_0}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\
&= -\frac{1}{4} b_0 \pi Q_0, \qquad \text{(D.32)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_3(Q) &= 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int dx \left[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\right]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^6}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^4} - \frac{Q^4 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \frac{Q^4}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\
&= -\frac{1}{6}\pi b_0(p_0 - Q_0)|\mathbf{p}|^2, \qquad \text{(D.33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_4(Q) &= \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx \left[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\right]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \pi \int_{-1}^{1} dy \left[(p_0 - Q_0)\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \left(\tfrac{1}{2}Q^2 - Qp\right)\frac{Q^2}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\pi\left[Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2 - (p_0 + b_0)Q_0\right], \qquad \text{(D.34)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ I_5(Q) &= 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \left[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\right]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^6}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^4} - \frac{Q^4 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \frac{Q^4}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2, \tag{D.35}$$

- $$I_6(Q) = \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[-x^2 + \tfrac{1}{2}xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= -\pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{Q^2 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right]$$
$$= 0, \tag{D.36}$$

- $$I_7(Q) = \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2}x(Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2)\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q_0 Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{(Q_o^2 + |\mathbf{p}|^2)Q^2}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2. \tag{D.37}$$

Caso 2: $Q^2 = 0$, $Q_0 \geq 0$.

Neste caso, $Q_0 = |\mathbf{p}|$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|\,|1-y|}\delta(x) \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|\,(1-y)}\delta(x), \end{aligned} \tag{D.38}$$

onde utilisamos $0 \leq 1 - y$ para $y \in [-1, 1]$.

Utilizando (D.38) em (D.23)-(D.29), segue que

- $$I_1(Q) = \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int dx\, x\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0, \tag{D.39}$$

- $$I_2(Q) = \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^2 - xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0, \tag{D.40}$$

- $$I_3(Q) = 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0, \tag{D.41}$$

- $$I_4(Q) = \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$

$$= 0, \tag{D.42}$$

- $$I_5(Q) = 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4} x Q^2\big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0, \tag{D.43}$$

- $$I_6(Q) = \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[- x^2 + \tfrac{1}{2} x Q_0\big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0, \tag{D.44}$$

- $$I_7(Q) = \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2} x (Q_0^2 + \mathbf{p}^2)\big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= 0. \tag{D.45}$$

Caso 3: $Q^2 < 0$, $Q_0 < 0$.

Neste caso, $Q^2 = (Q_0 + |\mathbf{p}|)(Q_0 - |\mathbf{p}|) < 0 \implies Q_0 + |\mathbf{p}| > 0$.
Note agora que :

- para $y = -1$, $Q_0 - y|\mathbf{p}| = Q_0 + |\mathbf{p}| > 0$;
- para $y = 1$, $Q_0 - y|\mathbf{p}| = Q_0 - |\mathbf{p}| < 0$.

Logo, sendo $Q_0 - y|\mathbf{p}|$ contínua em $[-1, 1]$, existe $\xi \in (-1, 1)$ tal que $Q_0 - \xi|\mathbf{p}| = 0$. Portanto,

$$\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) = \frac{1}{2\Big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\Big|} \delta\bigg(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\bigg)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}|y)} \delta\Big(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\Big), & \text{para } -1 \le y < \xi \\ \frac{-1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}|y)} \delta\Big(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\Big), & \text{para } \xi < y \le 1 \end{cases}. \tag{D.46}$$

Por conveniência, calcularemos para n =1,2 e 3 a integral

$$\mathcal{J}^{(n)} = \int_{-1}^{1} dy \int dx \, x^n \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2).$$

Utilizando (D.46), temos

$$\mathcal{J}^{(1)} = \int_{-1}^{1} dy \int dx \, x \, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= \frac{Q^2}{4} \int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\Big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\Big| (Q_0 - |\mathbf{p}|y)}. \tag{D.47}$$

Pelo fato do integrando não estar definido para $y = \xi$, consideraremos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(1)} &= \frac{Q^2}{4}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{1}{\big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\big|(Q_0 - |\mathbf{p}|y)} \\
&:= \frac{Q^2}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\int_{-1}^{\xi-\epsilon} dy\, \frac{1}{\big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\big|(Q_0 - |\mathbf{p}|y)} + \int_{\xi+\epsilon}^{1} dy\, \frac{1}{\big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\big|(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\right\} \\
&= \frac{Q^2}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\int_{-1}^{\xi-\epsilon} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^2} - \int_{\xi+\epsilon}^{1} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^2}\right\}, \qquad \text{(D.48)}
\end{aligned}
$$

onde $0 < \epsilon < \min\{|-1-\xi|, |1-\xi|\}$. Assim,

- $$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(1)} &= \frac{Q^2}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\int_{-1}^{\xi-\epsilon} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^2} - \int_{\xi+\epsilon}^{1} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^2}\right\}, \\
&= \frac{Q^2}{4|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\bigg|_{-1}^{\xi-\epsilon} - \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\bigg|_{\xi+\epsilon}^{1}\right\} \\
&= \frac{Q^2}{4|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\frac{1}{Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)} - \frac{1}{Q_0 + |\mathbf{p}|} - \frac{1}{Q_0 - |\mathbf{p}|} + \frac{1}{Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)}\right\} \\
&= \frac{Q^2}{4|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\frac{2(Q_0 - |\mathbf{p}|\xi)}{\big[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)\big]\big[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)\big]} - \frac{2Q_0}{Q_0^2 - |\mathbf{p}|^2}\right\} \\
&= \frac{Q^2}{4|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{0 - \frac{2Q_0}{Q_0^2 - |\mathbf{p}|^2}\right\} = -\frac{Q_0}{2|\mathbf{p}|}, \qquad \text{(D.49)}
\end{aligned}
$$

onde usamos $Q_0 - |\mathbf{p}|\xi = 0$.

Analogamente,

- $$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{(2)} &= \int_{-1}^{1} dy \int dx\, x^2\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \frac{Q^4}{8}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{1}{\big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\big|(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^2} \\
&= \frac{Q^4}{8}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-1}^{\xi-\epsilon} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^3} - \int_{\xi+\epsilon}^{1} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^3}\right] \\
&= \frac{Q^4}{16|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\big[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)\big]^2} - \frac{1}{(Q_0 + |\mathbf{p}|)^2} - \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|)^2} + \frac{1}{\big[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)\big]^2}\right] \\
&= \frac{Q^4}{16|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{-2\left(Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2\right)}{Q^4} + \frac{2|\mathbf{p}|^2\epsilon^2}{|\mathbf{p}|^4\epsilon^4}\right] \\
&= \frac{-Q^4}{8|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2}{Q^4} - \frac{1}{|\mathbf{p}|^2\epsilon^2}\right] = -\frac{Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2}{8|\mathbf{p}|}, \qquad \text{(D.50)}
\end{aligned}
$$

onde retemos apenas a parte finita.

- $$
\mathcal{J}^{(3)} = \int_{-1}^{1} dy \int dx\, x^3\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Q^6}{16}\int_{-1}^{1} dy\, \frac{1}{\Big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\Big|(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^3} \\
&= \frac{Q^6}{16}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-1}^{\xi-\epsilon} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^4} - \int_{\xi+\epsilon}^{1} dy\, \frac{1}{(Q_0 - |\mathbf{p}|y)^4}\right] \\
&= \frac{Q^6}{48|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)\right]^3} - \frac{1}{\left(Q_0 + |\mathbf{p}|\right)^3} - \frac{1}{\left(Q_0 - |\mathbf{p}|\right)^3} + \frac{1}{\left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)\right]^3}\right] \\
&= \frac{Q^6}{48|\mathbf{p}|}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{6|\mathbf{p}|^2 Q_0 + 2Q_0^3}{Q^6} + \frac{\overbrace{\left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)\right]^3 + \left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)\right]^3}^{=0}}{\left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi-\epsilon)\right]^3\left[Q_0 - |\mathbf{p}|(\xi+\epsilon)\right]^3}\right] \\
&= \frac{-3|\mathbf{p}|^2 Q_0 - Q_0^3}{24|\mathbf{p}|}.
\end{aligned} \tag{D.51}
$$

Assim,

- $$
\begin{aligned}
I_1(Q) &= \frac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int dx\, x\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \frac{-Q^2\pi}{2}\mathcal{J}^{(1)} \\
&= \frac{\pi Q^2 Q_0}{4|\mathbf{p}|},
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
I_2(Q) &= \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^2 - xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \pi b_0\left[\mathcal{J}^{(2)} - Q_0\mathcal{J}^{(1)}\right] \\
&= \frac{\pi b_0}{8}\left[\frac{3Q_0^2}{|\mathbf{p}|} - |\mathbf{p}|\right],
\end{aligned} \tag{D.52}
$$

- $$
\begin{aligned}
I_3(Q) &= 2\pi b_0(p_0 - Q_0)\int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= 2\pi b_0(p_0 - Q_0)\left[\mathcal{J}^{(3)} - \mathcal{J}^{(2)}Q_0 + \tfrac{1}{4}Q^2\mathcal{J}^{(1)}\right] \\
&= \frac{\pi}{2} b_0(p_0 - Q_0)\left[\frac{Q_0^3}{3|\mathbf{p}|} - \frac{Q_0 Q^2}{2|\mathbf{p}|}\right],
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
I_4(Q) &= \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= \pi\left[(p_0 - Q_0)\mathcal{J}^{(2)} + \tfrac{1}{2}(Q^2 - 2Qp)\mathcal{J}^{(1)}\right] \\
&= \pi\left\{\frac{(p_0 - Q_0)}{8}\left[-\frac{Q_0^2}{|\mathbf{p}|} - |\mathbf{p}|\right] - \frac{Q_0}{4|\mathbf{p}|}(Q^2 - 2Qp)\right\}
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
I_5(Q) &= 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx\big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) \\
&= 2\pi b_0^2\left[\mathcal{J}^{(3)} - \mathcal{J}^{(2)}Q_0 + \tfrac{1}{4}Q^2\mathcal{J}^{(1)}\right] \\
&= \frac{\pi}{2} b_0^2\left[\frac{Q_0^3}{3|\mathbf{p}|} - \frac{Q_0 Q^2}{2|\mathbf{p}|}\right],
\end{aligned} \tag{D.53}
$$

- $$I_6(Q) = \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[-x^2 + \tfrac{1}{2} x Q_0 \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= \pi b_0 Q^2 \left[-\mathcal{J}^{(2)} + \tfrac{1}{2} Q_0 \mathcal{J}^{(1)} \right]$$
$$= \frac{\pi b_0 Q^2}{8} \left[\frac{-Q_0^2}{|\mathbf{p}|} + |\mathbf{p}| \right], \tag{D.54}$$

- $$I_7(Q) = \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2} x (Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= \pi b_0^2 \left[Q_0 \mathcal{J}^{(2)} - \tfrac{1}{2} (Q_0^2 + \mathbf{p}^2) \mathcal{J}^{(1)} \right]$$
$$= \frac{\pi b_0^2}{8} \left[\frac{Q_0^3}{|\mathbf{p}|} + Q_0 |\mathbf{p}| \right]. \tag{D.55}$$

Caso 4: $Q^2 > 0$, $Q_0 < 0$.

Neste caso, $Q^2 = (Q_0 + |\mathbf{p}|)(Q_0 - |\mathbf{p}|) > 0 \implies Q_0 + |\mathbf{p}| < 0$. Assim, $Q_0 - |\mathbf{p}| y \leq Q_0 + |\mathbf{p}| < 0$, para $y \in [-1, 1]$ e, portanto,

$$\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) = \frac{1}{2\Big|Q_0 - |\mathbf{p}| y\Big|} \delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)} \right)$$
$$= \frac{-1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}| y)} \delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)} \right). \tag{D.56}$$

Utilizando D.56 em (D.23)-(D.29), segue que

- $$I_1(Q) = \frac{-Q^2 \pi}{2} \int_{-1}^{1} dy \int dx \, x \, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= \frac{Q^2 \pi}{2} \int_{-1}^{1} dy \frac{Q^2}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}$$
$$= \frac{1}{4} \pi Q^2, \tag{D.57}$$

- $$I_2(Q) = \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx \left[x^2 - x Q_0 \right] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= -\pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{Q^2 Q_0}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{4} b_0 \pi Q_0, \tag{D.58}$$

- $$I_3(Q) = 2\pi b_0 (p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4} x Q^2 \big] \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$$
$$= -2\pi b_0 (p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^6}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^4} - \frac{Q^4 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \frac{Q^4}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{6}\pi b_0(p_0 - Q_0)|\mathbf{p}|^2, \tag{D.59}$$

- $I_4(Q) = \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$\begin{aligned} &= -\pi \int_{-1}^{1} dy \left[(p_0 - Q_0)\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \left(\tfrac{1}{2}Q^2 - Qp\right)\frac{Q^2}{4(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\pi\left[Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2 - (p_0 + b_0)Q_0\right], \end{aligned} \tag{D.60}$$

- $I_5(Q) = 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$\begin{aligned} &= -2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^6}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^4} - \frac{Q^4 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} + \frac{Q^4}{16(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2, \end{aligned} \tag{D.61}$$

- $I_6(Q) = \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[-x^2 + \tfrac{1}{2}xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$\begin{aligned} &= \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{Q^2 Q_0}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{D.62}$$

- $I_7(Q) = \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2}x(Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2)\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$\begin{aligned} &= -\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{Q_0 Q^4}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^3} - \frac{(Q_o^2 + |\mathbf{p}|^2)Q^2}{8(Q_0 - y|\mathbf{p}|)^2}\right] \\ &= \frac{1}{4}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2. \end{aligned} \tag{D.63}$$

Caso 5: $Q^2 = 0$, $Q_0 < 0$.

Neste caso, $Q_0 = -|\mathbf{p}|$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|\,|1+y|}\delta(x) \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{p}|\,(1+y)}\delta(x), \end{aligned} \tag{D.64}$$

onde usamos $0 \leq 1 + y$ para $y \in [-1, 1]$.

Utilizando (D.64) em (D.23)-(D.29), segue que

- $I_1(Q) = \dfrac{-Q^2\pi}{2}\int_{-1}^{1} dy \int dx\, x\, \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.65}$$

- $I_2(Q) = \pi b_0 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 - xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.66}$$

- $I_3(Q) = 2\pi b_0(p_0 - Q_0) \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.67}$$

- $I_4(Q) = \pi \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2(p_0 - Q_0) + \tfrac{1}{2}xQ^2 - xQp\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.68}$$

- $I_5(Q) = 2\pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^3 - x^2 Q_0 + \tfrac{1}{4}xQ^2\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.69}$$

- $I_6(Q) = \pi b_0 Q^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[-x^2 + \tfrac{1}{2}xQ_0\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0, \tag{D.70}$$

- $I_7(Q) = \pi b_0^2 \int_{-1}^{1} dy \int dx \big[x^2 Q_0 - \tfrac{1}{2}x(Q_0^2 + \mathbf{p}^2)\big]\delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2)$

$$= 0. \tag{D.71}$$

Caso 6: $Q^2 < 0$, $Q_0 \geq 0$.

Neste caso, $Q^2 = (Q_0 + |\mathbf{p}|)(Q_0 - |\mathbf{p}|) < 0 \implies Q_0 - |\mathbf{p}| < 0$.
Note agora que :

- para $y = -1$, $Q_0 - y|\mathbf{p}| = Q_0 + |\mathbf{p}| > 0$;
- para $y = 1$, $Q_0 - y|\mathbf{p}| = Q_0 - |\mathbf{p}| < 0$.

Logo, sendo $Q_0 - y|\mathbf{p}|$ contínua em $[-1, 1]$, existe $\xi \in (-1, 1)$ tal que $Q_0 - \xi|\mathbf{p}| = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(-2xQ_0 + 2xy|\mathbf{p}| + Q^2) &= \frac{1}{2\Big|Q_0 - |\mathbf{p}|y\Big|}\delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\right), & \text{para} -1 \leq y < \xi \\ \frac{-1}{2(Q_0 - |\mathbf{p}|y)}\delta\left(x - \frac{Q^2}{2(Q_0 - y|\mathbf{p}|)}\right), & \text{para } \xi < y \leq 1 \end{cases}. \end{aligned} \tag{D.72}$$

A delta acima foi obtida anteriormente em (D.46). Portanto, os resultados deste caso são idênticos àqueles do caso 3.

Juntando tudo, podemos escrever

- $I_1(Q) = -\frac{1}{4}\pi Q^2\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi Q^2 Q_0}{4|\mathbf{p}|}\Theta(-Q^2), \qquad (D.73)$
- $I_2(Q) = -\frac{1}{4}b_0\pi Q_0\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi b_0}{8}\left[\frac{3Q_0^2}{|\mathbf{p}|} - |\mathbf{p}|\right]\Theta(-Q^2), \qquad (D.74)$
- $I_3(Q) = -\frac{1}{6}\pi b_0(p_0 - Q_0)|\mathbf{p}|^2\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi}{2|\mathbf{p}|}b_0(p_0 - Q_0)\left[\frac{Q_0^3}{3} - \frac{Q_0 Q^2}{2}\right]\Theta(-Q^2), \qquad (D.75)$
- $I_4(Q) = \frac{1}{4}\pi\left[Q_0^2 + |\mathbf{p}|^2 - (p_0 + b_0)Q_0\right]\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi}{8}\left\{(p_0 - Q_0)\left[-\frac{Q_0^2}{|\mathbf{p}|} - |\mathbf{p}|\right] - \frac{2Q_0}{|\mathbf{p}|}(Q^2 - 2Qp)\right\}\Theta(-Q^2), \qquad (D.76)$
- $I_5(Q) = -\frac{1}{6}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi}{2|\mathbf{p}|}b_0^2\left[\frac{Q_0^3}{3} - \frac{Q_0 Q^2}{2}\right]\Theta(-Q^2), \qquad (D.77)$
- $I_6(Q) = \frac{\pi b_0 Q^2}{8}\left[\frac{-Q_0^2}{|\mathbf{p}|} + |\mathbf{p}|\right]\Theta(-Q^2), \qquad (D.78)$
- $I_7(Q) = -\frac{1}{4}\pi b_0^2|\mathbf{p}|^2\Theta(Q^2)\epsilon(Q) + \frac{\pi b_0^2}{8}\left[\frac{Q_0^3}{|\mathbf{p}|} + Q_0|\mathbf{p}|\right]\Theta(-Q^2). \qquad (D.79)$

Utilizando as integrais auxiliares (D.73)-(D.79) e as expressões (D.11)-(D.14), obtemos

- $$\begin{aligned}\mathfrak{Im}\,\Pi^{\mu}_{\ \mu}(p) &= \mathfrak{Im}\,\Pi^{\ \mu}_{0\ \mu}(p) + \mathfrak{Im}\,\Pi^{\ \mu}_{b\ \mu}(p)\\ &= \frac{e^2}{8\pi}\Bigg\{\left[p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 + b_0 p_0\right]\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b)\\ &+ \left[\frac{b_0^3}{2|\mathbf{p}|} + |\mathbf{p}|p_0 - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|} + \frac{b_0}{2}\left(|\mathbf{p}| - \frac{3p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p+b)^2\big]\\ &+ \left[p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - b_0 p_0\right]\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b)\\ &+ \left[\frac{-b_0^3}{2|\mathbf{p}|} + |\mathbf{p}|p_0 - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|} - \frac{b_0}{2}\left(|\mathbf{p}| - \frac{3p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.80}$$

- $$\begin{aligned}&\mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) = \mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi^{\mu\nu}(p) + \mathfrak{Im}\,b_\mu p_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p)\\ &= \frac{e^2}{8\pi}\Bigg\{\left[-\frac{1}{6}|\mathbf{p}|^2 b_0^2\right]\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b)\\ &+ \left[\frac{5}{12|\mathbf{p}|}b_0^5 + \frac{1}{2|\mathbf{p}|}p_0 b_0^4 - \frac{1}{3|\mathbf{p}|}p_0^3 b_0^2 - \frac{b_0^3}{4}\left(|\mathbf{p}| + \frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p+b)^2\big]\\ &+ \left[\frac{1}{6}|\mathbf{p}|^2 b_0^2 + b_0^4 - p_0 b_0^3\right]\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b)\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{5}{12|\mathbf{p}|}b_0^5-\frac{1}{2|\mathbf{p}|}p_0b_0^4+\frac{1}{3|\mathbf{p}|}p_0^3b_0^2-\frac{b_0^3}{4}\left(|\mathbf{p}|+\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Big\},\tag{D.81}$$

- $\mathfrak{Im}\, b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}(p)=\mathfrak{Im}\, b_\mu b_\nu \Pi^{\mu\nu}(p)+\mathfrak{Im}\, b_\mu b_\nu \Pi_b^{\mu\nu}(p)$

$$\begin{aligned}
&=\frac{e^2}{4\pi}\Big\{\left[-\frac{1}{6}|\mathbf{p}|^2b_0^2+\frac{1}{4}b_0^4+\frac{1}{4}p_0b_0^3\right]\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b)\\
&+\left[-\frac{11}{24|\mathbf{p}|}b_0^5-\frac{1}{|\mathbf{p}|}p_0b_0^4+\frac{1}{8}b_0^3\left(3|\mathbf{p}|-\frac{5p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)+\frac{1}{4}b_0^2\left(|\mathbf{p}|p_0-\frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p+b)^2\big]\\
&+\left[-\frac{1}{6}|\mathbf{p}|^2b_0^2+\frac{1}{4}b_0^4-\frac{1}{4}p_0b_0^3\right]\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b)\\
&+\left[\frac{11}{24|\mathbf{p}|}b_0^5-\frac{1}{|\mathbf{p}|}p_0b_0^4-\frac{1}{8}b_0^3\left(3|\mathbf{p}|-\frac{5p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)+\frac{1}{4}b_0^2\left(|\mathbf{p}|p_0-\frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|}\right)\right]\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Big\},
\end{aligned}\tag{D.82}$$

- $\mathfrak{Re}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi^{\mu\nu}(p)=\mathfrak{Re}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p)+\mathfrak{Re}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma \Pi_0^{\mu\nu}(p)$

$$\begin{aligned}
&=\frac{e^2}{16\pi}\Big\{\big[-2|\mathbf{p}|^2b_0^2\big]\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b)\\
&+\left[-\frac{1}{|\mathbf{p}|}p_0b_0^4+3b_0^3\left(|\mathbf{p}|-\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)+b_0^2\left(5|\mathbf{p}|p_0-\frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|}\right)-b_0\left(|\mathbf{p}|^3-2|\mathbf{p}|p_0^2+\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\\
&\times\Theta\big[-(p+b)^2\big]\\
&+\big[-2|\mathbf{p}|^2b_0^2\big]\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b)\\
&+\left[-\frac{1}{|\mathbf{p}|}p_0b_0^4-3b_0^3\left(|\mathbf{p}|-\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|}\right)+b_0^2\left(5|\mathbf{p}|p_0-\frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|}\right)+b_0\left(|\mathbf{p}|^3-2|\mathbf{p}|p_0^2+\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|}\right)\right]\\
&\times\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{D.83}$$

No caso particular $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ que estamos considerando, os coeficientes do tensor de polarização do vácuo obtidos em (6.53)-(6.56) adquirem a forma

$$A(p)=\frac{-3p_0}{2|\mathbf{p}|^4}\frac{1}{b_0}b_\mu p_\nu\Pi^{\mu\nu}+\left(\frac{3p_0^2}{2|\mathbf{p}|^4}-\frac{1}{2|\mathbf{p}|^2}\right)\frac{1}{b_0^2}b_\mu b_\nu\Pi^{\mu\nu}+\frac{1}{2|\mathbf{p}|^2}\Pi^\mu{}_\mu,\tag{D.84a}$$

$$B(p)=\frac{1}{2|\mathbf{p}|^2}\frac{1}{b_0^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\rho b^\sigma\Pi^{\mu\nu},\tag{D.84b}$$

$$D(p)=-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\frac{1}{b_0^2}b_\mu p_\nu\Pi^{\mu\nu}+\frac{p_0}{|\mathbf{p}|^2}\frac{1}{b_0^3}b_\mu b_\nu\Pi^{\mu\nu}-\frac{p_0}{b_0}A,\tag{D.84c}$$

$$F(p)=-\frac{p^2}{|\mathbf{p}|^2}\frac{1}{b_0^4}b_\mu b_\nu\Pi^{\mu\nu}+\frac{p^2}{b_0^2}A.\tag{D.84d}$$

Substituindo (D.80)-(D.83) nos coeficientes (D.84), obtemos uma sequência finita de termos contendo potências de b_0. Em virtude de estarmos considerando $b_0 \ll p_0$ e $b_0 \ll |\mathbf{p}|$, manteremos somente os os termos de maior relevância, i.e, aqueles de mais baixa potência em b_0. Assim,

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, A = \frac{-e^2}{8\pi}\Bigg\{\frac{1}{3}\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b) + \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p+b)^2\big]$$
$$+\frac{1}{3}\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b) + \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Bigg\}, \tag{D.85}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\, B = -\frac{e^2}{16\pi}\Bigg\{\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b) + \frac{1}{b_0|\mathbf{p}|^2}\left(\frac{p_0^4}{2|\mathbf{p}|} - p_0^2|\mathbf{p}| + \frac{|\mathbf{p}|^3}{2}\right)\Theta\big[-(p+b)^2\big]$$
$$+\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b) - \frac{1}{b_0|\mathbf{p}|^2}\left(\frac{p_0^4}{2|\mathbf{p}|} - p_0^2|\mathbf{p}| + \frac{|\mathbf{p}|^3}{2}\right)\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Bigg\}, \tag{D.86}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, D = \frac{e^2}{16\pi}\Bigg\{\left(\frac{1}{3} - \frac{3p_0^4}{2|\mathbf{p}|^4}\right)\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b) + \frac{1}{b_0}\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p+b)^2\big]$$
$$-\left(\frac{1}{3} - \frac{3p_0^4}{2|\mathbf{p}|^4}\right)\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b) + \frac{1}{b_0}\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Bigg\}, \tag{D.87}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, F = \frac{e^2p^2}{16\pi}\Bigg\{\frac{3p_0^3}{2b_0|\mathbf{p}|^4}\Theta\big[(p+b)^2\big]\,\epsilon(p+b) - \frac{1}{b_0^2}\left(\frac{p_0^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p+b)^2\big]$$
$$-\frac{3p_0^3}{2b_0|\mathbf{p}|^4}\Theta\big[(p-b)^2\big]\,\epsilon(p-b) - \frac{1}{b_0^2}\left(\frac{p_0^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta\big[-(p-b)^2\big]\Bigg\}. \tag{D.88}$$

Como estamos considerando o caso $b_0 \ll p_0$ e $b_0 \ll |\mathbf{p}|$, as aproximações $p \pm b = p$ são válidas. Desta forma, concluímos que

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, A = \frac{-e^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{3}\Theta(p^2)\epsilon(p) + \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2)\right\},$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\, B = -\frac{e^2}{8\pi}\Theta(p^2)\epsilon(p),$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, D = \frac{e^2}{8\pi b_0}\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2),$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\, F = \frac{-e^2p^2}{8\pi b_0^2}\left(\frac{p_0^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2).$$

Notemos agora que da expressão (6.31) e da forma geral do tensor de polarização 6.48, podemos escrever o valor esperado da corrente fermiônica no vácuo como

$$\langle 0|J^\mu(x)|0\rangle = \int \Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu^{\text{ext}}(y)d^4y$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p \Big\{ A(p)\big[p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\big] + B(p)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta \\
&+ D(p)\big[p^\nu b^\mu - (bp)g^{\mu\nu}\big] + F(p)\Big[b^\mu b^\nu - \frac{(bp)}{p^2}p^\mu b^\nu\Big]\Big\} e^{-ip(x-y)} A^{\text{ext}}_\nu(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p \Big\{ A(p)[\Box A^\mu_{\text{ext}}(y) - \partial^\mu(\partial^\nu A^{\text{ext}}_\nu(y))] \\
&+ B(p) i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\beta \partial_\alpha A^{\text{ext}}_\nu(y) + D(p)\left[ib^\mu\partial^\nu A^{\text{ext}}_\nu(y) - ib^\alpha\partial_\alpha A^\mu_{\text{ext}}(y)\right] \\
&+ F(p)\left[b^\mu b^\nu A^{\text{ext}}_\nu(y) - b^\nu b^\alpha \Box^{-1}\partial_\alpha\partial^\mu A^{\text{ext}}_\nu(y)\right]\Big\} e^{-ip(x-y)} \\
&=: \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p \Big\{ A(p)(J^{\text{ext}}_1)^\mu(y) + B(p)(J^{\text{ext}}_2)^\mu(y) + D(p)(J^{\text{ext}}_3)^\mu(y) \\
&+ F(p)(J^{\text{ext}}_4)^\mu(y)\Big\} e^{-ip(x-y)} \\
&= \int d^4y\, A(x-y)(J^{\text{ext}}_1)^\mu(y) + \int d^4y\, B(x-y)(J^{\text{ext}}_2)^\mu(y) \\
&+ \int d^4y\, D(x-y)(J^{\text{ext}}_3)^\mu(y) + \int d^4y\, F(x-y)(J^{\text{ext}}_4)^\mu(y). \qquad \text{(D.89)}
\end{aligned}
$$

Causalidade impõe que $\Pi^{\mu\nu}(x-y) = 0$ para $x_0 - y_0 < 0$, pois do contrário o valor esperado da corrente fermiônica num instante t dependeria do campo externo em instantes de tempo posteriores a t. Em termos dos coeficientes A, B, D e F esta condição é equivalente à imposição

$$
\left.\begin{aligned}
A(x-y) &= 0, \\
B(x-y) &= 0, \\
D(x-y) &= 0, \\
F(x-y) &= 0,
\end{aligned}\right. \qquad \text{para}\, x_0 - y_0 < 0. \qquad \text{(D.90)}
$$

Analogamente ao que foi feito na seção (3.4), podemos estender analíticamente as funções A, B, D e F ao semi-plano complexo $I_+ = \{p_0 + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$:

$$
\begin{aligned}
A(p_0 + i\eta, \mathbf{p}) &= \int dx\, A(x)\, e^{i[(p_0+i\eta)x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]}, \\
B(p_0 + i\eta, \mathbf{p}) &= \int dx\, B(x)\, e^{i[(p_0+i\eta)x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]}, \\
D(p_0 + i\eta, \mathbf{p}) &= \int dx\, D(x)\, e^{i[(p_0+i\eta)x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]}, \\
F(p_0 + i\eta, \mathbf{p}) &= \int dx\, F(x)\, e^{i[(p_0+i\eta)x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}]}.
\end{aligned} \qquad \text{(D.91)}
$$

Assim, em virtude da condição de causalidade (D.90) e da analiticidade das funções (D.91), decorre do teorema de Titchmarsh que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,A(p) &= \frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,A(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx,\\ \mathfrak{Im}\,B(p) &= -\frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Re}\,B(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx,\\ \mathfrak{Re}\,D(p) &= \frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,D(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx,\\ \mathfrak{Re}\,F(p) &= \frac{1}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,F(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx,\end{aligned} \tag{D.92}$$

onde estamos admitindo a eventual necessidade de subtração de divergências originárias do produto de distribuições com suportes coincidentes no cone de luz [37]

As integrais acima serão calculadas em três casos: $p_0 < -|\mathbf{p}|$, $-|\mathbf{p}| < p_0 < |\mathbf{p}|$ e $p_0 > |\mathbf{p}|$.

Caso 1: $p_0 < -|\mathbf{p}|$

- $$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,A &= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,A(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx\\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+\\ \Lambda\to\infty}} \frac{e^2}{4\pi^2}\Bigg\{\frac{1}{3}\int_{-\Lambda}^{p_0-\epsilon}\frac{dx}{x-p_0} + \frac{1}{3}\int_{p_0+\epsilon}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0}\\ &- \int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{x}{4|\mathbf{p}|}\right)\frac{dx}{x-p_0} - \frac{1}{3}\int_{|\mathbf{p}|}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0}\Bigg\}\\ &= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{4\pi^2}\Bigg\{-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right| - \ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4}\right) + \frac{28}{45}\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.93}$$
- $$\begin{aligned}\mathfrak{Im}\,B &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Re}\,B(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx\\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+\\ \Lambda\to\infty}} \frac{e^2}{8\pi^2}\Bigg\{-\int_{-\Lambda}^{p_0-\epsilon}\frac{dx}{x-p_0} - \int_{p_0+\epsilon}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0} + \int_{|\mathbf{p}|}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0}\Bigg\}\\ &= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|,\end{aligned} \tag{D.94}$$
- $$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,D &= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,D(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx\\ &= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{x^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\frac{dx}{x-p_0}\\ &= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\Bigg\{\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right) - \frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2} + \frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4} + \frac{8}{15}p^0\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.95}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\,F = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$
$$= \frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}(x^2-|\mathbf{p}|^2)\left[\frac{x^5}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{x^3}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{x}{2|\mathbf{p}|}\right]\frac{dx}{x-p_0}$$
$$= \frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\left\{\frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4}-\frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2}+\frac{11p_0^2}{5}-\frac{16|\mathbf{p}|^2}{35}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5}-\frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|}-p_0|\mathbf{p}|\right)\right\}. \tag{D.96}$$

Caso 2: $p_0 > |\mathbf{p}|$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\,A = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,A(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$
$$= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+\\ \Lambda\to\infty}}\frac{e^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{3}\int_{-\Lambda}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0}-\int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^5}{4|\mathbf{p}|^5}-\frac{x^3}{3|\mathbf{p}|^3}-\frac{x}{4|\mathbf{p}|}\right)\frac{dx}{x-p_0}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\int_{|\mathbf{p}|}^{p_0-\epsilon}\frac{dx}{x-p_0}-\frac{1}{3}\int_{p_0+\epsilon}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0}\right\}$$
$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{4\pi^2}\left\{-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|-\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5}-\frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3}-\frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4}\right)+\frac{28}{45}\right\}, \tag{D.97}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Im}\,B = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Re}\,B(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$
$$= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+\\ \Lambda\to\infty}}\frac{e^2}{8\pi^2}\left\{-\int_{-\Lambda}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0}+\int_{|\mathbf{p}|}^{p_0-\epsilon}\frac{dx}{x-p_0}+\int_{p_0+\epsilon}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0}\right\}$$
$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|, \tag{D.98}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\,D = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,D(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$
$$= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^6}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{x^4}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{x^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\frac{dx}{x-p_0}$$
$$= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\left\{\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)-\frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2}+\frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4}+\frac{8}{15}p^0\right\}, \tag{D.99}$$

$$\bullet\ \mathfrak{Re}\,F = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\,F(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$
$$= \frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\int_{-|\mathbf{p}|}^{|\mathbf{p}|}(x^2-|\mathbf{p}|^2)\left[\frac{x^5}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{x^3}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{x}{2|\mathbf{p}|}\right]\frac{dx}{x-p_0}$$

$$= \frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\left\{ \frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4} - \frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2} + \frac{11p_0^2}{5} - \frac{16|\mathbf{p}|^2}{35} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5} - \frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|} - p_0|\mathbf{p}| \right) \right\}. \tag{D.100}$$

Caso 3: $-|\mathbf{p}| < p_0 < |\mathbf{p}|$

- $$\mathfrak{Re}\, A = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\, A(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon\to 0^+\\ \Lambda\to\infty}} \frac{e^2}{4\pi^2}\left\{ \frac{1}{3}\int_{-\Lambda}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0} - \int_{-|\mathbf{p}|}^{p_0-\epsilon}\left(\frac{x^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{x}{4|\mathbf{p}|} \right)\frac{dx}{x-p_0} \right\}$$

$$- \int_{p_0+\epsilon}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{x}{4|\mathbf{p}|} \right)\frac{dx}{x-p_0} - \frac{1}{3}\int_{|\mathbf{p}|}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0} \Bigg\}$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{4\pi^2}\left\{ -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right| - \ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4} \right) + \frac{28}{45} \right\}, \tag{D.101}$$

- $$\mathfrak{Im}\, B = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Re}\, B(x,|\mathbf{p}|)}{x-p_0}dx$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^2}\left\{ -\int_{-\Lambda}^{-|\mathbf{p}|}\frac{dx}{x-p_0} + \int_{|\mathbf{p}|}^{\Lambda}\frac{dx}{x-p_0} \right\}$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|, \tag{D.102}$$

- $$\mathfrak{Re}\, D = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\, D(x,|\mathbf{p}|)}{x-p_0}dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\left\{ \int_{-|\mathbf{p}|}^{p_0-\epsilon}\left(\frac{x^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{x^2}{2|\mathbf{p}|} \right)\frac{dx}{x-p_0} \right.$$

$$\left. + \int_{p_0+\epsilon}^{|\mathbf{p}|}\left(\frac{x^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{x^2}{2|\mathbf{p}|} \right)\frac{dx}{x-p_0} \right\}, \tag{D.103}$$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\left\{ \ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|} \right) - \frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2} + \frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4} + \frac{8}{15}p^0 \right\}, \tag{D.104}$$

- $$\mathfrak{Re}\, F = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\mathfrak{Im}\, F(x,\mathbf{p})}{x-p_0}dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\left\{ \int_{-|\mathbf{p}|}^{p_0-\epsilon}(x^2-|\mathbf{p}|^2)\left[\frac{x^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{x^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{x}{2|\mathbf{p}|} \right]\frac{dx}{x-p_0} \right.$$

$$+\int_{p_0+\epsilon}^{|\mathbf{p}|}(x^2-|\mathbf{p}|^2)\left[\frac{x^5}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{x^3}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{x}{2|\mathbf{p}|}\right]\frac{dx}{x-p_0}\Bigg\}$$

$$=\frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\Bigg\{\frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4}-\frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2}+\frac{11p_0^2}{5}-\frac{16|\mathbf{p}|^2}{35}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5}-\frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|}-p_0|\mathbf{p}|\right)\Bigg\}.$$

Portanto, os três casos fornecem os mesmos resultados:

- $$\mathfrak{Re}\,A=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{4\pi^2}\Bigg\{-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|-\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5}-\frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3}-\frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2}-\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4}\right)+\frac{28}{45}\Bigg\}, \tag{D.105}$$
- $$\mathfrak{Im}\,B=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{\Lambda^2-p_0^2}{p_0^2-|\mathbf{p}|^2}\right|, \tag{D.106}$$
- $$\mathfrak{Re}\,D=\frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\Bigg\{\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5}-\frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)-\frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2}+\frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4}+\frac{8}{15}p^0\Bigg\}, \tag{D.107}$$
- $$\mathfrak{Re}\,F=\frac{-e^2}{8\pi b_0^2}\Bigg\{\frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4}-\frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2}+\frac{11p_0^2}{5}-\frac{16|\mathbf{p}|^2}{35}$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right|\left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5}-\frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3}+\frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|}-p_0|\mathbf{p}|\right)\Bigg\}. \tag{D.108}$$

As integrais relacionadas a $\mathfrak{Re}\,A$ e $\mathfrak{Im}\,B$ são claramente divergentes. Entretanto, lembremos que a quantidade observada experimentalmente é a soma da corrente induzida com as correntes externas

$$\mathcal{J}_{\mathrm{ph}}(x,\Lambda)\coloneqq\langle 0|J^\mu(x,\Lambda)|0\rangle+\sum_{n=1}^{4}(J_n^{\mathrm{ext}})^\mu(y)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\Big\{[1+A(p)](J_1^{\mathrm{ext}})^\mu(y)+[1+B(p)](J_2^{\mathrm{ext}})^\mu(y)$$
$$+[1+D(p)]\,(J_3^{\mathrm{ext}})^\mu(y)+[1+F(p)]\,(J_4^{\mathrm{ext}})^\mu(y)\Big\}e^{-ip(x-y)}. \tag{D.109}$$

Por sua vez, a unidade de carga é determinada impondo que a a corrente observada seja igual à externa para $p_0=0$. Assim, a corrente observada é definida por

$$J^\mu_{\mathrm{obs}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4y d^4p\Big\{\big[1+\bar{A}(p)\big](J_1^{\mathrm{ext}})^\mu(y)+\big[1+\bar{B}(p)\big](J_2^{\mathrm{ext}})^\mu(y)$$
$$+\big[1+\bar{D}(p)\big]\,(J_3^{\mathrm{ext}})^\mu(y)+\big[1+\bar{F}(p)\big]\,(J_4^{\mathrm{ext}})^\mu(y)\Big\}e^{-ip(x-y)}, \tag{D.110}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\bar{A}(p) &= A(p) - A(0,\mathbf{p}) \\
&= \frac{-e^2}{4\pi^2}\left\{ \ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^4}\right) \right\} \\
&\quad - i\frac{e^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{3}\Theta(p^2)\epsilon(p) + \left(\frac{p_0^5}{4|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{3|\mathbf{p}|^3} - \frac{p_0}{4|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2)\right\},
\end{aligned}
\tag{D.111}
$$

$$
\bar{B}(p) = B(p) - B(0,\mathbf{p}) = -\frac{e^2}{8\pi}\Theta(p^2)\epsilon(p),
\tag{D.112}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{D}(p) &= D(p) - D(0,\mathbf{p}) \\
&= \frac{e^2}{8\pi^2 b_0}\left\{ \ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right) - \frac{5p_0^3}{3|\mathbf{p}|^2} + \frac{p_0^5}{|\mathbf{p}|^4} + \frac{8}{15}p^0 \right\} \\
&\quad + i\frac{e^2}{8\pi b_0}\left(\frac{p_0^6}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^4}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0^2}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2),
\end{aligned}
\tag{D.113}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{F}(p) &= F(p) - F(0,\mathbf{p}) \\
&= \frac{-e^2}{8\pi^2 b_0^2}\left\{ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p_0-|\mathbf{p}|}{p_0+|\mathbf{p}|}\right| \left(\frac{p_0^7}{|\mathbf{p}|^5} - \frac{3p_0^5}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{3p_0^3}{|\mathbf{p}|} - p_0|\mathbf{p}|\right) + \frac{p_0^6}{|\mathbf{p}|^4} - \frac{8p_0^4}{3|\mathbf{p}|^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{11p_0^2}{5} - \frac{16|\mathbf{p}|^2}{35}\right\} - i\frac{e^2p^2}{8\pi b_0^2}\left(\frac{p_0^5}{2|\mathbf{p}|^5} - \frac{p_0^3}{|\mathbf{p}|^3} + \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|}\right)\Theta(-p^2).
\end{aligned}
\tag{D.114}
$$

Portanto, o tensor de polarização após a renormalização da carga é dado por

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(p) &= \bar{A}(p)\big[p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\big] + \bar{B}(p)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta \\
&\quad + \bar{D}(p)\big[p^\nu b^\mu - (bp)g^{\mu\nu}\big] + \bar{F}(p)\left[b^\mu b^\nu - \frac{(bp)}{p^2}p^\mu b^\nu\right],
\end{aligned}
\tag{D.115}
$$

com os coeficientes obtidos em (D.111)-(D.114).

REFERÊNCIAS

[1] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, 2001.

[2] A. O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Dover Publications, 1980.

[3] F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, 1966.

[4] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, John Wiley and Sons Inc., 1980.

[5] G. Bonneau, L. C. Costa, and J. L. Tomazelli, Int. J. Theor. Phys. **47** (2008), 1764.

[6] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex variables and applications*, Mc, 2009.

[7] S. Carroll and G. Field, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 2394.

[8] S. Carroll, G. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41** (1990), 1231.

[9] J. M. Chung and P. Oh, Phys. Rev D **60** (1999), 067702.

[10] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and atoms: Introduction to quantum electrodynamics*, Wiley-VCH, 2004.

[11] S. Coleman and S. Glashow, Phys. Rev. D **59** (1999), 116008.

[12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **58** (1998), 116002.

[13] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) **140** (1982), 372.

[14] P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. **2** (1950), 129.

[15] ______, *Lectures on quantum mechanics*, Dover Publications, 2001.

[16] I. M. Gelfand, R. A. Minlos, and Z. Ya. Shapiro, *Representations of the rotation and lorentz groups and their applications*, Pergamon Press Ltd., 1963.

[17] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constrains*, Springer Series in Nuclear and Particle Physics, Springer-Verlag, 1990.

[18] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*, Springer-Verlag, 1996.

[19] S. N. Gupta, *Quantum electrodynamics*, Gordon and Breach, 1977.

[20] B. Hall, *Lie groups, lie algebras and representations: An elementary introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 222, Springer, 2015.

[21] W. Heisenberg, Zeit. Phys. **77** (1932), 1.

[22] R. J. Hughes and J. Anbjorn, Nucl. Phys. B **217** (1983), 336.

[23] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum field theory*, Dover Publications, 2005.

[24] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 3572.

[25] G. Kallen, *Quantum electrodynamics*, Springer-Verlag New York, 1972.

[26] G. Leibbrandt, *Noncovariant gauges*, World Scientific Publishing, 1994.

[27] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*, John Wiley & Sons, 1984.

[28] L. A. Manzoni, B. M. Pimentel, and J. L. Tomazelli, Eur. Phys. J. C **8** (1999), 353.

[29] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity*, World Scientific Publishing, 1990.

[30] M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 2518.

[31] C. Quigg, *Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions*, Princeton University Press, 2013.

[32] F. Rohrlich, *Classical charged particles*, World Scientific Publishing, 2007.

[33] P. Roman, *Introduction to quantum field theory*, John Wiley & Sons, 1969.

[34] W. Rossmann, *Lie groups: An introduction through linear groups*, Oxford University Press Inc., 2002.

[35] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[36] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004), 3265.

[37] G. Scharf, *Finite quantum electrodynamics*, Springer, 1995.

[38] E. C. G. Stuckelberg, Helv. Phys. Acta **11** (1938), 225.

[39] ———, Helv. Phys. Acta **11** (1938), 299.

[40] ———, Helv. Phys. Acta **11** (1938), 312.

[41] A. S. Wightman, *Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields*, Cargese Lectures in Theoretical Physics, 1967.

[42] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **95** (1954), 631.

[43] ———, Phys. Rev. **96** (1954), 191.

[44] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17** (1935), 48.