

Marcela Alejandra Juliani

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS ESTADOS LIMITES
NA CONFIGURAÇÃO ÓTIMA DE PÓRTICOS PLANOS
DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.
Orientador: Prof. Dr. Wellison José de Santana Gomes

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Juliani, Marcela Alejandra

Análise da influência dos estados limites na configuração ótima de pórticos planos de concreto armado / Marcela Alejandra Juliani ; orientador, Wellison José de Santana Gomes, 2018.

130 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Otimização. 3. Concreto armado. 4. Estados limites. 5. Algoritmos genéticos. I. Gomes, Wellison José de Santana. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Marcela Alejandra Juliani

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS ESTADOS LIMITES
NA CONFIGURAÇÃO ÓTIMA DE PÓRTICOS PLANOS
DE CONCRETO ARMADO**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 28 de fevereiro 2018.

Prof. Dr. Glicério Trichês
Coordenador

Prof. Dr. Wellison José de Santana Gomes
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denner Leonel
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo
(via videoconferência)

Prof. Dr. Leandro Fleck Fadel Miguel
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Ph.D. Roberto Caldas de Andrade Pinto
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e orientador Wellison José de Santana Gomes, pela sua dedicação e apoio, dando todo suporte necessário para a elaboração da pesquisa.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial ao professor Roberto Caldas de Andrade Pinto, que me auxiliou quando surgiram as mais variadas dúvidas, e a todos os membros da banca, por aceitarem o convite.

À minha família, pelo apoio e incentivo aos meus estudos.

Ao meu namorado Giancarlo Zibetti Mantovani, por todo amor e suporte ao longo de todos esses anos.

À FAPESC, pela contribuição financeira concedida para a realização deste estudo.

RESUMO

O projeto estrutural tem como objetivo a concepção de uma estrutura que seja capaz de suportar, de maneira segura, estável e sem deformações excessivas, as solicitações a que estará submetida durante a sua execução e utilização, e que seja economicamente viável. Portanto, o estudo da configuração das estruturas é imprescindível, dada sua influência no atendimento às verificações normativas, bem como no seu custo. Nesse cenário, técnicas de otimização são utilizadas com o intuito de obter estruturas ótimas para um determinado objetivo e que verifiquem determinadas restrições, o que tem sido objeto de diversos estudos. De acordo com a norma brasileira NBR 6118 (2014), no dimensionamento de estruturas de concreto armado devem ser sempre verificados simultaneamente os estados limites últimos (ELU) e os estados limites de serviço (ELS). Assim, percebe-se a importância do desenvolvimento de estudos que apontem a influência de tais estados limites no que seria a configuração ótima de uma estrutura. Nesse sentido, o presente trabalho propõe um esquema de otimização de pórticos planos de concreto armado que considera as restrições do ELU e do ELS. São analisadas as características ótimas das estruturas sujeitas às restrições dos dois estados limites juntos, como também das estruturas sujeitas a cada estado limite em separado. A função objetivo considerada consiste no custo dos elementos estruturais que compõem o pórtico. São elaboradas rotinas computacionais de verificação dos estados limites de vigas e de pilares, em ambiente MATLAB e de acordo com a norma NBR 6118 (2014), e são utilizados algoritmos genéticos para a otimização. A análise estrutural é realizada com o uso do *software* MASTAN2. Foram adotadas não-linearidades geométricas e física simplificada. A metodologia de otimização é aplicada a dois exemplos de pórticos: o primeiro com dois pavimentos e um vão, e o segundo com seis pavimentos e dois vãos, levando em ambos os casos a estruturas otimizadas que satisfazem às condições de projeto e que apresentam menores custos em relação às configurações iniciais tomadas como referência. Quanto às características ótimas relacionadas a cada tipo de estado limite, nota-se que as vigas e os pilares tendem a apresentar seções transversais maiores e mais armadas no caso do ELU, o qual possui esforços solicitantes maiores do que aqueles do ELS. Mesmo assim, muitas vezes a estrutura ótima relacionada ao ELU não satisfaz o ELS e vice-versa. Além disso, foi observado que as estruturas ótimas para o caso de restrição que considera ambos os estados limites,

são mais próximas das estruturas ótimas para o ELU do que para o ELS. Cabe destacar que apenas a inércia da seção bruta de concreto foi considerada no cálculo de deslocamentos e de esforços solicitantes. Isso pode ter impacto significativo nas verificações do ELS, que dependem diretamente dos deslocamentos calculados, e um impacto um pouco menor no ELU, no qual a influência da armadura é levada em conta ao se calcular os esforços resistentes.

Palavras-chave: Otimização. Concreto armado. Estados limites. Pórticos planos. Algoritmos genéticos.

ABSTRACT

The objective of structural design is the conception of a structure that is capable of supporting, in a safely, stable and without excessive deformations way, the actions and loads that will be subjected during its lifespan, and that is economically feasible. Therefore, the study of possible structural configurations is crucial and has a significant impact on costs and on the capability of the structure to meet the requirements. In this scenario, optimization techniques have been widely applied in order to obtain optimal structures for a given objective and which present proper performances. According to the Brazilian code NBR 6118 (2014), in the design of reinforced concrete structures, the Ultimate Limit State (ULS) and the Serviceability Limit State (SLS) must be checked. Thus, it becomes important to study the influence of such limit states on the optimal configuration of a structure. In this sense, the present dissertation thesis proposes an optimization scheme for reinforced concrete plane frames that considers the ULS and SLS constraints. The optimal characteristics of the structures subject to the constraints of the two limit states simultaneously, as well as the structures subject to each limit state, individually, are discussed. The objective function employed corresponds to the cost of the structural elements of the frame. Computational routines for the check of beams and columns limit states are implemented in MATLAB, following the requirements of NBR 6118 (2014), and genetic algorithms are applied for optimization. The structural analysis is performed by using the MASTAN2 software, taking into account geometric and physical nonlinearities. The optimization methodology is applied to two examples: a two-story and one-bay frame and a six-story and two-bay frame. In both cases, the methodology leads to optimized structures that meet the design requirements and present lower costs than an initial configuration taken as a reference. Regarding the optimal characteristics related to each type of limit state, it is noted that the beams and columns tend to have larger and more reinforced cross sections in the case of the ULS, which has larger loads than those of the SLS. Even so, optimal structures related to the ULS often do not satisfy SLS and vice versa. In addition, it is observed that the optimal structures considering both limit states are more similar to the optimal structures for the ULS than for the SLS. It is noteworthy that only the inertia of the entire cross-section of concrete was considered in the calculation of displacements

and of internal forces. This may have a significant impact on the SLS checks, which depend directly on the calculated displacements, and a smaller impact on the ULS, in which the influence of the reinforcement is taken into account when calculating the strength capacity.

Keywords: Optimization. Reinforced concrete. Limit states. Plane frames. Genetic algorithms.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	(A) Processo convencional; (B) Processo Otimizado.	24
Figura 2	Esquema do método semi-probabilístico.	29
Figura 3	Representação geométrica de um problema de otimização.	32
Figura 4	Analogia entre genética natural e algoritmos genéticos.	34
Figura 5	Esquema básico de um algoritmo genético.	36
Figura 6	Estrutura genérica de estudo.	50
Figura 7	Elemento de pórtico plano.	51
Figura 8	Diagrama tensão-deformação idealizado para concreto.	58
Figura 9	Diagramas de deformações e de tensões parábola-retângulo e retangular simplificado.	59
Figura 10	Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas.	60
Figura 11	Seção típica de uma viga e de um pilar.	63
Figura 12	Esquema das restrições.	65
Figura 13	Elemento de seção retangular e diagramas de tensões na seção solicitada para flexão simples.	66
Figura 14	Seção transversal no domínio 1.	69
Figura 15	Seção transversal no domínio 2.	69
Figura 16	Seção transversal no domínio 3.	70
Figura 17	Seção transversal no domínio 4.	71
Figura 18	Seção transversal no domínio 5.	71
Figura 19	Diagrama de interação $M_{Rd} \times N_{Rd}$	73
Figura 20	Pórtico plano - Exemplo I.	79
Figura 21	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo I: caso I.	82
Figura 22	Curvas de convergência - Exemplo I: caso I.	84
Figura 23	Curvas de convergência - Exemplo I: caso II.	85
Figura 24	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo I: caso III.	86
Figura 25	Curvas de convergência - Exemplo I: caso III.	88
Figura 26	Pórtico plano - Exemplo II.	91
Figura 27	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso I.	93
Figura 28	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso I.	94
Figura 29	Curvas de convergência - Exemplo II: caso I.	96

Figura 30	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso II. .	97
Figura 31	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso II. .	98
Figura 32	Curvas de convergência - Exemplo II: caso II.	100
Figura 33	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso III.	101
Figura 34	Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso III.	102
Figura 35	Curvas de convergência - Exemplo II: caso III.	104
Figura 36	Viga simplesmente apoiada.	119
Figura 37	Pórtico A: 1 vão e 6 pavimentos.	126
Figura 38	Pórtico B: 1 vão e 12 pavimentos.	127
Figura 39	Pórtico C: 2 vãos e 16 pavimentos.	128
Figura 40	Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico A.	129
Figura 41	Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico B.	130
Figura 42	Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico C.	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Coefficiente $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$: combinação última normal. .	55
Tabela 2	Valores do coeficiente γ_{f2} : Ψ_0, Ψ_1 ou Ψ_2	56
Tabela 3	Variáveis de projeto.	63
Tabela 4	Dados de entrada dos exemplos I e II.	77
Tabela 5	Casos de restrições.....	78
Tabela 6	Carregamento característico - Exemplo I.....	79
Tabela 7	Domínio - Exemplo I.	80
Tabela 8	Custo ótimo - Exemplo I: caso I.	83
Tabela 9	Custo ótimo - Exemplo I: caso III.....	87
Tabela 10	Carregamento característico - Exemplo II.....	90
Tabela 11	Domínio - Exemplo II.....	90
Tabela 12	Custo ótimo - Exemplo II: caso I.....	95
Tabela 13	Custo ótimo - Exemplo II: caso II.....	99
Tabela 14	Custo ótimo - Exemplo II: caso III.....	103
Tabela 15	Dados de entrada do estudo preliminar.....	119
Tabela 16	Resultados do estudo preliminar.	121
Tabela 17	Resultados das análises dos pórticos.....	129

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
ELU	Estado Limite Último
ELS	Estado Limite de Serviço
ELS-F	Estado Limite de Formação de Fissuras
ELS-W	Estado Limite de Abertura de Fissuras
ELS-DEF	Estado Limite de Deformações Excessivas
ELS-VE	Estado Limite de Vibrações Excessivas

LISTA DE SÍMBOLOS

S_k	Esforço solicitante característico
S_d	Esforço solicitante de cálculo
R_k	Esforço resistente característico
R_d	Esforço resistente de cálculo
γ_m	Coefficiente de ponderação das resistências
γ_f	Coefficiente de ponderação das ações
f	Função objetivo
n	Número de variáveis de projeto
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de projeto
Ω	Domínio do problema
\mathbf{g}	Vetor de restrições
m	Número de restrições
\mathbf{x}^*	Vetor de variáveis de projeto ótimo
\mathbf{P}	Matriz de população de indivíduos
p	Número de indivíduos de uma população
n_v	Número de vãos do pórtico
n_p	Número de pavimentos do pórtico
$q_{i,j}$	Carga vertical distribuída aplicada no vão i do pavimento j do pórtico
$Q_{k,j}$	Carga vertical pontual aplicada no pilar k do pavimento j do pórtico
H_j	Carga horizontal pontual aplicada no pavimento j do pórtico
\mathbf{f}	Vetor de forças nodais generalizadas
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais generalizados
EI_{sec}	Rigidez secante
E_{ci}	Módulo de elasticidade inicial do concreto
I_c	Momento de inércia da seção bruta de concreto
F_d	Valor de cálculo das ações para combinação última
$F_{d, serv}$	Valor de cálculo das ações para combinações de serviço
σ_c	Tensão à compressão no concreto
f_{cd}	Resistência de cálculo à compressão do concreto

ε_c	Deformação específica do concreto
ε_{c2}	Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico
ε_{cu}	Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
λ	Relação entre a profundidade y do diagrama retangular de compressão equivalente e a profundidade efetiva z da linha neutra
z	Altura da linha neutra
α_c	Parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão
A_s	Área da seção transversal da armadura longitudinal de tração
ε_s	Deformação específica do aço da armadura
M_{Sd}	Momento fletor solicitante de cálculo
σ_s	Tensão normal no aço da armadura
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento do aço da armadura
f_{yd}	Resistência de cálculo ao escoamento do aço da armadura
E_s	Módulo de elasticidade do aço da armadura
ε_{yd}	Deformação específica de cálculo de escoamento do aço
ε_u	Deformação específica do aço na ruptura
d	Altura útil da seção transversal
b	Largura da seção transversal
h	Altura da seção transversal
n_s	Número de barras da armadura longitudinal
ϕ_s	Diâmetro das barras da armadura longitudinal
n_{sw}	Número de barras da armadura transversal
ϕ_{sw}	Diâmetro das barras da armadura transversal
V_c	Volume de concreto
C_c	Custo unitário do concreto
M_s	Massa do aço da armadura longitudinal
C_s	Custo unitário da armadura longitudinal
M_{sw}	Massa do aço da armadura transversal
C_{sw}	Custo unitário da armadura transversal
A_f	Área de forma
C_f	Custo unitário da forma
n_{el}	Número de elementos estruturais do pórtico
l	Comprimento do elemento estrutural

V_{Sd}	Força cortante solicitante de cálculo
M_{Rd}	Momento fletor resistente de cálculo
R_{cc}	Força resultante de compressão no concreto
R_{st}	Força resultante de tração na armadura longitudinal de tração
V_{Rd2}	Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto
V_{Rd3}	Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal
$V_{\bar{c}}$	Parcela da força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça
θ	Ângulo de inclinação das diagonais de compressão em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural
α	Ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural
α_{v2}	Parâmetro para o cálculo da força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto
V_{sw}	Força cortante resistida pela armadura transversal
A_{sw}	Área da seção transversal dos estribos de força cortante
s	Espaçamento entre eixos dos estribos, medido segundo o eixo longitudinal da peça
f_{ywd}	Tensão na armadura transversal
f_{ctd}	Resistência de cálculo do concreto à tração
N_{Rd}	Força normal resistente de cálculo
N_{Sd}	Força normal solicitante de cálculo
a_v	Flecha
a_v^{lim}	Flecha limite
α_f	Coefficiente do cálculo da flecha de vigas, que considera a fluência
a_h	Deslocamento horizontal entre dois pavimentos consecutivos
a_h^{lim}	Deslocamento horizontal limite entre dois pavimentos consecutivos
a_h^t	Deslocamento horizontal no topo do pórtico
a_h^{tlim}	Deslocamento horizontal limite no topo do pórtico
l_{total}	Altura do pórtico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	25
1.1.1	Objetivo Geral	25
1.1.2	Objetivos Específicos	25
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	26
2	REVISÃO DE LITERATURA	27
2.1	CÁLCULO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO AR- MADO	27
2.1.1	Método de cálculo baseado nos estados limites ...	28
2.1.1.1	Estados limites últimos (ELU)	29
2.1.1.2	Estados limites de serviço (ELS)	30
2.2	OTIMIZAÇÃO	31
2.2.1	Definições	31
2.2.2	Algoritmos Genéticos (AGs)	34
2.2.2.1	População inicial	35
2.2.2.2	Função de aptidão	35
2.2.2.3	Escalonamento da aptidão	37
2.2.2.4	Seleção	38
2.2.2.5	Cruzamento	38
2.2.2.6	Mutação	39
2.2.2.7	Elitismo	39
2.2.2.8	Crítérios de parada	40
2.2.2.9	Vantagens e limitações dos algoritmos genéticos	40
2.3	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	41
2.3.1	Cenário da aplicação prática da otimização de es- truturas	47
2.3.2	Comentários	47
3	METODOLOGIA E FORMULAÇÃO DO PRO- BLEMA	49
3.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	49
3.2	ANÁLISE ESTRUTURAL	50
3.2.1	Não-linearidade geométrica	52
3.2.2	Não-linearidade física	53
3.3	COMBINAÇÕES DE AÇÕES	54
3.3.1	Combinações últimas	54
3.3.2	Combinações de serviço	55

3.4	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	57
3.4.1	Concreto	57
3.4.2	Aço	59
3.5	COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO.	60
3.6	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DO PÓRTICO	62
3.6.1	Variáveis de projeto	62
3.6.2	Função objetivo	64
3.6.3	Restrições	65
3.6.3.1	Restrições associadas aos estados limites últimos	65
3.6.3.2	Restrições associadas aos estados limites de serviço	73
3.6.3.3	Restrições Gerais	74
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	77
4.1	EXEMPLO NUMÉRICO I	78
4.1.1	Configuração ótima para os estados limites último e de serviço: caso I	81
4.1.2	Configuração ótima para o estado limite último: caso II	84
4.1.3	Configuração ótima para o estado limite de serviço: caso III	85
4.1.4	Discussão dos resultados	88
4.2	EXEMPLO NUMÉRICO II	89
4.2.1	Configuração ótima para os estados limites último e de serviço: caso I	92
4.2.2	Configuração ótima para o estado limite último: caso II	96
4.2.3	Configuração ótima para o estado limite de serviço: caso III	100
4.2.4	Discussão dos resultados	104
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	107
5.1	CONCLUSÕES	107
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	109
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A – Estudo preliminar: otimização de vigas	119
	APÊNDICE B – Validação da rotina de análise estrutural	125

1 INTRODUÇÃO

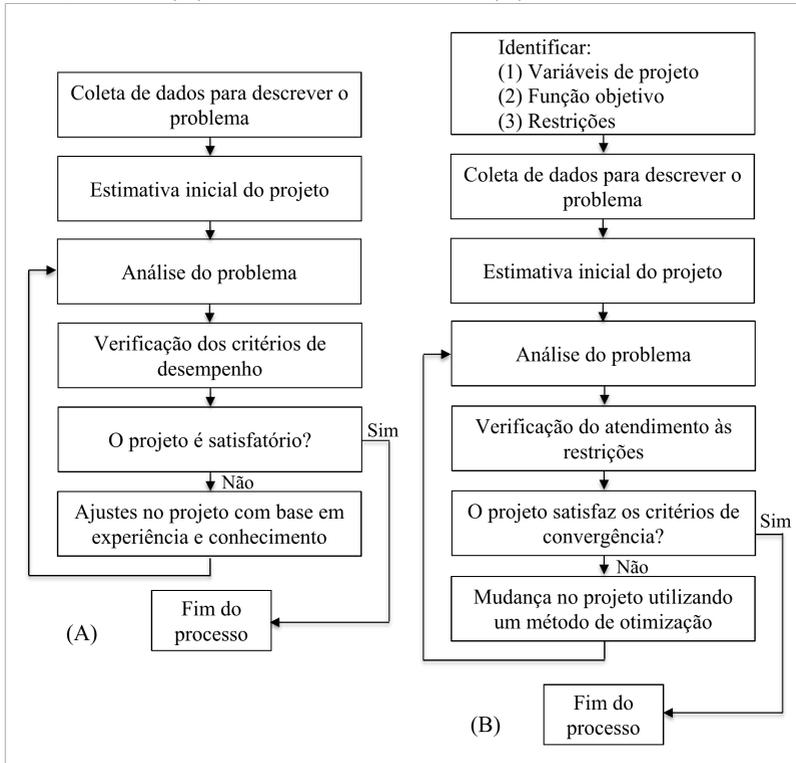
A busca por projetos mais eficazes e com custos menores tem aumentado em virtude do desenvolvimento de novas tecnologias e do crescimento da competitividade do mercado. Paralelamente, muitas estruturas de concreto armado têm sido projetadas e construídas no mundo, de maneira que esse sistema construtivo se tornou um dos mais utilizados. Nesse contexto, percebe-se a importância de estudos relacionados à concepção de projeto de estruturas de concreto armado.

Para garantir a segurança de um projeto estrutural, o engenheiro deve escolher uma opção de projeto que atenda às verificações normativas relacionadas à sua finalidade. Entretanto, em vista do grande número de variáveis envolvidas em um projeto de estruturas de concreto armado, existem várias configurações distintas que podem atender às condições exigidas, com diferentes custos e desempenhos. Muitas vezes, a escolha de uma configuração não é simples, o que torna difícil a obtenção de um projeto ótimo a partir do processo convencional. Nesse cenário, técnicas de otimização têm sido utilizadas com esse propósito. A Figura 1 compara o processo convencional de elaboração de projetos estruturais com o processo otimizado.

Como consequência, diversos estudos na área de otimização de estruturas de concreto armado têm sido desenvolvidos nas últimas décadas, com o intuito de obter um projeto com parâmetros ótimos, geralmente relacionados ao custo mínimo da estrutura: Vianna (2003); Kwak e Kim (2008); Camp e Huq (2013); Akin e Saka (2015); Aldwaik e Adeli (2016); Tapao e Cheerarot (2017); entre outros. Muitos destes trabalhos utilizam algoritmos genéticos (AGs) na otimização: Leps e Sejnoha (2003); Camp, Pezeshk e Hansson (2003); Govindaraj e Ramasamy (2005); Kwak e Kim (2009); Mingqi e Xing (2011); Rosa Filho (2015). Entretanto, há carência em estudos que discutem as características ótimas encontradas e suas relações com as verificações normativas.

A maioria das normas atuais, incluindo a norma brasileira para projeto de estruturas de concreto (NBR 6118, 2014), se baseia no conceito de estados limites. A NBR 6118 (2014) determina que a estrutura projetada deve satisfazer simultaneamente os estados limites últimos (ELU) e os estados limites de serviço (ELS). Pode-se então destacar a importância de uma análise da influência da configuração da estrutura no atendimento de tais estados limites, com o intuito de obter um projeto com características adequadas à sua finalidade, isto é, que seja

Figura 1 – (A) Processo convencional; (B) Processo Otimizado.



Fonte: Adaptado de Arora (2004).

seguro e que apresente um custo mínimo.

Em vista disso, o presente trabalho propõe analisar a configuração ótima de pórticos planos de concreto armado, por meio da otimização baseada no custo dos elementos estruturais, considerando dois grupos de restrições: o primeiro relacionado ao ELU e o segundo ao ELS. São discutidas as características ótimas das estruturas sujeitas a cada grupo de restrições individualmente, bem como das estruturas sujeitas aos dois grupos de restrições simultaneamente. São verificados o estado limite último de esgotamento da capacidade resistente dos elementos estruturais e o estado limite de serviço de deformações excessivas, em que, este último, inclui a verificação das flechas das vigas e dos deslocamentos horizontais do pórtico. As variáveis de projetos consideradas são as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais e a

quantidade de armadura longitudinal e transversal. Para uma melhor representação do comportamento real da estrutura, propõe-se realizar análises não-lineares físicas e geométricas, dado que estes fatores podem ter grande impacto na resposta estrutural.

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A principal motivação dessa dissertação é ampliar os estudos sobre a concepção de projetos de estruturas de concreto armado por meio de uma análise da influência das restrições normativas nas características ótimas dos elementos estruturais, bem como contribuir para o desenvolvimento de pesquisas em otimização de estruturas de concreto armado a partir da elaboração de uma ferramenta computacional capaz de otimizar o custo das mesmas. A escolha do pórtico plano ocorre por se tratar de uma estrutura com grande aplicação prática, e por envolver um comportamento estrutural global, com dois tipos distintos de elementos (vigas e pilares).

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do presente trabalho consiste em analisar a influência dos estados limites na configuração ótima de estruturas de concreto armado, relacionada ao custo mínimo.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- a) Elaborar rotinas computacionais em MATLAB para a verificação de estados limites dos elementos de pórticos planos de concreto armado, de acordo com as prescrições da norma NBR 6118 (2014);
- b) Minimizar, com o uso de um AG, o custo de pórticos planos, sujeitos a dois grupos de restrições individualmente - o primeiro grupo relacionado ao ELU e o segundo ao ELS -, bem como dos pórticos sujeitos a esses dois grupos de restrições simultaneamente;
- c) Comparar e analisar as principais características das estruturas ótimas, de acordo com cada grupo de restrição.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Os capítulos que seguem são organizados da seguinte maneira:

- Capítulo 2: *Revisão de literatura* - Expõe uma abordagem geral da literatura sobre os assuntos tratados no trabalho, para melhor compreensão da pesquisa desenvolvida;
- Capítulo 3: *Metodologia e formulação do problema* - Apresenta o problema estudado, bem como as considerações dos modelos dos materiais, da análise estrutural e do comportamento da estrutura. É declarada a formulação dos aspectos da otimização dos elementos do pórtico plano;
- Capítulo 4: *Exemplos numéricos* - Descreve os exemplos estudados, e os resultados obtidos são apresentados e avaliados;
- Capítulo 5: *Conclusões e sugestões para trabalhos futuros* - Apresenta as conclusões obtidas e as sugestões de estudos complementares.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo apresenta uma abordagem da literatura sobre o método de cálculo de estruturas de concreto armado, tratado na NBR 6118 (2014), e sobre otimização, bem como conceitos gerais relacionados a estes temas. Além disso, é feito um levantamento do estado da arte da otimização de estruturas de concreto armado.

2.1 CÁLCULO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Usualmente, o projeto de estruturas de concreto armado pode ser resumido nas seguintes etapas: inicialmente é realizado o levantamento das cargas que irão atuar na estrutura ao longo de sua vida útil e efetua-se o pré-dimensionamento dos elementos, no qual se determina as dimensões iniciais das seções das peças; posteriormente, são consideradas as possíveis combinações de ações e são efetuadas análises estruturais para se obter os esforços internos nos elementos estruturais; em seguida, dimensionam-se as armaduras de cada elemento estrutural, para o estado limite último, e verificam-se os estados limites de serviço; caso a estrutura final não atenda alguma das verificações, redimensiona-se o elemento e repete-se o processo até que esta esteja adequada aos critérios.

De acordo com Carvalho e Filho (2015), o principal objetivo do cálculo estrutural é impedir a ruína da estrutura, a qual não compreende apenas o perigo de ruptura, mas também as situações em que a edificação não apresenta um estado de utilização satisfatório, devido a fissuras inaceitáveis, a deformações excessivas, etc. Ou seja, o intuito do cálculo estrutural é garantir que a estrutura, durante sua vida útil, seja segura e proporcione desempenho adequado em serviço.

Para isso, a NBR 6118 (2014) define que sejam respeitadas as condições analíticas de segurança, as quais estabelecem que as resistências não podem ser menores que as solicitações e devem ser verificadas em relação a todos os estados limites. Também é definido que devem ser respeitadas as condições construtivas, relativas ao detalhamento, ao controle dos materiais e ao controle de execução da obra.

2.1.1 Método de cálculo baseado nos estados limites

Conceitualmente, um estado limite é dado pela situação (limite) a partir da qual um elemento estrutural não mais atende a um de seus objetivos de projeto, isto é, quando uma estrutura deixa de satisfazer qualquer uma das finalidades de sua construção. Cada maneira diferente que possa levar a estrutura a uma situação indesejável é denominada, genericamente, de um modo de falha, e cada modo de falha dá origem a um estado limite.

O método dos estados limites com aplicação de coeficientes de segurança é um processo simplificado de verificação da segurança, caracterizado como método semi-probabilístico, que é um meio termo entre o ideal da teoria probabilística pura e da ultrapassada teoria das tensões admissíveis (GRAZIANO, 2005). De acordo com Carvalho e Filho (2015), a ideia do método resume-se em:

a) Adotar valores característicos para as resistências e para as ações. Dessa maneira, subentende-se que as resistências e as ações efetivas podem ser, respectivamente, inferiores e superiores aos seus valores característicos;

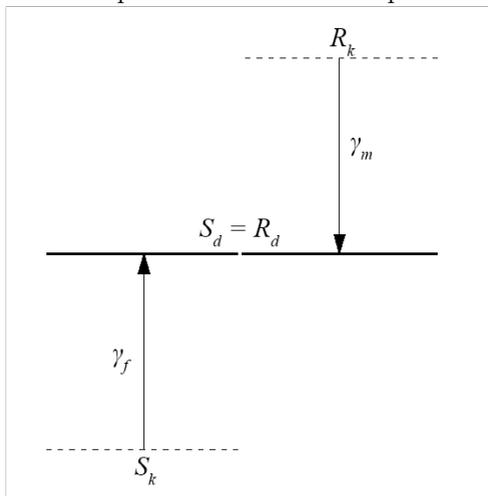
b) Levar em conta as demais incertezas existentes no cálculo estrutural por meio da minoração das resistências e majoração das ações, obtendo-se assim, as resistências de cálculo e as ações de cálculo.

A Figura 2 mostra o esquema do método abordado, onde S_k é o esforço solicitante característico, S_d é o esforço solicitante de cálculo, R_k é o esforço resistente característico, R_d é o esforço resistente de cálculo e γ_m e γ_f são os coeficientes de ponderação das resistências e das ações, respectivamente. Considera-se que a iminência da ruína ocorre quando o esforço solicitante é igual ao resistente.

O projeto de uma estrutura, fundamentado no uso de coeficientes de segurança para tratar as incertezas, é seguro, desde que o projeto seja semelhante àqueles para os quais os coeficientes foram calibrados, apesar desta abordagem não permitir medir tal segurança, ou seja, determinar probabilidades de falha.

A norma brasileira vigente estabelece que devem ser considerados os estados limites últimos e de serviço, conforme descritos a seguir.

Figura 2 – Esquema do método semi-probabilístico.



Fonte: Elaborada pela autora.

2.1.1.1 Estados limites últimos (ELU)

De acordo com a norma brasileira de ações e segurança nas estruturas (NBR 8681, 2003), os estados limites últimos estão relacionados a qualquer situação que determine a paralisação, no todo ou em parte, do uso da estrutura. Por outro lado, a norma europeia, Eurocode (1990), classifica como ELU os estados que dizem respeito à segurança de pessoas e/ou à segurança das estruturas.

Na verificação da segurança das estruturas, a NBR 6118 (2014) estabelece que sejam considerados os estados limites últimos:

- a) Da perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- b) De esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais e tangenciais, admitindo-se a redistribuição de esforços internos, e admitindo-se, em geral, as verificações separadas das solicitações normais e tangenciais;
- c) De esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos de ordem superior, denomina-

dos usualmente de efeitos de segunda ordem;

d) Provocado por solicitações dinâmicas;

e) De colapso progressivo;

f) De esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando exposição ao fogo;

g) De esgotamento da capacidade resistente da estrutura, considerando ações sísmicas;

h) Outras situações últimas que possam ocorrer em casos particulares.

2.1.1.2 Estados limites de serviço (ELS)

A NBR 8681 (2003) define que os estados limites de serviço caracterizam-se por situações que, devido à sua ocorrência, repetição ou duração, geram efeitos estruturais que não atendem às condições especificadas para o uso normal da estrutura, ou que indicam comprometimento da durabilidade da mesma. De acordo com o Eurocode (1990), os estados limites que dizem respeito ao desempenho, ao conforto do usuário e à aparência da estrutura, devem ser classificados como estados limites de serviço.

Segundo a NBR 6118 (2014), as estruturas de concreto armado devem ser verificadas em relação a alguns dos seguintes estados limites de serviço:

a) Formação de fissuras (ELS-F): caracterizado pela situação em que se inicia a formação das fissuras;

b) Abertura das fissuras (ELS-W): caracterizado pela situação em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos limites máximos permitidos;

c) Deformações excessivas (ELS-DEF): caracterizado pela situação em que as deformações atingem os limites máximos permitidos;

d) Vibrações excessivas (ELS-VE): caracterizado pela situação

em que as vibrações atingem os limites máximos permitidos.

2.2 OTIMIZAÇÃO

A seguir, apresenta-se um resumo sobre os principais conceitos de otimização e dos algoritmos genéticos.

2.2.1 Definições

Os problemas de otimização consistem na maximização ou minimização de uma função objetivo, dependente de uma ou mais variáveis, as quais pertencem a um domínio sujeito ou não a restrições.

De acordo com Arora (2004), a formulação de um problema de otimização pode ser resumida nas etapas de: declaração do problema; determinação dos dados de entrada; definição das variáveis de projeto; definição do critério a ser otimizado; identificação das restrições. Para melhor compreensão desse problema, é necessário definir os seguintes conceitos:

- **Função objetivo:** É uma função que mede o desempenho do problema, ou seja, quantifica a performance do sistema em estudo. O objetivo pode ser o custo, o tempo, a massa, ou qualquer outro parâmetro que pode ser expresso por um único número (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Essa função pode ser escrita como: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde n é o número de variáveis de projeto;
- **Variáveis de projeto:** São os parâmetros que se alteram no decorrer do processo de otimização, até que seja encontrado o vetor de parâmetros que apresente o melhor desempenho, de acordo com o objetivo definido inicialmente. As variáveis podem ser representadas pelo vetor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, onde x_i são as variáveis, com $i = 1, \dots, n$, e $\Omega = \mathbb{R}^n$ é o domínio do problema;
- **Restrições:** São as limitações impostas no problema, as quais são expressas em função das variáveis de projeto e delimitam o domínio da função objetivo. As restrições podem ser representadas pelo vetor $\mathbf{g} = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]$, em que $g_j(\mathbf{x})$ são as funções restrições, com $j = 1, \dots, m$, onde m é o número de restrições do problema, isto é, \mathbf{g} é um vetor de funções que dependem de \mathbf{x} (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

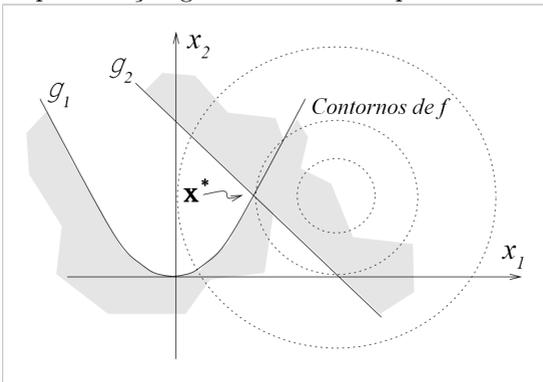
Tais restrições são funções de igualdade ou de desigualdade.

Em resumo, um problema de otimização que busque a minimização da função objetivo e que possua restrições de desigualdade, por exemplo, pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \\ \text{Que minimize } f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeita a } \mathbf{g} = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})] \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

A Figura 3 mostra a representação geométrica de um exemplo de problema de otimização com duas variáveis de projeto e duas restrições, onde \mathbf{x}^* é o ponto ótimo.

Figura 3 – Representação geométrica de um problema de otimização.



Fonte: Adaptado de Nocedal e Wright (1999).

As variáveis podem ser classificadas como contínuas ou discretas. As contínuas podem assumir qualquer valor real dentro do domínio, enquanto que as discretas assumem somente determinados valores, especificados em uma lista de valores permitidos.

Quanto à convergência, os algoritmos de otimização podem convergir para ótimos globais ou locais. Um ótimo global ocorre em \mathbf{x}^* quando a função objetivo é mais bem avaliada nesse ponto do que em qualquer outro \mathbf{x} do domínio. Quando essa afirmação passa a ser válida apenas para uma região próxima a \mathbf{x}^* , e não mais para todo o domínio, ocorre um ótimo local em \mathbf{x}^* (ARORA, 2004).

A função objetivo pode ser classificada de acordo com seu com-

portamento. Uma função é dita convexa quando satisfaz a seguinte inequação: $f(\tau \mathbf{x}^{(2)} + (1 - \tau)\mathbf{x}^{(1)}) \leq \tau f(\mathbf{x}^{(2)}) + (1 - \tau)f(\mathbf{x}^{(1)})$, para $0 \leq \tau \leq 1$, onde $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são quaisquer dois pontos do domínio. O negativo de uma função convexa, é uma função côncava. Quando a função objetivo apresenta uma dessas características, o problema de otimização pode ser resolvido por meio de métodos matemáticos, os quais têm sua convergência garantida para um ótimo global. Caso contrário, não é possível provar que o algoritmo converge para um ótimo global.

Os métodos de otimização podem ser divididos em duas categorias: determinísticos e estocásticos. Nos métodos determinísticos, o resultado da otimização é determinado a partir de um conjunto de ações sistemáticas e de teoremas matemáticos, de modo que tais métodos sempre encontram a mesma resposta para um problema, se partirem dos mesmos dados iniciais. O sucesso deste tipo de método pode ser garantido apenas para funções que satisfazem certas condições. Em contrapartida, os métodos estocásticos têm grande influência da aleatoriedade, visto que no processo de otimização algumas escolhas são feitas com base em valores “sorteados” durante a execução do código. Assim, esse tipo de método pode ou não encontrar a mesma resposta para um problema, mesmo partindo dos mesmos dados iniciais. Uma desvantagem dos métodos determinísticos é que, para a maioria dos problemas práticos, eles convergem para ótimos locais; por outro lado, os métodos estocásticos, que tendem a uma busca global, possuem elevado custo computacional.

Os métodos de otimização também podem ser classificados de acordo com as informações da função objetivo utilizadas para resolver o problema. Métodos de ordem zero utilizam somente o valor da função objetivo. Métodos de primeira ordem utilizam, além do valor da função objetivo, informações de derivadas de primeira ordem (gradiente). Métodos de segunda ordem utilizam, além das informações mencionadas, derivadas de segunda ordem (matriz Hessiana).

No presente trabalho, são adotadas variáveis discretas com o intuito de encontrar soluções mais próximas das habituais de projeto. Assim, é utilizado um método de otimização estocástico, dada a dificuldade de aplicação direta de alguns métodos determinísticos em problemas discretos.

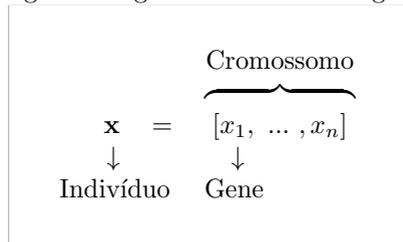
2.2.2 Algoritmos Genéticos (AGs)

Os algoritmos genéticos são métodos estocásticos de otimização de ordem zero, baseados na teoria da evolução das espécies, declarada por Charles Darwin no século XIX (GOLDBERG, 1989). Tal teoria explica que, na natureza, os indivíduos de uma população competem uns com os outros por recursos como alimento e abrigo. Também, em uma mesma espécie, os indivíduos competem para atrair companheiros para a reprodução. Assim, indivíduos mais aptos tem mais chances de sobreviver e produzem um número maior de descendentes, o que resulta em uma seleção de indivíduos. Na reprodução, uma combinação das “boas características” de cada progenitor pode produzir indivíduos “melhores”, cuja aptidão é melhor do que a dos pais. Após algumas gerações, as espécies evoluem e se adaptam cada vez mais ao seu ambiente (SIVANANDAM; DEEPA, 2008).

Em 1975, John Holland descreveu como aplicar os princípios da evolução das espécies em problemas de otimização. Holland desenvolveu os primeiros algoritmos genéticos, que são métodos metaheurísticos de busca, baseados na “sobrevivência dos mais aptos”. Desde então, os AGs mostraram ser uma boa ferramenta para solucionar problemas de otimização.

Os algoritmos genéticos utilizam alguns termos, em analogia à genética natural (Figura 4): o indivíduo é uma solução, a qual pode ou não ser viável; a população é um conjunto de soluções; o cromossomo, constituído por um conjunto de genes, é a codificação que representa o indivíduo; o gene é a codificação que representa a variável.

Figura 4 – Analogia entre genética natural e algoritmos genéticos.



Fonte: Elaborada pela autora.

De maneira geral, o método dos algoritmos genéticos cria uma população inicial aleatória e posteriormente realiza as seguintes etapas: inicialmente, o algoritmo avalia a aptidão de cada indivíduo da população

atual, que é diretamente relacionada à função objetivo em questão; em seguida, seleciona alguns desses indivíduos com base no valor da sua aptidão, denominando-os pais; posteriormente, filhos são produzidos a partir de mudanças nas características de um único pai (mutação) ou pela combinação de características de um par de pais (cruzamento); após, os indivíduos com as melhores aptidões da população atual são escolhidos como “membros da elite” (elitismo); por fim, a população atual é substituída pelos indivíduos gerados na mutação, no cruzamento e no elitismo, formando a nova geração da população. As etapas são repetidas até que algum critério de parada seja satisfeito. A Figura 5 mostra um esquema básico do funcionamento de um AG.

Nos próximos tópicos, são apresentados com mais detalhes conceitos e operadores do algoritmo utilizado no presente trabalho, disponível no MATLAB. Essas seções foram desenvolvidas com base no manual do usuário (MATHWORKS, 2016), bem como nos autores citados no decorrer do texto.

2.2.2.1 População inicial

A população pode ser representada por uma matriz \mathbf{P} escrita como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p,1} & \cdots & x_{p,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

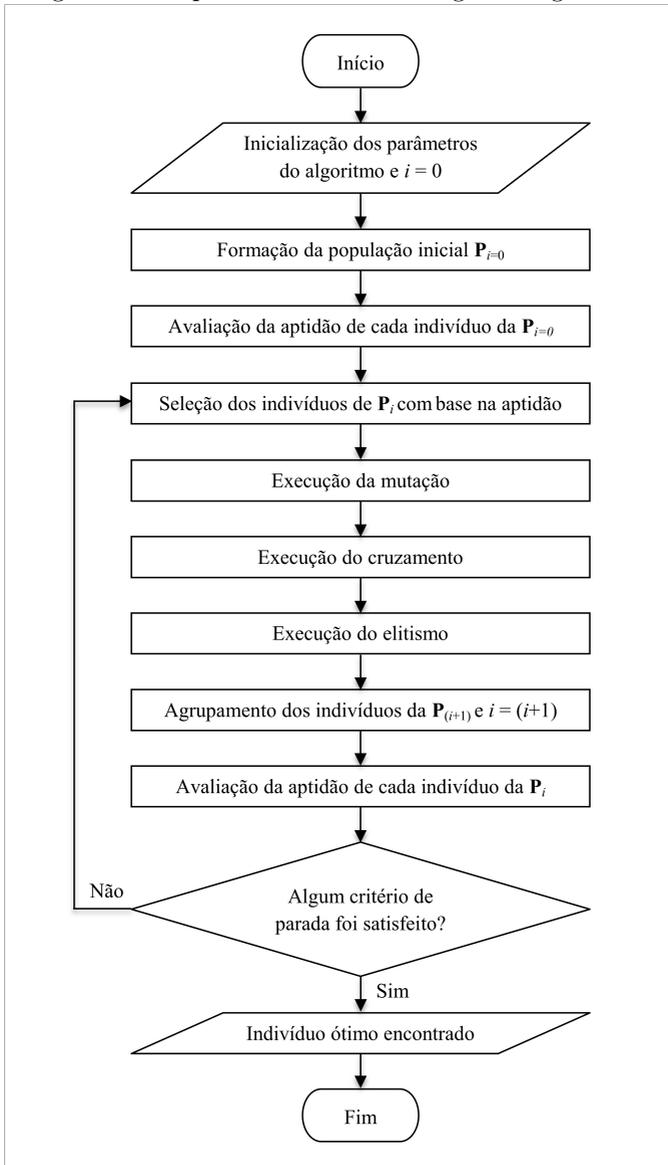
em que p é o número de indivíduos que constituem \mathbf{P} .

A população inicial é o conjunto de indivíduos que compõem a primeira amostra de soluções. O algoritmo gera aleatoriamente uma população inicial de p indivíduos segundo uma distribuição uniforme dentro do domínio, apesar de haver outras maneiras de efetuar a geração inicial.

2.2.2.2 Função de aptidão

A função de aptidão, que é a função que se deseja otimizar (função objetivo), atribui para cada indivíduo de uma população, uma medida do quão boa essa solução é em relação ao problema estudado. Esse valor é a informação quantitativa que o algoritmo utiliza para guiar a busca da solução ótima. A aptidão serve de critério para a classificação dos indivíduos, de modo que indica suas chances de sobrevivência e de

Figura 5 – Esquema básico de um algoritmo genético.



Fonte: Elaborada pela autora.

reprodução. Quando o objetivo do problema é encontrar o mínimo de uma função, o indivíduo ótimo é aquele que possui o menor valor de aptidão.

Entretanto, para incorporar as restrições ao problema de otimização, o algoritmo genético atribui uma penalização à aptidão de um indivíduo, quando essa solução não atende as restrições. A aptidão do i -ésimo indivíduo da população pode ser descrita por

$$\text{Aptidão } (\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}^{(i)}), & \text{se } \mathbf{x}^{(i)} \text{ é viável;} \\ f_{\text{pior}} + \sum_{j=1}^{\mu} |\bar{g}_j(\mathbf{x}^{(i)})|, & \text{se } \mathbf{x}^{(i)} \text{ é inviável.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Dessa maneira, se o indivíduo é viável, a função de aptidão é a função objetivo. Se o indivíduo é inviável, a função de aptidão é o valor da função objetivo da pior solução viável atualmente disponível na população (f_{pior}), mais uma soma das violações de restrições, em que \bar{g} são as restrições violadas e μ é a quantidade dessas restrições (DEEP et al., 2009).

2.2.2.3 Escalonamento da aptidão

O escalonamento da aptidão converte o valor da aptidão bruta, que resulta da função de aptidão, para um valor dentro de um intervalo que é adequado para a função de seleção.

A seleção de indivíduos com base na aptidão bruta pode gerar algumas situações indesejadas: quando a aptidão de algum indivíduo se destaca das demais, essa solução reproduz muitos filhos e impede que o AG explore outras áreas do domínio; por outro lado, quando ocorre pouca variação na aptidão dos indivíduos, tais indivíduos têm, aproximadamente, a mesma chance de reprodução, o que faz com que a busca progrida lentamente.

Dessa maneira, o escalonamento da aptidão é uma forma de se obter uma melhor distribuição desse parâmetro entre os indivíduos da população. A função de escalonamento utilizada, denominada *Rank*, faz uma classificação dos indivíduos com base na aptidão: a classificação do indivíduo com melhor aptidão é 1, do segundo melhor é 2, e assim por diante. O valor da aptidão escalonada correspondente a um indivíduo com classificação r é proporcional a $1/\sqrt{r}$.

Em problemas de minimização da função objetivo, os indivíduos com valores de aptidão mais baixos tem valores de aptidão escalonados

mais altos. A função de seleção utiliza os valores de aptidão escalonados para selecionar os indivíduos pais.

2.2.2.4 Seleção

A seleção é um dos operadores dos algoritmos genéticos. É por meio desse operador que são escolhidos os indivíduos que irão reproduzir e, conseqüentemente, propagar os seus genes para a próxima geração. A função de seleção escolhe os pais para a próxima geração com base nos seus valores de aptidão escalonados. Destaca-se que nesse processo ocorre apenas a seleção de indivíduos existentes, ou seja, não há geração de novos indivíduos.

O operador de seleção por torneio, adotado no presente trabalho, escolhe os pais a partir de torneios entre k soluções aleatórias da população, onde k é o número de indivíduos participantes do torneio, cujo valor adotado é igual a 2. A melhor solução de cada torneio é escolhida como um pai.

2.2.2.5 Cruzamento

O cruzamento (*crossover*) é um processo capaz de produzir um filho a partir de um par de pais. Este operador é aplicado com o intuito de gerar descendentes melhores do que os indivíduos atuais. Nessa etapa, características de dois indivíduos (pais) são combinadas, de modo que um terceiro indivíduo (filho) é gerado.

O operador de cruzamento Laplace é definido da seguinte maneira: dois indivíduos filhos, $\bar{\mathbf{x}}^{(1)} = [\bar{x}_1^{(1)}, \dots, \bar{x}_n^{(1)}]$ e $\bar{\mathbf{x}}^{(2)} = [\bar{x}_1^{(2)}, \dots, \bar{x}_n^{(2)}]$, são gerados a partir de dois indivíduos pais, $\mathbf{x}^{(1)} = [x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}]$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}]$, por meio da equação

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{(1)} &= x_i^{(1)} + \beta_i |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \\ \bar{x}_i^{(2)} &= x_i^{(2)} + \beta_i |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $i = 1, \dots, n$ e β_i , que satisfaz a distribuição de Laplace, é obtido por

$$\beta_i = \begin{cases} \zeta - \chi \log(\omega_i), & v_i \leq 1/2 \\ \zeta + \chi \log(\omega_i), & v_i > 1/2 \end{cases} \quad (2.5)$$

em que ω_i e v_i são números gerados aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme entre os limites 0 e 1, ζ é o parâmetro de locação,

assumido igual a 0, e χ é o parâmetro de escala, assumido igual a 0,35 (DEEP et al., 2009).

2.2.2.6 Mutação

O operador de mutação é utilizado para provocar mudanças aleatórias nos indivíduos e, por consequência, acrescentar diversidade à população. Nessa etapa, as características de um indivíduo (pai) são alteradas aleatoriamente, de modo que um outro indivíduo (filho) é gerado. Essa operação é realizada com intuito de buscar áreas inexploradas do domínio e evitar convergência prematura em uma solução ótima local. Ao mesmo tempo, uma maior frequência desse operador pode destruir informações importantes contidas na população. Dessa maneira, a mutação ocorre apenas em uma pequena parcela da população.

A mutação exponencial, que se baseia na distribuição exponencial, cria um indivíduo filho $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ nas vizinhanças de um indivíduo pai $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$. É gerado inicialmente um número aleatório s que segue uma distribuição exponencial, $s = (s_i)^e$, em que s_i é um número gerado aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme com limites 0 e 1 e e é o índice de mutação, o qual governa a intensidade da perturbação da mutação exponencial, cujo valor adotado é igual a 4. Determinado s , um indivíduo mutado é criado por

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i - s (x_i - x_i^l), & t_i < w_i \\ x_i + s (x_i^u - x_i), & t_i \geq w_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.6)$$

em que $t_i = \frac{x_i - x_i^l}{x_i^u - x_i}$, x_i^l e x_i^u são, respectivamente, os limites inferiores e superiores da i -ésima variável de projeto e w_i é gerado assim como s_i (DEEP et al., 2009).

2.2.2.7 Elitismo

No elitismo, os indivíduos da geração atual com os melhores valores de aptidão sobrevivem automaticamente para a próxima geração. Com isso, o algoritmo evita que um resultado muito bom seja perdido ou piorado com o cruzamento ou com a mutação. Esse operador melhora significativamente o desempenho dos AGs, visto que, quando o número de membros da elite for pelo menos um, o melhor valor de aptidão de uma população só pode permanecer o mesmo ou melhorar de uma

geração para a outra.

2.2.2.8 Critérios de parada

Os critérios de parada determinam quando o algoritmo deve encerrar sua execução. O algoritmo genético usa as seguintes condições como critério de parada:

- a) Limite de gerações: Quando o número de gerações atinge um determinado valor;
- b) Limite de tempo: Após o algoritmo rodar por um determinado período de tempo, em segundos;
- c) Limite de aptidão: No momento em que o valor da função de aptidão, para algum indivíduo da população atual, é melhor ou igual a um determinado valor;
- d) *Stall generations*: Quando o melhor valor da função de aptidão fica estabilizado após um determinado número de gerações;
- e) *Stall time limit*: Se não houver progresso no melhor valor da função de aptidão durante um intervalo de tempo, em segundos, pré-determinado.

2.2.2.9 Vantagens e limitações dos algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos possuem diversas vantagens, das quais Sivanandam e Deepa (2008) e Guerra (2008) destacam:

- a) Podem ser aplicados em uma grande variedade de problemas de otimização;
- b) Apresentam resistência em ficar presos em ótimos locais;
- c) O desempenho da otimização é pouco afetado pelas descontinuidades;
- d) Utilizam apenas a avaliação da função objetivo, de modo que

dispensam informações de derivadas;

e) Manipulam facilmente espaços de busca grandes.

Entretanto, os autores também apresentam algumas desvantagens e limitações do algoritmo. Dentre elas estão:

a) A escolha de um grande número de parâmetros, tais quais o tamanho da população, taxa de mutação, taxa de cruzamento, método de seleção, entre outros;

b) Caso o algoritmo não seja configurado adequadamente, pode levar à convergência prematura a um ótimo local ou a um desempenho ruim;

c) Podem exigir um grande número de avaliações da função objetivo.

2.3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Usualmente, a otimização de estruturas tem como objetivo encontrar, dentre os projetos que atendam as restrições impostas, a solução que apresenta o menor custo. Para isso, o processo otimizado faz uso de técnicas matemáticas, de modo a reduzir a influência do projetista e dar um caráter mais automatizado ao projeto de estruturas, bem como diminuir o tempo gasto no processo.

A seguir, apresenta-se um levantamento do estado da arte da otimização de estruturas de concreto armado, com maior ênfase em pesquisas que estudam pórticos planos e que utilizam algoritmos genéticos. Os trabalhos são apresentados em ordem cronológica, destacando-se suas principais contribuições.

Gerlein e Beaufait (1980) apresentam um procedimento de otimização de pórticos planos de concreto armado, o qual minimiza o volume total de armadura dos elementos estruturais. As restrições utilizadas estão relacionadas ao colapso da peça e os cálculos seguem as recomendações do ACI 318/77 (*American Concrete Institute*). O artigo tem como objetivo apresentar um pré-projeto mais eficiente, com o intuito de reduzir o trabalho do projetista em obter o projeto final.

Kanagasundaram e Karihaloo (1991) descrevem em seu artigo um procedimento para obter o custo mínimo de vigas e de pilares de concreto

armado. São tratadas vigas bi-apoiadas e vigas contínuas. A função objetivo considera o custo do concreto, da armadura (longitudinal e transversal) e da forma. As variáveis incluem não somente as dimensões das seções transversais e as taxas de armadura, mas também a resistência à compressão do concreto. A base de cálculo segue a norma australiana, e as restrições consideradas estão relacionadas ao ELU e ao ELS. O problema é resolvido com o uso de programação linear sequencial e programação sequencial convexa. Os autores concluem que a inclusão da resistência à compressão do concreto como uma variável do problema, faz com que a seção transversal otimizada apresente menor altura e maior resistência à compressão do concreto, em relação ao projeto ótimo com tal resistência fixa.

Adamu e Karihaloo (1995-a) resolvem problemas de custo mínimo de pórticos planos de concreto armado. A função objetivo considera o custo de concreto, de aço e de forma. As restrições para as vigas incluem os limites de deflexão máxima, a resistência à flexão e ao cisalhamento, e para os pilares incluem a resistência axial e à flexão. Os cálculos dos estados limites são feitos com base na norma australiana e no CEB (*Comité Euro-International du Béton*). Nessa publicação são tratados apenas pilares sob ações de flexão uniaxial. As variáveis utilizadas incluem as dimensões das seções transversais e as taxas de armadura. Por razões práticas, as dimensões das seções transversais são uniformes em cada elemento ou para os elementos de um mesmo andar da estrutura, entretanto a taxa de armadura pode variar ao longo do elemento. Adamu e Karihaloo (1995-b), complementaram o trabalho, e incluíram pilares sujeitos a flexão biaxial. O algoritmo mostrou-se eficiente para estruturas de grande porte.

Coello, Christiansen e Hernández (1997) apresentam um modelo de otimização de vigas de concreto armado, de seção transversal retangular. A função objetivo inclui o custo do volume de concreto, do peso de aço e da área de forma. São consideradas restrições de resistência da seção e limitações da geometria. É desenvolvido um método de busca que utiliza a técnica de algoritmos genéticos, e os resultados são comparados com os obtidos por outros autores, com o uso de programação geométrica. Os resultados alcançados com o AG apresentaram custos maiores do que os do outro método, entretanto, o modelo adotado apresenta mais restrições, o que torna a estrutura ótima obtida pelo AG mais realista.

Koumouis e Arsenis (1998) empregam um algoritmo genético para realizar o detalhamento ótimo de vigas contínuas de concreto armado. O método determina o projeto ótimo com base em três objetivos:

peso mínimo da estrutura; uniformidade máxima das barras da armadura (mesmo diâmetro); número mínimo de barras na seção transversal. Os autores afirmam que dessa maneira, a estrutura ótima é mais próxima da realidade de escritório. O intuito da pesquisa é converter a área de aço necessária em um conjunto de barras com diâmetros e comprimentos específicos, localizados em determinadas posições ao longo do elemento, considerando critérios de projeto como comprimento de ancoragem e corte das barras. Os parâmetros do AG foram adaptados ao problema.

Rajeev e Krishnamoorthy (1998) apresentam um método de otimização de pórticos planos de concreto armado, baseado em algoritmos genéticos. O custo do volume concreto, do peso do aço da armadura longitudinal e da área de forma são considerados na função objetivo. Os autores ressaltam que muitas literaturas consideram as variáveis de projetos contínuas, de modo que a solução ótima requiera modificações adicionais para torná-la construtiva, ou seja, os métodos podem fornecer soluções inadequadas na prática. Assim, no artigo, as dimensões das seções transversais e o detalhamento das armaduras são considerados como variáveis de projeto discretas. A ênfase é colocada no aspectos da modelagem genética, que fornecem mecanismos para considerar realisticamente as questões práticas, resultando em um modelo de projeto ótimo com soluções racionais.

Rafiq e Southcombe (1998) apresentam uma nova abordagem para o dimensionamento e detalhamento ótimo de pilares de concreto armado, no qual adotam algoritmos genéticos para identificar os diâmetros e os arranjos ótimos das barras das armaduras longitudinais. A estrutura é sujeita a carga axial e a momento fletor em dois eixos da seção transversal. A função objetivo tem como proposta lidar com o critério conflitante de minimizar a área de aço das armaduras e maximizar a resistência à flexão do pilar. São respeitados os critérios do ELU e dos requisitos de construção (boas práticas de execução), de acordo com as prescrições da norma britânica. Alguns exemplos são apresentados e seus resultados são comparados com o dimensionamento simplificado sugerido pela referida norma. Para todos os casos, o método otimizado apresentou menor consumo de armadura, o qual alcançou em dois exemplos 22% de economia de área de aço.

Leps e Sejnoha (2003) descrevem a aplicação de uma estratégia de otimização de vigas de concreto armado, baseada em algoritmos genéticos. O principal objetivo é minimizar o custo total da estrutura, o qual consiste no custo do volume de concreto e do peso do aço das armaduras. A estrutura resultante, no entanto, deve cumprir os requisitos de resistência (ELU) e de serviço (ELS), de acordo com os

critérios do Eurocode 2. As variáveis incluem as dimensões das seções transversais, os diâmetros, os comprimentos e as quantidades de barras das armaduras longitudinais e transversais. O problema é resolvido com auxílio do método de recozimento simulado, dada a complexidade do modelo. A título de exemplo, é apresentada uma análise de uma viga contínua sujeita a uma carga uniformemente distribuída e o resultado é comparado com um trabalho que considerou apenas as dimensões da seção e a armadura longitudinal na otimização. De acordo com os autores, a inclusão da armadura de cisalhamento na otimização resultou em economias significativas.

Camp, Pezeshk e Hansson (2003) apresentam um procedimento para a concepção de estruturas de concreto armado de baixo custo, no qual utilizam algoritmos genéticos. O procedimento minimiza o custo da estrutura, composto pelo custo do volume de concreto, do volume de aço da armadura longitudinal e da área de forma, incluindo a mão-de-obra, ao mesmo tempo que satisfaz as limitações especificadas no ACI 318/99 (*American Concrete Institute*). Tais limitações são formuladas como uma série de restrições ao problema discreto de otimização de custos e aplicadas como penalidade sobre a função de aptidão do algoritmo genético. As restrições compreendem requisitos de resistência e limitações da geometria. É apresentado um exemplo de pórtico plano, e o resultado comparado com o obtido por Rajeev e Krishnamoorthy (1998). Concluiu-se que a diferença entre os métodos foi pequena.

Vianna (2003) propõe um procedimento para otimizar o pré-dimensionamento de edifícios de concreto armado, tratados simplificada-mente como pórticos planos. A função objetivo considera o custo do volume de concreto, da massa da armadura longitudinal e da área de forma. As variáveis utilizadas são: altura útil e área de armadura longitudinal (tração e compressão) para a viga; largura, altura, área de aço longitudinal e profundidade da linha neutra na seção transversal, para o pilar. São tratadas restrições de resistência da seção e de deslocamentos máximos (ELU e ELS). Constatou-se que as seções ótimas encontradas pelo programa são próximas das seções usualmente adotadas pela prática dos projetistas. Percebeu-se que o programa é eficiente para definir a melhor forma da seção transversal dos pilares, de maneira que se aproximam da forma quadrada quando submetidos, basicamente, a esforços verticais e são mais alongados na direção do momento atuante quando submetidos a maiores excentricidades.

Govindaraj e Ramasamy (2005) apresentam uma aplicação de algoritmos genéticos para obter o detalhamento ótimo de armaduras de vigas de concreto armado, baseado nas especificações da norma indiana.

O problema satisfaz o ELU, ELS e outras restrições relacionadas a detalhes práticos de construção. A função objetivo inclui o custo do volume do concreto, da massa do aço das armaduras (longitudinal e transversal) e da área de forma. É utilizado o método das penalizações para incorporar as restrições ao problema. São apresentados exemplos de vigas, estudadas por Kanagasundaram e Karihaloo (1991), com o intuito de comparar os resultados das duas pesquisas. Os custos encontrados pelos autores que utilizaram o AG (GOVINDARAJ; RAMASAMY, 2005) são menores do que os da pesquisa apresentada anteriormente. Além disso, percebe-se que a restrição de flecha máxima teve papel importante na seção ótima.

Kwak e Kim (2008) propõem um algoritmo para a otimização de pórticos planos de concreto armado. É criado um banco de seções transversais, pré-determinadas, de vigas e pilares. As seções são dispostas em ordem crescente de capacidade de carga. Dessa maneira, o algoritmo buscou encontrar dentro desse conjunto de soluções, a seção mais econômica que resiste às solicitações. São realizados dois exemplos numéricos de pórticos planos: o primeiro com três vãos e três andares; o segundo com dois vãos e seis andares. De acordo com os autores, devido ao processo de otimização muito simples e de rápida convergência, o método introduzido pode efetivamente ser usado no projeto preliminar de estruturas de concreto armado. Kwak e Kim (2009) apresentam uma ampliação do trabalho anterior, no qual introduzem algoritmos genéticos na busca da solução ótima. Tal feito apresentou melhora na convergência e no tempo de procura.

Lima (2011) aborda o problema de otimização de vigas de concreto armado utilizando um método probabilístico de otimização, baseado em algoritmos genéticos. A motivação do estudo veio da necessidade de buscar soluções exequíveis para problemas de otimização de vigas. De acordo com o autor, os algoritmos genéticos são um método robusto, capaz de tratar problemas complexos, trabalhar com variáveis discretas e adaptável a mudança. O programa desenvolvido otimiza topológica e parametricamente as vigas, sujeitas apenas a restrições do ELU com relação ao momento fletor e a critérios de execução. A função objetivo leva em conta o custo do volume do concreto, da massa da armadura longitudinal e transversal e da área de forma. Observou-se que, se o algoritmo for utilizado de forma adequada o problema atinge bons resultados. Dessa maneira, o autor acredita que o principal obstáculo dos AG seja o ajuste dos seus parâmetros.

Mingqi e Xing (2011) propõem um método de otimização baseado em algoritmos genéticos. O objetivo do procedimento é minimizar os

custos de materiais e de construção de elementos estruturais de concreto armado, composto pelo custo do volume de concreto, do volume da armadura e da área de forma. A estrutura é sujeita a restrições de resistência. Para considerar tais restrições, é adotado o método das penalidades. É feito um exemplo de um pórtico de dois vãos e dois andares, e os autores constataam que o método proposto é eficiente e aplicável.

Camp e Huq (2013) aplicam um algoritmo de otimização híbrido *Big Bang-Big Crunch* na otimização de pórticos de concreto armado. As variáveis de projeto consideradas são as dimensões das seções transversais e a área de aço, das vigas e dos pilares. São abordadas duas funções objetivo: uma relacionada ao custo (material e mão de obra) e outra relacionada ao CO_2 produzido pelo processamento dos materiais e pela construção da estrutura. As duas funções objetivo não são minimizadas simultaneamente. As estruturas estão sujeitas às restrições baseadas nas especificações e orientações prescritas pelo ACI 318-08 (*American Concrete Institute*). O método é validado a partir da comparação do resultado obtido com o exemplo feito por Rajeev e Krishnamoorthy (1998) e Camp, Pezeshk e Hansson (2003). Além disso, a comparação entre os projetos desenvolvidos baseados na minimização do CO_2 apresentaram resultados próximos aos baseados na minimização do custo.

Rosa Filho (2015) apresenta a otimização de pórticos planos de concreto armado, com o uso de algoritmos genéticos e de processo iterativo. A função objetivo baseia-se no custo total, compreendido no custo da área de forma, do volume de concreto e da massa de armadura. As verificações se restringiram ao ELU e o pórtico foi analisado empregando-se o método dos deslocamentos. O autor desenvolve dois programas computacionais de otimização. O programa Ótimo-iterativo analisa e dimensiona os pórticos formados por todas as combinações de seções transversais de vigas e pilares disponíveis em bancos de dados previamente definidos e a partir desse processo iterativo encontra a estrutura ótima. O programa ótimo-genético escolhe apenas algumas seções transversais e utiliza algoritmos genéticos para tal seleção. Foram realizados exemplos para comparar ambos os programas, e foi constatado que o uso de AG permite obter uma solução ótima, ou próxima da ótima em um intervalo de tempo significativamente menor.

Tapao e Cheerarot (2017) investigam o efeito dos parâmetros de um Algoritmo Colônia de Abelhas Artificiais no desempenho de um esquema de otimização de pórticos de concreto armado, considerando as recomendações do ACI 318/08 (*American Concrete Institute*). A função objetivo considera o custo total da estrutura (concreto, aço e formas).

As variáveis de projeto são as dimensões das seções transversais, os diâmetros e o número de barras da armadura longitudinal. Foi constatado que, utilizando determinados parâmetros, o Algoritmo Colônia de Abelhas Artificiais mostrou-se eficiente para os três exemplos numéricos avaliados.

2.3.1 Cenário da aplicação prática da otimização de estruturas

As pesquisas na área de otimização de estruturas tiveram grande avanço a partir da década de 1960, desde trabalhos como o de Schmit (1960). A partir de então, muitos estudos foram desenvolvidos, o que resultou em um grande número de publicações sobre esse tema. Dessa maneira, tem-se disponível um acervo extenso de técnicas de otimização de estruturas. Entretanto, na prática, essas ferramentas são pouco utilizadas por engenheiros no dia a dia.

Essa distância entre a teoria e a prática tem sido observada desde o início dos estudos. Templeman (1983) examinou a otimização de estruturas do ponto de vista da prática de escritório. O autor concluiu que programas que auxiliam a concepção ótima de estruturas são viáveis e trazem retorno financeiro, entretanto constata que tais programas têm recebido pouca atenção. Cohn e Dinovitzer (1994) afirmam que, nas pesquisas desenvolvidas, maior atenção tem sido dada para os aspectos matemáticos do processo, ao invés do aspecto estrutural. Dessa maneira, sugerem uma mudança de abordagem, de forma a considerar a otimização de um ponto de vista de engenharia.

De acordo com Levy (2011), atualmente, depois de mais de meio século desde que foi formalmente introduzida, a otimização estrutural ainda não tem papel influente na atividade diária de um escritório de engenharia. Para o autor, a otimização estrutural deve ser uma ferramenta amigável para o projetista, e não substituí-lo, ou seja, deve ajudá-lo nas fases críticas do projeto.

2.3.2 Comentários

A partir da leitura e análise crítica das referências apresentadas, é possível constatar que há uma grande preocupação em estudos que visam obter estruturas ótimas. Percebe-se que também há necessidade em desenvolver tais pesquisas voltadas para a engenharia, de modo que as ferramentas de otimização auxiliem os engenheiros no desenvolvimento

de seus projetos.

Nota-se que os autores preocupam-se em aproximar seus modelos à estrutura real. Entretanto, dada a complexidade do dimensionamento de estruturas de concreto armado, a maioria das pesquisas adota algumas simplificações de cálculo para tornar a programação do algoritmo menos complicada, de modo que verificações importantes presentes nas normas são desprezadas.

Algumas tendências foram observadas nas pesquisas, como por exemplo, a adoção do custo como parâmetro para determinar o projeto ótimo. Os custos, em geral, se baseiam no volume de concreto, na massa das armaduras e na área de forma. Foi constatada a importância em adotar a armadura de cisalhamento também como uma variável. A adoção de variáveis discretas, ao invés das contínuas, aproximam a resposta final da otimização a um projeto exequível. Além disso, os algoritmos genéticos foram utilizados em diversas pesquisas de otimização na área de concreto armado, e seus resultados têm sido satisfatórios.

3 METODOLOGIA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para alcançar o objetivo proposto foi necessário, primordialmente, desenvolver uma ferramenta computacional capaz de otimizar pórticos planos de concreto armado. Para isso, foram realizadas as seguintes etapas: formulação do problema de otimização, como apresentado na Equação 2.1; desenvolvimento de rotinas de cálculo dos custos e das verificações dos estados limites de vigas e pilares em MATLAB (MATHWORKS, 2017); aplicação de um programa de análise estrutural de pórticos planos nas rotinas desenvolvidas, para cálculo dos esforços solicitantes nos elementos estruturais, juntamente com uma rotina de otimização que utiliza algoritmos genéticos. Nesse trabalho, foi utilizado o *software* MASTAN2 (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2007) para a análise estrutural, o qual, além de implementado em MATLAB e de não requerer licença para utilização, possui baixo custo computacional se comparado a outros *softwares*, mesmo os comerciais.

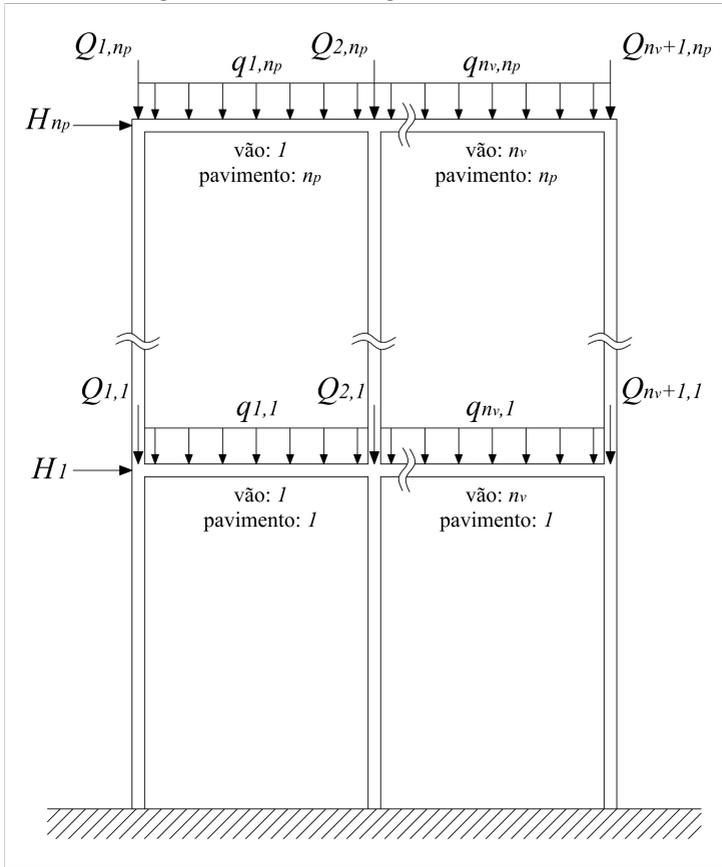
A ideia do algoritmo desenvolvido é buscar, dentro de um conjunto de soluções (viáveis ou não), a solução \mathbf{x}^* que resulta no menor valor de $f(\mathbf{x})$ e que atenda as restrições contidas em \mathbf{g} . Ou seja, o programa analisa um conjunto de soluções de seções transversais dos elementos do pórtico, e seleciona a opção que apresenta o menor custo e que atenda aos requisitos estabelecidos por norma. A seguir, é apresentado o desenvolvimento da formulação do problema.

3.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O problema proposto consiste em minimizar o custo de pórticos planos de concreto armado, de n_v vãos e n_p pavimentos, de seções transversais retangulares, submetidos a cargas verticais distribuídas ($q_{i,j}$) e pontuais ($Q_{k,j}$), e a cargas horizontais pontuais (H_j), conforme a Figura 6, com $i = 1, \dots, n_v$, $j = 1, \dots, n_p$ e $k = 1, \dots, n_v + 1$.

A estrutura está sujeita a restrições dos estados limites, conforme indica a NBR 6118 (2014). Neste trabalho é considerado o estado limite último de esgotamento da capacidade resistente e o estado limite de serviço de deformações excessivas, em que, neste último, são verificadas as flechas das vigas e os deslocamentos horizontais do pórtico.

Figura 6 – Estrutura genérica de estudo.



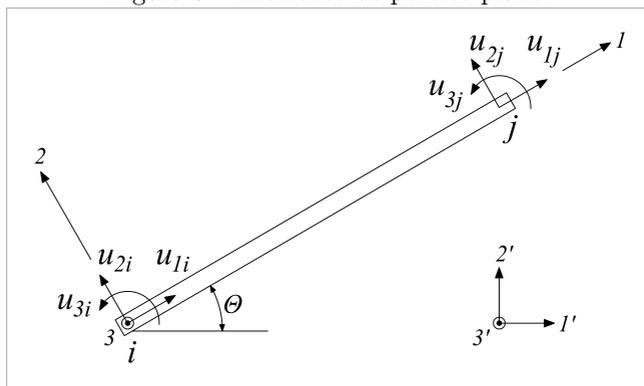
Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural tem como objetivo determinar os efeitos das ações em uma estrutura, muitas vezes com a finalidade de efetuar verificações dos estados limites últimos e de serviço. Assim, percebe-se a necessidade de um modelo estrutural que represente bem o comportamento da estrutura, de maneira que os resultados da análise sejam próximos da realidade. Com esse propósito, uma análise não-linear física e geométrica é realizada.

Como comentado, a análise estrutural do pórtico é feita com o uso do *software* MASTAN2, que modela a estrutura por meio de elementos finitos. A Figura 7 mostra um esquema do elemento de pórtico plano utilizado. A estrutura é analisada no plano 1'2' e cada nó do elemento (apresentados genericamente como nó i e nó j) possui 3 graus de liberdade: translação em 1'; translação em 2'; rotação em torno do eixo 3'. Os deslocamentos nodais generalizados, em relação às coordenadas locais 1, 2 e 3 são representados por u_1 , u_2 e u_3 , respectivamente.

Figura 7 – Elemento de pórtico plano.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para a análise estrutural, utiliza-se o método dos deslocamentos, também conhecido como método da rigidez direta (no qual o equilíbrio é regido pela Equação 3.1), que determina inicialmente a resposta da estrutura em termos dos deslocamentos e a partir desses deslocamentos obtêm os esforços solicitantes. A matriz de rigidez global é obtida combinando as matrizes de rigidez de elementos individuais, que dependem das propriedades geométricas e das leis constitutivas dos materiais envolvidos. As rotinas do programa se baseiam nas formulações teóricas e numéricas apresentadas, por exemplo, em McGuire, Gallagher e Ziemian (2014).

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

Onde:

\mathbf{f} = Vetor de forças nodais generalizadas;

\mathbf{K} = Matriz de rigidez global;

\mathbf{u} = Vetor de deslocamentos nodais generalizados.

Nas situações reais, a proporcionalidade entre deslocamentos e carregamentos pode não existir, o que significa que a matriz de rigidez pode depender consideravelmente dos deslocamentos. Esse é o caso, por exemplo, se os efeitos das deformações e dos deslocamentos são incluídos na formulação da equação de equilíbrio (não-linearidade geométrica), ou se são consideradas leis constitutivas não-lineares, o que resulta em mudanças nas propriedades dos materiais dos elementos quando carregados (não-linearidade física) (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014; GOMES, 2017). Nos próximos tópicos são tratadas as não-linearidades adotadas no presente trabalho.

3.2.1 Não-linearidade geométrica

Na análise linear elástica, a matriz de rigidez global adotada é dita elástica e independente dos deslocamentos, sendo representada por $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e$. Nestas circunstâncias, há proporcionalidade entre forças e deslocamentos, o que se reflete em uma matriz de rigidez constante ao longo do processo de carregamento, e a resposta estrutural pode ser obtida diretamente a partir da Equação 3.1.

Entretanto, ao se considerar o equilíbrio escrito na configuração deformada, o que caracteriza a chamada análise não-linear geométrica, a matriz \mathbf{K} deixa de ser constante. Isso implica em uma relação não mais linear entre \mathbf{f} e \mathbf{u} , e, portanto, numa relação que envolve efeitos de ordem superior.

Se assumirmos que, nas análises de ordem superior, as equações não-lineares de equilíbrio possam ser reduzidas a um conjunto para o qual podemos adaptar as técnicas utilizadas para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares, então esse comportamento pode ser tratado de modo incremental, isto é, pode ser adotado um esquema de solução incremental-iterativa. Assim, a análise pode ser feita por meio de uma variante da equação de equilíbrio, dada por

$$d\mathbf{f} = \mathbf{K}_t d\mathbf{u}, \quad (3.2)$$

em que $d\mathbf{f}$ é o vetor de incremento de forças nodais, \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente, expressa pela Equação 3.3, na qual \mathbf{K}_g é a matriz de rigidez geométrica que representa as mudanças resultantes dos efeitos de

ordem superior, e $d\mathbf{u}$ é o vetor de incremento dos deslocamentos nodais.

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (3.3)$$

O início do processo de solução incremental-iterativa ocorre a partir da determinação de \mathbf{K}_e , de maneira semelhante à empregada nas análises lineares elásticas. Na sequência, é obtido $d\mathbf{f}$ por

$$d\mathbf{f}_k = d\lambda_k \mathbf{f}, \quad (3.4)$$

onde $d\lambda$ é a taxa de incremento de carga (assumida igual a 0,10 neste trabalho) e o índice k representa o incremento. O número total de incrementos adotado é igual a 10.

Após, a partir da resolução da Equação 3.2, assumindo $\mathbf{K}_g = 0$, é obtida uma estimativa inicial para $d\mathbf{u}$. Esta estimativa é corrigida iterativamente utilizando-se, por exemplo, o método de Newton-Raphson, onde em cada iteração são atualizados a matriz \mathbf{K}_t , que depende de \mathbf{u} por meio de \mathbf{K}_g , e também o vetor $d\mathbf{u}$. O processo é repetido até que o equilíbrio seja atingido no passo de carga atual, ou seja, até que seja encontrado, com uma certa tolerância, o vetor $d\mathbf{u}$ que corresponde ao incremento de carga atual, $d\mathbf{f}$. Com os vetores de incrementos calculados, os deslocamentos e as forças nodais são atualizados. Em seguida, uma nova matriz de rigidez tangente é obtida, e prossegue-se com a busca pelo equilíbrio. Assim, o processo é repetido até o número de incrementos máximo ser atingido. Destaca-se que a não-linearidade é considerada em todos os exemplos numéricos, mesmo que a resposta estrutural seja próxima da linear.

3.2.2 Não-linearidade física

A não-linearidade física é incorporada na análise de maneira simplificada, por meio da redução da rigidez dos elementos estruturais. A NBR 6118 (2014) estabelece que, em estruturas com no mínimo quatro pavimentos, a não-linearidade física pode ser considerada de maneira aproximada, tomando-se como rigidez dos elementos estruturais os valores obtidos por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vigas} \Rightarrow (EI)_{sec} = 0,4E_{ci}I_c \\ \text{Pilares} \Rightarrow (EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c \end{array} \right., \quad (3.5)$$

em que EI_{sec} é a rigidez secante, E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial do concreto e I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto. Cabe ressaltar que há métodos mais complexos que representam melhor a não-linearidade física da estrutura, entretanto, apesar de esse método aproximado da norma ser simples, ele apresenta custo computacional aceitável. Destaca-se também que, embora essas reduções de rigidez sejam recomendadas para estruturas com no mínimo quatro pavimentos, opta-se por aplicá-las em todos os exemplos por questões de simplicidade.

Nota-se que a análise adotada leva em conta apenas a inércia da seção bruta de concreto, o que elimina a influência da armadura no cálculo de deslocamentos e de esforços solicitantes. Isso pode ter impacto significativo nas verificações do ELS, que dependem diretamente dos deslocamentos calculados, e um impacto um pouco menor no ELU, no qual a influência da armadura é levada em conta ao se calcular os esforços resistentes, mesmo que seja desconsiderada no cálculo dos esforços solicitantes.

3.3 COMBINAÇÕES DE AÇÕES

A seguir, são apresentadas as combinações de ações utilizadas nas verificações dos estados limites, conforme a norma NBR 6118 (2014).

3.3.1 Combinações últimas

Os esforços solicitantes de cálculo do ELU são obtidos a partir da combinação última normal dos carregamentos aplicados, dada por

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{\varepsilon gk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \Psi_{0j} F_{qjk}) + \gamma_{\varepsilon q} \Psi_{0\varepsilon} F_{\varepsilon qk}, \quad (3.6)$$

onde:

F_d = Valor de cálculo das ações para combinação última;

F_{gk} = Ações permanentes diretas;

$F_{\varepsilon k}$ = Ações indiretas permanentes como a retração $F_{\varepsilon gk}$ e variáveis como a temperatura $F_{\varepsilon qk}$;

F_{qjk} = Ações variáveis diretas das quais F_{q1k} é a principal;

$\gamma_g, \gamma_{\varepsilon g}, \gamma_q$ e $\gamma_{\varepsilon q} =$ Coeficientes de ponderação para as ações diretas permanentes, indiretas permanentes, diretas variáveis e indiretas variáveis, respectivamente, expressos por $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ na Tabela 1;

Ψ_{0j} e $\Psi_{0\varepsilon} =$ Fatores de redução de combinação para as ações variáveis diretas e variáveis indiretas, respectivamente, expressos por γ_{f2} na Tabela 2.

Tabela 1 – Coeficiente $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$: combinação última normal.

Ações					
Permanentes		Variáveis		Recalques de apoio e retração	
Desfavorável	Favorável	Geral	Temperatura	Desfavorável	Favorável
1,4 ⁽¹⁾	1,0	1,4	1,2	1,2	0

⁽¹⁾ Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014).

Os coeficientes de ponderação das ações γ_{f1} , γ_{f2} e γ_{f3} , consideram, respectivamente: a variabilidade das ações; a simultaneidade de atuação das ações; os possíveis desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vistas das solicitações.

3.3.2 Combinações de serviço

Os esforços solicitantes de cálculo para a verificação das flechas das vigas no ELS-DEF são obtidos a partir da combinação quase permanente de serviço dos carregamentos aplicados, como sugere Carvalho e Filho (2015), descrita como

$$F_{d, serv}^{CQP} = \sum F_{gik} + \sum \Psi_{2j} F_{qjk}, \quad (3.7)$$

onde:

$F_{d, serv}^{CQP} =$ Valor de cálculo das ações para combinações quase permanentes de serviço;

$F_{gik} =$ Ações permanentes diretas;

Tabela 2 – Valores do coeficiente γ_{f2} : Ψ_0 , Ψ_1 ou Ψ_2 .

	Ações	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas ⁽¹⁾	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas ⁽²⁾	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

⁽¹⁾ Edifícios residenciais;

⁽²⁾ Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014).

$$F_{qjk} = \text{Ações variáveis diretas};$$

Ψ_2 = Fator de redução de combinação quase permanente para ELS, expresso por γ_{f2} na Tabela 2.

Para a verificação dos deslocamentos horizontais do pórtico no ELS-DEF, é considerada a combinação frequente de serviço dos carregamentos horizontais aplicados, dada por

$$F_{d, serv}^{CF} = \sum F_{gik} + \Psi_1 F_{q1k} + \sum \Psi_{2j} F_{qjk}, \quad (3.8)$$

onde:

$F_{d, serv}^{CF}$ = Valor de cálculo das ações para combinações frequentes de serviço;

Ψ_1 = Fator de redução de combinação frequente para ELS, ex-

presso por γ_{f2} na Tabela 2.

3.4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Nesta seção, são apresentados os modelos constitutivos do concreto e do aço utilizados no presente trabalho.

3.4.1 Concreto

A NBR 6118 (2014) apresenta o diagrama tensão-deformação idealizado para análises no ELU, ilustrado na Figura 8, onde σ_c é a tensão à compressão no concreto, f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto, ε_c é a deformação específica do concreto, ε_{c2} é a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico e ε_{cu} é a deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura. A curva do diagrama idealizado, denominado usualmente de diagrama parábola-retângulo, é descrita por

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^\eta \right], \quad (3.9)$$

onde os valores a serem adotados para os parâmetros η , ε_{c2} e ε_{cu} dependem da resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}):

- Para concretos com f_{ck} até 50 MPa:

$$\eta = 2;$$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\%;$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\%.$$

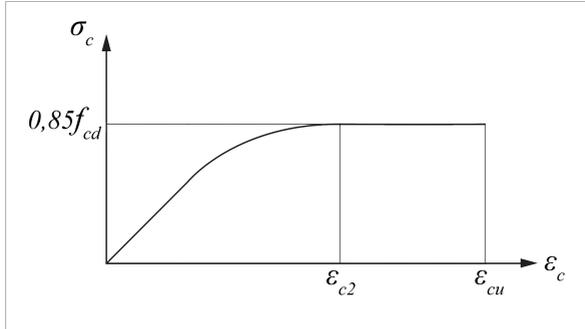
- Para concretos com f_{ck} de 55 MPa até 90 MPa:

$$\eta = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4;$$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\% + 0,085\%(f_{ck} - 50)^{0,53};$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\% + 35\%[(90 - f_{ck})/100]^4.$$

Figura 8 – Diagrama tensão-deformação idealizado para concreto.



Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014).

Para elementos lineares sujeitos a solicitações normais, a norma permite que o diagrama idealizado seja substituído por um diagrama retangular simplificado, com profundidade $y = \lambda z$ e com tensão constante atuante igual a

$$\sigma_c = \alpha_c f_{cd}, \quad (3.10)$$

onde os valores dos parâmetros λ (relação entre a profundidade y do diagrama retangular de compressão equivalente e a profundidade efetiva z da linha neutra) e α_c (parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão) são definidos como:

- Para concretos com f_{ck} até 50 MPa:

$$\lambda = 0,8;$$

$$\alpha_c = 0,85.$$

- Para concretos com f_{ck} de 55 MPa até 90 MPa:

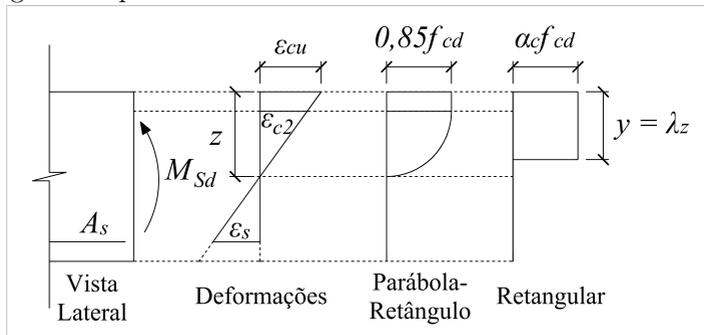
$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400;$$

$$\alpha_c = 0,85[1 - (f_{ck} - 50)/200].$$

A Figura 9 mostra os diagramas de deformações e de tensões parábola-retângulo e retangular simplificado em uma seção transversal de um elemento de concreto armado, onde A_s é a área da seção transversal da armadura longitudinal de tração, ε_s é a deformação específica do aço

da armadura e M_{Sd} é o momento fletor solicitante de cálculo. Neste trabalho, foi adotado o diagrama retangular simplificado. De acordo com a NBR 6118 (2014), os resultados obtidos com esses dois diagramas são semelhantes, de modo que não há necessidade de coeficiente de correção adicional ao utilizar o diagrama simplificado.

Figura 9 – Diagramas de deformações e de tensões parábola-retângulo e retangular simplificado.



Fonte: Elaborada pela autora.

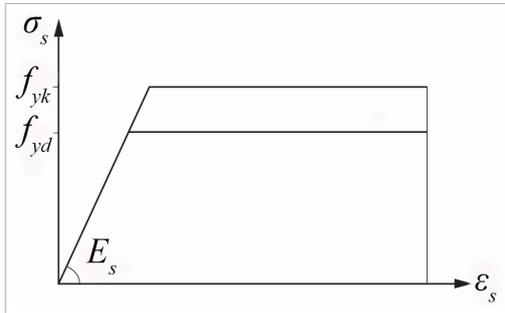
3.4.2 Aço

Para o aço, a NBR 6118 (2014) apresenta o diagrama da Figura 10, onde σ_s é a tensão normal no aço da armadura, f_{yk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura, f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço da armadura e E_s é o módulo de elasticidade do aço da armadura. Esse diagrama é válido para tração e compressão e pode ser utilizado para o cálculo no ELU e no ELS.

Para o aço empregado neste trabalho (CA50), o valor da deformação específica de cálculo de escoamento do aço (ε_{yd}) é igual a 2,07‰ e da deformação específica do aço na ruptura (ε_u) é igual a 10,0‰.

As resistências de cálculo f_{cd} e f_{yd} são obtidas, respectivamente, a partir da minoração das resistências características f_{ck} e f_{yk} . O coeficiente de ponderação γ_m para combinações últimas normais é igual a 1,4 para o concreto e 1,15 para o aço. Os limites estabelecidos para os estados limites de serviço não necessitam de minoração (NBR 6118, 2014).

Figura 10 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas.



3.5 COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO

O comportamento de elementos lineares de concreto armado submetidos à flexão, desde o início da aplicação da carga até a ruptura, apresenta três fases bem definidas:

a) Fase elástica (estádio I): Essa fase corresponde ao início do carregamento, em que a tensão máxima de tração no concreto não ultrapassa sua resistência característica à tração. Em vista disso, a integridade da zona tracionada é mantida, ou seja, não há fissuras visíveis e o aço é “pouco” influente. As deformações são pequenas e as tensões podem ser determinadas assumindo comportamento elástico linear para o concreto na tração e na compressão;

b) Fase de fissuração (estádio II): Nesse nível de carregamento, as tensões na maioria dos pontos da zona tracionada possuem valores superiores ao da resistência característica à tração do concreto. Nessa situação, considera-se que apenas o aço resiste aos esforços de tração, pois o concreto se apresenta fissurado nessa região. Admite-se que a tensão de compressão no concreto ainda tem comportamento elástico linear;

c) Fase de plastificação (estádio III): O carregamento se aproxima ao de ruína, de modo que aumenta a fissuração da peça. As deformações nessa fase são bem maiores do que nas fases anteriores, e o aço ou o

concreto atingem a plastificação. Supõe-se que a distribuição de tensões no concreto ocorre de acordo com o diagrama parábola-retângulo (ou retangular simplificado).

Pode-se dizer que os estádios I e II correspondem às situações de serviço, e o estádio III às situações últimas. O cálculo do dimensionamento de estruturas de concreto armado é realizado no estado limite último (estádio III), pois dessa maneira as estruturas são projetadas de forma econômica, ou seja, suportam aos esforços e aproveitam ao máximo a resistência de seus materiais, sem colapsarem.

Os domínios de deformação representam as possíveis situações de ruína da seção transversal (detalhes complementares são apresentados na seção 3.6.3.1):

a) Domínio 1 - Tração não uniforme, sem compressão: O ELU é caracterizado pela deformação $\varepsilon_s = 10\%$. A linha neutra é externa à seção transversal, de modo que esta se encontra inteiramente tracionada e, por consequência, fissurada. Assim, a seção resistente é composta apenas pelo aço;

b) Domínio 2 - Flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ($\varepsilon_c < \varepsilon_{cu}$ e com o máximo alongamento permitido): O ELU é caracterizado pela deformação $\varepsilon_s = 10\%$. A linha neutra corta a seção transversal, o que resulta em um banzo tracionado e um banzo comprimido. O concreto da zona comprimida não atinge a ruptura e a seção resistente é formada pelo aço tracionado e pelo concreto comprimido. A ruína ocorre de maneira avisada;

c) Domínio 3 - Flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ($\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$): O ELU é caracterizado pela deformação $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$. A linha neutra corta a seção transversal, de modo que a seção resistente é composta pelo aço tracionado e pelo concreto comprimido. Nesse domínio, o escoamento do aço ocorre simultaneamente à ruptura do concreto. Essa é a situação desejável de projeto, pois as resistências de ambos os materiais são aproveitadas simultaneamente, e caso haja ruína, ocorrerá de maneira avisada (FUSCO, 1981);

d) Domínio 4 - Flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$): O ELU é caracterizado pela deformação $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$. A linha

neutra corta a seção transversal, composta pelo aço tracionado e pelo concreto comprimido. Nesse domínio, o concreto rompe antes da armadura escoar, tendo como consequência uma ruptura frágil, não avisada. A norma define também o domínio 4a, presente no caso de flexão composta, em que a linha neutra corta a seção transversal na região do cobrimento da armadura, de modo que esta se encontra comprimida;

e) Domínio 5 - Compressão não uniforme, sem tração: O ELU é caracterizado pela deformação $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$. A linha neutra não corta a seção transversal, que está totalmente comprimida. Sendo assim, a seção resistente é composta pelo aço e concreto comprimidos. Como o concreto se rompe com o encurtamento da armadura, a ruptura é frágil.

Como o presente trabalho visa o estudo de pórticos planos, considera-se que as vigas estão submetidas à flexão normal simples e os pilares à flexão normal composta.

Segundo a NBR 6118 (2014), para uma viga apresentar comportamento dúctil, a relação entre a altura da linha neutra (z) e a altura útil (d) da seção transversal deve obedecer os seguintes limites:

- $\frac{z}{d} \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa;
- $\frac{z}{d} \leq 0,35$ para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa.

Como consequência, o dimensionamento de seções de vigas submetidas à flexão fica restrito ao domínio 2 e parte do domínio 3.

3.6 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DO PÓRTICO

Para declarar o problema de otimização de pórticos planos de concreto armado, são definidos os seguintes itens: variáveis de projeto; função objetivo; restrições.

3.6.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto a serem determinadas durante o processo de otimização, adotadas como discretas, são apresentadas na Tabela 3 e ilustradas na Figura 11.

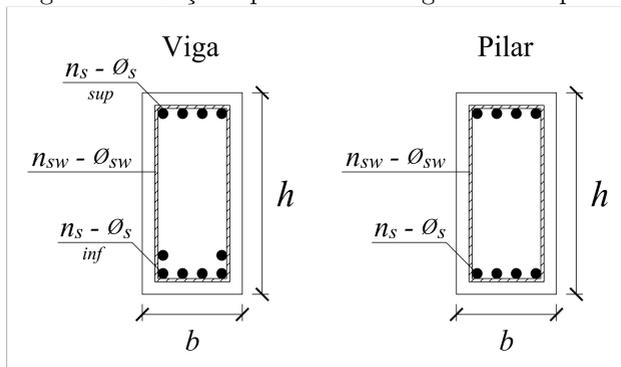
Para variar a quantidade de armadura ao longo de uma viga, o

Tabela 3 – Variáveis de projeto.

Viga	
b	Largura da seção transversal
h	Altura da seção transversal
n_s^{inf}	Número de barras da armadura longitudinal inferior
ϕ_s^{inf}	Diâmetro das barras da armadura longitudinal inferior
n_s^{sup}	Número de barras da armadura longitudinal superior
ϕ_s^{sup}	Diâmetro das barras da armadura longitudinal superior
n_{sw}	Número de barras da armadura transversal
ϕ_{sw}	Diâmetro das barras da armadura transversal
Pilar	
b	Largura da seção transversal
h	Altura da seção transversal
n_s	Número de barras da armadura longitudinal
ϕ_s	Diâmetro das barras da armadura longitudinal
n_{sw}	Número de barras da armadura transversal
ϕ_{sw}	Diâmetro das barras da armadura transversal

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 11 – Seção típica de uma viga e de um pilar.



Fonte: Elaborada pela autora.

elemento estrutural é discretizado em um número de segmentos pré-definido. Então, para cada segmento, é determinado um valor de n_s^{inf} , n_s^{sup} e n_{sw} , com base nos valores máximos de momento fletor e de força cortante do trecho analisado. As barras se estendem por todo o comprimento do segmento e não são considerados comprimentos de ancoragem e de traspasse. Ressalta-se que não há armadura dupla nas vigas, ou seja, os valores de n_s^{inf} e de n_s^{sup} são obtidos, respectivamente,

a partir do máximo momento fletor positivo e do máximo momento fletor negativo do segmento analisado, como armaduras simples. Os valores das demais variáveis são os mesmos em toda a extensão da viga.

Em relação aos pilares, a armadura longitudinal é considerada simétrica. Para sua discretização, adota-se um segmento por pilar por pavimento, de modo que o elemento possui a mesma seção transversal em todo seu comprimento, isto é, os valores das variáveis são os mesmos em todo este trecho. Também não são considerados comprimentos de ancoragem e de traspasse das armaduras. Por se tratar de pórticos planos, as seções transversais dos pilares são armadas longitudinalmente apenas nas faces paralelas à direção do momento fletor solicitante.

3.6.2 Função objetivo

A função objetivo adotada é o custo da estrutura, baseado no custo do volume de concreto, da massa da armadura longitudinal e transversal e da área de forma, como mostra a Equação 3.11. Os custos unitários levam em conta o custo do material e da mão-de-obra.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} (V_c C_c + M_s C_s + M_{sw} C_{sw} + A_f C_f) \quad (3.11)$$

Onde:

V_c = Volume de concreto (m^3);

C_c = Custo unitário do concreto ($\text{R}\$/\text{m}^3$);

M_s = Massa do aço da armadura longitudinal (kg);

C_s = Custo unitário da armadura longitudinal ($\text{R}\$/\text{kg}$);

M_{sw} = Massa do aço da armadura transversal (kg);

C_{sw} = Custo unitário da armadura transversal ($\text{R}\$/\text{kg}$);

A_f = Área de forma (m^2);

C_f = Custo unitário da forma ($\text{R}\$/\text{m}^2$);

n_{el} = Número de elementos estruturais do pórtico (vigas + pila-

res).

As áreas de forma de uma viga e de um pilar são calculadas, respectivamente, por

$$A_f^{viga} = (2h + b)l \quad \text{e} \quad (3.12)$$

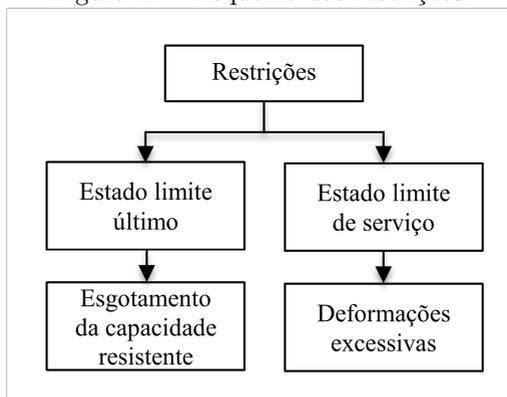
$$A_f^{pilar} = (h + b)2l, \quad (3.13)$$

onde l é o comprimento do elemento estrutural.

3.6.3 Restrições

As restrições dividem-se em restrições dos estados limites últimos e dos estados limites de serviço, conforme o esquema da Figura 12.

Figura 12 – Esquema das restrições.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.6.3.1 Restrições associadas aos estados limites últimos

- Vigas:

Visto o comportamento da estrutura analisada, as vigas devem resistir ao momento fletor solicitante de cálculo (M_{Sd}) e à força cortante solicitante de cálculo (V_{Sd}).

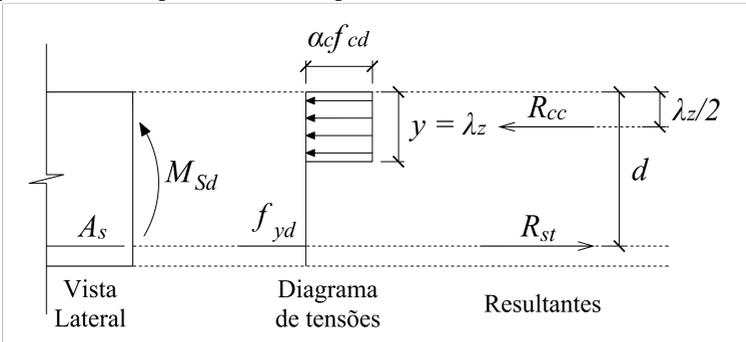
A seção do elemento é dita segura em relação ao momento fletor solicitante se atender a restrição dada pela equação

$$g_1(\mathbf{x}) = M_{Sd} - M_{Rd} \leq 0, \quad (3.14)$$

onde M_{Rd} é o momento fletor resistente de cálculo.

Para determinar o momento resistente de uma seção transversal submetida à flexão normal simples, é apresentado um esquema das tensões e das resultantes na seção (Figura 13), onde R_{cc} é a força resultante de compressão no concreto, considerando o diagrama retangular de tensões, e R_{st} é a força resultante de tração na armadura longitudinal de tração. Como só são permitidas seções que trabalhem do domínio 2 ao limite para condições de ductilidade, o aço tracionado estará escoando nessas situações, portanto σ_s é igual a f_{yd} . Além disso, é desprezada a contribuição do concreto na resistência à tração da seção.

Figura 13 – Elemento de seção retangular e diagramas de tensões na seção solicitada para flexão simples.



Fonte: Elaborada pela autora.

Pelo equilíbrio dos momentos na seção, o momento das forças internas em relação a qualquer ponto deve ser igual ao momento externo de cálculo. Sendo assim, a partir do equilíbrio em relação ao ponto da resultante de compressão no concreto, obtêm-se a equação

$$M_{Rd} = A_s f_{yd} \left(d - \frac{\lambda z}{2} \right), \quad (3.15)$$

que determina a máxima sollicitação que uma dada seção pode resistir, ou seja, o M_{Rd} . A partir do equilíbrio de forças resultantes normais à

seção transversal obtêm-se o valor de z , expresso por

$$z = \frac{A_s f_{yd}}{\lambda \alpha_c f_{cd} b} . \quad (3.16)$$

A resistência da seção em relação à força cortante solicitante é garantida se forem verificadas as restrições dadas por

$$g_2(\mathbf{x}) = V_{Sd} - V_{Rd2} \leq 0 \quad e \quad (3.17)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = V_{Sd} - V_{Rd3} \leq 0, \quad (3.18)$$

onde V_{Rd2} e V_{Rd3} são, respectivamente, a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto e a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal.

Para obter as resistências ao cortante é utilizado o modelo de cálculo II da NBR 6118 (2014), que se baseia na analogia com modelo em treliça, de banzos paralelos, associado a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e que absorvem uma parcela $V_{\bar{c}}$ da força cortante. O modelo estabelece que as diagonais de compressão tenham inclinação θ no intervalo de 30° a 45° , em relação ao eixo do elemento estrutural, e que a parcela $V_{\bar{c}}$ sofra redução com o aumento de V_{Sd} . Neste trabalho é adotado $\theta = 30^\circ$, devido a maior economia que essa configuração proporciona no dimensionamento, e o ângulo α de inclinação da armadura transversal, em relação ao eixo longitudinal da viga, é considerado 90° .

A equação que define o valor de V_{Rd2} é

$$V_{Rd2} = 0,54\alpha_{v2}f_{cd}bd(\cotg\alpha + \cotg\theta)\text{sen}^2\theta, \quad (3.19)$$

onde α_{v2} é um parâmetro em função do f_{ck} . O valor de V_{Rd3} é obtido por

$$V_{Rd3} = V_{sw} + V_{\bar{c}},$$

$$\Rightarrow V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s}0,9df_{ywd}(\cotg\alpha + \cotg\theta)\text{sen}\alpha;$$

$$\Rightarrow V_{\bar{c}} = \begin{cases} 0,6f_{ctd}bd & \text{se } V_{Sd} \leq 0,6f_{ctd}bd; \\ 0 & \text{se } V_{Sd} = V_{Rd2}, \text{ interpolando-se} \\ \text{linearmente} & \text{para valores intermediários.} \end{cases} \quad (3.20)$$

onde V_{sw} é a parcela da força cortante resistida pela armadura transversal, A_{sw} é a área da seção transversal dos estribos de força cortante,

s é o espaçamento entre eixos dos estribos, medido segundo o eixo longitudinal da peça, f_{ywd} é a tensão na armadura transversal e f_{ctd} é a resistência de cálculo do concreto à tração.

- Pilares:

Dado o carregamento aplicado e o comportamento da estrutura, os pilares devem ter capacidade resistente para suportar os efeitos combinados de momento fletor e força normal, ou seja, M_{Rd} deve ser maior do que M_{Sd} ao mesmo tempo que N_{Rd} (força normal resistente de cálculo) deve ser maior do que N_{Sd} (força normal solicitante de cálculo). Para garantir tal requisito, é construído um diagrama de interação $M_{Rd} \times N_{Rd}$ para cada seção transversal de pilar, que é uma curva que delimita as ações que podem atuar na seção com segurança. Assim, se o par $M_{Sd} \times N_{Sd}$ estiver na região segura do diagrama, a seção atende ao requisito de capacidade resistente em relação ao momento fletor e à força normal.

Para construir o digrama de interação, varia-se a posição da linha neutra na seção transversal, passando por todos os domínios, e calcula-se para cada uma dessas posições o valor de M_{Rd} e N_{Rd} . Para isso, primeiramente são obtidas as deformações nas armaduras, conforme apresentado a seguir, com base em Rosa Filho (2015):

- Domínio 1:

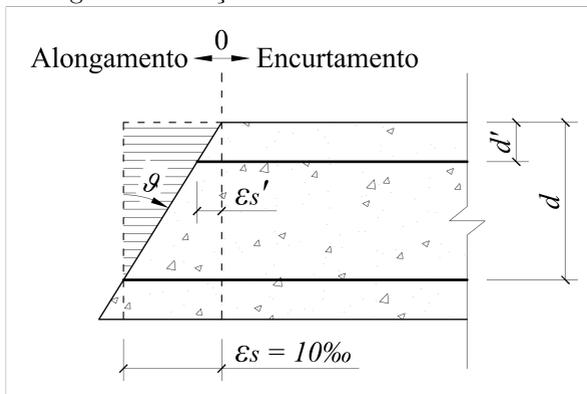
A partir de relações trigonométricas, baseadas na Figura 14, são desenvolvidas as equações para o cálculo da deformação específica do aço da armadura inferior ε_s (Equação 3.21) e da superior ε'_s (Equação 3.22), em que d' é a distância da borda superior da seção ao centro de gravidade da armadura superior. As deformações são obtidas para o intervalo apresentado na Equação 3.23, em que ϑ é a inclinação da linha neutra. Este intervalo é dividido em 10 pontos equidistantes, os quais correspondem a 10 distintas posições da linha neutra no domínio 1.

$$\varepsilon_s = 10\%_0 \quad (3.21)$$

$$\varepsilon'_s = 10\%_0 - (d - d')\tan\vartheta \quad (3.22)$$

$$0 \leq \tan\vartheta \leq \frac{10\%_0}{d} \quad (3.23)$$

Figura 14 – Seção transversal no domínio 1.

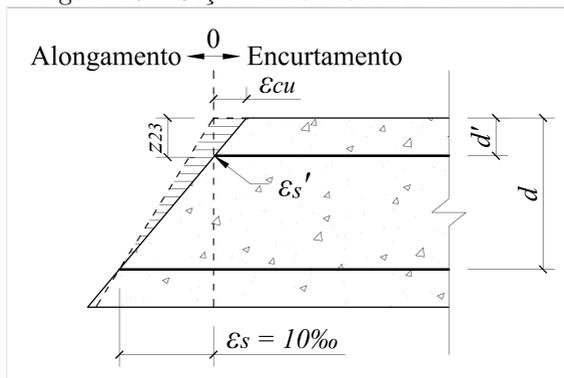


Fonte: Elaborada pela autora.

De maneira análoga, as Equações 3.24 a 3.34 são desenvolvidas para os domínios 2, 3, 4 e 5, ilustrados nas Figuras 15, 16, 17 e 18, respectivamente. No domínio 4, as equações de ε_s e de ε'_s são iguais às do domínio 3. No final dessa etapa, se obtém uma lista com 50 posições da linha neutra e seus respectivos valores de ε_s e ε'_s .

b) Domínio 2:

Figura 15 – Seção transversal no domínio 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

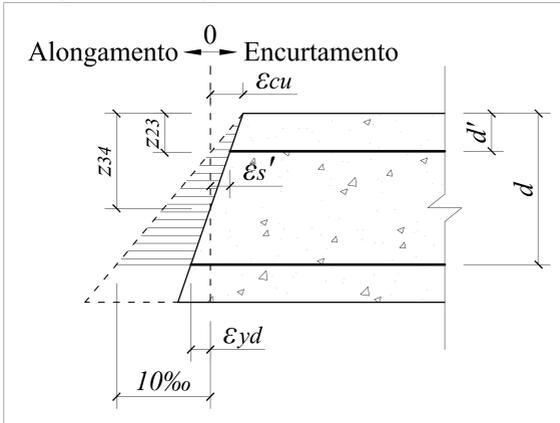
$$\varepsilon_s = 10\text{‰} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon'_s = 10\text{‰} \frac{d' - z}{d - z} \quad (3.25)$$

$$z_{12} = 0 \leq z \leq z_{23} = \frac{\varepsilon_{cu}}{10\text{‰} + \varepsilon_{cu}} d \quad (3.26)$$

c) Domínio 3:

Figura 16 – Seção transversal no domínio 3.



Fonte: Elaborada pela autora.

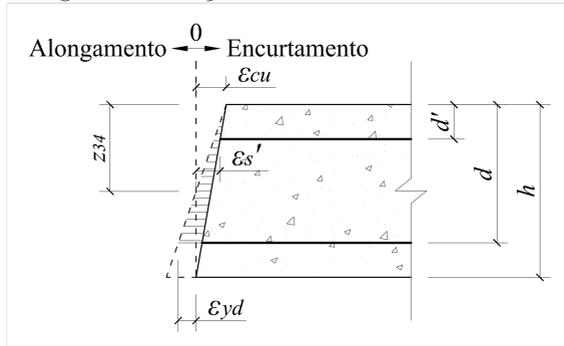
$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \frac{d - z}{z} \quad (3.27)$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \frac{d' - z}{z} \quad (3.28)$$

$$z_{23} = \frac{\varepsilon_{cu}}{10\text{‰} + \varepsilon_{cu}} d \leq z \leq z_{34} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} d \quad (3.29)$$

d) Domínio 4:

Figura 17 – Seção transversal no domínio 4.

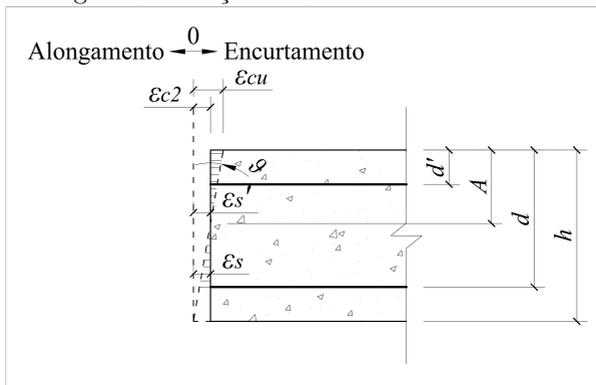


Fonte: Elaborada pela autora.

$$z_{34} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} d \leq z \leq z_{45} = h \quad (3.30)$$

e) Domínio 5:

Figura 18 – Seção transversal no domínio 5.



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_{c2} + (d - A)\tan\vartheta \quad (3.31)$$

$$\varepsilon'_s = -\varepsilon_{c2} - (A - d')\tan\vartheta \quad (3.32)$$

$$\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{A} \geq \tan\vartheta \geq 0 \quad (3.33)$$

$$A = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} h \quad (3.34)$$

Após o cálculo das deformações, obtém-se a tensão no aço da armadura inferior (σ_s) por

$$\sigma_s = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\varepsilon_s)fyd & \text{se } |\varepsilon_s Es| \geq |fyd| \\ \varepsilon_s Es & \text{se } |\varepsilon_s Es| < |fyd| \end{cases}, \quad (3.35)$$

onde sgn é a função sinal. Em seguida, calcula-se a força resistente da armadura inferior (R_s) a partir da Equação 3.36. De maneira análoga se obtém a tensão σ'_s e a força resistente R'_s da armadura superior.

$$R_s = A_s \sigma_s \quad (3.36)$$

A força resistente do concreto (R_c) é expressa por

$$R_c = -\alpha c f_{cd} \lambda z b. \quad (3.37)$$

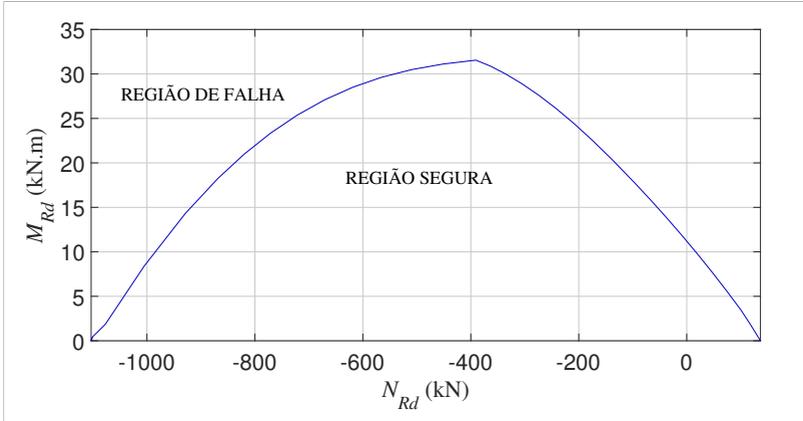
Assim, o par M_{Rd} e N_{Rd} é obtido pelo equilíbrio de momentos e de forças normais na seção, respectivamente, como mostram as Equações 3.38 e 3.39.

$$M_{Rd} = -R_c \left(\frac{h}{2} - \frac{\lambda z}{2} \right) + R_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) - R'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad (3.38)$$

$$N_{Rd} = R_c + R_s + R'_s \quad (3.39)$$

A Figura 19 apresenta um exemplo do diagrama, construído para uma seção transversal com base e altura iguais a 20 cm, quatro barras longitudinais de 10 mm de diâmetro (uma em cada extremidade da seção) e f_{ck} de 40 MPa.

Percebe-se que para cada normal atuante há um respectivo momento fletor resistente associado. Assim, após a construção do diagrama,

Figura 19 – Diagrama de interação $M_{Rd} \times N_{Rd}$.

Fonte: Elaborada pela autora.

o algoritmo desenvolvido busca o M_{Rd} associado ao N_{Sd} , e se esse valor de momento for maior do que M_{Sd} , a seção é considerada segura (Equação 3.40).

$$g_4(\mathbf{x}) = M_{Sd} - M_{Rd} \leq 0 \quad (3.40)$$

3.6.3.2 Restrições associadas aos estados limites de serviço

No estado limite de deformações excessivas, as flechas das vigas são restringidas pelo limite permitido pela NBR 6118 (2014). Essa restrição é expressa por

$$g_5(\mathbf{x}) = a_v - a_v^{lim} \leq 0, \quad (3.41)$$

em que a_v é a flecha calculada em uma viga e a_v^{lim} é a flecha limite admitida pela norma, adotada igual a $l/250$.

A previsão de flecha imediata (a_{v0}) é obtida a partir do método dos deslocamentos, conforme apresentado anteriormente. Assim, a avaliação da flecha diferida (que leva em conta o efeito da fluência) é dada pela equação

$$a_v = (1 + \alpha_f)a_{v0}, \quad (3.42)$$

onde α_f é o coeficiente que considera a fluência.

O pórtico também é verificado em relação aos deslocamentos

horizontais, conforme recomenda a NBR 6118 (2014). O deslocamento horizontal entre dois pavimentos consecutivos (a_h) deve respeitar o limite estabelecido pela norma, de modo que a restrição é apresentada como

$$g_6(\mathbf{x}) = a_h - a_h^{lim} \leq 0, \quad (3.43)$$

em que a_h^{lim} é o deslocamento horizontal limite entre dois pavimentos consecutivos, admitido igual a $l/850$. Já a restrição dada por

$$g_7(\mathbf{x}) = a_h^t - a_h^{tim} \leq 0 \quad (3.44)$$

determina que o deslocamento horizontal no topo do pórtico (a_h^t) deve respeitar o limite estabelecido pela norma (a_h^{tim}), adotado igual a $l_{total}/1700$, em que l_{total} é a altura do pórtico. Ressalta-se que os deslocamentos horizontais foram obtidos pelo métodos dos deslocamentos, conforme apresentado na seção de análise estrutural.

3.6.3.3 Restrições Gerais

Para todos os casos, também são consideradas as seguintes restrições de aspectos construtivos e de validade dos cálculos, conforme instruções da NBR 6118 (2014) (com exceção dos itens j e k, os quais foram adotados de modo a simplificar o problema estudado):

a) Para a viga apresentar comportamento dútil, a posição da linha neutra deve obedecer os limites apresentados na seção 3.5 deste trabalho;

b) Nos pilares e nas vigas deve haver espaço suficiente para alocar no mínimo duas barras em uma camada da armadura longitudinal;

c) O esforço na armadura longitudinal das vigas pode ser considerado concentrado no centro de gravidade correspondente, se a distância deste centro de gravidade ao centro da armadura mais afastada, medida normalmente à linha neutra, for menor que 10% de h ;

d) As armaduras longitudinais dos elementos devem atender as taxas mínimas e máximas da referida norma, prescritas em seus itens 17.3.5.2.1 e 17.3.5.2.4 para as vigas, e 17.3.5.3.1 e 17.3.5.3.2 para os pilares;

e) A taxa da armadura transversal das vigas deve obedecer o

estabelecido no item 17.4.1.1.1 da norma;

f) O espaçamento máximo entre eixos das barras longitudinais dos pilares, deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal, sem exceder 400 mm;

g) O espaçamento entre estribos, medido segundo o eixo longitudinal dos elementos estruturais, deve limitar-se ao máximo permitido, conforme os itens 18.3.3.2 e 18.4.3 da norma;

h) O diâmetro das barras longitudinais dos pilares não pode ser inferior a 10 mm nem superior a $1/8$ da menor dimensão transversal;

i) O diâmetro dos estribos em pilares não pode ser inferior a 5 mm nem a $1/4$ do diâmetro da barra da armadura longitudinal;

j) Os pilares devem possuir apenas uma camada de armadura longitudinal em cada extremidade da seção (superior e inferior);

k) A esbeltez dos pilares deve limitar-se a 90.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, a metodologia proposta é aplicada em dois exemplos numéricos, com o intuito de avaliar sua eficiência e alcançar os objetivos definidos inicialmente. Assim, é realizada a minimização do custo de pórticos planos de concreto armado, sujeitos a restrições do ELU e/ou do ELS, e posteriormente, os resultados obtidos são apresentados e avaliados. A Tabela 4 mostra alguns dos dados de entrada utilizados, comuns aos dois exemplos. Os custos unitários adotados foram obtidos de SINAPI (2017).

Tabela 4 – Dados de entrada dos exemplos I e II.

	Dado	Valor	Unidade
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento do aço da armadura longitudinal e transversal	500	MPa
E_s	Módulo de elasticidade do aço da armadura longitudinal e transversal	210000	MPa
ρ_s	Massa específica do aço da armadura longitudinal e transversal	7850	kg/m ³
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto	25	MPa
E_{ci}	Módulo de elasticidade inicial do concreto	28000	MPa
ρ_c	Massa específica do concreto armado	2500	kg/m ³
c	Cobrimento nominal - classe I	2,5	cm
C_c	Custo unitário do concreto para vigas - C25	336,02	R\$/m ³
	Custo unitário do concreto para pilares - C25	340,94	R\$/m ³
C_s	Custo unitário da armadura longitudinal - ϕ_{10}	5,84	R\$/kg
	Custo unitário da armadura longitudinal - $\phi_{12,5}$	5,21	R\$/kg
C_{sw}	Custo unitário da armadura transversal - $\phi_{6,3}$	7,44	R\$/kg
C_f	Custo unitário da forma para vigas	57,32	R\$/m ²
	Custo unitário da forma para pilares	47,06	R\$/m ²

Fonte: Elaborada pela autora.

Os casos de restrições aplicados em cada exemplo são definidos na Tabela 5. Em relação ao algoritmo de otimização, a população inicial do caso I inclui um projeto $\mathbf{x}^{(1)}$ viável qualquer, pré-definido. Já os casos II e III utilizam o resultado ótimo do caso I como o projeto $\mathbf{x}^{(1)}$ incluído na população inicial.

Testes preliminares indicaram problemas de convergência para mínimos locais. Por este motivo, optou-se por executar cada sub-problema n_{exec} vezes, considerando n_{exec} cadeias de pseudoaleatórios

Tabela 5 – Casos de restrições.

Caso	Restrições
I	ELU + ELS
II	ELU
III	ELS

Fonte: Elaborada pela autora.

distintas, relacionadas a diferentes sementes do gerador de pseudoaleatórios. O melhor dentre os resultados obtidos a partir das n_{exec} execuções é considerado como resultado final do processo de otimização. Neste trabalho, adotou-se $n_{exec} = 10$.

Além dos parâmetros mencionados, em todos os exemplos foram adotados os seguintes parâmetros no algoritmo de otimização: tamanho da população igual a 50 indivíduos; limite de gerações igual a 10000; *stall generation* de 500 gerações. Todos os exemplos foram executados em um computador com processador Intel Core i7-5820K, que dispõe de 6 núcleos de processamento que atuam como 12 núcleos por meio da tecnologia Hyper-Threading.

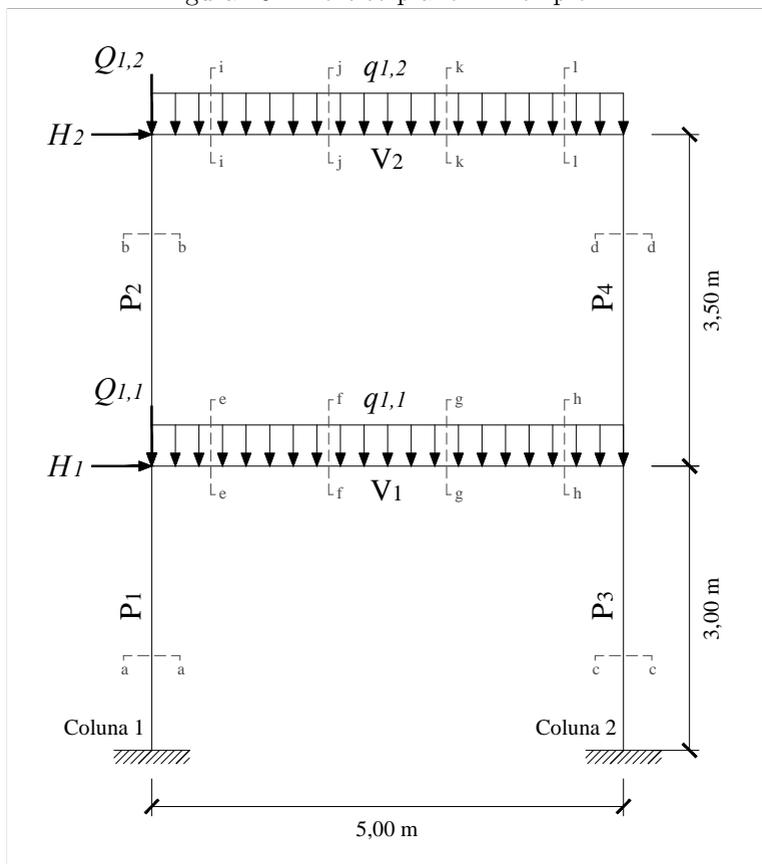
No início da pesquisa, foi feito um estudo preliminar, disponível no APÊNDICE A, com o intuito de analisar a rotina de verificação dos estados limites de vigas. Também, foi realizado um estudo das rotinas de análise estrutural do MASTAN2, apresentado no APÊNDICE B, com o intuito de validá-las com resultados da literatura.

4.1 EXEMPLO NUMÉRICO I

O exemplo consiste em um pórtico plano de concreto armado, cuja geometria foi apresentada por Adamu e Karihaloo (1995-a). A Figura 20 mostra um esquema da estrutura e a Tabela 6 o carregamento característico empregado. A partir dessas cargas são obtidas as cargas últimas e de serviço, conforme as combinações apresentadas na seção 3.3. Destaca-se que as cargas devido ao peso próprio das vigas e dos pilares também foram consideradas, ou seja, além das cargas mencionadas, o peso próprio da estrutura é atualizado e adicionado ao carregamento em cada iteração do processo de otimização.

Em relação às variáveis, as vigas V_1 e V_2 foram discretizadas em quatro segmentos de igual comprimento, de modo que cada viga possui 17 variáveis: b , h , ϕ_s^{inf} , ϕ_s^{sup} , ϕ_{sw} , $n_{s_1}^{inf}$, $n_{s_1}^{sup}$, n_{sw_1} , $n_{s_2}^{inf}$, $n_{s_2}^{sup}$, n_{sw_2} , $n_{s_3}^{inf}$, $n_{s_3}^{sup}$, n_{sw_3} , $n_{s_4}^{inf}$, $n_{s_4}^{sup}$ e n_{sw_4} , em que o sub-índice numérico indica o segmento da viga. Também, foi considerado que todos os pilares de

Figura 20 – Pórtico plano - Exemplo I.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 6 – Carregamento característico - Exemplo I.

	Ações permanentes diretas	Ações variáveis diretas
H_1	-	11,9 kN
$Q_{1,1}$	21,4 kN	14,3 kN
$q_{1,1}$	25,7 kN/m	17,1 kN/m
H_2	-	6,0 kN
$Q_{1,2}$	12,9 kN	8,6 kN
$q_{1,2}$	17,1 kN/m	11,4 kN/m

Fonte: Elaborada pela autora.

uma mesma coluna possuem a mesma seção transversal ($P_1 = P_2$ e $P_3 = P_4$), exceto pelas quantidades de armaduras, que foram consideradas independentes entre si. Dessa maneira, cada coluna possui 8 variáveis; por exemplo, para a coluna 1 tem-se: b , h , ϕ_s , ϕ_{sw} , $n_s^{P_1}$, $n_{sw}^{P_1}$, $n_s^{P_2}$ e $n_{sw}^{P_2}$. Assim, o problema possui 50 variáveis no total.

A Tabela 7 mostra o domínio desse exemplo numérico. Os limites mínimos e máximos das variáveis foram definidos da seguinte maneira: o limite mínimo da largura da seção transversal das vigas e das dimensões da seção transversal dos pilares corresponde ao mínimo permitido pela NBR 6118 (2014) (itens 13.2.2 e 13.2.3); a altura máxima da seção transversal das vigas refere-se à dimensão máxima permitida sem que seja necessário adicionar armadura de pele (item 17.3.5.2.3 da NBR 6118 (2014)); o limite mínimo para o número de barras da armadura longitudinal das vigas e dos pilares é o mínimo construtivo; os limites para o número de barras da armadura transversal dos segmentos das vigas e dos pilares correspondem, aproximadamente, a uma delimitação do espaçamento entre os eixos das barras de 10 cm a 30 cm para as vigas e de 10 cm a 15 cm para os pilares. Os demais limites foram definidos caso a caso. Deve-se ressaltar que foi adotado apenas um valor possível para os diâmetros das armaduras, com o intuito de diminuir o domínio do problema e tornar a otimização menos complexa.

Tabela 7 – Domínio - Exemplo I.

Vigas								
	b	h	n_s^{inf}	n_s^{sup}	ϕ_s^{inf}	ϕ_s^{sup}	n_{sw}	ϕ_{sw}
	(cm)	(cm)	(un)	(un)	(mm)	(mm)	(un)	(mm)
Mínimo	12	30	2	2	10	10	6	6,3
Máximo	26	60	10	10	10	10	13	6,3
Incremento	2	2	1	1	-	-	1	-
Pilares								
	b	h	n_s	ϕ_s	n_{sw}	ϕ_{sw}		
	(cm)	(cm)	(un)	(mm)	(un)	(mm)		
Mínimo	19	19	2	10	20	6,3		
Máximo	31	51	8	10	36	6,3		
Incremento	2	2	1	-	2	-		

Fonte: Elaborada pela autora.

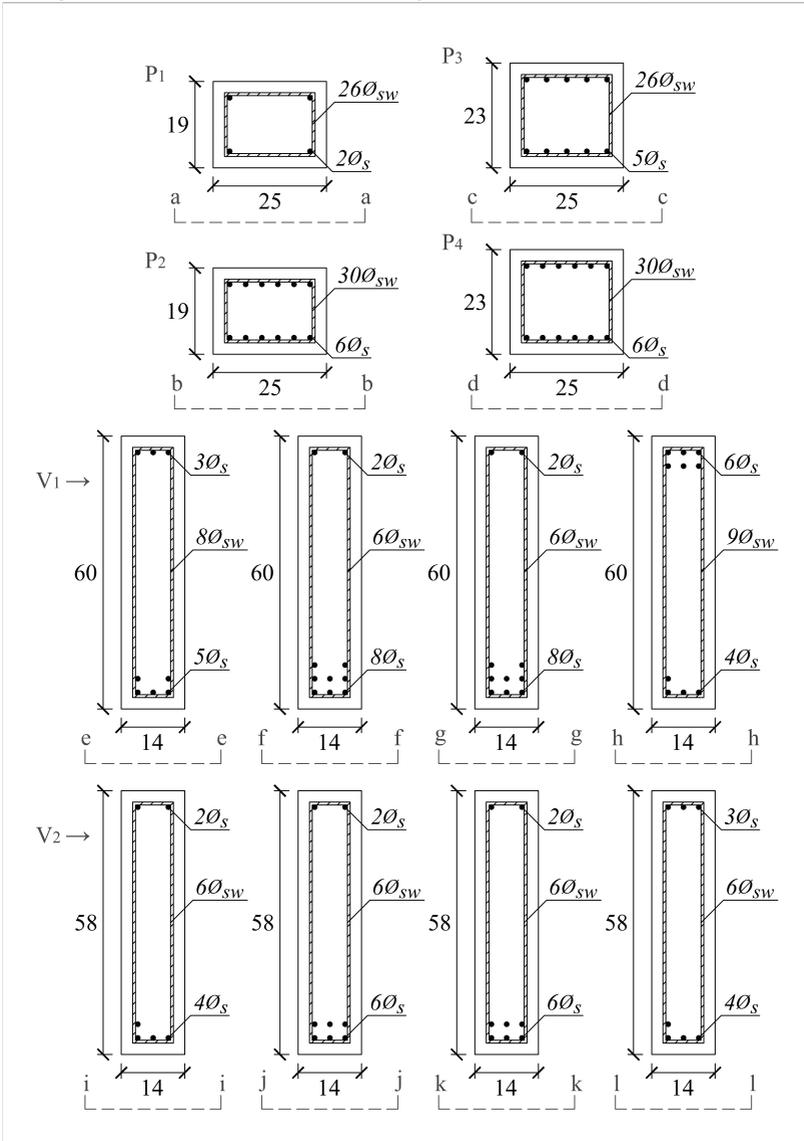
A seguir, são apresentados os resultados obtidos na otimização da estrutura, para cada caso de restrição, e, na sequência, é feita uma análise crítica dos resultados.

4.1.1 Configuração ótima para os estados limites último e de serviço: caso I

Em relação ao caso de otimização que considera as restrições do ELU e do ELS simultaneamente, a Figura 21 apresenta o detalhamento das seções ótimas dos elementos estruturais do pórtico. São observados alguns comportamentos gerais, conforme esperado, que indicam que o algoritmo desenvolvido apresenta desempenho adequado para o problema analisado, dos quais destacam-se: nas faces inferiores das vigas, a maior quantidade de armadura longitudinal ocorre na região central dos vãos, enquanto que nas faces superiores a maior quantidade ocorre nos extremos; a viga V_1 possui mais estribos nos extremos do que no meio do vão; os pilares P_2 e P_4 apresentam mais estribos do que os pilares P_1 e P_3 , dados seus maiores comprimentos.

A Tabela 8 mostra os custos ótimos dos elementos. São exibidos os custos por insumo considerado na função objetivo, e suas respectivas porcentagens relativas ao custo total de cada elemento. Observa-se que, para os pilares, a armadura foi preponderante na composição do custo. Entretanto, para as vigas e para a totalidade do pórtico, a forma foi o insumo correspondente à maior parcela dos custos.

Figura 21 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo I: caso I.



Fonte: Elaborada pela autora.

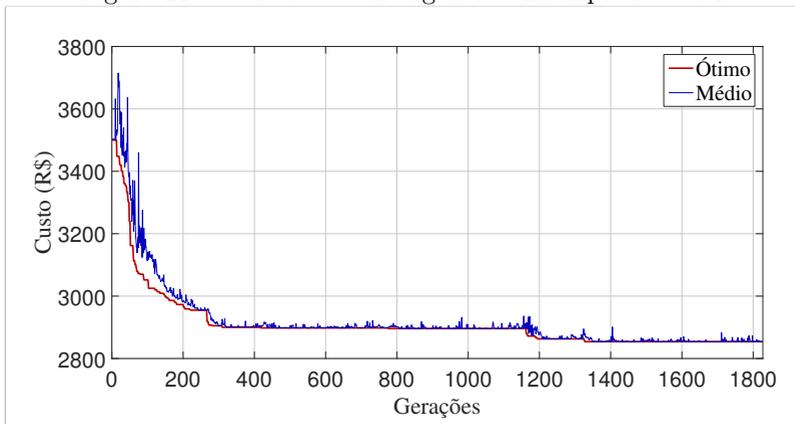
Tabela 8 – Custo ótimo - Exemplo I: caso I.

Elemento	Custos (R\$)					
	Concreto	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura total	Forma	Total
P ₁	48,58	43,21	32,19	75,40	124,24	248,22
	19,57 %	17,41 %	12,97%	30,37%	50,05%	100,00%
P ₂	56,68	151,22	37,14	188,36	144,94	389,99
	14,53%	38,78%	9,52%	48,30%	37,17%	100,00%
P ₃	58,81	108,02	35,97	143,99	135,53	338,34
	17,38%	31,93%	10,63%	42,56%	40,06%	100,00%
P ₄	68,61	151,22	41,51	192,73	158,12	419,47
	16,36%	36,05%	9,90%	45,95%	37,70%	100,00%
V ₁	141,13	171,03	67,58	238,61	384,04	763,78
	18,48%	22,39%	8,85%	31,24%	50,28%	100,00%
V ₂	136,42	130,52	54,18	184,70	372,58	693,71
	19,67%	18,82%	7,81%	26,63%	53,71%	100,00%
Total pilares	232,69	453,67	146,81	600,49	562,84	1396,02
	16,67%	32,50%	10,52%	43,01%	40,32%	100,00%
Total vigas	277,55	301,55	121,76	423,31	756,62	1457,49
	19,04%	20,69%	8,35%	29,04%	51,91%	100,00%
Total pórtico	510,24	755,22	268,57	1023,80	1319,46	2853,50
	17,88%	26,47%	9,41%	35,88%	46,24%	100,00%

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 22 mostra o gráfico de convergência do algoritmo de otimização. Foram necessárias 1827 gerações e 91400 avaliações da função objetivo, com tempo computacional de 8,09 horas. Na primeira geração, o melhor indivíduo apresenta um custo de aproximadamente R\$ 3500, e na última geração, a solução ótima indica um custo de R\$ 2853,50. Sendo assim, o algoritmo reduziu o custo da estrutura em cerca de 18,47%, ainda satisfazendo a todas as restrições impostas.

Figura 22 – Curvas de convergência - Exemplo I: caso I.

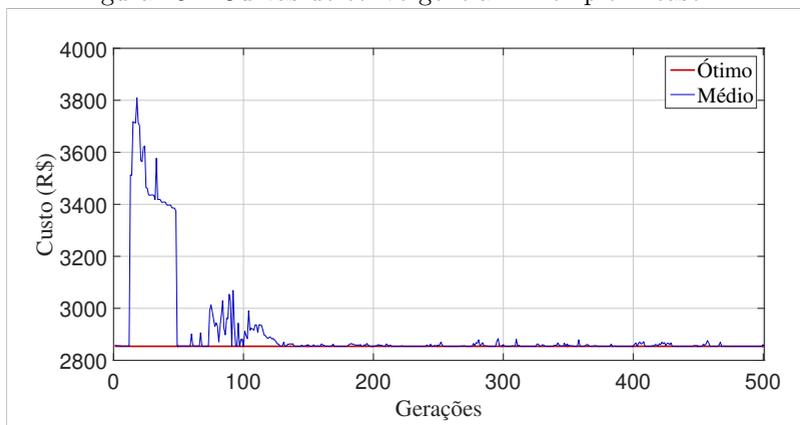


Fonte: Elaborada pela autora.

4.1.2 Configuração ótima para o estado limite último: caso II

No tocante à otimização que considera somente as restrições do ELU, o algoritmo não apresentou redução do custo da estrutura ao longo das iterações, isto é, as seções ótimas encontradas foram iguais às obtidas ao considerar as restrições do ELU e do ELS simultaneamente. A título de ilustração, a Figura 23 apresenta uma das curvas de convergência do algoritmo de otimização. Foram realizadas 501 gerações e 25100 avaliações da função objetivo, de modo que o tempo computacional foi de 3,75 horas.

Figura 23 – Curvas de convergência - Exemplo I: caso II.



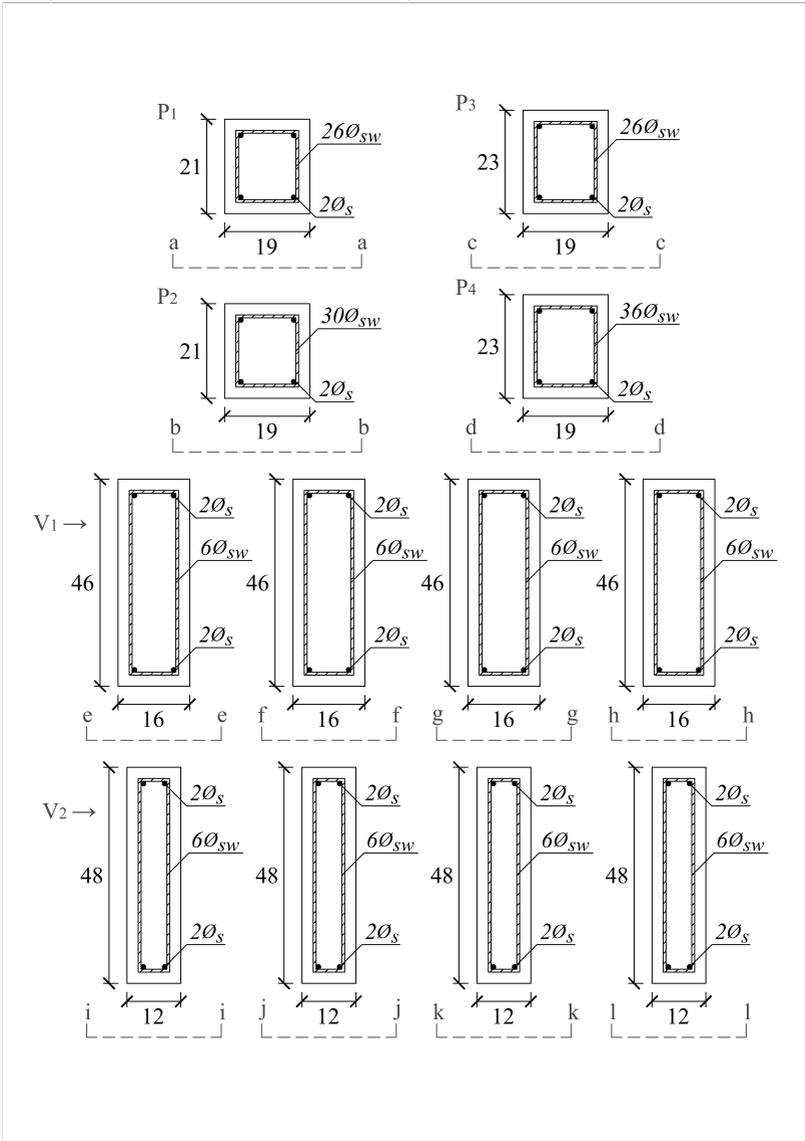
Fonte: Elaborada pela autora.

4.1.3 Configuração ótima para o estado limite de serviço: caso III

O detalhamento das seções ótimas dos elementos estruturais do pórtico, para o caso de otimização que considera apenas as restrições do ELS, é ilustrado na Figura 24. Nota-se que quase todos os elementos estruturais possuem armadura mínima permitida, como esperado, pois nesse caso não há verificação da resistência da seção e não está sendo considerada a contribuição das armaduras na inércia, a qual possui grande influência nos deslocamentos da estrutura. O pilar P_4 é a única exceção, já que apresenta mais estribos do que o necessário. Esse fato indica um possível mínimo local.

A Tabela 9 apresenta os custos ótimos dos elementos. Observa-se que a forma é o insumo preponderante na composição do custo total dos pilares, das vigas e do pórtico. O custo ótimo da estrutura foi de R\$ 2080,21, de modo que apresenta uma economia de 27,10% em relação ao resultado do caso I e II, mas aqui a estrutura ótima obtida não satisfaz as restrições do ELU.

Figura 24 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo I: caso III.



Fonte: Elaborada pela autora.

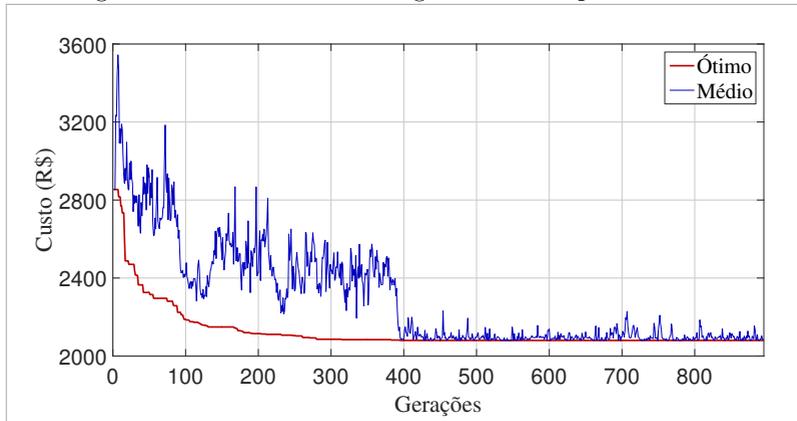
Tabela 9 – Custo ótimo - Exemplo I: caso III.

Elemento	Custos (R\$)					Forma	Total
	Concreto	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura total	Forma		
P ₁	40,81 18,11%	43,21 19,17%	28,40 12,60%	71,61 31,77%	112,94 50,12%	225,36 100,00%	
P ₂	47,61 18,13%	50,41 19,20%	32,77 12,48%	83,18 31,68%	131,77 50,19%	262,56 100,00%	
P ₃	44,70 18,88%	43,21 18,25%	30,29 12,79%	73,50 31,04%	118,59 50,08%	236,79 100,00%	
P ₄	52,15 18,44%	50,41 17,82%	41,95 14,83%	92,35 32,65%	138,36 48,91%	282,86 100,00%	
V ₁	123,66 22,46%	72,01 13,08%	45,44 8,25%	117,45 21,33%	309,53 56,21%	550,64 100,00%	
V ₂	96,77 18,54%	72,01 13,80%	43,69 8,37%	115,71 22,17%	309,53 59,30%	522,01 100,00%	
Total pilares	185,27 18,39%	187,23 18,58%	133,41 13,24%	320,64 31,82%	501,66 49,79%	1007,57 100,00%	
Total vigas	220,43 20,55%	144,02 13,43%	89,14 8,31%	233,16 21,74%	619,06 57,71%	1072,64 100,00%	
Total pórtico	405,70 19,50%	331,25 15,92%	222,55 10,70%	553,80 26,62%	1120,72 53,88%	2080,21 100,00%	

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 25 mostra a curva de convergência do algoritmo de otimização. Foram feitas 44800 avaliações da função objetivo no decorrer de 895 gerações. O tempo computacional foi de aproximadamente 4,2 horas.

Figura 25 – Curvas de convergência - Exemplo I: caso III.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.1.4 Discussão dos resultados

Quando ambos os estados limites foram considerados como restrições da otimização do pórtico, o resultado obtido foi o mesmo de quando somente as restrições do ELU foram levadas em conta; diferente do que ocorreu ao considerar somente as restrições do ELS, que levou a uma estrutura ótima com custo menor. Portanto, a estrutura ótima para o ELU também verifica as restrições do ELS, mas a estrutura ótima para o ELS não atende todas as restrições do ELU. Essa situação está diretamente relacionada à prática de projeto, em que geralmente a estrutura é dimensionada para as situações últimas e posteriormente são realizadas as verificações de serviço.

Dentre as restrições específicas de ambos os estados limites, foi identificado como restrição limitante para os casos I e II, a relativa ao momento fletor resistente do P_2 . Já para o caso III, a restrição limitante foi a relacionada ao deslocamento horizontal no topo do pórtico. Por restrição limitante, entende-se aquela restrição que ficou mais próxima de ser violada, já que ao se utilizar variáveis discretas em problemas

como o proposto, dificilmente haverá restrições ativas.

Quando comparadas as seções ótimas dos pilares para o ELU em relação às seções ótimas para o ELS, é observado que, no ELU, as bases dos elementos são maiores e que as seções são igualmente ou mais armadas longitudinalmente. Como os pilares só possuem uma camada de armadura longitudinal, eles tenderam a ter de largura o quanto era necessário para acomodar adequadamente as quantidades de barras longitudinais exigidas para equilibrar os esforços solicitantes no ELU. Além disso, as seções ótimas dos pilares para o ELS apresentaram alturas iguais ou superiores e bases mínimas. Como a altura da seção tem mais influência na inércia em relação à linha neutra do que a base, para as situações de serviço são esperadas seções retangulares em que a altura é a maior dimensão, já que as armaduras não estão sendo consideradas no cálculo da inércia.

Em relação às vigas ótimas para o ELU, é observado que possuem alturas maiores e que são igualmente ou mais armadas em ambas as direções quando comparadas às vigas ótimas para o ELS. Intuitivamente, era esperado que as bases ótimas para o caso III fossem mínimas, o que não foi observado para a viga V_1 . Assim, foram realizados diversos testes com soluções próximas às ótimas, em que foram adotadas seções com alturas maiores e com bases mínimas para tal viga; entretanto, nenhuma opção atendeu as restrições atuantes, dentre as quais se inclui a flecha da referida viga e os deslocamentos horizontais entre os pavimentos e no topo do pórtico.

Por fim, ressalta-se a predominância da forma como insumo preponderante na composição dos custos. Com exceção dos pilares nos casos I e II, em que a armadura teve papel mais expressivo no custo, a forma correspondeu à maior parcela do custo dos elementos estruturais e do pórtico no total, em todos os casos. O segundo insumo de maior impacto nos custos dos elementos estruturais e do pórtico, em todos os casos, foi a armadura, exceto para os pilares nos casos I e II, em que a forma assumiu essa posição.

4.2 EXEMPLO NUMÉRICO II

Nesta seção, o exemplo consiste em uma estrutura previamente estudada por diversos autores (Rajeev e Krishnamoorthy (1998), Camp, Pezeshk e Hansson (2003), Camp e Huq (2013), Akin e Saka (2015), entre outros), dos quais foram definidas as geometrias e os carregamentos para a presente análise. A estrutura é ilustrada na Figura 26 e o

carregamento característico adotado é exibido na Tabela 10. Destaca-se que são aplicadas as mesmas cargas em todos os pavimentos e que o peso da estrutura também é considerado.

Tabela 10 – Carregamento característico - Exemplo II.

	Ações permanentes diretas	Ações variáveis diretas
H	-	11,9 kN
q	12,9 kN/m	8,6 kN/m

Fonte: Elaborada pela autora.

Foram adotados 4 tipos distintos de vigas (V_1 , V_2 , V_3 e V_4), conforme ilustrado no esquema do pórtico. Cada viga foi discretizada em 4 segmentos, de maneira análoga ao exemplo I. Logo, cada viga tem 17 variáveis. Paralelamente, foi considerado que todos os pilares de uma mesma coluna são iguais, isto é, possuem a mesma seção transversal. Assim, cada coluna tem 6 variáveis: b , h , ϕ_s , ϕ_{sw} , n_s e n_{sw} . Portanto, o problema, cujo domínio é apresentado na Tabela 11, possui 86 variáveis no total. Os limites mínimos e máximos das variáveis foram definidos conforme o exemplo I.

Tabela 11 – Domínio - Exemplo II.

	Vigas							
	b (cm)	h (cm)	n_s^{inf} (un)	n_s^{sup} (un)	ϕ_s^{inf} (mm)	ϕ_s^{sup} (mm)	n_{sw} (un)	ϕ_{sw} (mm)
Mínimo	12	30	2	2	12,5	12,5	5	6,3
Máximo	30	60	10	10	12,5	12,5	15	6,3
Incremento	2	2	1	1	-	-	1	-
	Pilares							
	b (cm)	h (cm)	n_s (un)	ϕ_s (mm)	n_{sw} (un)	ϕ_{sw} (mm)		
Mínimo	19	19	2	12,5	28	6,3		
Máximo	39	55	9	12,5	40	6,3		
Incremento	2	2	1	-	2	-		

Fonte: Elaborada pela autora.

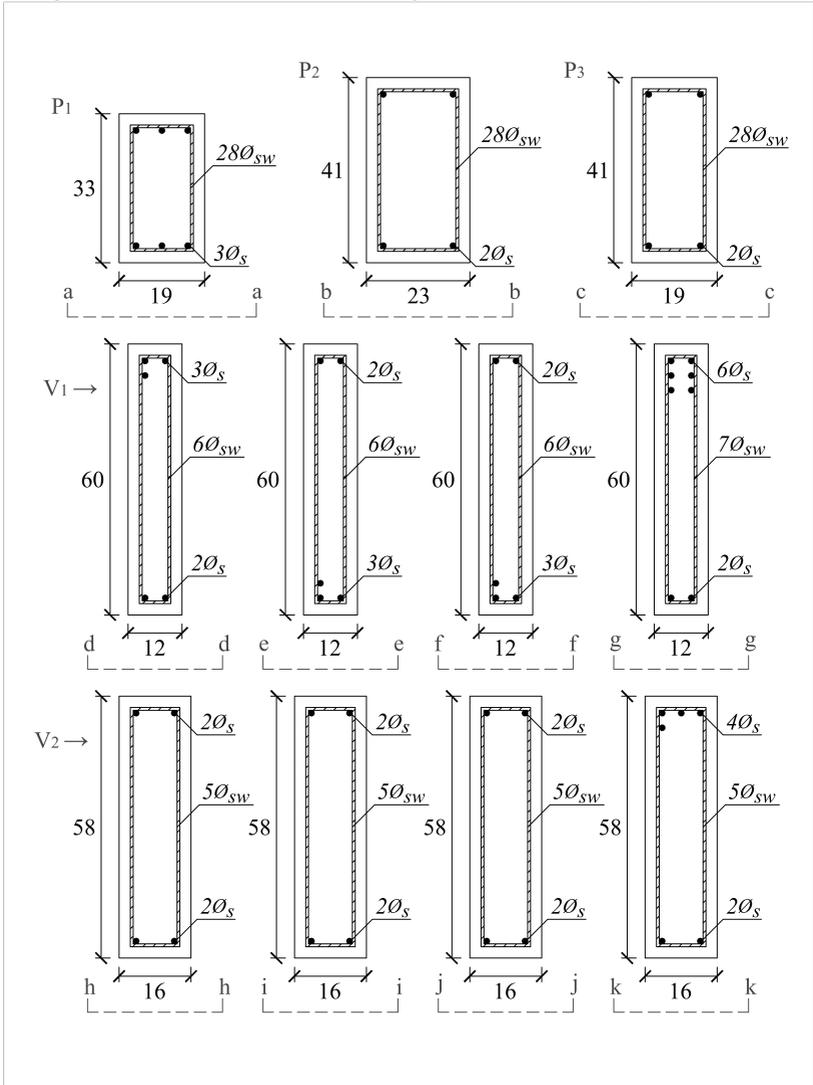
A seguir, são apresentados os resultados obtidos nesse exemplo, para cada caso de restrição. Posteriormente, os resultados são discutidos e também são comparados com os obtidos no exemplo I.

4.2.1 Configuração ótima para os estados limites último e de serviço: caso I

No tocante à otimização que considera as restrições do ELU e do ELS, as Figuras 27 e 28 ilustram o detalhamento das seções ótimas dos elementos estruturais. Nesse exemplo, também é possível notar alguns comportamentos que indicam bom desempenho do algoritmo, dos quais destacam-se: o maior número de barras da armadura longitudinal, nas faces inferiores das vigas, ocorre no centro dos vãos, enquanto que nas faces superiores das vigas ocorre nos extremos dos vãos; as vigas V_1 e V_3 apresentam mais estribos do que as vigas V_2 e V_4 , e a maior concentração dessa armadura ocorre nos extremos; os pilares exibem a mesma quantidade de estribos, visto que possuem os mesmos comprimentos.

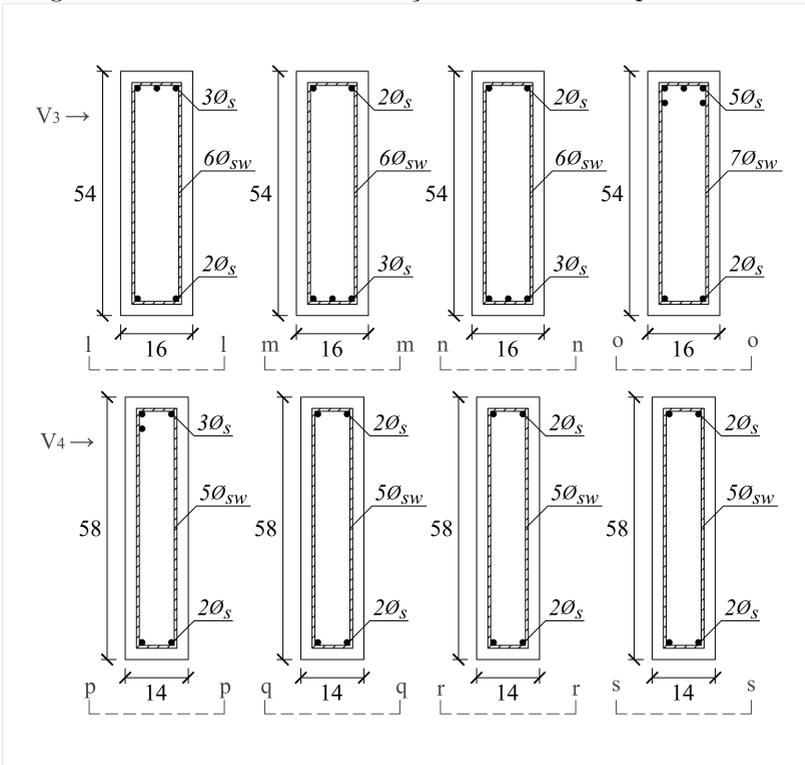
A Tabela 12 apresenta os custos ótimos obtidos para cada elemento estrutural. Nota-se que a forma representa o insumo de maior impacto no custo total dos pilares, das vigas e do pórtico, e o segundo insumo com maior contribuição foi a armadura.

Figura 27 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso I.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 28 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso I.



Fonte: Elaborada pela autora.

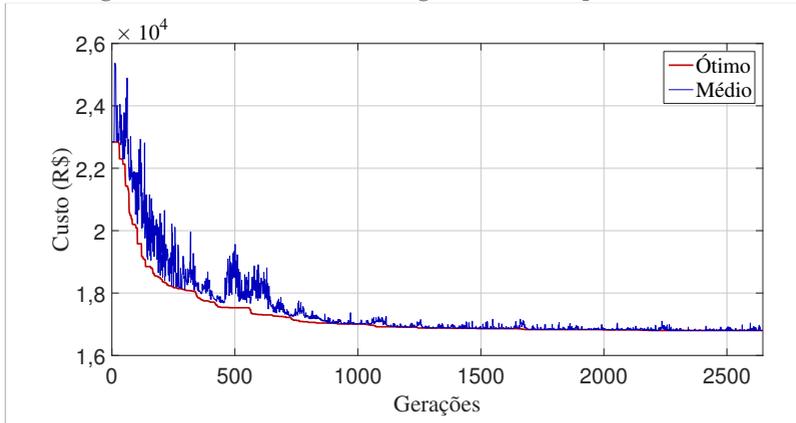
Tabela 12 – Custo ótimo - Exemplo II: caso I.

Elemento	Custos (R\$)					Forma	Total
	Concreto	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura total	Forma		
P ₁ (×6)	85,51	120,46	42,82	163,28	195,77	444,55	
	19,23%	27,10%	9,63%	36,73%	44,04%	100,00%	
P ₂ (×6)	128,60	80,30	55,05	135,36	240,95	504,91	
	25,47%	15,90%	10,90%	26,81%	47,72%	100,00%	
P ₃ (×6)	106,24	80,30	50,98	131,28	225,89	463,41	
	22,93%	17,33%	11,00%	28,33%	48,75%	100,00%	
V ₁ (×5)	145,16	173,16	56,44	229,59	453,97	828,73	
	17,52%	20,89%	6,81%	27,70%	54,78%	100,00%	
V ₂ (×5)	124,73	90,34	46,61	136,95	302,65	564,33	
	22,10%	16,01%	8,26%	24,27%	53,63%	100,00%	
V ₃ (×1)	174,19	165,63	54,62	220,24	426,46	820,90	
	21,22%	20,18%	6,65%	26,83%	51,95%	100,00%	
V ₄ (×1)	109,14	85,32	45,15	130,47	298,06	537,68	
	20,30%	15,87%	8,40%	24,27%	55,44%	100,00%	
Total pilares	1922,08	1686,38	893,11	2579,50	3975,63	8477,21	
	22,67%	19,89%	10,54%	30,43%	46,90%	100,00%	
Total vigas	1632,79	1568,44	615,00	2183,44	4507,64	8323,87	
	19,62%	18,84%	7,39%	26,23%	54,15%	100,00%	
Total pórtico	3554,87	3254,82	1508,11	4762,93	8483,27	16801,08	
	21,16%	19,37%	8,98%	28,35%	50,49%	100,00%	

Fonte: Elaborada pela autora.

O gráfico de convergência da otimização é ilustrado na Figura 29. Foram requeridas 2646 gerações e 132350 avaliações da função objetivo, de maneira que o tempo de processamento computacional foi de 1 dia e 21,32 horas. O indivíduo ótimo da primeira geração do processo de otimização apresenta um custo de aproximadamente R\$ 22840. Já a solução ótima da última geração apresenta um custo de R\$ 16801,08. Sendo assim, o custo final é cerca de 26,44% menor do que o custo inicial.

Figura 29 – Curvas de convergência - Exemplo II: caso I.



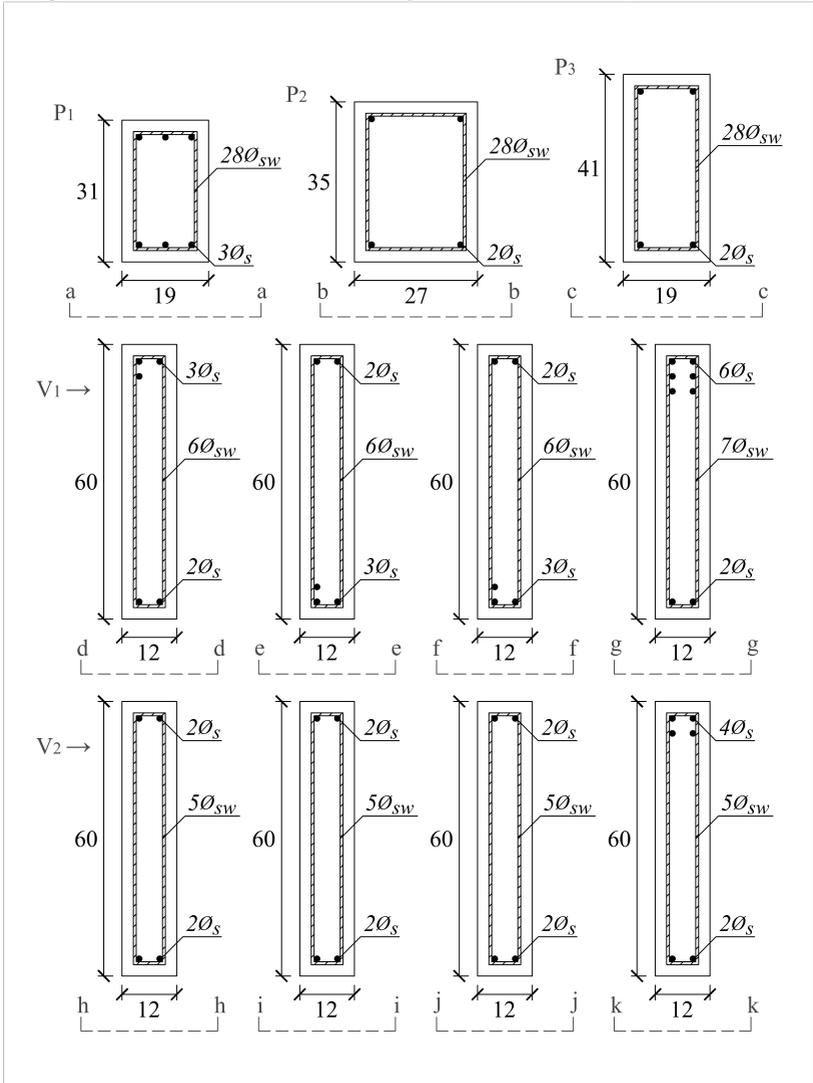
Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.2 Configuração ótima para o estado limite último: caso II

O detalhamento das seções ótimas para o caso II é apresentado nas Figuras 30 e 31. As mesmas observações feitas no caso I, que dão indícios do bom funcionamento do algoritmo, podem ser estendidas para o presente caso, visto que as seções transversais ótimas são semelhantes.

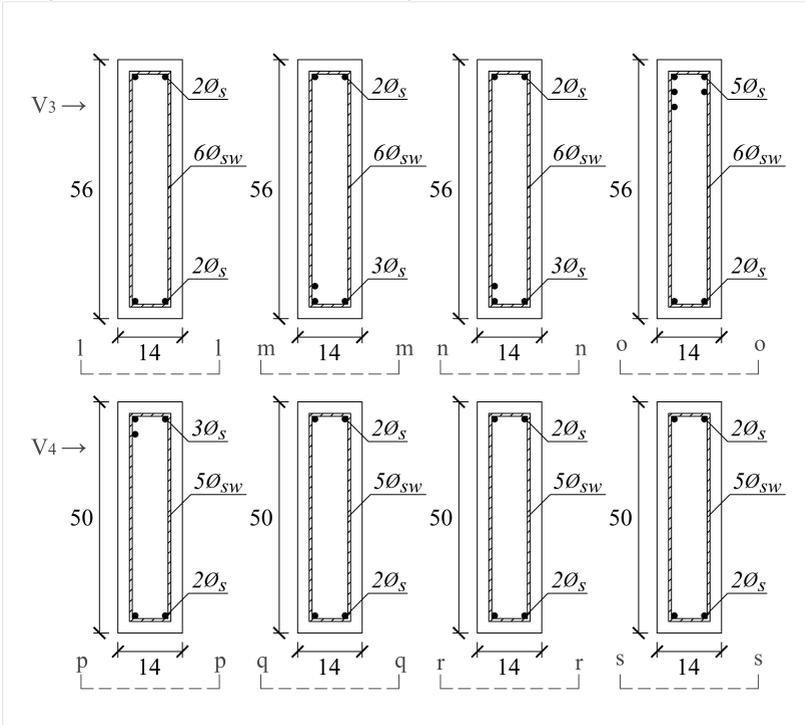
Os custos ótimos são exibidos na Tabela 13, onde é observada a predominância da forma na composição dos custos. O segundo insumo mais influente nos custos foi a armadura. A solução ótima apresenta um custo de R\$ 16433,20, de maneira que corresponde a uma economia de 2,19% em relação à solução ótima do caso I. Nesta situação, a estrutura do ELU não satisfaz o ELS.

Figura 30 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso II.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 31 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso II.



Fonte: Elaborada pela autora.

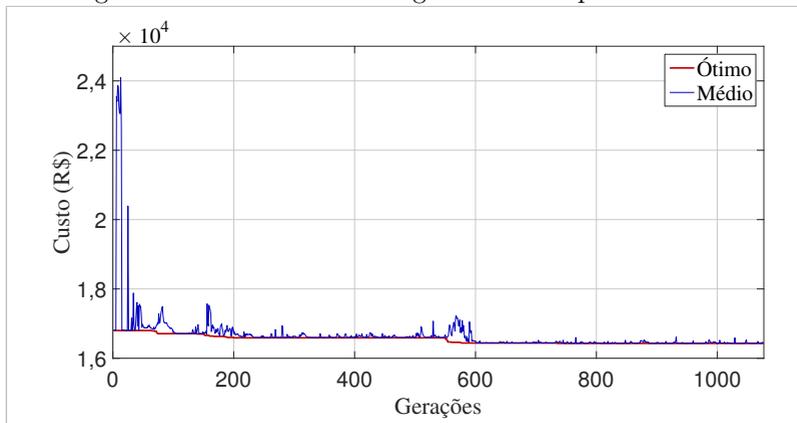
Tabela 13 – Custo ótimo - Exemplo II: caso II.

Elemento	Custos (R\$)					
	Concreto	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura total	Forma	Total
P ₁ (×6)	80,33	120,46	40,78	161,24	188,24	429,80
	18,69%	28,03%	9,49%	37,51%	43,80%	100,00%
P ₂ (×6)	128,88	80,30	53,02	133,32	233,42	495,61
	26,00%	16,20%	10,70%	26,90%	47,10%	100,00%
P ₃ (×6)	106,24	80,30	50,98	131,28	225,89	463,41
	22,93%	17,33%	11,00%	28,33%	48,75%	100,00%
V ₁ (×5)	145,16	173,16	56,44	229,59	453,97	828,73
	17,52%	20,89%	6,81%	27,70%	54,78%	100,00%
V ₂ (×5)	96,77	90,34	45,15	135,49	302,65	534,92
	18,09%	16,89%	8,44%	25,33%	56,58%	100,00%
V ₃ (×1)	158,06	158,10	52,43	210,53	433,34	801,93
	19,71%	19,71%	6,54%	26,25%	54,04%	100,00%
V ₄ (×1)	94,09	85,32	39,32	124,65	261,38	480,11
	19,60%	17,77%	8,19%	25,96%	54,44%	100,00%
Total pilares	1892,63	1686,38	808,64	2555,03	3885,27	8332,93
	22,71%	20,24%	10,42%	30,66%	46,63%	100,00%
Total vigas	1461,82	1560,91	599,70	2160,61	4477,84	8100,27
	18,05%	19,27%	7,40%	26,67%	55,28%	100,00%
Total pórtico	3354,45	3247,29	1468,35	4715,64	8363,11	16433,20
	20,41%	19,76%	8,94%	28,70%	50,89%	100,00%

Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 32 apresenta a curva de convergência para esse caso de otimização. Foram necessárias 53900 avaliações da função objetivo e 1077 gerações, o que resultou em um tempo computacional de 17,85 horas.

Figura 32 – Curvas de convergência - Exemplo II: caso II.



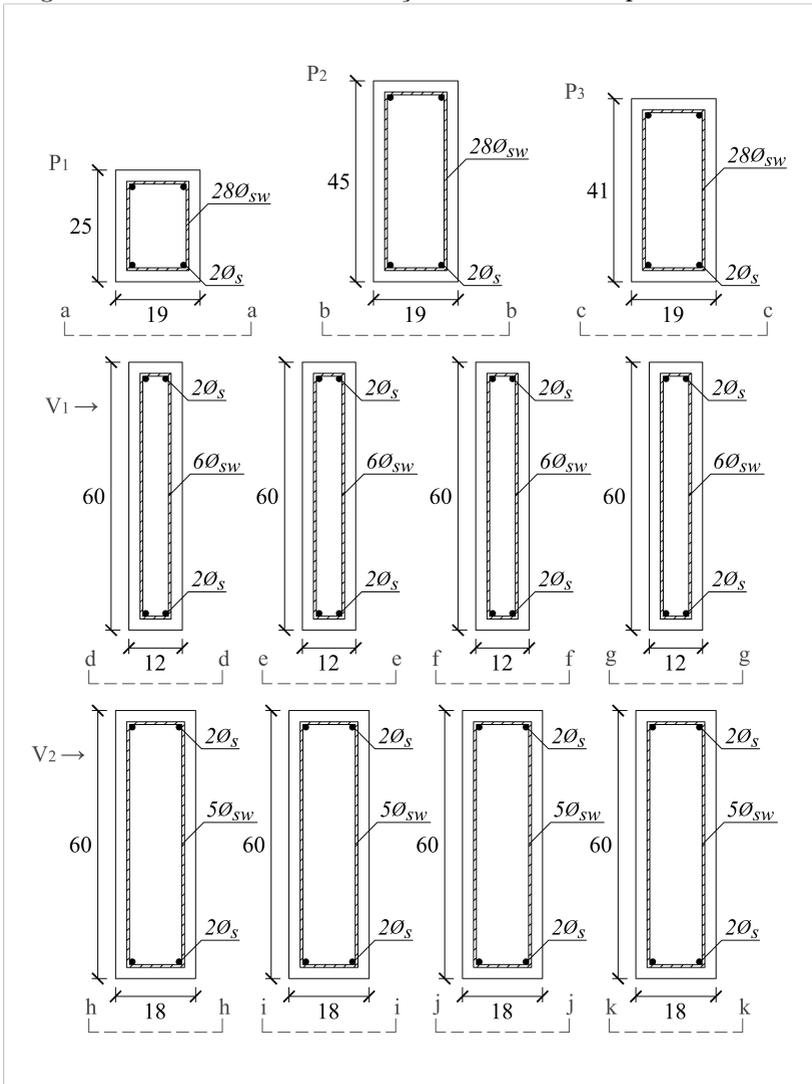
Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.3 Configuração ótima para o estado limite de serviço: caso III

As seções ótimas para esse caso são ilustradas nas Figuras 33 e 34. Todos os elementos apresentaram a menor armadura permitida, tanto a longitudinal quanto a transversal, conforme esperado.

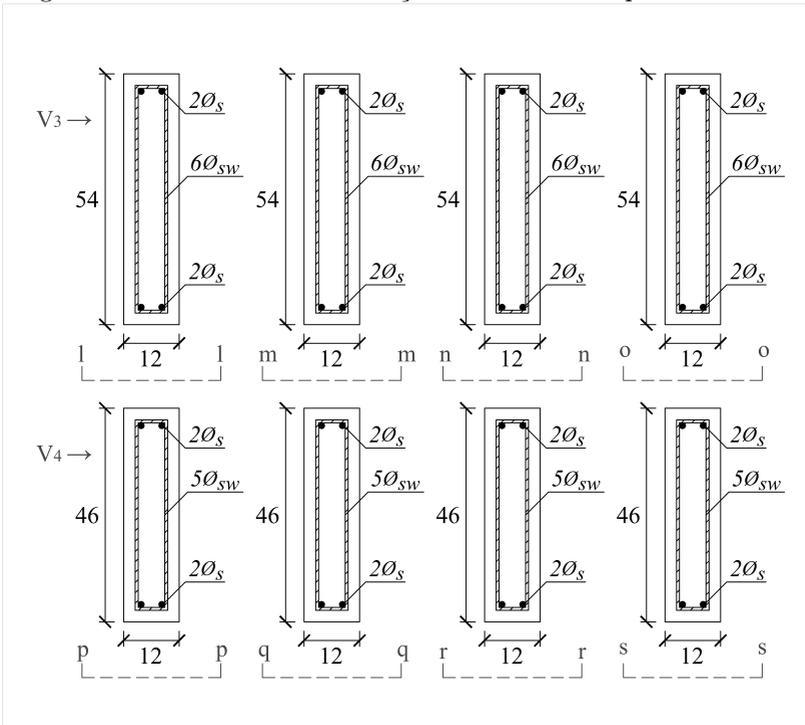
A Tabela 14 mostra os custos ótimos obtidos. Novamente, a forma foi o insumo de maior contribuição nos custos dos elementos e do pórtico na totalidade, seguida pela armadura. O custo da estrutura ótima é de R\$ 15776,73, de modo que representa uma economia de 6,10% em relação ao ótimo do caso I, e de 4,00% em relação ao ótimo do caso II, mas aqui a estrutura não atende às restrições do ELU.

Figura 33 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso III.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 34 – Detalhamento das seções ótimas - Exemplo II: caso III.



Fonte: Elaborada pela autora.

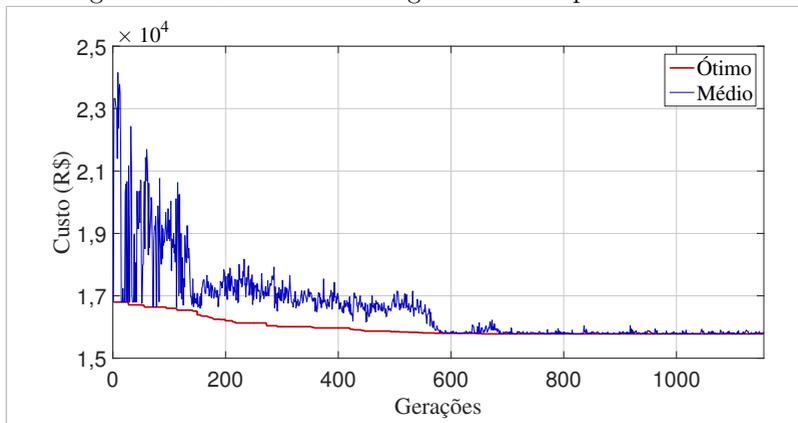
Tabela 14 – Custo ótimo - Exemplo II: caso III.

Elemento	Custos (R\$)				Forma	Total
	Concreto	Armadura longitudinal	Armadura transversal	Armadura total		
P ₁ (×6)	64,78	80,30	34,66	114,97	165,65	345,40
	18,75%	23,25%	10,04%	33,29%	47,96%	100,00%
P ₂ (×6)	116,60	80,30	55,05	135,36	240,95	492,91
	23,66%	16,29%	11,17%	27,46%	48,88%	100,00%
P ₃ (×6)	106,24	80,30	50,98	131,28	225,89	463,41
	22,93%	17,33%	11,00%	28,33%	48,75%	100,00%
V ₁ (×5)	145,16	120,46	54,18	174,64	453,97	773,77
	18,76%	15,57%	7,00%	22,57%	58,67%	100,00%
V ₂ (×5)	145,16	80,30	49,52	129,82	316,41	591,39
	24,55%	13,58%	8,37%	21,95%	53,50%	100,00%
V ₃ (×1)	130,64	120,46	48,94	169,39	412,70	712,74
	18,33%	16,90%	6,87%	23,77%	57,90%	100,00%
V ₄ (×1)	74,19	80,30	34,96	115,26	238,45	427,90
	17,34%	18,77%	8,17%	26,94%	55,73%	100,00%
Total pilares	1725,70	1445,47	844,17	2289,65	3794,92	7810,27
	22,10%	18,51%	10,81%	29,32%	48,59%	100,00%
Total vigas	1656,44	1204,56	602,40	1806,96	4503,06	7966,46
	20,79%	15,12%	7,56%	22,68%	56,53%	100,00%
Total pórtico	3382,15	2650,03	1446,57	4096,61	8297,98	15776,73
	21,44%	16,80%	9,17%	25,97%	52,60%	100,00%

Fonte: Elaborada pela autora.

A curva de convergência do processo de otimização é ilustrada na Figura 35. Para uma das execuções que levaram ao resultado ótimo, o processo apresentou tempo computacional de 19,41 horas, nas quais foram realizadas 1155 gerações e 57800 avaliações da função objetivo.

Figura 35 – Curvas de convergência - Exemplo II: caso III.



Fonte: Elaborada pela autora.

4.2.4 Discussão dos resultados

Diferente do que ocorreu no exemplo I, os casos de restrições I, II e III, deste exemplo, levaram a estruturas ótimas distintas entre si. Entretanto, é possível observar que as seções ótimas para o caso I são semelhantes às ótimas para o caso II, o que se reflete em seus custos, de modo que a diferença entre tais valores foi de apenas 2,19%. Na otimização do caso III também não ocorreu uma redução tão expressiva no custo, ao se comparar com o caso III do exemplo I, no entanto, o processo de otimização apresentou alterações significativas na resposta. Acredita-se que essas reduções de custo menos expressivas podem estar associadas à grandeza da estrutura e às simplificações adotadas, como por exemplo, a consideração de vigas iguais para todos os pavimentos (exceto pelo último andar) e de pilares iguais ao longo das colunas.

Em relação às restrições dos estados limites, a restrição limitante para o caso I foi a relativa ao deslocamento horizontal no topo do pórtico. Para o caso II, a restrição limitante foi a relacionada ao momento fletor resistente da face superior da viga V_1 do primeiro pavimento. Para o

caso III, a restrição referente ao deslocamento horizontal no topo do pórtico limitou o problema. Ressalta-se também que a estrutura ótima para o ELU não atende todas as restrições do ELS, do mesmo modo que e a estrutura ótima para o ELS não atende todas as restrições do ELU.

Quando comparadas as seções ótimas dos pilares para o ELU em relação às seções ótimas para o ELS, nota-se que, no ELU, as bases dos elementos são iguais ou maiores, sendo o mesmo observado para as quantidades de barras longitudinais. No tocante à altura das seções, não foi observada uma relação clara dessa variável com os estados limites considerados para o pilar P_1 . As seções ótimas dos pilares para o ELS apresentaram alturas iguais ou superiores e bases mínimas, exceto pela altura do referido pilar. Assim, percebe-se que os pilares desse exemplo apresentam uma tendência semelhante à do exemplo I.

Em relação às vigas ótimas para o ELU, é observado que possuem alturas iguais ou maiores e que são igualmente ou mais armadas em ambas as direções quando comparadas às vigas ótimas para o ELS, como também foi verificado no exemplo I. No caso III deste estudo, também foi constatado que uma das vigas apresentou base superior à mínima (V_2). Testes semelhantes aos comentados no exemplo I, referentes às verificações com soluções próximas da ótima, considerando bases menores, também foram conduzidos sem sucesso.

Como no exemplo I, a forma também teve destaque na composição dos custos. Entretanto, neste exemplo, para todos os casos esse foi o insumo preponderante, tanto para as vigas, quanto para os pilares e para o pórtico, diferente do primeiro exemplo em que a armadura apresentou maior contribuição nos custos dos pilares nos casos I e II. O segundo insumo de maior impacto no custo da estrutura, em todos os casos, foi a armadura, tanto para os elementos quanto para a estrutura como um todo.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões deste trabalho. Também são indicadas sugestões para trabalhos futuros relacionadas ao tema proposto.

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um esquema de otimização de pórticos planos de concreto armado, em que o objetivo do problema é minimizar o custo da estrutura para três casos de restrições: o primeiro relacionado ao ELU e ao ELS; o segundo referente somente às restrições do ELU; o terceiro relativo somente às restrições do ELS. Para isso, foram desenvolvidas rotinas computacionais em MATLAB para a verificação dos estados limites dos elementos do pórtico, de acordo com as prescrições da NBR 6118 (2014), bem como rotinas para o cálculo do custo da estrutura. A função objetivo levou em conta o custo do concreto, das armaduras longitudinais e transversais e da forma, tanto das vigas quanto dos pilares. As variáveis adotadas foram aquelas relacionadas às dimensões das seções transversais e à quantidade de armadura longitudinal e transversal. Para auxiliar a busca pela solução ótima, foram utilizados algoritmos genéticos para a otimização. Também com o intuito de auxiliar o estudo, foram utilizadas as rotinas do *software* MASTAN2 para a realização de análise não-linear geométrica e física simplificada da estrutura. Para aplicar essa metodologia, foram estudados dois exemplos de pórticos, disponíveis na literatura, o primeiro com dois pavimentos e um vão, e o segundo com seis pavimentos e dois vãos.

Como resultado, o processo de otimização alcançou melhorias significativas nos custos das estruturas. No exemplo I, o custo do pórtico reduziu 18,47% ao longo das gerações de otimização no caso I, e no exemplo II, essa redução foi de 26,44% para o mesmo caso. As curvas de convergência também mostraram melhorias consideráveis nos custos em quase todos os outros casos de restrições dos dois exemplos. Com isso, pode-se dizer que o algoritmo de otimização foi eficiente para os exemplos estudados, contudo, alguns comportamentos do otimizador indicam que talvez poderiam ser encontradas respostas melhores, ou seja, há a possibilidade dos resultados encontrados não serem ótimos globais. A rotina de otimização se apresentou muito sensível aos seus

parâmetros de entrada, e o algoritmo não mostrou estabilidade nos resultados em algumas situações, ao executar um mesmo subproblema diversas vezes. Dessa maneira, é recomendada uma avaliação mais cuidadosa sobre o otimizador, quanto aos seus parâmetros de entrada.

Nos exemplos estudados, foi possível observar uma tendência das características ótimas das estruturas, de acordo com os casos de restrições. Os pilares ótimos relacionados ao ELU apresentaram bases e quantidades de armaduras longitudinais iguais ou maiores àquelas relacionadas ao ELS. Por outro lado, as alturas das seções transversais dos pilares ótimos segundo o ELS tendem a ser iguais ou superiores que aquelas do ELU. Como a restrição dos estribos, para os pilares, diz respeito à quantidade mínima estabelecida na norma, era esperado que todos os casos apresentassem a mesma quantidade de tal armadura, o que aconteceu para a maioria das situações. As vigas ótimas para o ELU possuem alturas iguais ou maiores do que as vigas ótimas para o ELS, assim como são igualmente ou mais armadas em ambas as direções. Ressalta-se também que ocorreu preponderância de bases mínimas em todos os elementos ótimos para o ELS, com exceção de uma viga em cada exemplo analisado.

Entretanto, nota-se que é mais adequado analisar a configuração ótima das estruturas em relação ao conjunto das variáveis do que em relação à cada variável isolada. Assim, avaliando o conjunto das estruturas, pode-se dizer que as seções transversais tendem ser maiores e mais armadas no caso do ELU. Isso deve ocorrer devido ao fato das combinações de ações para o ELU levarem a esforços solicitantes maiores do que aqueles do ELS. Ressalta-se que o fato de não ter sido considerada a contribuição das armaduras na inércia da seção transversal pode ter impacto nos resultados obtidos, principalmente quanto às seções do ELS, pelos fatos já mencionados ao longo do texto.

Os processos de otimização do caso III apresentaram maior redução de custo em relação ao ótimo do caso I do que os processos do caso II. Nota-se também que a estrutura ótima ao considerar todas as restrições é mais próxima da estrutura ótima para o ELU do que para o ELS, o que indica que o ELS é geralmente menos restritivo que o ELU. Mesmo assim, muitas vezes a estrutura ótima relacionada ao ELU não satisfaz o ELS e vice-versa. Também é observado que, no primeiro exemplo, a restrição limitante da otimização do caso I está relacionada com a resistência da seção (ELU). Já para o exemplo II, que se trata de uma estrutura mais alta, a restrição limitante no caso I é referente ao deslocamento horizontal no topo do pórtico (ELS).

Em relação aos insumos, fica evidente a predominância da forma

na composição dos custos das estruturas. Ao analisar o custo total dos pilares, das vigas e dos pórticos, a forma não foi preponderante apenas para os pilares dos casos I e II do exemplo I, nos quais a armadura foi o insumo de maior contribuição para seus custos. Em todos os outros casos, de ambos os exemplos, a forma assumiu essa posição, bem como a armadura foi o segundo insumo com maior porcentagem em relação ao custo total dos elementos e do pórtico. Cabe ressaltar que o uso de concreto com f_{ck} maior poderia resultar em seções transversais com dimensões menores, e, conseqüentemente, diminuir a contribuição da forma no custo total da estrutura.

Por fim, pode-se dizer que a metodologia foi aplicada com sucesso, haja visto que os objetivos propostos inicialmente foram cumpridos. Entretanto, destaca-se que as conclusões apresentadas limitam-se às duas estruturas analisadas, de modo que não é possível estender tais afirmações para outros exemplos, sem que estudos mais aprofundados sejam realizados.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para estudos futuros, indica-se:

- a) Minimizar o custo das estruturas com o uso de outros métodos de otimização;
- b) Quanto à não-linearidade física, adotar um modelo que represente o comportamento da estrutura de maneira mais próxima da realidade;
- c) Adicionar armadura de compressão na formulação das vigas, bem como adicionar armadura longitudinal na outra direção dos pilares;
- d) Variar o diâmetro das armaduras longitudinais e transversais, com o intuito aumentar as possibilidades de detalhamento da estrutura;
- e) Considerar os comprimentos de transpasse e de ancoragem das armaduras, para aproximar a resposta final das situações de projeto;
- f) Adotar o f_{ck} como variável de projeto;
- g) Incorporar outras funções objetivo, como por exemplo, de

minimização do peso da estrutura, o que levaria a um problema de otimização multiobjetivo;

h) Considerar a contribuição das armaduras na avaliação da inércia dos elementos;

i) Adicionar restrições de outros estados limites, como por exemplo, dos estados limites de formação de fissuras e de abertura das fissuras;

j) Ampliar o estudo para pórticos tri-dimensionais.

REFERÊNCIAS

- ADAMU, A.; KARIHALOO, B. L. Minimum cost design of RC frames using the DCOC method - Part I: Columns under uniaxial bending actions. **Structural Optimization**, v. 10, p. 16–32, 1995–a.
- ADAMU, A.; KARIHALOO, B. L. Minimum cost design of RC frames using the DCOC method - Part II: Columns under biaxial bending actions. **Structural Optimization**, v. 10, p. 33–39, 1995–b.
- AKIN, A.; SAKA, M. P. Harmony search algorithm based optimum detailed design of reinforced concrete plane frames subject to ACI 318-05 provisions. **Computers & Structures**, v. 147, p. 79–95, 2015.
- ALDWAIK, M.; ADELI, H. Cost optimization of reinforced concrete flat slabs of arbitrary configuration in irregular highrise building structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 54, p. 151–164, 2016.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 2. ed. : Academic Press, 2004. 728 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - procedimento. Rio de Janeiro, 2003. 18 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.
- BRANSON, D. E. Design procedures for computing deflections. **ACI Journal**, 1968.
- CAMP, C. V.; HUQ, F. CO₂ and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-big crunch algorithm. **Engineering Structures**, v. 48, p. 363–372, 2013.
- CAMP, C. V.; PEZESHK, S.; HANSSON, H. Flexural design of reinforced concrete frames using a genetic algorithm. **Journal of Structural Engineering**, v. 129, n. 1, p. 105–115, 2003.
- CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. de F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: Segundo a NBR 6118:2014. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2015. 415 p.

COELLO, C. A. C.; CHRISTIANSEN, A. D.; HERNÁNDEZ, F. S. A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams. **Engineering with Computers**, v. 13, p. 185–196, 1997.

COHN, M. Z.; DINOVTZER, A. S. Application of structural optimization. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 2, 1994.

COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION (CEN). **Eurocode: Basis of structural design**. Brussels, 1990. 116 p.

DEEP, K. et al. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 212, p. 505–518, 2009.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto - solicitações normais**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1981. 464 p.

GELATTI, F. **Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: modelagem por elementos finitos de barra**. 239 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

GERLEIN, M. A.; BEAUFIT, F. W. An optimum preliminary strength design of reinforced concrete frames. **Computers & Structures**, v. 11, p. 515–524, 1980.

GOLDBERG, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization & machine learning**. : Addison-Wesley, 1989.

GOMES, W. J. S. Reliability analysis of reinforced concrete beams using finite element models. **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, 2017.

GOVINDARAJ, V.; RAMASAMY, J. V. Optimum detailed design of reinforced concrete continuous beams using genetic algorithms. **Computers & Structures**, v. 84, p. 34–48, 2005.

GRAZIANO, F. P. **Projeto e execução de estruturas de concreto armado**. 1. ed. São Paulo: O Nome da Rosa, 2005. 160 p.

GUERRA, C. **Otimização paramétrica de estruturas treliçadas por algoritmos genéticos**. 111 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Influence of limit states on the optimization of reinforced concrete beams. **VI International Symposium on Solid Mechanics (MecSol)**, p. 943–954, 2017–a.

JULIANI, M. A.; GOMES, W. J. S. Influence of limit states on the optimization of reinforced concrete plane frames. **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, 2017–b.

KANAGASUNDARAM, S.; KARIHALOO, B. L. Minimum-cost reinforced concrete beams and columns. **Computers & Structures**, v. 41, p. 509–518, 1991.

KOUMOUSIS, V. K.; ARSENIS, S. J. Genetic algorithms in optimal detailed design of reinforced concrete members. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 13, p. 43–52, 1998.

KWAK, H.-G.; KIM, J. Optimum design of reinforced concrete plane frames based on predetermined section database. **Computer-Aided Design**, v. 40, p. 396–408, 2008.

KWAK, H.-G.; KIM, J. An integrated genetic algorithm complemented with direct search for optimum design of RC frames. **Computer-Aided Design**, v. 41, p. 490–500, 2009.

LEPS, M.; SEJNOHA, M. New approach to optimization of reinforced concrete beams. **Computers & Structures**, v. 81, p. 1957–1966, 2003.

LEVY, R. Review of structural optimization. **The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering**, v. 4, n. 1, p. 53–54, 2011.

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 112 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MARTHA, L. F. **Ftool - Version 4.00**: Interactive-graphics program for structural analysis. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2018.

MATHWORKS. **Global optimization toolbox**: Users guide. : , 2016. 664 p.

MATHWORKS. **MATLAB**: Primer. : , 2017. 204 p.

- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**. 2. ed. : , 2014. 460 p.
- MINGQI, L.; XING, L. Genetic algorithms based methodologies for optimization designs of RC structures. **International Conference on Intelligent System Design and Engineering Application**, p. 787–790, 2011.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999. 634 p.
- RAFIQ, M. Y.; SOUTHCOMBE, C. Genetic algorithms in optimal design and detailing of reinforced concrete biaxial columns supported by a declarative approach for capacity checking. **Computers & Structures**, v. 69, p. 443–457, 1998.
- RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Genetic algorithm - based methodology for design optimization of reinforced concrete frames. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 13, p. 63–74, 1998.
- ROSA FILHO, W. T. **Otimização de pórtico plano de concreto armado utilizando algoritmo genético e processo iterativo**. 175 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- SAP2000 PLUS. **Integrated finite elements analysis and design of structures**. Berkeley: Computers and Structures, Inc., 2009.
- SCHMIT, L. A. structural design by systematic synthesis. **Proceedings of the Second Conference on Electronic Computation**, 1960.
- SINAPI. **Sistema nacional de pesquisa de custos e índices da construção civil**: Outubro de 2017 - Caixa Econômica Federal. Santa Catarina, 2017.
- SISTEMA DE CUSTO DE OBRAS (SCO). **Composição de itens de serviço da prefeitura**. Rio de Janeiro, 2016.
- SIVANANDAM, S. N.; DEEPA, S. N. **Introduction to genetic algorithms**. New York: Springer, 2008. 442 p.
- TAPAO, A.; CHEERAROT, R. Optimal parameters and performance of artificial bee colony algorithm for minimum cost design of reinforced concrete frames. **Engineering Structures**, v. 151, p. 802–820, 2017.

TEMPLEMAN, A. B. Optimization methods in structural design practice. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 10, 1983.

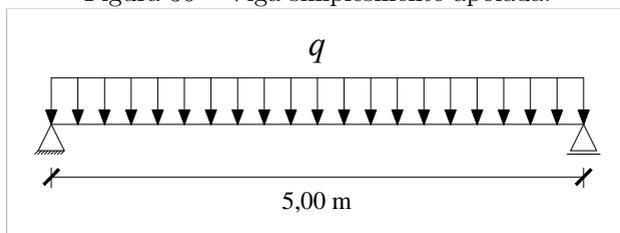
VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: Aplicação a pórticos**. 127 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade de São Paulo: Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2003.

ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W. **Tutorial for MASTAN2: version 3.0.** : John Wiley & Sons, 2007. 68 p.

APÊNDICE A - Estudo preliminar: otimização de vigas

A fim de avaliar a eficiência das rotinas de verificação dos estados limites das vigas, foi analisada uma viga simplesmente apoiada, apresentada na Figura 36. Os dados de entrada estão na Tabela 15, e os valores dos custos unitários foram obtidos do SCO (2016). Foram analisados quatro níveis de carregamento. A carga aplicada nos níveis I, II, III e IV foi, respectivamente, 40%, 60%, 80% e 100% da carga final de cálculo (28,66 kN/m para o ELU e 16,87 kN/m para o ELS). Também foi considerada a carga devido ao peso próprio da estrutura, ou seja, além das cargas mencionadas, foi somado o peso próprio da viga, que depende das dimensões das seções transversais, ou seja, das variáveis de projeto.

Figura 36 – Viga simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 15 – Dados de entrada do estudo preliminar.

	Dado	Valor	Unidade
f_{yk}	Resistência característica ao escoamento do aço da armadura longitudinal e transversal	500	MPa
E_s	Módulo de elasticidade do aço da armadura longitudinal e transversal	210000	MPa
ρ_s	Massa específica do aço da armadura longitudinal e transversal	7850	kg/m ³
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto	25	MPa
ρ_c	Massa específica do concreto armado	2500	kg/m ³
c	Cobrimento nominal - classe I	2,5	cm
C_c	Custo unitário do concreto para vigas - C25	401,60	R\$/m ³
C_s	Custo unitário da armadura longitudinal - $\phi_{12,5}$	5,59	R\$/kg
C_{sw}	Custo unitário da armadura transversal - $\phi_{6,3}$	6,08	R\$/kg
C_f	Custo unitário da forma para vigas	53,89	R\$/m ²

Fonte: Elaborada pela autora.

Destaca-se que, como este estudo foi realizado no início da pes-

quiza, foram adotadas algumas considerações de cálculo distintas das abordadas na metodologia: foi considerado um único detalhamento ao longo da extensão da viga, de modo que as solicitações de referência são o momento fletor e deslocamento no meio do vão, e o esforço cortante nos apoios; os esforços solicitantes e os deslocamentos foram calculados analiticamente; não foram consideradas armaduras longitudinais superiores; foi adotado o modelo I da NBR 6118 (2014) para o cálculo das forças cortantes resistentes; para a avaliação da rigidez dos elementos para o cálculo da flecha, foi utilizado o método proposto por Branson (1968), que admite uma única inércia para todo o elemento de concreto (inércia equivalente), que representa os trechos fissurados e não fissurados da estrutura, a partir da ponderação das inércias dos estádios I e II, e é considerada a contribuição das armaduras na inércia.

Os diâmetros das barras da armadura longitudinal de tração ϕ_s e transversal ϕ_{sw} foram considerados fixos, e as demais variáveis foram discretizadas da seguinte maneira: as variáveis b e h foram ditas contínuas dentro dos intervalos, [0,12 m; 0,30 m] e [0,20 m; 0,60 m], respectivamente; as variáveis n_s e n_{sw} foram discretizadas nos conjuntos [2 3 4 5 6 7 8] e [51 35 26 21 18], respectivamente.

Na Tabela 16 são apresentados os resultados das otimizações conforme os níveis de carregamento e as restrições aplicadas. O caso I representa a otimização que considera as restrições de ambos os estados limites, e os casos II e III representam, respectivamente, a otimização que considera as restrições do ELU e do ELS.

Destacam-se alguns comportamentos gerais da otimização das estruturas, conforme esperado: quanto maior é a carga aplicada, maior é o custo total da estrutura; no tocante à otimização que considera as restrições do caso I e do caso II, a quantidade de armadura longitudinal tende a aumentar à medida que o nível de carregamento aumenta; em todos os casos, a altura da seção transversal cresce com o aumento da carga. Dessa maneira, acredita-se que tanto o algoritmo de verificação dos estados limites quanto o algoritmo de otimização (algoritmo genético) apresentam respostas adequadas para o problema analisado.

Nenhuma seção ótima para o ELU atendeu às restrições do ELS, sendo o inverso também verdadeiro, de modo que, em todos os níveis de carregamento, os custos totais das estruturas ótimas para o caso II e para o caso III são menores do que o custo total da estrutura que considera ambos os estados limites (caso I).

As vigas ótimas para o ELU possuem alturas menores e são mais armadas em ambas as direções, quando comparadas às vigas ótimas para o ELS. Apesar da inércia para o cálculo da flecha considerar a

contribuição da armadura, o valor ótimo de n_s é o mínimo permitido para o caso III, em todos níveis de carregamento. Também, a base da estrutura foi a mínima em todas as situações.

Em relação aos custos, o insumo com maior representatividade no custo total da viga em todas as situações foi a forma, seguido da armadura para o ELU e do concreto para o ELS.

Tabela 16 – Resultados do estudo preliminar.

Estado Limite	Custo (R\$)				Parâmetros Ótimos			
	Concreto	Armadura	Forma	Total	b (m)	h (m)	n_s	n_{sw}
Nível I								
Caso I	96,38 (21,07%)	113,27 (24,76%)	247,89 (54,18%)	457,55 (100%)	0,12	0,40	3	26
Caso II	84,34 (19,86%)	119,31 (28,10%)	220,95 (52,04%)	424,60 (100%)	0,12	0,35	3	35
Caso III	101,20 (22,60%)	87,89 (19,63%)	258,67 (57,77%)	447,77 (100%)	0,12	0,42	2	26
Nível II								
Caso I	113,25 (22,19%)	111,40 (21,83%)	285,62 (55,97%)	510,26 (100%)	0,12	0,47	3	21
Caso II	93,97 (19,75%)	139,42 (29,30%)	242,51 (50,96%)	475,90 (100%)	0,12	0,39	4	26
Caso III	118,07 (23,61%)	85,72 (17,14%)	296,40 (59,26%)	500,18 (100%)	0,12	0,49	2	21
Nível III								
Caso I	120,48 (21,42%)	140,19 (24,93%)	301,78 (53,65%)	562,46 (100%)	0,12	0,50	4	21
Caso II	115,66 (21,20%)	138,95 (25,47%)	291,01 (53,34%)	545,61 (100%)	0,12	0,48	4	21
Caso III	132,53 (24,29%)	84,38 (15,46%)	328,73 (60,25%)	545,64 (100%)	0,12	0,55	2	18
Nível IV								
Caso I	127,71 (20,78%)	168,99 (27,49%)	317,95 (51,73%)	614,65 (100%)	0,12	0,53	5	21
Caso II	120,48 (20,44%)	167,12 (28,36%)	301,78 (51,20%)	589,38 (100%)	0,12	0,50	5	21
Caso III	144,58 (24,62%)	87,06 (14,82%)	355,67 (60,56%)	587,31 (100%)	0,12	0,60	2	18

Fonte: Elaborada pela autora.

Esse e outros estudos preliminares foram desenvolvidos: Juliani e Gomes (2017-a); Juliani e Gomes (2017-b). Entretanto, como já foi destacado, foram adotadas considerações distintas das apresentadas na metodologia.

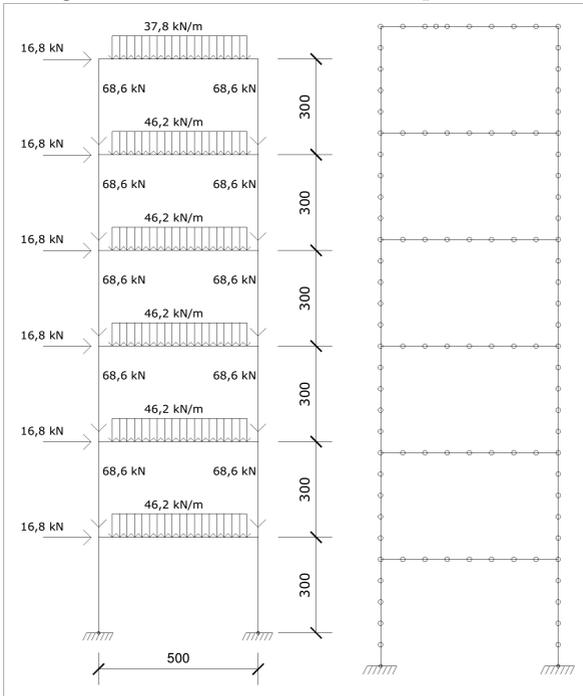
APÊNDICE B – Validação da rotina de análise estrutural

Para validar as rotinas de análise estrutural do MASTAN2, foram estudados três pórticos planos de concreto armado avaliados por Gelatti (2012), cujas geometrias e carregamentos são apresentados nas Figuras 37, 38 e 39. Foram realizados três tipos de análises: elástica linear; não-linear geométrica; não-linear física e geométrica. Os resultados obtidos com o uso do MASTAN2, foram comparados com os obtidos pela referida autora com o uso dos *softwares* ANALEST e SAP2000 (SAP2000 PLUS, 2009). A não-linearidade física adotada, tanto aqui quanto no trabalho de referência, foi a simplificada, conforme descrito na seção 3.2.2.

O Pórtico A possui vigas com seções transversais de 20 cm x 50 cm e pilares de 35 cm x 35 cm, e módulo de elasticidade do concreto igual a 32000 MPa. As vigas e os pilares do Pórtico B possuem seções transversais de 20 cm x 65 cm e 50 cm x 50 cm, respectivamente, e o módulo de elasticidade do concreto é igual a 29180 MPa. Já as vigas do Pórtico C apresentam seções transversais de 20 cm x 60 cm e os pilares internos e externos de 40 cm x 140 cm e 40 cm x 80 cm, respectivamente, e o módulo de elasticidade do concreto é igual a 25043,96 MPa.

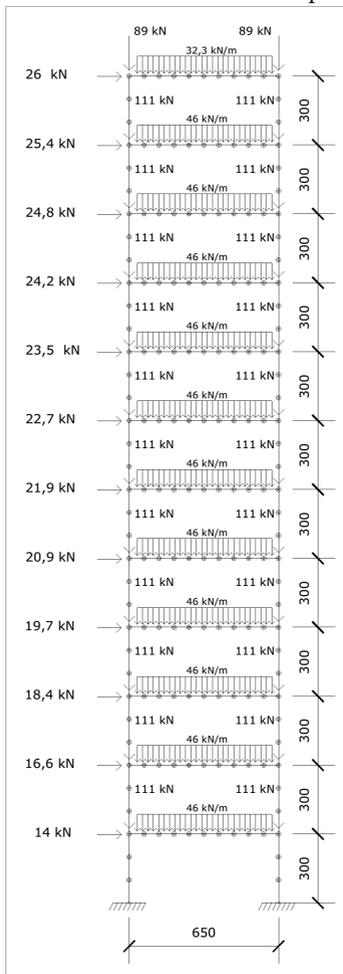
A Tabela 17 apresenta como resultado o deslocamento horizontal no topo de cada pórtico e o módulo da diferença obtida entre os resultados do MASTAN2 e os referidos *softwares*. Para ilustrar alguns resultados obtidos, as Figuras 40, 41 e 42 apresentam o deslocamento horizontal em cada pavimento dos pórticos, utilizando a análise não-linear geométrica. Percebe-se que os resultados obtidos são próximos, e que a maior diferença encontrada foi na análise elástica linear do Pórtico A em relação ao ANALEST. Apesar dessa diferença ser pequena, ressalta-se que os resultados das análises elásticas lineares do MASTAN2 foram validados com o *software* Ftool (MARTHA, 2018), os quais obtiveram resultados iguais para todos os pavimentos. Além disso, o MASTAN2 obteve resultados próximos aos do SAP2000, que é um *software* consolidado e amplamente utilizado. Em vista disso, as rotinas de análises utilizadas no presente trabalho foram consideradas validadas.

Figura 37 – Pórtico A: 1 vão e 6 pavimentos.



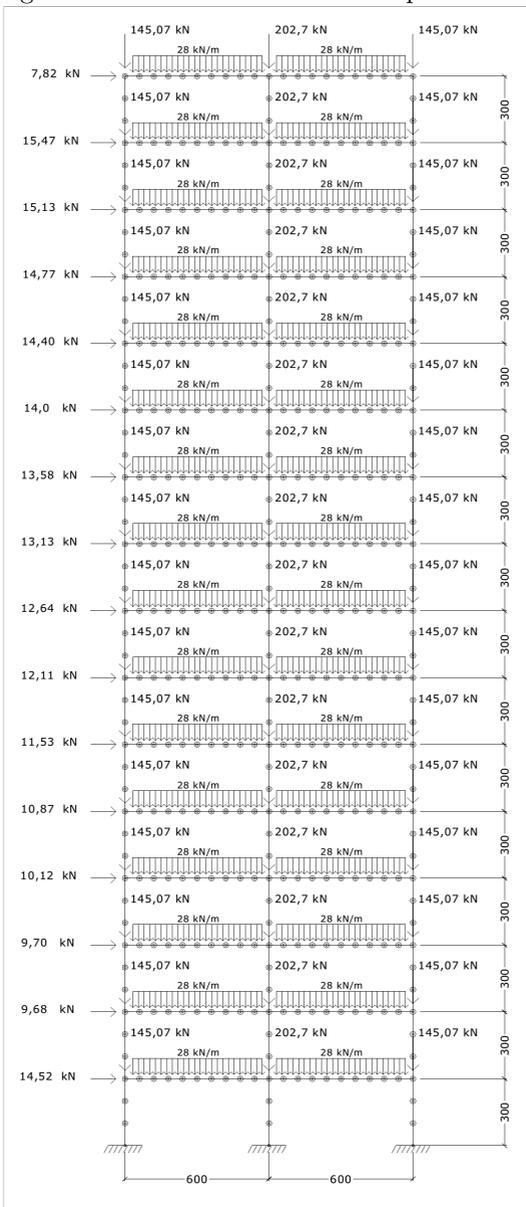
Fonte: Gelatti (2012).

Figura 38 – Pórtico B: 1 vão e 12 pavimentos.



Fonte: Gelatti (2012).

Figura 39 – Pórtico C: 2 vãos e 16 pavimentos.



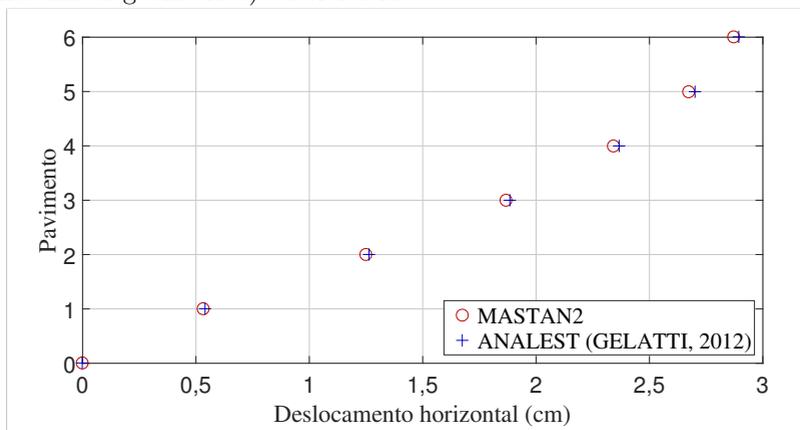
Fonte: Gelatti (2012).

Tabela 17 – Resultados das análises dos pórticos.

Modelos	Deslocamento horizontal do topo (cm)		
	Pórtico A	Pórtico B	Pórtico C
Análise elástica linear			
MASTAN2	2,77	8,40	4,20
ANALEST (GELATTI, 2012)	2,82	8,39	4,18
Diferença	1,82%	0,12%	0,37%
Análise não-linear geométrica			
MASTAN2	2,87	8,92	4,49
SAP2000 (GELATTI, 2012)	2,87	8,92	4,49
Diferença	0,01%	0,03%	0,01%
ANALEST (GELATTI, 2012)	2,89	8,93	4,48
Diferença	0,79%	0,10%	0,14%
Análise não-linear física e geométrica			
MASTAN2	5,62	19,33	10,21
SAP2000 (GELATTI, 2012)	5,63	19,35	10,21
Diferença	0,11%	0,12%	0,03%

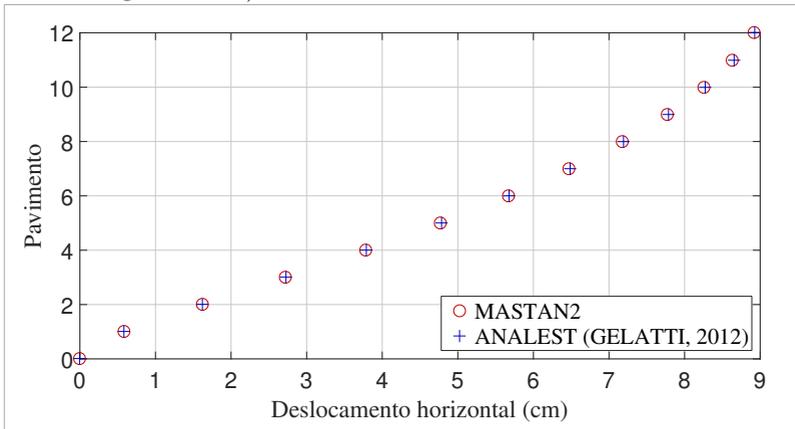
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 40 – Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico A.



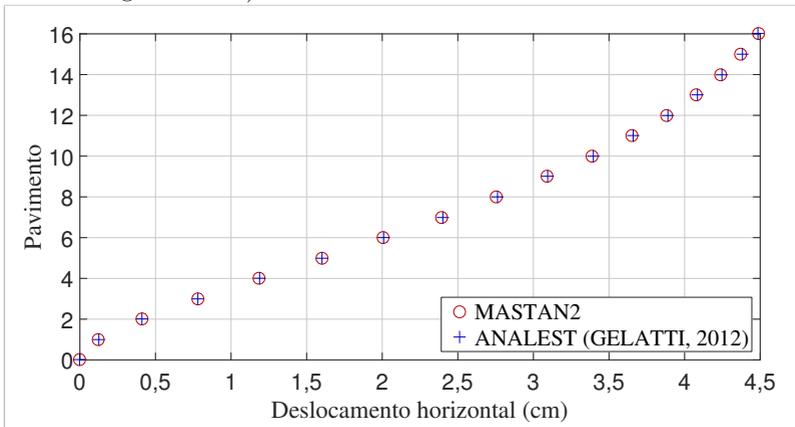
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 41 – Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico B.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 42 – Deslocamentos horizontais ao longo dos pavimentos (análise não-linear geométrica) - Pórtico C.



Fonte: Elaborada pela autora.