

Franklin Pedro da Silva Neto

Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana

Brasil

13 de novembro de 2018

Franklin Pedro da Silva Neto

Polinômios de Legendre e Quadratura Gaussiana

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a disciplina TCC II. Orientador: Prof. Antônio Vladimir Martins

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Matemática - Licenciatura

Brasil

13 de novembro de 2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer muito aos meu pais, Mauri e Kátia, e meus familiares, por toda a ajuda que eles me proporcionaram neste ano, me dando forças quando necessário e de certa forma "me aturando" durante a escrita deste TCC.

Gostaria de agradecer muito também ao meu orientador, o professor Antonio Vladimir Martins, por toda a ajuda, toda a sua prontificação em se reunir semanalmente comigo para discutirmos aspectos importantes acerca do TCC, fazendo revisões, correções e também dando muitas sugestões se foram muito importantes durante a escrita deste TCC.

Gostaria de agradecer também ao meu professor de Projetos II, João Artur de Souza, e ao seu orientando Emerson, por toda a ajuda nos aspectos "fora" do desenvolvimento do TCC em si, ajudando a escrever a introdução deste TCC, na normalização, entre outros.

Gostaria de agradecer também aos membros da banca, os professores Fábio Júnior Margotti, Leonardo Silveira Borges e Fermin S.V. Bazan (que não poderá comparecer), pela disposição em dar sugestões durante a defesa do meu TCC.

E por fim, gostaria de agradecer a todos os colegas e amigos do curso por toda a ajuda que eu tive durante essa trajetória no curso, desde 2014.

Resumo

Nesse trabalho começamos apresentando os Polinômios de Legendre, sua dedução via resolução da equação diferencial de Legendre, a função geratriz dela, suas principais propriedades, tais como sua fórmula de recorrência, seus critérios de ortogonalidade, que são a ortogonalidade entre dois polinômios de Legendre de graus diferentes e ortogonalidade entre um polinômio de Legendre e um polinômio qualquer de grau menor, a sua “norma”, o comportamento das raízes do polinômio, entre outras. Também será apresentado a Fórmula de Rodrigues e uma breve passagem pelas séries de Fourier-Legendre.

Em seguida será apresentada a Quadratura Gaussiana, visando mostrar a “importância” dos polinômios de Legendre para a obtenção do método (a quadratura). Essa quadratura funciona em um intervalo real específico, e será apresentado como realizar uma mudança de variáveis para que a quadratura seja usada em intervalos reais quaisquer. Será apresentado também como a quadratura se comporta quando se têm problemas envolvendo integrais duplas, como resolver esses problemas e novamente, como realizar mudança de variáveis para que a quadratura seja usada em regiões retangulares arbitrárias no \mathbb{R}^2 .

Palavras-chaves: Integração Numérica, Polinômios de Legendre, Quadratura Gaussiana.

Abstract

In this work we will begin showing the Legendre Polynomials, its deduction by the resolution of the Legendre's differential equation, its generating function, its main proprieties, such as its recurrence formula, its orthogonality criteria, which is the orthogonality between two Legendre polynomials of different degrees and orthogonality between one Legendre polynomial and any polynomial of less than equal degree, its "norm", the behavior of the polynomial's roots, among others. It will also be shown the Rodrigues' Formula and a short passage through the Fourier-Legendre series.

Then, it will be shown the Gaussian Quadrature, aiming to show the "importance" of the Legendre polynomials into obtaining the method (the quadrature). This quadrature works in a specific real interval, and it will be shown how to make a change of variables so that the quadrature can be used in any real interval. It will also be show how the quadrature behaves when you have problems involving double integrals, how to solve these problems and again, how to make a change of variables so that the quadrature can be used in any rectangular region in \mathbb{R}^2 .

Key Words: Numerical Integration, Legendre Polynomials, Gaussian Quadrature.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Caricatura de Legendre. Retirado de < https://divisbyzero.com/2009/11/19/legendre-who/ >	10
Figura 2 – Os gráficos dos seis primeiros polinômios de Legendre. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018)	15
Figura 3 – Gráfico de $f(x)$ e da série de Fourier-Legendre associada. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	33
Figura 4 – Quadratura Gaussiana através de somas de retângulos. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	41
Figura 5 – Gráfico de $\frac{1}{x}$ com $x \in [1, 2]$. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	41
Figura 6 – Gráfico de $x^5 + x + 1$ com $x \in [0, 3]$. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	43
Figura 7 – Gráfico de e^{-x^2} com $x \in [0, 1]$. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	45
Figura 8 – Gráfico de $\frac{e^{\sec(x)}}{x}$ com $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Obtido em <i>geogebra.org</i> (IGI, 2018).	46
Figura 9 – Gráfico de $z = xy^3 \cdot \sin xy$	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Os seis primeiros polinômios de Legendre	14
Tabela 2 – Exemplo de uma função dada por uma tabela.	36
Tabela 3 – Raízes de $P_{n+1}(u)$ e os valores A_i para a quadratura de Gauss-Legendre . .	39

Sumário

1	Introdução	8
2	Polinômios de Legendre	10
2.1	Biografia de Legendre (Resumo)	10
2.2	Equação diferencial de Legendre	11
2.3	Função Geratriz	15
2.4	Propriedades	16
2.5	Fórmula de Rodrigues	28
2.6	Série de Fourier-Legendre	30
3	Quadratura Gaussiana	35
3.1	Um pouco sobre Integrais Definidas	35
3.2	Quadratura Gaussiana - Introdução	36
3.3	Quadratura Gaussiana em Integrais Definidas	37
3.4	Quadratura Gaussiana em Integrais Duplas	47
	Considerações Finais	56
	Referências	57

1 Introdução

Na minha graduação em Matemática, quando fiz a disciplina Cálculo II, tive o conteúdo de Integrais, e nesse tema, existem problemas em que não é possível resolvê-los utilizando os “métodos elementares”, os mais conhecidos.

Quando esses problemas ocorrem, você pode utilizar as Integrações Numéricas, que foi um conteúdo que eu também tive na minha graduação. A Integração Numérica, de acordo com (TAY; LIM; KAHAR, 2011), “[...] é necessária quando a integração analítica (usando métodos elementares) é impossível ou inviável ou quando se deseja integrar valores de uma tabela ao invés de uma função já conhecida”.

Em Integração Numérica, há várias fórmulas que são utilizadas para a resolução de integrais definidas, uma delas são as fórmulas de Newton-Cotes. Algumas dessas fórmulas recebem um destaque, caso das regras do Trapézio e de Simpson (BURDEN; FAIRES, 2016).

Essas fórmulas utilizam os “nós de integração”, importantes para uma boa aproximação da integral desejada, e nas fórmulas de Newton-Cotes, estes nós são igualmente espaçados. Mas existem fórmulas que não usam os nós igualmente espaçados, mas sim, escolhidos de modo a minimizar o erro na aproximação da integral definida, que de acordo com (MACON, 1968), é uma mudança de “ponto de vista”. Esse é o objetivo da quadratura gaussiana, que segundo (BURDEN; FAIRES, 2016), “[...] escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, ao invés de igualmente espaçados”. Nesse caso, a quadratura usa os nós de integração, chamados de x_i , além dos “pesos” A_i , que são obtidos em função dos nós de integração.

(BURDEN; FAIRES, 2016) ilustram um procedimento mais “simples”, usado para realizar a quadratura, através de um sistema não-linear. Mas, os mesmos autores também afirmam que há um “método alternativo que pode obter esses pontos mais facilmente”.

Já (MACON, 1968) afirma que a determinação desses pontos pode ser altamente simplificada. Ambos os autores se referem ao uso das raízes do Polinômio de Legendre, polinômios que recebem esse nome em homenagem ao matemático francês Adrien-Marie Legendre.

Assim, o polinômio de Legendre é muito citado por causa de suas características, que são muito importantes para o “funcionamento” da quadratura gaussiana e que serão vistas mais adiante. A quadratura que utiliza os valores x_i como sendo as raízes do Polinômio de Legendre de grau $n + 1$ é chamada de quadratura de Gauss-Legendre (mas muitos autores simplesmente a chamam de Quadratura Gaussiana).

Como eu ressaltiei anteriormente, autores ilustram um procedimento mais "simples" para encontrar os coeficientes e os nós, e, apesar de os mesmos autores mostrarem este "método" como uma mera ilustração, eu tive esse conteúdo na minha graduação utilizando somente esse

"método", que consistia em resolver um sistema não-linear e esse método, apesar de mais "simples" de ser compreendido, não é adequado para um número de pontos maior do que 2.

De acordo com (STROUD, 2012), "[...] Frequentemente uma fórmula de Gauss será muito superior a qualquer outra fórmula com o mesmo número de pontos. [...] não é verdade, entretanto, que uma fórmula de Gauss é sempre a melhor. Por exemplo, a fórmula do trapézio com n pontos é muito melhor que a fórmula de Gauss-Legendre para $\int_0^1 \frac{2dx}{2 + \sin(10\pi x)}$."

Este tema faz parte do conteúdo de Integrais Numéricas, que por si só faz parte do conteúdo de Análise Numérica. Então, não se pretende abordar todas as formas de se estudar a integração numérica e nem esgotar os estudos das características do polinômio de Legendre. O que se pretende é analisar suas características mais gerais e principais, incluindo as características relacionadas à sua utilidade para uma melhor compreensão do método da Quadratura Gaussiana, para a sua utilização na resolução numérica de integrais definidas.

O trabalho está dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo será abordado os Polinômios de Legendre, suas definições, fórmulas e propriedades importantes, principalmente para o capítulo seguinte. No segundo capítulo será abordada a Quadratura Gaussiana, como que ela é configurada, suas principais características e o seu funcionamento com relação ao cálculo de integrais definidas e integrais duplas.

2 Polinômios de Legendre

2.1 Biografia de Legendre (Resumo)

Neste capítulo serão estudados os Polinômios de Legendre, suas principais propriedades e uma de suas aplicações.



Figura 1: Caricatura de Legendre. Retirado de <<https://divisbyzero.com/2009/11/19/legendre-who/>>

Adrien-Marie Legendre nasceu em Paris, em 18 de setembro de 1752. Estudou no Collège Mazarin em Paris, elaborando sua tese em física e matemática em 1770. [...] Ele morreu em Paris em 9 de janeiro de 1833, após uma longa e dolorosa doença. (MARQUES, 2013) Ele é conhecido na história da matemática elementar principalmente devido aos seus *Éléments de Géométrie*, uma obra cuja proposta era aprimorar pedagogicamente os *Elementos* de Euclides (EVES, 1995). O resultado dos esforços de Legendre foi um livro notavelmente bem-sucedido, e teve doze edições em menos de 30 anos (BOYER; MERZBACH, 2012).

"Além dos *Éléments de Géométrie*, que apareceram em 1794, Legendre publicou também um trabalho em dois volumes e 859 páginas, *Essai sur la Théorie des Nombres* (1797-1798), que constitui a primeira abordagem exclusiva da teoria dos números. Posteriormente escreveu um tratado em três volumes, *Exercices du Calcul Integral* (1811-1819), que, por sua abrangência e categoria, rivaliza com o trabalho similar de Euler. Mais tarde Legendre ampliou

partes desse trabalho num outro tratado em três volumes, *Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrals Eulériennes* (1825-1832). Nessa oportunidade ele introduziu o termo *integrales eulerianes* para as funções beta e gama. Legendre adquiriu considerável fama em geodésia por sua triangulação da França. [...] Os principais trabalhos de Legendre em matemática superior concentram-se em teoria dos números, funções elípticas, métodos dos mínimos quadrados e integrais (EVES, 1995)."

Entre esses trabalhos citados acima, estão as funções de Legendre, que são soluções da Equação Diferencial de Legendre, e certas soluções polinomiais são chamadas de polinômios de Legendre (BOYER; MERZBACH, 2012). Legendre encontrou as soluções polinomiais da equação diferencial de Legendre em seus estudos sobre a *atração gravitacional das elipsóides*.

Essa equação também aparece no estudo da equação do potencial em coordenadas esféricas ($\Delta V = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$). E os polinômios de Legendre aparecem em Mecânica Quântica no estudo do átomo de Hidrogênio (FINIZIO; LADAS, 1982). Legendre teve inúmeras disputas de prioridade com Gauss, principalmente em razão do fato de Gauss não publicar muitos de seus resultados originais até muito depois de descobri-los (BURDEN; FAIRES, 2016).

2.2 Equação diferencial de Legendre

A **Equação Diferencial de Legendre** é definida da forma:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (2.1)$$

com $x \in [-1, 1]$ e λ um número real ($y = y(x)$). Esta equação também pode ser escrita na forma

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0. \quad (2.2)$$

As soluções da equação de Legendre podem ser obtidas em séries de potências, ou seja, funções da forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (O'NEIL, 2011).

Substituindo a série acima em (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' - 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' + \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' - x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'' - 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' + \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) &= 0. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas dessas séries, obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \right) - 2x \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Reescrevendo a primeira série, nesse caso, atrasando n e adiantando x^n de modo que tenhamos n na potência de x , obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0.$$

A igualdade acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \\ & - 2a_1x - \sum_{n=2}^{\infty} 2na_n x^n + \lambda a_0 + \lambda a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Agora, juntando todos os somatórios restantes (já que todos começam em $n = 2$) em um único somatório, temos:

$$2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \lambda a_0 + \lambda a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 + n - \lambda)a_n]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n. \quad (2.3)$$

O coeficiente de cada potência de x em (2.3) deve ser 0, ou seja:

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0 \quad (n = 0) \quad (2.4)$$

$$6a_3 - 2a_1 + \lambda a_1 = 0 \quad (n = 1) \quad (2.5)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda]a_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots), \quad (2.6)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.6) por $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \text{ para } n=2, 3, 4, \dots \quad (2.7)$$

De (2.4), obtemos:

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0.$$

Com isso, de (2.7), obtemos:

$$a_4 = \frac{6-\lambda}{3 \cdot 4}a_2 = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{6-\lambda}{3 \cdot 4} \right) a_0 = \frac{-\lambda(6-\lambda)}{4!}a_0$$

$$a_6 = \frac{20-\lambda}{5 \cdot 6}a_4 = \frac{-\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}a_0.$$

e assim sucessivamente. Agora, de (2.5), obtemos:

$$a_3 = \left(\frac{2-\lambda}{6} \right) a_1 = \frac{2-\lambda}{3!}a_1.$$

Então, de (2.7), obtemos:

$$a_5 = \frac{12-\lambda}{4 \cdot 5}a_3 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}a_1$$

$$a_7 = \frac{30-\lambda}{6 \cdot 7}a_5 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}a_1.$$

e assim sucessivamente. Perceba que, todo coeficiente de índice par é expresso em função de λ e a_0 e todo coeficiente de índice ímpar é expresso em função de λ e a_1 . Desse modo, a solução pode ser reescrita da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}x^6 + \dots \right)$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}x^7 + \dots \right). \quad (2.8)$$

Agora, defina

$$y_1(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!}x^6 + \dots$$

e

$$y_2(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!}x^7 + \dots.$$

As séries para y_1 e y_2 são convergente se $-1 < x < 1$ (pelo Teste da Razão).

Quando $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, temos que $y(x) = y_1$ em que y_1 é uma solução da equação de Legendre. A mesma coisa acontece quando $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, nesse caso, $y(x) = y_2$ em que y_2 é outra solução da equação de Legendre.

Como y_1 só tem potências pares e y_2 só tem potências ímpares, temos que $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{constante}$. Assim, y_1 e y_2 definidas acima são linearmente independentes e qualquer combinação linear entre elas é solução da equação de Legendre, ou seja, a solução geral da equação de Legendre é definida da forma:

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x). \tag{2.9}$$

Agora, perceba que, em (2.7), temos $n(n + 1)$ no numerador, então ao colocarmos $\lambda = n(n + 1)$ para $n \in \mathbb{N}$, teremos, para alguns valores de a_0 e a_1 , soluções na forma de polinômios. Para um $N \in \mathbb{N}$, ao considerarmos $\lambda = N(N + 1)$, teremos $a_{N+2} = 0$, e, conseqüentemente, $a_{n+4} = a_{n+6} = a_{n+8} = \dots = 0$. Com isso, temos:

Definição: Os **Polinômios de Legendre** são cada uma das soluções **polinomiais** das equações de Legendre, $((1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0)$ que admitem valor igual a 1 quando $x = 1$, ou seja,

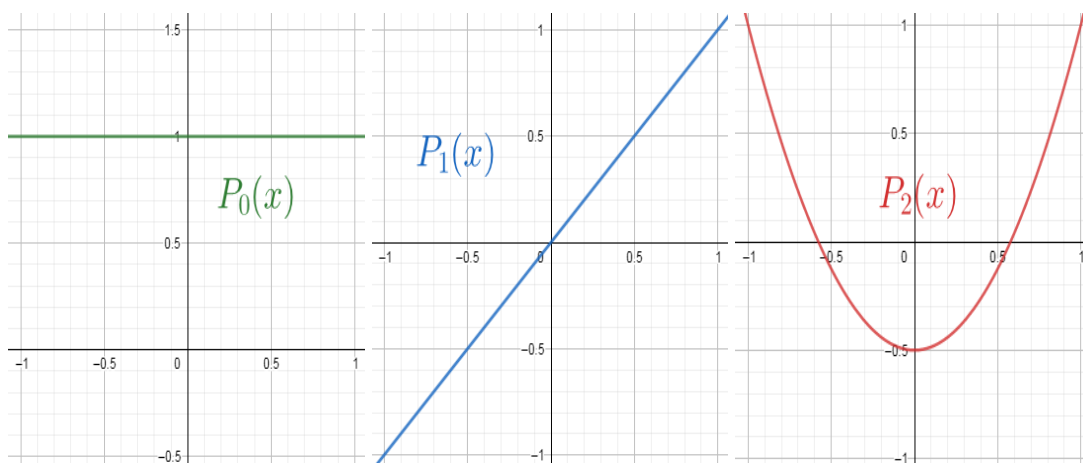
$$\text{para } n \text{ par, } y(x) = P_n(x) = \frac{y_1(x)}{y_1(1)} \text{ e para } n \text{ ímpar, } y(x) = P_n(x) = \frac{y_2(x)}{y_2(1)}$$

$P_n(x)$ terá somente termos de grau par quando n for par e terá somente termos de grau ímpar quando n for ímpar e $P_n(1) = 1$ para todo n .

Os seis primeiros polinômios de Legendre são:

Tabela 1: Os seis primeiros polinômios de Legendre

$P_0(x) = 1$	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_1(x) = x$	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$



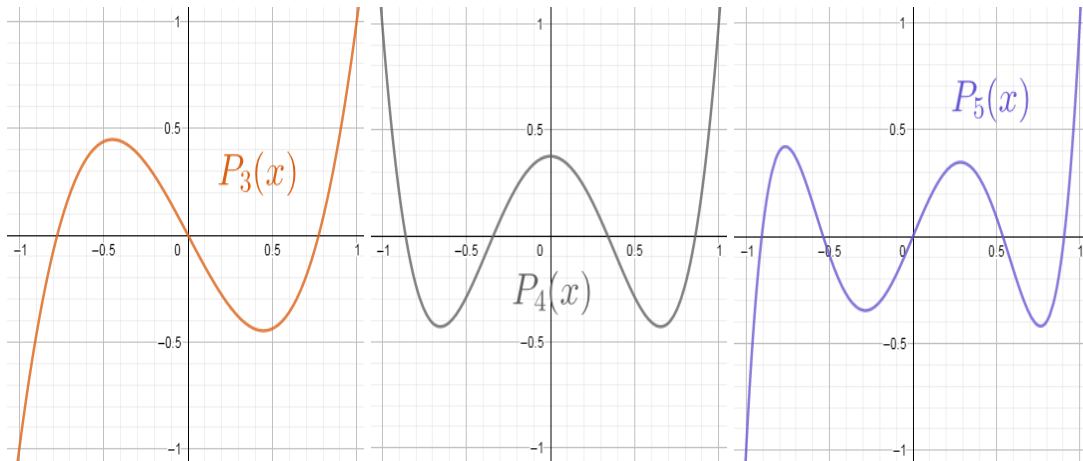


Figura 2: Os gráficos dos seis primeiros polinômios de Legendre. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018)

2.3 Função Geratriz

1

Teorema (Função Geratriz).

$$\text{Se } L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}, \text{ então } L(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (2.10)$$

sendo $P_n(x)$ o n -ésimo polinômio de Legendre.

Demonstração. $L(x, t)$ pode ser reescrita como $L(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$. Então, escrevendo a *Série Binomial* para esse caso, temos que ela é dada por

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } |x| < 1 \quad (2.11)$$

$$\text{em que } \binom{\alpha}{0} = 1, \text{ e } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - (k - 1))}{k!} \text{ se } k \geq 1$$

Então, escrevendo a série binomial para $(1 - w)^{-\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - w)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - w}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \cdot (-w)^k \\ &= \binom{-\frac{1}{2}}{0} (-w)^0 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} (-w)^1 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} (-w)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} (-w)^3 + \\ &\quad + \binom{-\frac{1}{2}}{4} (-w)^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 + \frac{15}{48}w^3 + \frac{105}{384}w^4 + \frac{945}{3840}w^5 + \cdots, \text{ para } |2xt - t^2| < 1. \end{aligned}$$

¹ Demonstração feita com base em (O'NEIL, 2011)

Fazendo $w = 2xt - t^2$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + \frac{1}{2}(2xt - t^2) + \frac{3}{8}(2xt - t^2)^2 + \frac{15}{48}(2xt - t^2)^3 + \frac{105}{384}(2xt - t^2)^4 + \frac{945}{3840}(2xt - t^2)^5 + \dots$$

Agora, expandindo cada potência de $2xt - t^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = & 1 + xt - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}x^2t^2 - \frac{3}{2}xt^3 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{5}{2}x^3t^3 - \frac{15}{4}x^2t^4 + \frac{15}{8}xt^5 \\ & - \frac{5}{16}t^6 + \frac{35}{8}x^4t^4 - \frac{35}{4}x^3t^5 + \frac{105}{16}x^2t^6 - \frac{35}{16}xt^7 + \frac{35}{128}t^8 + \\ & + \frac{63}{8}x^5t^5 - \frac{315}{16}x^4t^6 + \frac{315}{16}x^3t^7 - \frac{315}{32}x^2t^8 + \frac{315}{128}xt^9 - \frac{63}{256}t^{10} + \dots \end{aligned}$$

Colocando as potências de t em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = & 1 + xt + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2\right)t^2 + \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3\right)t^3 \\ & + \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{8}x^4\right)t^4 + \left(\frac{15}{8}x - \frac{35}{4}x^3 + \frac{63}{8}x^5\right)t^5 + \dots \end{aligned}$$

Mas, de acordo com a Tabela 1, vemos que os membros em parênteses são iguais aos primeiros polinômios de Legendre, ou seja:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + P_3(x)t^3 + P_4(x)t^4 + P_5(x)t^5 + \dots$$

Com isso, fica provado, de acordo com (O'NEIL, 2011), que:

$$L(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

□

2.4 Propriedades

Abaixo estão listadas algumas das principais propriedades dos Polinômios de Legendre e todas elas serão demonstradas, na ordem.

1. Fórmula de Recorrência: $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$;
2. $P_n(-1) = (-1)^n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$;
3. Para $n \in \mathbb{N}^*$, seja A_n o coeficiente de x^n em $P_n(x)$. Então $A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}$;
4. Ortogonalidade: $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$ se $m \neq n$;

5. x^n pode ser escrita como uma combinação linear de polinômios de Legendre até $P_n(x)$, e consequentemente, o mesmo vale para qualquer polinômio de grau n ;
6. $\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx = 0$ se $Q_k(x)$ é um polinômio arbitrário de grau $k < n$;
7. Se n é um inteiro não-negativo, então $\int_{-1}^1 [P_n]^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$;
8. $P_n(x)$ tem n zeros reais entre -1 e 1 .

Prova de 1: Tome a função geratriz definida no Teorema 1:

$$L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

Derivando (2.12) em relação a t , obtemos

$$\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} = \frac{-1}{2}(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2t) = \frac{-1}{2}(-2(x-t))(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicando $(1-2xt+t^2)$ em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} (1-2xt+t^2)\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} &= (x-t)\frac{1-2xt+t^2}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} \implies \\ \implies (1-2xt+t^2)\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} &= (x-t)\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}} \implies \\ \implies (1-2xt+t^2)\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} &= (x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \implies \\ \implies (1-2xt+t^2)\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} &= (x-t)L(x, t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mas, sabemos que $L(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, então, substituindo em (2.13), temos:

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0.$$

Utilizando a propriedade distributiva e realizando as multiplicações, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Agora, rearranjando essas séries, atrasando em n e aumentando em t^n , ou vice-versa, para que tenham potências de t^n em cada somatório:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Computando essas somas nos casos em que $n = 0$ e $n = 1$, temos que:

$$P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)t^n - xP_0(x) - xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty} xP_n(x)t^n + P_0(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Agora, juntando todos os somatórios restantes (já que todos começam em $n = 2$) em um único somatório, temos:

$$X = P_1(x) + 2P_2(x)t - 2xP_1(x)t - xP_0(x) - xP_1(x)t + P_0(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2nxP_n(x)t^n + (n-1)P_{n-1}(x)t^n - xP_n(x)t^n + P_{n-1}(x)t^n] = 0.$$

Agora, pondo t em evidência, temos

$$X = P_1(x) - xP_0(x) + (2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x))t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x)]t^n = 0. \quad (2.14)$$

Essa série em (2.14) é identicamente nula, ou seja,

$$X = 0 + 0t + \sum_{n=2}^{\infty} 0t^n.$$

Portanto

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0 \text{ (para } n=0\text{)}$$

$$2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) = 0 \text{ (para } n=1\text{)}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0, \text{ para } n=2,3,4,\dots$$

Com isso, temos

$$P_1(x) = xP_0(x) \text{ (para } n=0\text{)}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3xP_1(x) + P_0(x)) \text{ (para } n=1\text{)}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \text{ (para } n=2,3,4,\dots) \quad (2.15)$$

Se mostrarmos que (2.15) vale para $n = 1$, ele valerá para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Então:

$$2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) = 0.$$

Como temos que $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_1(x) = x$ e $P_0(x) = 1$, segue que:

$$2\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) - 3x(x) + 1 = 0 \iff 3x^2 - 1 - 3x^2 + 1 = 0 \iff 0 = 0.$$

Portanto, segue que (2.15) é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, e pode ser reescrita como:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

□

Prova de 2: Sejam $P_n(x)$ os polinômios de Legendre, para $n \in \mathbb{N}^*$. Queremos mostrar que $P_n(-1) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos mostrar usando o Segundo Princípio de Indução e a [Fórmula de Recorrência](#).

Mostrando que a igualdade é válida para $n = 1$: Sabemos que $P_1(x) = x$, logo $P_1(-1) = -1$. Agora, suponha que a igualdade seja verdadeira para $n = 1, 2, \dots, k-1, k$, com $k \in \mathbb{N}$. Agora, temos que mostrar que a igualdade é válida para $n = k+1$. Da [Fórmula de Recorrência](#), aplicada a $x = -1$, temos que:

$$P_{k+1}(-1) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot (-1) \cdot P_k(-1) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(-1)$$

Da Hipótese de Indução, sabemos que $P_k(-1) = (-1)^k$ e $P_{k-1}(-1) = (-1)^{k-1}$, então temos que

$$P_{k+1}(-1) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot (-1) \cdot (-1)^k - \frac{k}{k+1} \cdot (-1)^{k-1}$$

Sabemos que $(-1)^k$ é igual a 1 quando k é par e é igual a -1 quando k é ímpar.

Se k for par, temos

$$P_{k+1}(-1) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot (-1) \cdot 1 - \frac{k}{k+1} \cdot (-1) = - \left(\frac{2k+1}{k+1} \right) + \frac{k}{k+1} = -1.$$

Se k for ímpar, temos

$$P_{k+1}(-1) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot (-1) \cdot (-1) - \frac{k}{k+1} \cdot (1) = \frac{2k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1} = 1.$$

Se k é par, então $k+1$ é ímpar, e vice versa. Logo,

$$P_{k+1}(-1) = \begin{cases} -1, & \text{se } k+1 \text{ é ímpar;} \\ 1, & \text{se } k+1 \text{ é par.} \end{cases}$$

Com isso, é possível afirmar que $P_{k+1}(-1) = (-1)^{k+1}$.

Portanto, todo número $n \in \mathbb{N}^*$ satisfaz a igualdade $P_n(-1) = (-1)^n$.

□

Exemplo:

Obtenha $P_6(x)$, $P_7(x)$ e $P_8(x)$, utilizando a Fórmula de Recorrência e os seis primeiros polinômios de Legendre presentes na Tabela 1. Então:

$$\begin{aligned} P_6(x) &= \frac{11}{6}xP_5(x) - \frac{5}{6}P_4(x) = \\ &= \frac{11}{48}x(63x^5 - 70x^3 + 15x) - \frac{5}{48}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \\ &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_7(x) &= \frac{13}{7}xP_6(x) - \frac{6}{7}P_5(x) = \\ &= \frac{13}{112}(231x^7 - 315x^5 + 105x^3 + 5x) - \frac{6}{112}(63x^6 - 70x^4 + 15x^2) = \\ &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_8(x) &= \frac{15}{8}xP_7(x) - \frac{7}{8}P_6(x) = \\ &= \frac{15}{128}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) - \frac{7}{128}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 + 5) = \\ &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35) \end{aligned}$$

Prova de 3: Sejam $P_n(x)$ os polinômios de Legendre com $n \in \mathbb{N}^*$ e A_n o coeficiente de x^n em $P_n(x)$. Queremos mostrar que:

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}$$

Considere a Fórmula de Recorrência:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

Sabemos que $P_{n+1}(x)$ tem grau $n+1$ e que o $xP_n(x)$ também tem grau $n+1$. A fórmula de recorrência pode ser reescrita como:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) = -nP_{n-1}(x).$$

Então a igualdade acima é equivalente a:

$$\begin{aligned} & (n+1)(A_{n+1}x^{n+1} + \dots) - (2n+1)x(A_nx^n + \dots) = -n(A_{n-1}x^{n-1} + \dots) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (n+1)(A_{n+1}x^{n+1} + \dots) - (2n+1)x(A_nx^n + \dots) = -n(0x^{n+1} + 0x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & ((n+1)A_{n+1} - (2n+1)A_n)x^{n+1} + \dots = 0x^{n+1} + 0x^n + n(A_{n-1}x^{n-1} + \dots). \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios, segue que:

$$(n+1)A_{n+1} - (2n+1)A_n = 0.$$

Com isso, podemos trabalhar para obtermos uma expressão não-recursiva para A_n , a partir de A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1} A_0 = \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1} \\ A_2 &= \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1} A_1 = \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1} \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1} \\ A_3 &= \frac{2 \cdot (3) + 1}{(3) + 1} A_2 = \frac{2 \cdot (3) + 1}{(3) + 1} \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1} \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1} \\ A_4 &= \frac{2 \cdot (4) + 1}{(4) + 1} A_3 = \frac{2 \cdot (4) + 1}{(4) + 1} \frac{2 \cdot (3) + 1}{(3) + 1} \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1} \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
A_n &= \frac{2 \cdot (n) + 1}{(n) + 1} A_{n-1} = \frac{2 \cdot (n) + 1}{(n) + 1} \frac{2 \cdot (n-1) + 1}{(n-1) + 1} \frac{2 \cdot (n-2) + 1}{(n-2) + 1} \cdots \frac{2 \cdot (n - (n-1)) + 1}{(n - (n-1)) + 1} 1 \\
&= \frac{2n+1}{n+1} \frac{2n-1}{n} \frac{2n-3}{n-1} \cdots \frac{3}{1} 1 \\
&= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$A_n = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{(n+1)!}.$$

□

Prova de 4²: Sejam $P_n(x)$ e $P_m(x)$ os polinômios de Legendre, com $m \neq n$. Queremos mostrar que:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

Escrevendo a equação de Legendre para $P_n(x)$, temos

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Que pode ser reescrito como:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x)) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Multiplicando $P_m(x)$ nos dois lados, temos:

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) = 0.$$

Subtraindo o primeiro termo nos dois lados, temos:

$$n(n+1)P_n(x)P_m(x) = -\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))P_m(x).$$

Integrando a igualdade nos dois lados, temos:

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))P_m(x) dx.$$

Integrando por partes:

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = ((1-x^2)P_n'(x))P_m(x)|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))P_m'(x) dx.$$

² Demonstração feita com base no que está escrito em (O'NEIL, 2011) e <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/leg1/leg1.html>>

Ou seja:

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)P'_n(x))P'_m(x)dx. \quad (2.16)$$

Agora, partindo do início, só que trocando "n" por "m" e prosseguindo de forma análoga, temos:

$$m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((1-x^2)P'_m(x))P'_n(x)dx. \quad (2.17)$$

Perceba que o lado direito da igualdade de (2.16) e de (2.17) são iguais, ou seja:

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx.$$

O que é igual a:

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Disso, temos que ou $n(n+1) - m(m+1) = 0$, ou $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$, mas como $m \neq n$, segue que $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$, pois, caso contrário, teremos:

$$n(n+1) - m(m+1) = 0, \text{ ou seja, } n^2 + n = m^2 + m \Leftrightarrow n^2 - m^2 = m - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(n+m) = -(n-m) \Leftrightarrow (n-m)(n+m+1) = 0.$$

Como $m \neq n$, $(n-m) \neq 0$ e como $m, n \in \mathbb{N}$, $(n+m+1) \neq 0$, logo, segue que $(n-m)(n+m+1) \neq 0$, o que é uma contradição.

Portanto, segue que

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0.$$

□

Prova de 5: Resolvendo sucessivamente em ordem às potências de x :

- $1 = P_0(x)$ pela definição.
- $x = P_1(x)$ pela definição.
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ou seja, $x^2 = \frac{1}{3}(2P_2(x) + P_0(x))$.
- $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ou seja, $x^3 = \frac{1}{5}(2P_3(x) + 3P_1(x))$.
- $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$, ou seja, $x^4 = \frac{1}{35}(8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x))$.

E como cada $P_k(x)$ começa com um termo não-nulo de grau k , esse processo pode ser continuado indefinidamente. Então, dessa propriedade, um polinômio $q(x)$ de grau k pode ser expresso como

$$q(x) = \sum_{n=0}^k c_n P_n(x).$$

□

Prova de 6: Sejam $P_n(x)$ os polinômios de Legendre com $n \in \mathbb{N}^*$. Queremos mostrar que $\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx = 0$ se $Q_k(x)$ é um polinômio arbitrário de grau $k < n$.

Pela Propriedade 5, podemos expressar o polinômio $Q_k(x)$ como uma combinação linear de polinômios de Legendre de graus até k , ou seja:

$$Q_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i P_i(x).$$

Com isso, multiplicando $Q_k(x)$ por $P_n(x)$, temos:

$$Q_k(x)P_n(x) = \sum_{i=0}^k c_i P_i(x)P_n(x).$$

E como $k < n$, segue que em todos os termos do somatório teremos $P_n(x)$ diferente de $P_i(x)$, com $i = 1, \dots, k$, ou seja, teremos:

$$Q_k(x)P_n(x) = c_0 P_0(x)P_n(x) + c_1 P_1(x)P_n(x) + \dots + c_k P_k(x)P_n(x).$$

E, portanto:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx = c_0 \int_{-1}^1 P_0(x)P_n(x) + c_1 \int_{-1}^1 P_1(x)P_n(x) + \dots + c_k \int_{-1}^1 P_k(x)P_n(x).$$

Mas, pela Propriedade 4, todas essas integrais são iguais a zero pois $0 \neq n$, $1 \neq n$, \dots , $k \neq n$. Portanto, fica provado que:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx = 0.$$

□

Prova de 7: Seja, $P_n(x)$ os polinômios de Legendre com $n \in \mathbb{N}^*$. Queremos mostrar que

$$\int_{-1}^1 [P_n]^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Denote o coeficiente de x^n em $P_n(x)$ por A_n , tal como na propriedade 3. Denotaremos também:

$$I_n = \int_{-1}^1 [P_n]^2(x)dx. \quad (2.18)$$

O termo de maior potência em $P_n(x)$ é $A_n x^n$, enquanto que o termo de maior potência em $P_{n-1}(x)$ é $A_{n-1} x^{n-1}$. Isso significa que todos os termos que envolvem x^n se cancelam no polinômio

$$q(x) = P_n(x) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}.$$

pois esse polinômio pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 q(x) &= (A_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x (A_{n-1} x^{n-1} + d_{n-2} x^{n-2} + \dots) \\
 &= (A_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x \cdot x^{n-1} A_{n-1} - \frac{A_n}{A_{n-1}} x (d_{n-2} x^{n-2} + \dots) \\
 &= (A_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots) - A_n x^n - \frac{A_n}{A_{n-1}} x (d_{n-2} x^{n-2} + \dots) \\
 &= (c_{n-1} x^{n-1} + \dots) - \frac{A_n}{A_{n-1}} x (d_{n-2} x^{n-2} + \dots).
 \end{aligned}$$

E esse polinômio tem grau menor ou igual a $n - 1$. Então, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$P_n(x) = q(x) + \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}.$$

Então, multiplicando a igualdade acima por $P_n(x)$ e integrando nos dois lados, temos:

$$I_n = \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) \left(q(x) + \frac{A_n}{A_{n-1}} x P_{n-1}(x) \right) dx \quad (2.19)$$

$$= \int_{-1}^1 q(x) P_n(x) dx + \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx. \quad (2.20)$$

Mas como $\int_{-1}^1 q(x) P_n(x) dx = 0$ pela Propriedade 6, segue que

$$I_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx. \quad (2.21)$$

Da Fórmula de Recorrência (propriedade 1), temos

$$x P_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x).$$

Então, multiplicando a igualdade acima por $P_{n-1}(x)$ nos dois lados, obtemos:

$$x P_n(x) P_{n-1}(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(x).$$

Da igualdade (2.21) e integrando a igualdade acima,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}^2(x) \right) dx \right] \\
 &= \frac{A_n}{A_{n-1}} \left[\frac{n+1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) dx + \frac{n}{2n+1} \underbrace{\int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx}_{I_{n-1}} \right].
 \end{aligned}$$

Mas como $\int_{-1}^1 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = 0$ pela Propriedade 4

$$I_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{n}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x)dx = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Usando a expressão de A_n obtida na Propriedade 3, temos

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{n!} \frac{(n-1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)} \frac{n}{2n+1} I_{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{n(n-1)!} \frac{(n-1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)} \frac{n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n-1}{2n+1} I_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dessa igualdade, trabalhando do início, ou seja:

$$I_1 = \frac{1}{3} I_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 [P_0]^2(x)dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \quad (2.23)$$

Continuando:

$$I_2 = \frac{3}{5} I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$I_3 = \frac{5}{7} I_2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$$

$$I_4 = \frac{7}{9} I_3 = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{9}.$$

Mostrando por indução que:

$$I_n = \frac{2}{2n+1}.$$

O caso $n = 1$ foi mostrado em (2.23). Suponha que a igualdade seja válida para $n = k$, ou seja:

$$I_k = \frac{2}{2k+1} \text{ (Hipótese de Indução).}$$

Mostrando que a igualdade é válida para $n = k + 1$:

De (2.22), segue que:

$$I_{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)+1} I_k = \frac{2k+1}{2k+3} I_k.$$

Mas, pela Hipótese de Indução, temos que:

$$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+3} \frac{2}{2k+1} = \frac{2}{2k+3} = \frac{2}{2(k+1)+1}.$$

Portanto, fica provado que:

$$I_n = \frac{2}{2n+1}.$$

E com isso temos que:

$$\int_{-1}^1 [P_n]^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

□

Prova de 8: Sejam $P_n(x)$ os polinômios de Legendre. Queremos mostrar que $P_n(x)$ tem n raízes reais distintas no intervalo $(-1, 1)$. Primeiramente, suponha por absurdo, que exista x_0 um raiz de $P_n(x)$ em $(-1, 1)$ que seja repetida, em particular, duas vezes. Logo, $P_n(x_0) = 0$, e pelo fato de ela ser repetida, $P_n'(x_0) = 0$. Então, $P_n(x)$ é solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} ((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Esse problema tem uma única solução, que é a função trivial $y(x) = 0$ (BOYCE; DIPRIMA, 1985). Mas como dito acima, $P_n(x)$ também é uma solução, então isso significa que $P_n(x) = 0$, ou seja, $P_n(x)$ seria a função nula, num intervalo que contenha x_0 , o que é um absurdo, pois $P_n(x) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $P_n(x)$ não tem raízes repetidas, e com isso, todas as raízes de $P_n(x)$ são distintas. Agora, resta provar que o número de raízes de $P_n(x)$ é n . Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Então, pela Propriedade 4, $P_n(x)$ e $P_0(x)$ são ortogonais em $[-1, 1]$, ou seja:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_0(x)dx = \int_{-1}^1 P_n(x)dx = 0.$$

Logo, $P_n(x)$ não é ou só positivo ou só negativo em $(-1, 1)$ (caso contrário, a integral seria não-nula), daí, $P_n(x)$ deve mudar de sinal em algum ponto neste intervalo. Já que $P_n(x)$ é contínuo (todo polinômio é), o Teorema do Valor Intermediário nos diz que existe $x_1 \in (-1, 1)$ de modo que $P_n(x_1) = 0$. Com isso, obtemos uma raiz de $P_n(x)$ nesse intervalo.

Agora sejam x_1, x_2, \dots, x_m todos as raízes de $P_n(x)$ em $(-1, 1)$, com $-1 < x_1 < \dots < x_m < 1$. Então $1 \leq m \leq n$. Suponha, por absurdo que $m < n$. Então, o polinômio

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m).$$

tem grau m , e como $m < n$, este polinômio é ortogonal a $P_n(x)$ (pela propriedade 6). Então:

$$\int_{-1}^1 q(x)P_n(x)dx = 0 \tag{2.24}$$

Mas como $q(x)$ e $P_n(x)$ têm as mesmas raízes, eles mudam de sinal nos mesmos pontos (isto é, nas raízes), o que significa que eles têm o mesmo sinal em cada intervalo

$(-1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_m, 1)$, ou sinais opostos em cada intervalo. Ou seja, temos dois casos a considerar:

CASO 1: $q(x)$ e $P_n(x)$ têm o mesmo sinal no primeiro intervalo $(-1, x_1)$. Nesse caso, eles terão o mesmo sinal em cada um dos intervalos, e o produto $q(x)P_n(x)$ será maior do que zero em todo o intervalo $(-1, 1)$, exceto em seus zeros (x_1, x_2, \dots, x_m) .

CASO 2: $q(x)$ e $P_n(x)$ têm sinais opostos no primeiro intervalo $(-1, x_1)$. Nesse caso, eles terão sinais opostos em cada um dos intervalos e o produto $q(x)P_n(x)$ será menor do que zero em todo o intervalo $(-1, 1)$, exceto em seus zeros (x_1, x_2, \dots, x_m) .

No caso 1, temos que $\int_{-1}^1 q(x)P_n(x)dx > 0$, e no caso 2, temos que $\int_{-1}^1 q(x)P_n(x)dx < 0$, ou seja, em ambos os casos:

$$\int_{-1}^1 q(x)P_n(x)dx \neq 0. \quad (2.25)$$

O que é uma contradição, por (2.24). Portanto, $m = n$ e, com isso, $P_n(x)$ tem n zeros distintos no intervalo $(-1, 1)$.

□

2.5 Fórmula de Rodrigues

Teorema (Fórmula de Rodrigues³).

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \text{ e sendo } \frac{d^0}{dx^0} (x^2-1)^0 = (x^2-1)^0 = 1 \quad (2.26)$$

Demonstração. Seja $w(x) = (x^2 - 1)^n$. Derivando-o uma vez, obtemos:

$$\frac{dw}{dx} = n(x^2 - 1)^{n-1}(2x).$$

Multiplicando a igualdade acima por $x^2 - 1$, temos:

$$(x^2 - 1) \frac{dw}{dx} = n \underbrace{(x^2 - 1)(x^2 - 1)^{n-1}}_{w(x)} (2x).$$

Ou seja:

$$(x^2 - 1) \frac{dw}{dx} - 2nxw(x) = 0. \quad (2.27)$$

Derivando (2.27) em relação a x , temos que:

³ Olinde Rodrigues (1794-1851) foi um matemático e economista francês.

$$\begin{aligned}
& (2x) \frac{dw}{dx} + (x^2 - 1) \frac{d^2w}{dx^2} - 2n \left(w(x) + x \frac{dw}{dx} \right) = 0 \iff \\
& \iff (x^2 - 1) \frac{d^2w}{dx^2} + 2x \frac{dw}{dx} - 2nw(x) - 2nx \frac{dw}{dx} = 0 \iff \\
& \iff (x^2 - 1) \frac{d^2w}{dx^2} - (2n - 2)x \frac{dw}{dx} - 2nw(x) = 0. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Derivando (2.27) uma segunda vez, obtemos:

$$2x \frac{d^2w}{dx^2} + (x^2 - 1) \frac{d^3w}{dx^3} - (2n - 2) \left(\frac{dw}{dx} + x \frac{d^2w}{dx^2} \right) - 2n \frac{dw}{dx} = 0. \tag{2.29}$$

Agrupando os termos em (2.29), tem-se:

$$(x^2 - 1) \frac{d^3w}{dx^3} + (2 - 2n + 2)x \frac{d^2w}{dx^2} - ((2n - 2) + 2n) \frac{dw}{dx} = 0.$$

Derivando (2.27) uma terceira vez, obtemos:

$$2x \frac{d^3w}{dx^3} + (x^2 - 1) \frac{d^4w}{dx^4} + (2 - 2n + 2) \frac{d^2w}{dx^2} + (2x - (2n - 2)x) \frac{d^3w}{dx^3} - ((2n - 2) + 2n) \frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{2.30}$$

Agrupando os termos em (2.30), tem-se:

$$(x^2 - 1) \frac{d^4w}{dx^4} + (2x + 2x - (2n - 2)x) \frac{d^3w}{dx^3} + (2 - 2n + 2 - 2n - (2n - 2)) \frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{2.31}$$

Ou seja,

$$(x^2 - 1) \frac{d^4w}{dx^4} - (-6 + 2n)x \frac{d^3w}{dx^3} - (-6 + 6n) \frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{2.32}$$

Derivando (2.30) sucessivas vezes até que tenhamos uma ' $k + 1$ -ésima' derivada, obtemos:

$$(x^2 - 1) \frac{d^{k+2}w}{dx^{k+2}} - (2n - 2k - 2)x \frac{d^{k+1}w}{dx^{k+1}} - (2n + (2n - 2) + \dots + (2n - 2(k - 1)) + 2n - 2k) \frac{d^k w}{dx^k} = 0.$$

Para $k = n$, temos:

$$(x^2 - 1) \frac{d^{n+2}w}{dx^{n+2}} + 2x \frac{d^{n+1}w}{dx^{n+1}} - \underbrace{(2n + (2n - 2) + \dots + (2n - 2(n - 1)))}_{(I)} \frac{d^n w}{dx^n} = 0. \tag{2.33}$$

Sendo que (I) é igual a: $2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2(1+n)n}{2} = n(n + 1)$.

Multiplicando (2.33) por (-1) , obtemos:

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+2}w}{dx^{n+2}} - 2x \frac{d^{n+1}w}{dx^{n+1}} + n(n + 1) \frac{d^n w}{dx^n} = 0. \tag{2.34}$$

Chamando $\frac{d^n w}{dx^n}$ de $\phi(x)$, temos que a expressão em (2.34) mostra que $\phi(x)$ é solução da equação diferencial de Legendre com $\lambda = n(n+1)$.

Agora, determinando $\phi(1)$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{d^n}{dx^n} \left(\underbrace{(x-1)^n}_u \cdot \underbrace{(x+1)^n}_v \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} u \cdot \frac{d^i}{dx^i} v = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (x-1)^n \cdot \frac{d^i}{dx^i} (x+1)^n = \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \cdot \frac{d^0}{dx^0} (x+1)^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (x-1)^n \cdot \frac{d^i}{dx^i} (x+1)^n = \\ &= \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \cdot (x+1)^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (x-1)^n \cdot \frac{d^i}{dx^i} (x+1)^n = \\ &= n!(x+1)^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (x-1)^n \cdot \frac{d^i}{dx^i} (x+1)^n. \end{aligned}$$

Para $x = 1$ temos que $\phi(1) = n!(1+1)^n + 0 = n!2^n$, ou seja, segue que $\phi(1) = n!2^n$.

Portanto, $P_n(x) = \frac{\phi(x)}{\phi(1)} = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. □

E, $P_n(x)$ é solução da equação diferencial de Legendre de índice n e que satisfaz $P_n(1) = 1$.

2.6 Série de Fourier-Legendre

Desejamos generalizar o conceito apresentado na Propriedade 5, ou seja, expressar uma função $f(x)$, definida em $-1 \leq x \leq 1$, em uma série de polinômios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \quad (2.35)$$

Para isso, considere $m \in \mathbb{N}$ e multiplique (2.35) por $P_m(x)$ nos dois lados:

$$f(x)P_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_m(x)P_n(x).$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_m(x)P_n(x)dx.$$

Admitindo que a integral de uma série é igual a série dessa integral, elas podem ser "trocadas" de lugar, ou seja:

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx. \quad (2.36)$$

Mas, pela propriedade 4, todos os termos no somatório à direita são iguais a zero, exceto quando $n = m$. Então, (2.36) é equivalente a

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = c_m \int_{-1}^1 [P_m(x)]^2 dx.$$

Mas, pela propriedade 7, $\int_{-1}^1 [P_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}$, então:

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = c_m \frac{2}{2m+1}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{2m+1}{2}$, temos

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx. \quad (2.37)$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ é chamada de *Série de Fourier-Legendre*, ou expansão em série de Fourier-Legendre de $f(x)$, quando os coeficientes dessa série são escolhidos de acordo com (2.37), e quando $f(x)$ é contínua para todo x em $-1 < x < 1$, a série converge para $f(x)$ (O'NEIL, 2011). E, ainda

$$c_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx}{\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx$$

é o n -ésimo coeficiente de Fourier-Legendre de $f(x)$.

Exemplo:

Desenvolva o polinômio $q(x) = x^4 + 3x^2 + 5x - 2$ em série de Fourier-Legendre, da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$.

Como $q(x)$ é um polinômio de grau 4, ele pode ser expresso da forma

$$q(x) = \sum_{n=0}^4 c_n P_n(x), \text{ ou seja, } x^4 + 3x^2 + 5x - 2 = \sum_{n=0}^4 c_n P_n(x).$$

Podemos resolver esse problema pelas fórmulas apresentadas acima ou pela propriedade 5. Resolvendo através da propriedade 5 em que, dela, sabemos que:

- $1 = P_0(x)$ pela definição;
- $x = P_1(x)$ pela definição;
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ou seja, $x^2 = \frac{1}{3}(2P_2(x) + P_0(x))$;
- $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ ou seja, $x^3 = \frac{1}{5}(2P_3(x) + 3P_1(x))$;
- $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$, ou seja, $x^4 = \frac{1}{35}(8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x))$.

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x^2 + 5x - 2 &= \\
 &= \frac{1}{35}(8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x)) + 3 \left(\frac{1}{5}(2P_3(x) + 3P_1(x)) \right) + 5P_1(x) - 2P_0(x) = \\
 &= \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{20}{35}P_2(x) + \frac{1}{5}P_0(x) + \frac{6}{5}P_3(x) + \frac{9}{5}P_1(x) + 5P_1(x) - 2P_0(x) = \\
 &= \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{6}{5}P_3(x) + \frac{20}{35}P_2(x) + \frac{34}{5}P_1(x) - \frac{9}{5}P_0(x).
 \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\text{Desenvolva } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases} \text{ em série de Fourier-Legendre.}^4$$

Sabemos que:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx.$$

Podemos separar essa integral em duas, ou seja

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^0 f(x)P_n(x)dx + \frac{2n+1}{2} \int_0^1 f(x)P_n(x)dx.$$

Mas $f(x)$, entre -1 e 0 é igual a 0 e entre 0 e 1 é igual a 1 , e daí

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^0 (0)P_n(x)dx + \frac{2n+1}{2} \int_0^1 (1)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x)dx.$$

⁴ Adaptado de (SPIEGEL, 1977).

Então:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1) dx = \frac{1}{2} \\
 c_1 &= \frac{3}{2} \int_0^1 P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4} \\
 c_2 &= \frac{5}{2} \int_0^1 P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{2} dx = 0 \\
 c_3 &= \frac{7}{2} \int_0^1 P_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{5x^3 - 3x}{2} dx = \frac{-7}{16} \\
 c_4 &= \frac{9}{2} \int_0^1 P_4(x) dx = \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} dx = 0 \\
 c_5 &= \frac{11}{2} \int_0^1 P_5(x) dx = \frac{11}{2} \int_0^1 \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8} dx = \frac{11}{32}.
 \end{aligned}$$

⋮

E assim por diante. Como a função é descontínua, ela pode ser aproximada pela série, da forma:

$$f(x) \cong \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \dots$$

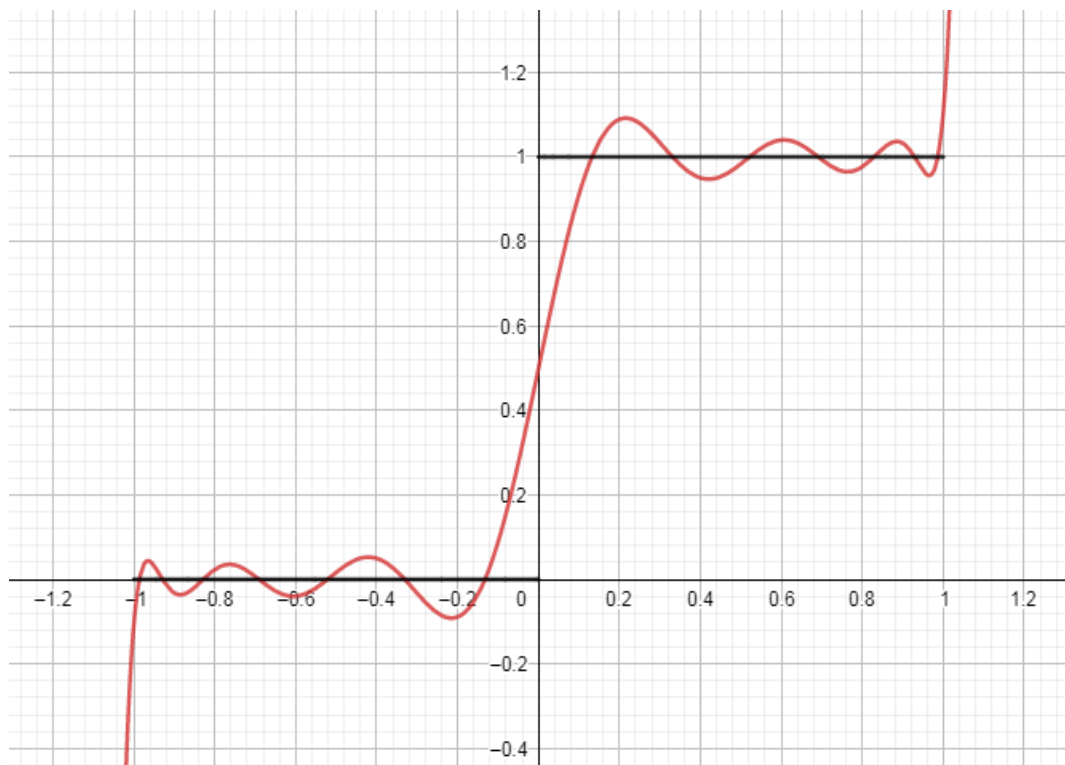


Figura 3: Gráfico de $f(x)$ e da série de Fourier-Legendre associada. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018).

Para o gráfico acima, foi considerada a seguinte soma parcial da série de Fourier-Legendre associada:

$$g(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \frac{75}{256}P_7(x) + \frac{133}{512}P_9(x) - \frac{483}{2048}P_{11}(x) + \frac{891}{4096}P_{13}(x).$$

3 Quadratura Gaussiana

Neste capítulo serão estudados a Quadratura Gaussiana, seu funcionamento em integrais definidas e duplas, com exemplos em ambos os casos.

3.1 Um pouco sobre Integrais Definidas

A integração de funções aparece em muitas áreas das Ciências e na resolução de equações diferenciais. Exemplos de algumas integrais importantes:

1. $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx$ é o comprimento do gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
2. $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ é o volume de um sólido que é obtido ao girar o gráfico de f em torno do eixo x .
3. $A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx$ é a área de uma superfície gerada quando o gráfico de $y = f(x)$ é girado em torno do eixo x .
4. $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ é a área entre os gráficos de f e de g , com $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$.
5. $T = T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$ é o período de oscilação para um pêndulo simples, com θ_0 sendo o ângulo inicial.
6. $\int_{40}^{93} \frac{97000v}{5v^2 + 570000} dv = \int_0^x dx = x$ exprime a distância percorrida por um Boeing 727-200 de massa $m = 97$ toneladas, quando aterrissa a uma velocidade de $93m/s$ e liga seus "reversos" em $t = 0$, antes que sua velocidade se reduza a $40m/s$. (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009)
7. $T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-u^2} du$ exprime a temperatura do solo em uma profundidade x e tempo t , com α constante. (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009) (THOMAS et al., 2010)

Mas nem sempre determinada integral pode ser resolvida "analiticamente", utilizando métodos elementares (mudança de variável, integração por partes, substituições trigonométricas, etc), e (ENGELS, 1980) apresenta um exemplo:

Suponha que queremos determinar o comprimento de arco da semi-elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, com $y \geq 0$ e $b > a$, que é dada por:

$$P = \int_{-a}^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

A equação paramétrica desta semi-elipse é $x = a \cos(\phi)$ e $y = b \sin(\phi)$, sendo $0 \leq \phi \leq \pi$. Então,

$$P = \int_0^\pi \sqrt{a^2(\sin(\phi))^2 + b^2(\cos(\phi))^2} d\phi.$$

Escrevendo $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ e $(\cos(\phi))^2 = 1 - (\sin(\phi))^2$ e substituindo na igualdade acima, obtemos $P = b \int_0^\pi \sqrt{(1 - k^2(\sin(\phi))^2)} d\phi$. Essa integral é chamada de *integral elíptica do primeiro tipo*, e essas integrais não podem ser resolvidas analiticamente, e, com isso, há uma **necessidade de se calcular essas integrais numericamente**, com métodos que tornam possível aproximações para o cálculo dessas integrais. Esses métodos também são necessários quando uma determinada função $y = f(x)$ é dada por um conjunto finito de pontos. Por exemplo, o cálculo de $\int_0^3 f(x) dx$, sendo que $f(x)$ é dada pela tabela a seguir:

Tabela 2: Exemplo de uma função dada por uma tabela.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.21	0.32	0.42	0.51

3.2 Quadratura Gaussiana - Introdução

Em Integração Numérica, tanto a regra de Simpson, quanto a regra do Trapézio (BURDEN; FAIRES, 2016) são expressas em termos dos valores de uma determinada função em determinados valores, que são $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. As fórmulas são mais simples quando os nós estão igualmente espaçados (ou seja, $x_n = x_{n-1} + h$ com h constante).

A Quadratura Gaussiana é resultado de uma mudança de 'ponto de vista': Trata-se em determinar qual o espaçamentos dos valores de x de modo que tenhamos a aproximação mais **simples e eficiente** possível para uma determinada integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Essa quadratura escolhe os pontos de forma ótima, de modo que essa integral deve ser aproximada pela soma $A_0\phi(u_0) + A_1\phi(u_1) + \dots + A_n\phi(u_n)$, e esses coeficientes devem ser escolhidos para minimizar o erro esperado na aproximação (BURDEN; FAIRES, 2016).

Quando esses valores de x forem determinados, é possível determinar os valores da função, seja por uma fórmula específica, seja através de uma tabela, o que depende da definição de "simples e eficiente".

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), demonstrou a Quadratura Gaussiana:

"[...] em um artigo que apresentou para a Sociedade Göttingen, em 1814. Ele fez com que os nós, bem como os coeficientes dos cálculos de função, fossem parâmetros na fórmula de somatória e encontrou uma disposição ideal dos nós. (BURDEN; FAIRES, 2016)"

Essa quadratura tem seus méritos:

"[...] algumas pessoas acham que existe uma instabilidade misteriosa em usar a fórmula de Gauss com um número grande de pontos, digamos $n > 20$. Isso é suposto acontecer porque os pontos e coeficientes são números irracionais que devem ser arredondados a um certo número de casas decimais. Isto é *nonsense*. Frequentemente uma fórmula de Gauss será muito superior a qualquer outra fórmula com o mesmo número de pontos.

[...] não é verdade, entretanto, que uma fórmula de Gauss é sempre a melhor. Por exemplo, a fórmula do trapézio com n pontos é muito melhor que a fórmula de Gauss-Legendre para $\int_0^1 \frac{2dx}{2 + \sin(10\pi x)}$. (STROUD, 2012)

3.3 Quadratura Gaussiana em Integrais Definidas

Como ponto de partida, para chegarmos ao nosso objetivo, considerando uma função $\phi(u)$, em que $-1 \leq u \leq 1$, queremos aproximar a seguinte integral:

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du \quad (3.1)$$

pela soma $A_0\phi(u_0) + A_1\phi(u_1) + \dots + A_n\phi(u_n)$, onde temos as $2(n+1)$ constantes, que são $u_0, u_1, \dots, u_n, A_0, A_1, \dots, A_n$, devem ser tais que a integral definida em (3.1) dê solução exata, ou seja, que a integral seja igual à soma, quando $\phi(u)$ é um polinômio arbitrário de grau menor ou igual a $2n+1$, este polinômio tendo $2n+2$ coeficientes. Realizando-se a divisão do polinômio $\phi(u)$ por $P_{n+1}(u)$, o polinômio de Legendre de grau $n+1$, obtemos:

$$\phi(u) = P_{n+1}(u)Q(u) + R(u), \quad (3.2)$$

onde $Q(u)$ tem grau n e $R(u)$ tem grau ≥ 0 e $\leq n$.

Integrando (3.2) dos dois lados, temos:

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du = \int_{-1}^1 P_{n+1}(u)Q(u) + R(u) du. \quad (3.3)$$

Por uma propriedade dos polinômios de Legendre (ver página 17), como o grau de $Q(u)$ é menor do que o grau de P_{n+1} , temos que $\int_{-1}^1 P_{n+1}(u)Q(u) du = 0$. Com isso, temos que

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du = \int_{-1}^1 P_{n+1}(u)Q(u) + R(u) du = \int_{-1}^1 R(u) du. \quad (3.4)$$

Os $n + 1$ pontos $((u_0, R(u_0)), (u_1, R(u_1)), \dots, (u_n, R(u_n)))$, onde u_0, u_1, \dots, u_n são abscissas arbitrárias e distintas duas as duas, podem ser interpolados com o polinômio de Lagrange. Como $R(u)$ é um polinômio que passa por esses pontos, a unicidade do Teorema da Interpolação de Lagrange ¹ significa que

$$R(u) = \sum_{i=0}^n L_i(u)R(u_i) = \text{Polinômio de Lagrange para os } n + 1 \text{ pontos} \quad (3.5)$$

Considerando u_0, u_1, \dots, u_n como sendo as **raízes distintas** de P_{n+1} , e aplicando-as em $\phi(u) = P_{n+1}(u)Q(u) + R(u)$, temos, para $u = u_i$:

$$\phi(u_i) = \underbrace{P_{n+1}(u_i)}_{=0} Q(u_i) + R(u_i), \text{ com } i = 0, 1, \dots, n, \text{ ou seja, } \phi(u_i) = R(u_i).$$

Portanto:

$$R(u) = \sum_{i=0}^n L_i(u)R(u_i) = \sum_{i=0}^n L_i(u)\phi(u_i) \quad (3.6)$$

De (3.4) e de (3.6), obtemos:

$$\int_{-1}^1 \phi(u)du = \int_{-1}^1 R(u)du = \sum_{i=0}^n \phi(u_i) \underbrace{\int_{-1}^1 L_i(u) du}_{=A_i} = \sum_{i=0}^n A_i \phi(u_i) \quad (3.7)$$

Essa igualdade é válida para qualquer polinômio $\phi(u)$ de grau menor ou igual a $2n + 1$. Da igualdade em (3.7), as raízes u_0, u_1, \dots, u_n de P_{n+1} e os números $A_i = \int_{-1}^1 L_i(u)du$ ($i =$

$1, \dots, n$), sendo $L_i(u) = \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^n \frac{u - u_j}{u_i - u_j}$, com $0 \leq i \leq n$ o interpolador de Lagrange, e eles são

encontrados por meio de fórmulas específicas ou por tabelas, como a tabela abaixo (retirada de (CARNAHAN; LUTHER, 1969), com o auxílio de (LOWAN; DAVIDS; LEVENSON, 1942)):

¹ Existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n , tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i . (LOBÃO, 2017)

Tabela 3: Raízes de $P_{n+1}(u)$ e os valores A_i para a quadratura de Gauss-Legendre

Raízes (u_i)	$\int_{-1}^1 \phi(u)du = \sum_{i=0}^n A_i \phi(u_i)$	A_i
$-u_0 = u_1 = 0.577350269189626 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	Fórmula de dois pontos ($n = 1$)	$A_0 = A_1 = 1.000000000000000$
$-u_0 = u_2 = 0.774596669241483$ $u_1 = 0.000000000000000$	Fórmula de três pontos ($n = 2$)	$A_0 = A_2 = 0.555555555555555 = \frac{5}{9}$ $A_1 = 0.888888888888888 = \frac{8}{9}$
$-u_0 = u_3 = 0.861136311594053$ $-u_1 = u_2 = 0.339981043584856$	Fórmula de quatro pontos ($n = 3$)	$A_0 = A_3 = 0.347854845137454$ $A_1 = A_2 = 0.652145154862546$
$-u_0 = u_4 = 0.906179845938664$ $-u_1 = u_3 = 0.538469310105683$ $u_2 = 0.000000000000000$	Fórmula de cinco pontos ($n = 4$)	$A_0 = A_4 = 0.236926885056189$ $A_1 = A_3 = 0.478628670499366$ $A_2 = 0.568888888888889$
$-u_0 = u_5 = 0.932469514203152$ $-u_1 = u_4 = 0.661209386466265$ $-u_2 = u_3 = 0.238619186083197$	Fórmula de seis pontos ($n = 5$)	$A_0 = A_5 = 0.171324492379170$ $A_1 = A_4 = 0.360761573048139$ $A_2 = A_3 = 0.467913934572691$
$-u_0 = u_9 = 0.973906528517172$ $-u_1 = u_8 = 0.865093366688985$ $-u_2 = u_7 = 0.679409568299024$ $-u_3 = u_6 = 0.433395394129247$ $-u_4 = u_5 = 0.148874338981631$	Fórmula de dez pontos ($n = 9$)	$A_0 = A_9 = 0.066671344308688$ $A_1 = A_8 = 0.149451349150581$ $A_2 = A_7 = 0.219086362515982$ $A_3 = A_6 = 0.269266719309996$ $A_4 = A_5 = 0.295524224714753$
$-u_0 = u_{14} = 0.987992518020485$ $-u_1 = u_{13} = 0.937273392400706$ $-u_2 = u_{12} = 0.848206583410427$ $-u_3 = u_{11} = 0.724417731360170$ $-u_4 = u_{10} = 0.570972172608539$ $-u_5 = u_9 = 0.394151347077563$ $-u_6 = u_8 = 0.201194093997435$ $u_7 = 0.000000000000000$	Fórmula de quinze pontos ($n = 14$)	$A_0 = A_{14} = 0.030753241996117$ $A_1 = A_{13} = 0.070366047488108$ $A_2 = A_{12} = 0.107159220467172$ $A_3 = A_{11} = 0.139570677926154$ $A_4 = A_{10} = 0.166269205816994$ $A_5 = A_9 = 0.186161000115562$ $A_6 = A_8 = 0.198431485327111$ $A_7 = 0.202578241925561$

Mas como que essas tabelas são construídas? Pegando um exemplo, o caso $n = 1$. Nesse caso, as raízes (u_0 e u_1) são as raízes de $P_2(x)$, e como já sabemos, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. As raízes desse polinômio de segundo grau são $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que é igual aos valores da tabela: ± 0.577350269189626 . Ainda precisamos obter A_0 e A_1 . De (3.7), sabemos que $A_i = \int_{-1}^1 L_i(u)du$. Então:

$$L_0(u) = \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^1 \frac{u - u_j}{u_0 - u_j} = \frac{u - u_1}{u_0 - u_1}$$

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} du = \frac{1}{u_0 - u_1} \left(\frac{u^2}{2} - u_1 u \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{u_0 - u_1} \left(\frac{1}{2} - u_1 - \left(\frac{1}{2} + u_1 \right) \right) = \frac{-2u_1}{u_0 - u_1}.$$

Mas, como vimos antes, $u_1 = -u_0$, e então: $A_0 = \frac{2u_0}{2u_0} = 1$. Agora, calculando A_1 :

$$L_1(u) = \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^1 \frac{u - u_j}{u_1 - u_j} = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}$$

$$A_1 = \int_{-1}^1 \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} du = \frac{1}{u_1 - u_0} \left(\frac{u^2}{2} - u_0 u \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{u_1 - u_0} \left(\frac{1}{2} - u_0 - \left(\frac{1}{2} + u_0 \right) \right) = \frac{-2u_0}{u_1 - u_0}.$$

Tal como para calcular A_0 , temos que $u_0 = -u_1$ e $A_1 = \frac{2u_1}{2u_1} = 1$ e tal como está na tabela, segue que $A_0 = A_1 = 1$.

Comentário 1: A fórmula da Quadratura Gaussiana com dois pontos:

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du = \phi\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

,

que é válida se $\phi(u)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 3, pode ser demonstrada de forma direta, fazendo a integração:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi(u) du &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) du = a_0 u + a_1 \frac{u^2}{2} + a_2 \frac{u^3}{3} + a_3 \frac{u^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(a_0 u + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} \right) - \left(-a_0 u + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} \right) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= a_0 + a_1 \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + a_2 \frac{1}{3} + a_3 \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \\ &+ a_0 + a_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + a_2 \frac{1}{3} + a_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \end{aligned}$$

Com isso, fica demonstrado que a fórmula de dois pontos é de fato exata quando $\phi(u)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 3.

Comentário 2: A fórmula da Quadratura Gaussiana com dois pontos:

$$\int_{-1}^1 \phi(u) du = \phi\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + \phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

,

que é válida se $\phi(u)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 3, também pode ser expressa como uma soma das áreas de dois retângulos, como nas figuras abaixo:

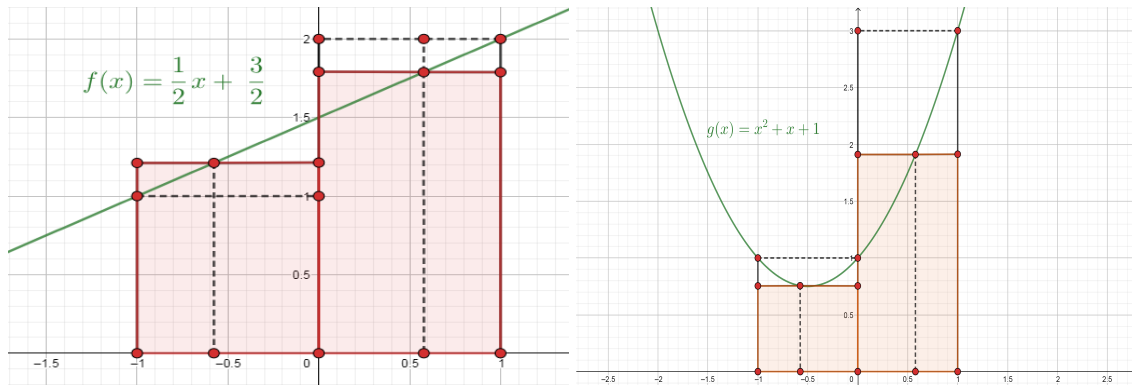


Figura 4: Quadratura Gaussiana através de somas de retângulos. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018).

Cálculo de $I = \int_a^b f(x) dx$ com Quadratura Gaussiana

Para mudarmos $\int_a^b f(x)dx$ para $\int_{-1}^1 \phi(u)du$ devemos realizar a mudança de variáveis dada pela reta $x = \frac{1}{2}(b - a)u + \frac{a + b}{2}$, que transforma biunivocamente, $[-1, 1]$ em $[a, b]$, em que $u = -1$ dá $x = a$ e $u = 1$ dá $x = b$. Portanto, $\phi(u) = f\left(\frac{1}{2}(b - a)u + \frac{a + b}{2}\right)$, e, com isso, temos que $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b - a) \int_{-1}^1 \phi(u)du$.

Como ilustração, um exemplo:

Exemplo 1:

Calcular $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, utilizando a Quadratura Gaussiana com três pontos ($n = 2$):

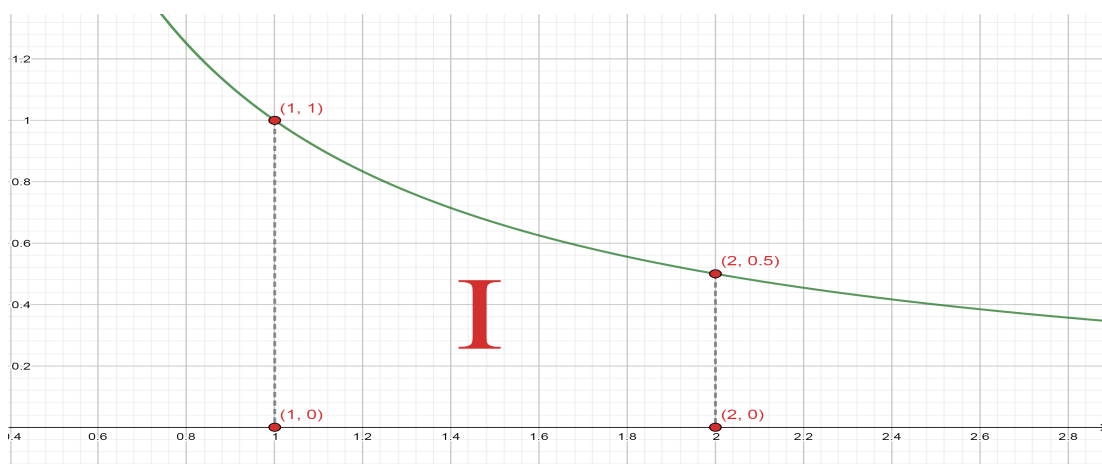


Figura 5: Gráfico de $\frac{1}{x}$ com $x \in [1, 2]$. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018).

Precisamos primeiramente fazer uma mudança de variáveis a fim de deixar os limites de integração em -1 e 1 :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(2-1)u + \frac{2+1}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{3}{2} = \frac{u+3}{2} \\ \phi(u) &= f(x) = f\left(\frac{u+3}{2}\right) = \frac{2}{u+3} \\ \int_1^2 f(x)dx &= \frac{1}{2}(2-1) \int_{-1}^1 \phi(u)du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2}{u+3} du = \int_{-1}^1 \frac{du}{u+3}.\end{aligned}$$

Como usaremos a fórmula de três pontos, precisamos determinar $u_0, u_1, u_2, A_0, A_1, A_2$. Da Tabela 3, encontramos os valores necessários. Então, de (3.1), temos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{du}{u+3} &\approx A_0 \frac{1}{u_0+3} + A_1 \frac{1}{u_1+3} + A_2 \frac{1}{u_2+3} \\ &\approx \frac{5}{9} \frac{1}{2.22540333076} + \frac{8}{9} \frac{1}{0+3} + \frac{5}{9} \frac{1}{3.774596669241483} \\ &\approx \frac{5}{20.0286299768} + \frac{8}{27} + \frac{5}{33.9713700232} \\ &\approx 0.24964263685 + 0.29629629629 + 0.14718275997 \\ &\approx 0.69312169311.\end{aligned}$$

Logo, $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0.69312169311$. Comparando com o valor "exato" da integral, que é $\ln 2 = 0.69314718056$, vemos que o "erro" é igual a 0.00002548744 .

Como foi mostrado em (3.7), a Quadratura Gaussiana tem erro igual a zero quando a função for um polinômio de grau menor ou igual a $2n + 1$. Quando usamos a quadratura com 3 pontos ($n = 2$), o erro será igual a zero para polinômios de grau 5 ou menor. Este caso será ilustrado no seguinte exemplo:

Exemplo 2:

Calcular $K = \int_0^3 x^5 + x + 1 dx$ utilizando a Quadratura Gaussiana com três pontos ($n = 2$). Compare com o valor exato da integral e verifique que o erro é nulo.

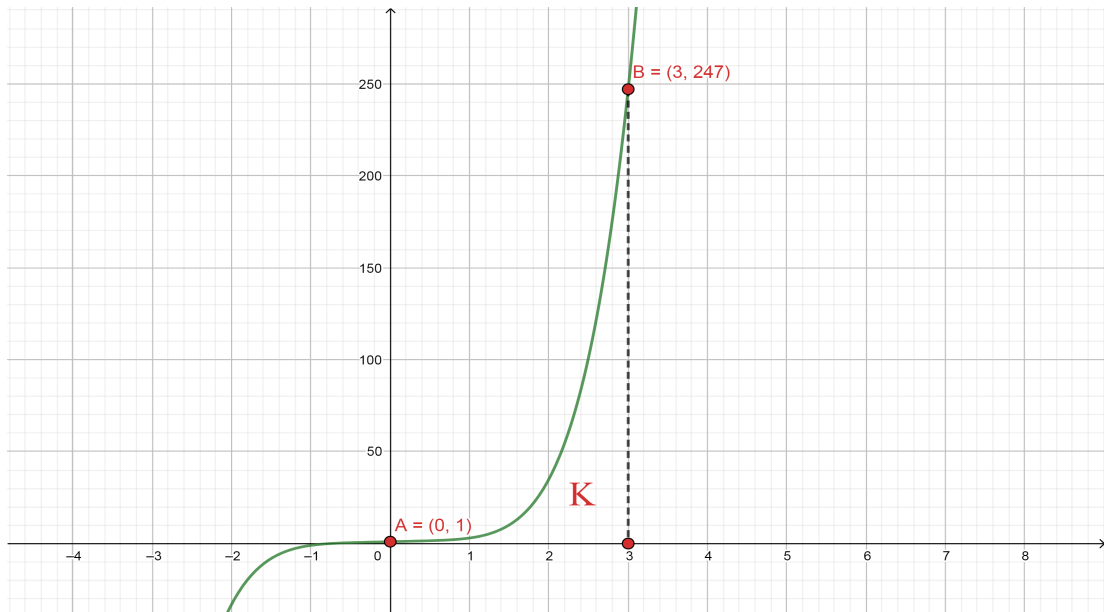


Figura 6: Gráfico de $x^5 + x + 1$ com $x \in [0, 3]$. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018).

Precisamos primeiramente fazer uma mudança de variáveis a fim de deixar os limites de integração em -1 e 1 :

$$x = \frac{1}{2}(3 - 0)u + \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}u + \frac{3}{2} = \frac{3u + 3}{2}$$

$$\phi(u) = f(x) = f\left(\frac{3u + 3}{2}\right) = \left(\frac{3u + 3}{2}\right)^5 + \left(\frac{3u + 3}{2}\right) + 1$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}(3 - 0) \int_{-1}^1 \phi(u)du = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3u + 3}{2}\right)^5 + \left(\frac{3u + 3}{2}\right) + 1 du.$$

Como usaremos a fórmula de três pontos, precisamos determinar $u_0, u_1, u_2, A_0, A_1, A_2$.

Da Tabela 3, encontramos os valores necessários. Então, de (3.1), temos que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 f(x)dx &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3u+3}{2} \right)^5 + \left(\frac{3u+3}{2} \right) + 1 \, du \approx \\
 &\approx \frac{3}{2} \left(A_0 \left(\left(\frac{3u_0+3}{2} \right)^5 + \left(\frac{3u_0+3}{2} \right) + 1 \right) \right) + \frac{3}{2} \left(A_1 \left(\left(\frac{3u_1+3}{2} \right)^5 + \left(\frac{3u_1+3}{2} \right) + 1 \right) \right) + \\
 &+ \frac{3}{2} \left(A_2 \left(\left(\frac{3u_2+3}{2} \right)^5 + \left(\frac{3u_2+3}{2} \right) + 1 \right) \right) \approx \\
 &\approx \frac{3}{2} \left(\frac{5}{9} \left(\left(\frac{3 \cdot (-0.774596669241483) + 3}{2} \right)^5 + \frac{3 \cdot (-0.774596669241483) + 3}{2} + 1 \right) \right) + \\
 &+ \frac{3}{2} \left(\frac{8}{9} \left(\left(\frac{3 \cdot 0 + 3}{2} \right)^5 + \frac{3 \cdot 0 + 3}{2} + 1 \right) \right) + \\
 &+ \frac{3}{2} \left(\frac{5}{9} \left(\left(\frac{3 \cdot (0.774596669241483) + 3}{2} \right)^5 + \frac{3 \cdot (0.774596669241483) + 3}{2} + 1 \right) \right) \approx \\
 &\approx \frac{5}{6} \cdot 1.342523324021212 + \frac{4}{3} \cdot 10.09375 + \frac{5}{6} \cdot 137.307476675978646 \approx \\
 &\approx 1.118769436684343 + 13.458333333333333 + 114.422897229982324 \approx 129
 \end{aligned}$$

Logo, $\int_0^3 x^5 + x + 1 \, dx \approx 129$. Agora, temos que calcular o valor exato da integral acima, para verificarmos se o erro da Quadratura Gaussiana é, de fato, nulo:

$$\int_0^3 x^5 + x + 1 \, dx = \left. \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + x \right|_0^3 = \frac{3^6}{6} + \frac{3^2}{2} + 3 - \frac{0^6}{6} - \frac{0^2}{2} - 0 = \frac{729}{6} + \frac{9}{2} + 3 = 129.$$

Com isso, segue que o erro é nulo nesse caso.

Exemplo 3:

Calcular $J = \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$ utilizando a Quadratura Gaussiana com quatro pontos ($n = 3$).

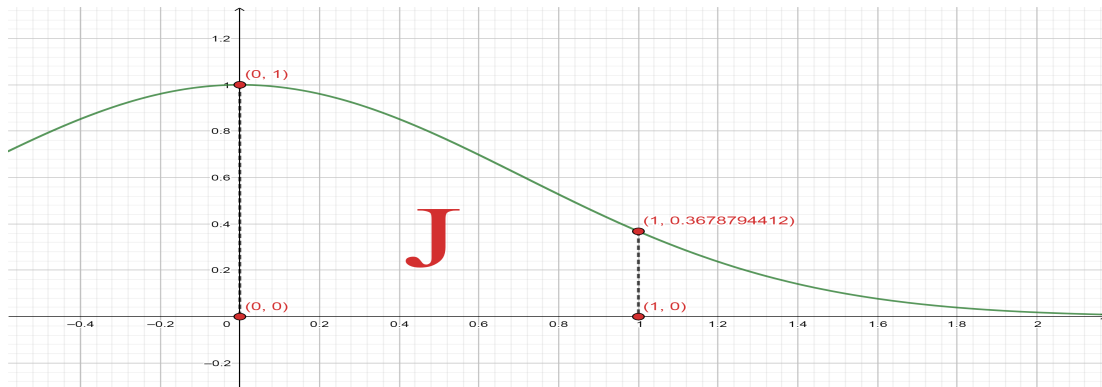


Figura 7: Gráfico de e^{-x^2} com $x \in [0, 1]$. Obtido em *geogebra.org* (IGI, 2018).

Primeiro, note que, como $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função par, já que $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, temos, por uma propriedade de integrais, que $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx$, ou seja, multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{2}$, obtemos: $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$

Como usaremos a fórmula de quatro pontos, precisamos determinar $u_0, u_1, u_2, u_3, A_0, A_1, A_2, A_3$. Da Tabela 3, encontramos os valores necessários. Então, de (3.1), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{2} \left(A_0 e^{-u_0^2} + A_1 e^{-u_1^2} + A_2 e^{-u_2^2} + A_3 e^{-u_3^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} (0.347854845137454 \cdot 0.4763722240005653874 + \\ &+ 0.652145154862546 \cdot 0.890842967528782806 + 0.652145154862546 \cdot 0.890842967528782806 + \\ &0.347854845137454 \cdot 0.4763722240005653874) \\ &\approx \frac{1}{2} (1.4933346224495386425521966338325296) \\ &\approx 0.7466673112247693212760983169162648. \end{aligned}$$

Logo, $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7466673112247693212760983169162648$.

Exemplo 4:

Calcular $L = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\sec(x)}}{x} dx$ utilizando a Quadratura Gaussiana com quatro pontos ($n = 3$). Compare o resultado obtido com a Regra de Simpson (com $h = 0.25$).

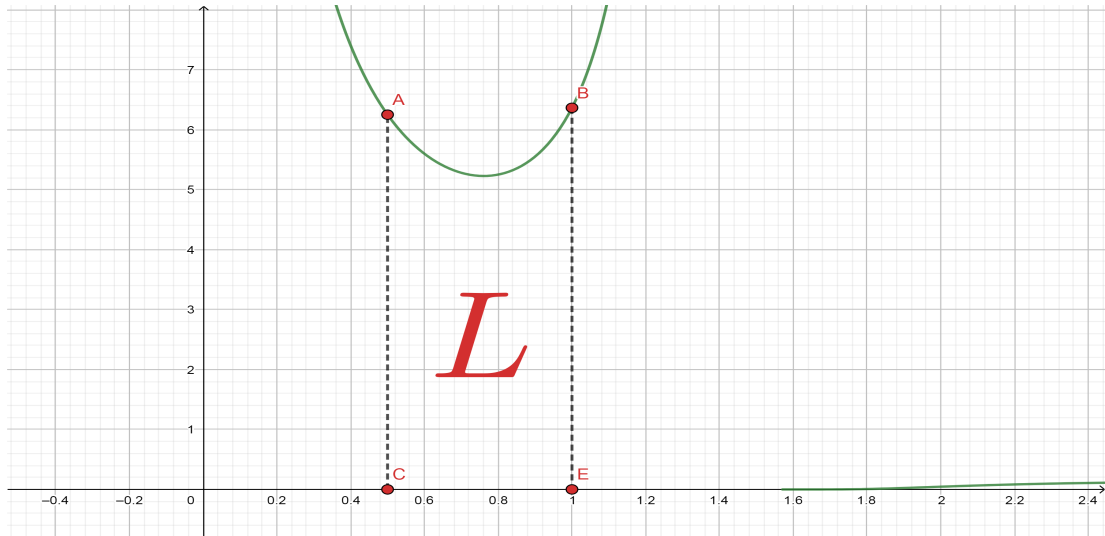


Figura 8: Gráfico de $\frac{e^{\sec(x)}}{x}$ com $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Obtido em geogebra.org (IGI, 2018).

Precisamos primeiramente fazer uma mudança de variáveis a fim de deixar os limites de integração em -1 e 1 :

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) u + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4} = \frac{u + 3}{4}$$

$$\phi(u) = f(x) = f(u) = \frac{4e^{\sec(\frac{u+3}{4})}}{u + 3}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 \phi(u)du = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{4e^{\sec(\frac{u+3}{4})}}{u + 3} du.$$

Como usaremos a fórmula de quatro pontos, precisamos determinar $u_0, u_1, u_2, u_3, A_0, A_1, A_2, A_3$. Da Tabela 3, encontramos os valores necessários. Então, de (3.1), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{4e^{\sec(\frac{u+3}{4})}}{u + 3} du &\approx \frac{1}{4} \left(A_0 \frac{4e^{\sec(\frac{u_0+3}{4})}}{u_0 + 3} + A_1 \frac{4e^{\sec(\frac{u_1+3}{4})}}{u_1 + 3} + A_2 \frac{4e^{\sec(\frac{u_2+3}{4})}}{u_2 + 3} + A_3 \frac{4e^{\sec(\frac{u_3+3}{4})}}{u_3 + 3} \right) \\ &\approx \frac{1}{4} (0.347854845137454 \cdot 5.97898987178278535 + 0.652145154862546 \cdot 5.36425018566943438 + \\ &+ 0.652145154862546 \cdot 5.318196977364442581 + 0.347854845137454 \cdot 6.002860006195062264) \approx \\ &\approx \frac{1}{4} (2.079820595927406745776406572636354 + 3.498269768054834418790712776456572 + \\ &+ 3.468236391392858451148192964471226 + 2.088123937836799542900605168435856) \approx \\ &\approx \frac{1}{4} (11.134450693211899158615917482000008) \approx \mathbf{2.783612673302974789653979370502}. \end{aligned}$$

De acordo com (BURDEN; FAIRES, 2016)(p.216), temos que a fórmula de Simpson nesse exemplo é igual a:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\sec(x)}}{x} dx &\approx \frac{0.25}{3} \left(\frac{e^{\sec(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}} + 4 \frac{e^{\sec(\frac{3}{4})}}{\frac{3}{4}} + \frac{e^{\sec(1)}}{1} \right) \approx \frac{1}{12} \left(2e^{\sec(\frac{1}{2})} + 16 \frac{e^{\sec(\frac{3}{4})}}{3} + e^{\sec(1)} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{12} (6.2503727869683197 + 20.9194125547149623 + 6.365009456306477) \approx \\ &\approx \frac{1}{12} (33.534794797989759) \approx \mathbf{2.79456623316581325}. \end{aligned}$$

Fazendo a comparação entre o resultado da integral obtida usando os dois métodos, temos que:

$$\begin{aligned} &2.79456623316581325 - 2.783612673302974789653979370502 = \\ &= \mathbf{0.010953559862838460346020629499998}. \end{aligned}$$

3.4 Quadratura Gaussiana em Integrais Duplas

Os procedimentos usados para aproximarmos uma integral definida através da Quadratura Gaussiana podem ser modificados de forma a serem utilizadas para aproximarmos uma integral dupla (ou tripla, ou de um número de variáveis maior). O seguinte exemplo é para ilustrar como que esses procedimentos são modificados para obtermos a aproximação de integrais duplas²:

$$I = \iint_R \log(0.3u + 0.5v + 4.2) dA, \text{ com } R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u \leq 1 \text{ e } -1 \leq v \leq 1\} \quad (3.8)$$

Expressando a integral dupla em (3.8) na forma de integrais iteradas, temos:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \log(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du \quad (3.9)$$

² Retirado de (BURDEN; FAIRES, 2016)

Pelo Teorema de Fubini³, temos que:

$$I = \int_{-1}^1 \left(\underbrace{\int_{-1}^1 \overbrace{\log(0.3u + 0.5v + 4.2)}^{\omega(v)} dv}_{=\xi(u)} \right) du = \int_{-1}^1 \xi(u) du. \quad (3.10)$$

Como $\xi(u)$ é uma integral definida, podemos calculá-la utilizando Quadratura Gaussiana, utilizando ela com a fórmula de dois pontos ($n = 1$), em ambas as dimensões, temos que:

$$\xi(u) \approx A_0\omega(v_0) + A_1\omega(v_1).$$

Da Tabela 3, vemos que

$A_0 = A_1 = 1$, $v_0 = -0.577350269189626$ e $v_1 = 0.577350269189626$. Então:

$$\begin{aligned} \xi(u) &\approx \omega(-0.577350269189626) + \omega(0.577350269189626) \approx \\ &\approx \log(0.3u + 3.91132486541) + \log(0.3u + 4.48867513459). \end{aligned}$$

Com isso, usando Quadratura Gaussiana novamente para calcularmos I , temos que:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \xi(u) du \approx A_0\xi(u_0) + A_1\xi(u_1) \approx \xi(-0.577350269189626) + \xi(0.577350269189626) \approx \\ &\approx \log(-0.17320508075 + 3.91132486541) + \log(-0.17320508075 + 4.48867513459) + \\ &+ \log(0.17320508075 + 3.91132486541) + \log(0.17320508075 + 4.48867513459) \approx \\ &\approx \log(3.73811978466) + \log(4.31547005384) + \log(4.08452994616) + \log(4.66188021534) \approx \\ &\approx \log(307.174044445) \approx 5.72741450696. \end{aligned} \quad (3.11)$$

No caso geral, se quisermos calcular uma integral dupla qualquer, $I = \iint_R f(x, y) dA$, com $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$, utilizando Quadratura Gaussiana com m pontos em uma dimensão e n pontos na outra dimensão,

$$I \approx \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n A_j A_i f(x_j, y_i) \quad (3.12)$$

³ Retirado de (STEWART, 2011)

em que A_j, x_j (relativos a quadratura com m pontos), A_i e y_i (relativos a quadratura com n pontos) podem ser obtidos na Tabela 3.

Na subseção anterior, as integrais não necessariamente precisavam ter limites de -1 até 1 , sendo necessário fazer uma mudança de variáveis adequada para que os limites de integração fossem de -1 até 1 . O mesmo acontece quando queremos resolver integrais duplas via Quadratura Gaussiana. Ou seja, quando temos uma integral dupla do tipo:

$$I = \iint_R f(x, y) \, dA, \text{ com } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}. \quad (3.13)$$

Para realizar a mudança de variáveis, defina

$$x = \frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{d-c}{2}v + \frac{c+d}{2}. \quad (3.14)$$

Expressando I em (3.13) na forma de integrais iteradas, e realizando a mudança de variável, obtemos:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dydx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{c+d}{2}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dvdu \quad (3.15)$$

em que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ é o determinante Jacobiano⁴ de x e y em relação a u e v , dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b-a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{d-c}{2} \end{vmatrix} = \frac{(b-a)(d-c)}{4}.$$

O exemplo seguinte ilustra como que esses procedimentos são modificados para obtermos a aproximação de integrais duplas⁵:

$$I = \iint_R \log(x + 2y) \, dA, \text{ com } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1.4 \leq x \leq 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 1.5\}. \quad (3.16)$$

Expressando I em (3.16) na forma de integrais iteradas, e realizando a mudança de variável, obtemos:

$$I = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \log(x + 2y) \, dydx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{3}{10}u + \frac{17}{10}, \frac{1}{4}v + \frac{5}{4}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dvdu. \quad (3.17)$$

⁴ Retirado de (GONCALVES; FLEMMING, 1999)

⁵ Retirado de (BURDEN; FAIRES, 2016)

Calculando o Jacobiano acima:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{40} = 0.075.$$

Então, (3.17) é igual a:

$$I = 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \log(0.3u + 0.5v + 4.2) \, dvdu.$$

Esta integral foi resolvida em (3.9), e seu resultado está em (3.11), ou seja:

$$I = 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \log(0.3u + 1.7, 0.25v + 1.25) \, dvdu = 0.075 \cdot 5.72741450696 = \\ = 0.429556088022.$$

Exemplo:

Calcule a área de um "buraco quadrado" na superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sendo (x, y) pertencente a região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ utilizando Quadratura gaussiana com $n = 2$ e $m = 3$.

Expressando a equação da esfera na forma $z = f(x, y)$, temos $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Sabemos que a área de uma superfície tri-dimensional é dada pela fórmula⁶:

$$AREA = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dR. \quad (3.18)$$

Então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Com isso, substituindo as derivadas parciais em (3.18), obtemos:

$$AREA = \iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}} \, dR = \iint_R \sqrt{\frac{4 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}} \, dR = \\ = 2 \iint_R \frac{dR}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}. \quad (3.19)$$

⁶ Retirado de (PISKUNOV, 1965)

Expressando (3.19) na forma de integrais iteradas, obtemos:

$$AREA = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{AREA}{2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}. \quad (3.20)$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que:

$$\frac{AREA}{2} = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right) dx = \int_{-1}^1 \xi(x) dx. \quad (3.21)$$

$$\text{Sendo } \xi(x) = \int_{-1}^1 \omega(y) dy \text{ e } \omega(y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Como $\xi(x)$ é uma integral definida, podemos resolvê-la utilizando Quadratura Gaussiana. Utilizando a quadratura com $m = 3$:

$$\xi(x) \approx A_0 \omega(y_0) + A_1 \omega(y_1) + A_2 \omega(y_2) + A_3 \omega(y_3).$$

Sabemos que os valores de A_0, A_1, A_2, A_3 e x_0, x_1, x_2, x_3 para a fórmula de quatro pontos estão disponíveis na Tabela 3, então:

$$\begin{aligned} \xi(x) &\approx A_0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(y_0)^2}} + A_1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(y_1)^2}} + A_2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(y_2)^2}} + A_3 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(y_3)^2}} \approx \\ &\approx 0.347854845137454 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(-0.861136311594053)^2}} + \\ &+ 0.652145154862546 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(-0.339981043584856)^2}} + \\ &+ 0.652145154862546 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(0.339981043584856)^2}} + \\ &+ 0.347854845137454 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-(0.861136311594053)^2}} \approx \\ &\approx \frac{0.347854845137454}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191-x^2}} + \frac{0.652145154862546}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264-x^2}} + \\ &+ \frac{0.652145154862546}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264-x^2}} + \frac{0.347854845137454}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191-x^2}} \approx \\ &\approx \frac{0.695709690274908}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191-x^2}} + \frac{1.304290309725092}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264-x^2}}. \end{aligned}$$

Ou seja, temos que:

$$\xi(x) \approx \frac{0.695709690274908}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191 - x^2}} + \frac{1.304290309725092}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264 - x^2}}.$$

Com isso, usando Quadratura Gaussiana novamente, com $n = 2$, para calcularmos a *AREA*, temos que:

$$\frac{AREA}{2} = \int_{-1}^1 \xi(x) dx \approx A_0 \xi(x_0) + A_1 \xi(x_1) + A_2 \xi(x_2).$$

Novamente, sabemos que os valores de A_0, A_1, A_2, A_3 e x_0, x_1, x_2, x_3 para a fórmula de três pontos estão disponíveis na Tabela 3, então:

$$\begin{aligned} \frac{AREA}{2} &= \int_{-1}^1 \xi(x) dx \approx \frac{5}{9} \xi(-0.774596669241483) + \frac{8}{9} \xi(0) + \frac{5}{9} \xi(0.774596669241483) \approx \\ &\approx \frac{0.38650538348605961349461651394}{\sqrt{2.658444252854190644831566993902}} + \frac{0.72460572762505038650538348606}{\sqrt{3.284412890002952828989759419975}} + \\ &+ \frac{0.618408613577695381591386422304}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191}} + \frac{1.159369164200080618408613577696}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264}} + \\ &+ \frac{0.38650538348605961349461651394}{\sqrt{2.658444252854190644831566993902}} + \frac{0.72460572762505038650538348606}{\sqrt{3.284412890002952828989759419975}} \approx \\ &\approx \frac{0.77301076697211922698923302788}{\sqrt{2.658444252854190644831566993902}} + \frac{1.44921145525010077301076697212}{\sqrt{3.284412890002952828989759419975}} + \\ &+ \frac{0.618408613577695381591386422304}{\sqrt{3.258444252854190060730135033191}} + \frac{1.159369164200080618408613577696}{\sqrt{3.884412890002952244888327459264}} \approx \\ &\approx 0.47410197473631354806994222510 + 0.799655418332325434680020022796 + \\ &+ 0.342586608332123801448297430334 + 0.5882460937588692309120935706731 \approx \\ &\approx 2.2045900951596320151103532489031. \end{aligned}$$

Ou seja, temos que a *AREA* é igual a

$$2 \cdot 2.2045900951596320151103532489031 = 4.4091801903192640302207064978062.$$

Exemplo:

Calcular o volume sob o gráfico de $z = xy^3 \cdot \sin xy$ na região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ utilizando Quadratura gaussiana com $n = 1$ em ambas as dimensões.⁷

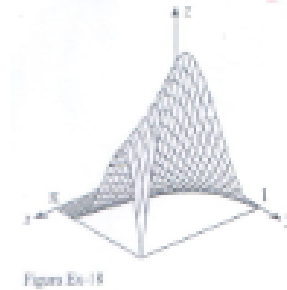


Figura 9: Gráfico de $z = xy^3 \cdot \sin xy$

$$I = \iint_R xy^3 \cdot \sin xy \, dR \text{ com } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq 1\} \quad (3.22)$$

Expressando (3.22) na forma de integrais iteradas, temos que:

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi xy^3 \cdot \sin(xy) \, dx dy.$$

A mudança de variável, $x = \frac{\pi(u+1)}{2}$ e $y = \frac{v+1}{2}$ transforma a região de integração R em $[-1, 1] \times [-1, 1]$

Efetuada a mudança de variável, obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^\pi xy^3 \cdot \sin(xy) \, dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{v+1}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(v+1)}{4}\right) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dv du. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Calculando o Jacobiano acima:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{4}.$$

Então (3.23) é igual a:

⁷ Adaptado de (ANTON, 2000)

$$I = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{v+1}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(v+1)}{4}\right) dv du.$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que:

$$\frac{4}{\pi} I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{v+1}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(v+1)}{4}\right) dv \right) du = \int_{-1}^1 \xi(u) du. \quad (3.24)$$

$$\text{Com } \xi(u) = \int_{-1}^1 \omega(v) dv \text{ e } \omega(v) = \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{v+1}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(v+1)}{4}\right).$$

Como $\xi(u)$ é uma integral definida, podemos calcular ela utilizando Quadratura Gaussiana, utilizando ela com $n = 1$, temos que:

$$\xi(u) \approx A_0 \omega(v_0) + A_1 \omega(v_1)$$

Da Tabela 3, na fórmula de dois pontos ($n = 1$) vemos que $A_0 = A_1 = 1$, $v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $v_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Então:

$$\begin{aligned} \xi(u) &\approx \omega\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \omega\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx \\ &\approx \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{4}\right) + \\ &+ \frac{\pi(u+1)}{2} \left(\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{2}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)}{4}\right) \approx \\ &\approx \frac{\pi(u+1)}{2} (0.009437387837656) \cdot \sin\left(\frac{(u+1)(1.327793289355575)}{4}\right) + \\ &+ \frac{\pi(u+1)}{2} (0.490562612162344) \cdot \sin\left(\frac{(u+1)(4.955392017824011)}{4}\right) \approx \\ &\approx (u+1)(0.014824214149928) \cdot \sin((u+1)(0.331948322338893)) + \\ &+ (u+1)(0.770573949247519) \cdot \sin((u+1)(1.238848004456002)). \end{aligned}$$

Com isso, usando Quadratura Gaussiana novamente, com ($m = 1$), para calcularmos I, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi}I &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \xi(u) \, du \approx \frac{\pi}{4}(A_0\xi(u_0) + A_1\xi(u_1)) \approx \frac{\pi}{4} \left(\xi\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \xi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right) \approx \\
&\approx \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) (0.014824214149928) \cdot \sin\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) (0.331948322338893)\right) + \\
&+ \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) (0.770573949247519) \cdot \sin\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) (1.238848004456002)\right) \approx \\
&\approx (0.006265450119942) \cdot \sin(0.140297869079488) + (1.215465026276087) \cdot \sin(1.954097233313705) \approx \\
&\approx (0.006265450119942)(0.139838063176611) + (1.215465026276087)(0.9274352046516839) \approx \\
&\approx 0.000876148409702 + 1.127265055391327 \approx 1.128141203801029.
\end{aligned}$$

Com isso: $I \approx \frac{\pi}{4} 1.128141203801029 \approx 0.886040029518314$.

De acordo com (ANTON, 2000), o volume é igual a $\frac{3}{\pi}$, então, o "erro" é igual a:

$$\frac{3}{\pi} - 0.886040029518314 = 0.068889629033058.$$

Considerações Finais

Muitos matemáticos, quando trabalham em áreas relacionadas à resolução de integrais definidas e em alguns casos integrais impróprias (que foge do escopo deste TCC), certamente irão encontrar, na maioria dos casos, integrais que não são resolvidas via métodos elementares, e é de certa forma uma “necessidade” que esses matemáticos tenham um conhecimento mais “avançado” sobre Integração Numérica. E neste Trabalho de Conclusão de Curso foi estudada a Quadratura Gaussiana, que é um método de Integração Numérica, focando no uso dos Polinômios de Legendre, na obtenção da quadratura e no cálculo das integrais utilizando a mesma.

Foi visto inicialmente um contexto histórico sobre Legendre, a dedução dos polinômios de Legendre via resolução em séries de potências da Equação Diferencial de Legendre, foram abordadas suas principais propriedades, uma representação dos polinômios de Legendre através da Fórmula de Rodrigues e uma breve passagem em expansões em séries de Fourier-Legendre. Após isso, foi visto a Quadratura Gaussiana, explicando como que ela se caracteriza, resolvendo exemplos e mostrando como que ela se aplica também em integrais duplas, utilizando exemplos relacionados à aplicação de integrais.

Os estudos desses conteúdos foram feitos para que eu tenha uma nova experiência e um aprofundamento em alguns temas relacionados à Análise Numérica, e também para ver como que os polinômios de Legendre se “encaixam” na quadratura. E isso me proporcionou uma “vontade”, e uma possibilidade de realizar uma pós-graduação e estudos futuros em análise numérica e em áreas relacionadas. E também foi um estudo muito gratificante pois eu me familiarizei com o \LaTeX , com a normalização de trabalhos acadêmicos e com a leitura de livros e artigos relacionados em inglês.

Acredito que os objetivos propostos para este trabalho foram cumpridos. Com o estudo dos conteúdos presentes nesse trabalho, eu obtive um conhecimento acerca de conteúdos que normalmente não estão presentes no curso de Licenciatura em Matemática, e espero que os leitores também obtenham esse conhecimento.

Referências

- ANTON, H. Cálculo, um novo horizonte. vol. 1. Trad. Cyro de Carvalho Patarra e, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado na página 27.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. História da matemática. 3ª. Edição. São Paulo: Blucher, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Análise numérica. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 8, 11, 36, 37, 47 e 49.
- CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A. Applied numerical methods. [S.l.: s.n.], 1969. Citado na página 38.
- ENGELS, H. Numerical quadrature and cubature. Academic Press, 1980. Citado na página 35.
- EVES, H. W. Introdução à história da matemática. [S.l.]: Unicamp, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- FINIZIO, N.; LADAS, G. E. Ordinary differential equations with modern applications. [S.l.]: Arden Shakespeare, 1982. Citado na página 11.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado na página 35.
- GONCALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Calculo B: Funções de varias variáveis integrais duplas e triplas. [S.l.]: Makron Books, 1999. Citado na página 49.
- IGI. GeoGebra 5.0.507.0. 2018. <<http://www.geogebra.org>>. Citado 7 vezes nas páginas 5, 15, 33, 41, 43, 45 e 46.
- LOBÃO, D. C. Introdução aos métodos numéricos. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/diomarcesarlobao>, 2017. Citado na página 38.
- LOWAN, A. N.; DAVIDS, N.; LEVENSON, A. Table of the zeros of the legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for gauss' mechanical quadrature formula. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 48, n. 10, p. 739–743, 1942. Citado na página 38.
- MACON, N. Numerical Analysis. [S.l.: s.n.], 1968. Citado na página 8.
- MARQUES, L. F. Zeros de polinômios perturbados. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013. Citado na página 10.
- O'NEIL, P. V. Advanced engineering mathematics. [S.l.]: Cengage learning, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 11, 15, 16, 22 e 31.

PISKUNOV, N. S. Differential and integral calculus. [S.l.]: P. Noordhoff, 1965. Citado na página [50](#).

SPIEGEL, M. R. Análise de fourier. ed. Sao Paulo: McGraw do Brasil, 1977. Citado na página [32](#).

STEWART, J. Calculus. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado na página [48](#).

STROUD, A. H. Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations: a textbook for a beginning course in numerical analysis. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [9](#) e [37](#).

TAY, K.; LIM, K.; KAHAR, R. A. Numerical methods with casio fx-570 es calculator. Batu Pahat: Penerbit UTHM, 2011. Citado na página [8](#).

THOMAS, G. et al. Cálculo. 11a edição. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2010. Citado na página [35](#).