EJERCICIOS CON LOS NUMEROS

DIVISIBILIDAD

NÚMEROS PRIMOS

Volviendo a aquellas fáciles demostraciones que llevamos a cabo para poner de relieve la similitud entre la multiplicación y la división, conviene obtener un número más vasto de combinaciones y no solamente el mínimo necesario para el cálculo, como sucede en la tabla pitagórica. Para ello, en vez de recurrir a las tablas parciales que contienen las combinaciones de cada número con la serie del 1 al 10, que fueron construídas para memorizar la tabla de Pitágoras, seguiremos buscando los productos de las combinaciones que exceden de aquel límite.

Evidentemente, la cantidad mayor de la combinación resultará hacia los números más pequeños (2) mientras para el 10 la cantidad de las combinaciones permanece la misma. Estas combinaciones más numerosas se llevan a dos tablas A y B. En efecto, para hacer más fácil su lectura se han dividido las combinaciones en dos tablas; en la primera se llega al producto de 50 y en la segunda se continua hasta el 100. En A y B están, pues, contenidas todas las combinaciones «dentro del 100». En otra tabla (C) donde están inscritos los números en la serie natural de 1 a 50 y de 51 a 100 se ha ejecutado la labor de buscar, en relación con cada uno de estos números, todas las combinaciones que se pueden hallar leyendo los productos en las tablas A. y B.

Resulta entonces que algunos números (como por ejemplo 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 etc.) no resultan jamás producto de combinaciones. Estos son «números primos».

En cambio, respecto a los otros números, existen combinaciones en cantidad variable, pero siempre limitada.

Por ejemplo, respecto al 48 se leen las combinaciones siguientes: 48 = 2 × 24
» = 3 × 16
» = 4 × 12
» = 6 × 8
» = 8 × 6

Y estas combinaciones se hallan en las tablas A y B leyendo los productos relativos a los números 2, 3, 4, 6, 8.

He aquí, pues, un número rico en combinaciones que se presta a los ejercicios con el material o con dibujos. Se pueden reproducir, disponiendo las perlas (o haciendo dibujos de puntos de color sobre una hoja de papel cuadriculado) las combinaciones indicadas, esto es, repitiendo :

El dos 24 veces.
El tres 16 veces.
El cuatro 12 veces.
El seis 7 veces.
El ocho 6 veces.

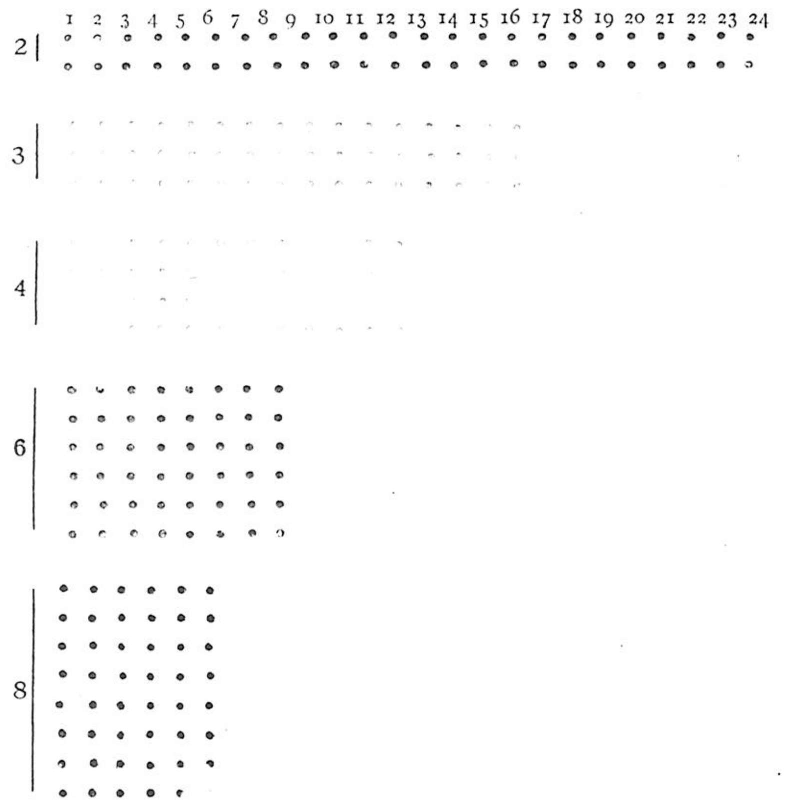


Fig. 111

La misma disposición de puntos se puede leer por una parte como multiplicación y por otra como división.

2 × 24 = 48 .... 48 : 24 = 2
3 × 16 = 48 .... 48 : 16 = 3
4 × 12 = 48 .... 48 : 12 = 4
6 × 8 = 48 .... 48 : 8 = 6
8 × 6 = 48 .... 48 : 6 = 8

El 48 es el punto de llegada en las multiplicaciones, en cambio, en las divisiones, es el punto de partida.

Y mientras el resultado es siempre el mismo en las multiplicaciones, en cambio, en la división, es distinto el cociente según la misma cantidad se divida en más o menos partes.

Por ello es muy interesante para diferenciar, en la división, el hecho que se trate, en cambio, de 48 dividido entre 24, que proporcionaría dos solamente para cada unidad del divisor.

Ahora puede ser interesante el estudiar en cuantas partes iguales se puede dividir un número. Esto se halla indicado por las «posibles combinaciones», esto es, por las multiplicaciones que se pueden incluir en cada número, y las multiplicaciones «inversas» representan en la división reales diferencias.

Incluyendo también las inversas, se tienen las siguientes combinaciones y divisiones :

2 × 24 = 48	48 : 24 = 2
24 × 2 = 48	48 : 2 = 24
4 × 12 = 48	48 : 12 = 4
12 × 4 = 48	48 : 4 = 12
6 × 8 = 48	48 : 8 = 6
8 × 6 = 48	48 : 6 = 8
3 × 16 = 48	48 : 16 = 3
16 × 3 = 48	48 : 3 = 16

Ahora, en las tablas A y B se pueden buscar los grupos de las combinaciones correspondientes a la divisibilidad de los números que han resultado de la divisibilidad del 48.

Puede pues ser representado como sigue, en los grupos en que es divisible.

(16) en file

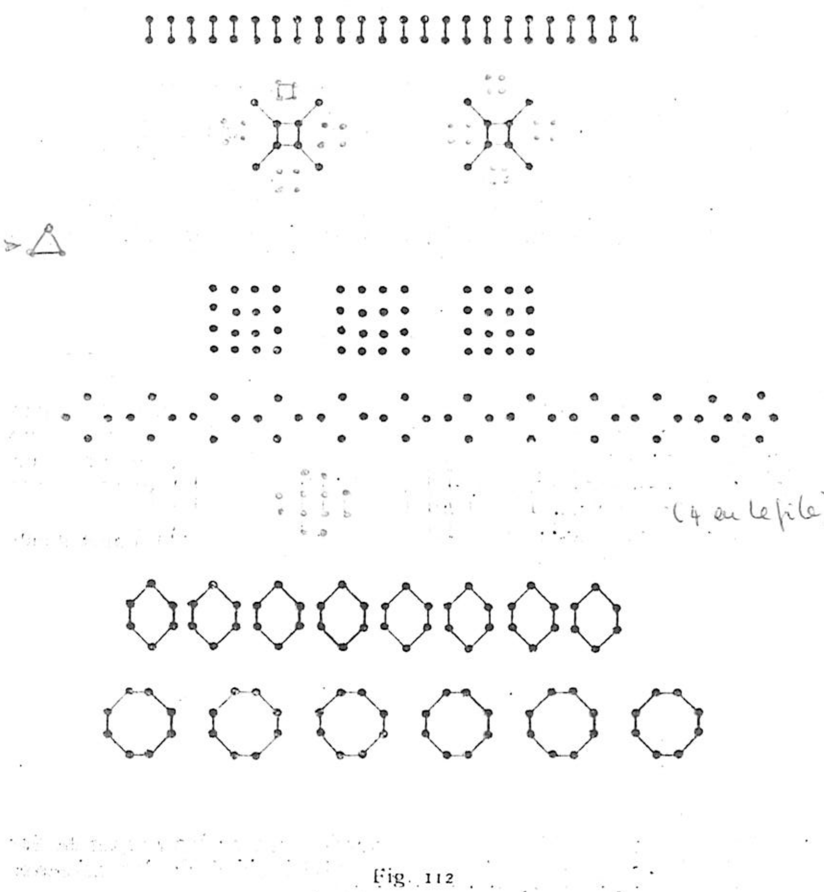


Fig. 112

Se expresa diciendo que el número 48 es divisible por 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, y resultan

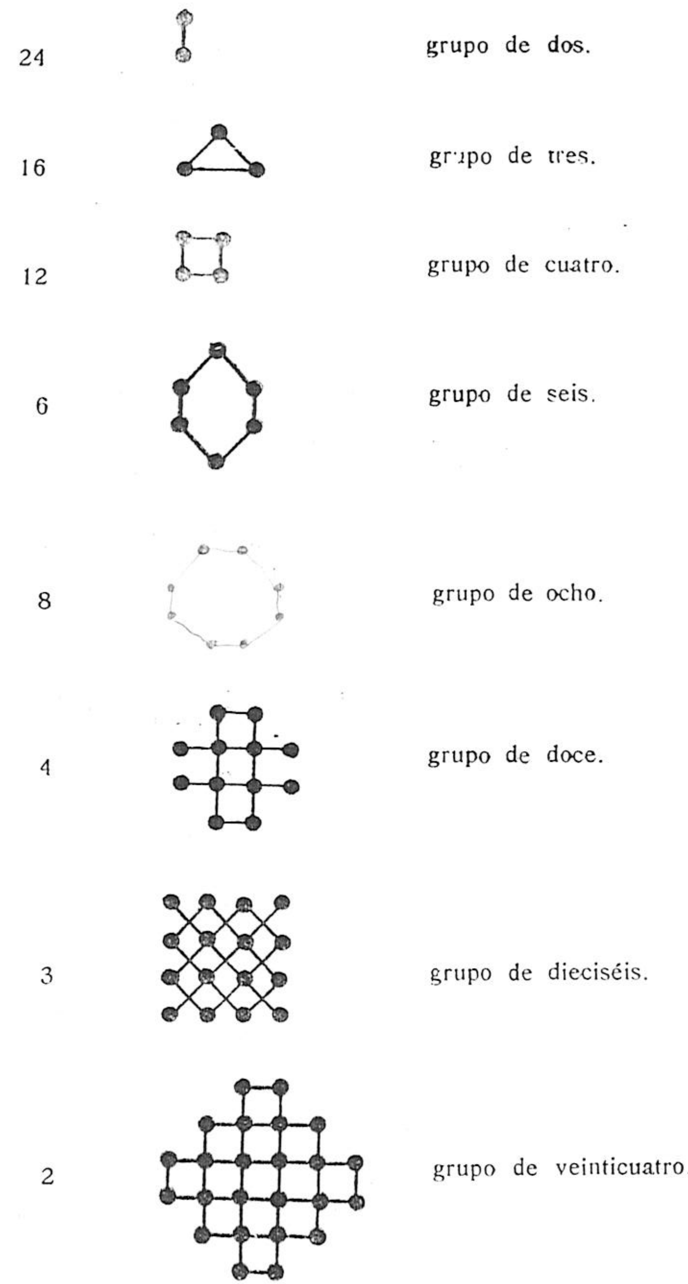


Fig. 113

24 =	2 × 12; 12 × 2	2 × 2 × 2 × 3
	3 × 8; 8 × 3	3 × 2 × 2 × 2
	4 × 6; 6 × 4	2 × 2 × 2 × 3
16 =	2 × 8; 8 × 2	2 × 2 × 2 × 2
	4 × 4	2 × 2 × 2 × 2
12 =	2 × 6; 6 × 2	2 × 2 × 3
	3 × 4; 4 × 3	3 × 2 × 2
8 =	2 × 4; 4 × 2	2 × 2 × 2
6 =	2 × 3; 3 × 2	
4 =	2 × 2	2 × 2
3 =		
2 =		

Los números dos y tres no siendo ulteriormente divisibles son factores primos del número 48.

Ahora precisa buscar también los últimos términos de los otros números en que el 48 es divisible.

6 = 2 × 3	= 3 × 2		
8 = 2 × 4	= 2 × 2 × 2		4 × 2 = 2 × 2 × 2
12 = 2 × 6	= 2 × 2 × 3		6 × 2 = 2 × 3 × 2
12 = 3 × 4	= 3 × 2 × 2		4 × 2 = 2 × 2 × 2
16 = 2 × 8	= 2 × 2 × 4		2 × 2 = 2 × 2
16 = 4 × 4	= 2 × 2 × 2 × 2		
24 = 2 × 12	= 2 × 2 × 6	= 2 × 2 × 3 × 2	
24 = 3 × 8	= 3 × 2 × 4	= 3 × 2 × 2 × 2	
24 = 4 × 6	= 2 × 2 × 2 × 3		

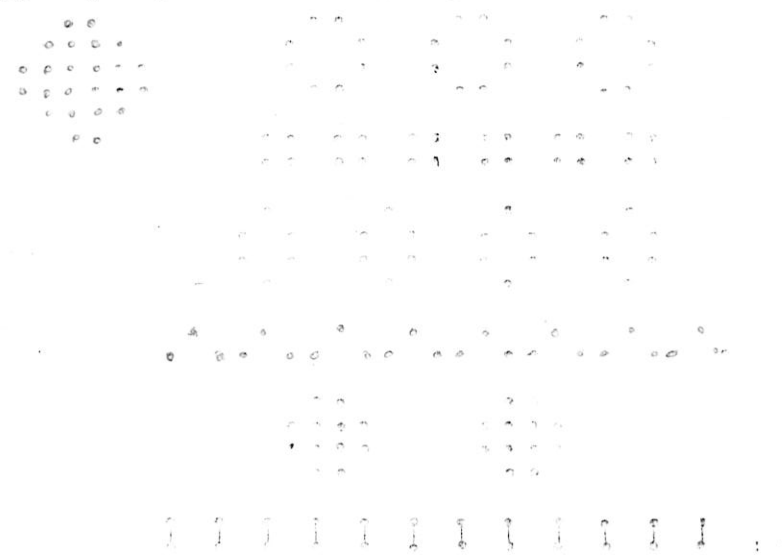


Fig. 114 (1

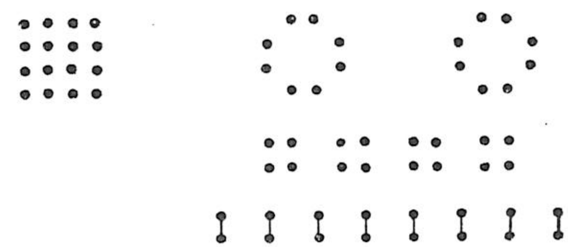


Fig. 114 (2

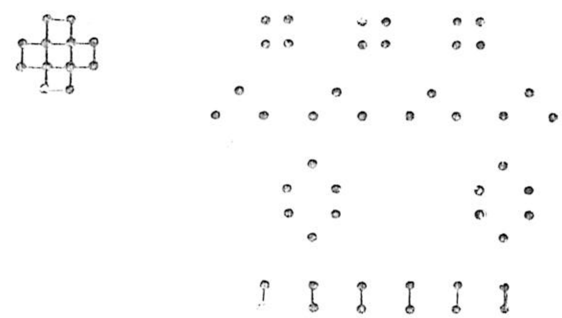


Fig. 114 (3

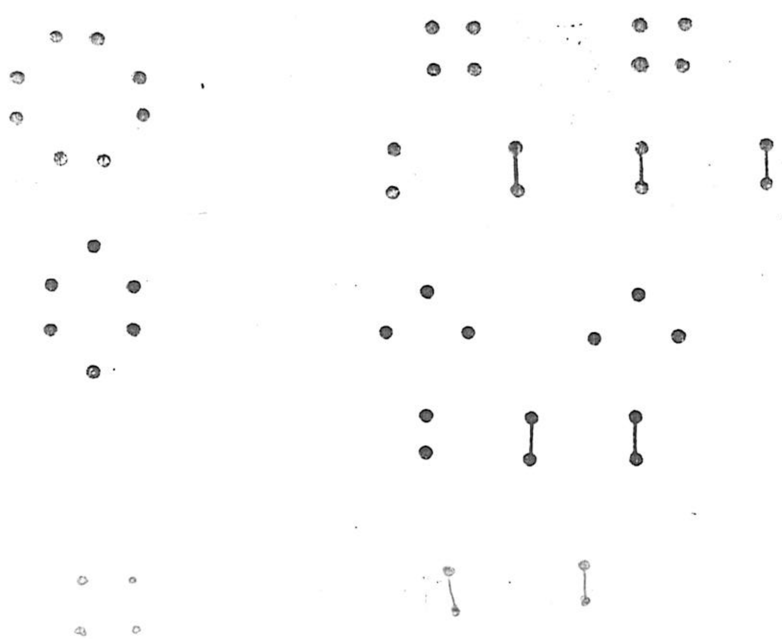


Fig. 115

De este análisis de la divisibilidad resulta, que todos los divisores del 48 tienen solamente, como factor primo común el 2, mientras otros, tienen 3 y 2 (6, 12, 24).

Los factores primos del 48 son, pues, solamente el 3 y el 2, porque hallando todos sus divisores hasta el último límite, no se obtienen otros.

Si ahora consideramos los grupos, en los cuales fueron divididos los números, se puede buscar en ellos, cual sea, el grupo mayor que dos números tienen en común.

El 24 y el 16 tienen 8 como figura mayor común (fig. 116). Este es, pues, el máximo común divisor de los dos números.

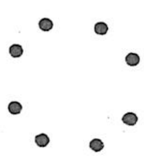


Fig. 116

El 12 y el 16 tienen como figura máxima en común el 4 (figura 117).

Fig. 117

Entre el 48 y su divisor mayor 24, la figura más grande que tienen en común es el 12 (fig. 118).

Fig. 118

Se puede representar el hecho con los dos números, por ejemplo 48 — 24 (fig. 119).

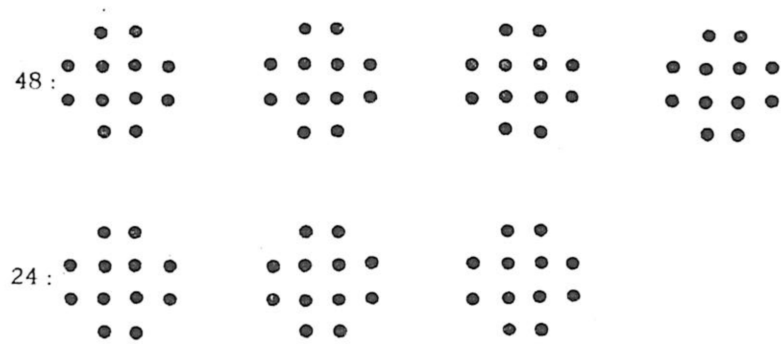


Fig. 119

También se puede representar el máximo común divisor de 24 y 16 (fig. 120).

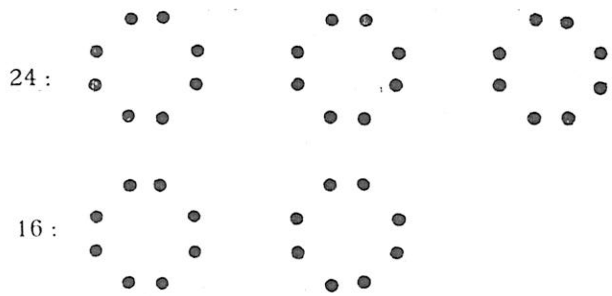


Fig. 120

Para hallar el máximo común divisor se debe escojer la mayor figura que representan en común los números analizados según la divisibilidad.

$$24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2\times2\times2\times3$$
$$16 = 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 4 = 2\times2\times2\times2$$
$$48 = 2 \times 24 = 2 \times 2 \times 12 = 2\times2\times2\times6 = 2\times2\times2\times2\times3$$

FACTORES PRIMOS Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Ahora representando el n.° 48 por un rectángulo formado por 6 × 8 puntos (fig. a) lo dividiremos en dos partes, lo que puede hacerse con perlas, por medio del dibujo o recortando el rectángulo anterior (fig. *b.*) (fig. 121).

Entonces cada rectángulo de *b* (24) se puede dividir en 2 (12) resultando cuatro rectángulos como en la figura *c*.

También éstos se pueden dividir en dos, resultando ocho rectángulos (fig. *d*) de seis puntos que se encuentran en *d*.

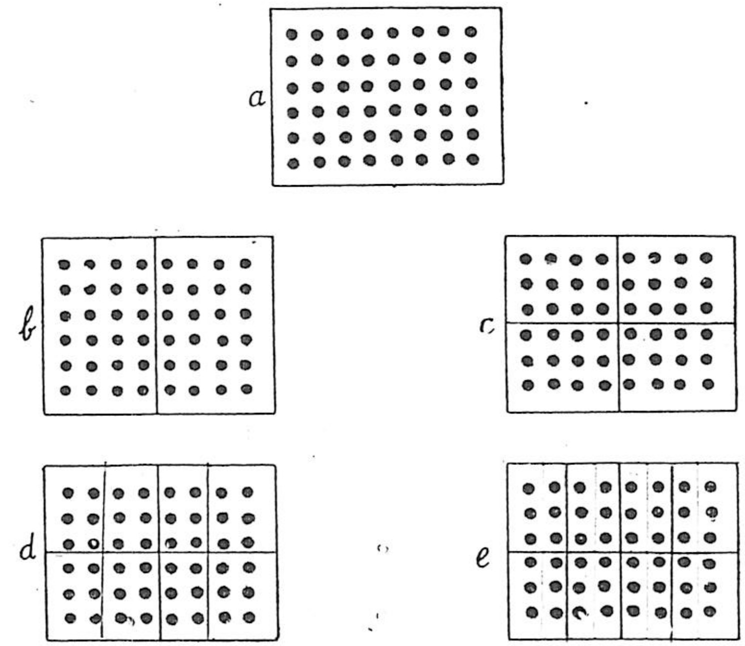


Fig. 121

Estos rectángulos pueden aún dividirse en dos partes como representa la figura *e*.

Aquí hemos llegado a grupos lineales de tres puntos últimamente indivisibles y, por lo tanto, la operación llegó a su término.

Así, realizada materialmente, ésta representa una operación, que divide siempre en dos, el número de origen hasta el límite posible.

Se obtiene de este modo un tres que parece ser el elemento final, impar e indivisible y, al propio tiempo, central y constructivo, aún cuando el número 48 se presente como número par por excelencia y múltiple de 2.

Con los grupos de 3 se puede reconstruir el 48 agrupándolos en 2×2; reagrupando de nuevo los obtenidos en 2×2 y así sucesivamente hasta 4 veces, haciendo la operación inversa de la precedente. Entonces experimentalmente se ve la construcción del 48 realizada así; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$.

Los factores primos, esto es, los números más pequeños e indivisibles que entran en la construcción del 48 son siempre 2 y 3.

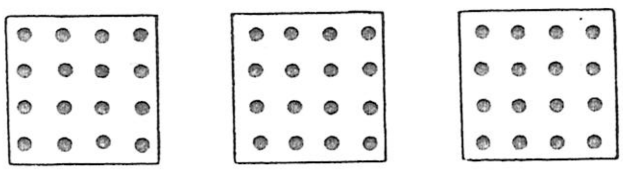
La construcción del 48 a través de sus factores primos se puede representar numéricamente bajo la forma de potencia: $2^4 \times 3$.

El 2^4 es igual a 16.

Si ahora agrupamos las perlas según dicha indicación, habremos construído tres grupos de 16 perlas.

Luego el 48, par por excelencia, se ha subdividido en tres partes, es triplo múltiple de 16.

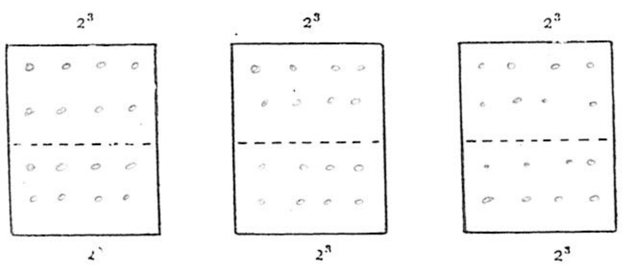
$$2^4 + 2^4 + 2^4$$



— 48 —

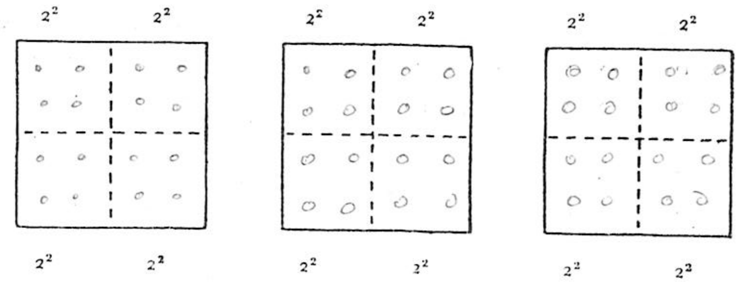
Fig. 122

El 48 dividido así en tres grupos, puede subdividirse procediendo a la disgregación íntima de aquellos grupos en potencias de 2.



$$= 2^3 \times 6 = 2^3 \times 2 \times 3$$

Fig. 123 (1



$$= 2^2 \times 12 = 2^2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Fig. 123 (2

Los grupos 2^4, 2^3, 2^2, 2, 3 son todos divisores del número 48.

Las operaciones que acabamos de realizar con el material se traducen en cifras del modo siguiente:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

La línea vertical es la guía de las subdivisiones que comienzan con la escisión en dos partes, y prosiguen mientras la continuación es posible.

Busquemos ahora operando cifras, los factores primos de otros números como 60 y 40.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$$

Agrupemos ahora los tres números así descompuestos.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Observemos ahora los divisores comunes de dichos números, primero del 60 y 40, y pongamos en dos líneas los factores comunes.

$$60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 5 \times 2$$

Estos tienen comunes $2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$

Este número común 20 se repite tres veces para formar el 60 y dos veces para formar el 40.

En efecto 20 es el máximo común divisor de 60 y 40.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$$

El grupo común es $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$. Este para formar el 48 se repite 2×2 o sea cuatro veces y para formar el 60, cinco veces.

Veamos ahora cual es el divisor máximo que tienen común el 48 y el 40.

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 8 \times (2 \times 3) = 8 \times 6 = 48$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$$

Finalmente, los tres números tienen común.

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

Tienen, pues, común 2×2 o sea 4.

$$60 : 4 = 15 = 3 \times 5$$
$$48 : 4 = 12 = 3 \times 4$$
$$40 : 4 = 10 = 2 \times 5.$$

MULTIPLOS

La multiplicación tiene como característica la reunión de cantidades iguales, esto es, la suma de números iguales. Por ejemplo: 5×7 quiere decir $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ es decir, que el 5 está repetido 7 veces.

$5 +$
$5 = 10$
$10 + 5 = 15$
$15 + 5 = 20$
$20 + 5 = 25$
$25 + 5 = 30$
$30 + 5 = 35$

Ahora bien; todos estos números sucesivos, que no son sino agrupaciones del 5, se llaman múltiplos de 5.

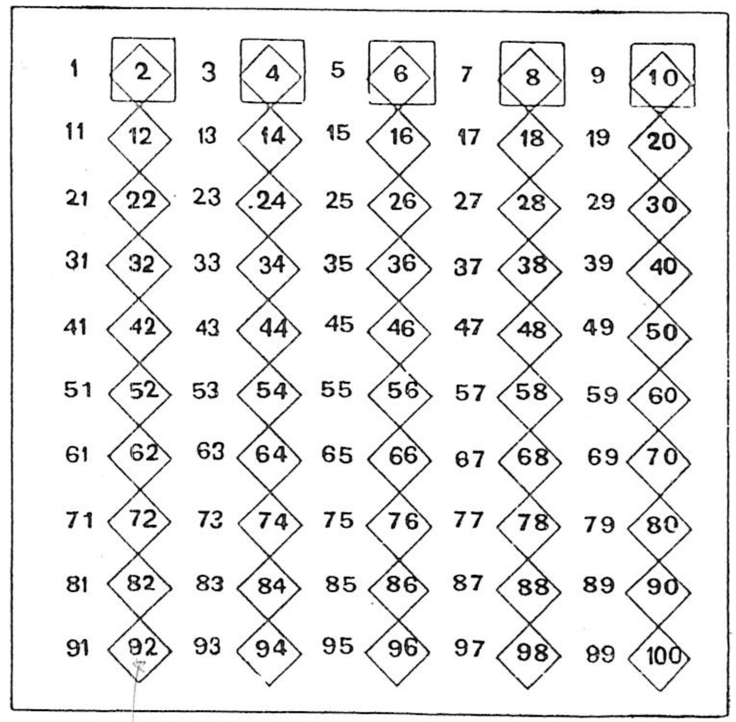
Lo mismo sucede con todos los números.

Es decir: 20, 30, 40, 50, 60 etc., son múltiplos de 10.

Y también: 40, 60, 80, 100, son múltiplos de 20.

En los números anteriores, 80 es múltiplo de 40, y el 60 múltiplo de 30.

Todos los números que se hallan en la tabla pitagórica sobre la



amarillo

Fig. 124

misma línea, por ejemplo 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, son los múltiplos del número que encabeza aquélla; el 4 en este caso.

Para efectuar ejercicios basados en este «hecho» referente a los números tenemos tablas cuadradas de números que son simplemente la serie natural de ellos de 1 a 100 pero escritos sucesivamente en filas de 10 y que, por lo mismo, señalan el paso de una a otra decena.

En estas tablas pueden buscarse los multiplos de cualquier número hasta el límite de 100. Por ejemplo, en la fig. 124 están señalados los múltiplos de 2 que caen igualmente según la dirección vertical, mientras que en la fig. 125 se ven los múltiplos de 3 dispuestos según direcciones paralelamente oblicuas.

Los múltiplos de 6 (2 × 3) ocupan en la figura 126 lugares que participan del 2 y del 3, esto es, verticales y oblicuos pero sin continuidad como en las otras. Con un punto de intervalo en las oblicuas y dos en las perpendiculares.

Una gran cantidad de tablas sin indicación de múltiplos quedan como material que utilizan los niños para buscar éstos y en ellas ejecutan dibujos que sirven para hacer resaltar el resultado obtenido.

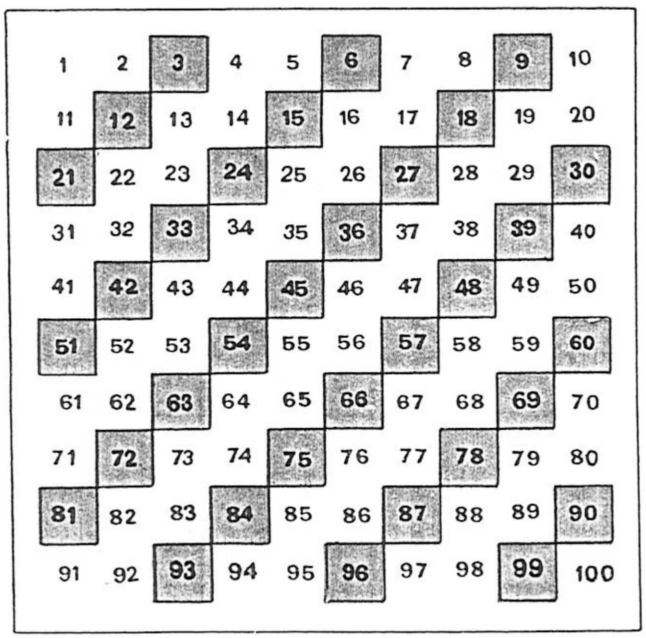


Fig. 125

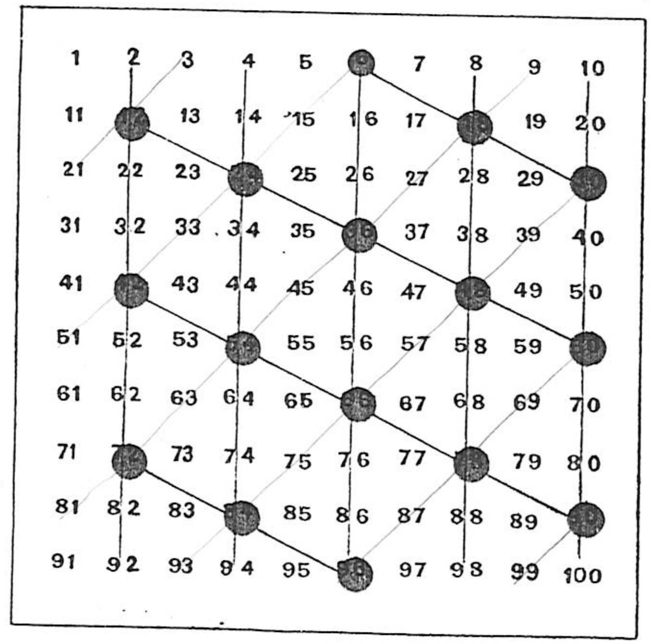


Fig. 126

MINIMO COMUN MULTIPLO

Otra indagación puede llevarse a cabo en la tabla de combinaciones hasta el 100, tabla A. y B. Esta consiste en buscar entre los productos relativos a dos números, por ejemplo 6 y 8, para ver si se logra encontrar en las dos series un número igual a que se llega, tanto en una como en otra serie es, 24; 6 × 4 = 24 y 8 × 3 = 24.

El 24 es, pues, un múltiplo común al 6 y al 8, y no hay otro menor que él, ya que es el primero que se encontró en ambas series

Busquemos ahora el primer múltiplo común que se encuentra entre el 3 y 7.

Este es 21 y se encuentra en una serie como 3 × 7 y en la otra como 7 × 3.

Es decir, que en este caso el múltiplo común se halla multiplicando un número por otro. En cambio, para el 6 y el 8 el múltiplo menor 24, no es su producto. En efecto $6 \times 8 = 48$.

Observemos ahora los números primos.

Veamos si sucede con otros números primos el que no exista otro menor múltiplo común que el número correspondiente a su producto. Por ejemplo 2 y 3.

Se halla el primer múltiplo común 6 que es precisamente el producto entre ambos $3 \times 2 = 2 \times 3$.

Sean ahora los números 5 y 7. El múltiplo buscado es 35. $35 = 5 \times 7$.

Para hacer ahora la prueba con números primos superiores al 10 que no están en las tablas A y B, por ejemplo 11, 13, 17, corresponderemos una tabla de sus múltiplos hasta más allá de 100 para encontrar los múltiples comunes.

11	11	1	13	13	1	17	17	1
22	11	2	26	13	2	34	17	2
33	11	3	39	13	3	51	17	3
44	11	4	52	13	4	68	17	4
55	11	5	65	13	5	85	17	5
66	11	6	78	13	6	102	17	6
77	11	7	91	13	7	119	17	7
88	11	8	104	13	8	136	17	8
99	11	9	117	13	9	153	17	9
110	11	10	130	13	10	170	17	10
121	11	11	**143**	13	11	**187**	17	11
132	11	12	156	13	12	204	17	12
143	11	13	169	13	13	**221**	17	12
154	11	14	182	13	14	238	17	14
165	11	15	195	13	15	255	17	15
176	11	16	208	13	16	272	17	16
187	11	17	**221**	13	17	289	17	17

Fig. 127

En la tabla se ve que los números 11 y 13 tienen común el 143 que corresponde al 11 repetido 13 veces y al 13 repetido 11 veces. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de 11 y de 13 es $143 = 11 \times 13$.

El común múltiplo entre 11 y 17 es $187 = 11 \times 17$.

El número 221 se encuentra en relación con el 13 repetido 17 veces y con el 17 repetido 13 veces; es decir, que el mínimo común múltiplo de los números primos 17 y 13 es $221 = 13 \times 17$

Para los números primos, pues, no se encuentra jamás un múltiplo común que sea inferior a su producto y, por lo tanto, este es el mínimo como múltiplo de los números primos.

Pero ya se ha visto que esto sucede con los números que no son primos, esto es, que son divisibles en partes iguales.

Volvamos a los números observados antes, 6 y 8 que tienen 24 como m. c. m. y analicemos sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 \end{array}$$

Analicemos ahora el 24 en sus factores primos y comparémoslo con los otros dos números.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 \\ 6 = 2 \times 3 \end{array} \qquad 24 = 2^3 \times 3$$

El 24, pues, se halla constituído por la combinación de factor 2 repetido 3 veces, como se ve en el 8 y el factor 3. Es decir el 2 con la mayor potencia existente en los números de los cuales se busca el m. c. m. y el factor 3.

Busquemos ahora en los tablas A y B otros múltiplos comunes; en relación con 4 y 6 el primer múltiplo común es 12. Hagamos el análisis y la comparación.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ 6 = 2 \times 3 \\ 4 = 2 \times 2 \end{array}$$

Esto confirma lo que habíamos observado anteriormente.

Otro ejemplo. Sean 6 y 9 cuyo primer múltiplo es 18.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3 \times 3 \\ 9 = 3 \times 3 \end{array}$$

En los dos últimos casos, pues, el mínimo común múltiplo se encuentra compuesto por el conjunto de factores primos existentes en los números en su máxima potencia.

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$18 = 3^2 \times 2$$

Para realizar ejercicios de obtención del m. c. m. entre números mayores de 10 construiremos tablas análogas a la A y B donde se señalan los múltiplos sucesivos de cada número que se considera. Sean los números 14 y 18.

14	14	1	18	18	1
28	14	2	36	18	2
42	14	3	54	18	3
56	14	4	72	18	4
70	14	5	90	18	5
84	14	6	108	18	6
98	14	7	126	18	7
112	14	8			
126	14	9			

Fig. 128

En el primer espacio aparecen los múltiplos sucesivos del número y en la tercera fila el número de veces que el mencionado número fué repetido.

El primer múltiplo común de 14 y 18 es pues 126 y resulta de repetir 9 veces el 14 y 7 veces el 18. Procedamos ahora a su descomposición respectvia en factores primos y a la comparación.

14	2	18	2	126	2	$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$
7	7	9	3	63	3	$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$
1		3	3	21	3	
		1		7	7	$14 = 2 \times 7$

El m. c. m. tiene como factores primos los de los números submúltiplos afectados del mayor exponente. $3^2 \times 2 \times 7$

Volvamos ahora a los grandes números sobre los que se operó antes: 60, 40, 48.

60	60	1	40	40	1	48	48	1
120	60	2	80	40	2	96	48	2
180	60	3	120	40	3	144	48	3
240	60	4	160	40	4	192	48	4
300	60	5	200	40	5	240	48	5
360	60	6	240	40	6	288	48	6

El m. c. m. de los tres números es 240 y se halla un múltiplo común de 60 y 40 en 120.

Analicemos ahora y comparemos los números 60, 40, 48, 240.

60	2	40	2	48	2	240	2
30	2	20	2	24	2	120	2
15	3	10	2	12	2	60	2
5	5	5	5	6	2	30	2
1		1		3	3	15	3
				1		5	5
						1	

$$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$$
$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$$
$$60 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

El 240 está compuesto del 2 repetido 4 veces que se encuentra con su máxima potencia en el 48 y de los otros dos factores primos, el 3 y el 5.

Para el 120, múltiplo de 60 y de 40, obtenemos

120	2	$120 = 2 \cdot\times 2 \times 2 \times 3 \times 5$	$120 = 2^3 \times 5 \times 3$
60	2	$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$	
30	2	$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$	
15	3		
5	5		
1			

Todos los factores primos aparecen en el m. c. m. el 2 en su mayor potencia.

Repitamos ahora el ejercicio buscando el m. c. m. de una mayor cantidad de números; 30, 36, 45, 60, 90.

30	30	1	36	36	1	45	45	1	60	60	1	90	90	180
60	30	2	72	36	2	90	45	2	120	60	2	180	90	.
90	30	3	108	36	3	135	45	3	180	60	3			
120	30	4	144	36	4	180	45	4						
150	30	5	180	36	5									
180	30	6												

El m. c. m. hallado es 180.
Su análisis y descomposición

30	2	36	2	45	3	60	2	90	2	180	2
15	3	18	2	15	3	30	2	45	3	90	2
5	5	9	3	5	5	15	3	15	3	15	3
1		3	3	1		5	5	5	5	5	5
		1				1		1		1	

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5$$

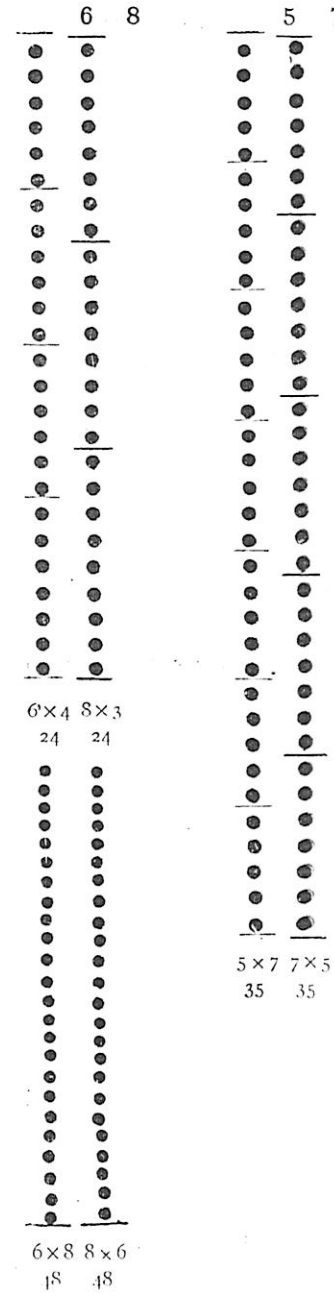
Los factores que representan las mayores potencias son 3^2— 2^2— 5.

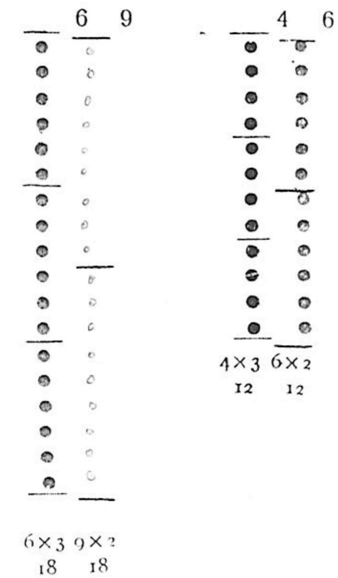
Comprobado que el m. c. m. se halla multiplicando los factores primos en que se descomponen los números dados y que tratándose de factores repetidos deben figurar los que tienen mayor potencia, busquemos, sobre esta base, el m. c. m. de los números 30, 55, 165, 66, 110, 22, 33.

30	2	55	5	165	5	66	2	110	2	22	2	33	3
15	3	11	11	33	3	33	3	55	5	11	11	11	11
5	5	1		11	11	11	11	11	11	1		1	
1				1		1		1					

Los factores primos obtenidos son: 2, 3, 5, 11.
Ninguno se halla elevado a potencia.
El m. c. m. se hallará pues multiplicando dichos factores entre sí. $2 \times 3 \times 5 \times 11 =$
$6 \times 5 \times 11 = 30 \times 11 = 330$.
Se puede comprobar que el 330 es divisible por todos los números dados.

Ejercicio de dibujo sobre mínimo común múltiplo





En este dibujo se ve cómo, relativamente, a los números divisibles el m. c. m. es siempre menor que el resultante de la multiplicación de aquéllos entre sí.

Fig. 129

POTENCIAS

Un modo de agrupar los números consiste en repetirlos tantas veces como números de unidades contienen, constituyendo de este modo un cuadrado, como hemos visto en el sistema decimal y después en la tabla de multiplicar.

2 × 2
3 × 3
4 × 4
5 × 5
6 × 6
7 × 7
8 × 8
9 × 9
10 × 10

Dicho producto repetido otras tantas veces da un segundo grupo de resultados; el cubo de los números.

2 × 2 × 2
3 × 3 × 3
4 × 4 × 4
5 × 5 × 5
6 × 6 × 6
7 × 7 × 7
8 × 8 × 8
9 × 9 × 9
10 × 10 × 10

Hemos usado en el sistema decimal el cuadrado de perlas hecho con 10 × 10 = 100 y el cubo de perlas hecho con 10 cuadrados superpuestos 10 × 100 = 1000.

Tanto el nombre (cuadrado, cubo), como la forma empleada para representar aquellos grupos, permiten considerar los números desde un punto de vista geométrico.

Cuadrado y Cubo se llaman potencias de los números.

Cuando se trata de un número simple se dice que es su primera potencia, repetido por sí mismo se dice que se halla elevado a la segunda potencia (cuadrado) y se indica con un pequeño 2 colocado en la parte superior derecha del número primitivo. Cubo de un número se llama al número elevado a la tercera potencia y se indica con un pequeño 3 colocado en la misma forma que en el cuadrado.

Cuadrado de los números 1 al 10
$1 \times 1 = 1^2$
$2 \times 2 = 2^2 = 4$
$3 \times 3 = 3^2 = 9$
$4 \times 4 = 4^2 = 16$
$5 \times 5 = 5^2 = 25$
$6 \times 6 = 6^2 = 36$
$7 \times 7 = 7^2 = 49$
$9 \times 9 = 9^2 = 81$
$8 \times 8 = 8^2 = 64$
$10 \times 10 = 10^2 = 100$

Cubo de los números 1 al 10
$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$
$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$
$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$
$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$
$7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 343$
$8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$
$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$
$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$

En el material de perlas existe un sistema que representa en cantidades reales los cuadrados y cubos de los números del 1 al 10. Cada número conserva en sus potencias el mismo color que tienen los bastoncillos de perlas usados en las sumas.

Por cada número existe; el bastoncillo que lo representa; tantos cuadrados del mismo número como unidades contiene; un cubo construído con el mismo número de cuadrados; una cadena de perlas correspondiente al cuadrado, donde las diversas partes (el número repetido por sí mismo) son distintas; y una cadena correspondiente al cubo, donde son distintos los cuadrados y los simples bastoncillos que representan el número.

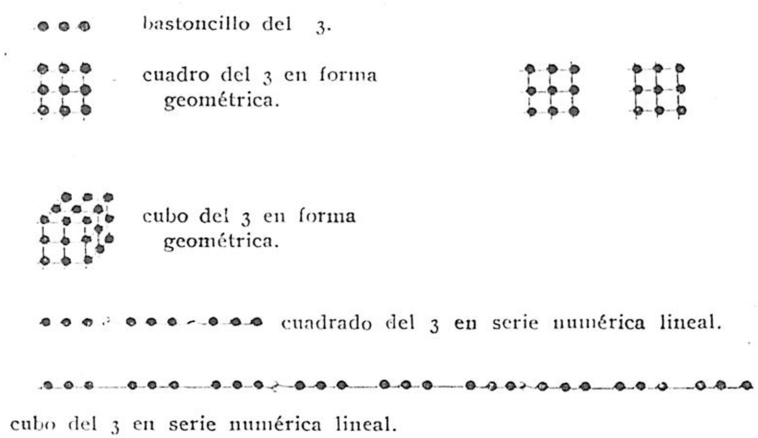
Este material permite estudiar separadamente los números en sus potencias y la comparación entre éstas.

Por ejemplo, la figura 130 representa la segunda potencia de los números 1 al 10 puesta en comparación, tanto en forma lineal como cuadrada, y a un lado se ven los bastoncillos de los números colocados gradualmente.

Teniendo suficiente espacio para disponer paralelamente y en toda su extensión las cadenas, se puede lograr a primera vista una idea real de la progresión geométrica de los números.

1	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

La forma de los cuadrados rígidos donde las perlas están ligadas, permite su superposición, así como las disposiciones más



Pongamos aquí un ejemplo del material, el relativo al 3 :

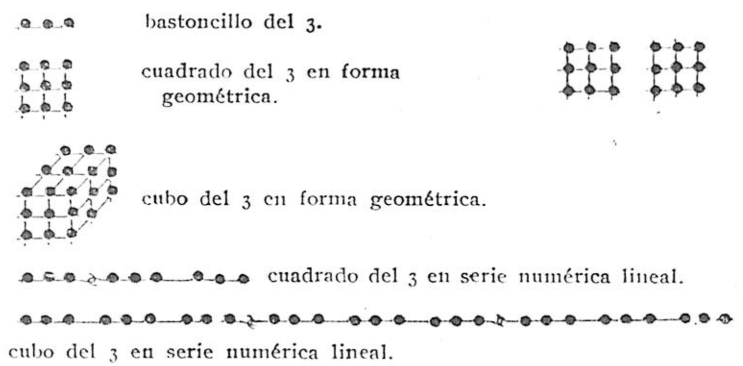
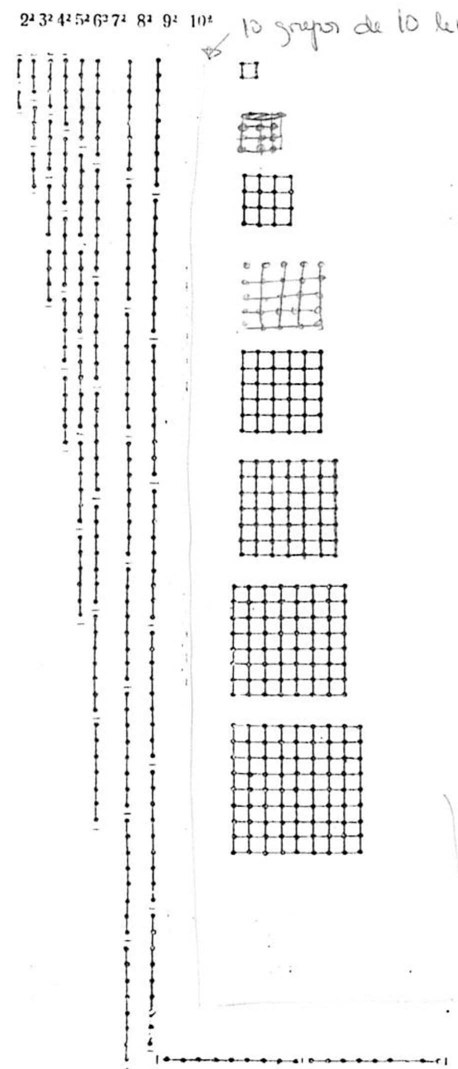


Fig. 130



10 grupos de 10 lineas

10×10 cuadros en amarillo.

Los cuadrados de los números del 1 al 10 representados por cadenas lineales y por cuadrados rígidos.

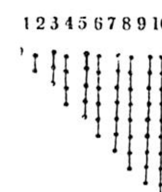
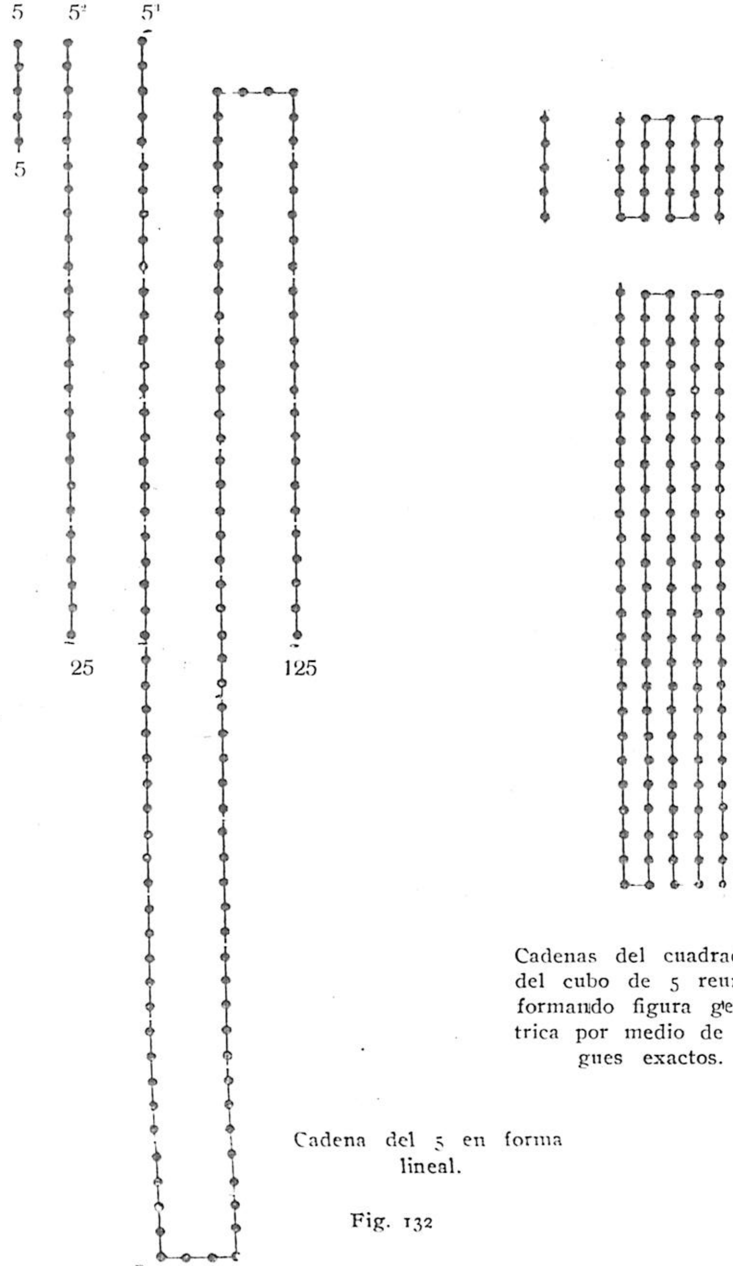


Fig. 131



Cadenas del cuadrado y del cubo de 5 reunidos formando figura geométrica por medio de pliegues exactos.

Cadena del 5 en forma lineal.

Fig. 132

variadas adecuadas para hacer resaltar la relación entre sus dimensiones numéricas.

Comparando en la misma forma los cubos rígidos y las cadenas de los cubos, se observa la gran diferencia entre cuadrado y cubo de un número.

De este modo queda una idea sensible de las longitudes relativas al cuadrado y cubo de los números y de su progresión.

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
4	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Comparando los cuadrados rígidos con los cubos se ve como aumenta la tercera dimensión de éstos en relación con cada cuadrado. Cada cubo es superponible al cuadrado y viceversa, es, por lo tanto, en la tercera dimensión donde está la diferencia. El hecho de que para cada número existen cuadrados separados en cantidad suficiente para poder formar un cubo, permite la casi descomposición del cubo rígido, porque, aun cuando éste no sea modificable, los cuadrados separados lo pueden representar como descompuesto en sus partes y dar lugar a cálculos y comprobaciones.

Para cada cubo, sucede, que el número de perlas que lo constituyen en total es igual a las que forman el cuadrado repetido tantas veces como unidades tiene el número de donde se deriva. Sea el número 2.

$2 \times 2 =$ 4 el cuadrado
$4 \times 2 =$ 8 el cubo

Sea el número 5

$5 \times 5 =$ 25 el cuadrado
$25 \times 5 =$ 125 el cubo.

Los tres números iguales $5 \times 5 \times 5$ representan, efectivamente, las cantidades de perlas que se pueden contar en las tres aristas contiguas del cubo, es decir, los dos lados del cuadrado y después la arista que constituye la tercera dimensión. Que 5×5 indica el cubo de 5, y cómo lo representa es cosa evidente.

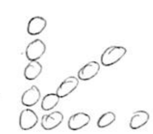


Fig. 133

Esto da una base numérica a la geometría que hace más claro el concepto del valor cúbico.

Si se colocan los cubos de perlas uno sobre otro, de modo que cada uno de ellos esté dispuesto centralmente con relación al anterior, se logrará una construcción semejante a la que hacían los niños pequeños edificando la torre roja.

Más aún, las dos torres de perlas, roja y de cubos, pueden compararse como un hecho aritmético puesto frente a un hecho geométrico y como una correlación entre números y magnitudes.

Los cubos, desde el mayor al más pequeño, tienen una arista que, medida en centímetros, es respectivamente de

10,9,8,7,6,5,4,3,2 y 1.

Por analogía puede saberse cuantos cm². tiene la cara de cada cubo de madera. Estas miden en cm. respectivamente:

10^2	9^2	8^2	7^2	6^2	5^2	4^2	3^2	2^2	1^2
100	81	64	49	36	25	16	9	4	1

Y el volumen de los cubos se puede averiguar de igual modo:

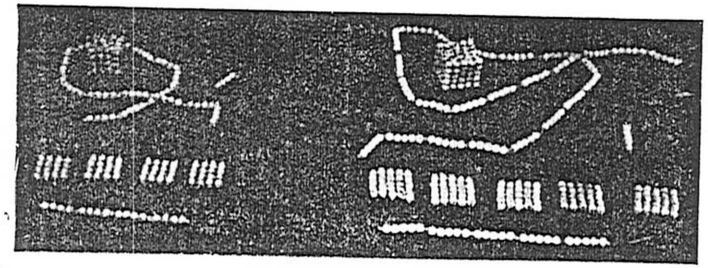
10^3	9^3	8^3	7^3	6^3	5^3	4^3	3^3	2^3	1^3
1000	729	512	343	216	125	64	27	8	1

Por lo tanto, el mayor cubo es igual 1000 veces el cubo pequeño que está en la cima de la torre y que representa la unidad del sistema.

Una de las aplicaciones de las *cadenas* es, la de *contar* por unidades y por grupos. La fascinación que ejercen estas cadenas de brillantes perlas de colores, suscita en los niños una actividad incansable para contar.

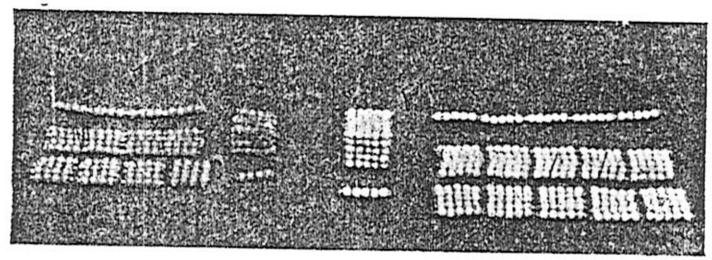
Ello hace pensar en una relación psicológica entre la forma del rosario, esto es, las perlas enfiladas, y el mecanismo de contar que ha dado a católicos y musulmanes un instrumento cuyo uso no produce cansancio; y también el hecho de que las perlas enfiladas se llamaran cuentas, esto es, instrumento para contar, explica en parte el fenómeno singular que se observa en nuestras escuelas, o sea, la paciencia que ponen los pequeños en la operación de contar las cadenas del sistema.

Especialmente la cadena del millar, es decir, la cadena más larga atrae, y se observa en los niños como cuentan una a una todas las perlas hasta el fin. Como dicha labor es fatigosa y los niños no pueden realizarla de una sola vez, vuelven al siguiente día a comenzar la operación donde la habían dejado el anterior. Por ejemplo, si habían dejado el número 350, vuelven a contar al día siguien-



Cuadrado y cubo del cuatro y cinco con las perlas

Fig. 134

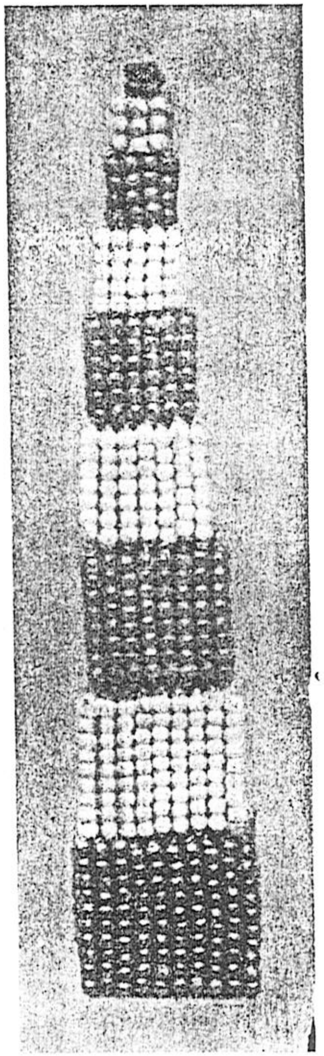


Cuadrado y cubo del cuatro y cinco. Las cadenas de los cubos están replegadas sobre sí mismas y sujetas con alfileres

Fig. 135

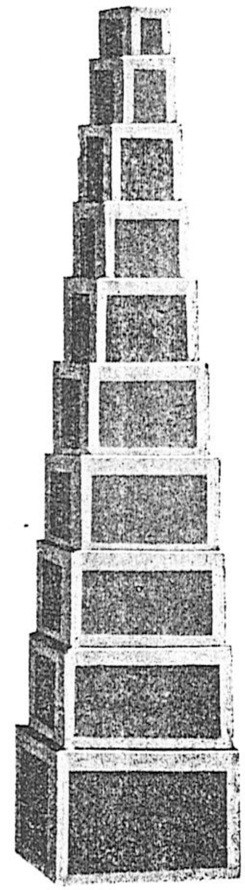
te a partir del 351 y, para ello, dejaron una señal en la cadena sobre el 350, señal que es escrupulosamente respetada por los demás.

También el contar por grupos es una labor interesante. Lo más sencillo es contar por grupos la cadena del millar que nos recuerda el sistema decimal: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 y después 100, 200, 300 etc.



El cubo de los números sobrepuestos en forma de torre

Fig. 136



La Torre

Fig. 137

El contar por grupos se convierte en un estudio de memorización para las otras cadenas. También para esto existe un material de pequeños cuadrados de cartón del mismo color que las perlas y que se pueden colocar sobre los segmentos siempre visibles en las cadenas. Por ejemplo:

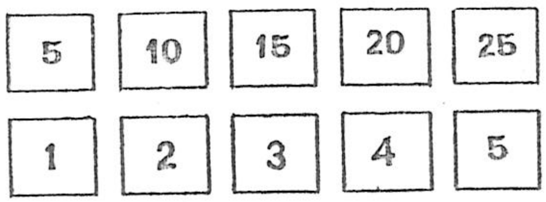


Fig. 138

En el dorso de los pequeños carteles hay un número progresivo de tamaño muy pequeño y cuyo color indica en cada uno a que grupo pertenece. Por ejemplo:

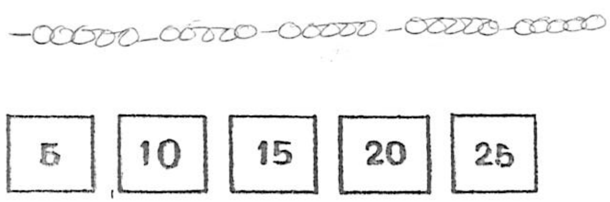


Fig. 139

Lo que facilitará el contar por 5, 10, 15, 20, 25 etc.

El hecho, además, de que las cadenas son plegables, siendo rígidos solamente los pequeños bastones del número (por ejemplo el 5) hacen posible el replegar aquéllas, de modo que forme un cuadrado, o también con las cadenas del cubo una fila de tantos cuadrados como son las unidades del número, como se observa en la figura 132 respecto al número 5.

Tales agrupamientos y comprobaciones dan lugar a estudios intuitivos y nuevas memorizaciones.

Contar por 3 hasta el cubo de 3.
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Por 4 hasta el cubo de 4.
4, 8, 12, 16... 20, 24, 28, 32, 36,... 64.

Contar por 5 hasta el cubo de 5.
5, 10, 15, 20... 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125.
y así sucesivamente.

La misma *cantidad de números* que crece contando por grupos hasta el cubo de cada número, plasma por otra parte el concepto de «potencia numérica».

La potencia siempre más lejana a la que se alcanza con un esfuerzo siempre mayor.

Por ejemplo: contar por 8 hasta el cuadrado y después el cubo de 8.

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64... etc.

Con esta serie de numeraciones se aprende a contar los *múltiplos* de los números.

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

ANALISIS Y ESTUDIOS SOBRE RELACIONES

Además de los ejercicios que se refieren a la adquisición de los primeros conocimientos esenciales, se pueden introducir elementos de un estudio más a fondo que, atrayendo la atención y la actividad del niño, lo preparan para un progreso hacia conocimientos esenciales más elevados. Son conjuntamente una repetición de lo ya conocido conducido en diversas formas por el material, y un puente fácil y agradable hacia los estudios venideros. Esto sucede con los ejercicios que los niños han llamado: «Juegos sobre la multiplicación».

Unos permiten volver una y otra vez sobre cálculos que es necesario memorizar, y otros representan la ocasión de ejercitarse en la jerarquía y, finalmente, existen juegos complejos que encierran conjuntamente ambas dificultades y que requieren la cooperación de varios niños (como el juego de la banca). Todos estos juegos se prestan a observaciones sobre el orden y distribución de los grupos numéricos. Dicho estudio que, enunciado en esa forma, podía parecer prematuro, e inadaptado, por lo mismo, para interesar a los niños, se hace, en cambio, apasionante si a la aridez de las cifras se sustituyen objetos atrayentes y de colores que puedan desplazarse para componer y recomponer grupos de perlas, de dibujos o construcciones. Con todos estos juegos utilizan, no sólo el material de los bastones de perlas que representan los números de uno a diez, sino casi todo el material de perlas que será descrito posteriormente, y en particular los cuadrados y cubos relativos a los números dos al nueve.

Un ejercicio preliminar utiliza solamente los bastones, y consiste en disponer uno debajo del otro los bastones iguales repetidos diez veces. Cuando se ha llegado al cuadrado del número se deja un espacio y se continúa debajo de la acumulación en columnas. En este ejercicio sencillísimo, los niños han encontrado tal interés, que para facilitarlo se prepara una especie de bandeja de bordes salientes que tiene un fondo de terciopelo, con el fin de, que sus bastones no resbalen. La disposición del material es la indicada en la figura 140.

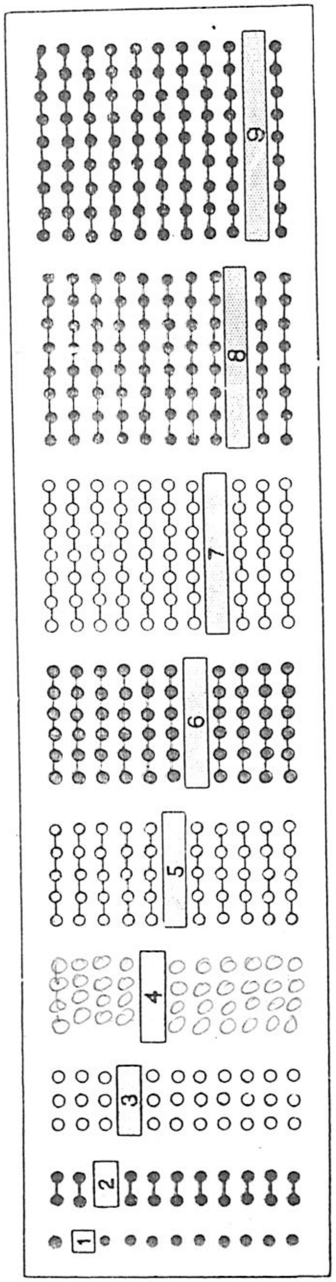


Fig. 140

La figura reproduce en su conjunto todas las combinaciones numéricas halladas en los primeros ejercicios con el material de la tabla pitagórica y se podrían reproducir los mismos cálculos, contando las unidades que se vienen acumulando cada vez que se añade un nuevo bastón a una columna. Aquí, sin embargo, todo permanece estable y ofrece un conjunto que se presta a la observación. En efecto, a cada número sucesivo se ve agrandar el relativo cuadrado y reducirse en altura el rectángulo de abajo. Bajo la unidad hay una alta fila de nueve perlas colocado horizontalmente. Calculando los cuadrados se encuentran los números 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 ; aquellos números que señalan los límites en la tabla de multiplicación simplificada. El producto del grupo entero correspondiente a cada bastón se calcula fácilmente, porque siendo diez las filas se obtiene sucesivamente los siguientes números : 10, 20... 80, 90. Y, por esto, reduciendo el cálculo a la forma decimal se podrían colocar inmediatamente debajo de las columnas tantos bastones de diez como corresponden al grupo, o sea 1,2,3,4,... hasta 9. Más allá vendría el cuadrado de 10 que es distinto de todos los grupos porque es entero, mientras hasta 9 los grupos han podido dividirse en dos partes. He aquí, pues, cómo el cuadrado de 10 está fuera de los caracteres de todos los grupos considerados ; éste es una unidad superior.

Cuando se quiere calcular el rectángulo que está en la parte inferior de cada cuadrado, se puede hacer por medio de una multiplicación, por una sustracción, o también, por medio de una combinación de ambas operaciones. Por ejemplo, considerando el 4 se puede hallar multiplicando $4 \times 6 = 24$ o también sustrayendo a 40 el cuadrado de $4^2 = 16$; $40 - 16 = 24$. El cálculo de cada una de las colum-

nas, sumando conjuntamente el cuadrado y el rectángulo correspondiente, es

$10 = 1 + 9$
$20 = 4 + 16$
$30 = 9 + 21$
$40 = 16 + 24$
$50 = 25 + 25$
$60 = 36 + 24$
$70 = 49 + 21$
$80 = 64 + 16$
$90 = 81 + 9$

de donde se deduce que los rectángulos representan cantidades simétricas en torno a 25 o sea al cuadrado de 5. Por lo tanto, el cuadrado permanece siempre como centro de simetría. Pero, los rectángulos indicados por las perlas, tienen una diversa distribución de las partes aún siendo iguales en la totalidad de las unidades. En efecto, uno de los rectángulos del 24 es igual a seis bastones de 4 y el otro a cuatro bastones de seis. Así un 21 a siete bastones de 3 y el otro a 3 bastones de 7. Después viene un 16 formado por ocho bastones de 2 y el otro por 2 bastones de 8 ; finalmente, existe un nueve formado por nueve perlas sueltas y otro constituído por un bastón de 9. La posición de los rectángulos está en sentido inverso ; por una parte aparecen verticales sobre el lado menor y, de otra, se apoyan sobre el lado mayor, pero si aquellos grupos que forman un rectángulo se sacan para disponerlos en el mismo sentido, se puede comprobar materialmente su igualdad. Las diferencias numéricas entre los rectángulos son fáciles de calcular :

$25 - 24 = 1$
$24 - 21 = 3$
$21 - 16 = 5$
$16 - 9 = 7$

Esto es, la serie de los números impares. Entre dichos números la diferencia es 2 :

$7 - 5 = 2$
$5 - 3 = 2$
$3 - 1 = 2$

He aquí, pues, correspondencias interesantes que hacen ya reconocer en el número la soberana cualidad del orden y de la ley.

El estudio de la disposición de los números, que se encuentra en la tabla de multiplicación, es un trabajo distinto de la memorización de los resultados y no requiere ya la reducción al mínimo de los números a recordar, sino que hace necesaria la presencia de todas las combinaciones para que resalte la relación entre ellas. Semejante estudio podría creerse poco interesante para un niño, pero si las cifras se sustituyen por objetos atrayentes y coloreados que puedan desplazarse y que se presten a realizar combinaciones, componiendo y descomponiendo los grupos, entonces, el estudio de los números se hace apasionante. Un primer ejercicio consiste en construir poco a poco las combinaciones referentes a la tabla de multiplicación comenzando por los dos primeros números 1 y 2.

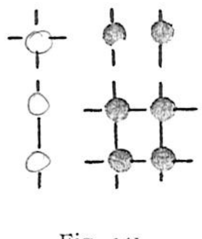


Fig. 141

La figura permite encontrar, en sentido diagonal, los dos cuadrados de 1 y de 2 y después dos rectángulos iguales formados, sin embargo, por un lado con dos perlas separadas y, por el otro, con un bastón de dos perlas. Prosiguiendo al número 3, se obtiene la disposición indicada en la figura siguiente.

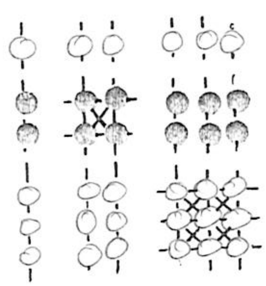


Fig. 142

Los tres cuadrados (1, 2, 3) están sobre la diagonal y, en vez de construir estos cuadrados con bastones sueltos se colocan los correspondientes cuadrados de perlas que se hallan formados en el material. Encima del cuadrado de 3 hay un grupo de seis perlas constituído por tres bastones de 2 y a la izquierda un grupo de 6 perlas formado por 2 bastones de 5. Añadiendo las combinaciones del 4

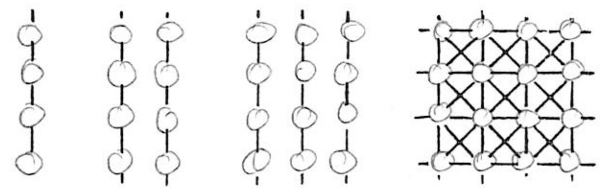


Fig. 143

se preparan las combinaciones 4 × 1, 4 × 2, 4 × 3, 4 × 4; el cuadrado de 4 viene a quedar en sentido diagonal, después del cuadrado de 3; queda ahora por rellenar el espacio superior al cuadrado de 4, que estará compuesto por los productos inversos de los precedentes, es decir, 3 × 4, 2 × 4, 1 × 4. En la figura siguiente está representada la construcción de los grupos hasta el 5 inclusive.

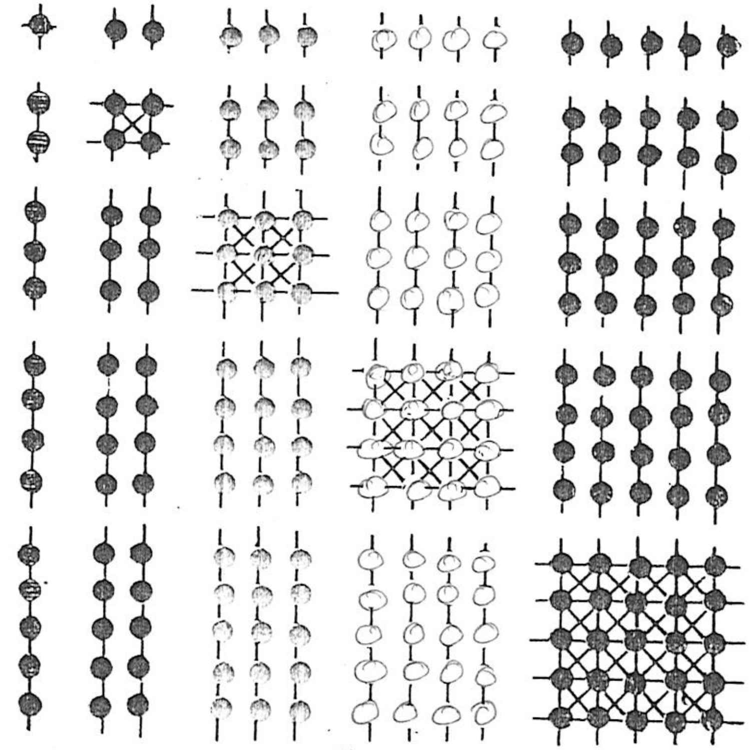


Fig. 144

Ahora bien, dichas construcciones están realizadas en tal forma que, sobre cada línea horizontal se hallan dispuestas las combinaciones relativas a un número solo 1,2,3,4,5... y como los bastones relativos a un mismo número tienen el mismo color, la construcción resulta por fajas coloreadas.

Construcciones en ángulo. Otro modo de ordenar las combinaciones puede consistir en hacer de cada cuadrado el vértice de un ángulo, combinando en la parte superior y la lateral, los grupos con bastones correspondientes todos ellos al cuadrado del ángulo. En tal caso los bastones se colocan arriba, en sentido horizontal, y al lado en sentido vertical.

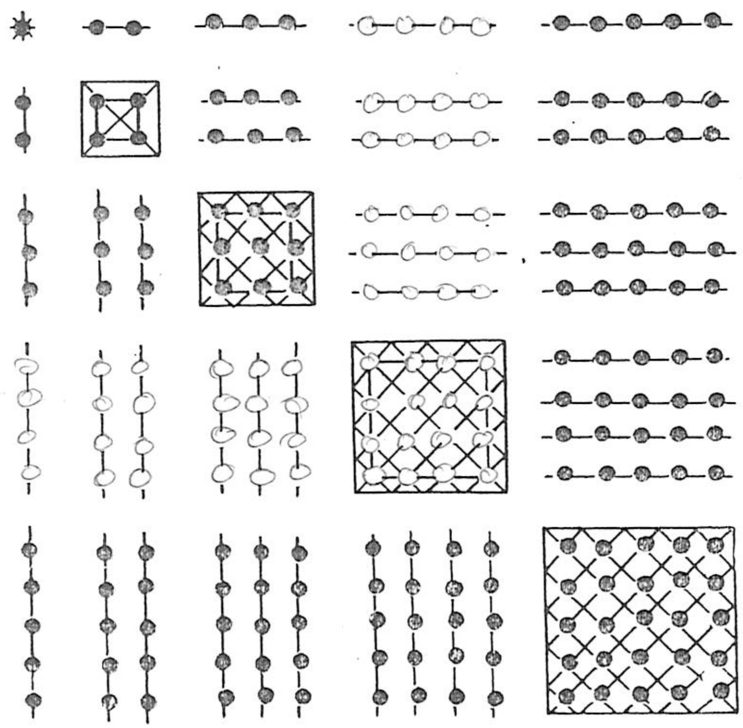


Fig. 145

En este caso la figura se presenta, no en fajas, sino en ángulos del mismo color. Un ejercicio consiste en contar los bastones libres correspondientes a cada cuadrado y buscar cuantos cuadrados iguales más, podrían construirse con ellos. Comencemos por el 2 ; hay dos bastones de dos, uno encima y otro al lado del cuadrado de 2, con los

cuales puede construirse otro cuadrado de 2. La suma de las unidades relativas a la faja angular del 2 es, pues, igual a dos cuadrados de 2, pero, esto es precisamente el cubo de 2.

Observemos ahora la faja angular del 3. Existen en la parte superior tres bastones de 3 (2 + 1) e igualmente al costado (2 + 1), luego se pueden construir otros dos cuadrados de 3. La suma es, pues, tres cuadrados de 3, o lo que es igual, tres elevado al cubo. En la faja del 4 existe un grupo de tres bastones junto al cuadrado de 4 y lo mismo sucede en el lado. Quedan dos bastones a cada lado, que, en conjunto constituyen otro cuadrado. Son, pues, 4 los cuadrados de 4 y la suma total es cuatro elevado al cubo. Lo mismo sucede con el 5, como lo demuestra la figura siguiente :

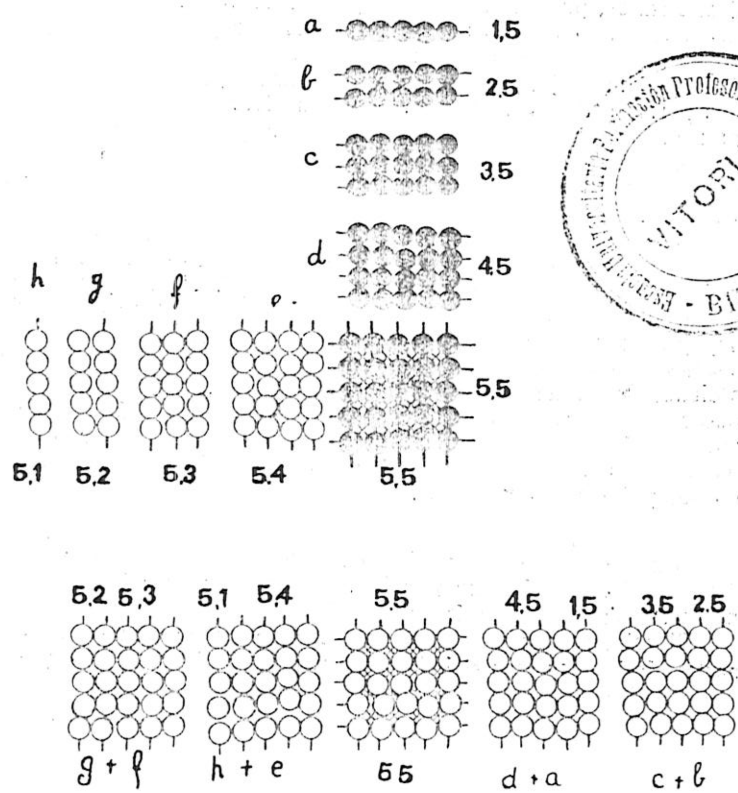


Fig. 146

Análogamente sucede con las combinaciones que se refieren a todos los otros números; por lo tanto, el resultado de todas las combinaciones numéricas existentes en una tabla de multiplicación de 1 a 10 es igual a la suma de los cubos de los números 1 a 10. Por ello, los cubos de perlas que se pueden superponer, formando una torre, corresponden, en cuanto a valor, al bello tapiz de perlas, de ángulos de colores, que representa las combinaciones numéricas de la tabla de Pitágoras. Esto se presta a ejercicios colectivos, análogos a los vistos en el sistema decimal, donde un niño actúa de banquero para los cambios y las descomposiciones: es decir, en un caso determinado deshacer los cubos, o sea cambiarlos por los cuadrados y bastones correspondientes, y de ese modo, poco a poco, construir, deshaciendo la torre de perlas, el tapiz de colores que representa la tabla pitagórica. Esta es, pues, la labor contraria a reconstruir la torre de perlas, haciendo cambiar los bastones por cuadrados y éstos por cubos.

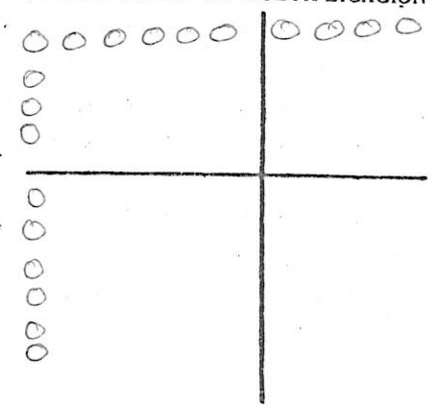
Se ha llegado así a ejercicios muy complejos que requieren una división del trabajo, pero que son en sí mismos, claros y atrayentes (1) Las perlas brillantes, de nueve colores diversos y vivaces, dispuestas sobre un tapete de terciopelo, la descomposición y la reconstrucción de cubos, la torre que se convierte en un bello tapiz de ángulos de color, ejercen una fascinación que empuja a una apasionada actividad.

Los niños tienden siempre a realizar trabajos colosales. Nuestra intervención en las escuelas, no es jamás en el sentido de empujarles hacia delante, sino al contrario, en el de *limitar* y conducir la mente hacia la simplicidad. Con ello no pretendemos impedir el ímpetu desbordante que conduce, cuando se pone una nueva clave hacia el infinito. Dejamos a los niños el entusiasmo de las multiplicaciones de números grandes hasta el absurdo, o, de construcciones que pueden dilatarse sin límites, pero, cuando estos fenómenos demuestran la entrada en un mecanismo que puede dominar la mente, ofrecemos una nueva clave de indagaciones infinitas que permite nuevas y diversas conquistas.

La nueva serie de ejercicios, consiste en considerar agrupaciones dentro del cuadrado que no siguen la regular sucesión de los números, sino que prescinden de ella.

El primero consiste en dividir uno de los cuadrados de 100 en partes desiguales, como indica la cruz en la figura que sigue:

(1) Este ejercicio se debe a la señorita Isabel Belavéry Bouchard, de Budapest, directora de una escuela Montessori.



completar cuadro 10x10

Fig. 147

o, también, colocar cintas entre las perlas que señalan la separación de las partes. Efectuando las operaciones relativas a las perlas, que se hallan dentro de cada grupo, y sumando los productos, se debe obtener el mismo número de perlas que forman el cuadrado total o sea 100.

Es decir:

$$
\begin{aligned}
4 \times 4 &= 4^2 = 16\\
6 \times 4 &= 24\\
4 \times 6 &= 24\\
6 \times 6 &= 6^2 = \underline{36}\\
& 100
\end{aligned}
$$

Se obtienen, pues, dos cuadrados diferentes 4 y 6 y dos rectángulos iguales, pero inversos. Cada lado del cuadrado, que es de 10, ha sido dividido en estas dos partes, 4 y 6. La operación puede expresarse así: $10^2 = (4 + 6)^2 = 4^2 + 6^2 + 2\ (4 \times 6)$.

Apenas ofrecido este nuevo punto de cristalización en aquella madurez mental que se ha formado, ha surgido una construcción maravillosa, que nos ha obligado a ofrecer otros materiales, no ya de perlas, sino, de carteles que tienen los cien puntos dispuestos en cuadrado; venían divididos y subdivididos por líneas y el trabajo consistió únicamente en procurar la posibilidad de muchas pequeñas multiplicaciones en el interior que concluían por dar siempre el mismo resultado de 100. Viene después la consideración sobre la cantidad y disposición de las figuras que se derivan; los cuadrados se encuentran siempre sobre la diagonal y los rectángulos se disponen simétricamente de un lado y de otro, resultando sus productos iguales dos a dos. Los cuadrados son tantos, como las partes del lado subdividido. En este caso

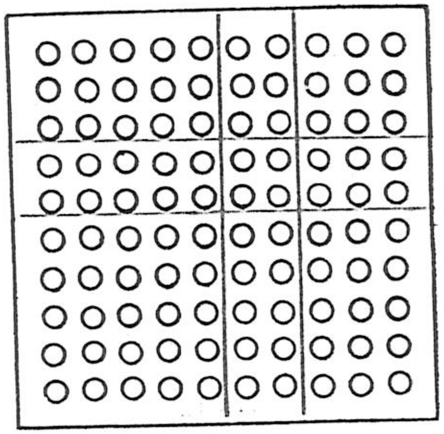


Fig. 148

son tres: 3, 2 y 5

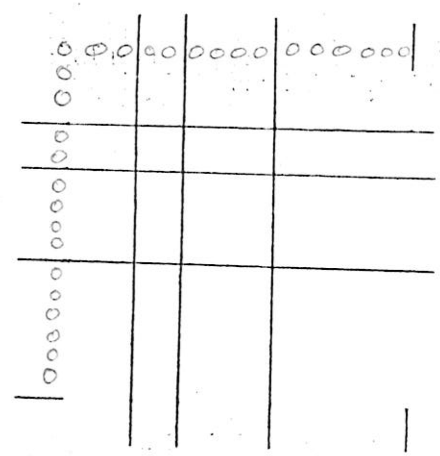
3 × 3 — 9 —— 3^2
3 × 2 — 6 ——
3 × 5 — 15 ——
2 × 3 — 6 ——
2 × 2 — 4 —— 2^2
2 × 5 — 10 ——
5 × 2 — 10 ——
5 × 3 — 15 ——
5 × 5 — 25 —— 5^2
100

Este trabajo conduce a repetir los productos parciales entre los números más variados y sin progresión entre ellos, de esa forma, se llega al ejercicio, llamado en las escuelas: *repetir los productos a saltos.*

Bien pronto los cuadrados de 100 puntos se muestran insuficientes. y, de esta forma, surgieron los cuadrados de 12, 15 y 20 puntos de lado. Basta conocer el número total de los puntos correspondientes al cuadrado en el cual se trabaja: 12 × 12 = 144, 15 × 15 = 225, 20 × 20 = 400, para tener el resultado, al cual, deben alcanzar juntos los productos de las correspondientes combinaciones.

Los ejercicios se hacen complejos en dos sentidos, esto es: a) de aumentar siempre la cantidad de subdivisiones del cuadrado, b) de observar las disposiciones relativas y, por lo tanto, las relaciones entre las figuras resultantes. El punto de partida de cada ejercicio, consiste en subdividir el lado del cuadrado en partes, así que el lado

mismo se convierte en una suma de las partes en que ha sido dividido.



completar
15×15

Fig. 149

En un cuadrado de 15 (figura 149) se determinaron en 3 + 2 + 4 + 6. Por medio de líneas paralelas se señalan en todos los lados del cuadrado las mismas subdivisiones y, de ese modo, quedan delimitadas muchas figuras. Las multiplicaciones a efectuar son en número de 16 = 4 × 4 porque el lado del cuadrado ha sido dividido en 4 partes. En efecto:

1ª — 3 × 3 = 9 —— 3^2
2ª — 3 × 2 = 6
3ª — 3 × 4 = 12
4ª — 3 × 6 = 18
5ª — 2 × 3 = 6
6ª — 2 × 2 = 4 —— 2^2
7ª — 2 × 4 = 8
8ª — 2 × 6 = 12
9ª — 4 × 3 = 12
10ª — 4 × 2 = 8
11ª — 4 × 4 = 16 —— 4^2
12ª — 4 × 6 = 24
13ª — 6 × 3 = 18
14ª — 6 × 2 = 12
15ª — 6 × 4 = 24
16ª — 6 × 6 = 36 —— 6^2
225

La suma total de los puntos, calculada separadamente según las subdivisiones del cuadrado de 15, es igual a 225.

Mirando la figura, se observa cómo en el cálculo recorre el cuadrado de los números que representan las partes, en las cuales está el lado subdividido y que los rectángulos son iguales dos a dos y están distribuídos simétricamente. Las partes del 15, siendo 3, 2, 4, 6, se ve, observando la serie de las multiplicaciones, que cada número, está multiplicado sucesivamente por todos los demás.

3. 3	2. 3	4 3	6. 3
3. 2	2 2	4 2	6. 2
3. 4	2. 4	4 4	6. 4
3. 6	2. 6	4 6	6. 6

Tabla A.

Es este, pues, el caso de multiplicaciones dispuestas en cuadrado donde cada parte de un lado está multiplicada sucesivamente por todas las partes del otro, siendo iguales y correspondientes las subdivisiones de los lados. Esto se puede representar numéricamente en la siguiente forma :

$$
\begin{aligned}
15 \,.\, &= \\
15 &= (3 + 2 + 4 + 6). \quad (3 + 2 + 4 + 6) = \\
&+ (3.\ 3) \ + (3.\ 2) \ + (3\ \ 4) \ + (3\ \ 6) \ + \\
&+ (2.\ 3) \ + (2.\ 2) \ + (2.\ 4) \ + (2.\ 6) \ + \\
&+ (4.\ 3) \ + (4.\ 2) \ + (4.\ 4) \ + (4.\ 6) \ + \\
&+ (6.\ 3) \ + (6.\ 2) \ + (6.\ 4) \ + (6.\ 6)
\end{aligned}
$$

Tabla B.

es decir ; cada uno de los números del primer paréntesis viene multiplicado por cada uno de los contenidos en el segundo ; esto resulta más claro escribiendo, de un color, las cifras del multiplicando y, de otro color, la del multiplicador y para no confundir los signos, poniendo como signo de la multiplicación, un punto, para distinguirlo de las cruces que indican la suma.

JUEGOS SOBRE LA MULTIPLICACION

Los dos juegos, que vamos a describir, son el resultado de esfuerzos y tentativas hijas de nuestro deseo de secundar la actividad de los niños y han quedado como aportación eficaz, y ahora ya, indispensable. El apelativo de «Juegos» demuestra el interés y la alegría que suscitan.

Son ejercicios que salen del campo de la escuela, para seguir los niños hasta sus casas, bajo forma de útil pasatiempo para ellos y sus amigos.

JUEGO DEL TABLERO

Este es una aplicación de la multiplicación analizada en forma geométrica.

Un tapete está preparado de modo que representa espacios cuadrados de dos colores en filas diagonales, como en el tablero de un juego de damas. (Fig. 150).

El tablero es rectangular y tiene un lado de cuatro cuadrados y el otro de seis o más.

Los cuadrados tienen el lado de 7 centímetros aproximadamente y en ellos cabe un bastón de nueve perlas.

Encima y a la derecha, en correspondencia con los cuadrados, está indicada la jerarquía de los números : 1, 10, 100, 1000 etc. de tal modo, que la unidad simple comienza en ambos lados a partir del cuadrado extremo superior de la derecha.

Encima de estas indicaciones hay espacios vacíos donde se ponen los números, arriba los del multiplicando, a la derecha los del multiplicador. Los productos relativos a las unidades del multiplicador se colocan en la fila superior de cuadrados, los de las decenas en la segunda, etc. ; es decir, en la línea que corresponde a cada cifra del multiplicador comenzando siempre por el primer cuadrado de la derecha de cada fila.

Lo mismo si se multiplican unidades por unidades, que millares del multiplicador, comenzando siempre por el primer cuadrado de la fila.

Si el número de un producto resulta de dos cifras, por ejemplo : $3 \times 6 = 18$, el 1 y el 8 se colocan en dos cuadrados adyacentes de la misma línea, el 1 a la izquierda del 8.

El material que se usa es el de los bastones de perlas. Si por ejemplo, la multiplicación indicada 3×6 fuera de tres millares del multiplicador y 6 unidades del multiplicando, debería colocarse $3 \times 6 = 18$, un bastón de ocho perlas en el cuadrado del mil, y una perla en el cuadrado situado inmediatamente a la izquierda del anterior.

3649 ×
467

25543
21894
14596

1704083

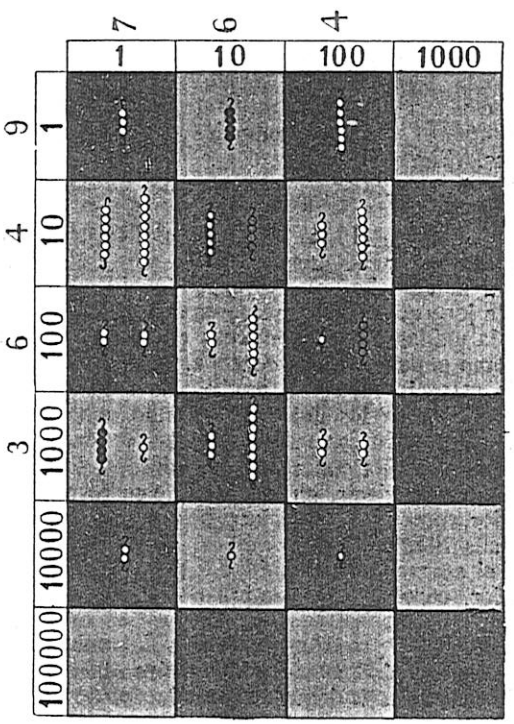


Fig. 150

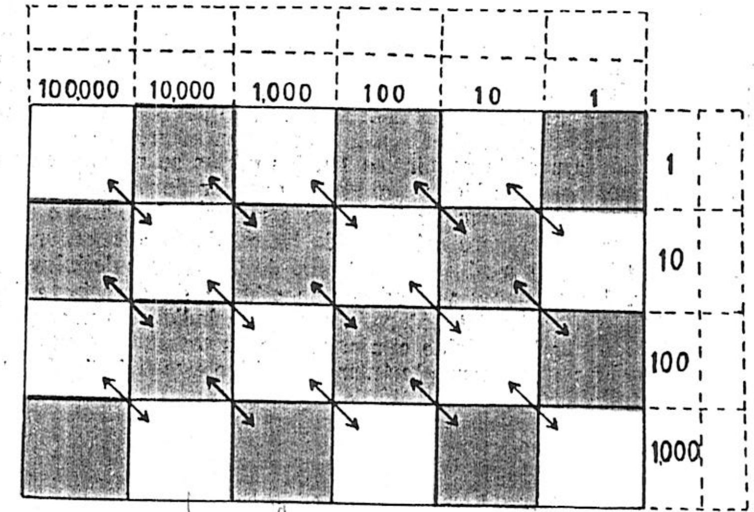


Fig. 151

Al final de la operación, muchos cuadrados aparecen ocupados por varios grupos de perlas. Por ejemplo, la multiplicación 3424 × 526 daría lugar a la distribución de perlas que aparece en la figura 152.

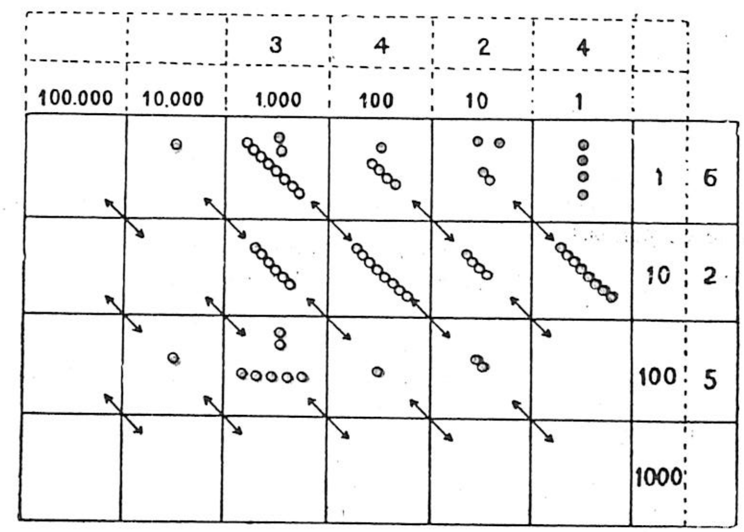


Fig. 152

Ahora viene la segunda parte, que conducirá al producto total.

Sobre el tablero los grupos de perlas pueden sumarse en sentido de las flechas o sea en diagonal. Se van sumando hasta 10 a lo largo de la diagonal y cada vez se convierte en una sola perla que pasa entonces, en sentido horizontal, al cuadrado adyacente de la izquierda, sea cualquiera el plano en que se forma el grupo de 10.

Cuando no es posible reunir las 10, las perlas se reunen en un solo grupo que, como es lógico, no puede exceder de nueve.

Tales reglas hacen asemejar la acción a un verdadero juego que sale del tablero. El número así obtenido ha resultado «vencedor» y liberado del tablero va a alinearse en la fila de los valores definitivos

Es decir, los números vencedores se alinean de derecha a izquierda, debajo o arriba del tablero, sin ninguna indicación porque el valor está dado por la posición que cada uno va tomando al situarse junto al otro. En nuestro caso el número definitivo estaría indicado por

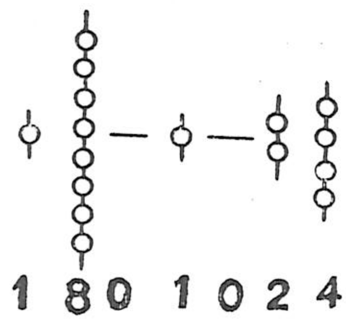


Fig. 153

(Los ceros están indicados en el producto total por un bastón carente de perlas.)

La distribución geométrica de la multiplicación en el juego del tablero, conduce a observar que los valores se disponen diagonalmente; en el primer cuadrado del ángulo están las unidades simples, después las decenas, centenas, etc.

En efecto, los dos cuadrados de las decenas correspondientes a las unidades del multiplicador combinada con las decenas del multiplicando y viceversa; esto es, que en los dos casos se obtiene la unidad multiplicada por las decenas.

En la diagonal adyacente tenemos 100 × 1 y 1 × 100 o 10 × 10: es decir, todas las centenas.

Por ello las sumas que nos dan el producto total, deben ser efectuadas en los cuadrados situados diagonalmente.

JUEGO DEL BANQUERO

El juego que sigue llamado «Juego del Banquero» permite la visión completa de todas las particularidades del procedimiento de una multiplicación y es paralelo a los ejercicios con marcos o bastidores.

MATERIAL BANCARIO

1000000	100000	10000	1000	100	10	1
2000000	200000	20000	2000	200	20	2
3000000	300000	30000	3000	300	30	3
4000000	400000	40000	4000	400	40	4
5000000	500000	50000	5000	500	50	5
6000000	600000	60000	6000	600	60	6
7000000	700000	70000	7000	700	70	7
8000000	800000	80000	8000	800	80	8
9000000	900000	90000	9000	900	90	9

Multiplicador

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Multiplicando

1	10	100	1000
2	20	200	2000
3	30	300	3000
4	40	400	4000
5	50	500	5000
6	60	600	6000
7	70	700	7000
8	80	800	8000
9	90	900	9000

0	0 0	000

Fig 154

El material es de cartón y se sitúa en una especie de «Mesilla de juego». El ejercicio que ahora describiremos, es un ejercicio colectivo que hace necesaria la colaboración de dos o tres niños y llama en torno a la mesa un pequeño público vivamente interesado. Pero son dos los principales personajes de esta acción compleja; el niño que efectúa la operación y el «Banquero» que tiene en depósito todos los valores y efectúa los «cambios» que se hacen necesarios de vez en cuando. Además hay un tercer personaje secundario que anota los números. El «material bancario» consiste en carteles que tienen escritas las series de los números en todas las jerarquías, desde la unidad simple, hasta las centenas de millar.

Otros carteles diversos representan los millones.

Los carteles tienen todos la misma altura, pero su longitud es distinta según el número de ceros que siguen a la cifra positiva, y teniendo dimensiones correspondientes pueden superponerse en forma, que aparezcan las cifras positivas en el lugar de los ceros, como

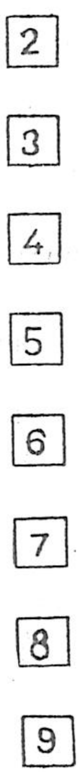


Fig. 155 (A.

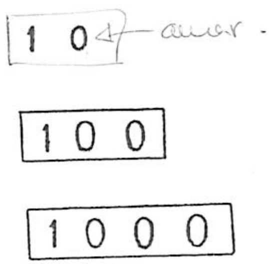


Fig. 155 (B

sucedía con los primeros carteles presentados; esto es, se pueden componer grandes números superponiendo carteles.

Esto es el material bancario.

Existe, además, un material para indicar el multiplicando y el multiplicador.

Para el multiplicando existe un material semejante al bancario, pero, que llega solamente a 9.000. Es de un color distinto y con él se compone el multiplicando dado.

Para el multiplicador, en cambio, existen los siguientes materiales: 1° cuatro carteles de color distinto uno de otro que, con las dimensiones correspondientes, llevan marcados 1, 10, 100, 1000.

Hay, además, cuatro series de carteles que llevan marcadas, cada una, la serie de los números del 2 al 9 del mismo color, que los cuatro carteles antedichos (del 1, 10, 100 y 1000) de modo que se puedan formar números de decenas, centenas, millares, superponiendo al 1 de aquellos, estos otros carteles que llevan marcada la serie natural de los números (fig. 155).

Los números se forman cubriendo la unidad.

Así se pueden formar las decenas sucesivas: 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Análogamente para las centenas, queriendo representar 700 se cubre la unidad del cartel 100 con un cartel del 7 del mismo color que el 100, (fig. 156).

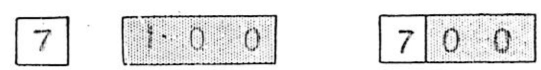


Fig. 156

Si se quiere después representar un número, todo de cifras positivas, precisa practicar una pequeña construcción de superposiciones: por ejemplo, 346.

Las superposiciones son primeramente 300, después 40 y, por último 346, donde cada cifra está en un cartel o pequeño cuadrado de diverso color (fig. 157).

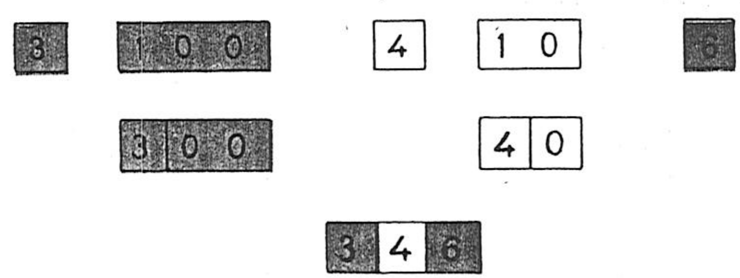


Fig. 157