O B R A S   D E   L A   D O C T O R A   M O N T E S S O R I

PUBLICADAS POR ESTA EDITORIAL

METODO DE LA PEDAGOGIA CIENTIFICA

Aplicada a la educación de la infancia en la «Casa dei Bambini» (Casa de los niños). Segunda edición. Un tomo de 295 páginas, ilustrado, encuadernado en tela.

ANTROPOLOGIA PEDAGOGICA.

Un tomo de 500 páginas con 12 figuras y láminas, encuadernado en tela.

MANUAL PRACTICO DEL METODO MONTESSORI.

Segunda edición, ampliada, modificada y completada con las nuevas ideas y regímenes educadores de la autora. Un tomo de 207 páginas, 30 grabados y una lámina en color, encuadernado en tela.

LA AUTO-EDUCACION EN LA ESCUELA ELEMENTAL.

Agotada.

CUADERNO DE DIBUJO MONTESSORI.

Agotado.

PSICO-GEOMETRIA.

Obra ilustrada con cerca de 300 figuras en colores. Un tomo encuadernado.

LA MISA, las prácticas litúrgicas al alcance de los niños.

DOCTORA MARIA MONTESSORI

PSICO ARITMÉTICA

LA ARITMÉTICA DESARROLLADA CON ARREGLO A LAS DIRECTRICES SEÑALADAS POR LA PSICOLOGÍA INFANTIL, DURANTE VEINTICINCO AÑOS DE EXPERIENCIA

ILUSTRADA CON 300 FIGURAS EN COLORES

VERSIÓN ESPAÑOLA

PRIMERA EDICIÓN DE ESTA OBRA NO PUBLICADA EN OTRO IDIOMA

CASA EDITORIAL ARALUCE

:: CALLE DE LAS CORTES, NÚM. 392. — BARCELONA ::

PRINTED IN SPAIN
IMPRESO EN ESPAÑA

Talleres Gráficos GARROFE, Barcelona : : Año 1934

PREFACIO

La Aritmética, según se presenta en este libro, contiene un capítulo todavía inédito de «psicología infantil», puesto que es una forma de aritmética razonada, e infantil en su razonamiento. Los números, con sus derivaciones, han sido estímulos científicos que han provocado actividades psíquicas.

Se ha repetido siempre que la aritmética, y en general las ciencias matemáticas, tienen en la educación el oficio importante de ordenar la mente juvenil, preparándola, con rigurosa disciplina, para ascender a las alturas de la abstracción. Pero esta importancia doble, es decir, de «medio de desarrollo mental» y «necesaria y elemental cultura», no se alcanzaba con eficacia en las escuelas elementales. En efecto, la aritmética se consideraba un «escollo» difícil de superar, una «dificultad» que requería un esfuerzo penoso, «una disciplina árida».

Pero, presentando al niño un «material científicamente determinado», que le ofrece de un modo «claro» «evidente», el fundamento sobre el cual debe levantarse la actividad razonadora, entonces se facilita no solamente el aprendizaje de la aritmética, dándole una forma elevada, sino también el desarrollo de una profundidad lógica que se hubiera creído imposible de alcanzar en los niños. Los materiales de la aritmética pueden compararse a «una palestra de gimnasia mental». En el minucioso análisis realizado sobre la evidencia de las cosas y sobre el ejercicio activo, todos los detalles acompañan al desarrollo psí-

co, como si la aritmética fuese el medio más práctico para un verdadero tratamiento psicológico del niño, un arsenal maravilloso de psicología experimental.

Cada individuo se ejercita por sí solo con vivo interés; el progreso sobreviene en cada discípulo según el dictamen interior de la necesidad de desarrollo; y de aquí al nivel de madurez propio de cada uno, y, como consecuencia de la libre selección, se alcanza un progreso mental lógico y sistemático. En veinte años de amplia e ininterrumpida experiencia, ninguna disciplina consiguió en nuestras escuelas entusiasmar a los niños tanto como la aritmética, ni en ninguna disciplina hemos alcanzado progresos tan sorprendentes como los alcanzados en el campo de las matemáticas. Queda, pues, abierta en el campo de la escuela elemental, una vía práctica y una extensión fértil, allí donde antes hallábamos tormentos y arideces de desierto.

Los fenómenos apasionantes encontrados a lo largo de esta experiencia han suscitado, aun en personas adultas, actividades fecundas, que superan el límite de la escuela elemental y penetran en el ámbito de la segunda enseñanza. Y en este libro se hallan incluídas las experiencias, acompañadas de materiales, debidos a la preciosa y constante colaboración de Mario Montessori; las sencillas y brillantes operaciones de extracción de raíces cúbicas y cuadradas de tres o cuatro cifras, se hacen accesibles a niños de ocho o nueve años de edad; y las elaboradas «materializaciones» de la cuarta y quinta potencias de binomios y trinomios, obtenidas a través de brillantes interpretaciones que asocian el álgebra, el número y la forma geométrica. De estas «materializaciones matemáticas», que serían de gran utilidad en la comprensión del álgebra en la escuela secundaria, se hace aquí un rápido estudio, pues requieren un tratamiento especial, una publicación aparte que esperamos del autor.

Los estudios precedentes están ya notablemente avanzados en la escuela secundaria.

Aquí quiero hacer un estudio de los fenómenos de índole psicológica, y recordar el hecho de que los discípulos-maestros han completado sus observaciones con el descubrimiento de fórmulas algebraicas y de relaciones numéricas. Algo parecido a lo que han hecho nuestros niños, quienes, sin embargo, operaban con problemas que sabían resolver solos, y llegaron a resultados completamente ignorados por sus maestros. Por consiguiente, hemos entrado en una vía que no es sólo de aprendizaje, sino también, de elaboración.

Siento vivo agradecimiento al editor, señor Araluce, que ha emprendido la publicación de estas obras: la psicogeometría y la psico-aritmética, fruto de un largo trabajo lentamente llevado a término en el recogimiento. No era fácil encontrar un editor con bastante coraje para lanzar al campo de la escuela elemental libros que se salen de las convenciones ortodoxas de la enseñanza, y que ponen el desarrollo psíquico del niño por encima de las disciplinas escolásticas, y que son al mismo tiempo libros que por la exactitud de la reproducción y por la riqueza de las ilustraciones sobrepasan en mucho el límite usual. Hacía falta para esto una persona convencida y capaz de impulsos generosos. Esta condición explica por qué los únicos libros de psico-geometría y psico-aritmética aparecen por primera vez en lengua española.

MARÍA MONTESSORI.

GENERALIDADES

RESUMEN DEL PERIODO PRE-ELEMENTAL

El primer material que se presenta a los niños para el aprendizaje de la Aritmética, es un sistema de diez bastones prismáticos de sección cuadrada de cuatro centímetros de lado, el primero de los cuales—que representa la unidad—tiene diez centímetros de largo, mientras el resto, tienen una longitud que aumenta sucesivamente de diez en diez centímetros hasta el décimo bastón que alcanza la de un metro.

Las longitudes múltiples de diez centímetros, se distinguen en los bastones más largos, por la sucesión alternativa de dos colores distintos. Solamente la unidad tiene un solo color, que es uno de los dos que se emplean para caracterizar el sistema. Por ejemplo: la unidad será azul; en el segundo bastón, los dos trozos de diez centímetros, uno azul y otro rosa; en el tercer bastón, dos trozos azul en los extremos y uno rosa en el centro. De este modo todos los bastones pueden comenzar con el trozo azul y así se consigue, igualmente, que los colores de las diversas unidades que componen el todo, sean claramente diferentes en su sucesión.

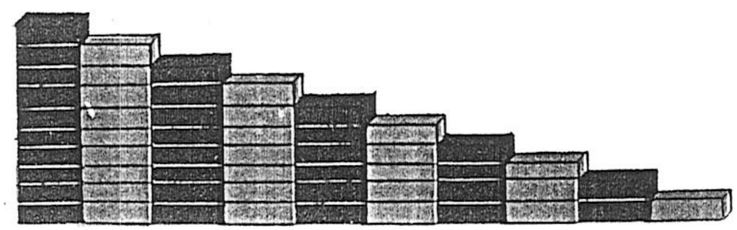


Fig. 1

Un material semejante, pero no marcado con dos colores distintos, sino, donde todos los bastones eran del mismo color, fué usado durante largo tiempo por los niños en un período precedente, cuando efectuaban los ejercicios sensoriales. Los pequeños se habían acostumbrado a distinguir a simple vista las longitudes diversas de los bastones, poniendo uno junto a otro y comprobando, de este modo, que la longitud crecía de un modo uniforme. Los niños que realizaban los ejercicios sensoriales eran de la edad de tres años.

Estos, en cambio, que comienzan a usar el sistema aritmético, tienen ya cuatro años y medio como mínimo y saben escribir, o por lo menos, conocen los signos alfabéticos y componen palabras.

Los niños a esta edad han contado o han oído contar en la vida familiar. Acaso pronuncian el nombre de los grandes números, ciento o mil, sin que tengan en su mente una idea clara de las cantidades equivalentes. En cambio, sí perciben claramente la equivalencia de los números pequeños, porque saben, que tienen una nariz, dos manos, cinco dedos en cada mano etc. Muchas veces habrán pedido tres bombones en vez de dos, sabiendo perfectamente lo que ello significaba.

Con los bastones de la Aritmética que llegan a un máximo de diez, no se pretende hacer una revelación, sino, más bien, ordenar y precisar ideas vagas adquiridas casualmente. Y para precisar estas ideas numéricas se recurre a un instrumento que fué ya utilizado en el período primitivo de los ejercicios sensoriales.

Basta iniciar al niño, con simplicidad, para que rápidamente se interese por el sistema numérico. En cada bastón se puede contar la suma de las unidades que van sucediéndose una a otra hasta el extremo del bastón comenzando por :

uno.
uno, dos.
uno, dos, tres.
uno, dos, tres, cuatro.
uno, dos, tres, cuatro, cinco.
uno, dos, trtes, cuatro, cinco, seis.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Lo última palabra a que se llega, se refiere a la suma de las unidades contenidas en el bastón, e indica el total. Esta palabra puede convertirse en un nombre que indica el bastón ; bastón de cinco, de siete, etc. O simplemente, el cinco, el siete y así sucesivamente. De ese modo, resultan varios nombres en relación con bastones de distinta longitud. Los bastones representan cantidades que se llaman.

El hecho de obtener, con relación al nombre del número, la cantidad correspondiente en una apariencia rígida y clara, facilita la comprensión de los conceptos de la unidad y de las relaciones recíprocas entre diversas cantidades, así como las relaciones entre éstas y la unidad.

En efecto. Los bastones colocados en gradación no sirven para contar solamente, sino que hacen ostensible la relación entre las va-

rias cantidades indicadas por los números y su lugar recíproco, en relación con dicha cantidad. El uno, es el primero, y el diez, el úl-

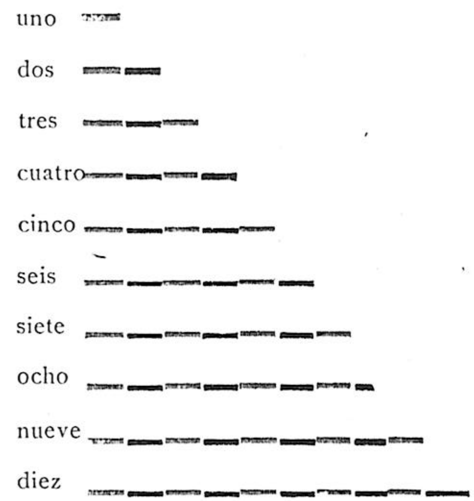


Fig. 2

timo ; el tres ocupa el tercer lugar y está entre el dos y el cuatro, etc. Son, pues, las relaciones entre ellos, y no solamente el contar, las que hacen el sistema interesante.

Para fijar bien este cuadro, de una importancia tan fundamental, conviene unir a su enseñanza el conocimiento de los símbolos numéricos y ponerlos en relación con las cantidades.

Un material, análogo al usado para enseñar las letras del alfabeto, está unido al sistema. Se trata de diez pequeños cartones lisos, sobre cada uno de los cuales, está fijada en papel de lija una de estas cifras : 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Dichos números se hacen palpar repetidamente en el sentido de la escritura mientras se aprende el nombre : uno, dos, tres, etc. Así queda en la memoria la figura de la cifra en relación con su nombre y, a la par, se acostumbra la mano a reproducir el trazado de cada una ; esto es, a escribirla.

El hecho de que a todo símbolo numérico pueda hacerse corresponder la cantidad total que aquel representa, bajo la forma de un objeto único, al igual que la cifra es un único signo, hace clara y fácil la asociación entre el símbolo numérico y la cantidad. Basta colocar, entonces, la cifra junto al bastón correspondiente para lograr, con presteza, la memorización de su correspondencia.

Del sistema, puesto en orden, pueden derivar estudios hechos a base de descomposiciones y recomposiciones, de cotejos, etc.

Se pueden efectuar ejercicios de desplazamiento y de comparación, ya sea con todo el sistema o con una parte de él, sea con los bastones largos o con los cortos. Lo único que hace falta vigilar es, que todas las combinaciones sean dentro de la decena, es decir, no pasar del bastón mayor, porque ello traería consigo una complicación en lugar de un progreso.

Es evidente, que cada vez que se unen varios bastones, se hace una suma y cada vez que esta suma se descompone, se efectúa una sustracción.

El interés lo despierta, por ejemplo, el encontrar dos bastones que, unidos, constituyen la longitud de otro bastón mayor. Por ejemplo: 4 + 3 = 7, de los cuales, volviéndolos a su estado anterior, se obtiene:

$$7 - 3 = 4$$

o también $7 - 4 = 3$

Si después, estos ejercicios primitivos se llevan a cabo con todo el sistema, uno de los más claros consiste en la composición de todas las combinaciones iguales a diez, poniendo el 1 sobre el 9, el 2 sobre el 8, y así sucesivamente, es decir, realizando las siguientes sumas:

$$9 + 1 = 10$$
$$8 + 2 = 10$$
$$7 + 3 = 10$$
$$6 + 4 = 10$$

Inmediatamente surge el límite, dentro del cual, se encuentran las posibles combinaciones. Se pueden efectuar cuatro combinaciones solamente o sea cuatro bastones de diez, iguales al mayor de la serie y además de estas cuatro combinaciones quedan aún el bastón entero de diez y el bastón de cinco.

A un adulto, este método de los bastones, puede resultar tan interesante como a un niño. El adulto podría observar, por ejemplo, que la cantidad de bastones iguales es de 5 o sea la mitad de 10 y sobra un bastón que es el de 5. Agrupando en dicha forma los bastones, resulta evidente, que la suma de las unidades por ellos indicada es igual a

$$5 \times 10 + 5 = 55$$

es decir, que se ha encontrado un procedimiento que facilita singularmente la suma de todas las unidades contenidas en el sistema. Para ello, basta multiplicar el número mayor por su mitad y añadir después dicha mitad

Esto, como se ve claramente, permite efectuar de un modo rápido la suma de la serie natural de los números. Llamando N un número cualquiera, la suma de las unidades contenidas en todos los números que van de uno a N. será

$$\frac{N \times N}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N^2 + N}{2}$$

lo cual nos da la fórmula algebraica de lo anteriormente expuesto. En efecto; en la serie sucesiva de los números crecientes, de unidad en unidad, se pueden componer grupos iguales al mayor, por el mismo procedimiento, esto es, colocando el uno sobre el penúltimo y sobre los sucesivos el dos, el tres, etc.

Es decir, que basándose en el mismo sistema se podrían hacer observaciones y comprobaciones permitidas por una cultura y un desarrollo mental superiores a los del niño. Sin embargo, adultos y niños pueden obtener los diversos resultado con el mismo material. En efecto, el material de bastones representa, de modo claro y sencillo, la relación entre cantidades numéricas sucesivas, partiendo de la unidad. Y esto, es un hecho inmutable. Es el hombre el que varía desarrollándose y el que deduce, de los mismos hechos, diversas consecuencias.

Esto sirve para hacer comprender como es preciso utilizar un material claro y exacto, y alrededor de ello, está después la inteligencia que se desarrolla, haciendo sucesivos descubrimientos.

En el sistema de los bastones están contenidos otros principios, que pueden ser utilizados en lo futuro; dicho sistema presenta como en un núcleo el sistema decimal y juntamente con éste, el sistema métrico, porque, el bastón del 10 tiene un metro de longitud y las unidades en que se descomponen los diversos bastones, son su décima parte o sea el decímetro.

Pero estos particulares, no accesibles aún al niño, permanecen en el sistema sin complicarlo y es evidente, que el desarrollo mental y cultural sabrá descubrir y utilizar más tarde lo que pasó inadvertido en la primera infancia.

MATERIAL DE LAS UNIDADES SEPARADAS

Un segundo material repite el hecho de contar las unidades relativas a los varios grupos de la sucesión numérica de uno a diez, o mejor, de 0 a 9. En este caso, sin embargo, las unidades vienen representadas por objetos separados, todos iguales entre sí y consisten en pequeños husos fácilmente manejables y que, atados en grupos por una cinta, aparecen de un grosor que va en aumento. Tales grupos se deben colocar en dos cajitas, dividida cada una, en cinco espacios y en correspondencia con cada espacio, está escrita una cifra :

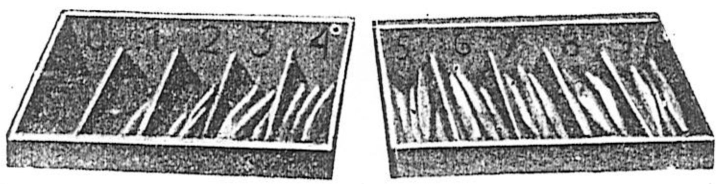


Fig. 3

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El ejercicio consiste en reunir primeramente, en un solo grupo de conjunto, toda la masa de husillos y colocar en cada espacio, contándolos uno a uno, la cantidad correspondiente al número señalado. Concluído el ejercicio y comprobado que no existen errores, cada grupo de husillos se ata con una cinta encarnada. Este ejercicio es casi una comprobación de lo que se aprendió con el sistema de los bastones ; el niño, en efecto, reconoce la cifra y compone por sí mismo el número acumulando las unidades (de cualquier clase) cuya suma aquélla representa.

Además, el material en este caso, ofrece al niño, como punto de partida, las cifras, los símbolos numéricos escritos sobre los espacios de las cajitas, y no las cantidades, como en el caso de los bastones. Las cifras están representadas todas ellas, pero no existe el 10 que,

en cambio, existía en el sistema de los bastones, y esto sucede porque el material expone a la atención del niño las cifras en sí. Estas van como indicaciones concretas del uoo al nueve. Antes de todas está el cero, que en sí mismo no representa cantidad alguna, como lo comprueba el hecho de que el primer espacio que a él corresponde permanece vacío. Las cifras son en número de diez, pero los grupos de husillos, son nueve solamente.

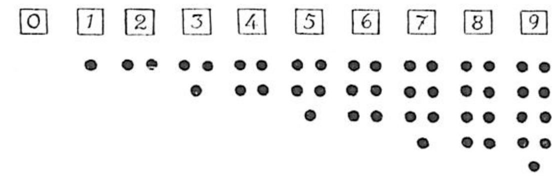


Fig. 4

Existe, finalmente, un tercer material consistente en diez pequeños carteles separados, sobre cada uno de los cuales aparece escrita una cifra respectivamente, o sea :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

y 45 pequeños objetos separados que pueden ser pequeños marcos de color o pequeños juguetes iguales, como muñequitas, pequeñas bolas, etc.

El ejercicio consiste en colocar primeramente los carteles—que están mezclados—según el orden normal de sucesión y después situar al pie de cada cifra, los objetos, en la cantidad correspondiente. Este ejercicio es una comprobación total de lo aprendido, es decir, ver si se conocen las cifras en su serie numérica y en la cantidad que representan. Para colocar un nuevo concepto al alcance del niño, conviene colocar en doble fila los objetos, lo cual es posible solamente, en los números pares, mientras en los impares, queda uno sin compañero y, de este modo, se le proporciona instintivamente la noción de los números pares e impares.

Los tres ejercicios recuerdan la lección psicológica de los tres tiempos (Véase, *Pedagogía Científica* de la misma autora).

En efecto ; en el primer tiempo está la representación de la cosa en sí misma (la cantidad y los signos numéricos).

En el segundo tiempo, se pide cual es la cantidad correspondiente a la cifra.

En el tercer tiempo, se pide tanto la sucesión de los números, como la cantidad correspondiente a ellos.

Con esto se cierra el periodo preelemental para la Aritmética. (Para mayores detalles véase la *Pedagogía Científica* precitada).

LA ARITMETICA EN LA INSTRUCCION ELEMENTAL

SISTEMA DECIMAL

El fundamento, sobre el cual nos basamos para ordenar las cantidades numéricas, es el sistema decimal. Su introducción entre nosotros, que data de los árabes, en la edad media, constituye una facilidad en el cálculo, tan sorprendente, que permite contar, incluso al niño, grandes cantidades. El cálculo, después, no es sino una ulterior abreviación de la operación de contar.

Como en toda obra de simplificación, lo que representa su clave, es un grado mayor de claridad alcanzado. Simplicidad y claridad, son, precisamente, las cualidades necesarias para colocar los hechos al alcance del niño.

Por esto, el primer paso debe ser : facilitar al niño la construcción del sistema decimal en sí mismo y no el contar ni calcular, porque estas dos cosas, se consiguen con los fáciles mecanismos que ofrece el sistema decimal.

Es evidente, que esto no podría constituir la primera iniciación de la aritmética, mas para ello, hubo un período preparatorio, en el cual el niño, ha contado y calculado dentro de la primera decena y ha leído y escrito los signos numéricos. Las primeras bases del sistema decimal le fueron proporcionadas en el período preelemental, al contar las cantidades dentro de la primera decena, y al comprobar que los signos que las representaban eran nueve más el cero. Estos dos conocimientos son la raíz, el fundamento, de todo el sistema decimal. La clave del sistema decimal consiste en el juego final, entre el nueve y el diez. Es esta clave la que sitúa la organización de las distintas clases de unidades en un cuadro sistemático interesantísimo. En efecto, apenas se supera la cantidad nueve de una unidad, no existen cifras para representar el nuevo grupo y precisa comenzar de nuevo utilizando la cifra uno. Es en el 10 donde aparece esta dificultad y de ello la necesidad de recurrir a un componente. El 10 no es, sino, un retorno a contar nuevamente de uno a nueve. Existe una especie de paso del Rubicón que nos obliga a

dar un salto decisivo a otra categoría de unidad. Y así, con nueve cifras solamente se organiza la agrupación de las unidades en jerarquías sucesivas que pueden repetirse sin límite. El primero de cada jerarquía es un uno de mayor dimensión, o lo que es igual, de mayor valor.

C.	D.	U.
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Las tres líneas verticales de cifras, colocadas bajo las letras C. D. U. indican jerarquías diversas de unidad. Por ejemplo : unidad simple en U ; decenas en D ; centenas en C. son, sin embargo, siempre las mismas cifras las que las representan sin otra diferencia que su posición. Es pues, la posición jerarárquica de las cifras la que indica los diversos valores correspondientes, pero, en cuanto al valor absoluto se refiere, es el mismo en las tres posiciones indicadas. Existe, pues, un valor-absoluto en el sistema decimal que no varía con el relativo representado por las cifras ; se pueden, pues, sumar los números de la línea C con la misma facilidad que los de la línea U y el contar o el calcular está siempre limitado entre aquellos pocos números, es decir, del uno al nueve. En efecto, si se considerasen los maestros como unidades simples, los directores como decenas y los inspectores como centenas, no se tropezaría con mayor dificultad para contar nueve inspectores que para contar nueve maestros. Lo único que los diferencia es su diversa importancia social, pero esto no influye en la materialidad de contar de uno a nueve.

Siendo así, precisa, ante todo, situar las jerarquías y darse cuenta exacta de la importancia, de su «valor», para no sufrir error, para no cometer la falta de tratar un inspector como simple maestro o la torpeza de dirigirse a un maestro como si tuviera las facultades de un inspector. Todo ello pues, se reduce a dos cosas fundamentales ; el alto de una jerarquía a otra, cuyo secreto está en el 10 y la exacta apreciación de las jerarquías de los números.

La diversa posición de los números se denota colocando, sucesivamente, un cero a cada salto jerárquico ; uno, diez, ciento, indican posiciones como las señaladas en las líneas U. C. D.

Hacer asequible a los niños el sistema decimal, por medio de un material, es cosa clara y práctica y de una simplicidad, tan evidente, que el sistema decimal puede convertirse en un juguete propio para niño. Sin embargo, no es un juguete que se le ofrece, sino un material exacto de estudio que hará superar todas las dificultades que encuentran los niños en las escuelas corrientes, donde se enseña a contar y calcular sobre la base del sistema decimal, sin proporcionarle los conocimientos sobre los cuales aquél se edifica.

EL MATERIAL DEMOSTRATIVO DEL SISTEMA DECIMAL

El material que proporcionamos a los niños, para hacerles comprender el sistema decimal, es triple ; está compuesto : de objetos, de cifras numéricas y de palabras.

Los objetos son perlas de color.

Por ahora nos ocuparemos, solamente, del que sirve para demostrar prácticamente la construcción del sistema decimal.

Consiste en perlas sueltas y además en pequeños bastones de diez perlas, enfiladas y fijas sobre un alambre.

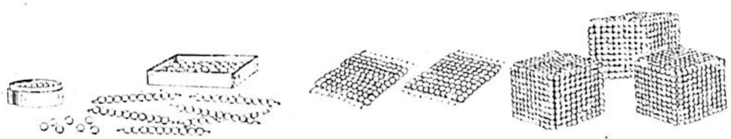


Fig. 5
Material del Sistema Decimal
(elementos)

Además existen los cuadrados de perlas construídos con diez bastones de los anteriores, unidos entre sí y formando un solo objeto, que es un «cuadrado de diez» o sean cien perlas. Y finalmente, un cubo construído colocando uno sobre otro, diez de los cuadrados anteriores, convenientemente ligados y constituyendo un solo objeto (fig. 6). Se da un solo cubo de perlas como punto de llegada y límite del sistema.

De cada uno de los objetos indicados en los primeros tres grados, existen en número de cincuenta y cinco que es, precisamente, la suma de las unidades contenidas en la serie numérica de uno a nueve. El material se dispone del modo siguiente (fig. 7).

Unido al material de perlas está el de cifras. Este consiste en una serie de carteles, cuyas dimensiones, son proporcionadas a la jerarquía de los números, y para las varias jerarquías, tienen los números distintos colores. Los pequeños carteles para las nueve unidades son iguales entre sí e idénticos en un todo a los usados en la primera numeración (en la que se utilizaban los bastones de madera) ; los carteles para las nueve decenas, en cambio, tienen doble anchura, porque

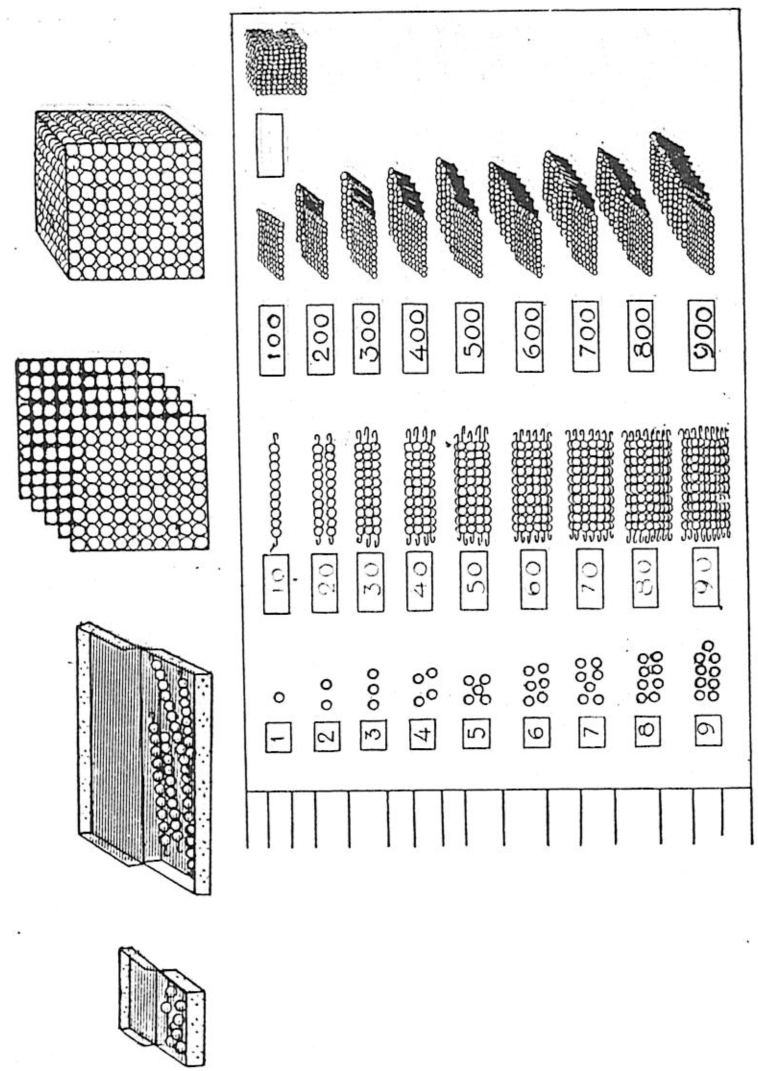


Fig. 6
Exposición del Sistema Decimal en su totalidad

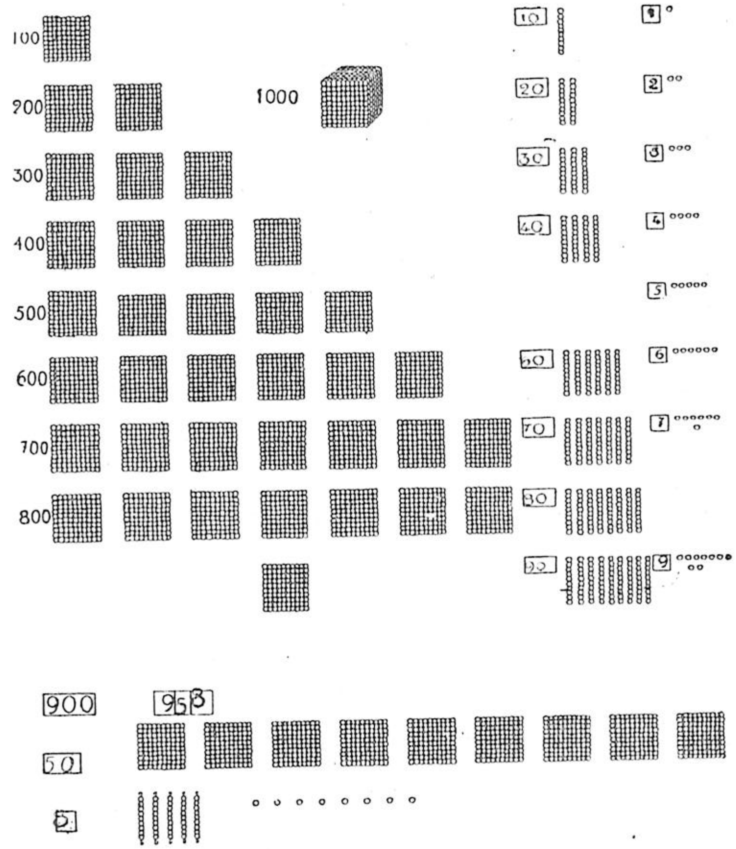


Fig. 7

Ejemplo de composición de un número : 958, utilizando los componentes del gran cuadro del Sistema Decimal

necesitan espacio para contener el cero ; los de las centenas tienen triple anchura que los de las unidades, para dejar espacio para dos ceros, y finalmente, el millar, necesitando espacio para tres ceros tiene cuatro veces la anchura de los de las unidades (cuadros A-B pág. 25).

Los dos materiales, es decir, las perlas del sistema decimal y los carteles, se prestan a combinaciones fáciles y claras que ofrecen la posibilidad de un trabajo riquísimo en ejercicios y por ello a un lar-

go estudio. Se explica como, una vez despertado el interés, el sistema decimal presentado en esta forma se convierta en fuente de actividad.

Uno de los ejercicios más sencillos es el de componer *separadamente* cuadros portátiles, colocando en fila las cantidades de la misma jerarquía y los números correspondientes de los carteles, según indica la figura 6, que los presenta todos en un conjunto.

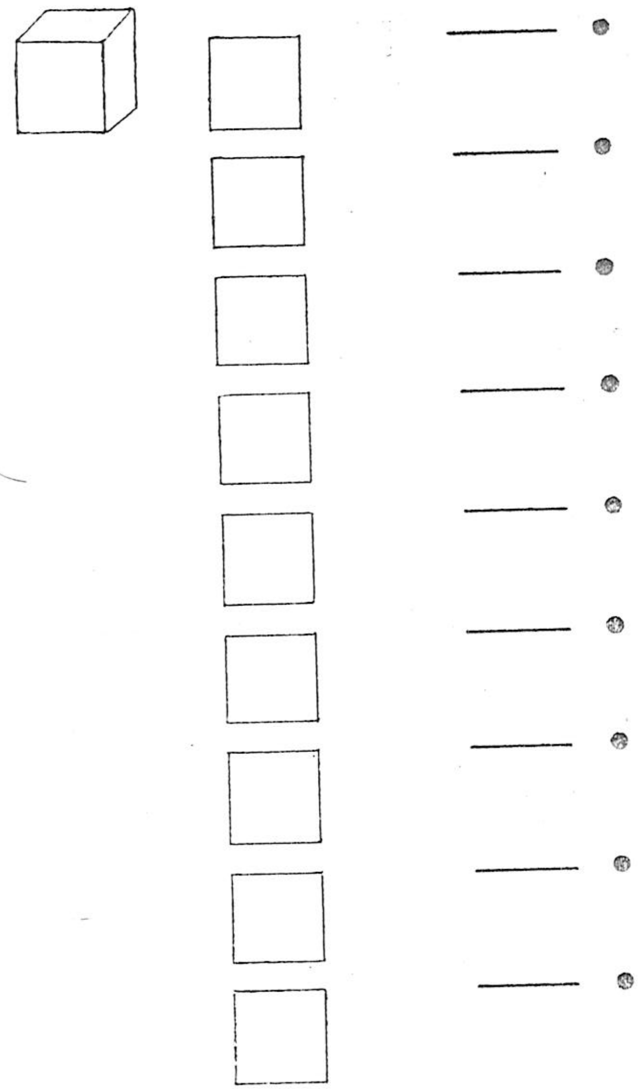
La composición de estos cuadrados presenta la misma facilidad, ya se trate de perlas sueltas, de bastones o de cuadrados. Y cuando se sepa contar de uno a nueve, es igualmente fácil disponer uno debajo del otro los carteles, tengan o no las cifras igual número de ceros a continuación.

Los niños, pues, realizando ejercicios análogos en un todo a los ya expresados en el período preescolástico, cuentan indistintamente unidades, decenas, centenas o millares. Es decir, que esta operación de contar no tiene dificultades diversas y sucesivas a medida que las cantidades son mayores, sino que todo se aprende de un modo simultáneo y uniforme.

COMPOSICION DE LOS GRANDES NUMEROS

Un segundo ejercicio consiste en la composición de los grandes números. Precisa para esto, exponer el material en forma que reproduzca la *idea* del sistema decimal, no la asociación de números con objetos correspondientes como en el cuadro 6.

No se trata de «contar» utilizando un sistema cualquiera, si no que, lo que se pretende, es representar la idea de que para cada jerarquía, existen únicamente nueve unidades, lo cual, no puede ser representado con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, porque solamente se trata de *unidades* y sería preciso escribir filas de uno. Pero puede ser representado con los objetos, con la siguiente disposición.



En cambio, usando la serie de cifras, se indican las sucesivas agrupaciones desde el 1 al 9, ya sea con los carteles superpuestos, (A) o bien, separados (B), como indica la siguiente figura.

2

(A)

1	1	1	1
	2	2	2
	3	3	3
	4	4	4
	5	5	5
	6	6	6
	7	7	7
	8	8	8
	9	9	9

B

1 0 0 0	1 0 0	1 0	1
	2 0 0	2 0	2
	3 0 0	3 0	3
	4 0 0	4 0	4
	5 0 0	5 0	5
	6 0 0	6 0	6
	7 0 0	7 0	7
	8 0 0	8 0	8
	9 0 0	9 0	9

Dada esta separación entre cifras y objetos, se puede proceder a una *asociación* entre sí, demostrando que cualquier número, (en nuestro caso del 1 al 1999) se puede componer con el limitado número de objetos expuestos en el cuadro 8. Con ello se demuestra la clave compleja del sistema decimal.

Enunciamos un número, por ejemplo, nuevecientos cincuenta y ocho. Este se puede componer sacando del cuadro del sistema decimal las cantidades correspondientes ; o sea

9 cuadrados de perlas (ciento)
5 bastones (diez)
8 perlas sueltas que se encuentran alineadas en la octava línea del cuadro de las unidades simples.

Por lo que se refiere a los carteles de los números correspondientes, la selección es aún más sencilla.

Si se superponen después los carteles, de modo que cada número ocupe el lugar que le corresponde, es decir ; que el cincuenta cubra los dos ceros de la centena y el ocho el de la decena, resulta el número siguiente :

958 que se descompone en 900
50
8

He aquí pues, cómo, de una manera clara, se lleva a cabo la descomposición de los grandes números, tanto por lo que se refiere a las cantidades efectivas con los relativos agrupamientos de unidades según el sistema decimal, como por lo que se refiere a los símbolos numéricos que representan. Los números, después, se descomponen distinguiendo los millares, las centenas, las decenas y las unidades y así resalta el hecho de que cada gran número es una suma de grupos, representado cada uno por las cifras que están una junto a otra.

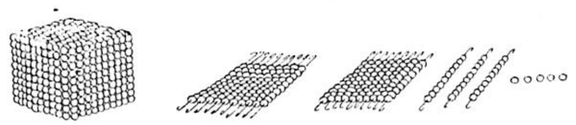


Fig. 8
Composición del número 1235

Véase el número: 1235 representado por el material (fig. 8) y por los carteles (fig. 9).

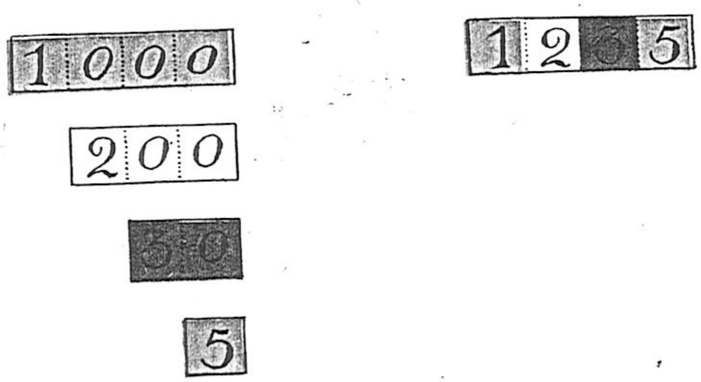


Fig. 9

Es la posibilidad de llegar pronto a los grandes números, o mejor, de comenzar por los grandes números, lo que despierta un inten-

so interés. El poderlos componer y analizar, moviendo los objetos, incita a la repetición del fascinador ejercicio.

El sistema decimal, presentado en su conjunto, es una especie de red fundamental sobre la que se desarrollan, poco a poco, las particularidades que aclaran y facilitan cada vez más su estudio. De igual modo que quien debe llevar a cabo un fino bordado comienza por el dibujo en su conjunto y después va rellenando con los detalles.

El estudio de los detalles puede ser hecho simultáneamente. No precisa una sistematización ; lo único necesario es estudiar «todos» los detalles. Así, volviendo al mismo ejemplo, quien ejecuta un bordado, dibujado en su conjunto, puede principiar por donde le parezca más conveniente ; comenzando por una parte y siguiendo después por otra que no esté ligada con aquélla. Análogamente, los ejercicios de detalle que se refieren al sistema decimal, pueden llevarse a cabo simultáneamente, sin necesidad de precedencia, porque están guiados por un conjunto preestablecido.

Los ejercicios que se llevan a cabo paralelamente se llaman ejercicios paralelos.

EJERCICIOS PARALELOS

Se llaman pues, ejercicios paralelos, los que pudiendo desarrollarse simultáneamente se refieren a detalles de un mismo conocimiento fundamental o aspectos diversos, bajo los cuales, los mismos detalles pueden considerarse. El ejercicio debe tener siempre una finalidad determinada en sí mismo, para que logre ser interesante. Ello sirve, no sólo para profundizar los conocimientos, sino para hacerlos más claros, mientras que los detalles aprendidos fuera del conjunto a que se refieren, servirían los más de las veces para enturbiar la visión de ese conjunto.

El paso de una a otra decena.—Uno de los ejercicios paralelos consiste en ilustrar los pasos de una decena a otra. El material de perlas adaptado a este ejercicio representa (análogamente a lo que representaban los bastones) los grupos de las unidades de uno a nueve, reunidos en un conjunto indisoluble. Hay pues, pequeños bastones de dos perlas, de 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 respectivamente, enfiladas en un alambre que reune el grupo. Además, los números están representados por perlas de diversos colores ; rojo, el uno, verde el dos, negro el tres, amarillo el cuatro, azul el cinco, marrón el seis, blanco el siete, morado el ocho, azul oscuro el nueve y anaranjado el diez. De ese modo todas estas perlas tienen una apariencia distinta de los pequeños bastones de las decenas, que son todos de color anaranjado y que se utilizaron para construir el gran cuadro del sistema decimal donde, no los colores, sino la forma de agruparse (punto, línea, cuadrado, cubo), constituyen el medio de distinción.

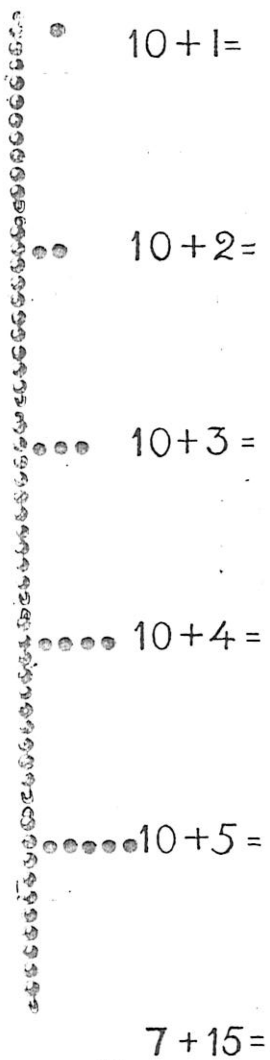


Fig. 11

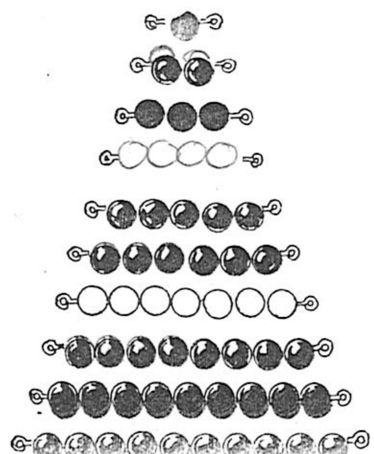


Fig. 10

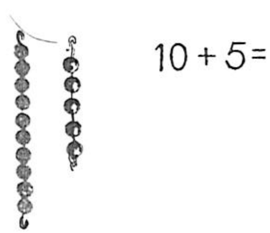


Fig. 11 (a

El primer ejercicio consiste en la construcción del cuadro, que comprende las combinaciones de la decena con los varios grupos de unidades; es decir, junto a los pequeños bastones de decenas, colocados uno debajo del otro se colocan, primero la perla de la unidad y después, la serie de los pequeños bastones inferiores a diez en su sucesión natural.

Aquí se ve claramente que más allá del nueve no hay combinación posible entre la decena y los grupos de las unidades; pero comienzan a acumularse sobre la decena y entonces hay que concluir colocando dos bastones anaranjados, uno junto a otro.

Un ejercicio equivalente se lleva a cabo con las cifras. El material consta de una serie de nueve dieces escritos uno debajo del otro dentro de un marco (fig. 12 (a); en el fondo queda un espacio vacío. Anexos a este cuadro existen una serie de pequeños cartones suficientes para cubrir el cero de los dieces, que se pueden colocar dentro del marco, introduciéndolos a través de un lado de éste que presenta una hendidura ad-hoc. Existe, además, un cartel donde está escrito el número veinte. Se coloca el cartel del uno sobre el cero del primer diez, el del dos sobre el cero del segundo, etc., hasta que cubierto con un nueve el último cero, no existe otra cifra para combinar con el diez. A partir de aquel instante, sólo procede un cambio total. El espacio vacío ha de cubrirse precisamente con el veinte.

Se ha pasado a otro grupo de decenas.

11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Fig. 12

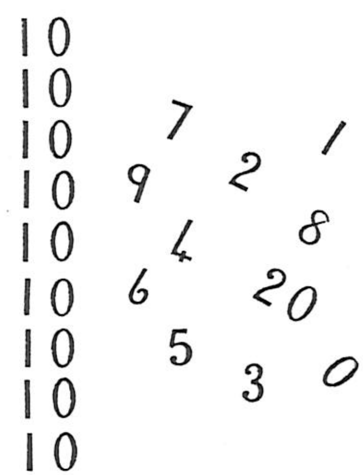


Fig. 12 (a

LAS PALABRAS

Al anterior ejercicio hay que asociar el conocimiento de las palabras. La máxima dificultad de los términos es la relación a este grupo de paso del diez al veinte, porque la composición de las palabras que se refieren a la decena y a las unidades que a ella se unen, oculta los términos componentes haciendo en la fusión palabras nuevas. Por ello, esta parte puede ser enseñada de memoria, valiéndose de ejercicios de composición de palabras realizadas por medio de pequeños carteles en que la sílaba *ce* está siempre compuesta en el mismo color, mientras que las otras partes de la palabra (que indican el grupo de unidades que está asociado a la decena) está compuesta con color diverso. Esto hasta el número quince, pues a partir del diez y seis se invierten los términos.

De este modo tendremos:

rojo		*negro*	*negro*				*rojo*
on	—	ce	diez	—	y	—	seis
do	—	ce	diez	—	y	—	siete
tre	—	ce	diez	—	y	—	ocho
cator	—	ce	diez	—	y	—	nueve
quin	—	ce					

A la serie sigue el veinte, palabra que se diferencia en absoluto de las que le preceden en la numeración. A continuación del nueve, pues, también las palabras demuestran que el paso gradual ha concluído y se entra en un nuevo grupo.

Otros ejercicios.—Otro ejercicio análogo es el que puede llevarse a cabo dejando fija la misma decena y sustituyendo junto a

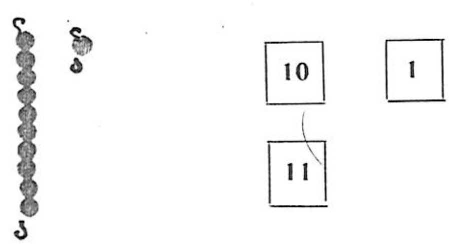


Fig. 13

ella los grupos sucesivos de las unidades. Este ejercicio puede realizarse con las perlas y también con el sistema de los bastones. En todo caso y para hacerlo interesante precisa el que se le acompañe de los carteles. Se usa para ello una parte de los carteles que pueden superponerse, es decir, el diez y todos los carteles de las unidades, desde la unidad hasta nueve. Cada sustitución de la cantidad está acompañada de la correspondiente sustitución de las cifras.

Se coloca, pues, una perla encarnada junto a un pequeño bastón de diez, mientras en el cartel del diez el cero se cubre con el cartel del uno y, de ese modo, se siguen efectuando las simultáneas agregaciones y sustituciones; es decir, permaneciendo fijo el bastón de diez se cambia la perla del uno con la pequeña asta del dos, mientras por otra parte, sin tocar el cartel del diez, viene a cubrir el cero el cartel del dos, y así se procede uniformemente hasta el nueve.

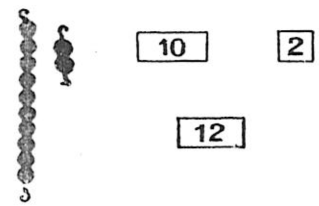


Fig. 14

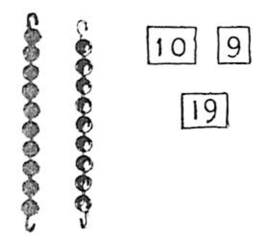


Fig. 15

Al llegar a dicho límite no se puede continuar del mismo modo, porque el pequeño bastón o asta siguiente al de nueve, no es sino una nueva decena que se coloca junto a la primera y en cuanto a los carteles, precisa dar de lado a los usados hasta entonces, para buscar el de 20.

Todos los ejercicios anteriores refuerzan el concepto clave del sistema decimal que actúa sobre el punto de paso de una decena a otra, del nueve al diez. Después del nueve el puente ha concluído: es la nueva decena que comienza.

He aquí un material, todo de cifras (fig. 17) que sirve, precisamente, para probar una y otra vez el mismo hecho. Consta de dos marcos iguales como indica la figura; la separación en dos partes está hecha para hacer más visible toda la serie y también para ma-

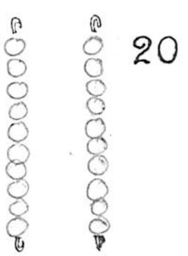


Fig. 16

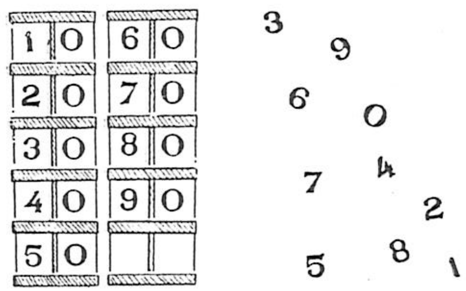


Fig. 17

nejar con más facilidad el material. En un marco están dibujadas las cinco primeras decenas, o sea los números 10, 20, 30, 40, 50 y en el otro las cuatro decenas sucesivas, 60, 70, 80, 90. Acompaña al material de marcos la serie de los nueve pequeños carteles que llevan las cifras de las unidades. Estos se pueden hacer resbalar dentro del marco para cubrir el cero. El ejercicio consiste en contar, sustituyendo las nueve cifras de los pequeños carteles, según el orden material numérico, sobre el cero del diez para formar sucesivamente los números

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

Al llegar a este punto precisa formar el veinte y comienza de nuevo en la misma forma para componer sucesivamente los números

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y así sucesivamente hasta el fin.

Son siempre los mismos pequeños carteles los que sirven de puente entre el 10 y el 20, como entre el 20 y el 30, como entre el 80 y el 90. Cuando se llega al noventa y nueve no es posible continuar con el material. Los cuadros son demasiado estrechos y el número siguiente—el 100—constando de tres cifras no cabría. Aquella unidad que falta y que nos hace detener es una clave más importante que la que nos permitía últimamente el paso de una a otra decena. Aquí se trata también de un simple *uno*, pero esta unidad no hace saltar, de una en una, las decenas, sino que lleva consigo una entera jerarquía que requiere para sí mayor espacio. Es el paso de las decenas a las centenas.

Las decenas que se siguen una a otra son las que guían. Y también las palabras demuestran; diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa. En cambio, los puntos de paso—salvo entre las dos primeras decenas, que por ello han exigido un estudio aparte—se distinguen con palabras uniformes correspondientes a la unión sucesiva de las nueve unidades junto a cada decena; veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, etc. Y así se repite sucesivamente para cada nueva decena, justamente como sucede para la sustitución de los nueve pequeños carteles; cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete, ochenta y tres, ochenta y seis. Una verdadera suma de palabras.

Los precitados ejercicios aclaran y facilitan, pues, no sólo la comprensión del sistema decimal, sino también el mecanismo de contar, el cual, debe hacerse sobre la base del gran cuadro del sistema decimal mostrado al principio, y los pasos, no son sino detalles, puentes uniformes que van de uno a otro grupo. Es la serie del uno al nueve que actúa y una vez estudiado el mecanismo no hay más que repetirlo; los grupos jerárquicos que representan el fundamento y la guía de la numeración deben, por ello, ser estudiados antes y en sí mismos. Entonces, la operación de contar será cosa sencilla e inconfundible.

En cambio, en las escuelas corrientes se enseña a contar linealmente, sin poner de relieve los puntos fundamentales y haciendo oscuro y fatigoso dicho ejercicio. Se dice, por ejemplo: «Tal niño cuenta ya hasta cuarenta y cinco, este otro, en cambio, no pasa de treinta y dos. Acaso a fin de año podrá llegar hasta el ciento».

El avance es lento y penoso, el camino es difícil como para quien sigue de noche un estrecho sendero de montaña. En cambio, la visión del sistema en conjunto, separada de los «puentes de paso» da la impresión de mandar un ejército disciplinado en una llanura iluminada por el sol.

Contar linealmente es un ejercicio paralelo.—Contar linealmente es interesante sólo para la inteligencia que posee ya el cuadro dirigente del grupo de las jerarquías decimales.

Partamos de los puntos fundamentales de las jerarquías considerando las unidades que dominan las series del sistema; uno, diez, ciento, mil.

Para el uno, tenemos una de las perlas de color anaranjado; para el diez un pequeño bastón de perlas; para el ciento, un cuadrado construído con diez pequeños bastones de perlas, y para el mil, el cubo construído con diez cuadrados.

Descomposición lineal del cuadrado. La cadena del ciento. — Si en vez de tener las decenas unidas en un cuadrado, las soltamos, conservándolas unidas solamente por las extremidades, obtendremos una *cadena* de cien perlas subdividida en decenas, es decir, en pequeños bastones que se suceden.

La *cadena del ciento* impresiona por su longitud más que el cuadrado por su superficie. Aquella representa el camino de las unidades que van, a través de las decenas, a constituir la centena.

Las unidades pueden contarse *una a una*, efectuándose de este modo la numeración lineal ; uno, dos, tres... nueve, diez, once, doce... treinta y ocho, treinta y nueve, cuarenta, cuarenta y uno... noventa y nueve, ciento.

Es evidente que, conocida la clave de los «pasos» no existe mayor dificultad para contar entre el noventa y ciento que entre el treinta y el cuarenta.

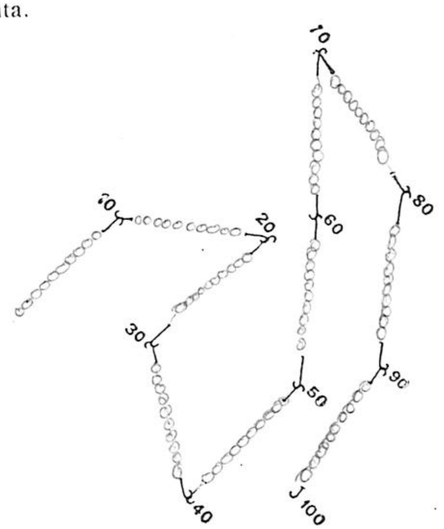


Fig. 18

La descomposición lineal del cubo. La cadena del millar. — El cubo de mil perlas puede descomponerse en diez cuadrados y cada uno de éstos en diez bastones de diez perlas cada uno. Dejando éstos unidos por las extremidades solamente, resulta una cadena larguísima que da una impresión de la cantidad—el millar—más exacta que el cubo. Especialmente, si se compara esta cadena del millar con la de la centena se ve, claramente, la diferencia entre el cuadrado y el cubo.

Doblando diez veces la cadena del millar y estableciendo el parangón con las decenas, resulta la apariencia de diez cuadrados. Si en la proximidad se coloca la cadena del ciento, se ve cómo, a cada bastoncillo de ciento, corresponde un cuadrado en el mil.

La reacción sorprendente de los niños ante este material, es, su constancia en contar exactamente unidad por unidad la cadena del millar. Siendo demasiado larga la operación para realizarla de una

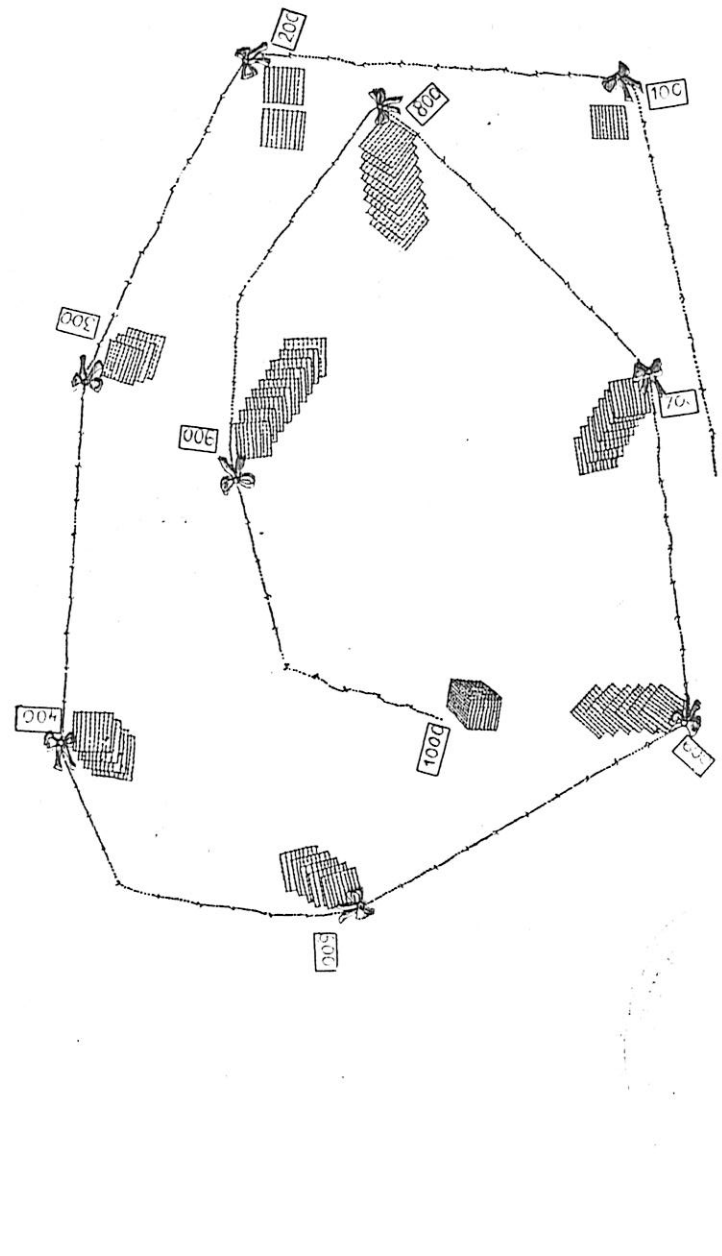


Fig. 19 (1)

vez, los niños la interrumpen, pero no la abandonan. El mismo día, o al siguiente, reanudan la operación a partir del lugar en que habían quedado y siguen contando hasta el fin.

Aquella sucesión de decenas y centenas y la suma de las unidades, una tras otra, les interesa vivamente. Cuentan y cuentan sin cesar desde uno, dos, tres... cuarenta y cinco, cuarenta y seis... trescientos quince; trescientos diez y seis... hasta novecientos noventa y nueve, mil ; cogiendo entre sus dedos una perlas después de otra, como las cuentas de un rosario.

Otros ejercicios paralelos sobre el sistema decimal. —Un ejercicio que puede llevarse a cabo paralelamente al anterior y que sirve para que se hagan casi mecánicamente las pequeñas sumas de unidades preparando los niños para el cálculo mental, se hace por medio del material de perlas que representa los grupos numéricos inferiores a la decena — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, — y que está constituído por perlas enfiladas en alambre, ofreciendo cada grupo un color diverso.

Los pequeños bastones para este ejercicio se usan en gran cantidad. El número que cada uno de ellos representa, se sabe contando las perlas en él enfiladas pero, poco a poco, el color ayuda a reconocer la cantidad, con lo que se elimina el tener que contar las perlas una a una, y cada pequeño bastón indica a simple vista—por su color—el número de unidades que contiene. Esta gran cantidad de pequeños bastones no representa, sino, una mezcla de nueve cifras.

El ejercicio se inicia poniendo en fila una gran cantidad de estos bastones tomados al azar entre el grupo ; se les alinea bien, sea sobre una mesa larga o sobre el pavimento y para que no ocupen un espacio excesivo se les dispone en una línea sinuosa que recuerda el cuerpo de una serpiente.

Se comienza, pues, a contarlos, y apenas se suman diez unidades, se separan los bastones sumados y se les sustituye por un bastón de diez, que son como sabemos, de color anaranjado. Después y a partir del diez se cuenta nuevamente hasta sumar otros diez y he aquí que otro bastón de color anaranjado viene a sustituir los bastoncillos sumados que se separan de

Fig. 19 (2

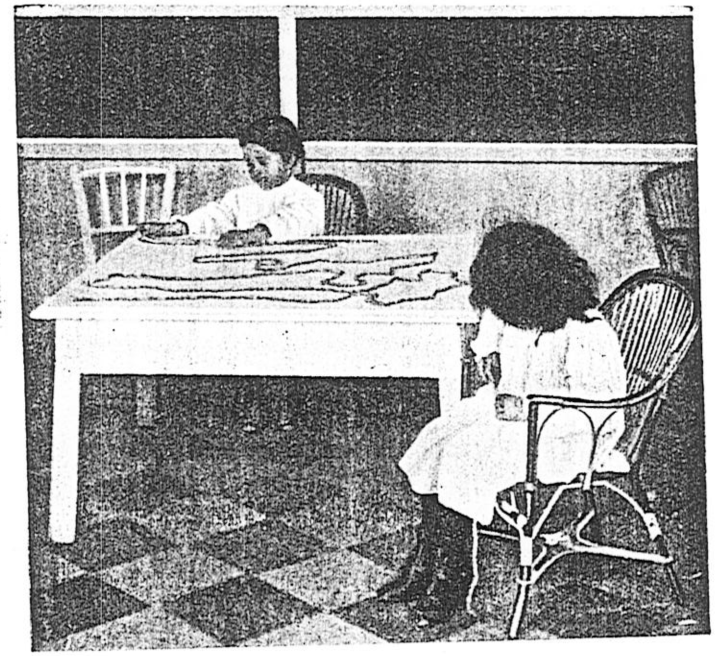


Fig. 20
Una niña cuenta la cadena del millar sobre la mesa, otra sentada en la silla cuenta la de ciento

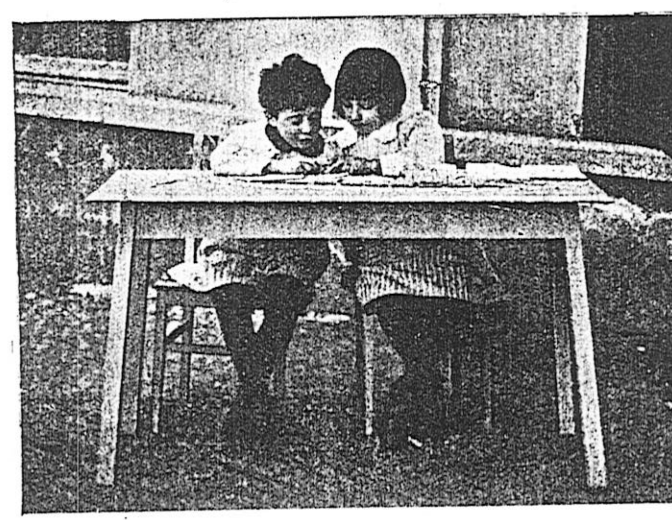


Fig. 21
Comprobando el cálculo sobre la cadena

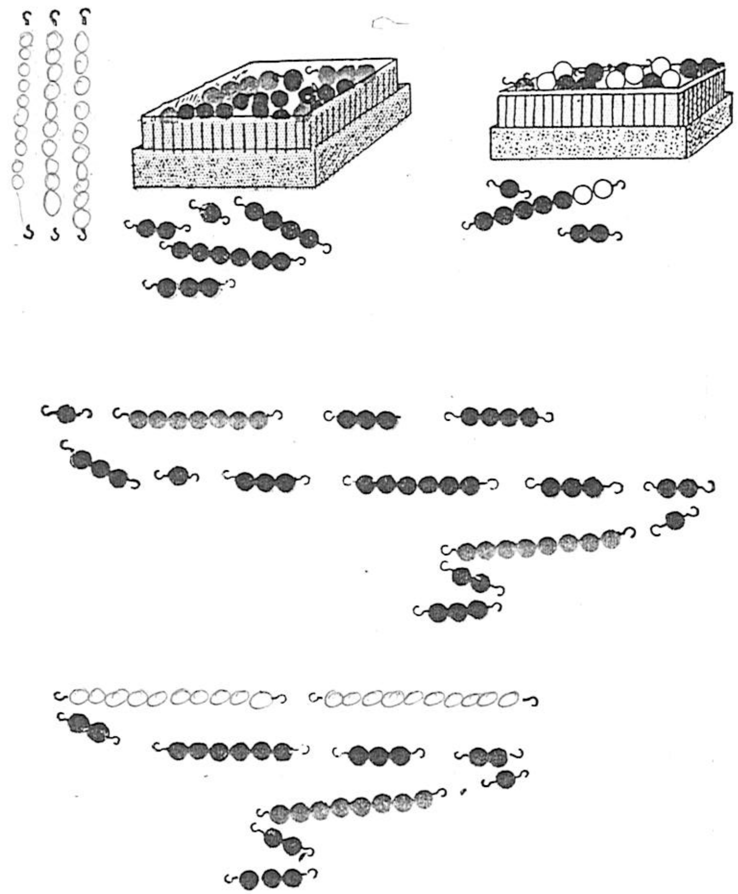


Fig. 22

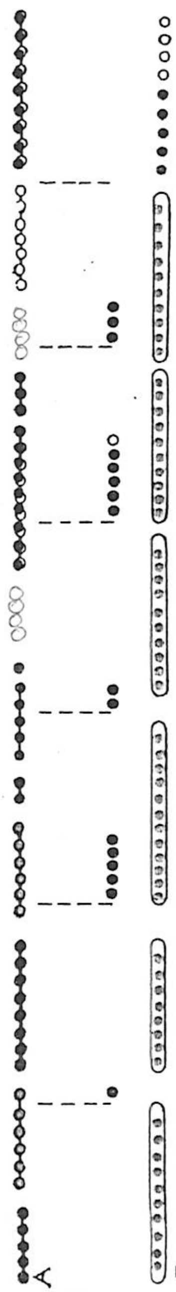


Fig. 23

la figura de serpiente y así se prosigue hasta el fin. Se ve, entonces, que el color anaranjado va devorando aquella fila multicolor y que bastones de igual longitud, todos ellos, van ocupando el lugar de los bastones de distinta longitud. En este caso, el contar ha consistido en transformar en decenas las cantidades menores que están destinadas a fundirse en el diez, base del sistema decimal. El ejercicio pues, consiste en hacer pequeñas sumas en torno al diez, porque cada vez se vuelve a principiar y no se tienen en cuenta los pequeños bastones de diez que se van acumulando a lo largo del camino. Es, pues, un trabajo siempre uniforme que se repite y que concluye por hacer fácil, rápida y mecánica la suma de cifras inferiores a diez. Pero la memorización se logra a través de un largo trabajo de contar unidades y de comprobación de sumas alrededor del diez, es decir, que obliga a reflexionar y a realizar una porción de pequeñas operaciones, de sustracciones que deben realizarse a la par que las sumas, para calcular el exceso que queda después de constituída la nueva decena. Es sobre este detalle sobre el que se desarrolla el ejercicio a través de las variaciones resultantes de los grupos diversos que se encuentran a lo largo de la línea de bastones.

Hagamos una descripción minuciosa de la forma en que se desarrolla el ejercicio.

Supongamos que la línea comienza con los siguientes pequeños bastones: 5 + 6 Fig. 23 (a. Uno es celeste pálido y el otro marrón; la suma es once. Se separan los dos bastones precitados y se sustituyen por otro 10—color anaranjado—más una perla que completa la cantidad comprendida en la suma 5 + 6. Es decir: 5 + 6 = 10 + 1. Este uno pertenece al 6 que fué quitado juntamente con el 5. En efecto: 6 = 5 + 1 y de los dos sumandos, o partes, el 5 sirve para formar el 10 y el 1 representa el resto. Es decir: 6 — 5 = 1. Este 1 permanece y debe contarse después.

Ahora, prosiguiendo, supongamos que los otros pequeños bastones que siguen a las precitadas sean 8 y 6; uno de color violeta y otro de color marrón. La suma que se presenta primeramente es 1 + 8 = 9 (donde el 1 es el resto del último 6). Como el 9 no llega a hacer precisa la sustitución, se continúa la suma 9 + 6 = 15 = 10 + 5. Se ponen pues, aparte el 8, el 6 y el 1 de resto anterior y se substituye el total por un bastón de 10 más uno de 5. Este 5 es el resto del 6 que se invirtió en completar una decena — 6 = 5. El resto, 5, se sumará a los bastones siguientes y se proseguirá la operación.

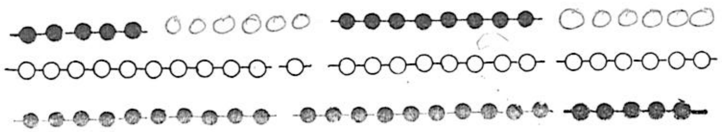


Fig. 23 (a

Estos restos deben ser distintos de los pequeños bastones que constituyen la línea de la serpiente. Representan lo que materialmente se puso aparte (ya que el bastón utilizado parcialmente no se podía romper) pero que queda aún por contar. Para esta representación de restos existe un material complementario que evita toda posibilidad de confusión. Este material consiste :

El uno. — Una perla negra.
El dos. — Dos perlas negras.
El tres. — Tres perlas negras.
El cuatro. — Cuatro perlas negras.
El cinco. — Cinco perlas negras.
El seis. — Cinco perlas negras y una blanca.
El siete. — Cinco perlas negras y dos blancas.
El ocho. — Cinco perlas negras y tres blancas.
El nueve. — Cinco perlas negras y cuatro blancas.

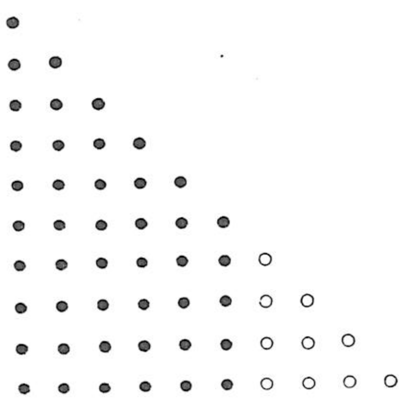


Fig. 23 (b

Esta distribución en blanco y negro facilita la selección de piezas, que se recononcen a primera vista.

Representemos la continuación de las operaciones en una fila más larga de números :

5 + 6 + 8 + 6 + 2 + 5
+ 1 + 4 + 9 + 3 + 4
+ 7 + 9.

La figura anterior representa los cambios acaecidos en torno al 10. Las cantidades indicadas fueron sustituídas por decenas (línea B) mientras entre ambas líneas se ven los restos de los bastones separados, restos que van sumados en los bastones sucesivos. La suma es 69, es decir : 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9.

Algunas veces, los niños construyen una «serpiente» de gran longitud, correspondiente a muchas centenas.

Cuando el ejercicio ha concluído se van contando los bastones de las decenas, poniéndolos uno junto a otro, verticales, y apenas se reúnen diez bastones, se sustituyen por un cuadrado de cien perlas y así se prosigue hasta el fin. La suma total resalta fácilmente del conjunto de grupos decimales.

Una prueba de la operación realizada, se puede llevar a cabo recogiendo todos los bastones separados y reuniéndolos dos a dos, en forma, que cada pareja constituya una decena. Por ejemplo : los números de la suma 5 + 6 + 8 + 6 + 2 + 5
+ 1 + 4 + 3 + 4 + 7 + 9 se agruparán en la siguiente forma :

5 + 5
6 + 4
6 + 4
8 + 2
7 + 3
9 + 1
9

y en cada grupo se verifica su sustitución por una decena. En este caso se comprueba una perfecta correspondencia :

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 9

De este modo se han estudiado todas las descomposiciones del diez, en los dos grupos componentes, repitiendo lo que ya se había hecho con el material de los bastones

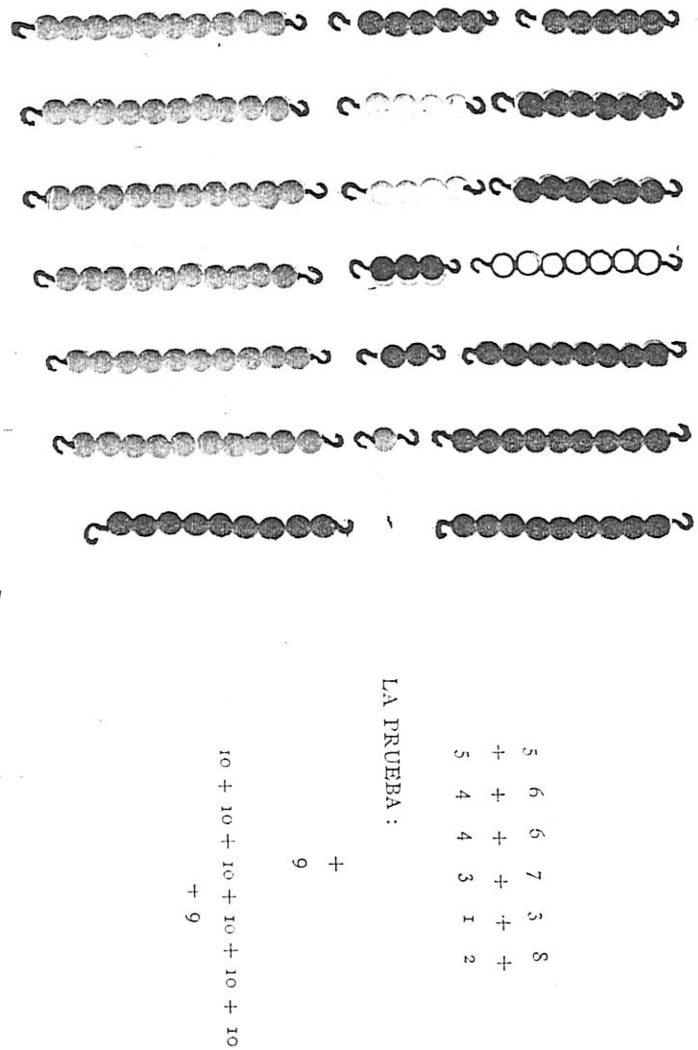


Fig. 24

El ejercicio de la «serpiente» obliga a fijar la atención sobre la dificultad de contar a través del diez; esta dificultad se repite constantemente, hace avanzar de un modo acompasado, mientras se deja atrás la tranquila y uniforme serie de los dieces. Así se pone de relieve el mecanismo de contar grupos de unidades en el sistema decimal. En los métodos comunes, cuando se suman grupos de unidades que forman acumulaciones de decena, esta acumulación pesada y enojosa se arrastra, lo que hace difícil avanzar. En efecto, cuando en las escuelas corrientes dicen los meastros: «Tal niño ya ha llegado a contar hasta cincuenta», indican el peso de las decenas acumuladas que hizo difícil el proseguir, y el niño que ha llegado a contar cincuenta, se repone evidentemente de la fatiga.

En cambio, la dificultad del cálculo es una sola y es siempre la misma por grande que sea la magnitud de los cálculos sucesivos. Consiste en aquel salto a través del 10 que, como decimos, supone una labor mental ya que exige la realización de aquellas pequeñas sumas y restas que conducen a completar una decena y a obtener el resto que se agrega a los grupos sucesivos. En cambio, la decenas acumuladas detrás, representan un peso muerto que gravita solamente sobre la memoria.

Los largos y reiterados ejercicios sobre la «serpiente» concluyen por hacer mecánica la labor mental en torno al 10; poco a poco desaparece aquel lento trabajo de razonamiento y es sustituído por un mecanismo mental. En efecto, las leyes de las actividades razonadoras conducen éstas a salvar aquel trabajo para realizar otros sucesivos, consignando los conocimientos adquiridos en el depósito de las memorizaciones. Ello representa, entonces, una acumulación de riqueza, un progreso real. Las nuevas adquisiciones deben pasar primero por el razonamiento y no ir directamente a la memoria y a sus mecanismos.

Cuando se ha alcanzado aquel grado de madurez mecánica en el cálculo de los pasos a través del 10, los demás acumulados que quedaron atrás pueden ser transportados en su sucesión y de vez en vez, por la memoria, a través de los pasos que no ofrecen ya obstáculo alguno.

En el ejercicio de la «serpiente» los dos trabajos diversos están divididos y ello permite una progresión rápida y sin fatiga que consiente obtener grandes resultados. Las decenas que se acumularon se cuentan después aparte, con placer. porque representan lo fácil después de lo difícil y es casi la compensación de comprobar la propia riqueza después del trabajo.

Cuadro de pasos

Otro material permite estudiar particularmente estos pasos analizándolos.

Se trata de un cuadro dividido en 19 fajas o listas de 19 cuadraditos, con una línea vertical oscura de divisi6n entre el 10° y el 11° cuadrado, que divide en dos el total. Las subdivisiones están señaladas por números en la parte superior que, en correspondencia de los pequeños cuadrados, van de 1 a 10 a la izquierda de la línea de división y de 1 a 9 a la derecha. En esta última, además de los números 1, 2, 3... 9, están encima de éstos y en correspondencia con ellos los números 11, 12, 13, 14... 19.

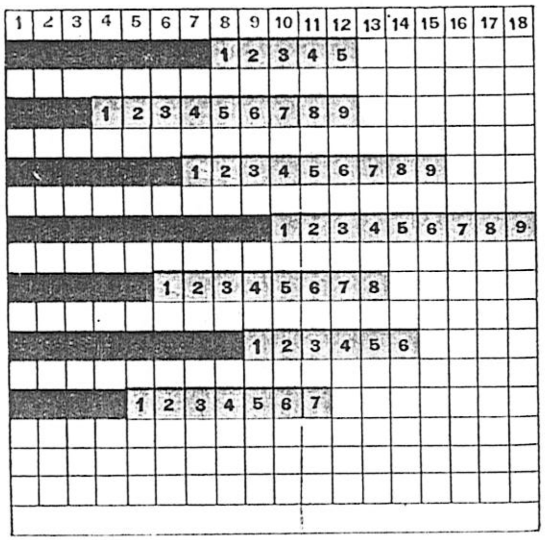


Fig. 25
Ejemplos de adiciones

$7 + 5 = 12$	$5 + 8 = 13$
$3 + 9 = 12$	$8 + 6 = 14$
$6 + 9 = 15$	$4 + 7 = 11$
$9 + 9 = 18$	

Este cuadro tiene por objeto, hacer ver, claramente, el paso a través del 10. Le acompaña una serie de listas o fajas de cartón de la altura de los cuadrados y de la misma longitud, que van del 1 al 9, en las que están señalados pequeños cuadrados del mismo tamaño que los del cuadro y una serie de listas de la misma altura y de longitud respectiva, de 1 a 10 cuadrados, en los cuales, no van marcados éstos.

El uso de este material es el siguiente : Se coloca una de las fajas o listas sin señal alguna sobre el cuadro de la izquierda y se

lee la longitud de la faja observando el nivel que alcanza ; ocho, por ejemplo. Se pone entonces a continuación una de las fajas que tienen subdivisiones, las cuales se pueden contar ; por ejemplo, 6. Se ve que esta faja llega, en la otra parte del cuadro al número 4, o leyendo el número superior, al 14. Se observa de este modo que la suma 8 + 6 es igual a 14.

La faja 6 queda dividida en dos partes por la línea oscura del 10, señalada sobre el cuadro ; 2 a un lado y 4 al otro. El 6 pues, ha dado 2 para completar el 10 y sólo han penetrado 4 en la segunda decena.

Así se puede repetir todas las combinaciones posibles y los niños entre 5 y 6 años de edad gustan de escribirlas una a una.

Tablas de cálculo. — Ejercicios escritos

Es, pues, en torno al diez, donde se acumula el trabajo necesario para el cálculo de las sumas. Las sumas parciales de los grupos pueden quedar dentro de la decena, alcanzada o rebasada. Para completar el ejercicio, se ofrece un material escrito que conduce a la memorización necesaria para calcular rápidamente. Una serie de tablas o cuadros están preparados como en la figura 26. Sobre las líneas transversales a la izquierda, se debe repetir siempre el mismo número que viene sumado con números en serie de uno a nueve ; a la derecha, se escriben las cifras totales así obtenidas. Los números que se suman cada vez, están también en la serie de uno a nueve. En la figura está el ejemplo de un cuadro llenado con respecto al número 3. Este material de ejercicios escritos, conduce a llevar todas las sumas que son posibles en torno al diez, y que es necesario y suficiente memorizar.

La tabla T. representa el completo de los ejercicios que se pueden llevar a cabo con los carteles. En ella, cada número, desde uno a nueve, está sumado con la serie de los números desde uno hasta nueve.

Observando la tabla T se ve que en cada cuadro existe un total de 10 ; mientras 10 es el último total hallado en el primer cuadro (del uno) es el penúltimo en el cuadro del dos, antepenúltimo en el cuadro de tres, etc., y se convierte en primero en el último cuadro o sea el del nueve. El 10 está siempre compuesto de la unión de dos grupos que se conocieron ya en el material de los bastones, cuando por desplazamientos se formaban bastones, todos ellos, de la longitud de los «dieces».

$9 + 1 = 10$
$8 + 2 = 10$
$7 + 3 = 10$
$6 + 4 = 10$
$5 + 5 = 10$

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7	7 + 1 = 8	8 + 1 = 9	9 + 1 = 10
1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8	7 + 2 = 9	8 + 2 = **10**	9 + 2 = 11
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9	7 + 3 = **10**	8 + 3 = 11	9 + 3 = 12
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = **10**	7 + 4 = 11	8 + 4 = 12	9 + 4 = 13
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	5 + 5 = **10**	6 + 5 = 11	7 + 5 = 12	8 + 5 = 13	9 + 5 = 14
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = **10**	5 + 6 = 11	6 + 6 = 12	7 + 6 = 13	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15
1 + 7 = 8	2 + 7 = 9	3 + 7 = **10**	4 + 7 = 11	5 + 7 = 12	6 + 7 = 13	7 + 7 = 14	8 + 7 = 15	9 + 7 = 16
1 + 8 = 9	2 + 8 = **10**	3 + 8 = 11	4 + 8 = 12	5 + 8 = 13	6 + 8 = 14	7 + 8 = 15	8 + 8 = 16	9 + 8 = 17
1 + 9 = **10**	2 + 9 = 11	3 + 9 = 12	4 + 9 = 13	5 + 9 = 14	6 + 9 = 15	7 + 9 = 16	8 + 9 = 17	9 + 9 = 18

Fig. 27 (Tabla T)

3 + 1 = ...
3 + 2 = ...
3 + 3 = ...
3 + 4 = ...
3 + 5 = ...
3 + 6 = ...
3 + 7 = ...
3 + 8 = ...
3 + 9 = ...

Fig. 26

La continuación, o sea :

$4 + 6 = 10$
$3 + 7 = 10$
$2 + 8 = 10$
$1 + 9 = 10$

no es, sino, la inversa de las combinaciones precedentes; luego sólo quedan aquellas combinaciones que fueron comprobadas con el sistema de los bastones. El hecho de haber bastones rígidos que, se pueden desplazar para formar bastones de diez, aclara este hecho y hace resaltar la diferencia que hay entre nueve combinaciones y el desplazamiento de las partes de una combinación ya existente.

Las combinaciones son lo importante ; por ejemplo $3 + 7 = 10$. Si a esto se añade el desplazamiento de los componentes que hace decir $7 + 3 = 10$, resulta siempre la misma combinación bajo otro aspecto. Algo así como la misma moneda vista por las dos caras.

Lo que es preciso memorizar es la combinación. Ahora, toda combinación de grupos desiguales es doble, desde el punto de vista del desplazamiento de los componentes. Este duplicado inverso se puede eliminar de un cuadro sintético que indique todas las combinaciones posibles ; lo necesario es suficiente. A dicho fin, en la tabla S colocaremos, ante todo, los cuadros, de modo que el diez de cada uno corresponda sobre la misma línea. Entonces, se hacen resaltar las combinaciones de grupos que no alcanzan la decena y que quedan en la parte superior de la fila 10, sobre los grupos que la superan, los cuales quedan en la inferior y señalaremos con color pálido los duplicados eliminables para que resulten las únicas combinaciones.

En la tabla S. los cuadros dispuestos según la línea del 10, presentan un orden general consistente en esto ; en toda la línea horizontal se encuentran totales iguales. Los nueve cuadros relativos al uno, dos, tres... nueve, presentan inmediatamente encima de diez todas las sumas iguales a nueve y después sucesivamente, a medida que se sube, iguales a ocho, siete, etc., hasta el dos. Y de este modo por debajo de diez, el total de las sumas que se encuentran sobre la misma línea, son sucesivamente iguales a 11 en la primera y 12, 13, 14 etc., hasta 18 en las otras. Estas descomposiciones se realizan repetidas veces en sentido inverso, y distinguiendo las repeticiones—señaladas con color pálido—se ve que éstas van aumentando de número del segundo cuadro en adelante, es decir, que se encuentra una en el cuadro del dos, dos en el del tres, etc., y ocho en la relativa al nueve.

La iniciación de las combinaciones diversas comienza en cada cuadro por la repeticicón del mismo número : $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$ etc., y éstas continúan en sentido vertical hacia abajo. Todas las combinaciones precedentes se encuentran retrocediendo en la línea

2	1 + 1 = 2								
3	1 + 2 = 3								
4	1 + 3 = 4	2 + 2 = 4							
5	1 + 4 = 5	2 + 3 = 5							
6	1 + 5 = 6	2 + 4 = 6	3 + 3 = 6						
7	1 + 6 = 7	2 + 5 = 7	3 + 4 = 7						
8	1 + 7 = 8	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8	4 + 4 = 8					
9	1 + 8 = 9	2 + 7 = 9	3 + 6 = 9	4 + 5 = 9					
10	1 + 9 = 10	2 + 8 = 10	3 + 7 = 10	4 + 6 = 10	5 + 5 = 10				
11		2 + 9 = 11	3 + 8 = 11	4 + 7 = 11	5 + 6 = 11				
12			3 + 9 = 12	4 + 8 = 12	5 + 7 = 12	6 + 6 = 12			
13				4 + 9 = 13	5 + 8 = 13	6 + 7 = 13			
14					5 + 9 = 14	6 + 8 = 14	7 + 7 = 14		
15						6 + 9 = 15	7 + 8 = 15		
16							7 + 9 = 16	8 + 8 = 16	
17								8 + 9 = 17	
18									9 + 9 = 18

Fig. 28 (Tabla S)

diagonal, pasando de este modo, a través de todos los cuadros, hasta el primero. Por ejemplo:

9 + 9
8 + 9
7 + 9
6 + 9
5 + 9
4 + 9
3 + 9
2 + 9
1 + 9

mientras, en la línea central, por encima de la duplicación, se encuentran las combinaciones repetidas en sentido inverso (señaladas con color pálido) 9 + 9, 9 + 8, 9 + 7, 9 + 6, 9 + 5, 9 + 4, 9 + 3, 9 + 2, 9 + 1. Si se eliminan del cuadro S las combinaciones duplicadas, resulta un cuadro simplificado conteniendo todas las combinaciones posibles, que se puede leer y estudiar como se hace con la tabla pitagórica para las multiplicaciones. A la derecha se encuentra la lista de todos los totales del 2 al 18 y en correspondencia con ellos se observan en línea horizontal las relativas descomposiciones en dos números. Leyendo las sumas que se encuentran, no sobre la misma línea horizontal, sino sobre la columna, sucede que éstas comienzan siempre por un número sumado consigo mismo. Así, por ejemplo, si consideramos la columna 4 + 4, en la columna precedente y en la línea inmediatamente superior se encuentra 3 + 4 = 7 que se puede leer 4 + 3 = 7. Y en la sucesiva columna a la izquierda y en la línea superior se halla 2 + 4 = 6, que se lee 4 + 2 = 6. Lo mismo se puede hacer con todos los números procediendo diagonalmente de derecha a izquierda.

Sumando los de izquierda a derecha, se procede así: sean por ejemplo, las sumas relativas al tres. Se parte del 1 + 3 de la primera columna y se prosigue diagonalmente hacia la derecha de columna en columna bajando siempre una línea: 2 + 3, 3 + 3. Llegados a 3 + 3 se concluye el camino diagonal y se continúa verticalmente sobre la misma columna.

TABLAS CORRELATIVAS

Anotamos, una al lado de la otra, las filas verticales resultantes que dan la suma de la tabla T, fig. 27.

A primera vista parece un ejercicio excesivamente fácil, y sin utilidad alguna, pero, en realidad, constituye uno de aquellos trabajos infantiles que requieren, no sólo paciencia, sino espíritu de ordenación,

2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	11	12	13	14	15	16	17	18

Constrúyase, pues, un marco que contenga la serie de números, desde el 1 al 9 tomando 0 para el ángulo.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Se obtiene así, un cuadro correlativo de las sumas que se pueden consultar, leyéndolo, como se leen las tables pitagóricas: ejemplo 8 + 5 = 13.

Las dos líneas directrices del marco, recuerdan el orden de la primera serie de los números dada a los párvulos de cuatro años de edad: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (*Esta disposición de los ceros, se debe al discípulo holandés E. Vogel*), se hallarán sobre la diagonal el doble de los números del marco, y fuera de ella, no hay más que la repetición geométrica de las sumas que ocupan la primera mitad.

Por lo tanto, no es necesario aprender de memoria más que la mitad de la tabla, esto es, 45 combinaciones.

La tabla puede reducirse así: en ésta los números terminan en su duplicación; se ven, pues, los números iguales dispuestos sobre N ángulos que cortan en sentido contrario a los de los dobles (Tabla Z).

Para poder leer esta tabla, se lee a la derecha hasta el doble del número del cual se parte, y si el resultado sobrepasa (esto es, si el número que se suma es mayor que aquel que forma la base del cual se parte) se continúa en sentido vertical hasta el nivel del otro número. Ejemplo: 4 + 7, si va hasta el doble de 4 (4 × 2 = 8) se desciende verticalmente hasta la línea 7/; la suma es 11.

Si se desea sumar 5 + 8, se parte del doble de 5 (5 × 2 = 10) y después se desciende verticalmente hasta la fila 8, el número hallado es 13.

Efectuando muchas sumas, se halla, que los resultados son siempre números que se encuentran sobre la diagonal números pares, o inmediatamente debajo, números impares. Estas dos filas de números son, por esta razón, suficientes para indicar todos los totales de las sumas hasta el 20 (Tabla Y).

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

1	2								
2	3	4							
3	4	5	6						
4	5	6	7	8					
5	6	7	8	9	10				
6	7	8	9	10	11	12			
7	8	9	10	11	12	13	14		
8	9	10	11	12	13	14	15	16	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla Z

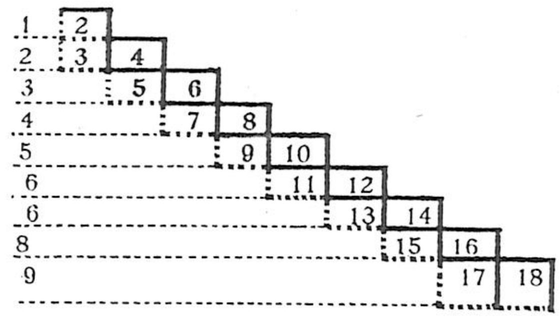


Tabla Y

Sea la suma : 5 + 8. Se sigue horizontalmente hasta encontrar los respectivos números dobles : 10 -16 ; se avanza sobre la diagonal, en sentido contrario en las casillas sucesivas, llegando a 12-14 La suma se halla en la casilla que hay entre 12-14, en los números impares : 13.

Sea la suma 3 + 7. Junto a la doble 6 + 14 se avanza en sentido contrario, y sobre la diagonal, se encuentra una casilla : 10, esta vez el total, por ser número par, se halla, precisamente, sobre la diagonal misma.

Sea 3 + 9. Avanzando entre 6-18, se une a su único número sobre la diagonal 13.

Este ejercicio, transforma la suma de dos números, en la «media» de sus dobles.

Dos pequeños bastoncillos que se separan, dan al ejercicio el aspecto de un juego.

RESUMEN

El primer grupo de ejercicios paralelos sobre el sistema decimal tiene, como finalidad principal, la de ilustrar el paso del 9 al 10, es decir, el puente que se encuentra entre dos jerarquías sucesivas de números. El hecho de contar, que es siempre igual y limitado del uno al nueve en todas las jerarquías de los números, se diferencia por la posición diversa que determinan las mismas jerarquías. Proporciona, además, una idea sensible de las relaciones cuantitativas entre los diversos tipos de estas jerarquías, es decir, entre la unidad, la decena, la centena y el millar, representándoles antes en forma geométrica :

punto ——— una perla aislada.
línea ——— el bastón de diez perlas.
cuadrado — constituído por diez bastones.
cubo ——— formado por diez cuadrados.

Y en forma lineal tenemos igualmente :
la perla
el bastón de diez
la cadena de ciento
la cadena de mil.

Las operaciones aritméticas con grandes números

Cada número mayor que 1 representa en sí mismo una suma de unidad, y existiendo agrupamientos de unidades, un número puede considerarse una suma de sus grupos componentes :

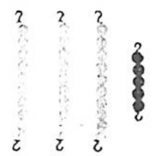
es, 35

453 :

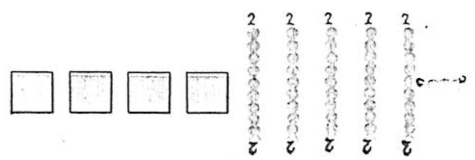
o sea :

1276 :

El hecho de acumular cantidades es verdaderamente cosa sencillísima. Consiste en reunir cosas separadas. Esto se podría realizar con objetos cualesquiera. Pero si se acumulan cantidades numéricas agrupadas según el sistema decimal, entonces aquellas obedecen a la particularidad consistente en la rígida separación de las jerarquías y en el hecho de que 9 unidades, sea cualquiera la jerarquía a que pertenezcan, pueden estar juntas, pero si se agrega otra todavía, sobreviene una síntesis, en virtud de la cual, se forma otra unidad de grado superior. Acumular cantidades numéricas (según el sistema decimal) no es, pues, colocar platos unos sobre otros ni llenar un cesto de fruta Las cantidades numéricas tienen en sí una especie de fermento vital, una fuerza que las obliga a entrar en la forma del sistema (materialización de la abstracción numérica en el sistema decimal). Se podría pensar en la pólvora seca puesta en contacto con pólvora encendida ; de su reunión no resulta un aumento, sino una deflagración, o sea, una transformación. Cuando se trata



Suma 35
Fig. 28 (1



Suma 453
Fig. 28 (2

de cantidades numéricas existe una disposición preestablecida, una especie de disciplina rígida que dispone la acumulación según una ley.

Lo que caracteriza, pues, una operación aritmética, la suma por ejemplo, no es el hecho de acumular cantidades, sino la disposición de las distintas unidades según el sistema decimal. No hay pues nada que aprender en lo que a las operaciones en sí mismas se refiere, cuando al sistema decimal se le da todo aquello que realmente le pertenece.

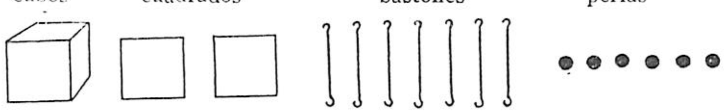


Fig. 28 (3

Las operaciones consisten en acumular cosas desiguales o acumular cosas iguales ;

o en separar de un conjunto alguna de sus partes

o en distribuirlo por partes iguales.

He aquí lo que son las operaciones. Lo que sucede después en la *intimidad* de los números, se refiere al sistema decimal y no a la operación.

Y en el sistema decimal ¿qué sucede?

Esto simplemente. Está prohibida la agrupación de más de nueve ciudadanos, al sobrevenir el décimo surge un nuevo personaje. Es el paso del nueve al diez.

Vamos, pues, a la suma de grandes números. Hay cubos, cuadrados, bastones y perlas sueltas. Todo esto, entremezclado, se halla en poder de varias personas ; varias alumnas de la clase, supongamos.

Andrea tiene 2 cubos, 4 cuadrados, 5 bastones y 6 perlas.

Margarita tiene 1 cubo, 8 cuadrados, 9 bastones y 3 perlas.

Sofía tiene 3 cubos, 4 bastones y 7 perlas.

«Pues bien, hijas mías, haced el favor de depositar en mi mesa todos estos objetos».

Vienen las discípulas y dejan, en montón, sobre mi mesa, cubos, bastones, cuadrados y perlas.

Así ha tenido lugar una *suma*.

Esta es la característica de la suma ; la acumulación de cantidades desiguales.

En efecto. Andrea tiene 2 cubos, 4 cuadrados, 5 bastones y 6 perlas ; lo que constituye el número 2456.

Margarita tiene 1 cubo, 8 cuadrados, 9 bastones y 3 perlas ; o sea, 1893.

Y Sofía tiene 3 cubos, 6 cuadrados, 4 bastones y 7 perlas o sea : 3647.

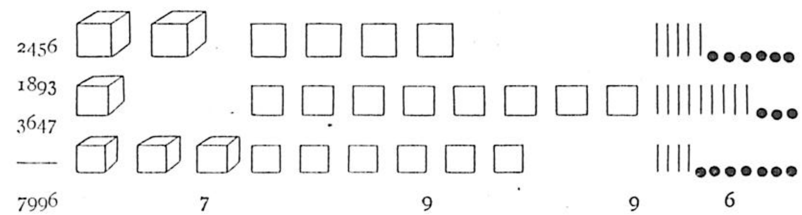


Fig. 29

Han aportado pues, las tres alumnas, cantidades diversas.

Ahora yo, sobre esta acumulación de objetos, que representa efectivamente la suma de las cantidades dichas, opero, ordenándolas según el sistema decimal.

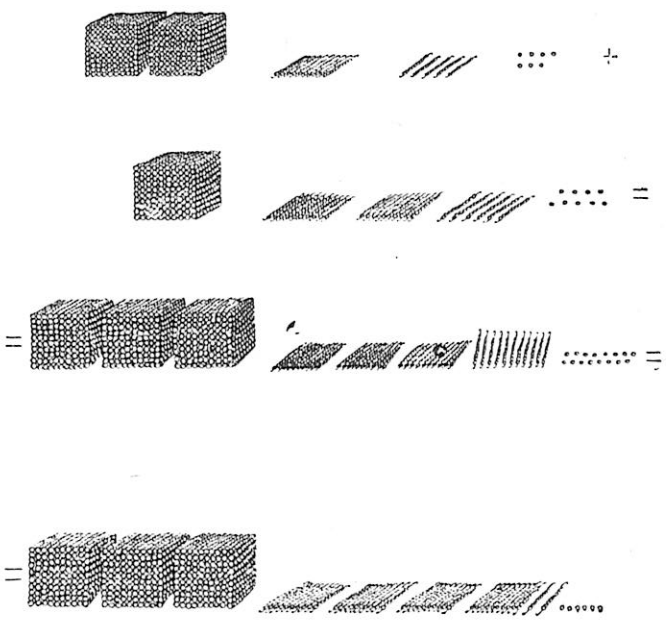
Antes que nada establezco un orden colocando juntos los objetos que tienen la misma jerarquía ; los cubos con los cubos, los cuadrados juntos, los bastones reunidos y después hago la misma operación con las perlas, y dispongo estos grupos en la sucesión correspondiente a sus jerarquías. Una vez hecho esto, precisa obedecer la ley del sistema. ¡No más de nueve en cada grupo! Si se agrega uno más de los nueve, constituye una unidad completa, que pasa al grado superior.

Veamos ahora lo que resulta de la primera acción de separar en grupos los objetos diversos. Tenemos 2 cubos de Andrea y 1 cubo de Margarita y 3 de Sofía que suman 6 cubos. Hay después, 4, más 8 más 6 cuadrados ; 5 más 9, más 4 bastones y finalmente 6, más 9, más 7 perlas sueltas.

Es lógico comenzar la distribución por las perlas sueltas. Según la ley del sistema decimal, no puede haber sueltas más de nueve y como son 16 ya tenemos formado un bastón y sobran 6 perlas. El bastón, naturalmente, va con sus iguales, porque la división en jerarquías no admite excepciones. Los bastones eran ya en gran cantidad, 18 ; y con el nuevo que se añade suman 19. Es imposible que permanezcan sueltos, así que diez de ellos, constituyen un cuadrado, el cual se une rápidamente con los de su especie y quedan, solamente, 9 bastones.

Los cuadrados eran ya en gran cantidad, 18, y uno que se agrega, 19. Inmediatamente, con diez cuadrados, se forma un cubo que se une a los de su especie y quedan 9 cuadrados solamente. Los cubos eran 6 y con lo agregado se convierten en 7.

Después de esta labor de transformación quedan sobre la mesa 7 cubos, 9 cuadrados, 9 bastones y 6 perlas, o sea, el número 7996.



2157 + 1269 = 3426
Ejemplo de una suma de grandes números ejecutada con el material

Fig. 30

Este es el total que resulta de sumar los números

$$
\begin{array}{r}
2456\ + \\
1893\ + \\
3647\ = \\
\hline
7996
\end{array}
$$

Veamos otro ejemplo en la suma de los númers : 2157 y 1269 ; en la figura está representado la simple acumulación :

3 millares, 3 centenas, 11 decenas y 16 unidades y después los mismos en orden decimal : 3426.

LA MULTIPLICACION

Ahora, sucede que otros tres alumnos tienen cantidades iguales ; cada uno tiene 1 cubo, 3 cuadrados, 9 bastones y 6 perlas.

«Venid y acumulad todo en esta mesa».

Es el mismo caso anterior y no se puede hacer otra cosa que re-

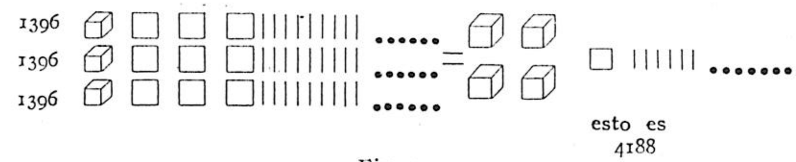


Fig. 31

petir las operaciones descritas. Reunir, pues, todos los cubos, que son tres y todos los cuadrados (que son nueve) ; reunir los bastones (que son veintisiete) y las perlas (diez y ocho).

Del grupo de las perlas sueltas se separa, para reunirse con la jerarquía superior, un bastón que se une a los otros veintisiete, dejando solas ocho perlas.

Y los bastones que son ahora veintiocho se aglomeran en dos cuadrados que huyen para mezclarse con el grupo de nueve. Los cuadrados, pues, se convierten en once. Diez de ellos se erigen en cubo y pasan a la agrupación superior. De aquel número de cuadrados queda uno solamente.

Ahora todo está en orden, según el sistema decimal, y obtenemos como resultado el número 4188.

Ninguna diferencia con el primer caso. En las cantidades destinadas a acumularse, sean iguales o distintas ¿qué importa si no sólo se reunen en un todo, sino que hay una transfusión entre ellas para obedecer a las leyes de su agregación?

No existe diferencia, ni en el hecho de acumular, ni en el hecho de ordenar. No es el sistema decimal quien hace distinta la suma de la multiplicación. Es solamente el hecho que, tratándose de cosas iguales, se puede memorizar su resultado sin contar una cosa después de la otra.

Es, pues, un mecanismo de la memoria del hombre y no un hecho intrínseco de los números, el que establece la separación entre la multiplicación y la suma.

LA SUSTRACCION

La idea, que precisa hacer resaltar y que caracteriza la sustracción, es que existe una sola cantidad efectiva. Yo tengo sobre la mesa un montón de cubos, cuadrados, bastones y perlas, pero quien viene a pedirme una perla trae las manos vacías. Mi montón representa la cantidad efectiva.

Sea ésta, por ejemplo, 4286 ; pero Sofía, que se acerca y me pide mil perlas, no tiene nada más que su petición.

Hay pues dos números : 4286 y 1000, pero, sólo respecto al primero existe la cantidad correspondiente. El otro número indica la cantidad que hay que sustraerse de aquélla. Muchos niños, acostumbrados a componer la cantidad relativa a los números por una adición, aunque sepan que la resta consiste en sustraer una cantidad de otra, se apresuran a componer también las dos cantidades en el caso de la sustracción y después añaden ; ahora hay que restar esto de aquello. El hecho de que, baste reunir la cantidad, sólo respecto al primer número, les sorprende y por eso les interesa, siendo, sin duda este hecho, el que logra mayormente hacer percibir la diferencia esencial entre las dos operaciones. Por ello, si en la adición puede existir una acumulación ilimitada de cantidades que se suman una a otra y pueden existir, por lo mismo, muchos números, aquí existen solamente dos números y una sola cantidad.

En la sustracción indicada, la acción es muy sencilla ; se separa un cubo del montón y se le entrega al peticionario.

$$\begin{array}{r} 4286 \\ 1000 \\ \hline 3286 \end{array}$$

Los ejercicios que se llevan a cabo con el material de perlas para realizar una sustracción, muestran el lado inverso de la clave

del sistema decimal, es decir ; un grupo de la jerarquía superior puede escindirse en diez unidades inferiores, cuando alguna de éstas deba sustraerse al conjunto.

Supongamos que el número que representa la cantidad efectiva sea 1276 y que la cantidad reclamada sea 829.

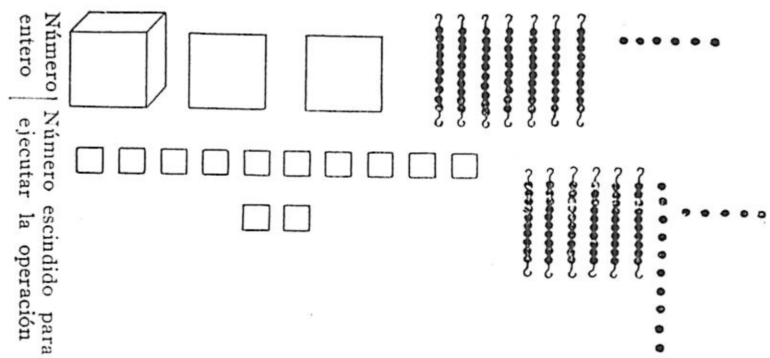


Fig. 32

Al número 1276 corresponde en el material de las perlas un cubo, dos cuadrados, siete bastones y seis perlas. La sola operación que se presenta sencilla es, la relativa a los bastones, porque existen siete y se quieren sustraer dos.

Para obtener las nueve perlas, precisa, ante todo, tomar las que existen : seis. Y para el remanente de tres, hay que deshacer un bastón y obtener de este modo diez perlas sueltas, las cuales, no podrían permanecer en dicha forma si, inmediatamente, alguna de éstas no debiese ser llevada aparte. Tomando de ellas tres, para unirlas a las otras seis, y componer el nueve, quedan siete perlas sueltas. Pero los bastones quedaron reducidos a seis y, aún así reducidos, es fácil separar los dos bastones que hay que sustraer y quedan definitivamente cuatro bastones. Otra dificultad estriba en separar ocho cuadrados cuando solamente existen dos. Pero el cubo superior puede escindirse en diez cuadrados y ceder seis para formar con los dos ya existentes la cantidad solicitada de ocho cuadrados. Quedan entonces del número primitivo, cuatro cuadrados, cuatro bastones y siete perlas (447). La cantidad primitiva fué escindida en dos partes ; la sustraída y la remanente, y esta escisión de la cantidad efectiva en dos partes desiguales, constituye la operación de la resta o sustracción.

Respecto a las transformaciones íntimas de las cantidades numéricas, aquí en la sustracción, en vez de comprobar que diez unidades se funden en una sola unidad de orden superior puede dividirse en 10 de orden inferior. Es, sin embargo, siempre el mismo juego en torno al 10, sea que las unidades se unan o se desunan.

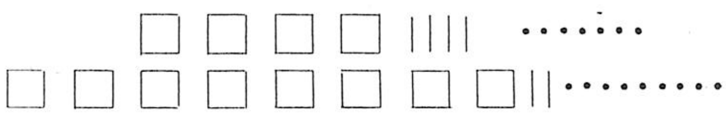


Fig. 33

Para facilitar los ejercicios individuales de sustracción, se han construído pequeños carteles de colores, todos ellos de iguales dimensiones, en los que aparece impresa la figura de un cubo o la de un cuadrado, una línea o un punto. Estos carteles indican el sustraendo y representan billetes que dan derecho a apropiarse de la correspondiente cantidad de perlas. Dados los dos elementos de la sustracción, se compone la cantidad efectiva indicada por el minuendo, con el material de perlas y en correspondencia con él, se colocan debajo los carteles que indican el sustraendo. Por ejemplo; sea la sustracción 2475 - 1836. Dispuesto en fila el material correspondiente—dos cubos, cuatro cuadrados, siete bastones y cinco perlas sueltas—se alinean un cartel de los cubos bajo los dos cubos de

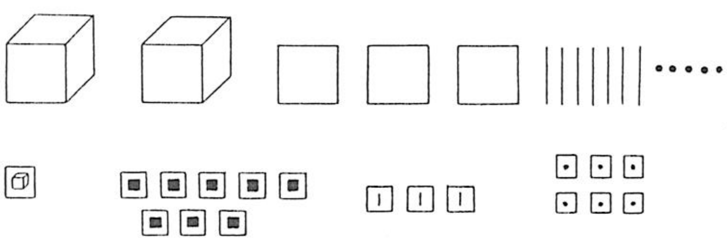


Fig. 34

perlas; ocho carteles de los cuadrados bajo los cuadrados de las perlas; tres carteles de los bastones en correspondencia con los bastones de las perlas y finalmente, seis carteles con el punto debajo las perlas sueltas. Después se procede a los cambios en el material de las perlas, sustituyéndose poco a poco los carteles con las cantidades diversas en que se ha escindido. Sumando éstas conjuntamente, nos encontramos con la cantidad primitiva de que proceden.

La operación de la resta se podría representar, en relación con el hecho consistente en la escisión de una cantidad única primitiva, en dos otras cantidades diversas, del modo siguiente :

8654
———
2872
5782
———

lo cual indica, que la cantidad 8654 se ha dividido en las dos que aparecen debajo, la segunda de las cuales (subrayada) representa lo que queda de la primera. Si después se efectúa la suma de las dos cantidades, la operación se puede representar como sigue :

8654
———
2872
5782
———
8654

Una representación, aún más exacta y evidente, sería la siguiente :

(2872
8654)
(5782

lo que corresponde con la definición corriente de la sustracción, es decir : *Dada una suma de dos números y uno de ellos, hallar el otro.*

LA DIVISION

La división se caracteriza por el hecho de que, una cantidad dada, está dividida en partes iguales que pueden ser dos, o más de dos, mientras que en la sustracción se escindía una cantidad en dos partes desiguales.

Para hacer la operación clara, puede presentarse al niño de modo activo, haciendo que la división de una cantidad tenga lugar entre diversas personas, esto es, entre niños mismos, que la lleven a la práctica en la forma primitiva que utilizarán personas incultas y desconocedoras del cálculo. Es decir, tomando las cosas una por una hasta que la cantidad remanente no puede ser distribuída por igual entre las personas que se la dividen. Este principio, extraño al cálculo, sirve para dar la idea de la operación como un hecho. Análogamente a cuanto se dijo para las otras operaciones, también en la división hay fundamentalmente una condición de cosas que no debe confundirse ni con el cálculo ni con el sistema decimal y que exige solamente un procedimiento sobre la materia acumulable o escindible. Es por ello por lo que queremos exponer primeramente el fundamento más simple y más real ; es decir, el hecho que caracteriza la operación.

Sobre mi mesa está la siguiente cantidad : dos cubos, seis cuadrados, cuatro bastones y ocho perlas sueltas, o sea, el número 2648. Dos niños vienen a dividírselo en dos partes iguales, tomando para ello, cada uno, la misma cantidad. Los niños, comenzando por la cosa más grande, de más valor y por lo mismo más importante, toman un cubo para cada uno y concluídos los cubos, pasan a los cuadrados, tomando uno por uno mientras quedan, con lo cual, cada uno, tiene tres ; después, pasan a los bastones cogiéndolos sucesivamente y tienen dos. Finalmente, se reparten las perlas cogiéndolas una a una y cada niño tiene cuatro. De este modo, la cantidad inicial queda dividida en dos partes iguales, que constan cada una de : un cubo, tres cuadrados, dos bastones y cuatro perlas, representando cada una de ellas el número 1324. El cálculo numérico podría expresarse de la siguiente forma :

$$2648 : 2 = 1324$$

También en la división existe una sola cantidad efectiva, aquella que se divide, y el número que la representa se llama dividendo. El otro número (divisor) indica, en cambio, simplemente, en cuántas partes iguales debe subdividirse el dividendo. Al final de la operación se obtiene un número que representa una de las partes de la cantidad primitiva, partes que son iguales entre sí. Este número se llama cociente. Es preciso que el niño perciba, claramente y con rapidez, la idea de lo que el cociente representa. En efecto, en las escuelas elementales los niños que aprenden las operaciones, solamente como cálculo, y no como hecho, tienen el concepto equivocado de que el cociente es un resultado cuantitativo de la división y se expresan en la siguiente forma :

«Dos mil seiscientos cuarenta y ocho dividido entre dos es *igual* al cociente mil trescientos veinticuatro».

Ahora el resultado del cálculo es 1324, pero no el resultado del hecho. En el hecho—después de efectuada la división—existen las cantidades iguales entre sí—1324—en las cuales se divide la cantidad primitiva. Esto es : la cantidad primitiva permanece siempre en su totalidad, ha cambiado de forma solamente, porque al principio era una cantidad sola y después, en cambio, se ha separado en dos cantidades. Esto es, el 2648 se ha convertido en 1324 + 1324 ; o lo que es igual, no se ha destruído, se ha transformado.

Pongamos otros ejemplos : 9634 : 3.

La cantidad de nueve cubos, seis cuadrados, tres bastones y cuatro perlas está distribuída en tres grupos iguales, en cada uno de los cuales se encuentran tres cubos, dos cuadrados, un bastón y una perla y sobra una perla que no pudiendo ser repartida representa el resto. La distribución en las tres partes iguales, más el resto, representa la totalidad de la cantidad primitiva que permanece intacta, aunque diversamente distribuída. La división expresada en números sería, pues :

$$9634 : 3 = \begin{matrix} 3211 \\ 3211 \\ 3211 \end{matrix} + 1 = 9634$$

y esta demostración conduce a la reconstrucción del número primitivo y, por lo tanto, a la prueba de la división.

Sea la división siguiente : 2824 :4.

El cuatro está representado por cuatro niños que vienen a tomar, cada uno, la parte correspondiente del total. Los cuatro niños no pueden escoger un cubo, siendo por ello preciso, dividir los dos cubos en cuadrados, resultando veinte. Estos se agrupan juntamente con los otros ocho cuadrados (es decir, veintiocho cuadrados) y entonces comienza la división. Cada niño cogiendo, vez a vez, un cuadrado, llega a poseer siete. Los dos bastones corren la misma suerte de los cubos ; deben ser convertidos en perlas sueltas, que se unen a las cuatro ya existentes.

Procediendo a la división, cada niño se encuentra poseedor de seis perlas. He aquí pues, como se transforma la cantidad primitiva, que tiene una apariencia más sencilla, toda vez que han desaparecido dos figuras.

Tenemos, pues,

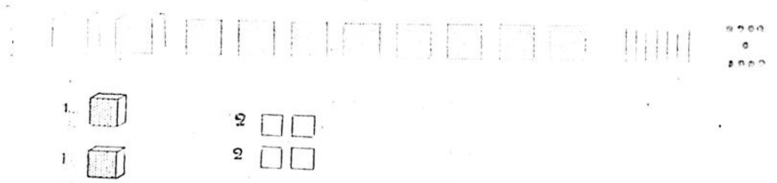
$$2824 : 4 = \begin{matrix} 706 \\ 706 \\ 706 \\ 706 \end{matrix} = 2824$$

Dado el placer que experimentan los pequeños, realizando los cambios decimales entre cubos, cuadrados, bastones y perlas, y su entusiasmo en avanzar para tomar los objetos uno por uno, y repartirse la cantidad total, resulta la división uno de sus ejercicios preferidos. Por otra parte, estos ejercicios provocan la necesidad de una división de trabajo, además de una división de cantidades. En efecto, ha sido necesaria la obra subsidiaria de un niño que no toma parte directa en la división y que se dedica solamente a efectuar los cambios. Dicho niño, tiene ante sí muchos cuadrados, bastones y perlas, que no tienen nada que ver con la cantidad que representa el dividendo, y que sirven, solamente, para efectuar cambios de alguna parte del individuo, cuando las circunstancicas lo exijan. Este niño pues, ejerce el papel de *banquero*. Existe, además, un director que vigila la distribución del dividendo, a fin de que las partes sean distribuídas por igual, los cambios bien efectuados y no se toque el resto. Esta organización social da un carácter de vivacidad al hecho de la división.

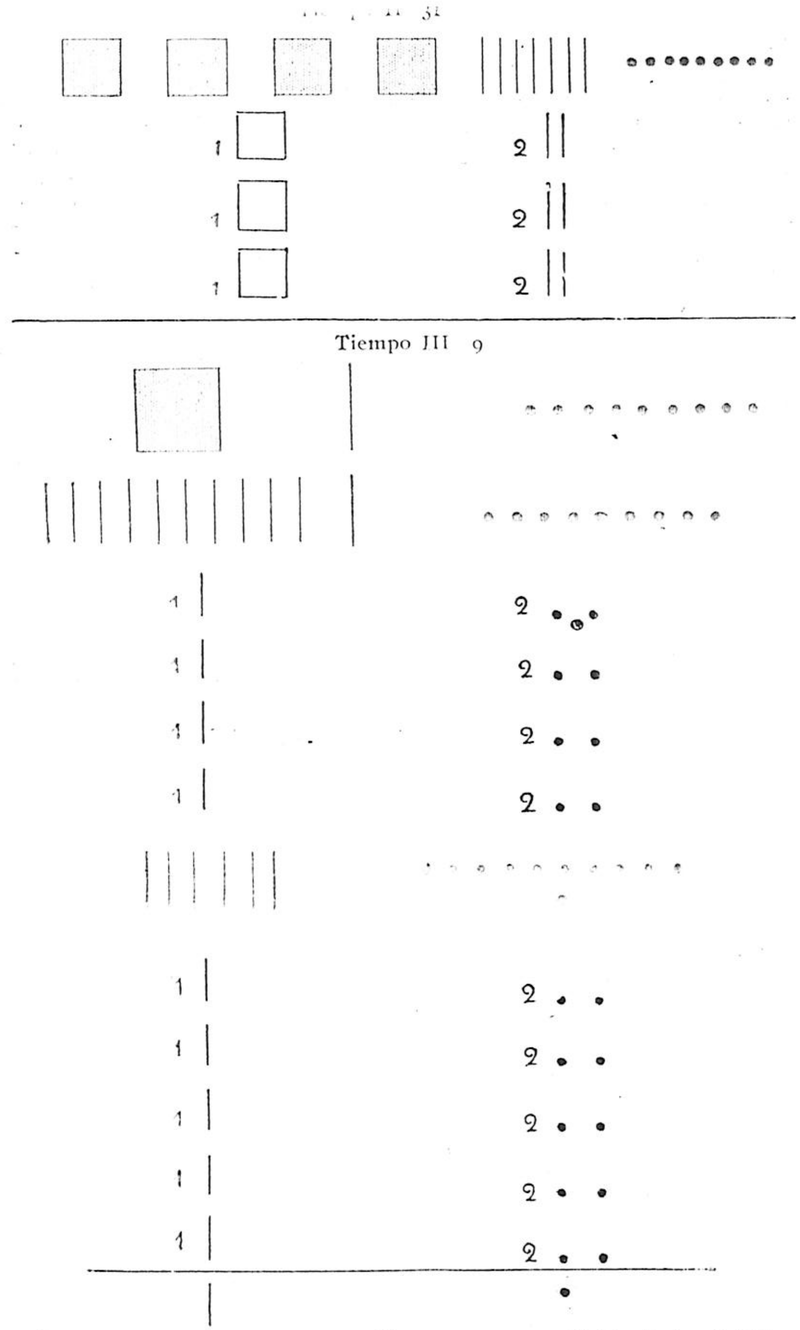
División por varias cifras

He preparado sobre mi mesa la cantidad de dos cubos, ocho cuadrados, siete bastones y nueve perlas o sea 2879. Seguro de interpretar los deseos de la mayoría, hago la siguiente proposición: que vengan doce niños a tomar su parte respectiva. Se precipitan cerca de mi mesa doce niños. Yo observo que son demasiados y que originarían confusión. «Que se separe un grupo de diez y que este grupo elija un representante, el cual tomará la parte correspondiente a los diez» y a fin de que se distinga de los otros dos que representan únicamente a sí mismos, distribuyo distintivos; un gran lazo rojo a quien representa diez niños, o sea *la decena*, y dos pequeñas cintas verdes a las modestas *unidades*. Los otros nueve excluídos un poco desilusionados, aguardan a un lado y como también éstos, deberán alcanzar una parte igual que la de los otros, los distingo con una pequeña cinta blanca. Y comienza la distribución entre el rojo y los verdes. Comienzo por dar al rojo uno de los cubos. Un cubo que ha de distribuirse entre diez supone un cuadrado para cada persona. Entonces los dos verdes pueden avanzar y tomar también un cuadrado para cada uno.

El otro cubo corresponde también al rojo, y a los verdes otro cuadrado. Han correspondido hasta ahora dos cuadrados para cada uno de los doce individuos y de la cantidad primitiva sobran cuatro cuadrados, siete bastones y nueve perlas. Ahora el rojo toma un cuadrado, lo que supone un bastón para cada uno de los individuos que representa, y los dos verdes toman, igualmente, cada uno su bastón, prosiguiéndose en dicha forma mientras ello sea posible, cada vez y por cada cuadrado que toma el rojo cogen los verdes su bastón correspondiente. Cuando el rojo ha tomado tres cuadrados debe detenerse, porque los verdes se llevaron seis bastones y que-



Tiempo I 2



2879 : 12 = 239 + 11 Fig. 35 Tabla de la división da uno sólo. Han correspondido, pues, tres bastones a cada niño. Quedan aún un cuadrado, un bastón y nueve perlas. Precisa ahora cambiar aquel cuadrado en bastones, lo que dará un total de once bastones y nueve perlas. Cuando el rojo toma un bastón, lo que quiere decir que corresponde una perla a cada uno de sus nueve compañeros, los dos verdes toman otra perla y así prosiguen mientras la distribución es factible. Después que el rojo ha tomado cuatro bastones no puede proseguir la operación. En efecto, los verdes han tomado entre tanto ocho perlas y queda una sola de éstas. Pero quedan aún muchos bastones (11 - 4 = 7) y uno de ellos se puede cambiar por perlas ; entonces puede reanudarse la operación, toda vez que las perlas son once y seis los bastones. La operación prosigue. Queda finalmente un bastón y una perla, cantidad indivisible ; esto es, 11. Las perlas que correspondieron a cada niño fueron nueve. Cada uno de ellos ha recibido sucesivamente dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas o sea 239.

Puede irse ahora cada niño con su parte correspondiente, pero ninguno puede tocar las once perlas de resto que quedan sobre la mesa.

En realidad, sin embargo, las condiciones son estas : el rojo posee dos cubos, tres cuadrados y nueve bastones, mientras cada uno de los verdes tiene dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas. La operación pues, no ha concluído. Es preciso que el rojo distribuya entre diez personas lo que tiene en su poder ; para ello deberá cambiar todo en el puesto del banquero que dividirá cada objeto en diez partes, o mejor, dará el equivalente del total de subdivisiones de diez. Así el rojo y cada uno de los nueve blancos tendrá una parte igual a la de los verdes, o sea dos cuadrados, tres bastones y nueve perlas.

Si los doce niños acumulan ahora su haber para unirlo después a las perlas de resto y realizan los cambios decimales, volverán a obtener la primitiva cantidad ; dos cubos, ocho cuadrados, siete bastones y nueve perlas, porque dicha cantidad había cambiado de forma, pero no se había alterado en su cifra.

Represen'ándola numéricamente ; la operación sería :

$$
\begin{array}{rl}
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
2879 : 12 = & 239 + 11 = 2879 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239 \\
 & 239
\end{array}
$$

Lo que se puede también representar con la unión de 10 cantidades iguales, haciendo la prueba final :

$$
\begin{array}{rl}
 & 2390 + \\
2879 : 12 = & 239 + = 2879 \\
 & 239 + \\
 & 11
\end{array}
$$

Es decir : $2879 : 12 = (239 \times 12) + 11 = 2879$.
donde el número 239 es el cociente o sea la cuota correspondiente a cada niño.

Ejercicios paralelos

Suma de grandes números sin material de perlas

Paralelamente a estos ejercicios con los grandes números, realizados con el material de las perlas (ejercicios que son primarios y fundamentales, porque se realizan con cantidades efectivas) se presentan otros que sirven para demostrar los mismos hechos, operando sobre las cifras escritas.

Uno de los ejercicios individuales de tal género es el siguiente, que no obstante efectuarse con números indefinidamente gran-

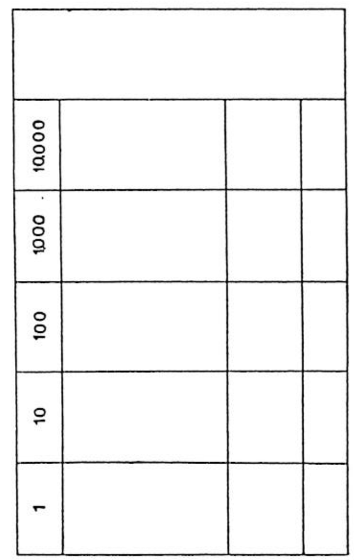


Fig. 36

des, hasta decenas y centenas de millar, sólo exige saber contar hasta 10 y el conocimiento de las jerarquías y mecanismos del sistema decimal. Con ello la operación se convierte en un medio atrayente para ilustrar la clave del sistema decimal y demostrar la simplicidad introducida en el cálculo con dicho sistema.

En los respectivos espacios indicados por el 10.000, 1.000, el 100, el 10 y el 1, se señalan tantos puntos como sean las unidades indicadas por la respectiva cifra en cada número, y así se acumulan en cada especie tantos grupos de puntos como sean las unidades de aquella determinada jerarquía en todos los números que se suman. Con el fin de que sea más clara la explicación, pondremos

8699 +
3454 +
2793 +
5816 = 20 . 762

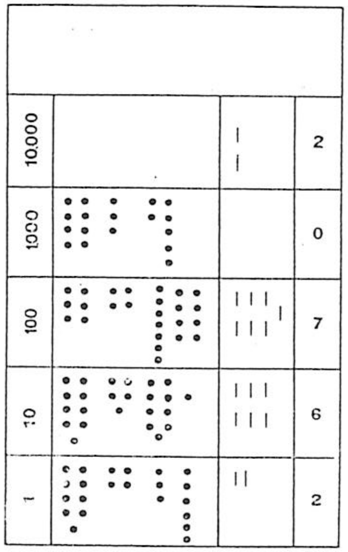


Fig. 37

en este caso, los grupos de puntos relativos a los diversos números, separados uno de otros, lo que puede servir de comprobación. Cada número se expresa en puntos.

El modelo representado permite catalogar números que llegan hasta la decena de millar. En la línea de la izquierda está indicada en cifras la jerarquía de cada plano sobrepuesto. Los números a sumar son :

8699
3454
2793
5816

Traducidos los números en puntos, éstos se cuentan relativamente a cada espacio y no es rigurosamente necesario comenzar por **aquel donde están las uniones simples, más aun, en principio,** es cosa que no debe preocuparnos. Por cada diez puntos contados en un espacio se coloca un signo vertical en el espacio superior a aquel de la primera columna a la derecha, y para los puntos restantes se señalan otras tantas pequeñas líneas verticales en la columna de la derecha correspondiente al espacio relativo a los puntos que se cuentan. Para facilitar la comprobación se hace una señal debajo de cada una de las decenas de puntos contados en los varios espacios. Así concluye la labor preparatoria de ordenación. Después de esto se cuentan los signos verticales de la primera columna ; si son menos de diez se escribe, sin esperar a más, la cifra correspondiente en la segunda columna. Si, en cambio, son más de diez se borran y se **pone un punto en la primera columna superior.** De este modo quedan finalmente—en la segunda columna—cifras que son de diversa jerarquía.. Transcritas éstas en línea horizontal dan el resultado de la suma que en este caso es 20762.

Daremos otro ejemplo para hacer ver como los puntos se colocan en los espacios, acumulándolos cinco por cinco, sin distinguir los grupos que pertenecen a los números diversos, pero teniendo **siempre puesta la atención sobre las jerarquías.** Las sumas de diez en diez están representadas en la primera columna de la derecha por signos verticales, como se ha dicho, y se puede comenzar por cualquier parte, porque el orden definitivo se ha establecido solamente en la segunda columna a la derecha donde se escriben en cifras las cantidades obtenidas. En efecto, si en la primera columna

4856 +
7973 +
5494 +
8759 +
2932 = 30014

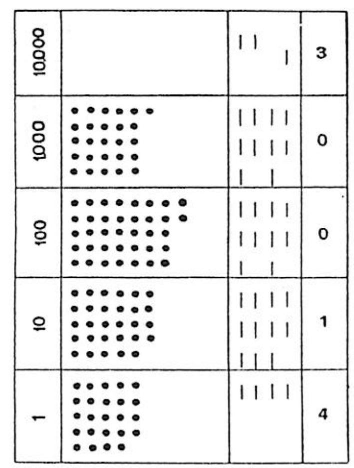


Fig. 38

los puntos son más de diez, se tachan y se sustituyen por una sola señal en el espacio superior.

La suma en cifras es la siguiente :

4856
7973
5494
8759
2932

Que da como resultado 30014.

Otro material es el siguiente, que será aplicado a una operación de sustracción con grandes cifras.

6859 - 4237

El material consiste en cuadernos que llevan escritos en colores diversos las series sucesivas ; serie de 1000, serie de ciento, serie de diez, serie de uno. Cada uno de estas jerarquías tiene un color distinto. Las filas son separables y engomadas por detrás, como los sellos. Estos números representan las unidades de cuatro diversas jerarquías y sumando filas de estas unidades se llegan a componer los números de muchas cifras. Por ejemplo : para componer el número seis mil ochocientos cincuenta y nueve se separan las cantidades representadas en la siguiente figura, separando de las páginas respectivas las series necesarias (fig. 40)).

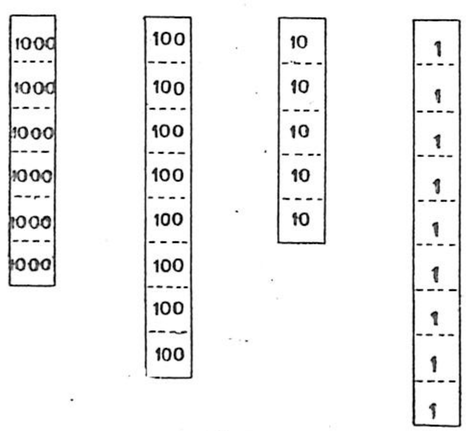


Fig. 39

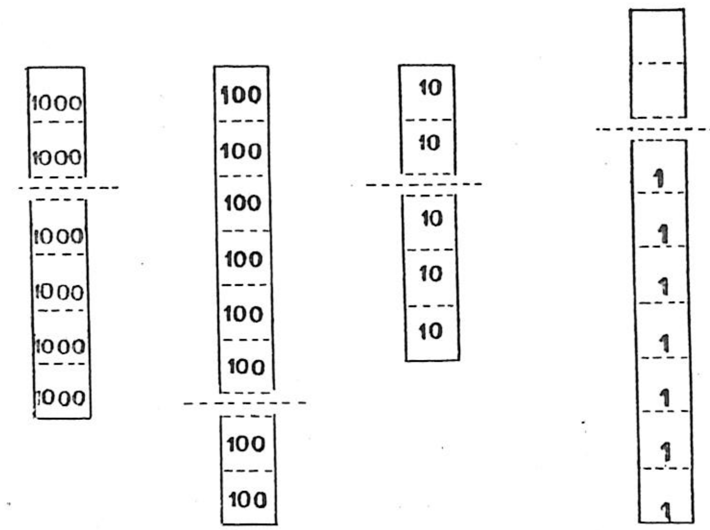


Fig. 40

Ahora de la cantidad así representada por medio de cuatro series de unidades, hay que sustraer la otra cantidad relativa al número 4237.

La idea de que uno solo de los números de la sustracción es efectiva, se deduce claramente del hecho, de que sólo el primero hay que formarlo con el material, mientras el otro indica solamente la cantidad que hay que restar de aquél. Relativamente, pues, a la formación del otro número se da, en realidad, «un par de tijeras» con las cuales se cortan las cantidades indicadas.

En efecto, en este caso la sustracción consiste simplemente en cortar una parte de las cuatro listas o fajas de las unidades.

Lo que queda después de realizada la operación son dos gru-

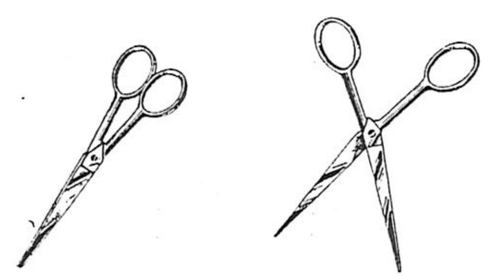


Fig. 41

pos ; uno, el separado, y el otro, aquel que representa el resíduo de la cantidad inicial.

Efectuando la operación con cifras se representaría así :

$$6859 = \begin{cases} 2622 \\ + \\ 4237 \end{cases}$$

Con el mismo material se pueden efectuar varias sustracciones. Por ejemplo :

$$\begin{array}{r} 3465 \\ -\ 1836 \end{array}$$

Se compone el primer número por medio del material de unidades, y ahora se trata de separar de ésta, la cantidad indicada por el sustraendo. No es ya solamente una cuestión de tijeras, sino de cambio entre unidades de diversa jerarquía. En nuestro caso la primera operación es la de tomar las unidades existentes (5), pero no bastando éstas para componer la cantidad necesaria, se corta con las tijeras un 10 de la faja correspondiente y en su lugar se coloca una faja de 10 unidades simples de las cuales se corta una para agregarla a las otras cinco, quedando en el lugar debido nueve unidades. Ahora las decenas restantes son cinco solamente en vez de seis y las tres pedidas se cortan de aquí con las tijeras, quedando dos solamente. Para las centenas se procede análogamente. Tomadas todas las centenas existentes que son cuatro y por ello insuficientes, se separa un millar con las tijeras y en su lugar se recoge una faja

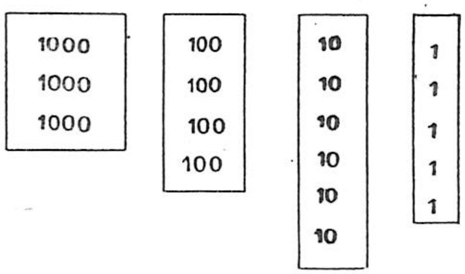


Fig. 42

de diez centenas de la que se separan cuatro para unirlas a las que ya se quitaron. Quedarán, pues, seis centenas. Los millares primitivos se han reducido de tres a dos. Y como el nuevo número pide uno, se separan los dos con las tijeras, recogiendo uno. Quedará por fin, como resultado, la cantidad correspondiente al número 1629

que con la otra obtenida 1836 constituirá la primera, que ya ha desaparecido.

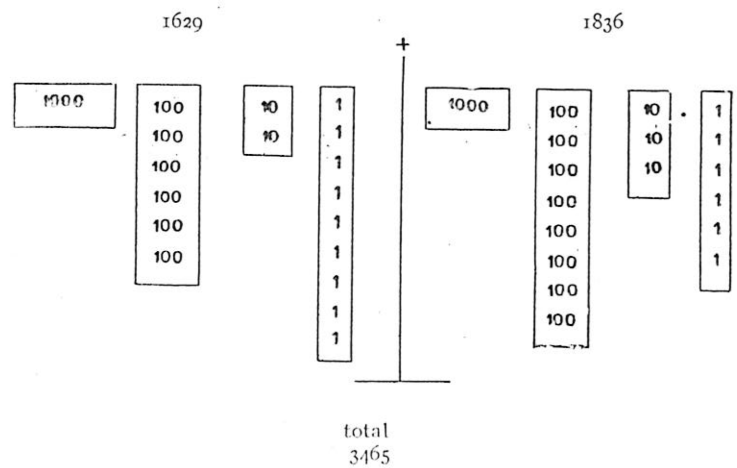


Fig. 43

Es decir, que en lugar del primitivo 3465, existen ahora las dos cantidades 1836 y 1629 : lo que demuestra que la substracción es una división en partes desiguales. En este caso el residuo es más vistoso que el número primitivo. Por ejemplo : aquí hay una fila de nueve unidades donde antes había cinco solamente y mientras en el número primitivo existían sólo cuatro centenas aquí hay ahora seis, y en el número que desaparece, ocho.

Con frecuencia, el niño queda sorprendido y, por lo mismo, vivamente interesado, al ver la expansión de los números obtenidos del primero, cada uno de los cuales tiene muchos elementos más que aquel del cual resultan. Aquí resalta la gran diferencia entre esa operación y la suma en la que, la integración de diez unidades inferiores para constituir una superior es el modo de operar, inverso al efectuarlo ahora. Si, por ejemplo, se suman los dos números que venimos considerando, volviendo a agrupar las unidades y centenas que a ellos pertenecen se vería desaparecer los grupos y el resultado total quedaría recogido dentro de la cantidad primitiva. Es el secreto y la clave del sistema decimal.

La sustracción se considera siempre entre dos números, pero, esta operación, es susceptible de ser continuada.

Obtenido un resíduo, pueden aún sustraérsele otras cantidades, hasta que el resíduo final, sea igual a cero, o sea, cuando no quede nada del número primitivo.

Por ejemplo, suponiendo la sustracción : $6859 - 4237 = 2622$

Se puede aun continuar la sustracción, sustrayendo del resto, la cantidad de 1975.

$$2622 - 1975 = 647$$

Y finalmente de este último resultado, puede sustraerse la cantidad 647.

Esta serie de restas sucesivas, se producen cuando, por ejemplo, se gasta una cantidad en varios usos o en varias ocasiones, hasta agotarla.

Puede aún efectuarse una nueva sustracción. La suma puede considerarse como subdividida en otras tantas partes desiguales :

$$6859 \left| \begin{array}{r} -\ 4237 \\ -\ 1975 \\ -\ 647 \end{array} \right.$$

Las sustracciones parciales serán :

$$6859 \begin{cases} -\ 4237 \\ 2622 \begin{cases} -\ 1975 \\ 647 \begin{cases} -\ 647 \\ 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

La división es una aplicación de este principio ; en ella se forman tantas divisiones parciales y sucesivas sobre los resíduos que van dejando cada una de las operaciones.

Existe, pues, una perfecta correspondencia, entre la operación de restar o sustraer (fragmentación de un conjunto en partes desiguales entre sí) y la división fragmentaria de un todo en partes iguales entre sí.

La diferencia consiste, en que en la sustracción, no se procede simultáneamente, si no, sucesivamente. En la segunda, va quedando sucesivamente una sola sustracción. De modo que la diferencia consiste en el hecho, no en el cálculo o en la operación, sino en el procedimiento.

LOS PROBLEMAS DE LA ARITMÉTICA

Puede decirse que los ejercicios indicados son una ilustración del sistema decimal, donde las cuatro operaciones, extendiéndose a los grandes números, se convierten en medio para enseñar el mecanismo.

En la base del sistema estudiado, se encuentra como clave la transmigración de unidades, que, se agrupan o escinden, distribuyéndose en partes. Pero siempre queda la evidencia de que las cantidades representadas por dos números, circulan sin desaparecer jamás. La prueba de las operaciones lo demuestra. Las operaciones con los números, contienen una demostración exacta del hecho que nada se crea ni se destruye, sino, que todo se mueve. La cifra parece correr tras la materia y con su mecanismo podría simbolizar el ciclo.

Aparte esta cuestión bien interesante, se pueden considerar otros hechos que caracterizan y, por lo mismo diferencian, las varias operaciones. Aquella acumulación de cantidades diferentes, como en la suma, o de cantidades iguales, como en la multiplicación, o el escindirse una cantidad en dos partes diversas, de las cuales, una sola es conocida y la otra representa una incógnita, como en la sustracción ; o finalmente, la equitativa distribución de una cantidad en partes tan rigurosamente iguales que, si existe un resto, antes se abandona que se utiliza en provecho de unos pocos, todo ello atrae como hecho práctico en sí mismo. Ni el número, ni el sistema númerico, tienen que ver con tales situaciones. Parecen hechos relacionados más bien con la vida y con los principios morales, que con la aritmética. Allí se encuentra el hombre frente a la materia. Mirando a través de esta luz aparece la vida social con sus acontecimientos. El negociante que ha ingresado durante el día muchas sumas diversas, por la noche hará una suma. En cambio, el taquillero de un teatro a precio fijo y, que por lo mismo, ha recibido muchas cantidades iguales, efectuará una multiplicación. Viceversa : la madre que tiene en su poder la asignación mensual intacta y que separa de ella el importe de la renta de la casa, efectuará una sustracción. En cambio, la cantidad destinada a pagar la pensión de sus tres hijos en el colegio, la dividirá en tres partes iguales. De este modo la vida social del hombre se organiza sobre las necesidades materiales que surgen a cada paso y presentan continuamente «problemas» que, solamente los números, pueden resolver de un modo claro y exacto. Esta existencia del número en la vida ordinaria, abre la puerta a los problemas de la aritmética. Presentados en las escuelas como una dificultad que se supera difícilmente, aquí se ofrecen como representantes del hecho mismo que da carácter y forma a las operaciones, y basta dejar un poco de espontaneidad a los niños que han hecho observaciones y razonamientos, para que los problemas se reconozcan en la vida social con la misma facilidad con que la luz, los colores y las flores se reconocen en la vida natural. En efecto, en nuestras escuelas, los niños resuelven en seguida y espontáneamente sus problemas y son frecuentemente frutos de su imaginación que se entrelazan con las composiciones literarias. Situaciones difíciles van con frecuencia a encontrar su epílogo en una operación aritmética y así el problema se funde con la realidad. Hemos observado que no todas las operaciones despiertan igual interés en la imaginación infantil ; es la sustracción la que más apasiona y la que se presenta generalmente como epílogo de los

«Problemas literarios». He aquí, por ejemplo, un tema literario, tratado por un niño de una escuela holandesa, que presento abreviado :

...Aquellos niños habían comido a hurtadillas algunas hermosas manzanas que estaban en el cesto, cuando oyeron decir «no os olvidéis de llevar esas treinta manzanas a la señora X. porque hoy cumple treinta años».

¡Ah ! Es preciso comprar las manzanas que faltan.

Pero ¿cuántas se han comido?

No lo recuerdan. Pero un niño exclama : «No tengáis miedo, basta con efectuar una sustracción».

La sustracción hace encontrar esta incógnita amenazadora y después sólo habrá que sumar las que quedan y las que se compren para completar y ver si suman treinta, con lo que se efectuará la comprobación.

PROGRESO

El conjunto de los ejercicios descritos trazan un plan que parece realizado. Las cuatro operaciones con los grandes números, la posesión clara de sistema decimal, la resolución de los problemas prácticos que se presentan en la vida ordinaria, hacen pensar en la frase del pequeño que decía, convencido : «Lo sé todo».

El progreso se realiza ahora en el detalle, y se hace sobre el análisis de lo que existe y logra interesar. El detalle asume importancia, porque hace penetrar en el conjunto visto externamente, pero con frecuencia asume la apariencia de un camino opuesto y se procede entonces del conjunto al detalle, de lo grande a lo pequeño, de lo complejo a lo sencillo.

Los ejercicios siguientes se refieren a un análisis de la multiplicación, operación que apareció fugazmente, sólo como un caso de adición uniforme.

LA MULTIPLICACION

El rasgo saliente de la multiplicación es el de una suma cuyos términos (sumandos) son iguales entre sí y es por ello la repetición de la misma cosa que se acumula. Otra característica es que repitiéndose el todo, se repiten las partes que lo componen. Y por último, se observa en ella que repitiéndose la misma cantidad, las partes pueden componerse en una forma rectangular.

En la segunda característica se ve su aspecto algebraico, y en la tercera el geométrico.

El concepto algebraico de la multiplicación es aquel que demuestra más claramente su esencia, y está representado por la fórmula :

$$n\,(a + b + c + \ldots) = na + nb + nc + \ldots$$

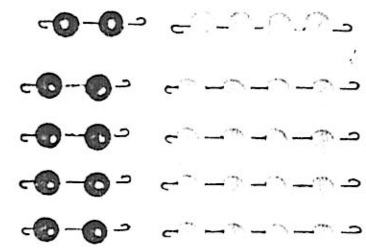


Fig. 44

Tomemos los pequeños bastones de perlas utilizados en el ejercicio de la serpiente y fijemos una cantidad mediante la unión de dos o más bastones, por ejemplo : 2 + 4.

Multiplicar esta cantidad por tres, por ejemplo, quiere decir repetirla tres veces, es decir ; tres veces los bastones amarillos, del cuatro y tres veces los bastones verdes de dos.

Igualmente se procederá para una cantidad compuesta de mayor número de bastones, por ejemplo, 6 + 2 + 3. Repetir esta cantidad dos veces equivale a repetir, dichas dos veces, todos los componentes de la misma.

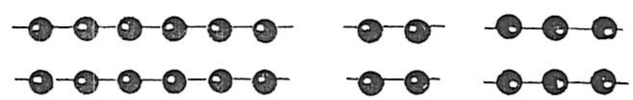


Fig. 45

El concepto geométrico de la multiplicación es el que parte de un punto que representa la unidad, que se repite un cierto número de veces asumiendo la disposición de una línea. Por ejemplo 1 × 6.

1 × 6

Fig. 46

y el número que constituye la línea, repitiéndose más veces con acumulación vertical, asume la forma de un rectángulo. Por ejemplo 6 × 4

6 × 4

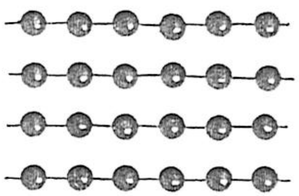
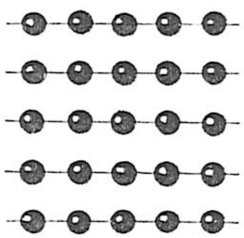


Fig. 47

o también, si la repetición acaece tantas veces como indica el número de las unidades que constituyen la línea, se obtiene la forma de un cuadrado. Por ejemplo: 5 × 5.



5 × 5

Fig. 48

El concepto geométrico de la multiplicación revela, pues, un orden en la disposición de los números que es la trabazón, el enlace entre la aritmética y la geometría.

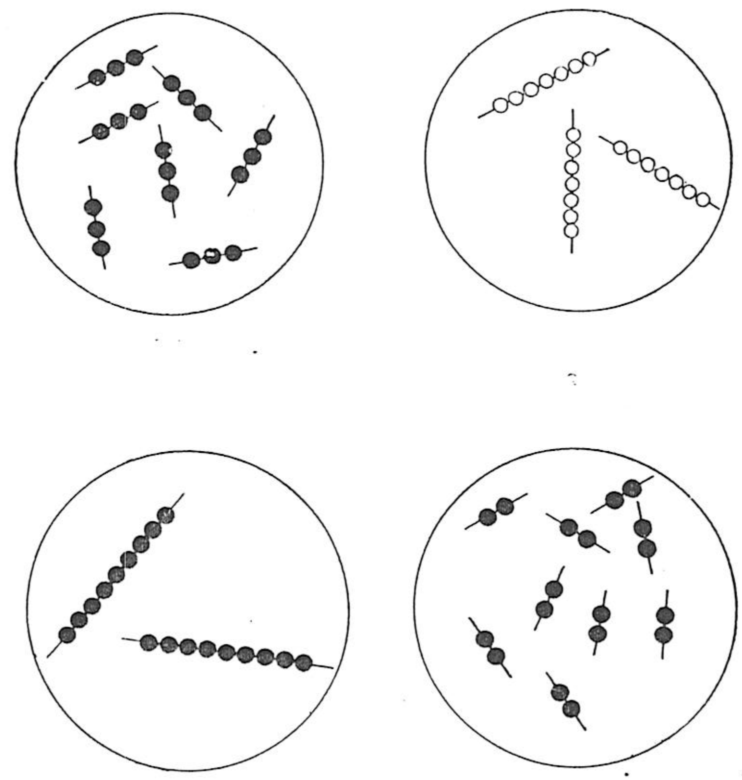
La multiplicación tiene, pues, una cantidad de unidades que se repite integralmente y que constituye el número *efectivo*. Este número se llama multiplicando porque se debe multiplicar. El otro número no representa en sí una cantidad a añadir, sino que indica simplemente las veces que el multiplicando debe ser repetido; este segundo número «índice de repetición» se llama multiplicador.

Cada una de las cosas antes descritas no se presentan al niño como definiciones, sino que se les ofrece bajo la forma de ejercicios distintos uno de otro, que se realizan utilizando el material y que se siguen paralelamente.

DISTINCION ENTRE LOS DOS TERMINOS, MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR

Las figuras siguientes:

3 × 7 7 × 3



9 × 2 2 × 9

Fig. 49

sirven para poner de relieve el significado diferente de los dos términos. En efecto, en la primera figura hay siete bastones de tres perlas que representan la multiplicación de 3 × 7; la figura adyacente, en cambio, representa tres bastones de siete perlas o sea la multiplicación de 7 × 3. En las figuras inferiores se ven a un lado nueve bastones de dos perlas, que representan la multiplicación de dos por nueve y dos bastones de nueve perlas que representan la multiplicación de nueve por dos.

Cuando se cuentan las unidades constitutivas de estos bastones, es decir, cuando se suman, se encuentran totales iguales, es decir, tres por siete igual a siete por tres y nueve por dos igual a dos por nueve. Lo que significa que la suma borra las distinciones evidentes en el planteamiento de una misma multiplicación. Esta confusión, o correlación de hechos evidentes, se enuncia generalmente diciendo que «en la multiplicación, el orden de factores no altera el producto».

Ejercicios de multiplicación.— El ejercicio siguiente sirve para referir la suma de los números de una multiplicación al sistema decimal, como se demuestra en las siguientes figuras.

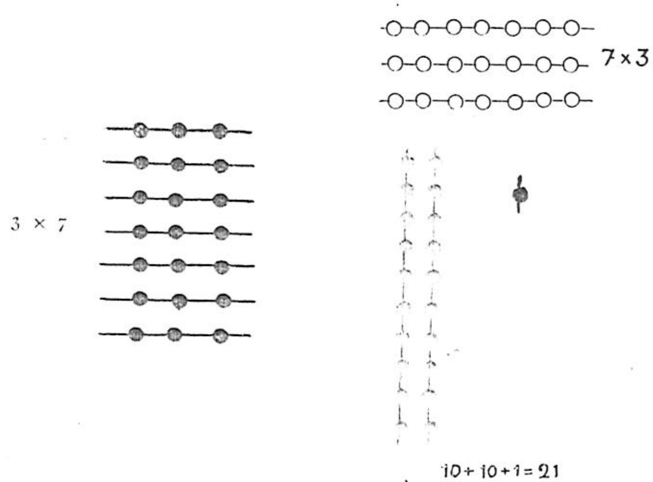


Fig. 50

Se colocan siete bastones de 3 perlas uno bajo el otro y se cuentan todas las unidades que sumarán veintiuno. Según el sistema decimal, esta cantidad corresponde, pues, a dos bastones de diez y una perla de uno. Disponiendo uno bajo el otro los tres bastones de siete y contando las unidades, se encuentran también, veintiuna, que en el sistema decimal se traduce igualmente en dos bastones de diez y una perla aislada ; la diferencia que era evidente en la multiplicación, viene cancelada en el producto. Lo mismo sucede con los otros

grupos que se corresponden. Poniendo en hilera los bastones de dos perlas y contando las unidades que los constituyen, se encuentra una suma de diez y ocho, que equivale a un bastón de diez, y uno de ocho. Colocando después los bastones de nueve uno debajo del otro y contando las unidades, se encuentran también diez y ocho que se traduce en el sistema decimal por el mismo grupo de perlas. De este modo el hecho de que el orden de los factores no altera el pro-

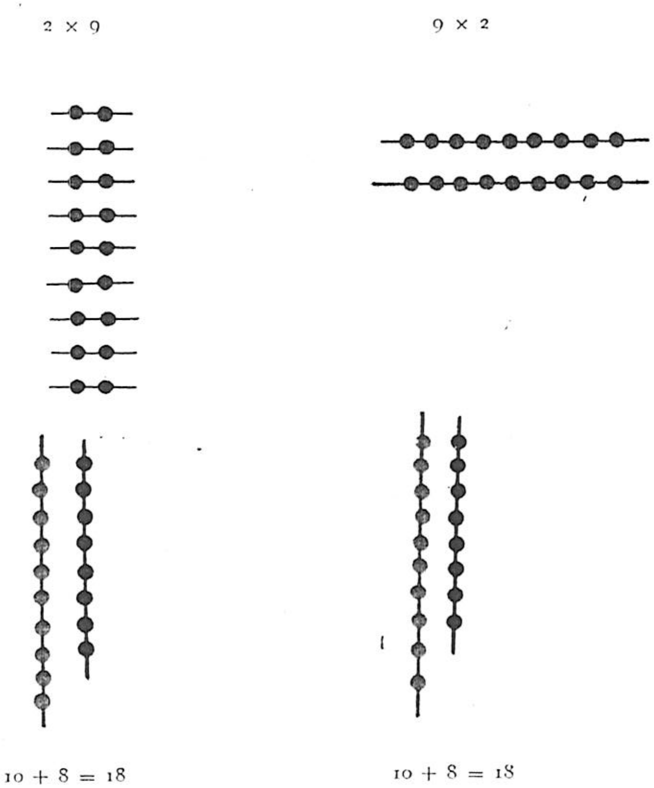


Fig. 51

ducto, y al propio tiempo, que la suma cancela, borra, el significado diverso de los factores, puede comprobarse con infinitos ejercicios.

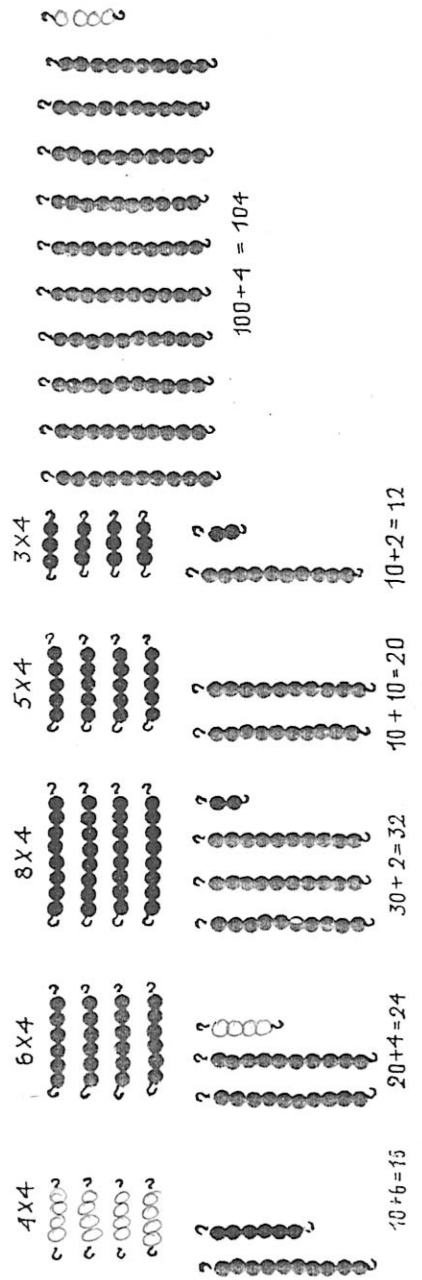


Fig. 52

Consideremos ahora la suma de varios números inferiores a nueve, por ejemplo 4, 6, 8, 5 y 3, cuyo total se quiere multiplicar por cuatro. Los bastones relativos a dichos números se colocan uno a continuación del otro, en línea horizontal, de un modo análogo al ejercicio de la serpiente. Es evidente, que para repetir este conjunto de bastones cuatro veces, precisa repetir cuatro veces cada uno de ellos.

Resultan de este modo varios grupos de bastones iguales, que numéricamente se pueden indicar así: 4×4, 6×4, 8×4, 5×4, 3×4. De este modo se plantea la multiplicación; ahora se trata de calcular grupo por grupo las unidades incluídas en cada uno y por cada diez se coloca un bastón de diez, mientras, el número inferior a diez se coloca al lado, en la forma que indica la figura. De este modo y, por medio del material de perlas, se han efectuado los siguientes cálculos: $4 \times 4 = 16$. $6 \times 4 = 24$. $8 \times 4 = 32$. $5 \times 4 = 20$. $3 \times 4 = 12$. Los resultados parciales así obtenidos se representan: no según el orden de la multiplicación, sino, según el sistema decimal, y no tienen otra diferenciación que la de decenas y unidades. Ahora se trata, de sumar estos resultados parciales. Para esto, se acumulan juntas todas las decenas, que en este caso son nueve, y aparte los bastones menores de diez, representados en este caso, por 6, 4, 2 y 2, para sumarlos conjuntamente. Cuando las unidades de los bastones lleguen a sumar 10, se sustituyen por un bastón de 10. En este caso el conjunto asciende a 14 y se sustituye por un bastón de 10 y otro de 4. Resultan así diez bastones de 10 que forman inmediatamente un cuadrado de 100, quedando libre únicamente un bastón de cuatro. El total resulta, pues, igual a ciento cuatro.

Semejantes ejercicios pueden repetirse un número indefinido de veces y vienen a fijar las varias operaciones parciales que se han acumulado en el conjunto de una multiplicación de un modo completo.

La multiplicación ordinaria, efectuada con grandes números según el sistema decimal, es una aplicación de dicho análisis. En efecto, un número decimal es la suma de cantidades pertenecientes a las distintas jerarquías y se puede representar por sus factores, descomponiendo dicho número. Por ejemplo, 2469 es igual a dos mil, cuatrocientos, sesenta, nueve. En vez de los bastones como antes, se usa en tal caso el material del sistema decimal, es decir: dos cubos, cuatro cuadrados, seis bastones y nueve perlas. Multiplicar este número por tres, quiere decir precisamente, tomar tres veces cada una de las cantidades representadas, es decir: (Fig. 53). tres veces dos cubos, tres veces cuatro cuadrados, tres veces seis bastones y tres veces nueve perlas. (a). Entonces se suman y se ordenan según el sistema decimal, (c) grupo por grupo, comenzando por las unidades, con la advertencia de que, a cada diez encontrado, desaparece el elemento de la jerarquía sobre la cual se cuenta