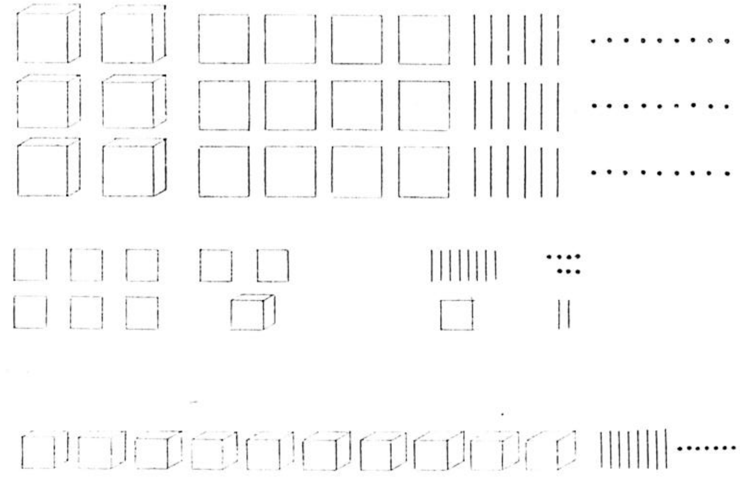


Fig. 53

y se sustituye por un elemento de la jerarquía superior y así sucesivamente.

Los pasos indican con las perlas las operaciones que se hacen con las cifras, es decir, se multiplica por el multiplicador cada cifra del multiplicando. El hecho que esto se hace comenzando por las unidades simples y acumulando, de vez en vez en la jerarquía superior, las decenas que se van encontrando, representa la acumulación de dos hechos diferentes : es decir, la multiplicación de cada elemento, y la ordenación de los resultados según el sistema decimal. El procedimiento con las perlas se puede traducir en cifras, colocando éstas,

Millares	Centenas	Decenas	Unidades
2	8	6	9
2	8	6	9
2	8	6	9
2 × 3	8 × 3	6 × 3	9 × 3

Fig. 54

en la posición de su jerarquía, indicando la denominación al principio de la columna y, por lo mismo, emitiendo los ceros. Entonces, se obtiene un cuadro, que se refiere al cálculo directamente. El cuadro demuestra que si se deben efectuar multiplicaciones de varias cifras por tres, el cálculo en sí es igual, sea cual fuese la posición de

estas cifras. Por ejemplo, en nuestro caso, el cálculo de las unidades, relativo al nueve es más difícil que el cálculo de los millares reativo al dos, así se ha aislado la dificultad relativa al cálculo de la multiplicación. Si el número a multiplicar, en vez de los millares llegase a los millones, las dificultades del cálculo serían igualmente simples y limitadas. En efecto, en la figura siguiente está representada la multiplicación 2864935 × 4.

	Millares			Unidades Simples		
Millones	Centenas	Decenas	Unidades	Centenas	Decenas	Unidades
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2	8	6	4	9	3	5
2 × 4	8 × 4	6 × 4	4 × 4	9 × 4	3 × 4	5 × 4

Fig. 55

Si se consideran aparte las jerarquías y los cambios entre grupos, que son relativos al sistema decimal, se ve cómo, numéricamente, el cálculo es igual en todos los grupos. Entonces aparece evidente que una simplificación puede existir en el cálculo mismo, consistente en memorizar todas las combinaciones posibles que se refieren a cada uno de los números hasta el diez. Esta simplificación es un trabajo aparte, auxiliado por el material de la tabla de multiplicar, material que puede ser facilitado, paralelamente, a todos los ejercicios hasta ahora enseñados.

Por ejemplo, en el caso citado, la simplificación consiste en saber en seguida, de memoria, que el cinco repetido cuatro veces da el número veinte ; el tres, repetido cuatro veces, doce, etc.

$$\begin{aligned} 5 \times 4 &= 20 \\ 3 \times 4 &= 12 \\ 9 \times 4 &= 36 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 6 \times 4 &= 24 \\ 8 \times 4 &= 32 \\ 2 \times 4 &= 8 \end{aligned}$$

Fig. 56

Pero es necesario saber qué son aquellos números, en lo que a jerarquía se refiere. El veinte representa unidades simples, en cambio, doce decenas : treinta y seis centenas, etc. Los dos hechos pertenecen a órdenes diversas : el uno pide memorización, el otro pide que los números se sometan a una ordenación según los principios del sistema decimal. No pudiendo existir un grupo de unidades superior a nueve en ningún lugar, todos los productos de dos cifras como los productos veinte, doce, treinta y seis, etc. deben separarse como se ve en la figura 57. Porque el dos a la izquierda de las veinte unidades son decenas, como también son decenas las dos que pertenecen al 12 en el lugar sucesivo, mientras el uno en las doce decenas es una centena, que va unido con las seis del número sucesivo.

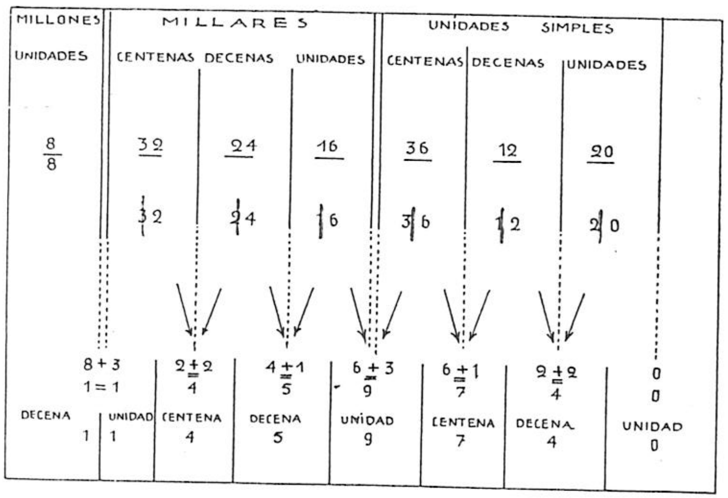


Fig. 57

Cuando se encuentra como producto una sola cifra (es decir, que no fué superado el nueve) no es necesaria separación alguna. En tal caso, el orden se halla establecido; entre dos líneas sucesivas de separación se encuentran unidades pertenecientes a la misma jerarquía. Entonces, estos números se suman juntos y se llega al resultado definitivo. La operación indicada en la figura 57 es la multiplicación de 2864935 × 4 dá como resultado 11459740.

EJERCICIOS PARALELOS. — Dividamos, por ello, en ejercicios paralelos las dos dificultades indicadas en relación con la multiplicación.

1.ª — La memorización de resultados.

2.ª — Hacer fáciles las localizaciones de los números, según las jerarquías.

Este último ejercicio, siendo propio del sistema decimal, ayuda en general el cálculo en todas las operaciones.

MEMORIZACIÓN DE LAS COMBINACIONES

Los ejercicios analíticos deben finalizar en sí mismos, y representan cada uno una labor completa más o menos sencilla, pero siempre interesante. El primer ejercicio paralelo para la memorización de la repetición de todos los números de uno a nueve, repetido cada uno de una a nueve veces, es decir, el conjunto de la tabla de multiplicación, es tan sencillo, que se puede efectuar con niños de cinco años y medio a seis.

MATERIAL. — El material de la tabla de Pitágoras consta de varias partes.

Una de ellas es un cartón cuadrado que tiene cien huecos (10 por 10) en cada uno de los cuales se puede colocar una perla. Encima, encabezando las columnas verticales se hallan impresos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A la izquierda puede encajarse un cartoncito que lleva escrito en color rojo una de las cifras citadas. Este cartoncito que hace las veces de multiplicando se va cambiando; el sistema consta de diez cartoncitos de éstos, con diez cifras.

A la izquierda y arriba, hay un hueco separado que sirve para colocar una ficha de color, que debe alternar su puesto, siguiendo la operación colocándose encima del número en acción.

Acompaña al cartón una elegante cajita que contiene cien perlas sueltas. El ejercicio que se hace con este material es sencillísimo:

Supongamos que se quiere multiplicar el 6 por la serie de números del 1 al 10, tendremos: 6 × 1; 6 × 2; 6 × 3; 6 × 4; 6 × 5; 6 × 6; 6 × 7; 6 × 8; 6 × 9; 6 × 10.

Para ello se empieza por poner en el hueco de la izquierda el cartoncito que lleva el número 6. Al multiplicar 6 por 1 el niño hace dos cosas: pone la ficha encarnada sobre el 1, que encabeza la columna y coloca seis perlas en columna vertical debajo del número uno.

Para multiplicar 6 por 2, el niño pone la ficha encarnada sobre el 2 y añade otras seis perlas en columna vertical debajo del 2. Al multiplicar 6 por 3 hace pasar la ficha sobre el 3 y añade seis perlas en línea vertical debajo del 3; y así prosigue, hasta llegar a 6 por 10.

El cambio de lugar de la ficha, sirve para indicar cada vez el multiplicador, y exige de parte del niño una atención siempre activa y una gran exactitud de ejecución.

Al mismo tiempo que el niño realiza lo arriba descrito, escribe las multiplicaciones en unas hojas especiales que coloca a la derecha del objeto que utiliza para multiplicar.

Hay preparadas colecciones que constan de cien hojas especiales, distribuídas en diez series, cada una de las cuales tiene a su vez diez hojas.

Véase en la siguiente tabla una hoja preparada para multiplicar el 3. Todo está ya impreso, sólo falta que el niño añada los productos que obtendrá agregando cada vez tres perlas, como se ha descrito anteriormente. Si no comete errores, el niño escribirá 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

De este modo proseguirá su ejercicio, y como de cada hoja posee diez ejemplares, podrá repetir diez veces cada uno de ellos.

Repitiendo un ejercicio el niño llegará a aprenderlo de memoria, pero además le veremos usar otro procedimiento para retener mejor las multiplicaciones; le veremos, por ejemplo, pasearse con una hoja en la mano llena de multiplicaciones, que lee y relee de cuando en cuando. Es que está estudiando: siete por seis, cuarenta y dos; siete por siete cuarenta y nueve...

El material que sirve para aprender la tabla de multiplicar es de los que más apasiona a los niños; llenan seis o siete hojas, una tras de otra, y pasan días y semanas entregados a este ejercicio. Casi todos los niños piden permiso para llevarse el material a sus casas. La primera vez que les fué ofrecido se produjo una verdadera revolución; todos querían llevárselo. No habiendo obtenido permiso para ello, los niños se dirigieron a sus madres instando para que aquéllas lo comprasen. Fué verdaderamente difícil convencerles de que esos objetos no se venden en las tiendas, y que, por lo tanto, no podía obtenerse. Pero los niños no quedaron satisfechos, y una niña mayorcita, que se convirtió en cabeza de motín, exclamó:

«La doctora quiere hacer un experimento con nosotros; pues bien, digámosle que si no nos da el material de la multiplicación, no volvemos más a la escuela».

Esta amenaza estaba fuera de lugar y no hablaba muy en favor de la niña; no obstante, había en todo esto algo muy interesante, y es, que esa tabla de multiplicar, que es uno de los pequeños tormentos de los niños, venía a ser una tentación seductora, que convertía en lobos los corderos.

Cuando los niños han llenado varias veces series enteras de hojas, auxiliándose con el material, se les ofrece una tabla para las *confrontaciones,* a fin de que comprueben si en las multiplicaciones parciales han cometido algún error. Tabla por tabla y número por número comprueban si cada producto corresponde a los de las diez columnas. Cuando han realizado este trabajo con exactitud, los niños poseen sus series, en la seguridad de que no hay errores.

Se copian una al lado de otra, en el siguiente modelo, las columnas. Cuando han realizado este trabajo con exactitud, los niños del 2; debajo del 3, la del 3, debajo del 4, la del 4; etc.

Hecho esto, se obtiene una tabla igual a la del material que servirá de modelo para hacer las confrontaciones.

3

TABLA DE MULTIPLICAR

Combinaciones

del

tres

con la serie de números del 1 al 10

3 . 1	=	....
3 . 2	=	....
3 . 3	=	....
3 . 4	=	....
3 . 5	=	....
3 . 6	=	....
3 . 7	=	....
3 . 8	=	....
3 . 9	=	....
3 . 10	=	....

Tabla de la multiplicación

según la combinación de los números en la serie progresiva del 1 al 100

1 . 1 = 1	2 . 1 = 2	3 . 1 = 3	4 . 1 = 4	5 . 1 = 5
1 . 2 = 2	2 . 2 = 4	3 . 2 = 6	4 . 2 = 8	5 . 2 = 10
1 . 3 = 3	2 . 3 = 6	3 . 3 = 9	4 . 3 = 12	5 . 3 = 15
1 . 4 = 4	2 . 4 = 8	3 . 4 = 12	4 . 4 = 16	5 . 4 = 20
1 . 5 = 5	2 . 5 = 10	3 . 5 = 15	4 . 5 = 20	5 . 5 = 25
1 . 6 = 6	2 . 6 = 12	3 . 6 = 18	4 . 6 = 24	5 . 6 = 30
1 . 7 = 7	2 . 7 = 14	3 . 7 = 21	4 . 7 = 28	5 . 7 = 35
1 . 8 = 8	2 . 8 = 16	3 . 8 = 24	4 . 8 = 32	5 . 8 = 40
1 . 9 = 9	2 . 9 = 18	3 . 9 = 27	4 . 9 = 36	5 . 9 = 45
1 . 10 = 10	2 . 10 = 20	3 . 10 = 30	4 . 10 = 40	5 . 10 = 50

Mod. 7.

6 . 1 = 6	7 . 1 = 7	8 . 1 = 8	9 . 1 = 9	10 . 1 = 10
6 . 2 = 12	7 . 2 = 14	8 . 2 = 16	9 . 2 = 18	10 . 2 = 20
6 . 3 = 18	7 . 3 = 21	8 . 3 = 24	9 . 3 = 27	10 3 = 30
6 . 4 = 24	7 . 4 = 28	8 . 4 = 32	9 . 4 = 36	10 . 4 = 40
6 . 5 = 30	7 . 5 = 35	8 . 5 = 40	9 . 5 = 45	10 . 5 = 50
6 . 6 = 36	7 . 6 = 42	8 . 6 = 48	9 . 6 = 54	10 . 6 = 60
6 . 7 = 42	7 . 7 = 49	8 . 7 = 56	9 . 7 = 63	10 . 7 = 70
6 . 8 = 48	7 . 8 = 56	8 . 8 = 64	9 . 8 = 72	10 . 8 = 80
6 . 9 = 54	7 . 9 = 63	8 . 9 = 72	9 . 9 = 81	10 . 9 = 90
6 . 10 = 60	7 . 10 = 70	8 . 10 = 80	9 . 10 = 90	10 . 10 = 100

Tabla de Pitagoras

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

TABLA DE MULTIPLICAR CON TODOS LOS PRODUCTOS

El niño posee ahora la tabla pitagórica como el resultado de muchos trabajos parciales y será fácil enseñarle a «leerla», como una tabla de multiplicar, pues la sabe ya de memoria. Podrá entonces llenar de memoria con los productos los lugares vacíos; la única dificultad que tiene que vencer consiste en reconocer en cuál casilla, que corresponda al mismo tiempo al multiplicando y al multiplicador, tendrá que escribir el número. En el material completo se hallan diez modelos en blanco para la tabla de Pitágoras. Cuando el niño es dueño de entregarse a estos ejercicios cómo y cuando quiere, y los ejecuta todos, puede afirmarse que ha aprendido la tabla de multiplicar.

TABLA RESUMIDA DE MULTIPLICAR
(conjunto de resultados dispuestos en columnas)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	50
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Simplificación de la tabla de multiplicar

Sentado que el orden de factores no altera el producto, y que para la memorización es el producto lo que precisa tener en cuenta, la tabla de multiplicación puede simplificarse incluyendo en ella solamente los productos distintos. Ahora bien, la mayor parte de los productos están repetidos simétricamente por encima y por debajo de aquellos que se encuentran a lo largo de la diagonal que va del uno al ciento; a lo largo de dicha diagonal se encuentran los productos del número multiplicado por sí mismo, es decir, los cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Eliminando las repeticiones simétricas resulta la tabla N (fig. 58) donde, para cada número, están las sucesivas combinaciones con la serie natural de los números hasta el cuadrado del que se considera; por ejemplo, en la misma línea se encontrará horizontalmente:

1 x 1= 1								
2 x 1= 2	2 x 2= 4							
3 x 1= 3	3 x 2= 6	3 x 3= 9						
4 x 1= 4	4 x 2= 8	4 x 3= 12	4 x 4= 16					
5 x 1= 5	5 x 2= 10	5 x 3= 15	5 x 4= 20	5 x 5= 25				
6 x 1= 6	6 x 2= 12	6 x 3= ~~18~~	6 x 4= 24	6 x 5= 30	6 x 6= 36			
7 x 1= 7	7 x 2= 14	7 x 3= 21	7 x 4= 28	7 x 5= 35	7 x 6= 42	7 x 7= 49		
8 x 1= 8	8 x 2= 16	8 x 3= 24	8 x 4= 32	8 x 5= 40	8 x 6= 48	8 x 7= 56	8 x 8= 64	
9 x 1= 9	9 x 2= 18	9 x 3= 27	9 x 4= 36	9 x 5= 45	9 x 6= 54	9 x 7= 63	9 x 8= 72	9 x 9= 81

Fig. 58 (Tabla N)

$2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$ y debajo
$3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$ y así sucesivamente.

Continuando la serie natural de los números hasta el nueve se da lugar a todas las combinaciones posibles, necesarias para el cálculo. En efecto; si se sobrepasa el cuadrado de un número, por ejemplo, el cuadrado de tres, la combinación sucesiva 3×4 no es sino la inversa de las combinaciones que hace el 4 antes de llegar a su cuadrado, y por esto está incluído en aquella serie como producto de la multiplicación del tres por el cuatro. Ello está representado en la sección A. de la tabla N. En esta se hallan las indicaciones necesarias para encontrar las combinaciones de cada número después de su cuadrado, descendiendo en sentido vertical hasta el plano del nueve. Las combinaciones inversas donde el número que hasta el cuadrado era el multiplicando, se convierte en multiplicador, pueden

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1								
2	4							
3	6	9						
4	8	12	16					
5	10	15	20	25				
6	12	18	24	30	36			
7	14	21	28	35	42	49		
8	16	24	32	40	48	56	64	
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 59

leerse en sentido inverso, yendo de derecha a izquierda y leyendo en cambio, 4×3, 5×3, etc., 3×4, 3×5, etc.

Las combinaciones que precisa memorizar son 45.

Escribiendo juntos los productos sólamente (es decir sin los factores) se obtiene la sección B de la tabla N. Esta es la completa simplificación de la tabla Pitagórica, primeramente, porque se detiene en el nueve, y además, porque indica solamente las combinaciones hasta los cuadrados.

Para facilitar la lectura, los números que representan los cuadrados están escritos con colores diversos y delimitados por una línea curva, mientras en relación con cada uno, está escrito con caracteres pequeños el número del cual representan los cuadrados.

Dada una multiplicación por sus factores, por ejemplo 3×7, para buscar el producto en la tabla, precisa tener en cuenta que 7 es mayor que 3, y por tanto, su producto se encontrará en la línea vertical. Basta entonces partir de la línea del 3 cuadrado y llegar hasta el plano del 7, lo que limita la zona de investigación. Sea, por ejemplo el producto 6×8; siendo 8 mayor que 6 basta partir del cuadrado de seis y descender verticalmente dos puntos para hallar el producto. También para la operación inversa, esta tabla facilita la labor. En efecto, queriendo multiplicar 8×6, el espacio correspondiente al seis está inmediatamente próximo y visible, porque el punto de partida que se encuentra es siempre el cuadrado de los números mismos.

La tabla de multiplicar así simplificada, en beneficio del cálculo, se puede integrar completando todas las combinaciones, distinguiendo, sin embargo, los que están más allá de los cuadrados (que son una repetición simétrica, casi una imagen vista en un espejo) con números todos iguales, como una sombra de las combinaciones esenciales. Tal estudio de observación es distinto del ejercicio necesario para la memorización de los resultados.

LAS JERARQUIAS

LAS JERARQUIAS

Hemos dicho anteriormente, que eran dos las dificultades a superar en la multiplicación:

a) la memorización de los productos, que se ha alcanzado con la serie de ejercicios descritos.

b) el rápido conocimiento del *lugar* ocupado por los mismos según el valor que representan, es decir, según las jerarquías.

Por lo que se refiere al lugar, no es ya necesario considerar los «valores efectivos» esto es, la cantidad real correspondiente a la cifra.

En todos los ejercicios desarrollados, hasta aquí jugaban cantidades reales, sea en cubos, cuadrados, bastones de 10 y perlas sueltas, tanto en el sistema decimal, como en los agrupamientos de bastones.

EL LUGAR SEGÚN LAS JERARQUÍAS

En estos ejercicios no entran ya las cantidades efectivamente representadas por los objetos (cubo, cuadrado, etc.) y que escindiéndose o uniéndose demuestran en la realidad cuantitativa los cambios que se hacen según el sistema decimal, o grupos esparcidos en un plano que se reunen en una torre de cubos; todo este material atrayente no entra en juego. Aquí, solo se estudia la *posición* del número, *posición* que es relativa al «lugar» y no a la cantidad.

Así, por ejemplo, existen en la sociedad un rey, un ministro, un gobernador, un simple ciudadano. Todos ellos como hombres, son iguales, pero es la posición social la que les distingue en su valor administrativo.

Igual sucede con cualquiera de las nueve primeras cifras, que pueden significar humildes unidades o pueden representar millones; es el puesto que ocupan el que hace reconocer su valor «relativo a su posición».

Hemos de encontrar, pues, un material que difiera por la posición y no por la cantidad y para ello recurrimos a representar la cantidad bajo forma de «símbolos».

Mas para indicar el valor de los símbolos, precisa resumir y esclarecer las cantidades efectivas que en ellos quieren representarse. Estos grupos representan una agregación de forma geométrica.

En efecto, la perla, un cuerpo sensiblemente igual en las tres dimensiones, representa un punto; el bastón una línea; el cuadrado una superficie. La línea respecto al punto, está determinada, porque constan de diez puntos, uno debajo de otro. (Una línea es un punto que se desliza dejando tras sí una huella). El cuadrado está constituído por diez bastones de uno junto al otro y se forma, como si la línea se desplazase en un trecho igual a su longitud, dejando huella (fig. 60).

Fig. 60

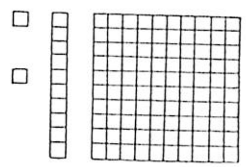


Fig. 61

Estos tres grupos están constituídos por unidades simples.

Una unidad simple.
Diez unidades simples.
Cien » »

Cuando del cuadrado de perlas se pasa al cubo, sucede que se depositan uno sobre otro, diez cuadrados, aumentando de nivel. El cubo es igual en sus tres dimensiones como lo era la perla.

Ahora las tres jerarquías de las unidades simples están sobre el mismo plano. Si se colocase una pequeña tabla sobre las tres, se mantendría horizontal, apoyándose sobre el espesor correspondiente a una.

El cubo, en cambio, se ha elevado diez planos. Igual en las tres dimensiones, se le puede considerar como *una unidad colosal* perteneciente a un plano superior.

Si colocamos diez cubos, uno debajo del otro, se puede obtener una línea decimal relativa a esta nueva unidad que correspondería a 10.000 unidades simples o a diez unidades de millar.

Si después colocásemos, constituyendo un cuadrado, diez filas de diez cubos, se obtendría un cuadrado colosal hecho con cien cubos de perlas (cada uno de 1.000), es decir, un cuadrado cuyo valor es de 100.000 unidades simples, o sea de cien unidades de millar (fig. 61).

Estos tres grupos hechos de 1 cubo
» 10 cubos
» 100 cubos

pertenecen al mismo nivel, que es la altura del cubo. Si se colocase sobre los tres objetos una tabla, se apoyaría sobre todos ellos y quedaría horizontal. Tales grupos, pertenecen al mismo nivel.

Si tuviéramos diez cuadrados, como el construído con cien cubos, y se pusieran uno sobre otro, hasta constituír un cubo monumental, se pasaría a otro nivel que asciende de repente en diez alturas

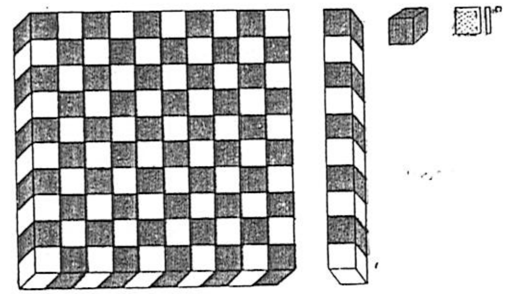


Fig. 62

de cubo. Este gran cubo construído con la superposición de diez cuadrados de 100.000 perlas cada uno, representaría el millón (figuras 62 y 63).

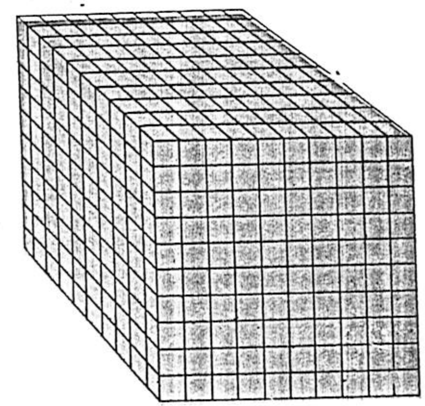


Fig. 63

Este sería la unidad de millón que ha ascendido al nivel de los millones y, en dicho nivel, se formarían, según el agrupamiento decimal, la línea de los diez millones y de los cien millones. Y así sucesivamente se proseguiría hasta el nivel del millar de millones, donde la unidad altísima e inmensa, tendría el valor de 1.000 millones, estas unidades sucesivas en los grupos de tres cifras, se llaman, después de los millones: billones, trillones, cuatrillones, etc.

Lo que hay que tener siempre presente, es este triple agrupamiento.

Punto.

Línea.

Cuadrado.

que siempre se repite, pero en *niveles diversos*, y que la unidad que resulta de la elevación del cuadrado precedente, es la que determina el nivel de los tres grupos.

Ahora, pues, los números tienen diverso valor según su posición y se distinguen yendo de derecha a izquierda; *unidades, decenas, centenas*. Cada tres cifras, un espacio, un signo cualquiera de separación, que podría ser un punto o una coma, distingue los niveles diversos de los sucesivos grupos de tres.

Por ejemplo:

Millones	de millar			Simples		
unidades	centenas	decenas	unidades	centenas	decenas	unidades

Las cifras que representan valores se distinguen y se leen por grupos, esto es, centenas, decenas, unidades. Si las centenas, decenas y unidades se refieren a unidades simples, se dice el número sin añadir título; si se trata de millares se añade el título mil y si se tratase de millones se añadiría la palabra millón. Para aprobar, para afirmar, se dice siempre sí; si se trata de una persona sin importancia se dice sí simplemente, si se trata de una persona de calidad se dice, sí señor, si se trata de una elevada autoridad se dice, sí, Excelentísimo Señor.

Pues bien.

1.853.625.934 se dice:

mil ochocientos cincuenta y tres millones, seiscientos veinticinco mil, novecientos treinta y cuatro. No se cuenta más que por centenas, decenas y unidades y a este grupo de tres se le denomina según el nivel a que pertenecen las unidades que lo forman.

Los millones sobrepujan el nivel, a ras de suelo, de las unidades.

Ahora bien; si la unidad simple se escogiera tan pequeña, que tuviera la altura de un milímetro, el ciento sería un cuadrado de un centímetro de lado y un milímetro de espesor.

El millar tendría la altura de un centímetro.

El millón de diez centímetros.

El millar de millones de un metro.

Leyendo, pues, el siguiente número, se dirá:

223.223.223

doscientos veintitrés millones.

doscientos veintitrés mil.

doscientos veintitrés.

Más allá del grupo de tres que se refiere a los millones se asciende al nivel de los millares de millones; el millar de millones es como una montaña, construída superponiendo uno sobre otro diez cuadros de cien millones cada uno.

Se puede imaginar que la proporción continúa hasta el infinito y en tal caso, después de los millares de millón, vendrían las decenas de millar de millón, las centenas de millar de millón, el bi-

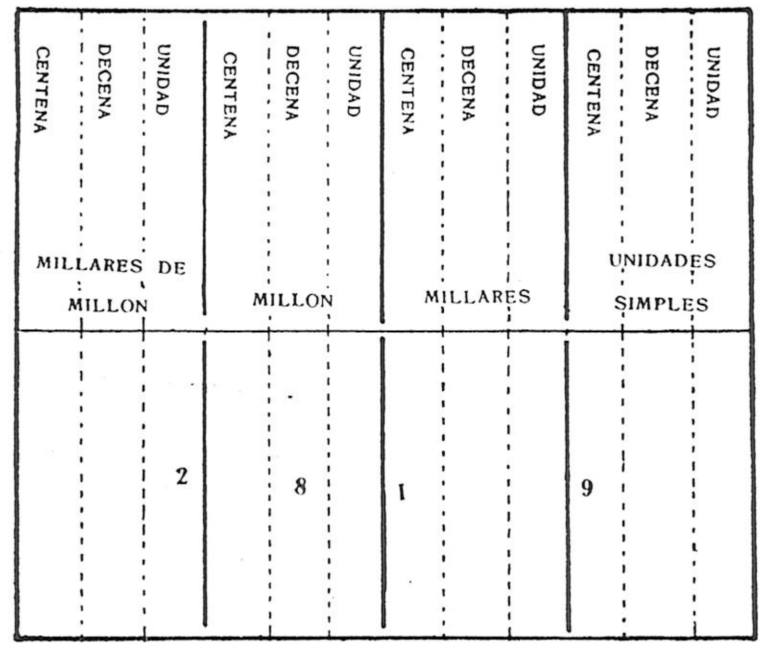


Fig. 64

llón, etc. Ahora precisa recordar, que las cifras son siempre *nueve*, las categorías son *tres*, pero las *castas*, divididas rígidamente y pertenecientes a niveles distintos, pueden ser infinitas.

He aquí representados en el cuadro adjunto (fig. 64) los lugares correspondientes a las cifras, según las jerarquías decimales de los números. Aquel 8, aún cuando sea un simple 8, se encuentra en el lugar de las decenas de millón y representa, por lo tanto, 80 millones. Aquel 9 a la derecha, es un nueve como otro cualquiera, pero aún cuando parezca mayor que ocho, supone mucho menos, toda vez que está en el lugar de las centenas simples y tiene un valor de 900. El uno que parece el menor de todos aquellos números se encuentra en el tercer lugar de los millares y tiene por ello un valor de 100.000. El 2 que se encuentra más a la izquierda y nada menos que en el lugar de los millares de millón, representa 2.000 millones y está en el umbral de los números fantásticos.

El valor, pues, está dado por el lugar que ocupan las cifras y cada lugar está rigurosamente determinado.

Ahora bien, no existiendo un cuadro indicador como el aquí usado para demostrar el lugar de las cifras ¿cómo se puede reconocer el grado de cada una? Es evidente que si el Rey está sentado sobre el trono y el Presidente sobre el sillón de la Presidencia del Consejo de Ministros se reconoce inmediatamente su jerarquía, como sucede en las cifras citadas. Está escrito encima *decenas de millón* y el 8 que se encuentra en aquel espacio que las líneas separan se reconoce en seguida por su alto valor.

Pero el Rey y los ministros, aún cuando vayan sin trono y sin sillón, son siempre rey y ministros. Así sucede con las cifras, y por eso debe indicarse siempre el puesto que ocupan, porque es ese puesto precisamente el que indica su valor. Los puestos vendrán indicados por los ceros y mientras más ceros acompañan a una cifra más importante es ésta. Así, por ejemplo, el 8 de las decenas de millón estará precedido en primer lugar por los tres ceros de las unidades simples y después por los tres ceros de los millares y tanto el primer grupo como el segundo, de tres ceros, estarán separados entre sí. De igual modo el grupo de los millares se distinguirá del de los millones, y en este último grupo el 8 irá precedido de un cero, que indica las unidades de millón que faltan.

Aquel 8, pues, se ha separado del cuadro y se escribe así: 80.000.000 y se lee ochenta millones.

Si se volviesen a escribir todas las cifras que hemos señalado en el cuadrado, no tendríamos, sino, que colocar ceros según las distancias que las separan de las unidades simples, y según los lugares vacíos que quedan entre una y otra, separando siempre entre sí los grupos de tres.

2.080.100.900

En este caso están indicados

dos millones (o dos billones)
ochenta millones
cien mil
novecientos

Si un gran número comprende la presencia de todas las categorías que preceden a la cifra más alta, las cantidades están indicadas por el lugar que ocupan. Por ejemplo 25.847, veinticinco mil, ochocientos cuarenta y siete. Estos números se nombran distintamente uno después del otro, como podríamos decir cuatro iglesias,

cinco palacios, nueve casas, tres cabañas y se pueden escribir separadamente

veinte y cinco	mil	20.000 5.000
ochocientos		800
cuarenta y siete		40 7

Así, por ejemplo, el número siguiente 2.462.938 que se lee enumerando las cifras según su rango y comenzando por la de más valor, se puede escribir :

dos millones		2.000.000
cuatrocientos sesenta y dos	mil	400.000 60.000 2.000
novecientos treinta y ocho		900 30 8

Ahora no se lee cifra por cifra, sino grupo de tres por grupo de tres, dando al grupo entero después de haber nombrado las cifras que a él pertenecen, el título que tienen común. Así pues, no se dice cuatrocientos mil, sesenta mil, dos mil, sino cuatrocientos sesenta y dos mil.

Como diríamos : Sus majestades el Rey y la Reina.
o también : Sus Excelencias los Ministros de Gobernación y Estado.

Las explicaciones dadas, sobre las jerarquías decimales de los números, son solamente una introducción, como sería el brillante anuncio de un espectáculo, para asistir al cual, precisa, sin embargo, entrar y permanecer largamente inmóviles durante su desarrollo.

El niño no aprende oyendo una explicación, profundiza el conocimiento solamente siguiendo un trabajo activo, y con frecuencia, se ejercita larga y pacientemente sobre la misma cosa (ya comprendida), lo que manifiesta una actitud mental, una necesidad psíquica, que hasta entonces no había sido tenida en cuenta.

Nosotros, pues, ofrecemos un «material» para los ejercicios individuales sobre las jerarquías de los números. Las unidades están representadas indistintamente por una perla y las perlas son de tres colores diversos según representen 1, 10, 100 de los grupos que

8

tienen el mismo nivel. Están unidas por un hilo de alambre a un marco o bastidor, y ello fija y hace distinguir su posición.

Este material está constituído por bastidores que tienen el aspecto corriente de los que sirven para aprender a contar. El primer bastidor llega, sólo a comprender las unidades de millar y, el segundo, se extiende hasta las unidades de millón.

El bastidor de los millares tiene cuatro hilos transversales fijos, sobre cada uno de los cuales hay enfiladas diez perlas. Los tres hilos superiores son equidistantes, pero entre el tercero y el cuarto existe un espacio mayor. También, en el marco se distinguen los grupos, y en el trozo correspondiente a los tres hilos equidistantes, tiene su color distinto (más claro) que en aquel donde se fija el cuarto hilo más distante.

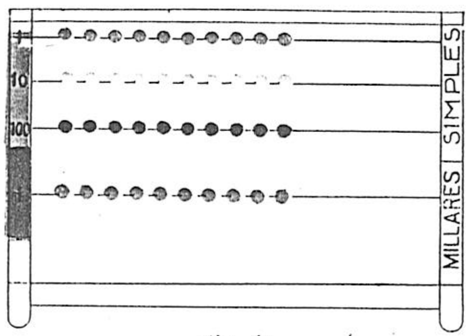


Fig. 65

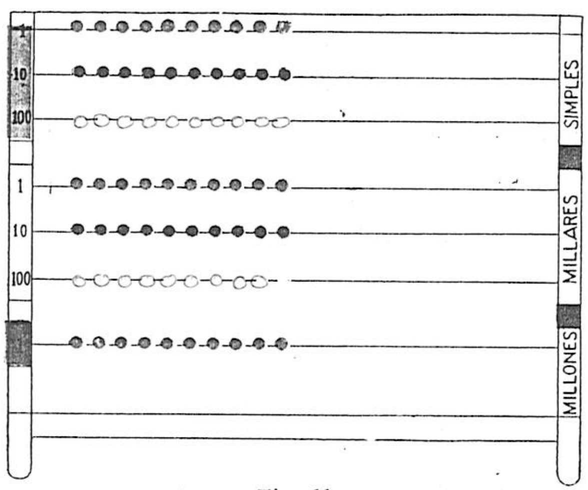


Fig. 66

Las perlas no tienen el mismo color. Los tres hilos tienen cada uno perlas de color distinto que las del otro hilo; las primeras son rojas, las segundas azules, las terceras amarillas. En el cuarto hilo separado, se vuelve al color rojo.

Rojo-unidades
Azul-decenas
Amarillo-centenas

Análogamente se ha construído el bastidor de los millones donde existe un grupo de tres hilos separado de otro grupo de tres hilos que a su vez se separa del último hilo.

Pero los dos grupos de tres hilos tienen en correspondencia los mismos colores, rojo, azul, amarillo. El marco donde se fijan los hilos es de color diverso en correspondencia con los dos grupos de tres, así como con el último hilo.

Sobre un lado del marco está indicado el valor de cada uno del grupo: unidad, decenas, centenas. En el otro lado está indicado el nivel del grupo: millares, millones.

Acompañan a los bastidores trozos de papel rayados adecuadamente, con indicación del puesto de los números según las jerarquías.

LA COMPOSICIÓN DE LOS GRANDES NÚMEROS

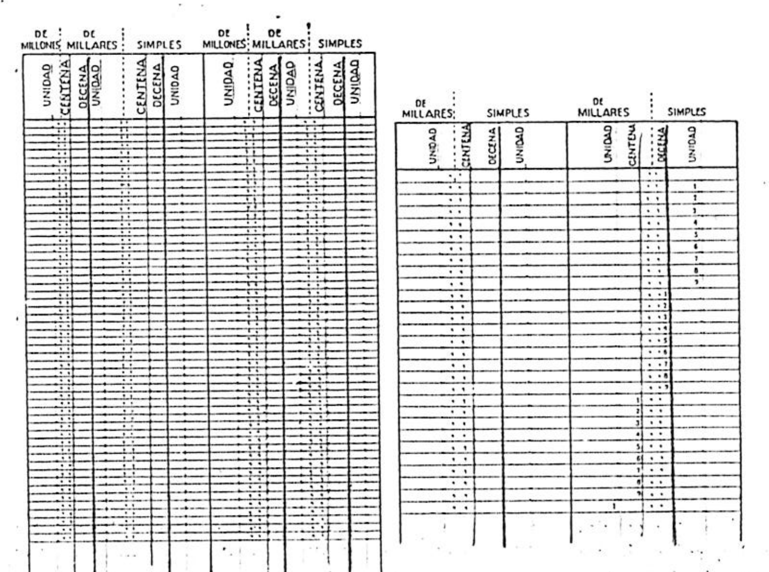


Fig. 67

Si en el bastidor se colocan las perlas como indica la figura, se compone el número 2435.

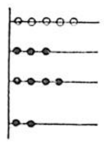


Fig. 68

Este se compone de 2 (del 1000)
4 (del 100)
3 (del 10)
5 (del 1)

o lo que es igual 2.000
400
30
5

y considerando las perlas una a una, tendremos:

1000)
(2.000
1000)

100)
100)
100 (400
100)

10)
10 (30
10)

1)
1)
1 (5
1)
1)

2435

Las perlas del bastidor son, pues, símbolos de los valores. Las perlas rojas de las unidades simples, indican cada una, una unidad, como lo indicaban las perlas sueltas. Las perlas azules del mismo grupo, tienen, cada una, el valor de una decena, como uno de los bastones de diez. Cada perla amarilla tiene el valor de un cuadrado de 100 y cada perla roja del cuarto hilo, tiene el valor de un cubo de mil.

Aquí es la *posición* la que indica el valor y no la cantidad efectiva.

El primer ejercicio lo comprueba y consiste en desplazar una a una todas las perlas del bastidor escribiendo el número de las sucesivas acumulaciones en el papel correspondiente. Se desplaza una perla y se escribe el uno, se desplaza otra, haciéndola correr hasta que se una a la anterior, y se escribe el 2 debajo del uno y así sucesivamente. Después de haber desplazado la novena perla, queda una todavía, pero desde el momento en que ésta—la décima—se coloca junto a la novena, todo el conjunto va desplazado al otro lado, como estaban antes de comenzarse el ejercicio y *en vez de las diez perlas de arriba* se hace avanzar la primera perla azul de las decenas.

Sobre la hoja se escribe 1, pero debajo de la indicación de las decenas y se continuan desplazando una a una las perlas de las decenas escribiendo los números uno debajo del otro hasta el nueve, al llegar al cual, se reproduce el mismo hecho de desplazamiento de todas las decenas y de avance de una perla de la centena.

Así las nueve cifras se escriben una debajo de otra desplazando siempre un espacio las cifras sucesivas.

Si ahora se ponen ceros en los lugares vacíos, se comprueba, como éstos indican precisamente estos desplazamientos, convirtiendo las filas sucesivas en 10, 20, etc., 100, 200, etc.

Habiendo puesto los ceros se hace inútil la separación indicadora: la relación entre los números:

10
20
30, etc.

100
200
300, etc.

(Está claramente colocada con la posición 9 se refiere al valor de las perlas de diferentes rangos en el bastidor.)

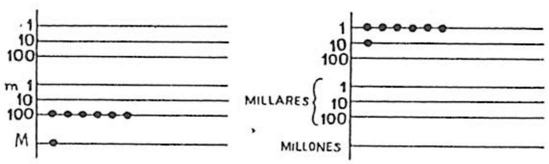
Todos los ejercicios que pueden hacerse con los bastidores, refuerzan el estudio de las «posiciones» en relación con el valor relativo de los números.

Dichos ejercicios sirven para ilustrar uno de los detalles del sistema decimal y forman parte del estudio de dicho sistema. Pero ¿en qué pueden consistir dichos ejercicios? Evidentemente en desplazamientos, composiciones, descomposiciones y sustituciones, esto es: en la formación de los grandes números en las operaciones aritméticas.

No hay ninguna mayor dificultad en desplazar o contar las perlas en la cuarta fila que en la primera. Ni es más difícil hacer retroceder toda la fila del 100 para substituirla con una perla del 1000 que hacer retroceder toda la fila de las unidades simples para substituirla con una perla de las decenas.

Por lo tanto, no será más difícil el cálculo con los grandes números si su posición es bien clara.

Por ejemplo : 1.600.0000 y 16



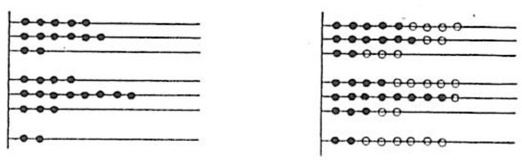
1.600.000 16

Fig. 69

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Si queremos sumar los números 2.384.265
+ 6.215.324

se realizará, evidentemente, una acumulación de perlas de todas las filas



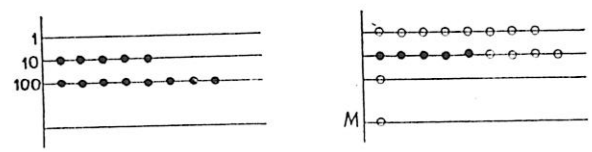
2.384.265 + 6.215234 = 8.599.589

Fig. 70

La suma total se lee contando las perlas resultado en cada fila, que son

8.000.000
500.000
90.000
9.000
500
80
9

Ahora bien : si la suma hace acumular un grupo de diez perlas, éste desaparece retrocediendo completamente y, en su lugar, avanza una perla del valor superior.



850 + 348 = 1198

1198 = 1.000
100
90
8

Fig. 71

SUSTRACCIÓN

La sustracción se lleva a cabo sobre el bastidor de modo que se obtenga lo que queda de la cantidad primitiva después de haber sido disminuída en el sustraendo. Por ejemplo :
8649 — 4236

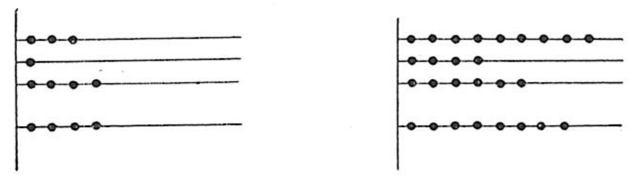


Fig. 72

8.649 — 4.236 = 4.413

Se ha llevado a cabo la sustracción en cada una de las filas.

8000 — 4000 = 4.000
600 — 200 = 400
40 — 30 = 10
9 — 6 = 3

Si la sustración no se puede realizar tan fácilmente, porque en cualquiera de los hilos existe un número de perlas inferior al que se debe restar, se comienza por quitar todas las que se encuentren en el hilo y, después, se vuelve a colocar en el hilo vacío un grupo entero de 10 perlas, después de haber quitado una perla del valor superior.

Por ejemplo 7456 — 1832

7.456 — 1.832 = 5.624

Fig. 73

La operación se realizó en la siguiente forma :

6 — 2 = 4

50 — 30 = 20

En la fila de las centenas se quitaron, primero las cuatro perlas existentes y, las otras cuatro perlas, se tomaron de una fila entera de 10 que representa la sustitución de las perlas de los millares que se ha quitado.

Es decir, que primero se hizo 4 — 4 = 0
después 10 — 4 = 6

Mientras tanto, los siete millares se habían convertido en seis y como de éstos había que restar el millar del sustraendo, quedan cinco millares solamente.

MULTIPLICACIÓN

Las multiplicaciones que se refieren al «lugar», y por lo mismo al «valor» de los números, son aquellas que los desplazan de uno a otro grado decimal ; esto es, la multiplicación de un número por 10, 100, 1000 etc. Multiplicar por 10 el número 4 indicado en el bastidor menor (fig. 74) quiere decir obtener cuatro decenas en vez de cuatro unidades ; las unidades al ir al lugar adquirido dejan cero, es decir, el vacío, en el lugar que ocupaban antes. 40.

Si se encuentran en la fila de los millares y quedan vacíos los espacios de orden inferior, serán 4000.

Esta última es una multiplicación de decenas por centenas. Los espacios vacíos se han sumado :

$$10 \times 100 = 1000$$
$$\text{y} \quad 40 \times 100 = 4000$$

Los espacios indicados se expresan al escribir el número con otros tantos ceros.

Sea ahora 50 × 1000. Cada uno de los valores se desplaza tres espacios manteniendo la posición recíproca, es decir, el tres

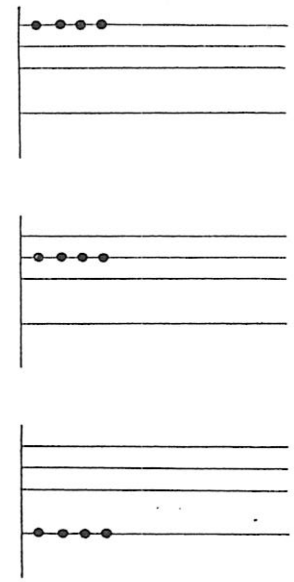


Fig. 74

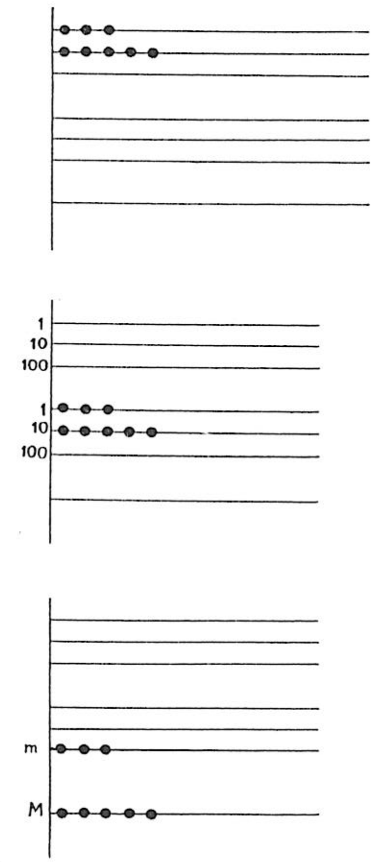


Fig. 75

va a la línea de las unidades de millar y el cinco a la de las decenas de millar. El desplazamiento de los tres espacios se indica en cifras añadiendo tres ceros.

$$53 \times 1000 = 50 \times 1000 + 3 \times 1000$$
$$= 50.000 + 3.000 = 53.000$$

Si ahora este número se multiplica por 100 se desplaza otros dos espacios conservando siempre entre los componentes la relativa posición : 5.300.000 (Fig. 75).

Estos son los ejercicios que pueden repetirse indefinidamente y que representan un estudio directo de las «posiciones» de los números.

Los ejercicios de desplazamiento acompañados de la escritura hacen casi mecánico el cálculo. Multiplicar por 10, 100, 1000 etc. quiere decir desplazar y por lo mismo añadir uno, dos, o tres, ceros al número primitivo.

MULTIPLICACIÓN DE GRANDES CIFRAS SOBRE BASTIDOR

Los ejercicios de multiplicación de grandes cifras sobre bastidores, hacen clara la separación de las dos dificultades explicadas.

Los números deben prepararse en forma que toda la operación quede reducida a la multiplicación entre dos cifras (tabla de multiplicar), pero lo más laborioso será determinar las filas de perlas, en las que hay que llevar a cabo el desplazamiento.

Es necesario para ello, determinar un orden como quien desliga cosas intrincadas y dispone separadamente cosas mezcladas. Para hacerlo, precisa recordar varios conceptos que fueron desarrollados en ejercicios paralelos de preparación.

Queriendo multiplicar 2847 × 4 hay que repetir cuatro veces cada uno de los números representados por las cifras.

Las multiplicaciones son :

2 × 4
8 × 4
4 × 4
7 × 4

Pero ¿en qué nivel o fila?

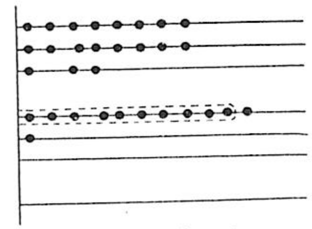
El número, realmente, es la suma de :

2000	2 (1000)
800	8 (100)
40	4 (10)
7	7 × 1

Por lo tanto, las multiplicaciones deben colocarse así :

4 × 2	sobre	la línea	del	1000
4 × 8	sobre	la línea	del	100
4 × 4	id.	id.	del	10
4 × 7	id.	id.	del	1

Llevándolo a cabo sobre el bastidor



4 + 7 = 28
4 + 4 = 16
4 + 8 = 32
4 + 2 = 8

Fig. 76

Habiéndose formado un diez sobre la línea del mil, desaparece la fila y, como consecuencia, avanza una perla en la línea del 10.000

El producto se lee, deduciendo de la disposición de las perlas : 11.388.

En cualquier forma en que se muevan las perlas, bien sea comenzando por las unidades, los millares o, a saltos, se obtiene siempre el mismo resultado, porque el producto no depende de la serie de los valores, sino, de la posición de éstos. Con tal que cada uno se coloque en el lugar que le corresponde, el resultado es justo y seguro.

Es como si en un teatro existen palcos regios, palcos para el cuerpo diplomático, butacas numeradas y entradas de paseo. El orden de los espectadores no dependerá del hecho de entrar antes o después, sino de que cada uno se coloque en el lugar que le corresponde.

Esto no se puede revelar efectuando las operaciones con cifras escritas, porque las sumas parciales, sin el orden que comienza de los valores inferiores hacia los superiores, no se podrían adicionar sin tachaduras y confusiones. Por ello, en la multiplicación con cifras aparece, como esencial, el orden de éstas, mientras que lo único esencial es la *colocación* según las jerarquías.

Veamos ahora una multiplicación donde el multiplicador es de dos cifras :

342 × 36

Cada número del multiplicando debe ser multiplicado por cada número del multiplicador ; es decir, se deben multiplicar todos por 3 y después, todos por 6. Son, pues, dos grupos, el del 3 y el del 6 se debe representar así :

3 × 3 = 9	6 × 3 = 18
3 × 4 = 12	6 × 4 = 24
3 × 2 = 6	6 × 2 = 12

y por lo mismo dos multiplicaciones distintas del número 342.

¿Sobre qué fila de perlas se deben colocar aquellos productos? Para esto precisa hacer el análisis de valores.

Los números son

30 × 300		6 × 300
30 × 40	y	6 × 40
30 × 2		6 × 2

En el grupo del tres se tienen dos operaciones diferentes porque 30 es igual a 3 × 10 y la multiplicación por 10 significa el desplazamiento de una línea.

Por esto, el grupo del tres por lo que a los valores se refiere, se debe representar así :

3 × 3000
3 × 400
3 × 20

Los grupos, pues, se colocan del siguiente modo :

3 × 3 (sobre la línea del 1000)
3 × 4 (» » 100)
3 × 2 (» » 10)

6 × 3 (sobre la línea del 100)
6 × 4 (» » 10)
6 × 2 (» » 1)

Lo importante, es que los productos indicados por las cifras vengas colocados en el lugar indicado por los valores.

Se pueden hacer primeramente, todos los desplazamientos relativos al grupo del 3 y después, todos los relativos al grupo del 6 o viceversa.

De este modo obtenemos un producto parcial 10.260, sobre el cual, se acumula el producto del otro grupo.

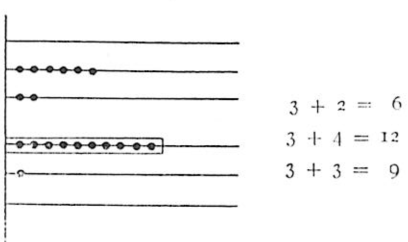


Fig 77

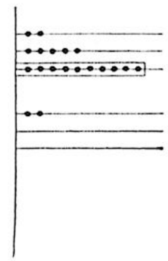


Fig. 78

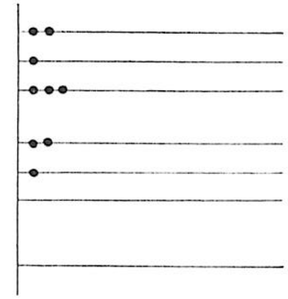


Fig. 79

En el segundo producto (fig. 78) se producen dos cambios sobre las líneas del 10 y del 100.

El producto total estaría sobre el marco como en la (fig. 79).

Las perlas que señalan el producto final indican el número 12.312.

Se puede hacer una simplificación en la labor descrita, es decir : se pueden agrupar todas las multiplicaciones relativas a una fila o—lo que es igual—colocar juntas todas las multiplicaciones relativas a un solo valor.

Línea del 1000. — 3 × 3	= 9		= 9
100. — 3 × 4 ; 6 × 3	= 12 + 18		= 30
10. — 3 × 2 ; 6 × 4	= 6 + 24		= 30
1. — 6 × 2	=		= 12

El producto, después de un cambio efectuado en la fila de 1000, ha resultado 12312 (fig. 80).

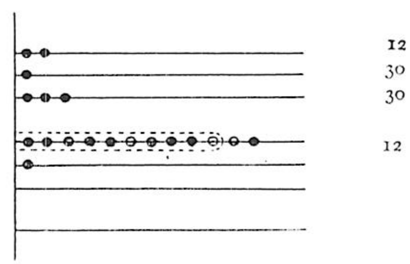


Fig. 80

Estos ejercicios que representados por figuras parecen complicados, se convierten en sencillos y atrayentes, sobre el material, donde cada vez que se forma una fila entera de 10 desaparece realmente y es sustituída por una perla en la fila sucesiva, demostrando que las cantidades se sutilizan a medida que van encaminándose a valores más altos.

Representamos ahora una multiplicación muy grande :

2836 × 324.

2.000		300
800)	×	(20
30)		(4
6		

2000 × 300	200.000 × 3	3 × 2	(línea del 100.000)
800 × 300	80.000 × 3	3 × 8	(» » 10.000)
30 × 300	3.000 × 3	3 × 3	(» » 1.000)
6 × 300	600 × 3	3 × 6	(» » 100)
2000 × 20	20.000 × 2	2 × 2	(línea del 10.000)
800 × 20	8.000 × 2	2 × 8	(» » 1.000)
30 × 20	300 × 2	2 × 3	(» » 100)
6 × 20	60 × 2	2 × 6	(» » 10)
2000 × 4		4 × 2	(línea del 1.000)
800 × 4		4 × 8	(» » 100)
30 × 4		4 × 3	(» » 10)
6 × 4		4 × 6	(» » 1)

Se pueden efectuar los desplazamientos sobre el marco en tres tiempos sucesivos, según los tres grupos indicados en su colocación respecto a los valores : o también se pueden reunir los grupos del mismo valor y efectuar un solo desplazamiento.

línea del 100.000	: 3 × 2 = 6	= 6
» » 10.000	: 3 × 8 ; 2 × 2 = 24 + 4	= 28
» » 1.000	: 3 × 3 ; 2 × 8 ; 4 × 2 9 + 16 + 8	= 33
» » 100	: 3 × 6 ; 2 × 3 ; 4 × 8 = 18 + 6 + 32	= 56
» » 10	: 2 × 6 ; 4 × 3 = 12 + 12	= 24
» » 1	: 4 × 6 = 4	= 24

El producto total indicado en el marco es 918.864.

Las descripciones efectuadas hasta ahora, tenían por finalidad

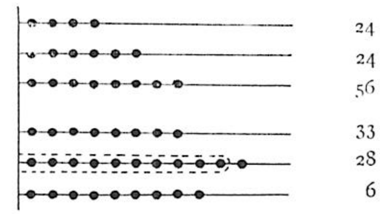


Fig. 81

el estudiar separadamente los elementos que concurren en la ejecución de una multiplicación de grandes cifras.

En el material siguiente, en cambio, se realiza la multiplicación de modo, que el orden de sucesión en las varias operaciones concurrentes sea, como lo es, en el procedimiento corriente donde las cifras, permaneciendo escritas, no pueden desplazarse y ello está originado por un factor que se refiere a la ejeucción práctica del cálculo escrito y no a la esencia misma del juego de los números en la multiplicación : el otro factor siendo el pasaje de grupos según el sistema decimal : es decir, empezando por las unidades simples y desplazando en un conjunto con el cálculo.

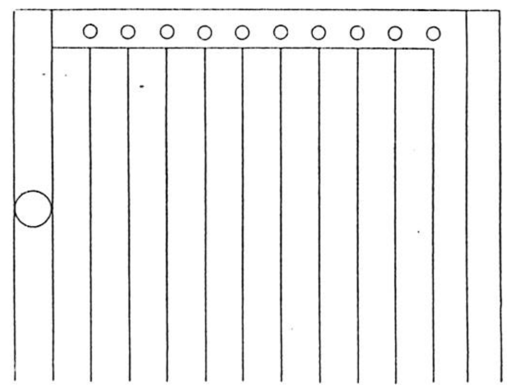


Fig. 82

El material consiste en un marco donde los hilos (fig. 82) están colocados verticalmente, sin la distinción, de grupos de tres, esto es, equidistantes y en número superior a siete (hasta las centenas de millón). En cada hilo están enfiladas 10 perlas sin distinción de colores, es decir que las perlas de todos los hilos son del mismo color.

Las perlas se bajan desde la parte superior cuando se desplazan para efectuar la operación y a cada hilo corresponde, en un pequeño eje transversal en el fondo, un cero.

A la derecha, sobre el marco, hay un pequeño hueco redondeado donde se coloca cada vez la cifra relativa al multiplicador en acción.

Unido a este aparato hay varias fajas de papel con pequeñas subdivisiones que indican la distancia entre uno y otro hilo. Sobre el papel, y teniendo en cuenta dichas distancias, se escribe el multiplicando comenzando por la última cifra relativa al multiplicador en acción.

Unido a este aparato hay varias fajas de papel con pequeñas subdivisiones que indican la distancia entre uno y otro hilo. Sobre el papel, y, teniendo en cuenta dichas distancias, se escribe el multiplicando comenzando por la última cifra de la derecha (unidades simples).

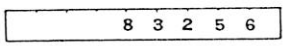


Fig. 83

Así se escribiría el número 83256.

El análisis del número se realiza únicamente con el multiplicador. Por ejemplo, supongamos 83256 × 347.

El multiplicador se descompone así : 300
40
7

Cuando se multiplica por 7 se coloca el disco del 7 en el hueco redondeado lateral y se efectúa la multiplicación según las cifras del multiplicando enfilando en forma que cubran todos los ceros. (fig. 84). Primer producto 583.792.

Para la segunda cifra del multiplicador que es una decena (40)

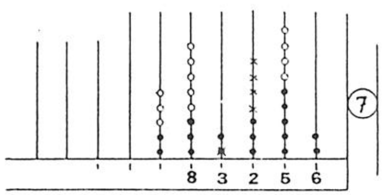


Fig. 84

se desplaza la faja de papel que contiene el multiplicando, de modo, que permanezca descubierto el primer seis (multiplicación por 10), y se coloca en el espacio de la derecha el número 4. Dejando en su puesto las perlas ya desplazadas se prosigue la multiplicación del número, comenzando por las unidades y prosiguiendo en igual forma que la vez anterior. Es evidente que cada vez que en una fila se alcance el número 10 toda la fila se desplaza y en su lugar se baja una perla del valor superior.

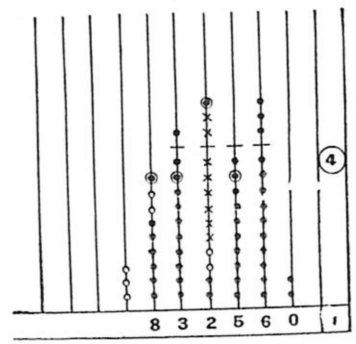


Fig. 85

El segundo producto, que viene añadido al primero, alcanza un total de 3.913.032.

Para la tercera cifra (centena) del multiplicador se desplaza dos ceros de la faja del multiplicando y se coloca la cifra en acción— el 3 en el disco lateral, permaneciendo en el mismo lugar todas las perlas desplazadas hasta ahora.

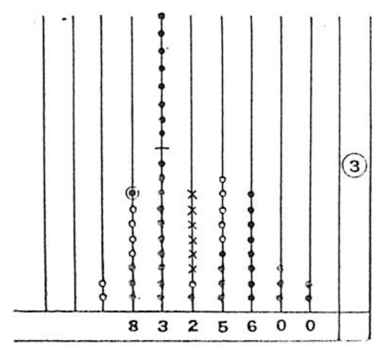


Fig. 86

El total es 28.889.832.

Las perlas se encontrarán dispuestas sobre el marco en la forma que indica la figura 87.

La multiplicación efectuada ha sido 83.256 × 347 = 28.889.832.

La ejecución de la operación con cifras, al no permitir la in-

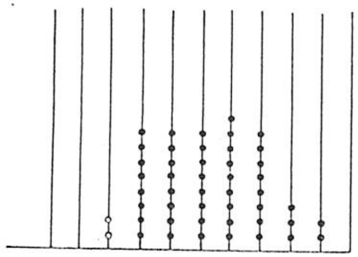


Fig. 87

mediata acumulación de los productos parciales, obliga a escribir éstos separadamente, colocando en columna los relativos al mismo valor y después se suman dichos productos. Se comprende, porque a cada nuevo producto parcial, éste debe iniciarse bajo la cifra del multiplicador en acción.

```
   83256
 ×   347
--------
  582792
 333024
249768
--------
28889832
```

El material no sirve para «enseñar» las operaciones aritméticas, ni mucho menos para facilitarlas o simplificarlas. Su finalidad es entretener la mente del niño con ejercicios que le llevan a razonar y conducirla a la busca y comprobación de hechos que se presentan de modo atrayente. El niño ha realizado un estudio del sistema decimal y ha analizado y profundizado procedimientos que le conducen, no sólo a efectuar, sino a comprender las operaciones aritméticas.

Si el niño se ha interesado directamente en las operaciones y ha comprendido cómo se efectúan: *él buscará encontrar los resultados*, por el camino más breve y con el mínimo esfuerzo.

Entonces abandonará el material y querrá efectuarlas sin esa ayuda.

En efecto, llega un momento en que el niño deja el material y efectúa las operaciones usando números que alcanzan algunas veces a los billones.

Si el material, en cambio, hubiese servido para facilitar y simplificar los cálculos, el alumno seguiría asido a la ayuda del material que habría disminuído en él la energía de expansión. Sola-

mente, cuando el esfuerzo de la pesquisa, la claridad del hecho y la persuasión, nos han hecho dueños de un procedimiento, buscamos el alcanzar la finalidad perseguida por el camino más breve posible. La lentitud en el análisis conviene en el período *formativo* y prepara la rapidez y la extensión de la aplicación.

```
        22364253 ×
       345234611
----------------
        22364253
       22364253
      134185518
     89457012
    67092759
   44728506
  89457012
 111821265
67092759
----------------
7720914184760583
```

Ejemplo de una multiplicación gigantesca implantada y ejecutada por los niños, sin material.

LA DIVISION

LA DIVISION ANALIZADA

Los ejercicios colectivos con los juegos de perlas del sistema decimal, que sirven para una primera representación material de la división, con cubos de mil, cuadrados, etc., son substituídos en un ejercicio paralelo por otro material, que se presta a trabajos individuales e inicia en las operaciones escritas. En el primer ejercicio (división de pequeños números por una cifra) accesible a niños pequeños, se utiliza un material análogo al empleado para aprender la tabla de multiplicación, mas, para la iniciación se pueden usar las mismas tablas descritas, apropósito de la memorización de la tabla pitagórica ; solamente son distintas las hojas donde se anotan los cálculos.

PROCEDIMIENTO

Se toma al azar un número cualquiera de perlas de la cajita y se cuentan. Supongamos que hay 27 perlas : este número se escribe en el primer espacio en blanco de la hoja de las divisiones.

Después, tomando el cartón cuadrado con los cien huecos y la caja de las perlas, se procede a la operación.

Supongamos que se trata de dividir 27 entre 10. Pondremos primero diez perlas al lado, debajo del 1 ; luego otra columna de diez perlas al lado, debajo del 2. Para completar la columna que vamos a poner debajo del 3 no hay bastantes perlas, pues no quedan más que siete.

Entonces el 2 se escribe en la línea horizontal, después del 10, y a su derecha, en la columna de los residuos, se escribe 7.

Dividamos ahora la misma cantidad por 9. Para ello se coloca debajo del 1 una columna de nueve perlas ; debajo del 2 otra columna de nueve perlas ; debajo del 3, otra columna de nueve perlas. Vemos en este caso que no queda ningún residuo. Entonces en la línea que coresponde al 9 se escribe la cifra 3.

Para dividir por 8, el niño dispone de 8 perlas en columna vertical debajo del 1 ; otra columna debajo del 2 ; otra debajo del 3. Quedan aquí, como resíduo en la columna 4, sólo tres perlas. Y así sucesivamente.

Para las divisiones escritas, el niño dispone de un paquete con

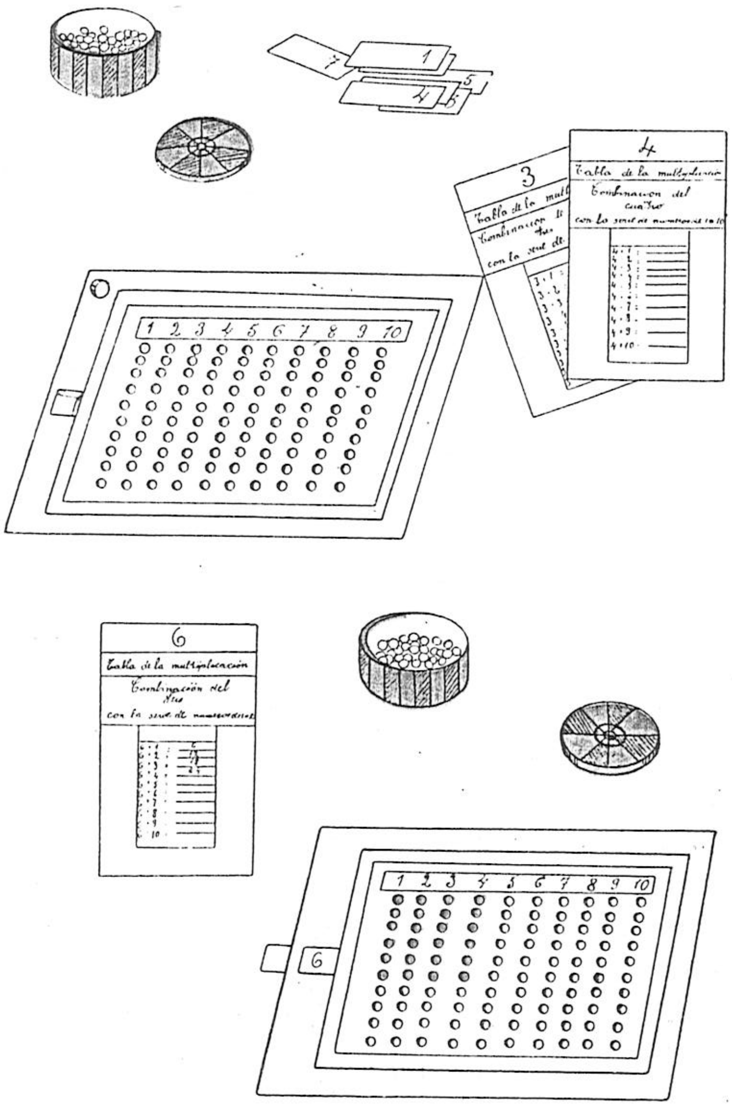
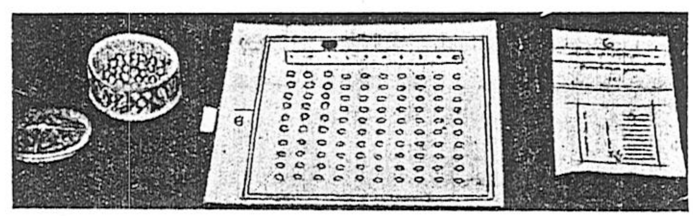


Fig. 88

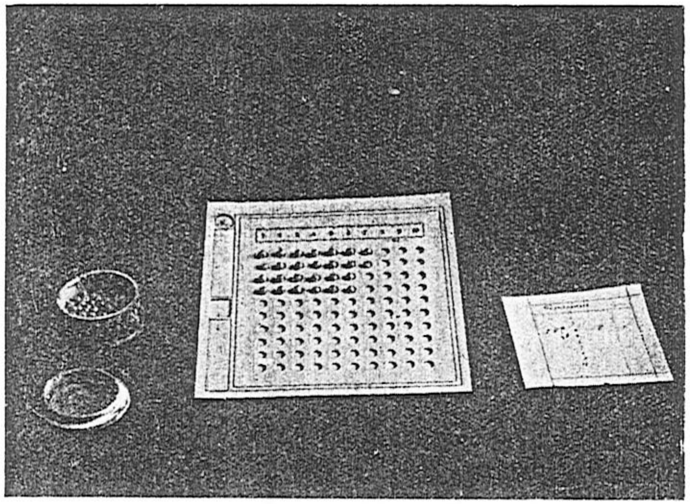
EL MATERIAL

cien hojas, dispuestas como la del grabado, envueltas en una artística cubierta, atada con una cinta de seda. En cambio, los modelos para las tablas parciales de multiplicación, con sus respectivas tablas pitagóricas y de confrontación, están metidas en un sobre de pergamino con ribetes de piel.

División			Residuo
	: 2 =	....	....
	: 3 =	....	....
	: 4 =	....	....
	: 5 =	....	....
27	: 6 =	....	....
	: 7 =	....	....
	: 8 =	3	3
	: 9 =	3	....
	: 10 =	2	7



Material de la tabla pitagórica, usado para la división



Una división ejecutada sobre el material y transcrita al papel

División	Residuo
: 2 = ...	....
: 3 = ...	....
: 4 = ...	....
: 5 = ...	....
: 6 = ...	....
: 7 = ...	....
: 8 = ...	....
: 9 = ...	....
: 10 = ...	....

DIVISION DE GRANDES NUMEROS POR VARIAS CIFRAS

Es posible, también, reproducir con el material de las perlas las divisiones que tengan varias cifras en el divisor, y esto puede llegar a ser un «pasatiempo aritmético» muy adecuado para emplear la actividad del niño cuando está en su casa. Este trabajo que aclara los procedimientos de las operaciones, es casi una *aritmética ra cional* que se sobrepone a la empírica, la cual reduce el mecanismo de las operaciones abstractas a una simple *rutina*. Estos «pasatiempos» abren el camino a la aritmética razonada, que espera al niño en los grados superiores.

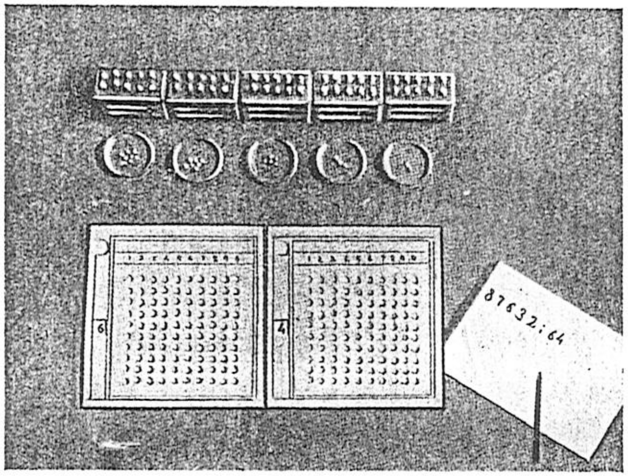
También la división se utiliza como ejercicio de aplicación que sirve para adquirir un conocimiento rápido y práctico del *lugar* de los números, en relación con el valor jerárquico que representan. En los ejercicios primitivos servía para demostrar el hecho de una cantidad que había de subdividirse en partes iguales, cantidad que existía efectivamente y agrupada según el sistema decimal en cubos de 1000 perlas, cuadrados de 100, bastones de 10 y perlas aisladas. (Dividendo). El divisor dinámico estaba representado por niños, unos representaban las decenas (decuriones) y otros las unidades.

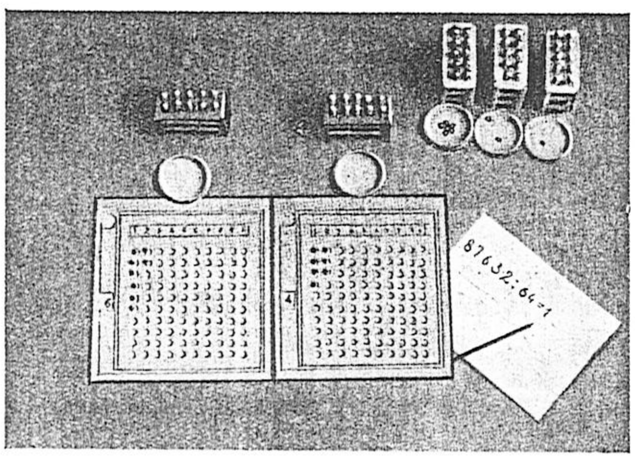
Aquí, en cambio, (como se ha visto para la multiplicación) las cantidades están representadas simbólicamente, una perla puede simbolizar las cantidades numéricas más diversas, decenas de millar o millones, pero es el *lugar que ocupa* la perla el que indica el valor representado.

También los colores ayudan a diferenciar las posiciones como en el caso de la multiplicación ; y usamos perlas que si representan las unidades son de color rojo, azul si son decenas, etc. Y esto permanece constante para fijar la idea, ya explicada de los grupos jerárquicos : punto, línea y cuadrado. Estos tres grupos pueden hallarse a nivel distinto (unidades simples, millares, millones, etc.)

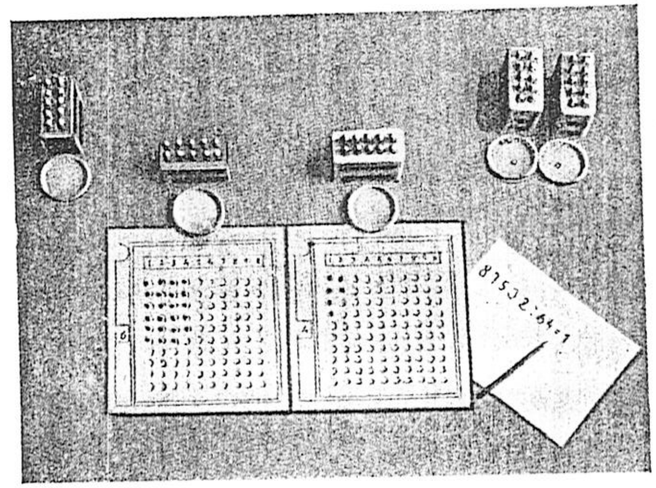
Como la división es, por excelencia, la operación en la que precisa siempre *separar*, no es posible utilizar el material de marcos o bastidores donde las perlas están fijas. Por ello, y para representar aquí los distintos niveles de grupos numéricos, usaremos platillos que pueden contener perlas separadas ; tres platillos blancos para los grupos de las unidades simples, tres platillos grises para el grupo de los millares y tres platillos negros para el de los millones.

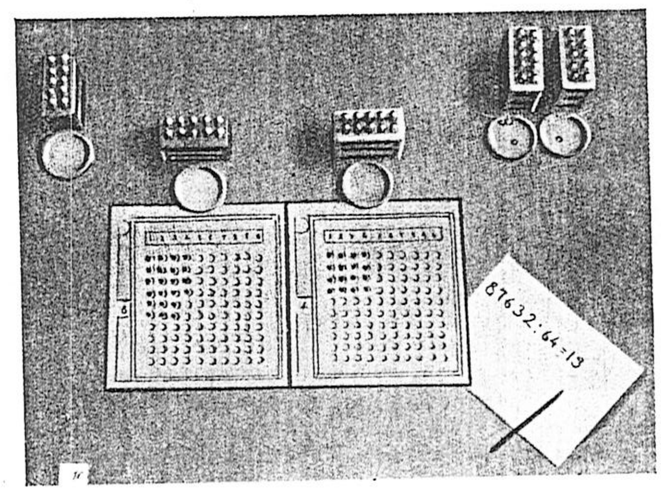
Con objeto de facilitar los cambios, se ha preparado un material de depósito, consistente en varios tubos de vidrio, que contienen una sobre otra, diez perlas. Los tubos, según los grupos, tienen las perlas de los colores dichos y están sostenidos por una especie de



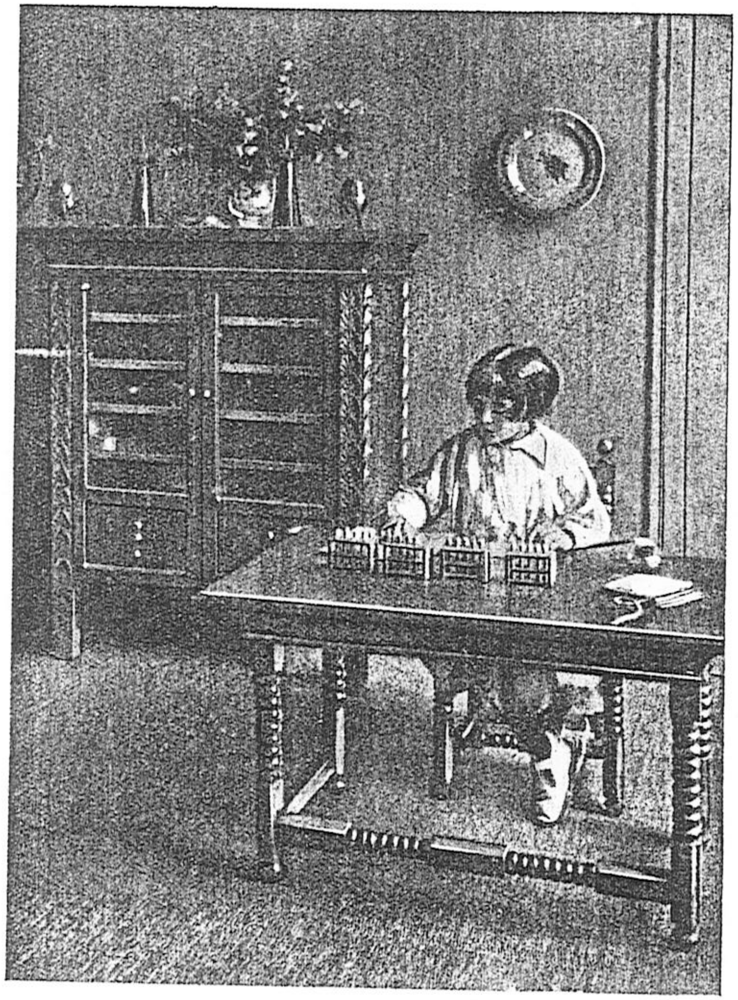


Cuatro tiempos sucesivos de una división de más cifras ejecutada con el material





Cuatro tiempos sucesivos de una división de más cifras ejecutada con el material



Niña que hace una división de más cifras

porta-probetas que son blancas, grises o negras. Todo ello para facilitar los cambios y evitar la fatiga inútil de contar diez perlas cada vez.

Nada mejor que este depósito demuestra que el sistema es decimal y que se trabaja sobre el 10, lo mismo si se trata de unidades simples que de millones, lo que hace que las dificultades numéricas sean siempre las mismas en las distintas clases de unidades.

Es en la obtención del valor y en la «colocación en su puesto» de la cifra del cociente, en lo que consiste la dificultad fundamental de la división.

Nosotros consideramos, como base del estudio, el análisis y la distinción de las partes..

Las distintas partes separadas y analizadas dan claridad al procedimiento. Es siempre profundizando en el conocimiento como se avanza y no (como en los métodos corrientes) exponiendo dificultades sucesivas en línea recta y superándolas una a una (división de números pequeños y después mayores ; divisor de una y varias cifras, etc.)

Una vez dicho cómo se prepara el material relativo al dividendo veamos el que representa el divisor.

Antes que nada, precisa que resalte la diferencia entre los números del dividendo y los del divisor. El dividendo es la *cantidad* a dividir. El divisor, aun cuando sea un número que podrá llegar al grupo de millones, representa e indica el número de partes iguales en que se fracciona el dividendo. Nada hace resaltar tanto esta diferencia como representar el dividendo por una suma de dinero y el divisor por un número de personas que deben repartírselo entre ellas.

El concepto del primer juego escolar puede ser tomado nuevamente y ampliado por el material.

En efecto, en el divisor, en lugar de perlas usaremos bolos muy pequeños que recuerden un poco la figura del hombre y utilizaremos bolos blancos, grises o negros con la parte superior roja, azul o verde. Como «plan de ejecución» debe realizarse la *distribución* de unidades que constituyen el dividendo entre las unidades que constituyen el divisor y para ello usaremos una tabla semejante a la que usamos para los ejercicios de la multiplicación.

Aquí, sin embargo, la tabla es un «cuadrado de nueve» y presenta, por lo tanto, 81 espacios que pueden contener perlas en filas paralelas, porque más de nueve no pueden corresponder a ninguna unidad del divisor ; si se añadiese una más, ésta pertenecería con el 9 a otra categoría decimal (el 10).

Distinguiremos varias tablas para la división, según se trate de bolos rosa, azules o verdes. En la parte superior de la tabla hay una faja que tiene nueve círculos ahuecados, con fondo blanco, donde está escrita la cifra en serie del mismo color de la faja : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Los bolos se colocan en los círculos y cubren las cifras ; la distribución se lleva a cabo colocando, cada

Tabla del divisor (Unidades)

Faja donde se colocan los bolos a partir del 1

Tabla del divisor (Decenas)

Lugar para los bolos azules de las decenas

Tabla del divisor (Centenas)

Lugar para los bolos verdes de las centenas

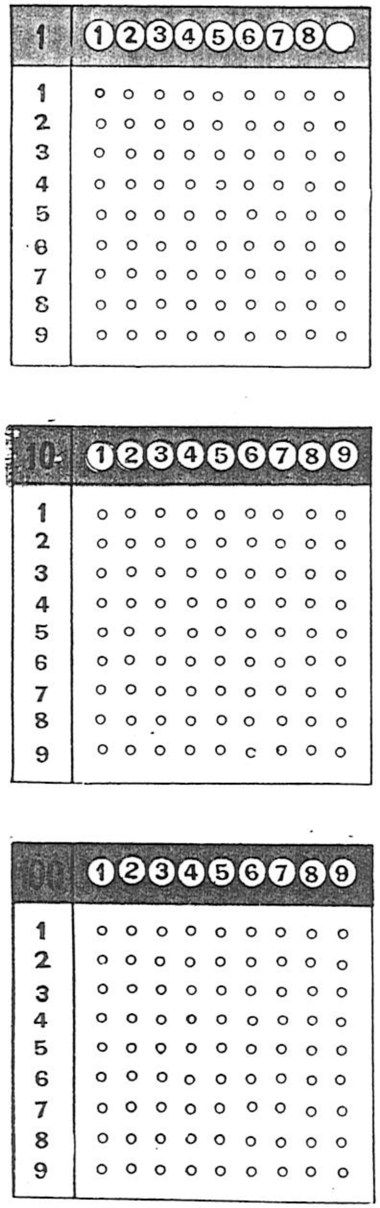


Fig. 89

vez, una perla debajo de cada bolo. Pero, la cifra que queda al descubierto, después del último bolo, indica indirectamente la cantidad de éstos (si la cifra descubierta es 8, esto indica que los bolos colocados son 7). En el lado vertical a la izquierda de la tabla de distribución están señaladas en negro, una debajo de otra, las cifras hasta 9 y éstas *cuentan* la cantidad de perlas correspondientes a cada bolo y, por lo mismo, el número de las filas de perlas que se han ido acumulando debajo de aquéllos. (Es sobre ellos donde se encontrarán las cifras del cociente).

Si el divisor se compone de más de una cifra (por ejemplo, unidades y decenas, o unidades, decenas y centenas) precisan otras tantas tablas que se colocarán horizontalmente, una junta a otra y ello, para que aparezca más claro el hecho, de que se va distribuyendo a todos los grupos representados, «a la misma cantidad».

Mientras se da *ciento* a un bolo verde, se da *diez* a un azul y se da *uno* al bolo rojo.

Pero, cada individuo representado recibe uno, porque se sobreentiende que, lo que correspondió al bolo verde *debe después ser dividido entre ciento* y lo que correspondió al bolo azul va dividido entre otros diez. Solamente el bolo rosa de las unidades simples recibe lo justo, que es, precisamente, lo que corresponderá a cada uno.

Es cierto que todos los cuadros deben tener la misma cantidad de filas de perlas y, si cada centena recibe tres, otros tantos debe recibir cada decena y cada unidad, y aquel tres que se encuentra en todas las tablas es la cifra del cociente. Pero aquel tres ¿qué representa? ¿Cada unidad del divisor tendrá tres millones, tres millares o tres unidades?

O dicho en otra forma ¿cuál es el lugar de aquel tres en la serie de valores? Evidentemente es el lugar relativo a lo que correspondió a las unidades simples, a los bolos rosas.

No consiste todo, pues, en hallar la cifra del cociente; hay que conocer el *lugar* que ocupa. Es decir, ¿cuál es el valor correspondiente a la cifra de las unidades simples del divisor?

Si se dieron tres millones a la centena, se dieron trescientos mil a las decenas y treinta mil a las unidades; la suma corespondiente a cada uno es 30.000.

Centenas :	3.000.000
Decenas :	300.000
Unidades :	30.000

Las centenas, dividiendo por ciento, hacen descender dos lugares, la cifra positiva tres.

Las decenas, dividiendo por diez, hacen descender un lugar su tres.

$$3.000.000 : 100 = 30.000$$
$$300.000 : 10 = 30.000$$

Esto es; dividir por ciento y por diez quiere decir: quitar dos y un cero, respectivamente. Esta división por 10, 100, 1000, etc., está siempre incluída en las divisiones donde el divisor tiene varias cifras.

El cociente es, pues, doblemente interesante como cifra y como valor. La división se considera como un hecho o como una escena análoga a aquella de los primeros juegos de los niños; supone una *multitud de unidades,* no presente, como eran aquellos niños representados por la decena que no aparecían, pero que después, del niño decena, recibían su parte en la sucesiva división por 10.

Aquí entre los símbolos, aquella multitud puede ser centena o millar o decenas de millar de personas ansiosas de saber, cada vez, cuánto ha correspondido a cada una; saber, no solamente la cifra, sino, sobre todo, el *lugar* de ella. Mientras por una parte tiene lugar la *distribución* por igual entre los cuadros, cuya distribución determina la cifra, la multitud lejana de las unidades participantes está ansiosa de conocer la cifra por el lugar que ésta ocupa; como en la Bolsa, los accionistas, aguardan ansiosos el aumento de su fortuna.

Por todo ello precisa dar especial relieve al cociente. Mientras en el juego primitivo de la efectiva subdivisión practicada en el dividendo, se hacía resaltar el hecho de que quedaba «aquella misma cantidad subdividida en partes» y que se podía en seguida acumular de nuevo, volviendo a su estado primitivo, en este juego de símbolos, un intento más útil se pone de relieve: el *cociente.*

Es la *unidad receptora* la que sobresale, mientras antes prevalecía la cantidad a dividir.

Por esto hemos establecido un material de colocación sucesiva de las cifras del cociente: la Bolsa del cociente, esto es, la cuota correspondiente a cada individuo. La cuota se manifiesta, cifra a cifra, y, allí se coloca.

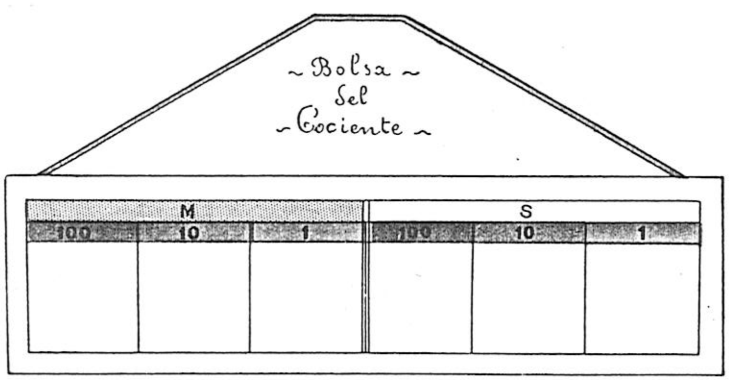


Fig. 90

En los cuadros se escriben sucesivamente las cifras del cociente. La sustancia es tal, que las cifras se pueden borrar después.

ANALISIS DE LAS UNIDADES

Hecha de este modo la descripción del material y de los fines que se persiguen con estos ejercicios, pasemos a la práctica de la operación.

La operación, para ser claramente comprendida, requiere un análisis completo de los números, esto es, el análisis hasta las unidades.

Mientras para la multiplicación (que es una acumulación), el análisis se contraía solamente a la distinción de los valores; por ejemplo, 6.843 analizado para la multiplicación era:

6.000
800
40
3

el mismo número analizado para la división, es:

1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
1.000	100	10	1
1.000	100	10	
1.000	100		
1.000	100		
	100		
	100		

Si dicho número se multiplicase por 5, el análisis habría reducido la multiplicación entre grupos a : 6 × 5 : 8 × 5; 4 × 5; 3 × 5 y, por lo tanto, a la colocación de los resultados parciales según su valor. En la división, en cambio, hay una distribución, unidad por unidad, y la escisión debe ser completa.

Dividiendo, pues, por cinco dicho número, la preparación analítica sería la siguiente:

1.000	— 1	100	— 1	10	— 1	1	— 1
1.000	— 1	100	— 1	10	— 1	1	— 1
1.000	— 1	100	— 1	10	— 1	1	— 1
1.000	— 1	100	— 1	10	— 1		1
1.000	— 1	100	— 1		1		1
1.000		100					
		100					
		100					

En este análisis está indicada la distribución unitaria; la división está representada por aquella relación entre *una* y *uno* que puede observarse en el cuadro precedente. En las dos primeras columnas hay restos, en las otras dos, en cambio, existe insuficiencia. La división entera consta de cuatro divisiones *parciales*, pero *dependientes* en el sentido que debe ser utilizada toda la cantidad disponible en la subdivisión entre aquellas cinco unidades, las cuales, se presentan indistintamente, ante cada grupo a reclamar su parte.

Pongamos ahora en otro orden la cantidad analizada, es decir, en el orden de los divisores y hagamos la subdivisión del dividendo grupo por grupo. Una de las características de la división es, que mientras el grupo de unidades que constituyen el divisor permanece fijo e inmutable desde el principio hasta el fin, los grupos del dividendo, esto es, las cantidades, sufren contínuas transformaciones pasando de puestos superiores a puestos inferiores y cambiando cada vez los dividendos de los grupos parciales.

Resulta, pues, que se trata, cada vez, de nuevas divisiones. Los dividendos nuevos que se forman no pueden preverse, no se podrían representar a priori. Son «sorpresas» semejantes a las que proporciona la marcha de un negocio financiero.

Cada división parcial es, pues, separable de la anterior y al propio tiempo, es consecuencia de ella. Cada división da lugar a una nueva cifra que es la cantidad que de cada grupo de valores corresponde a cada unidad del divisor. Dicha cifra es una cifra del cociente. Comencemos por el primer grupo o sea el de los millares.

I	I	I	I	I
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000				

Fig. 91

Evidentemente, cada una de las unidades rojas no puede tener más que un millar (fig. 91).

La primera cifra del cociente es 1 y este 1 representa un millar; 1000 está pues en el 4.° lugar. Ahora aquel millar de más es el resto de esta primera división.

La segunda división se refiere al segundo grupo: 800 : 5.

El dividendo, sin embargo, cambia en la segunda división porque tiene en su ventaja el resto de la primera. Aquel millar de resto será un cubo que es preciso descomponer en los diez cuadrados que lo integran y forman un total de diez y ocho centenas y no ocho, que deben distribuirse entre cinco (fig. 92).

En la distribución una a una, han correspondido tres centenas

I	I	I	I	I
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	100	100
100	100	100	0	0

Fig. 92

a cada uno; las tres centenas que no bastan para cubrir una fila son, pues, el resto de esta división.

El cociente lo da la cifra 3 y estas 3 son centenas: 300. Hasta ahora, pues, el dividendo distrubuído, ha dado a cada unidad: 1300.

Pasemos ahora a la tercera división: 40 : 5. La cantidad de decenas es insuficiente para la distribucción. Pero aquel dividendo es sólo aparente, porque las tres centenas de resto en la división anterior, se descomponen y se precipitan en la categoría de las decenas. Será, pues, el caso de tres cuadrados de ciento que deben descomponerse cada uno en los diez bastones de que están formados.

La tercera división es, pues, la distribución de 34 bastones entre cinco, esto es, treinta y cuatro decenas a los cinco individuos *rosa* que permanecen inmutables desde el principio hasta el fin.

I	I	I	I	I
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
10	10	10	10	0

Fig. 93

El dividendo de decenas, que aparecía insuficiente al principio, enriquecido con restos inesperados, ha podido dar una distribución completa de 6. La distribución incompleta del último grupo tiene el significado de un resto, aun cuando sólo falte una unidad. La tercera cifra del cociente es pues 6, y son 6 decenas, es decir: 60.

Los componentes individuales del divisor tienen hasta ahora cada uno 1360 unidades del dividendo.

La cuarta y última división se refiere al grupo 3 :5. El dividendo aparece claramente insuficiente, pero, he aquí que se enriquece con un botín considerable e inesperado. Aquellos cuatro bastones de resto deben deshacerse y añadir sus diez perlas libres en el dividendo de las unidades. La división efectiva que se presenta es, pues, 43 : 5 (fig. 94).

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0

Fig. 94

Esta reserva a cada uno, el dividendo de 8 unidades, y sobran tres que se inutilizan definitivamente. La última cifra del cociente es 8 y son 8 unidades simples.

Por lo tanto, el cociente total que corresponde a cada una de las unidades del divisor es: 1.368.

La división fué pues 6.843 : 5 = 1.368 y tres de resto.

El número, que al principio constituía un conjunto se ha descompuesto en cinco partes iguales y desapareció en ellas dejando un resto insignificante.

1368 — 1
1368 — 1
6.843 ———————— 1368 — 1
1368 — 1
1368 — 1
......
3

Fig. 95

OPERACIONES CON EL MATERIAL

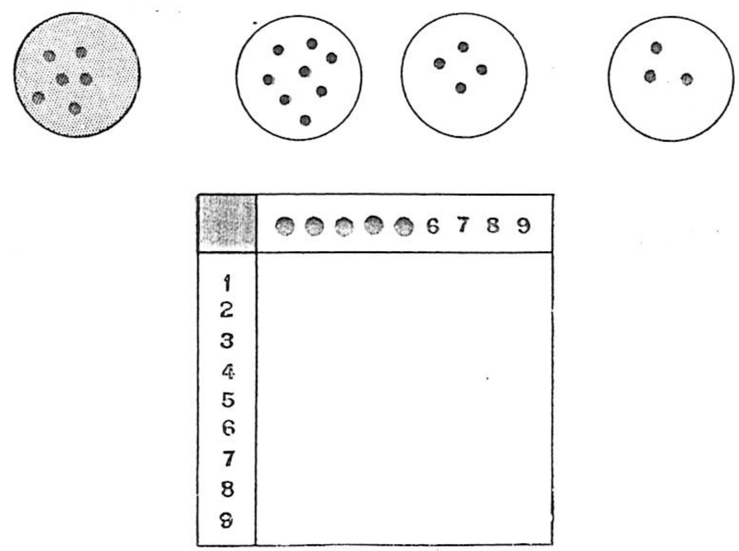
Si vamos ahora a la aplicación con el material simbólico de las perlas se tienen objetos iguales entre sí, sin otra diferencia, que la del color y la posición.

En vez de la representación analítica de las unidades de distinto valor 1.000, 100, etc. se tiene la misma perla, al igual que se tienen simples cifras en los números no analizados: 2648 donde existen un 2 primero, luego un 6 etc. cuya posición relativa es la que distingue sus valores.

Así las perlas son rojas, verdes o amarillas, o están depositadas en platillos blancos o grises. Representando unidades separadas, son como números analizados hasta las unidades y usados conjuntamente, es decir, un grupo junto al otro dan una idea de conjunto de la operación.

Sea la división, analizada precedentemente por medio de cifras, 6.843 : 5.

Se comienza la operación colocando en fila horizontal un platillo gris y tres blancos y depositando en ellos las perlas necesarias; 6 perlas rojas en el de los millares y sucesivamente en los demás 8 perlas verdes, 4 amarillas y 3 rojas (fig. 96).



6.843 5

Fig. 96

El divisor se prepara después con los cinco bolos colocados en el cuadro de distribución. El cuadro no cambiará jamás, en cambio, los platillos del dividendo cambiaran con mucha frecuencia su contenido que deberán volcar en la tabla para distribuirlo por igual entre los cinco bolos.

Cuando se ha concluído una división parcial y la cifra está señalada en el cociente, la tabla se vacía y las perlas que se utilizaron en la distribución se alejan del lugar donde la operación se realiza. Cuando se ha terminado la división relativa a la cantidad contenida en un platillo, éste se desplaza igualmente del lugar donde la operación se ejecuta, mientras sobre el cuadro se coloca el platillo sucesivo. Así se prosigue hasta que han desaparecido todas, a excepción de las que contienen los residuos no utilizables del dividendo : el resto.

6 — 5

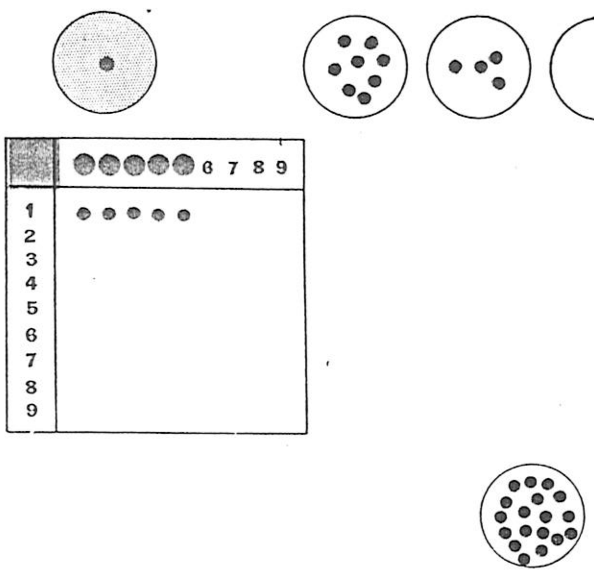


Fig. 97

Aquí está representada la primera división, la de los millares 6 : 5 = 1, con una de resto (fig. 97) y la fig. 98 representa el platillo de las centenas al que se ha unido el resto precedente : 10 + 8 = 18.

La figura 98 representa la segunda división referente a la distribución de las centenas, esto es, 18 : 5. El cociente es 3 y el resto 3.

La figura 99 representa el contenido del platillo sucesivo de las decenas, en el cual se ha acumulado en forma de decenas el resto precedente.

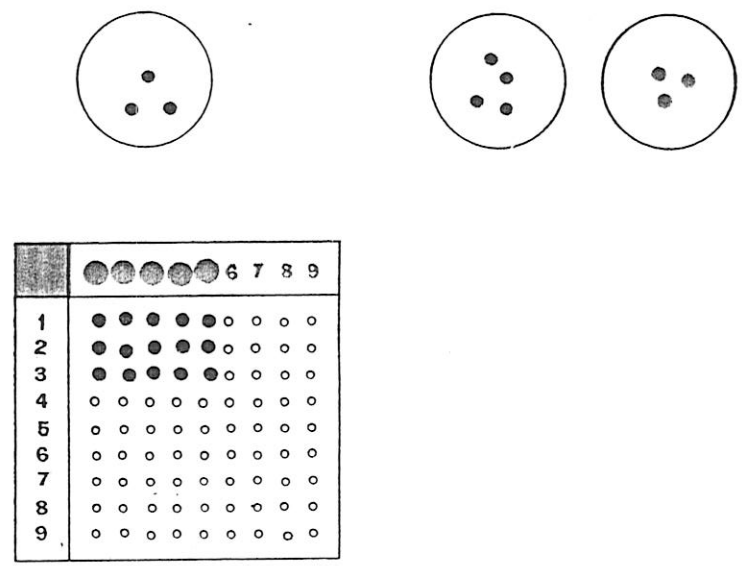


Fig. 98

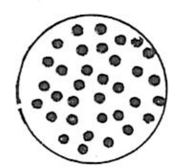


Fig. 99

Por lo tanto, los términos de la nueva división serán : 34 : 5, donde el dividendo está constuído por decenas.

La tercera división, esto es, la distribución de las 34 decenas entre las cinco unidades del divisor está representada en su eje-

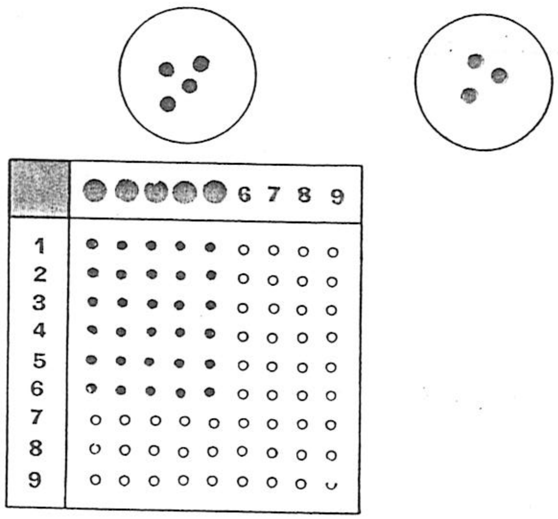


Fig. 100

cución por la fig. 100. Han resultado seis filas de perlas y por ello la nueva cifra del cociente es 6 e indica 6 decenas.

Existe un resto de 4 decenas que deberán ahora pasar como unidades simples al último platillo (fig. 101) constituyendo el último dividendo o sea 43.

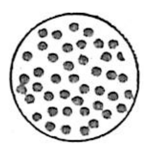


Fig. 101

Finalmente, en la cuarta y última división, la distribución de las unidades ha tenido lugar como indica la figura 102 y como ha cubierto ocho filas, la última cifra del cociente es 8.

El resto de tres unidades es el resíduo inutilizable de la cantidad total que fué dividida entre las cinco unidades del divisor.

43 — 5

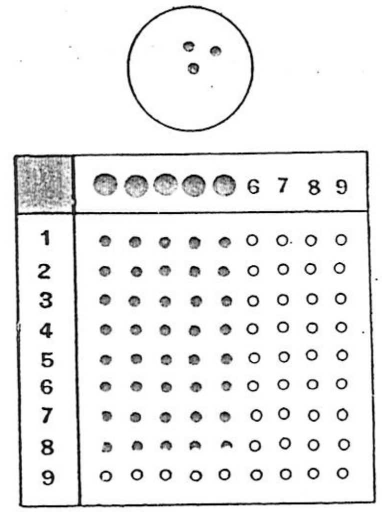


Fig. 102

Las cifras encontradas sucesivamente para el cociente fueron

1.ª	división:	6000	:	5	=	1000	Del Dividendo
2.ª	id.	1800	:	5	=	300	
3.ª	id.	340	:	5	=	60	6.843
4.ª	id.	43	:	5	=	8	

	6000	resto	1000
Cociente: 1368	1800	»	300
	340	»	40
Resto: 3	43	»	3
	en las sucesivas divisiones por 5		

Se procede análogamente en una división donde el divisor tenga dos o tres cifras.

Entonces, en vez de utilizar una sola tabla de distribución se utilizan dos, una para las decenas y otra para las unidades, donde los bolos azules recuerdan los decuriones; y si son tres, en la tercera se ven los bolos amarillos (centuriones). El ejercicio puede ser individual, aun cuando con frecuencia, intervienen más niños, bien como cooperadores o sólo como observadores.

Sea por ejemplo la división 3867 : 46.

La (fig. 103) indica la preparación inicial del dividendo y del divisor y la posición recíproca de los objetos.

Sobre las dos tablas del divisor están colocados los platillos más altos por el valor de su contenido, es decir, el de los millares sobre las decenas del divisor y el de las centenas sobre la tabla de las unidades.

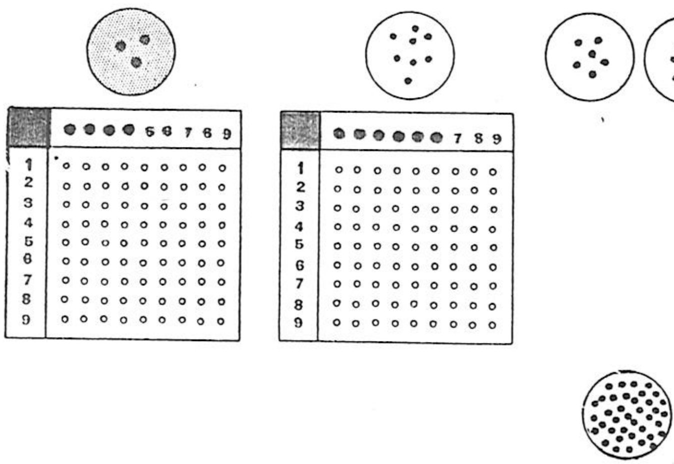


Fig. 103

Como se ve en seguida que no es posible la distribución por igual de los millares, éstos se llevan a las centenas acumulándose a las ya existentes como se indica en la figura anterior.

Este platillo cargado ahora con 38 centenas va colocado sobre la primera tabla y hacia la segunda se avanza el platillo que contiene seis decenas.

Después se coloca una perla amarilla debajo de cada uno de los bolos azules y una perla azul debajo de cada uno de los bolos rosa, llenando sucesivamente todas las filas. Si faltan perlas azules se toma una amarilla del platillo precedente lo que enriquece al que le sigue en diez perlas y así sucesivamente.

De este modo se llegan a completar ocho filas en las dos tablas, quedando como residuos utilizable uno en el platillo de las centenas y ocho en el de las decenas.

La operación 386 : 46 ha dado 8 como cociente y 18 como resto.

¿Qué es el 8 del cociente?

Son 8 decenas, tal es el valor relativo a las unidades del divisor.

Concluída de este modo la primera división se apartan todas las

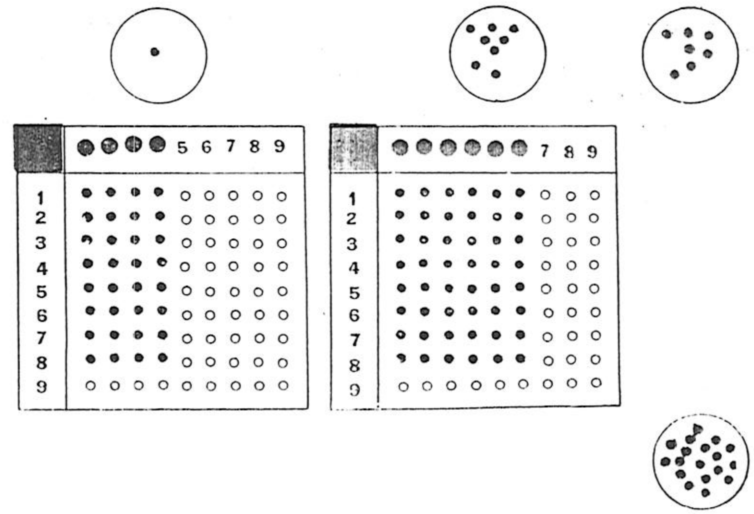


Fig. 104

perlas que están en las tablas puesto que representan la parte del dividendo ya dividido entre las unidades del divisor y se prepara el nuevo dividendo.

Del platillo de las centenas se vuelca la única perla en el platillo de las decenas, en forma de diez decenas, o sea, de diez perlas

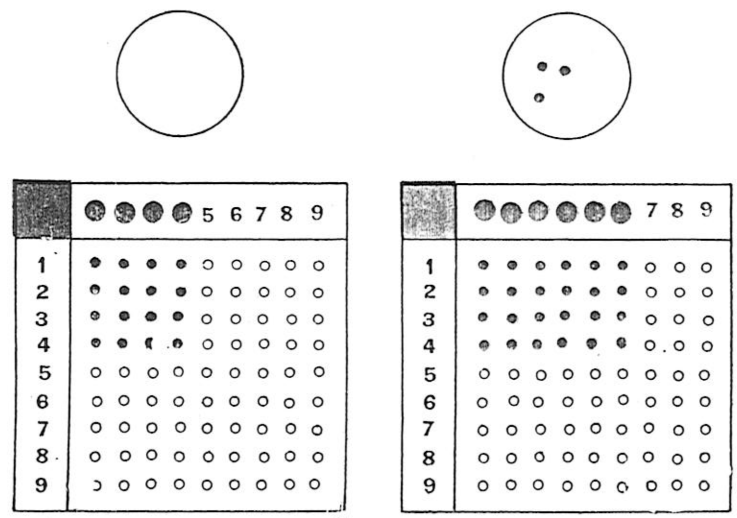


Fig. 105

azules que se mezclan con las otras ocho y se colocan los platillos de modo que las decenas estén sobre las decenas y las unidades sobre las unidades, señal de que se trata de la última división o sea: 187 : 46.

Distribuídas las perlas en la forma acostumbrada resultan cubiertas cuatro filas; el cociente, pues, es 4 unidades y queda sobre el último platillo el residuo no utilizable, el resto de la división total que es igual a 3.

PRUEBA Y SEMEJANZAS

Con la tabla de decenas usada para la multiplicación se pueden efectuar divisiones; éstas tienen la misma apariencia.

Si se toman uno a uno los productos para subdividirlos se opera inversamente a la multiplicación, pero se obtiene el mismo orden

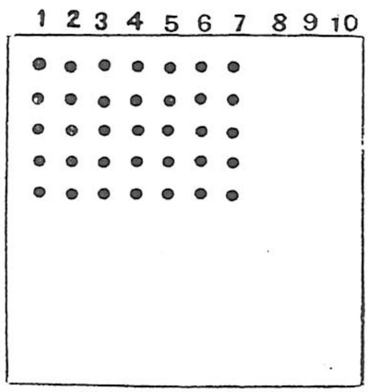


Fig. 106

Tomemos los productos por 5

$5 \times 1 = 5$
$5 \times 2 = 10$
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 4 = 20$
$5 \times 5 = 25$
$5 \times 6 = 30$
$5 \times 7 = 35$
$5 \times 8 = 40$
$5 \times 9 = 45$
$5 \times 10 = 50$

Tomemos ahora uno cualquiera de los productos, por ejemplo el 35 y dividámoslo por 5, es decir, hagamos las filas posibles de 5 perlas.

Han resultado siete filas, luego: $35 : 5 = 7$.

En vez de $5 \times 7 = 35$

En los dos casos tendremos una disposición idéntica de las perlas, solamente que en el caso de la multiplicación el número 35 es el punto de llegada y en la división es el de partida.

Todas las combinaciones de la multiplicación pueden así repetirse: en el caso de $48 : 8$.

48 — 8

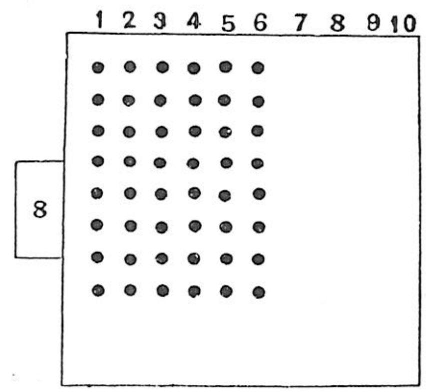


Fig. 107

El número de las filas, encontrado es 6. Luego $48 : 8 = 6$.

Ello corresponde a la multiplicación $6 \times 8 = 48$.

La misma disposición de las perlas es la prueba visible de la invertibilidad de los factores de la multiplicación $6 \times 8 = 8 \times 6$. El producto en los dos casos es la cantidad inmóvil y ordenada de perlas que hay sobre el tablero: 48.

Esta relación entre la multiplicación y la división es causa de que la multiplicación (inversa de la división) sea una prueba de ésta.

En efecto, la división no altera la cantidad a repartir, sino que la dispone en partes iguales. Mientras la multiplicación es una acumulación sucesiva de cantidades iguales, lo que trae consigo un crecimiento gradual de la cantidad, en la división la cantidad permanece inmutable, solamente se la *ordena* en forma diversa.

Este hecho conduce a que se pueda utilizar la tabla de multiplicar en la ejecución práctica de la división.

Por ejemplo, sea $56 : 7$.

Quien retenga en la memoria todas las combinaciones del 7 puede recordar que 7×8 es igual a 56.

Entonces la división puede realizarse de memoria y se sabe de este modo (por el cálculo mental) que $56 : 7 = 8$, porque $7 \times 8 =$

56. Lo cual se expresa diciendo que el 7 cabe exactamente 8 veces en el 56 (fig. 108).

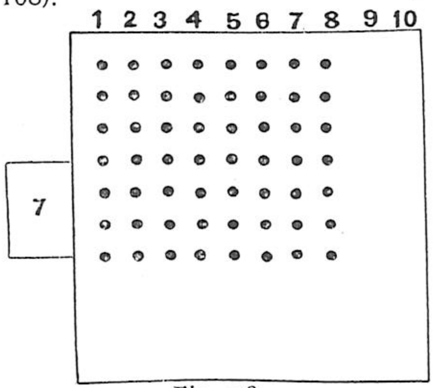


Fig. 108

Por esto se hace necesaria la memorización de la tabla pitagórica incluso para la división y en este sentido el cálculo relativo a la multiplicación debe preceder al de la división. Si se considera, en cambio, el hecho de la división y sus *características,* entonces se puede estudiar conjuntamente la división con el resto de las operaciones.

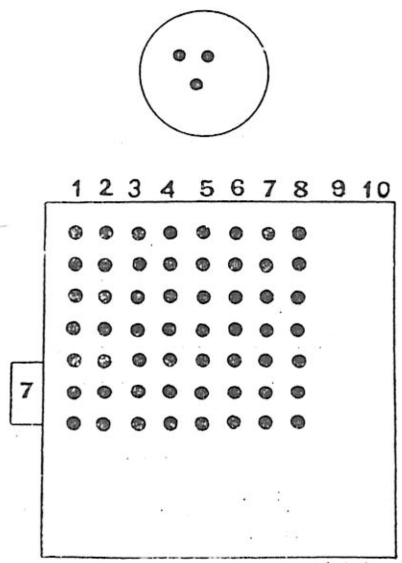


Fig. 109

Escojamos ahora un número cualquiera, por ejemplo 59, que se quiera dividir por 7 (fig. 109). La división sobre el tablero da como resultado 8 y la cantidad distribuída en partes iguales corresponde a la multiplicación 7 × 8 que como sabemos es 56. El residuo 3 que queda sobre el platillo es el resto inutilizable de la división cuya *característica* consiste en dividir una cantidad determinada en partes iguales. Por lo tanto, el número dado comprende el grupo de la multiplicación 7 × 8 más el resto 3.

59 = (7 × 8) + 3.

Habiendo efectuado la operación 59 : 7 para volver a acumular la cantidad primitiva es preciso realizar la multiplicación 7 × 8 = 56 y añadir después a este producto el resto 56 + 3 = 59.

Si se quiere, pues, hacer de memoria la división 59 : 7 precisa averiguar ante todo cuál es la mayor combinación del 7 que entra en 59. Buscando en la memoria se encuentra que es la combinación con el 8 porque 7 × 8 = 56 (7 × 9 = 63 el producto resultaría mayor). El 8, pues, es la cifra del cociente. Entonces precisa efectuar de memoria una *sustracción,* es decir, sustraer del número dado la combinación hallada : 59 — 56 = 3. De ese modo hemos encontrado el resto. La división lleva, pues, consigo una labor contínua de multiplicación y sustracción.

Esta es la característica del cálculo de la división y no del *hecho* de la división.

Aquella labor se limita a la combinación de la multiplicación y de las sustracciones, utilizando la memorización de la tabla pitagórica, y se aplica siempre, sea cual fuere el valor, esto es, la posición de los números.

Tenemos, pues, que las *características* del hecho de la división y el ejercicio ágil en el reconocimiento de los *valores* según el lugar que los números ocupen «son extraños a aquella labor mental» y preparados convenientemente, convierten en claro y sencillo el cálculo de la división más compleja.

EL CÁLCULO PARA LA DIVISIÓN

Apliquemos ahora a la división el cálculo utilizando las memorizaciones.

Supongamos la división ya efectuada según el análisis unitario de los números y según el material distributivo :

6.843 : 5.

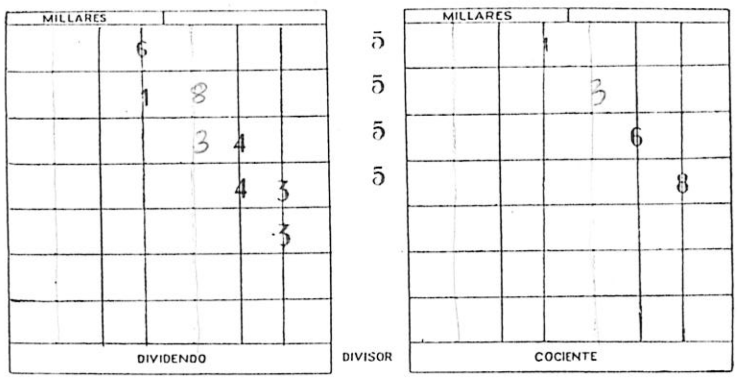
que daba como cociente 1368 y tres de resto. En vez de efectuar el análisis propio de la división, hacemos el análisis del número separando solamente los grupos, como en la multiplicación.

Usaremos hojas análogas a las ya descritas—donde las líneas verticales de varios colores (rosa, azul, amarillo) indican el *lugar* de las unidades, decenas y centenas—en forma que puedan escribirse las cifras sin acompañarlas de los ceros.

El dividendo, divisor y cociente tienen sus espacios respectivos. Siendo el análisis de los grupos

6000
800
40
3

se escribirá solamente las cifras 6, 8, 4, 3 en los lugares respectivos según su valor. El divisor 5 se repite delante de cada grupo que deba dividirse (fig. 110).



6 8 4 3 : 5 = 1 3 6 8

Fig. 110

6 : 5 da uno con 1 de resto.

El 1 de resto de los millares se baja para colocarlo junto al 8 de las centenas haciendo un total de 18.

Ahora la mayor combinación de 5 que puede entrar en tal número es 5 × 3, luego el 3 es el cociente. Si sustraemos 15 a 18 quedan tres de resto, el cual desciende junto a las cuatro decenas formando un total de 34. La división es ahora de 34 entre 5. La combinación 5 × 6 = 30 es la máxima que puede entrar en el 34 dejando un resto de cuatro decenas, mientras el cociente que corresponde a las centenas es 6.

Las unidades, convertidas en 43, se dividen por 5, siendo 5 × 8 = 40 la combinación buscada y 8 el cociente último, quedando tres de último resto. En la figura 110 aparece representada la operación en la forma más sencilla.

EJERCICIOS CON LOS NUMEROS