Dados los números, multiplicando y multiplicador, el niño que actúa de registrador los anota y el que efectúa la multiplicación los compone con los carteles adecuados. Por ejemplo : 4347 × 285.

Fig. 158

Todos los otros carteles, relativos a la composición de los multiplicandos y multiplicadores, están encerrados en una caja, alejados del campo de la operación.

La primera labor es la de descomponer los números separando los carteles (fig. 159).

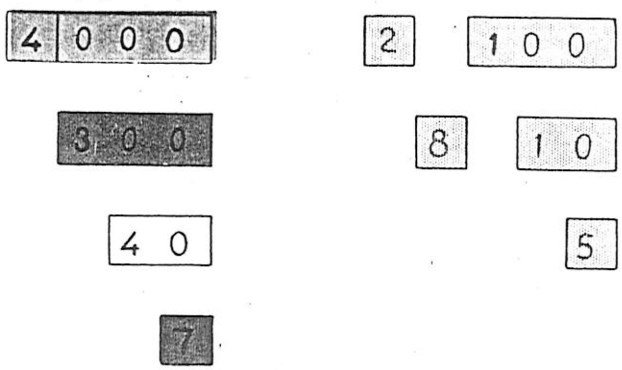


Fig. 159

Después se comienza la multiplicación.

Todos los grupos componentes del multiplicador deben ser multiplicados por cada uno de los grupos del multiplicando.

Se ponen éstos, pues, a un lado y se comienza a trabajar con las unidades del multiplicando (fig. 160), aún cuando se podría comenzar por cualquiera de los grupos.

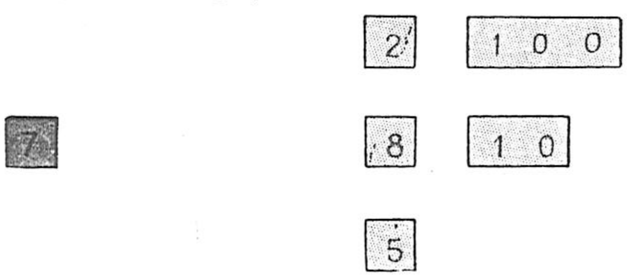


Fig. 160

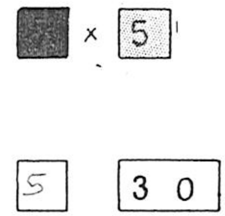


Fig. 161

Se aproximan primero las unidades (fig. 161) ; 7 × 5 = 35. Ahora se pide al banquero la cantidad de 35 y él la toma del correspondiente material bancario.

Estos carteles se guardan en una gran caja : el *acumulador*, donde el banquero guarda, de vez en vez, los carteles relativos a la ejecución de la multiplicación, mezclándolos todos confusamente. Después, se conitnúa operando

Ahora el 7 del multiplicando debe ser multiplicado por las ocho decenas del multiplicador (fig. 162).

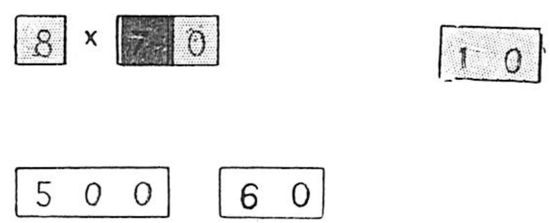


Fig. 162

El 7 del multiplicando permanece en el centro, a su derecha se pone el 10 cubriendo la unidad del 10, con el 7 y el 8 del multiplicador al otro lado, resultando el producto 8 × 70 u 8 × 7 = 56 decenas, esto es : 560. Ahora el banquero debe entregar 560 que se guardan en la caja del acumulador.

El 7 × 200 se obtiene : colocando el 7 en el centro y haciendo resbalar después bajo el 7 la primera cifra del 100.

El producto es 2 × 700 = 2 × 7 centenas o sea 1400.

Y el banquero entrega un billete de 1000 y uno de 400 (fig. 163).

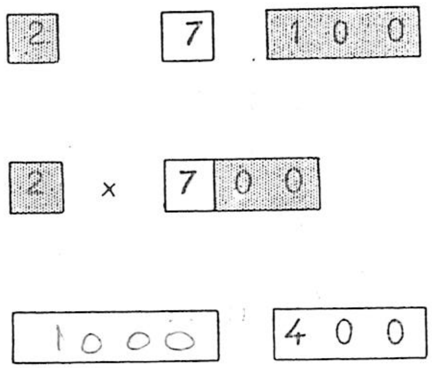


Fig. 163

Cuando el multiplicando es una decena, una centena, etc., la unidad del multiplicador se coloca bajo el último cero del multiplicando. Por ejemplo: 2 × 400.000 = 800.000 (fig. 164).

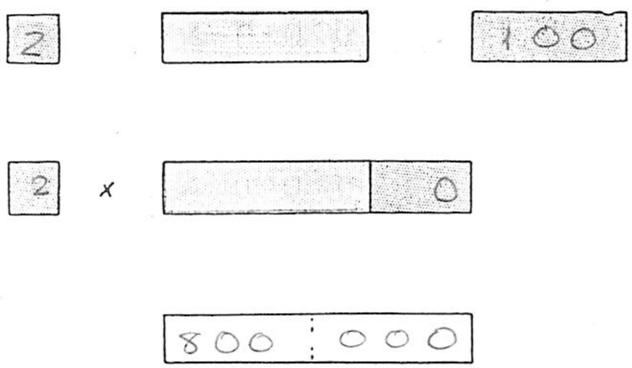


Fig. 164

800.000, pues, es la suma que el banquero debe entregar y que va al acumulador.

Puede suceder que en el banco no queden ya los valores pedidos porque hayan pasado todos los de esa clase al acumulador. Entonces se sacan del acumulador haciendo los cambios oportunos con el banco, en forma que los valores debidos entren en el acumulador. Los cambios entre éste y el banco, no los hace con frecuencia el banquero, sino un tercer niño dedicado a la comprobación y al registro o también, un cuarto niño si el registrador está ya ocupado en su función.

De este modo el operador, el banquero, el registrador, y el niño que comprueba, trabajan hasta el fin.

El registrador vigila el multiplicando y el multiplicador, quitándolos de la circulación cuando han funcionado.

El trabajo último se reparte ahora entre el operador y el banquero, principalmente, pero, también el niño que comprueba debe vigilar atentamente, para que no haya errores, e interviene en caso de necesidad.

Se vacía la caja del acumulador y se buscan los billetes de igual valor, cambiándolos, de vez en vez, por billetes mayores que representan su suma, porque de todos los que se han acumulado debe quedar solamente un billete por cada jerarquía de número y estos billetes, efectuadas las correspondientes superposiciones, dan el producto final en un solo número.

En la operación que venimos efectuando deben quedar al final únicamente, los siguientes carteles (fig. 165) que superpuestos dan el total 4347 × 285 = 1.238.895 (fig. 166).

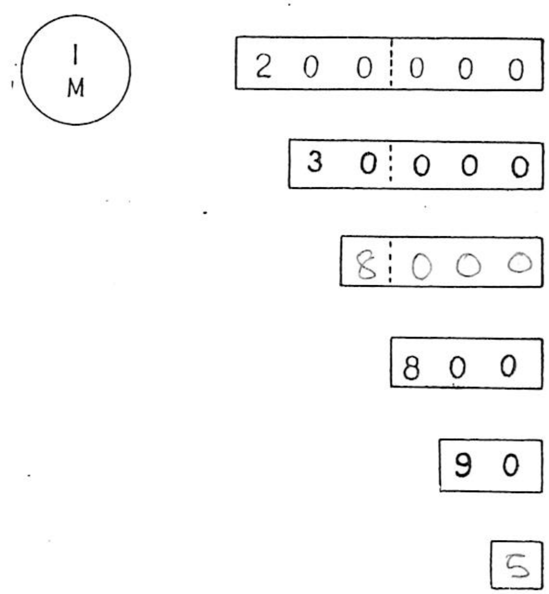


Fig. 165

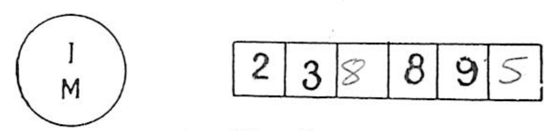


Fig. 166

ALGEBRA

ALGEBRA

RETORNOS REMOTOS

Volver al material de la primera infancia y usarlo aún ; he aquí un retroceso que debe significar reposo mental.

Las tres series de los bloques, la torrecilla roja, los prismas y los bastones largos con las divisiones azules y rojas que distinguen las unidades, esto es, la longitud del bastón más corto. Y además de esto, el alfabeto con sus pequeñas letras de papel de color.

La torrecilla roja ha tenido ya una evolución brillante, esto es, aquella magnífica torre de perlas de diez colores, que contiene el secreto de los números.

Aquí, sin embargo, queremos retroceder, precisamente al estado inicial y repetir los mismos ejercicios que realizaban los niños de cuatro años de edad.

EJERCICIOS CON LOS BASTONES LARGOS

Se disponía entonces de bastones de gradual longitud, uno junto a otro, de modo que todos comenzasen en el mismo nivel precisamente, para poner de relieve la dimensión comparativa, y después, con un trabajo regular, se colocaba el más corto junto al penúltimo que tenía 9 veces lo longitud de aquél ; a continuación el bastón del 2 adyacente al del 2, etc. ; de este modo se formaban todos los bastones ; 10.

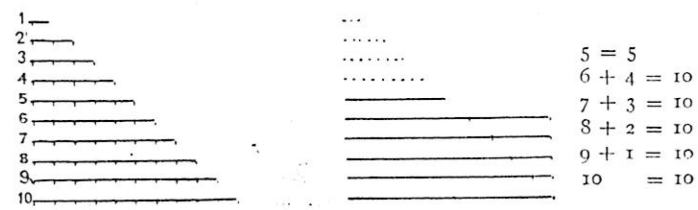
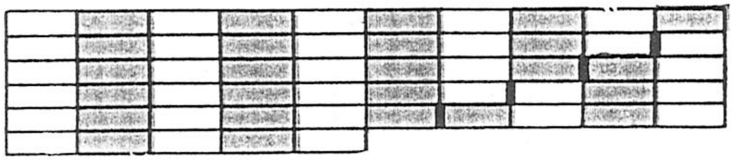


Fig. 167

Unicamente el bastón del 5 quedaba solo, significando la mitad de 10.

Se constituían de aquel modo cinco bastones de 10 y uno de 5, y el recuento de todas las unidades, contenidas en el sistema, quedaba muy facilitado por semejante disposición, convirtiéndose en una multiplicación de $5 \times 10 = 50$ y una suma de $50 + 5 = 55$.

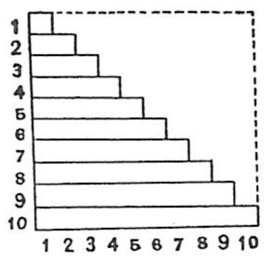


$$\begin{array}{l|l} 10 \quad\;\; = 10 & 10 \times 5 \\ 9 + 1 = 10 & \\ 8 + 2 = 10 & \\ 7 + 3 = 10 & \;\;+ \\ 5 \quad\;\; = \;\,5 & \;\;5 \\ \hline \quad\quad\;\; 55 & \end{array}$$

Fig. 168

Se puede representar esto, mediante un dibujo en papel cuadriculado, colocando en filas sucesivas un cuadrado, una fila de dos cuadrados y así, sucesivamente, hasta 10.

Siendo 10 por los dos lados, siendo 10 las filas superpuestas y 10 los pequeños cuadrados cubiertos por la base, se puede construir un cuadrado, es decir, una figura geométrica, como indica la figura que representa 10^2.



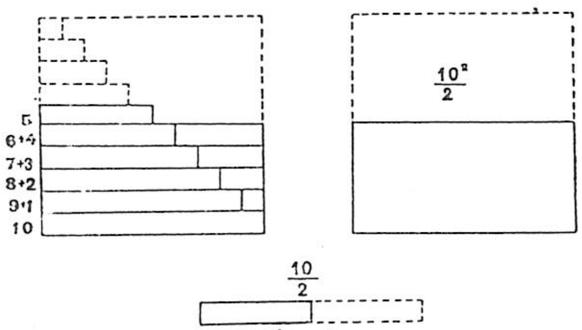


Fig. 169

Disponiendo después el 1 junto al 9, el 2 junto al 8, etc., se logra llenar medio cuadrado, habiéndose formado cinco filas de 10 superpuestas una sobre otra, $\frac{10^2}{2}$, y queda todavía media fila, 5 o sea $\frac{10}{2}$

Por esto, considerando el número mayor a que llega la serie 10, se obtiene, que el total de la suma de la serie natural de los números de 1 a 10 es igual a la mitad del cuadrado de 10 más la mitad de 10.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10^2}{2} + \frac{10}{2} = \frac{10^2+10}{2}$$
$$= \frac{100+10}{2} = 55$$

Si reflexionamos sobre ello, comprenderemos que lo mismo sucedería si se fuera en la serie, más allá del 10, ya que se colocaría siempre el 1 junto a la cantidad penúltima, que difiere de la mayor en una unidad solamente, el 2 en la sucesiva, etc.

Veamos el dibujo del 16.

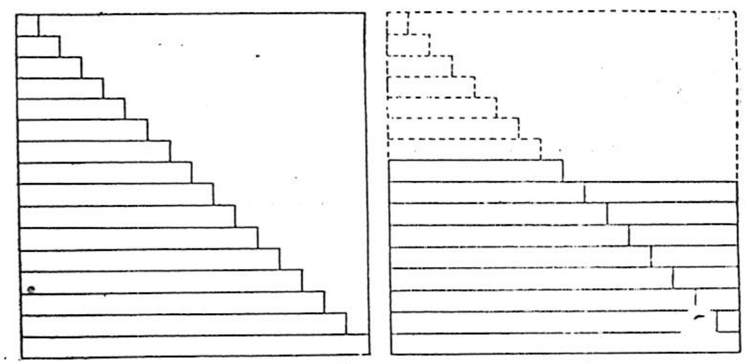


Fig. 170

en el que se agruparon las cantidades, en tal forma, que se obtiene $\frac{16^2}{2} + \frac{16}{2}$

De donde

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16$$
$$= \frac{16^2+16}{2} = \frac{256+16}{2} = \frac{272}{2} = 136$$

Lo cuál resulta mucho más sencillo, que realizar la suma de un número tras el otro. Véase, pues, cómo la disposición geométrica ha facilitado el cálculo.

En efecto, si se hubieran de sumar los números del 1 al 100, es aún más evidente la simplificación, pues, para realizar la suma siguiente

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100$$

basta realizar este simple cálculo, más facilitado aún por el sistema decimal

$$\frac{100^2 + 100}{2} = \frac{10.000 + 100}{2} = 5.000 + 50 = 5.050$$

Y si se tratase de una serie que debiera llegar a un número mucho mayor, como por ejemplo 1.000, el cálculo sería siempre sencillo

$$\frac{1.000^2 + 1.000}{2} = \frac{1.000.000 + 1.000}{2} = 500.000 + 500 = 500500$$

Si se tratase de un número grande, pero no consistente en unidad decimal, como por ejemplo, el 854, entonces, se complicaría el cálculo solamente con la ejecución de sencillas operaciones

$$\frac{854^2 + 854}{2} = \frac{729316 + 854}{2} = \frac{730170}{2} = 365085$$

Para indicar esta simplificación, que es general para la suma de números dispuestos en la serie natural, se puede indicar con una letra n (número) el último al cual llega la serie y con esta fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Si se quiere que el niño llegue con entusiasmo a una fórmula algebraica, no precisa explicarla ni atraer su atención sobre ella, al contrario, conviene no insistir.

Lo que precisa, en cambio, es repetir aquel mismo ejercicio que ocupa tanto tiempo al niño de cuatro años con el desplazamiento de los bastones largos, o sea, repetir agrupamientos que forman todos ellos cantidades iguales a la mayor, y hacer las comprobaciones relativas. Repetir esto con dibujos, con cintas, o bastones construídos como un trabajo manual, etc. Y es así cómo, de repente, la idea se hace tangible y la fórmula que la expresa, no sólo interesante, sino necesaria, como es necesario el lenguaje para expresar las ideas.

Verdaderamente el álgebra, que utiliza el alfabeto, es, con sus fórmulas, un lenguaje de ideas matemáticas y apenas se conoce su significado, viene la tendencia a buscar entre los ejercicios ya realizados, alguna idea más que pueda expresarse mediante fórmulas algebraicas.

CUADRADOS

Pero quedémonos en un nivel más elemental: esto es: la multiplicación con los bastoncillos de perlas.

Repetir tres veces la cantidad representada por bastoncillos de perlas 6 + 4 + 9 quiere decir: repetir tres veces 6, después 3 veces 2 y por fin 3 veces 9. Pero esto sucedería con cualquier bastoncillo; lo mismo es que en vez de 6, 4, 9 se hubieran escogido 2, 8 y 5. O si en vez de repetirlos tres veces, se hubieran repetido ocho veces.

Por lo tanto, hay un hecho que se debe expresar, el cual es independiente de las cantidades mismas.

He aquí el alfabeto que nos ayuda y los paréntesis que entran en juego.

$$a\ (b + c + d) = ab + ac + ad$$

Veamos ahora otro ejercicio. Yo repito tres veces los mismos bastones, 6, 4, 9. Después quiero añadir aún dos veces el grupo 6, 3, 9. En ese caso he repetido la misma cantidad primero 3 y, después, 2 veces.

El 5 se convierte en 3 + 2, los grupos son 6.

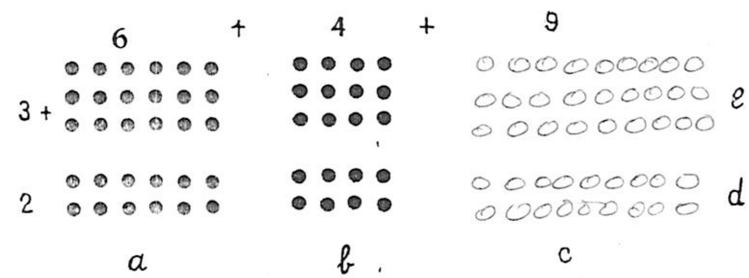


Fig. 171

La operación con cifras, en este caso se expresa así:

$$(3+2)\ (6+4+9) = 3\ (6+4+9) + 2\ (6+4+9) = 3.6+3.4+3.9+(2.6+2.4+2.9)$$

Y en el caso general, con las letras del alfabeto:

$$(e + d)\ (a + b + c) = ea + eb + ec + da + db + dc$$

Otro ejercicio muy interesante consiste, en tomar los pequeños cuadrados de perlas, que representan los cuadrados numéricos de 1 a 10, y ver cuantas perlas hay que añadir y cómo deben colocarse.

Por ejemplo: tengo el cuadrado de 4 y deseo obtener el de 5.

Debo colocar dos filas de 4 en dos lados adyacentes y después una perla en el hueco que queda.

Lo mismo sucede en la figura 173, donde se pasa del cuadrado de 6 al de 7; dos filas de 6 a los dos lados y una perla en el ángulo. Así en todos los casos análogos.

de 4^2 a 5^2 — de 6^2 a 7^2

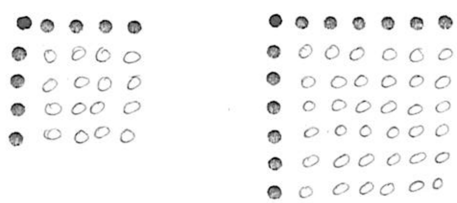


Fig. 172

Los niños, con la característica de su trabajo espontáneo, que es ordenado y paciente, siguen, por entero y ordenadamente, el paso de uno a otro cuadrado.

Las cantidades de perlas necesarias para los pasos, son:

de 2 a 3 = 2 + 2 + 1 = 5 = 5.
de 3 a 4 = 3 + 3 + 1 = 7 = 7.
de 4 a 5 = 4 + 4 + 1 = 9 = 9.
de 5 a 6 = 5 + 5 + 1 = 11 = 10 + 1.
de 6 a 7 = 6 + 6 + 1 = 13 = 10 + 3.
de 7 a 8 = 7 + 7 + 1 = 15 = 10 + 5.
de 8 a 9 = 8 + 8 + 1 = 17 = 10 + 7.
de 9 a 10 = 9 + 9 + 1 = 19 = 10 + 9.

Para cada paso sucesivo, la diferencia entre las perlas que es necesario añadir, es de 2.

Veamos ahora el modo de efectuar el paso a saltos. Por ejemplo, de 5 a 7.

de 5^2 a 7^2

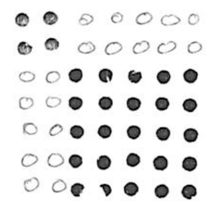


Fig. 173

Aquí precisa añadir dos filas de 5 en cada lado, y el espacio que queda vacío rellenarlo con un pequeño cuadrado de 2.

El cuadrado total obtenido contiene los cuadrados de las dos partes en que fué separado el 7; 5^2 y 2^2 que se encuentran a lo largo de la diagonal. Y el espacio remanente, se llena con dos disposiciones rectangulares de perlas, correspondientes a los productos de las dos partes entre sí: 5 × 2.

Otro ejercicio que se puede emprender nuevamente para estudiar la colocación de las partes en un cuadrado subdividido, es el relativo a las multiplicaciones efectuadas en los cuadrados de puntos.

Aquí pueden emprenderse de nuevo los trabajos manuales con papel de color o los dibujos.

Comencemos por lo más sencillo, o sea, por el lado del cuadrado dividido en dos partes solamente.

Tres cuadrados de papel de diverso color cada uno se recortan, de modo, que con ellos se pueda reconstruir un cuadrado a tres colores, como en la figura 174.

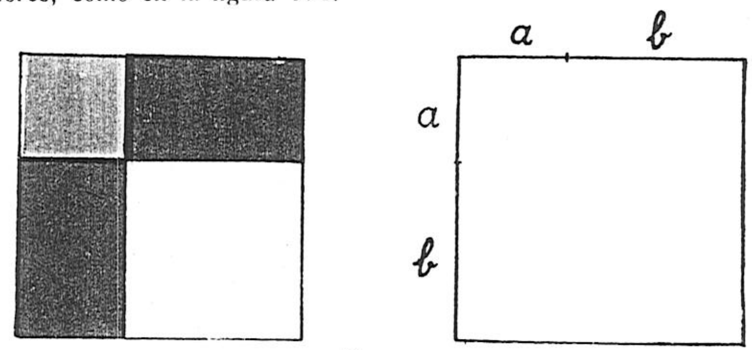


Fig 174

El cuadrado así construído resulta compuesto por cuatro figuras . dos cuadrados y dos rectángulos.

El rectángulo tiene un lado igual a uno de los cuadrados y el otro, igual al del otro cuadrado.

No pudiendo dar un número a estas figuras, que no ofrecen puntos que se puedan contar en medidas determinadas de lados, podremos indicarlos con una letra y llamar, por ejemplo, las dos partes del lado del cuadrado mayor a y b. Entonces, todo el cuadrado se puede indicar así : $(a + b)^2$

Los dos cuadrados internos, teniendo cada uno como lado una de las partes *a*, *b*, se puede representar por a^2 el uno y por b^2 el otro. En cambio. los rectángulos que son iguales y se pueden superponer, representan la combinación de las dos partes del lado y se pueden indicar por *ab*.

El cuadrado entero, es igual a la suma de ambas partes $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Si ahora queremos, en vez de representar simplemente la figura, realizar con estas letras una operación semejante a la que practicamos con los números, se podría indicar así la operación : $(a + b)(a + b)$ donde una $a + b$ es el multiplicando y el otro el multiplicador.

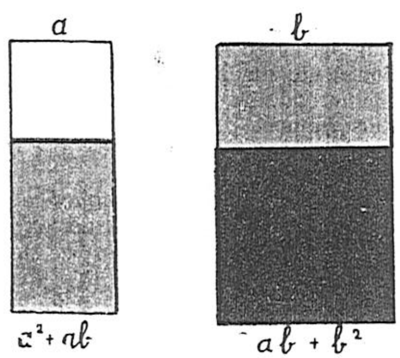


Fig. 175

Y como *aa* y *bb* son a^2 y b^2 se puede escribir, sustituyendo estos signos a aquellas combinaciones : $a^2 + ab + ba + b^2$.

Pero *ab* y *ba* son el mismo rectángulo que se repite 2 veces y $ab + ba$ se puede escribir 2 ab.

Por lo tanto $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

$$(a + b)(a + b) =$$
$$(a + b)a + (a + b)b =$$
$$a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b b =$$
$$a^2 + ba + ab + b^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

Fig. 176

Ahora bien. Aquel $(a + b)$ se llama binomio (que quiere decir dos números) e indica las partes en que se halla dividida la línea entera ; las dos partes forman un solo todo. el lado, y por ello, se encierran dentro de un paréntesis.

He aquí un cuadrado con el lado dividido en tres partes.

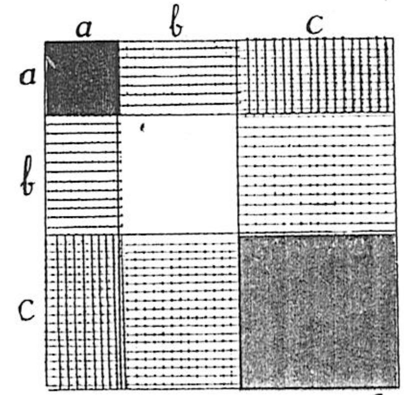


Fig. 177

El dibujo hace evidente la disposición de las figuras ; los cuadrados a lo largo de la diagonal y los rectángulos iguales que se hallan simétricamente colocados. También aquí, no habiendo puntos que contar, sino figuras por ver, se podrían llamar genéricamente a, b, c, las tres partes en que se halla dividido el lado e indicar los tres cuadrados así : a^2, b^2, c^2 mientras los rectángulos, se podrían indicar según las combinaciones de sus lados.

ab ...... ac en la primera línea superior.
ba ...... bc en la línea siguiente.
ca ...... cb en la tercera.

Así, las tres series superpuestas de figuras se pueden indicar del modo siguiente :

1.° = línea superior : $a^2 + ab + ac$.
2.° = línea media : $ba + b^2 + bc$.
3.° = línea inferior : $ca + cb + c^2$.

Todo este conjunto forma el cuadrado que tiene como lado $a + b + c$. Esto es $(a + b + c)\ (a + b + c)$.

Por lo tanto, siguiendo las normas establecidas con los números, tendremos :

$$(a+b+c)\ (a+b+c) = \begin{array}{l} a^2+ab+ac+ \\ ba+b^2+bc+ \\ ca+cb+c^2 \end{array}$$

Lo que resalta más, si se emplean colores distintos para las letras que indiquen el multiplicando y el multiplicador.

$$\begin{array}{l} a^2 + ab + ac + \\ ba + b^2 + bc + \\ ca + cb + c^2 \end{array}$$

Fig. 178

Ahora, todas estas agrupaciones de letras se pueden ordenar mejor ; colocando primero en fila todos los cuadrados, y después, reuniendo grupos iguales, con la indicación de que están repetidas dos veces, puesto que en la multiplicación, el orden de factores no altera el producto.

Y el producto, que indica la superficie de todo el cuadrado, queda simplificado así :

$$(a+b+c)\ (a+b+c) = a^2+b^2+c^2 + 2\ ab + 2\ ac + 2\ bc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2cb$$

Fig. 179

Los tres términos que constituyen uno solo, como $(a + b + c)$, que representan juntos al lado de un cuadrado, se llama *trinomio* y los tres se encierran dentro de un paréntesis. Si los términos son cuatro, por ejemplo $(a + b + c + d)$ se llama *cuatrinomio*. Si son 5, $(a + b + c + d + e)$, *pentanomio*, etc.

Hagamos el dibujo de un cuatrinomio, donde los términos estén expresados numéricamente, como en la fig. 180.

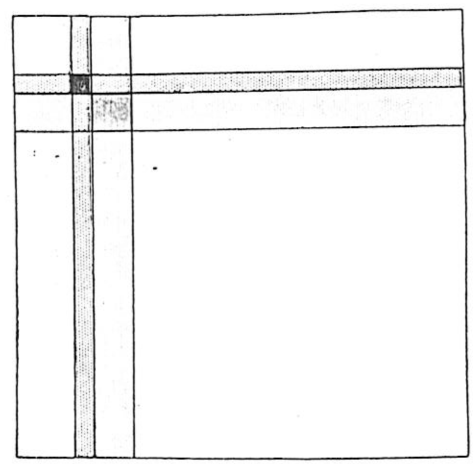


Fig. 180

Los primeros números son pequeños y, por ello, aparecen indicados por líneas breves, el último, en cambio, es más grande y la figura toma el aspecto de ornamento de un ángulo.

Este ornamento de ángulo es el dibujo de un cuatrinomio : $3 + 1 + 2 + 7$.

Aquí el papel cuadriculado sustituye, con los cuadrados, los puntos y permite el cálculo numérico de todas las figuras componentes. Sería $4 \times 4 = 16$.

PRISMAS

Volvamos a la serie de bloques usados en la «Casa de los Niños»

Sería interesante poder construir los bloques por medio de listones todos iguales al prisma más pequeño, que tiene un centímetro de lado en el cuadrado de sección.

En los otros prismas, el lado del cuadrado de sección, crece sucesivamente un centímetro hasta 10.

Se ha preparado un material, que permite efectuar estos pasos. Primero, se usaban bastoncillos separados, pero la práctica, hizo necesario el unirlos, constituyendo, una especie de tablitas correspondientes a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bastoncillos o listones. Estas uniones consisten en tablitas, donde la separación de los listones está dibujada, y permite el contarlos. También los prismas están dibujados, lo mismo en las caras rectangulares, que en las caras de secciones.

Es decir, que los prismas tienen las señales de un «análisis» que permite evaluar el número de unidades que los constituyen.

Se ve, entonces, que, para pasar del *primero* al *segundo* prisma, precisa añadir tres unidades, esto es, que el segundo prisma consta de 4 bastoncillos.

Habiéndolo construído así, sustituye a este conjunto el segundo prisma, hecho de una pieza, pero que está dibujado en su parte externa indicando la unidad.

A éste se unen los listones sueltos, que conducen al prisma de 3, con cuadrados de sección. Precisan : dos listones para un lado y dos para el otro y queda un espacio, en un ángulo, que se rellena con un bastoncillo.

Para pasar de uno a otro, fueron precisos 5 bastoncillos o sea unidades y así sucesivamente.

Finalmente, para pasar del prisma de 9 al de 10 se han debido cubrir dos caras con nueve bastoncillos y ha quedado el espacio hueco de siempre correspondiente a uno ; es decir, que el número de unidades, igual al que se utilizaba para el paso entre los sucesivos cuadrados de perlas.

Es decir, que las diferencias de los prismas corresponden a las diferencias de los cuadrados ; aquel lado que en todos tiene la misma longitud no arrastra variación alguna al cálculo. Aún cuando alcanzase 20 metros de longitud, no tendría influencia alguna en los cálculos de las relaciones entre los prismas.

En el paso de los listones largos para pasar del listón de 9 al de 10 bastaba añadir una unidad.

En los prismas que varían según los cuadrados precisan en cambio 19 unidades para pasar del penúltimo al último.

Si después se confrontan los dos extremos de la serie se encuen-

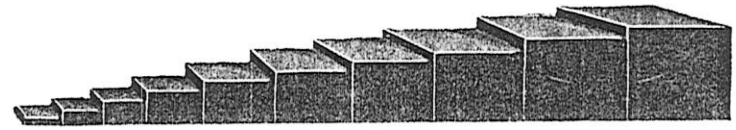


Fig. 181

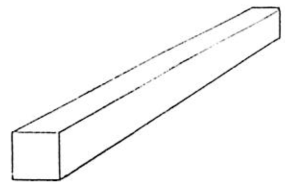


Fig. 182

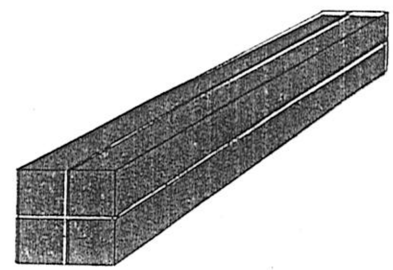


Fig. 183

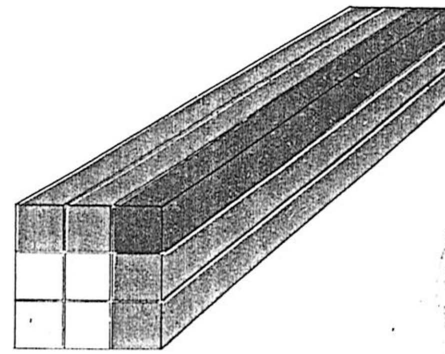


Fig. 184

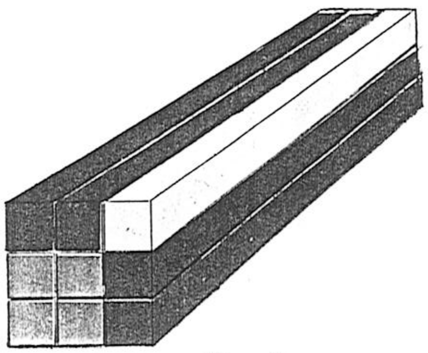


Fig. 185

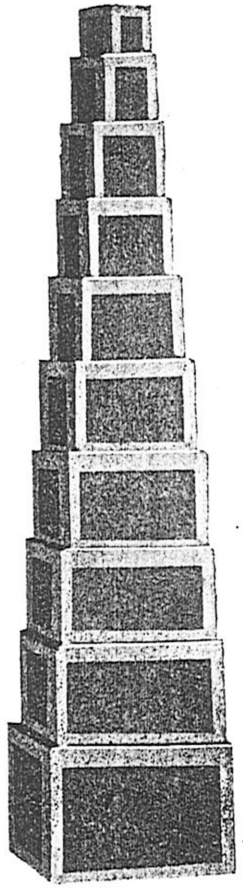


Fig. 186

tra que para los listones largos se va de 1 a 10 y para los prismas de 1 a 100 o sea de 1 a 10^2.

Los cálculos referentes a las relativas dimensiones de la serie graduada de prismas se reducen, pues, a los cálculos de sus secciones, es decir, a los cálculos que se podrían llevar a cabo sobre figuras planas, porque aquellos difieren solamente en sus secciones respectivas.

CUBOS

Estudiando análogamente los pasos de cubo a cubo en la torre roja, se presenta el problema de encontrar cuantos pequeños cubos, que son iguales al primero o sea al más pequeño, precisan para pasar de un cubo a otro y como hay que disponerlos para completar un cubo más grande.

A tal fin, hemos hecho construir muchos cubos pequeños que tienen un centímetro de arista. Pero, siendo difícil la construcción exacta con tales medios, porque caían los pequeños cubos y con la superposición concluían, sumados muchos, por superar los límites debidos, hemos hecho construir tablillas cuadradas representando el conjunto de pequeños cubos que serían necesarios para cubrir las caras de los cubos grandes. Además, sobre los mismos cubos hemos dibujado las subdivisiones relativas a las unidades que los componen.

Con tal material se puede fácilmente pasar de un cubo al sucesivo en toda la serie de 1^3 a 10^3 (Fig. 186).

Para pasar del primer 1^3 al segundo 2^3 es preciso, ante todo, proceder como se procedió con los cuadrados

Uno de un lado, uno del otro lado, y uno para rellenar el espacio que dejaron estos dos.

Después hay que doblar el cuadrado de dos así obtenido y se precisan 8 pequeños cubos para formar el cubo de 2 y, por lo tanto, para pasar del 1 al 2.

Para construir el cubo de 3, precisa cubrir 3 caras adyacentes con tres cuadrados de 2. Quedan, entonces, tres espacios entre estas caras y precisan tres listones de tres para rellenarlos. Después queda aún, en el punto en que éstos debieran encontrarse, un espacio que se rellena con un pequeño cubo.

Han sido, pues, necesarios:

Tres cuadrados pequeños de dos	$= 3 \times 2^2 = 3 \times 4 =$	12
más tres listones de dos	$= 3 \times 2 =$	6
más un pequeño cubo		1
		19

esto es, 19, pequeños cubos.

Sustituyendo ahora el cubo entero de 3, para pasar al de 4 se presenta la misma construcción

$$\begin{array}{ll} 3\ (3^2 \times 1) = 3 \times 9 = & 27 + \\ 3\ (1^2 \times 3) & 9 \\ 1^2 & 1 \\ \hline & 37 \end{array}$$

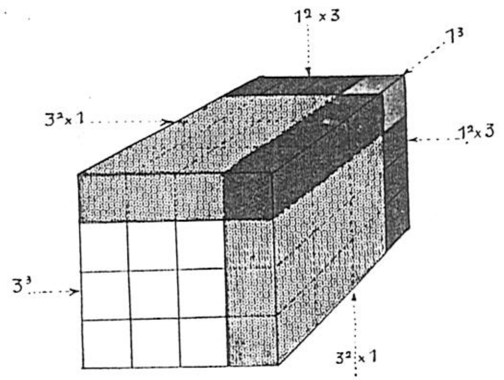


Fig. 187

Son, pues, necesarios 37 pequeños cubos.

Veamos ahora cuántos se precisan para pasar de 9 a 10. Con disposición análoga, resulta:

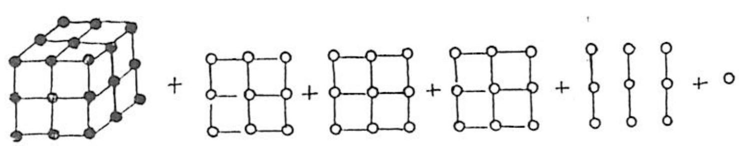
$$
\begin{aligned}
3 \times 9^2 \times 1 &= 3 \times 81 = 243 \\
3 \times 9 \times 1^2 &= = 27 \\
1^3 &= = 1 \\
\hline
& 271
\end{aligned}
$$

Para pasar, pues, del cubo de 9 al de 10, son necesarias 271 unidades, mientras para pasar del prisma de nueve al de 10 bastaban 19.

Estos ejercicios pueden ser repetidos—aritméticamente—usando el material de perlas relativo al cuadrado y al cubo de los números de 2 a 10.

En efecto, pasando (por ejemplos), del cubo de 3 al de 4, se pueden añadir al cubito de 3, los tres cuadrados de perlas (3^2), y después, tres bastoncitos de perlas, y, en fin, 1 perla. Así se puede calcular contando unidad por unidad el pasaje descrito:

$$3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1 = 27 + 27 + 9 + 1 = 64 = 4^3$$



También para los cubos, se pueden realizar pasos salteados, por ejemplo, de 4 a 6.

Sobre cada una de las tres caras adyacentes del cubo de 4 se ponen dos prismas $4^2 \times 1$ y quedan entonces, a lo largo de las aristas, espacios que hay que llenar con 3 listones en cada lado formados de 4 prismas $2^2 \times 1$ y en el punto de su encuentro queda un espacio que se reilena con un pequeño cubo de 2 de arista.

He aquí, pues, lo añadido

$$
\begin{aligned}
3 \times (2 \times 4^2) &= 3\ (2 \times 16) = 3 \times 32 = 96 \\
3 \times (4 \times 2^2) &= 3\ (4 \times 4) = 3 \times 16 = 48 \\
2^3 &= 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 \\
\hline
& 152
\end{aligned}
$$

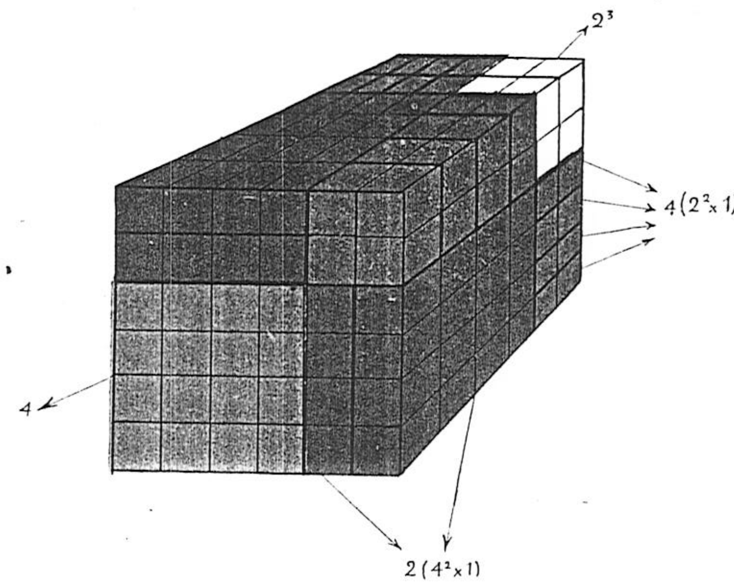


Fig. 188

Veamos con números

$$
\begin{aligned}
4^3 &= 4 \times 4^2 = 4 \times 16 = 64 \\
6^3 &= 6 \times 6^2 = 6 \times 35 = 216
\end{aligned}
$$

Ahora bien $\begin{array}{r} 216 \\ -\ 64 \\ \hline 152 \end{array}$

La diferencia entre ambos cubos es, precisamente, 152.

Otro ejemplo de paso salteado; pasar del cubo de 6 al cubo de 8.

Sobre tres caras adyacentes se colocan dos prismas de $6^2 \times 1$, en total 6 prismas de 6×1 (cuadrados de 6). Quedan a lo largo de las aristas espacios que corresponden a un prisma largo de 6 que tiene como sección un cuadrado de 2.

$2^2 \times 6$.

Finalmente, en el ángulo en que convergen las partes añadidas, queda un espacio al que corresponde un cubo de 2.

Las partes añadidas son, pues:

6 cuadrados de 6	6×36	$= 216$
3 prismas 6×2^2	3×24	$= 72$
1 cubo de 2		$= 8$
		296

Calculemos ahora la diferencia numérica entre el cubo de 8, al cual se ha llegado con la adición calculada arriba, y el cubo de 6 del cual se ha partido.

$$8 \times 8^2 = 8 \times 64 = 512$$
$$6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216$$
$$296$$

CUBO DEL BINOMIO

La disposición resultante de las partes del cubo así construído y la parte constante que se repite en cada caso, conduce a fórmulas generales que se pueden representar con los símbolos genéricos del alfabeto.

Así se ve que el cubo de 8, resultado de $(6 + 2)^3$, está construído con los cubos de las dos partes 6^3 y 2^3.

Además, hay tres prismas que resultan de los dobles cuadrados, colocados sobre las tres caras adyacentes—éstos resultan del cuadrado de 6 repetido dos veces—es decir $6^2 \times 2$.

Y se precisan, además, otros tres prismas que tienen como sección 2^2 y como longitud 6, es decir $2^2 \times 6$.

El conjunto, pues, consta de

$$6^3 + 2^3 +$$
$$3\ (6^2 \times 2) +$$
$$3\ (2^2 \times 6)$$

Los prismas, pues, son de dos especies. uno tiene, por cara el cuadrado de la parte mayor y, por altura, la parte menor, y el otro, en cambio, tiene, por cara de la sección, el cuadrado de la parte menor y por altura, la parte mayor.

Esta distribución, se puede comprobar en todas las combinaciones posibles y es general. Se puede expresar mediante la fórmula

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$$

la cual desarrolla e indica la parte que constituyen el cubo de un binomio (fig. 189-190).

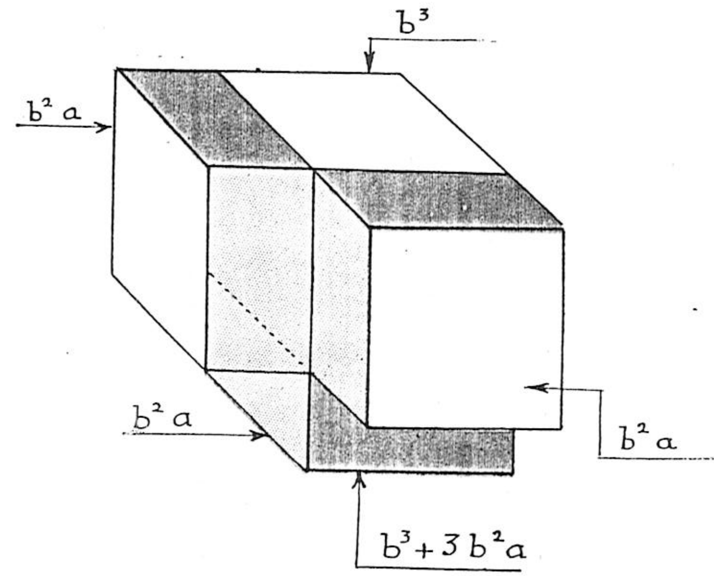


Fig. 189

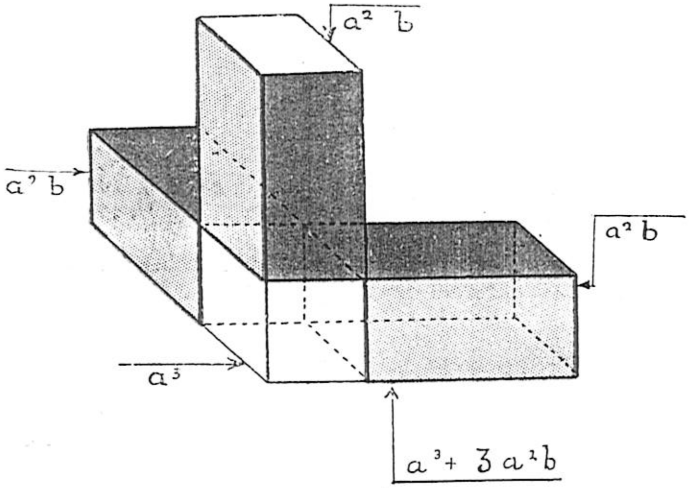


Fig. 190

Para hacer tangible dicha fórmula, hemos hecho construir las partes de un cubo según aquélla, que son dos cubos negros y los prismas de cristal y, por lo mismo, transparentes.

Se ve, entonces, la posición recíproca de los cubos, que están colocados diagonalmente en dos planos distintos (plano del cubo *a* y plano del cubo *b*) tocándose por el vértice (fig. 191).

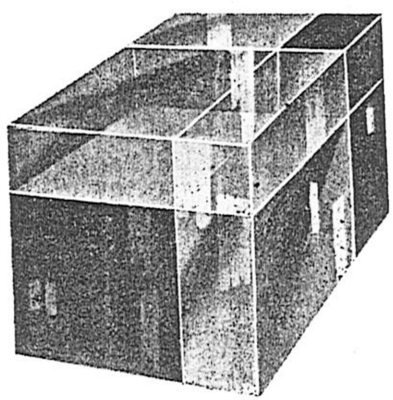


Fig. 191

Cada cubo está rodeado de tres lados de los tres prismas que son sus satélites, teniendo la misma sección cuadrada de dicho cubo y la altura, igual a la arista del otro cubo.

Observando las caras, son todas iguales, reproduciendo la figura del cuadrado de un binomio, donde se ven los cuadrados correspondientes a cada parte, colocados diagonalmente.

Colocando, pues, una luz eléctrica detrás del objeto, en una habitación a obscuras, resaltan las figuras negras de los dos cubos, mientras las aristas de los prismas de cristal, de uno y otro lado, proyectan sus sombras sobre un disco blanco, colocado para reflejarlas.

El ejercicio de componer o formar este resto con sus partes, es aún más sencillo y hacedero que construir la Torre Roja de los diez cubos. Llamando *a* y *b* las aristas de los dos cubos negros que intervienen en la construcción, se pueden interpretar los objetos según una indicación algebraica.

Se preparan carteles pequeños que indican, cada una de las partes componentes, por medio de la correspondiente fórmula algebraica (fig. 192); entonces, mezclados y tomados al azar, se va buscando el objeto correspondiente a cada uno y se pone junto a él, como hacían los niños de cuatro años con los primeros carteles

a^3	a^2b	a^2b	a^2b
b^3	b^2a	b^2a	b^2a

Fig. 192

de los números o con los bastones de la numeración. O también, a la inversa, se alinean (o se escogen al azar) los objetos y después, se busca para cada uno su correspondiente cartel algebraico. He oído a niños que habían combinado un ejercicio para dos. El uno tenía los carteles en su mano y decía al otro «dame b^2a» o también «dame b^3» pretendiendo, en esta forma, recibir un objeto; acaso recordaban la famosa lección de «los tres tiempos». Al escoger los prismas, aun cuando los niños reconozcan a primera vista la correspondencia con el cubo de su grupo, continuan durante largo tiempo superponiendo sus caras.

CUBO DEL TRINOMIO

El ejercicio ha suscitado tanto interés, que hemos pasado en seguida al cubo de un trinomio, preparando un material que conduce directamente a la fórmula algebraica corrrespondiente.

El material está compuesto en total de 27 objetos; esto es, tres cubos y 24 prismas.

La mayor parte de los prismas es de sección cuadrada y son iguales tres a tres. Existen, además, seis prismas iguales entre sí que no tienen ninguna sección cuadrada.

Los colores ayudan a distinguir los objetos en sus relaciones recíprocas y, al propio tiempo, conducen a la justa construcción del gran cubo que debe resultar del conjunto de los 27 objetos.

Los colores son tres y distinguen los tres pequeños cubos componentes ($a^3 + b^3 + c^3$). Por ejemplo, rojo a^3, azul b^3 y amarillo c^3.

Los prismas iguales tres a tres, se refieren a los pequeños cubos, cada cubo pequeño tiene como satélites suyos 2 grupos de 3 prismas, (en la figura hay representado un solo prisma de cada grupo) que tienen todos la misma sección cuadrada correspondiente a una cara del cubo pero la altura de cada uno de los 3 prismas de un grupo es igual a la arista de uno de los dos cubos remanentes, y la altura del segundo grupo es igual a la arista del tercer cubo.

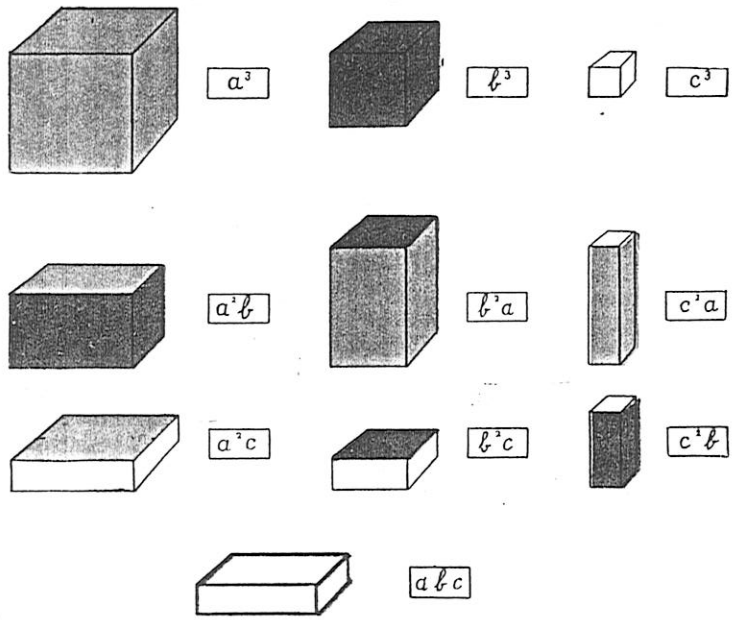


Fig. 193

a^3	b^3	c^3	a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
			a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
			a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc
									abc
									abc
									abc

Fig. 194

1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
a^3	b^3	c^3	a^2b	a^2c	b^2a	b^2c	c^2a	c^2b	abc

Fig. 195

Así, por ejemplo, respecto al cubo a^3—que es rojo—hay tres prismas con sección a^2 y por lo mismo roja como el cubo a^3, y de altura correspondiente a *b* (y por lo mismo con las caras laterales azules). En cambio, los otros tres prismas de sección a^2 teniendo la altura de c tienen las caras laterales amarillas como el cubo c^3.

Lo mismo sucede con las otras series de prismas de sección cuadrada que se refieren a los cubos b y c.

Finalmente, los seis prismas iguales entre sí, que no poseen ninguna cara cuadrada, pero que tienen tres aristas desiguales a, b y c, tienen las aristas, de tres colores distintos, iguales a los de los cubos correspondientes.

Es evidente, que los colores sólo tienen una importancia relativa en la construcción del cubo resultante: el cubo del trinomio.

Conjuntamente con dichos objetos, existen pequeños carteles con la fórmula que distingue cada uno de ellos (fig. 194); y los carteles con los números 1, 3 y 6 indican las repeticiones de las piezas a las cuales corresponden (fig. 195). Estos carteles son en justo número, de modo que puedan colocarse encima de cada uno de los objetos.

El primer ejercicio es el que se ejecuta con el material sólido, mezclando los 27 trozos relativos al cubo de un trinomio y buscando después los prismas iguales entre sí, para agruparlos según el propio criterio.

Un ejercicio sucesivo consiste. en conocer la relación de los prismas con los cubos, lo que se logra fácilmente, gracias a los colores y, de ese modo, se hace posible colocar sobre cada objeto el cartel correspondiente : por ejemplo, a^2 b, c^2 b o abc. etc.

Concluída esta labor se puede proceder a dos composiciones, una es la construcción del cubo del trimonio con los 27 objetos, colocando cada uno de ellos en el lugar correspondiente. La otra, es la disposición de los pequeños carteles que se pueden agrupar (sumándolos ordenadamente) colocando un número en vez de los carteles iguales (fig. 196).

Así

$$\boxed{a^2} + \boxed{b^2} + \boxed{c^2} +$$
$$+ \boxed{3}\,\boxed{a^2b} + \boxed{3}\,\boxed{b^2a} + \boxed{3}\,\boxed{c^2a} +$$
$$+ \boxed{3}\,\boxed{a^2c} + \boxed{3}\,\boxed{b^2c} + \boxed{3}\,\boxed{c^2b} +$$
$$+ \boxed{6}\,\boxed{abc}$$

Fig. 196

Lo que constituye la fórmula algebraica del cubo del trinomio.

La construcción del cubo, pone de relieve la posición recíproca de los tres cubos pequeños, los cuales atraviesan el cubo grande diagonalmente, del final de una arista al final de la opuesta, manteniendo contacto entre sí por el extremo de una de sus aristas respectivas y quedando situado en planos diversos : plano del cubo a, plano del cubo b y plano del cubo c. (fig. 197).

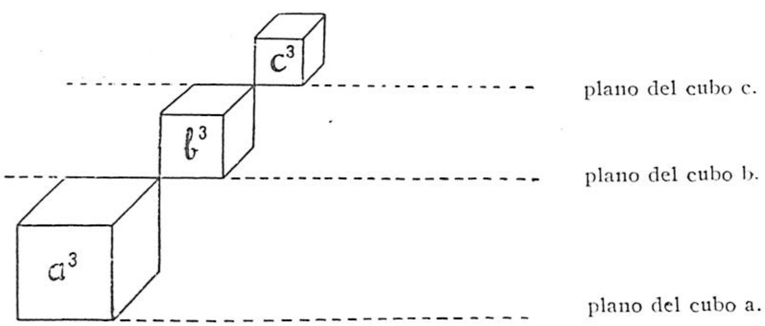


Fig. 197

RAIZ CUADRADA

RAIZ CUADRADA

Considerar el cuadrado de un número, es considerar una multiplicación con caracteres especiales; el número repetido por sí mismo.

N.	N.²	N.³
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

Tabla de los cuadrados y cubos de los números 1 a 10 para el cálculo de las raíces

10 × 10 es el cuadrado de 10. En el cuadrado del número, el número que se repite por sí mismo se llama raíz del cuadrado.
El lado del cuadrado corresponde a la raíz (fig. 198).

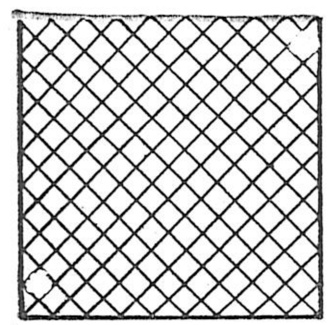


Fig. 198

Ahora hemos de efectuar una operación opuesta a la de averiguar el cuadrado. Esta operación opuesta consiste en hallar la raíz cuadrada de un número.

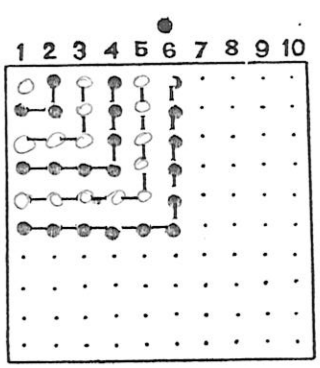
Dado el número 36 busquemos su raíz. Quien conserve en la memoria la tabla de multiplicar, encuentra en seguida que la raíz de 36 es 6, toda vez que $6 \times 6 = 36$.

Si, en cambio, el número cuya raíz quisiera averiguarse fuera 3, quien recuerde la tabla de multiplicación, comprenderá en seguida que en 38 hay un cuadrado 6×6—el cuadrado de 6—más un resto de 2 unidades.

$$38 = 36 + 2 = (6 \times 6) + 2$$

El signo para indicar la raíz cuadrada de un número es el siguiente: $\sqrt{36} = 6$. $\sqrt{38} = 6$ con un resto de 2.

Usemos ahora el material. Tomaremos la tabla que nos ha servido para los primeros estudios sobre la multiplicación. Teniendo al número 36 representado por 36 perlas separadas, procuraremos construir con ellas un cuadrado cada vez mayor; de 1, de 2, de 3, de 4 etc., colocando las perlas angularmente, mientras tengamos perlas disponibles:



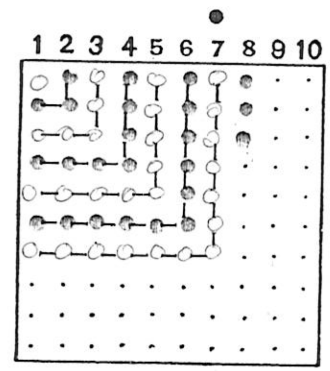
$\sqrt{36} = 6$

Fig. 199

Disponiendo las perlas en disposiciones semejantes sucesivas, se alcanza, como indica la figura, al cuadrado de 6. La raíz está indicada por el número de los colocados en la parte superior, al cual, se llega construyendo, sucesivamente, un cuadrado siempre mayor. En este caso es 6.

Si no se logra completar un nuevo cuadrado, la cantidad de perlas insuficiente, constituye un resto.

Repitamos ahora el ejercicio con 52 perlas.



$\sqrt{52} = 7$
con resto de 3

Fig. 200

Se llega con ellas ha construir el cuadrado de 7; $7 \times 7 = 49$ y quedan tres perlas como resto. Por lo tanto, la raíz cuadrada de 52 es 7, con un resto de 3. $\sqrt{52} = 7 +$ resto 3

Esta sencillísima operación puede repetirse muchas veces. No es una multiplicación ni una división y, aunque se trata de disponer unidades en forma semejante a como se hacía en las operaciones precedentes, aquí la disposición consiste en construir un cuadrado, con el fin de conocer su lado.

La operación se llama *extracción de raíces*.

RAICES DE MAS CIFRAS

EJERCICIOS PREPARATORIOS DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO

Si el lado del cuadrado en vez de representar un número único, representa la suma de dos números (un binomio) sobreviene una complicación semejante a la que se estudió en las pequeñas multiplicaciones dentro del cuadrado dividido en partes, y observada después en álgebra al estudiar el cuadrado del binomio, trinomio etc. Así, en la figura 201 se observan dentro del cuadrado pequeños cálculos de multiplicación que sumados nos dan el producto total $\sqrt{64} = 8$ elevado al cuadrado, esto es, 5 + 3 elevado al cuadrado.

	5	+ 3	
5	5 × 5 = 25	3 × 5 = 15	25 +
			15 ×
+ 3	5 × 3 = 15	3 × 3 = 9	15 +
			9 =
			64

Fig. 201

Si aplicamos al cálculo una interpretación relativa al sistema decimal, y si a las partes en las cuales está dividido el lado del cuadrado se atribuyen diferentes valores jerárquicos, entonces se obtienen resultados muy distintos (Fig. 202).

	50	+ 3	
50	50 × 50 = 2500	3 × 50 = 150	2500 +
			150 +
+ 3	50 × 3 = 150	3 × 3 = 9	150 +
			9 =
			2809

Fig. 202

El número, entonces, en vez de ser 5 + 3 = 8 se convierte en 50 + 3 = 53, y todos los cálculos interiores que se refieren a las partes que constituyen el cuadrado, forman conjuntamente un número que es el cuadrado de 53, $53^2 = 2.809$.

Un ejercicio atrayente, consiste, en confrontar un rectángulo subdividido en partes (esto es, constituído por dos lados, cada uno de los cuales representa la suma de partes determinadas) como, por ejemplo, el rectángulo (4 + 6 + 2 + 3) (8 + 4 + 5), o sea 15 × 17 — calculado solamente en relación con el valor absoluto de los números— ; y calcular después el mismo rectángulo cuando sus partes se refieren a diversos valores jerárquicos.

En el primer caso, las distintas figuras representan los siguientes productos parciales:

$$32 + 48 + 16 + 24 = 120$$
$$16 + 24 + 8 + 12 = 60$$
$$20 + 30 + 10 + 15 = 75$$
$$255$$

que en total dan el número 255.

	4	+ 6	+ 2	+ 3	
8	32	48	16	24	= 120
+ 4	16	24	8	12	= 60
+ 5	20	30	10	15	= 75
					= 255

Fig. 203

En el segundo los productos se forman entre los dos términos. (4.000 + 600 + 20 + 3) (800 + 4 + 5) y son:

3.200.000	160.000	20.000
480.000	24.000	3.000
16.000	800	100
2.400	120	15
3.698.400	184.920	23.115

constituyendo su suma el número 3.906.435.

	800 +	40 +	5
4000 +	3.200.000	160.000	20.000
600	480.000	24.000	3.000
+ 20 +	16.000	800	100
3	2.400	120	15

3.698.400 + 184.920 + 23.115 = 3.906.435.

Fig. 204

Dos rectángulos que tengan la misma superficie 15 × 17 pero con sus lados divididos en distinta forma, como, por ejemplo, en la figura 205.

		400 +	60 +	7
934.000	2000 +	800.000	120.000	14.000
+ 233.500	500 +	200.000	30.000	3.500
+ 18.680	40 +	16.000	2.400	280
+ 1.868	4 +	1.600	240	28
= 1.188.048				

Fig. 205

(2 + 5 + 4 + 4) (4 + 6 + 7) si se les calcula tomando como base los valores absolutos de los números, dan resultados iguales, esto es: 15 × 17 = 255.

Pero si los números asumen el valor relativo a su respectiva función jerárquica, los resultados son muy distintos; y, en efecto, las partes de los lados (4 + 6 + 2 + 3) (8 + 4 + 5) = 16 × 17 se convierte en cambio en 4.623 × 845 = (4.000 + 600 + 20 + 3) (800 + 40 + 5) = 3.906.435. Y en el otro rectángulo, también de 15 × 17, (2 + 5 + 4 + 4) (4 + 6 + 7) se convierte en 2.544 + 467 = (2.000 + 500 + 40 + 4) (400 + 60 + 7) = 1.188.048.

	800 +	40	+ 5
4000	20.000	160.000	3.200.000
600	3 000	24.000	480.000
20	100	800	16.000
3	15	120	2.400

23 115 + 184.920 + 3.698 400

= 3.906.435

Fig. 206

Todas estas comprobaciones resultan todavía más interesantes si se confrontan las sumas referentes a las figuras que se hallan sobre la misma línea horizontal (y representan la repetición de cada número del multiplicador por cada número del multiplicando) porque aquéllas se identifican con los productos parciales de la misma multiplicación llevada a cabo con el procedimiento aritmético. De ese modo estos ejercicios que se ofrecen como representación geométrica de un análisis minucioso del cálculo aritmético, se convierten por sí mismos en motivo de una nueva actividad.

Cuadrados. — Dichos ejercicios realizados con el cuadrado, ofrecen la máxima importancia, porque representan una preparación para el cálculo de la raíz cuadrada. En la figura 207 (1 se ve el análisis de dos cuadrados iguales, cuyo lado de 15 unidades está dividido en igual número de partes, 2, 3, 4, 6 ; pero las partes están inversamente distribuídas (Fig. 207 (2).

	6000 +	400 +	30 +	2	
6000 +	36 000 000	2 400.000	180.000	12.000	38 592 000
400 +	2 400.000	160.000	12.000	800	2 572 800
30 +	180.000	12.000	900	60	192 960
2	12.000	800	60	4	12 864
					41,370,624

```
    6432
    6432
 -------
   12864
  19296
 25728
38592
--------
41370624
```

Fig. 207 (1

A pesar de esta identidad y sólo por el hecho de su orden inverso, si se atribuyen a los números los valores jerárquicos decimales, resultan productos muy diversos entre sí ; en efecto, en un caso se trata del cuadrado del número 2.346 y en el otro del número 6.432.

Ahora bien : $2.346^2 = 5503716$
$6.432^2 = 41370624$

En la figura está representada la suma de las partes de la misma dirección horizontal y los productos parciales obtenidos siguiendo el correspondiente cálculo aritmético.

	2000 +	300 +	40 +	6	
2000 +	4 000 000	600.000	80.000	12.000	= 4.692 000
300 +	600.000	90.000	12 000	1.800	703 800
40 +	80 000	12.000	1 600	240	93 840
6	12 000	1.800	240	36	14.076
					5.503 716

```
   2346
   2346
  -----
  14076
  9384
 7038
4692
-------
5503716
```

Fig. 207 (2

Lo que se debe observar, especialmente, en la repetición del cuadrado, es la recíproca disposición de las figuras ; ésta se debe estudiar comenzando por la figura más rica de valor que es uno de los cuadrados extremos en el sentido de la diagonal, como sería en una de las figuras que ahora consideramos el cuadrado de 6000 y en la otra el de 2000. Partiendo de este cuadrado, que es un valor máximo, como de un centro, conviene observar la simetría de los rectángulos adyacentes, que tienen el valor más aproximado al máximo y poco a poco ver como se corresponden las figuras que tienen el mismo valor, siguiendo siempre los valores decrecientes la misma dirección hasta la unidad que se halla en el extremo opuesto de la diagonal que se inicia en el cuadrado inicial. La importancia de estas observaciones radica en que la superficie del cuadrado representa el número, y el lado la raíz cuadrada. Ahora, en la superficie del cuadrado, el número está analizado y dispuesto en orden a su valor, e indica qué partes de este valor están en relación directa con la raíz cuadrada; esto es, los adyacentes al lado del cuadrado. Existen, pues, entre las partes, alguna que *indican la raíz* y puede decirse que contienen la *incógnita*. Estas partes, como se observa en la figura, son pocas y constituyen el marco angular que tiene por centro el cuadrado de máximo valor y, a mayor abundamiento, este marco teniendo partes simétricas, se reduce aún más su número. En cambio, la mayor parte de los valores no tienen contacto directo con la raíz y no depende de ellos el descubrimiento de la incógnita.

Este es, precisamente, el estudio que hay que llevar a cabo para encontrar la guía que nos conduce al cálculo de la raíz cuadrada.

ESTUDIO DEL CUADRADO TIPO

Es necesario, pues, construir un *cuadrado tipo*, es decir, una figura directriz, que sirve para presentar claramente la distribución de las partes interiores. A dicho fin, corresponde un cuadrado cuyo lado está dividido en partes iguales y que, por lo mismo, resulta compuesto por figuras cuadradas e iguales entre sí. El número correspondiente a las partes es la unidad que, según su función, asume diversos valores jerárquicos: 1, 10, 100, 1000.

La figura 208 representa el cuadrado de 1111.

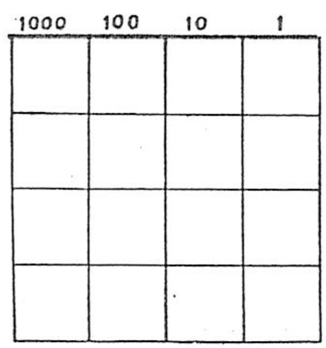


Fig. 208

Llevando a cabo los cálculos interiores, se fija la distribución de los valores del número que corresponde a 1111 en el cuadrado. La figura demuestra que los valores

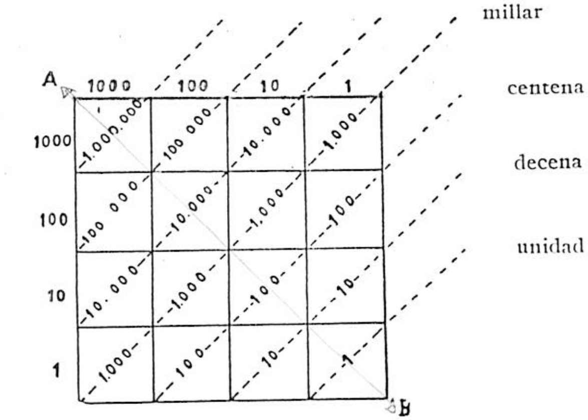


Fig. 209

vienen distribuídos en sentido diagonal y decreciente desde el extremo A. al extremo B. del cuadrado, y, las partes simétricas quedan dispuestas según líneas perpendiculares a la diagonal A. B. Los dos cuadrados extremos, el que forma ángulo de A y el que lo forma de B son únicos, es decir, carecen de simétrico. Uno de ellos está en relación con la raíz; esto es, el de máximo valor en el ángulo A. Los valores del mismo grado son, en sentido diagonal, perpendiculares a A. B. y sumándolos se obtiene:

Unidad	1	=	1
Decenas	2	=	20
Centenas	3	=	300
Millares	4	=	4.000
Decenas de millar	3	=	30.000
Centenas de millar	2	=	200.000
Millones	1	=	1.000.000
			1.234.321

El número representado por el cuadrado es 1234321.

En relación con la raíz están únicamente algunos valores, los mayores; los millones y las tres cifras que indican el número de los millares. Por esto la raíz depende solamente de las primeras cuatro cifras del número 1234321.

Observemos, ahora, la distribución de los valores del número como si se estudiasen las partes internas de un organismo, y veremos que, la cantidad:

Millones, está toda ella sumida en una sola figura, que por su situación en el *ángulo superior*, y por el hecho que de su altura depende la de todas las figuras que guardan relación con la raíz, asume una función directora y la llamaremos: *Jefe del ángulo*

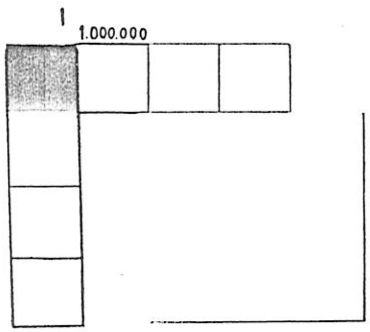


Fig. 210

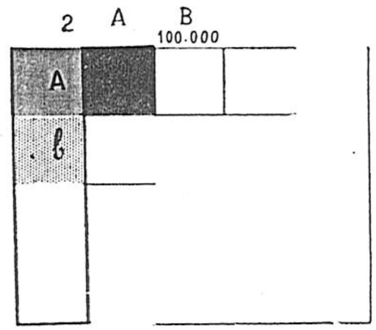


Fig. 211

La cantidad sucesiva en valor, esto es, las

2 *Centenas de millar*, se distribuyen en dos figuras adyacentes a la figura Jefe y, por eso, su lado tiene las mismas dimensiones que aquél. De ambas figuras, una sola guarda relación con la raíz, pero la cantidad debe rellenar, necesariamente, también otra figura igual y simétrica.

El valor sucesivo, o sea

3 *Decenas de millar* se distribuye en tres figuras, una de las cuales, es interna y desaparece, y las otras dos se distribuyen simétricamente, uniéndose a las figuras de valores inmediatamente superiores. Existe, pues, una parte *interna*, casi una víscera, que las decenas de millar tienen la obligación de rellenar antes de poderse distribuir en el exterior (Fig. 212).

Por fin, el último de los valores, de los cuales depende la raíz, es el de los

4 *Millares*. Este se distribuye en cuatro figuras y ocupa todo el camino de la diagonal. Mientras el primero, entre los valores, está concentrado en el único «jefe del ángulo», el último está disperso a lo largo de la diagonal. Dos de las cuatro son *internas*, viscerales; podemos llamarlas, dos vísceras simétricas y las otras dos se colocan en línea sobre los lados del ángulo. De éstas, una de ellas

toma parte en la raíz y la otra es su opuesta simétricamente. Así concluye la distribución de las partes del número que están ligadas a la raíz (Fig. 213).

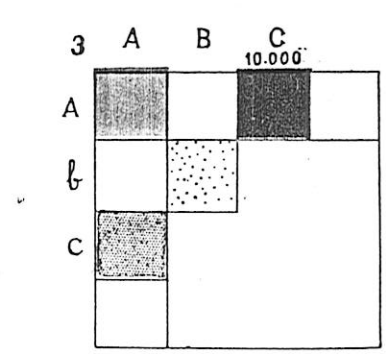


Fig. 212

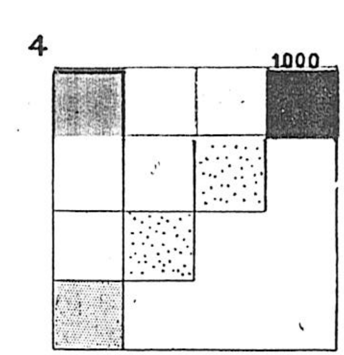


Fig. 213

Además de éstas, existen otras muchas figuras (todas aquéllas que están debajo de la barrera diagonal señalada por los millares) que no tienen contacto alguno con la raíz. Existe, pues, una parte de relleno, un *espacio muerto* que absorbe el resto del número. Este debe ser rellenado y la raíz no será segura hasta que no se haya probado si en el número hay cantidad suficiente para satisfacer esta necesidad. Es, pues, necesario observar atentamente también la distribución de valores en este espacio suplementario que completa el cuadrado.

Las centenas se distribuyen en tres espacios, de los cuales uno es asimétrico, interno, *visceral*; mientras, las cantidades de decenas y unidades son superficiales, como se observa en la figura 214.

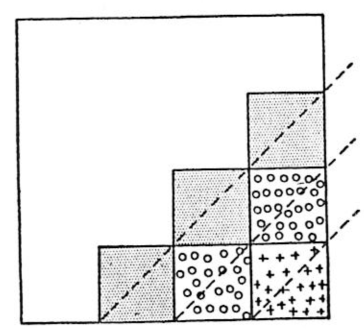


Fig. 214

Es conveniente ahora orientarse en un cuadrado cuyo lado esté dividido en partes desiguales. Esto viene a constituir una serie de ejercicios, en los cuales, los niños comprueban esta interesante distribución geométrica y las relaciones recíprocas de las figuras en que queda subdividido el cuadrado.

Representemos el número cuya raíz es 3245.

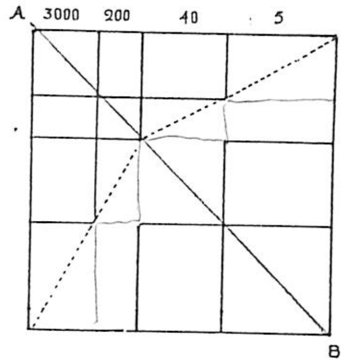


Fig. 215

El jefe angular es un cuadrado de 3. Sobre la diagonal A. B. sólo se encuentran figuras cuadradas y son las únicas que se pueden situar exactamente sobre una de las diagonales que atraviesan el gran cuadrado. La otras figuras son rectángulos tan diferentes entre sí, que no es posible alinearlos diagonalmente.

Las diagonales a través de las figuras que señalan la barrera, al otro lado de la cual está la parte muerta, es una línea quebrada, y esto sucede en la representación de todo número que no sea compuesto con la repetición de la misma cifra (444, 2222). La figura jefe del ángulo, siendo el cuadrado de 3, dirige toda la raya o faja angular, por lo tanto, las partes en relación con la raíz son todas rectángulos que tienen uno de sus lados igual al lado del cuadrado jefe: 3 × 3, 3 × 2, 3 × 4, 3 × 5. Y como esto, sucederá para cualquier número.

Se puede genéricamente substituir con letras la cifra que indican los valores de las subdivisiones del lado del cuadrado; llamando

la primera cifra de la raíz	a
la segunda	b
la tercera	c
la cuarta	d

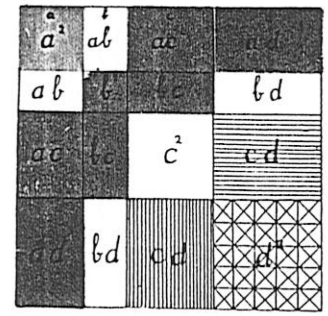


Fig. 216

El cuadrado jefe es, pues, el cuadrado de la primera cifra de la raíz: a^2. En éste se halla, pues, recogido el valor de los millones del número. Los dos rectángulos adyacentes, a. b. son una combinación de la primera con la segunda cifra de la raíz y se puede indicar así: 2 a b. En éstos se recoge el valor de las centenas de millar del número. El tercer valor, las decenas de millar llena el espacio interno b^2 (esto es: el cuadrado de la segunda cifra de la raíz) y después que ha dejado éste dispuesto, llena los dos rectángulos a. c.; y de ese modo este valor se distribuye según las figuras siguientes: $b^2 + 2$ a. c. Finalmente vienen los millares que ocupan cuatro rectángulos simétricos dos a dos, y dos de los cuales, son internos; éstos resultan de la combinación de la segunda con la tercera cifra de la raíz: 2 b. c. Y los otros dos rectángulos externos resultan formados por la combinación de la primera, con la cuarta cifra de la raíz 2 a. d. Por esto, los millares ocupan el espacio indicado por 2 b. c. + 2 a. d.

Resumiendo, tendremos

los millones	en a^2 =	cuadrado de la primera cifra de la raíz.
las centenas de millar	en 2 ab =	doble producto de la primera por la segunda cifra de la raíz.
las decenas de millar	en b^2 + 2 ac =	el cuadrado de la segunda cifra de la raíz, más el doble producto de la primera y la tercera.
los millares	en 2 b c + 2 a d =	el doble producto de la segunda por la tercera cifra de la raíz, más el doble producto de la primera por la cuarta.

De semejante distribución resulta que, *toda parte en relación directa con la raiz, tiene como uno de sus factores, la primera cifra de la raíz.*

La parte muerta absorbente, es una región completamente alejada de la influencia del jefe, ella resulta de combinaciones entre las otras cifras de la raíz exclusivamente ; es, pues, casi una repetición a la inversa de aquella parte del cuadrado que llega hasta la barrera diagonal. Aquí están las *unidades* que forman el ángulo y, en todas las combinaciones periféricas, es el lado de este cuadrado opuesto el que dirige. Es decir : que la parte muerta tiene como jefe o director, el ínfimo valor del cuadrado. En efecto, el d^2 es el cuadrado de las unidades, o sea de la cuarta cifra de la raíz. Después siguen las decenas que se disponen a ambos lados en dos rectángulos simétricos construídos sobre la tercera y cuarta cifra de la raíz : 2 c d. Por fin, las centenas se distribuyen en tres grupos ; uno interno asimétrico, que es el cuadrado de la tercera cifra c^2 ; y dos rectángulos 2 b d que se acomodan sobre los de las decenas.

En resumen, la parte muerta se distribuye de la siguiente manera : las centenas en $c^2 \times 2$ b d, el cuadrado de la tercera cifra más el doble producto de la segunda por la cuarta.

Las centenas en 2 c d, esto es, el doble producto de la tercera por la cuarta cifra.

Las unidades en d^2, o sea el cuadrado de la cuarta cifra.

RELACIONES NUMERICAS

Es preciso, pues, conocer, primeramente, el elemento esencial del número, esto es, aquel del cual se obtiene la primera cifra de la raíz.

Las cifras de una raíz múltiple (esto es, de varios números) pueden ser 2, 3, 4 y más. Limitando el cálculo a las unidades únicamente, dicha raíz puede tener los siguientes valores :

1
10
100
1000

y, por lo tanto, el número que indica el cuadrado de cada una es :

$$1^2 = 1$$
$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10.000$$
$$1000^2 = 1000.000$$

lo cual quiere decir que el número de ceros existentes en la raíz, se duplica en su cuadrado, por lo cual *a cada puesto jerárquico de la raíz corresponden dos en el número que representa su cuadrado.*

Este hecho resuelve un problema, porque nos dice cuantas cifras tendrá la raíz de un número dado ; hay que dividir en grupos de dos cifras partiendo de derecha a izquierda, o lo que es igual, desde las unidades hacia las jerarquías superiores, y a cada grupo corresponde una cifra en la raíz. Sea, por ejemplo, el número 26758439. Este se prepara en grupos de dos cifras 26.75. 84.39, resultando cuatro los grupos, cuatro serán las cifras de la raíz ; esto es, será un número que contendrá millares. La primera cifra deriva del último grupo que, en este caso, está representado por 26.000.000. La raíz de este número, nos dá lo que representa la parte fundamental y directiva de todo el cálculo ; es entonces un número, sobre el cual, se puede operar como cuando se buscaba la raíz de una cifra, de aquel modo sencillo, esto es, construyendo cuadrados sucesivos con aumentos angulares.

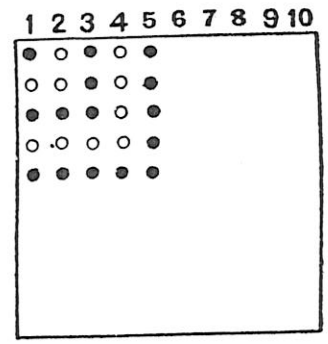


Fig. 217

En este caso, la primera cifra, esto es, la raíz de 26 es 5 (con resto de 1). (Fig. 217).

Sea otro número, el 728495. Este se divide en grupos de dos cifras de derecha a izquierda 72.84.95 ; y resultando tres grupos, esto revela que la raíz llega a contener centenas. La parte que da la primera cifra, (cifra de las centenas) es el 72 (72 decenas de millar). El 72 es el número sobre el cual, se puede proceder en la forma indicada y resulta que la primera cifra es 8 con 8 de resto. (Fig. 218).

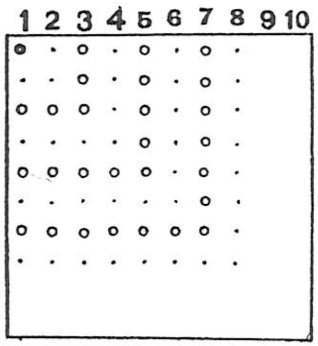


Fig. 218

PROCEDIMIENTO PRACTICO PARA LA OBTENCION DE LA RAIZ CUADRADA

Con un material de perlas, se puede proceder a la obtención de la raíz cuadrada de un número grande que tenga la raíz de dos o más cifras; por ejemplo 2136. Teniendo éste dos grupos de dos cifras, tiene una raíz de dos cifras, de los cuales el grupo más alto, esto es 21 centenas, dará la primera cifra de la raíz. Es necesario tener delante un cuadrado tipo contenido en aquellos límites.

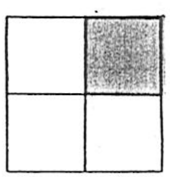
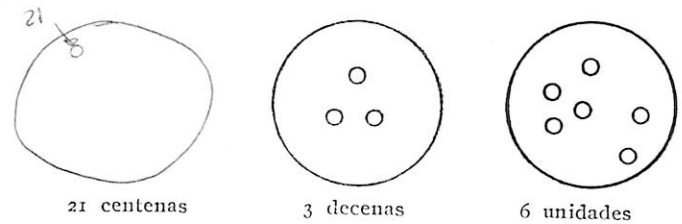


Fig. 219

Aun cuando se trate de un número que contenga millares, éstos no serán, sino bajo forma de centenas, *porque es el segundo grupo* (partiendo de las unidades) *en su total* el que contiene la primera cifra de la raíz. El número, pues, debe analizarse en la siguiente forma: 21 centenas, 3 decenas y 6 unidades.

Utilizaremos un material análogo al de las divisiones grandes; platillos para contener el número en forma de perlas sueltas, de distinto color según las jerarquías; tubos con 10 perlas, también de distintos colores para los cambios y una mesa con huecos dis-

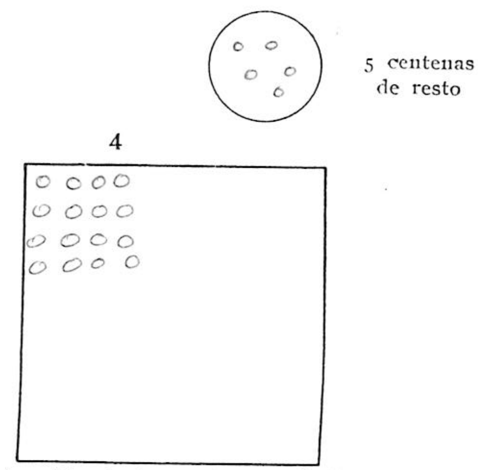
puestos en forma cuadrada donde puedan colocarse las perlas. Las mesas que se usan para la extracción de raíces, difieren de las ya usadas para la multiplicación en que en la parte superior no está la serie sucesiva de los números y la cantidad de huecos, es mucho más grande (fig. 238 (2). Tomaremos—procediendo a la extracción de la raíz—tres platillos, poniendo en el primero 21 perlas (de las centenas), 3 perlas en el segundo (de las decenas) y 6 en el tercero (de las unidades).



Composición del número del que se tiene que extraer la raíz, representado por perlas

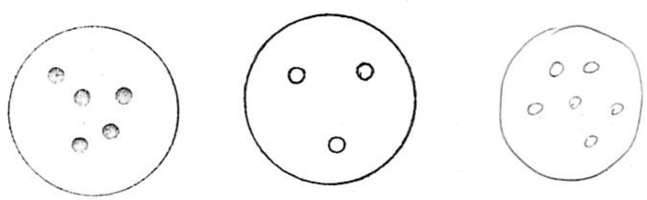
Fig. 220

Cuando se procede a operar, se coloca sobre la mesa solamente el platillo en uso, en este caso el primero que contiene 21 perlas y éstas se disponen tratando de construir un cuadrado siempre mayor, mediante colocación angular de las perlas disponibles.



Colocación de las centenas y hallazgo de la primera cifra de la raíz

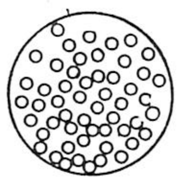
Fig. 221



5 centenas 3 decenas 6 unidades

Fig. 221 (a

Número que queda después de encontrada la primera cifra de la raíz



53 decenas correspondientes a las tres del número y a las 50 que han resultado de cambiar las 5 centenas que había de resto

Fig. 221 (b

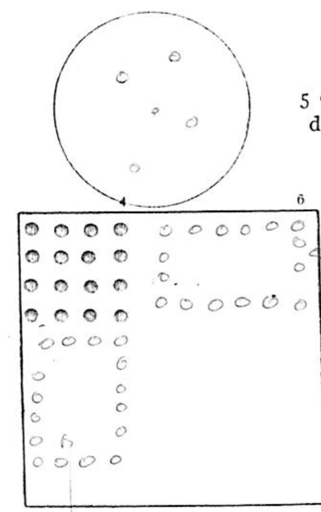
Así se llega a construir un cuadrado de 4 y queda un resto de 5 perlas. Precisa ahora cambiar las 5 centenas convertidas en decenas y las 50 perlas resultantes se colocarán, juntamente con las que ya había allí, en el platillo de las decenas, y éste es el que se usará ahora colocándolo sobre la mesa.

Las perlas de las decenas van ahora distribuídas en dos grupos a lo largo de los lados interiores de la figura jefe, esto es, 4 a un lado y 4 a otro, continuando de este modo la formación de filas de 4 perlas, hasta que en el platillo no queden suficientes para completar las dos filas. Al llegar a seis filas por uno y otro lado quedan aún 5 perlas que constituyen el residuo de las decenas. Es, pues, 6 la segunda cifra de la raíz y así se puede ya decir que la raíz cuadrada del número 2136, es 46, lo que en cifras se escribe así:

$$\sqrt{2136} = 46$$

Aun cuando se sepa ya la raíz, la operación no ha concluído. Se la debe completar rellenando la parte complementaria del cuadrado constituída por las unidades. Solamente, después de llenar dicho espacio residual sabremos si existe en el número cantidad suficiente. Si no se pudiera efectuar dicho relleno, habría que disminuir la raíz. Además, completando la operación, sabremos si la raíz es exacta y si del número queda un resto.

Las 5 perlas, residuo de las decenas, se deben trocar cada una por 10 unidades, esto es, en perlas de otro color que se depositarán en el último platillo, juntamente con las otras 6 que en él se encontraban ya y, con ellas, se rellena el último espacio libre del cuadrado.



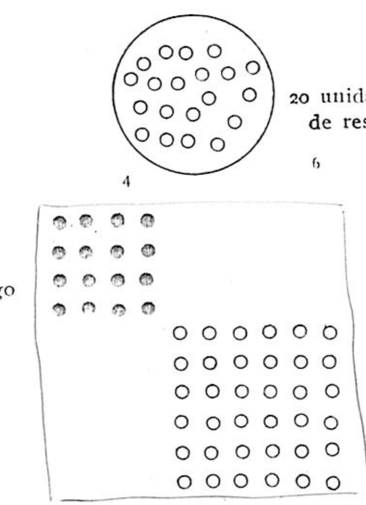
5 decenas de resto

completar

comp.

Fig. 222

Colocación de las decenas y hallazgo de la segunda cifra de la raíz



20 unidades de resto

completar en amarillo

Colocación de las unidades y fin de la operación

Fig. 223

Las perlas han sido en número suficiente para cubrir el cuadrado de las unidades y en el platillo queda un residuo de 20 unidades. El resultado definitivo es, pues, el siguiente $\sqrt{2136} = 46$ con un resto de 20.

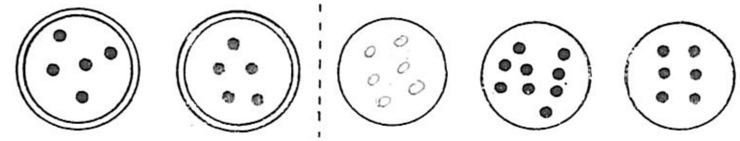
CALCULO ARITMETICO DE LA RAIZ CUADRADA

Busquemos ahora el modo de traducir, en puro cálculo con cifras la extracción de raíces llevada a cabo con las perlas, y de manifestarla con palabras. Dividido en grupos de dos cifras el número 2136 buscaremos la raíz de 21 bien sea por medio del cálculo mental o utilizando la tabla n.° 1. La raíz es 4, porque $4 \times 4 = 16$ y este número sustraído del 21 deja un residuo de 5 centenas. Se baja ahora la cifra de las decenas y obtengo el número 53 que debe ser dividido por el doble de la primera cifra hallada para la raíz; esto es, $2 \times 4 = 8$; resultando 6 de cociente con un resto de 5, el 6 es la segunda y última cifra de la raíz.

Para terminar la operación, bajo la última cifra del número, del cual, se extrae la raíz, 6 unidades y, de ese modo, se obtiene un total de 56 unidades que es en síntesis lo que resta del número. Este debe satisfacer la condición que dividido por la segunda cifra de la raíz de cociente, da por lo menos, la mismama cifra. O sea, que es preciso que 56 pueda contener 6×6. Ejecutando la operación se ve que $56 : 6 = 9$ con un resto de 2. Pero a nosotros nos interesa esta operación para comprobar solamente que $56 : 6$ puede dar de cociente 6 por lo menos. Por dicha razón el cociente útil es, para nosotros, aquel que tiene la misma cifra que el divisor; lo que excede es resto. $56 : 6 = 6$ con un resto de 20. La sustracción que se lleva a cabo para obtener el resto es restar del número total de unidades (56) el cuadrado de 6 ($6 \times 6 = 36$), esto es, el cuadrado de la segunda cifra de la raíz.

EXTRACCION DE RAICES DE TRES CIFRAS

Sea el número 55696. Este puede dar tres grupos 5.56.96. De los cuales el de valor superior, consta de una sólo cifra, 5. La primera cifra de la raíz es, pues, la raíz de 5, esto es, 2. 2 centenas. Pero procedamos con calma y con orden riguroso. Constituiremos, antes de nada, el número total con las fichas de varios colores, según el valor que éstas representan,

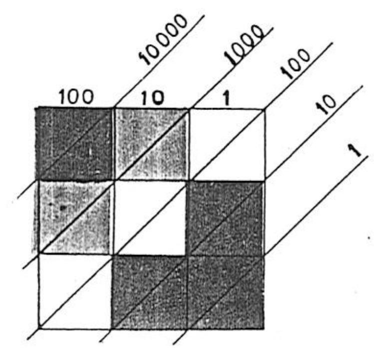


5 decenas de millares — 5 millares — 6 centenas — 3 decenas — 6 unidades

Composición del número que tendrá una raíz de tres cifras

Fig. 224

y tengamos delante el cuadrado-guía, con su lado dividido en tres partes, gracias al cual está a la vista el esquema de la distribución del número.

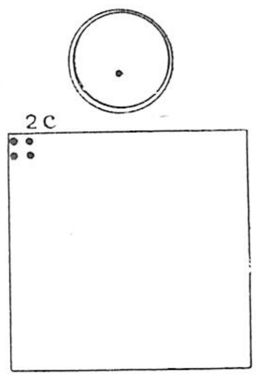


Cuadrado guía que indica cuantos espacios se tienen que llenar con cada jerarquía, y la situación de ellos

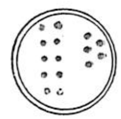
Fig. 225

Segregando una ficha de las decenas de millar, ésta se transforma en 10 fichas. Este platillo que tiene ahora 15 fichas, se coloca sobre la mesita y las fichas se distribuyen en dos grupos simétricos como en la figura 226 (3, resultando, entonces, el número 3 que representa la segunda cifra de la raíz; 3 decenas.

En el platillo de los millares quedan fichas que se convierten en 30 centenas en el platillo siguiente, donde se usen a los 6 que en él ya estaba. Después de haber formado un cuadrado de 3, colocado entre los dos grupos precedentes, se divide el remanente en dos grupos como aparece en la figura, y resulta el número 6 que es la última cifra de la raíz (fig. 226 (1-7). Por lo tanto la raíz completa buscada es el número 236 (fig. 227).



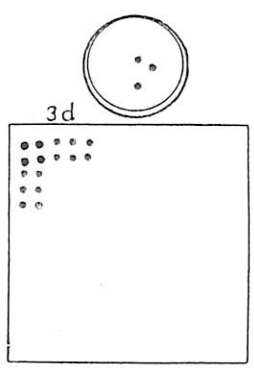
resto I decena
de millar



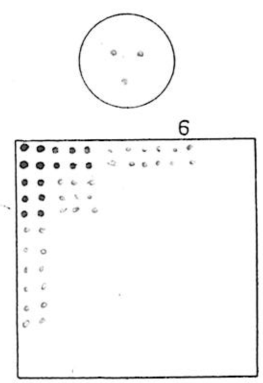
15 millares correspondientes a 5 en el número y a las diez de la decena que había quedado

Colocación de las decenas de millares y hallazgo de la primera cifra de la raíz

Fig. 226 (1-2



resto 3
millares

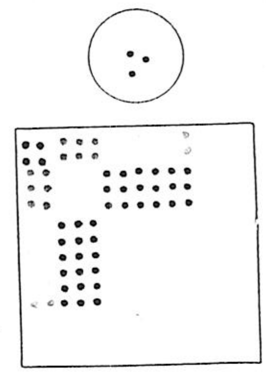


resto :
3 centenas

Colocación de los millares : hallazgo de la segunda cifra

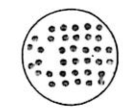
Colocación de las centenas : hallazgo de la tercera cifra de la raíz

Fig. 226 (3-4



resto :
3 decenas

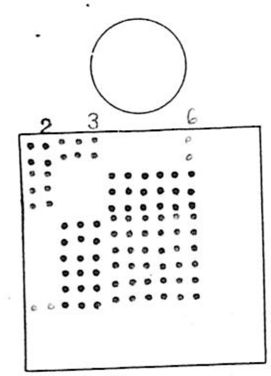
completos



36 unidades : 30 correspondientes a las decenas, 6 que habían en el número

Colocación de las decenas

Fig. 226 (5-6



resto ninguno :
raíz exacta

completar

Colocación de las unidades

Fig. 226 (7

Fig 227

Inversa. Sería un trabajo análogo el representar la anatomía del número en relación con la raíz hallada. La raíz 236 nos permite, en efecto, construir el cuadrado que refleje la distribución geométrica del número del cual hemos partido, esto es, 55696, y seguir el juego interior acaecido entre las partes que, funcionando, han extraído la raíz.

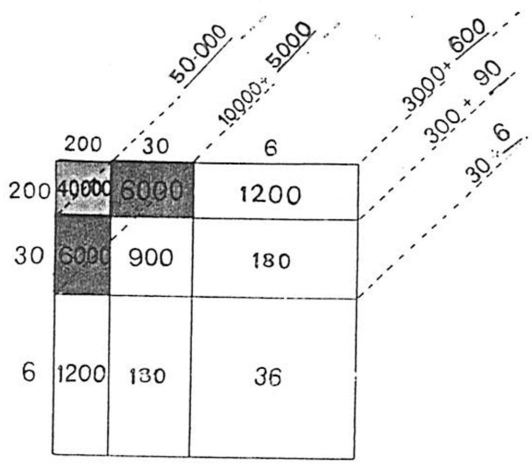


Fig. 228

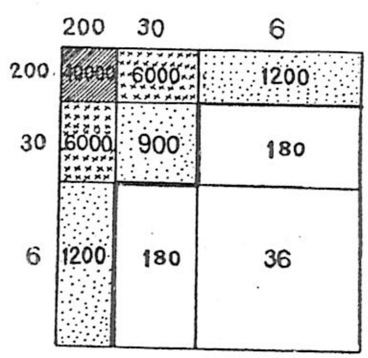


Fig. 229

EXTRACCION DE RAICES DE CUATRO CIFRAS

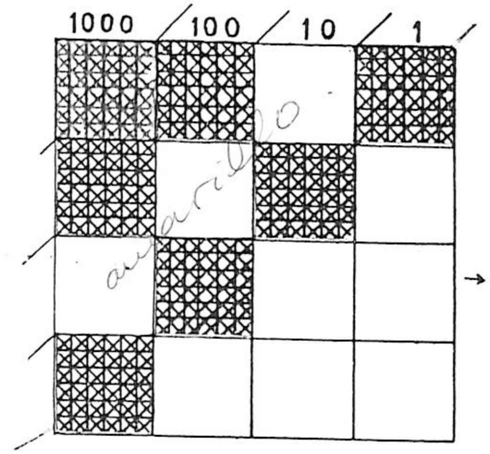
Pongamos otro ejemplo: de un número más mayor cuya raíz sea de cuatro cifras.

Sea el número 27.394.759.

Este número se divide en grupos de dos de derecha a izquierda para saber cuantas cifras y valores tendrá su raíz cuadrada.

27. 39. 47. 59.

La raíz, número de cuatro valores tiene comienzo en los millares. El cuadrado, guía relativa de la dis'ribución de los valores del número, tiene su lado dividido en cuatro partes.



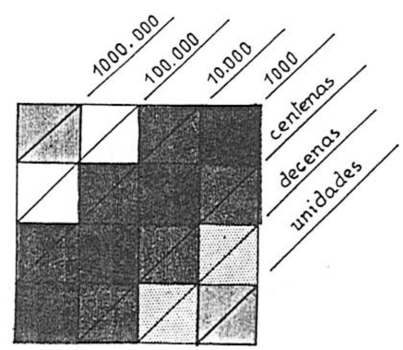
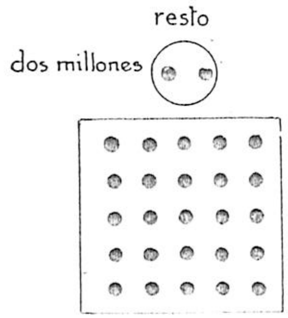


Fig. 230

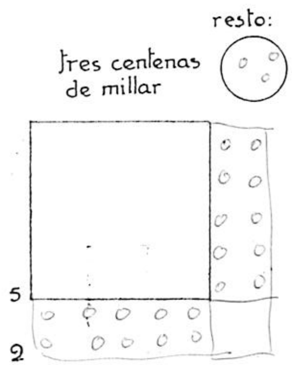
Construiremos para ello el cuadrado de los millares, distribuyendo el grupo en 27 perlas.



Colocación de los millones :
hallazgo de la primera cifra de la raíz : la de los millares

Fig. 231

El primer cuadrado es cuadrado de 5 y da como cifra de millares de la raíz, deja dos como resto que van a unirse a las centenas de millar constituyendo el número 23, con el cual, se deben construír las figuras adyacentes reservadas a las centenas de millar. Estas cubren dos rectángulos de 5 × 2 que dan como cifra de la raíz correspondiente a las centenas el número 2 utilizando 20 perlas.



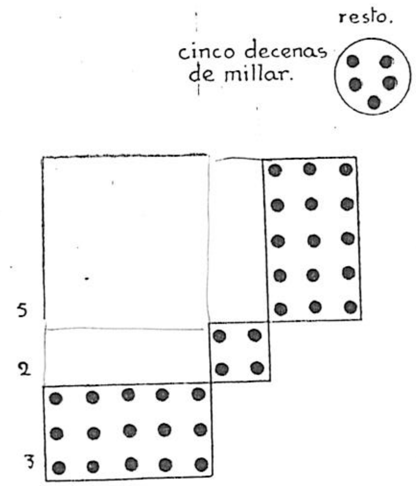
Colocación de las centenas de millares : hallazgo de la segunda cifra de la raíz

Fig. 232

Quedan, pues, 3 que irán a unirse a las decenas de millar formando el número 39.

Este 39 debe formar tres figuras : una de ellas está determinada por los lados de los dos rectángulos precedentes, las otras se deben buscar colocando las perlas a lo largo de los lados del 5 de los dos rectángulos formados con las centenas de millar. El cuadrado a rellenar es de cuatro perlas. Resultan dos rectángulos 5 × 3 que determinan la tercera cifra buscada 3, que significa 3 decenas en la raíz. Las perlas correspondientes a las decenas de millar, usadas en total, son :

$$2^2 + 2\ (3 \times 5) = 4 + 30 = 34.$$

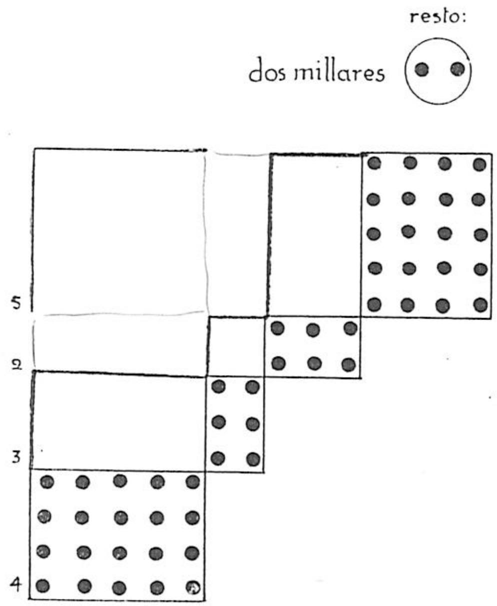


Colocación de las decenas de millares : hallazgo de la tercera cifra de la raíz

Fig. 233

El grupo entero eran 39, quedan, pues, de resto, 5 perlas que se unen a los cuatro millares del número.

Tenemos, pues, 54 millares que deben rellenar las cuatro figuras correspondientes a los millares según el modelo. Dos de ellas están ya determinadas por los lados adyacentes de las 3 figuras que acabamos de construir. Son los dos rectángulos centrales (2 × 3) que en total emplean 12 perlas. Las otras perlas del grupo de millares (54 — 12 = 42) son 42 y éstas deben distribuirse a lo largo de los lados de los rectángulos precedentes que presentan cinco unidades. Si 42 perlas se distribuyen en 4 filas de cinco por cada lado 5 × 4 = 20, se emplean 40 y quedan dos de resto.



Colocación de los millares : hallazgo de la última cifra

Fig. 234

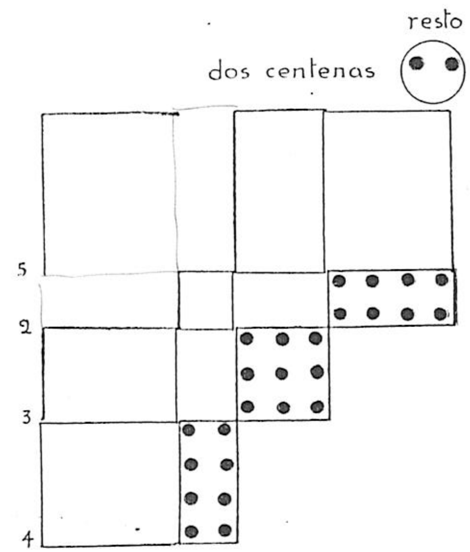
Las perlas utilizadas en total para rellenar las cuatro figuras correspondientes a los millares, han sido, pues, (2 × 20) + (2 × 6) = 40 + 12 = 52.

La raíz está ya determinada por los números 5, 2, 3, 4 y por lo tanto $\sqrt{27.394.759} = 5234$.

Sin embargo, la operación no ha concluído todavía.

Faltan por rellenar los huecos, ahora ya determinados, que corresponden a las centenas, decenas y unidades del mismo.

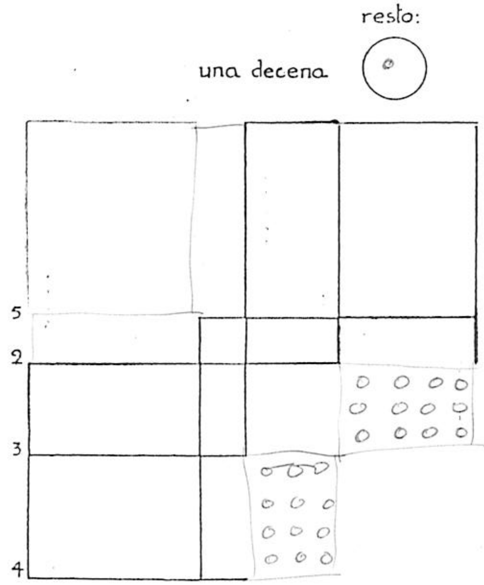
Con las 27 centenas se rellenan las tres figuras, determinadas por las precedentes, que son : un cuadrado 3 × 3 y dos rectángulos 2 × 4, es decir (3 × 3) + 2 (2 × 4) = 9 + 16 = 25.



Colocación de las centenas

Fig. 235

Este número, restado de las 27 centenas disponibles, da un resto de 2. Estas 2 centenas se unen a las cinco decenas del número. Ahora, con las 25 decenas resultantes se deben llenar las dos figuras correspondientes, que son dos rectángulos 2 × 4, es decir, 2 (3 × 4) = 2 × 12 = 24.



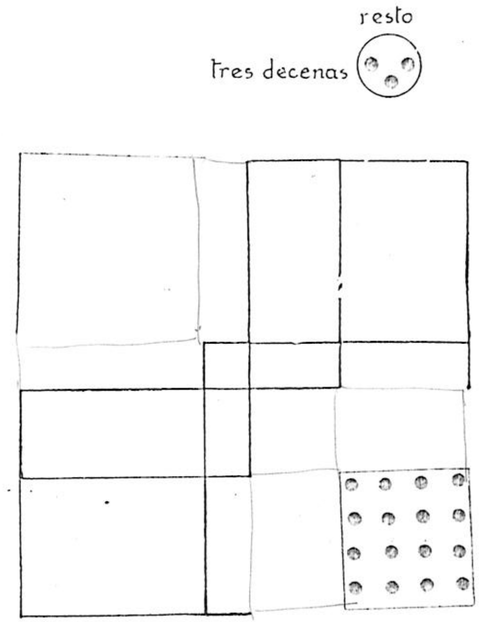
Colocación de las decenas

Fig. 236

Resta una decena que, agregada a las nueve unidades del número, dan la última cantidad del número, o sea 19 unidades, con las cuales precisa formar el cuadrado extremo opuesto al primero construído.

Este cuadrado es de $4 \times 4 = 16$.

El número grande tiene, pues, un resto de 3.



Colocación de las unidades y fin de la operación

$\sqrt{27.394 + 759} = 5234$ con resto de 3

Fig. 237

Toda la operación se indica definitivamente así :

$\sqrt{27.394.759} = 5234$ con un resto de 3.

Si se efectúa la multiplicación 5234×5234 se obtiene el número 27394756 al que, añadiendo el resto 3, nos da el primitivo.

Veamos ahora la operación numérica correspondiente a la ejecutada con el material.

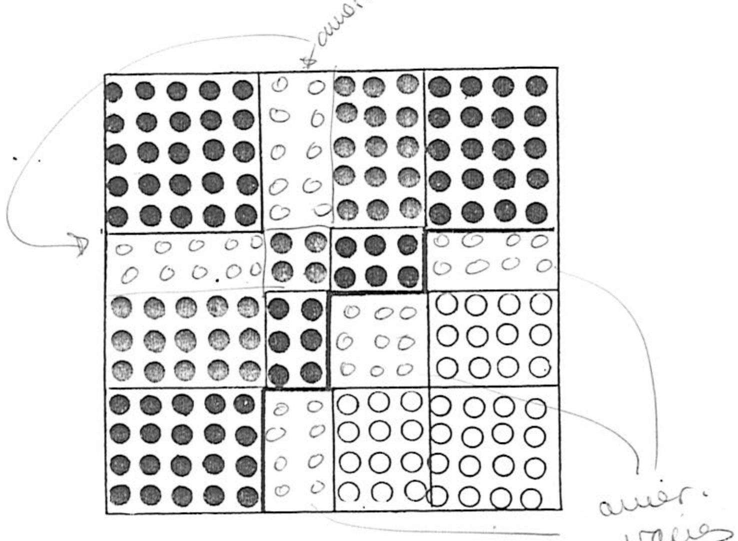


Fig. 238 (1

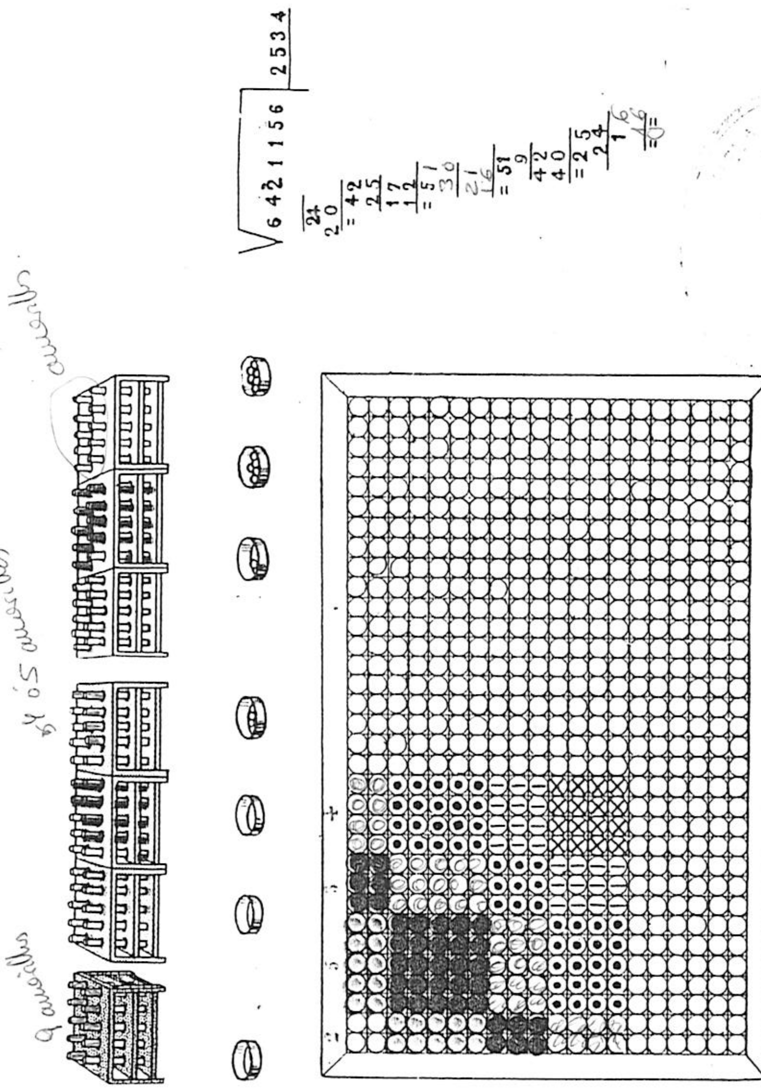


Fig. 238 (2

	$\sqrt{}$ 2 7 3 9 4 7 5 9	5 2 3 4
Millones	25 se resta el cuadrado de los millares 5^2	raíz cuadrada de 27 = 5 (resto 2) $5 \times 5 = 5^2 = 25$
Centenas de millar.	23 se restan los 2 rectángulos co- 20 rrespondiente a las centenas de m. (2×5) 2.	Se divide 23 por 2×5 $23 : 10 = 2$ Los dos rectángulos 2 $(2 \times 5) = 2 \times 10 = 20$
Decenas de millar ...	39 se resta la parte que rellena. 4 35 se restan los 2 rectángulos que 30 dan la cifra de las decenas (3.ª cifra).	Se resta de 39 el pequeño cuadrado interno 2×2 (de la 2.ª cifra) $35 : 10 = 3$... (sin cifra en la raíz) Después se divide 35 por 2×5 Se restan los 2 rectángulos 5×3. $(5 \times 3) \times 2 = 30$
Millares	54 se restan los 2 rectángulos que 12 rellenan 2 (2×3). 42 40 se restan los 2 rectángulos que dan la 4.ª cifra (unidades).	Se restan de 54 millares los dos rectángulos de relleno o sea 2 $(2 \times 3) = 12$ Se divide 42 por 2×5. $42 : 10 = 4$... (4.ª cifra de la raíz) Se restan los dos rectángulos 5×4. $2 \times (5 \times 4) = 2 \times 20 = 40$
Centenas	27 25	Rellenos a sustraer De $27 - 3^2 + 2$ rectángulos 4×2 o sea $9 + 16 = 25$
Decenas	25 24	De $25 - 2$ rectángulos 4×3. $25 - 2\ (4 \times 3) = 25 - 24 = 1$
Unidades	19 16 3	De $19 -$ el cuadrado de $4 = 16$ Sucede un resto de 3.

Fig. 238 (3

$\sqrt{27.39.47.59}$ | 5234

25

23 : (2.5) = 2
20

39
4

35 : (2.5) = 3
30

54 — 2 (2 × 3)
12

42 : (2 × 5) = 4
40

27 — (3^2)
9

18 — 2 (4.2)
16

25 — 2 (4.3)
24

19 — 4^2
16

3

Fig. 238 (4

RAIZ CÚBICA

RAIZ CUBICA

Si en vez de considerar un número elevado al cuadrado se le considera elevado al cubo, o sea, a la tercera potencia $a^3 = a \times a \times a$, entonces el mismo número es la raíz cúbica de la potencia.

Geométricamente se puede considerar la arista como la raíz del cubo. En el material de perlas, el bastoncillo de 10 representaría la raíz de 1000.

En efecto, $10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 = 10^2 \times 10 = 10^3 = 1000$.

Recordemos aquí los números que se refieren al material llamado «cubos de perlas».

El numero de perlas en los distintos cubos era progresivamente, entre 1 y 10

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$

Aquí se observa que el cubo de un grupo de unidades no llega jamás al millar, esto es, que queda siempre encerrado en el grupo jerárquico de las unidades (las primeras tres cifras: unidades, decenas y centenas).

En cambio, apenas se llega a las decenas, la tercera potencia está encerrada en el grupo jerárquico de los millares.

$10^3 = 1000$
$20^3 = 8000$
$30^3 = 27000$
$40^3 = 64000$
$50^3 = 125000$
$60^3 = 216000$
$70^3 = 343000$
$80^3 = 512000$
$90^3 = 729000$

A su vez la tercera cifra de la base, esto es, la centena, tiene su tercera potencia en el grupo jerárquico de los millones.

$100^3 = 1.000000$
$200^3 = 8000000$
$300^3 = 27000000$
$400^3 = 64000000$
$500^3 = 125000000$
$600^3 = 216000000$
$700^3 = 343000000$
$800^3 = 512000000$
$900^3 = 729000000$

A cada grupo de unidades simples en la raíz corresponde un grupo de tres cifras en la tercera potencia.

	millones	millares	simples
(cubo)	centenas decenas, unidades	centenas, decenas, unidades	centenas, decenas, unidades
(raíz)	centenas	decenas	unidades
		s i m p l e s	

Si un número, pues, está compuesto de decenas y unidades, la tercera potencia ocupará el primero y segundo grupo de cifras Por ejemplo $35^3 = 42.875$.

Si tenemos un número, como el 421.875, se sabe que su raíz consta de decenas y unidades: en efecto, esta es 75.

Si careciese de unidades no habría cifras positivas en el primer grupo de tres como se ha visto anteriormente.

$70^3 = 343.000$; 343 es el cubo de 7.
$7_3 = 343$; $70^3 = 343.000$; $700^3 = 343.000.000$

Cuando se quiere, pues, hallar la raíz cúbica de un número se debe dividir éste en grupos de tres cifras de derecha a izquierda y la cantidad de grupos indica de cuantas cifras está compuesto el número de la raíz cúbica.

Por ejemplo, el n.º 592.704.000 tiene una raíz cúbica de centenas y decenas, pero las unidades de ésta son cero, porque así lo indica el primer grupo de tres ceros.

En efecto, la raíz cúbica de dicho número es 840.

En cambio el número 791.453.125 indica una raíz cúbica con centenas, decenas y unidades efectivas; en efecto su raíz cúbica es 925.

A esta primera observación se puede añadir otra seguidamente ·

esto es, que se puede determinar efectivamente la cifra más alta de la raíz.

Sea por ejemplo el n.º 15625.

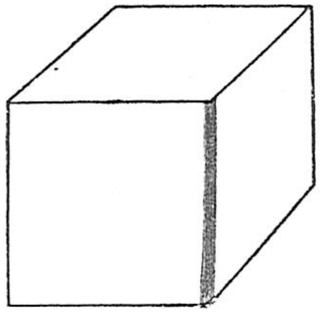
La raíz consta de decenas y unidades y las decenas son dos porque el cubo de 2 es 8 pero el de 3 sería 27, número que excede al 15.

Tomemos otro número, el 35937; su raíz tiene decenas y unidades efectivas y las decenas son 3, porque $3^3 = 27$, mientras el cubo de 4 sería 64. Efectivamente, la raíz correspondiente a dicho número es 33.

Precisa para ello tener siempre presentes los cubos de los primeros números entre 1 y 10, es decir los cubos de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, porque solamente así puede determinarse la primera cifra de una raíz cúbica y así se inicia la operación de «extraer la raíz cúbica» de un número.

EL CALCULO PARA LA EXTRACCION DE LA RAIZ CUBICA

Para proseguir el cálculo de la extracción de la raíz cúbica precisa, antes que nada, tener presente el *cubo*.



La arista es la raíz del cubo

Fig. 239

La raíz cúbica de un cubo es su arista (fig. 239).

Volvamos a utilizar el material que nos ha servido para *construir* los cubos, como por ejemplo, los cubos de paso de un grado a otro de la torre roja (ejercicios de álgebra que han conducido a la construcción genérica del «cubo de un binomio»).

El cubo del binomio $(a + b)^3$ nos indica la construcción de un cubo cuya arista es la suma de dos partes desiguales *a* y *b*.

Este se construye con dos cubos 3^3 y b^3 y con prismas, tres de los cuales tienen como sección a^2 y como altura *b* y tres que tienen como sección b^2 y como altura *a*.

Los trozos necesarios para semejante construcción corresponden a la fórmula algebraica $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Los prismas correspondientes a cada uno de los dos cubos, base, se colocan sobre tres caras adyacentes del cubo mismo, uno apoyado encima y dos en contacto con las dos caras laterales contiguas, tocando el pequeño cubo con sus caras cuadradas que corresponden en los prismas.

Usando el material, esto se puede hacer separadamente con los dos pequeños cubos-base, comprobándose que salvo las dimensiones relativas se tiene siempre el mismo dispositivo. Para las dimensiones los dos grupos se integran disponiendo sus centros (los cubos) diagonalmente, con lo que se viene a construir el cubo del binomio.

También en los dos grupos, cuando están separados entre sí, se encuentra siempre la arista entera del cubo del binomio $(a + b)$ porque cada prisma superpuesto a uno de los cubos tiene la altura del otro cubo.

Si el problema fuera, pues, no el construir el cubo, sino simplemente conocer la arista binomial, bastaría uno solo de los grupos.

Y si una de las partes de la arista fuese conocida (por ejemplo del pequeño cubo a) bastaría colocar en torno suyo los tres prismas correspondientes en el orden debido y en seguida se vería aparecer por tres lados la arista entera binomial que se busca.

El resto no sería más que un relleno completamente sin importancia directa y esencial. Con esto queremos decir, que no es necesario construir el cubo entero para después medir o buscar la arista (raíz cúbica), sino que para dicho fin, basta con la mitad del cubo (o sea uno de sus dos grupos integrantes).

Jugando, solamente viendo el material, esto se presenta con una evidencia verdaderamente accesible al niño, para el cual, las palabras más sencillas, empleadas para explicar este hecho, serían seguramente obscuras e ininteligibles.

Un ejercicio que conduce a ahondar esta evidencia, a hacer comprender lo que podría llamarse la anatomía del cubo, es el de los pasos sucesivos, de cubo a cubo, desde el 1 al 10, bien sea regularmente o a saltos.

Otro es la construcción del binomio, hecha con el material compuesto por los cubos negros y los prismas de cristal.

Los ejercicios descritos en el capítulo del álgebra, constituyen precisamente una preparación dirigida al fin que ahora nos proponemos ya que la anatomía del cubo puede convertirse en una *guía* del cálculo de la raíz cúbica. A dicho fin, análogamente a cuanto se hizo para preparar el cuadrado guía en la extracción de la raíz cuadrada, precisa preparar con cuidado un cubo-guía basándolo en la fórmula del cubo del binomio.

Precisa, sin embargo, seguir el cálculo algebraico con una exactitud especial, porque éste ya no consta solamente de los dos elementos constitutivos de la arista de un cubo, como serían 2 + 3.

Se ha convertido en un símbolo al cual aplicamos nosotros un

valor decimal. Si la arista es 2 + 3, ésta consta de 2 decenas y 3 unidades y, aun cuando las partes sigan materialmente invariables, su orden se hace esencial, porque se refiere a la jerarquía de los números. Para diferenciar este concepto en lugar de a y de b usaremos las letras del alfabeto que más se aproximan al significado decimal y diremos d (decenas) y u (unidades).

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3ud^2 + u^3.$$

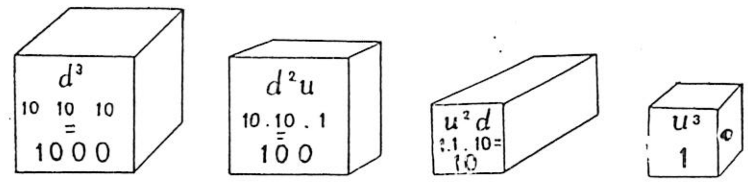


Fig. 240

Esta fórmula puede ser usada como guía en la construcción de un cubo binomial; primeramente se coloca el cubo mayor que indica las decenas; hecho esto se disponen los 3 prismas d^2u como segundo tiempo, después se colocan los tres prismas u^2d y por fin, en último lugar, se coloca el cubo de las unidades u^3. Este orden preciso es necesario y la labor de colocar las piezas bajo la guía de la fórmula algebraica es una de las tareas ilustradoras para el procedimiento del cálculo.

Se puede primeramente traducir la fórmula en unidades decimales y después referir los varios términos a las partes diversas que constituyen un cubo binomial.

$$d^3 + 3d^2u + 3u^2d + u^3$$
$$10^3 + 3\ (10^2 \times 1) + 3\ (1^2 \times 10) + 1^3$$
$$1000 + 3\ (100 \times 1) + 3\ (1 \times 10) + 1.$$

La correspondencia, pues, entre los elementos de la fórmula y las jerarquías decimales, es precisamente esta:

d^3	....	1.000 o sea orden de millares.
d^2u	....	100 o sea orden de centenas.
u^2d	....	10 o sea orden de decenas.
u^3	....	1 o sea orden de unidades.

Estos valores pueden hallar su correspondencia en el material, y para ello, uno de los cubos corresponde a millares, y el otro, a la unidad. Los tres prismas relativos al cubo de los millares corresponden a centenas y los otros, en cambio, a decenas.

El cubo así analizado representaría el número, mientras su arista partida en dos representaría su raíz cúbica.