

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA**

Francieli Triches

**REDUÇÃO DE SINGULARIDADES  
DE CURVAS ANALÍTICAS EM  $\mathbb{C}^2$**

Florianópolis

2018



Francieli Triches

**REDUÇÃO DE SINGULARIDADES  
DE CURVAS ANALÍTICAS EM  $\mathbb{C}^2$**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de mestre em Matemática Pura e Aplicada.  
Orientadora: Prof. Dra. Marianna Ravara Vago (UFSC)

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Triches, Francieli  
Redução de Singularidades de Curvas Analíticas em  $C^2$  / Francieli Triches ; orientador, Marianna Ravara Vago, 2018.  
77 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Germes de curva analítica. 3. Blow-up. 4. Redução de singularidades. 5. Polígono de Newton. I. Vago, Marianna Ravara. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Francieli Triches

**REDUÇÃO DE SINGULARIDADES  
DE CURVAS ANALÍTICAS EM  $\mathbb{C}^2$**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre em Matemática Pura e Aplicada”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 27 de fevereiro de 2018.

---

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão  
Coordenador – UFSC

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dra. Marianna Ravara Vago  
Orientadora – Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Javier Ribón Herguedas  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. Roberto Mossa  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva  
Universidade Federal de Santa Catarina



Aos meus pais Ari Triches e Maria Lurdes De  
Bona Triches.  
À minha irmã Fabiani Fernanda Triches.  
Ao meu companheiro Helder Geovane Gomes  
de Lima.



## AGRADECIMENTOS

À Deus acima de todos, por permitir o término desta romaria.

À minha família, em especial aos meus pais, à minha irmã, ao meu companheiro e às minhas tias Jocemara Triches e Natalina Triches (Mana) que sempre me apoiaram e estiveram ao meu lado durante esta caminhada.

À Prof<sup>a</sup> Marianna Ravara Vago, pela orientação e pela paciência com que me apresentou os conceitos presentes nesta dissertação, e me explicou/ajudou a entender os artigos que lemos para a realização deste trabalho. E por último, mas não menos importante por ter no meio deste processo ter achado tempo para me ajudar a cuidar da minha saúde mental.

Aos professores Giuliano Boava, Matheus Cheque Bortolan, Paulo Carvalho, Eliezer Batista por todos os atendimentos extraclasse, por sempre estarem dispostos a me ajudar a entender o conteúdo das disciplinas e resolver os exercícios das listas, mesmo quando não eram o professor da disciplina, e também por todos os momentos de descontração e orientação por vezes nos corredores do departamento.

Aos Bagunceiros (Jéssica Neckel Cavalheiro, Josiane Marina Hoffmann, Everton Boos, Marduck Montoya, Luiza Sorice, Rafaela Filippozzi, Elemar Rapachi, Mariana Ventureli da Veiga) pelos infinitos dias de estudos, pelos cafés, pelas risadas e pelas pizzas. A amizade, parceria e companheirismo de vocês tornou esta conquista possível, e as matérias do curso mais “leves”.

Aos meus amigos e colegas de casa Carine Bellettini Scheffer, Tamara Traldi, Henrique José Switalski pela paciência comigo neste período, pelas conversas, risadas, e principalmente por estarem sempre pacientemente ouvindo meus desabafos e me fazendo acreditar que era possível e que eu era capaz.

À CAPES pela bolsa de estudos que tornou possível minha permanência no programa.

À todos os professores do programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada da UFSC pela dedicação e carinho com que cuidam da qualidade do programa e de suas aulas, sempre preocupados com a qualidade da formação dos estudantes e dispostos a nos ajudar a entender os conteúdos e a resolver os exercícios, explicando várias vezes a mesma coisa até que conseguimos entender.



O mundo é muito tridimensional para andar na linha.

(Marianna Ravara Vago, 2016)



## RESUMO

Neste trabalho são estudados germes de curvas analíticas em superfícies complexas. Em particular, germes de curvas singulares dados pelos zeros de um polinômio em um espaço ambiente complexo de dimensão dois. É descrito o processo de redução de singularidades, que é realizado através de uma sequência de morfismos denominados blow-ups (ou explosões). O objetivo central deste trabalho é mostrar que é possível dessingularizar um germe de curva analítica utilizando um número finito de blow-ups. Para alcançá-lo, é feito um controle sobre índices (de tipo multiplicidade), que podem também ser observados/analísados a partir do polígono de Newton da curva.

**Palavras-chave:** Germes de curva analítica. Blow-up. Redução de Singularidades. Polígono de Newton.



## ABSTRACT

In this work we study germs of analytic curves on complex surfaces. In particular, germs of singular curves given by the zeros of a polynomial in a complex ambient space of dimension two. We describe the process of reduction of singularities, which is given by a sequence of morphisms called blow-ups. The main objective of this work is to prove that it is possible to desingularize a germ of analytic curve after a finite number of blow-ups. To achieve it, we control indexes (of multiplicity type), which can also be observed/analyzed from the Newton polygon of the curve.

**Keywords:** Germs of analytic curve. Blow-up. Reduction of Singularities. Newton Polygon.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Germe de curva .....	3
Figura 2	Blow-up da origem de $\mathbb{R}^2$ .....	8
Figura 3	Blow-up da origem de $\mathbb{C}^2$ .....	8
Figura 4	Blow-up da origem de $\mathbb{C}^2$ .....	10
Figura 5	Curva $C_0 = \{(y^2 - x^3)(y^3 - x^2) = 0\}$ .....	16
Figura 6	Explosão da curva $\{(y^2 - x^3)(y^3 - x^2) = 0\}$ .....	17
Figura 7	Redução de singularidades da curva $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$ .....	26
Figura 8	Cone tangente com $k$ -retas .....	28
Figura 9	Explosão simultânea de $k$ pontos .....	29
Figura 10	Grafo .....	30
Figura 11	Pontos do tipo traça .....	31
Figura 12	Pontos do tipo esquina .....	31
Figura 13	Polígono de Newton de $C$ .....	36
Figura 14	Polígono de Newton .....	37
Figura 15	Polígono de Newton da curva $f_1$ .....	37
Figura 16	Polígono de Newton da curva $f_2$ .....	38
Figura 17	Representação da definição de $L_v$ .....	39
Figura 18	Polígono de Newton da curva $f(x, y)$ .....	46
Figura 19	Polígono de Newton da curva $f(x, y)$ .....	50
Figura 20	Polígono de Newton da curva $f(x, y)$ .....	52
Figura 21	Polígono de Newton da curva $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$ .....	56
Figura 22	Blow-up da curva $C_0 = \{y - \lambda x = 0\}$ .....	58
Figura 23	Polígono de Newton do blow-up da curva $C_0 = \{y - \lambda x = 0\}$ ..	58
Figura 24	Blow-up da curva $C_0 = \{x - y^2 = 0\}$ .....	59
Figura 25	Polígono de Newton do blow-up da curva $C_0 = \{x - y^2 = 0\}$ ..	60
Figura 26	Polígonos de Newton do blow-up da curva $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$	61
Figura 27	Redução de singularidades da curva $C_0 = \{y^2 - x^5 = 0\}$ .....	63
Figura 28	Polígonos de Newton da redução da curva $C_0 = \{y^2 - x^5 = 0\}$	65
Figura 29	Redução de singularidades da curva $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$ .....	67
Figura 30	Polígonos de Newton da redução da curva $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$	69
Figura 31	Curva $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$ .....	70
Figura 32	Resultado do 1º blow-up da curva $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$ .....	71

Figura 33	Polígono de Newton da curva $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$ .....	71
Figura 34	Polígonos de Newton após blow-up.....	72
Figura 35	Grafo do blow-up da curva $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$ .....	72
Figura 36	Polígono de Newton da curva $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$ .....	73
Figura 37	Polígono de Newton da curva $C_1 = \{t_1^2 + x^2 t_1 + x^5 = 0\}$ .....	73
Figura 38	Polígono de Newton da curva $C_2 = \{y_2^2 + x_2 y_2 + x_2^3 = 0\}$ .....	74
Figura 39	Polígonos de Newton após o terceiro blow-up .....	75
Figura 40	Grafo do blow-up da curva $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$ .....	76

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> .....	3
2.1	Definições básicas .....	3
2.2	A reta projetiva complexa $\mathbb{P}^1$ .....	4
2.3	Blow-up de um ponto .....	6
<b>3</b>	<b>REDUÇÃO DE SINGULARIDADES</b> .....	11
3.1	Multiplicidades .....	11
3.2	Multiplicidade e blow-up .....	20
3.3	Argumento para uma curva irredutível .....	24
3.4	Argumento para uma curva qualquer .....	28
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE NEWTON</b> .....	35
4.1	Polígono de Newton .....	35
4.2	Algoritmo de Newton .....	40
4.3	Expoente de Contato e Polígono de Newton .....	54
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS</b> .....	57
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	77



# 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos germes de curvas analíticas em superfícies complexas. Um germe de curva analítica é o conjunto dado pelos zeros de um polinômio  $f(x, y)$ . Nos interessam os germes de curvas *singulares na origem* de  $\mathbb{C}^2$ ; isto é, curvas tais que a ordem da função  $f$  é maior que 1.

Esses objetos podem ser bastante complicados; contudo, existem transformações, chamadas *blow-up* ou *explosão*, que modificam o espaço ambiente mas, por outro lado, simplificam a curva. Estes morfismos, assim como outros conceitos básicos, estão definidos no [Capítulo 2](#).

É possível realizar uma sucessão de transformações desta natureza até que se chegue a uma situação onde a curva é a mais simples possível, ou seja, a ordem da função  $f$  é 1, e além disso a curva resultante está “bem posicionada” no espaço ambiente.

Cada blow-up possui um centro, que será uma singularidade da curva. A explosão transforma este centro em uma reta projetiva complexa, que chamamos de *divisor excepcional*. A imagem da curva pelo blow-up, neste novo espaço, é chamada *transformado estrito* da curva.

O principal resultado que vamos demonstrar neste trabalho é o seguinte ([Teorema 3.3.1](#)):

*Após um número finito de blow-ups, o transformado estrito final de uma curva analítica é uma curva analítica não singular transversal ao divisor excepcional.*

A demonstração é feita no [Capítulo 3](#). Ela é baseada no controle de determinados índices associados à curva: a multiplicidade intrínseca da curva; a multiplicidade de interseção da curva com seu cone tangente; e o expoente de contato. O principal argumento que usamos nesta demonstração é o fato que um destes índices deve obrigatoriamente baixar após blow-up. Apresentamos a demonstração primeiramente para o caso de curvas irredutíveis e posteriormente para o caso de uma curva qualquer.

No [Capítulo 4](#) definimos o *polígono de Newton*. Este objeto é utilizado para dois fins: o Método de Newton, que consiste em realizar mudanças de variáveis a fim de encontrar uma parametrização para a curva  $f(x, y) = 0$ ; e para o estudo do índice expoente de contato no processo de redução de singularidades da curva, o qual pode ser observado pela inclinação do primeiro lado do polígono.

No [Capítulo 5](#) apresentamos exemplos que aplicam toda a teoria dos capítulos anteriores no estudo de redução de singularidades de uma curva.



## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, introduzimos os objetos e ferramentas básicas com os quais trabalharemos. Nos baseamos nos livros “*Introdução a Geometria Analítica Complexa*”, de Marcos Sebastiani [Sebastiani 2004], e “*Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*”, de Márcio G. Soares e Rogério S. Mol [Soares e Mol 2001].

### 2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Uma *superfície complexa*  $M$  é um espaço topológico Hausdorff que admite um *atlas*, isto é, para o qual existem uma cobertura por abertos  $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e homeomorfismos  $\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow \widetilde{W}_\alpha$ , para abertos  $\widetilde{W}_\alpha \subset \mathbb{C}^2$ , tais que as funções de transição  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  são holomorfas onde definidas.

Sejam  $M$  uma superfície complexa e  $p$  um ponto em  $M$ . Considere todas as funções holomorfas  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Nesta família definimos uma relação de equivalência: dizemos que duas funções são equivalentes se coincidem em alguma vizinhança de  $p$ . As classes de equivalência são chamadas *germes de função em  $p$* . O germe de uma função  $f$  em  $p$  é a classe de equivalência que contém  $f$ .

Duas funções tem o mesmo germe se e somente se elas coincidem em alguma vizinhança de  $p$ . Em particular, elas tem o mesmo valor em  $p$ . Este valor é chamado *valor do germe*. Na figura a seguir temos um exemplo de um germe de curva na origem de  $\mathbb{C}^2$ .

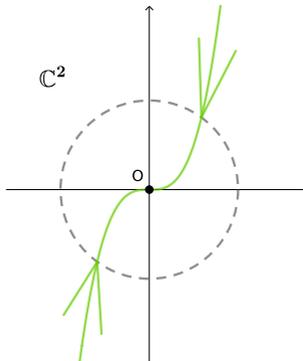


Figura 1 – Germe de curva

O conjunto dos germes em  $p$  de funções holomorfas é denotado  $\mathcal{O}_p(M)$  e chamado *anel local de  $M$  em  $p$* . Este anel é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra comutativa, com unidade, sem divisores de zero e que possui um único ideal maximal (para uma demonstração deste resultado, ver [Sebastiani 2004]).

Neste trabalho, consideraremos germes de *polinômios*. Em particular estamos interessados no conjunto de zeros de um germe de polinômio. Um *germe de curva analítica*  $C$  em  $p \in M$  é o conjunto dado pelos zeros de um germe  $f \in \mathcal{O}_p(M)$ ,  $f$  polinômio, isto é, podemos encontrar coordenadas locais  $(x, y)$  em  $p$  tais que  $C = \{f(x, y) = 0\}$ . Note que, em particular,  $f(p) = 0$ .

Daqui em diante, não faremos distinção entre os termos *curva* e *germe de curva*; sempre que dissermos “curva” estaremos implicitamente considerando o “germe” desta curva em um ponto. A razão para isto é que estamos interessados no comportamento de uma curva próximo a um ponto especial, que chamaremos de *singularidade*; uma curva possui um número finito de pontos deste tipo e podemos então realizar um estudo *local* separadamente em cada um deles.

## 2.2 A RETA PROJETIVA COMPLEXA $\mathbb{P}^1$

Considere dois pontos distintos  $p_0 = (x_0, y_0)$  e  $p_1 = (x_1, y_1)$  em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , em que  $0 = (0, 0)$  é a origem de  $\mathbb{C}^2$ . Diremos que  $p_0$  e  $p_1$  são *equivalentes*, e escreveremos  $p_0 \sim p_1$ , se estão sobre a mesma reta que passa pela origem, isto é, se existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $x_1 = \lambda x_0$  e  $y_1 = \lambda y_0$ .

A relação descrita acima é uma relação de equivalência. De fato, por definição,  $\sim$  é reflexiva. Além disso, se  $p_0 \sim p_1$  então existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , tal que  $x_0 = \lambda x_1$  e  $y_0 = \lambda y_1$ ; assim  $x_1 = \frac{1}{\lambda} x_0$  e  $y_1 = \frac{1}{\lambda} y_0$  e, portanto,  $p_1 \sim p_0$ . Por último, se  $p_0 \sim p_1$  e  $p_1 \sim p_2$ , existem  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em  $\mathbb{C}^*$  tais que  $x_0 = \lambda_1 x_1$ ,  $y_0 = \lambda_1 y_1$ ,  $x_1 = \lambda_2 x_2$  e  $y_1 = \lambda_2 y_2$ . Logo  $x_0 = \lambda_1 \lambda_2 x_2$  e  $y_0 = \lambda_1 \lambda_2 y_2$  e, portanto,  $p_0 \sim p_2$ .

Considere agora a projeção

$$Pr : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim},$$

que leva cada ponto  $p = (x, y)$  em sua classe de equivalência  $[p] = [X : Y]$ . O espaço quociente  $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$  é chamado de *reta projetiva complexa* e denotado por  $\mathbb{P}^1$ . As coordenadas  $X$  e  $Y$  são chamadas de *coordenadas homogêneas* de  $[p]$ . Note que  $[\lambda X : \lambda Y]$  e  $[X : Y]$  representam o mesmo elemento de  $\mathbb{P}^1$ , qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ; isto é, a imagem da reta que passa pela origem e contém  $p$  não depende do representante escolhido. Em outras palavras,  $Pr$  está bem definida.

A reta projetiva  $\mathbb{P}^1$  está coberta por duas cartas, cujos domínios são isomorfos a  $\mathbb{C}$ . De fato, considere os abertos de  $\mathbb{P}^1$  dados por  $U_1 = \{[X : Y] \mid X \neq 0\}$  e  $U_2 = \{[X : Y] \mid Y \neq 0\}$ . Se  $P \in U_1 \cap U_2$  então

$$P = [X_P : Y_P] = \left[1 : \frac{Y_P}{X_P}\right] = [1 : t_P],$$

e

$$P = [X_P : Y_P] = \left[\frac{X_P}{Y_P} : 1\right] = [u_P : 1],$$

ou seja, temos, em  $U_1 \cap U_2$ , a mudança de carta  $u = \frac{1}{t}$ . Através das aplicações

$$[1 : t] \mapsto t \text{ e } [u : 1] \mapsto u,$$

vemos que  $U_1$  e  $U_2$  são ambos isomorfos a  $\mathbb{C}$ . Além disso, observe que  $U_1 = Pr(V_1)$  e  $U_2 = Pr(V_2)$ , onde

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq 0\},$$

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y \neq 0\}.$$

Dizemos que  $U_1$  e  $U_2$  são as *cartas afins* de  $\mathbb{P}^1$ . Temos dois pontos especiais:  $P_0 = [1 : 0] = Pr(y = 0)$ , que chamamos a *origem da primeira carta*; e  $P_\infty = [0 : 1] = Pr(x = 0)$ , que chamamos a *origem da segunda carta*.

**Observação 1.** Naturalmente, a construção feita acima não está restrita a  $\mathbb{C}^2$ . Para qualquer  $n \geq 2$ , podemos definir  $\mathbb{P}^n$  como o conjunto de todas as retas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  que passam pela origem. A projeção

$$Pr : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

faz corresponder a cada  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  a classe da reta que passa pela origem e que contém  $z$ . Denotamos  $[z] = [Z_0 : Z_1 : \dots : Z_n]$ .

O espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é recoberto por  $n + 1$  cartas afins:  $U_i = \{[z] \mid Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . As mudanças de carta são dadas por funções racionais. Através das aplicações

$$[Z_0 : Z_1 : \dots : Z_i : \dots : Z_n] \mapsto \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \frac{Z_1}{Z_i}, \dots, \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \frac{Z_{i+1}}{Z_i}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i}\right),$$

vemos que  $U_i$  é isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ . Por último, cada  $U_i$  é imagem do aberto  $V_i = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_i = 0\}$ .

### 2.3 BLOW-UP DE UM PONTO

Consideremos duas cópias de  $\mathbb{C}^2$ , chamadas  $W_1$  e  $W_2$ , com coordenadas  $(x, t)$  e  $(u, y)$  respectivamente. Através do biholomorfismo

$$W_1 \setminus \{t = 0\} \longrightarrow W_2 \setminus \{u = 0\}$$

$$(x, t) \longmapsto \left( \frac{1}{t}, tx \right), \quad (2.1)$$

identificamos os pontos de  $W_1 \setminus \{t = 0\}$  e  $W_2 \setminus \{u = 0\}$  e assim construímos uma superfície complexa  $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ .

Seja  $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$  a aplicação definida como segue:

$$\pi(x, t) = (x, tx), \text{ para } (x, t) \in W_1;$$

$$\pi(u, y) = (uy, y), \text{ para } (u, y) \in W_2.$$

A aplicação  $\pi$  é holomorfa e está bem definida, isto é, respeita a identificação que dá origem a  $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ . Agora, se  $\underline{0} = (0, 0)$  é a origem de  $\mathbb{C}^2$  então

$$\pi^{-1}(\underline{0}) = \{(0, t) \in W_1\} \cup \{(u, 0) \in W_2\}.$$

Observe que, pela identificação (2.1), obtemos que  $\pi^{-1}(\underline{0})$  é exatamente a reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ . Além disso,

$$\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus \pi^{-1}(\underline{0}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{\underline{0}\}$$

é um biholomorfismo.

A aplicação  $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$  é chamada de *explosão* ou *blow-up* da origem de  $\mathbb{C}^2$ . A origem é o *centro* do blow-up e sua pré-imagem,  $\pi^{-1}(\underline{0})$ , é chamada de *divisor excepcional*.

Na prática, a explosão é realizada em cartas locais. Sejam  $(x, y)$  coordenadas na origem de  $\mathbb{C}^2$ . A aplicação  $\pi^{-1}(x, y) = (x, tx)$  é chamada *primeira carta do blow-up* e o ponto  $p_1 = (0, 0)$  nas coordenadas locais  $(x, t)$  é a *origem da primeira carta*. Analogamente,  $\pi^{-1}(x, y) = (uy, y)$  é chamada *segunda carta do blow-up* e o ponto  $p_2 = (0, 0)$  nas coordenadas locais  $(u, y)$  é a *origem da segunda carta*. Note que  $p_2$  é o ponto no infinito de  $\mathbb{P}^1$  na carta local  $(x, t)$ , e vice versa. Todos os demais pontos de  $\pi^{-1}(\underline{0}) \simeq \mathbb{P}^1$  são representados nas duas cartas através da correspondência  $u = \frac{1}{t}$ .

Seja  $\underline{0} = (0, 0)$  a origem de  $\mathbb{C}^2$ . Na primeira carta, temos

$$\pi^{-1}(\underline{0}) = \pi^*(x = y = 0) = \{x = tx = 0\} = \{x = 0\},$$

ou seja, todos os pontos do divisor excepcional são da forma  $(0, t)$  na primeira carta. Já na segunda carta, temos

$$\pi^{-1}(\underline{0}) = \pi^*(x = y = 0) = \{uy = y = 0\} = \{y = 0\},$$

isto é, os pontos do divisor excepcional são da forma  $(u, 0)$  na segunda carta.

Considere agora, na origem de  $\mathbb{C}$ , o eixo  $x = \{y = 0\}$ . O *transformado* deste eixo na primeira carta é dado por

$$\pi^*(y = 0) = \{tx = 0\} = \{t = 0\} \cup \{x = 0\}.$$

Isto significa que, após explosão, o eixo  $x$  se divide em duas partes:  $\{t = 0\}$ , que é o eixo  $x$  nas coordenadas locais  $(x, t)$ ; e  $\{x = 0\}$ . A curva  $\{t = 0\}$  é chamada de *transformado estrito* do eixo  $x$ . Já  $\{x = 0\}$  é exatamente a expressão do divisor excepcional  $\pi^{-1}(\underline{0})$  na primeira carta. Observe que estas duas curvas são *transversais* na origem  $p_1$ . Na segunda carta, o transformado do eixo  $x$  é simplesmente  $\{y = 0\}$ , isto é, aparece apenas a “parte divisora” do transformado.

Analogamente, o transformado do eixo  $y$  é dado na segunda carta por

$$\pi^*(x = 0) = \{uy = 0\} = \{u = 0\} \cup \{y = 0\},$$

em que  $\{u = 0\}$  é o transformado estrito e  $\{y = 0\}$  o divisor excepcional. Na segunda carta, o transformado é apenas  $\{x = 0\}$ .

A figura abaixo ilustra o blow-up da origem de  $\mathbb{R}^2$ . Um disco aberto em torno da origem transforma-se em uma faixa de Möbius cujo círculo central é a pré imagem da origem. Este círculo é isomorfo à reta projetiva real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .

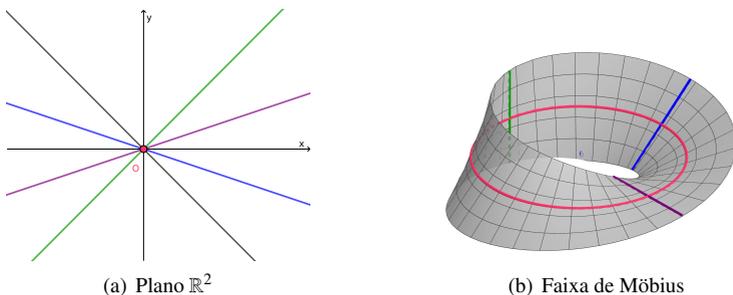


Figura 2 – Blow-up da origem de  $\mathbb{R}^2$

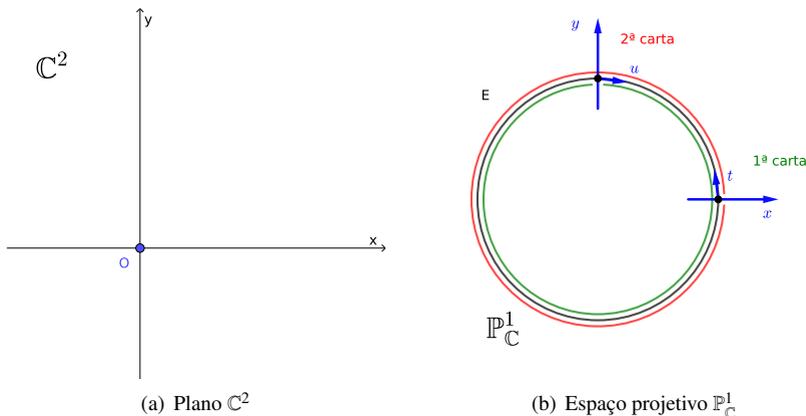


Figura 3 – Blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$

Para definir o blow-up de um ponto  $p$  em uma superfície complexa  $M$ , tomamos coordenadas locais holomorfas em uma vizinhança de  $p$ ,  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$ , tais que  $\varphi(p) = \underline{0}$ . Sejam  $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$  o blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$  e  $\widetilde{W} = \pi^{-1}(\varphi(W)) \subset \widetilde{\mathbb{C}^2}$ . Construímos uma superfície complexa  $\widetilde{M}$  colando  $M \setminus \{p\}$  e  $\widetilde{W}$  através da identificação

$$W \setminus \{p\} \subset M \longleftrightarrow \widetilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0}) \subset \widetilde{\mathbb{C}^2},$$

usando o biholomorfismo  $\pi^{-1} \circ \varphi$ , isto é, um ponto  $q \in W \setminus \{p\}$  identifica-se com  $\pi^{-1}(\varphi(q)) \in \widetilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0})$  e, analogamente, um ponto  $Q \in \widetilde{W} \setminus \pi^{-1}(\underline{0})$  identifica-se com  $\varphi^{-1}(\pi(Q)) \in W \setminus \{p\}$ .

Esta aplicação holomorfa continuará sendo denotada  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  e tem as seguintes propriedades:  $\pi^{-1}(p)$  é a reta projetiva  $\mathbb{P}^1$  e

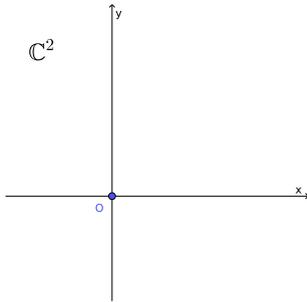
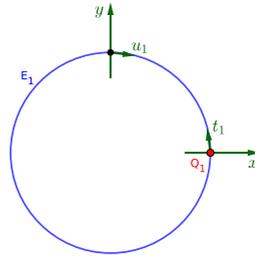
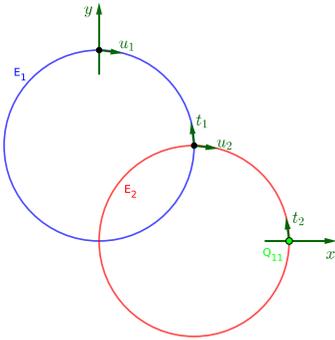
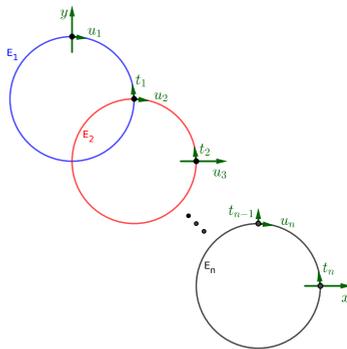
$$\pi : \tilde{M} \setminus \pi^{-1}(p) \longrightarrow M \setminus \{p\}$$

é um biholomorfismo.

Desta maneira, após a explosão da origem de  $\mathbb{C}^2$  podemos continuar explodindo pontos no divisor excepcional. O que é vital observarmos é que:

- (i) Em cada explosão o divisor excepcional é uma reta projetiva  $\mathbb{P}^1$  transversal aos divisores “mais antigos”;
- (ii) Tudo o que está fora do centro de explosão é preservado.

Dada uma sequência de  $n$  blow-ups, o *divisor total* (ou simplesmente *divisor*) é uma união de  $n$  retas projetivas, duas a duas transversais. Cada interseção é chamada de *esquina*.

(a) Plano  $\mathbb{C}^2$ (b) Primeira explosão da origem de  $\mathbb{C}^2$ (c) Segunda explosão da origem  $Q_1$  de  $(x, t_1)$ 

(d) Uma sequência de explosões

Figura 4 – Blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$

### 3 REDUÇÃO DE SINGULARIDADES

Neste capítulo, veremos como se realiza o processo de redução de singularidades de um germe de curva analítica. Nosso objetivo é demonstrar a seguinte afirmação ([Teorema 3.3.1](#)):

*Após um número finito de blow-ups, o transformado estrito final de uma curva analítica é uma curva analítica não singular transversal ao divisor excepcional.*

Para chegar a isto, fazemos um controle sobre determinados índices associados a estas curvas. São eles: a multiplicidade intrínseca da curva; a multiplicidade de interseção da curva com seu cone tangente; e o expoente de contato.

O resultado central que nos permite este controle é o fato de que, após um blow-up, a multiplicidade intrínseca da curva *não aumenta*; quando muito, mantém-se a mesma. E, caso isto ocorra, os outros índices obrigatoriamente diminuem. Como ambas multiplicidades são números inteiros positivos, esta situação pode repetir-se apenas um número finito de vezes. Ao final do processo, chegaremos então a uma situação ideal, na qual a curva possui multiplicidade intrínseca igual a 1 (sendo, portanto, não singular) e possui cruzamentos normais com o divisor.

Na [Seção 3.1](#) introduzimos os índices; na [Seção 3.2](#) vemos como estes índices se comportam após explosões; na [Seção 3.3](#) exibimos a demonstração para o caso de germes de curvas irredutíveis; e finalmente na [Seção 3.4](#) vemos o resultado para um germe de curva analítica qualquer.

Neste capítulo, nos baseamos no livro “*Introducción a la Geometría Analítica Local*” de Felipe Cano Torres [[Torres 2011](#)].

#### 3.1 MULTIPLICIDADES

Um *germe de curva analítica na origem de  $\mathbb{C}^2$*  é o conjunto dado pelos zeros de um polinômio  $f(x, y)$ :  $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ . Se  $u$  é uma função analítica tal que  $u(0) \neq 0$ , obviamente  $uf$  define o mesmo germe que  $f$ . Se

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k}$$

então  $f = 0$  corresponde a  $f_1 f_2 \cdots f_k = 0$  e obtemos assim uma decomposição

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$$

na qual  $C_i = \{f_i = 0\}$ . Observe que cada  $f_i(x, y)$  é irredutível como elemento de  $\mathcal{O}$ ; dizemos que cada curva  $C_i$  é um *ramo irredutível* de  $f$ .

Seja  $C = \{f(x, y) = 0\}$  e escreva

$$f(x, y) = f_\eta(x, y) + f_{\eta+1}(x, y) + f_{\eta+2}(x, y) + \cdots + f_n(x, y)$$

onde cada  $f_i(x, y)$  é um polinômio homogêneo de grau  $i$ .

**Definição 3.1.1.** A multiplicidade intrínseca, ou ordem de  $f$  na origem,  $m(f; 0)$ , é o número inteiro positivo  $\eta$ .

Dizemos que a origem é *não singular* se  $\eta = 1$ . Neste caso,  $C$  é uma curva *lisa*. Se  $\eta \geq 2$ , dizemos que a origem é *singular*.

**Definição 3.1.2.** O polinômio  $f_\eta(x, y)$  é chamado parte inicial de  $f(x, y)$ .

**Definição 3.1.3.** O cone tangente de  $C$  é o conjunto

$$CT(C) = \{f_\eta(x, y) = 0\}.$$

O cone tangente de uma curva é uma união de retas passando pela origem e sua equação depende do sistema de coordenadas  $x, y$ . Estritamente falando, o cone tangente “vive” no espaço vetorial tangente a  $\mathbb{C}^2$  na origem. Porém, por simplicidade, vamos “colocá-lo” em  $\mathbb{C}^2$  como a união de retas dadas pela equação  $f_\eta = 0$ . Abaixo veremos porque este movimento é justificado.

Vamos definir o expoente de contato maximal de uma curva. Dizemos que as coordenadas  $x, y$  são *transversais* se  $x$  não divide  $f_\eta(x, y)$ . Isto é,  $x = 0$  não é tangente ao cone tangente  $(f_\eta = 0) \subset \mathbb{C}^2$ . Como consequência, podemos escrever

$$f_\eta(x, y) = y^\eta + \cdots .$$

A *nuvem de Newton* nas coordenadas transversais  $x, y$ ,  $\mathcal{N}(f; x, y)$ , é o conjunto dos pontos  $(m, n)$ ,  $m, n$  inteiros positivos tais que o monômio  $x^m y^n$  aparece na equação de  $f(x, y)$ . Pelo observado acima, temos que  $(0, \eta)$  está em  $\mathcal{N}(f; x, y)$ . O *Polígono de Newton* de  $f$  (nas coordenadas  $x, y$ ) é o fecho convexo em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  do conjunto  $\mathcal{N}(f; x, y)$ . Mais adiante faremos um estudo mais detalhado do Polígono de Newton; por ora queremos apenas apresentar as noções básicas para que definição abaixo faça sentido.

O Polígono de Newton possui um certo número de lados finitos, todos com coeficiente angular negativo. O *primeiro lado* é o lado de maior coeficiente angular em módulo; isto é, o lado mais inclinado. Como observado acima,  $(0, \eta)$  é um dos pontos do primeiro lado. De fato, é exatamente a interseção do primeiro lado com a ordenada de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Seja  $(\eta \delta_{(x,y)}(f), 0)$  a interseção do primeiro lado com a abscissa de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Definição 3.1.4.** O número  $\delta_{(x,y)}(f)$  é o expoente de contato de  $f$  para as coordenadas  $x, y$ .

Deixemos fixada a coordenada (transversal)  $x$ .

**Definição 3.1.5.** O expoente de contato maximal de  $f$  é

$$\delta_x(f) = \max\{\delta_{(x,y)}(f)\}.$$

Como veremos adiante, se  $C$  é irredutível então  $\delta_x(f)$  não é um número inteiro; e, mais importante, após explosão o expoente de contato maximal baixa uma unidade. A curva que realiza este expoente de contato maximal é o que estamos nos referindo (de forma bem livre, admitidamente), por cone tangente de  $f$ .

Há um algoritmo para encontrar o expoente de contato maximal, que será explicado através do exemplo abaixo.

**Exemplo 1.** Considere a curva  $C$  dada, em coordenadas transversais  $x, y$  pela equação  $f(x, y) = 0$  onde

$$f(x, y) = (x + y + x^2 + x^3)^\eta + x^{3\eta+1}.$$

Temos então que  $\mathcal{N}(f; x, y)$  contém os pontos  $(0, \eta)$  e  $(\eta, 0)$ . O Polígono de Newton tem apenas um lado finito cujo coeficiente angular é  $-1$ , e  $\delta_{(x,y)}(f) = 1$ .

Fazemos a mudança de coordenadas  $y_1 = y + x$ . Assim,

$$f(x, y_1) = (y_1 + x^2 + x^3)^\eta + x^{3\eta+1}.$$

Agora  $\mathcal{N}(f; x, y_1)$  contém os pontos  $(0, \eta)$  e  $(2\eta, 0)$ . Temos então  $\delta_{(x,y_1)}(f) = 2$ .

Fazemos uma nova mudança de coordenadas  $y_2 = y_1 + x^2$ . Então

$$f(x, y_2) = (y_2 + x^3)^\eta + x^{3\eta+1}.$$

Logo  $\mathcal{N}(f; x, y_2)$  contém os pontos  $(0, \eta)$  e  $(3\eta, 0)$ ; temos então  $\delta_{(x,y_2)}(f) = 3$ .

Por último, fazemos a mudança de coordenadas  $y_3 = y_2 + x^3$ . Obtemos

$$f(x, y_3) = y_3^\eta + x^{3\eta+1}.$$

Agora  $\mathcal{N}(f; x, y_3)$  contém os pontos  $(0, \eta)$  e  $(3\eta + 1, 0)$ . Temos então

$$\delta_{(x,y_3)}(f) = \frac{3\eta + 1}{\eta} = 3 + \frac{1}{\eta}.$$

A curva  $y_3 = 0$  é a curva que realiza o contato maximal; é a curva que estamos chamando de cone tangente de  $f$ .

Aqui interrompemos o algoritmo.

Como exposto no Exemplo 1, após um número finito de mudança de variáveis encontramos coordenadas transversais onde o contato maximal é realizado. De maneira mais geral, o algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Começamos com coordenadas transversais  $x, y$ . Se  $\delta_{(x,y)}(f)$  não é um número inteiro, não há o que fazer. Colocamos então  $\delta_x(f) = \delta_{(x,y)}(f)$ . Neste caso, a curva  $C$  dada pela equação  $f(x, y) = 0$  é irredutível.
2. Se  $\delta = \delta_{(x,y)}(f)$  é um número inteiro, buscamos uma mudança de coordenadas do tipo  $y_1 = y + \lambda x^\delta$  tal que  $\delta_{(x,y_1)}(f) > \delta_{(x,y)}(f)$ . Temos aqui duas situações possíveis:
  - (a) Não é possível realizar este passo. Consideramos o algoritmo terminado, e neste caso a curva  $C$  não é irredutível.
  - (b) É possível realizar a mudança de variáveis. Neste caso, recomeçamos o Passo 1 para as coordenadas  $x, y_1$ .

No que segue, vamos considerar que para uma curva  $C$  dada por uma equação  $f = 0$ , o algoritmo acima já foi realizado. Encontramos então coordenadas transversais  $x, y$  as quais podemos utilizar para realizar os cálculo que desejamos. Observamos que, nestas coordenadas, a curva  $y = 0$  é a que realiza o expoente de contato maximal e é o que estamos chamando de *cone tangente*.

Voltemos a escrever  $f(x, y)$

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k} ;$$

obtemos assim uma decomposição

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$$

na qual  $C_i = \{f_i = 0\}$ . A parte inicial de cada ramo irredutível  $f_i$  é da forma  $P_i(x, y) = (\alpha x + \beta y)^{r_i}$ . Portanto  $P_i = 0$  marca uma reta passando pela origem. Assim obtemos uma decomposição

$$f_\eta(x, y) = P_1(x, y) P_2(x, y) \cdots P_k(x, y) .$$

Seja  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  o blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$ . Lembre que  $E = \pi^{-1}(0)$  é o *divisor excepcional*, que é isomorfo a  $\mathbb{P}^1$ . Se  $C$  é um germe de curva analítica na origem, então

$$\pi^{-1}(C) = E \cup C_1,$$

onde  $C_1$  é um germe de curva analítica de  $M$  que não contém  $E$ . Dizemos que  $\pi^{-1}(C)$  é o *transformado total de  $C$  por  $\pi$*  e  $C_1$  é o *transformado estrito de  $C$  por  $\pi$* .

Para provar que o transformado total  $\pi^{-1}(C)$  é uma curva analítica de  $M$  precisamos verificar apenas nos pontos do divisor excepcional  $E$ , já que fora destes pontos o blow-up é um isomorfismo, isto é, já sabemos que

$$\pi^{-1}(C) \setminus E \subset M \setminus E$$

é uma curva analítica.

Fixe  $p \in E$ . Em  $p$  temos coordenadas locais  $(x_1, y_1)$  que satisfazem

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= x_1 y_1. \end{aligned}$$

Se  $C$  está dada por

$$f(x, y) = f_\eta(x, y) + f_{\eta+1}(x, y) + f_{\eta+2}(x, y) + \dots$$

então  $\pi^{-1}(C)$  está dada localmente em  $p$  por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_1 y_1) &= f_\eta(x_1, x_1 y_1) + f_{\eta+1}(x_1, x_1 y_1) + f_{\eta+2}(x_1, x_1 y_1) + \dots \\ &= x_1^\eta (f_\eta(1, y_1) + x_1 f_{\eta+1}(1, y_1) + x_1^2 f_{\eta+2}(1, y_1) \dots) \\ &= x_1^\eta f_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\pi^{-1}(C)$  é um germe de curva analítica em  $p$ . Temos  $E = \{x_1 = 0\}$  e  $C_1 = \{f_1(x_1, y_1) = 0\}$ . Como  $f_1(x_1, y_1) = f_\eta(1, y_1) + x_1(\dots)$ , temos que  $f_1(0, y_1) = f_\eta(1, y_1) \neq 0$  e, portanto,  $C_1$  não contém  $E$ . Além disso,  $C_1 \cap E$  é o conjunto de raízes de  $f_1(1, y_1)$  e, portanto, um número finito de pontos. De fato, cada ponto de  $C_1 \cap E$  corresponde à classe em  $\mathbb{P}^1 \simeq \pi^{-1}(0)$  de uma reta do cone tangente  $CT(C)$ . Em outras palavras, cada ponto  $q_i$  de  $C_1 \cap E$  corresponde à interseção do transformado estrito de  $P_i$  com  $E$  (lembre que  $P_i$  é um fator linear de  $f_\eta$ ). Chamamos os pontos  $q_i$  de *pontos infinitamente próximos de  $f$* .

Para ilustrar os conceitos apresentados acima, consideremos o seguinte exemplo, no qual o cone tangente da curva possui duas retas. Assim, após explosão teremos dois pontos infinitamente próximos.

**Exemplo 2.** Consideremos a curva  $C_0$  correspondente aos zeros da função

$$f(x, y) = (y^2 - x^3)(y^3 - x^2) = y^5 - y^2 x^2 - x^3 y^3 + x^5.$$

Seu cone tangente é  $CT(f) = \{x^2 y^2 = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ .

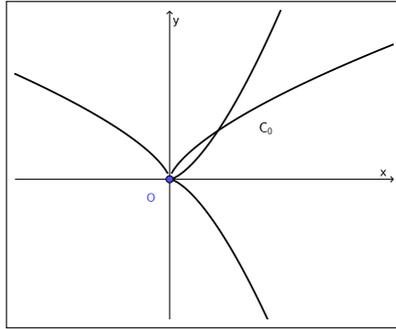


Figura 5 – Curva  $C_0 = \{(y^2 - x^3)(y^3 - x^2) = 0\}$ .

O transformado estrito de  $C_0$  aparecerá nas duas cartas do blow-up. Na primeira carta, fazemos a mudança de variáveis  $x = x_1$ ,  $y = x_1 y_1$  e obtemos

$$f(x_1, x_1 y_1) = x_1^5 y_1^5 - x_1^2 y_1^2 x_1^2 - x_1^3 x_1^3 y_1^3 + x_1^5 = x_1^4 (x_1 y_1^5 - y_1^2 - x_1^2 y_1^3 + x_1) .$$

Assim o divisor está dado por  $E_1 = \{x_1 = 0\}$  e o transformado estrito de  $C_0$ , por  $\{f_1(x_1, y_1) = x_1 y_1^5 - y_1^2 - x_1^2 y_1^3 + x_1 = 0\}$ .

Na segunda carta, a mudança de variáveis é  $x = x_2 y_2$ ,  $y = y_2$ , e assim

$$f(x_2 y_2, y_2) = y_2^5 - y_2^2 x_2^2 y_2^2 - x_2^3 y_2^3 y_2^3 + x_2^5 y_2^5 = y_2^4 (y_2 - x_2^2 - x_2^3 y_2^2 + x_2^5 y_2) .$$

Logo o divisor está dado por  $E_1 = \{y_2 = 0\}$  e o transformado estrito de  $C_0$  por  $\{f_1(x_2, y_2) = y_2 - x_2^2 - x_2^3 y_2^2 + x_2^5 y_2 = 0\}$ .

Esta situação está representada na figura abaixo. Observe que em cada carta, o transformado de  $C_0$  corta o divisor em um único ponto; portanto após explosão temos dois pontos infinitamente próximos.

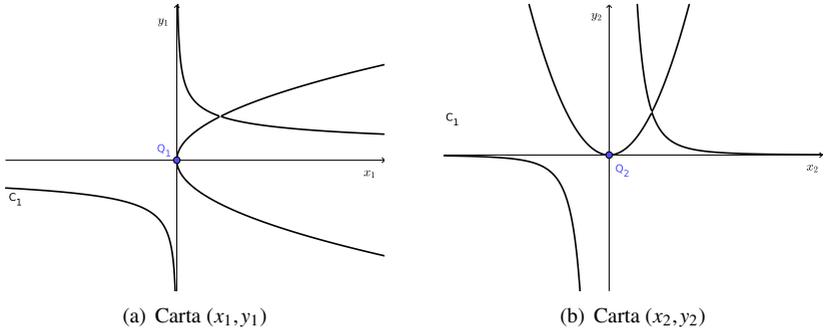


Figura 6 – Explosão da curva  $\{(y^2 - x^3)(y^3 - x^2) = 0\}$ .

É claro que podemos realizar novos blow-ups centrados nos pontos  $q_i \in E$ , e assim por diante. A ideia da redução de singularidades de uma curva é mostrar que após um número *finito* de blow-ups, o transformado estrito de  $f$  é não singular e tem cruzamentos normais com o divisor excepcional (mais adiante daremos a definição deste conceito) em cada ponto infinitamente próximo. Para isto usamos um controle sobre índices associados à curva, e mostramos que estes índices diminuem estritamente após explosões. São eles: a multiplicidade intrínseca, definida acima; a multiplicidade de interseção e o contato maximal, que definiremos a seguir.

Daqui em diante, consideramos um germe de curva  $C = \{f(x, y) = 0\}$  *irredutível*. Neste caso, temos  $f_\eta(x, y) = (\alpha x + \beta y)^\eta$ . Salvo mudança linear de coordenadas, podemos supor  $f_\eta(x, y) = y^\eta$ , ou seja,  $CT(C) = \{y = 0\}$ .

**Definição 3.1.6.** A multiplicidade de interseção de  $C$  com os eixos  $x$  e  $y$  respectivamente é o número inteiro

$$i(C, y = 0) = i(f, y = 0) = m(f(x, 0); 0) ;$$

$$i(C, x = 0) = i(f, x = 0) = m(f(0, y); 0) .$$

Observe que  $i(C, y = 0)$  é exatamente a multiplicidade de interseção de  $C$  com seu cone tangente. No caso particular  $\{f(x, y)\} = \{f_\eta(x, y)\}$ , temos que  $C$  é uma reta (“múltipla”) e o cone tangente coincide com a própria curva. Diremos que a multiplicidade de interseção de  $C$  e  $CT(C)$  é infinita. Por outro lado, se  $f(x, y) \neq f_\eta(x, y)$ , a multiplicidade de interseção de  $C$  e  $CT(C)$  será finita.

**Observação 2.** É possível definir, de maneira mais técnica e algébrica, a multiplicidade de interseção de quaisquer duas curvas, irredutíveis ou não.

A **Definição 3.1.6** é exatamente esta definição mais geral aplicada ao caso irreduzível.

**Exemplo 3.** Seja  $C = \{f(x, y) = y - x = 0\}$ . Observe que, neste caso, o cone tangente é a própria curva e como visto acima colocamos  $i(C, CT(C)) = \infty$ . Para as demais multiplicidades, temos

$$\begin{aligned} m(f; 0) &= m(y - x) = 1 \\ i(C, y = 0) &= i(f, y = 0) = m(f(x, 0); 0) = m(-x) = 1 \\ i(C, x = 0) &= m(f(0, y); 0) = m(y) = 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.** Considere  $C_1 = \{f_1(x, y) = y - x^2 = 0\}$  e  $C_2 = \{f_2(x, y) = y^2 - x = 0\}$ . Então

$$\begin{aligned} m(f_1; 0) &= 1 \\ i(C_1, CT(C_1)) &= i(f_1, y = 0) = m(f_1(x, 0); 0) = m(-x^2) = 2 \\ i(C_1, x = 0) &= m(f_1(0, y); 0) = m(y) = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m(f_2; 0) &= 1 \\ i(C_2, CT(C_2)) &= i(f_2, x = 0) = m(f_2(0, y); 0) = m(y^2) = 2 \\ i(C_2, y = 0) &= m(f_2(x, 0); 0) = m(x) = 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.** Considere agora a cúbica  $C = \{f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$ . Seu cone tangente é  $CT(C) = \{y = 0\}$  e temos

$$\begin{aligned} m(f; 0) &= m(y^2 - x^3) = 2 \\ i(C, CT(C)) &= i(f, y = 0) = m(f(x, 0); 0) = m(x^3) = 3 \\ i(C, x = 0) &= m(f(0, y); 0) = m(y^2) = 2 \end{aligned}$$

Intuitivamente, como exposto nos exemplos acima, a multiplicidade de interseção pode ser vista como a “medida de tangência” entre duas curvas. Nesse sentido, podemos concluir que curvas que não se cortam tem multiplicidade de interseção igual a 0 e curvas transversais tem multiplicidade de interseção igual a 1. No **Exemplo 3**,  $C$  e seu cone tangente são a mesma curva, por isto faz sentido dizer que são “infinitamente tangentes”. No **Exemplo 4**, apesar de serem essencialmente a mesma curva, as multiplicidades de interseção de  $C_1$  e  $C_2$  com os eixos coordenados não coincidem; isso se deve ao posicionamento de cada curva no espaço. No **Exemplo 5**, vemos que  $i(C, x = 0) = 2$ . Apesar de estas curvas não serem exatamente tangentes, este

valor se deve ao fato de  $C$  ser uma curva singular na origem.

Uma vez que esteja realizado o algoritmo para encontrar o expoente de contato maximal, este expoente pode ser encontrado através da fórmula abaixo:

$$\delta = \frac{i(C, y = 0)}{m(f; 0)} > 1 .$$

### 3.2 MULTIPLICIDADE E BLOW-UP

Nesta seção veremos como se comportam a multiplicidade e a multiplicidade de interseção de uma curva irreduzível  $C = \{f(x, y) = 0\}$  após blow-up.

Escreva  $f(x, y) = y^\eta + f_{\eta+1}(x, y) + f_{\eta+2}(x, y) + \dots$ . Recorde que, neste caso,  $CT(C) = \{y = 0\}$ . Assim  $m(f; 0) = \eta > 1$ . Chame  $I = i(C, CT(C))$ . Seja  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  o blow-up da origem; sendo  $C$  irreduzível, existe um único ponto infinitamente próximo  $p \in C_1 \cap E$ . Existem portanto coordenadas locais  $x_1, y_1$  em  $p$  que satisfazem  $x = x_1, y = x_1 y_1$  e então

$$\begin{aligned} \pi^* f = f(x_1, x_1 y_1) &= (x_1 y_1)^\eta + f_{\eta+1}(x_1, x_1 y_1) + f_{\eta+2}(x_1, x_1 y_1) + \dots \\ &= x_1^\eta (y_1^\eta + x_1 f_{\eta+1}(1, y_1) + x_1^2 f_{\eta+2}(1, y_1) + \dots) \\ &= x_1^\eta f_1(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$f_1 = \frac{1}{x_1^\eta} \cdot \pi^* f. \quad (3.1)$$

O transformado estrito  $C_1$  está dado por  $f_1(x_1, y_1) = 0$ , onde

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= y_1^\eta + x_1 f_{\eta+1}(1, y_1) + x_1^2 f_{\eta+2}(1, y_1) + \dots \\ &= y_1^\eta + x_1 \sum_{j \geq \eta+1} x_1^{j-(\eta+1)} f_j(1, y_1). \end{aligned}$$

Segue então que

$$m(f_1; p) \leq \eta = m(f; 0).$$

Por sua vez, o transformado do cone tangente de  $C$  está dado por

$$\pi^* CT(C) = \{x_1 y_1 = 0\} = \{x_1 = 0\} \cup \{y_1 = 0\} = E \cup CT(C)'$$

onde  $E = \{x_1 = 0\}$  é o divisor excepcional e  $CT(C)'$  é o transformado estrito do cone tangente de  $C$ .

Vejam os que acontece se  $m(f_1; p) = m(f; 0)$ . A primeira coisa a se observar é que neste caso, o transformado estrito do cone tangente de  $C$  coincide com o cone tangente do transformado estrito de  $C$ , isto é

$$CT(C)' = CT(C_1).$$

De fato, a parte inicial de  $f_1(x_1, y_1)$  é exatamente  $y_1^\eta$ .

Passemos ao cálculo de todas as multiplicidades.

**Lema 3.2.1.** *A multiplicidade de intersecção do transformado estrito de  $C$  com o divisor excepcional  $E$  é a multiplicidade intrínseca de  $C$ .*

**Demonstração:** De fato temos

$$i(C_1, E) = i(f_1; x_1 = 0) = m(f_1(0, y_1); p) = m(y_1^\eta; p) = \eta .$$

■

Seja  $I_1$  a multiplicidade de intersecção do transformado estrito  $C_1$  com seu cone tangente  $CT(C_1)$ , isto é,  $I_1 = i(C_1, CT(C_1))$ .

**Lema 3.2.2.** *Se  $m(C_1; p) = m(C; 0) = \eta > 1$  então  $I_1 = I - \eta$ .*

**Demonstração:** Se usarmos a [Definição 3.1.6](#) para determinar  $I_1$ , obtemos

$$i(C_1, CT(C_1)) = m(f_1(x_1, 0); p) = m\left(x_1 \sum_{j \geq \eta+1} x_1^{j-(\eta+1)} f_j(1, 0); p\right),$$

que não conseguimos calcular diretamente.

Porém, escreva  $f(x, y) = \varphi(x) + yg(x, y)$ . Note que  $f(x, 0) = \varphi(x)$  e, portanto,

$$I = i(C, CT(C)) = m(f(x, 0); 0) = m(\varphi(x)) .$$

Após blow-up, obtemos

$$\pi^* f = \varphi(x_1) + x_1 y_1 g(x_1, x_1 y_1) .$$

Portanto, pela equação (3.1) temos

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= \frac{1}{x_1^\eta} (\varphi(x_1) + x_1 y_1 g(x_1, x_1 y_1)) \\ &= \frac{1}{x_1^\eta} \varphi(x_1) + \frac{y_1}{x_1^{\eta-1}} g(x_1, x_1 y_1) \\ &= \varphi_1(x_1) + y_1 g(x_1, y_1) . \end{aligned}$$

Lembrando que o cone tangente de  $C_1$ ,  $CT(C_1)$ , está dado por  $y_1 = 0$ , temos que

$$I_1 = i(C_1, CT(C_1)) = m(f_1(x_1, 0); p) = m(\varphi_1(x_1)) .$$

Porém como  $\varphi_1(x_1) = \frac{1}{x_1^\eta} \varphi(x_1)$ , obtemos  $m(\varphi_1(x_1)) = m(\varphi(x_1)) - \eta$ , isto é,

$$I_1 = I - \eta .$$

■

**Corolário 3.2.1.** *Sejam  $\delta$  o expoente de contato de  $C$  e  $CT(C)$  e  $\delta_1$  o expoente de contato de  $C_1$  e  $CT(C_1)$ . Se  $m(C_1; p) = m(C; 0) = \eta > 1$ , então*

$$\delta_1 = \delta - 1 .$$

**Demonstração:** De fato,

$$\delta_1 = \frac{i(C_1, CT(C_1))}{m(C_1; p)} = \frac{I_1}{\eta} = \frac{I - \eta}{\eta} = \frac{I}{\eta} - 1 = \delta - 1 .$$

■

O exemplo abaixo ilustra que, após blow-up, se a multiplicidade da curva não baixar então o expoente de contato irá baixar uma unidade.

**Exemplo 6.** Considere a seguinte família de curvas com singularidade na origem

$$C = \{f(x, y) = y^m - x^n = 0\},$$

para  $m, n \in \mathbb{N}$  e sendo  $0 < m < n$ .

Assim,  $CT(C) = \{y = 0\}$ , e a multiplicidade de  $f$  é  $m(f, 0) = m$ , portanto o expoente de contato de  $C$  com seu cone tangente é

$$\delta = \frac{i(C, CT(C))}{m(f, 0)} = \frac{m(f(x, 0), 0)}{m(f, 0)} = \frac{m(x^n)}{m(y^m - x^n)} = \frac{n}{m} > 1.$$

O único ponto infinitamente próximo do transformado estrito de  $f$  é a origem da primeira carta do blow-up. Tomamos então a mudança de coordenadas  $x = x_1$  e  $y = x_1 y_1$  e obtemos

$$\pi^* f = f(x_1, x_1 y_1) = x_1^m y_1^m - x_1^n = x_1^m (y_1^m - x_1^{n-m}) = 0 .$$

O divisor excepcional tem equação  $E = \{x_1^m = 0\} = \{x_1 = 0\}$ , o transformado estrito  $C_1$  está dado por  $f_1(x_1, y_1) = y_1^m - x_1^{n-m}$ .

Para esta família de curvas consideremos três situações separadamente:

1. Caso  $0 < m < \frac{n}{2} < n$ . Temos:

$$m < \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2m < n \Leftrightarrow m < n - m.$$

Logo  $CT(C_1) = \{y_1 = 0\}$  e  $m(f_1, 0) = m = m(f, 0)$ . O expoente de contato de  $C_1$  e  $CT(C_1)$  é

$$\delta_1 = \frac{i(C_1, CT(C_1))}{m(f_1, 0)} = \frac{m(f_1(x, 0), 0)}{m(f_1, 0)} = \frac{m(x_1^{n-m})}{m(y_1^m - x_1^{n-m})} = \frac{n-m}{m} = \delta - 1$$

Portanto neste caso temos  $m(f_1, 0) = m = m(f, 0)$ : a multiplicidade não baixa depois de explosão. Em contra-partida  $\delta_1 = \delta - 1$ : isto é, o expoente de contato baixa de uma unidade.

2. Caso  $0 < \frac{n}{2} < m < n$ . Temos:

$$\frac{n}{2} < m \Leftrightarrow n < 2m \Leftrightarrow n - m < m$$

Assim  $CT(C_1) = \{x_1 = 0\}$  não corresponde ao transformado estrito de  $CT(C)$ . Isto significa que  $C_1$  se separa de seu cone tangente após a explosão. Neste caso, temos

$$m(f_1, 0) = n - m < m = m(f, 0),$$

isto é, a multiplicidade baixa.

3. Caso  $m = \frac{n}{2}$ . Neste caso, a curva não é irredutível.

Com este exemplo observamos que:

- Se o cone tangente se mantém, a ordem da curva não muda porém o expoente de contato baixa; em outras palavras, se  $CT(f) = CT(f_1)$ , então  $m(f) = m(f_1)$  e  $\delta_1 = \delta - 1$ ;
- Se o cone tagente muda, a ordem da curva baixa; em outras palavras, se  $CT(f) \neq CT(f_1)$ , então  $m(f) > m(f_1)$ .

Com este exemplo podemos ver que quando a multiplicidade baixa após explosão, algo especial deve ocorrer; de fato, neste momento a curva é “separada” de seu cone tangente. Quando a multiplicidade se mantém após explosão, o cone tangente permanece o mesmo porém seu expoente de contato com o transformado da curva baixa (uma unidade), ou seja, a nova curva é “menos tangente” ao seu cone tangente.

### 3.3 ARGUMENTO PARA UMA CURVA IRREDUTÍVEL

Após todo o trabalho desenvolvido nas seções anteriores, estamos prontos para demonstrar o teorema abaixo:

**Teorema 3.3.1.** *Após um número finito de blow-ups, o transformado estrito final de uma curva analítica é uma curva analítica não singular transversal ao divisor excepcional.*

**Demonstração:** De fato, a multiplicidade intrínseca  $\eta$  da curva  $C$  e o expoente de contato  $\delta$  de  $C$  com seu cone tangente são números inteiros positivos. Se a multiplicidade intrínseca da curva se mantém após blow-up, o expoente de contato baixa uma unidade. Como isto só pode ocorrer um número finito de vezes, em algum momento a multiplicidade deve baixar. Por indução, após um número finito de blow-ups encontramos que o transformado estrito  $C'$  tem multiplicidade intrínseca igual a 1. ■

Possivelmente serão realizados blow-ups adicionais para que a curva e o divisor tenham cruzamentos normais; trataremos isso com mais detalhes na próxima seção.

O exemplo a seguir é o exemplo chave deste trabalho e voltaremos a ele várias vezes no decorrer do texto.

**Exemplo 7.** Considere a curva  $C = \{f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$ . O cone tangente de  $C$  é o eixo  $x$ ,  $CT(C) = \{y = 0\}$ . Façamos o blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$ . Na primeira carta temos a mudança  $x = x_1, y = x_1 y_1$ . Portanto

$$f \circ \pi_1(x_1, y_1) = f(x_1, x_1 y_1) = (x_1 y_1)^2 - (x_1)^3 = x_1^2(y_1^2 - x_1) = 0.$$

Temos então que o divisor está dado por  $E_1 = \{x_1 = 0\}$ , e o transformado estrito por  $C_1 = \{f_1 = y_1^2 - x_1 = 0\}$ .

Na segunda carta a mudança de variável é dada por  $x = x_2 y_2, y = y_2$  e assim

$$f \circ \pi_1(x_2, y_2) = f(x_2 y_2, y_2) = y_2^2 - (x_2 y_2)^3 = y_2^2(1 - x_2^3 y_2) = 0.$$

O divisor está dado por  $E_1 = \{y_2 = 0\}$  e o transformado estrito é a curva  $C_1 = \{1 - x_2^3 y_2\}$ . Isto é, na segunda carta,  $C_1$  não possui singularidades; dizemos que  $C_1$  é uma *unidade*. Portanto não há mais que fazer, e para o próximo blow-up tomaremos como centro a origem da primeira carta  $(x_1, y_1)$ .

Façamos então o blow-up da origem de  $(x_1, y_1)$ . Como o cone tangente de  $C_1$  é  $CT(C_1) = \{x_1 = 0\}$ , olharemos apenas para a segunda carta da explosão. Se olharmos para a primeira carta, encontraremos que na origem desta carta

o transformado estrito de  $C_1$  é uma unidade; como visto acima, esta situação não nos interessa. Tomamos então a mudança de variáveis  $x_1 = x_2y_2$ ,  $y_1 = y_2$  (repetimos as variáveis  $x_2, y_2$  para simplificar a notação) e obtemos

$$f_1 \circ \pi_2(x_2, y_2) = f_1(x_2y_2, y_2) = y_2^2 - x_2y_2 = y_2(y_2 - x_2) = 0.$$

Assim  $E_2 = \{y_2 = 0\}$  e  $C_2 = \{f_2 = y_2 - x_2 = 0\}$ .

A curva  $C_2$  é não singular na origem de  $(x_2, y_2)$ , porém não possui cruzamentos normais com o divisor  $E_2$ . De fato, a origem, por estar contida em dois divisores, é um ponto de tipo esquina. O último blow-up é realizado para retificar esta situação.

Na primeira carta do blow-up da origem de  $(x_2, y_2)$  usamos a mudança de variáveis  $x_2 = x_3, y_2 = x_3y_3$ . Desta forma obtemos

$$f_2 \circ \pi_3(x_3, y_3) = f_2(x_3, x_3y_3) = x_3y_3 - x_3 = x_3(y_3 - 1) = 0.$$

Assim  $E_3 = \{x_3 = 0\}$ ,  $C_3 = \{y_3 - 1 = 0\}$ . Na segunda carta, tomamos a mudança  $x_2 = w_3z_3$ ,  $y_2 = z_3$  e obtemos  $E_3 = \{z_3 = 0\}$ ,  $C_3 = \{w_3 - 1 = 0\}$ . Observe que a mudança de cartas é dada por  $w_3 = \frac{1}{y_3}$ .

Assim  $C_3$  possui cruzamentos normais com  $E_3$ . Isto pode ser visto, na primeira carta por exemplo, fazendo a mudança de variáveis linear  $x' = x_3$ ,  $y' = y_3 - 1$ . Nas variáveis  $x', y'$  temos  $E_3 = \{x' = 0\}$ ,  $C_3 = \{y' = 0\}$ .

A figura abaixo representa esquematicamente a composição dos três blow-ups realizados.

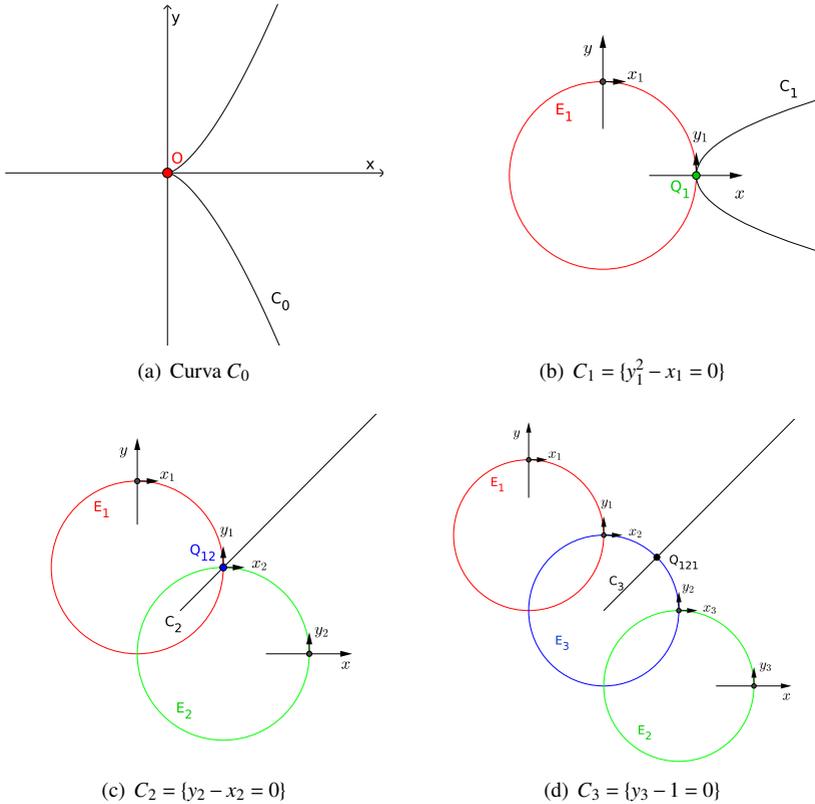


Figura 7 – Redução de singularidades da curva  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$

Passemos para a análise das multiplicidades. Para  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$  temos

- $\eta_0 = m(f; 0) = m(y^2 - x^3) = 2$ ;
- $I_0 = i(C_0, CT(C_0)) = m(f(x, 0)) = m(-x^3) = 3$ ;
- $\delta_0 = \frac{i(C_0, CT(C_0))}{m(f; 0)} = \frac{3}{2}$ .

Para  $C_1 = \{y_1^2 - x_1 = 0\}$ , temos

$$\eta_1 = m(f_1; 0) = m(y_1^2 - x_1) = 1.$$

Como observado após o [Exemplo 6](#), o fato que a multiplicidade intrínseca baixa depois de explosão implica que o transformado estrito é separado do

cone tangente da curva original. De fato, é o que acontece aqui. Temos  $\eta_1 = \eta_0 - 1$ , e o cone tangente de  $C_1$  está dado por  $\{x_1 = 0\}$ , que é exatamente a equação do divisor  $E_1$ . Temos também

$$\begin{aligned} I_1 &= i(C_1, CT(C_1)) = m(f_1(0, y_1)) = m(y_1^2) = 2 \\ \delta_1 &= \frac{i(C_1, CT(C_1))}{m(f_1; 0)} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

A multiplicidade intrínseca  $\eta_1 = 1$  implica que  $C_1$  é uma curva não singular; porém, a multiplicidade de interseção e o expoente de contato maiores que 1 indicam uma tangência entre  $C_1$  e  $E_1$ , que deve ser eliminada para concluir a dessingularização.

Para  $C_2 = \{f_2(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = 0\}$ , temos

$$\eta_2 = m(f_2; 0) = m(y_2 - x_2) = 1 = \eta_1.$$

Como observado anteriormente,  $C_2$  é uma curva não singular, cujo cone tangente é ela própria (por isso não calcularemos a multiplicidade de interseção e o expoente de contato). O terceiro blow-up é realizado para solucionar a última pendência, que é colocar curva e divisor em cruzamentos normais. Naturalmente, a multiplicidade intrínseca de  $C_3$  é 1.

### 3.4 ARGUMENTO PARA UMA CURVA QUALQUER

Mostramos anteriormente que, dada uma curva  $C$  com cone tangente  $CT(f) = \{y = 0\}$ , após uma quantidade finita de blow-ups a curva não terá mais singularidades e além disso é transversal ao divisor excepcional.

Esta seção está dedicada a mostrar este resultado para um germe de curva analítica *qualquer*. Neste caso, sabemos que o cone tangente é a união de um número finito de retas.

Para tal, consideremos *um germe de curva analítica na origem de  $\mathbb{C}^2$*  dado por  $C = \{f(x, y) = 0\}$ , com  $CT(C) = \{f_\eta(x, y) = 0\}$ . Temos então

$$f_\eta(x, y) = P_1(x, y) P_2(x, y) \cdots P_k(x, y)$$

para  $k \geq 1$ , onde cada  $P_i = 0$  é uma reta passando pela origem, como visto na seção anterior.

Efetuemos um blow-up com centro na origem  $\pi : (M, E) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Pela definição de  $\mathbb{P}^1$ , a cada reta passando pela origem de  $\mathbb{C}^2$  corresponde um ponto da reta projetiva. Como o divisor excepcional  $E = \pi^{-1}(0)$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^1$ , segue que a cada reta  $P_i = 0$  do cone tangente  $CT(C)$  corresponde um ponto  $q_i \in E$ . O conjunto (finito) de pontos  $q_1, q_2, \dots, q_k \in E$  é chamado *conjunto de pontos infinitamente próximos de  $f$* , pelos quais passa o transformado estrito  $C_1$  de  $C$ . A seguinte figura é uma representação geométrica desta situação.

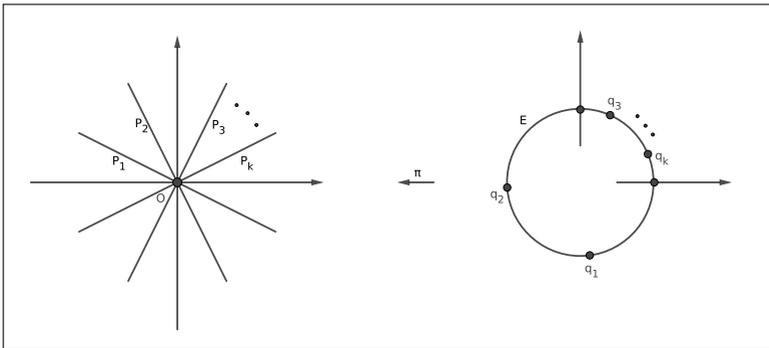


Figura 8 – Cone tangente com  $k$ -retas.

Seja  $\sigma_i$  a explosão de centro  $q_i$  e denote  $\pi_1$  a reunião de todas as explosões  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Obtemos assim

$$\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (M, E)$$

onde  $E_1$  é união de retas projetivas  $\mathbb{P}^1$  que se cortam duas a duas em no máximo um ponto e de forma transversal. De fato,

$$E_1 = E_0^1 \cup E_{q_1}^1 \cup E_{q_2}^1 \cup \dots \cup E_{q_k}^1$$

onde  $E_0^1 = \pi_1^{-1}(E)$  e  $E_{q_i}^1 = \sigma_i^{-1}(q_i)$ . Esta situação está ilustrada na figura abaixo.

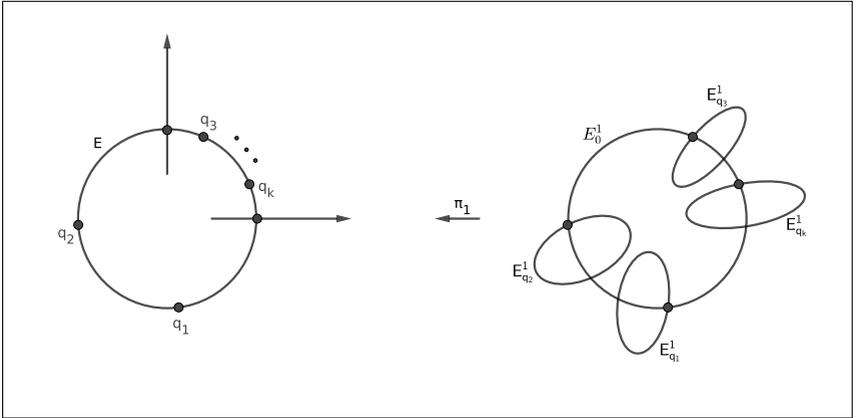


Figura 9 – Explosão simultânea de  $k$  pontos.

Em cada  $E_{q_i}^1$  existem finitos pontos singulares, chamados *pontos infinitamente próximos de segunda ordem de  $C$* , que denotaremos  $q_{i,j}$ , por onde passa o transformado estrito de  $C$ . Podemos repetir o processo anterior, realizando blow-ups com centros  $q_{i,j}$  e encontrando novos divisores isomorfos a  $\mathbb{P}^1$ . Iterando este processo construímos uma sucessão de morfismos

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi} (M, E) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1) \xleftarrow{\pi_2} (M_2, E_2) \xleftarrow{\pi_3} \dots$$

onde em cada etapa  $n$  existe um número finito de pontos em  $E_n$  que serão usados como centros de blow-up de  $\pi_{n+1}$ . Estes pontos são chamados *pontos infinitamente próximos de  $(n+1)$ -ésimo nível de  $C$* .

O conjunto dos pontos infinitamente próximos de  $C$  formam um *grafo/árvore* de raiz  $p = 0$ , como por exemplo a seguinte:

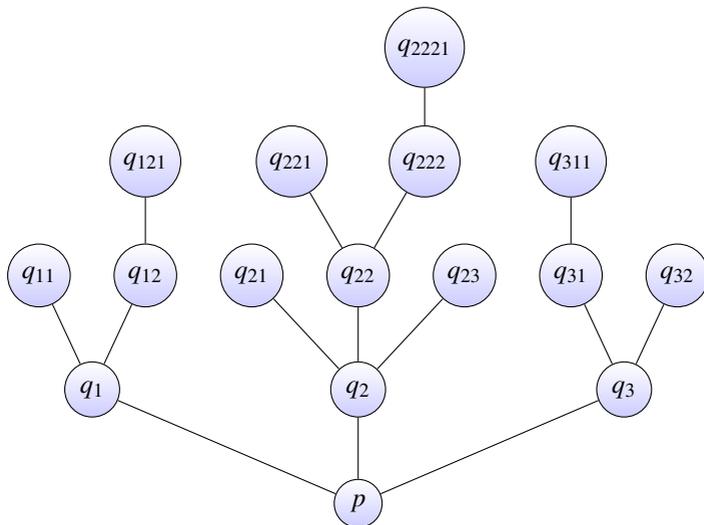


Figura 10 – Grafo

Nesta figura  $p = 0$  é o centro do primeiro blow-up  $\pi$ ,  $\{q_1, q_2, q_3\} \in E$  são os pontos infinitamente próximo de primeira ordem,  $\{q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{31}, q_{32}\} \in E_1$  são os pontos infinitamente próximos de segunda ordem, etc. Observe que para qualquer ponto  $q_{i,j,k\dots}$  há um único caminho linear que liga  $q_{i,j,k\dots}$  a  $p$ , e este caminho contém um número finito de vértices.

Em cada ponto infinitamente próximo  $q$  de  $C$  no nível  $n$  temos um germe do divisor excepcional  $E_n$  em  $q$  que pode ser de dois tipos:

1. Existe uma única componente de  $E_n$  que passa por  $q$ . Neste caso, o germe  $(E_n, q)$  é um germe de uma curva lisa em  $q$ . Este tipo de ponto é chamado *traça*;

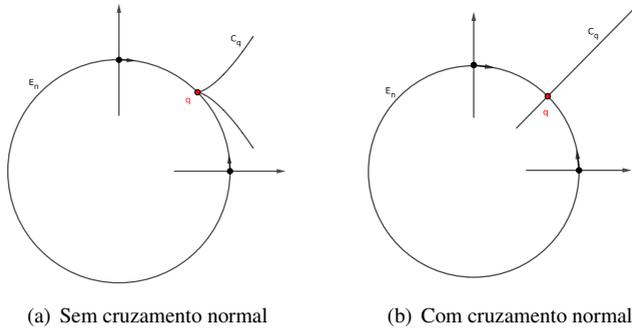


Figura 11 – Pontos do tipo traça

2. Existem duas componentes de  $E_n$  que passam por  $q$ . São necessariamente lisas e transversais. Estes pontos infinitamente próximos são chamados *pontos esquina*.

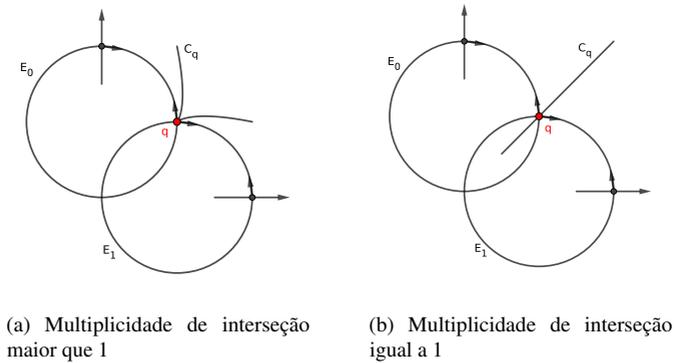


Figura 12 – Pontos do tipo esquina

Denote  $C_q$  o transformado estrito de  $C$  em  $q \in E_n$ . Dizemos que  $q$  é um *ponto de cruzamento normal* de  $C$  se  $q$  é um ponto de tipo traça e  $C_q$  é não singular e transversal a  $E_n$  em  $q$ .

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $q$  um ponto de cruzamento normal de  $C$  e  $\sigma$  blow-up de centro  $q$ . Então existe um único ponto  $q' \in \sigma^{-1}(q)$  de cruzamento normal de  $C$ .*

Segue da [Proposição 3.4.1](#) que acima de um ponto de cruzamento

normal o grafo é linear. Podemos agora enunciar o Teorema de Redução de Singularidades:

**Teorema 3.4.1.** *Seja  $C$  um germe de curva analítica. Existe um índice  $n \geq 1$  tal que todos os pontos infinitamente próximos de  $n$ -ésimo nível de  $C$  são pontos de cruzamentos normais.*

Passamos à demonstração do [Teorema 3.4.1](#).

Consideremos um germe de curva analítica  $C$ . Um *bambu* sobre  $C$  é uma sequência de blow-ups

$$B : (\mathbb{C}^2, 0) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\sigma_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\sigma_2} (M_2, p_2) \xleftarrow{\sigma_3} \dots$$

onde  $p_i$  é o centro de cada  $\sigma_{i+1}$  e o transformado estrito  $C_{i+1}$  de  $C_i$  passa por  $p_{i+1}$ . Observe que o bambu  $B$  corresponde a um ramo infinito na árvore de pontos infinitamente próximos de  $C$ .

O [Teorema 3.4.1](#) pode ser re-escrito como segue:

**Teorema 3.4.2.** *Seja  $C$  um germe de curva analítica e consideremos um bambu*

$$B : (\mathbb{C}^2, 0) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\sigma_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\sigma_2} (M_2, p_2) \xleftarrow{\sigma_3} \dots$$

*Então, existe um índice  $m \geq 0$  tal que qualquer  $p_i$  com  $i \geq m$  é um ponto de cruzamento normal.*

Considere a árvore de pontos infinitamente próximos de  $C$ . Um ponto que não é de cruzamento normal é chamado um *ponto essencial* da árvore. Pela [Proposição 3.4.1](#), acima de um ponto de cruzamento normal existe um único ramo linear; logo podemos “podar” o ramo acima do “primeiro” ponto de cruzamento normal. Obtemos assim uma árvore, que denotaremos  $AS(C)$ , cujos pontos são (quase) todos essenciais. A demonstração do resultado abaixo é imediata:

**Lema 3.4.1.** *Se  $AS(C, 0)$  é finita, existe  $n \geq 0$  tal que todos os pontos infinitamente próximos de  $n$ -ésimo nível são de cruzamentos normais.*

Terminamos a demonstração do [Teorema 3.4.1](#) por redução ao absurdo. Suponhamos que o teorema não se cumpra para  $C$ . Então pelo [Lema 3.4.1](#) a árvore essencial  $AS(C, 0)$  não pode ser finita. Agora, a *árvore essencial* é uma árvore com uma única raiz, cujos níveis são finitos. Podemos então aplicar o Lema de König:

**Lema 3.4.2** (Lema de König). *Se uma árvore com uma única raiz é infinita e todos os seus níveis são finitos, então possui um ramo infinito.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $r_0$  é a raiz da árvore. Imediatamente sobre  $r_0$  existem somente um número finito de vértices da árvore, já que o primeiro nível é finito. Cada um destes vértices tem em cima uma árvore, que são disjuntas entre si e cuja reunião (juntamente com a raiz) resulta na árvore de partida. Assim uma destas árvores é infinita, digamos aquela suportada pelo vértice  $r_1$ . Repetimos o argumento com  $r_1$ , e obtemos  $r_2$  e assim sucessivamente. Vamos assim construindo uma rama infinita

$$B : r_0 < r_1 < r_2 < \dots$$

■

Pelo Lema de König, deve existir um ramo infinito em  $AS(C)$  que se indentifica com um bambu de pontos essenciais

$$B : (\mathbb{C}^2, 0) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\sigma_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\sigma_2} (M_2, p_2) \xleftarrow{\sigma_3} \dots .$$

*Porém cada bambu corresponde a sequência de blow-ups de uma curva irreduzível.* Como mostrado na seção anterior, a redução de singularidades de uma curva irreduzível é finita, ou seja, existe um índice  $n \geq 1$  tal que todos os pontos infinitamente próximos de  $n$ -ésimo nível de  $C$  são pontos de cruzamentos normais. Logo podemos podar a árvore neste nível, donde obtemos que todos os ramos da árvore essencial são finitos. Contradição! ♥



## 4 MÉTODO DE NEWTON

Neste capítulo apresentaremos o Método de Newton, um algoritmo usado para parametrizar a equação de uma curva algébrica. Se uma curva está dada por  $f(x, y) = 0$ , o algoritmo permite encontrar uma série  $y = y(x)$  com expoentes racionais tal que  $f(x, y(x)) = 0$ . Para tanto, na [Seção 4.1](#) definimos o polígono de Newton, que será a ferramenta utilizada no desenvolvimento deste algoritmo.

A construção desta série é realizada através de mudanças de variáveis semelhantes aos blow ups vistos no [Capítulo 3](#). Porém, neste algoritmo é a inclinação do primeiro lado do polígono de Newton que indicará qual mudança deve ser feita. Na [Seção 4.2](#) apresentamos formalmente o algoritmo e demonstramos que com um número finito de iterações obtemos uma parametrização para a curva.

Finalmente, na [Seção 4.3](#) veremos que a redução do expoente de contato após blow-up pode ser observada através da inclinação do primeiro lado do polígono de Newton da curva resultante em cada etapa do processo de redução de singularidades.

Neste capítulo nos baseamos nas notas “*Complex curve singularities: a biased introduction*”, de Bernard Teissier [[Teissier 2007](#)].

### 4.1 POLÍGONO DE NEWTON

Seja  $C = \{f(x, y) = 0\}$  uma curva irredutível. Escreva

$$f(x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} a_{i, j} x^i y^j.$$

**Definição 4.1.1.** *Considere no plano  $(i, j)$  o conjunto  $N(f)$  dos pares  $(i, j)$  tais que  $a_{i, j} \neq 0$ . Este subconjunto do primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$  é chamado Nuvem de Newton de  $f(x, y)$ .*

**Definição 4.1.2.** *O Polígono de Newton é a fronteira do fecho convexo de  $N(f)$ .*

**Observação 3.** O fecho convexo de um conjunto  $X$  pode ser definido como o menor conjunto convexo contendo  $X$ , ou ainda a interseção de todos os conjuntos convexos contendo  $X$ .

Podemos então entender o Polígono de Newton como um polígono com dois lados infinitos, um horizontal e um vertical (possivelmente distintos dos

eixos coordenados). Nos exemplos abaixo ilustramos o Polígono de Newton de curvas algébricas no caso em que os lados infinitos coincidem com os eixos coordenados e no caso em que os lados infinitos não coincidem com os eixos coordenados.

**Exemplo 8.** Consideremos a curva algébrica

$$C = \{y^4 + xy^2 + x^2y + x^4 = 0\}$$

cuja nuvem de Newton é  $N(f) = \{(0, 4); (1, 2); (2, 1); (4, 0)\}$  então seu Polígono de Newton, tem os dois lados infinitos coincidindo com os eixos coordenados como pode ser visto na figura abaixo:

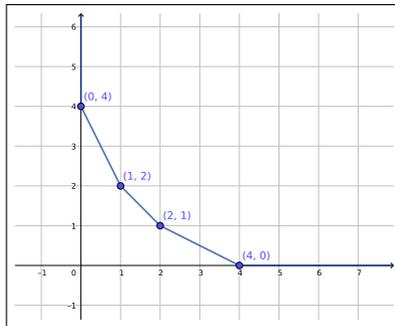


Figura 13 – Polígono de Newton de  $C$

**Exemplo 9.** Consideremos a curva algébrica

$$C = \{xy^4 + x^2y^2 + x^3y = 0\}$$

cuja nuvem de pontos é  $N(f) = \{(1, 4); (2, 2); (3, 1)\}$  então seu Polígono de Newton tem os dois lados infinitos paralelos aos eixos coordenados como pode ser visto na figura abaixo:

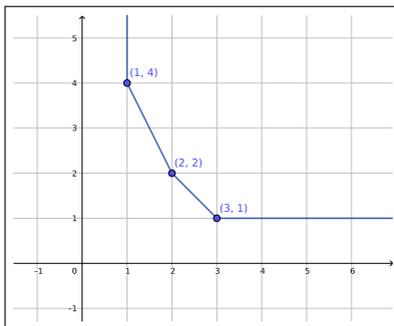


Figura 14 – Polígono de Newton

Observe que sempre podemos considerar que o Polígono de Newton possui dois lados infinitos sobre os eixos coordenados. Vamos aproveitar a curva  $C = \{xy^4 + x^2y^2 + x^3y = 0\}$  para ilustrar esta situação.

Como  $f(0, y) = 0$  podemos escrever

$$f(x, y) = x(y^4 + xy^2 + x^2y) = xf_1(x, y).$$

Assim temos  $f_1(x, y) = y^4 + xy^2 + x^2y$ , logo  $f_1(0, y) = y^4$  e  $f_1(x, 0) = 0$ . Portanto  $N(f_1) = \{(0, 4); (1, 2); (2, 1)\}$  e o Polígono de Newton de  $f_1$  possui um lado infinito sobre o eixo  $x$ , como vemos na figura abaixo:

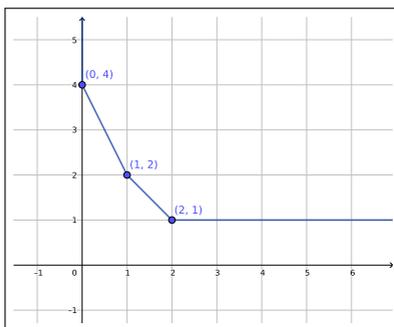


Figura 15 – Polígono de Newton da curva  $f_1$

Como  $f_1(x, 0) = 0$  podemos escrever

$$f_1(x, y) = y(y^3 + xy + x^2) = yf_2(x, y).$$

Agora temos  $f_2(x, y) = y^3 + xy + x^2$ , logo  $f_2(0, y) = y^3$  e  $f_2(x, 0) = x^2$ . Então

$N(f_2) = \{(0, 3); (1, 1); (2, 0)\}$  e o Polígono de Newton possui dois lados infinitos sobre os eixos, como mostra a figura:

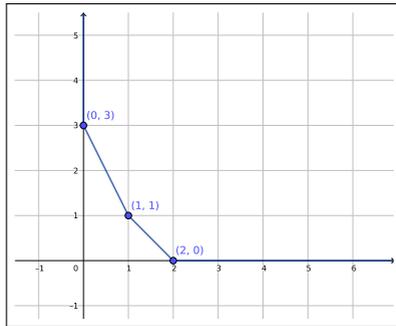


Figura 16 – Polígono de Newton da curva  $f_2$

□

Sejam  $(i_\alpha, j_\alpha)$  e  $(i_\beta, j_\beta)$  dois pares em um mesmo lado finito do Polígono de Newton. Este lado tem equação

$$L_{\alpha,\beta} = \{i + v_{\alpha,\beta}j = \mu(v_{\alpha,\beta})\} .$$

O coeficiente angular de  $L_{\alpha,\beta}$  é  $\frac{-1}{v_{\alpha,\beta}}$  e dizemos que  $v_{\alpha,\beta}$  é a *inclinação* de  $L_{\alpha,\beta}$ .

Defina, para  $(i, j) \in N(f)$ ,

$$\mu = \min_{\alpha,\beta} \{i + v_{\alpha,\beta}j\} = \min_{\alpha,\beta} \{\mu(v_{\alpha,\beta})\} . \quad (4.1)$$

Seja  $v$  a inclinação da reta que “realiza”  $\mu$ . Temos então que  $L_v = \{i + vj = \mu\}$  é o lado do polígono de Newton com menor coeficiente angular  $\frac{-1}{v}$ ; dizemos que  $L_v$  é o *primeiro lado do Polígono de Newton*. A interseção de  $L_v$  com o eixo  $i$  é o par  $(\mu, 0)$ ;  $\mu$  é chamado *abscissa minimal*. A seguinte figura ilustra esta situação.

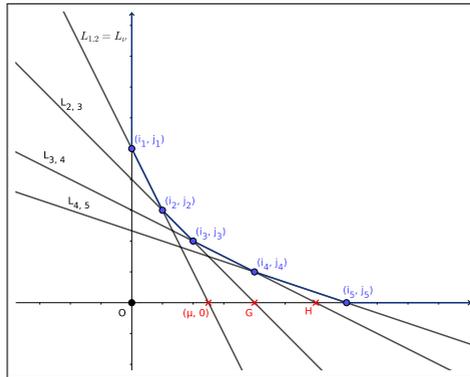


Figura 17 – Representação da definição de  $L_v$

O resultado abaixo segue imediatamente da definição de  $\mu$ , mas como ele será usado mais à frente, colocamos aqui sua demonstração.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $v$  a inclinação do primeiro lado do Polígono de Newton. Para qualquer par  $(i_\alpha, j_\alpha) \in N(f)$  temos*

$$i_\alpha + vj_\alpha \geq \mu .$$

**Demonstração:** Basta observar que, para cada  $(i_\alpha, j_\alpha) \in N(f)$  o valor  $i_\alpha + vj_\alpha$  corresponde à abscissa da reta de inclinação  $v$  passando por  $(i_\alpha, j_\alpha)$ . Como  $\mu$  é a abscissa minimal, o resultado segue. ■

## 4.2 ALGORITMO DE NEWTON

Passamos agora a descrever o procedimento para encontrar a série  $y(x)$ . Antes de começar, vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 10.** Seja  $f(x, y) = 2x^4 + x^2y + 4xy^2$ . Observe que  $f(0, y) = 0$  e, portanto, podemos escrever

$$f(x, y) = xf'(x, y) = x(2x^3 + xy + 4y^2).$$

Veja agora que  $f'(0, y) = 4y^2 \neq 0$ ; escreva  $f'(0, y) = y^2g(y)$ . Neste exemplo,  $g(y)$  é uma função não nula constante; em particular temos  $g(0) \neq 0$ .

**Exemplo 11.** Seja  $f(x, y) = 7x^2y^{10} + 6x^2y^8 + x^4y^6 + 2x^6y^4 - 3x^{10}y^2$ . Como  $f(0, y) = 0$ , podemos escrever

$$f(x, y) = x^2(7y^{10} + 6y^8 + x^2y^6 + 2x^4y^4 - 3x^8y^2) = x^2f'(x, y).$$

Então  $f'(0, y) = 7y^{10} + 6y^8 \neq 0$ . Podemos ainda escrever  $f'(0, y) = y^8(7y^2 + 6) = y^8g(y)$ , com  $g(0) \neq 0$ .

Seja agora  $f(x, y)$  polinômio. A primeira coisa que podemos supor é que  $f(0, y) \neq 0$ . De fato, o caso  $f(0, y) = 0$  não nos interessa. Como visto nos exemplos, isto implica apenas que  $f(x, y) = x^d f'(x, y)$  para algum  $d$  natural. Isto significa que a curva  $x = 0$  é uma componente irredutível da curva  $C$ ; como  $x = 0$  pode ser parametrizada por  $x = 0, y = t$ , este caso está resolvido. Portanto podemos supor  $f(0, y) \neq 0$  e conseqüentemente podemos escrever

$$f(0, y) = y^n g(y),$$

onde  $n$  é um número natural e  $g(0) \neq 0$ .

A demonstração da existência de uma série  $y = y(x)$  é feita por indução em  $n$ .

Se  $n = 1$  temos  $f(0, y) = yg(y)$  com  $g(0) \neq 0$ . Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = g(y) + yg'(y)$$

e, portanto,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = g(0) \neq 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe um único  $y(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  tal que  $y(0) = 0$  e  $f(x, y(x)) = 0$ .

Se  $n > 1$ , logo percebemos que não se pode esperar encontrar uma série de potências em  $x$  com expoentes inteiros. A ideia é então procurar soluções com expoentes fracionários, isto é, séries de potências em  $x^{1/m}$  para algum

inteiro  $m$ :  $\phi(x^{1/m}) \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  tal que  $f(x, \phi(x^{1/m})) = 0$ .

Mais precisamente, buscamos soluções da forma

$$y = x^\nu(c_0 + \phi_0(x^{1/m}))$$

com  $c_0 \neq 0$ ,  $\nu \in \mathbb{Q}_+$ ,  $\phi_0$  sem termo constante.

Escrevendo

$$f(x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} a_{i, j} x^i y^j \quad (4.2)$$

e substituindo  $y = x^\nu(c_0 + \phi_0(x^{1/m}))$  obtemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i, j} a_{i, j} x^i (x^\nu(c_0 + \phi_0(x^{1/m})))^j \\ &= \sum_{i, j} a_{i, j} x^i x^{\nu j} (c_0 + \phi_0(x^{1/m}))^j \\ &= \sum_{i, j} a_{i, j} x^{i+\nu j} (c_0 + \phi_0(x^{1/m}))^j. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que existem  $\nu$ ,  $c_0 \neq 0$  e  $\phi_0(x^{1/m})$  tal que  $f(x, y(x^{1/m})) = 0$ . Em particular, os termos de menor ordem em  $x$  devem ser 0.

Tome  $\mu$  a constante definida na seção anterior (isto é, a abscissa minimal). Então  $\mu \leq i + \nu j$  para todo  $(i, j) \in N(f)$ , e

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i, j} a_{i, j} x^{i+\nu j} (c_0 + \phi_0(x^{1/m}))^j \\ &= \sum_{i, j} a_{i, j} x^{i+\nu j} c_0^j + a_{i, j} x^{i+\nu j} \phi_0(\dots) \\ &= x^\mu \left( \sum_{i+\nu j=\mu} a_{i, j} c_0^j + \sum_{i+\nu j>\mu} x^{i+\nu j-\mu} h(x^{1/m}) \right). \end{aligned}$$

Assim  $c_0$  deve ser raiz do polinômio

$$P(z) = \sum_{i+\nu j=\mu} a_{i, j} z^j. \quad (4.3)$$

Note que  $P(z)$  possui mais de um termo, pois  $a_{i, j}$  são os coeficientes de  $f(x, y)$  correspondentes aos pares  $(i, j)$  que se encontram no primeiro lado do Polígono de Newton de  $f$ . Portanto  $P(z)$  possui ao menos uma raiz  $c_0$  não nula.

Como na seção anterior, seja  $\nu$  a inclinação do primeiro lado de Polígono de Newton. Escreva  $\nu = \frac{l}{h}$ . Façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x &= x_1^h \\ y &= x_1^l (c_0 + y_1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo em  $f(x, y) = \sum a_{i,j} x^i y^j$  obtemos:

$$f(x_1^h, x_1^l (c_0 + y_1)) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_1^{hi} (x_1^l (c_0 + y_1))^j \quad (4.5)$$

$$= \sum_{i,j} a_{i,j} x_1^{hi} x_1^{lj} (c_0 + y_1)^j \quad (4.6)$$

$$= \sum_{i,j} a_{i,j} x_1^{hi+l j} (c_0 + y_1)^j. \quad (4.7)$$

Agora veja que, pelo [Lema 4.1.1](#),  $hi + lj = h(i + \frac{l}{h}j) = h(i + \nu j) \geq h\mu$ . Portanto

$$\begin{aligned} f(x_1^h, x_1^l (c_0 + y_1)) &= \sum_{hi+l j \geq h\mu} a_{i,j} x_1^{hi+l j} (c_0 + y_1)^j \\ &= x_1^{h\mu} \sum_{hi+l j \geq h\mu} a_{i,j} x_1^{hi+l j - h\mu} (c_0 + y_1)^j \\ &= x_1^{h\mu} f_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1) &= \sum_{hi+l j \geq h\mu} a_{i,j} x_1^{hi+l j - h\mu} (c_0 + y_1)^j \quad (4.8) \\ &= \sum_{hi+l j = h\mu} a_{i,j} (c_0 + y_1)^j + \sum_{hi+l j > h\mu} a_{i,j} x_1^{hi+l j - h\mu} (c_0 + y_1)^j. \end{aligned}$$

Chame  $J = \{j \mid i + \nu j = \mu\}$ . Temos então que

$$f_1(0, y_1) = \sum_{j \in J} a_{i,j} (c_0 + y_1)^j. \quad (4.9)$$

**Lema 4.2.1.** *A ordem de  $y_1$  em  $f_1(0, y_1)$  é  $n$  se e somente se  $c_0$  for raiz de ordem  $n$  de  $P(z) = \sum_{i+\nu j=\mu} a_{i,j} z^j$  dado em (4.3).*

**Demonstração:** De fato, pela expansão de Taylor temos que

$$f_1(0, y_1) = \sum_{j \in J} \frac{1}{j!} P^{(j)}(c_0) y_1^j$$

onde  $P^{(m)}(c_0)$  denota a derivada de ordem  $m$  de  $P$  calculada em  $c_0$ . ■

**Lema 4.2.2.** *Se  $c_0$  é raiz de ordem  $n$  de  $P(z)$  então  $v$  é um inteiro.*

**Demonstração:** De fato, se  $c_0$  é raiz de ordem  $n$  de  $P(z)$  devemos ter

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{j \in J} a_{i,j} z^j \\ &= a_{0,n} (z - c_0)^n \\ &= a_{0,n} z^n - a_{0,n} n c_0 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_{0,n} c_0^n. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Isto implica que  $j = n - 1$  é um expoente que corresponde a um par no primeiro lado do Polígono de Newton de  $f$ , já que o coeficiente de  $z^{n-1}$ ,  $(-1)a_{0,n}c_0$ , é não nulo. Logo existe um  $\alpha$  inteiro tal que o par  $(\alpha, n - 1)$  está no primeiro lado do Polígono de Newton de  $f$ . Portanto o coeficiente angular do primeiro lado é

$$\frac{n - 1 - n}{\alpha - 0} = \frac{-1}{\alpha} = \frac{-1}{v}$$

o que implica  $v = \alpha$  inteiro. ■

**Lema 4.2.3.** *O primeiro lado do Polígono de Newton de  $f$  é o único lado finito que encontra o eixo  $i$  no ponto  $(vn, 0)$ .*

**Demonstração:** Por causa da igualdade (4.10),  $j \in J$  assume todos os valores inteiros entre 0 e  $n$ . Quando  $j = n$  temos  $i = 0$  e, portanto,  $vj = \mu$  implica  $\mu = vn$ . Quando  $j = 0$ , obtemos  $i = \mu = vn$ . Temos assim que a abscissa minimal de fato está no Polígono de Newton. ■

Dessa maneira o monômio  $x^{vn}$  tem coeficiente não nulo  $(-1)^n a_{0,n} c_0^n$  e podemos escrever

$$f(x, y) = a_{0,n} (y - c_0 x^v)^n + \sum_{i+v > \mu} a_{i,j} x^i y^j. \tag{4.11}$$

Agora, com a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}x &= x_1^h \\y &= y_1 + c_0 x_1^v.\end{aligned}$$

e substituindo em  $f(x, y)$  obtemos

$$\begin{aligned}f_1(x_1, y_1) &= f(x_1, y_1 + c_0 x_1^v) \\&= a_{0,n}(y_1 + c_0 x_1^v - c_0 x_1^v)^n + \sum_{i+vj>\mu} a_{i,j} x_1^i (y_1 + c_0 x_1^v)^j \\&= a_{0,n} y_1^n + \sum_{i+vj>\mu} a_{i,j} x_1^i (y_1 + c_0 x_1^v)^j \\&= a_{0,n} y_1^n + \sum_{i+vj>\mu} a_{i,j} x_1^i (y_1^j + c_0 x_1^v y_1^{j-1} + \dots + c_0^{j-1} x_1^{v(j-1)} y_1 + c_0^j x_1^{vj}) \\&= a_{0,n} y_1^n + \sum_{i+vj>\mu} a_{i,j} (x_1^i y_1^j + c_0 x_1^{i+v} y_1^{j-1} + \dots + c_0^{j-1} x_1^{i+v(j-1)} y_1 + c_0^j x_1^{i+vj})\end{aligned}$$

**Lema 4.2.4.** *Se a ordem de  $f_1(0, y_1)$  é  $n$ , o Polígono de Newton de  $f_1$  ainda contém o ponto  $(0, n)$  e a inclinação  $v_1$  de seu primeiro lado é estritamente maior que  $v$ .*

**Demonstração:** Basta observar que os monômios acima são da forma  $x_1^{i+vl} y_1^{j-l}$ ,  $0 \leq l \leq j$ ; pelo [Lema 4.1.1](#) temos  $i + vj \geq \mu$  e, portanto,

$$i + vl + v(j-l) = i + vj > \mu.$$

Isto significa que  $(0, n) \in N(f_1)$  e a inclinação  $v_1$  do primeiro lado do Polígono de Newton de  $f_1$  é estritamente maior que  $v$ . ■

A ideia agora é realizar uma sequência de mudanças de variáveis do tipo (4.4) para fazer com que a ordem baixe; por hipótese de indução, encontramos parametrização para a transformada de  $f$  e retornamos a  $f$  usando mudanças de variáveis apropriadas.

Procedemos da seguinte forma:

Se a ordem de  $y_1$  em  $f_1(0, y_1)$  for menor que  $n$ , por indução, existem  $m_1 \in \mathbb{Z}$  e  $\phi_1(x_1^{1/m_1}) \in \mathbb{C}[[x_1^{1/m_1}]]$  tais que:

$$f_1(x_1, y_1) = f_1(x_1, \phi_1(x_1^{1/m_1})) = 0.$$

Pela definição de  $f_1(x_1, y_1)$  temos que

$$f(x_1^h, x_1^l(c_0 + \phi_1(x_1^{1/m_1}))) = 0.$$

Colocamos  $m = m_1 h$  e  $\phi(x_1^{1/m}) = x_1^{1/h}(c_0 + \phi_1(x_1^{1/m})) \in \mathbb{C}[[x_1^{1/m}]]$ . Temos assim  $f(x, \phi(x_1^{1/m})) = 0$  e o resultado segue.

Se a ordem de  $f_1(0, y_1)$  permanece igual a  $n$ , pelo [Lema 4.2.4](#) obtemos um inteiro  $\nu_1$  tal que  $\nu_1 > \nu$ . Ponha  $\nu = \nu_0$ .

Repetimos o mesmo procedimento para  $f_1(x_1, y_1)$ , usando a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 + c_1 x_2^{\nu_1} \end{aligned}$$

e encontramos  $f_2(x_2, y_2)$ . Se novamente a ordem de  $y_2$  em  $f_2(0, y_2)$  permanece igual a  $n$ , e encontramos inteiro  $\nu_2$ , inclinação do primeiro lado do Polígono de Newton de  $f_2(x_2, y_2)$ , tal que  $\nu_2 > \nu_1$ . Observe que o algoritmo iterado equivale a aplicar a  $f(x, y)$  a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &= x_2 \\ y &= y_2 + c_0 x_2^{\nu_0} + c_1 x_2^{\nu_1}. \end{aligned}$$

Temos então duas possibilidades:

1. Depois de um número finito de iterações do algoritmo obtemos uma função  $f_p(x_p, y_p)$  tal que a ordem de  $y_p$  em  $f(0, y_p)$  é menor que  $n$ . Por hipótese de indução encontramos  $\phi_p(x^{1/m_p}) \in \mathbb{C}[[x^{1/m_p}]]$  tal que  $f_p(x, \phi_p(x^{1/m_p})) = 0$ , e como consequência

$$y = c_0 x^{\nu_0} + c_1 x^{\nu_1} + \dots + c_{p-1} x^{\nu_{p-1}} + \phi_p(x^{1/m_p})$$

é tal que  $f(x, y(x)) = 0$ .

2. A ordem permanece indefinidamente igual a  $n$ . Neste caso, é possível encontrar uma série *formal*  $y(x)$  tal que  $f(x, y(x)) = 0$ . Colocamos aqui a demonstração mas não trataremos este caso no futuro. Temos uma sequência crescente infinita de inteiros  $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_p < \dots$  e uma série formal

$$\phi_\infty(x) = c_0 x^{\nu_0} + c_1 x^{\nu_1} + \dots + c_p x^{\nu_p} + \dots \in \mathbb{C}[[x]]$$

tal que o Polígono de Newton de uma função  $f_\infty(x_\infty, y_\infty)$ , obtida de

$f(x, y)$  pela mudança de variáveis

$$\begin{aligned}x &= x_\infty \\y &= y_\infty + \phi_\infty(x),\end{aligned}$$

possui o primeiro lado contendo o ponto  $(0, n)$  e com inclinação 0. Isso significa que  $f_\infty(x_\infty, y_\infty)$  é divisível por  $y_\infty^n$ ,

$$f_\infty(x_\infty, y_\infty) = y_\infty^n g(x_\infty, y_\infty),$$

o que implica que a ordem de  $g(0, y_\infty)$  é zero, isto é,  $g(0, 0) \neq 0$ . Obtemos assim  $y = \phi_\infty(x)$  tal que para cada inteiro  $p$ ,

$$f(x, c_0x^{v_0} + c_1x^{v_1} + \dots + c_px^{v_p}) = x^{v_0+v_1+\dots+v_p} f_p(x, 0).$$

Pelo Teorema da expansão de Taylor,  $f(x, \phi(x)) = 0$ .

Vejam alguns exemplos para esclarecer o procedimento anterior.

**Exemplo 12.** Consideremos a curva algébrica dada por

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y + xy^2 + y^3.$$

Neste caso  $N(f) = \{(4, 0); (2, 1); (1, 2); (0, 3)\}$  e  $f(0, y) = y^3 = f_1(0, y)g(y)$ . Logo  $n = 3$ .

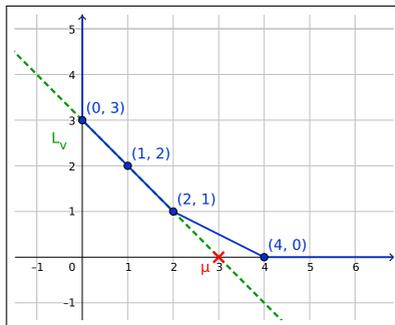


Figura 18 – Polígono de Newton da curva  $f(x, y)$

Note que os pontos  $(0, 3)$ ,  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  estão sobre a mesma reta. Portanto o polígono tem dois lados finitos, com equações dadas por  $L_\nu = \{i + \nu j = \mu_\nu\}$ . Passemos ao cálculo de  $\nu$  e  $\mu_\nu$ .

- Lado determinado por  $\{(4, 0), (2, 1)\}$ : o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = \frac{-1}{2}$ ,

logo  $\nu = 2$  e, portanto,  $L_2 = \{j + \frac{1}{2}i = 2\} = \{i + 2j = 4\}$ . Assim  $\nu = 2$ ,  $\mu_2 = 4$ .

- Lado determinado por  $\{(2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$ : o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = -1$ , logo  $\nu = 1$  e, portanto,  $L_1 = \{i + j = 3\}$ . Assim  $\nu = 1$ ,  $\mu_1 = 3$ .

Assim temos  $\mu = \min\{\mu_2, \mu_1\} = 3$ , o primeiro lado do Polígono de Newton é a reta  $L_1$  com inclinação  $\nu = 1$ . Escrevendo  $\nu = \frac{l}{h}$  obtemos  $l = 1$ ,  $h = 1$ .

Logo a mudança de coordenadas apropriada é

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= x_1(c_0 + y_1).\end{aligned}$$

Substituindo em  $f(x, y)$  obtemos

$$\begin{aligned}f(x_1, x_1(c_0 + y_1)) &= x_1^4 - 2x_1^2(x_1(c_0 + y_1)) + x_1(x_1(c_0 + y_1))^2 + (x_1(c_0 + y_1))^3 \\&= x_1^4 - 2x_1^3(c_0 + y_1) + x_1^3(c_0 + y_1)^2 + x_1^3(c_0 + y_1)^3\end{aligned}$$

Para todo par  $(i, j)$  no polígono, pelo [Lema 4.1.1](#) temos  $i + j \geq 3h$ . Assim colocamos em evidência  $x_1^3 = x_1^{\mu h}$ :

$$\begin{aligned}f(x_1, x_1(c_0 + y_1)) &= \sum a_{i,j} x_1^{hi+l_j} (c_0 + y_1)^j \\&= x_1^4 - 2x_1^3(c_0 + y_1) + x_1^3(c_0 + y_1)^2 + x_1^3(c_0 + y_1)^3 \\&= x_1^3(x_1 - 2(c_0 + y_1) + (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^3) \\&= x_1^{\mu h} \sum a_{i,j} x_1^{ih+jl-\mu h} (c_0 + y_1)^j \\&= x_1^{\mu h} f_1(x_1, y_1).\end{aligned}$$

Obtemos

$$f_1(x_1, y_1) = x_1 - 2(c_0 + y_1) + (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^3$$

e portanto

$$\begin{aligned}f_1(0, y_1) &= -2(c_0 + y_1) + (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^3 \\&= \sum_{i+\nu j=\mu} a_{ij} (c_0 + y_1)^j \\&= \sum_{i+j=3} a_{ij} (c_0 + y_1)^j.\end{aligned}$$

Expandindo, obtemos

$$f_1(0, y_1) = (-2c_0 + c_0^2 + c_0^3) + y_1(-2 + 2c_0 + 3c_0^2) + y_1^2(1 + 3c_0) + y_1^3.$$

Observe que o termo livre de  $f_1(0, y_1)$ ,  $-2c_0 + c_0^2 + c_0^3$ , é nulo, uma vez que  $c_0$  é escolhido como raiz do polinômio

$$P(z) = \sum_{i+v=j=\mu} a_{ij}z^j = \sum_{i+j=3} a_{ij}z^j = -2z + z^2 + z^3.$$

Pelo [Lema 4.2.1](#), a ordem de  $y_1$  será maior que 1 se e somente se  $c_0$  é raiz múltipla de  $P(z)$ . Porém  $P(z)$  possui 3 raízes de multiplicidade um:  $-2, 0$  e  $1$ . Portanto a ordem de  $y_1$  em  $f_1(0, y_1)$  é um.

Queremos que  $c_0 \neq 0$  seja uma raiz de ordem 3 de  $P(z)$ , para isso, forçamos  $P(z) = (z - c_0)^3$ .

Assim considerando  $c_0 = 1$  teremos

$$P(z) = (z - 1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

portanto como o  $1^\circ$  lado do polígono de Newton de  $f$  tem equação  $i + j = 3$  decorre que os pontos  $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$  estão no  $1^\circ$  lado.

Temos portanto,

$$\tilde{f}(x, y) = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - x^4 = (y - x)^3 - x^4$$

logo,  $N(\tilde{f}) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 0)\}$  e, portanto, o polígono de Newton de  $\tilde{f}$  tem apenas um lado finito cuja inclinação é  $\nu = 1$ . Fazemos agora a mudança de variáveis, para  $\nu = 1$ , e  $c_0 = 1$

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + x_1 \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_1(x_1, y_1) = \tilde{f}(x_1, y_1 + x_1) = (y_1 + x_1 - x_1)^3 - x_1^4 = y_1^3 - x_1^4$$

Assim a ordem de  $f_1(0, y_1)$  permanece 3. Porém como  $N(\tilde{f}_1) = \{(0, 3); (4, 0)\}$ , temos  $\nu_1 = \frac{4}{3} > 1 = \nu$ . Neste caso, fazendo  $\tilde{f}_1(x_1, y_1) = 0$  podemos determinar explicitamente

$$y_1(x_1) = x_1^{\frac{4}{3}};$$

logo

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x = x(x^{\frac{1}{3}} + 1) = x^\nu(c_0 + \phi(x^{\frac{1}{n}}))$$

e  $\tilde{f}(x, y(x)) = 0$ .

Por outro lado se considerarmos  $c_0 = -2$  teremos

$$P(z) = (z+2)^3 = z^3 + 6z^2 + 12z + 8$$

portanto como o 1º lado do polígono de Newton de  $f$  tem equação  $i + j = 3$  decorre que os pontos  $\{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$  estão no 1º lado.

Temos portanto,

$$\tilde{f}(x, y) = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 - x^4 = (y+2x)^3 - x^4$$

logo,  $N(\tilde{f}) = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 0)\}$  e, portanto, o polígono de Newton de  $\tilde{f}$  tem apenas um lado finito cuja inclinação é  $\nu = 1$ . Fazemos agora a mudança de variáveis, para  $\nu = 1$ , e  $c_0 = -2$

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= y_1 - 2x_1\end{aligned}$$

$$\tilde{f}_1(x_1, y_1) = \tilde{f}(x_1, y_1 - 2x_1) = (y_1 - 2x_1 + 2x_1)^3 - x_1^4 = y_1^3 - x_1^4$$

Assim a ordem de  $f_1(0, y_1)$  permanece 3. Porém como  $N(\tilde{f}_1) = \{(0, 3); (4, 0)\}$ , temos  $\nu_1 = \frac{4}{3} > 1 = \nu$ . Neste caso, fazendo  $\tilde{f}_1(x_1, y_1) = 0$  podemos determinar explicitamente

$$y_1(x_1) = x_1^{\frac{4}{3}};$$

logo

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x = x(x^{\frac{1}{3}} + 1) = x^\nu(c_0 + \phi(x^{\frac{1}{n}}))$$

e  $\tilde{f}(x, y(x)) = 0$ .

Percebemos com este exemplo que independentemente da escolha de  $c_0 \neq 0$  entre as raízes de  $P(z)$  para a construção de um polinômio que tenha  $c_0$  como raiz de ordem  $n$ , a parametrização obtida para  $f$  é a mesma.

□

**Exemplo 13.** Considere a curva algébrica dada pela equação:

$$f(x, y) = x^4 + x^2y + xy^2 + y^4.$$

Temos então  $N(f) = \{(4, 0); (2, 1); (1, 2); (0, 4)\}$  e seu Polígono de Newton está representado na figura abaixo.

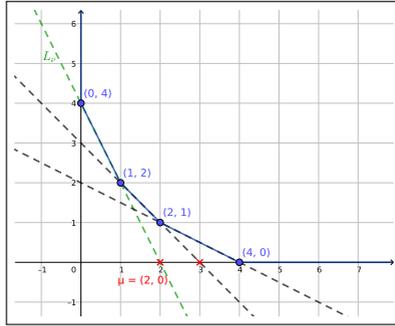


Figura 19 – Polígono de Newton da curva  $f(x,y)$

Este polígono tem três lados finitos, com equações dadas por  $L_\nu = \{i + \nu j = \mu_\nu\}$ . Passemos ao cálculo de  $\nu$  e  $\mu_\nu$ .

- Lado determinado por  $\{(4,0), (2,1)\}$ :  
o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = \frac{-1}{2}$ , logo  $\nu = 2$  e, portanto,

$$L_2 = \{j + \frac{1}{2}i = 2\} = \{i + 2j = 4\}.$$

Assim  $\nu = 2$ ,  $\mu_2 = 4$ .

- Lado determinado por  $\{(2,1), (1,2)\}$ :  
o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = -1$ , logo  $\nu = 1$  e, portanto,

$$L_1 = \{i + j = 3\}.$$

Assim  $\nu = 1$ ,  $\mu_1 = 3$ .

- Lado determinado por  $\{(1,2), (0,4)\}$ :  
o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = -2$ , logo  $\nu = \frac{1}{2}$  e, portanto,

$$L_{\frac{1}{2}} = \{j + 2i = 4\} = \{i + \frac{1}{2}j = 2\}.$$

Assim  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\mu_{\frac{1}{2}} = 2$ .

Concluimos então que o primeiro lado do Polígono de Newton é a reta  $L_{\frac{1}{2}}$  cuja inclinação é  $\nu = \frac{1}{2}$ . Então:

$$\mu = \min\{i + \nu j\} = \min\{\mu_\nu\} = 2$$

Como  $\nu = \frac{l}{h}$  obtemos que  $l = 1$  e  $h = 2$ . Logo a mudança de coordenadas apropriada neste caso é:

$$\begin{aligned}x &= x_1^2 \\y &= x_1(c_0 + y_1)\end{aligned}$$

Aplicando então esta mudança em  $f(x, y) = x^4 + x^2y + xy^2 + y^4$  obtemos:

$$\begin{aligned}f(x_1^2, x_1(c_0 + y_1)) &= (x_1^2)^4 + (x_1^2)^2(x_1(c_0 + y_1)) + \\&\quad (x_1^2)(x_1(c_0 + y_1))^2 + (x_1(c_0 + y_1))^4 \\&= x_1^8 + x_1^5(c_0 + y_1) + x_1^4(c_0 + y_1)^2 + x_1^4(c_0 + y_1)^4\end{aligned}$$

Para todo par  $(i, j)$  no polígono de Newton, pelo [Lema 4.1.1](#) temos  $i + \frac{1}{2}j = 2h$ . Assim colocamos em evidência  $x_1^{\mu h} = x_1^4$ :

$$\begin{aligned}f_1(x_1^2, x_1(c_0 + y_1)) &= x_1^8 + x_1^5(c_0 + y_1) + x_1^4(c_0 + y_1)^2 + x_1^4(c_0 + y_1)^4 \\&= x_1^4(x_1^4 + x_1(c_0 + y_1) + (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^4)\end{aligned}$$

Obtemos,

$$f_1(x_1, y_1) = x_1^4 + x_1(c_0 + y_1) + (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^4$$

portanto,

$$\begin{aligned}f_1(0, y_1) &= (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^4 \\&= \sum_{i+\frac{1}{2}j=\mu} a_{ij}(c_0 + y_1)^j \\&= \sum_{i+\frac{1}{2}j=2} a_{ij}(c_0 + y_1)^j\end{aligned}$$

Expandindo,

$$\begin{aligned}f_1(0, y_1) &= (c_0 + y_1)^2 + (c_0 + y_1)^4 \\&= (c_0^2 + 2c_0y_1 + y_1^2) + (c_0^4 + 4c_0^3y_1 + 6c_0^2y_1^2 + 4c_0y_1^3 + y_1^4) \\&= (c_0^2 + c_0^4) + y_1(2c_0 + 4c_0^3) + y_1^2(1 + 6c_0^2) + y_1^3(4c_0) + y_1^4\end{aligned}$$

Observe que o termo livre de  $f_1(0, y_1)$ ,  $c_0^2 + c_0^4$ , é nulo, uma vez que  $c_0$

é escolhido como raiz do polinômio

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{i+\nu j=\mu} a_{ij}z^j = \sum_{i+\frac{1}{2}j=2} a_{ij}z^j \\ &= a_{1,2}z^2 + a_{0,4}z^4 \\ &= z^2 + z^4 \end{aligned}$$

Cujas raízes são dadas por:

$$z^2 + z^4 = 0 \Rightarrow z^2(1 + z^2) = 0 \Rightarrow z = 0; z = \sqrt{-1} = \{i, -i\}$$

Pelo [Lema 4.2.1](#), a ordem de  $y_1$  será maior que 1 se e somente se  $c_0$  é raiz múltipla de  $P(z)$ . Porém  $P(z)$  possui 4 raízes, sendo elas  $i, -i$  de multiplicidade um e 0 de multiplicidade dois. □

**Exemplo 14.** Seja  $f(x, y) = x^9 + x^2y^3 + y^4$ .

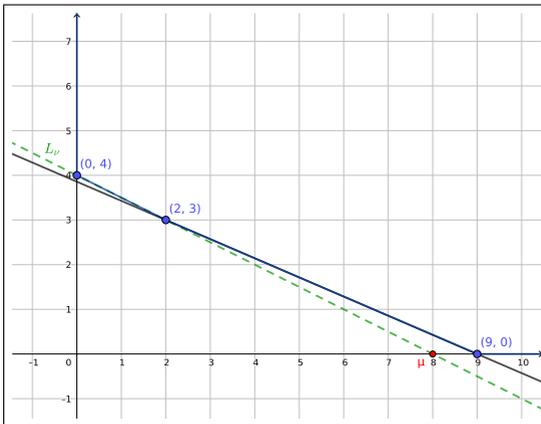


Figura 20 – Polígono de Newton da curva  $f(x, y)$

Assim temos  $N(f) = \{(0, 4); (2, 3); (9, 0)\}$ ,  $f(0, y) = y^4$ ,  $n = 4$ . Como pode ser visto na figura acima o Polígono de Newton de  $f$  tem dois lados finitos:

- Lado determinado por  $\{(0, 4), (2, 3)\}$ :  
o coeficiente angular é  $\frac{-1}{\nu} = \frac{-1}{2}$ , logo  $\nu = 2$  e, portanto,

$$L_2 = \{j + \frac{1}{2}i = 4\} = \{i + 2j = 8\}.$$

Assim  $\mu_2 = 8$ .

- Lado determinado por  $\{(2, 3), (9, 0)\}$ :

o coeficiente angular é  $\frac{-1}{v} = \frac{-3}{7}$ , logo  $v = \frac{7}{3}$  e, portanto,

$$L_{\frac{7}{3}} = \{i + \frac{7}{3}j = 9\}.$$

Assim  $\mu_{\frac{7}{3}} = 9$ .

Assim temos que:  $\mu = \min\{\mu_2, \mu_{\frac{7}{3}}\} = 8$ ; e o primeiro lado do Polígono de Newton é a reta  $L_2$  com inclinação  $v = 2$ . Escrevendo  $v = \frac{l}{h}$  obtemos  $l = 2$ ,  $h = 1$ .

Logo a mudança de coordenadas apropriada é

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= x_1^2(c_0 + y_1).\end{aligned}$$

Substituindo em  $f(x, y)$  obtemos

$$\begin{aligned}f(x_1, x_1^2(c_0 + y_1)) &= x_1^9 + x_1^8(c_0 + y_1)^3 + x_1^8(c_0 + y_1)^4 \\&= x_1^8(x_1 + (c_0 + y_1)^3 + (c_0 + y_1)^4) \\&= x_1^8 f_1(x_1, y_1).\end{aligned}$$

Assim obtemos  $P(z) = z^3 + z^4$  cujas raízes são 0 e  $-1$ . Tomamos então  $c_0 = -1$ ; como  $-1$  é raiz de ordem 1 de  $P(z)$ , obtemos que  $f_1(0, y_1)$  tem ordem  $n_1 = 1$ , e aqui podemos usar a hipótese de indução.

Porém agora considere

$$\tilde{f}(x, y) = x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4 - x^9.$$

Temos  $f(0, y) = y^4$ , isto é,  $n = 4$ . Além disso,

$$N(\tilde{f}) = \{(0, 4); (2; 3); (4, 2); (1, 6); (8, 0); (9, 0)\}$$

e, portanto, o Polígono de Newton de  $\tilde{f}$  tem apenas um lado finito, cuja inclinação é  $v = 2$ .

Observe que  $\tilde{P}(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 = (z + 1)^4$ , isto é,  $c_0 = -1$  é raiz de ordem 4 de  $\tilde{P}(z)$ . Como  $\tilde{f}(x, y) = (x^2 + y)^4 - x^9$ , usamos a mudança de

variável

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= y_1 - x_1^2\end{aligned}$$

e obtemos  $\tilde{f}_1(x_1, y_1) = y_1^4 - x_1^9$ . Assim a ordem de  $f_1(0, y_1)$  permanece 4. Porém como  $N(\tilde{f}_1) = \{(0, 4); (9, 0)\}$ , temos  $\nu_1 = \frac{9}{4} > \nu$ . Neste caso, fazendo  $\tilde{f}_1(x_1, y_1) = 0$  podemos determinar explicitamente

$$y_1(x_1) = x_1^{\frac{9}{4}};$$

logo

$$y = x^{\frac{9}{4}} - x^2 = x^2(x^{\frac{1}{4}} - 1) = x^\nu(c_0 + \phi(x^{\frac{1}{n}}))$$

e  $\tilde{f}(x, y(x)) = 0$ .

□

### 4.3 EXPOENTE DE CONTATO E POLÍGONO DE NEWTON

O resultado abaixo apresenta a relação entre o expoente de contato maximal de uma curva ([Definição 3.1.5](#)) com a inclinação do primeiro lado do seu polígono de Newton.

**Lema 4.3.1.** *Seja  $C$  curva analítica dada por  $f(x, y) = 0$ . Suponha que as coordenadas  $(x, y)$  são escolhidas de forma que  $\{x = 0\}$  não é tangente a  $C$  e  $\{y = 0\}$  é o cone tangente de  $C$ . Então o expoente de contato maximal  $\delta$  de  $C$  é a inclinação  $\nu$  do primeiro lado do polígono de Newton de  $f(x, y)$ .*

**Demonstração:** Pela definição de  $\delta$  é suficiente demonstrar o resultado para uma curva irredutível  $C$ .

Como visto anteriormente, podemos supor sem perda de generalidade que  $f(0, y) \neq 0$ . Fazendo isso temos que  $f(0, y) = y^n g(y)$  com  $g(0) \neq 0$ . Como por hipótese  $CT(C) = \{y = 0\}$ , obtemos que o ponto  $(0, n)$  está no 1º lado do polígono de Newton de  $C$ , e que  $m(C; 0) = n$ .

Pelo [Lema 4.2.3](#) o ponto  $(\nu n, 0)$  está no 1º lado do polígono de Newton. Assim o monômio  $x^{\nu n}$  tem coeficiente não nulo e, portanto,  $\mu = \nu n$  é o menor expoente de  $x$  na equação de  $f(x, y)$ . Sendo  $CT(C) = \{y = 0\}$ , decorre que  $i(C, CT(C)) = m(f(x, 0)) = \nu n$ . Portanto, o expoente de contato maximal será

$$\delta = \frac{i(C, CT(C))}{m(C; 0)} = \frac{\nu n}{n} = \nu.$$

Por outro lado como os pontos  $(0, n)$  e  $(vn, 0)$  estão no primeiro lado do polígono de Newton de  $C$ , seu coeficiente angular é por definição  $\frac{-n}{vn} = \frac{-1}{v}$ . Logo a inclinação do 1º lado do polígono de Newton é  $v$ . ■

**Exemplo 15.** Seja  $C$  a curva dada por  $f(x, y) = y^m - x^n$ , com  $m < n$ . Então  $CT(C) = \{y = 0\}$  e  $C$  satisfaz as condições do [Lema 4.3.1](#).

Note que, neste caso, a inclinação do primeiro lado do polígono de Newton, será  $v = \frac{n}{m}$ . Por outro lado,  $i(C, CT(C)) = n$  e  $m(C; 0) = m$ , logo

$$\delta = \frac{i(C, CT(C))}{m(C; 0)} = \frac{n}{m} = v,$$

satisfazendo assim o [Lema 4.3.1](#).

Como consequência imediata do [Lema 4.3.1](#) temos que se o polígono de Newton de  $C$  possui apenas dois lados então a curva está desingularizada, pois neste caso seu expoente de contato maximal será  $\delta = 0$ .

**Exemplo 16.** Voltamos agora ao [Exemplo 7](#). Antes de explosão, temos  $C = \{f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}$  e, portanto, a nuvem de  $f$  é  $N(f) = \{(0, 2); (3, 0)\}$ . Recorde que o expoente de contato é  $\delta_0 = \frac{3}{2}$ . O coeficiente angular do primeiro (e único, neste caso) lado do polígono de Newton é  $\frac{-2}{3}$ ; portanto a inclinação  $v$  é

$$\frac{-1}{v} = \frac{-2}{3} \text{ o que implica } v = \frac{3}{2} = \delta_0.$$

Após a primeira explosão, obtemos  $C_1 = \{f_1(x_1, y_1) = y_1^2 - x_1 = 0\}$ ; como o cone tangente de  $C_1$  é  $\{x_1 = 0\}$ , as condições do [Lema 4.3.1](#) não são satisfeitas. Porém podemos consertar a situação visualizando a curva  $C_1$  fora da redução de singularidades de  $C$ . Fazendo a mudança de variáveis  $x_1 = y'$ ,  $y_1 = x'$  obtemos  $C'_1 = \{f'(x', y') = x'^2 - y' = 0\}$ ; agora o cone tangente é  $\{y' = 0\}$  e as hipóteses do [Lema 4.3.1](#) são satisfeitas. Assim, temos  $\delta' = 2$  e  $N(f') = \{(0, 1); (2, 0)\}$ . Portanto o coeficiente angular do primeiro lado do polígono é  $\frac{-1}{2}$  e

$$\frac{-1}{v} = \frac{-1}{2} \text{ o que implica } v = 2 = \delta'.$$

Após as outras duas explosões, novamente as condições do [Lema 4.3.1](#) não são satisfeitas.

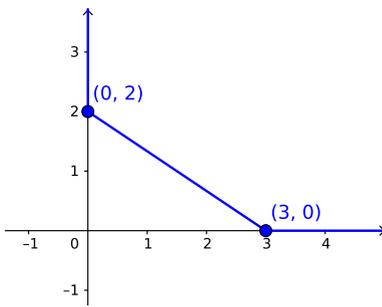
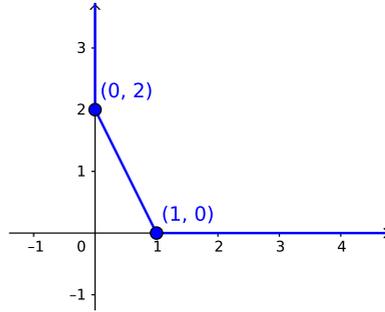
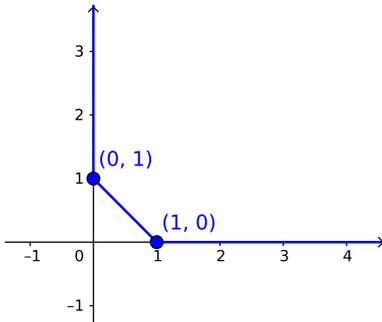
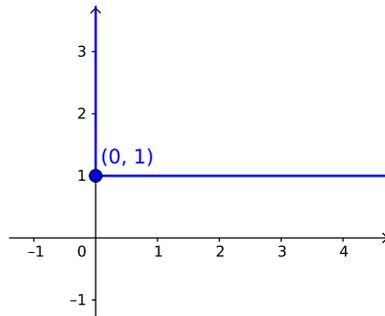
(a) Da curva original  $C_0$ (b) Da curva  $C_1 = \{y_1^2 - x_1 = 0\}$ (c) Da curva  $C_2 = \{y_2 - x_2 = 0\}$ (d) Da curva  $C_3 = \{y_3 - 1 = 0\}$ 

Figura 21 – Polígono de Newton da curva  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$

## 5 EXEMPLOS

Este capítulo será dedicado a apresentar exemplos da redução de singularidades de curvas, bem como os polígonos de Newton de cada curva em cada etapa da sua redução de singularidades.

Por simplicidade de notação, neste capítulo definiremos a curva a ser dessingularizada por  $C_0 = \{f_0(x, y) = 0\}$ . Como mostrado anteriormente, a curva estará dessingularizada após um número finito de blow-ups, e a cada blow-up aplicado à curva obtemos um divisor e um transformado estrito referente àquela explosão. Para cada blow-up temos duas cartas: por exemplo, o primeiro blow-up, da origem de  $\mathbb{C}^2$ , será descrito na primeira carta usando as variáveis  $(x, t_1)$ , e a mudança de variáveis é dada por  $y = t_1 x$ ; e na segunda carta será descrito usando as variáveis  $(u_1, y)$  e a mudança é dada por  $x = u_1 y$ . Se o centro do segundo blow-up é a origem de  $(x, t_1)$ , usaremos as mudanças  $t_1 = t_2 x$  para a primeira carta e  $x = u_2 t_1$  para a segunda carta; e assim sucessivamente. O  $k$ -ésimo blow-up será denotado  $\pi_k$  e o divisor (pré-imagem do centro de  $\pi_k$ ) será denotado  $E_k$ . Os transformados estritos de  $C_0$ ,  $f_0$  serão denotados  $C_k$ ,  $f_k$  respectivamente.

**Exemplo 17.** Considere a curva  $C_0 = \{y - \lambda x = 0\}$  com  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$  e seja  $E_0 = \{xy = 0\}$ . Apesar de ser não singular, vemos que  $C_0$  não está em cruzamentos normais com  $E_0$ ; para consertar esta situação, faremos o blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$ . Como o cone tangente de  $C_0$  é ela própria, seu transformado estrito aparecerá nas duas cartas resultantes da explosão.

Na primeira carta do blow-up temos  $y = tx$ , logo  $\pi_1(x, t) = (x, tx)$  e portanto

$$f_0 \circ \pi_1(x, t) = f_0(x, tx) = tx - \lambda x = x(t - \lambda) = 0.$$

Assim  $E_1 = \{x = 0\}$  e  $C_1 = \{t = \lambda\}$ .

Já na segunda carta do blow-up temos  $x = uy$  e

$$f_0 \circ \pi_1(u, y) = f_0(uy, y) = y - \lambda uy = y(1 - \lambda u) = 0,$$

portanto  $E_1 = \{y = 0\}$  e  $C_1 = \{u = \frac{1}{\lambda}\}$ .

Como  $t = \frac{1}{u}$  o transformado estrito de  $C_0$  está bem definido.

As seguintes figuras representam geometricamente a explosão da origem: no item (a) temos a curva antes de blow-up, e no item (b) a curva resultante do blow-up.

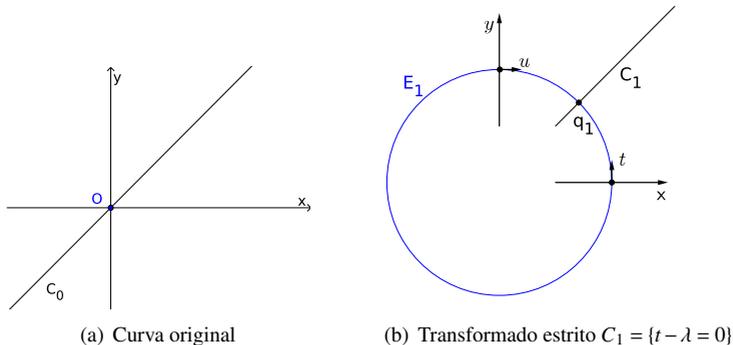


Figura 22 – Blow-up da curva  $C_0 = \{y - \lambda x = 0\}$

Após explosão temos um único ponto  $q_1 \in C_1 \cap E_1$ , que é um ponto onde  $C_1$  e  $E_1$  possuem cruzamentos normais.

Neste caso, os polígonos de Newton antes e após explosão são:

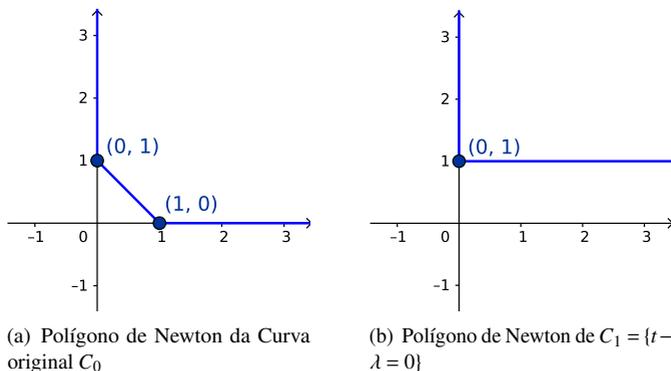


Figura 23 – Polígono de Newton do blow-up da curva  $C_0 = \{y - \lambda x = 0\}$

Aqui, observamos que se no exemplo anterior tivéssemos  $E_0 = \{x = 0\}$  ou  $E_0 = \{y = 0\}$ , não seria necessário realizar o blow-up da origem para colocar  $C_0$  e  $E_0$  em cruzamentos normais; uma simples mudança linear de variáveis bastaria. Isto enfatiza a importância de considerar o divisor durante o processo de redução de singularidades. Observamos também que o blow-up realizado no Exemplo 17 não teve como objetivo dessingularizar a curva (pois esta já era não singular); sua função foi retificar curva e divisor, isto é, colocar curva e divisor a cruzamentos normais. Em termos de Polígono de Newton,

isto corresponde à nuvem de Newton possuir apenas um vértice. Em outras palavras, a curva foi *monomializada*.

**Exemplo 18.** Considere a curva  $C_0 = \{x - y^2 = 0\}$  e seja  $E_0 = \{x = 0\}$ . Novamente,  $C_0$  é não singular porém não está a cruzamentos normais com  $E_0$ . O cone tangente de  $C_0$  é dado por  $\{x = 0\}$  = eixo  $y$ , o que implica que o transformado estrieto da curva aparece na segunda carta da explosão; portanto é suficiente olharmos apenas para esta carta.

Para o **primeiro** blow-up, na segunda carta temos  $x = u_1y$ , consequentemente  $\pi_0(u_1, y) = (u_1y, y) = (x, y)$  e assim,

$$f_0 \circ \pi_1(u_1, y) = f_0(u_1y, y) = u_1y - y^2 = y(u_1 - y) = 0.$$

Portanto  $E_1 = \{y = 0\}$  e  $C_1 = \{u_1 - y = 0\}$ . Obtemos assim, como resultado desta explosão uma curva não singular mas cuja interseção com o divisor total  $E_1 \cup E_0$  não está a cruzamentos normais.

Na origem da carta  $(u_1, y)$  temos a situação descrita no [Exemplo 17](#). Realizando o blow-up deste ponto temos, na primeira carta,  $y = t_2u_1$  e na segunda carta temos  $u_1 = u_2y$ . Observe que a mudança de cartas está dada  $t_2 = \frac{1}{u_2}$ . Desta maneira,

$$C_2 = \{t_2 = 1\} = \{u_2 = 1\}.$$

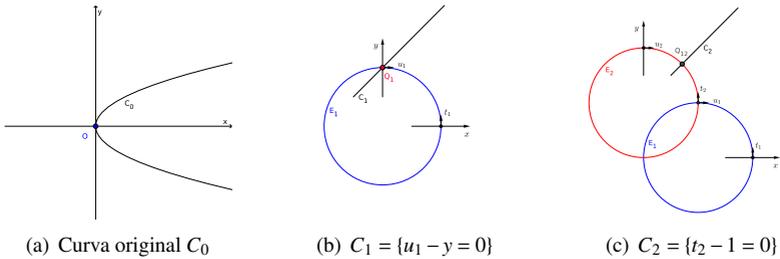


Figura 24 – Blow-up da curva  $C_0 = \{x - y^2 = 0\}$

Agora que concluímos a “dessingularização” desta curva, podemos calcular seus índices, e perceber a redução dos mesmos após cada explosão.

Temos:

- Multiplicidade intrínseca de  $C_0$ :  $\eta_0 = m(f_0; 0) = m(x - y^2) = 1$  ;
- Multiplicidade de interseção de  $C_0$  com seu cone tangente:  
 $I_0 = i(C_0, CT(C_0)) = mult(C_0, \{x = 0\}) = m(f_0(0, y)) = m(-y^2) = 2$  ;

- Exponente de contato maximal:  $\delta_0 = \frac{i(C_0, CT(C_0))}{m(f_0; 0)} = \frac{2}{1} = 2$ .

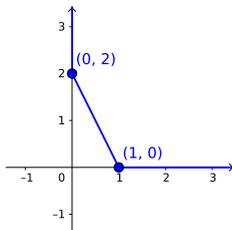
Após a primeira explosão, na carta  $(u_1, y)$  o cone tangente de  $C_1 = \{u_1 - y = 0\}$  é a própria curva. A curva  $C_1$  possui multiplicidade intrínseca

$$\eta_1 = m(f_1; 0) = m(u_1 - y) = 1 = \eta_0,$$

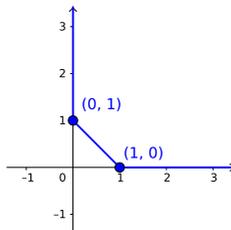
logo pelo [Lema 3.2.2](#) temos que  $I_1 = I_0 - \eta_0 = 2 - 1 = 1$ , e pelo [Corolário 3.2.1](#) decorre que  $\delta_1 = \delta_0 - 1 = 1$ . Como temos multiplicidade intrínseca igual a 1, a curva já esta dessingularizada porém não possui cruzamentos normais com o divisor. O último blow-up é realizado apenas para corrigir esta situação.

Este procedimento possui os seguintes polígonos de Newton:

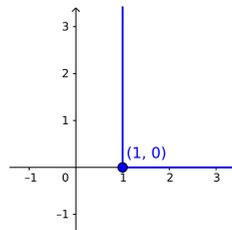
- $f_0(x, y) = x - y^2 \Rightarrow \mathcal{N}(f_0) = \{(1, 0); (0, 2)\}$ ;
- $f_1(u_1, y) = u_1 - y \Rightarrow \mathcal{N}(f_1) = \{(1, 0); (0, 1)\}$ ;
- $f_2(u_1, t_2) = t_2 - 1 \Rightarrow \mathcal{N}(f_2) = \{(1, 0)\}$ .



(a) Curva original  $C_0$



(b)  $C_1 = \{u_1 - y = 0\}$



(c)  $C_2 = \{t_2 - 1 = 0\}$

Figura 25 – Polígono de Newton do blow-up da curva  $C_0 = \{x - y^2 = 0\}$

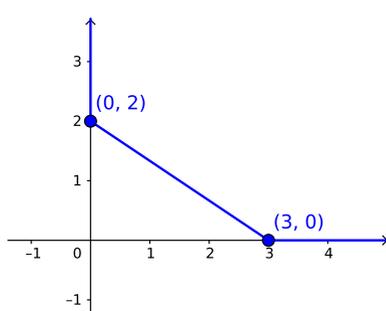
**Exemplo 19.** Voltamos agora para o [Exemplo 7](#), no qual consideramos a curva singular  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . Já realizamos a redução de singularidades desta curva, com a representação geométrica desta redução e o cálculo de todos os índices. Vamos agora, para completar, apresentar os polígonos de Newton deste processo de redução de singularidades.

Lembramos que neste exemplo temos:

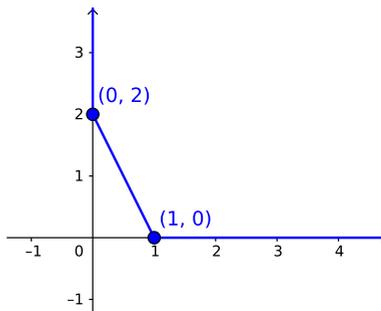
- $f_0(x, y) = y^2 - x^3 \Rightarrow \mathcal{N}(f_0) = \{(0, 2); (3, 0)\}$
- $f_1(x, t_1) = t_1^2 - x \Rightarrow \mathcal{N}(f_1) = \{(0, 2); (1, 0)\}$
- $f_2(u_2, t_1) = t_1 - u_2 \Rightarrow \mathcal{N}(f_2) = \{(0, 1); (1, 0)\}$

$$d) f_3(u_2, t_3) = t_3 - 1 \Rightarrow \mathcal{N}(f_3) = \{(0, 1)\}$$

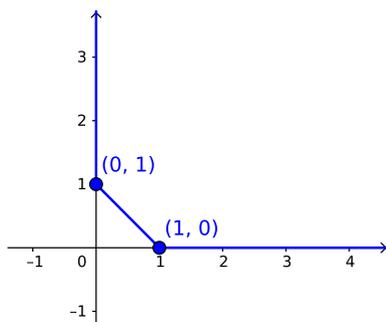
Portanto os respectivos polígonos de Newton são:



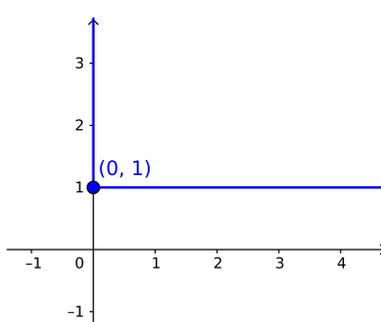
(a) Da curva original  $C_0$



(b) Da curva  $C_1 = \{t_1^2 - x = 0\}$



(c) Da curva  $C_2 = \{t_1 - u_2 = 0\}$



(d) Da curva  $C_3 = \{t_3 - 1 = 0\}$

Figura 26 – Polígonos de Newton do blow-up da curva  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$

**Exemplo 20.** Consideremos agora a curva singular  $C_0 = \{y^2 - x^3 = 0\}$ . Temos que  $CT(C_0) = \{y = 0\}$ , portanto o transformado estrito de  $C_0$  intersecta o divisor excepcional apenas na origem primeira carta da primeira explosão. De fato, na segunda carta temos a mudança de variáveis  $x = u_1 y$ , o que implica

$$f_0 \circ \pi_1(u_1, y) = f_0(u_1 y, y) = y^2 - u_1^3 y^3 = y^2(1 - u_1^3 y) = 0.$$

Assim  $E_0 = \{y = 0\}$  e  $C_1 = \{1 - u_1^3 y^3 = 0\}$ , portanto  $C_1$  não passa pela origem de  $(u_1, y)$ .

Na primeira carta a mudança de variáveis é dada por  $y = t_1 x$ , logo

$$f_0 \circ \pi_1(x, t_1) = f_0(x, t_1 x) = x^2 t_1^2 - x^5 = x^2(t_1^2 - x^3) = 0 .$$

Assim temos  $E_1 = \{x = 0\}$  e  $C_1 = \{t_1^2 - x^3 = 0\}$ . Observe que na origem de  $(x, t_1)$  temos a situação descrita no [Exemplo 19](#).

Faremos agora o **segundo** blow-up, cujo centro é a origem da carta  $(x, t_1)$ . Sendo  $CT(C_1) = \{t_1 = 0\}$ , pelo mesmo argumento anterior, buscaremos o transformado estrito de  $C_1$  apenas na primeira carta (pois será uma unidade na origem da segunda carta). Nesta carta temos a mudança de variáveis  $t_1 = t_2 x$ . Obtemos assim

$$f_1 \circ \pi_2(x, t_2) = f_1(x, t_2 x) = x^2 t_2^2 - x^3 = x^2(t_2^2 - x) = 0 ,$$

logo  $E_2 = \{x = 0\}$  e  $C_2 = \{t_2^2 - x = 0\}$ . Observe que aqui temos a situação descrita no [Exemplo 18](#).

O **terceiro** blow-up é realizado na origem de  $(x, t_2)$  porém agora utilizamos a segunda carta, já que o cone tangente de  $C_2$  é dado por  $CT(C_2) = \{x = 0\}$ . Nesta carta temos a mudança de variáveis  $x = u_3 t_2$  e assim obtemos

$$f_2 \circ \pi_3(u_3, t_2) = f_2(u_3 t_2, t_2) = t_2^2 - u_3 t_2 = t_2(t_2 - u_3) = 0 .$$

Portanto  $E_3 = \{t_2 = 0\}$ , e  $C_3 = \{t_2 - u_3 = 0\}$ . Aqui temos a situação do [Exemplo 17](#):  $C_3$  é uma curva não singular porém não possui cruzamento normal com o divisor (de fato a interseção de  $C_3$  com o divisor é um ponto de tipo esquina).

A **quarta** e última explosão é realizada para corrigir isto. Como o cone tangente de  $C_3$  é a própria curva, podemos tomar qualquer carta para realizar a explosão da origem de  $(u_3, t_2)$ . Na primeira carta temos  $t_2 = u_3 t_4$  e assim obtemos

$$f_3 \circ \pi_4(u_3, t_4) = f_3(u_3, u_3 t_4) = u_3 t_4 - u_3 = u_3(t_4 - 1) = 0 ,$$

e portanto  $E_4 = \{u_3 = 0\}$ ,  $C_4 = \{t_4 - 1 = 0\}$ . Aqui encerramos a dessingularização da curva  $C_0$ , que está representada esquematicamente na figura abaixo.

$$f_3 \circ \pi(u_4, t_2) = f_3(u_4 t_2, t_2) = t_2 - u_4 t_2 = t_2(1 - u_4) = 0 ,$$

donde obtemos  $E_4 = \{t_2 = 0\}$  e  $L_4 = \{1 - u_4 = 0\}$ .

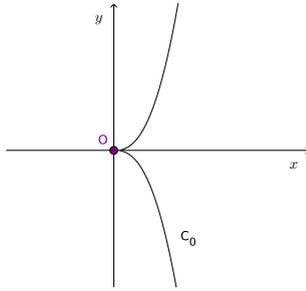
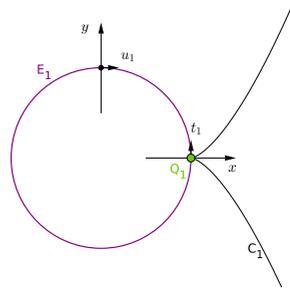
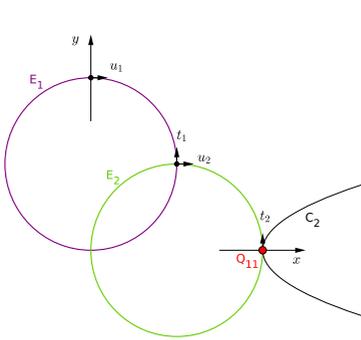
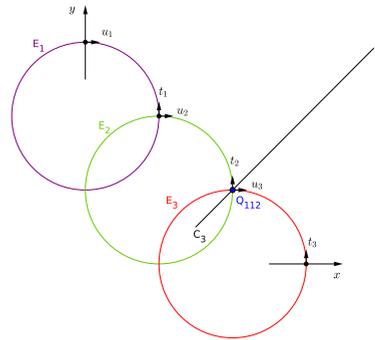
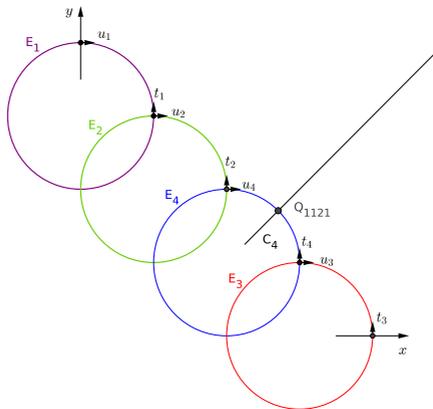
(a) Curva original  $C_0$ (b)  $C_1 = \{t_1^2 - x^3 = 0\}$ (c)  $C_2 = \{t_2^2 - x = 0\}$ (d)  $C_3 = \{t_2 - u_3 = 0\}$ (e)  $C_4 = \{t_4 - 1 = 0\}$ 

Figura 27 – Redução de singularidades da curva  $C_0 = \{y^2 - x^5 = 0\}$

Passamos agora para a análise dos índices. Para a curva  $C_0 = \{f_0(x, y) = y^2 - x^5\}$ , cujo cone tangente é  $CT(C_0) = \{y = 0\}$ , temos

$$\begin{aligned}\eta_0 &= m(f_0; 0) = m(y^2 - x^5) = 2 ; \\ I_0 &= i(C_0, CT(C_0)) = 5 ; \\ \delta_0 &= \frac{i(C_0, CT(C_0))}{m(f_0; 0)} = \frac{5}{2} .\end{aligned}$$

Após a primeira explosão temos  $C_1 = \{f_1(x, t_1) = t_1^2 - x^3\}$  e também  $CT(C_1) = \{t_1 = 0\}$ , logo

$$\begin{aligned}\eta_1 &= m(f_1; 0) = m(t_1^2 - x^3) = 2 ; \\ I_1 &= i(C_1, CT(C_1)) = 3 = I_0 - \eta_0 ; \\ \delta_1 &= \delta_0 - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} = \frac{I_1}{\eta_1} .\end{aligned}$$

Note que  $\eta_1 = \eta_0$ , logo  $I_1$  satisfaz o [Lema 3.2.2](#) e  $\delta_1$  o [Corolário 3.2.1](#).

Após a segunda explosão temos  $C_2 = \{f_2(x, t_2) = t_2^2 - x\}$ , logo  $CT(C_2) = \{x = 0\}$  e  $\eta_2 = m(f_2, 0) = m(t_2^2 - x) = 1$ . Portanto a curva está dessingularizada, assim os próximos blow-ups serão realizados para melhor posicionar a curva.

Após a terceira explosão,  $C_3 = \{f_3(u_3, t_2) = t_2 - u_3\} = CT(C_3)$  e a multiplicidade intrínseca dada por:

$$\eta_3 = m(f_3) = m(y_3 - x_3) = 1 = \eta_2 .$$

Aqui já obtemos a multiplicidade intrínseca igual a 1; o último blow-up é realizado apenas para deixar a curva em cruzamentos normais com o divisor.

Este processo de redução de singularidades tem os seguintes polígonos de Newton:

- (a)  $f(x, y) = y^2 - x^5 \Rightarrow \mathcal{N}(f_0) = \{(0, 2); (5, 0)\}$ ;
- (b)  $f_1(x, t_1) = t_1^2 - x^3 \Rightarrow \mathcal{N}(f_1) = \{(0, 2); (3, 0)\}$ ;
- (c)  $f_2(x, t_2) = t_2^2 - x \Rightarrow \mathcal{N}(f_2) = \{(0, 2); (1, 0)\}$ ;
- (d)  $f_3(u_3, t_2) = t_2 - u_3 \Rightarrow \mathcal{N}(f_3) = \{(0, 1); (1, 0)\}$ ;
- (e)  $f_4(u_3, t_4) = t_4 - 1 \Rightarrow \mathcal{N}(f_4) = \{(0, 1)\}$ .

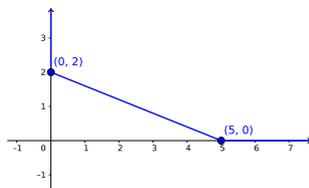
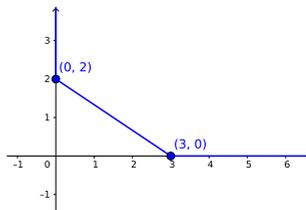
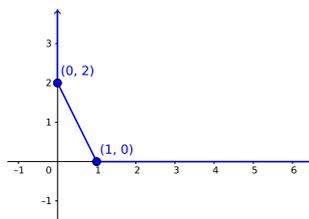
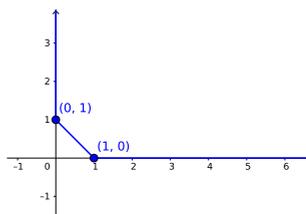
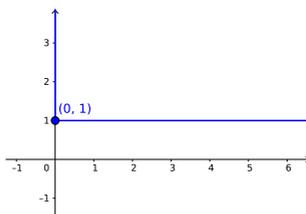
(a) Curva original  $C_0$ (b)  $C_1 = \{t_1^2 - x^3 = 0\}$ (c)  $C_2 = \{t_2^2 - x = 0\}$ (d)  $C_3 = \{t_3 - u_3 = 0\}$ (e)  $C_4 = \{t_4 - 1 = 0\}$ 

Figura 28 – Polígonos de Newton da redução da curva  $C_0 = \{y^2 - x^5 = 0\}$

**Exemplo 21.** Consideremos agora a curva  $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$ . Temos  $CT(C_0) = \{y = 0\}$ , logo pelo argumento usado anteriormente, buscaremos o transformado estrito apenas na primeira carta do blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$ . A mudança de variáveis é dada por  $y = t_1 x$  e assim

$$f_0 \circ \pi_1(x, t_1) = f_0(x, t_1 x) = x^3 t_1^3 - x^7 = x^3(t_1^3 - x^4) = 0.$$

Obtemos assim,  $E_1 = \{x = 0\}$ , e  $C_1 = \{t_1^3 - x^4 = 0\}$ .

Faremos o **segundo** blow-up, com centro na origem da carta  $(x, t_1)$ . Como  $CT(C_1) = \{t_1 = 0\}$ , faremos o blow-up na primeira carta. Tomamos então a mudança de variáveis  $t_1 = t_2 x$  e assim

$$f_1 \circ \pi_2(x, t_2) = f_1(x, t_2 x) = x^3 t_2^3 - x^4 = x^3(t_2^3 - x) = 0.$$

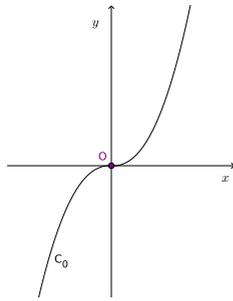
Obtemos portanto  $E_2 = \{x = 0\}$  e  $C_2 = \{t_2^3 - x = 0\}$ . A curva  $C_2$  é não singular na origem de  $(x, t_2)$ , porém não possui cruzamentos normais com o divisor. Por isso prosseguimos com a redução de singularidades.

O **terceiro** blow-up tem como centro a origem de  $(x, t_2)$ ; porém como  $CT(C_2) = \{x = 0\}$ , usaremos a segunda carta. Tomamos a mudança de variáveis  $x = u_3 t_2$  e então

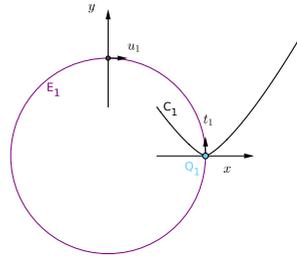
$$f_2 \circ \pi_3(u_3, t_2) = f_2(u_3 t_2, t_2) = t_2^3 - u_3 t_2 = t_2(t_2^2 - u_3) = 0,$$

onde resulta  $E_3 = \{t_2 = 0\}$  e  $C_3 = \{t_2^2 - u_3 = 0\}$ .

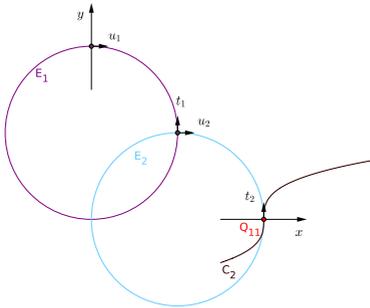
Aqui encontramos novamente a situação do [Exemplo 18](#). O final de processo de redução de singularidades se dá exatamente como no [Exemplo 18](#), e está esquematicamente representada na figura abaixo.



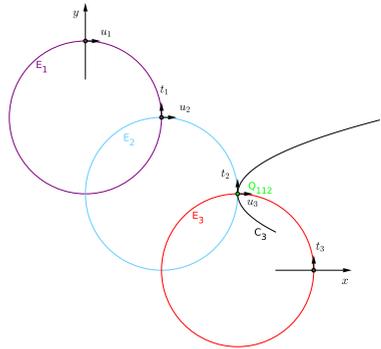
(a) Curva original  $C_0$



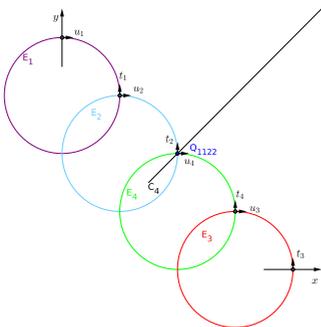
(b)  $C_1 = \{t_1^3 - x^4 = 0\}$



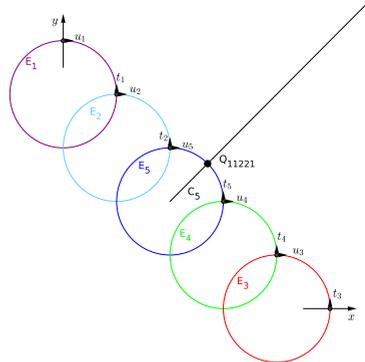
(c)  $C_2 = \{t_2^3 - x = 0\}$



(d)  $C_3 = \{t_2^2 - u_3 = 0\}$



(e)  $C_4 = \{t_2 - u_4 = 0\}$



(f)  $C_5 = \{t_5 - 1 = 0\} = \{1 - u_5 = 0\}$

Figura 29 – Redução de singularidades da curva  $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$

Para completar este exemplo, passamos para a análise das multiplicidades. Para  $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$  e  $CT(f_0) = \{y = 0\}$  temos

$$\begin{aligned}\eta_0 &= m(f_0, 0) = m(y^3 - x^7) = 3; \\ I_0 &= i(C_0, CT(C_0)) = m(f_0(x, 0)) = m(-x^7) = 7; \\ \delta_0 &= \frac{I_0}{\eta_0} = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Após a primeira explosão, temos  $C_1 = \{t_1^3 - x^4 = 0\}$ ,  $CT(C_1) = \{t_1 = 0\}$  e

$$\begin{aligned}\eta_1 &= m(f_1, 0) = m(t_1^3 - x^4) = 3; \\ I_1 &= i(C_1, CT(C_1)) = m(f_1(x, 0)) = m(-x^4) = 4; \\ \delta_1 &= \frac{I_1}{\eta_1} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Após a segunda explosão,  $C_2 = \{t_2^3 - x = 0\}$  e  $CT(C_2) = \{x = 0\}$ , logo

$$\begin{aligned}\eta_2 &= m(f_2, 0) = m(t_2^3 - x) = 1; \\ I_2 &= i(C_2, CT(C_2)) = m(f_2(0, t_2)) = m(t_2^3) = 3.\end{aligned}$$

Portanto a curva já está dessingularizada, e os próximos blow-ups serão feitos apenas para deixar a curva em cruzamentos normais com o divisor.

Após a terceira explosão obtemos  $C_3 = \{t_2^2 - u_3 = 0\}$  com  $CT(C_3) = \{u_3 = 0\}$ , logo

$$\begin{aligned}\eta_3 &= m(f_3, 0) = m(t_2^2 - u_3) = 1; \\ I_3 &= i(C_3, CT(C_3)) = m(f_3(0, t_2)) = m(t_2^2) = 2.\end{aligned}$$

Observamos que após este blow-up ocorreu uma redução na multiplicidade de interseção do transformado da curva com seu cone tangente.

Os demais índices são os mesmos do [Exemplo 18](#).

Para este processo de redução de singularidades temos os seguintes polígonos de Newton:

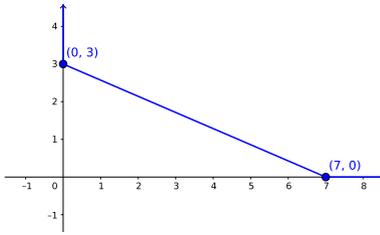
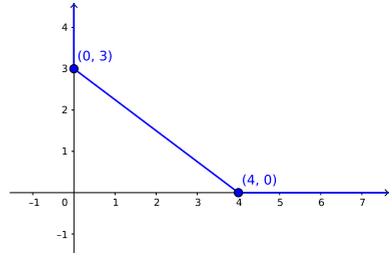
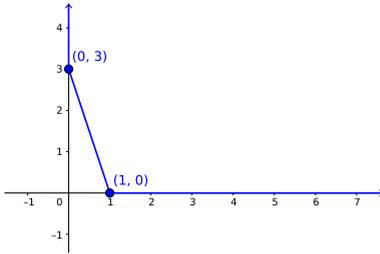
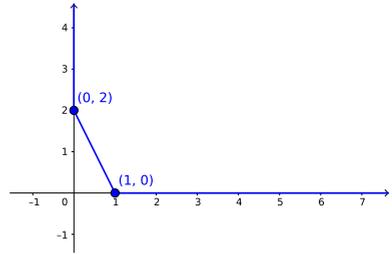
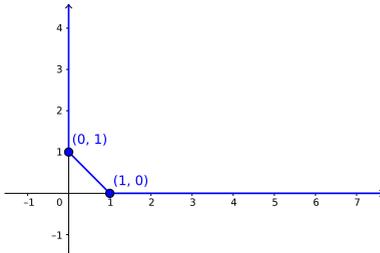
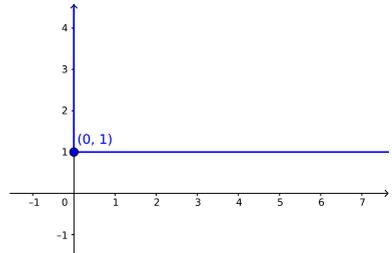
(a) Curva original  $C_0$ (b)  $C_1 = \{y_1^3 - x_1^4 = 0\}$ (c)  $C_2 = \{y_2^3 - x_2 = 0\}$ (d)  $C_3 = \{y_3^2 - x_3 = 0\}$ (e)  $C_4 = \{y_4 - x_4 = 0\}$ (f)  $C_5 = \{y_5 - 1 = 0\} = \{1 - x_5 = 0\}$ 

Figura 30 – Polígonos de Newton da redução da curva  $C_0 = \{y^3 - x^7 = 0\}$

**Exemplo 22.** Neste exemplo veremos a redução de singularidades de uma curva redutível. Considere a curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$ , representada na figura abaixo:

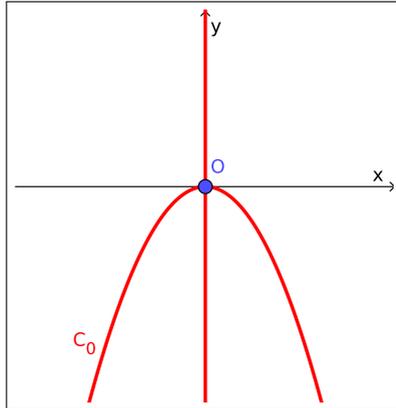


Figura 31 – Curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$

O cone tangente desta curva é  $CT(C_0) = \{xy = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ , o que implica que o transformado estrito da curva aparece nas duas cartas do blow-up da origem de  $\mathbb{C}^2$ .

Na primeira carta temos  $y = t_1x$ , logo

$$f_0 \circ \pi_1(x, t_1) = f_0(x, t_1x) = x^2t_1 + x^3 = x^2(t_1 + x) = 0$$

obtemos portanto  $E_1 = \{x = 0\}$  e  $C_1 = \{x + t_1 = 0\}$ .

Na segunda carta, temos  $x = u_1y$ , logo

$$f_0 \circ \pi_1(u_1, y) = u_1^2y + u_1^3y^3 = u_1y^2(1 + u_1y) .$$

Assim temos  $E_1 = \{y = 0\}$  e  $C_1 = \{u_1(1 + u_1y) = 0\} = \{u_1 = 0\}$ .

Isso significa que após explosão,  $C_0$  foi separada: o transformado estrito  $C_1$  possui dois ramos. Um ramo de  $C_0$  é a curva  $\{u_1 = 0\}$ , que aparece somente na segunda carta; e outro ramo aparece nas duas cartas, com equação  $\{x + t_1 = 0\}$  na primeira carta e  $\{1 + u_1y = 0\}$  na segunda. O resultado desta explosão está representado na abaixo, na qual olhamos localmente cada uma das cartas.

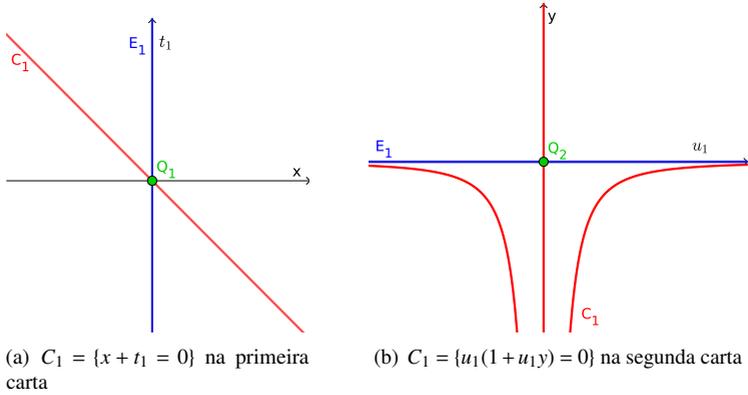


Figura 32 – Resultado do 1º blow-up da curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$

O ramo de  $C_1$  na origem de  $(u_1, y)$  já está dessingularizado e em cruzamentos normais com o divisor. O ramo de  $C_1$  na origem de  $(x, t_1)$  está dessingularizado e também possui cruzamentos normais com o divisor; de fato, basta realizar a mudança de variáveis  $t' = t_1 + x$  e assim obtemos  $C_1 = \{t' = 0\}$ ,  $E_1 = \{x = 0\}$ . Quanto às multiplicidades, temos que a multiplicidade intrínseca de  $C_0$  é 2 e a multiplicidade intrínseca de cada ramo de  $C_1$  é 1.

O polígono de Newton da curva  $C_0$  é:

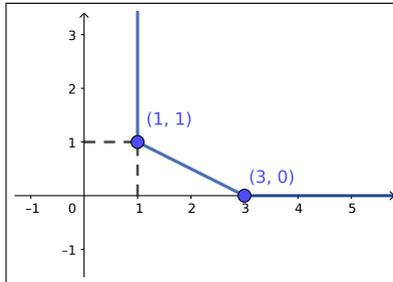


Figura 33 – Polígono de Newton da curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$

Após o primeiro blow-up, como  $C_1$  possui dois ramos temos um polígono de Newton para cada ramo:

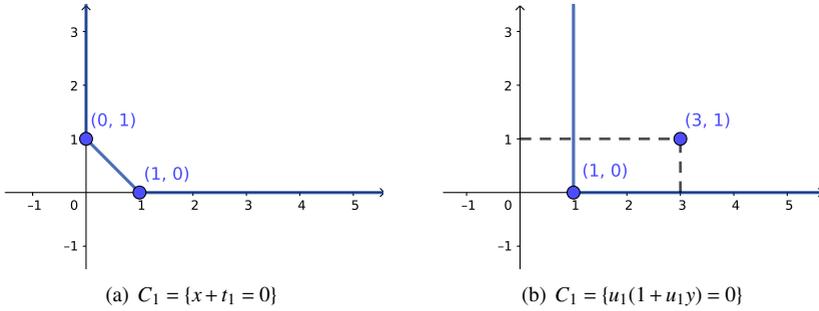


Figura 34 – Polígonos de Newton após blow-up

A redução de singularidades da curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$  pode ser representada através do seguinte grafo:

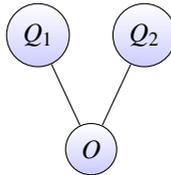


Figura 35 – Grafo do blow-up da curva  $C_0 = \{xy + x^3 = 0\}$

**Exemplo 23.** Consideremos a curva  $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$ . A nuvem de  $C_0$  é  $\mathcal{N}(C_0) = \{(0, 2), (3, 1), (7, 0)\}$ , logo o polígono de Newton desta curva possui dois lados finitos, como pode ser visto na figura abaixo:

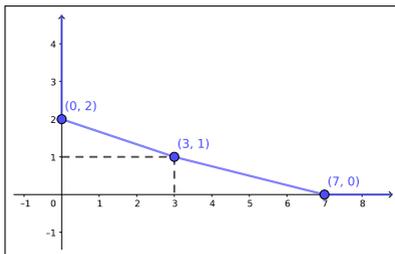


Figura 36 – Polígono de Newton da curva  $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$

Temos  $CT(C_0) = \{y = 0\}$  e portanto

$$\eta_0 = m(f_0, 0) = 2;$$

$$I_0 = i(C_0, CT(C_0)) = m(f_0(x, 0)) = m(x^7) = 7;$$

$$\delta_0 = \frac{I_0}{\eta_0} = \frac{7}{2}.$$

Para o **primeiro** blow-up, basta olharmos na primeira carta  $y = t_1x$ . Assim temos

$$f_0(x, t_1x) = x^2t_1^2 + x^4t_1 + x^7 = x^2(t_1^2 + x^2t_1 + x^5)$$

portanto  $E_1 = \{x = 0\}$  e  $C_1 = \{t_1^2 + x^2t_1 + x^5 = 0\}$ . Temos também que  $\mathcal{N}(C_1) = \{(0, 2), (2, 1), (5, 0)\}$  logo o polígono de Newton de  $C_1$  tem ainda dois lados finitos.

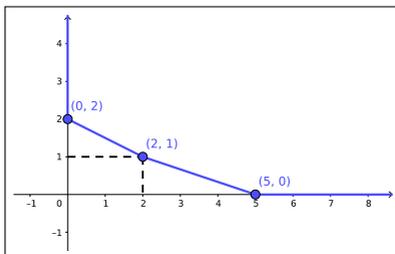


Figura 37 – Polígono de Newton da curva  $C_1 = \{t_1^2 + x^2t_1 + x^5 = 0\}$

Para a  $C_1 = \{t_1^2 + x^2 t_1 + x^5 = 0\}$  temos  $CT(C_1) = \{y_1 = 0\}$ , logo

$$\eta_1 = m(f_1, 0) = 2;$$

$$I_1 = i(C_1, CT(C_1)) = m(f_1(x, 0), 0) = 5;$$

$$\delta_1 = \frac{I_1}{\eta_1} = \frac{5}{2}.$$

Note que  $CT(C_0) = CT(C_1)$ ,  $\eta_0 = \eta_1 = 2$  e  $\delta_0 - \delta_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1$ .

Faremos o **segundo** blow-up com centro a origem de  $(x, t_1)$  e olhando apenas para a primeira carta  $t_1 = t_2 x$ . Assim

$$f_1(x, t_2 x) = x^2 t_2^2 + x^3 t_2 + x^5 = x^2(t_2^2 + x t_2 + x^3)$$

e, portanto,  $E_2 = \{x = 0\}$  e  $C_2 = \{t_2^2 + x t_2 + x^3 = 0\}$ . Temos  $N(C_2) = \{(0, 2), (1, 1), (3, 0)\}$ , logo o polígono de Newton de  $C_2$  tem ainda dois lados finitos.

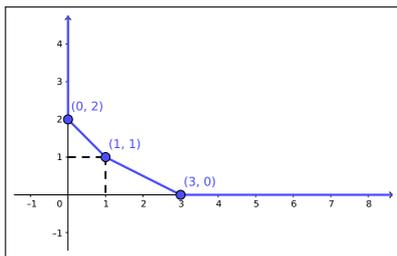


Figura 38 – Polígono de Newton da curva  $C_2 = \{y_2^2 + x_2 y_2 + x_2^3 = 0\}$

Note que o cone tangente de  $C_2$  é composto por duas retas:

$$CT(C_2) = \{t_2^2 + x t_2 = 0\} = \{t_2(t_2 + x) = 0\} = \{t_2 = 0\} \cup \{t_2 + x = 0\}$$

Portanto

$$i(f_2, \{t_2 = 0\}) = m(f_2(x, 0), 0) = 3$$

$$i(f_2, \{t_2 + x = 0\}) = m(f_2(x, -x), 0) = m((-x)^2 + x(-x) + x^3) = 3$$

e a multiplicidade de interseção de  $C_2$  com seu cone tangente é  $I_2 = 3$ .

A curva  $C_2$  possui multiplicidade intrínseca  $\eta_2 = m(f_2, 0) = 2$ , logo o contato maximal é  $\delta_2 = \frac{I_2}{\eta_2} = \frac{3}{2}$ .

Assim,  $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 2$  e  $\delta_1 - \delta_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$ .

Para a **terceira** explosão, sendo  $CT(C_2) = \{t_2 = 0\} \cup \{t_2 + x = 0\}$ , preci-

saremos olhar para as duas cartas. Na primeira carta  $t_2 = t_3x$  temos

$$f_2(x, t_3x) = x^2t_3^2 + x^2t_3 + x^3 = x^2(t_3^2 + t_3 + x) = 0$$

e, portanto,  $E_3 = \{x = 0\}$  e  $C_3 = \{t_3^2 + t_3 + x = 0\}$ . Note que  $C_3$  intersecta  $E_3$  nos pontos  $(0, 0)$  e  $(0, -1)$ .

Na segunda carta  $x = u_3t_2$  temos

$$f_2(u_3t_2, t_2) = t_2^2 + u_3t_2^2 + u_3^3t_2^3 = t_2^2(1 + u_3 + u_3^3t_2)$$

e assim  $E_3 = \{t_2 = 0\}$ ,  $C_3 = \{1 + u_3 + u_3^3t_2 = 0\}$ . Portanto  $C_3$  não passa pela origem da carta  $(u_3, t_2)$ , intersectando  $E_3$  apenas no ponto  $(-1, 0)$  (que corresponde ao ponto  $(0, -1)$  na carta  $(x, t_3)$ ).

Em ambos os pontos de  $C_3 \cap E_3$ , a multiplicidade intrínseca da curva é 1. Além disso, ambos pontos não são esquinas. Como consequência, é possível encontrar uma mudança linear de variáveis tal que após essa mudança  $C_3$  e  $E_3$  possuam cruzamentos normais. Portanto não é necessário realizar mais nenhum blow-up e a redução de singularidades está terminada.

Os polígonos de Newton após o terceiro blow-up estão representados na figura abaixo:

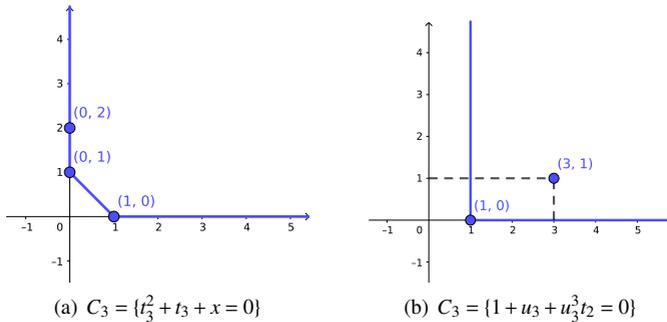


Figura 39 – Polígonos de Newton após o terceiro blow-up

A redução de singularidades da curva  $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$  pode ser representada através do grafo abaixo:

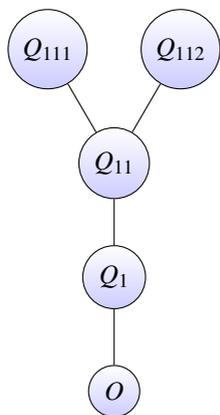


Figura 40 – Grafo do blow-up da curva  $C_0 = \{y^2 + yx^3 + x^7 = 0\}$

## REFERÊNCIAS

SEBASTIANI, M. *Introdução à Geometria Analítica Complexa*. [S.l.]: IMPA, 2004. (Projeto Euclides).

SOARES, M. G.; MOL, R. S. *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*. [S.l.]: IMPA, 2001. Disponível em: [https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/23\\_CBM\\_01\\_08.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/23_CBM_01_08.pdf). (23º Colóquio Brasileiro de Matemática). Acesso em: 11 jul. 2017.

TEISSIER, B. Complex Curve Singularities: A Biased Introduction. *Singularities in Geometry and Topology*, v. 825, p. 887–950, jan. 2007. Acesso em: 11 jul. 2017.

TORRES, F. C. *Introducción a la Geometría Analítica Local*. [S.l.]: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2011.