

# ANÁLISE DE PORTFÓLIOS OTIMIZADOS COM MODELO DE MARKOWITZ NO MERCADO BRASILEIRO DE AÇÕES<sup>1</sup>

Ariel Neiss<sup>2</sup>

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se a análise e avaliação da estratégia de investimento de Markowitz na bolsa de valores oficial do Brasil (B<sup>3</sup>). A estratégia de Markowitz foi adaptada ao contexto brasileiro e aplicada em dados financeiros históricos de empresas com ações listadas na B<sup>3</sup> no período de 01 de janeiro de 2013 a 06 de dezembro de 2017. Elencou-se dois cenários diferentes: 1º. Cento e setenta e sete empresas que compõem ininterruptamente a B<sup>3</sup> no período de estudo; 2º. Dez ações com maior retorno em cada janela temporal das cento e setenta e sete empresas que compõem ininterruptamente a B<sup>3</sup> no período de estudo. Esses cenários foram expostos a diferentes janelas temporais no período de 01 de janeiro de 2013 a 06 de dezembro de 2017 e constatou-se que a janela temporal de doze meses apresenta o melhor desempenho em ambas as situações. A rentabilidade real, respectivamente, é de 89,42% e 188,03%. A bolsa de valores oficial do Brasil, no mesmo período, teve retorno real de -19,85%. Os resultados encontrados demonstraram que a estratégia de investimento de Markowitz apresenta um melhor desempenho com a limitação do portfólio aos dez ativos mais rentáveis de cada janela temporal, apesar de isso também implicar em um aumento significativo da variância.

**Palavras-chave:** Gestão de Portfólio. Renda Variável. Markowitz. Sharpe.

## 1 INTRODUÇÃO

Conforme Meneses (1996), entende-se por investimento financeiro as operações de compra e venda de ativos financeiros. O principal objetivo de um investimento financeiro é repor o valor de compra da moeda perdido com a inflação, sendo também possível a obtenção de lucro. Segundo Pereira e Henrique (2016), os investimentos financeiros dividem-se em duas principais vertentes de acordo com a modalidade de seu retorno: investimentos em renda fixa, detentores de retornos previamente estabelecidos em contratos; e os de renda variável, os quais os retornos são concretizados de acordo com as variações do mercado, destacando-se neste grupo o mercado de ações. Nesse cenário, é necessário considerar os riscos envolvidos diretamente relacionados aos seus potenciais retornos. Assaf Neto (2006) afirma que a proporção do retorno configura um prêmio ao risco que se incorre no investimento.

De acordo com a Organização Internacional de Normalização, ISO 31000, - que discorre sobre a gestão de risco nos mais diversos segmentos - risco é definido como sendo o efeito da incerteza nos objetivos. No que diz respeito ao processo de alocação da riqueza, a análise e o domínio do risco na gestão de investimentos são desafios permanentes para a comunidade que atua nos mercados financeiro e de capitais, sendo o risco definido como o desvio padrão histórico do preço do ativo.

De acordo com Junior, Pamplona e Salomon (2014), fundos de renda fixa - que correspondem a grande parte dos portfólios investidos nas últimas décadas - tornam-se menos atrativos em decorrência da queda das altas taxas de retornos presente em uma economia em estabilização. Seguindo a tendência de mercados financeiros mais estáveis, o investimento em ações torna-se uma boa alternativa de diversificação para investidores que buscam melhorar a rentabilidade de seu portfólio em longo prazo.

---

<sup>1</sup>Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para titulação no Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Mobilidade, da Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville, sob orientação da Dra. Silvia Lopes de Sena Tagliapietra.

<sup>2</sup>Formando do Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Mobilidade. E-mail arielneiss.95@gmail.com

Dessa forma, objetivando a maximização do retorno, o investidor deve buscar as melhores formas de aplicar seu capital, evitando riscos superiores aos que está disposto a tolerar. Bruni e Famá (1998) afirmam que um dos primeiros acadêmicos a considerar a importância do risco na gestão de ativos foi Harry Markowitz, em artigo clássico: Portfolio Selection (MARKOWITZ, 1952).

O modelo proposto por Markowitz (1952) é um dos modelos de maior repercussão na teoria moderna de finanças (IQUIAPAZA, AMARAL e BRESSAN, 2009). Escrito em 1952, o Portfolio Selection mudou a maneira de abordar a seleção e administração de portfólios. As propostas do autor convergem em uma direção: diversificação do investimento. Os investidores devem criar portfólios de ativos, cada um com sua própria configuração de rendimento esperado e risco, a fim de otimizar o desempenho de seus investimentos.

A diversificação se dá em decorrência de o modelo de Markowitz (1952) explorar a covariância entre os ativos e assim tornar possível construir portfólios de investimento em que o risco é inferior ao ativo de menor risco. Em conformidade com Elton et al. (2009), a combinação para um conjunto de ativos recebe a denominação de carteira. Apesar do modelo de Markowitz minimizar o risco na alocação de investimentos, segundo Casarotto Filho e Kopittke (2010) não é possível eliminar o risco intrínseco ao mercado, também chamado de risco sistemático. Os riscos que são diversificáveis, ou seja, podem ser amenizados através da diversificação, também são chamados de riscos não-sistemáticos.

Conforme Belentepe (2005), as técnicas mais aprimoradas no que diz respeito a seleção de portfólios não obtém aceitação equivalente as técnicas pioneiras, como a proposta por Markowitz (1952), apesar disso, Fabozzi et al. (2007) defendem que o quadro teórico clássico necessita de algumas mudanças a fim de apresentar maior realismo e estabilidade. Passa-se a discutir implementações e ajustes ao trabalho de Markowitz. Sugere-se então a aplicação de dois diferentes modelos ao estudo. Um modelo com filtro que aborda apenas os 10 ativos mais rentáveis por janela temporal e um modelo que engloba todas ações negociadas no período de estudo.

Dessa maneira, o objetivo desse trabalho é realizar uma análise comparativa do desempenho do modelo de Markowitz, com e sem filtro, em diferentes janelas temporais, no mercado de ações da B3, um dos segmentos dos investimentos em renda variável. Para tanto, elencam-se duas amostras distintas: uma com todas as ações com negociação contínua de 01/01/2013 a 06/12/2017 e outra com as dez ações mais rentáveis para cada janela temporal no mesmo período. A aplicabilidade do modelo se dá em um algoritmo em linguagem de programação Python, desenvolvido baseado no trabalho de Balazs (2018).

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Na década de 60 Henry Markowitz publicou os primeiros trabalhos que dariam origem ao que chamamos hoje de Teoria Moderna do Portfólio, nos quais ele analisou o mercado acionário sob uma perspectiva de tempo contínuo em um ambiente estocástico, aplicando em seu estudo a pesquisa operacional. A base desta teoria foi o artigo “Portfolio Selection” (MARKOWITZ, 1952).

Até a publicação de Markowitz a visão sobre investimentos em renda variável era muito limitada e sua tese acabou se tornando um marco no segmento das finanças. Predominava até então a aplicação em ativos que apresentavam os maiores retornos. Entretanto, Markowitz observou que ao concentrar os investimentos em um único ativo – o mais rentável - o indivíduo sujeitava-se a grandes variações. Nesse cenário, ele apresenta o risco como uma característica fundamental de um portfólio de investimentos, e não apenas o retorno, como era comumente feito até então.

“Na tentativa de reduzir a variância, investir em diversos ativos não é o suficiente. É preciso evitar que o investimento seja feito em ativos com alta covariância entre si. Devemos diversificar entre indústrias, especialmente indústrias com diferentes características econômicas, porque empresas de diferentes indústrias tem covariâncias menores que empresas da mesma indústria.” (MARKOWITZ, 1952, p.89).

Em seu estudo, Markowitz mostra que a forma de minimizar o risco total de uma carteira é por meio da diversificação dos ativos, procurando uma baixa correlação entre eles. Em *Portfolio Selection*, publicado em 1952, Markowitz considerou alguns pressupostos:

1. Os investidores aceitam os valores de retornos de cada ativo, de acordo com a distribuição de probabilidades de seus retornos;
2. Os investidores avaliam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos sobre o horizonte de tempo de um período;
3. Não são considerados custos de transação e impostos;
4. Para certa taxa de retorno, os investidores tendem a minimizar o risco do investimento;
5. Para um dado nível de risco, os investidores tendem a maximizar o retorno do investimento;
6. Existe uma taxa livre de risco na qual os investidores aplicam ou captam recursos;
7. Os ativos são infinitamente divisíveis, podendo assim comprar qualquer valor de ações, e não somente múltiplos do valor mínimo negociado.

O método desenvolvido por Markowitz considera um modelo matemático de programação quadrática, segmento da pesquisa operacional, que torna possível a otimização de uma determinada função-objetivo no sentido requerido.

A modelagem apresentada em *Portfolio Selection* (MARKOWITZ, 1952), toma como base os pilares fundamentais representados no conjunto de equações abaixo:

$$E = \sum_{i=1}^n p(X_i)\epsilon_i \quad (1)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(X_i)p(X_j)\omega_{ij} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n p(X_i) = 1 \quad (3)$$

$$p(X_i) \geq 0 \quad (4)$$

Em que:

E: Retorno esperado da carteira;

V: Variância da carteira;

$p(X_i)$ : Participação de cada ativo;

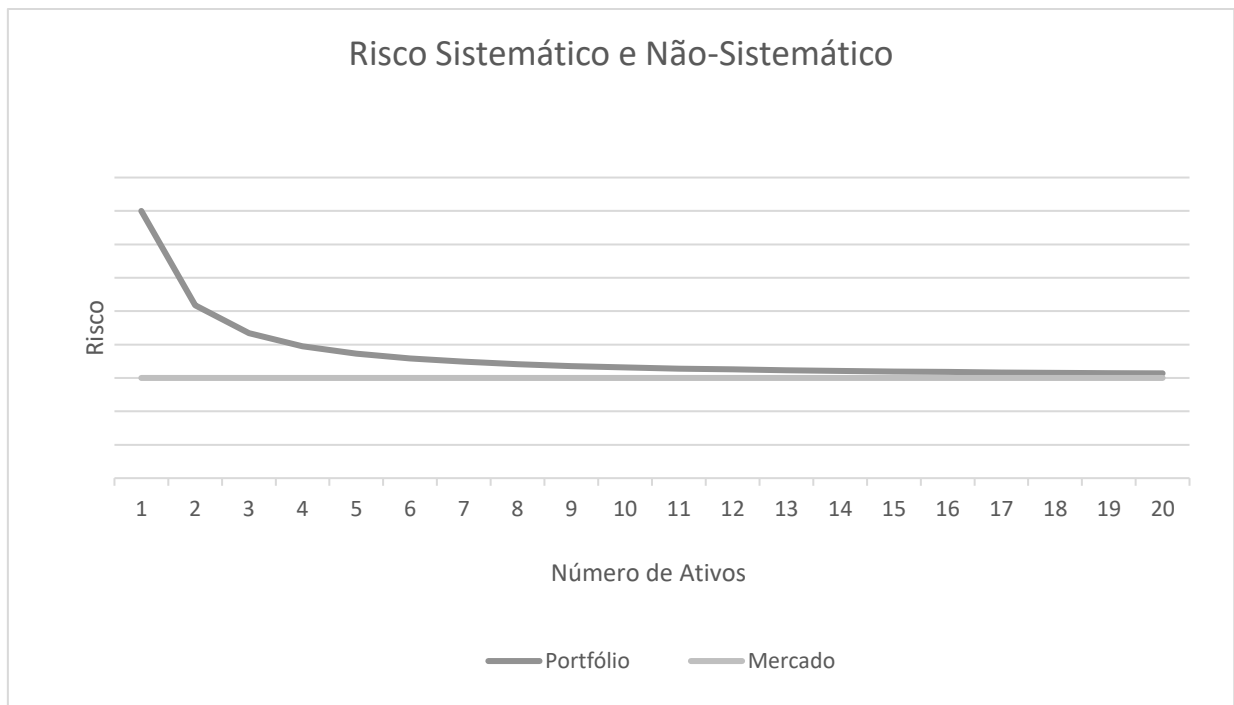
$\epsilon_i$ : Retorno esperado de cada ativo;

$\omega_{ij}$ : Covariância entre o par de ativos se  $i$  e  $j$  diferentes e variância se  $i$  igual a  $j$ .

Ao se adicionar mais um ativo na carteira, faz-se com que as ponderações sejam diluídas, atenuando o resultado das suas multiplicações com as covariâncias. Isto implica a uma redução da variância do portfólio. Dessa maneira, quanto mais ativos forem alocados, menor será o risco (PEREIRA E HENRIQUE, 2016).

Conforme Casarotto Filho e Kopittke (2010) é importante ressaltar que não é possível eliminar o risco intrínseco ao mercado, também chamado de risco sistemático. Os riscos que são diversificáveis, ou seja, podem ser amenizados através da diversificação, são chamados de riscos não-sistemáticos. Os riscos podem ser observados na Figura 1, em que é possível visualizar que a adição de ativos ao portfólio diminui o risco não-sistemático, fazendo com que o risco do portfólio (risco não-sistemático) tenda ao risco intrínseco (risco sistemático).

Figura 1 – Risco sistemático e não-sistemático



Fonte: Adaptado de Casarotto Filho e Kopittke, 2010

Conforme o disposto por Markowitz (1952) o modelo que minimiza a variância é representado pela seguinte equação da função objetivo:

$$\text{Min } V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \times p(X_i) \times p(X_j) \quad (5)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^n p(X_i) = 1 \quad (6)$$

$$E = \sum_{i=1}^n p(X_i) \times \epsilon_i \quad (7)$$

(8)

$$p(X_i) \geq 0$$

$$i = 1, \dots, n$$

(9)

Em que:

E: Retorno esperado da carteira;

V: Variância da carteira;

$p(X_i)$ : Participação de cada ativo;

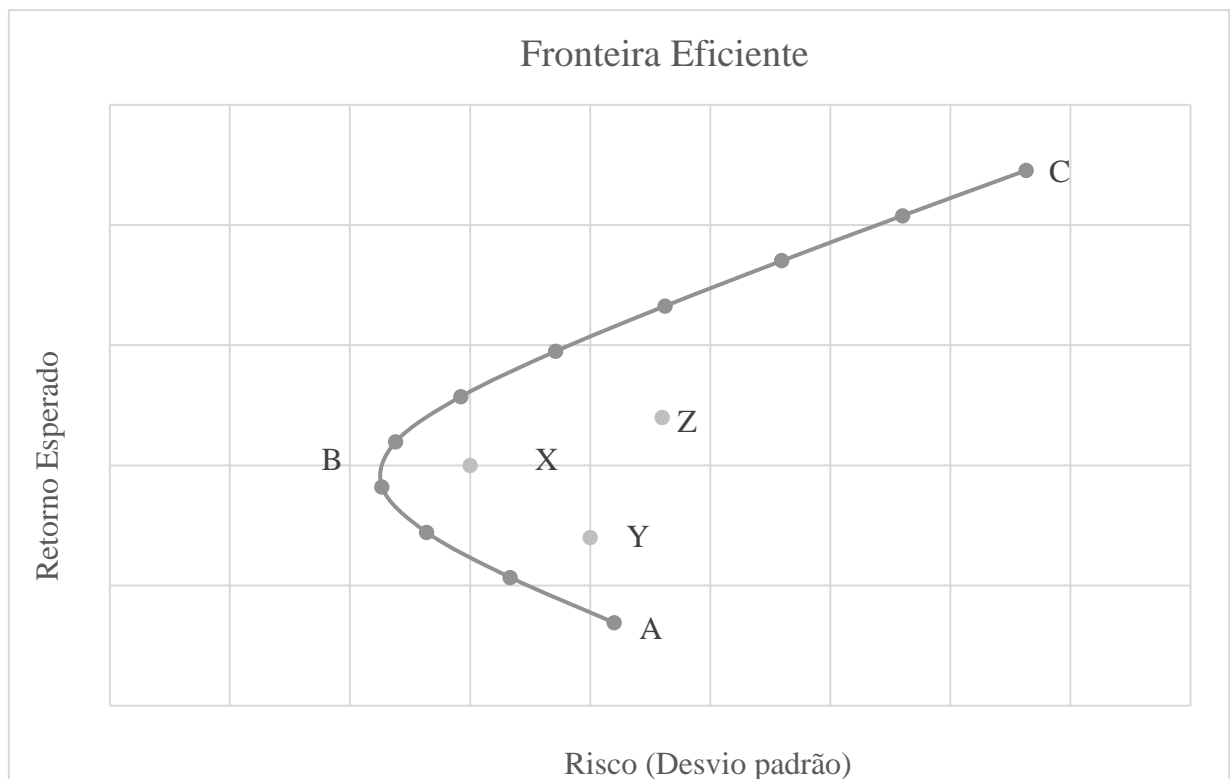
$\epsilon_i$ : Retorno esperado de cada ativo;

$\omega_{ij}$ : Covariância entre o par de ativos se  $i$  e  $j$  diferentes e variância se  $i$  igual a  $j$ .

Aplicando-se esse modelo de otimização para uma variedade de níveis de retorno obtém-se diversas carteiras, cada uma delas com ponderações diferentes para os ativos, o que implica níveis de riscos distintos. Transcrevendo isso para um plano cartesiano, no qual temos abscissas correspondendo ao risco e as ordenadas ao retorno, obtém-se uma curva denominada por Markowitz como fronteira eficiente.

Conforme Markowitz (1952), “o objetivo da análise de portfólios é encontrar as carteiras que melhor se adequam aos objetivos do investidor”. Markowitz afirma que é racional por parte do investidor buscar a maximização do retorno do seu investimento combinado ao menor risco que se possa obter para atingi-lo. De acordo com Assaf Neto (2006), na fronteira eficiente “é possível selecionar uma carteira que apresenta, para um determinado retorno, o menor risco possível”.

Figura 2 – Fronteira Eficiente



Fonte: adaptado de ASSAF NETO, 2006.

A fronteira eficiente está indicada na Figura 2 pela poligonal que liga os pontos B e C. O ponto em que há a menor variância é o ponto B. Os pontos X, Y e Z são representações de carteiras não-eficientes, uma vez que para um mesmo risco é possível encontrar um retorno

maior que está situado no limiar do segmento. Logo, é possível afirmar que as carteiras X, Y e Z representam um risco desnecessário para o retorno que proporcionam.

Um ponto importante a ser ressaltado é a dificuldade existente para a aplicação da teoria proposta por Markowitz, uma vez que sua formulação apresenta um elevado número de operações e certa complexidade dos cálculos necessários ao seu desenvolvimento. Em decorrência disso, William Sharpe, desenvolveu um modelo simplificado, chamado Modelo de Índice Único – MIU (SHARPE, 1963).

Em seu modelo, Sharpe (1963) parte de um índice único chamado de índice beta ( $\beta$ ), que compara a volatilidade do ativo para com o mercado, ao invés da utilização de covariância. A partir disso o número de cálculos a serem efetuados cai sensivelmente. Mesquita Zanini e Figueiredo (2005) em seu trabalho apresentam um comparativo entre ambos os modelos, não verificando superioridade de desempenho de um em relação ao outro. Entretanto, Figueiredo et al. (2000) realizaram um estudo para o mercado brasileiro, limitado ao ano de 1999 e com apenas 10 ativos e os resultados indicaram que o Modelo de Markowitz se mostrou mais eficiente do que o modelo proposto por Sharpe.

Tendo em vista o trabalho de Markowitz (1952), é necessário verificar se um determinado investimento proporciona um retorno adequado ao seu nível de risco. Passa-se a discutir um bom parâmetro para esta avaliação. Para tanto, Elton et al. (2009), Jacob (2000) e Sá (1999) trazem à tona uma medida de desempenho ajustada pelo risco, padrão em análises da relação risco/retorno de carteiras de investimento. É o índice de Sharpe, determinado pela Equação 10.

$$I_{\text{Sharpe}} = \frac{R - R_f}{\sigma} \quad (10)$$

Em que:

R = Rentabilidade;

$\sigma$  = Volatilidade (desvio padrão);

$R_f$  = Rentabilidade livre de risco.

Conforme Romero (2018) o índice de Sharpe é um indicador que mede o retorno excedente de uma aplicação financeira em relação a uma aplicação livre de risco, isso implica que quanto mais alto for o índice de Sharpe, melhor foi a performance desse investimento em relação ao risco que ele oferece.

Destaca-se o fato de que o Índice de Sharpe deve ser normalizado, adotando-se aqui o período de um ano. Para isso, divide-se a rentabilidade esperada e a rentabilidade livre de risco pela quantidade de anos de análise do portfólio. Além disso, calcula-se a rentabilidade real e a rentabilidade nominal para visualização do desempenho do portfólio. Borges (2013) define que a rentabilidade real leva em conta a inflação, descontando-a da rentabilidade nominal.

Destaca-se também o fato de que os portfólios são compostos por diferentes períodos acoplados, logo, faz-se necessário o cálculo da volatilidade. Para isso, é necessário o cálculo da variação média (Equação 11), a partir da qual obtemos a variância amostral (Equação 12) e então o desvio padrão (Equação 13), que corresponde a volatilidade. Conforme Barbeta, Reis e Bornia (2004), a variação média é dada pela média da variação nos períodos, a variância amostral é soma do quadrado da diferença entre o valor de cada período e a variação média, dividido pelo número de amostras menos um e o desvio padrão é a raiz da variância amostral. Logo, temos:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (11)$$

$$\text{Var} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n - 1} \quad (12)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}} \quad (13)$$

Em que:

$\bar{R}$  = Retorno médio amostral;

$R_i$  = Retorno obtido no período (i);

$n$  = Número de períodos no intervalo de estudo;

Var = Variância amostral;

$\sigma$  = Desvio padrão amostral.

Diferentes estudos têm demonstrado que mesmo diversificações ingênuas podem ser bastante eficientes. Evans e Archer (1968) afirmam que um portfólio não deve conter mais do que 10 ativos, uma vez que o acréscimo de um 11º ativo implica em um impacto marginal desprezível na variância.

Em um primeiro momento esse trabalho não adota um número de ativos fixo para a seleção do portfólio. Posteriormente filtraremos os 10 ativos mais rentáveis para a construção de um portfólio.

É importante aqui também definir o método de Monte Carlo, uma vez que esse é utilizado para a plotagem do gráfico da fronteira eficiente. Segundo Hromkovic (2001), o método baseia-se na geração de amostragens aleatórias em larga escala para obtenção de resultados numéricos, ou seja, sucessivas simulações em um elevado número de vezes, para calcular probabilidades heurísticamente. Para a geração do gráfico da fronteira eficiente, varia-se os pesos dos ativos randomicamente, em larga escala, e calcula-se o retorno e o risco de cada um dos portfólios para plotagem.

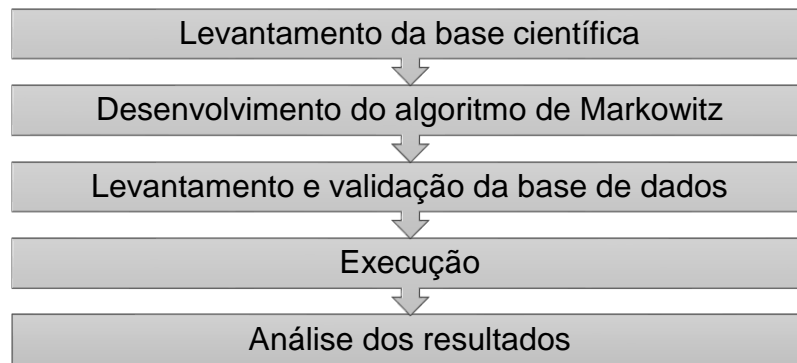
### 3 ESTUDO APLICADO NA B<sup>3</sup>

Segundo Will M. Bertrand e Fransoo (2002), este trabalho pode ser classificado como aplicado, tendo objetivo empírico descritivo. A forma de abordar o problema foi quantitativa, sendo a modelagem matemática o método de trabalho adotado. Este trabalho utilizará a base científica desenvolvida por Markowitz para realizar uma análise comparativa do desempenho de modelo original e o modelo adaptado de Markowitz no mercado de ações da B<sup>3</sup>.

Conforme Mesquita Zanini e Figueiredo. (2005), os trabalhos empíricos nesta área utilizam dados históricos para estimar os retornos e riscos esperados, como forma de evitar a subjetividade e dificuldade de se fazer previsões. Este é também o critério aqui utilizado, o que significa dizer que se adota a premissa de que o passado é relevante na determinação do futuro.

Elencou-se duas amostras para avaliação. Ambas constituídas por ações de empresas de capital aberto na Bolsa de Valores Oficial do Brasil (B<sup>3</sup>), obtidas por meio de consultas ao banco de dados do Yahoo Finance (2018) e o banco de dados oficial da B3 (2018). A base de dados da B3 foi utilizada para verificação da continuidade da negociação dos ativos, enquanto a base do Yahoo Finance foi utilizada para obtenção das cotações ao longo do período de estudo. Os passos da metodologia utilizada no trabalho são apresentados na Figura 3.

Figura 3 – Processos do trabalho



Fonte: Elaborado pelo autor

Uma das amostras é composta por todas as empresas com participação integral na Bolsa do período de 01 de janeiro de 2013 a 06 de dezembro de 2017, sejam do tipo de ativos ON (ordinárias, que têm distribuição de dividendos) ou PN (preferenciais, que têm preferência de voto). Foram 177 ativos analisados que estão disponíveis para consulta no Anexo. A outra amostra é composta pelas dez ações com maior retorno em cada janela temporal. A lista dessas empresas está disponível no Anexo.

Pequenas adaptações foram necessárias para implementação do modelo de Markowitz. A teoria de Markowitz propõe minimizar o risco para um determinado retorno. Com o modelo de Markowitz também é possível maximizar o retorno para um determinado risco. Entretanto, em conformidade com o trabalho de Balazs (2018), não arbitrou-se nenhum valor a essas variáveis e procurou-se otimizar a relação entre ambas. Assim, encontramos a melhor relação risco-retorno para qualquer portfólio. As mesmas diretrizes do modelo de Markowitz foram seguidas. Assim, o modelo considerado neste trabalho possui a formulação da Equação (14).

$$\text{Max } f = \frac{E}{V} \quad (14)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n p(X_i) = 1 \quad (15)$$

$$p(X_i) \geq 0 \quad (16)$$

Em que:

$$E = \sum_{i=1}^n p(X_i) \epsilon_i \quad (17)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(X_i) p(X_j) \omega_{ij} \quad (18)$$

E: Retorno esperado da carteira;

V: Variância da carteira;



- $p(X_i)$ : Participação de cada ativo;  
 $\epsilon_i$ : Retorno esperado de cada ativo;  
 $\omega_{ij}$ : Covariância entre o par de ativos se  $i$  e  $j$  diferentes e variância se  $i$  igual a  $j$ .

A biblioteca Scipy (2018) do Python foi utilizada para adição de recursos de otimização. O método `Minimize(method='slsqp')` (2018) foi o método escolhido para otimização da função-objetivo, uma vez que é voltado a programação quadrática. Para a adição da distribuição de dividendos e diminuição do erro foi incrementado ao algoritmo a especificação 'Adj-Close', que ajusta o valor de fechamento do ativo de acordo com esses quesitos. Aplicou-se uma base de dados de 3, 6, 10, 12, 15, 20 ou 30 meses. O processo de aplicação segue a sequência abaixo:

1. O ponto inicial é 01/01/2013;
2. Extraí-se a base de dados do período determinado (3, 6, 10, 12, 15, 20 ou 30 meses) até o ponto de partida;
3. Obtém-se o portfólio ótimo;
4. Verifica-se o desempenho para o intervalo (3, 6, 10, 12, 15, 20 ou 30 meses) a partir do ponto de partida;
5. Obtém-se um novo ponto de partida. Repete-se o processo até atingir a data de 06/12/2017.

É importante destacar que o período de avaliação do desempenho apresentado na Diretriz 4 é sempre equivalente ao período de obtenção da base de dados. Esse período é chamado de janela temporal. Após obter os dados, obtém-se o portfólio ótimo e verificam-se os resultados obtidos. Esse processo é repetido até alcançar-se a data final, aqui definida como 06/12/2017.

A janela temporal foi definida com números múltiplos de 30, os quais correspondem a um mês contábil. Uma pequena adaptação foi considerada no algoritmo, tendo em vista que a base de cálculo são os retornos diários. Um ano corresponde a 365 dias, entretanto temos cerca de 252 dias de negociações no mercado por ano. Isso corresponde a 69% dos dias abertos para negociação. Esse fator foi definido para os cálculos, adaptando a janela temporal a fim de amenizar erros.

O algoritmo considerado segue estrutura similar à apresentada na Quadro 1, na qual temos a indicação das funções no escopo principal para aplicação do modelo. No Quadro 1 também é possível identificar o funcionamento da janela temporal. Ignorou-se os parâmetros passados em cada função. É importante ressaltar que as funções exemplificadas não contêm exatamente o mesmo nome no algoritmo. A variável exibe o resultado refere-se à aplicação de juros compostos à variável armazena desempenho. Os algoritmos utilizados têm pequenas variações entre si e estão disponíveis para consulta no Anexo. Na sequência apresenta-se uma breve explicação de cada função considerada.

Quadro 1 – Pseudocódigo

```

Principal ():
  define data de inicio, data de fim, janela temporal
  enquanto (inicio < fim):{
    obtenção dos dados ()
    exibição dos dados ()
    cálculo do retorno diário ()
    exibição dos retornos diários ()
    cálculo e exibição das estatísticas ()
    iniciação dos pesos ()
    cálculo do retorno do portfólio ()
    cálculo da variância do portfólio ()
    geração de portfólios ()
    exibição dos portfólios ()
    estatísticas dos portfólios ()
    otimização ()
    exibição dos resultados ()
    exibição do portfólio ótimo em gráfico ()
    cálculo e exibição do desempenho do portfólio ()
    armazena desempenho
    inicio + janela temporal }
  exibe o resultado

```

Fonte: Elaborado pelo autor

- Obtenção dos dados: realiza-se a importação da base de dados do tamanho da janela temporal;
- Exibição dos dados: exibe-se o desempenho dos ativos em gráfico de valor absoluto ao longo do tempo;
- Cálculo do retorno diário: calcula-se a porcentagem de retorno diário e ajusta na base log normal, para melhor tratamento dos dados;
- Exibição do retorno diário: exibe-se a distribuição dos retornos diários;
- Cálculo e exibição das estatísticas: calcula-se e exibe-se o retorno médio de cada ativo e a covariância e/ou variância de cada um com/entre eles;
- Iniciação dos pesos: inicia-se pesos aleatórios para cada ativo;
- Cálculo do retorno do portfólio: calcula-se o retorno do portfólio com pesos aleatórios;
- Cálculo da variância do portfólio: calcula-se a variância do portfólio com pesos aleatórios;
- Geração de portfólios: gera-se 10000 portfólios aleatórios com método de Monte Carlo;
- Exibição dos portfólios: exibe-se esses portfólios em um gráfico de risco por retorno, gerando o escopo de uma fronteira eficiente;
- Estatísticas dos portfólios: exibe-se as estatísticas calculadas do portfólio calculadas anteriormente;
- Otimização: define-se a função objetivo o método e as restrições. Como a biblioteca utilizada só é capaz de minimizar, usou-se a função negativa;
- Exibição dos resultados: exibe o retorno esperado, variância esperada e índice de Sharpe esperado;

- Exibição do portfólio ótimo em gráfico: define no gráfico gerado por simulação de Monte-Carlo o ponto ótimo;
- Cálculo e exibição do desempenho do portfólio: fornece-se o retorno, variância e índice de Sharpe obtidos pelo portfólio otimizado.

Para análise dos resultados obtidos realizou-se benchmarking com o desempenho da B<sup>3</sup> e com o CDI (Certificado de Depósito Interbancário). CDI são títulos emitidos por instituições financeiras com prazo de vencimento de um dia para arrecadar fundos e fechar o balanço diário positivo. É uma prática comum no mercado a comparação da performance de investimentos com o CDI (CUSTODIO, 2018).

Para o cálculo de índice de Sharpe arbitrou-se a taxa de retorno livre de risco em 5% ao ano, a fim de aproximar o valor ao rendimento da poupança. Conforme Rico (2018), o rendimento previsto para 2018 é de 4,55% no ano.

### 3.1 APLICAÇÃO – CENÁRIO 5 ATIVOS

Quando se considera uma grande quantidade de ativos torna-se inviável a visualização da funcionalidade do algoritmo, isso porque a execução do método de Monte Carlo, utilizado para a plotagem da fronteira eficiente, demanda um recurso computacional muito grande e a otimização dos portfólios se torna muito complexa, sendo os processos repetidos a cada janela temporal.

Assim, para simplificar a apresentação da visualização, aplicou-se o algoritmo considerando-se cinco ações de forma aleatória entre as 20 mais valiosas da B<sup>3</sup> no ano de 2015, conforme Azevedo (2016). O algoritmo foi executado para a janela temporal de 1800 dias - por compreender todo período de estudo - a fim de evitar a execução duplicada de gráficos e tabelas. As ações submetidas ao algoritmo são: PETR4.SA, ITUB4.SA, BBDC4.SA, BBAS3.SA, ABEV3.SA. A data inicial da avaliação definida é 01/01/2013 e a final 06/12/2017.

Inicialmente realizou-se a aquisição da base de dados, que compreende o período de 01/01/2008 a até a data de início. Todos os retornos de dados Nan/Missing (que significam dados perdidos) foram ignorados. Os dados perdidos ocorrem por instabilidade do servidor, da conexão ou simplesmente por inconsistência da plataforma. Para efeito de mitigação de erros incorridos pelos dados perdidos, o cálculo da volatilidade foi adequado a amostra. É passível de estudo uma análise exclusiva sobre a qualidade dos dados. Com os dados obtidos foi possível obter a cotação absoluta dos ativos ao longo da janela de tempo, como ilustrado na Figura 6.

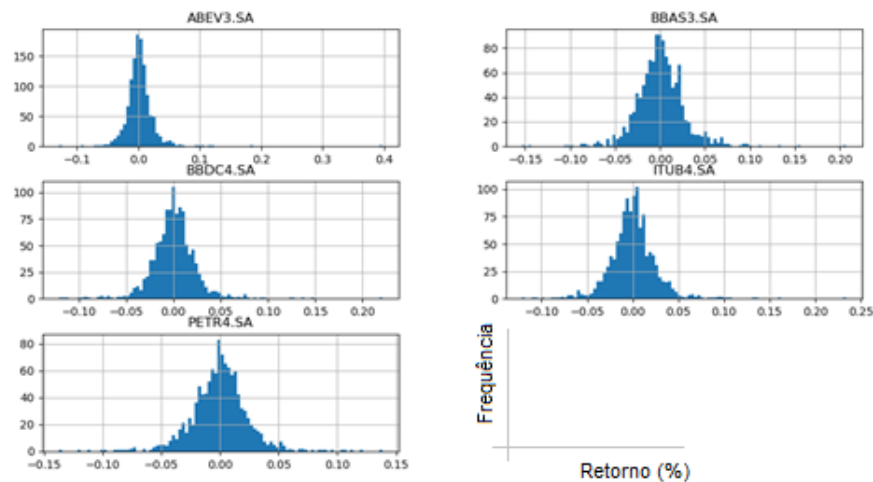
Figura 6 – Cotação para os 5 ativos no período



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível visualizar grande oscilação no preço do ativo PETR3.SA e um crescimento contínuo do preço do ativo ABEV3.SA. Além disso, são visíveis os impactos da crise de 2008 na cotação de 4 dos 5 ativos (a excetuar 'ABEV3.SA'), os quais decaem para posteriormente seguir com leve alta. Na sequência desse processo, obteve-se os retornos diários para cada ativo, como ilustrado na Figura 7. É possível visualizar qualitativamente que os retornos se comportam de maneira similar a distribuição normal.

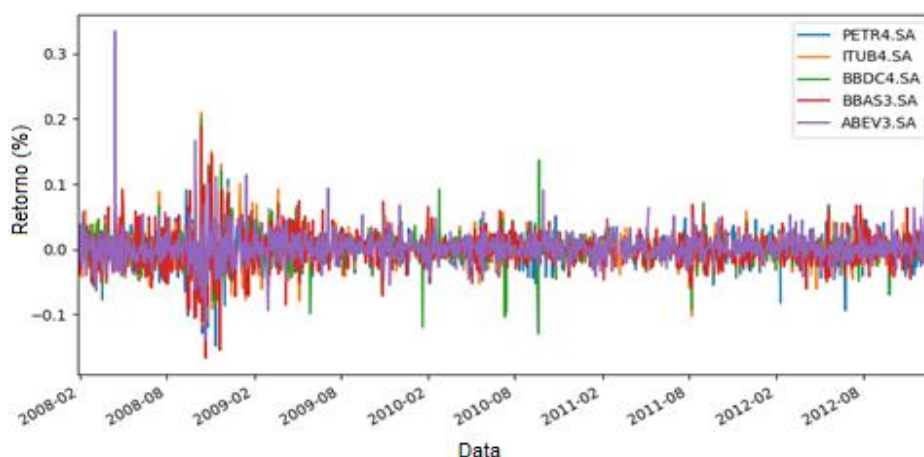
Figura 7 – Retornos diários



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se que os retornos diários se aproximam da média zero, apresentando resultado levemente superior ou inferior a este (a depender do ativo). Considerando-se os retornos diários de cada ativo foi possível representar a dispersão dos retornos, apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Dispersão dos retornos dos ativos



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se novamente os impactos da crise de 2008 na dispersão dos retornos, gerando grande oscilação no final do mesmo ano e início de 2009. Com a base de dados, obteve-se o retorno de cada ativo no período da janela temporal, os quais podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1 – Retorno de cada ativo

Ativos	Retorno (1 = 100%)
PETR4.SA	-0.699418
ITUB4.SA	0.041376
BBDC4.SA	0.283404
BBAS3.SA	-0.013280
ABEV3.SA	2.902188

Fonte: Elaborado pelo autor

O maior retorno obtido de acordo com a base de dados foi do ativo ABEV3.SA e o pior desempenho foi do ativo PETR4.SA. Os ativos BBAS3.SA e ITUB4.SA manterem-se praticamente no mesmo patamar e o ativo BBDC4.SA teve leve alta no período da base de dados. Além dos retornos, calculou-se também a variância e covariância dos ativos, os quais estão dispostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Covariância e variância de ativos

	PETR4.SA	ITUB4.SA	BBDC4.SA	BBAS3.SA	ABEV3.SA
PETR4.SA	0.782405	0.501913	0.462315	0.480542	0.218204
ITUB4.SA	0.501913	0.863233	0.681990	0.655491	0.268872
BBDC4.SA	0.462315	0.681990	0.775033	0.591897	0.243990
BBAS3.SA	0.480542	0.655491	0.591897	0.923996	0.261615
ABEV3.SA	0.218204	0.268872	0.243990	0.261615	0.785235

Fonte: Elaborado pelo autor

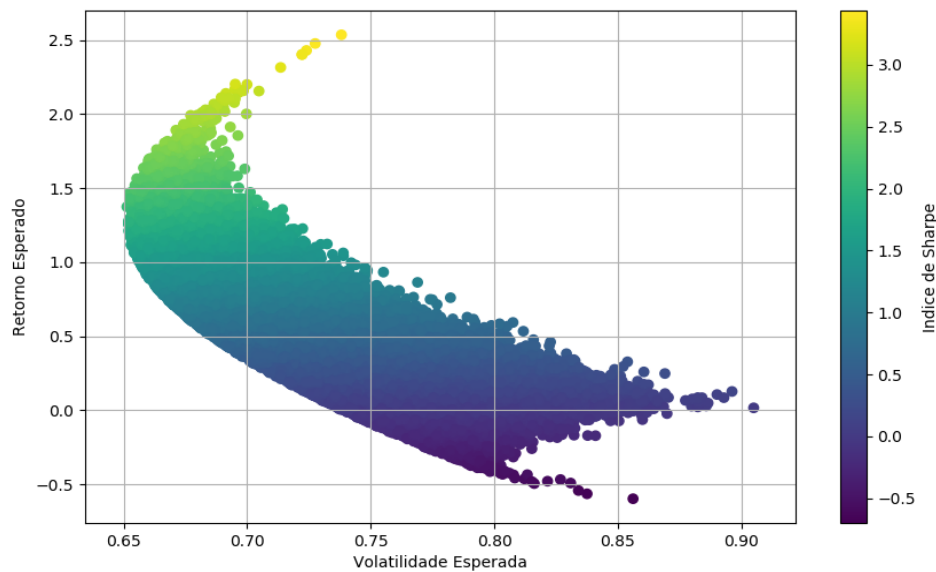
De acordo com a Tabela 2, a maior variância é do ativo BBAS3.SA e a maior covariância é dos ativos BBDC4.SA e ITUB4.SA, o que é justificado pelo fato de que ambos são do segmento de finanças, correspondendo as ações do Bradesco e do Itaú respectivamente.

Após isso, iniciou-se os pesos randômicos, o que gerou um portfólio. Os pesos são iniciados por conta de uma exigência da função de otimização. Esse portfólio randômico apresenta as seguintes características:

- Retorno esperado do portfólio: 0.3148534390126753;
- Variância esperada do portfólio: 0.7346429725189161.

Esses dados são insignificantes para o resultado e análise final, mas são necessários porque a biblioteca utilizada para otimização necessita que existam pesos já inicializados. Feito isso, geraram-se milhares de portfólios através do método de Monte Carlo. É possível visualizá-los na Figura 9.

Figura 9 – Portfólios gerados através do método de Monte Carlo



Fonte: Elaborado pelo autor

Nosso objetivo com a geração de portfólios através do método de Monte Carlo era identificar a fronteira eficiente, objetivo esse cumprido, uma vez que é possível visualizar com clareza a fronteira eficiente na Figura 9. Em seguida, calcula-se o portfólio ótimo. Ele é exibido na Figura 10.

O portfólio ótimo, identificado como uma estrela na Figura 10, foi gerado através da função-objetivo identificada como Equação 14 que está submetida as restrições identificadas como Equação 15, Equação 16, Equação 17 e Equação 18.

Os resultados teóricos obtidos para esse portfólio são:

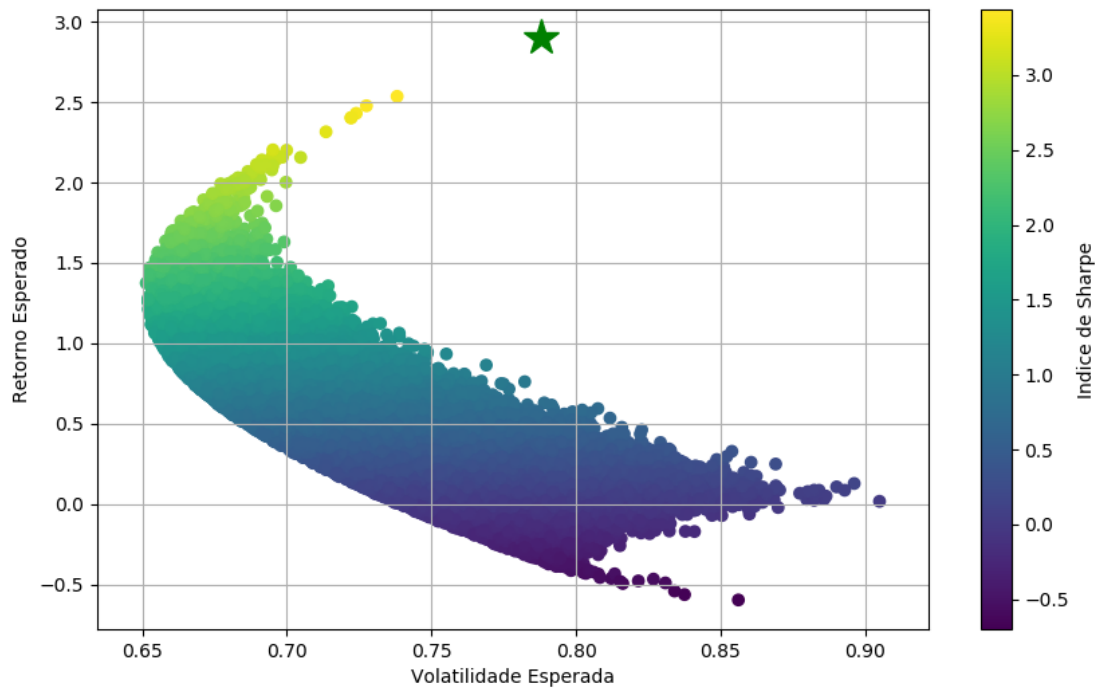
- Pesos ótimos: [0, 0, 0, 0, 1];
- Retorno esperado e volatilidade: [2.902188, 0.785235].

É importante enfatizar que os resultados apresentados acima são teóricos e precisamos verificar o desempenho do portfólio. Percebe-se que apenas um ativo foi selecionado em nosso portfólio, que corresponde a ação ABEV3.SA (verificável na Tabela 1), indo de desacordo com a diversificação proposta por Markowitz. Isso é justificável pelo fato de que procuramos otimizar a relação risco-retorno e não minimizar a variância especificamente. É possível verificar um crescimento contínuo do valor deste ativo na Figura 6 e uma variância de valor médio entre os ativos abordados, que é apresentada na Tabela 2. Entre os 5 ativos abordados, ele também é o único que apresenta uma rentabilidade histórica significativa, verificável na Tabela 1. Por fim, é verificado o desempenho do portfólio para a janela temporal subsequente. Obtém-se o seguinte:

- Retorno e volatilidade: [0.414309, 0.971654].

A alta volatilidade verificada é consequência da seleção de apenas um ativo. Um cenário com mais ativos com rentabilidade positiva e baixa covariância entre si implica em uma melhor distribuição dos pesos.

Figura 10 – Portfólio ótimo



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse processo foi realizado considerando-se todos os ativos, entretanto a exposição de todos os gráficos se torna inviável, uma vez que temos uma grande quantidade de ativos e diferentes portfólios para cada janela temporal.

### 3.2 Aplicação – Cenários maiores

O algoritmo aplicado calculou o retorno para diferentes janelas temporais. As janelas temporais foram aplicadas no intervalo de 01 de janeiro de 2013 a 06 de dezembro de 2017. Foram simulados e avaliados dois cenários:

- Cenário I: 177 empresas que compõem ininterruptamente a B<sup>3</sup> no período de estudo sem restrição do número de ativos que compõem o portfólio;
- Cenário II: 10 ações mais rentáveis para cada janela temporal das 177 empresas que compõem ininterruptamente a B<sup>3</sup> no período de estudo.

O rendimento do CDI (Certificado de Depósito Interbancário) correspondente ao mesmo período é de 69,17% conforme (CUSTODIO, 2018) e adotou-se a taxa livre de risco igual a 5% ao ano, com rendimento equivalente a 27,63% no período. Os resultados foram compilados na Tabela 3 e na Tabela 4.

Tabela 3 – Cenário I

Meses	Dias	Retorno Obtido	Volatilidade	Índice de Sharpe	Retorno Mensal
3	90	-62,65%	0,16	-1,14	-1,63%
6	180	22,97%	0,21	-0,04	0,35%
10	300	<b>79,34%</b>	0,19	0,55	0,98%
12	360	<b>125,16%</b>	0,24	0,83	1,36%
15	450	<b>87,89%</b>	0,31	0,38	1,06%
20	600	54,62%	0,31	0,17	0,73%

Meses	Dias	Retorno Obtido	Volatilidade	Índice de Sharpe	Retorno Mensal
30	900	39,01%	0,45	0,05	0,55%

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 3 estão destacados em negrito os rendimentos que superaram o CDI. Eles correspondem as janelas temporais de 10, 12 e 15 meses, sendo o melhor resultado global obtido com a janela temporal de 12 meses. Apenas as janelas temporais de 12 e 15 meses apresentam rendimentos superiores a 1% ao mês e nenhuma janela temporal apresenta um índice de Sharpe superior a 1,0. Percebe-se também que a um padrão de crescimento da rentabilidade, que parte dos extremos (3 e 30 meses) até o centro (12 meses).

Tabela 4 – Cenário II

Meses	Dias	Retorno Obtido	Volatilidade	Índice de Sharpe	Retorno Mensal
3	90	-62,55%	0,28	-0,64	-1,62%
6	180	<b>79,69%</b>	0,35	0,29	0,98%
10	300	60,45%	0,49	0,13	0,79%
12	360	<b>223,77%</b>	0,35	1,12	1,98%
15	450	<b>183,36%</b>	0,31	1,01	1,75%
20	600	<b>76,70%</b>	0,32	0,31	0,95%
30	900	20,21%	0,50	-0,03	0,31%

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 4 é possível verificar um incremento significativo da rentabilidade, bem como da volatilidade. A volatilidade sofre um incremento devido a covariância entre os ativos, uma vez que restringe-se o portfólio aos 10 ativos mais rentáveis. Novamente destacam-se em negrito os rendimentos superiores ao CDI. Novamente apenas as janelas temporais de 12 e 15 meses apresentam rendimentos superiores a 1% e somente a primeira apresenta índice de Sharpe superior a 1,0. Não é possível verificar o mesmo incremento de rentabilidade que parte dos extremos ao centro para o Cenário II, uma vez que a janela temporal de 10 meses destoa do padrão

#### 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com a análise dos dados obtidos é possível afirmar que a melhor janela temporal para otimização dos portfólios em todos os casos é equivalente ao período de um ano, performando acima de todos índices comparativos. A janela temporal de 15 meses também apresenta resultados satisfatórios, apesar do índice de Sharpe não ser superior a 1,0.

É provável que janelas temporais curtas estejam a mercê das especulações do mercados e janelas de tempo longas não refletem o fluxo da economia, tornando o portfólio imutável a questões pontuais no cenário econômico.

A inflação acumulada para o período de estudo, segundo dados do IBGE (2018), é de 35,74%. Isso reflete em um ganho real para o portfólio com janela temporal de 12 meses, sem e com filtro, de 89,42% e 188,03%, respectivamente. O CDI tem um ganho real de 33,43% e a B<sup>3</sup> um retorno real de -19,85%. O rendimento real em relação ao CDI para os melhores resultados, sem e com filtro, é de 267,48% do CDI e 562,45% do CDI.

A restrição da otimização às dez ações mais rentáveis implicou num aumento médio da volatilidade de 39%, isso porque aumenta-se a covariância entre os ativos. Por outro lado, a média da rentabilidade subiu cerca de 68%, o que significa que justifica a aplicação do filtro às



dez ações mais rentáveis para melhor performance do modelo de Markowitz. Além disso, conforme Carvalho (2011), é difícil encontrar no longo prazo um índice de Sharpe superior a 1.00, entretanto, é possível identificar que o portfólio com filtro para a janela temporal de 12 meses performou acima dessa métrica.

Na Tabela 5 pode-se identificar o desempenho dos portfólios em seus melhores cenários frente a diferentes ativos, no mesmo intervalo de tempo (01/01/2013 a 06/12/2018).

Tabela 5 – Desempenho de diferentes ativos/portfólios

Ativo	Sigla	Retorno	Volatilidade	Índice de Sharpe
Portfólio S/ Filtro	-	125,16%	23,62%	0,83
Portfólio C/ Filtro	-	223,77%	35,01%	1,12
Access Europe Fundo de Inv. em Ações B <sup>3</sup>	-	43,89%	17,25%	0,19
	BVSP	15,89%	61,95%	-0,04
Dow Jones Industrial Average	DJI	79,99%	30,86%	0,34
S&P 500	GSPC	80,32%	31,87%	0,33
NASDAQ Composite	IXIC	118,90%	37,48%	0,49
Petróleo Brasileiro S.A. - Petrobras	PETR4.SA	-15,80%	137,68%	-0,06
Ambev S.A.	ABEV3.SA	50,55%	58,49%	0,08
Magazine Luiza S.A.	MGLU3.SA	452,14%	174,19%	0,49
Bitcoin USD	BTC-USD	103280,23%	287,19%	71,91

Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados da Tabela 5 permitem verificar que o a volatilidade do portfólio com filtro é similar à de mercados consolidados. Identifica-se também uma grande volatilidade de alguns ativos em desempenho individual, tais como Ambev, Bitcoin, Petrobras e Magazine Luiza. Com a alta volatilidade, o bitcoin apresenta uma performance expressiva.

O Access Europe Fundo de Investimento em Ações é um fundo que teve origem no dia 01/01/2013 e, a título de comparação, apresenta rendimento nominal muito inferior aos portfólios propostos, apesar de apresentar uma volatilidade mais baixa (EQI, 2018). Verifica-se que o portfólio sem filtro apresenta a menor volatilidade, a excetuar o fundo acima citado.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora de significativa contribuição para o desenvolvimento dos estudos em finanças, o modelo proposto por Markowitz traz algumas limitações. A dependência da base histórica elimina a subjetividade do trabalho, entretanto torna o modelo subjetivo a especulações do mercado a curto prazo e inerte a mudanças de cenários político-econômicos em perspectiva macro e micro a longo prazo.

Além disso, não foi considerado nesse trabalho as taxas de corretagem e impostos, que podem implicar numa grande diferença dos resultados finais, principalmente quando abordamos janelas temporais de curto intervalo.

Verificou-se que a biblioteca utilizada (SCIPY, 2018) com método de minimização (MINIMIZE(METHOD='SLSQP'), 2018) para otimização do portfólio não apresenta resultados consistentes, dependendo da correta iniciação dos pesos para obtenção do resultado ótimo, dificultando a repetibilidade. Sugere-se em próximo estudo a utilização da biblioteca CVXOPT (2018).

Outro problema enfrentado diz respeito a base de dados. Janelas temporais menores estavam sujeitas a maior influência de dados perdidos. Também fez-se necessária a aquisição da base de dados diversas vezes, baixando-a da internet. Sugere-se que a base de dados seja arquivada em arquivo .XML para consulta local, sem necessidade de aquisição na internet repetidas vezes.

Todavia, apesar do modelo apresentar limitações, não podemos inferir que ele é falho, obtendo-se resultados muito satisfatórios em janelas temporais de 12 e 15 meses para ambos os cenários elencados. Adaptações realizadas na utilização do modelo, que dizem respeito a utilização do filtro na seleção dos ativos, implicaram em melhoria de desempenho.

Aplicações pessoais irão depender sempre do perfil do investidor e de seus objetivos. Recomenda-se sempre a análise do índice de Sharpe. Um maior resultado representa um melhor cenário, entretanto é preciso atentar a diversificação e ao risco máximo a qual o investidor está disposto a submeter-se.

Para estudos futuros, sugere-se considerar e minimização das transações, incrementar filtros fundamentalistas para a seleção de ações, ampliar o estudo para renda fixa e/ou englobar todos os ativos de renda variável. Sugere-se também a ampliação do estudo no sentido de utilização de diferentes tamanhos de janela móveis, seja da base de dados ou na aplicação (uma base de dados de 5 anos para a alocação de ativos para 2 anos, por exemplo). Unir diferentes técnicas como Markowitz e a utilização de Google Trends para premeditar movimentações de ativos também pode ser viável.

## REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, Alexandre. Mercado Financeiro. São Paulo: Atlas, 2006.

AZEVEDO, Rita. **As empresas mais valiosas da Bolsa**: Levantamento mostra as 20 companhias com maior valor de mercado; veja ranking completo. 2016. Disponível em: <<https://exame.abril.com.br/mercados/as-empresas-mais-valiosas-da-bolsa/>>. Acesso em: 07 out. 2018.

B3. **Brasil, Bolsa, Balcão**. Disponível em: <<http://www.b3.com.br/>>. Acesso em: 21 ago. 2018.

BALAZS, Holczer. **Quantitative Finance & Algorithmic Trading in Python**. 2018. Disponível em: <<https://www.udemy.com/quantitative-finance-algorithmic-trading-in-python/learn/v4/overview>>. Acesso em: 18 out. 2018.

BARBETTA, Pedro Alberto; REIS, Marcelo Menezes; BORNIA, Antonio Cezar. **Estatística: para cursos de engenharia e informática**. São Paulo: Atlas, 2004.

BELENTEPE, Cengiz Y. A statistical view of universal portfolios. 2005.

BORGES, Josias. **Rentabilidade nominal e rentabilidade real**. 2013. Disponível em: <<http://www.jornalfolhadousul.com.br/noticia/2013/04/10/rentabilidade-nominal-e-rentabilidade-real->>. Acesso em: 17 out. 2018.

BRUNI, Adriano Leal; FAMÁ, Rubens. Moderna teoria de portfólios: É possível captar, na prática, os benefícios decorrentes de sua utilização. **Resenha da BM&F**, n. 128, p. 19-34, 1998.

CARVALHO, Henrique. **O que é Índice de Sharpe?** 2011. Disponível em: <<https://hcinvestimentos.com/2011/12/12/indice-de-sharpe/>>. Acesso em: 21 out. 2018.

CASAROTTO FILHO, Nelson; KOPITTKE, Bruno Hartmut. **Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** Atlas, 2011.

CUSTODIO, Juliano. **CDI: O que é o CDI? CDI hoje? A taxa de referência para investimentos no Brasil.** EuQueroInvestir. Disponível em: <<https://www.euqueroinvestir.com/cdi-certificado-de-deposito-interbancario/>>. Acesso em: 29 out. 2018.

CVXOPT. 2018. Disponível em: <<http://cvxopt.org/index.html>>. Acesso em: 27 out. 2018.

SÁ, Geraldo Tosta. **Administração de investimentos: teoria de carteiras e gerenciamento do risco.** Qualitymark, 1999.

ELTON, Edwin J. et al. **Modern portfolio theory and investment analysis.** John Wiley & Sons, 2009.

EQI. **Lâmina de Fundos.** Disponível em: <<https://bit.ly/2TgVIL4>>. Acesso em: 18 out. 2018.

EVANS, John L.; ARCHER, Stephen H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. **The Journal of Finance**, v. 23, n. 5, p. 761-767, 1968.

FABOZZI, Frank J. et al. **Robust portfolio optimization and management.** John Wiley & Sons, 2007.

FIGUEIREDO, Antônio Carlos et al. A utilização da teoria de carteiras de Markowitz e do modelo de índice único de Sharpe no mercado de ações brasileiro em 1999. **São Paulo: Resenha BM&F**, n. 141, 2000.

FISHER, Lawrence; LORIE, James H. Some studies of variability of returns on investments in common stocks. **The Journal of Business**, v. 43, n. 2, p. 99-134, 1970.

HROMKOVIC, J. **Algorithms for hard problems: introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics.** [S.l.]: Springer-Verlag, London - Berlin - Heidelberg - New York, 2001.

IBGE. **Variação acumulada no ano durante o Plano Real (%), dezembro 1995 - dezembro 2017.** 2018. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplio.html?=&t=series-historicas>>. Acesso em: 11 out. 2018.

IQUIAPAZA, Robert Aldo; AMARAL, Hudson Fernandes; BRESSAN, Aureliano Angel. Evolução da pesquisa em finanças: epistemologia, paradigma e críticas. **Organizações & Sociedade**, v. 16, n. 49, 2009.

JACOB, Nancy L. Avaliando o desempenho do investimento. **Administração de investimentos. Porto Alegre: Bookman**, p. 307-348, 2000.

JUNIOR, Paulo Rotela; PAMPLONA, Edson; SALOMON, Fernando Luiz Riêra. Otimização de portfólios: análise de eficiência. **RAE-Revista de Administração de Empresas**, v. 54, n. 4, p. 405-413, 2014.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection, Cowles Foundation Monograph No. 16. **John Wiley, New York. S. Moss (1981). An Economic theory of Business Strategy, Halstead Press, New York. TH Naylor (1966). The theory of the firm: a comparison of marginal analysis and linear programming. Southern Economic Journal (January)**, v. 32, p. 263-74, 1959.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MENESES, Helder Caldeira. **Princípios de gestão financeira**. 1996.

MESQUITA ZANINI, Francisco Antônio; FIGUEIREDO, Antonio Carlos. As Teorias de Carteira de Markowitz e de Sharpe: Uma Aplicação no Mercado Brasileiro de Ações entre Julho/95 E Junho/2000. **RAM. Revista de Administração Mackenzie**, v. 6, n. 2, 2005.

MINIMIZE(METHOD='SLSQP'). 2018. Disponível em: <<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-slsqp.html#optimize-minimize-slsqp>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

ORGANIZAÇÃO INTERNACIONAL DE NORMALIZAÇÃO. 31000: **Informações básicas, princípios e diretrizes para a implementação da gestão de riscos..** Vernier, Geneva, Switzerland: ISO, 2009.

PEREIRA, Leonardo Boechat Tavares; HENRIQUE, Daniel Christian. Otimização de investimentos pelo modelo de Markowitz via desenvolvimento de uma ferramenta em Excel. **Iberoamerican Journal of Industrial Engineering**, v. 8, n. 16, p. 167-195, 2016.

RICO. **Qual o Rendimento da Poupança Hoje: Como Calcular e Simulador**. 2018. Disponível em: <<https://blog.rico.com.vc/rendimento-da-poupanca>>. Acesso em: 15 out. 2018.

ROMERO, Marcelo. Índice de Sharpe: comparando as Carteiras Magnetis aos fundos multimercado. 2018. Disponível em: <<https://blog.magnetis.com.br/indice-de-sharpe/>>. Acesso em: 23 out. 2018.

SCIPY. 2018. Disponível em: <<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>>. Acesso em: 28 ago. 2018.

SHARPE, William F. A simplified model for portfolio analysis. **Management science**, v. 9, n. 2, p. 277-293, 1963.

WILL M. BERTRAND, J.; FRANSOO, Jan C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 22, n. 2, p. 241-264, 2002.

YAHOO FINANCE. <https://finance.yahoo.com>. 2018. Disponível em: <<https://finance.yahoo.com>>. Acesso em: 21 ago. 2018.

## ANEXOS

Os anexos estão dispostos para download na plataforma 4Shared e o link está disposto no QR Code abaixo. Está disponível a lista das 177 ações, todos os códigos, retornos dos arquivos e planilha com os cálculos para auditoria.

