EL CUBO-GUIA

Tenemos delante un material que representa la guía del cálculo y está constituído por dos cubos distintos el uno al otro en dimensiones y color, por ejemplo, blanco y gris. Sobre sus pinturas se puede escribir y después borrar. Escribamos sobre la cara de uno de los cubos, d^3 y debajo el número 1000. Sobre una cara de los prismas blancos cuya cara cuadrada corresponde al cubo blanco d^2u y debajo 100. En los otros prismas, que tienen la sección cuadrada igual a las caras del cubo gris, (y que son también grises) escribiremos n^2d y debajo 10. Finalmente sobre el cubo gris u^3 y debajo el número 1.

El material así preparado nos dá la razón de cada fase del desarrollo del cálculo. Es aquel, puede decirse, la representación cúbica analizada y precisada según las jerarquías decimales del número del cual quiere extraerse la raíz. Y al propio tiempo representa la fórmula algebraica en su totalidad, también dispuesta ésta bajo la apariencia de un verdadero cubo, que se puede descomponer y reconstituir para analizar su disposición, y cuyas partes pueden también ser colocadas en fila, una junto a otra, en el mismo orden de la fórmula algebraica.

El *cubo-guia* se le puede comparar al cuadrado-guía que sirvió para la averiguación de la raíz cuadrada. Aquel dibujo geométrico que representaba en las subdivisiones del cuadrado, el análisis del número en sus valores jerárquicos, (con la reducción de todos a la unidad) servía después de guía a un trabajo con las perlas, para su colocación sobre la mesa de operaciones. También para este ejercicio más elevado se ha preparado otro material que permita la averiguación de la raíz cúbica, no por medio del cálculo, sino por una construcción efectuada con objetos. Esta tiene como elemento en vez de la perla el pequeño cubo unidad. Un cubo de madera de un centímetro de arista (fig. 241). Pero siendo imposible construir cada vez cubos y prismas con cubitos sueltos, se han preparado los cubos de los números 2 al 25 (que tienen las mismas dimensiones de los cubos primitivos de la Torre Roja) que tienen dibujados con líneas, sobre todas sus caras, pequeños cuadrados de un centímetro de lado, de modo que cada cubo tenga la apariencia de una acumulación de cubos unitarios. Además, los cubos de los distintos números están pintados de diferentes colores, como los bastoncillos de perlas, que indican las cifras 1, 2, 3 .... 9. Además de estos nueve cubos descritos se ha preparado también un material de chapas que, teniendo el espesor de un centímetro, esto es, del cubo unidad, representan según el número de cubitos con que parecen construídos, los cuadrados de 2, 3, 4, 5 .... 9, los cuales están pintados del mismo color que el cubo a que pertenecen. Las distintas chapas pueden superponerse y constituir

prismas de varias alturas y estando agujereadas por el centro se pueden mantener unidas gracias a varillas metálicas que forman parte del material. También los cubos tienen un orificio central en las tres caras adyacentes que sirve para fijar las prismas.

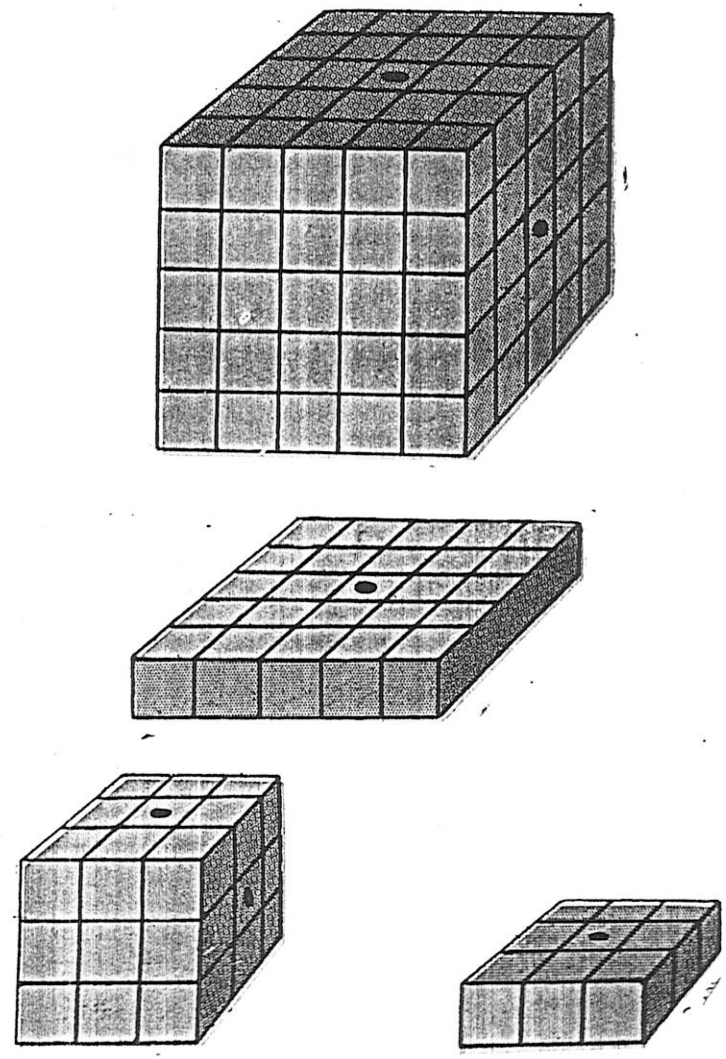
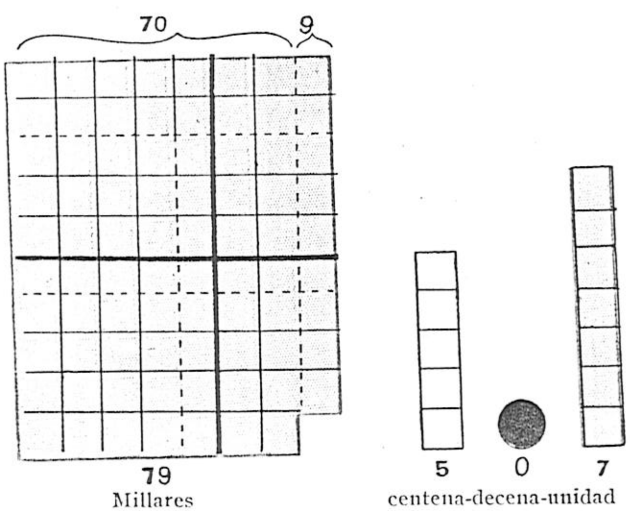


Fig. 241

No hay que confundir el cubo guía, que traduce geométricamente una fórmula algebraica, esto es, un hecho general y constante, con el *material de la raíz cúbica* que sirve para proceder a un cálculo aritmético determinado y efectivo, por medio de objetos que representan cuantitativamente símbolos numéricos. El material de cubos y chapas se refiere a las cantidades sobre las cuales se opera : hacen el oficio de un verdadero material de construcción.

Lo interesante ahora es, saber cómo se representa el número. Sea, por ejemplo, el número 79507, del cual se desea hallar la raíz cúbica. Con aquella cantidad se debe *construir un cubo* separándose sucesivamente cuanto se necesita para formar las partes componentes que después van unidas. En vez de representar los distintos valores del número por medio de símbolos, como se hizo en el caso de las perlas, tenemos aquí «bonos de cartón» que permiten retirar del almacén donde está acumulado el material, las cantidades indicadas del número. Estos bonos son cartones cuadrados de 600 unidades cada uno, divididos en seis cuadros de 100 y éstos subdivididos a su vez en cuatro partes, para facilitar la evaluación.

Los cartones son de 3 colores igual que el material de las perlas ; rojos para la unidad, azules para las decenas, y amarillos para las centenas. Con unas tijeras se separa de vez en vez la cantidad necesaria para corresponder al número y así éste se prepara en una especie de bono que dá derecho a tomar la cantidad limitada, necesaria para la construcción.

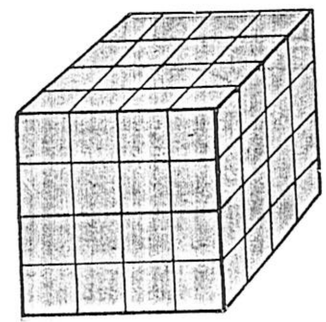


Preparación del número 79.507

Fig. 242

Se llega, pues, con las cifras a establecer el cubo que es centro angular de toda operación. En este caso es el cubo mayor comprendido en 79 : el cubo de 4.

Por lo que al bono se refiere, si hemos de operar con orden, separaremos del 79, tantos cuadraditos de 4 como sean necesarios para constituir el número correspondiente al cubo de 4 quedando de este modo un residuo de 15. Mientras el bono mayor queda reducido a un residuo, hemos adquirido un cubo que es centro de la construcción.



El cubo adquirido con los bonos

Fig. 243

Aquel residuo de 15 millares, se debe ahora cambiar por 150 centenas. Arrojaremos pues el residuo para tomar de una hoja de otro color (amarillo) 150 unidades que unidas a las 5 ya existentes dan un total de 155

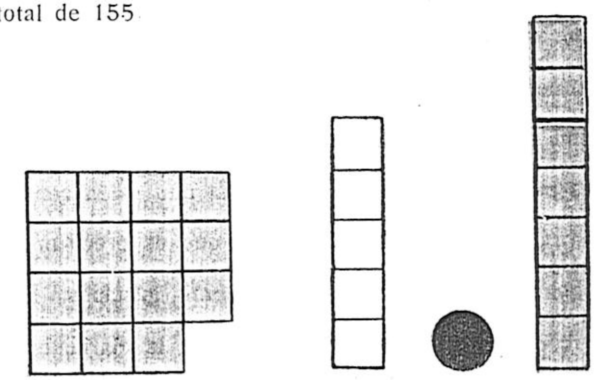
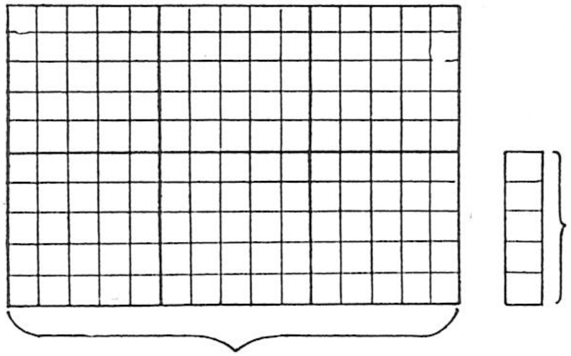


Fig. 244 (1



Las 5 centenas del número

150 centenares correspondientes al residuo anterior de 15 millares

Fig. 244 (2

Con éstas se tiene derecho a tomar del material para construir, 3 prismas ; las que son adyacentes a tres caras contiguas del cubo ya determinado. Las prismas, pues, deben tener una cara cuadrada de cuatro, pero ¿cuál debe ser su altura? He aquí la *incógnita*. Se deberán superponer sobre las tres caras del cuadrado, tres chapas de espesor *uno* y continuar del mismo modo mientras que el bono de las centenas nos permita tomar material. Como se ve, contando los cuadraditos en el dibujo, es posible tomar 3 veces las 3 chapas de 4^2 y queda un residuo de 11 centenas.

El 3 es la segunda cifra de la raíz.

Las prismas pues, resultan iguales a $4^2 \times 3$. Así se ha hallado la raiz cúbica del número 79507 que es $\sqrt[3]{79507} = 43$

Arrojemos el residuo—11 centenas—y tomemos 110 cuadraditos de los bonos azules (decenas). He aquí a lo que quedó reducido el número. Con esto se deben tomar chapas destinadas a tomar contacto con el pequeño resto de las unidades que es 3^3 y para cada prisma se precisan 4 chapas de tres. Un prisma $= 3^2 . 4$.

Si cortamos con las tijeras, de cada vez las fracciones del abono necesarias para obtener el material hasta que estén construídos los tres prismas $3^2 . 4$, queda un residuo de 2 decenas. De este modo se encuentra al fin la cantidad de 27, que es precisamente lo suficiente para adquirir un cubo de 3.

Los bonos están ahora completamente gastados. El material adquirido con ellos ha sido el exactamente preciso para componer las partes del cubo de 43. Para demostrar la claridad y la ayuda que presta el material en esta operación, se debe trabajar con él, independientemente del cálculo, sin preocupaciones del fin a que conduce. Entonces el cálculo resultará una simple escritura, un ejemplo práctico.

Trabajando pacientemente en la construcción del cubo, colocando chapa sobre chapa, el niño realiza una labor descansada e interesante. Es para él una manera de conducir su pensamiento a través de los campos del álgebra y entre cálculos considerados hasta hoy inaccesibles a su inteligencia. Pequeño obrero de la inteligencia, se asemeja casi a un carpintero en su taller ; mas a poco se verá al niño entrar en el puro campo de la abstracción, mirando las fórmulas algebraicas como una guía para seguir los complicados cálculos aritméticos de la extracción de raíces cúbicas, y todo ello, con la seguridad de un vidente que ha penetrado en lo invisible.

EL CALCULO. — Se puede escribir la operación aritmética como un apunte, como un recordatorio de la labor realizada utilizando toda esta preparación.

Sea el mismo número 79507 del cual se quiere extraer la raíz cúbica. La primera operación es la de dividir el número en grupos de tres, comenzando por la derecha 79.507. Este debe tener una raíz de dos cifras, decenas y unidades, cifras ambas positivas.

Es el 79 quien debe dar la cifra de las decenas y, para ello, precisa averiguar cual es el número cuyo cubo se aproxima lo más posible al 79 sin superarlo.

La tabla indica $4^3 = 64$.

$5^3 = 125$

La cifra de las decenas es pues 4.

La operación se puede plantear con este comienzo.

$\sqrt[3]{79.507}$	4
64	$4^3 = 64$
15	.... (sigue)

El 79 no es cubo de 4 sino que lo supera y por ello precisa calcular el resto, porque al proseguir, este resto tendrá que ser utilizado.

El resto es 15 millares que serán utilizadas como centenas. Por eso bajo el 5 que constituirá con los 15 millares precedentes, 155 centenas. Ahora se precisa probar cuantas veces cabe en este número el triple del cuadrado de la primera cifra de la raíz. Para ello se divide 155 por 3, $4^2 = 3.16 = 48$. El cociente dá el número 3 que es la *segunda cifra de la raíz*. Así, la raíz, que debía ser de dos cifras, ha sido hallada.

El resto de la operación es un complemento, un relleno o una prueba. Precisa, primeramente, sustraer de 155 una cantidad igual a 3 veces el cuadrado de la primera cifra multiplicado por la segunda (los tres prismas) y después operar con el resto resultante : 110. A esto hay que restar el triple producto del cuadrado de la segunda cifra de la raíz por la primera, 3 (3^2. 4) = 3 (9,4) = 3,36 = 108. El resto son dos decenas que unidas a las 7 unidades, constituyen 27 unidades. De éstas hay que restar el cubo de la segunda cifra 3^3, que es precisamente 27.

1.ª parte averiguación	$\sqrt[3]{79507}$ 64 155 . 48 = 3	43 $4^3 = 64$ $4^2 \times 3 = 16 \times 3 = 48$
2.ª parte De complemento o relleno	155 144 110 108 27 27 0	$3 \times 48 = 144$ $3^2 \times 4 \times 3 = 9 \times 4 \times 3 = 36 \times 3 = 108$ $3^3 = 27$

Fig. 245

Veamos otro ejemplo. Se quiere hallar la raíz cúbica del número 421875.

Dividamos primero el número en grupos de tres cifras 421.875.

La raíz es de dos cifras: decenas y unidades positivas.

El grupo de los millares, 421, contiene la cifra de las decenas que se halla consultando la tabla:

421 — 343 = 78

$$7^3 = 343$$
$$8^3 = 512$$

Luego la cifra de las decenas es 7.

Prepararemos el número usando el material de cartón de los bonos y después de haberle privado, poco a poco, de los necesarios cuadrados de 7, llegaremos al residuo de los millares o sea 78. Una vez en este punto la operación se puede recoger del material de madera un cubo de 7 sobre el cual deberá llevarse a cabo toda la construcción. El residuo de 78 millares se transforma en 780. Así los bonos forman ahora el número siguiente: 788 centenas, 7 decenas y 5 unidades. Con esta guía se construyen los prismas que contienen la incógnita y que tienen conocida, solamente, la base cuadrada: 7^2. Estos se construyen tomando sucesivamente 3 chapas de 7 para colocarlas en triple columna sobre las tres caras adyacentes del cubo de 7. Cada vez que se repite esta operación se separan de los bonos tres cuadrados de 7, mientras existan. Las triples columnas pueden acumular cada una 5 chapas superpuestas; el prisma buscado es pues 7^2. 5.

Este 5 es la segunda y última cifra de la raíz cúbica buscada. La raíz cúbica del número 421875 es 75. Para proseguir la operación utilizaremos el residuo de las 788 centenas, que es 53 y arrojándolo, cortaremos de una tabla o cartón de decenas 537 decenas, esto es, las provenientes de las 53 centenas más las 7 ya existentes. El número sobre el cual hemos de operar ahora es 537 decenas y 5 unidades. Este, sino se quitó demasiado, puede servir para la construcción de tres prismas que tengan como base el cuadrado de la segunda cifra de la raíz, 5, y una altura igual a la primera cifra, pues son los prismas que se adaptan a las tres caras adyacentes del cubo de las unidades y son de la altura del cubo dirigente. El número disponible no es sólo suficiente para ello, sino que deja aún un resto de 12 decenas. Estas, cambiadas por bonos de unidades, proporcionan el último número, exactamente justo con la adición de las 5 unidades ya existentes para recoger del material el cubo de 5. Y así se ha completado la construcción de un cubo de 75 = 421875.

Figura del *Cálculo Aritmético* 3:

$\sqrt{421875}$	75
343	$7^3 = 343$
788 735	$3 \times 7^2 \times 3 = 147$ 788 : 147 = 5
537 525	$3 \times 7^2 \times 5 = 15 \times 49 = 735$
125 125	$5^2 \times 7 \times 3 = 21 = 525$
0	$5^3 = 125$

Fig. 246

De 421 (millares) se obtiene la primera cifra: la $\sqrt[3]{421} = 7$.

De las 8 centenas incrementadas con los restos precedentes se obtiene la segunda cifra.

Se han obtenido ya todas las cifras de la raíz.

Para completar la operación, precisa obtener de las 7 decenas tres prismas, que sabemos componer, porque están constituídos por d^2u, esto es, $5^2 \times 7 = 525$.

Finalmente precisa obtener de las unidades su raíz $\sqrt[3]{125} = 5$.

LA RAIZ TRINOMIAL

LA RAIZ TRINOMIAL

La extracción de una raíz cúbica de tres términos, no se puede considerar como si fuera sencillamente la continuación de la raíz de dos términos. Porque está relacionada con un cubo trinomial que, en su construcción, es mucho más complicado que el binomial.

En efecto, las fórmulas algebraicas son:

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$ en el binomial y

$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$ en el trinomial.

Es pues, indispensable, volver al cubo trinomial en su propia construcción, y también a su fórmula algebraica.

El material del cubo trinomial contiene la clave del procedimiento necesario para el cálculo, pero, antes hay que estudiarlo.

a, cubo mayor, es un cubo de 100.

b, cubo mediano, es un cubo de 10.

c, cubo menor, es un cubo de 1.

Es decir, que la longitud de las aristas respectivas está determinada en 100,10,1: centenas, decenas y unidades. Por esto los números que se derivan de dicha evaluación los escribiremos sobre carteles separados que se reservan para cada grupo de objetos iguales.

Algebraicamente usamos otros del alfabeto que se afinan a este concepto: c = 100, d = 10, u = 1.

El caso general, ya estudiado en algebra, aquí se especifica en una ampliación que sirve de clave para un cálculo numérico.

Cada trozo va designado según dicha aplicación alfabética y va, también, calculado.

c^3	=	100	×	100	×	100	=	1.000.000	=	c^3
$c^2 d$	=	100	×	100	×	10	=	100.000	=	$c^2 d$
$c^2 u$	=	100	×	100	×	1	=	10.000	=	$c^2 u$
d^3	=	10	×	10	×	10	=	1.000	=	d^3
$d^2 c$	=	10	×	10	×	100	=	10.000	=	$d^2 c$
$d^2 u$	=	10	×	10	×	1	=	100	=	$d^2 u$
u^3	=	1	×	1	×	100	=	100	=	u^3
$u^2 c$	=	1	×	1	×	1	=	1	=	$u^2 c$
$u^2 d$	=	1	×	1	×	10	=	10	=	$u^2 d$
c d u	=	100	×	10	×	1	=	1.000	=	c d u

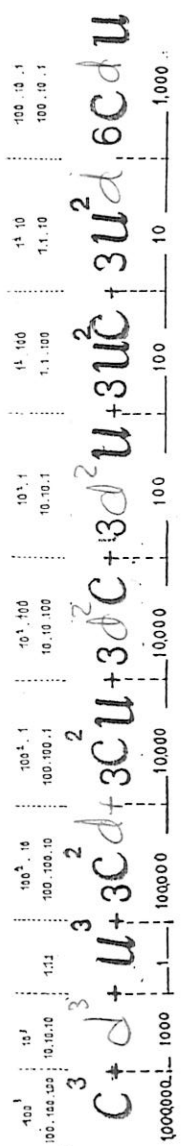


Fig. 247

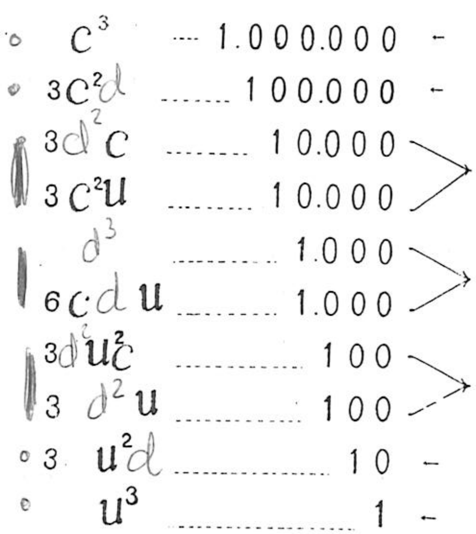


Fig. 248

Entretanto, el orden de los objetos o trozos, componentes, viene designado por su valor decimal. Pongámoslos en orden según estos valores y, al hacerlo, surgen ulteriores agrupaciones que no se manifestaban en la simple fórmula algebraica, porque trozos u objetos que tienen diversa representación algebraica poseen el mismo valor.

1.000.000	c^3
100.000	c^2 d
10.000	c^2 u
10.000	d^2 c
1.000	d^3
1.000	c d u
100	d^2 u
100	u^2 c
10	u^2 d
1	u^3

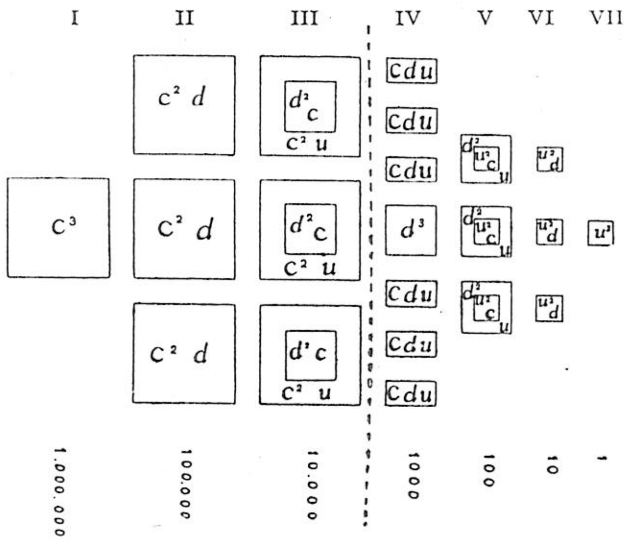
Como se observa en la disposición resultante, los dos órdenes extremos están aislados y los otros son iguales dos a dos.

1.000.000	c^3
100.000	c^2 d
10.000	c^2 u — d^2 c
1.000	d^3 c d u
100	d^2 u — u^2 c
10	u^2 d
1	u^3

Esto conduce a ordenar los objetos de un modo especial y necesario, que corrcspnde a las jerarquías del número, del cual, hay que extraer la raíz, y cada grupo de objetos de igual valor representa una parte determinada del número que, en bloque, correspondería al entero cubo trinomial.

	millones	centenas de millar	decenas de millar	millares	centenas	decenas	unidades
(número)	1	1	1	1	1	1	1
(cubo)	c^3	$3c^2d$	$3c^2u$	d^3	$3d^2u$	$3u^2d$	u^3
			+	+	+		
			$3d^2c$	6sdu	$3u^2c$		

El material, pues, se puede disponer en el siguiente orden:



Partes esenciales de la raíz cúbica

Partes secundarias de relleno

Fig. 249

Ante todo, el cubo mayor c^3 (1.000.000) que es el centro de construcción, el conductor de todo su séquito y, después, sus tres principales satélites c^2d.

En tercer lugar, se deben poner dos especies de objetos que representan ambos el 10.000, es decir, $3c^2u$ y $3d^2c$ y siendo c^2 más ancho que d^2 pondremos como base un c^2u (bajo como u) y encima el prisma estrecho y alto : d^2c.

En la fila siguiente ( ) se colocan : d^3 y sus prismas c.d.u. que tienen como él, el valor de 1000. A continuación los seis prismas de base cuadrada d^2u y u^2c que se pueden superponer porque el cuadrado d^2 es mayor que u^2.

A esto sigue el penúltimo grupo de $3u^2d$ con el valor de 10 y finalmente la unidad u^3.

De este modo el material queda alineado según siete valores :

1
10
100
1000
10000
100000
1000000

Este agrupamiento de sólidos geométricos hecho a base del sistema decimal, representa la guía del cálculo.

Para construir el cubo trinomial, precisa comenzar por 3^3 y disponer alrededor de este objeto, punto de partida, los grupos que representan el mismo valor.

Así, pues, primeramente c^3 (1000000).

Después el grupo de 100.000 : $3c^2d$ (lo que constituye el procedimiento de la raíz cúbica de 2 cifras) y a continuación los objetos del grupo de 10.000 o sea $3d^2c + 3c^2u$.

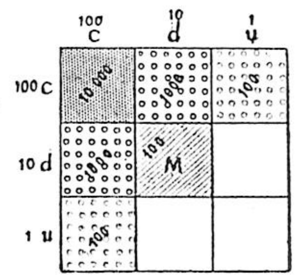
Siguiendo la construcción, se obtiene la disposición ya vista, esto es : los tres prismas $3c^2d$ se colocan sobre tres caras del cubo superponiéndose a ellas, según c^2 y tocándose en un vértice de c^3. De este modo se obtiene una prolongación de la arista c, esto es $c + d$, como hemos visto ya en el estudio de la raíz cúbica de dos cifras.

El procedimiento que conduce a colocar los sucesivos valores de 10.000 es más complicado, porque consta de dos partes : una $3d^2c$ que se refiere a *d* y *c* y la otra $3c^2u$ que introduce el tercer término *u*.

En este conjunto hay pues una parte de relleno y otra, en cambio, que conduce a hallar la tercera incógnita de la raíz, *u*, completando así la arista del cubo trinomial que se quiere construir : $c + d + u$.

Al llegar a este punto, puede servir de ayuda el recordar los procedimientos relativos a la extracción de la raíz cuadrada trinomial.

También en los cálculos preparatorios sobre el cuadrado, cuando se trató del cálculo de la extracción de la raíz cuadrada, fué necesario al llegar al trinomio cuadrado «rellenar un espacio entero» un «espacio muerto» M, antes de colocar las perlas que eran útiles para encontrar el tercer término de la raíz (c).



M : parte muerta, parte de relleno que hay que eliminar antes de buscar la incógnita

Fig. 250

Después de esto existen muchas figuras ; todas aquellas situadas en la parte inferior de una diagonal compuesta de cuadrados, que no guardan relación alguna directa con las cifras de la raíz. Diremos, pues : existe un *espacio para relleno que el número debe cubrir* sin utilidad, por lo que a la raíz se refiere, al que llamaremos «espacio muerto, absorbente».

Indudablemente se procede de tal modo en forma opuesta a la matemática generalmente seguida. Aquella conduce, por excelencia, a la abstracción. Y la primera objeción que se presenta en el campo educativo de la psicología infantil, es que «precisa conducir la mente del niño hacia la abstracción». Cuando el niño se ve rodeado de tanto material aritmético, la objeción más corriente es, que se liga demasiado a la materia la inteligencia infantil, con lo cual, se retarda o impide, tal vez, el que llegue a la abstracción.

El método de «materializar la abstracción» para hacer accesible al niño un camino que, de otro modo, le estaba vedado, parece, más bien, una contradicción.

Pero la abstracción en sí misma es, no sólo una cualidad propia de la inteligencia que tiende a «abreviar» con la idea abstracta todo procedimiento material, sino también una tendencia psíquica que, haciendo «abandonar» los hechos materiales, y por ello limitados, permite «crear» un mundo de concepciones «irrealizables»; el mundo real de una creación humana, más allá de la materia y de sus limitadas relaciones.

En este sentido debe existir un «límite», bien claro, de lo que se puede materializar y de aquello que «solamente existe en la abstracción».

Un esfuerzo hecho en el sentido de materializar la abstracción es, sin duda, un trabajo de la inteligencia conducente a este límite. Distíngase *el ser y el no ser.*

Muchas veces, particularmente con los niños, se llama *allá* lo que en cambio es *acá,* pero que requiere una indagación si ha de contrastarse. De ese modo, la ciencia positiva ha colocado hechos naturales en muchos seres vacíos del conocimiento humano que estaban colmados con la idea de lo sobrenatural.

Todo lo desconocido se tiende a relegarlo entre lo «incognoscible». Y se habla a los niños de «abstracción» en la misma forma que entre pueblos salvajes se hablaba de Dios refiriéndose a casos y cosas completamente naturales.

El ejercicio formativo de la mente infantil, que por su propio carácter tiende a las cosas *vagas,* debe consistir en ligarlo a lo «concreto», todo lo posible, y uno de los caminos más utilizables en este sentido es, precisamente, el de los estudios matemáticos, porque éstos pueden penetrar en la formación de la inteligencia en sí misma.

Lo del cuadrado ayuda, por analogía, a contemplar la necesidad de cosiderar un «espacio muerto» que hay que rellenar, también aquí, *antes* de alcanzar la tercera incógnita de la raíz cúbica.

Es esta la dificultad que se encuentra, y que hace diferenciar la extracción de una raíz cúbica de dos cifras, de una de tres.

Es evidente que, colocados los trozos del tercer grupo en la construcción del cubo trinomial, se ha llegado a determinar la arista completa c + d + u que corresponde a la raíz.

Dichas partes son, por esto, las necesarias para hallar la *raíz cúbica.*

A esta construcción parcial que representa un grupo de forma armónica que llamaremos «el monumento» de la raíz, concurren solamente diez trozos: c^3, $3c^2d$, $3d^2c$, $3c^2u$, de los veintisiete trozos necesarios para completar la construcción que se refiere a la averiguación de las incógnitas de la raíz, y otra, que es de simple relleno o complemento, la cual, se convierte en prueba de la exactitud de la raíz calculada.

El hecho de construir el cubo trinomial, recogiendo, de vez en vez, todos los componentes del grupo de un determinado valor, indica el procedimiento del cálculo; el cálculo parte del número (los valores alineados según las jerarquías decimales) y efectúa continuas «sustracciones» que se suceden una a otra, descendiendo la escala de valores hasta las unidades. Pero, al llegar a las *decenas de millar,* la raíz cúbica ya está hallada; la continuación es la prueba de que el cálculo fué exacto. Ahora los trozos del cubo trinomial guía, tienen la misión que tenía *el dibujo de los cuadrados-guía* para la extracción de la raíz cuadrada. Tratándose de *volúmenes,* solamente objetos movibles y superponibles pueden actuar como guía, porque su dibujo no podría ayudar prácticamente. Ahora, con el material geométrico guía, se va por una parte construyendo el cubo, mientras en el cálculo, se ejecutan todas las operaciones que conducen a la extracción de la raíz cúbica de un número.

Sin embargo, mientras en la operación con el material se va construyendo el cubo con la sucesiva agregación de partes, en la que se efectúa con cifras se van «restando» las cantidades correspondientes del número dado.

El cubo-guía, como también el cuadrado-guía, reducen a 1 todas las partes componentes, bien sea la arista o el lado; 1 que se refiere a los distintos órdenes jerárquicos decimales que están representados.

En cambio, la ejecución de un cálculo se refiere a un número que puede tener más de una unidad en cada lugar. Por ejemplo, sea el número 647.214.625 del cual se quiere extraer la raíz cúbica; en el lugar del 1 de la guía tiene dos centenas de millar, cuatro millares, etc.

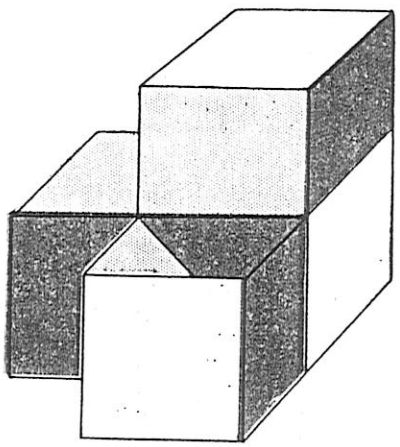
El cálculo positivo es, pues, una aplicación positiva a la guía que *indica* solamente los procedimientos. La parte positiva puede ser calculada inmediatamente con los números, como se verá en la descripción detallada del cálculo, correspondiente al número precitado.

Pero, si se desea usar también aquí un material que haga más claro el lento y paciente procedimiento, tan educativo y tan útil, como palestra mental para los niños, entonces, se puede utilizar para la extracción de la raíz cúbica un material constructivo, semejante al de las perlas, usado para la extracción de la raíz cuadrada; el mismo usado ya para la extracción de la raíz cúbica de dos cifras, es decir, «bonos» por la ejecución numérica y cubos de diferentes colores, capas cuadradas, y algunas veces, otro material suplementario, para construir prismas con las tres aristas diferentes (abc). El material constructivo permite un ejercicio demostrativo, particularmente para diferenciar aquellas operaciones que conducen a hallar «las incógnitas» (las cifras de la raíz) que constituyen una mínima parte del cálculo y son *todas uniformes partiendo del triple cuadrado de la primera cifra,* de las otras operaciones, mucho más numerosas, pero, que no tienen ninguna incógnita.

En efecto, para las primeras operaciones, precisa *estratificar* con capas cuadradas correspondientes al primer cubo (que da la raíz de las centenas) tres caras de éste, mientras haya material disponible en relación con todas las estratificaciones (aquí se trataría de dos de ellas, la que conduce a la averiguación de las decenas y la que conduce a la averiguación de las unidades). En cambio, todas las otras partes se resuelven con la composición de los prismas, cuyas aristas son ya conocidas, y que es necesario saber colocar recordando el dispositivo de las partes en el cubo-guía.

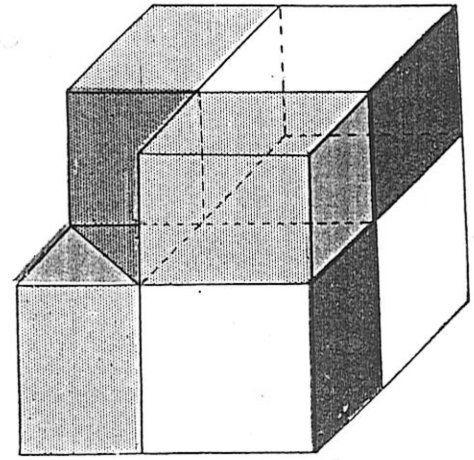
Para distinguir los materiales hemos preparado una torre de colores, donde 1^3, 2^3, etc., 10^3 están pintados con colores diferentes, como sucedía con los cubos de perlas, e igualmente los listones y las planchas preparados para facilitar la construcción de los otros trozos ; las superposiciones de capas de cubitos, están también pintadas, en analogía con los cubos fundamentales.

El trabajo, que sería largo de describir, se puede comprender por el cálculo que exponemos y debe ser enseñado prácticamente para dar a la demostración, no sólo su limpia claridad, sino para realizar de este modo un ejercicio formativo que conduce al razonamiento y a una actividad motriz, lenta y reposada.



$$c^3 + 3c^2d$$

Fig. 251



$$c^3 + 3c^2d + 3d^2c$$

Fig. 252

relleno

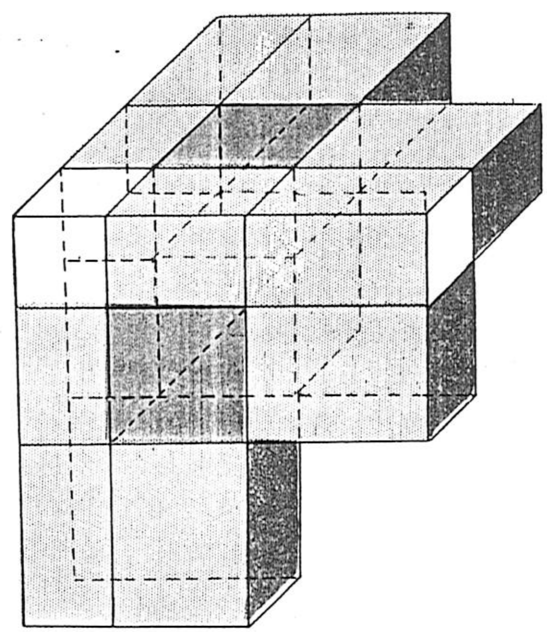


Fig. 253

$c^3 + d^3 + u_3$

Millares	647.214.625
	512 se resta de c_3
Centena de millar	1352 (cantidad de los centenares de millar).
	1152 (son restados $3c^2d$).
Decenas de millar	2001 (cantidad de las decenas de millar).
	864 (sustracción preparatoria $3d^2c$).
	1137 (segunda sustracción $3c^2u$).
	960 fin de la 1.ª parte.
Millares	1774 (cantidad de los millares).
	216 (sustracción d^3).
	1558 (sustracción de 6 c d u).
	1440
Centenas	1186 (cantidad de las centenas).
	540
	646 (sustracción de $3u^2c$).
	600
Decenas	462 (cantidad de las decenas).
	450 (sustracción de $3u^2d$).
Unidades	125 (cantidad de unidades).
	125 (sustracción de u^3).
	0

$c + d + u$
8 6 5

$8^3 = 512$ (c^3) ; 8 (centenas de la raíz).
$3 \times 8^2 = 3 . 64 = 192$.
1.352 : 192 = 6 (decenas de la raíz).
$3\ (6^2 \times 6) = 3\ c^2d = 1.152$.

$3\ (6^2 \times 8) = 3d^2c = 864$.
1137 : 192 = 5 (unidad de la raíz).
$3\ (8^2 \times 5) = 3c^2u = 960$.

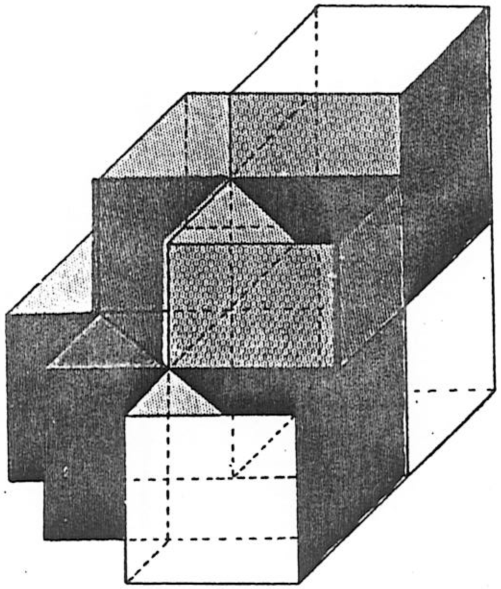
RELLENOS Y PRUEBA

$6^3 = 216$ (d^3).
$6\ (8 \times 6 \times 5) = 1440$ (6 c b u).

$3\ (6^2 \times 5) = 540$ ($3d^2u$).
$3\ (5^2 \times 8) = 600$ ($3u^2c$).

$3\ (5^2 \times 6) = 450$ ($3u^2c$).

$5^3 = 125$ (u^3).

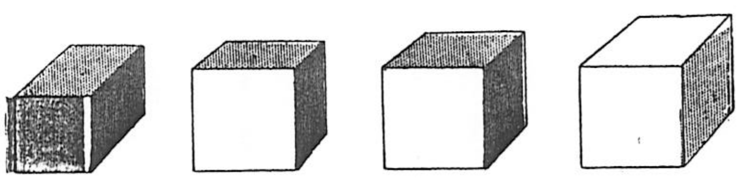


(1)

$$c^3 + 3c^2d + 3d^2c + 3c^2u$$

(1) Porción esencial que es el «monumento» necesario para hallar la raíz del cubo trinomial

Fig. 254



d^2c c^2u c^2d c^3

Fig. 255

PROCEDIMIENTO DIRECTO DEL CÁLCULO

Sea, pues, el número 647.214.625, el cual, se divide en grupos de tres cifras de derecha a izquierda, 647.214.625 ; sabiendo que del grupo de los millones (647) depende la cifra de la raíz correspondiente a las centenas. (Para facilitar los cálculos hay la tabla N, Figura 257).

El número se analiza útilmente del modo siguiente :

Millones	Centenas de millar	Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades
6.4.7	2	1	4	6	2	5
del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende	del cual depende
c^3	$3c^2d$	$3d^2c + 3c^2u$	$d^3 + 6cdu$	$3d^2u + 3u^2c$	$3u^2d$	u^3
de las cuales depende la parte esencial del cálculo, que descubrirá los tres elementos de la raíz : c, d, u.			de las cuales depende la parte secundaria del cálculo, de relleno y de prueba.			

Por el primer cálculo, se determina el cubo fundamental 8^3 que significa el cubo de las centenas, esto es, millones (se separa del material alineado c^3). Se ha quitado al número el equivalente de c^3 o sea $8^3 = 512$ y queda como resto 135, que se une a las centenas de millar, 2.

Las centenas de millar son en total 1352.

A las centenas de millar corresponden los tres prismas c^2b que precisa poder separar del número de ellos de que se dispone. Estos van distribuídos sobre las tres caras adyacentes del cubo de 8 y, por esto las cantidades numéricas correspondientes son $3 \times 8^2 = 192$.

Ahora bien, ¿cuántas veces pueden repetirse estas cantidades? Tantas como lo permita el número $1352 : 192 = 6$.

(Escojamos esta cifra, un poco inferior a cuanto podría dar materialmente el número, porque hay todavía mucho que dar hasta el fin del cálculo).

Restemos para ello del número 1352 la cantidad 192 repetida 6 veces que corresponde a los tres prismas.

$3c^2b = 3 \times (8^2 \times 6) = 1152$.

Separemos, pues, los tres prismas c^2b y coloquémoslos sobre el cubo base, de modo que todos ellos converjan sobre el mismo vértice en la forma conocida, como indican las figuras 251, 252, 253, 254 y 255.

En el cálculo numérico se debe, al propio tiempo, restar 1152 del número 1352.

Efectuándolo queda un resto, 200, que hace de sostén o apoyo de la próxima cifra, la de las decenas de millar.

El número total de decenas de millar es 2001.

Aquí hemos llegado a la «clave secreta». En efecto, el material correspondiente a las decenas de millar consta de dos elementos diversos : d^2c y c^2u. Uno de éstos contiene el elemento *u*, unidad, esto es, la tercera incógnita de la raíz. El otro, en cambio (d^2c), es extraño a la raíz, estorba las decenas de millar y, por lo mismo, hay que separarlo como «espacio muerto». El d^2c es conocido porque contiene los elementos de la raíz que ya fueron hallados, decenas y centenas, 6 decenas y 8 centenas.

Este es, pues, $6^2 \times 8$, pero siendo tres prismas, la cantidad total asciende a : $3d^2c = 3\ (6^2 \times 8) = 3\ (36 \times 8) = 36 \times 24 = 864$.

Este 864 debe ser sustraído a la cantidad de las decenas de millar y, al mismo tiempo, los tres prismas se quitan y se colocan sobre los precedentes, como se indicó en la construcción del «monumento».

Restando 864 de 2001 queda el número 1137, que es aquél del cual se deben quitar los tres prismas c^2u que contienen la unidad desconocida. Con dicha cantidad precisa repetir el trabajo ya efectuado para hallar *d*, es decir, colocar tantos estratos o capas de 8^2 sobre las tres caras c^2, caras, que son las mismas como cantidad, aunque se deben sumar los estratos a las caras c^2 de los prismas c^2d ya

colocados. En el número tiene lugar idéntica reproducción del procedimiento usado para hallar *d*, esto es : $1137 : 192 = 5$.

La cifra radical de las unidades es 5 y la raíz, pues, ha *nacido*.

Se restan, pues los tres prismas c^2u y se disponen para completar la construcción del monumento que da por tres lados la arista completa $c + d + u$. En el número se resta al 1137 la cantidad correspondiente a $3c^2u$ o sea $3\ (8^2 \times 5) = 960$.

Los números sucesivos no tiene más importancia que la de completar el relleno del cubo, el cual se efectúa separando poco a poco las partes remanentes que son todas conocidas.

El resto de 177 viene a integrar los millares, que son 4 formando el número 1774, al que hay que restar todos los elementos que pertenecen a los millares, que son : $d^3 + 6cdu$.

El d^3 es, en nuestro caso, $6^3 = 216$ y del resto se deben sustraer 6cdu, es decir, $6\ (8 \times 6 \times 5) = 36 \times 40 = 1440$.

Del material se sacan d^3 y los seis prismas cdu continuando la construcción del cubo.

Del resto definitivo de los millares, 118, se pasa a componer el número de las centenas y bajando el 6 se obtienen 1186 centenas.

A este total hay que restar ahora los dos grupos $3d^2u + 3u^2c$.

$d^2u = 6^2 \times 5$ y por lo tanto $3d^2u = 3\ (6^2 \times 5) = 36 \times 15 = 540$.

Restándolo de 1186 quedan 646 centenas aún disponibles, de las que hay que sustraer $3u^2c$, esto es, $3\ (5^2 \times 8) = 25 \times 24 = 600$ y queda de $646 — 600 = 46$.

Las 46 centenas de resto van ahora a integrarse con el número de las dos decenas que se ha bajado formando 462 decenas.

De éste se resta ahora el solo grupo (penúltimo) de $3u^2c$, esto es $3\ (5^2 \times 6) = 25 \times 18 = 450$ y se tiene $462 — 450 = 12$.

Al fin se ha llegado a las unidades que, juntamente con dicho resto, forman un total de 125, del cual, hay que quitar la cantidad u^3 o sea $5^3 = 125$.

Así se ha utilizado todo el material ; colocado el último elemento, el cubo trinomial es completo y tiene de arista $c + d + u$.

El número es el cubo exacto de 865 sin resto.

El trabajo con el material lleva a un análisis lento, acompañado por la construcción de objetos. En efecto, los varios elementos geométricos del trinomio cubo, se deben construir con planchas y, de vez en cuando, contar los pequeños cubos unitarios que los componen por medio de fáciles cálculos. La cantidad y el valor de las piezas a construir vienen indicados en *la guía* y determinados por medio de los «bonos».

Es indudable que trabajo tan paciente conduce a memorizar de modo inolvidable cada particular del cálculo, como también su sucesión, mientras las razones que inducen al cálculo mismo son aclaradas y fijadas con los actos mismos de ejecución.

No es posible ejecutar el trabajo con el material constructivo sin recurrir, también, al cálculo escrito, como ya ha sucedido en la extracción de la raíz cuadrada. Pero, el escrito que se acompaña a los objetos, analiza y separa las distintas partes del cálculo y elimina muchos particulares de éste, es decir, todos aquellos que vienen sustituídos por las construcciones.

OPERACION CON LOS NUMEROS

Primero, se prepara el número, escribiéndole en pequeños carteles del mismo color, que se colocan encima de objetos de forma piramidal de varias dimensiones.

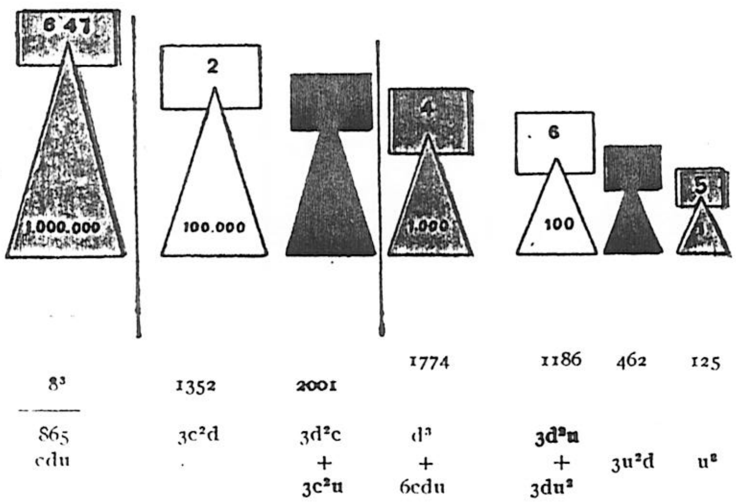


Fig. 256

Las distintas operaciones, se siguen en relación con el *número* correspondiente a cada orden jerárquico, como indica la figura, y de él se sustraen las cantidades de unidades precisas para la fabricación de los objetos que se componen, de vez en vez, en relación con los valores. Si a un punto de la construcción se precisan más unidades de las disponibles según el número, es necesario deshacerlo todo y volver atrás. ¿Dónde puede estar el error? Este puede estar solamente donde se trató de buscar «una incógnita». Esto es, donde se colocan sucesivamente capas estratificadas correspondientes a las caras del prisma cubo, sobre el cual, todo se edifica. En el caso de nuestro número, el error puede estar solamente en la estratificación de las capas de 8^2. Estratificaciones que se precisan únicamente en las operaciones correspondientes a la busca de *d* y de *u*, o sea, en correspondencia de 100.000 y 10.000.

El primer objeto hallado, el *cubo* de las centenas que se obtiene del grupo de los millones, es la primera piedra del monumento, en torno a la cual se dispone todo el resto; es precisamente el cubo inicial que se toma de la torre en la serie de los cubos de 1 a 10.

La ejecución material y lenta de todas las otras operaciones necesarias hace, casi, desanudar entre los dedos que trabajan, toda dificultad y esfumar las complicaciones aparentes en la nitidez de una simplicidad atractiva, que invita a la repetición del ejercicio.

En la labor constructiva pueden colaborar tres o más niños, pero tres de ellos son los obreros que componen los trozos iguales tres a tres, mientras los otros, pueden ser empleados en pequeños cartéles que representan la cantidad, en torno a la cual, deberán desarrollarse las operaciones sucesivas.

EL MATERIAL ENSEÑA

En el procedimiento de calcular la raíz cúbica se tiene el ejemplo más claro del material *guía*, que enseña como podría hacerlo un maestro. Es el material quien conduce el cálculo paso a paso y da, al propio tiempo, la razón de cada particular del procedimiento, representado claramente las relaciones entre un número y su raíz cúbica. Este maestro enseña, dando a la *inteligencia* del discípulo la mayor satisfacción y empujándolo a probar y volver a probar, a repetir, una y otra vez, un ejercicio fascinador por su claridad y exactitud. He aquí un maestro siempre pronto, siempre paciente e inalterable, y dispuesto a repetir su demostración. Es verdaderamente un maestro que impresiona con su profunda enseñanza, que va analizando y descubriendo hasta llegar a la *raíz* del problema. El alumno no podrá jamás olvidar esta lección.

Verdaderamente, no es una «memorización» que quedó en él, sino, una *visión* que ha realizado en su mente, una construcción racional e indestructible. El discípulo posee, además, las claves secretas para reconstituir el procedimiento, con sus propias energías mentales. Así la memoria se ha convertido en un proceso sintético sólidamente asegurado ; es como una planta viva, que aún cuando sujeta a perecer, deja las semillas que la puedan reproducir fresca y pujante.

El material de los pequeños cubos, se puede introducir en la ejecución práctica de un cálculo determinado a posteriori, es casi un «maestro de virtudes» morales, que enseña la «paciencia» y la «reflexión», el respeto escrupuloso «al orden en la sucesión de los trabajos necesarios», la «exactitud» en la construcción de los objetos, la «constancia» en ejecutar actos semejantes hasta el fin ; no ya por curiosidad, porque la mente guía la mano en casi todos estos trabajos, sino, por una energía ordenada y formadora del carácter, que se ha desarrollado y que anima a la ejecución, dando, en premio, calma y satisfacción interiores.

N	N^2	N^3	$3N^2$
1	1	1	3
2	4	8	12
3	9	27	27
4	16	64	48
5	25	125	75
6	36	216	108
7	49	343	147
8	64	512	192
9	81	729	243

Fig. 257

N	N^2	$3N^2$	N^3	$4N^3$	N^4	$5N^4$	N^5
1	1	3	1	4	1	5	1
2	4	12	8	32	16	80	32
3	9	27	27	108	81	405	243
4	16	48	64	256	256	1280	1024
5	25	75	125	500	625	3125	3125
6	36	108	216	864	1296	6480	7776
7	49	147	343	1372	2401	12005	16807
8	64	192	512	2048	4096	20480	32768
9	81	243	729	2916	6561	32805	58949

Tabla C

Fig. 258

REALIZACION

REALIZACION

Una materialización geométrica de la fórmula algebraica, relativa a la 4.ª y 5.ª potencia de un binomio, no representaría ya un medio necesario para aclarar el cálculo, ni mucho menos para abreviarlo y lograr aquella finalidad asombrosa de averiguar las altas raíces, esto es, aquellos números pequeños, pero, que son como un elemento primordial, y, multiplicados 4 ó 5 veces por sí mismos, dan un número enorme. Por ejemplo, descubrir que 28398341 está formado por un pequeño 73 que se enrosca 4 veces sobre sí mismo como una bola de nieve que crece prodigiosamente. Y que el número 1934917632 tiene un núcleo interno de 72 que, arrollándole 5 veces sobre sí mismo, lo forma.

Si se pudiese continuar materializando estas formaciones, y mostrarlas bajo forma de sólidos geométricos, compuestos de partes siempre más complicadas, como un organismo en evolución, acarrearía, sin duda alguna, un ejercicio mental de agudeza analítica que, concretado sobre objetos manuales, podría ser accesible a los niños.

He aquí, pues, cómo el problema recae ahora sobre *la construcción del objeto*, esto es, sobre lo que precedentemente nos sirvió de llave para abrir los secretos del número. En efecto, si los cuerpos sólidos no pueden exceder de la 3.ª dimensión ¿cómo representan la fórmula $a^4 + 4\ a^3\ b + 4\ b^3\ a + 6\ a^2\ b^2 + b^4$ dónde ni un solo término puede representarse materialmente? Ni las 4.ª potencias de a y b; ni la multiplicación de 4 por términos como $a^3\ b$ ó $b^3\ a$, ni el producto de dos cuadrados $a^2\ b^2$.

Esta imposibilidad se presenta en la fórmula algebraica reducida ya a su máxima simplificación. Pero, se podría *penetrar* en ella como se penetró en el número, para distinguir las cantidades que constituyen el objeto, de factores que indican simplemente una multiplicidad de los mismos objetos. Como sucede en la multiplicación, donde el multiplicando es la *substancia* y, en cambio, el multiplicador indica simplemente cuantas veces se debe repetir aquella substancia.

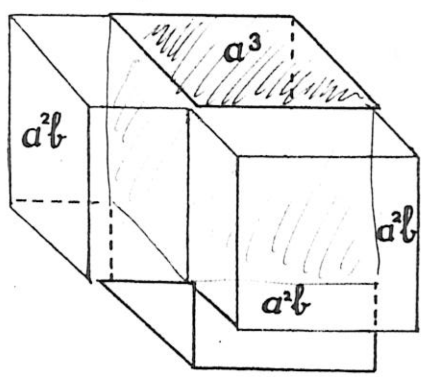
A tal fin seguiremos, de modo analítico, el paso entre la 3.ª y 4.ª potencia del binomio, acompañando el desarrollo con la *presencia* de los objetos referentes al cubo del binomio. Entretanto, para la construcción material, hay este concepto directriz; el cubo del binomio en su totalidad puede ser repetido varias veces (a + b veces) y alineado como se hizo para indicar las decenas de millar, esto es : 10^4, cuando se colocaron en línea 10 cubos de mil perlas. Esta aplicación puede constituir una directriz, porque el cuerpo, pasando de la 3.ª a la 4.ª potencia, puede extenderse sólo en longitud y no en el sentido de la anchura.

La fórmula del cubo del binomio

$a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a$

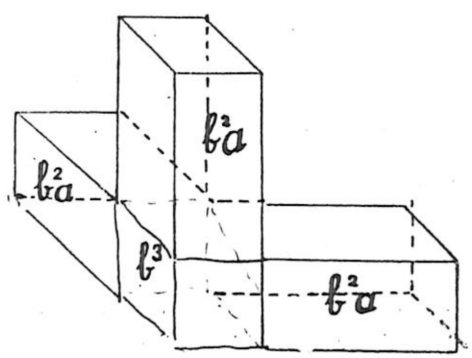
está compuesta de dos partes, que se refieren a las dos mitades del cubo, y cada una de éstas está constituída por 3 prismas apoyados en las 3 caras adyacentes de cada cubo.

$$a^3 + 3a^2b + b^3 + 3b^2a$$



$$a^3 + 3a^2b$$

Fig. 259



$$b^3 + 3b^2a$$

Fig. 260

En uno y otro caso hay dos prismas, colocados lateralmente y apoyando la cara no cuadrada sobre el mismo plano del cubo, y o.ro, en cambio, que se apoya en el cubo con la cara cuadrada y se eleva, o desciende perpendicularmente, con la cara rectangular. Se puede observar en seguida la importancia de esta deficiencia de posición, lo que no sería posible destacar con la sola fórmula algebraica.

Procedamos ahora a la multiplicación del cubo del binomio por el binomio mismo, sin eliminación de términos, o mejor, sin acumular en una suma térmios iguales :

$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a)\ (a \times b)$.

y separando las partes, teniendo en cuenta los dos grupos geométricos dichos :

$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a) \times a$
$(a^3 + 3\ a^2\ b + b^3 + 3\ b^2\ a) \times b$

en la fórmula expresada de este modo, se pueden distinguir 4 partes que son los términos correspondientes a cada uno de los medios cubos

$(a^3 + 3\ a^2\ b) \times a$ $\quad$ $(a^3 + 3\ a^2\ b) \times b$
$(b^3 + 3\ b^2\ a) \times a$ $\quad$ $(b^3 + 3\ b^2\ a) \times b$

Ahora, los coeficientes a y b, por los cuales se multiplican los factores entre paréntesis, aun cuando puedan ser numéricamente idénticos a a y b, sólo indican *cuantas veces deben ser repetidos los factores internos*. Estos no se funden en la construcción de los objetos, como sucedería en la fórmula, cuando los cálculos están desarrollados ; y donde a^3 se convierte en a^4, quiere decir : el mismo objeto con otra dimensión. El criterio de que todo objeto tiene 3 dimensiones, se impone como una situación límite, por debajo de la cual, no existen objetos, y por encima de la cual, pueden aumentar en cantidad y, combinarse variadamente, entre sí.

Partiendo ahora del *cubo* del binomio, indicaremos, con color diverso, los nuevos términos que se deben considerar como multiplicadores, dejándolos separados y distintos, de aquellos que indican el objeto mismo en sus dimensiones.

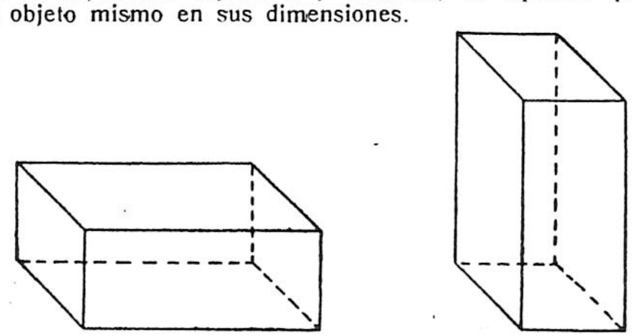


Fig. 261

PARTE I

Comencemos por la primera parte y demos a los términos genéricos *a* y *b*, valores numéricos, llamando a la Aritmética a tomar parte en la construcción, sostenida ahora, solamente, por el Algebra y la Geometría.

Término I $(a^3 + 3a^2b.)$	$a = a^3$	$a + 3a^2b$	a	; $(a^4 + 3a^3b)$
Término II $(b^3 + 3b^2a)$	$a = b^3$	$a + 3b^2a$	a	; $(b^3a + 3b^2\ a^2)$
Término III $(a^3 + 3a^2b.)$	$b = a^3$	$b + 3a^2b$	b	; $(a^3b + 3a^2\ b^2)$
Término IV $(b^3 + 3b^2a)$	$b = b^3$	$b + 3b^2a$	b	; $(b^4 + 3b^3\ a)$

Fig. 262

Demos a *a* el valor 3, a *b* el de 2, conservando las letras para indicar los objetos existentes, y usando las cifras cuando tienen el carácter de multiplicador.

Ahora : $(a^3 + 3\ a^2\ b)\ a$, se puede analizar así :

$$(a^3 + 3\ a^2\ b)\ 3 = \begin{matrix} a^3 + 3\ a^2\ b \\ a^3 + 3\ a^2\ b \\ a^3 + 3\ a^2\ b \end{matrix}$$

Se trata, pues, de tomar tres cubos *a* y tres prismas a^2 b. Llevemos a término esta primera parte de la construcción, poniendo para su realización, también, el elemento medida. Esto, aunque no constituya el caso general, demuestra claramente la posibilidad de materialización de la cuarta potencia de cualquier binomio. Un cubo de 3 cms. de arista y 3 cubos de éstos uno al lado del otro. Si después los 3 cubos se quieren unir, constituyendo un solo objeto, resulta un prisma que corresponde al dato algebraico a^4.

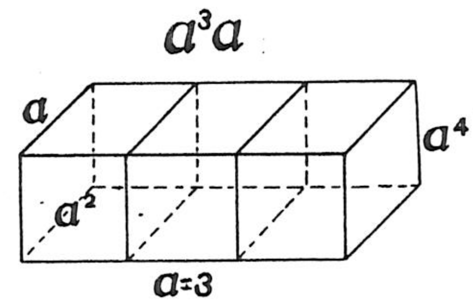


Fig. 263

Pasemos ahora a los tres prismas a^2 b. Construyendo el objeto con los valores establecidos, resultará un prisma de base cuadrada con las medidas : 3. 3. 2. Ahora se trata de tomar tres de estos prismas adyacentes uno al otro, como se hizo con el cubo. Aquí, sin embargo, entra el elemento *posición* del objeto.

Reuniendo tres prismas en un sólo objeto, pueden resultar dos formas esencialmente diversas, según se unan entre sí por la cara cuadrada o por la cara rectangular. El prisma que se apoya sobre el cuadrado se extiende en longitud, continuando su apoyo sobre la cara cuadrada y adhiriéndose por la cara rectangular.

El prisma que está al lado, pero en el interior, se apoya sobre la cara rectangular y se adhiere por la cuadrada.

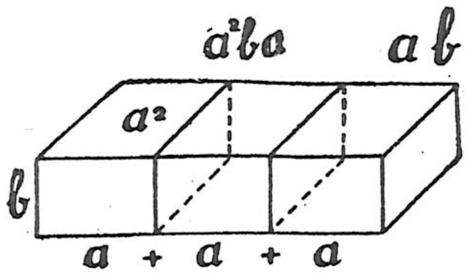


Fig. 264

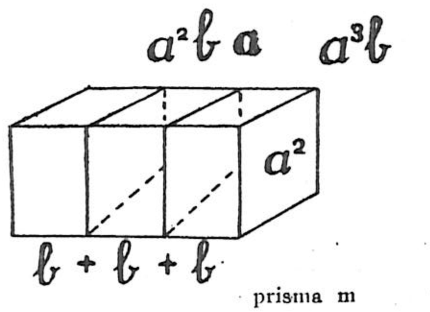


Fig. 265

El prisma que está al lado, pero hacia el exterior, en cuyo sentido no puede extenderse, se apoya y adhiere sobre las caras rectangulares. Ahora, si se une cada grupo en un solo objeto, los dos prismas *S* resultan idénticos pero distintamente apoyados; el uno sobre el cuadrado, como formando un techo y, el otro, sobre el rectángulo como si formase un muro (fig. 266). En cambio, *m* es esencialmente distinto de los otros dos.

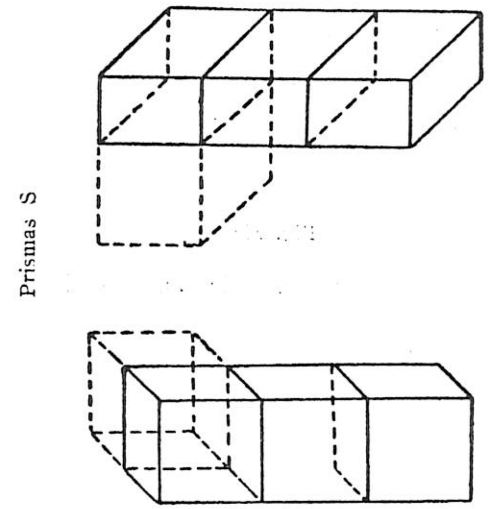


Fig. 266

Efectuando operaciones con los números de medida, resulta la igualdad de volumen de los tres prismas.

$$3 . 3 . 6 = 9 . 6 = 54$$
$$2 . 3 . 9 = 6 . 9 = 54$$

Con su construcción se ha realizado la primera parte, comprendida en la fórmula algebraica

$$(a^3 + 3\,a^2\,b)\,a = a^4 + 3\,a^3\,b$$

PARTE II

$(b^3 \times 3\,b^2\,a)\,a$

Las otras partes de la fórmula presentan análogas interpretaciones. Se pasa a repetir 3 veces el cubo de 2, e igualmente los tres prismas que le están unidos, y de cada grupo se forma un solo objeto,

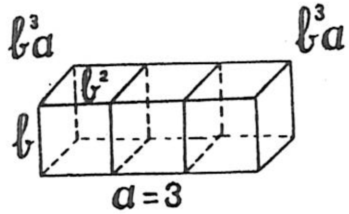


Fig. 267

esto es, un prisma de base cuadrada de cm. 2.2 y largo cm. 6 (esto es, tres veces la arista del cubo) que representa $b^3\ a$ y los tres prismas que forman grupos correspondientes a: $b^2\ a.\ a = b^2\ a^2$.

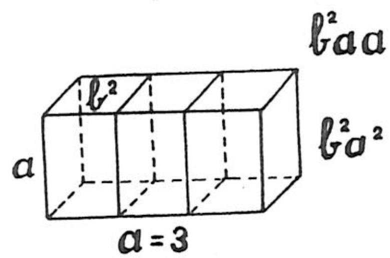


Fig. 268

Uno de éstos se adhiere por la base cuadrada y resulta distinto de los otros dos que se adhieren por las caras rectangulares y que son idénticos, aun cuando, de diversa orientación.

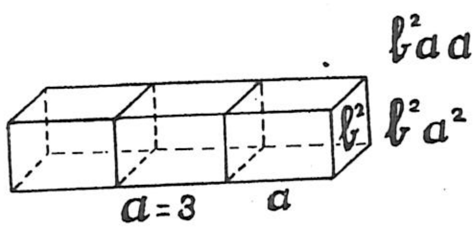


Fig. 269

Así queda traducida en objetos geométricos la segunda parte de la fórmula.

$$(b^3 + 3\ b^2\ a)\ a = b^3\ a + 3\ b^2\ a^2$$

PARTE III

Vamos ahora a las otras dos partes de la fórmula.

$$(a^3 + 3\ a^2\ b)\ b = a^3\ b + 3\ a^2\ b^2$$

En este caso $a\ b$ se traduce en el cubo de 3 repetido 2 veces, en un prisma que tiene las caras cuadradas iguales a a^2

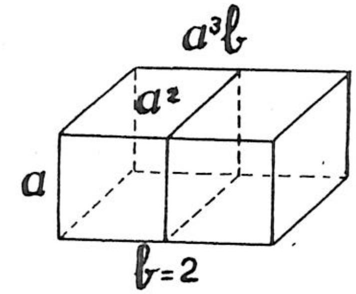


Fig. 270

$a^2\ b$ se distingue en 3 prismas que derivan cada uno de la unión de dos y realizando $a^2\ b.\ b = a^2\ b^2$, en dos formas esencialmente diversas, según que la adherencia tenga lugar por la cara cuadrada o la rectangular.

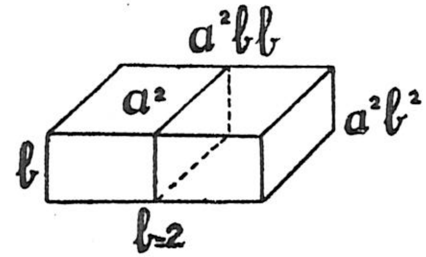


Fig. 271

Así se han construído los objetos que corresponden a la fórmula $a^2\ b + 3\ a^2\ b^2$.

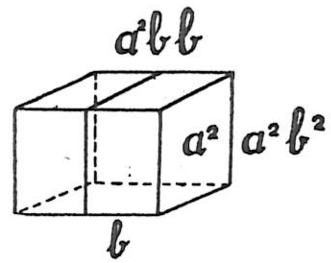


Fig. 272

PARTE IV

Pasemos ahora a la última parte de la fórmula

$$(b^3 + 3\ b^2\ a)\ b = b^4 + 3\ b^3\ a.$$

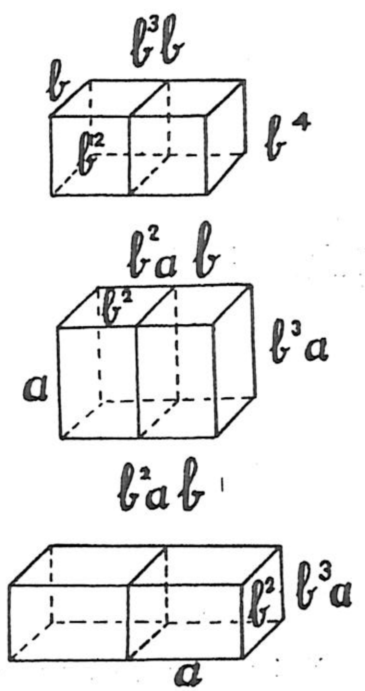
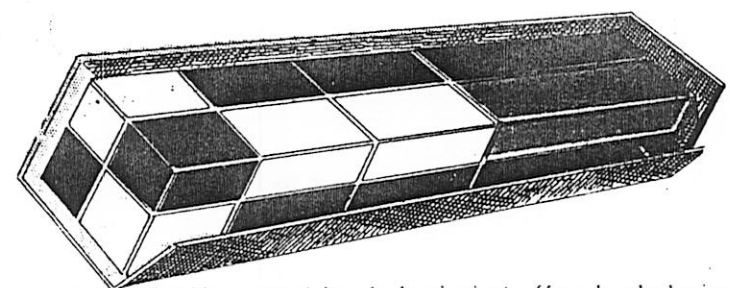


Fig. 273

El pequeño cubo de *b* igual a 2^3 está repetido dos veces y resulta un prisma que corresponde a las medidas 2. 2. 4 y con ésto se construye el objeto que corresponde a b^4. Hay, además. los tres prismas relativos al cubo de 2. que se deben repetir cada uno 2 veces. Estos. según se adhieran por la cara cuadrada o la rectangular, vienen a constituir dos formas esencialmente diversas; uno es 2.2.6 y resulta de dos prismas que se unen por la cara cuadrada. Los otros dos resultan 2.3.4 y son los que se unen por la cara rectangular. De esta manera se han construído objetos geométricos de forma diversa, pero todos prismáticos, que corresponden a la fórmula de la 4.ª potencia del binomio a + b: $a^4 + 4\ a^3\ b + 4\ b^3\ a + 6\ a^2\ b^2 + b^4$. Con ellos se puede componer un objeto prismático que representa la forma de la 4.ª potencia del binomio a × b. Dadas las magnitudes, tomadas en este caso, el objeto es un prisma de caras cuadradas de cm. 5.5 y de una base rectangular de cm. 5,25. Su construcción efectiva, que se obtiene colocando junto los varios trozos componentes, según las relaciones estudiadas, es un trabajo de inteligencia y paciencia que puede satisfacer lo mismo a un niño que a un adulto.

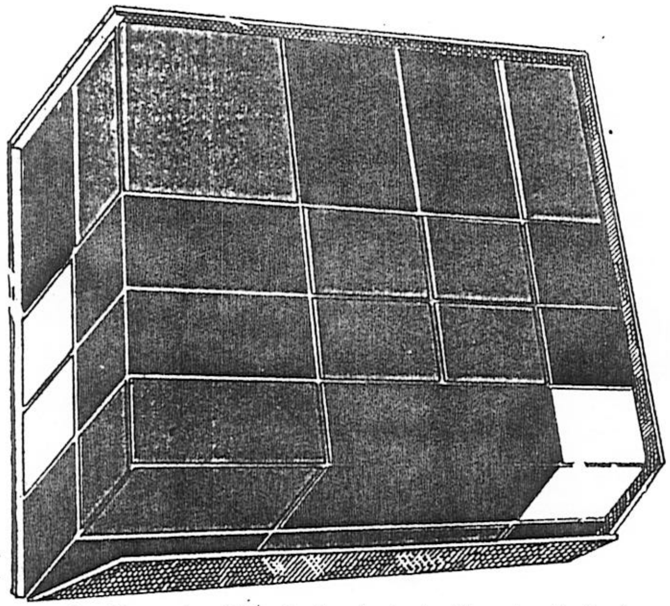


Materealización matemática de la siguiente fórmula algebraica:
$(a + b)^4 = a^4 + 4\ a^3b + 6\ a^2\ b^2 + 4\ a^3\ b + b^4$
$\begin{cases} a = 2 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm.} \end{cases}$

Fig. 274

Con análogo criterio se construye también la 5.ª potencia del binomio, resultando un prisma plano con la cara mayor cuadrada 25.25 y espesor de 5 cm. análoga a la 5.ª potencia representada estudiando las superiores jerarquías del 10 en el sistema decimal: $10^5 = 100.000$. El objeto construído para representar en sus partes los componentes $(a \times b)^5$, puede constituir verdaderamente un juego de ciencia y de paciencia en la interpretación de sus partes y en su correspondencia con los términos algebraicos de la fórmula, como, también, en las composiciones y descomposiciones de las partes.

Aun cuando el trabajo sea, todavía, el de descomponer y re-



Matercalización matemática de la siguiente fórmula algebraica :

$(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + a^5$

$\begin{cases} a = 2 \text{ cm.} \\ b = 3 \text{ cm.} \end{cases}$

Fig. 275

componer un conjunto de objetos separables y manejables ¡qué diferencia. de cuando el niño manejaba los bastones preparándose a contar de 1 a 10 a ahora, que posee en objetos tangibles la realización de fórmulas algebraicas que alcanzan a la 5.ª potencia, que hacen penetrar su conocimiento e interés, en campos que fueron siempre inaccesibles a la inteligencia de la infancia !

SISTEMA METRICO DECIMAL