

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes

**EFEITOS PLANARES EM ELETRODINÂMICA
QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS DE
LORENTZ E CPT**

Florianópolis
2018

Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes

**EFEITOS PLANARES EM ELETRODINÂMICA
QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS DE
LORENTZ E CPT**

Tese submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física

Orientador:

Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fernandes, Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino
Efeitos Planares em Eletrodinâmica Quântica com
Violação das Simetrias de Lorentz e CPT / Gabriel de
Azevedo Miranda Alboccino Fernandes ; orientador,
Jeferson de Lima Tomazelli, 2018.
209 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis,
2018.

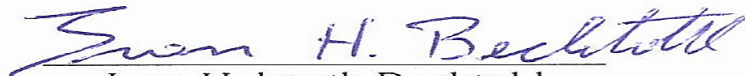
Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo Padrão Estendido da Física de
Partículas Elementares. 3. Quebra Espontânea de
Simetria . 4. Correções Radiativas. 5. Efeito Hall
Quântico. I. Tomazelli, Jeferson de Lima. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Física. III. Título.

EFEITOS PLANARES EM ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS DE LORENTZ E CPT

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM FÍSICA, na área de concentração Física Matemática e Teoria de Campos e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 2 de março de 2018.



Ivan Helmuth Bechtold
(Coordenador do Programa)

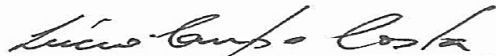
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Jeferson de Lima
Tomazelli
(presidente - UFSC)



Prof. Dr. Paulo Juliano Liebgott
(membro titular - UFSC/FSC)



Prof. Dr. Lúcio Campos Costa
(membro externo -
IF/CCNH/UFABC)



Prof. Dr. Pawel Klimas
(membro titular - UFSC/FSC)

À minha família

Agradecimentos

Com grande sentimento, gostaria de agradecer aos meus pais, Silvana e Vicente, ao meu irmão, Gustavo, e à minha amada esposa, Aline, pelo incentivo, paciência, compreensão, companheirismo e apoio contínuo neste processo de realização de um trabalho sempre desejado.

Agradeço ao professor Dr. Jeferson por sua amizade, atenção, solicitude e criteriosa orientação, incentivando-me por vezes a encontrar nas dificuldades, oportunidades.

Gostaria de agradecer também aos meus amigos Diego e Renan, por sua solidariedade e descontração.

Com respeito e gratulação, agradeço aos professores Dr. Pawel Klimas, Dr. Paulo Liebgott e Dr. Lúcio Campos Costa por gentilmente aceitarem o convite para compor a banca examinadora e por seu interesse em contribuir com nosso trabalho e colaborar conosco.

Expresso meu reconhecimento também a todos os demais professores que contribuíram para minha formação acadêmica, tanto na pós-graduação quanto na graduação, em especial aos professores Dr. Wagner Figueiredo e Dr. Marco Kneipp, ao secretário Antônio, por sua prontidão e competência em nos atender sempre que solicitado, e à instituição Universidade Federal de Santa Catarina por nos proporcionar a infraestrutura necessária.

Com reconhecimento, agradeço ao povo brasileiro e à Capes pelo providencial financiamento deste projeto.

*“O conhecimento existe de duas formas:
sem vida, armazenado em livros,
e vivo na consciência dos homens.
A segunda forma de existência é, afinal,
a forma essencial; a primeira,
por mais indispensável que seja,
ocupa apenas uma posição inferior”.*

Albert Einstein

Resumo

Nos últimos anos, revigorado interesse e esforço têm-se depositado no estudo de teorias quânticas para a gravitação. Estas teorias fornecem subsídios para a investigação de novos cenários físicos não contemplados no bem estabelecido Modelo Padrão das interações fundamentais, dentre os quais destaca-se uma possível violação das simetrias de Lorentz e CPT.

Neste contexto, estudamos na presente tese um modelo efetivo em $(2+1)$ dimensões para a eletrodinâmica quântica com quebra das simetrias de Lorentz/CPT, seguindo a proposta de Colladay e Kostelecký para o Modelo Padrão Estendido, tendo como motivação as implicações da violação destas simetrias em sistemas quânticos planares. Empregamos uma abordagem perturbativa, na aproximação de *1-loop* e em primeira ordem nos parâmetros de quebra, para determinar as correções radiativas do modelo e efetuamos o procedimento de renormalização multiplicativa.

Como aplicação, examinamos as contribuições de nosso modelo com quebra fermiônica para a condutividade Hall e determinamos as correções quânticas ao potencial eletrostático e ao momento magnético do elétron nos modelos com quebra fermiônica e com quebra no setor do fóton.

Investigamos também o limite infravermelho do modelo com quebra fermiônica, motivados pelo modelo de Bloch-Nordsieck, obtendo o propagador exato neste limite e evidenciamos que a divergência infravermelha não se manifesta através de um fator de fase exponencial no modelo tridimensional.

Palavras-Chave: violação das simetrias de Lorentz e CPT, Modelo Padrão Estendido, quebra espontânea de simetria, renormalização, modelo de Bloch-Nordsieck, efeito Hall quântico, potencial eletrostático, momento magnético do elétron.

Abstract

In the recent past years, renewed interest and effort have been devoted to the study of quantum theories of gravity. These theories provide tools for investigations of new physical scenarios not contemplated by the well-established Standard Model of fundamental interactions, among them emerge a possible violation of Lorentz and CPT symmetries.

In this context, we studied in the present thesis an effective model for quantum electrodynamics with breakdown of Lorentz/CPT symmetries in $(2+1)$ dimensions, following Colladay and Kostelecký proposal for the Extended Standard Model, having as motivation the implications of these symmetry violations in planar quantum systems. We employed a perturbative approach, at 1-loop approximation and to first order in the Lorentz-breaking parameters, in order to determine the radiative corrections to the model and proceeded with the multiplicative renormalization.

As an application, we examined the contributions of our model with fermionic breaking to the Hall conductivity and determined the quantum corrections to the electrostatic potential and to electron's magnetic moment in the models with breaking in the fermionic sector as well as in the photon sector.

In addition, we investigated the infrared limit of the model with fermionic breaking, motivated by the Bloch-Nordsieck model, and obtained the exact propagator in this limit and put in evidence that the infrared divergence does not manifest as an exponential phase factor in the tridimensional model.

Keywords: violation of Lorentz and CPT symmetries, Extended Standard Model, spontaneous symmetry breaking, renormalization, Bloch-Nordsieck model, quantum Hall effect, electrostatic potential, electron's magnetic moment.

Lista de Figuras

Figura 1 -Auto-Energia Fermiônica	129
Figura 2 -Auto-Energia Fermiônica com Campo $b^\mu(k)$	129
Figura 3 -Tensor de Polarização	130
Figura 4 -Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 1	130
Figura 5 -Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 2	130
Figura 6 -Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 3	130
Figura 7 -Vértice Eletromagnético “ <i>Bare</i> ”	130
Figura 8 -Vértice Eletromagnético	131
Figura 9 -Vértice Eletromagnético com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 1	131
Figura 10 -Vértice Eletromagnético com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 2.....	131

Sumário

Introdução	1
1-Fundamentos da Teoria Efetiva para Quebra Espontânea de Lorentz e CPT	5
1.1 Simetrias de Lorentz e CPT	5
1.1.1 Transformações de Lorentz	6
1.1.2 Transformações C, P e T	7
1.2 Teoria Efetiva de Colladay-Kostelecký	8
1.2.1 Teoria Efetiva para Férmions em (2+1) Dimensões	8
1.2.2 Teoria Efetiva para Fótons em (2+1) Dimensões	13
1.2.3 Acerca da Quantização da Teoria Efetiva	16
1.3 Referências do Capítulo	16
2-A QED_3 Estendida na Representação Redutível	19
2.1 Representações da QED_3	19
2.1.1 Representação Irredutível	19
2.1.2 Representação Ampliada	22
2.1.3 Representação Redutível	23
2.2 A QED_3 Estendida na Representação Redutível	25
2.2.1 O Propagador Clássico para o Elétron “Livre”	26
2.2.2 O Propagador Clássico para o Fóton Livre	28
2.3 Referências do Capítulo	30
3-Correções Radiativas da Teoria com Quebra Fermiônica	33
3.1 As Correções Radiativas	33
3.1.1 A Auto-Energia Fermiônica	34
3.1.2 O Tensor de Polarização do Vácuo	38
3.1.3 O Vértice Eletromagnético	47
3.2 Renormalizabilidade e o Infravermelho	55
3.3 Referências do Capítulo	56
4-Fenômenos Planares na Teoria Estendida no Setor Fermiônico ..	59
4.1 O Efeito Hall	59

4.1.1	Descrição Clássica	60
4.1.2	Descrição Quântica	61
4.2	O Efeito Hall na QED_3 Estendida	66
4.2.1	A Condutividade Transversal	66
4.3	O Potencial Eletrostático	68
4.3.1	O Potencial Clássico	70
4.3.2	Correções Radiativas ao Potencial	70
4.3.3	Correções do Termo de Quebra da Simetria de Lorentz ao Potencial ..	73
4.4	O Momento Magnético do Elétron	78
4.5	Referências do Capítulo	81
5-O Modelo de Bloch-Nordsieck Estendido em (2+1) Dimensões ..		85
5.1	O Modelo de Bloch-Nordsieck Estendido para a QED_3	85
5.1.1	O Formalismo de Tempo-Próprio de Fock	86
5.1.2	O Propagador Fermiônico	88
5.1.3	Antipartículas	96
5.2	Referências do Capítulo	96
6-A Teoria Estendida no Setor do Fóton e Correções Radiativas ..		99
6.1	A QED_3 Redutível com Quebra no Setor de Gauge	99
6.1.1	O Propagador do Fóton	101
6.2	Correções Radiativas	108
6.2.1	A Auto-Energia Fermiônica	108
6.2.2	O Vértice Eletromagnético	111
6.3	Renormalizabilidade	119
6.4	Referências do Capítulo	119
7-Fenômenos Planares na Teoria Estendida no Setor do Fóton ..		121
7.1	O Potencial Eletrostático	121
7.1.1	O Potencial Clássico	122
7.1.2	Correções Radiativas no Caso de Quebra Isotrópica	125
7.2	O Momento Magnético do Elétron	128
7.3	Referências do Capítulo	130
Considerações Finais		131
Apêndice A-Regras de Feynman para a QED_3 Estendida		135
Apêndice B-Integrais das Correções Radiativas		141
Apêndice C-Relações de Traço		175
Apêndice D-Renormalização		183
Apêndice E-O Efeito Magneto-Elétrico		197
Referências Bibliográficas		203

Introdução

Toda teoria que almeja descrever o comportamento da Natureza, desde a escala microscópica, deve necessariamente ser formulada em base a postulados fundamentais ou axiomas, dos quais decorrem as leis de conservação de determinadas grandezas observáveis. Para tanto, os modelos matemáticos que descrevem o comportamento de sistemas físicos devem preservar o maior número possível dessas simetrias.

O teorema CPT compreende em si um importante resultado no âmbito das teorias relativísticas de campo, segundo o qual uma teoria que satisfaz os axiomas de

1. localidade¹,
2. invariância sob o grupo de Lorentz (restrito),
3. analiticidade da representação do grupo de Lorentz nos parâmetros de *boost*,

tem a transformação CPT como uma simetria inerente [1]. Todas as teorias de campo que compreendem o Modelo Padrão das interações fundamentais satisfazem os axiomas elencados acima e, naturalmente, exibem simetria CPT. Neste sentido, a simetria de Lorentz acena como elemento fundamental na construção de qualquer teoria axiomática de campo relativística consistente com o Modelo Padrão, encontrando amplo respaldo nas evidências experimentais até o presente.

Entretanto, nas últimas três décadas, grande esforço tem-se dispensado ao estudo de teorias quânticas para a gravitação, com destaque para as teorias de cordas, teorias de campo não comutativas e *loop quantum gravity*, despertando o interesse em modelos que vão além do Modelo Padrão e descortinam novos

¹Em teoria quântica de campos, entende-se por localidade a independência entre medidas efetuadas em pontos do espaço-tempo separados por intervalos do tipo espaço, isto é, observáveis associados a pontos separados por intervalos do tipo espaço comutam.

cenários de investigação da Natureza, contemplando, em especial, a possibilidade de violação das simetrias de Lorentz e CPT.

Neste contexto, Colladay e Kostelecký formularam, ao fim da década de noventa, uma extensão ao Modelo Padrão [2-4] a partir da introdução de termos de acoplamento entre os campos de partícula e campos associados à quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT em uma (ainda desconhecida) teoria subjacente ao Modelo Padrão, invariante por CPT e Poincaré, culminando no denominado Modelo Padrão Estendido (SME). Esta proposta de Colladay e Kostelecký fornece a possibilidade de se examinar as implicações da violação das simetrias de Lorentz/CPT em baixas energias, beneficiando-se do bem estabelecido arcabouço das teorias de campo efetivas.

Sendo assim, com vistas ao renovado entusiasmo em torno de teorias no cenário pós-Modelo Padrão, nosso objetivo nesta investigação consiste no estudo da violação das simetrias de Lorentz e CPT em (2+1) dimensões, no âmbito convidativo da eletrodinâmica quântica (QED_3), ancorando-nos na abordagem de Colladay e Kostelecký e tendo como motivação fenomenológica a influência da quebra destas simetrias em sistemas quânticos planares.

No Capítulo 1, apresentaremos de forma sucinta a proposta de Colladay e Kostelecký e construiremos, em caráter original, uma teoria efetiva em (2+1) dimensões, em uma representação redutível, consistente com a QED_3 .

Por sua similaridade com a QCD_4 , exibindo potencial blindante, liberdade assintótica e quebra espontânea da simetria quiral, e por sua comparativa simplicidade estrutural, a QED_3 tem atraído grande atenção nas últimas décadas [5-14] e, com o avanço no estudo de novos materiais de grande potencial tecnológico, tais como o grafeno, isolantes topológicos e supercondutores à temperatura finita, também desempenha papel de destaque como teoria efetiva, em baixas energias, em física da matéria condensada [15-19].

Assim, no Capítulo 2, faremos uma breve revisão das representações da QED_3 [20], enfatizando em particular a representação redutível, e apresentaremos nosso modelo estendido para esta teoria, introduzindo um termo de quebra de Lorentz/CPT no setor fermiônico, como proposto no primeiro capítulo, e acomodando o termo topológico de Chern-Simons no setor de gauge do modelo, de grande importância para o estudo do efeito Hall quântico. Delinearemos também o cálculo dos propagadores do campo fermiônico e do fóton em nível de árvore, isto é, sem levar em conta correções radiativas em teoria de perturbação.

No Capítulo 3, abordaremos as correções radiativas inerentes ao modelo com quebra fermiônica, adotando um procedimento perturbativo a $1-loop$ e em primeira e segunda ordens de aproximação no parâmetro de quebra da simetria de Lorentz, contemplando a auto-energia fermiônica, o tensor de polarização

do vácuo e o vértice eletromagnético. Evidenciaremos ainda a consistência estrutural do modelo demonstrando a identidade de Ward e a conservação da carga elétrica, que manifestam a simetria de gauge do modelo efetivo.

No Capítulo 4, estudaremos a fenomenologia do modelo com quebra fermiônica. Neste contexto, examinaremos as correções quânticas e do termo de quebra ao potencial eletrostático, culminando em um potencial efetivo original análogo ao potencial de Uehling para a QED_4 [39, 41] e determinaremos também as contribuições quânticas ao momento magnético do elétron no cenário tridimensional, ressaltando a participação do termo de Chern-Simons.

Investigaremos ainda o efeito Hall quântico seguindo, em essência, a proposta de Acharya e Swamy [21, 22] que, com base em uma versão relativística da fórmula de Kubo [21, 23, 24], forneceram uma descrição deste efeito no âmbito da QED_3 . Nosso tratamento também incorporará a contribuição das correções radiativas à condutividade Hall. Todavia, Acharya e Swamy empregaram uma representação irreduzível da QED_3 , conduzindo-os a equívocos na interpretação dos resultados no contexto da física da matéria condensada, conforme apontando por Raya e Reyes [20], e não prestigiaram o termo de Chern-Simons em sua análise. De acordo com o teorema de Coleman [25], este último fornece contribuição ao fator de ocupação e à condutividade transversal, através de correções radiativas. Portanto, com o propósito de avaliar a influência do termo de Chern-Simons e, em especial, do parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz/CPT no fator de ocupação, delinearemos, em caráter original, no referido capítulo o cálculo da condutividade Hall, salientando o papel da quebra da simetria de Lorentz.

O limite infravermelho do modelo com quebra fermiônica é alvo de investigação no Capítulo 5, em que, inspirados no modelo de Block-Nordsieck para a QED_4 [64], adotaremos uma abordagem não perturbativa baseada no formalismo de tempo-próprio de Fock [72, 73] para determinar o propagador fermiônico exato no limite de baixas energias e evidenciaremos o fato de que a divergência característica deste limite não exponencia no modelo tridimensional, em contraste com a versão quadridimensional, como antecipado na literatura dedicada [9, 10, 71], o que torna inválido o teorema KLN [39].

O Capítulo 6 é reservado ao estudo de nosso modelo original com quebra da simetria de Lorentz (sem quebra de CPT) no setor do fóton. Neste capítulo, construiremos originalmente o propagador clássico exato do fóton “vestido” pelos trivetores de quebra e determinaremos as correções radiativas do modelo, também a *1-loop*, em segunda ordem nos trivetores de quebra, contemplando a auto-energia fermiônica e o vértice eletromagnético. Ressaltaremos também neste capítulo a consistência estrutural do modelo, evidenciando a identidade de Ward.

No Capítulo 7, prestigiaremos a fenomenologia do modelo com quebra no setor do fóton, alinhavando as contribuições originais ao potencial eletrostático e ao momento magnético anômalo do elétron em $(2+1)$ dimensões.

Nas considerações finais, reuniremos os resultados originais obtidos no presente estudo e apontaremos nossa perspectiva de investigação futura.

Com o intuito de favorecer o encadeamento de conceitos e a discussão da física subjacente ao nosso modelo no decorrer de cada capítulo, reservamos aos apêndices o detalhamento dos cálculos mais extensos, bem como a apresentação do conteúdo complementar ao alinhavado no texto principal. Assim, no Apêndice A introduzimos as regras de Feynman para nosso modelo estendido da QED_3 . No Apêndice B, apresentamos o cálculo das integrais pertinentes às correções radiativas delineadas nos Capítulos 3 e 6. O Apêndice C compreende as relações de traço envolvendo as matrizes gama, τ e γ_5 que compõem nosso modelo. No Apêndice D dedicamos especial atenção à renormalização (perturbativa) para nosso modelo superrenormalizável, destacando sua importância [42] e conferindo, assim, uma contribuição também original à literatura. Por fim, no Apêndice E destacamos a fenomenologia de nosso modelo com quebra no setor do fóton ainda em nível clássico, discutindo a perda da transversalidade dos campos elétrico e magnético, oriunda dos trivetores de quebra, e o efeito magneto-elétrico.

Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Efetiva para Quebra Espontânea de Lorentz e CPT

Neste capítulo abordaremos os conceitos fundamentais inerentes à teoria proposta por Kostelecký, Colladay e colaboradores [2-4, 26, 27], enfatizando em particular as implicações da quebra da simetria de Lorentz na QED em três dimensões. Nossa exposição é fortemente ancorada nas referências [2] e [3], artigos precursores do Modelo Padrão Estendido de física de partículas elementares.

1.1 Simetrias de Lorentz e CPT

Apresentaremos nesta seção uma breve revisão de algumas definições e resultados pertinentes, envolvendo transformações de Lorentz e CPT, que fornecerão subsídios para a discussão de modelos teóricos associados à violação da simetria de Lorentz na seção 1.2.

1.1.1 Transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz consistem daquelas que preservam a forma quadrática fundamental $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$, em que x^μ é o tensor de primeira ordem que rotula as coordenadas espaciais e o tempo e $g_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor métrico¹. O conjunto das transformações de Lorentz constitui um grupo, o grupo de Lorentz, e, acrescentando translações, define-se o grupo de Poincaré, que governa as simetrias do espaço-tempo consistentes com uma teoria relativística [28-32].

O grupo de Lorentz pode ser decomposto em setores desconexos, dentre os quais destaca-se o setor ortócrono-próprio, que compreende rotações e *boosts* e é o único que constitui um subgrupo, o grupo de Lorentz restrito [32]. Assim, entendemos por simetria de Lorentz a invariância sob transformações induzidas pelo grupo de Lorentz restrito².

Ademais, pode-se também classificar as transformações de Lorentz em três categorias [2]:

- transformações de observador (“*observer Lorentz transformations*”), que envolvem mudanças de coordenadas, relacionando observações feitas em dois referenciais inerciais com orientações e velocidades relativas;
- transformações de partícula (“*particle Lorentz transformations*”), que relacionam duas partículas com momentos e orientação de spin relativos, através de *boosts*, em um mesmo referencial inercial fixo (sem, contudo, influenciar campos externos eventualmente presentes);
- transformações (inversas) ativas (“*inverse active Lorentz transformations*”), que, em um referencial inercial fixo, induzem *boosts* sobre todas as partículas e campos (inclusive, sobre possíveis campos externos)³.

Naturalmente, em teorias livres as três categorias são equivalentes entre si. Contudo, na presença de um campo externo, desfaz-se tal equivalência e torna-se importante distinguir entre os respectivos grupos de transformações de

¹A coordenada temporal consiste na primeira componente de $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, \dots)$, sendo as demais reservadas às coordenadas espaciais. Em nosso trabalho, consideraremos o espaço-tempo de Minkowsky, com assinatura $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, \dots)$, e adotaremos o Sistema Natural de unidades, com $c = 1 = \hbar$.

²Doravante em nosso texto, ao nos referirmos a transformações ou simetria de Lorentz, deve ficar subentendida a referência ao grupo de Lorentz restrito (exceto sob menção explícita ao grupo de Lorentz geral).

³Cada uma das três categorias de transformações de Lorentz apresentadas constitui um respectivo grupo, tendo em vista que as rotações e *boosts* que as compõem pertencem ao grupo de Lorentz restrito.

Lorentz, em especial entre o grupo de transformações de observador e o grupo de transformações de partícula⁴.

1.1.2 Transformações C, P e T

Além de transformações contínuas, o grupo de Lorentz completo exhibe também um conjunto de transformações discretas de fundamental importância para a construção de modelos em teorias de campos. Dentre estas, salientamos a transformação de paridade (P), pertencente ao setor ortócrono impróprio do grupo geral e associada à inversão espacial⁵, e a reversão temporal (T), que pertence ao setor não ortócrono impróprio do grupo geral e, naturalmente, induz a inversão da coordenada temporal.

Outra transformação discreta que exerce papel proeminente é a conjugação da carga (C). Esta é uma transformação interna, que não faz referência à estrutura do espaço-tempo (portanto, não pertence ao grupo de Lorentz geral), sendo responsável pelo intercâmbio entre partículas e antipartículas.

Conforme mencionamos anteriormente, a invariância pela transformação CPT, definida pela respectiva combinação específica das transformações discretas acima apresentadas, consiste em uma forte simetria à qual estão sujeitas todas as teorias de campo do Modelo Padrão [1]. Contudo, considerando-se a possibilidade de uma eventual quebra da simetria CPT, nos remetendo a algum cenário pós-Modelo Padrão (como sugerem as teorias de gravitação quântica, por exemplo), a simetria de Lorentz é conjuntamente quebrada, observando-se o teorema de Greenberg [33]⁶. Sob este prisma deposita-se a proposta de Kostelecký e Colladay para uma teoria efetiva que incorpore a quebra da simetria de Lorentz e porventura CPT, e que forneça informações físicas, em baixas energias, que as evidenciem.

⁴O leitor interessado pode recorrer à referência [2], que fornece um exemplo lúdico em que se pode deprender claramente a diferença entre estes dois tipos de transformação, ao considerar-se um elétron que se desloca em um plano perpendicular a um campo magnético aplicado.

⁵Ressaltamos que, em (2+1) dimensões, a transformação de paridade é peculiar, sendo entendida como a inversão de apenas uma das coordenadas espaciais.

⁶A contrapartida do teorema de Greenberg, entretanto, não é válida, sendo possível considerar-se quebra da simetria de Lorentz mantendo-se invariância por CPT [3]. Este cenário também será prestigiado em nossa teoria efetiva, sobretudo no contexto envolvendo quebra da simetria de Lorentz no setor bosônico do modelo.

1.2 Teoria Efetiva de Colladay-Kostelecký

Com o intuito de conferir generalidade ao tratamento de modelos teóricos efetivos com quebra da simetria de Lorentz, Kostelecký e Colladay assumem como premissa a existência de uma teoria quântica completa, embora atualmente indefinida, válida em todas as escalas de energia e que exhibe as seguintes propriedades fundamentais: unitariedade e invariância dinâmica⁷ sob CPT e transformações de Poincaré [2].

Supõe-se também que esta teoria exhibe um mecanismo de quebra espontânea⁸ da simetria CPT, em que tensores de Lorentz (\tilde{T}) assumem valores esperados não nulos no vácuo e, assim, quebram os setores do grupo de Lorentz de partícula que não podem ser implementados como transformações unitárias sobre o vácuo [2]. Sob mudanças de coordenadas induzidas por transformações de Lorentz de observador, contudo, os valores esperados dos tensores de Lorentz permanecem invariantes, preservando a equivalência entre referenciais inerciais [2]. Não obstante, propriedades desejáveis como renormalizabilidade, microcausalidade e simetria de gauge também devem ser preservadas pelo mecanismo de quebra espontânea [2-4].

Sendo assim, propõe-se a construção de uma teoria efetiva subjacente a esta desconhecida teoria completa, que carrega consigo a informação da quebra espontânea da simetria de Lorentz (e eventualmente da simetria CPT) através de acoplamentos envolvendo os tensores de Lorentz \tilde{T} , que evidenciam a quebra, e os campos físicos do modelo de interesse [2]. Neste espírito, discutiremos a seguir teorias efetivas para um modelo fermiônico e um modelo bosônico em (2+1) dimensões, que servirão de matéria-prima para nossa proposta de extensão da QED_3 .

1.2.1 Teoria Efetiva para Férmions em (2+1) Dimensões

Em (2+1) dimensões, pode-se propor mais de uma representação para os campos fermiônicos de Dirac, conforme discutiremos no Capítulo 2. Contudo, para nossos propósitos, a representação redutível é a mais conveniente e será apresentada em detalhe no próximo capítulo. Assim, anteciparemos aqui apenas as informações relevantes para explorarmos as simetrias C, P e T na teoria estendida que estudaremos em seguida.

⁷Entende-se por invariância dinâmica sob um grupo de transformações a preservação das simetrias associadas a este, presentes em nível clássico, ao considerar-se correções quânticas à teoria.

⁸Dizemos que há quebra espontânea de simetria quando uma teoria é invariante sob um determinado grupo de simetria, por exemplo em nível lagrangiano, mas o estado de vácuo do sistema físico não compartilha a simetria.

A densidade lagrangiana para férmions livres na representação redutível é expressa por⁹ [20]

$$L_\psi(x) = \bar{\psi}(x)(i\rlap{\not{D}} - m_e - m_o\tau)\psi(x), \quad (1.1)$$

em que¹⁰ $\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu$, com $\mu = 0, 1, 2$, γ^μ são as matrizes de Dirac usuais (de dimensão 4×4), m_e e m_o são parâmetros de massa, denominados “even” e “odd”, de acordo com a transformação de seus respectivos termos sob paridade e reversão temporal, τ é a matriz hermitiana do denominado termo de Haldane, definida por

$$\tau = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2, \quad (1.2)$$

e $\psi(x)$ representa o campo fermiônico (com seu conjugado de Dirac definido por¹¹ $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma_0$), sendo expresso por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_A(x) \\ \psi_B(x) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde $\psi_A(x)$ e $\psi_B(x)$ são as componentes “altas e baixas”, de spinores de dimensão 2 (em analogia com o caso em (3+1) dimensões).

Sendo assim, com o intuito de definirmos as leis de transformação das quantidades spinoriais sob C, P e T, fixamos, por hora, uma representação oportuna para as matrizes de Dirac como segue [20]

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -\sigma^3 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -i\sigma^1 \end{bmatrix}, \gamma^2 = \begin{bmatrix} i\sigma^2 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -i\sigma^2 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^5 = i \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 1_{2 \times 2} \\ -1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

em que σ^i , $i = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli. As matrizes γ^5 e τ exibem relações de anticomutação e comutação, respectivamente, com as matrizes gama.

⁹Para economizarmos notação, denotaremos a dependência no espaço de configuração por $x = x^\mu$ e no espaço dos momentos por $p = p^\mu$, salvaguardadas situações específicas em que a menção explícita às coordenadas seja necessária.

¹⁰Ao longo de todo o texto adotaremos a convenção de soma de Einstein e denotaremos a contração de trivetores com as matrizes gama através da notação de Feynman $\rlap{\not{a}} = \gamma^\mu a_\mu$.

¹¹Em nosso texto, denotaremos pelo superíndice “+” o conjugado hermitiano. A transposição será denotada pelo superíndice “T”.

Nesta representação, a transformação de paridade, $P : (x^0, x^1, x^2) \rightarrow (x^0, -x^1, x^2)$, repercute-se sobre o spinor de campo da seguinte forma, a menos de uma fase arbitrária, [20, 33-36]

$$\begin{cases} \psi_A(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} \sigma^1 \psi_B(x^0, -x^1, x^2) \\ \psi_B(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} \sigma^1 \psi_A(x^0, -x^1, x^2), \end{cases}$$

ou, matricialmente,

$$\psi(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} \gamma^5 \gamma^1 \psi(x^0, -x^1, x^2). \quad (1.4)$$

Por sua vez, a reversão temporal, $T : (x^0, x^1, x^2) \rightarrow (-x^0, x^1, x^2)$, induz sobre $\psi(x)$ a transformação, a menos de uma fase, [20, 33-36]

$$\begin{cases} \psi_A(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} \sigma^2 \psi_B(-x^0, x^1, x^2) \\ \psi_B(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} \sigma^2 \psi_A(-x^0, x^1, x^2), \end{cases}$$

que pode ser traduzida da seguinte forma

$$\psi(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} \gamma^5 \gamma^2 \psi(-x^0, x^1, x^2). \quad (1.5)$$

Sob conjugação da carga, a lei de transformação do spinor de campo fica expressa, a menos de uma fase arbitrária, por [36]

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \tilde{C} \bar{\psi}^T(x), \quad (1.6)$$

em que, tomando-se em conta (2.12), pode-se identificar a matriz de conjugação da carga como sendo $\tilde{C} = \gamma^2$. Esta matriz exhibe as seguintes propriedades [30]

$$\begin{cases} \tilde{C}^{-1} = \tilde{C}^+ = \tilde{C}^T = -\tilde{C} \\ \tilde{C} \gamma^\mu \tilde{C}^{-1} = -\gamma^{\mu T} \\ \tilde{C} \gamma^5 \tilde{C}^{-1} = \gamma^{5 T} \\ \tilde{C} \tau \tilde{C}^{-1} = \tau^T. \end{cases} \quad (1.7)$$

A partir de (1.4-1.7), verifica-se que o termo que envolve a massa m_e em (1.1) é par, individualmente, sob todas as transformações C, P e T e, portanto, invariante sob a transformação conjunta CPT. Por outro lado, observa-se que o termo que carrega a massa m_o é ímpar sob P e T, conforme já antecipado, embora par sob C, o que também assegura sua invariância sob CPT. Portanto, como exige o teorema CPT, a densidade lagrangiana do setor fermiônico livre da QED_3 (1.1) é invariante por esta transformação¹².

¹²Naturalmente, o termo cinético em (1.1) é também invariante sob CPT, como se pode verificar recorrendo-se novamente a (1.4-1.7).

Tendo em mente a teoria livre apresentada acima, voltemo-nos agora à introdução da quebra da simetria CPT e à construção do lagrangiano efetivo para nosso modelo de interesse. Seguindo a proposta de Colladay e Kostelecký, propõe-se uma extensão da densidade lagrangiana como segue

$$L(x) = L_\psi(x) - L'_\psi(x), \quad (1.8)$$

em que $L_0(x)$ corresponde a (1.1) e $L'(x)$ incorpora os efeitos de quebra [2].

Agora, recordando a adimensionalidade da ação efetiva, no sistema de unidades naturais, associada ao modelo, os termos presentes em $L'(x)$ não podem exibir dimensão de massa superior a três em (2+1) dimensões. Sendo assim, tendo em vista que os campos fermiônicos têm dimensão $[m]^1$ e respeitando-se as condições demandadas pela renormalizabilidade da teoria, propõe-se para a densidade lagrangiana de quebra a seguinte forma [2]

$$L'_\psi(x) = \frac{\lambda}{M^k} \langle \tilde{T}(x) \rangle \cdot \bar{\psi}(x) \tilde{\Gamma} [i\partial]^k \psi(x) + \text{termos suprimidos}. \quad (1.9)$$

Em (1.9) acima, as potências assumem os valores $k = 0, 1, 2, \dots$, $\langle \tilde{T}(x) \rangle$ corresponde ao valor esperado (no vácuo) do respectivo “tensor de quebra”¹³ $\tilde{T}(x)$, λ é a constante de acoplamento (adimensional) entre campos $\psi(x)$ e os tensores de quebra, $\tilde{\Gamma}$ denota uma composição de matrizes gama de Dirac e M consiste em uma escala de energia sobrejacente à escala da teoria efetiva (isto é, excede o domínio de validade da teoria efetiva, sendo a escala característica da teoria completa), introduzida para controlar a dimensionalidade e a relevância dos termos derivativos de maior potência¹⁴[2]. Outros termos, envolvendo composições de ordem superior nos bilineares dos campos $\psi(x)$, compatíveis com os requisitos desejáveis da teoria, são crescentemente suprimidos na escala de energia e, portanto, os omitimos em (1.9).

Visando uma abordagem perturbativa em baixas energias, é convidativo assumirmos que as leis de transformação do campo fermiônico $\psi(x)$ da teoria estendida sob C, P e T sejam as mesmas do campo associado à teoria livre (1.4-1.6), como sugerido em [2]¹⁵.

Assim, podemos reescrever convenientemente $L'(x)$, retendo apenas os termos dominantes na escala de energia que violam CPT, e Lorentz por decorrência

¹³Os índices tensoriais foram omitidos em (1.9) face à generalidade dos possíveis tensores.

¹⁴Devido a inobservação experimental de efeitos de quebra da simetria CPT, os valores esperados $\langle \tilde{T}(x) \rangle$ também são presumidamente atenuados na escala de energia da teoria efetiva (M_{ef}) por potências de M_{ef}/M .

¹⁵Uma discussão contemplando propostas mais gerais para as leis de transformação dos campos na teoria estendida pode ser encontrada em [2].

do teorema de Greenberg, e que envolvem acoplamentos derivativos até ordem linear, como segue (vide [2] para a teoria em quatro dimensões)

$$L'_{\psi_{odd}}(x) = \bar{\psi}(x)\not{a}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma^5\not{b}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\not{\tau}\not{h}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\not{\tau}\gamma^5\not{g}(x)\psi(x) \quad (1.10)$$

onde os trivetores $a^\mu(x)$, $b^\mu(x)$, $h^\mu(x)$ e $g^\mu(x)$, são definidos a partir do produto dos valores esperados dos respectivos tensores \tilde{T} de cada termo com as constantes associadas à escala de energia e ao acoplamento, mencionados em (1.9). O rótulo “*odd*” designa a quebra da simetria CPT por estes termos.

Ademais, explorando a estrutura tensorial proposta em (1.9), podemos ainda construir os termos

$$\begin{aligned} L'_{\psi_{even}}(x) = & in_{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) + io_{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\tau\sigma^{\mu\nu}\psi(x) + \\ & + ip_{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\psi(x) + iq_{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\tau\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\psi(x) + is^{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial_\nu\psi(x) + \\ & + it^{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\tau\gamma_\mu\partial_\nu\psi(x) + iw^{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\partial_\nu\psi(x) \\ & + im^{\mu\nu}(x)\bar{\psi}(x)\tau\gamma_5\gamma_\mu\partial_\nu\psi(x) \end{aligned} \quad (1.11)$$

que violam a simetria de Lorentz mas preservam CPT, sendo por isso rotulados por “*even*”¹⁶. Na expressão (1.11) acima definimos $\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e as quantidades tensoriais $n_{\mu\nu}(x)$, $o_{\mu\nu}(x)$, $p_{\mu\nu}(x)$, $q_{\mu\nu}(x)$, $s^{\mu\nu}(x)$, $t^{\mu\nu}(x)$, $w^{\mu\nu}(x)$ e $m^{\mu\nu}(x)$ novamente englobam o produto dos valores esperados dos tensores \tilde{T} pertinentes a cada termo com as constantes de escala de energia e acoplamento.

Com vistas à hermiticidade da teoria subjacente, os tensores de quebra presentes em (1.10, 1.11) são reais. Em decorrência de sua definição, estes tensores compartilham as mesmas propriedades dos respectivos valores esperados dos tensores \tilde{T} dos quais advêm. Assim, é importante ressaltarmos que estas quantidades tensoriais são, naturalmente, invariantes por CPT (a quebra de CPT tem sua origem nas leis de transformação dos campos) e preservam transformações de Lorentz de observador, mas quebram (parcialmente) a simetria sob transformações de Lorentz de partícula [2]. Portanto, transformam-se como tensores genuínos sob transformações de coordenadas e como escalares sob transformações de partícula, devendo ser entendidos, então, como campos externos do modelo.

¹⁶Os termos envolvendo $b^\mu(x)$, $g^\mu(x)$, $h^\mu(x)$, $o_{\mu\nu}(x)$, $p_{\mu\nu}(x)$, $q_{\mu\nu}(x)$, $t^{\mu\nu}(x)$, $w^{\mu\nu}(x)$ e $m^{\mu\nu}(x)$ que propusemos são característicos do modelo fermiônico em (2+1), na representação redutível.

Voltando-nos novamente às densidades lagrangianas (1.10) e (1.11), observemos que, na escala de altas energias, os termos derivativos, alicerçados sobre o trimomento, são preponderantes. Contudo, nosso interesse consiste no estudo de efeitos planares em baixas energias, em que os termos que envolvem $a^\mu(x)$, $b^\mu(x)$, $g^\mu(x)$ e $h^\mu(x)$ predominam¹⁷. Dentre estes, privilegiamos para nossos propósitos o acoplamento que envolve $b^\mu(x)$, em detrimento aos demais¹⁸. Logo, para o campo fermiônico adotaremos em nosso trabalho a densidade lagrangiana efetiva, não invariante por CPT, a seguir

$$L(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_e - m_o\tau)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\gamma^5\cancel{b}\psi(x), \quad (1.12)$$

onde, para assegurarmos a invariância por translações (e, por conseguinte, conservação do tensor energia-momento), assumimos o trivetor de quebra b^μ constante [2]¹⁹.

Cabe comentarmos que, ao exigirmos b^μ constante, definimos um eixo preferencial em (2+1) dimensões e, assim, induzimos a redução das possíveis transformações de Lorentz ao *little group*²⁰ associado ao trivetor de quebra [2]. Então, observando que transformações nas direções ortogonais àquela definida por b^μ o preservam, podemos inferir os candidatos a maior subgrupo de simetrias de Lorentz compatível com nosso modelo (ou seja, que pode manter-se invariante após a quebra espontânea da teoria subjacente) como²¹ SO(2), E(1) ou SO(1,1) (vide [2] para a teoria em quatro dimensões). Naturalmente, o menor grupo invariante consiste em U(1) [2].

1.2.2 Teoria Efetiva para Fótons em (2+1) Dimensões

Examinando por ora o setor do fóton na QED_3 , a densidade lagrangiana mais geral que se pode escrever é expressa por²² [20]

¹⁷Cabe salientarmos, entretanto, que o termo envolvendo $a^\mu(x)$ não fornece informação física, pois pode ser removido através de uma redefinição do campo $\psi(x)$ [2].

¹⁸Na referência [77] há, inclusive, uma discussão interessante e atual, a qual remetemos o leitor interessado, acerca da possibilidade de se produzir *axions* a partir de um acoplamento do tipo Yukawa $\bar{\psi}(x)\gamma^5\cancel{b}(x)\phi(x)\psi(x)$, que viola a simetria de Lorentz em (3+1), semelhante ao termo de quebra protagonista em nosso modelo (1.12).

¹⁹Percebe-se que (1.11) é também invariante sob transformação de fase U(1), garantindo conservação da carga elétrica.

²⁰O *little group* (ou grupo estacionário) associado a uma quantidade consiste no conjunto de transformações que a preservam.

²¹O grupo euclidiano E(n) consiste no conjunto de isometrias em n dimensões. O grupo SO(1,1) é o grupo de transformações de Lorentz em duas dimensões, uma espacial e outra temporal.

²²O pseudotensor antissimétrico de Levi-Civita, $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$, é definido através de permutações dos índices de $\epsilon^{012} = 1$, de forma que permutações pares fornecem componentes +1 e permutações

$$L_\gamma(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x) + L_{GF}(x), \quad (1.13)$$

em que $A^\mu(x)$ é o tripotencial do campo eletromagnético, $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ é o tensor do referido campo, $L_{GF}(x)$ é a densidade lagrangiana envolvendo o termo de fixação de gauge e m_{cs} é a massa do termo de Chern-Simons, que consiste na característica mais notável da teoria em (2+1) dimensões em contraposição à teoria usual em (3+1). Este termo inaudito agrega uma rica fenomenologia, especialmente no âmbito de interface com a física da matéria condensada [62], sendo responsável por atribuir massa topológica ao fóton e terá papel proeminente em nosso modelo efetivo.

No espaço-tempo tridimensional, o campo eletromagnético *per se* exhibe particularidades, tendo o tensor de campo $F^{\mu\nu}(x)$, de dimensão $[M]^1$, a representação matricial

$$F^{**}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -E_1(x) & -E_2(x) \\ E_1(x) & 0 & -B(x) \\ E_2(x) & B(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

onde se observa a natureza escalar do campo magnético $B(x)$ ²³.

No que compete às simetrias discretas, as leis de transformação do trivetor $A^\mu(x)$ são [34]

$$\begin{cases} A^1(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} -A^1(x^0, -x^1, x^2), & A^{0,2}(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} A^{0,2}(x^0, -x^1, x^2) \\ A^0(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} A^0(-x^0, x^1, x^2), & A^{1,2}(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} -A^{1,2}(-x^0, x^1, x^2) \\ A^\mu(x) \xrightarrow{C} -A^\mu(x). \end{cases} \quad (1.15)$$

Posto isto, verifica-se nitidamente que o termo de Chern-Simons em (1.13) é antissimétrico sob P e T, embora simétrico sob C, PT e CPT, sendo, portanto, relevante para o estudo de fenômenos planares como o efeito Hall quântico, que discutiremos em mais detalhe no Capítulo 4. Os demais termos envolvendo o

ímpares, -1 .

²³As componentes dos campos magnético e elétrico são definidas, respectivamente, como

$$B(x) = \partial_1 A^2(x) - \partial_2 A^1(x)$$

e

$$\vec{E}(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) - \partial_t A^0(x).$$

campo $A^\mu(x)$ em (1.13) são invariantes por C, P, T e, por conseguinte, sob qualquer combinação destas transformações discretas.

Tendo em mente estas propriedades, voltamo-nos à construção da densidade lagrangiana de quebra mínima da simetria de Lorentz de acordo com a proposta de Colladay-Kostelecký em analogia com o caso fermiônico. Sob este prisma, propõe-se uma expressão bilinear em $\partial^\mu A^\nu(x)$ como

$$L'_\gamma(x) = \frac{\lambda}{M^k} \left\langle \tilde{T}_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \right\rangle \cdot [i\partial]^k \partial^\mu A^\nu(x) \partial^\alpha A^\beta(x) + \text{termos suprimidos.} \quad (1.16)$$

Examinando-se (1.16) decorre que o termo efetivo dominante na teoria com quebra bosônica pode ser expresso por

$$L'_\gamma(x) = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (1.17)$$

em que $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é adimensional e compreende o produto do valor esperado do tensor $\tilde{T}_{\alpha\beta\mu\nu}$ com a constante de acoplamento, exibindo as propriedades do tensor de Riemann-Christoffel [3, 63]:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0 \\ R_{\alpha\beta[\mu\nu;\eta]} = 0, \end{array} \right. \quad (1.18)$$

em que

$$R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

e

$$R_{\alpha\beta[\mu\nu;\eta]} = \partial_\eta R_{\alpha\beta\mu\nu} + \partial_\nu R_{\alpha\beta\eta\mu} + \partial_\mu R_{\alpha\beta\nu\eta} = 0$$

correspondem à primeira e à segunda identidades de Bianchi. Logo, o tensor de quebra $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ apresenta apenas seis parâmetros independentes em (2+1) dimensões.

Como no modelo para férmions, para assegurarmos a conservação do tensor energia-momento, assumimos o tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ constante.

Com vistas às leis de transformação (1.15), decorre que o termo de quebra (1.17) preserva CPT.

Os demais termos propostos em (1.16) envolvem acoplamentos derivativos ou composições de ordem superior do trivetor $A^\mu(x)$, sendo crescentemente suprimidos na escala de energia M da teoria completa, como no caso fermiônico.

Face às considerações apresentadas, adotaremos em nosso trabalho a densidade lagrangiana estendida para o fóton expressa por

$$L(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x) + L_{GF}(x) - \frac{1}{4}R_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (1.19)$$

reservando aos Capítulos 6 e 7 o estudo deste modelo, par sobre CPT, e de suas implicações fenomenológicas em sistemas planares.

1.2.3 Acerca da Quantização da Teoria Efetiva

Nas seções precedentes, lidamos com modelos efetivos clássicos para férmions e fótons “livres” em (2+1) dimensões. Contudo, nosso interesse reside na teoria quântica, em que efeitos decorrentes de correções radiativas são relevantes.

Sob esta perspectiva, ressaltamos que a introdução da quebra (mínima) de Lorentz proposta por Kostelecký e Colladay não impõe dificuldade no processo de quantização canônica do modelo clássico livre, permanecendo válido inclusive no cenário envolvendo interação com um campo de gauge (em nosso caso, o campo eletromagnético)²⁴ [2]. Em conformidade à invariância dos tensores de quebra sob transformações de partícula, estes devem ser tratados como campos externos ao quantizar-se a teoria, conforme mencionado.

Em compasso, o teorema de Wick, a expansão perturbativa de Dyson e o tratamento LSZ para a matriz de espalhamento (S) são legítimos [2], dando origem às regras de Feynman listadas no Apêndice A. Propriedades essenciais, como microcausalidade e renormalizabilidade são esperadas pela própria construção da teoria, assim como a unitariedade da matriz (S) [2-4].

1.3 Referências do Capítulo

Elencamos a seguir as principais referências deste capítulo.

[1] Streater, R. F.; Wightman, A. S. *“PCT, Spin and Statistics, and All That”*. Princeton University Press, 2000.

[2] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. *“CPT Violation and the Standard Model”*, Phys.Rev. D **55**, p.6760, 1997.

[3] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. *“Lorentz-Violating Extension of the Standard Model”*, Phys.Rev. D **58**, p.116002, 1998.

²⁴No entanto, os termos de quebra introduzem mudanças em aspectos envolvendo quantização que demandam simetria sob transformações de Lorentz de partícula ou CPT.

- [4] Jackiw, R.; Kostelecký, V. A. “*Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **82**, p.3572, 1999.
- [11] de Roo, M.; Stam, K. “*Non-Perturbative Analysis of the Infrared Properties of QED₃*”, Nuc. Phys. **B246**, p. 335, 1984.
- [20] Raya, A.; Reyes, E. D. “*Massive Dirac Fermions and the Zero Field Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 2008.
- [26] Kostelecký, V. A.; Lane, C. D.; Pickering, G. M. “*One-Loop Renormalization of Lorentz-Violating Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **65**, p. 056006, 2002.
- [27] Colladay, D.; McDonald, P. “*One-Loop Renormalization of QCD with Lorentz Violation*”, Phys. Rev. D **77**, p. 085006, 2008.
- [28] Novozhilov, Y. V. “*Introduction to Elementary Particle Theory*”. Pergamon Press, 1975.
- [29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. “*Quantum Electrodynamics*”. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.
- [30] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Field Quantization*”. Springer-Verlag, 1996.
- [31] Itzykson, I.; Zuber, J. “*Quantum Field Theory*”. McGraw-Hill, 1985.
- [32] Fernandes, G. A. M. A. “*Representações Spinoriais para o Grupo de Lorentz e Equações de Onda Relativísticas*”. Dissertação de mestrado, UFSC, 2012.
- [33] Greenberg, O. W. “*CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 2002.
- [34] Khare, A. “*Fractional Statistics and Quantum Theory*”. Segunda Edição. World Scientific, 2005.
- [35] Fradkin, E. “*Field Theories of Condensed Matter Physics*”. Segunda Edição. Cambridge University Press, 2013.
- [36] Shimizu, K. “*C, P and T Transformations in Higher Dimensions*”, Prog. Theor. Phys. **74**, p. 610, 1985.
- [62] Dunne, G. V. “*Topological Aspects of Low Dimensional Systems*”, Les

Houches - Ecole d'Ete de Physique Theorique, **69**, p. 177-263. Springer, 1999.

[63] d'Inverno, R. *“Introducing Einstein’s Relativity”*. Oxford University Press, 1995.

[77] Borges, L. H. C.; Dias, A. G.; Ferrari, A. F.; Nascimento, J. R.; Petrov, A. Yu. *“Generation of Axionlike Couplings via Quantum Corrections in a Lorentz-Violating Background”*, Phys. Rev. D **89**, p. 045005, 2014.

Capítulo 2

A QED_3 Estendida na Representação Redutível

Neste capítulo, prosseguiremos com a construção de nosso modelo de interesse, a QED_3 completa na representação redutível com acoplamento de Chern-Simons e quebra das simetrias de Lorentz e CPT no setor fermiônico, seguindo a proposta de extensão delineada no Capítulo 1.

2.1 Representações da QED_3

Conforme mencionamos anteriormente, em (2+1) dimensões pode-se propor representações distintas para a QED , de acordo com a representação adotada para a álgebra de Clifford associada [20]. Sendo assim, apresentaremos a seguir estas representações para a QED_3 (não estendida), destacando, em particular, a representação redutível.

2.1.1 Representação Irredutível

Em um espaço-tempo tridimensional, pode-se escrever a densidade lagrangiana para férmions de Dirac como

$$L_f(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x), \quad (2.1)$$

em que $\psi(x)$ é um campo spinorial, de duas componentes, m é o parâmetro de massa e as matrizes gama, de dimensão 2×2 , podem ser definidas em termos das matrizes de Pauli como segue [20]

$$\begin{cases} \gamma^0 = \sigma^3 \\ \gamma^1 = i\sigma^1 \\ \gamma^2 = i\sigma^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

satisfazendo $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda$ e conferindo uma representação irredutível à álgebra de Clifford associada,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

As soluções de onda da equação de Dirac advinda de (2.1) são expressas por [20]

$$\psi_{\tilde{a}}^P(x) = \left(\frac{1}{\frac{p^1 - ip^2}{E+m}} \right) e^{-ix \cdot p} = u_{\tilde{a}}(p)e^{-ix \cdot p}, \quad (2.4)$$

$$\psi_{\tilde{a}}^N(x) = \left(\frac{\frac{p^1 + ip^2}{E+m}}{1} \right) e^{ix \cdot p} = v_{\tilde{a}}(p)e^{ix \cdot p}, \quad (2.5)$$

em que¹ $x \cdot p = x^\mu p_\mu$, E designa a energia total da partícula livre, P e N são rótulos que enfatizam, respectivamente, as frequências positiva e negativa das ondas associadas à partícula e à antipartícula, nesta ordem, e introduzimos ainda o rótulo \tilde{a} para distinguir as soluções nesta representação irredutível daquelas relacionadas a outra representação irredutível que discutiremos em seguida [20,34,37]².

A partir de (2.4, 2.5), pode-se definir as leis de transformação do spinor de campo $\psi(x)$ com relação a C, P e T como [11, 20, 34, 37]

$$\begin{cases} \psi_{\tilde{a}}(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{P} \sigma^1 \psi_{\tilde{a}}(x^0, -x^1, x^2) \\ \psi_{\tilde{a}}(x^0, x^1, x^2) \xrightarrow{T} \sigma^2 \psi_{\tilde{a}}(-x^0, x^1, x^2) \\ \psi_{\tilde{a}}(x) \xrightarrow{C} -\sigma^1 \psi_{\tilde{a}}^*(x), \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $\psi_{\tilde{a}}^*(x)$ designa o conjugado complexo do respectivo spinor.

Assim, observa-se que a densidade lagrangiana (2.1) não é invariante por paridade e reversão temporal, individualmente, embora seja simétrica por PT e CPT. Esta característica é providencial para a descrição do efeito Hall quântico [20, 34, 35, 38], tendo em vista que a condutividade transversa σ_{xy} viola P e T,

¹Doravante em nosso texto, denotaremos a contração de dois trivetores de forma concisa como $a \cdot d = a^\mu d_\mu$.

²Cabe comentarmos que ao se considerar um espaço-tempo de dimensão ímpar, sempre haverá duas representações irredutíveis inequivalentes para a álgebra de Clifford associada. No caso em que a dimensão é par, há apenas uma representação irredutível [36].

conforme discutiremos no Capítulo 4. Ademais, ao introduzirmos a interação com um campo de gauge, o teorema de Coleman-Hill [20, 25, 34] assegura ainda que o termo de massa não simétrico por P e T em (2.1) induz radiativamente, em *1-loop* apenas³, um termo de Chern-Simons.

Portanto, a densidade lagrangiana mais geral para a QED_3 na representação irreduzível adotada acima é expressa por [20]

$$L(x) = \bar{\psi}_{\bar{a}}(x)(i\hat{\not{D}} - m)\psi_{\bar{a}}(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\bar{\psi}_{\bar{a}}(x)\hat{A}(x)\psi_{\bar{a}}(x) + L_{GF}(x) + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x), \quad (2.7)$$

em que, como antecipado, $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ é o tensor do campo eletromagnético, $A^\mu(x)$ é o campo associado ao fóton, com dimensão de massa $[M]^{1/2}$, e é a carga elétrica, com dimensão⁴ $[M]^{1/2}$, $L_{GF}(x)$ é o termo de fixação de *gauge* e m_{cs} é o parâmetro de dimensão $[M]^1$ associado ao termo de Chern-Simons, introduzido diretamente em nível clássico. Em nosso trabalho, adotaremos a fixação de *gauge* covariante

$$L_{GF}(x) = \frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu(x))^2,$$

com ζ sendo o parâmetro real arbitrário que define o *gauge*, a ser escolhido.

No âmbito das simetrias de (2.7), observa-se que esta densidade lagrangiana tampouco possui as simetrias de paridade e de reversão temporal, individualmente, tendo em conta que o termo de Chern-Simons, assim como o termo de massa em (2.1)⁵, é antissimétrico sob P e T como discutido no Capítulo 1. Cabe apontarmos, contudo, a invariância de (2.7) por uma transformação global $U(1)$, assegurando conservação da carga.

³As condições assumidas por Coleman e Hill para a validade do teorema são bastante gerais. Contudo, a exigência da invariância de Lorentz, por exemplo, restringe sua aplicação em modelos envolvendo quebra de CPT, como no caso da QED_3 estendida, e pode haver correções de ordem superior, nos *loops*, para o termo de Chern-Simons. Esta análise do teorema de Coleman-Hill em teorias sem simetria de Lorentz permanece em aberto e é passível de investigações futuras.

⁴A QED_3 é, portanto, superrenormalizável.

⁵O fato dos termos de Chern-Simons e de massa fermiônica compartilharem as mesmas leis de transformação sob as simetrias discretas pode ser entendido ao se observar que os referidos campos são parceiros supersimétricos em $(2+1)$ dimensões, como destacado em [62, 65].

2.1.2 Representação Ampliada

Naturalmente, observa-se que o espectro de soluções contemplado por (2.4, 2.5) não esgota os estados possíveis para um par de partícula e antipartícula com spin 1/2. Os estados complementares são fornecidos pelas soluções da equação de onda na outra representação irredutível mencionada, em que as matrizes gama são definidas por [20, 37]

$$\begin{cases} \gamma^0 = \sigma^3 \\ \gamma^1 = i\sigma^1 \\ \gamma^2 = -i\sigma^2, \end{cases} \quad (2.8)$$

com $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda$. Nesta representação, as soluções de onda são [20]

$$\psi_{\bar{b}}^P(x) = \begin{pmatrix} \frac{p^1 + ip^2}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix \cdot p} = u_{\bar{b}}(p)e^{-ix \cdot p}, \quad (2.9)$$

$$\psi_b^N(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p^1 - ip^2}{E+m} \end{pmatrix} e^{ix \cdot p} = v_{\bar{b}}(p)e^{ix \cdot p}. \quad (2.10)$$

Tendo em vista as duas “espécies” de férmions $\psi_{\bar{a},\bar{b}}(x)$ associadas às duas representações irredutíveis inequivalentes, pode-se propor uma densidade lagrangiana “ampliada”⁶ para o setor fermiônico da teoria conforme segue [20, 37]

$$L_f(x) = \bar{\psi}_{\bar{a}}(x)(i\rlap{\not{D}} - m)\psi_{\bar{a}}(x) + \bar{\psi}_{\bar{b}}(x)(i\rlap{\not{D}} + m)\psi_{\bar{b}}(x), \quad (2.11)$$

em que as matrizes gama são definidas a partir de (2.2)⁷.

Esta densidade lagrangiana, diferentemente de (2.1), é par sob P e T [20]. De fato, pode-se verificar recorrendo-se às leis de transformação a seguir [20, 37], definidas a menos de fases arbitrárias, que os campos associados às duas espécies são intercambiados de forma oportuna via P e T,

$$\begin{cases} \psi_{\bar{a}}(x) \xrightarrow{P} -i\gamma^1\psi_{\bar{b}}(x'), & \psi_{\bar{b}}(x) \xrightarrow{P} -i\gamma^1\psi_{\bar{a}}(x') \\ \psi_{\bar{a}}(x) \xrightarrow{T} -\gamma^2\bar{\psi}_{\bar{b}}^T(x'), & \psi_{\bar{b}}(x) \xrightarrow{T} \gamma^2\bar{\psi}_{\bar{a}}^T(x') \\ \psi_{\bar{a}}(x) \xrightarrow{C} \gamma^2\bar{\psi}_{\bar{a}}^T(x), & \psi_{\bar{b}}(x) \xrightarrow{C} \gamma^2\bar{\psi}_{\bar{b}}^T(x), \end{cases} \quad (2.12)$$

⁶Na literatura, esta densidade lagrangiana (2.12) é denominada estendida [20]. Porém, com o intuito de evitarmos confusão em nosso texto, reservamos a terminologia “estendida” aos modelos que envolvem quebra da simetria de Lorentz e tomamos a liberdade de renomear (2.12) como “representação ampliada” da densidade lagrangiana para férmions.

⁷A representação irredutível das matrizes gama pode ser escolhida à conveniência.

culminando na invariância de (2.11) por estas transformações, bem como por C e por quaisquer combinações destas simetrias discretas.

Observa-se ainda que, em virtude dos sinais opostos nas massas (iguais) presentes em (2.11), os termos de Chern-Simons induzidos radiativamente por cada espécie fermiônica cancelam-se mutuamente [20]. Sendo assim, a densidade lagrangiana mais geral que se pode escrever para a QED_3 nesta representação ampliada, introduzindo-se a interação com o campo de gauge $A^\mu(x)$ do fóton, é [20]

$$L(x) = \bar{\psi}_{\bar{a}}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi_{\bar{a}}(x) + \bar{\psi}_{\bar{b}}(x)(i\cancel{\partial} + m)\psi_{\bar{b}}(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\bar{\psi}_{\bar{a}}(x)\cancel{A}(x)\psi_{\bar{a}}(x) - e\bar{\psi}_{\bar{b}}(x)\cancel{A}(x)\psi_{\bar{b}}(x) + L_{GF}(x). \quad (2.13)$$

Face a (2.8) e à invariância do setor fermiônico sob C, P e T, conclui-se que (2.14) é também simétrica, individualmente, por estas transformações discretas. Sendo assim, a representação ampliada é inapropriada para o estudo do efeito Hall, por exemplo.

2.1.3 Representação Redutível

A partir dos campos $\psi_{\bar{a}}(x)$ e $\psi_{\bar{b}}(x)$ associados às duas representações irredutíveis discutidas, pode-se ainda construir o spinor de quatro componentes (1.3), denotado por $\psi(x)$, que envolve as duas espécies fermiônicas [20] e contempla todos os estados de spin compatíveis com o conteúdo de partícula do modelo, conduzindo à representação redutível antecipada em (1.1)

$$L_f(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_e - m_o\tau)\psi(x). \quad (2.14)$$

No cenário que contempla o grafeno, inclusive, as espécies fermiônicas $\psi_{\bar{a}}(x)$ e $\psi_{\bar{b}}(x)$ que compõem o spinor $\psi(x)$ da representação redutível admitem sentido físico genuíno, descrevendo os estados de Bloch (com spin) das duas sub-redes distintas que integram a rede hexagonal característica, com momentos próximos aos dois vales inequivalentes da zona de Brillouin bidimensional (denominados pontos de Dirac) do espaço recíproco [20, 76].

Conforme mencionado anteriormente, nesta representação as matrizes gama correspondem às matrizes 4×4 de Dirac e escolhemos, por conveniência, a base $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2\}$ para a álgebra de Clifford (2.3) associada ao respectivo espaço-tempo tridimensional. Naturalmente, a representação redutível acomoda também as matrizes γ^3 e $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que coincidem com as respectivas matrizes presentes na teoria em (3+1) e que anticomutam com as demais

matrizes gama⁸, permitindo definir ainda a matriz $\tau = 1/2[\gamma^3, \gamma^5]$, introduzida em (1.2) [20].

As relações algébricas complementares a (2.3), envolvendo as matrizes γ^3, γ^5 e τ , são expressas por

$$\{\gamma^3, \gamma^\mu\} = 2g^{3\mu}, \quad (2.15)$$

$$\{\gamma^3, \gamma^5\} = 0, \quad (2.16)$$

$$\{\gamma^3, \tau\} = 0, \quad (2.17)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.18)$$

$$\{\gamma^5, \tau\} = 0, \quad (2.19)$$

$$[\tau, \gamma^\mu] = 0, \quad (2.20)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (2.21)$$

$$\tau^2 = 1, \quad (2.22)$$

com $\mu = 0, 1, 2$.

A partir das matrizes γ^3 e γ^5 , pode-se conceber ainda o conceito de quiralidade⁹ na representação redutível. Com efeito, estas matrizes definem duas transformações globais distintas do tipo quiral [8,20]

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma^3} \psi(x), \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi(x). \quad (2.23)$$

Tendo em vista as relações (2.3, 2.15-2.22), verifica-se que a densidade lagrangiana (2.14) não é invariante sob (2.23) devido ao termo envolvendo a

⁸Salientamos, contudo, que a matriz γ^3 não participa da álgebra de Clifford genuína em (2+1) dimensões, de acordo com nossa escolha para a base, em contraste com o caso em (3+1), onde esta compõe também a base da álgebra tendo em vista a necessidade de quatro geradores.

⁹Neste contexto, o conceito de quiralidade envolve a não equivalência (ou independência) entre as espécies fermiônicas irredutíveis $\psi_{\tilde{a}}(x)$ e $\psi_{\tilde{b}}(x)$ e entendemos por simetria quiral a invariância da teoria sob as transformações (2.23) que induzem troca entre as espécies.

massa par m_e , que em nível de equações de movimento mistura as espécies fermiônicas¹⁰.

Conforme discutido no Capítulo 1, examinando (2.14) sob as transformações discretas C, P e T, observamos que esta também não é invariante por paridade e reversão temporal, individualmente, embora seja simétrica por C, PT e CPT. Assim, um termo de Chern-Simons é induzido radiativamente pelo termo de massa ímpar (m_o) ao introduzirmos o acoplamento com o campo $A^\mu(x)$, de modo que a lagrangiana mais geral que se pode propor para a QED_3 na representação redutível é expressa por [20]

$$L(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_e - m_o\tau)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\bar{\psi}(x)\cancel{A}(x)\psi(x) + L_{GF}(x) + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x). \quad (2.24)$$

Os termos de Chern-Simons e de massa ímpar, que violam as simetrias de paridade e reversão temporal, contribuem para o estudo do efeito Hall.

No âmbito da física do grafeno, os modelos teóricos que permeiam a literatura dedicada atribuem massa nula aos portadores de carga [34, 35]. Entretanto, grande interesse tem-se depositado na construção de termos massivos para os férmions, com uma variedade de leis de transformação sob P e T , incentivados pelas evidências experimentais sobretudo no contexto de sistemas de dupla camada [15-19]. Em particular, o termo de Haldane $m_o\tau$ presente em (2.24) admite interpretação física no âmbito do grafeno ao introduzir *hopping* (complexo) entre os sítios de cada subrede do material (sem misturar as subredes), sendo prestigiado em nossa investigação alinhavada neste trabalho [50].

2.2 QED_3 Estendida na Representação Redutível

Tendo em vista a riqueza estrutural e o conteúdo de partícula completo contemplado na representação redutível da QED_3 , no sentido em que esta envolve as duas espécies fermiônicas associadas às representações irredutíveis, adotaremos sua versão quiral em nosso trabalho. Nossa proposta original para a QED_3 estendida com quebra fermiônica tem como densidade lagrangiana¹¹

¹⁰O conjunto $\{1, \gamma^3, \gamma^5, \tau\}$ consiste inclusive em uma base para o grupo $U(2)$, que constitui um grupo de simetria para (2.14) na ausência do termo *even* (m_e) [20].

¹¹Cabe comentarmos que na literatura é comum atribuir ao campo fermiônico $\psi(x)$ um número quântico adicional de sabor, análogo àquele conferido aos quarks na QCD, ampliando o número “famílias” de férmions contempladas pela teoria [8]. Entretanto, para nossos

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_o\tau)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\gamma^5\not{b}\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \\
 & - e\bar{\psi}(x)\cancel{A}(x)\psi(x) + \frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu(x))^2 + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x), \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

em que substituímos o termo cinético livre (2.14) em favor de (1.11), introduzindo b^μ , o parâmetro de quebra axial de Lorentz e CPT, adotamos a fixação de gauge covariante e suprimimos a massa “*even*” para prestigiarmos a simetria quiral no modelo.

2.2.1 Propagador Clássico para o Elétron “Livre”

Em posse de (2.25), podemos escrever a equação de Euler-Lagrange para o campo $\bar{\psi}(x)$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial \bar{\psi}(x)} - \partial_\beta \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\beta \bar{\psi}(x))} = 0,$$

que conduz, na ausência de interação com o campo $A^\mu(x)$, à equação “livre”

$$(i\cancel{\partial} - m_o\tau - \gamma^5\not{b})\psi(x) = 0. \quad (2.26)$$

Esta equação fornece o propagador fermiônico “livre” $S(x-x')$, que consiste na função de Green “causal” de Feynman da equação não homogênea associada a (2.26),

$$(i\cancel{\partial} - m_o\tau - \gamma^5\not{b})S(x-x') = \delta(t-t')\delta^2(\vec{x}-\vec{x}'). \quad (2.27)$$

Transitando para o espaço dos momentos, mais conveniente para abordarmos as correções radiativas na teoria quantizada, tomamos as transformadas de Fourier adequadas

$$\begin{aligned}
 S(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip \cdot (x-x')} S(p), \\
 \delta(t-t')\delta^2(\vec{x}-\vec{x}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-ip \cdot (x-x')},
 \end{aligned}$$

propósitos neste trabalho, é suficiente considerarmos apenas um único sabor e, portanto, assim o faremos. Orientamos o leitor, contudo, a não confundir as designações “espécies fermiônicas”, empregadas por nós para distinguir $\psi_{\bar{a}}(x)$ e $\psi_{\bar{b}}(x)$ associadas às representações irreduzíveis que compõem o campo $\psi(x)$ redutível, e “famílias fermiônicas”, que se referem às famílias de sabores.

e reescrevemos (2.27) como segue

$$(\not{p} - m_o\tau - \gamma^5\not{b})S(p) = 1, \quad (2.28)$$

de onde decorre, formalmente, o propagador de Feynman

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m_o\tau - \gamma^5\not{b} + i\epsilon}. \quad (2.29)$$

Destacamos que a equação de movimento “livre” (2.26) também é satisfeita pelo operador de campo $\hat{\psi}(x)$ da teoria quantizada, de forma que, em nível de árvore (ou seja, na ausência de correções radiativas), o propagador (2.29) permanece o mesmo na versão quântica, em conformidade ao princípio de correspondência¹². Sendo assim, introduzimos o fator $i\epsilon$ em (2.29) para assegurar a implementação do ordenamento temporal dos operadores de campo e fixar o contorno de Feynman¹³.

Examinando o caso estritamente livre, em que $b^\mu = 0$, pode-se inverter exatamente a expressão (2.29) que define o propagador introduzindo-se os projetores

$$\chi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau), \quad (2.30)$$

de maneira que $S_0(p) \equiv S_F(p; b^\mu = 0)$ pode ser expresso como [8, 20]

$$\begin{aligned} S_0(p) &= \frac{\not{p} + m_o}{p^2 - m_o^2 + i\epsilon}\chi_+ + \frac{\not{p} - m_o}{p^2 - m_o^2 + i\epsilon}\chi_- \\ &= \frac{\not{p} + m_o\tau}{p^2 - m_o^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Agora, introduzindo o termo de quebra CPT, não é possível inverter exatamente a expressão (2.29). Entretanto, fazendo uso da identidade operatorial [30]

$$\frac{1}{\hat{A} + \hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\hat{B} \frac{1}{\hat{A}} \right)^n \right],$$

podemos escrever uma expressão em série para $S_F(p)$ da seguinte forma

¹²Com o intuito de economizarmos espaço, não apresentaremos explicitamente a quantização de nosso modelo para a QED_3 neste texto, tendo em vista que segue em estreito paralelo o procedimento adotado na quantização da QED_4 usual, exposto detalhadamente na literatura (vide, por exemplo, [30, 31, 39-41]).

¹³Deve-se subentender um limite para $\epsilon \rightarrow 0$ nesta expressão, com $\epsilon \in \mathbf{R}$ e $\epsilon > 0$.

$$S_F(p) = S_0(p) + S_b(p), \quad (2.32)$$

em que

$$\begin{aligned} S_b(p) &= S_0(p) \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma^5 \not{S}_0(p)]^n \\ &= S_F(p) \gamma^5 \not{S}_0(p). \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.2 Propagador Clássico para o Fóton Livre

Voltando-nos agora aos termos livres associados ao campo de gauge $A^\alpha(x)$ em (2.25), podemos encontrar as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L(x)}{\partial A^\alpha(x)} - \partial_\beta \frac{\partial L(x)}{\partial (\partial_\beta A^\alpha(x))} = 0,$$

que se traduzem em

$$\partial_\beta \partial^\beta A_\alpha(x) - \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) \partial_\alpha \partial_\lambda A^\lambda(x) - m_{cs} \epsilon_{\lambda\beta\alpha} \partial^\beta A^\lambda(x) = 0. \quad (2.34)$$

Transcrevendo (2.34) para o espaço dos momentos, obtemos

$$\left(-p^2 g_{\alpha\eta} + \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) p_\alpha p_\eta + i m_{cs} \epsilon_{\eta\beta\alpha} p^\beta\right) A^\eta(p) = 0, \quad (2.35)$$

de forma que o propagador clássico para o fóton $D^{\eta\sigma}(p)$ é definido pela solução da equação não homogênea associada

$$\left(-p^2 g_{\alpha\eta} + \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) p_\alpha p_\eta + i m_{cs} \epsilon_{\eta\beta\alpha} p^\beta\right) D^{\eta\sigma}(p) = \delta_\alpha^\sigma. \quad (2.36)$$

Notemos, contudo, que a expressão mais geral, em (2+1) dimensões, para um tensor de segunda ordem definido em termos de um trivetor p^μ consiste em

$$D^{\eta\sigma}(p) = C_1(p^2)g^{\eta\sigma} + C_2(p^2)p^\eta p^\sigma + iC_3(p^2)\epsilon^{\eta\sigma\alpha} p_\alpha. \quad (2.37)$$

Assim, substituindo esse *ansatz* em (2.36), segue

$$\begin{aligned} [(m_{cs}C_3 - C_1)p^2 - 1]\delta_\alpha^\sigma + [\tilde{\zeta}C_1 - m_{cs}C_3 + (\tilde{\zeta} - 1)C_2p^2]p_\alpha p^\sigma \\ - i[m_{cs}C_1\epsilon_{\eta\alpha\lambda}g^{\eta\sigma}g^{\lambda\delta} + p^2C_3\epsilon^{\eta\sigma\delta}g_{\alpha\eta}]p_\delta = 0, \end{aligned}$$

em que definimos $\tilde{\zeta} = 1 + 1/\zeta$ e usufruímos da identidade (C.14).

Explorando a independência linear de cada termo na equação acima, resulta o sistema

$$\begin{cases} (m_{cs}C_3 - C_1)p^2 - 1 = 0 \\ \tilde{\zeta}C_1 - m_{cs}C_3 + (\tilde{\zeta} - 1)C_2p^2 = 0 \\ m_{cs}C_1\epsilon_{\eta\alpha\lambda}g^{\eta\sigma}g^{\lambda\delta} + p^2C_3\epsilon^{\eta\sigma\delta}g_{\alpha\eta} = 0, \end{cases}$$

com solução

$$C_1 = \frac{1}{m_{cs}^2 - p^2}, \quad (2.38)$$

$$C_2 = \frac{m_{cs}^2 - \tilde{\zeta}p^2}{(p^2)^2(m_{cs}^2 - p^2)(\tilde{\zeta} - 1)}, \quad (2.39)$$

$$C_3 = \frac{m_{cs}}{p^2(m_{cs}^2 - p^2)}. \quad (2.40)$$

As relações (2.38-2.40) determinam o propagador (2.37) como a seguir

$$\begin{aligned} D_F^{\eta\sigma}(p) &= \frac{1}{m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon}g^{\eta\sigma} + \frac{m_{cs}^2 - \tilde{\zeta}p^2}{(p^2)^2(\tilde{\zeta} - 1)(m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon)}p^\eta p^\sigma \\ &\quad + i\frac{m_{cs}}{p^2(m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon)}\epsilon^{\eta\sigma\alpha}p_\alpha. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Novamente, atentos ao fato de que a equação de movimento (2.34) é também satisfeita pelos operadores de campo $\hat{A}^\mu(x)$ associados à teoria quantizada, nos valemos ainda do propagador livre (2.41) na versão quântica, em nível de árvore, e introduzimos os fatores $i\epsilon$ que resguardam o ordenamento temporal apropriado para os operadores de campo.

O propagador (2.41) evidencia, em seus polos, a “massa topológica” conferida ao fóton pelo termo de Chern-Simons, preservando, oportunamente, a invariância de *gauge*. A massa m_{cs} é importante também ao se analisar o comportamento infra-vermelho da teoria estendida, tendo em vista as divergências características deste limite que comparecem no caso da QED_3 usual sem o termo topológico, assunto que será delineado no Capítulo 5 segundo a proposta de Bloch e Nordsieck [9-11, 64].

De posse dos propagadores (2.33, 2.41), discutiremos no próximo capítulo as correções radiativas ao nosso modelo com o propósito de investigarmos no Capítulo 4 as implicações fenomenológicas do termo de quebra fermiônico, sobretudo no efeito Hall quântico.

2.3 Referências do Capítulo

Destacamos a seguir as referências deste capítulo.

[8] Kondo, K. -I.; Maris, P. “*Spontaneous Chiral-Symmetry Breaking in Three-Dimensional QED with a Chern-Simons Term*”, Phys. Rev. D **52**, p. 1212, 1995.

[9] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Infrared Dynamics in (2+1) Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **76**, p. 69, 1998.

[10] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Remarks on Infrared Dynamics in QED in Three Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **80**, p. 1037, 2002.

[11] de Roo, M.; Stam, K. “*Non-Perturbative Analysis of the Infrared Properties of QED₃*”, Nuc. Phys. **B246**, p. 335, 1984.

[15] Gusynin, V. P.; Sharapov, S. G.; Carbotte, J. P. “*AC Conductivity of Graphene: From Tight-Binding Model to 2+1-Dimensional Quantum Electrodynamics*”, Int. J. Mod. Phys. **B21**, p. 4611, 2007.

[16] Luk’yanchuk, I. A.; Kopelevich, Y. “*Dirac and Normal Fermions in Graphite and Graphene: Implications of the Quantum Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **97**, p. 256801, 2006.

[17] Kim, K. S. *et al.* “*Coexisting Massive and Massless Dirac Fermions in Symmetry-Broken Bilayer Graphene*”, Nature Materials **12**, p. 887, 2013.

[18] Khveshchenko, D. V. “*Massive Dirac Fermions in Single-Layer Graphene*”, J. Phys.: Condens. Matter **21**, p. 075303, 2009.

[19] Hatsugai, Y.; Kohmoto, M.; Wu, Y-S. *Hidden Massive Dirac Fermions in Effective Field Theory for Integral Quantum Hall Transitions*, Phys. Rev. **B54**, p. 4898, 1996.

[20] Raya, A.; Reyes, E. D. “*Massive Dirac Fermions and the Zero Field Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, p. 355401, 2008.

[25] Coleman, S.; Hill, B. “*No More Corrections to the Topological Mass Term in QED₃*”, Phys. Lett. **B159**, p. 184, 1985.

[30] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Field Quantization*”. Springer-Verlag, 1996.

- [31] Itzykson, I.; Zuber, J. “*Quantum Field Theory*”. McGraw-Hill, 1985.
- [34] Khare, A. “*Fractional Statistics and Quantum Theory*”. Segunda Edição. World Scientific, 2005.
- [35] Fradkin, E. “*Field Theories of Condensed Matter Physics*”. Segunda Edição. Cambridge University Press, 2013.
- [36] Shimizu, K. “*C, P and T Transformations in Higher Dimensions*”, Prog. Theor. Phys. **74**, p. 610, 1985.
- [37] Anguiano, Ma. de J.; Bashir, A. “*Fermions in Odd Space-Time Dimensions: Back to Basics*”, Few-Body Systems **37**, p. 71, 2005.
- [38] Avron, Y.; Seiler, R.; Shapiro, B. “*Generic Properties of Quantum Hall Hamiltonians for Finite Systems*”, Nuc. Phys. **B265**, p. 364, 1986.
- [39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.
- [40] Mandl, F.; Shaw, G. “*Quantum Field Theory*”. John Wiley and Sons, 1984.
- [41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.
- [50] Haldane, F. D. M. “*Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly”*”, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 2015, 1988.
- [62] Dunne, G. V. “*Topological Aspects of Low Dimensional Systems*”, Les Houches - Ecole d’Ete de Physique Theorique, **69**, p. 177-263. Springer, 1999.
- [64] Bloch, F.; Nordsieck, A. “*Note on the Radiation Field of the Electron*”, Phys. Rev. **52**, p. 54, 1937.
- [65] Gates, S. J.; Grisaru, M.; Rocek, M.; Siegel, W. “*Superspace*”. Benjamin-Cummings, 1983.
- [76] Miransky V. A.; Shovkovy I. A. “*Quantum Field Theory in a Magnetic Field: From Quantum Chromodynamics to Graphene and Dirac Semimetals*”, arxiv 1503.00732v2.

Capítulo 3

Correções Radiativas da Teoria com Quebra Fermiônica

Com o intuito de extrairmos a fenomenologia inerente ao nosso modelo original em (2+1) dimensões com quebra da simetria de Lorentz e CPT no setor fermiônico, é conveniente adotarmos uma abordagem perturbativa, tendo em vista a diminuta contribuição do parâmetro de quebra b^μ . Destarte, estudaremos neste capítulo as correções radiativas da teoria em primeira ordem de aproximação na constante de estrutura fina $\alpha_e = e^2/4\pi$.

3.1 Correções Radiativas

As correções radiativas consistem em contribuições genuinamente quânticas à teoria clássica. Em eletrodinâmica quântica, as contribuições dominantes em relação a α_e são representadas pelos diagramas próprios¹ ilustrados nas Figuras 1-10 do Apêndice A e correspondem, respectivamente, à auto-energia fermiônica, ao tensor de polarização do vácuo e à correção do vértice (eletromagnético) [39, 40].

A auto-energia fermiônica e o tensor de polarização do vácuo são funções de dois pontos que repercutem sobre os propagadores dos campos, sendo objeto

¹Diagramas próprios (também denominados “*one-particle irreducible*”, i.e. 1PI) consistem daqueles que não podem ser subdivididos em diagramas independentes ao cortar-se uma de suas linhas internas [39, 40].

de nosso estudo a seguir. Por sua vez, o diagrama de vértice é uma função de três pontos que vem agregar-se ao vértice clássico de interação eletromagnética (Figura 7) e será prestigiado na última seção do presente capítulo.

3.1.1 Auto-Energia Fermiônica

As funções de Green “livres” $S_F(p)$ e $D_F^{\mu\nu}(p)$ são corrigidas dinamicamente ao se introduzir a interação entre o campo fermiônico e o campo de gauge, através das correções radiativas. Sendo assim, o propagador para o elétron fica expresso pela série geométrica de Schwinger-Dyson [30, 39-41]

$$iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m_e - m_o\tau - \gamma^5 \not{b} + \Sigma(p) + i\epsilon} = iS_F(p) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i\Sigma(p)iS_F(p))^n \right], \quad (3.1)$$

em que $\Sigma(p)$ depreende, em linguagem diagramática, o conjunto de inserções próprias ao propagador “livre” (2.32), denominadas correções de auto-energia.

Em primeira ordem em α_e e no parâmetro de quebra b^μ , as inserções próprias compatíveis correspondem àquelas destacadas nas Figuras 1 e 2 apresentadas no Apêndice A. Tendo em vista as regras de Feynman (A.1-A.9), podemos escrever $\Sigma(p)$ nesta ordem de aproximação como segue

$$i\Sigma(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} iD_{F\mu\nu}(k)(-ie\gamma^\mu)iS_F(p-k)(-ie\gamma^\nu). \quad (3.2)$$

Adotando o *gauge* de Landau $\zeta = 0$ (ou $\tilde{\zeta} = \infty$), o propagador (2.41) para o fóton fica

$$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + i \frac{m_{cs}}{k^2(m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} \epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma. \quad (3.3)$$

A partir de (2.31-2.33) e das expressões acima, podemos decompor $\Sigma(p)$ de forma conveniente como

$$\Sigma(p) = \Sigma_0(p) + \Sigma_b(p) + m_{cs}(\Sigma_\epsilon(p) + \Sigma_{\epsilon b}(p)), \quad (3.4)$$

onde

$$\Sigma_0(p) = -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.5)$$

$$\Sigma_b(p) = -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^5 \not{k} S_0(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.6)$$

$$\Sigma_\epsilon(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} \epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.7)$$

$$\Sigma_{eb}(p) = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} \epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^5 \not{k} S_0(p-k) \gamma^\nu. \quad (3.8)$$

À luz de (2.3, 2.16-2.22), desenvolvemos algebricamente estas expressões. Com efeito, examinando os termos de (3.5), que representa a auto-energia lídima da versão quirial da QED_3 , vem

$$\gamma^\mu S_0(p-k) \gamma_\mu = \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} (-\not{p} + \not{k} + 3m_o\tau), \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{k^2} \not{k} S_0(p-k) \not{k} = \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} (-\not{p} - \not{k} + 2\frac{k \cdot p}{k^2} \not{k} + m_o\tau), \quad (3.10)$$

de modo que $\Sigma_0(p)$ pode ser reescrito como

$$\Sigma_0(p) = -ie^2 \left(2\gamma^\alpha I^{(2)}{}_\alpha(p) + 2m_o\tau I^{(1)}(p) - 2p^\alpha \gamma^\beta I^{(4)}{}_{\alpha\beta}(p) \right), \quad (3.11)$$

em que introduzimos as integrais auxiliares $I^{(1)}(p)$, $I^{(2)}{}_\alpha(p)$ e $I^{(4)}{}_{\alpha\beta}(p)$ elencadas em (3.19, 3.20, 3.22) a seguir.

Por sua vez, elaborando (3.6) temos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^5 \not{k} S_0(p-k) \gamma_\mu &= \frac{1}{((p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon)^2} \left[-(m_o^2 - p^2 - k^2 + 2k \cdot p) \gamma^5 \not{k} \right. \\ &\quad \left. - 2(p \cdot b - k \cdot b) \gamma^5 \not{p} - 2(k \cdot b - p \cdot b) \gamma^5 \not{k} + 6m_o(p \cdot b - k \cdot b) \gamma_5 \tau \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \not{k} S_0(p-k) \gamma^5 \not{k} S_0(p-k) \not{k} &= \frac{1}{((p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon)^2} \left[-(m_o^2 - p^2 - k^2 + 2k \cdot p) \gamma^5 \not{k} \right. \\ &\quad \left. + (2m_o^2 - p^2) \frac{k \cdot b}{k^2} + 4\frac{k \cdot p}{k^2} b \cdot p - 2p \cdot b \gamma^5 \not{k} - 2(p \cdot b - k \cdot b) \gamma^5 \not{p} + 2m_o(p \cdot b - k \cdot b) \gamma^5 \tau \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde decorre

$$\begin{aligned} \Sigma_b(p) = -ie^2 \left[- \left(-2(m_o^2 - p^2)b^\alpha \gamma_5 \gamma^\beta B^{(1)}_{\alpha\beta}(p, p) - 4p.b p^\alpha \gamma_5 \gamma^\beta B^{(1)}_{\alpha\beta}(p, p) \right. \right. \\ \left. \left. + 2b^\alpha \gamma_5 \gamma^\beta A^{(3)}_{\alpha\beta}(p, p) - 4p.b \gamma_5 \gamma^\alpha A^{(2)}_\alpha(p, p) \right) \right. \\ \left. + 4m_o \left(p.b \gamma_5 \tau A^{(1)}(p, p) - b^\alpha \gamma_5 \tau A^{(2)}_\alpha(p, p) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

com $A^{(1)}(p, p)$, $A^{(2)}_\alpha(p, p)$, $A^{(3)}_{\alpha\beta}(p, p)$ e $B^{(1)}_{\alpha\beta}(p, p)$ definidas em (3.23-3.26), tomando-se $p' = p$.

Examinando ainda (3.7), municiados pelas relações (C.13-C.18), escrevemos²

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma^\nu = \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} (2i\tau \not{k} p + i \not{p} \not{k} - i \not{k} \not{p} - 2ik^2 \tau - 2im_o \not{k}), \quad (3.15)$$

de forma que $\Sigma_\epsilon(p)$ se traduz em

$$\begin{aligned} \Sigma_\epsilon(p) = ie^2 \left(2\tau \gamma^\alpha \not{p} I^{(3)}_\alpha(p) + \not{p} \gamma^\alpha I^{(3)}_\alpha(p) - \gamma^\alpha \not{p} I^{(3)}_\alpha(p) \right. \\ \left. - 2m_o \gamma^\alpha I^{(3)}_\alpha(p) - 2\tau I^{(1)}(p) \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que $I^{(3)}_\alpha(p)$ é apresentada em (3.21).

Manipulando, por fim, o último termo que compõe a função de auto-energia (3.4) vem

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\sigma} k^\sigma \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma_5 \not{b} S_0(p-k) \gamma^\nu = \frac{2i}{((p-k)^2 - m_o^2 + i\epsilon)^2} \left[((m_o^2 - p^2)k.b + \right. \\ \left. + 2k.pb.p + k^2(k.b - 2p.b)) \gamma_5 \tau - 4im_o(p.b - k.b) \gamma_5 \not{k} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde usufruímos mais uma vez de (C.13-C.18). Este resultado reflete-se em (3.8) e fornece a expressão

$$\Sigma_{\epsilon b}(p) = e^2 \left[2i \left((m_o^2 - p^2)b^\alpha C_\alpha(p, p) + 2p.b p^\alpha C_\alpha(p, p) + b^\alpha A^{(2)}_\alpha(p, p) \right) \right]$$

²Para evitar equívocos devido à notação, ressaltamos aqui a nítida distinção entre o parâmetro infinitesimal ϵ , que fixa o contorno de Feynman para os propagadores, e o tensor antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\sigma}$.

$$\left. -2p.bA^{(1)}(p,p) \right) \gamma_5 \tau - 4im_o \left(p.b\gamma_5\gamma^\alpha C_\alpha(p,p) + b^\alpha\gamma_5\gamma^\beta B_{\alpha\beta}^{(1)}(p,p) \right) \Big], \quad (3.18)$$

com a integral $C_\alpha(p,p)$ introduzida em (3.27) a seguir, tomando-se $p' = p$.

As integrais auxiliares³ $I^{(1,2,3,4)}_*(p)$, $A^{(1,2,3)}_*(p,p')$, $B^{(1)}_*(p,p')$ e $C_*(p,p')$ que compõem os termos (3.11, 3.14, 3.16, 3.18) da auto-energia são definidas por

$$I^{(1)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.19)$$

$$I_\alpha^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.20)$$

$$I_\alpha^{(3)}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.21)$$

$$I_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.22)$$

$$A^{(1)}(p,p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.23)$$

$$A_\alpha^{(2)}(p,p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.24)$$

$$A_{\alpha\beta}^{(3)}(p,p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.25)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(1)}(p,p') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.26)$$

$$C_\alpha(p,p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}. \quad (3.27)$$

³Com o intuito de economizar espaço no texto principal, denotaremos por * os respectivos índices tensoriais apropriados a cada uma das integrais auxiliares.

O cálculo detalhado destas integrais, bem como das demais integrais auxiliares que compõem as correções radiativas abordadas neste capítulo, encontra-se delineado no Apêndice B.

Levando-se em conta (3.11, 3.14, 3.16, 3.18) e os resultados expressos em (B.76-B.103, B.112-B.114), a auto-energia fermiônica (3.4) de nosso modelo fica determinada, na aproximação de *1-loop* e em primeira ordem no parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz e CPT. Esta correção quântica ao propagador do campo fermiônico tem repercussão fenomenológica, entre outros cenários, no contexto do efeito Hall quântico, fornecendo o fator de ocupação dos níveis de Landau na presença de um campo eletromagnético externo [22, 24] e descortinando assim uma janela de investigação da violação da simetria de Lorentz em sistemas planares, que consiste na motivação principal do presente trabalho. No Capítulo 4, abordaremos a fenomenologia do efeito Hall em nosso modelo sob o prisma do cálculo da condutividade transversa, que guarda estreita relação com a correção de polarização do vácuo [20, 24] apresentada a seguir.

3.1.2 Tensor de Polarização do Vácuo

O propagador (3.3) para o fóton também é corrigido pelas flutuações quânticas do campo de gauge oriundas da interação com o campo fermiônico, sendo expresso em primeira ordem na constante de estrutura fina como [30, 39-41]

$$iD'_{F\mu\nu}(k) = iD_{F\mu\nu}(k) + iD_{F\mu\alpha}(k)i\Pi^{\alpha\beta}(k)iD_{F\beta\nu}(k), \quad (3.28)$$

onde $\Pi^{\alpha\beta}(k)$, denominado tensor de polarização do vácuo, coleciona os diagramas próprios preponderantes até segunda ordem no parâmetro de quebra b^μ , ilustrados nas Figuras 3-6.

O tensor $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ pode ser decomposto de forma conveniente como a seguir

$$i\Pi_{\mu\nu}(k) = i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) + i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k) + i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)}(k), \quad (3.29)$$

com

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) = -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_0(p)\gamma_\nu S_0(p-k)], \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k) &= -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p)\gamma_\nu S_0(p-k)] \\ &\quad -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_0(p)\gamma_\nu S_b(p-k)], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p) \gamma_\nu S_b(p-k)], \quad (3.32)$$

representados, respectivamente, por Figura 3, Figuras 4 e 5 e Figura 6. O termo (3.30) corresponde ao tensor de polarização genuíno da QED_3 redutível, ao passo que os termos (3.31) e (3.32) são característicos de nosso modelo original com quebra da simetria de Lorentz.

Damos seqüência ao cálculo do tensor de polarização desenvolvendo individualmente cada um dos termos (3.30-3.32) acima.

Elaborando o traço em (3.30), resulta

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu S_0(p) \gamma_\nu S_0(p-k)] &= \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} \text{Tr}[\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p} - \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{k} + m_o \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \tau \\ &\quad + m_o \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \tau - m_o \gamma_\mu \gamma_\nu \not{k} \tau + m_o^2 \gamma_\mu \gamma_\nu], \end{aligned} \quad (3.33)$$

de forma que, lançando mão das relações de traço (C.1-C.8), decorre

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) &= -4e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} [p_\mu(p_\nu - k_\nu) + p_\nu(p_\mu - k_\mu) \\ &\quad + (m_o^2 - p^2 + k \cdot p) g_{\mu\nu}] - 4ie^2 m_o k^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Examinando (3.34) acima, pode-se ainda escrevê-la de forma conveniente discriminando suas partes simétrica e antissimétrica,

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) = i\Pi_{\mu\nu}^{(0)SIM}(k) + i\Pi_{\mu\nu}^{(0)ASIM}(k), \quad (3.35)$$

em que

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(0)SIM}(k) &= -4e^2 [2J_{\mu\nu}^{(3)}(k) - k_\nu J_\mu^{(2)}(k) - k_\mu J_\nu^{(2)}(k) + g_{\mu\nu} k^\alpha J_\alpha^{(2)}(k) \\ &\quad + m_o^2 g_{\mu\nu} J^{(1)}(k) - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}^{(3)}(k)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)ASIM}(k) = -4ie^2 m_o k^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} J^{(1)}(k), \quad (3.37)$$

com $J_*^{(1)}(k)$, $J_*^{(2)}(k)$ e $J_*^{(3)}(k)$ definidas por

$$J^{(1)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.38)$$

$$J_{\alpha}^{(2)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{p_{\alpha}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (3.39)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(3)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{(p-k)^2 - m_o^2} \quad (3.40)$$

e calculadas em detalhe no Apêndice B.

A parte antissimétrica (3.37) do tensor de polarização é responsável pela geração dinâmica de um termo de Chern-Simons, em acordo com o teorema de Coleman. Como mencionamos no Capítulo 2, a critério de generalidade, introduzimos um termo de Chern-Simons já em “nível de árvore” em nosso modelo, de forma que (3.37) fornece uma correção ao respectivo parâmetro de massa m_{cs} .

Voltando-nos agora ao termo (3.31), observa-se que devido à relação de traço (C.12),

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \tau^m \gamma_5) = 0,$$

os termos de primeira ordem no parâmetro de quebra b^{μ} são relegados. Logo, desenvolvendo o primeiro traço presente no integrando de $i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k)$, resulta após sucessivas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma_{\mu} S_b(p) \gamma_{\nu} S_0(p-k)] = \\ &= \frac{\text{Tr}[\gamma_{\mu} (\not{p} + m_o \tau) \gamma_5 \not{k} (\not{p} + m_o \tau) \gamma_5 \not{k} (\not{p} + m_o \tau) \gamma_{\nu} (\not{p} - \not{k} + m_o \tau)]}{(p^2 - m_o^2)^3 ((p-k)^2 - m_o^2)} + O(b^3) \\ &= \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \left[-4(p^2 - m_o^2) b^2 \left(p_{\mu} p'_{\nu} + p_{\nu} p'_{\mu} + g_{\mu\nu} (m_o^2 - p \cdot p') \right) + \right. \\ &+ 8b \cdot p [-p^2 (b_{\mu} p'_{\nu} + b_{\nu} p'_{\mu}) + 2p \cdot b (p_{\mu} p'_{\nu} + p_{\nu} p'_{\mu}) + g_{\mu\nu} (p^2 p' \cdot b - 2p \cdot b p \cdot p' + m_o^2 p \cdot b)] \\ &\quad \left. + 8m_o^2 p \cdot b [(p - p') \cdot b g_{\mu\nu} + b_{\mu} p'_{\nu} + b_{\nu} p'_{\mu}] \right] \\ &+ \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \left[-4i \left\{ m_o b^2 (p^2 - m_o^2) (p^{\alpha} - p'^{\alpha}) \epsilon_{\mu\nu\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2m_o b \cdot p [(m_o^2 - p^2) b^{\alpha} \epsilon_{\mu\nu\alpha} + 2p \cdot b (p^{\alpha} - p'^{\alpha}) \epsilon_{\mu\nu\alpha}] \right\} \right] + O(b^3), \quad (3.41) \end{aligned}$$

em que definimos $p'_\mu = p_\mu - k_\mu$ para economizar notação e nos valemos deliberadamente das relações de traço (C.1-C.12).

Integrando (3.41) no trimomento p^μ segue o primeiro termo de (3.31),

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p) \gamma_\nu S_0(p-k)] = \\ & = T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) + T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k), \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que $T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k)$ e $T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k)$ compreendem, respectivamente, as integrais no espaço dos momentos dos termos simétricos e antissimétricos nos índices μ e ν presentes em (3.41). Em termos das integrais auxiliares

$$\tilde{J}^{(4)}(k) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{1}{p'^2 - m_o^2}, \quad (3.43)$$

$$\tilde{J}_\alpha^{(5)}(k) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha}{p'^2 - m_o^2}, \quad (3.44)$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta}{p'^2 - m_o^2}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma}{p'^2 - m_o^2}, \quad (3.46)$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma p_\eta}{p'^2 - m_o^2}, \quad (3.47)$$

desenvolvidas no Apêndice B, as componentes simétrica e antissimétrica de (3.42) tomam a forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) = & -2b^2 \left\{ 4\tilde{J}^{(8)\eta}_{\mu\nu\eta} - 2(k_\nu \tilde{J}^{(7)\eta}_{\mu\eta} + k_\mu \tilde{J}^{(7)\eta}_{\nu\eta}) + g_{\mu\nu} [2m_o^2 \tilde{J}^{(6)\eta}_\eta - 2\tilde{J}^{(8)\sigma\eta}_{\sigma\eta}] \right. \\ & + 2k^\alpha \tilde{J}^{(7)\eta}_{\eta\alpha} \left. \right\} + 2b^2 m_o^2 \left\{ 4\tilde{J}^{(6)}_{\mu\nu} - 2(k_\nu \tilde{J}^{(5)}_\mu + k_\mu \tilde{J}^{(5)}_\nu) + \right. \\ & \left. + g_{\mu\nu} [2m_o^2 \tilde{J}^{(4)} - 2\tilde{J}^{(6)\eta}_\eta + 2k^\alpha \tilde{J}^{(5)}_\alpha] \right\} \\ & + 4b^\alpha \left\{ -2(b_\mu \tilde{J}^{(8)\eta}_{\nu\alpha\eta} + b_\nu \tilde{J}^{(8)\eta}_{\mu\alpha\eta}) + 2(b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) \tilde{J}^{(7)\eta}_{\alpha\eta} + 8b^\beta \tilde{J}^{(8)}_{\alpha\beta\mu\nu} \right. \\ & \left. - 4b^\beta (k_\nu \tilde{J}^{(7)}_{\alpha\beta\mu} + k_\mu \tilde{J}^{(7)}_{\alpha\beta\nu}) + g_{\mu\nu} b^\beta [-2\tilde{J}^{(8)\eta}_{\alpha\beta\eta} + 4k^\sigma \tilde{J}^{(7)}_{\alpha\beta\sigma} + 2m_o^2 \tilde{J}^{(6)}_{\alpha\beta} - 2k_\beta \tilde{J}^{(7)\sigma}_{\alpha\sigma}] \right\} \end{aligned}$$

$$+4b^\alpha \left\{ 2m_o^2(b_\mu \tilde{J}_{\alpha\nu}^{(6)}) + b_\nu \tilde{J}_{\alpha\mu}^{(6)} + 2m_o^2(k.b g_{\mu\nu} - b_\mu k_\nu - b_\nu k_\mu) \tilde{J}_\alpha^{(5)} \right\}, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k) = & -4im_o \left[b^2 k^\alpha \epsilon_{\mu\nu\alpha} \left(\tilde{J}_\alpha^{(6)} - m_o^2 \tilde{J}^{(4)} \right) \right. \\ & \left. - 2b^\beta \left(m_o^2 \tilde{J}_\beta^{(5)} b^\alpha \epsilon_{\mu\nu\alpha} - \tilde{J}^{(7)}{}^\sigma{}_\beta b^\alpha \epsilon_{\mu\nu\alpha} + 2\tilde{J}_{\beta\eta}^{(6)} b^\eta k^\alpha \epsilon_{\mu\nu\alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que omitimos a dependência das integrais no trimomento k^μ em favor de uma notação mais concisa.

Agora, recordando o segundo traço que compõe o tensor $i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k)$ em (3.31), observa-se que explorando a ciclicidade do traço e efetuando as trocas $p_\mu \leftrightarrow p'_\mu$ e $\mu \leftrightarrow \nu$, este traço exhibe precisamente a mesma estrutura de (3.41)

$$\text{Tr}[\gamma_\mu S_o(p)\gamma_\nu S_b(p-k)] = \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p)\gamma_\nu S_o(p-k)] \Big|_{p_\mu \leftrightarrow p'_\mu, \mu \leftrightarrow \nu}.$$

Ademais, examinando as integrais (3.43-3.47) sob a troca $p_\mu \leftrightarrow p'_\mu$ nos integrandos, verifica-se que aquelas envolvendo potências ímpares em p^μ nos numeradores são ímpares por esta troca, ao passo que aquelas que exibem potências pares no trimomento são pares pela troca. Sendo assim, estudando os termos (3.48) e (3.49) sob a permutação dos índices μ e ν seguida por uma troca do trimomento⁴ $k_\mu \rightarrow -k_\mu$, constata-se que ambos são pares, isto é,

$$T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) \Big|_{k_\mu \rightarrow -k_\mu, \mu \leftrightarrow \nu} = T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k), \quad (3.50)$$

$$T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k) \Big|_{k_\mu \rightarrow -k_\mu, \mu \leftrightarrow \nu} = T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k). \quad (3.51)$$

Logo,

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_o(p)\gamma_\nu S_b(p-k)] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p)\gamma_\nu S_o(p-k)], \quad (3.52)$$

de forma que o tensor (3.31) fica determinado por

$$i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) + i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k), \quad (3.53)$$

com

$$i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) = -2e^2 T_{\mu\nu}^{(SIM)}(k), \quad (3.54)$$

⁴As trocas $p_\mu \leftrightarrow p'_\mu$ e $\mu \leftrightarrow \nu$ nos traços são equivalentes à seguinte sucessão de trocas: $p_\mu \rightarrow p_\mu + k_\mu$, seguida da troca $\mu \leftrightarrow \nu$ e, por fim, a troca $k_\mu \rightarrow -k_\mu$. Esta última sequência de trocas favorece o estudo das simetrias de (3.48) e (3.49).

$$i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k) = -2e^2 T_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k). \quad (3.55)$$

Por fim, elaborando o traço em (3.32), que compõe o último termo do tensor de polarização (3.29), nos beneficiamos novamente das relações de traço (C.1-C.12) para escrever

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma_\mu S_b(p)\gamma_\nu S_b(p-k)] = \\ &= \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m_o\tau)\gamma_5\not{k}(\not{p} + m_o\tau)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)\gamma_5\not{k}(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)]}{(p^2 - m_o^2)^2((p-k)^2 - m_o^2)^2} + O(b^3) \\ &= \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \left[\text{Tr}_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) + \text{Tr}_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k) \right] + O(b^3), \quad (3.56) \end{aligned}$$

com as partes simétrica e antissimétrica do traço expressas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) &= -4g_{\mu\nu}[p'^2 p^2 b^2 - 2p' \cdot p^2 (p \cdot b)^2 - 2p^2 (p' \cdot b)^2 + 4p' \cdot b p \cdot b p' \cdot p] + 8p'^2 p^2 b_\mu b_\nu \\ &\quad - 8p' \cdot p \cdot b(p_\mu b_\nu + p_\nu b_\mu) - 8p^2 p' \cdot b(p'_\mu b_\nu + p'_\nu b_\mu) + 16p' \cdot b p \cdot b(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu) \\ &\quad + m_o^2 \left[8g_{\mu\nu}(2b \cdot p b \cdot p' - b^2 p' \cdot p) + 16p \cdot p' b_\mu b_\nu + 8b^2(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu) \right. \\ &\quad \left. - 8p' \cdot b(p_\mu b_\nu + p_\nu b_\mu) - 8p \cdot b(p'_\mu b_\nu + p'_\nu b_\mu) - 4g_{\mu\nu} \left(2(b \cdot p')^2 + 2(b \cdot p)^2 - b^2(p^2 + p'^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - 8(p^2 + p'^2)b_\mu b_\nu + 8p' \cdot b(p'_\mu b_\nu + p'_\nu b_\mu) + 8p \cdot b(p_\mu b_\nu + p_\nu b_\mu) \right] + m_o^4 (-4b^2 g_{\mu\nu} + 8b_\mu b_\nu) \\ &\quad + m_o^2 \left[8g_{\mu\nu} b^2 p' \cdot p - 16p \cdot p' b_\mu b_\nu - 8b^2(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu) \right. \\ &\quad \left. + 8p' \cdot b(p_\mu b_\nu + p_\nu b_\mu) + 8p \cdot b(p'_\mu b_\nu + p'_\nu b_\mu) \right] \quad (3.57) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k) &= m_o \left\{ 16ip \cdot b p' \cdot b p^\sigma \epsilon_{\sigma\mu\nu} + 8ip'^2 b^2 p^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - 8ip^2 p' \cdot b b^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} + 8ip'^2 b^\beta p^\alpha (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) - 16ib \cdot p' b \cdot p p'^\sigma \epsilon_{\sigma\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + m_o^2 \left[8ib^2 (p'^\alpha - p^\alpha) \epsilon_{\alpha\mu\nu} + 8i(p'^\alpha - p^\alpha) b^\beta (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) \right] \right\}. \quad (3.58) \end{aligned}$$

Integrando (3.57) e (3.58) no trimomento p^μ , resulta

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{SIM(bb)}(k) &= -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_{\mu\nu}^{(SIM)}(k) \\
&= -e^2 \left\{ -4g_{\mu\nu} [b^2 J_{\eta\sigma}^{(8)\eta\sigma} - 2b^2 k^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} + b^2 k^2 J_{\eta}^{(6)\eta} - 2(k.b)^2 J_{\eta}^{(6)\eta} - 2b^\alpha b^\beta k^2 J_{\alpha\beta}^{(6)} \right. \\
&\quad + 4k.bb^\alpha k^\beta J_{\alpha\beta}^{(6)}] + 8b_\mu b_\nu J_{\eta\sigma}^{(8)\eta\sigma} - 16b^\alpha (b_\mu J_{\eta\nu\alpha}^{(8)\eta} + b_\nu J_{\eta\mu\nu}^{(8)\eta}) \\
&\quad - 16b_\mu b_\nu k^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} + 8(b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) b^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} + 8k.b (b_\mu J_{\eta\nu}^{(7)\eta} + b_\nu J_{\eta\mu}^{(7)\eta}) \\
&\quad + 16b^\alpha k^\beta (b_\mu J_{\alpha\beta\nu}^{(7)} + b_\nu J_{\alpha\beta\mu}^{(7)}) - 16b^\alpha b^\beta (k_\mu J_{\alpha\beta\nu}^{(7)} + k_\nu J_{\alpha\beta\mu}^{(7)}) - 32k.bb^\alpha J_{\alpha\mu\nu}^{(7)} \\
&\quad - 8k.b (b_\mu k_\nu + b_\nu k_\mu) J_{\eta}^{(6)\eta} + 8b_\mu b_\nu k^2 J_{\eta}^{(6)\eta} - 8k^2 b^\alpha (b_\mu J_{\alpha\nu}^{(6)} + b_\nu J_{\alpha\mu}^{(6)}) \\
&\quad \left. + 16k.bb^\alpha (k_\mu J_{\alpha\nu}^{(6)} + k_\nu J_{\alpha\mu}^{(6)}) + 32b^\alpha b^\beta J_{\alpha\beta\mu\nu}^{(8)} \right. \\
&+ m_o^2 \left[-4g_{\mu\nu} (2(k.b)^2 - b^2 k^2) J^{(4)} + 16b^2 J_{\mu\nu}^{(6)} - 8b^2 (k_\mu J_\nu^{(5)} + k_\nu J_\mu^{(5)}) - 8b_\mu b_\nu k^2 J^{(4)} \right. \\
&\quad \left. + 8k.b (k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu) J^{(4)} \right] + m_o^4 (-4b^2 g_{\mu\nu} + 8b_\mu b_\nu) J^{(4)} \\
&+ m_o^2 \left[8b^2 g_{\mu\nu} (J_{\eta}^{(6)\eta} - k^\alpha J_{\alpha}^{(5)}) - 16b_\mu b_\nu J_{\eta}^{(6)\eta} + 16b_\mu b_\nu k^\alpha J_{\alpha}^{(5)} - 8(k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu) b^\alpha J_{\alpha}^{(5)} \right. \\
&\quad \left. + 8b^2 (k_\mu J_\nu^{(5)} + k_\nu J_\mu^{(5)}) - 8k.b (b_\mu J_\nu^{(5)} + b_\nu J_\mu^{(5)}) - 16b^2 J_{\mu\nu}^{(6)} + 16b^\alpha (b_\mu J_{\alpha\nu}^{(6)} + b_\nu J_{\alpha\mu}^{(6)}) \right] \Big\} \\
&\quad + O(b^4) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{(ASIM)(bb)}(k) &= -e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_{\mu\nu}^{(ASIM)}(k) \\
&= -e^2 m_o \left\{ 8ib^2 g^{\alpha\beta} J_{\eta\beta}^{(7)\eta} \epsilon_{\alpha\mu\nu} - 8ib^\alpha b^\beta J_{\eta\beta}^{(7)\eta} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \right. \\
&\quad + 8ib^\beta (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) g^{\alpha\eta} J_{\sigma\eta}^{(7)\sigma} - 16ib^2 k^\sigma g^{\alpha\beta} J_{\beta\sigma}^{(6)} \epsilon_{\alpha\mu\nu} + 8ik.bb^\alpha J_{\eta}^{(6)\eta} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \\
&\quad + 16ik^\sigma b^\alpha b^\beta J_{\alpha\beta}^{(6)} \epsilon_{\sigma\mu\nu} - 16ik^\sigma b^\beta (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) g^{\alpha\eta} J_{\sigma\eta}^{(6)} + 8ik^2 b^2 g^{\alpha\beta} J_{\beta}^{(5)} \epsilon_{\alpha\mu\nu} \\
&\quad - 16ik.bb^\alpha k^\sigma J_{\alpha}^{(5)} \epsilon_{\sigma\mu\nu} + 8ik^2 b^\beta (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) g^{\alpha\eta} J_{\eta}^{(5)} \\
&\quad \left. - 8im_o^2 \left[b^2 k^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} J^{(4)} + k^\alpha b^\beta (b_\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu} - b_\mu \epsilon_{\alpha\beta\nu}) J^{(4)} \right] \right\} + O(b^4), \tag{3.60}
\end{aligned}$$

onde definimos convenientemente as partes simétrica e antissimétrica do tensor de polarização (3.32),

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = i\Pi_{\mu\nu}^{(SIM)(bb)}(k) + i\Pi_{\mu\nu}^{(ASIM)(bb)}(k) \quad (3.61)$$

e introduzimos as integrais

$$J^{(4)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{1}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (3.62)$$

$$J_{\alpha}^{(5)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_{\alpha}}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (3.63)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (3.64)$$

$$J_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_{\alpha}p_{\beta}p_{\sigma}}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (3.65)$$

$$J_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_{\alpha}p_{\beta}p_{\sigma}p_{\eta}}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (3.66)$$

discutidas em detalhe no Apêndice B.

Levando em conta (3.29, 3.35, 3.53, 3.61) e os resultados colecionados no Apêndice B, o tensor de polarização do vácuo fica completamente estabelecido na aproximação de $1 - loop$ e em segunda ordem no parâmetro axial de quebra da simetria de Lorentz b^{μ} , permanecendo válida até termos de quarta ordem neste parâmetro.

Notavelmente, a influência do termo de quebra sobre o tensor de polarização é restrita. Todavia, mesmo diminutas, tais contribuições podem se manifestar em observáveis físicos, como o potencial eletrostático e a condutividade transversa, e serão examinadas no próximo capítulo.

Conservação da Carga Elétrica

Naturalmente, conforme discutido no Capítulo 2, a densidade lagrangiana de nosso modelo é invariante sobre transformações de gauge globais induzidas pela ação do grupo $U(1)$ sobre os campos, o que assegura a invariância da carga elétrica.

Para verificarmos explicitamente esta simetria, bem como a validade das expressões para o tensor de polarização que obtivemos, contraímos cada termo que compõe (3.29) com o trivetor k^{μ} .

Sendo assim, efetuando a contração com (3.35) obtemos

$$k^{\mu}i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) = k^{\mu}i\Pi_{\mu\nu}^{(0)SIM}(k) + k^{\mu}i\Pi_{\mu\nu}^{(0)ASIM}(k), \quad (3.67)$$

com

$$k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(0)SIM}(k) = -4e^2[2k^\mu J_{\mu\nu}^{(3)}(k) - k^\mu k_\nu J_\mu^{(2)}(k) - k^2 J_\nu^{(2)}(k) + k_\nu k^\alpha J_\alpha^{(2)}(k) + m_o^2 k_\nu J^{(1)}(k) - k_\nu g^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}^{(3)}(k)] = 0 \quad (3.68)$$

e

$$k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(0)ASIM}(k) = -4ie^2 m_o k^\mu k^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu} J^{(1)}(k) = 0, \quad (3.69)$$

onde (3.69) é evidente pela antissimetria do tensor de Levi-Civita e, de acordo com (B.133-B.142), decorre (3.68).

Por sua vez, contraindo o trimomento k^μ com (3.53) segue

$$k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) + k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k), \quad (3.70)$$

em que

$$\begin{aligned} & k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) = \\ & = -e^2 \left\{ b_\nu \left[-16b^\alpha k^\mu \tilde{J}_{\eta\mu\alpha}^{(8)\eta} + 16k^2 b^\alpha \tilde{J}_{\eta\alpha}^{(7)\eta} + 16m_o^2 k^\mu b^\alpha \tilde{J}_{\alpha\mu}^{(6)} - 16m_o^2 k^2 b^\alpha \tilde{J}_\alpha^{(5)} \right] \right. \\ & + k_\nu \left[8b^2 \tilde{J}_{\sigma\eta}^{(8)\sigma\eta} - 16b^\alpha b^\beta \tilde{J}_{\eta\alpha\beta}^{(8)\eta} - 16b^2 m_o^2 \tilde{J}_\eta^{(6)\eta} + 16m_o^2 b^\alpha b^\beta \tilde{J}_{\alpha\beta}^{(6)} + 8b^2 m_o^4 \tilde{J}^{(4)} \right] \\ & - 16b^2 k^\mu \tilde{J}_{\eta\mu\nu}^{(8)\eta} - 16k.bb^\alpha \tilde{J}_{\eta\alpha\nu}^{(8)\eta} + 64b^\alpha b^\beta k^\mu \tilde{J}_{\alpha\beta\mu\nu}^{(8)} + 8b^2 k^2 \tilde{J}_{\eta\nu}^{(7)\eta} - 32k^2 b^\alpha b^\beta \tilde{J}_{\alpha\beta\nu}^{(7)} \\ & \left. + 16b^2 m_o^2 k^\mu \tilde{J}_{\mu\nu}^{(6)} + 16m_o^2 k.bb^\alpha \tilde{J}_{\alpha\nu}^{(6)} - 8b^2 k^2 m_o^2 \tilde{J}_\nu^{(5)} \right\}, \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k) = -16ie^2 m_o (m_o^2 \tilde{J}_\beta^{(5)} - \tilde{J}_{\sigma\beta}^{(7)\sigma}) b^\beta b^\alpha k^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha}. \quad (3.72)$$

Analogamente, contraindo (3.61) vem

$$k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) + k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k), \quad (3.73)$$

com

$$\begin{aligned} & k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) = -e^2 \left\{ b_\nu \left[8k.bb^\alpha J_{\eta\sigma}^{(8)\eta\sigma} - 16k^\mu b^\alpha J_{\eta\mu\alpha}^{(8)\eta} + 8k^2 b^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} - 8k.bb^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} \right. \right. \\ & \left. + 16b^\alpha k^\beta k^\mu J_{\alpha\beta\mu}^{(7)} + 8(2m_o^2 - k^2) b^\alpha k^\mu J_{\alpha\mu}^{(6)} - 16m_o^2 k.bb^\alpha J_{\eta\alpha}^{(6)\eta} + 8m_o^2 k.bb^\alpha J_{\eta\alpha}^{(5)} \right. \\ & \left. - 8m_o^2 k^2 b^\alpha J_{\eta\alpha}^{(5)} + 8m_o^4 k.bb^\alpha J_{\eta\alpha}^{(4)} \right] + k_\nu \left[-4b^2 J_{\sigma\eta}^{(8)\sigma\eta} + 8b^2 k^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} + 4b^2 (2m_o^2 - k^2) J_{\eta\alpha}^{(6)\eta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8k^2b^\alpha b^\beta J_{\alpha\beta}^{(6)} + 8k.bb^\alpha J_{\eta\alpha}^{(7)\eta} - 16b^\alpha b^\beta k^\mu J_{\alpha\beta\mu}^{(7)} - 4m_o^2b^2(k^2 + m_o^2)J^{(4)} \\
& \quad + 8b^2m_o^2k^\mu J_\mu^{(5)} - 8m_o^2k.bb^\alpha J_\alpha^{(5)} \Big] - 16k.bb^\alpha J_{\eta\nu\alpha}^{(8)\eta} \\
& \quad + 32b^\alpha b^\beta k^\mu J_{\alpha\beta\mu\nu}^{(8)} + 8(k.b)^2 J_{\eta\nu}^{(7)\eta} - 16k.bb^\mu b^\alpha J_{\alpha\mu\nu}^{(7)} \\
& \quad - 16k^2b^\alpha b^\beta J_{\alpha\beta\nu}^{(7)} + 8k.b(2m_o^2 + k^2)b^\alpha J_{\alpha\nu}^{(6)} - 8m_o^2(k.b)^2 J_\nu^{(5)} \Big\}, \quad (3.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k) &= -8ie^2m_o(k.bJ_\eta^{(6)\eta}k^\alpha - 2k.bb^\sigma J_\sigma^{(6)\alpha} \\
& \quad + k^2k.bJ^{(5)\alpha} - m_o^2k.bb^\alpha J^{(4)})b^\beta \epsilon_{\alpha\nu\beta}. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

De posse destas relações e tomando vantagem novamente de (B.143-B.186), resultam

$$k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) + k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(k) = 0, \quad (3.76)$$

$$k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k) + k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(k) = 0. \quad (3.77)$$

Colecionando (3.68, 3.69, 3.76, 3.77), evidenciamos explicitamente a relação

$$k^\mu i\Pi_{\mu\nu}(k) = k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) + k^\mu i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)}(k) + k^\mu i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)}(k) = 0, \quad (3.78)$$

que advém da equação da continuidade e, de fato, manifesta a conservação da carga elétrica e a simetria de gauge da teoria, via teorema de Noether [39, 41].

3.1.3 Vértice Eletromagnético

O vértice eletromagnético introduz a interação entre o campo de gauge e o campo fermiônico, via princípio de gauge. Esta interação recebe correções quânticas devido às flutuações dos campos, sendo a contribuição de primeira ordem na constante de estrutura fina (Figuras 8-10) expressa por [39, 41]

$$-ie\Gamma_\mu(p', p) = -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} iD^{\nu\alpha}(k)\gamma_\nu iS_F(p' - k)\gamma^\mu iS_F(p - k)\gamma_\alpha, \quad (3.79)$$

em que p'_μ e p_μ designam os trimomentos associados aos campos fermiônicos externos e k_μ é o trimomento do fóton interno.

Para nossos propósitos, adotaremos a aproximação “*on-shell*” ao desenvolvermos o cálculo do vértice. Esta aproximação consiste no caso especial em

que as linhas fermiônicas externas são essencialmente livres, sem inserções de gauge ou do termo de quebra [41]; isto é, deve-se subentender um elemento de matriz da forma $\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu(p',p)u_r(p)$, com $\bar{u}_s(p')$ e $u_r(p)$ spinores livres, de momentos e spins p', p e s, r , respectivamente, que projeta os operadores que atuam sobre os campos fermiônicos externos ao vértice em seus valores livres, de modo que

$$\bar{u}_s(p')\not{p}'u_r(p) = \bar{u}_s(p')m_o\tau u_r(p)$$

e

$$\bar{u}_s(p')\not{p}u_r(p) = \bar{u}_s(p')m_o\tau u_r(p)$$

seguem diretamente da equação de movimento.

Tendo em mente esta aproximação, prosseguimos com o cálculo do vértice (3.79) nos mantendo em primeira ordem no parâmetro de quebra da simetria de Lorentz, assim como fizemos no cálculo da auto-energia fermiônica, visto que estas correções radiativas guardam estreita relação via identidade de Ward, como discutiremos em seguida.

Sendo assim, podemos decompor (3.79) como

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu(p',p)u_r(p) = -ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(0)}(p',p)u_r(p) - ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(b)}(p',p)u_r(p) \quad (3.80)$$

onde definimos

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(0)}(p',p)u_r(p) = -e^3\bar{u}_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D^{\nu\alpha}(k)\gamma_\nu S_0(p'-k)\gamma^\mu S_0(p-k)\gamma_\alpha u_r(p), \quad (3.81)$$

e

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(b)}(p',p)u_r(p) = -e^3\bar{u}_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D^{\nu\alpha}(k)\gamma_\nu S_b(p'-k)\gamma^\mu S_0(p-k)\gamma_\alpha u_r(p) \\ -e^3\bar{u}_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D^{\nu\alpha}(k)\gamma_\nu S_0(p'-k)\gamma^\mu S_b(p-k)\gamma_\alpha u_r(p). \quad (3.82)$$

A expressão (3.81) representa o vértice original da QED_3 quiral, ao passo que (3.82) exhibe as contribuições do termo de quebra da simetria de Lorentz.

Efetuada a contração de cada termo do propagador do fóton em (3.81), podemos escrever

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(0)}(p', p)u_r(p) = -e^3 \left[I_{a\mu}(p', p) + I_{b\mu}(p', p) + I_{c\mu}(p', p) \right], \quad (3.83)$$

com

$$I_a^\mu(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \cdot \\ \cdot \bar{u}_s(p')\gamma^\alpha(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)\gamma_\alpha u_r(p), \quad (3.84)$$

$$I_b^\mu(p', p) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \cdot \\ \cdot \bar{u}_s(p')\not{k}(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)\not{k}u_r(p), \quad (3.85)$$

$$I_c^\mu(p', p) = im_{cs} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2 + i\epsilon} \cdot \\ \cdot \bar{u}_s(p')\epsilon^{\nu\alpha\beta}k_\beta\gamma_\nu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)\gamma_\alpha u_r(p). \quad (3.86)$$

Desenvolvendo o produto matricial em (3.84), vem⁵

$$\bar{u}_s(p')\gamma^\alpha(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m_o\tau)\gamma_\alpha u_r(p) = \left[4p' \cdot p - 4(p' + p) \cdot k + k^2 \right] \gamma^\mu \\ - 4m_o k^\mu \tau + \left[4(p'^\mu + p^\mu) - 2k^\mu \right] \not{k} \quad (3.87)$$

e, em decorrência, segue

$$I_a^\mu(p', p) = 4p' \cdot p \gamma^\mu A^{(1)}(p', p) + \\ + \left[-4\gamma^\mu(p' + p)^\alpha + 4(p' + p)^\mu \gamma^\alpha - 4m_o\tau g^{\mu\alpha} \right] A_\alpha^{(2)}(p', p) + \\ + [g^{\alpha\beta}\gamma^\mu - 2g^{\mu\alpha}\gamma^\beta] A_{\alpha\beta}^{(3)}(p', p), \quad (3.88)$$

com as integrais auxiliares apresentadas em (3.23-3.25).

⁵Em favor da economia de espaço no texto, doravante suprimiremos os spinores livres no segundo membro das expressões que compõem o vértice, como em (3.87).

Voltando-nos ao produto de matrizes em (3.85), temos

$$\bar{u}_s(p') \not{k} (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_o \tau) \not{k} u_r(p) = \left[4p' \cdot k p \cdot k - 2k^2(p' + p) \cdot k + (k^2)^2 \right] \gamma^\mu, \quad (3.89)$$

de modo que

$$I_b^\mu(p, p') = \left[4p^\alpha p'^\beta B_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') - 2(p' + p)^\alpha B_\alpha^{(2)}(p, p') + B^{(3)}(p, p') \right] \gamma^\mu, \quad (3.90)$$

onde recordamos (3.26) e definimos as integrais auxiliares

$$B_\alpha^{(2)}(p, p') = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (3.91)$$

e

$$B^{(3)}(p, p') = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k^2}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (3.92)$$

que se encontram no Apêndice B.

Desenvolvendo por sua vez o produto matricial em (3.86), com o auxílio das relações algébricas (C.13-C.18), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p') \epsilon^{\nu\alpha\beta} k_\beta \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_o \tau) \gamma_\alpha u_r(p) = \\ = \left[4\epsilon^{\nu\alpha\beta} k_\beta p'_\nu p_\alpha + 4im_o k^2 \right] \gamma^\mu - 4ik^2 p'^\mu \tau - 4ik^2 p^\mu \tau \\ + 2ik^2 k^\mu \tau + 2ip' \cdot k \gamma^\mu \not{k} \tau + 2ip \cdot k \not{k} \gamma^\mu \tau, \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde decorre

$$\begin{aligned} I_c^\mu(p', p) = im_{cs} \left[\left(4im_o \gamma^\mu - 4ip'^\mu \tau - 4ip^\mu \tau \right) A^{(1)}(p', p) + 2ig^{\mu\alpha} \tau A_\alpha^{(2)}(p', p) \right. \\ \left. + 4\epsilon^{\nu\alpha\beta} p'_\nu p_\alpha \gamma^\mu C_\beta^{(0)}(p', p) - 2i(p'^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \tau + p^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \tau) B_{\alpha\beta}^{(1)}(p', p) \right], \end{aligned} \quad (3.94)$$

devido a (3.23, 3.24, 3.26, 3.27).

As expressões (3.88, 3.90, 3.94) determinam completamente o vértice (3.83) da QED_3 genuína.

Considerando agora a contribuição do termo de quebra da simetria de Lorentz ao vértice, examinamos (3.82) “*on-shell*” em primeira ordem em b^μ e na condição de “espalhamento progressivo” (i.e. *forward scattering*), que impõe $q_\mu = p'_\mu - p_\mu = 0$ [41]. Tomamos aqui esta aproximação mais restritiva com o propósito de simplificar o cálculo deste termo e extrair do vértice com quebra apenas a informação necessária para a análise da identidade de Ward em nosso modelo⁶.

Sendo assim, decompomos de forma conveniente (3.82) como

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(b)}(p'; q=0)u_r(p') = -e^3I_\mu^{(b)}(p'; q=0), \quad (3.95)$$

onde

$$I_\mu^{(b)}(p'; q=0) = I_{g\mu}^{(b)}(p'; q=0) + I_{\epsilon\mu}^{(b)}(p'; q=0) \quad (3.96)$$

e

$$\begin{aligned} I_{g\mu}^{(b)}(p'; q=0) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]^3} \cdot \\ &\cdot \bar{u}_s(p')\gamma_\nu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau) \left[\gamma_5 \not{b}(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma_5 \not{b} \right] \cdot \\ &\cdot (\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\nu u_r(p'), \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} I_{\epsilon\mu}^{(b)}(p'; q=0) &= im_{cs} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]^3} \cdot \\ &\cdot \epsilon^{\nu\alpha\beta} k_\beta \bar{u}_s(p')\gamma_\nu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau) \left[\gamma_5 \not{b}(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma_5 \not{b} \right] \cdot \\ &\cdot (\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma_\alpha u_r(p'), \end{aligned} \quad (3.98)$$

em que (3.97) e (3.98) vêm da contração do propagador do fóton com os tensores em (3.82), suprimindo-se os termos em $k_\mu k_\nu$ deste propagador tendo em conta que tais termos não contribuem para a matriz de espalhamento [39, 41].

⁶Conforme será discutido no Capítulo 4, o vértice de primeira ordem em b^μ não contribui para o momento magnético do elétron em (2+1) dimensões, alvo de nossa investigação, o que justifica simplificarmos seu cálculo com o intuito de extrair apenas a informação essencial à simetria de gauge do modelo através da aproximação de “espalhamento progressivo”. Contudo, ressaltamos que em segunda ordem no parâmetro de quebra pode haver contribuição não nula ao momento magnético, de modo que a aproximação empregada seria inadequada neste caso e dever-se-ia efetuar o cálculo “*on-shell*” com $p'_\mu \neq p_\mu$. Reservamos este estudo a investigações futuras.

Elaborando o produto matricial em (3.97), resulta

$$\begin{aligned}
\bar{u}_s(p')\gamma_\nu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau) & \left[\gamma_5 \not{b}(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma_5 \not{b} \right] \cdot \\
& \cdot (\not{p}' - \not{k} + m_o\tau)\gamma^\nu u_r(p') = \\
& = 8m_o^2 \left[(p'.b - k.b)\gamma_5\gamma^\mu + (p' - k)^\mu\gamma_5\not{b} + b^\mu\gamma_5\not{k} \right] \\
& - 8m_o \left[(p'.b - k.b)k^\mu\gamma_5\tau + (p' - k)^\mu k.b\gamma_5\tau + b^\mu k^2\gamma_5\tau \right] \\
& + 2 \left[(p'.b - k.b)k^2\gamma_5\gamma^\mu - 2(p'.b - k.b)k^\mu\gamma_5\not{k} + (p' - k)^\mu k^2\gamma_5\not{b} \right. \\
& \left. - 2(p' - k)^\mu k.b\gamma_5\not{k} - b^\mu k^2\gamma_5\not{k} + 2k.p'b^\mu\gamma_5\not{k} + 2m_o k^2 b^\mu\gamma_5\tau \right], \quad (3.99)
\end{aligned}$$

de modo que (3.97) se traduz em

$$\begin{aligned}
I_{g\mu}^{(b)}(p'; q=0) & = 8m_o^2 \left[p'.b\gamma_5\gamma^\mu G - b_\alpha\gamma_5\gamma^\mu G^\alpha + p'^\mu\gamma_5\not{b}G - \gamma_5\not{b}G^\mu + b^\mu\gamma_5\gamma_\alpha G^\alpha \right] \\
& - 8m_o \left[p'.b\gamma_5\tau G^\mu - b_\alpha\gamma_5\tau G^{\mu\alpha} + p'^\mu b_\alpha\gamma_5\tau G^\alpha - b_\alpha\gamma_5\tau G^{\alpha\mu} + b^\mu\gamma_5\tau g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right] \\
& + 2 \left[p'.b\gamma_5\gamma^\mu g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - b_\alpha\gamma_5\gamma^\mu g_{\beta\lambda} G^{\alpha\beta\lambda} - 2p'.b\gamma_5\gamma_\alpha G^{\alpha\mu} + 2b_\alpha\gamma_5\gamma_\beta G^{\alpha\beta\mu} \right. \\
& + p'^\mu\gamma_5\not{b}g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - \gamma_5\not{b}g_{\alpha\beta} G^{\mu\alpha\beta} - 2p'^\mu b_\alpha\gamma_5\gamma_\beta G^{\alpha\beta} + 2b_\alpha\gamma_5\gamma_\beta G^{\alpha\beta\mu} - b^\mu\gamma_5\gamma_\alpha g_{\beta\lambda} G^{\alpha\beta\lambda} \\
& \left. + 2p'_\alpha b^\mu\gamma_5\gamma_\beta G^{\alpha\beta} + 2m_o b^\mu\gamma_5\tau g_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} \right], \quad (3.100)
\end{aligned}$$

com

$$G(p'; q=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.101)$$

$$G_\alpha(p'; q=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.102)$$

$$G_{\alpha\beta}(p'; q=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.103)$$

$$G_{\alpha\beta\lambda}(p'; q=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.104)$$

nas quais omitimos o parâmetro $i\epsilon$. Assim como as demais integrais auxiliares deste capítulo, as integrais acima encontram-se delineadas no Apêndice B.

Apurando, por seu turno, o produto matricial em (3.98), decorre

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\nu\alpha\beta} k_{\beta} \bar{u}_s(p') \gamma_{\nu} (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) & \left[\gamma_5 \not{b} (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma^{\mu} + \gamma^{\mu} (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma_5 \not{b} \right] \cdot \\
& \cdot (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma_{\alpha} u_r(p) = \\
& = -8im_o \left[(\not{p}' \cdot b - k \cdot b) k^2 \gamma_5 \gamma^{\mu} + (\not{p}' - k)^{\mu} k^2 \gamma_5 \not{b} \right] \\
& + 8i \left[(\not{p}' \cdot b - k \cdot b) k \cdot p k^{\mu} \gamma_5 \tau + (\not{p}' - k)^{\mu} k \cdot b k \cdot p' \gamma_5 \tau \right] \\
& + 4i \left[(\not{p}' \cdot b - k \cdot b) k^2 k^{\mu} \gamma_5 \tau + (\not{p}' - k)^{\mu} k \cdot b k^2 \gamma_5 \tau \right] \\
& + 4i \left[(k^2)^2 b^{\mu} \gamma_5 \tau - m_o b^{\mu} k^2 \gamma_5 \not{k} - k \cdot p' k^2 b^{\mu} \gamma_5 \tau \right] \quad (3.105)
\end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}
I_{\epsilon\mu}^{(b)}(p'; q=0) & = im_{cs} \left\{ -8im_o \left[\not{p}' \cdot b \gamma_5 \gamma^{\mu} G - b_{\alpha} \gamma_5 \gamma^{\mu} G^{\alpha} + p'^{\mu} \gamma_5 \not{b} G - \gamma_5 \not{b} G^{\mu} \right] \right. \\
& + 8i \left[\not{p}' \cdot b p'_{\alpha} \gamma_5 \tau E^{\alpha\mu} - b_{\alpha} p'_{\beta} \gamma_5 \tau E^{\mu\alpha\beta} + p'^{\mu} p'_{\beta} b_{\alpha} \gamma_5 \tau E^{\alpha\beta} - b_{\alpha} p'_{\beta} \gamma_5 \tau E^{\alpha\beta\mu} \right] \\
& + 4i \left[\not{p}' \cdot b \gamma_5 \tau G^{\mu} - b_{\alpha} \gamma_5 \tau G^{\alpha\mu} + p'^{\mu} b_{\alpha} \gamma_5 \tau G^{\alpha} - b_{\alpha} \gamma_5 \tau G^{\alpha\mu} \right] \\
& \left. + 4i \left[b^{\mu} \gamma_5 \tau g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - m_o b^{\mu} \gamma_5 \gamma^{\alpha} G_{\alpha} - b^{\mu} p'_{\alpha} \gamma_5 \tau G^{\alpha} \right] \right\}, \quad (3.106)
\end{aligned}$$

em que introduzimos as novas integrais auxiliares

$$E_{\alpha\beta}(p'; q=0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{[(p-k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.107)$$

$$E_{\alpha\beta\lambda}(p'; q=0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_{\alpha} k_{\beta} k_{\lambda}}{[(p-k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (3.108)$$

apresentadas no Apêndice B.

As expressões (3.95, 3.96, 3.100, 3.106) determinam a contribuição do termo de quebra da simetria de Lorentz ao vértice eletromagnético no limite de resolução adequado a nosso intento.

Identidade de Ward

A identidade de Ward, expressa por

$$\bar{u}_s(p) \Gamma_\mu(p; q = 0) u_r(p) = \bar{u}_s(p) \left(-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) \right) u_r(p), \quad (3.109)$$

reflete a simetria de gauge, já enaltecida e evidenciada em nosso modelo.

Com a intenção de afirmar a validade das expressões obtidas para o vértice e para a auto-energia fermiônica, verificaremos explicitamente (3.109) a seguir.

Neste sentido, diferenciando (3.11) e (3.16) em relação a p^μ , multiplicando (3.83) por i/e e somando as referidas expressões, municiados por (3.88, 3.90, 3.94), segue

$$\begin{aligned} & \bar{u}_s(p) \left[\Gamma_\mu^{(0)}(p; q = 0) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} (\Sigma_0(p) + m_{cs} \Sigma_\epsilon(p)) \right] u_r(p) = \\ & = -\bar{u}_s(p) i e^2 \left[2A_g^{(3)}(q = 0) + 2m_o^2 A_{pp}^{(3)}(q = 0) - 12m_o^2 C_{gp}^{(2)}(q = 0) \right. \\ & \quad \left. - 4m_o^4 C_{ppp}^{(2)}(q = 0) - 2I_g^{(4)}(q = 0) - 2m_o^2 I_{pp}^{(4)}(q = 0) \right] \gamma_\mu u_r(p) \\ & + \bar{u}_s(p) i e^2 m_o m_{cs} \left[-2A_p^{(2)}(q = 0) + 2I_p^{(3)}(q = 0) - 4B_g^{(1)}(q = 0) \right. \\ & \quad \left. - 4m_o^2 B_{pp}^{(1)}(q = 0) \right] \gamma_\mu u_r(p) \end{aligned} \quad (3.110)$$

em que introduzimos a integral auxiliar definida por

$$C_{\alpha\beta\mu}^{(2)}(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\mu}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (3.111)$$

desenvolvida no Apêndice B, e lançamos mão das expressões pertinentes colecionadas no referido apêndice. Apurando o membro direito de (3.110), verifica-se que os dois termos linearmente independentes que o compõem se anulam independentemente, confirmando a identidade de Ward da teoria na ausência do termo de quebra da simetria de Lorentz,

$$\bar{u}_s(p) \Gamma_\mu^{(0)}(p; q = 0) u_r(p) = \bar{u}_s(p) \left[-\frac{\partial}{\partial p^\mu} (\Sigma_0(p) + m_{cs} \Sigma_\epsilon(p)) \right] u_r(p). \quad (3.112)$$

Similarmente, diferenciando (3.14, 3.18) em relação a p^μ , multiplicando (3.85) por i/e e somando as relações obtidas, resulta

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_s(p) \left[\Gamma_\mu^{(b)}(p; q=0) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} (\Sigma_b(p) + m_{cs} \Sigma_{\epsilon b}(p)) \right] u_r(p) = \\
= & -ie^2 m_o \bar{u}_s(p) \left[8m_o^2 G_p(q=0) + 8G_g(q=0) - 2G_{gp}(q=0) - 2m_o^2 G_{ppp}(q=0) \right. \\
& \left. - 16G_g(q=0) - 8G_{gp}(q=0) + 4A^{(1)}(q=0) + 2A_p^{(2)}(q=0) \right] b_\mu \gamma_5 \tau u_r(p) \\
& -ie^2 m_{cs} \bar{u}_s(p) \left[-12G_g(q=0) - 4m_o^2 G_{pp}(q=0) + 8m_o^2 G_p(q=0) \right. \\
& \left. + 4A^{(1)}(q=0) \right] b_\mu \gamma_5 \tau u_r(p), \tag{3.113}
\end{aligned}$$

onde utilizamos os termos adequados das integrais auxiliares envolvidas e tiramos proveito das seguintes identidades válidas “*on-shell*”

$$\bar{u}_s(p) p \cdot b \gamma_5 \gamma^\mu u_r(p) = \bar{u}_s(p) p^\mu \gamma_5 \not{b} u_r(p), \tag{3.114}$$

$$\bar{u}_s(p) p \cdot b \gamma_5 \tau u_r(p) = \bar{u}_s(p) m_o \gamma_5 \not{b} u_r(p), \tag{3.115}$$

que decorrem da álgebra de Clifford (2.3) e das relações (3.80, 3.81) e podem ser interpretadas como “correntes axiais” induzidas pelo termo de quebra, como discutido no Capítulo 4.

Avaliando o segundo membro de (3.113), subsidiados pelos resultados do Apêndice B, verifica-se que cada um dos termos linearmente independentes da soma que o compõe também se anula individualmente, culminando na identidade de Ward axial

$$\bar{u}_s(p) \Gamma_\mu^{(b)}(p; q=0) u_r(p) = \bar{u}_s(p) \left[-\frac{\partial}{\partial p^\mu} (\Sigma_b(p) + m_{cs} \Sigma_{\epsilon b}(p)) \right] u_r(p). \tag{3.116}$$

As relações (3.112) e (3.116) confirmam a identidade de Ward (3.109), corroborando as expressões que obtivemos para o vértice e a auto-energia fermiônica, amalgamadas pela simetria de gauge.

3.2 Renormalizabilidade e o Infravermelho

Estudando o grau superficial de divergência [39] das integrais auxiliares que definem as correções radiativas tratadas neste capítulo, verifica-se que (3.20) e (3.39) apresentam grau de divergência logarítmico e (3.40) apresenta grau linear de divergência, sendo todas as demais integrais finitas no limite ultravioleta do modelo. Entretanto, ao avaliarmos estas integrais com o auxílio do

software WOLFRAM MATHEMATICA, verificamos que todas são finitas no limite de altas energias e, portanto, nosso modelo é renormalizável e livre de divergências. Não obstante, recordando do Capítulo 2 as dimensões das constantes de acoplamento da teoria, constata-se que $[e^2] = M = [b^\mu]$ e, de fato, dispomos de um modelo superrenormalizável⁷.

Todavia, embora as correções radiativas sejam finitas, sua inserção modifica os polos das funções de Green livres, e faz-se desejável a renormalização finita do modelo para assegurar que o comportamento dos propagadores da teoria interagente seja o mesmo exibido pela teoria livre nas vizinhanças de seus polos [42]. Reservamos esta discussão ao Apêndice D, onde adotaremos o procedimento de renormalização perturbativa em nosso modelo.

No âmbito de baixas energias, por sua vez, nosso modelo padece das mesmas dificuldades da QED_3 genuína. O comportamento infravermelho da eletrodinâmica quântica em três dimensões é sabidamente mais delicado do que o de sua contrapartida quadridimensional, visto que, diferentemente desta última, as divergências não exponenciam e o procedimento para contorná-las via *Bremsstrahlung* se torna mais intrincado [9, 10]. Investigaremos este limite de baixas energias de nosso modelo com quebra da simetria de Lorentz no Capítulo 5, seguindo a proposta pioneira de Bloch-Nordsieck [64].

3.3 Referências do Capítulo

A seguir, apontamos as principais referências deste capítulo.

[9] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Infrared Dynamics in (2+1) Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **76**, p. 69, 1998.

[10] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Remarks on Infrared Dynamics in QED in Three Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **80**, p. 1037, 2002.

[20] Raya, A.; Reyes, E. D. “*Massive Dirac Fermions and the Zero Field Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, p. 355401, 2008.

[22] Acharya, R.; Swamy, P. N. “*Relativistic QED in (2+1)-Dimensional*

⁷Uma teoria pode ser classificada como não-renormalizável, renormalizável e superrenormalizável em consonância com as dimensões de suas constantes de acoplamento. Teorias superrenormalizáveis apresentam constantes com dimensão de massa a uma potência positiva, ao passo que teorias renormalizáveis exibem constantes adimensionais e teorias não-renormalizáveis apresentam constantes com dimensão de massa a uma potência negativa [39].

Space: The Integer and Fractional Quantized Hall Effects”, Int. J. Mod. Phys. A **09**, p. 861, 1994.

[24] Imai, N. *et al.* “*Field Theory in a Strong Magnetic Field and the Quantum Hall Effect: Integer Hall Effect*”, Phys. Rev. B **42**, p. 10610, 1990.

[30] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Field Quantization*”. Springer-Verlag, 1996.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[40] Mandl, F.; Shaw, G. “*Quantum Field Theory*”. John Wiley and Sons, 1984.

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.

[42] Weinberg, S. “*The Quantum Theory of Fields: Foundations*”. Volume Um. Cambridge University Press, 1995.

[64] Bloch, F.; Nordsieck, A. “*Note on the Radiation Field of the Electron*”, Phys. Rev. **52**, p. 54, 1937.

Capítulo 4

Fenômenos Planares na Teoria Estendida no Setor Fermiônico

Neste capítulo, averiguaremos as implicações fenomenológicas de nossa teoria com quebra da simetria de Lorentz no setor fermiônico, abordando as contribuições ao potencial eletrostático em (2+1) dimensões e, em especial, o cenário do efeito Hall quântico. Concomitantemente, estudaremos também as contribuições da QED_3 na representação redutível quiral com o termo de Chern-Simons ao potencial eletrostático e ao momento magnético do elétron, tendo em vista que tais resultados se encontram ausentes na extensa literatura dedicada, sendo desenvolvidos de forma original na presente tese.

4.1 O Efeito Hall

O efeito Hall, descoberto em 1879 por E. H. Hall [34], consiste no surgimento de uma condutividade transversal à direção do fluxo da corrente elétrica, ao submetermos um campo magnético perpendicular à corrente. Com o intuito de depurar o entendimento teórico e as implicações fenomenológicas deste efeito, discutiremos brevemente a seguir suas descrições clássica e quântica.

4.1.1 Descrição Clássica

Ao considerarmos uma corrente elétrica movendo-se sobre a superfície de um plano condutor, que convencionaremos por¹ $X \times Y$, sob a influência de um campo magnético homogêneo constante² $\vec{B} = B\hat{z}$ perpendicular ao plano, atua sobre cada elétron a força de Lorentz

$$\vec{F}_B = -e\vec{v} \times \vec{B} = evB\hat{y}, \quad (4.1)$$

assumindo o fluxo de corrente no sentido definido por \hat{x} , com velocidade média v . Esta força magnética conduz a um acúmulo de carga nas bordas do plano condutor, culminando no estabelecimento de uma diferença de potencial na direção y e, por conseguinte, na indução de um campo elétrico \vec{E} , na mesma direção e sentido de (4.1).

A corrente transversal induzida pelo campo magnético cessa à medida que a voltagem em Y atinge o valor máximo, em que a força elétrica

$$\vec{F}_E = -eE\hat{y} \quad (4.2)$$

equilibra a força magnética (4.1). Logo, a intensidade do campo elétrico de equilíbrio segue de (4.1, 4.2),

$$E_{eq} = vB. \quad (4.3)$$

Em posse de (4.3), pode-se escrever a diferença de potencial máxima, ou tensão Hall, entre as extremidades da superfície condutora, de largura L , como

$$V_H = V(y=L) - V(y=0) = -\vec{E}_{eq} \cdot L\hat{y} = -vBL. \quad (4.4)$$

Observemos que se atribuíssemos aos portadores a carga $+e$, o fluxo de corrente seria oposto ao dos elétrons, isto é $v \rightarrow -v$ em (4.4), de forma que a polaridade nas extremidades do plano seria invertida. Assim, a medida da tensão Hall nos permite determinar o sinal dos portadores de carga no condutor. Ademais, controlando-se a corrente estacionária $I = e\rho vL$ que se estabelece no equilíbrio, onde ρ é a densidade superficial de elétrons, a voltagem Hall também constitui um mecanismo amplamente utilizado para medidas de campo magnético.

Por sua vez, a condutividade elétrica σ_{ik} é definida pela relação [34]

$$\vec{j}_r = \sigma_{rs}E_s, \quad (4.5)$$

¹Nesta seção, denotaremos as componentes do trivetor de coordenadas espaço-temporais (x^0, x^1, x^2) por (t, x, y) , respectivamente.

²As quantidades $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ correspondem aos versores das direções x, y e z , respectivamente.

em que s e r designam, respectivamente, as componentes do campo elétrico \vec{E} e da densidade superficial de corrente $\vec{j} = -e\rho\vec{v}$ ao longo das direções definidas pelos versores correspondentes \hat{s} e \hat{r} (não há contração de índices em (4.5)). Examinando, então, a condutividade transversal, ou condutividade Hall, segue de (4.3)

$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho e}{B}. \quad (4.6)$$

Portanto, a eletrodinâmica clássica prevê uma relação linear entre a condutividade transversal e o inverso do módulo de \vec{B} , mantendo-se fixa a densidade superficial de portadores.

4.1.2 Descrição Quântica

Em baixas temperaturas e sob a influência de campos magnéticos intensos, verificam-se desvios do comportamento clássico (4.6) e efeitos quânticos tornam-se relevantes, com o surgimento de platôs em que a condutividade transversal assume valores específicos independentes do campo externo³ [35],

$$|\sigma_{xy}| = \nu \frac{e^2}{2\pi}, \quad (4.7)$$

concomitantemente com o evanescimento da resistividade longitudinal ρ_{xx} . Em (4.7), ν assume valores racionais e consiste no fator de ocupação dos níveis de Landau, que discutiremos logo a seguir [34].

Em geral, observa-se nos sistemas físicos que exibem efeito Hall que o fator de ocupação ν assume valores inteiros ou frações de denominador ímpar [34], refletindo-se nos efeitos Hall inteiro [44] e fracionário [45, 46], respectivamente. Entretanto, o estudo de novos materiais de grande potencial tecnológico, tais como o grafeno, revelou um comportamento não usual da condutividade Hall, com fator de ocupação semi-inteiro [20, 35, 47-49].

O efeito Hall inteiro pode ser entendido a partir de um modelo envolvendo um gás bidimensional de elétrons não interagentes, sob a influência do campo magnético externo. Em contrapartida, para a descrição de sistemas com efeito

³No Sistema Internacional de Unidades (S.I.), a relação (4.7) fica expressa por [34]

$$|\sigma_{xy}| = \nu \frac{e^2}{h},$$

em que h é a constante de Planck. Portanto, a condutividade Hall fica determinada em termos das constantes fundamentais e e h , possibilitando a definição de padrões de resistência em metrologia [43].

Hall fracionário ou semi-inteiro, a interação entre os elétrons exerce papel primordial, sendo responsável pelo preenchimento parcial dos níveis de Landau [34, 35]. Sendo assim, discutiremos a seguir os níveis de Landau, que fornecem os subsídios para a interpretação física do surgimento dos platôs de condutividade na presença de um campo magnético externo⁴.

Níveis de Landau em QED_3

Consideremos a equação de Dirac, na representação redutível da QED_3 , com um campo eletromagnético externo⁵ $A_{\text{ex}}^\mu(x)$

$$(i\cancel{\partial} - m_e - m_o\tau - eA_{\text{ex}}^\mu(x))\psi(x) = 0. \quad (4.8)$$

Expressando o spinor de campo de forma conveniente como $\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{bmatrix}$, com $\psi_\pm(x)$ designando as duas espécies fermiônicas quirais evidenciadas pelos projetores χ_\pm (2.30), recorreremos à representação particular das matrizes gama introduzida no Capítulo 1 para escrever⁶

$$(i\partial_t \mp \sigma_z m_\pm) \psi_\pm(t, \vec{r}) = [-\sigma_x(i\partial_y + eA_y(t, \vec{r})) + \sigma_y(i\partial_x + eA_x(t, \vec{r})) + ie\phi(t, \vec{r})] \psi_\pm(t, \vec{r}), \quad (4.9)$$

em que multiplicamos (4.8) à esquerda por γ^0 e usamos (2.15-2.22) para obter (4.9). As massas auxiliares m_\pm são definidas por $m_\pm = m_e \pm m_o$.

Considerando, por simplicidade, o campo externo como um campo magnético estático e homogêneo, escolhemos o tripotencial de forma oportuna como $A^\mu(t, \vec{r}) = (0, By, 0)$ e reexpressamos (4.9) da seguinte forma

$$(i\partial_t \mp \sigma_z m_\pm) \psi_\pm(t, \vec{r}) = [-i\sigma_x \partial_y + \sigma_y(i\partial_x + eBy)] \psi_\pm(t, \vec{r}). \quad (4.10)$$

Atuando com $(i\partial_t \pm \sigma_z m_\pm)$ à esquerda em (4.10) e adotando a realização $\sigma^i \sigma^j = \delta_j^i - i\epsilon^{ijk} \sigma_k$ para a álgebra das matrizes de Pauli, obtemos

⁴Cabe ressaltarmos, contudo, que a QED_3 prevê a manifestação do efeito Hall inclusive na ausência de campo magnético [20, 35, 47, 50, 51].

⁵Nossa abordagem para os níveis de Landau segue a referência [41], em que a descrição de elétrons em um campo magnético externo é discutida no âmbito da QED_4 .

⁶Nesta seção em particular, faremos menção explícita às coordenadas $(t, x, y) = (t, \vec{r})$, denotando as componentes dos trivetores por $(v^0, v^1, v^2) = (v_t, v_x, v_y)$. As componentes do tripotencial serão denotadas por $A^\mu(t, \vec{r}) = (\phi(t, \vec{r}), A_x(t, \vec{r}), A_y(t, \vec{r}))$, com $\phi(t, \vec{r})$ correspondendo ao potencial escalar.

$$\begin{aligned}
(-\partial_t^2 - m_\pm^2)\psi_\pm(t, \vec{r}) &= (i\partial_t \pm \sigma_z m_\pm) [-i\sigma_x \partial_y + \sigma_y (i\partial_x + eBy)] \psi_\pm(t, \vec{r}) \\
&= [-i\sigma_x \partial_y + \sigma_y (i\partial_x + eBy)]^2 \psi_\pm(t, \vec{r}) \\
&= [-\partial_y^2 - \partial_x^2 + 2ieBy\partial_x + e^2 B^2 y^2 + eB\sigma_z] \psi_\pm(t, \vec{r}).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, escrevendo os spinores “quirais” como

$$\psi_\pm(t, \vec{r}) = \begin{bmatrix} g_{1\pm}(x, y, t) \\ g_{2\pm}(x, y, t) \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

em que $g_{1;2\pm}(x, y, t)$ são funções, segue

$$\sigma_z \psi_\pm(t, \vec{r}) = \begin{bmatrix} g_{1\pm}(x, y, t) \\ -g_{2\pm}(x, y, t) \end{bmatrix},$$

onde adotamos a seguinte representação para as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, escrevendo (4.11) em componentes, obtemos

$$(-m_\pm^2 - eB \operatorname{sgn}(\lambda))\psi_{\lambda\pm}(t, \vec{r}) = [\partial_t^2 - \partial_y^2 - \partial_x^2 + 2ieBy\partial_x + e^2 B^2 y^2] \psi_{\lambda\pm}(t, \vec{r}), \tag{4.13}$$

$$\text{com } \lambda = 1, 2 \text{ e } \operatorname{sgn}(\lambda) = \begin{cases} +1, & \text{se } \lambda = 1, \\ -1, & \text{se } \lambda = 2. \end{cases}$$

Observa-se que (4.13) é separável nas variáveis espaciais e temporal. Ademais, o operador diferencial que comparece no lado direito desta equação comuta com $\hat{p}^0 = i\partial_t$ e $\hat{p}^1 = -i\partial_x$, de forma que propomos o ansatz periódico⁷

$$\psi_{\lambda\pm}(t, \vec{r}) = e^{-i(Et - p_x x)} f_{\lambda\pm}(y). \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.13), resulta

$$\frac{1}{2} (E^2 - m_\pm^2 - eB \operatorname{sgn}(\lambda)) f_{\lambda\pm}(y) = \left[-\frac{1}{2} \partial_y^2 + \frac{e^2 B^2}{2} \left(y - \frac{p_x}{eB} \right)^2 \right] f_{\lambda\pm}(y), \tag{4.15}$$

⁷Recordamos que ao considerarmos dois observáveis \hat{A} e \hat{B} que comutam entre si, é sempre possível construir uma base ortonormal de autovetores comuns a \hat{A} e \hat{B} [52], o que motiva a proposta do ansatz (4.14).

que consiste na equação para o oscilador harmônico simples, centrado em $y_0 = p_x/eB$ e com frequência natural⁸ $\omega = |e|B$. Portanto, recordando o espectro de autovalores do oscilador (isto é, $E_{oh} = (n + 1/2)\omega$, com $n \in Z_+$), decorre⁹

$$E_{n;\lambda} = \pm \sqrt{m_{\pm}^2 + (2n + 1 - \text{sgn}(\lambda)) |e|B}. \quad (4.16)$$

Esta equação exibe os denominados níveis de Landau, que consistem no espectro de energia disponível aos férmions na presença do campo magnético uniforme.

Observa-se que os níveis de Landau são infinitamente degenerados, tendo em vista a ausência de p_y em (4.16). Todavia, podemos determinar a densidade de estados disponíveis, por nível, em uma superfície de área $A = L_x L_y$ impondo a condição de contorno periódica $\psi_{\lambda\pm}(t, 0, y) = \psi_{\lambda\pm}(t, L_x, y)$, que fornece $p_x = \frac{2\pi}{L_x} n_e$, com $n_e \in Z_+$. Sendo assim, recordando que $y_0 = p_x/eB$, somos conduzidos a

$$dn_e = \frac{L_x}{2\pi} |dp_x| = \frac{|e|BL_x}{2\pi} dy,$$

culminando na densidade de estados

$$\rho_e = \frac{n_e}{A} = \frac{|e|B}{2\pi}. \quad (4.17)$$

O fator de ocupação dos níveis de Landau consiste na razão entre o número de elétrons N e o número de estados disponíveis n_e . Portanto, examinando (4.17), podemos concluir que o fator racional ν que comparece na expressão (4.7) para a condutividade transversal, de fato, coincide com o fator de ocupação dos níveis de Landau, pois

$$\frac{N}{n_e} = 2\pi \frac{\rho}{|e|B}$$

e, por outro lado, substituindo a expressão clássica (4.6) em (4.7), mantendo ρ/B fixo, segue

$$\nu = 2\pi \frac{\rho}{|e|B} = \frac{N}{n_e}.$$

⁸Observa-se que ao introduzirmos o acoplamento mínimo, isto é $iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu(x)$, em (2.25) e (4.8), denotamos a carga q do elétron por e . Assim, em nosso modelo deve-se entender $e < 0$.

⁹Ressaltamos que os sinais \pm que antecedem a raiz em (4.16) não têm vínculo com os rótulos \pm que designam os spinores quirais, sendo oriundos da extração da raiz de $E_{n;\lambda}^2$ e comparecendo no espectro de energia de ambas as espécies.

Tendo em mente os níveis de Landau, examinemos qualitativamente o surgimento dos platôs de condutividade transversal e o evanescimento da condutividade longitudinal¹⁰. Para tanto, consideremos um sistema com fator de ocupação inteiro. Neste caso, os níveis de Landau do sistema encontram-se completamente preenchidos e, por conseguinte, a corrente longitudinal j_x cessa devido ao *gap* de energia entre os níveis de Landau ocupados e desocupados, que impede o espalhamento eletrônico responsável pela manutenção da corrente [34]. As impurezas e inhomogeneidades do material condutor, descritas por potenciais aleatórios, levantam a degenerescência de cada nível de energia e conduzem também à formação de estados entre os níveis de Landau [35]. Estes, contudo, são estados localizados¹¹ e, portanto, não favorecem o transporte de corrente [34, 35]. Assim, o surgimento dos platôs se dá quando a energia de Fermi do sistema encontra-se na região dos estados localizados, de forma que a variação do campo magnético (ou da densidade de elétrons do sistema) promove a ocupação destes estados que não conduzem corrente, mantendo a condutividade transversal constante e a condutividade longitudinal nula, até que o campo adquira intensidade suficiente para fornecer a energia necessária aos elétrons para a ocupação dos níveis de Landau de maior energia, que dispõem de estados estendidos, reestabelecendo o comportamento clássico até a formação de um novo platô¹² [34, 35].

Ao considerarmos sistemas com efeito Hall fracionário ou semi-inteiro, a argumentação acima é insuficiente e efeitos coletivos devem ser levados em consideração, demandando inclusive a introdução de novos conceitos como os estados de Laughlin e ânions [34, 35]. Em nosso estudo, porém, empregaremos o modelo efetivo (2.25) da QED_3 estendida construído no Capítulo 2, preterindo potenciais de interação (do tipo corrente-corrente) entre os campos fermiônicos, de forma que somos naturalmente conduzidos ao cenário do efeito Hall inteiro. Portanto, reservamos a discussão do efeito Hall fracionário às referências [34, 35] visando a concisão do texto.

Cabe destacar ainda o papel central do modelo de Chern-Simons na descrição dos efeitos Hall [20, 34, 35], motivando introduzir o respectivo termo na densidade lagrangiana de nosso modelo (2.25), ainda em nível de árvore.

¹⁰A descrição detalhada do efeito Hall foge ao escopo de nossos propósitos. O leitor interessado é remetido às referências [15, 34, 35, 53, 54] e à literatura nelas citada.

¹¹Em mecânica quântica, estados localizados são caracterizados por “funções de onda” de extensão reduzida, no sentido em que não há *overlap* significativo com estados vizinhos. Em contrapartida, estados estendidos exibem probabilidade expressiva de *overlap*.

¹²A descrição completa do surgimento dos platôs de condutividade demanda também a consideração dos denominados *edge states* [46]. Contudo, a discussão destes estados foge ao escopo de nosso trabalho e o leitor interessado é remetido às referências [34, 35].

Paridade e Reversão Temporal

Conforme antecipado, os sistemas que exibem efeito Hall necessariamente violam as simetrias de reversão temporal e paridade, contudo preservando PT , [20, 21, 34, 35, 38]. Esta característica pode ser compreendida, em $(2+1)$ dimensões, ressaltando-se a presença do termo de Chern-Simons, ou sua geração dinâmica, nos modelos teóricos que descrevem o efeito, tendo em vista que este termo quebra as simetrias P e T , como visto no Capítulo 2.

4.2 O Efeito Hall na QED_3 Estendida

Nosso interesse consiste em investigar as implicações da quebra da simetria de Lorentz no efeito Hall. Uma das motivações para introduzir tal violação emerge do fato de que o termo axial de quebra da simetria de Lorentz pode simular, no contexto da matéria condensada, a situação em que a presença de impurezas e não homogeneidades em um material condutor levanta a degenerescência dos níveis de Landau, oferecendo inclusive a possibilidade de se investigar o fenômeno de birrefringência (do vácuo, em linguagem de altas energias) [3, 60] por exemplo¹³.

Sendo assim, seguindo em essência a proposta de Acharya e Swamy [21, 22], prosseguimos com o cálculo da condutividade transversal (4.7) na presença do termo axial de quebra.

4.2.1 Condutividade Transversal

A condutividade transversal e o tensor de polarização são relacionados via [20, 24]

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \Pi_{\mu\eta}(k) \Big|_{k^2=0}. \quad (4.18)$$

Nitidamente, apenas a parte antissimétrica do tensor de polarização oferece contribuição à condutividade.

Remetendo a (3.29), podemos decompor σ_{xy} de maneira fortuita segregando as contribuições do termo de quebra e da QED_3 pura

¹³Outra aplicação interessante de um modelo com quebra axial da simetria de Lorentz na interface com a física da matéria condensada consiste na possibilidade de se estudar semimetais de Weyl, de grande interesse atualmente, na presença de interações axiônicas [69], que surgem como decorrência de uma transformação conveniente dos campos envolvendo o termo de quebra. Reservamos a perspectivas futuras a investigação deste tema, bem como do efeito de birrefringência, em sistemas bidimensionais.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{(0)} + \sigma_{xy}^{(bb)}, \quad (4.19)$$

com

$$\sigma_{xy}^{(0)} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \Pi_{\mu\eta}^{(0)ASIM}(k) \Big|_{k^2=0}, \quad (4.20)$$

$$\sigma_{xy}^{(bb)} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \Pi_{\mu\eta}^{(bb)ASIM}(k) \Big|_{k^2=0} + \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \tilde{\Pi}_{\mu\eta}^{(bb)ASIM}(k) \Big|_{k^2=0}. \quad (4.21)$$

Avaliando, portanto, a derivada presente em (4.20) por intermédio de (3.37, B.134) obtemos

$$\epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \Pi_{\mu\eta}^{(0)ASIM}(k) = 8 \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} m_o e^2 \Gamma(1/2) \left[\frac{2}{\sqrt{k^2}} \ln \left(\frac{2m_o + \sqrt{k^2}}{2m_o - \sqrt{k^2}} \right) + \frac{4m_o}{4m_o^2 - k^2} \right] \quad (4.22)$$

e, tomando-se o limite $k^2 \rightarrow 0$, segue a condutividade transversal da teoria genuína (4.20)

$$\sigma_{xy}^{(0)} = -\frac{e^2}{2\pi}. \quad (4.23)$$

Notavelmente, o primeiro nível de Landau do sistema encontra-se completamente preenchido (i.e. $\nu = 1$ em (4.7)), em acordo com o resultado expresso em [20] e confirmando a expectativa de ocorrência do efeito Hall inteiro na ausência do termo de quebra. Este resultado, amplamente discutido na literatura, pode ser entendido observando-se que cada espécie fermiônica ψ_\pm que compõe o campo ψ na representação irredutível que empregamos contribui, em nível de árvore, com $-1/2$ para o fator de ocupação ν , conforme demonstrado em [20].

Tencionando avaliar a contribuição do termo axial, tomamos as derivadas que compõem (4.21), municiados por (3.49, 3.55, 3.60, B.144-B.186), seguidas do limite em que $k^2 \rightarrow 0$, resultando

$$\epsilon^{\mu\eta\rho} \partial_\rho i \tilde{\Pi}_{\mu\eta}^{(bb)ASIM}(k) \Big|_{k^2=0} = \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{15m_o^4} [25m_o^2 b^2 + 21(k.b)^2] \quad (4.24)$$

e

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\rho}\delta_{\mu\eta}\Pi_{\mu\eta}^{(bb)ASIM}(k)\Big|_{k^2=0} = -\frac{e^2}{2\pi}\frac{1}{15m_0^4} [25m_0^2b^2 + 21(k.b)^2], \quad (4.25)$$

de modo que, naturalmente,

$$\sigma_{xy}^{(bb)} = 0. \quad (4.26)$$

A equação (4.26) manifesta um dos resultados centrais de nosso trabalho, revelando que não há contribuição do termo axial de quebra da simetria de Lorentz para a condutividade Hall. Muito embora este termo detenha as simetrias discretas pertinentes ao efeito, tais como violação de P e T, como visto no Capítulo 1, os diagramas de polarização do vácuo que envolvem inserções de b^μ (Figuras 4-6) se cancelam mutuamente, como destacam (4.24) e (4.25).

Sendo assim, no que concerne à fenomenologia, lamentavelmente não se mostra possível evidenciar a quebra da simetria de Lorentz por um acoplamento axial através do efeito Hall. Todavia, no cenário da matéria condensada, este resultado é salutar tendo em conta que (4.26) assegura que a condutividade transversal (4.23) de um material condutor bidimensional descrito por uma densidade lagrangiana efetiva do tipo (2.24), como supercondutores à temperatura finita e o grafeno, permanece inalterada mesmo na presença de um “acoplamento efetivo” do tipo axial como o contemplado em nosso modelo (2.25), que pode porventura simular contaminações e interações espúrias entre os elétrons e a rede.

4.3 Potencial Eletrostático

Outra grandeza de interesse fenomenológico, devido a diversas aplicações inerentes, consiste no potencial eletrostático produzido por uma fonte estática puntiforme. Neste contexto, nossa motivação consiste em examinar a influência do termo fermiônico de quebra da simetria de Lorentz sobre o potencial a grandes distâncias (i.e. baixas energias), almejando extrair quantidades mensuráveis que possam flagrar esta violação. Esta análise, inclusive, foi sugerida por Jackiw a colaboradores em um estudo da quebra da simetria de Lorentz em QED_4 por um termo axial, culminando na referência [67], que segue estreito paralelo com nossa linha de investigação.

O potencial eletrostático produzido por um elétron puntiforme é expresso no espaço dos momentos por [41]

$$A^0(\vec{k}) = -eD'_{F00}(0, \vec{k}), \quad (4.27)$$

com sua transcrição ao espaço de coordenadas bidimensional executada pela transformada de Fourier¹⁴

$$A^0(\vec{r}) = \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} A^0(\vec{k}). \quad (4.28)$$

Em (4.27) comparece o propagador vestido (3.28), que detém a informação do potencial em nível de árvore e as correções radiativas, na aproximação de *1-loop* e com inserções de até segunda ordem no parâmetro de quebra, como destacado no Capítulo 3.

Combinando (3.28) e (3.29), o potencial (4.27) pode ser segmentado como

$$\begin{aligned} A^0(\vec{k}) = & -eD_F^{00}(0, \vec{k}) - e \left[\frac{i}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} i\Pi^{(0)00SIM} + \right. \\ & + i \left(\frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)} \right)^2 i\Pi_{\mu\nu}^{(0)SIM} \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta + \\ & \left. + 2 \frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} i\Pi_{\mu\nu}^{(0)ASIM} \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0} \right] (0, \vec{k}) \\ & - e \left[\frac{i}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left(i\Pi^{(bb)00SIM} + i\Pi^{(\bar{b}\bar{b})00SIM} \right) \right. \\ & + i \left(\frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)} \right)^2 \left(i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)SIM} + i\Pi_{\mu\nu}^{(\bar{b}\bar{b})SIM} \right) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta \\ & \left. + 2 \frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left(i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)ASIM} + i\Pi_{\mu\nu}^{(\bar{b}\bar{b})ASIM} \right) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0} \right] (0, \vec{k}), \quad (4.29) \end{aligned}$$

em que o primeiro termo do membro direito fornece o potencial clássico, o segundo termo determina as contribuições de flutuação do vácuo sem inserção do termo de quebra, conduzindo ao análogo do potencial de Uehling [39, 41] em duas dimensões, e o terceiro termo evidencia a influência da quebra axial no potencial eletrostático. A seguir, abordaremos em detalhe cada uma destas contribuições.

¹⁴Com o intuito de distinguir, nesta seção, as notações atribuídas à carga elétrica elementar (e) e à exponencial neperiana (e), expressamos esta última em formatação romana como em (4.28), e a primeira em formatação itálica, como em (4.27).

4.3.1 Potencial Clássico

Voltando-nos ao propagador em nível de árvore para o fóton (3.3), segue que o potencial eletrostático clássico no espaço dos momentos fica determinado por

$$A_{cl}^0(\vec{k}) = -\frac{e}{m_{cs}^2 + \vec{k}^2 - i\epsilon}. \quad (4.30)$$

Tomando a transformada de Fourier desta expressão em duas dimensões (4.28) e adotando o sistema de coordenadas polares, obtemos o potencial no espaço de coordenadas

$$\begin{aligned} A_{cl}^0(\vec{r}) &= -\frac{e}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{1 + \rho^2} J_0(m_{cs}r\rho) \\ &= -\frac{e}{2\pi} K_0(m_{cs}r), \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que $J_l(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem¹⁵ l e $K_l(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem l .

Analisando graficamente o comportamento de $K_0(x)$, verifica-se que este se assemelha ao da função logarítmica, que sabidamente descreve o potencial eletrostático em duas dimensões na ausência do termo de Chern-Simons. Contudo, tomando a expressão assintótica desta função [68]

$$K_0(x)|_{x \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + O(x^{-3/2}), \quad (4.32)$$

observa-se um decaimento exponencial do potencial (4.31) a grandes distâncias, que pode ser entendido em termos da “massa topológica” conferida pelo termo de Chern-Simons ao fóton, “limitando” seu alcance. Este comportamento revela a característica blindante da QED_3 quiral com o termo de Chern-Simons.

4.3.2 Correções Radiativas ao Potencial

Levando em conta agora as correções radiativas do tensor de polarização sem o termo de quebra, pautadas em (3.35-3.37), desenvolvemos o segundo termo do membro direito de (4.29).

Para este fim, decomposmos o referido termo de forma conveniente como segue

¹⁵Ressaltamos aqui que os índices que compõem a notação das funções de Bessel denotam a ordem das respectivas funções, não devendo ser entendidos como índices de Lorentz.

$$A_a^{0(0)}(\vec{k}) = \frac{i}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} i\Pi^{(0)00\text{SIM}}(0, \vec{k}), \quad (4.33)$$

$$A_b^{0(0)}(\vec{k}) = i \left(\frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)} \right)^2 i\Pi_{\mu\nu}^{(0)\text{SIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta, \quad (4.34)$$

$$A_c^{0(0)}(\vec{k}) = 2 \frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} i\Pi_{\mu\nu}^{(0)\text{ASIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0}, \quad (4.35)$$

com a correção quântica ao potencial expressa por

$$A^{0(0)}(\vec{k}) = -e \left(A_a^{0(0)}(\vec{k}) + A_b^{0(0)}(\vec{k}) + A_c^{0(0)}(\vec{k}) \right). \quad (4.36)$$

Beneficiando-nos de (B.133-B.186) e elaborando algebricamente as expressões que comparecem em (4.33-4.35), obtemos os resultados parciais¹⁶

$$i\Pi^{(0)00\text{SIM}}(0, \vec{k}) = \frac{ie^2}{4\pi} \left[2m_o + (\vec{k}^2 - 4m_o^2) \frac{1}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \quad (4.37)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)\text{SIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta = -\frac{ie^2}{4\pi} \vec{k}^2 \left[2m_o + (\vec{k}^2 - 4m_o^2) \frac{1}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \quad (4.38)$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)\text{ASIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0} = \frac{e^2}{\pi} m_o |\vec{k}| \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right). \quad (4.39)$$

Para acessar o potencial de longo alcance em que $|\vec{k}| \ll m_o$, levamos (4.37-4.39) em (4.33-4.35) e expandimos as expressões resultantes em série de potências da razão $|\vec{k}|/m_o$, retendo termos até terceira ordem e desprezando termos dominados pela massa (i.e., em que a potência de m_o é superior a de $|\vec{k}|$). Posto isto, decorrem

¹⁶Empregamos o programa WOLFRAM MATHEMATICA, versão 8.0.1.0, para a obtenção de expressões analíticas para os resultados apresentados doravante no presente capítulo.

$$A_a^{0(0)}(\vec{k}) = -\frac{e^2}{6\pi} \frac{1}{m_{cs}^2 + \vec{k}^2} \frac{1}{m_o} + \frac{e^2}{6\pi} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \frac{m_{cs}^2}{m_o} + O\left(\left|\vec{k}\right|^4/m_o^4\right), \quad (4.40)$$

$$A_b^{0(0)}(\vec{k}) = \frac{e^2}{6\pi} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \frac{m_{cs}^2}{m_o} + O\left(\left|\vec{k}\right|^4/m_o^4\right), \quad (4.41)$$

$$A_c^{0(0)}(\vec{k}) = \frac{e^2}{\pi} \frac{2m_{cs}}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{\vec{k}^2}{m_o^2} + O\left(\left|\vec{k}\right|^4/m_o^4\right) \right). \quad (4.42)$$

Em seguida, tomamos a transformada de Fourier destas expressões e escrevemos

$$\begin{aligned} A_a^{0(0)}(\vec{r}) &= -\frac{e^2}{6\pi} \frac{1}{m_o} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{1+\rho^2} J_0(m_{cs}r\rho) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} J_0(m_{cs}r\rho) \right] \\ &= -\frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{m_o} \left[K_0(m_{cs}r) - \frac{1}{2} m_{cs}r K_1(m_{cs}r) \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} A_b^{0(0)}(\vec{r}) &= \frac{e^2}{6\pi} \frac{m_{cs}^2}{m_o} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} J_0(m_{cs}r\rho) \right] \\ &= \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{m_{cs}}{m_o} r K_1(m_{cs}r), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} A_c^{0(0)}(\vec{r}) &= \frac{e^2}{\pi} \left[\frac{1}{m_{cs}} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} J_0(m_{cs}r\rho) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_{cs}}{12m_o^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2} J_0(m_{cs}r\rho) \right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \left[r K_1(m_{cs}r) - \frac{m_{cs}}{6m_o^2} \left(K_0(m_{cs}r) - \frac{1}{2} m_{cs}r K_1(m_{cs}r) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Colecionando estes resultados, a contribuição (4.36) das flutuações do vácuo ao potencial é expressa, no espaço de coordenadas, por

$$\begin{aligned} A^{0(0)}(\vec{r}) &= -\frac{e^3}{48\pi^2} \frac{1}{m_o^2} [-2(m_{cs} + 2m_o)K_0(m_{cs}r) \\ &\quad + (m_{cs}^2 + 4m_{cs}m_o + 12m_o^2)rK_1(m_{cs}r)]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O potencial que obtivemos em (4.46) consiste na versão bidimensional do potencial de Uehling, para a QED_3 redutível quiral com o termo de Chern-Simons. Este resultado se encontra ausente na literatura e consiste em uma contribuição colateral de nosso trabalho.

4.3.3 Correções do Termo de Quebra da Simetria de Lorentz ao Potencial

O último termo de (4.29) revela o reflexo da quebra axial da simetria de Lorentz no potencial eletrostático. Para extrairmos esta informação, decomparamos o referido termo de forma similar ao que fizemos em (4.37-4.39) introduzindo as expressões auxiliares a seguir

$$A_a^{0(bb)}(\vec{k}) = \frac{i}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left(i\Pi^{(bb)00SIM}(0, \vec{k}) + i\tilde{\Pi}^{(bb)00SIM}(0, \vec{k}) \right), \quad (4.47)$$

$$A_b^{0(bb)}(\vec{k}) = i \left(\frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)} \right)^2 \left(i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(0, \vec{k}) + i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)SIM}(0, \vec{k}) \right) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta, \quad (4.48)$$

$$A_c^{0(bb)}(\vec{k}) = 2 \frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left(i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(0, \vec{k}) + i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)ASIM}(0, \vec{k}) \right) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0}, \quad (4.49)$$

e escrevemos a contribuição do termo de quebra ao potencial como

$$A^{0(bb)}(\vec{k}) = -e \left(A_a^{0(bb)}(\vec{k}) + A_b^{0(bb)}(\vec{k}) + A_c^{0(bb)}(\vec{k}) \right). \quad (4.50)$$

Lançando mão das expressões (3.48, 3.49, 3.54, 3.55, 3.59, 3.60) que definem o tensor de polarização com inserções de quebra e municiados de (B.143-B.186), seguem após algum trabalho algébrico

$$i\tilde{\Pi}^{(bb)00SIM}(0, \vec{k}) = -\frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^5} \frac{1}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[2b^2 |\vec{k}|^7 m_o - 32b^2 |\vec{k}|^3 m_o^5 \right. \\ \left. - 4 |\vec{k}|^7 m_o b_0^2 - 32 |\vec{k}|^5 m_o^3 b_0^2 - 64 |\vec{k}|^3 m_o^5 b_0^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \left(b^2 |\vec{k}|^4 + 4b^2 \vec{k}^2 m_o^2 - 2 |\vec{k}|^4 b_0^2 + 8 \vec{k}^2 m_o^2 b_0^2 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \Bigg] \\
& - \frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^5} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[2 |\vec{k}|^5 m_o - 48 |\vec{k}|^3 m_o^3 - 96 |\vec{k}| m_o^5 \right. \\
& \left. + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \left(\vec{k}^2 + 12m_o^2 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\Pi^{(bb)00\text{SIM}}(0, \vec{k}) &= \frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^5} \frac{1}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[2b^2 |\vec{k}|^7 m_o - 32b^2 |\vec{k}|^3 m_o^5 \right. \\
& \left. - 4 |\vec{k}|^7 m_o b_0^2 - 32 |\vec{k}|^5 m_o^3 b_0^2 - 64 |\vec{k}|^3 m_o^5 b_0^2 \right. \\
& \left. + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \left(b^2 |\vec{k}|^4 + 4b^2 \vec{k}^2 m_o^2 - 2 |\vec{k}|^4 b_0^2 + 8 \vec{k}^2 m_o^2 b_0^2 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \\
& + \frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^5} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[2 |\vec{k}|^5 m_o - 48 |\vec{k}|^3 m_o^3 - 96 |\vec{k}| m_o^5 \right. \\
& \left. + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \left(\vec{k}^2 + 12m_o^2 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \quad (4.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)\text{SIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta &= \frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{1}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)} \left(b^2 + \frac{(\vec{k} \times \vec{b})^2}{\vec{k}^2} + \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{\vec{k}^2 + 4m_o^2} \right) \\
& \cdot \left[2m_o |\vec{k}| \left(\vec{k}^2 - 4m_o^2 \right) + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)\text{SIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\sigma} \epsilon^{0\nu\eta} k_\sigma k_\eta = -\frac{ie^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^3} \frac{b^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[2m_o |\vec{k}|^3 \left(|\vec{k}|^4 - 16m_o^4 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\vec{k}^2 + 4m_o^2 \right)^2 \left(|\vec{k}|^4 + 4\vec{k}^2 m_o^2 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \Bigg] \\
& - \frac{i e^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^3} \frac{(\vec{k} \times \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)} \left[-2m_o |\vec{k}| (3\vec{k}^2 + 4m_o^2) \right. \\
& \left. + \left(5 |\vec{k}|^4 + 24\vec{k}^2 m_o^2 + 16m_o^4 \right) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \\
& - \frac{i e^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^3} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[4m_o |\vec{k}|^3 (3\vec{k}^2 + 4m_o^2) \right. \\
& \left. - 2\vec{k}^2 (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(bb)\text{ASIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0} &= \frac{e^2 m_o}{\pi} \frac{b^2}{|\vec{k}| (\vec{k}^2 + 4m_o^2)} \left[-2m_o |\vec{k}| \right. \\
& \left. + (\vec{k}^2 + 4m_o^2) \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \\
+ \frac{e^2 m_o}{\pi} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{k}|^3 (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} & \left[-2m_o |\vec{k}| (3\vec{k}^2 + 4m_o^2) + (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{(bb)\text{ASIM}}(0, \vec{k}) \epsilon^{0\mu\eta} k_\eta g^{\nu 0} &= \frac{e^2 m_o}{\pi} \frac{1}{|\vec{k}| (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[b^2 m_o |\vec{k}| (3\vec{k}^2 + 16m_o^2) \right. \\
& \left. - b_0^2 m_o |\vec{k}| (\vec{k}^2 + 8m_o^2) + (b_0^2 - 2b^2) (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^2}{\pi} \frac{m_o}{|\vec{k}|^3} \frac{(\vec{k} \times \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[m_o |\vec{k}| (\vec{k}^2 + 8m_o^2) - (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \\
& + \frac{e^2}{\pi} \frac{1}{|\vec{k}|^3} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \left[|\vec{k}| \left(4|\vec{k}|^4 + 7m_o^2 \vec{k}^2 + 16m_o^4 \right) \right. \\
& \quad \left. - 2m_o (\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2 \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right]. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Claramente (4.51) e (4.52) se cancelam, de forma que (4.47) é nula. Ademais, expressando os produtos escalar e vetorial entre o vetor \vec{k} e o vetor de quebra \vec{b} como

$$\vec{k} \cdot \vec{b} = |\vec{k}| |\vec{b}| \cos(\alpha) \tag{4.57}$$

$$\vec{k} \times \vec{b} = |\vec{k}| |\vec{b}| \operatorname{sen}(\alpha) \hat{z}, \tag{4.58}$$

em que α é o ângulo entre os referidos vetores planares e \hat{z} é o versor perpendicular ao plano $x \times y$, e substituindo (4.53-4.56) em (4.48, 4.49), resultam

$$A_b^{0(bb)}(\vec{k}) = i \left(\frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)} \right)^2 \frac{ie^2 \vec{b}^2 \cos(2\alpha)}{\pi} \left[-\frac{2m_o \vec{k}^2}{\vec{k}^2 + 4m_o^2} + |\vec{k}| \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right], \tag{4.59}$$

$$A_c^{0(bb)}(\vec{k}) = 8 \frac{m_{cs}}{\vec{k}^2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \frac{e^2 \vec{b}^2}{\pi} \frac{|\vec{k}|^4}{(\vec{k}^2 + 4m_o^2)^2} \cos^2(\alpha). \tag{4.60}$$

Exlorando o limite de baixas energias do potencial, efetuamos a expansão em série de potências em $|\vec{k}|/m_o$ de (4.59, 4.60), obtendo

$$A_b^{0(bb)}(\vec{k}) = -\frac{e^2}{12\pi} \vec{b}^2 \frac{m_{cs}^2}{m_o^3} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \cos(2\alpha) + O(|\vec{k}|^6/m_o^6), \tag{4.61}$$

$$A_c^{0(bb)}(\vec{k}) = \frac{e^2}{2\pi} \vec{b}^2 \frac{m_{cs}}{m_o^4} \frac{\vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \cos^2(\alpha) + O(|\vec{k}|^6 / m_o^6), \quad (4.62)$$

em que retivemos em (4.62) o termo de quarta ordem na massa m_o visando explicitar inclusive a contribuição dominante que sucede nosso limite de resolução.

Executando a transformada de Fourier para o espaço de coordenadas, vêm

$$\begin{aligned} A_b^{0(bb)}(\vec{r}) &= -\frac{e^2}{12\pi} \vec{b}^2 \frac{m_{cs}^2}{m_o^3} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta e^{i\rho r \cos(\theta)} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \rho^2)^2} \cos(2(\theta - \beta)) \\ &= \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{\vec{b}^2}{m_o^3} \left[\frac{2}{m_{cs}^2 r^2} - K_2(m_{cs} r) - \frac{1}{2} m_{cs} r K_1(m_{cs} r) \right] \cos(2\beta), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} A_c^{0(bb)}(\vec{r}) &= \frac{e^2}{2\pi} \vec{b}^2 \frac{m_{cs}}{m_o^4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta e^{i\rho r \cos(\theta)} \frac{\rho^2}{(m_{cs}^2 + \rho^2)^2} \cos^2(\theta - \beta) \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{\vec{b}^2}{m_o^4} m_{cs} \left[K_0(m_{cs} r) - m_{cs} r K_1(m_{cs} r) \cos^2(\beta) \right], \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde β é o ângulo fixo entre os vetores \vec{b} e \vec{r} e $\theta = \beta + \alpha$ é o ângulo polar entre os vetores \vec{k} e \vec{r} , integrado no plano.

Assim, retomando (4.50) no espaço de coordenadas, a contribuição do termo axial de quebra da simetria de Lorentz de nosso modelo ao potencial eletrostático de longo alcance se traduz como

$$\begin{aligned} A^{0(bb)}(\vec{r}) &= -\frac{e^3}{8\pi^2} \frac{\vec{b}^2}{m_o^3} \left\{ \left[\frac{2}{3m_{cs}^2 r^2} - \frac{1}{3} \left(K_2(m_{cs} r) + \frac{1}{2} m_{cs} r K_1(m_{cs} r) \right) \right] \cos(2\beta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{cs}}{m_o} \left[K_0(m_{cs} r) - m_{cs} r K_1(m_{cs} r) \cos^2(\beta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Contemplando o potencial, verifica-se que este provém exclusivamente das componentes tipo espaço do trivetor de quebra. O primeiro termo de (4.65) é de ordem m_o^{-3} na massa do elétron, em conformidade ao limite de resolução que havíamos previamente fixado na seção anterior, e fornece uma contribuição com dependência angular, ressaltando a anisotropia produzida pelo termo de quebra. Por sua vez, o segundo termo de (4.65) é de ordem m_o^{-4} e extrapola

o limite de resolução, sendo uma correção em “*next-to-leading order*”, como antecipado. Este termo, nitidamente, exhibe uma contribuição radial e outra com dependência angular.

Faz-se interessante observar que uma quebra axial isotrópica da simetria de Lorentz, isto é, com $b^\mu = (b^0, \vec{0})$, não se manifesta na interação eletrostática. Contudo, a sensibilidade do potencial a inomogeneidades no espaço devido à quebra, enfatizada em (4.65), abre uma janela de investigação convidativa no âmbito fenomenológico e consiste em outro resultado significativo de nosso trabalho.

4.4 Momento Magnético do Elétron

Outro cenário convidativo à fenomenologia consiste na interação dipolar entre um elétron e um campo magnético externo estático em (2+1) dimensões. Para estudarmos este sistema, recordamos a energia de interação entre uma corrente eletrônica e um campo eletromagnético externo estático arbitrário [41], no limite “*on-shell*” em que a corrente fermiônica é estritamente livre (i.e., sem inserções do termo de quebra ou correções radiativas¹⁷)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x j_\mu A_{\text{ext}}^\mu, \quad (4.66)$$

com a corrente vestida pelas correções radiativas de vértice¹⁸ (3.82)

$$j_\mu = \bar{\psi}_s(p') \left[e\gamma_\mu + e\Gamma_\mu(p', p) \right] \psi_r(p). \quad (4.67)$$

Agora, usufruindo da equação de movimento (2.26) e de sua conjugada de Dirac, podemos deduzir a identidade de Gordon em nosso modelo,

$$\bar{\psi}_s(p') m_o \gamma_\mu \tau \psi_r(p) = \frac{1}{2} \bar{\psi}_s(p') \left[(p'_\mu + p_\mu) + i\sigma_{\mu\alpha} (p'^\alpha - p^\alpha) - 2i\sigma_{\mu\alpha} \gamma_5 b^\alpha \right] \psi_r(p), \quad (4.68)$$

a qual, no caso em consideração em que a corrente fermiônica é genuinamente livre, reduz-se à forma alternativa

¹⁷Ressalvamos aqui que esta aproximação se refere apenas às linhas fermiônicas externas ao vértice, que compõem a corrente eletrônica. As linhas internas, que aparecem nos diagramas (Figuras 9 e 10), recebem sim as inserções do campo de quebra, como alinhado no Capítulo 3, e correções radiativas a medida que termos de ordem superior na constante de estrutura fina são levados em consideração.

¹⁸Omitimos em nossa análise a correção do tensor de polarização do vácuo ao propagador do fóton associado ao campo externo, visto que esta repercute apenas na “corrente de convecção” eletrônica e não exerce papel na interação de dipolo magnético [41], de nosso interesse.

$$\bar{\psi}_s(p')\gamma_\mu\psi_r(p) = \frac{1}{2m_o}\bar{\psi}_s(p')\left[(p'_\mu + p_\mu)\tau + i\sigma_{\mu\alpha}\tau(p'^\alpha - p^\alpha)\right]\psi_r(p). \quad (4.69)$$

O primeiro termo em (4.69) acima se reflete na denominada “corrente de convecção” eletrônica, ao passo que o segundo termo culmina na interação de dipolo magnético ao assumirmos o campo externo como sendo do tipo magnético e estático [41], como será evidenciado adiante.

Explorando ainda a álgebra subjacente a nosso modelo (2.3, 2.15-2.22), podemos escrever também as identidades auxiliares válidas a momento nulo (i. e., $q^\mu = p'^\mu - p^\mu \rightarrow 0$)

$$\bar{\psi}_s(p)p.b\gamma_5\gamma_\mu\psi_r(p) = \bar{\psi}_s(p)p_\mu\gamma_5\rlap{-}\not{b}\psi_r(p), \quad (4.70)$$

$$\bar{\psi}_s(p)p.bp_\mu\gamma_5\tau\psi_r(p') = \bar{\psi}_s(p)p_\mu m_o\gamma_5\rlap{-}\not{b}\psi_r(p). \quad (4.71)$$

Deste modo, examinando (3.93, 3.94, 3.98, 3.104), valendo-nos de (B.118-B.132), concluímos que não há contribuição à interação dipolar magnética por parte dos diagramas de vértice de primeira ordem no campo de quebra, como antecipado, pois os termos que aparecem nas referidas expressões são do tipo (4.70) e (4.71), contribuindo para uma espécie de “corrente axial”, se compararmos com o primeiro termo de (4.69), e inviabilizando a presença de termos similares ao segundo de (4.69), responsável pelo acoplamento magnético de nosso interesse.

Cabe salientar, entretanto, que levando o cálculo do diagrama de vértice até segunda ordem em b^μ , constroem-se termos escalares do tipo b^2 que não envolvem produtos escalares com o trimomento fermiônico p^μ , como visto no cálculo do tensor de polarização (3.31, 3.32) por exemplo, e, portanto, conduzem a termos do tipo (4.69) que exibem contribuição ao momento magnético do elétron. Reservamos esta análise do momento magnético em segunda ordem no parâmetro de quebra de nosso modelo a investigações futuras, remetendo o leitor interessado no caso em (3+1) dimensões à referência [67].

Conquanto, mesmo não sendo possível flagrarmos a contribuição da quebra da simetria de Lorentz à interação do elétron com o campo magnético em primeira ordem, prosseguimos com o cálculo do momento magnético aventando capturar as correções quânticas, a *1-loop*, na *QED*₃ quiral com o termo de Chern-Simons, haja vista que tal discussão ainda não teve merecido destaque na literatura pertinente. Sendo assim, examinamos as equações (3.88, 3.90, 3.94), que definem o vértice eletromagnético sem quebra (3.83), em busca dos

termos proporcionais a γ^μ , responsáveis pelo acoplamento magnético via (4.69), elencando-os a seguir

$$I_a^{\mu\text{MAG}}(q \rightarrow 0) = \left[4m_o^2 A^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) - 8m_o^2 A_{p'}^{(2)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right. \\ \left. + A_g^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) + m_o^2 A_{p'p'}^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right] \gamma^\mu, \quad (4.72)$$

$$I_b^{\mu\text{MAG}}(q \rightarrow 0) = \left[4m_o^2 B_g^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) + 4m_o^4 B_{p'p'}^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right. \\ \left. - 4m_o^2 B_{p'}^{(2)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) + B^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right] \gamma^\mu, \quad (4.73)$$

$$I_c^{\mu\text{MAG}}(q \rightarrow 0) = im_{cs} \left[4im_o A^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) + 4im_o B_g^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right] \gamma^\mu, \quad (4.74)$$

de forma que, substituindo (4.72-4.74) em (3.83), o vértice quântico efetivo para o acoplamento magnético traduz-se em

$$\bar{u}_s(p') \Gamma_\mu^{(0)\text{MAG}}(q \rightarrow 0; m_{ir}) u_r(p') = -ie^2 \left[4m_o^2 \left(1 - \frac{m_{cs}}{m_o} \right) A^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right. \\ \left. - 4m_o^2 A_{p'}^{(2)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) - 2A_g^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right. \\ \left. + 4m_o^2 \left(1 - \frac{m_{cs}}{m_o} \right) B_g^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) + 4m_o^4 B_{p'p'}^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \right] \gamma_\mu. \quad (4.75)$$

Em (4.72-4.74) usufruímos das expressões (B.84-B.111), introduzimos um regulador infravermelho m_{ir} nos termos envolvendo o propagador do fóton para assegurar a convergência das integrais e tomamos o limite de “espalhamento progressivo” $q \rightarrow 0$ mencionado no Capítulo 3. Sob estas condições, fazemos uso do *software* para escrever

$$\bar{\psi}_s(p') \Gamma_\mu^{(0)\text{MAG}}(q \rightarrow 0; m_{ir}) \psi_r(p) = \frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{m_{cs}} \left(-4 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \left[- \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right. \\ \left. + \frac{m_{cs}}{m_o} \left(2 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \text{arccoth} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right] \gamma_\mu + O \left(\frac{m_{ir}}{m_o} \right). \quad (4.76)$$

De posse deste resultado, retomamos (4.66, 4.67) e empregamos a identidade de Gordon (4.69) para obter [41]

$$W = e(1 + \Gamma_{\text{MAG}}^{(0)}) \frac{1}{2m_o} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{x} \bar{\psi}_s(p') \frac{1}{2} \sigma_{\mu\alpha} \tau \psi_s(p) F_{\text{ext}}^{\mu\alpha}(x) +$$

+ termo de corrente de convecção,

(4.77)

onde definimos

$$\Gamma_{\text{MAG}}^{(0)} = \frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{m_{cs}} \left(-4 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \left[- \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_{cs}}{m_o} \left(2 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \operatorname{arccoth} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right].$$
(4.78)

Assumindo um campo externo do tipo magnético, decorre a interação dipolar [41], como adiantamos,

$$W = - \langle \mu_z^{\text{MAG}} \rangle B,$$
(4.79)

com o momento magnético do elétron em (2+1) dimensões na teoria quiral com o termo de Chern-Simons expresso por

$$\langle \mu_z^{\text{MAG}} \rangle = g \mu_B \langle S_z \rangle,$$
(4.80)

em que $\mu_B = e/(2m_o)$ é o magneton de Bohr,

$$\langle S_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{x} \bar{\psi}_s(p') \frac{1}{2} \sigma_{12} \tau \psi_s(p)$$
(4.81)

é o valor esperado da componente do spin perpendicular ao plano e

$$g = 2 \left(1 + \Gamma_{\text{MAG}}^{(0)} \right)$$
(4.82)

é a razão giromagnética, que detém a informação das correções quânticas expressas em (4.78), subproduto do presente trabalho.

4.5 Referências do Capítulo

As referências pertinentes a este capítulo estão listadas a seguir.

[3] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. “*Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*”, Phys.Rev. D **58**, p.116002, 1998.

- [15] Gusynin, V. P.; Sharapov, S. G.; Carbotte, J. P. “AC Conductivity of Graphene: From Tight-Binding Model to 2+1-Dimensional Quantum Electrodynamics”, *Int. J. Mod. Phys.* **B21**, p. 4611, 2007.
- [20] Raya, A.; Reyes, E. D. “Massive Dirac Fermions and the Zero Field Quantum Hall Effect”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, p. 355401, 2008.
- [21] Acharya, R.; Swamy, P. N. “Quantum Hall Effect in 2+1 Quantum Electrodynamics”, *Il Nuovo Cimento* **B107**, p. 351, 1992.
- [22] Acharya, R.; Swamy, P. N. “Relativistic QED in (2+1)-Dimensional Space: The Integer and Fractional Quantized Hall Effects”, *Int. J. Mod. Phys. A* **09**, p. 861, 1994.
- [24] Imai, N. *et al.* “Field Theory in a Strong Magnetic Field and the Quantum Hall Effect: Integer Hall Effect”, *Phys. Rev. B* **42**, p. 10610, 1990.
- [29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. “Quantum Electrodynamics”. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.
- [34] Khare, A. “Fractional Statistics and Quantum Theory”. Segunda Edição. World Scientific, 2005.
- [35] Fradkin, E. “Field Theories of Condensed Matter Physics”. Segunda Edição. Cambridge University Press, 2013.
- [38] Avron, Y.; Seiler, R.; Shapiro, B. “Generic Properties of Quantum Hall Hamiltonians for Finite Systems”, *Nuc. Phys.* **B265**, p. 364, 1986.
- [39] Schwartz, M. “Quantum Field Theory and the Standard Model”. Cambridge University Press, 2014.
- [41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “Quantum Electrodynamics”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.
- [43] Di Giuseppe, A. “Metrology and Physical Constants”, IOS Press, 2013.
- [44] von Klitzing, K.; Dorda, G.; Pepper, M. “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, p. 494, 1980.
- [45] Tsui, D. C.; Stormer, H. L.; Gossard, A. C. “Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, p. 1559, 1982.

- [46] Laughlin, R. B. “*Anomalous Quantum Hall Effect: an Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*”, Phys. Rev. Lett. **50**, p. 1395, 1983.
- [47] Leitner, M. “*Zero-field Hall effect in (2+1)-Dimensional QED*”, Adv. Theor. Math. Phys. **12**, p. 475, 2008.
- [48] Halperin, B. I.; Lee, P. A.; Read, N. “*Theory of the Half-Filled Landau Level*”, Phys. Rev. **B47**, p. 7312, 1993.
- [49] Read, N. “*Theory of the Half-Filled Landau Level*”, arXiv: cond-mat/9501090.
- [50] Haldane, F. D. M. “*Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly”*”, Phys. Rev. Lett. **61**, p. 2015, 1988.
- [51] Frölich, J.; Kerler, T. “*Universality in Quantum Hall Systems*”, Nuc. Phys. **B354**, p. 369, 1991.
- [52] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B.; Laloë, F. “*Quantum Mechanics*”. Volume Um. John Wiley and Sons, 2005.
- [53] Penin, A. A. “*Quantum Hall Effect in Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. B **79**, p. 113303, 2009.
- [54] Beneventano, C. G.; Santangelo, E. M. “*The Finite-Temperature Relativistic Landau Problem and the Relativistic Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, p. 7457, 2006.
- [60] Kostelecký, V. A.; Mewes, M. “*Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **66**, p. 056005, 2002.
- [67] Chen, W. F.; Kunstatter, G. “*Constraint from Lamb Shift and Anomalous Magnetic Moment on Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **62**, p. 105029, 2000.
- [69] Goswami, P.; Tewari, S. “*Axionic Field Theory of (3+1)-Dimensional Weyl Semi-Metals*”, Phys. Rev. B **88**, p. 245107, 2013.

Capítulo 5

O Modelo de Bloch-Nordsieck Estendido em (2+1) Dimensões

Neste capítulo, investigaremos o comportamento infravermelho de nossa teoria com quebra da simetria de Lorentz no setor fermiônico nos remetendo à versão estendida do modelo de Bloch-Nordsieck [64], em (2+1) dimensões, delineada originalmente no presente trabalho, seguindo estreito paralelo com as referências [71, 72].

5.1 Modelo de Bloch-Nordsieck Estendido para a QED_3

Com a intenção de examinarmos o limite infravermelho de nossa teoria original, investigando a contribuição do termo topológico de Chern-Simons e do termo de quebra da simetria de Lorentz, efetuamos uma abordagem não perturbativa recorrendo ao modelo de Bloch-Nordsieck [64] devidamente adaptado ao cenário tridimensional com quebra axial de Lorentz.

Em primeira aproximação, este modelo consiste, operacionalmente, na troca das matrizes γ^μ por componentes fixas de um trivetor u^μ na densidade lagrangiana (2.25), normalizado à unidade, i.e. $u^2 = u^\mu u_\mu = 1$ (para $\mu = 0, 1, 2$)¹ [71].

¹Como mencionado, em nosso modelo redutível tridimensional, a matriz γ^3 não compõe a base da álgebra de Clifford, mas participa da base quiral do modelo e define, em conjunto com

Por sua vez, em virtude das relações $\tau = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, as matrizes τ e γ_5 , características de nossa teoria redutível quiral, são também substituídas pelos escalares u_τ e u_5 em nosso modelo de Bloch-Nordsieck estendido (BNE). Diante destas considerações, a equação de Dirac para o presente modelo na presença de um campo eletromagnético externo fixo A^μ fica expressa por

$$[iu^\alpha\partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau] \psi(x) = 0, \quad (5.1)$$

com a respectiva equação de Green associada

$$[iu^\alpha\partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau] G(x, y | A) = -\delta^3(x - y). \quad (5.2)$$

Para extrairmos de (5.2) o propagador fermiônico exato, empregamos o formalismo de tempo-próprio de Fock [72, 73], delineado na próxima seção.

5.1.1 Formalismo de Tempo-Próprio de Fock

O método de Fock consiste, essencialmente, em buscar uma representação integral para a função de Green a partir de uma representação integral do operador diferencial associado que permita inverter a respectiva equação de Green² [72].

Para este fim, a equação (5.2) pode ser escrita de forma oportuna como

$$HG(x, y | A) = -\delta^3(x - y) \quad (5.3)$$

com o operador diferencial

$$H = iu^\alpha\partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau. \quad (5.4)$$

De maneira semelhante à parametrização alfa [55], empregada no cálculo de integrais de Feynman, propõe-se uma representação integral para o inverso de (5.4), baseada na extensão analítica da função gama,

$$H^{-1} = -i \int_0^\infty d\nu e^{i\nu[u^\alpha\partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]} \quad (5.5)$$

e se escreve a função de Green, de forma conveniente, como

as demais matrizes gama, a matriz γ_5 , de forma que atribuímos também uma componente u^3 associada a γ^3 em nossa versão do modelo de Bloch-Nordieck. Contudo, evidentemente, u^3 não participa da relação de normalização do trivetor u^μ , conforme destacado.

²Esta seção segue paralelamente a referência [72].

$$G(x, y | A) = i \int_0^\infty d\nu U(\nu), \quad (5.6)$$

em que a função $U(\nu)$ fica representada formalmente, via (5.2, 5.5), por

$$U(\nu) = e^{i\nu[iu^\alpha \partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]} \delta^3(x - y). \quad (5.7)$$

Esta função, naturalmente, satisfaz a equação diferencial

$$-i \frac{\partial}{\partial \nu} U(\nu) = [iu^\alpha \partial_\alpha - eu^\alpha A_\alpha(x) - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon] U(\nu) \quad (5.8)$$

aliada à condição de contorno

$$U(0) = \delta^3(x - y). \quad (5.9)$$

Empregando a representação da função delta no espaço dos momentos, pode-se expressar (5.7) por

$$U(\nu) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{iK(x, \nu) - ip \cdot (x - y) + i\nu[u \cdot p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]}, \quad (5.10)$$

em que a função auxiliar $K(x, \nu)$ detém a informação do acoplamento com o campo externo e, em virtude de (5.8, 5.9), fica definida por

$$\frac{\partial}{\partial \nu} K(x, \nu) = -u^\alpha \partial_\alpha K(x, \nu) - eu^\alpha A_\alpha \quad (5.11)$$

e

$$K(x, 0) = 0. \quad (5.12)$$

Abordamos este problema de valor inicial lançando mão da transformada de Fourier

$$K(x, \nu) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-iq \cdot x} K(q, \nu), \quad (5.13)$$

que fornece a equação inhomogênea a coeficientes constantes

$$\frac{\partial}{\partial \nu} K(q, \nu) - iu \cdot q K(q, \nu) = -eu \cdot A(q) \quad (5.14)$$

municada pela condição de contorno

$$K(q, 0) = 0, \quad (5.15)$$

donde decorre a função auxiliar no espaço recíproco

$$K(q, \nu) = -eu.A(q)e^{iu.q\nu} \int_0^\nu e^{-iu.q\nu'} d\nu'. \quad (5.16)$$

Lançando mão de (5.6, 5.10, 5.13, 5.16), a função de Green $G(x, y | A)$ fica completamente determinada, sendo expressa de forma resumida por

$$G(x, y | A) = i \int_0^\infty d\nu \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{iK(x, \nu) - ip.(x-y) + i\nu[u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_\sigma u_\tau + i\epsilon]}. \quad (5.17)$$

5.1.2 Propagador Fermiônico

O propagador fermiônico resulta de (5.17) através da média funcional [72]

$$G(x, y) = \frac{\int G(x, y | A) S_0(A) e^{iS_{EM}} \delta^3 A}{\int S_0(A) e^{iS_{EM}} \delta^3 A}, \quad (5.18)$$

onde

$$S_0(A) = \left\langle \exp \left(-ie \int d^3 x \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) \right) \right\rangle_F \quad (5.19)$$

é o valor esperado da matriz de espalhamento no vácuo fermiônico e

$$S_{EM} = \int d^3 x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{m_{cs}}{4} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} A^\alpha(x) F^{\beta\lambda}(x) \right) \quad (5.20)$$

corresponde à ação do campo eletromagnético livre.

Para prosseguirmos com o cálculo de (5.18) é oportuno destacarmos que o propagador fermiônico no modelo de Block-Nordsieck é puramente retardado. De fato, invertendo a equação de Green (5.2) no espaço dos momentos na ausência do campo eletromagnético externo, segue o propagador clássico

$$G_0(p) = -\frac{1}{u.p - u.bu_5 - m_\sigma u_\tau + i\epsilon}, \quad (5.21)$$

que exhibe um único pólo. Consequentemente, ao tomarmos a transformada inversa para o espaço de coordenadas, o teorema de Cauchy fornece [72, 74]

$$G_0(x - y) = 0, \quad \text{se } x^0 < y^0, \quad (5.22)$$

e, naturalmente, na região em que $x^0 > y^0$ o propagador fica determinado pelo resíduo.

De (5.22) conclui-se que qualquer processo cujo elemento de matriz envolve um *loop* puramente fermiônico é nulo, e em particular o tensor de polarização do vácuo. Por conseguinte, o modelo de Bloch-Nordsieck não acomoda anti-partículas³ e, portanto, o valor esperado (5.19) da matriz de espalhamento é igual a unidade

$$S_0(A) = 1. \quad (5.23)$$

Sendo assim, a expressão (5.18) se simplifica para

$$G(x, y) = \int G(x, y | A) e^{iS_{EM}} \delta^3 A \quad (5.24)$$

e, lançando mão de (5.17), podemos escrever

$$G(x, y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x-y)} G(p), \quad (5.25)$$

com

$$G(p) = i \int_0^\infty d\nu e^{i\nu[u \cdot p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon] + f(\nu)}, \quad (5.26)$$

em que introduzimos

$$e^{f(\nu)} = \int e^{i(K(x, \nu) + S_{EM})} \delta^3 A. \quad (5.27)$$

A integral que comparece em (5.27) é gaussiana e pode ser expressa em termos do propagador do fóton livre (2.41) como⁴ [71, 72]

³Esta análise em nível de árvore permanece válida ao incluirmos as correções radiativas, como em (5.18), pois estas apenas deslocam o pólo. Retomaremos esta discussão na seção 5.1.3.

⁴A integral gaussiana n-dimensional pode ser expressa por [39]

$$\int d\vec{p} e^{-\frac{1}{2}\vec{p}^+ M \vec{p} + \vec{J}^+ \vec{p}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(M)}} e^{\frac{1}{2}\vec{J}^+ M^{-1} \vec{J}}, \quad (5.28)$$

em que, no contexto das integrais de Feynman, a matriz M corresponde ao inverso do propagador livre e a matriz J introduz o acoplamento. Em (5.28), o coeficiente de normalização $\sqrt{(2\pi)^n / \det(M)}$ simplifica com o denominador de (5.18), suprimido na expressão (5.24) para favorecer a notação.

$$\int e^{i(K(x,\nu)+S_{EM})} \delta^3 A = \exp\left(-\frac{i}{2} \int g^\alpha(k) D_{\alpha\beta}(k) g^\beta(-k) d^3 k\right), \quad (5.29)$$

onde

$$g^\alpha(k) = -\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik \cdot x} e^{iu \cdot k\nu} \int_0^\nu e^{-iu \cdot k\nu'} d\nu' u^\alpha. \quad (5.30)$$

De (5.27-5.29) vem a função auxiliar

$$f(\nu) = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^3} \int d^3 k u^\alpha D_{\alpha\beta}(k) u^\beta \int_0^\nu e^{-iu \cdot k\nu'} d\nu' \int_0^{\nu'} e^{iu \cdot k\nu''} d\nu''. \quad (5.31)$$

Dando sequência ao cálculo desta função auxiliar, que determina completamente o propagador exato (5.26), manipulamos o domínio de integração de forma a obter uma região triangular definida por $\nu' \in [0, \nu]$ e $\nu'' \in [0, \nu']$, conveniente para o emprego da parametrização alfa, e escrevemos

$$f(\nu) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^3} \int d^3 k u^\alpha D_{\alpha\beta}(k) u^\beta \int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' e^{iu \cdot k\nu''}. \quad (5.32)$$

Elaborando, por sua vez, o termo par envolvendo o propagador do fóton (2.41), vem

$$f(\nu) = -ie^2 \int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' \left(F_a(\nu'') - \frac{\partial^2}{\partial \nu''^2} F_b(\nu'') \right), \quad (5.33)$$

com

$$F_a(\nu'') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{iu \cdot k\nu''}}{m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon}, \quad (5.34)$$

$$F_b(\nu'') = \frac{1}{\zeta - 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m_{cs}^2 - \tilde{\zeta} k^2}{(k^2)^2 (m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} e^{iu \cdot k\nu''}. \quad (5.35)$$

Como antecipado, para exponenciar os denominadores e avaliar (5.34, 5.35), empregamos a parametrização alfa [55]

$$\frac{1}{(M - i\epsilon)^\lambda} = \frac{i^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\lambda-1} e^{-i(M-i\epsilon)\alpha}, \quad (5.36)$$

com $\text{Re}(\lambda) > 1/2$, municiados pela integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^d k e^{iak^2} = e^{i\frac{\pi}{2}(1-\frac{d}{2})} \pi^{d/2} a^{-d/2}. \quad (5.37)$$

Procedendo desta forma, a integral (5.34) fica

$$F_a(\nu'') = i^{1/2} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{-3/2} e^{-i\left(m_{cs}^2 \alpha + \frac{\nu''^2}{4\alpha}\right)}. \quad (5.38)$$

Ato contínuo, expandindo em série a exponencial que contém o termo de Chern-Simons e usando (5.36) para resolver a integral em alfa, após algum trabalho algébrico, resulta

$$F_a(\nu'') = \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{1-2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) m_{cs}^{2n} (\nu'' - i\epsilon)^{-1+2n}. \quad (5.39)$$

A integral (5.35), por outro lado, pode ser decomposta como segue:

$$F_b(\nu'') = \frac{1}{\zeta - 1} \left(m_{cs}^2 F_b^{(1)}(\nu'') + \tilde{\zeta} F_b^{(2)}(\nu'') \right), \quad (5.40)$$

onde

$$F_b^{(1)}(\nu'') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + i\epsilon)^2 (m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} e^{iu \cdot k \nu''}, \quad (5.41)$$

$$F_b^{(2)}(\nu'') = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + i\epsilon) (m_{cs}^2 - k^2 - i\epsilon)} e^{iu \cdot k \nu''}. \quad (5.42)$$

Exponenciando o denominador de (5.41) e avaliando a integral gaussiana nos momentos, temos

$$F_b^{(1)}(\nu'') = \frac{i^{-3/2}}{\Gamma(2)} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} d\alpha \beta (\alpha + \beta)^{-3/2} e^{-im_{cs}^2 \alpha - \frac{i\nu''^2}{4(\alpha+\beta)}}, \quad (5.43)$$

de forma que, efetuando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \xi \\ \beta = \lambda(1 - \xi) \\ J(\alpha, \beta; \lambda, \xi) = -\lambda, \end{cases} \quad (5.44)$$

segue

$$F_b^{(1)}(\nu'') = -i^{-3/2} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 d\xi (1-\xi)\lambda^{1/2} e^{-i\left(m_{cs}^2 \lambda \xi + \frac{\nu''^2}{4\lambda}\right)}.$$

Expandindo novamente a exponencial com o termo de Chern-Simons e tendo em conta (5.36), decorre

$$F_b^{(1)}(\nu'') = -i^{-2} \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{4m_{cs}^2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) (\nu'' - i\epsilon) + \frac{1}{m_{cs}^4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\nu'' - i\epsilon} - \frac{1}{m_{cs}^4} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) (\nu'' - i\epsilon)^{2n-1} \right]. \quad (5.45)$$

Seguindo o mesmo procedimento para (5.42), empregamos a parametrização alfa e efetuamos a integração gaussiana nos momentos, obtendo

$$F_b^{(2)}(\nu'') = -i^{-1/2} \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\alpha (\alpha + \beta)^{-3/2} e^{-im_{cs}^2 \alpha - \frac{i\nu''^2}{4(\alpha+\beta)}}. \quad (5.46)$$

Levando em conta novamente (5.44), expandindo em série a exponencial envolvendo o parâmetro de Chern-Simons e usufruindo mais uma vez de (5.36), resulta

$$F_b^{(2)}(\nu'') = -i^{-2} \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2} \left[-\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\nu'' - i\epsilon} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) (\nu'' - i\epsilon)^{2n-1} \right]. \quad (5.47)$$

Retomando (5.33) e diferenciando (5.45) e (5.47), avaliamos as integrais pertinentes como segue

$$\int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' F_a(\nu'') = \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[-\nu + \nu \ln\left(-\frac{i\nu}{\epsilon}\right) \right] + \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^{1-2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) m_{cs}^{2n} \frac{\nu^{2n+1}}{2n(2n+1)}, \quad (5.48)$$

$$\int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' \frac{\partial^2}{\partial \nu''^2} F_b^{(1)}(\nu'') = -\frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \nu^{2n-1}, \quad (5.49)$$

$$\int_0^\nu d\nu' \int_0^{\nu'} d\nu'' \frac{\partial^2}{\partial \nu''^2} F_b^{(2)}(\nu'') = \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \nu^{2n-1}. \quad (5.50)$$

Colecionando (5.48-5.50) advém a expressão exata para a função auxiliar (5.33), que se demonstra independente da escolha do gauge arbitrário $\tilde{\zeta}$,

$$\begin{aligned} f(\nu) &= -ie^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[-\nu + \nu \ln\left(-\frac{i\nu}{\epsilon}\right) \right] \\ &- ie^2 \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) m_{cs}^{2n} \frac{\nu^{2n+1}}{2n(2n+1)} \\ &+ ie^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n-2}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \nu^{2n-1}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

A expressão (5.51) revela nitidamente a divergência logarítmica do propagador fermiônico no limite infravermelho da teoria, evidenciada pelo regulador ϵ no primeiro termo. Este resultado reitera, de forma conclusiva, que o termo de Chern-Simons não remove esta divergência, como previamente mencionado.

O propagador fermiônico completo tem sua representação integral exata definida por (5.26) e (5.51). Agora, retendo apenas as correções quânticas dominantes em *1-loop*, podemos efetuar a integração (5.26) em sua plenitude, com o auxílio de (5.36), expandindo a exponencial de $f(\nu)$ até primeira ordem na constante de acoplamento e^2 como a seguir

$$\begin{aligned} G(p) &= i \int_0^\infty d\nu e^{i\nu[u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]} \left(1 - ie^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[-\nu + \nu \ln\left(-\frac{i\nu}{\epsilon}\right) \right] \right. \\ &- ie^2 \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) m_{cs}^{2n} \frac{\nu^{2n+1}}{2n(2n+1)} \\ &\left. + ie^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n-2}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \nu^{2n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon} + e^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2} \\
&+ e^2 \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n} m_{cs}^{2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \frac{\Gamma(2n+2) (-1)^{-n-1}}{2n(2n+1) (-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^{2n+2}} \\
&- e^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n-2}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \Gamma(2n) (-1)^{-n} \frac{1}{(-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^{2n}} \\
&+ e^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty d\nu e^{i\nu[u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]} \nu \ln\left(-\frac{i\nu}{\epsilon}\right). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Empregando o *software* para o cálculo da última integral em (5.52), que compreende a singularidade infravermelha, resulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\nu e^{i\nu[u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon]} \nu \ln\left(-\frac{i\nu}{\epsilon}\right) = \\
&= \frac{-1 + \gamma_{euler} + \ln(\epsilon) + \ln(u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon)}{(-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2}, \quad (5.53)
\end{aligned}$$

em que γ_{euler} é a constante de Euler-Mascheroni⁵.

Tendo em conta (5.53), o propagador fermiônico a *1-loop* fica expresso por

$$\begin{aligned}
G(p) &= \frac{1}{-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon} \\
&+ e^2 \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n} m_{cs}^{2n}}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \frac{\Gamma(2n+2) (-1)^{-n-1}}{2n(2n+1) (-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^{2n+2}} \\
&- e^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m_{cs}^{2n-2}}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \Gamma(2n) \frac{(-1)^{-n}}{(-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^{2n}} \\
&+ e^2 \frac{2\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\gamma_{euler} + \ln(\epsilon) + \ln(u.p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon)}{(-u.p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2}. \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Este propagador compreende uma das contribuições mais significativas de nosso trabalho original, pois ressalta a conhecida divergência do infravermelho também em nosso modelo tridimensional, em concordância com a literatura

⁵A constante de Euler-Mascheroni é definida pelo limite da seqüência [68]

$$\gamma_{euler} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,5772\dots$$

dedicada à QED₃ [9-11, 71], e enfatiza o fato de que tanto o termo topológico de Chern-Simons quanto o termo de quebra da simetria de Lorentz não a removem, generalizando os resultados de [71].

Para efetuarmos uma análise comparativa do comportamento infravermelho da QED₄ com nosso modelo BNE, tomamos, por simplicidade, o limite físico em que m_{cs} é pequeno em comparação a massa fermiônica m_o , por exemplo, como sugere a evidência experimental, retendo em (5.54) apenas os termos até segunda ordem na massa topológica

$$\begin{aligned}
 G(p) = & \frac{1}{-u \cdot p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon} + \frac{e^2}{4\pi} \frac{\gamma_{euler}}{(-u \cdot p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2} \\
 & - \frac{3e^2}{16\pi} \frac{m_{cs}^2}{(-u \cdot p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^4} + \frac{e^2}{4\pi} \frac{\ln(u \cdot p - u^\alpha b_\alpha u_5 - m_o u_\tau + i\epsilon)}{(-u \cdot p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2} \\
 & + \frac{e^2}{4\pi} \frac{\ln(\epsilon)}{(-u \cdot p + u^\alpha b_\alpha u_5 + m_o u_\tau - i\epsilon)^2}. \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, no modelo de Bloch-Nordsieck quadridimensional genuíno, o propagador fermiônico se resume a [72]

$$G(p) = \frac{1}{-u \cdot p + m} \left| 1 - \frac{u \cdot p}{m} \right|^\beta = \frac{1}{-u \cdot p + m} \left(1 + \beta \ln \left| 1 - \frac{u \cdot p}{m} \right| + O(\alpha_e^2) \right), \tag{5.56}$$

em que m é a massa do elétron e β é definido por

$$\beta = -\frac{\alpha_e}{2\pi} (3 - \zeta), \tag{5.57}$$

com ζ correspondendo ao parâmetro de fixação de gauge.

Examinando (5.56), observa-se que a divergência infravermelha é logarítmica, assim como ocorre em nosso propagador (5.55). Contudo, no modelo quadridimensional a divergência pode ser exponenciada no parâmetro β (5.57), em contraste com o modelo tridimensional (5.55). Por este motivo, o limite do infravermelho em três dimensões é mais delicado do que em sua contrapartida quadridimensional.

Sobretudo, apesar do comportamento peculiar dos modelos em (2+1) dimensões a baixas energias, os teoremas de Bloch-Nordsieck e KLN [39] fornecem indícios de que em nosso modelo unitário com férmions massivos a divergência infravermelha pode ser evitada se construirmos a seção de choque envolvendo todos os estados iniciais e assintóticos de um processo de espalhamento, redefinindo o espaço de Fock para estados coerentes do campo de radiação [9].

5.1.3 Antipartículas

Retomando o propagador fermiônico geral (5.54), que compreende as correções radiativas em *1-loop*, é evidente que este exibe apenas um único pólo, que coincide com o do propagador clássico (5.21), e, portanto, permanece puramente retardado, como antecipado. Consequentemente, o tensor de polarização do vácuo, cuja parte imaginária relaciona-se com o processo de criação de pares partícula-antipartícula “vestidos” por suas respectivas auto-energias, é nulo. Destarte, conclui-se que nosso modelo de Bloch-Nordsieck estendido, de fato, não acomoda antipartículas.

5.2 Referências do Capítulo

A seguir, listamos as referências relevantes ao presente capítulo.

[9] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Infrared Dynamics in (2+1) Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **76**, p. 69, 1998.

[10] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Remarks on Infrared Dynamics in QED in Three Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **80**, p. 1037, 2002.

[11] de Roo, M.; Stam, K. “*Non-Perturbative Analysis of the Infrared Properties of QED₃*”, Nuc. Phys. **B246**, p. 335, 1984.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[55] Smirnov, A. V. “*Evaluating Feynman Integrals*”. Springer-Verlag, 2004.

[64] Bloch, F.; Nordsieck, A. “*Note on the Radiation Field of the Electron*”, Phys. Rev. **52**, p. 54, 1937.

[68] Butkov, E. “*Física Matemática*”. Editora LTC, 1988.

[71] Tomazelli, J. L.; Pimentel, B. M. “*The Green’s Function in the Bloch-Nordsieck Model of QED₃*”, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **20**, p. 845, 1994.

[72] Bogoliubov, N. N.; D. V. Shirkov. “*Introduction to the Theory of Quantized Fields*”. Interscience Publishers, 1959.

[73] Fock, W. A. “*Proper Time in Classical and Quantum Mechanics*”, Physik Z. Sowjetunion **12**, p. 404, 1937.

[74] Bjorken, J. D.; Drell, S. D. “*Relativistic Quantum Mechanics*”. McGraw-Hill, 1964.

Capítulo 6

A Teoria Estendida no Setor do Fóton e Correções Radiativas

Neste capítulo, daremos ênfase à proposta de extensão da QED_3 redutível no setor do fóton, concebida no Capítulo 1, construindo um modelo efetivo par sob CPT e investigaremos as correções radiativas atreladas à quebra da simetria de Lorentz na aproximação de $1-loop$.

6.1 QED_3 Redutível com Quebra no Setor de Gauge

A densidade lagrangiana (1.19), proposta originalmente no cenário tridimensional em nosso modelo relativístico de campo, abriga uma rica fenomenologia com variada sobreposição com a física da matéria condensada, fornecendo, por exemplo, uma abordagem efetiva adequada para sistemas planares que exibem o efeito magneto-elétrico [34], contemplado brevemente no Apêndice E.

Assim, introduzindo o acoplamento mínimo entre os campos fermiônico e de gauge, nosso modelo efetivo para a QED_3 redutível quiral com quebra no setor do fóton é descrito pela densidade lagrangiana

$$L(x) = \bar{\psi}(x)(i\rlap{-}/\partial - m_o\tau)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - e\bar{\psi}(x)\mathbb{A}(x)\psi(x)$$

$$+\frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu(x))^2 + \frac{m_{cs}}{4}\epsilon_{\alpha\beta\lambda}A^\alpha(x)F^{\beta\lambda}(x) - \frac{1}{4}R_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (6.1)$$

com o tensor adimensional de quebra $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ fixo e exibindo as mesmas propriedades do tensor de curvatura (1.18) [3, 63].

Frente a estas propriedades, em (2+1) dimensões é convidativo decompor o tensor de quebra como [63]

$$\begin{aligned} R_{\alpha\lambda\mu\nu} &= R_{\alpha\mu}g_{\lambda\eta} + R_{\lambda\eta}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\eta}g_{\lambda\mu} - R_{\lambda\mu}g_{\alpha\eta} \\ &\quad - \frac{1}{2}R(g_{\alpha\mu}g_{\lambda\eta} - g_{\alpha\eta}g_{\lambda\mu}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

em que

$$R_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}(u_\alpha v_\mu + u_\mu v_\alpha) - \frac{1}{4}u.v g_{\alpha\mu} \quad (6.3)$$

é o análogo do tensor de Ricci [63] e

$$R = R_\alpha^\alpha = \frac{1}{4}u.v \quad (6.4)$$

é o análogo da curvatura escalar [63], com u_α e v_α trivetores adimensionais fixos que parametrizam completamente a quebra da simetria de Lorentz no espaço-tempo tridimensional¹.

Sendo assim, a expressão geral para o nosso tensor de quebra é escrita como

$$\begin{aligned} R_{\alpha\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(u_\alpha v_\mu + u_\mu v_\alpha)g_{\lambda\eta} + \frac{1}{2}(u_\lambda v_\nu + u_\nu v_\lambda)g_{\alpha\mu} \\ &\quad - \frac{1}{2}(u_\alpha v_\eta + u_\eta v_\alpha)g_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(u_\lambda v_\mu + u_\mu v_\lambda)g_{\alpha\eta} \\ &\quad - \frac{5}{8}u.v(g_{\alpha\mu}g_{\lambda\eta} - g_{\alpha\eta}g_{\lambda\mu}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Lançando mão desta relação, delineamos a seguir, em caráter original, o propagador exato do fóton no presente modelo.

¹Reiteramos, conforme destacado no Capítulo 1, que o tensor de quebra $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, submetido às relações (1.18), apresenta apenas seis parâmetros independentes em três dimensões, sendo, com efeito, completamente determinado por dois trivetores independentes.

6.1.1 Propagador do Fóton

Naturalmente, o propagador do fóton consiste na função de Green associada à equação de movimento não homogênea do campo $A^\mu(x)$, na presença de uma fonte puntual localizada. Portanto, extraindo da densidade lagrangiana (6.1) as equações de Euler-Lagrange, escrevemos

$$\left[g_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial_\mu - \tilde{\zeta} \partial_\alpha \partial_\beta + m_{cs} \epsilon_{\alpha\mu\beta} \partial^\mu - 2R_{\alpha\lambda\mu\beta} \partial^\lambda \partial^\mu \right] A^\beta(x) = 0, \quad (6.6)$$

donde decorre a equação não homogênea, no espaço dos momentos,

$$\left[-g_{\alpha\beta} p^2 + \tilde{\zeta} p_\alpha p_\beta - im_{cs} \epsilon_{\alpha\mu\beta} p^\mu + 2R_{\alpha\lambda\mu\beta} p^\lambda p^\mu \right] D^{\eta\sigma}(p) = \delta_\alpha^\sigma \quad (6.7)$$

em que $D^{\eta\sigma}(p)$ é o propagador do fóton e $\tilde{\zeta} = 1 + 1/\zeta$, com ζ representando o parâmetro arbitrário de fixação de gauge.

Analisando a estrutura tensorial da teoria, concluímos que a expressão mais geral para o propagador é dada por

$$\begin{aligned} D^{\eta\sigma}(p) = & C_1 g^{\eta\sigma} + C_2 p^\eta p^\sigma + iC_3 \epsilon^{\eta\sigma\lambda} p_\lambda + C_4 u^\eta v^\sigma + C_5 u^\sigma v^\eta + C_6 u^\eta u^\sigma + C_7 v^\eta v^\sigma \\ & + C_{22} p^\eta u^\sigma + C_{23} u^\eta p^\sigma + C_{24} p^\eta v^\sigma + C_{25} v^\eta p^\sigma + iC_8 \epsilon^{\eta\sigma\lambda} u_\lambda + iC_9 \epsilon^{\eta\sigma\lambda} v_\lambda + iC_{10} (p \times u)^\eta u^\sigma \\ & + iC_{11} (p \times u)^\sigma u^\eta + iC_{12} (v \times u)^\eta u^\sigma + iC_{13} (v \times u)^\sigma u^\eta + iC_{14} (v \times p)^\sigma u^\eta + iC_{15} (v \times p)^\eta u^\sigma \\ & + iC_{16} (p \times u)^\eta v^\sigma + iC_{17} (p \times u)^\sigma v^\eta + iC_{18} (v \times u)^\eta v^\sigma + iC_{19} (v \times u)^\sigma v^\eta + iC_{20} (v \times p)^\sigma v^\eta \\ & + iC_{21} (v \times p)^\eta v^\sigma + iC_{26} (p \times u)^\eta p^\sigma + iC_{27} (p \times u)^\sigma p^\eta + iC_{28} (p \times v)^\eta p^\sigma \\ & + iC_{29} (p \times v)^\sigma p^\eta + iC_{30} (u \times v)^\sigma p^\eta + iC_{31} (u \times v)^\eta p^\sigma \\ & + iC_{32} (u \times v)^\eta (u \times v)^\sigma + iC_{33} (u \times p)^\eta (u \times p)^\sigma + iC_{34} (v \times p)^\eta (v \times p)^\sigma \\ & + iC_{35} (v \times p)^\eta (u \times p)^\sigma + iC_{36} (u \times p)^\eta (v \times p)^\sigma + iC_{37} (v \times p)^\eta (u \times v)^\sigma + iC_{38} (u \times v)^\eta (v \times p)^\sigma \\ & + iC_{39} (u \times v)^\eta (u \times p)^\sigma + iC_{40} (u \times p)^\eta (u \times v)^\sigma, \end{aligned} \quad (6.8)$$

em que os coeficientes $C_k \equiv C_k(p)$, com² $k = 1, \dots, 40$, são funções do trimomento p^μ do fóton. Introduzimos ainda em (6.8) a notação $\epsilon^{\alpha\beta\eta} k_\alpha j_\beta = (k \times j)^\eta$ para a contração de dois trivetores arbitrários k^μ e j^μ com o tensor de Levi-Civita, que empregaremos doravante ao longo de nosso texto.

²Naturalmente, os índices k que rotulam os coeficientes não devem ser entendidos como índices de Lorentz.

Tendo em mente o *ansatz* (6.8), desenvolvemos a equação (6.7) e recorremos à independência linear de cada termo do propagador para obter um sistema determinado de equações lineares que, após um laborioso trabalho algébrico efetuado com o auxílio do software, fornece o propagador exato determinado por

$$C_1(p) = 4 \frac{p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v}{-16m_{cs}^2 p^2 + [p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v]^2}, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} C_2(p) = & \frac{1}{(p^2)^2} \left\{ \frac{1}{\tilde{\zeta} - 1} - 4[p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v] \right. \\ & \cdot (256m_{cs}^4(p^2)^2 + [p^2(4 - 5u.v) + 8p.up.v]^2[(p^2)^2((-4 + u.v)^2 - 16u^2v^2) \\ & - 16p^2(-4 + u.v)p.up.v + 64(p.u)^2(p.v)^2] - 32m_{cs}^2 p^2 [(p^2)^2(-4 + u.v)(-4 + 5u.v) + \\ & + 64(p.u)^2(p.v)^2 - 8p^2((p.(u \times v))^2 - 8p.up.v + 6u.vp.up.v)]) \\ & \cdot ([-16m_{cs}^2 p^2 + (p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v)^2] \\ & \cdot [256m_{cs}^4 p^2 - 32m_{cs}^2 (p^2(p^2(-4 + u.v)(-4 + 5u.v) - 8(p.(u \times v))^2) \\ & + 4p^2(12 - 7u.v)p.up.v + 32(p.u)^2(p.v)^2)) + (p^2(4 - 5u.v) + 8p.up.v)^2 \\ & \left. \cdot (16(p.u)^2 v^2 + p^2((-4 + u.v)^2 - 16u^2 v^2) - 8(-4 + u.v)p.up.v + 16u^2(p.v)^2)]\right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$C_3(p) = \frac{16m_{cs}}{16m_{cs}^2 p^2 - [p^2(4 - 5u.v) + 8p.up.v]^2}, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} C_4(p) = & -16[p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v]^2[-16m_{cs}^2 p^2 + 16im_{cs} p^2 p.(u \times v) \\ & + (p^2(-4 + 5u.v) - 8p.up.v)(p^2(-4 + u.v) - 4p.up.v)] \\ & \cdot \{ [16m_{cs}^2 p^2 - (p^2(4 - 5u.v) + 8p.up.v)^2] \\ & \cdot [256m_{cs}^4 p^2 - 32m_{cs}^2 (p^2(p^2(-4 + u.v)(-4 + 5u.v) - 8(p.(u \times v))^2) \\ & + 4p^2(12 - 7u.v)u.pv.p + 32(p.u)^2(p.v)^2) + (p^2(4 - 5u.v) + 8p.up.v)^2 \\ & \left. \cdot (16(p.u)^2 v^2 + p^2((-4 + u.v)^2 - 16u^2 v^2) - 8(-4 + u.v)p.up.v + 16u^2(p.v)^2)]\right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
C_5(p) &= p^2 \left[p^2 \left(-1 + \frac{5}{4}u.v \right) - 2p.u.p.v \right]^2 \left[-m_{cs}p^2(m_{cs} + ip.(u \times v)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16}(p^2(-4 + 5u.v) - 8p.u.p.v)(p^2(-4 + u.v) - 4p.u.p.v) \right] . \\
&\quad \cdot \left\{ \left[m_{cs}^2p^2 - \frac{1}{16}(p^2(4 - 5u.v) + 8u.pv.p)^2 \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[-m_{cs}^4(p^2)^2 + \frac{1}{8}m_{cs}^2p^2(p^2(p^2(-4 + u.v)(-4 + 5u.v) - 8(p.(u \times v))^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + 4p^2(12 - 7u.v)u.pv.p + 32(u.p)^2(v.p)^2) - \frac{1}{256}p^2(p^2(4 - 5u.v) + 8u.pv.p)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot (16(u.p)^2v^2 + p^2((-4 + u.v)^2 - 16u^2v^2) - 8(-4 + u.v)u.pv.p + 16u^2(v.p)^2) \right] \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$C_6(p) = -p^2 \left[p^2 \left(-1 + \frac{5}{4}u.v \right) - 2p.u.p.v \right]^3 [-p^2v^2 + (p.v)^2] \text{deno}(C_5), \tag{6.14}$$

$$C_7(p) = -64[p^2(4 - 5u.v) + 8u.pv.p]^3[(p.u)^2 - p^2u^2] \text{deno}(C_4), \tag{6.15}$$

$$C_{10}(p) = -256m_{cs}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2[p^2v^2 - (p.v)^2] \text{deno}(C_4), \tag{6.16}$$

$$C_{11}(p) = 256m_{cs}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2[p^2v^2 - (p.v)^2] \text{deno}(C_4), \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
C_{14}(p) &= 64m_{cs}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] . \\
&\quad \cdot [16m_{cs}^2p^2 - 16im_{cs}p^2p.(u \times v) \\
&\quad - (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v) - 4u.pv.p)] \text{deno}(C_4),
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
C_{15}(p) = & -m_{cs}p^2 \left[p^2 \left(-1 + \frac{5}{4}u.v \right) - 2u.pv.p \right] \\
& \cdot [-m_{cs}p^2(m_{cs} + ip.(u \times v)) + \\
& + \frac{1}{16}(p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v) - 4u.pv.p)] \text{deno}(C_5), \quad (6.19)
\end{aligned}$$

$$C_{16}(p) = C_{14}(p), \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
C_{17}(p) = & 64m_{cs}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] \\
& \cdot [-16m_{cs}^2p^2 - 16im_{cs}p^2p.(u \times v) + \\
& + (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v) - 4u.pv.p)] \text{deno}(C_4), \quad (6.21)
\end{aligned}$$

$$C_{20}(p) = 256m_{cs}[p^2(4 - 5u.v) + 8u.pv.p]^2[(p.u)^2 - p^2u^2] \text{deno}(C_4), \quad (6.22)$$

$$C_{21}(p) = -C_{20}(p), \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}
C_{22}(p) = & \frac{16}{p^2}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2 \\
& \cdot [64(u.p)^2(v.p)^3 + (p^2)^2(-4 + 5u.v)(4u.pv^2 + (-4 + u.v)v.p) \\
& - 16p^2v.p(m_{cs}^2 + im_{cs}p.(u \times v) + u.p(2u.pv^2 - 4v.p + 3u.vp.v))] \text{deno}(C_4), \quad (6.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{23}(p) = & \frac{16}{p^2}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2 \\
& \cdot [64(u.p)^2(v.p)^3 + (p^2)^2(-4 + 5u.v)(4u.pv^2 + (-4 + u.v)v.p) \\
& - 16p^2v.p(m_{cs}^2 - im_{cs}p.(u \times v) + u.p(2u.pv^2 - 4v.p + 3u.vp.v))] \text{deno}(C_4), \quad (6.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{24}(p) = & \frac{16}{p^2}[p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2[-16m_{cs}^2p^2u.p + 16im_{cs}p^2u.pp.(u \times v) + \\
& + (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v)u.p - 8(u.p)^2v.p + 4p^2u^2v.p)] \text{deno}(C_4), \quad (6.26)
\end{aligned}$$

$$C_{25}(p) = \frac{16}{p^2} [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p]^2 [-16m_{cs}^2 p^2 u.p - 16im_{cs} p^2 u.pp.(u \times v) + (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v)u.p - 8(u.p)^2 v.p + 4p^2 u^2 v.p)] \text{deno}(C_4), \quad (6.27)$$

$$C_{26}(p) = \frac{64m_{cs}}{p^2} [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [64(u.p)^2 (v.p)^3 + (p^2)^2(-4 + 5u.v)(4u.vv^2 + (-4 + u.v)v.p) - 16p^2 v.p (m_{cs}^2 - im_{cs} p.(u \times v) + u.p(2u.pv^2 - 4v.p + 3u.vp.v))] \text{deno}(C_4), \quad (6.28)$$

$$C_{27}(p) = \frac{64m_{cs}}{p^2} [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [64(u.p)^2 (v.p)^3 + (p^2)^2(-4 + 5u.v)(4u.vv^2 + (-4 + u.v)v.p) - 16p^2 v.p (m_{cs}^2 + im_{cs} p.(u \times v) + u.p(2u.pv^2 - 4v.p + 3u.vp.v))] \text{deno}(C_4), \quad (6.29)$$

$$C_{28}(p) = -\frac{64m_{cs}}{p^2} [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [16m_{cs}^2 p^2 u.p + 16im_{cs} p^2 u.pp.(u \times v) - (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v)u.p - 8(u.p)^2 v.p + 4p^2 u^2 v.p)] \text{deno}(C_4), \quad (6.30)$$

$$C_{29}(p) = \frac{64m_{cs}}{p^2} [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [16m_{cs}^2 p^2 u.p - 16im_{cs} p^2 u.pp.(u \times v) - (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v)u.p - 8(u.p)^2 v.p + 4p^2 u^2 v.p)] \text{deno}(C_4), \quad (6.31)$$

$$C_{33}(p) = 1024im_{cs}^2 [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [p^2 v^2 - (p.v)^2] \text{deno}(C_4), \quad (6.32)$$

$$C_{34}(p) = 1024im_{cs}^2 [p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p] [p^2 u^2 - (p.u)^2] \text{deno}(C_4), \quad (6.33)$$

$$C_{35}(p) = -256im_{cs}^2[16m_{cs}^2p^2 + 16im_{cs}p^2p.(u \times v) - (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v) - 4u.pv.p)]\text{deno}(C_4), \quad (6.34)$$

$$C_{36}(p) = -256im_{cs}^2[16m_{cs}^2p^2 - 16im_{cs}p^2p.(u \times v) - (p^2(-4 + 5u.v) - 8u.pv.p)(p^2(-4 + u.v) - 4u.pv.p)]\text{deno}(C_4), \quad (6.35)$$

e com os demais coeficientes nulos. Em (6.14-6.35), os referidos coeficientes compartilham os mesmos denominadores de $C_4(p)$ ou $C_5(p)$, denotados por $\text{deno}(C_4)$ e $\text{deno}(C_5)$, respectivamente, favorecendo a concisão das expressões.

O propagador (6.8-6.35), característico de nosso modelo tridimensional, consiste em uma das contribuições mais notáveis de nosso trabalho.

Com o propósito de evidenciarmos as contribuições preponderantes da quebra da simetria de Lorentz, adotamos uma abordagem perturbativa, em consonância com a praticada no caso da teoria com quebra fermiônica, e expandimos o propagador exato em potências dos trivetores u^μ e v^μ , retendo apenas os termos dominantes de segunda ordem, culminando em

$$C_1(p) = \frac{1}{m_{cs}^2 - p^2} + \frac{2}{p^2} \frac{m_{cs}^2 + p^2}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p.v.p.u - \frac{5}{4} \frac{m_{cs}^2 + p^2}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} u.v, \quad (6.36)$$

$$C_2(p) = \frac{1}{\zeta - 1} \frac{1}{(p^2)^2} + \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 - m_{cs}^2} + \frac{5}{4} \frac{u.v}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} + \frac{5}{4} \frac{m_{cs}^2}{p^2} \frac{u.v}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} - 2 \frac{m_{cs}^2}{(p^2)^2} \frac{1}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} p.up.v, \quad (6.37)$$

$$C_3(p) = \frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{m_{cs}^2 - p^2} - \frac{5}{2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} u.v + 4 \frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p.up.v, \quad (6.38)$$

$$C_4(p) = C_5(p) = \frac{p^2}{(p^2 - m_{cs}^2)^2}, \quad (6.39)$$

$$C_{14}(p) = C_{16}(p) = -\frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2}, \quad (6.40)$$

$$C_{15}(p) = C_{17}(p) = \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2}, \quad (6.41)$$

$$C_{22}(p) = C_{23}(p) = -\frac{p.v}{(p^2 - m_{cs}^2)^2}, \quad (6.42)$$

$$C_{24}(p) = C_{25}(p) = -\frac{p \cdot u}{(p^2 - m_{cs}^2)^2}, \quad (6.43)$$

$$C_{26}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot v, \quad (6.44)$$

$$C_{27}(p) = -\frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot v, \quad (6.45)$$

$$C_{28}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot u, \quad (6.46)$$

$$C_{29}(p) = -\frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot u, \quad (6.47)$$

$$C_{35}(p) = C_{36}(p) = -i \frac{m_{cs}^2}{p^2} \frac{1}{(p^2 - m_{cs}^2)^2}, \quad (6.48)$$

com os demais coeficientes nulos e, lançando mão de (6.18), decorre

$$\begin{aligned} D^{\eta\sigma}(p) &= \left[\frac{1}{m_{cs}^2 - p^2} + \frac{2}{p^2} \frac{m_{cs}^2 + p^2}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot v p \cdot u - \frac{5}{4} \frac{m_{cs}^2 + p^2}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} u \cdot v \right] g^{\eta\sigma} \\ &\quad + \left[\frac{1}{\tilde{\zeta} - 1} \frac{1}{(p^2)^2} + \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2 - m_{cs}^2} + \frac{5}{4} \frac{u \cdot v}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} \right] p^\eta p^\sigma \\ &\quad + i \left[\frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{m_{cs}^2 - p^2} - \frac{5}{2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} u \cdot v + 4 \frac{1}{p^2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} p \cdot u p \cdot v \right] \epsilon^{\eta\sigma\lambda} p_\lambda \\ &\quad + \frac{p^2}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} (u^\eta v^\sigma + u^\sigma v^\eta) - \frac{p \cdot v}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} (p^\eta u^\sigma + p^\sigma u^\eta) \\ &\quad - \frac{p \cdot u}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} (p^\eta v^\sigma + p^\sigma v^\eta) - i \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} [(v \times p)^\sigma u^\eta - (v \times p)^\eta u^\sigma] \\ &\quad - i \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} [(u \times p)^\sigma v^\eta - (u \times p)^\eta v^\sigma] \\ &\quad + i \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} \frac{p \cdot v}{p^2} [(p \times u)^\eta p^\sigma - (p \times u)^\sigma p^\eta] \\ &\quad + i \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - p^2)^2} \frac{p \cdot u}{p^2} [(p \times v)^\eta p^\sigma - (p \times v)^\sigma p^\eta] \\ &\quad + \frac{m_{cs}^2}{p^2} \frac{1}{(p^2 - m_{cs}^2)^2} [(v \times p)^\eta (u \times p)^\sigma + (u \times p)^\eta (v \times p)^\sigma] + O(u^3, v^3). \quad (6.49) \end{aligned}$$

Como verificação da expressão (6.49), cabe apontar que, tomando os trivetores de quebra nulos, recuperamos o propagador livre (2.41), como esperado. Este propagador será empregado, no próximo capítulo, no cálculo do potencial eletrostático no presente modelo.

A seguir, determinaremos as correções radiativas, todavia, na ausência do termo topológico de Chern-Simons. Assim, adotando o *gauge* de Landau $\tilde{\zeta} = \infty$ e tomando $m_{cs} = 0$, o propagador (6.49) traduz-se em

$$D^{\eta\sigma}(p; m_{cs} = 0) = -\frac{1}{p^2} \left(g^{\eta\sigma} - \frac{p^\eta p^\sigma}{p^2} \right) - \frac{1}{p^2} \left(g^{\eta\sigma} - \frac{p^\eta p^\sigma}{p^2} \right) \frac{5}{4} u \cdot v + 2 \frac{p \cdot u p \cdot v}{(p^2)^2} g^{\eta\sigma} \\ + \frac{1}{p^2} (u^\eta v^\sigma + u^\sigma v^\eta) - \frac{1}{(p^2)^2} [p \cdot v (p^\eta u^\sigma + p^\sigma u^\eta) + p \cdot u (p^\eta v^\sigma + p^\sigma v^\eta)] + O(u^3, v^3), \quad (6.50)$$

sendo protagonista nos cálculos seguintes³.

6.2 Correções Radiativas

Tendo em vista os desdobramentos fenomenológicos de nosso modelo, reservados ao Capítulo 7, abordamos em seguida as contribuições quânticas associadas às flutuações dos campos, em primeira ordem na constante de estrutura fina α_e e em segunda ordem nos parâmetros de quebra u^μ e v^μ .

Neste contexto, ressaltamos que na ordem de aproximação empregada o tensor de polarização do vácuo não recebe contribuições dos termos de quebra no presente modelo, pois envolve um *loop* fermiônico, sendo, portanto, determinado por (3.30, 3.35-3.37). Sendo assim, procederemos às correções de auto-energia fermiônica e do vértice eletromagnético, representados respectivamente pelas Figuras 1 e 8, com a quebra da simetria de Lorentz devidamente incutida no propagador do fóton.

6.2.1 Auto-Energia Fermiônica

Em *1-loop*, a auto-energia fermiônica fica definida por

$$i\Sigma(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} iD_{F\mu\nu}(k) (-ie\gamma^\mu) iS_0(p-k) (-ie\gamma^\nu), \quad (6.51)$$

³Contraindo o trimomento p^μ com o propagador (6.50) obtém-se um resultado nulo, como em (3.78), que corrobora a validade de nosso resultado, evidenciando a conservação da carga elétrica e a simetria de gauge.

com os propagadores do fóton e do elétron expressos por (6.50) e (2.31), respectivamente.

De forma oportuna, podemos decompor $\Sigma(p)$ como

$$\Sigma(p) = \Sigma_0(p) + \Sigma_{uv}(p), \quad (6.52)$$

em que

$$\Sigma_0(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(1 + \frac{5}{4}u.v\right) \frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\nu}{(p-k)^2 - m_o^2} \quad (6.53)$$

é auto-energia da QED_3 redutível sem o termo de Chern-Simons, afora o coeficiente $(5/4)u.v$, e

$$\begin{aligned} \Sigma_{uv}(p) = & -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 2 \frac{k.u.k.v}{(k^2)^2} g^{\eta\sigma} \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2} (u^\mu v^\nu + u^\nu v^\mu) - \frac{1}{(k^2)^2} [k.v(k^\mu u^\nu + k^\nu u^\mu) + k.u(k^\mu v^\nu + k^\nu v^\mu)] \right\} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\nu \end{aligned} \quad (6.54)$$

captura a contribuição do tensor de quebra da simetria de Lorentz à auto-energia.

Desenvolvendo os produtos matriciais pertinentes, temos

$$\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\mu = -\not{p} + \not{k} + 3m_o\tau, \quad (6.55)$$

$$\not{k} (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \not{k} = -k^2 \not{p} + 2k.p\not{k} - k^2 \not{k} + k^2 m_o\tau, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} & (u^\mu v^\nu + u^\nu v^\mu) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\nu = \\ & = -2u.v\not{p} + 2u.v\not{k} + 2m_o u.v\tau + 2(u.p - u.k)\not{p} + 2(v.p - v.k)\not{p}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} & (k^\mu u^\nu + k^\nu u^\mu) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\nu = \\ & = -2u.k\not{p} + 2u.p\not{k} - 2k^2\not{p} + 2m_o u.k\tau + 2k.p\not{p}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$(k^\mu v^\nu + k^\nu v^\mu) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\nu =$$

$$= -2v.k\psi + 2v.p\cancel{k} - 2k^2\psi + 2m_o v.k\tau + 2k.p\psi. \quad (6.59)$$

De posse destes resultados, retomamos (6.53, 6.54) e elaboramos algebricamente as expressões, culminando em

$$\Sigma_0(p) = -ie^2 \left(1 + \frac{5}{4}u.v \right) \left[2\gamma^\alpha \check{I}_\alpha^{(2)}(p) - 2p^\alpha \gamma^\beta \check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) + 2m_o \tau \check{I}^{(1)}(p) \right] \quad (6.60)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_{uv}(p) &= 2ie^2 u^\alpha v^\beta \cancel{p} \check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) + 2ie^2 u^\alpha v^\beta \gamma^\lambda \check{I}_{\alpha\beta\lambda}^{(5)}(p) \\ &+ 2ie^2 u^\alpha v^\beta \check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) m_o \tau - 2ie^2 [u.p v^\alpha \gamma^\beta + v.p u^\alpha \gamma^\beta] \check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) \\ &- 2ie^2 u.v \cancel{p} \check{I}^{(1)}(p) + 2ie^2 u.v \check{I}^{(1)}(p) m_o \tau + 2ie^2 u.v \gamma^\alpha \check{I}_\alpha^{(2)}(p) \\ &+ 2ie^2 [u.p \cancel{p} + v.p \cancel{p}] \check{I}^{(1)}(p) - 2ie^2 [\cancel{p} v^\alpha + \cancel{p} u^\alpha] p^\beta \check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p), \end{aligned} \quad (6.61)$$

onde introduzimos as integrais auxiliares

$$\check{I}^{(1)}(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (6.62)$$

$$\check{I}_\alpha^{(2)}(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (6.63)$$

$$\check{I}_\alpha^{(3)}(p) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (6.64)$$

$$\check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (6.65)$$

$$\check{I}_{\alpha\beta\lambda}^{(5)}(p) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (6.66)$$

as quais, afora o emprego explícito do regulador infravermelho m_{ir} , guardam estreito paralelo com aquelas introduzidas em (3.19-3.22) e se encontram delimitadas no Apêndice B.

A auto-energia fermiônica (6.52) fica, portanto, determinada a *1-loop* e em segunda ordem nos trivetores de quebra por (6.60) e (6.61).

6.2.2 Vértice Eletromagnético

Conforme discutido no Capítulo 3, as flutuações dos campos fermiônico e do fóton induzem correções quânticas ao vértice eletromagnético, responsável por introduzir a interação entre os mesmos. Em primeira ordem em α_e , esta contribuição ao vértice é expressa por

$$-ie\Gamma_\mu(p', p) = -ie^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} iD^{\nu\alpha}(k) \gamma_\nu iS_0(p' - k) \gamma^\mu iS_0(p - k) \gamma_\alpha. \quad (6.67)$$

Novamente, desenvolveremos o cálculo do vértice “*on shell*”, com os campos fermiônicos externos ao vértice projetados em seus valores livres,⁴

$$\begin{aligned} \not{p}u_r(p) &= m_o\tau u_r(p) \\ \bar{u}_s(p')\not{p}' &= \bar{u}_s(p')m_o\tau. \end{aligned}$$

Deste modo, decompomos convenientemente o vértice (6.67) como

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu(p', p)u_r(p) = -ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(0)}(p', p)u_r(p) - ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(uv)}(p', p)u_r(p), \quad (6.68)$$

em que

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(0)}(p', p)u_r(p) = -e^3 \left(1 + \frac{5}{4}u.v\right) \check{I}_\mu^{(0)}(p', p), \quad (6.69)$$

$$-ie\bar{u}_s(p')\Gamma_\mu^{(uv)}(p', p)u_r(p) = -e^3 \check{I}_\mu^{(q)}(p', p), \quad (6.70)$$

com as integrais $\check{I}_\mu^{(0)}(p', p)$ e $\check{I}_\mu^{(q)}(p', p)$ definidas por

$$\begin{aligned} \check{I}_\mu^{(0)\mu}(p', p) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \left(g^{\alpha\nu} - \frac{k^\alpha k^\nu}{k^2} \right) \\ &\cdot \bar{u}_s(p') \frac{\gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_o\tau) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_o\tau) \gamma_\alpha}{[(p' - k)^2 - m_o^2][(p - k)^2 - m_o^2]} u_r(p), \end{aligned} \quad (6.71)$$

e

$$\check{I}_\mu^{(q)}(p', p) = \check{I}_{A\mu}^{(q)}(p', p) + \check{I}_{B\mu}^{(q)}(p', p) + \check{I}_{C\mu}^{(q)}(p', p), \quad (6.72)$$

⁴Enfatizamos aqui a nítida distinção entre os spinores livres $\bar{u}_s(p')$, $u_r(p)$ e o trivetor de quebra u^μ , que não devem ser confundidos.

onde

$$\check{I}_{A\mu}^{(q)}(p', p) = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot u k \cdot v}{(k^2)^2} \bar{u}_s(p') \gamma_\nu \frac{\not{p}' - \not{k} + m_o \tau}{(p' - k)^2 - m_o^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m_o \tau}{(p - k)^2 - m_o^2} \gamma^\nu u_r(p), \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_{B\mu}^{(q)}(p', p) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} (u^\alpha v^\nu + u^\nu v^\alpha) \cdot \bar{u}_s(p') \gamma_\nu \frac{\not{p}' - \not{k} + m_o \tau}{(p' - k)^2 - m_o^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m_o \tau}{(p - k)^2 - m_o^2} \gamma_\alpha u_r(p), \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_{C\mu}^{(q)}(p', p) &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2)^2} [k \cdot v (k^\alpha u^\nu + k^\nu u^\alpha) + k \cdot u (k^\alpha v^\nu + k^\nu v^\alpha)] \cdot \bar{u}_s(p') \gamma_\nu \frac{\not{p}' - \not{k} + m_o \tau}{(p' - k)^2 - m_o^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m_o \tau}{(p - k)^2 - m_o^2} \gamma_\alpha u_r(p). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Recordando (3.87) e (3.89), a integral (6.71) fica⁵

$$\begin{aligned} \check{I}^{(0)\mu}(p', p) &= -4p' \cdot p \gamma^\mu X(p', p) + 4m_o \tau X^\mu(p', p) \\ &+ 2\gamma^\mu (p' + p)^\alpha X_\alpha(p', p) - 4(p' + p)^\mu \gamma^\alpha X_\alpha(p', p) + 2\gamma_\alpha X^{\mu\alpha}(p', p) + 4\gamma^\mu p'^\alpha p^\beta Y_{\alpha\beta}(p', p), \end{aligned} \quad (6.76)$$

donde decorre o vértice (6.69).

As integrais auxiliares que compõem (6.76), regularizadas no infravermelho, encontram-se elencadas a seguir e desenvolvidas no Apêndice B

$$X(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (6.77)$$

$$X_\alpha(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (6.78)$$

$$X_{\alpha\beta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (6.79)$$

⁵Mantendo o critério de notação adotado no capítulo 3, doravante omitiremos a menção aos spinores livres $\bar{u}_s(p')$ e $u_r(p)$ no segundo membro das integrais que compõem o vértice, como em (6.76), favorecendo a economia de espaço.

$$Y_{\alpha\beta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p - k)^2 - m_o^2}. \quad (6.80)$$

Usufruindo ainda de (3.87), segue a integral (6.73)

$$\begin{aligned} \check{I}_A^{(q)\mu}(p', p) &= 8p' \cdot p \gamma^\mu u^\alpha v^\beta Y_{\alpha\beta}(p', p) - 8m_o \tau g^{\mu\lambda} u^\alpha v^\beta Y_{\lambda\alpha\beta}(p', p) \\ &\quad - 8\gamma^\mu (p' + p)^\lambda u^\alpha v^\beta Y_{\lambda\alpha\beta}(p', p) + 8(p' + p)^\mu \gamma^\lambda u^\alpha v^\beta Y_{\lambda\alpha\beta}(p', p) \\ &\quad + 2\gamma^\mu u^\alpha v^\beta X_{\alpha\beta}(p', p) - 4u_\alpha v_\beta \gamma_\lambda Y^{\alpha\beta\lambda\mu}(p', p), \end{aligned} \quad (6.81)$$

onde

$$Y_{\alpha\beta\lambda}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (6.82)$$

$$Y_{\alpha\beta\lambda\eta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda k_\eta}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (6.83)$$

assim como as demais integrais auxiliares, encontram-se no Apêndice B.

Na seqüência, elaboramos os produtos matriciais pertinentes a (6.74, 6.75), obtendo

$$\begin{aligned} &(u^\alpha v^\nu + u^\nu v^\alpha) \bar{u}_s(p') \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m_o \tau) \gamma_\alpha u_r(p) = \\ &= \left[4(p' \cdot vp \cdot u + p' \cdot up \cdot v) - 4(p' + p) \cdot uk \cdot v - 4(p' + p) \cdot vk \cdot u + 2u \cdot vk^2 \right] \gamma^\mu \\ &\quad + 2 \left[p' \cdot v \gamma^\mu \not{p} \not{k} + p \cdot v \not{k} \not{p} \gamma^\mu \right] + 2 \left[p' \cdot u \gamma^\mu \not{p} \not{k} + p \cdot u \not{k} \not{p} \gamma^\mu \right] \\ &\quad - 2k^2 u^\mu \not{p} - 2k^2 v^\mu \not{p} - 4u \cdot vk^\mu \not{k} + 4u \cdot kk^\mu \not{p} + 4v \cdot kk^\mu \not{p}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

$$\begin{aligned} &(k^\alpha u^\nu + k^\nu u^\alpha) \bar{u}_s(p') \gamma_\nu (\not{p}' - \not{k} + m_o \tau) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_o \tau) \gamma_\alpha u_r(p) = \\ &= \left[4(p' \cdot up \cdot k + p' \cdot kp \cdot u) - 2k^2 (p' + p) \cdot u - 4u \cdot k(p' + p) \cdot k + 2k^2 u \cdot k \right] \gamma^\mu \end{aligned}$$

$$+2 \left[p' . k \gamma^\mu \not{p} \not{k} + p . k \not{k} \not{p} \gamma^\mu \right] + 2k^2 k^\mu \not{p} - 2k^2 u^\mu \not{k}, \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} & (k^\alpha v^\nu + k^\nu v^\alpha) \bar{u}_s(p') \gamma_\nu \left(\not{p}' - \not{k} + m_o \tau \right) \gamma^\mu \left(\not{p} - \not{k} + m_o \tau \right) \gamma_\alpha u_r(p) = \\ & = \left[4(p' . v p . k + p' . k p . v) - 2k^2(p' + p) . v - 4v . k(p' + p) . k + 2k^2 v . k \right] \gamma^\mu \\ & \quad + 2 \left[p' . k \gamma^\mu \not{p} \not{k} + p . k \not{k} \not{p} \gamma^\mu \right] + 2k^2 k^\mu \not{p} - 2k^2 v^\mu \not{k}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

De (6.84-6.86) resultam (6.74) e (6.75)

$$\begin{aligned} \check{I}_B^{(q)\mu}(p', p) &= \left\{ 4(p' . v p . u + p' . u p . v) X(p', p) - 4 \left[(p' + p) . u v^\alpha + (p' + p) . v u^\alpha \right] X_\alpha(p', p) \right. \\ & \quad \left. + 2u . v g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}(p', p) \right\} \gamma^\mu + 2 \left[p' . v \gamma^\mu \not{p} \gamma^\alpha + p . v \gamma^\alpha \not{p} \gamma^\mu \right] X_\alpha(p', p) \\ & + 2 \left[p' . u \gamma^\mu \not{p} \gamma^\alpha + p . u \gamma^\alpha \not{p} \gamma^\mu \right] X_\alpha(p', p) - 2u^\mu \not{p} g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}(p', p) - 2v^\mu \not{p} g^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}(p', p) \\ & \quad - 4u . v \gamma_\alpha X^{\alpha\mu}(p', p) + 4u_\alpha \not{p} X^{\alpha\mu}(p', p) + 4v_\alpha \not{p} X^{\alpha\mu}(p', p), \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_C^{(q)\mu}(p', p) &= - \left[4(p' . u p^\alpha v^\beta + p' . v p^\alpha u^\beta + p . u p'^\alpha v^\beta + p . v p'^\alpha u^\beta) Y_{\alpha\beta}(p', p) \right. \\ & \quad - 8u^\alpha v^\lambda (p' + p)^\beta Y_{\alpha\beta\lambda}(p', p) - 2(p' + p) . u v^\alpha X_\alpha(p', p) \\ & \quad \left. - 2(p' + p) . v u^\alpha X_\alpha(p', p) + 4u^\alpha v^\lambda X_{\alpha\lambda}(p', p) \right] \gamma^\mu \\ & - 2 \left[p'^\alpha v^\beta \gamma^\mu \not{p} \gamma^\lambda + p'^\alpha u^\beta \gamma^\mu \not{p} \gamma^\lambda + p^\alpha v^\beta \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\mu + p^\alpha u^\beta \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\mu \right] Y_{\alpha\beta\lambda}(p', p) \\ & \quad - 2[v_\alpha \not{p} + u_\alpha \not{p}] X^{\alpha\mu}(p', p) + 2[v^\alpha u^\mu \gamma^\beta + u^\alpha v^\mu \gamma^\beta] X_{\alpha\beta}(p', p). \end{aligned} \quad (6.88)$$

A partir de (6.81, 6.87, 6.88), fica determinada a integral (6.72) e decorre o vértice (6.70).

Colecionando as expressões que determinam (6.69) e (6.70), o vértice eletromagnético (6.68) fica completamente estabelecido na aproximação “*on shell*”, a 1-loop e em segunda ordem nos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz.

Mostra-se relevante observarmos ainda a correção de vértice no limite mais restritivo de “espalhamento progressivo”, em que $q_\mu = p'_\mu - p_\mu = 0$. Com este propósito, destacamos as seguintes identidades, fidedignas “*on shell*”,

$$\bar{u}_s(p') \left[p' . v u^\mu + p' . u v^\mu \right] u_r(p') = m_o \bar{u}_s(p') [\not{p} u^\mu + \not{p} v^\mu] \tau u_r(p'), \quad (6.89)$$

$$\bar{u}_s(p') \left[p' . u \not{p} + p' . v \not{p} \right] p'^\mu u_r(p') = \bar{u}_s(p') \left[2p' . u p' . v \gamma^\mu \right] u_r(p'), \quad (6.90)$$

que seguem diretamente da álgebra de Clifford (2.3).

À luz destas relações, voltamo-nos às integrais (6.76, 6.81, 6.87, 6.88) e escrevemos

$$\begin{aligned} \check{I}^{(0)\mu}(q=0) = & \left[-4m_o^2 X(q=0) + 2X_g(q=0) + 2m_o^2 X_{p'p'}(q=0) \right. \\ & \left. + 4m_o^2 Y_g(q=0) + 4m_o^4 Y_{p'p'}(q=0) \right] \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_A^{(q)\mu}(q=0) = & \left[8m_o^2 u.v Y_g(q=0) + 8m_o^2 p' . u p' . v Y_{p'p'}(q=0) - 8m_o^2 u.v Y_{gp'}(q=0) \right. \\ & - 8m_o^2 p' . u p' . v Y_{p'p'p'}(q=0) + 2u.v X_g(q=0) + 2p' . u p' . v X_{p'p'}(q=0) - 4u.v Y_{gg}(q=0) \\ & \left. - 4(m_o^2 u.v + 3p' . u p' . v) Y_{gp'p'}(q=0) - 4m_o^2 p' . u p' . v Y_{p'p'p'p'}(q=0) \right] \gamma^\mu \\ & + \left[-8m_o^2 Y_{gp'}(q=0) - 4Y_{gg}(q=0) - 4m_o^2 Y_{gp'p'}(q=0) \right] (\not{p} u^\mu + \not{p} v^\mu), \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_B^{(q)\mu}(q=0) = & \left[8p' . u p' . v \left(X(q=0) - 2X_{p'}(q=0) + X_{p'p'}(q=0) \right) \right. \\ & \left. + 2u.v \left(X_g(q=0) - m_o^2 X_{p'p'}(q=0) \right) \right] \gamma^\mu \\ & + \left(4m_o^2 X_{p'}(q=0) - 2X_g(q=0) - 2m_o^2 X_{p'p'}(q=0) \right) (\not{p} u^\mu + \not{p} v^\mu), \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_C^{(q)\mu}(q=0) = & - \left[8p' . u p' . v \left(2Y_g(q=0) + 2m_o^2 Y_{p'p'}(q=0) - 4Y_{gp'}(q=0) \right) \right. \\ & \left. - 2m_o^2 Y_{p'p'p'}(q=0) - X_{p'}(q=0) + X_{p'p'}(q=0) \right] \\ & + 4u.v \left(X_g(q=0) - 2m_o^2 Y_{gp'}(q=0) \right) \gamma^\mu \end{aligned}$$

$$- \left[-2m_o^2 X_{p'p'}(q=0) + 8m_o^2 Y_{gp'}(q=0) + 4m_o^4 Y_{p'p'p'}(q=0) \right] (\psi u^\mu + \psi v^\mu). \quad (6.94)$$

Colecionando (6.92-6.94), resulta a integral (6.72) a “momento nulo”

$$\begin{aligned} \check{I}^{(q)\mu}(q=0) = & \left[p' . up' . v \left(8X(q=0) - 8X_{p'}(q=0) + 2X_{p'p'}(q=0) - 16Y_g(q=0) \right. \right. \\ & - 8m_o^2 Y_{p'p'}(q=0) + 8m_o^2 Y_{p'p'p'}(q=0) - 12Y_{gp'p'}(q=0) \\ & \left. \left. + 32Y_{gp'}(q=0) - 4m_o^2 Y_{p'p'p'p'}(q=0) \right) + u.v \left(-2m_o^2 X_{p'p'}(q=0) \right. \right. \\ & \left. \left. + 8m_o^2 Y_g(q=0) - 4Y_{gg}(q=0) - 4m_o^2 Y_{gp'p'}(q=0) \right) \right] \gamma^\mu \\ & + \left[-2X_g(q=0) + 4m_o^2 X_{p'}(q=0) - 16m_o^2 Y_{gp'}(q=0) - 4m_o^2 Y_{gp'p'}(q=0) \right. \\ & \left. - 4Y_{gg}(q=0) - 4m_o^4 Y_{p'p'p'p'}(q=0) \right] (\psi u^\mu + \psi v^\mu). \quad (6.95) \end{aligned}$$

Examinando (6.91) e (6.95), observam-se as estruturas tensoriais linearmente independentes (no espaço de posições) γ^μ , $p' . up' . v \gamma^\mu$ e $(\psi u^\mu + \psi v^\mu)$, acompanhadas por seus respectivos coeficientes. Os termos proporcionais a γ^μ fornecem as correções a “momento nulo” ao vértice clássico, repercutindo sobre a “corrente de convecção” eletrônica e sobre o momento de dipolo magnético do elétron [41], como mencionado no Capítulo 4, e serão apreciados no Capítulo 7. Os outros termos, proporcionais a $p' . up' . v \gamma^\mu$ e $(\psi u^\mu + \psi v^\mu)$ em (6.95), fornecem acoplamentos inauditos, característicos de nosso modelo, aos quais reservaremos um breve espaço para discussão a seguir.

Tirando proveito de (B.200-B.215) e avaliando o termo proporcional a $p' . up' . v \gamma^\mu$ em (6.95), resulta

$$\begin{aligned} & p' . up' . v \gamma^\mu \left(8X(q=0) - 8X_{p'}(q=0) + 2X_{p'p'}(q=0) - 16Y_g(q=0) \right. \\ & \left. - 8m_o^2 Y_{p'p'}(q=0) + 8m_o^2 Y_{p'p'p'}(q=0) - 12Y_{gp'p'}(q=0) + \right. \\ & \left. + 32Y_{gp'}(q=0) - 4m_o^2 Y_{p'p'p'p'}(q=0) \right) = \\ & = \frac{i\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_o^3} \left\{ 2\sqrt{\pi} \left[-2 + \ln(4) - \frac{2}{\sqrt{M}} - \ln(M) \right] \right\} p' . up' . v \gamma^\mu, \quad (6.96) \end{aligned}$$

com $M = m_{ir}^2/m_o^2$. A expressão (6.96) evidencia o surgimento de um acoplamento derivativo de segunda ordem, no espaço de coordenadas, induzido pelo termo de quebra da simetria de Lorentz em nosso presente modelo⁶.

Por sua vez, averiguando o termo proporcional a $(\psi u^\mu + \psi v^\mu)$ em (6.95), auxiliados por (B.201-B.215), vem

$$\begin{aligned} & \left[-2X_g(q=0) + 4m_o^2 X_{p'}(q=0) - 16m_o^2 Y_{gp'}(q=0) - 4m_o^2 Y_{gp'p'}(q=0) \right. \\ & \quad \left. - 4Y_{gg}(q=0) - 4m_o^4 Y_{p'p'p'}(q=0) \right] (\psi u^\mu + \psi v^\mu) = \\ & = \frac{i\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_o} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(M) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(4) \right\} (\psi u^\mu + \psi v^\mu), \end{aligned} \quad (6.97)$$

que pode ser interpretado como uma “corrente do campo de quebra”, direcionada pelos trivetores u^μ e v^μ .

Sendo assim, em primeira ordem na constante de estrutura fina e em segunda ordem nos trivetores de quebra, na aproximação “*on shell*”, as correções quânticas imbuídas em (6.68) introduzem novos acoplamentos, induzidos pela quebra da simetria de Lorentz, e juntamente com o vértice clássico $-ie\gamma^\mu$ compõem o vértice efetivo que define a interação eletromagnética entre o fóton e o campo fermiônico.

Identidade de Ward

Novamente, para demonstrar a consistência dos resultados que obtivemos para as correções radiativas de auto-energia e vértice, examinaremos a seguir a identidade de Ward, que enlaça estas contribuições via simetria de gauge.

Com esta finalidade, diferenciamos (6.60) em relação ao trivetor p^μ , projetamos o resultado “*on-shell*” e somamos com (6.91), multilicada por $-ie^2[1 + (5/4)u.v]$, para obter

$$\begin{aligned} & \bar{u}_s(p) \left[\Gamma_\mu^{(0)}(p; q=0) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma_0(p) \right] u_r(p) = \\ & = ie^2 \left(1 + \frac{5}{4} u.v \right) \bar{u}_s(p) \left[2X_g(q=0) + 2m_o^2 X_{pp}(q=0) - 12m_o^2 Y_{gp}(q=0) \right] \end{aligned}$$

⁶Cabe ressaltar que no modelo com quebra fermiônica, restringimos nossa análise à primeira ordem no parâmetro de quebra, de forma que termos derivativos desta natureza não comparecem naquele modelo, sendo observado o surgimento de uma “corrente axial” (3.112, 3.113). Porém, uma análise em segunda ordem em b^μ pode conduzir a acoplamentos semelhantes a (6.96) naquele cenário.

$$-4m_o^4 Y_{ppp}(q=0) + 2\check{I}_g^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) + 2m_o^2 \check{I}_{pp}^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) \Big] \gamma_\mu u_r(p). \quad (6.98)$$

Valendo-nos então de (B.194-B.196, B.203-B.205, B.209-B.211) e usufruindo do *software* para o cálculo das integrais oportunas, decorre que (6.99) se anula exatamente ao tomarmos o limite em que $m_{ir} \rightarrow 0$, resultando na identidade de Ward da QED_3 quiral genuína

$$\bar{u}_s(p) \Gamma_\mu^{(0)}(p; q=0) u_r(p) = \bar{u}_s(p) \left[-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma_0(p) \right] u_r(p). \quad (6.99)$$

Adotando a mesma conduta, diferenciamos (6.61) em relação a p^μ , projetamos “*on shell*” e somamos com (6.95), multiplicada por ie^2 , obtendo

$$\begin{aligned} & \bar{u}_s(p) \left[\Gamma_\mu^{(uv)}(p; q=0) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma_{uv}(p) \right] u_r(p) = \\ & = -2ie^2 \bar{u}_s(p) \left\{ \check{I}^{(1)}(\not{p} = m_o\tau) - \check{I}_g^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) - 2m_o^2 X_p(q=0) \right. \\ & \quad \left. + 2X_g(q=0) + m_o^2 X_{pp}(q=0) + 2m_o^2 Y_{gp}(q=0) \right\} u.v\gamma_\mu \\ & + \left[\check{I}_{pp}^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) + X_{pp}(q=0) - 4Y_{gp}(q=0) - 2m_o^2 Y_{ppp}(q=0) \right] p.u.p.v\gamma_\mu \\ & + \left[2\check{I}_g^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) + m_o^2 \check{I}_{pp}^{(4)}(\not{p} = m_o\tau) - \check{I}^{(1)}(\not{p} = m_o\tau) + 2m_o^2 X_{pp}(q=0) \right. \\ & \quad \left. - 2m_o^2 X_p(q=0) + X_g(q=0) + 2m_o^4 Y_{ppp}(q=0) \right] (\not{p}u_\mu + \not{p}v_\mu) \Big\} u_r(p). \quad (6.100) \end{aligned}$$

Colecionando (B.188, B.194-B.196, B.201-B.205, B.209-B.211) e recorrendo ao *software* para o cálculo das integrais, mais uma vez cada termo linearmente independente de (6.101) se anula individualmente ao removermos o regulador infravermelho, tomando o limite $m_{ir} \rightarrow 0$, fornecendo

$$\bar{u}_s(p) \Gamma_\mu^{(uv)}(p; q=0) u_r(p) = \bar{u}_s(p) \left[-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma_{uv}(p) \right] u_r(p). \quad (6.101)$$

As equações (6.99) e (6.101) verificam a identidade de Ward a *1-loop* em nosso modelo, reafirmando a simetria de gauge subjacente, e respaldam nossos resultados originais apresentados no presente capítulo.

6.3 Renormalizabilidade

O presente modelo definido por (6.1), assim como o modelo com quebra fermiônica, é superrenormalizável, tendo em vista que a constante de acoplamento e^2 tem dimensão de massa e a integral superficialmente divergente (6.63) é finita no ultravioleta, como discutido no Apêndice B.

Entretanto, assim como fizemos com nosso modelo precedente, alinhavamos no Apêndice D a renormalização perturbativa finita deste modelo com quebra no setor do fóton, com o intuito de assegurarmos o comportamento adequado dos propagadores nas vizinhanças dos polos, motivados por [42].

6.4 Referências do Capítulo

Destacamos a seguir as referências relevantes ao capítulo.

[3] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. “*Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*”, Phys.Rev. D **58**, p.116002, 1998.

[4] Jackiw, R.; Kostelecký, V. A. “*Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **82**, p.3572, 1999.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.

[42] Weinberg, S. “*The Quantum Theory of Fields: Foundations*”. Volume Um. Cambridge University Press, 1995.

[63] d’Inverno, R. “*Introducing Einstein’s Relativity*”. Oxford University Press, 1995.

Capítulo 7

Fenômenos Planares na Teoria Estendida no Setor do Fóton

Em compasso com a investigação delineada no Capítulo 4 acerca das implicações fenomenológicas da quebra da simetria de Lorentz no setor fermiônico, abordaremos neste capítulo a repercussão de nosso modelo estendido no setor do fóton, par sob CPT, sobre os observáveis físicos, destacando o potencial eletrostático e o momento magnético do elétron em $(2+1)$ dimensões¹.

7.1 Potencial Eletrostático

De posse do propagador do fóton (6.49), vestido pelos trivetores de quebra em segunda ordem, podemos contemplar o potencial eletrostático em nosso modelo seguindo o mesmo procedimento empregado no Capítulo 4, no âmbito da teoria com quebra fermiônica. Para este fim, retomamos (4.27) [41], que estabelece o potencial produzido por um elétron estático puntiforme, e escrevemos

¹Naturalmente, em virtude do presente modelo preservar individualmente as simetrias P e T , como mencionado no Capítulo 1, cabe salientar que não há, de partida, manifestação da quebra da simetria de Lorentz sobre a condutividade transversal neste caso, alvo de investigação no Capítulo 4 no contexto da quebra fermiônica, visto que o efeito Hall demanda a violação das respectivas simetrias discretas supracitadas.

$$A^0(\vec{k}) = -eD_{00}(0, \vec{k}) - eD_{0\mu}(0, \vec{k})i\Pi^{(0)\mu\nu}(\vec{k})iD_{\nu 0}(0, \vec{k}), \quad (7.1)$$

em que o primeiro termo do segundo membro fornece o potencial em nível clássico e o segundo termo confere as correções quânticas, em *1-loop*, imbuídas no tensor de polarização do vácuo (3.30).

7.1.1 Potencial Clássico

Com a finalidade de examinarmos a influência do termo de Chern-Simons no potencial eletrostático, desenvolveremos paralelamente, ao longo de toda esta seção, o cálculo do potencial na presença e na ausência do referido termo.

Caso em que $m_{cs} \neq 0$

Neste contexto, recorrendo a (4.27) segue, após manipulações algébricas simples, o potencial clássico no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} A_{cl}^0(\vec{k}) &= -e \left\{ \frac{1}{m_{cs}^2 + \vec{k}^2} - \frac{2}{\vec{k}^2} \frac{m_{cs}^2 - \vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \vec{k} \cdot \vec{v} \vec{k} \cdot \vec{u} - \frac{5}{4} \frac{m_{cs}^2 - \vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} u \cdot v \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\vec{k}^2}{(\vec{k}^2 + m_{cs}^2)^2} u^0 v^0 - \frac{2m_{cs}^2}{\vec{k}^2(\vec{k}^2 + m_{cs}^2)^2} \left| \vec{v} \times \vec{k} \right| \left| \vec{u} \times \vec{k} \right| \right\} \\ &= -e \left\{ \frac{1}{m_{cs}^2 + \vec{k}^2} - \frac{1}{4} \frac{5m_{cs}^2 + 3\vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} u^0 v^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \left[(5m_{cs}^2 - \vec{k}^2) \cos(\beta) + (-8m_{cs}^2 + 4\vec{k}^2) \cos(2\theta - \beta) \right] |\vec{v}| |\vec{u}| \right\}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde definimos β como o ângulo fixo entre os bivectores de quebra \vec{v} e \vec{u} e θ como o ângulo entre os bivectores \vec{k} e \vec{u} no sistema de coordenadas adotado, em que fixamos \vec{u} na direção x.

Tomando a transformada de Fourier (4.28) para o espaço de configuração e empregando coordenadas polares, decorre²

$$A_{cl}^0(\vec{r}) = -\frac{e}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho}{1 + \rho^2} J_0(m_{cs}\rho r) d\rho + \frac{e}{2\pi} \frac{u^0 v^0}{4} \int_0^\infty \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} (5 + 3\rho^2) J_0(m_{cs}\rho r) d\rho$$

²Os cálculos analíticos do presente capítulo também foram efetuados com o auxílio do *software* WOLFRAM MATHEMATICA, versão 8.0.1.0.

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4(2\pi)^2} |\vec{v}| |\vec{u}| \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\phi e^{i\rho r \cos(\phi)} \frac{1}{(m_{cs}^2 + \rho^2)^2} \cdot \\
& \cdot [(5m_{cs}^2 - \rho^2)\cos(\beta) + (-8m_{cs}^2 + 4\rho^2)\cos(2(\alpha - \phi) - \beta)], \\
& = -\frac{e}{2\pi} K_0(m_{cs}r) + \frac{e}{8\pi} u^0 v^0 [3K_0(m_{cs}r) + m_{cs}r K_1(m_{cs}r)] \\
& \quad - \frac{e}{8\pi} \cos(\beta) |\vec{v}| |\vec{u}| \int_0^\infty d\rho \rho \frac{5 - \rho^2}{(1 + \rho^2)^2} J_0(m_{cs}\rho r) \\
& \quad - \frac{e}{8\pi} \cos(2\alpha - \beta) |\vec{v}| |\vec{u}| \int_0^\infty d\rho \rho \frac{8 - 4\rho^2}{(1 + \rho^2)^2} J_2(m_{cs}\rho r) \\
& = -\frac{e}{2\pi} K_0(m_{cs}r) + \frac{e}{8\pi} u^0 v^0 [3K_0(m_{cs}r) + m_{cs}r K_1(m_{cs}r)] \\
& \quad - \frac{e}{8\pi} \cos(\beta) |\vec{v}| |\vec{u}| [3m_{cs}r K_1(m_{cs}r) - K_0(m_{cs}r)] \\
& \quad - \frac{e}{2\pi} \cos(2\alpha - \beta) |\vec{v}| |\vec{u}| \left[-\frac{3}{2} m_{cs}r K_1(m_{cs}r) - 2K_2(m_{cs}r) + \frac{4}{m_{cs}^2 r^2} \right], \quad (7.3)
\end{aligned}$$

em que α é o ângulo entre o bivector posição arbitrário \vec{r} e o vetor de quebra \vec{u} .

Examinando (7.3), nota-se que o potencial clássico na ausência de quebra (4.31) é naturalmente recuperado e, distintamente do que observamos no modelo com quebra fermiônica, uma quebra isotrópica no setor do fóton se manifesta nitidamente no potencial, contribuindo com uma interação circularmente simétrica como evidência o segundo termo. Por sua vez, de forma semelhante ao caso com quebra fermiônica, as inhomogeneidades espaciais advindas do campo de quebra atribuem uma dependência angular à interação eletrostática, como mostram os últimos termos de (7.3).

O potencial (7.3), juntamente com (7.5) a seguir, exatos em segunda ordem nos parâmetros de quebra, são relevantes contribuições de nosso trabalho original. Estes resultados descortinam um cenário fenomenológico de investigação promissor, evidenciando a sensibilidade do propagador à quebra espontânea da simetria de Lorentz já em nível clássico, no âmbito da física de partículas, e, no contexto da matéria condensada, fornecem o reflexo sobre a interação eletrostática por uma anisotropia em materiais bidimensionais, eventualmente descritos por nossa lagrangiana efetiva (6.1), que modifica o comportamento dos campos eletromagnéticos em seu interior.

Caso em que $m_{cs} = 0$

Suprimindo o termo topológico de Chern-Simons, o propagador do fóton se resume a (6.50), fornecendo no espaço dos momentos o potencial

$$A_{cl}^0(\vec{k}) = -e \left[\frac{1}{\vec{k}^2} - \frac{3}{4} \frac{u^0 v^0}{\vec{k}^2} + \frac{|\vec{u}| |\vec{v}|}{\vec{k}^2} \cos(\beta) + \frac{|\vec{u}| |\vec{v}|}{\vec{k}^2} \cos(\beta - 2\theta) \right], \quad (7.4)$$

em que adotamos o mesmo sistema de coordenadas empregado em (7.2, 7.3).

Nos dirigindo ao espaço de coordenadas por meio da transformada de Fourier, advém

$$\begin{aligned} A_{cl}^0(\vec{r}) &= -\frac{e}{2\pi} \left(1 - \frac{3}{4} u^0 v^0 \right) \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^2 + m_{ir}^2} J_0(\rho r) d\rho \\ &\quad - \frac{e}{2\pi} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\beta) \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^2 + m_{ir}^2} J_0(\rho r) d\rho \\ &\quad - \frac{e}{(2\pi)^2} |\vec{u}| |\vec{v}| \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\phi e^{i\rho r \cos(\phi)} \frac{1}{\rho^2 + m_{ir}^2} \cos[\beta - 2(\alpha - \phi)] \\ &= -\frac{e}{2\pi} \left(1 - \frac{3}{4} u^0 v^0 \right) [-\gamma_{euler} + \ln(2) - \ln(r) - \ln(m_{ir}) + O(m_{ir})] \\ &\quad - \frac{e}{2\pi} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\beta) [-\gamma_{euler} + \ln(2) - \ln(r) - \ln(m_{ir}) + O(m_{ir})] \\ &\quad + \frac{e}{2\pi} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\beta - 2\alpha) \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^2 + m_{ir}^2} J_2(\rho r) d\rho \\ &= -\frac{e}{2\pi} \left(1 - \frac{3}{4} u^0 v^0 \right) [-\gamma_{euler} + \ln(2) - \ln(r) - \ln(m_{ir})] \\ &\quad - \frac{e}{2\pi} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\beta) [-\gamma_{euler} + \ln(2) - \ln(r) - \ln(m_{ir})] + \frac{e}{4\pi} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\beta - 2\alpha), \end{aligned} \quad (7.5)$$

em que m_{ir} é o regulador do infravermelho e γ_{euler} é a constante de Euler-Mascheroni.

Analisando (7.5), aparte às constantes, o comportamento logarítmico esperado pela eletrodinâmica clássica em duas dimensões se demonstra claramente no primeiro termo. Como discutido no Capítulo 4, ao compararmos o comportamento assintótico das funções de Bessel modificadas de segunda espécie, que permeiam (7.3), com o da função logarítmica, verifica-se um evanescimento mais proeminente das primeiras, que indica um “alcance efetivo” reduzido na

teoria protagonizada pelo termo topológico, comparativamente à teoria em sua ausência.

Novamente, a repercussão da quebra da simetria de Lorentz se demonstra na interação eletrostática via (7.5) em ambos os cenários isotrópico, caracterizado pelo termo radial, e anisótropico, destacado pelos termos que compreendem a dependência angular.

Outro aspecto importante que se pode depreender de (7.3) e (7.5) diz respeito ao comportamento infravermelho dos respectivos casos. O termo de Chern-Simons se comporta como um “regulador natural” à baixas energias, suavizando a divergência e conduzindo a um potencial finito (7.3), assim como se pôde observar em todos os resultados físicos obtidos no Capítulo 4, em contraste com o potencial (7.5) do modelo que prescinde do referido termo, onde a divergência infravermelha é flagrante e deve ser contornada com inserções de *bremstrahlung* nas seções de choque envolvendo processos de espalhamento. Entretanto, enfatizamos aqui que o termo topológico não remove a divergência infravermelha do modelo, como visto no Capítulo 5 no âmbito da teoria com quebra fermiônica sob a perspectiva do modelo de Bloch-Nordsieck e nas referências [9-11].

7.1.2 Correções Radiativas no Caso de Quebra Isotrópica

As flutuações do campo eletromagnético modificam o propagador do fóton e fornecem correções ao potencial eletrostático. Como antecipado, em primeira ordem na constante de estrutura fina, esta contribuição é descrita pelo último termo em (7.1), com o tensor de polarização do vácuo (3.30).

Tendo em mente que o cenário particular de quebra isotrópica da simetria de Lorentz favorece a pesquisa fenomenológica de cunho experimental, o privilegiaremos no cálculo das correções quânticas alinhavado a seguir.

Caso em que $m_{cs} \neq 0$

Lançando mão de (3.30, 3.36, 3.37) e das integrais auxiliares (B.133-B.142), a correção radiativa proveniente do tensor de polarização ao propagador (6.18), no gauge de Landau e na situação de quebra isotrópica, pertinente ao potencial eletrostático (7.1), consiste em

$$\begin{aligned} & iD_{0\mu}(0, \vec{k}) i\Pi^{(0)\mu\nu}(\vec{k}) iD_{\nu 0}(0, \vec{k}) = \\ & = \frac{ie^2}{4\pi} \left[2m_o + (\vec{k}^2 - 4m_o^2) \frac{1}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \frac{1}{\vec{k}^2} \frac{m_{cs}^2 - \vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ie^2}{\pi} \left[\frac{m_o}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \frac{2m_{cs}}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \\
 & + \frac{ie^2}{4\pi} \left[2m_o + (\vec{k}^2 - 4m_o^2) \frac{1}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \frac{7m_{cs}^2 + 3\vec{k}^2}{2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^3} u_0 v_0 \\
 & - \frac{ie^2}{\pi} \left[\frac{m_o}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \frac{m_{cs}}{2(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^3} (5m_{cs}^2 + \vec{k}^2) u_0 v_0. \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Visando o comportamento do potencial a grandes distâncias, foco de nosso interesse, expandimos os termos entre colchetes até segunda ordem na razão $|\vec{k}|/m_o$ e recorreremos a (7.1) para escrever

$$\begin{aligned}
 A^{0(0)}(\vec{k}) & = -eD_{0\mu}(0, \vec{k})i\Pi^{(0)\mu\nu}(\vec{k})iD_{\nu 0}(0, \vec{k}) = -\frac{e^3}{6\pi} \frac{m_{cs}}{m_o} (m_{cs} + 6m_o) \frac{1}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} \\
 & + \frac{e^3}{12\pi} \frac{m_{cs} + 2m_o}{m_o^2} \frac{\vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^2} + \frac{5e^3}{4\pi} \frac{m_{cs}^3}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^3} u_0 v_0 \\
 & - \frac{e^3}{48\pi} \frac{1}{m_o^2} (5m_{cs}^3 + 28m_{cs}^2 m_o - 12m_{cs} m_o^2) \frac{\vec{k}^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^3} u_0 v_0 \\
 & - \frac{e^3}{48\pi} \frac{m_{cs} + 12m_o}{m_o^2} \frac{(\vec{k}^2)^2}{(m_{cs}^2 + \vec{k}^2)^3} u_0 v_0. \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier, segue o potencial a grandes distâncias no espaço de coordenadas

$$\begin{aligned}
 A^{0(0)}(\vec{r}) & = -\frac{e^3}{12\pi^2} \frac{m_{cs} + 6m_o}{m_o m_{cs}} \int_0^\infty \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} J_0(m_{cs} \rho r) d\rho \\
 & + \frac{e^3}{24\pi^2} \frac{m_{cs} + 2m_o}{m_o^2} \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(1 + \rho^2)^2} J_0(m_{cs} \rho r) d\rho \\
 & + \frac{5e^3}{8\pi^2} \frac{1}{m_{cs}} \int_0^\infty \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^3} J_0(m_{cs} \rho r) d\rho u_0 v_0 \\
 & - \frac{e^3}{96\pi^2} \frac{1}{m_o^2 m_{cs}^2} (5m_{cs}^3 + 28m_{cs}^2 m_o - 12m_{cs} m_o^2) \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(1 + \rho^2)^3} J_0(m_{cs} \rho r) d\rho u_0 v_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^3}{96\pi^2} \frac{m_{cs} + 12m_o}{m_o^2} \int_0^\infty \frac{\rho^5}{(1 + \rho^2)^3} J_0(m_{cs}\rho r) d\rho u_0 v_0 \\
= & -\frac{e^3}{48\pi^2} \frac{1}{m_o^2} [-2(m_{cs} + 2m_o)K_0(m_{cs}r) + (m_{cs}^2 + 4m_{cs}m_o + 12m_o^2)rK_1(m_{cs}r)] \\
& + \left[-\frac{e^3}{96\pi^2} \frac{5m_{cs}^3 + 28m_{cs}^2m_o - 12m_{cs}m_o^2}{m_o^2m_{cs}^2} \left(\frac{1}{2}m_{cs}rK_1(m_{cs}r) - \frac{1}{8}m_{cs}^2r^2K_2(m_{cs}r) \right) \right. \\
& \left. - \frac{e^3}{96\pi^2} \frac{m_{cs} + 12m_o}{m_o^2} \left(K_0(m_{cs}r) - m_{cs}rK_1(m_{cs}r) + \frac{1}{8}m_{cs}^2r^2K_2(m_{cs}r) \right) \right. \\
& \left. + \frac{5e^3}{64\pi^2} m_{cs}r^2K_2(m_{cs}r) \right] u_0 v_0. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

O potencial inaudito (7.8) consiste na versão bidimensional do potencial de Uehling [39, 41] para nosso modelo, reafirmando a contribuição (4.46) do tensor de polarização do vácuo da QED_3 quiral genuína, declarada no primeiro termo do segundo membro, e manifestando a influência da quebra isotrópica sobre a interação eletrostática, através do segundo termo do segundo membro, que naturalmente exhibe simetria circular.

Caso em que $m_{cs} = 0$

Voltando-nos ao caso correspondente à ausência do termo topológico, retomamos o propagador (6.50), municiados novamente por (3.30, 3.36, 3.37) e das respectivas integrais auxiliares, obtendo no caso de quebra isotrópica a correção quântica a *1-loop*

$$\begin{aligned}
& iD_{0\mu}(0, \vec{k}) i\Pi^{(0)\mu\nu}(\vec{k}) iD_{\nu 0}(0, \vec{k}) = \\
= & -\frac{ie^2}{4\pi} \left[2m_o + (\vec{k}^2 - 4m_o^2) \frac{1}{|\vec{k}|} \operatorname{arccot} \left(\frac{2m_o}{|\vec{k}|} \right) \right] \left(1 - \frac{3}{2}u_0v_0 \right) \frac{1}{(\vec{k}^2)^2}. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

Expandindo o termo entre colchetes de (7.9) novamente até segunda ordem em $|\vec{k}|/m_o$, almejando limite assintótico do potencial, segue no espaço dos momentos

$$A^{0(0)}(\vec{k}) = -eD_{0\mu}(0, \vec{k}) i\Pi^{(0)\mu\nu}(\vec{k}) iD_{\nu 0}(0, \vec{k}) = \frac{e^3}{6\pi} \frac{1}{m_o} \left(1 - \frac{3}{2}u_0v_0 \right) \frac{1}{\vec{k}^2}. \tag{7.10}$$

Alçando o espaço de posições, o potencial de Uehling no presente caso de nosso modelo se traduz em

$$\begin{aligned}
 A^{0(0)}(\vec{r}) &= \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{m_o} \left(1 - \frac{3}{2}u_0v_0\right) \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^2 + m_{ir}^2} J_0(\rho r) d\rho \\
 &= \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{m_o} \left(1 - \frac{3}{2}u_0v_0\right) [-\gamma_{euler} + \ln(2) - \ln(r) - \ln(m_{ir})]. \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

7.2 Momento Magnético do Elétron

As flutuações dos campos fermiônico e de gauge atribuem correções radiativas ao vértice eletromagnético, promovendo modificações na interação entre estes campos no limite quântico e repercutindo, entre outros observáveis físicos, sobre o momento magnético do elétron [29, 39, 41], como discutido no Capítulo 4 no âmbito da teoria com quebra fermiônica.

Para destacarmos esta correção de forte interesse fenomenológico, nesta seção apreciaremos o cenário envolvendo a interação de uma corrente eletrônica em um campo magnético estático e apuraremos o reflexo das flutuações quânticas, em primeira ordem em α_e , e, sobretudo, do termo de quebra da simetria de Lorentz sobre o momento magnético, em segunda ordem nos trivetores u^μ e v^μ , em nosso modelo original no caso em que prescindimos do termo topológico de Chern-Simons, nos detendo na aproximação “*on-shell*”.

Com este intuito, retomamos as expressões (6.71, 6.75, 6.80, 6.86, 6.87) para o vértice e sobrelevamos os termos proporcionais a γ^μ , que frente à identidade de Gordon (4.69), fornece o acoplamento eletromagnético da “corrente de convecção” e a interação dipolar entre o campo magnético e a corrente eletrônica (4.77), obtendo

$$\begin{aligned}
 \check{I}_{\text{MAG}}^{(0)\mu}(q \rightarrow 0) &= \left[-4m_o^2 X(q \rightarrow 0) + 4m_o^2 X_{p'}(q \rightarrow 0) + 2X_g(q \rightarrow 0) \right. \\
 &\quad \left. + 4m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) + 4m_o^4 Y_{p'p'}(q \rightarrow 0) \right] \gamma^\mu, \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

$$\check{I}_{\text{MAG}}^{(q)\mu}(q \rightarrow 0) = \left[8m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) - 4Y_{gg}(q \rightarrow 0) + 2m_o^2 X_{p'p'}(q \rightarrow 0) \right] u.v \gamma^\mu, \quad (7.13)$$

com as integrais auxiliares $X_*(q \rightarrow 0)$ e $Y_*(q \rightarrow 0)$ elaboradas no Apêndice B e avaliadas no limite de “espalhamento progressivo”, em que $q^\mu = p'^\mu - p^\mu \rightarrow 0$.

À luz de (6.67), (7.12) e (7.13), decorre o vértice quântico efetivo para a interação dipolar magnética

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{MAG}}^\mu(q \rightarrow 0) = & -ie^2 \left\{ \left[-4m_o^2 X(q \rightarrow 0) + 4m_o^2 X_{p'}(q \rightarrow 0) + 2X_g(q \rightarrow 0) \right. \right. \\ & + 4m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) + 4m_o^4 Y_{p'p'}(q \rightarrow 0) \left. \right] + \left[-5m_o^2 X(q \rightarrow 0) + 5m_o^2 X_{p'}(q \rightarrow 0) \right. \\ & + \frac{5}{2} X_g(q \rightarrow 0) + 2m_o^2 X_{p'p'}(q \rightarrow 0) + 13m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) + 5m_o^4 Y_{p'p'}(q \rightarrow 0) \\ & \left. \left. - 4Y_{gg}(q \rightarrow 0) \right] u.v \right\} \frac{i}{2m_o} \sigma^{\mu\alpha} \tau q_\alpha. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Desenvolvendo analiticamente os termos entre chaves em (7.14), com o auxílio do *software*, escrevemos

$$\Gamma_{\text{MAG}}^\mu(q \rightarrow 0) = \frac{i}{2m_o} \Gamma_{\text{MAG}} \sigma^{\mu\alpha} \tau q_\alpha, \quad (7.15)$$

com o coeficiente auxiliar

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{MAG}} = & \frac{e^2}{8\pi m_o} \left(4 - 4\ln(2) - 4\ln(m_o) + 4\ln(m_{ir}) + 3 \frac{m_o}{m_{ir}} \right) \\ & + \frac{e^2}{32\pi m_o} \left(10 - 12\ln(2) - 12\ln(m_o) + 12\ln(m_{ir}) + 7 \frac{m_o}{m_{ir}} \right) u.v. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Deste coeficiente (7.16) podemos deprender a contribuição das correções radiativas oriundas da teoria quiral genuína, compreendida no primeiro termo, e, essencialmente, aquelas provenientes da quebra da simetria de Lorentz, reveladas pelo segundo termo, ao momento magnético. Com efeito, analogamente a (4.82), a razão giromagnética corrigida do elétron no plano fica determinada por

$$g = 2(1 + \Gamma_{\text{MAG}}) \quad (7.17)$$

e, por sua vez, o valor esperado do momento magnético corrigido é expresso por (4.80).

O resultado original (7.16), de valor singular em nosso trabalho, oferece uma perspectiva promissora de investigação fenomenológica. No contexto da matéria condensada, revela que as propriedades magnéticas de condutores bi-dimensionais são sensíveis a anisotropias do campo eletromagnético em seu

interior e, no cenário da física de altas energias, oferece a expectativa de evidenciar a quebra da simetria de Lorentz em baixas dimensões sob a ótica da interação dipolar magnética.

Cabe ressaltar, contudo, que assim como (7.5, 7.11), a expressão (7.16) retém a divergência infravermelha característica do modelo sem o termo topológico de Chern-Simons. Este comportamento em baixas energias é sutil em $(2+1)$ dimensões, pois a divergência não exponencia, como visto no Capítulo 4, e merece atenção, sendo alvo de investigações futuras.

7.3 Referências do Capítulo

As referências pertinentes a este capítulo estão listadas a seguir.

[3] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. “*Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*”, Phys.Rev. D **58**, p.116002, 1998.

[29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. “*Quantum Electrodynamics*”. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.

[60] Kostelecký, V. A.; Mewes, M. “*Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **66**, p. 056005, 2002.

[67] Chen, W. F.; Kunstatter, G. “*Constraint from Lamb Shift and Anomalous Magnetic Moment on Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **62**, p. 105029, 2000.

Considerações Finais

Tendo em vista o crescente interesse em uma possível violação da simetria de Lorentz, que compõe um dos pilares da teoria axiomática de campos, encontrando respaldo nas teorias atuais que abordam a gravitação quântica, investigamos a quebra de Lorentz/CPT na eletrodinâmica quântica a partir da teoria efetiva de Colladay-Kostelecký [2], no contexto convidativo e pouco explorado de (2+1) dimensões espaço-temporais.

Apresentamos no primeiro capítulo o modelo efetivo de Colladay-Kostelecký para a QED estendida e construímos, em caráter original, os termos de quebra de Lorentz/CPT compatíveis com extensões renormalizáveis da eletrodinâmica quântica em (2+1) dimensões (QED_3), em uma representação redutível, introduzida no segundo capítulo.

No Capítulo 2, definimos nosso modelo fermiônico estendido, em que privilegiamos o termo de quebra envolvendo a matriz γ_5 , apreciando o conceito de “quiralidade” que emerge nesta representação, e contemplamos o termo topológico de Chern-Simons.

No terceiro capítulo, determinamos perturbativamente, em $1-loop$, as correções radiativas de auto-energia e de vértice, em primeira ordem no termo de quebra b^μ , e de polarização do vácuo, em segunda ordem no parâmetro de quebra, sendo todos os resultados originais.

Ato contínuo, no Capítulo 4 analisamos a fenomenologia inerente ao modelo fermiônico, contemplando as contribuições quânticas ao potencial eletrostático e ao momento magnético do elétron, destacando a repercussão dos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz no potencial e o reflexo do termo topológico de Chern-Simons no momento magnético. Estes resultados são fruto de nossa investigação original e vêm acrescentar à literatura dedicada.

Ainda no Capítulo 4, obtivemos um dos resultados mais importantes de nosso trabalho original no âmbito do efeito Hall inteiro, em que demonstramos que o termo efetivo de quebra não fornece contribuição à condutividade transversal até segunda ordem de aproximação no parâmetro de quebra. Sendo

assim, transportando-nos ao cenário da física da matéria condensada, em que a QED_3 na representação redutível encontra forte apelo fenomenológico, pode-se concluir que potenciais efetivos do tipo axial como o que empregamos não modificam a condutividade Hall de sistemas planares.

No Capítulo 5, investigamos o limite infravermelho de nosso modelo estendido fermiônico, à luz do modelo de Bloch-Nordsieck, empregando o formalismo não perturbativo de Fock e obtivemos o propagador fermiônico exato a baixas energias, contribuindo com este resultado original à literatura. Neste escopo, discutimos a sensibilidade da QED_3 ao limite infravermelho, demonstrando que o termo topológico de Chern-Simons não remove a divergência infravermelha da teoria, tampouco o termo de quebra da simetria de Lorentz, e evidenciamos que, em (2+1) dimensões, a divergência não exponencia, diferentemente do que ocorre na versão quadridimensional, generalizando os resultados de [71].

O modelo efetivo com quebra da simetria de Lorentz no setor do fóton foi investigado no Capítulo 6, em que construímos pioneiramente o propagador exato do fóton, parametrizado pelos trivetores de quebra u^μ e v^μ , que, juntamente com o tensor métrico, constituem uma base em (2+1) dimensões para o tensor de quebra $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. Neste capítulo, determinamos também as correções radiativas de auto-energia, polarização do vácuo e de vértice, novamente na aproximação de *1-loop* e em segunda ordem nos trivetores de quebra, sendo todos os resultados originais.

Ao Capítulo 7 reservamos a fenomenologia do modelo com quebra no setor do fóton, onde determinamos as contribuições quânticas e do termo de quebra ao potencial eletrostático e ao momento magnético do elétron, resultados originais de nosso projeto de pesquisa.

No Apêndice D, examinamos também a renormalização de nosso modelo, conferindo uma contribuição relevante à literatura, visto que desconhecemos referência à renormalização de tais modelos de (2+1) dimensões, embora esta seja desejável para assegurar o comportamento adequado, em ordens superiores em teoria de perturbação, dos propagadores corrigidos pelas respectivas auto-energias, fixando-se seus polos, mesmo em teorias superrenormalizáveis como a QED_3 .

No Apêndice E, ressaltamos o limite clássico de nosso modelo efetivo original com quebra no setor do fóton, apontando a perda de transversalidade dos campos elétrico e magnético induzida pelos trivetores de quebra e discutimos o efeito magneto-elétrico subjacente ao modelo.

Temos como perspectiva para a continuidade da presente pesquisa, no âmbito formal, concluir o procedimento de renormalização de nossa teoria efetiva com a construção da função beta associada ao grupo de renormalização. No contexto fenomenológico, pretendemos investigar fases geométricas em nosso modelo,

tendo como possível cenário de investigação o efeito Aharonov-Bohm planar, examinar a possibilidade de estendermos o modelo para acomodar graus de liberdade de sabor, viabilizando uma abordagem efetiva para a interação eletrofraca em sistemas tridimensionais, e “curvatura”, possibilitando a investigação de sistemas bidimensionais de matéria condensada com topologias não triviais, bem como explorar o contexto promissor envolvendo temperatura e campos externos, analisando as correções radiativas e térmicas à fórmula de Kubo relativística para os fatores de ocupação dos níveis de Landau [21-23, 78-81].

Apêndice A

Regras de Feynman para a QED_3 Estendida

O intuito deste apêndice consiste em apresentar as regras de Feynman para nosso modelo original da QED_3 com quebra da simetria Lorentz.

A.1 Regras de Feynman

As regras de Feynman fornecem uma interpretação pictórica da expansão perturbativa da matriz de espalhamento (S), conduzindo a uma construção diagramática conveniente para o estudo de processos de espalhamento e correções radiativas, que nos permite filtrar da matriz S as contribuições relevantes para cada processo na escala de energia apropriada.

Para a derivação das regras, recorre-se à densidade lagrangiana, em nosso modelo (D.2)

$$\begin{aligned} L(x) = & \bar{\psi}(x) (i\cancel{\partial} - m_o\tau) \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\zeta} (\partial_\mu A^\mu(x))^2 \\ & - e\bar{\psi}(x)\cancel{A}(x)\psi(x) + \frac{m_{cs}}{4} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} A^\alpha(x) F^{\beta\lambda}(x) - \bar{\psi}(x)\gamma^5 \cancel{b}(x)\psi(x) \\ & - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}(x) F^{\mu\nu}(x) + i\delta_2 \bar{\psi}(x)\cancel{\partial}\psi(x) \\ & - (\delta_{m_o} + \delta_2)m_o\bar{\psi}(x)\tau\psi(x) - \frac{\delta_3}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \delta_3 \frac{1}{2\zeta} (\partial_\mu A^\mu(x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\delta_2 + \delta_e + \frac{\delta_3}{2} \right) e \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) + (\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \frac{m_{cs}}{4} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} A^\alpha(x) F^{\beta\lambda}(x) \\
& - (\delta_2 + \delta_b) \bar{\psi}(x) \gamma^5 \not{b}(x) \psi(x) - (\delta_3 + \delta_R) \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}(x) F^{\mu\nu}(x),
\end{aligned}$$

constrói-se a matriz S na representação de interação e emprega-se o teorema de Wick para construir-se as amplitudes de transição apropriadas, de onde pode-se deprender as regras de Feynman [30, 39, 40]. Por concisão do texto, nos limitaremos aqui a apenas colecionar as regras associadas ao nosso modelo, tendo em vista que o procedimento para sua obtenção, descrito acima, não acrescenta nenhuma peculiaridade ao padrão conhecido na literatura¹.

A.1.1 Regras de Feynman no Espaço dos Momentos

Com o propósito de estudar correções radiativas é oportuno remeter ao espaço dos momentos. Sendo assim, as regras de Feynman são as seguintes:

1. cada linha do diagrama deve ser rotulada com o trimomento do campo associado,
2. a cada vértice eletromagnético “bare”, associamos o fator $-ie\gamma^\mu$,
3. a cada vértice que envolve o campo $b^\mu(k)$, atribuímos o fator $-i\gamma^5\not{b}$,
4. a conservação de energia-momento é assegurada em cada vértice, associando-se $(2\pi)^3\delta^3(p' - p \pm k)$ a cada vértice,
5. em linhas fermiônicas externas, associamos as amplitudes de onda (normalizadas) $u(p, s)$ para um férmion incidente, $\bar{v}(p, s)$ para um antiférmion incidente, $\bar{u}(p, s)$ para um férmion emergente e $v(p, s)$ para um antiférmion emergente,
6. em linhas de fótons externas, associamos também as amplitudes de onda (normalizadas) $\epsilon^\mu(k, s)$ para fótons incidentes e $\epsilon^{*\mu}(k, s)$ para fótons emergentes,
7. a cada linha interna fermiônica ou de fótons, atribuímos os respectivos propagadores de Feynman $iS_F(p)$ e $iD_F^{\mu\nu}(k)$,
8. a cada linha fermiônica interna fechada (“loop”), atribuímos um fator (-1) e tomamos o traço sobre todas as quantidades spinoriais,

¹Cabe apenas recordar que, em nosso modelo, os campos $b^\mu(x)$ e $R^{\alpha\beta\mu\nu}$, que violam a simetria de Lorentz, devem ser entendidos como campos externos (i.e. não quantizado).

9. todos os trimomentos associados a linhas internas devem ser integrados (normalizando-se por $(2\pi)^{-3}$),
10. a cada contratermo do vértice eletromagnético, atribuímos o fator $-ie(\delta_2 + \delta_e + \frac{\delta_3}{3})\gamma^\mu$,
11. a cada contratermo do vértice que envolve $b^\mu(k)$, associamos o fator $-i(\delta_2 + \delta_b)\gamma^5\cancel{\psi}$,
12. a cada contratermo fermiônico, empregamos o fator $i\delta_2(\cancel{\psi} - m_e - m_o\tau) - i\delta_{m_e}m_e - i\delta_{m_o}m_o\tau$,
13. a cada contratermo para fótons, atribuímos o fator $-i\left[\delta_3 k^2 g^{\mu\nu} - \delta_3 \frac{k^\mu k^\nu}{\zeta}(\zeta + 1) + im_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3)\epsilon^{\mu\alpha\nu}k_\alpha + 2(\delta_3 + \delta_R)R^{\alpha\mu\beta\nu}k_\alpha k_\beta\right]$.

A.2 Correções Radiativas em 1-Loop

A seguir, exibiremos os diagramas básicos do nosso modelo teórico, a partir dos quais podemos construir os diagramas de correções quânticas. Referindo-nos à notação, linhas retas contínuas denotam campos fermiônicos, linhas contínuas sinusoidais representam campos de fóton, linhas tracejadas referem-se ao campo externo $b^\mu(k)$ e os vértices são denotados por um ponto. As setas sobre as linhas indicam o fluxo de trimomento associado ao campo de partícula (ou o sentido oposto ao fluxo, ao considerarmos o campo da antipartícula).

Posto isto, esboçamos abaixo os diagramas² associados à auto-energia fermiônica, ao tensor de polarização do vácuo e ao vértice eletromagnético, na aproximação de 1-loop, pertinentes à fenomenologia de nosso interesse.

Figura 1 (Auto-Energia Fermiônica)

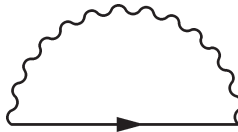


Figura 2 (Auto-Energia Fermiônica com Campo $b^\mu(k)$)

²Nas figuras, omitimos as linhas externas aos loops.

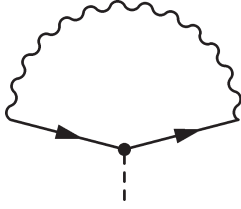


Figura 3 (Tensor de Polarização)

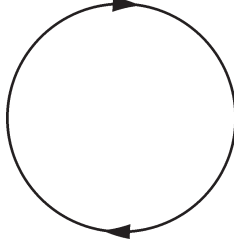


Figura 4 (Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 1)

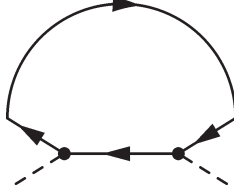


Figura 5 (Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 2)

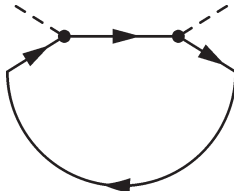


Figura 6 (Tensor de Polarização com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 3)

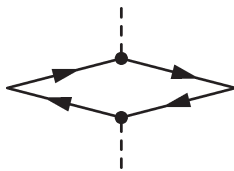
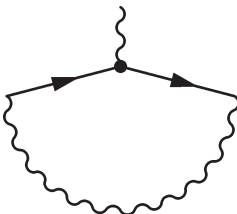
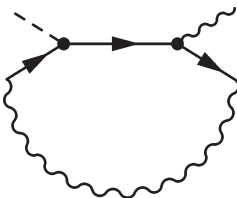
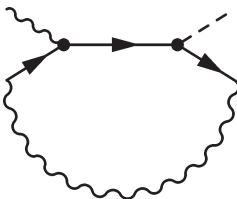


Figura 7 (Vértice Eletromagnético “Bare”)



Figura 8 (Vértice Eletromagnético)

Figura 9 (Vértice Eletromagnético com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 1)Figura 10 (Vértice Eletromagnético com Campo $b^\mu(k)$ -Tipo 2)

A.3 Referências do Apêndice

As regras de Feynman são abordadas em diversas referências na literatura. Dentre elas, destacamos as que nortearam a escrita deste apêndice.

[30] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Field Quantization*”. Springer-Verlag, 1996.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[40] Mandl, F.; Shaw, G. “*Quantum Field Theory*”. John Wiley and Sons, 1984.

Apêndice B

Integrais das Correções Radiativas

Neste apêndice, desenvolveremos as integrais que compõem as correções radiativas de nosso modelo original.

B.1 Integrais Úteis

Antes de prosseguirmos em favor da avaliação das integrais que compõem nas correções quânticas, elencamos a seguir algumas integrais genéricas recorrentes.

Usufruindo da parametrização alfa (5.36) e das integrais gaussianas¹

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d^d k e^{iak^2} &= e^{i\frac{\pi}{2}(1-\frac{d}{2})} \pi^{d/2} a^{-d/2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} d^d k k_\mu k_\nu e^{ia(k-sp)^2} &= e^{i\frac{\pi}{2}(1-d/2)} \pi^{d/2} a^{-d/2} \left(\frac{i}{2a} g_{\mu\nu} + s^2 p_\mu p_\nu \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} d^d k k_\beta k_\mu k_\nu k_\lambda e^{ia(k-sp)^2} &= \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}(1-d/2)} \pi^{d/2} a^{-d/2} \left\{ s^4 p_\mu p_\nu p_\lambda p_\beta - \frac{1}{4a^2} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\beta} + g_{\nu\lambda} g_{\mu\beta} + g_{\mu\nu} g_{\lambda\beta}) \right\} + \end{aligned}$$

¹Dentre estas integrais, a primeira é obtida por integração direta e as demais decorrem da diferenciação da exponencial em relação ao “ d -vetor” constante p^μ .

$$+i \frac{s^2}{2a} (g_{\mu\beta} p_\lambda p_\nu + g_{\mu\nu} p_\lambda p_\beta + g_{\mu\lambda} p_\nu p_\beta + g_{\beta\nu} p_\lambda p_\mu + g_{\beta\lambda} p_\mu p_\nu + g_{\nu\lambda} p_\mu p_\beta) \Big\},$$

com a e s escalares e p^μ um “ d -vetor” constante, consideremos o que segue²

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{1}{(k^2 + s + i\epsilon)^n} &= (-1)^n \int d^d k \frac{1}{(-k^2 - s - i\epsilon)^n} \\ &= (-1)^n \frac{i^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{i s \alpha} \int d^d k e^{i k^2 \alpha} \\ &= (-1)^n \frac{i^{n+1-\frac{d}{2}}}{\Gamma(n)} \pi^{d/2} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-\frac{d}{2}-1} e^{i s \alpha} \\ &= i(-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\pi^{d/2}}{(-s)^{n-\frac{d}{2}}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + s + i\epsilon)^n} &= (-1)^n \frac{i^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{i s \alpha} \int d^d k k_\mu k_\nu e^{i k^2 \alpha} \\ &= (-1)^n \frac{i^n}{2\Gamma(n)} i^{(2-\frac{d}{2})} \pi^{d/2} g_{\mu\nu} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-\frac{d}{2}-2} e^{i s \alpha} \\ &= i(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{\pi^{d/2}}{(-s)^{n-\frac{d}{2}-1}} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\beta}{(k^2 + s + i\epsilon)^n} &= (-1)^n \frac{i^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{i s \alpha} \int d^d k k_\mu k_\nu k_\lambda k_\beta e^{i k^2 \alpha} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{i^{n+1-\frac{d}{2}}}{4\Gamma(n)} \pi^{d/2} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\beta} + g_{\nu\lambda} g_{\mu\beta} + g_{\mu\nu} g_{\lambda\beta}) \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-\frac{d}{2}-3} e^{i s \alpha} \\ &= i(-1)^n \frac{\Gamma(n - 2 - \frac{d}{2})}{4\Gamma(n)} \frac{\pi^{d/2}}{(-s)^{n-2-\frac{d}{2}}} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\beta} + g_{\nu\lambda} g_{\mu\beta} + g_{\mu\nu} g_{\lambda\beta}). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Ademais, é nítido que

$$\int d^d k \frac{k_\mu}{(k^2 + s + i\epsilon)^n} = 0, \quad (\text{B.4})$$

²As integrais (B.1-B.5), naturalmente, também decorrem da integração direta no plano complexo, fazendo-se uso do teorema de Cauchy [40, 75] ou empregando a rotação de Wick [39]. Em nossa abordagem, utilizamos a parametrização alfa [55] para favorecer a concisão do cálculo.

$$\int d^d k \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{(k^2 + s + i\epsilon)^n} = 0, \quad (\text{B.5})$$

tendo em vista que os respectivos integrandos são ímpares.

B.2 Parametrização de Feynman

Com o intento de proceder ao cálculo das integrais imbuídas nas correções radiativas, introduzimos a seguir a parametrização de Feynman [40] dos propagadores recorrentes nos integrandos³

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(A_{(0)} + i\epsilon)(A_{(1)} + i\epsilon)\dots(A_{(n)} + i\epsilon)} = \\ & = \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \\ & \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{[A_{(0)} + (A_{(1)} - A_{(0)})z_1 + \dots + (A_{(n)} - A_{(n-1)})z_n + i\epsilon]^{n+1}}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

em que $A_{(n)}$ denota o inverso de um propagador arbitrário.

Tendo em vista (B.6),

$$\frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} = -\Gamma(2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{[(k - pz_1)^2 + c_{(1)}]^2}, \quad (\text{B.7})$$

com

$$c_{(1)} = -p^2 z_1^2 + (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2)z_1 - m_{cs}^2; \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} \frac{1}{k^2} = -\Gamma(3) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[(k - pz_2)^2 + c_{(2)}]^3}, \quad (\text{B.9})$$

com

$$c_{(2)} = -p^2 z_2^2 + (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2)z_2 - m_{cs}^2 z_1; \quad (\text{B.10})$$

³Doravante, para economizar notação, vamos omitir os parâmetros $i\epsilon$ que fixam o contorno de Feynman dos propagadores (e, implicitamente, o ordenamento temporal dos operadores de campo).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} = \\ & = -\Gamma(3) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[(k - p' z_1 + q z_2)^2 + c_{(a)}]^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

com

$$q_\mu = p'_\mu - p_\mu \quad (\text{B.12})$$

e, “on-shell”,

$$c_{(a)} = -(-p' z_1 + q z_2)^2 - m_{cs}^2 + m_{cs}^2 z_1; \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} = \\ & = -\Gamma(4) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(k - p' z_2 + q z_3)^2 + c_{(b)}]^4}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde, “on-shell”,

$$c_{(b)} = -(-p' z_2 + q z_3)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2 z_2; \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3} = -\frac{\Gamma(4)}{2} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^2}{[(k - p' z_1)^2 + s_g]^4}, \quad (\text{B.16})$$

em que, “on-shell”,

$$s_g = -m_o^2 z_1^2 + m_{cs}^2 z_1 - m_{cs}^2; \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3} = -\frac{\Gamma(5)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^2}{[(k - p' z_2)^2 + s_e]^5}, \quad (\text{B.18})$$

onde, “on-shell”,

$$s_e = -m_o^2 z_2^2 + m_{cs}^2 z_2 - m_{cs}^2 z_1; \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(k - p)^2 - m_o^2} = \Gamma(2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{[(p - k z_1)^2 + t_{(1)}]^2}, \quad (\text{B.20})$$

com

$$t_{(1)} = -k^2 z_1^2 + k^2 z_1 - m_o^2; \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3 [(p - k)^2 - m_o^2]} = \Gamma(4) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(p - \tilde{c}_a)^2 + \tilde{c}_b]^4}. \quad (\text{B.22})$$

com

$$\tilde{c}_{(a)\alpha}(k) = z_3 k_\alpha \quad (\text{B.23})$$

e

$$\tilde{c}_{(b)}(k) = k^2 z_3 (1 - z_3) - m_o^2; \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2 [(p - k)^2 - m_o^2]^2} = \Gamma(4) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{\{[p - c'_{(a)}]^2 + c'_{(b)}\}^4}, \quad (\text{B.25})$$

com

$$c'_{(a)\alpha}(k) = (z_1 + z_3 - z_2)k \quad (\text{B.26})$$

e

$$c'_{(b)}(k) = -(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 - m_o^2; \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} = \Gamma(3) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{\{(k - pz_2)^2 + f_{(a)}\}^3}, \quad (\text{B.28})$$

onde, “on-shell”,

$$f_{(a)} = -m_o^2 z_2^2 + m_{ir}^2 z_2 - m_{ir}^2; \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} = \\ & = \Gamma(3) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[(k - p' z_1 + q z_2)^2 + f_{(b)}]^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

em que, “*on-shell*”,

$$f_{(b)} = -m_o^2 z_1^2 + m_{ir}^2 z_1 - m_{ir}^2; \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} = \\ & = \Gamma(4) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(k-p'z_2+qz_3)^2 + f_{(c)}]^4}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

em que, “*on-shell*”,

$$f_{(c)} = -m_o^2 z_2^2 + m_{ir}^2 z_2 - m_{ir}^2. \quad (\text{B.33})$$

B.3 Integrais das Correções Radiativas

As integrais das correções radiativas, pertinentes aos nossos propósitos, encontram-se listadas a seguir:

$$I^{(1)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.34})$$

$$I_{\alpha}^{(2)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_{\alpha}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.35})$$

$$I_{\alpha}^{(3)}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_{\alpha}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.36})$$

$$I_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.37})$$

$$A^{(1)}(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.38})$$

$$A_{\alpha}^{(2)}(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_{\alpha}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.39})$$

$$A_{\alpha\beta}^{(3)}(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p'-k)^2 - m_o^2} \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.40})$$

$$B_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.41})$$

$$B_\alpha^{(2)}(p, p') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.42})$$

$$B^{(3)}(p, p') = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{k^2}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.43})$$

$$C_\alpha(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.44})$$

$$C_{\alpha\beta\mu}^{(2)}(p, p') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\mu}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.45})$$

$$G(p'; q = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.46})$$

$$G_\alpha(p'; q = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3} \frac{k_\alpha}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.47})$$

$$G_{\alpha\beta}(p'; q = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.48})$$

$$G_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{[(p' - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.49})$$

$$E_{\alpha\beta}(p'; q = 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p - k)^2 - m_o^2]^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{[(p - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.50})$$

$$E_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} \frac{1}{[(p - k)^2 - m_o^2]^3} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{[(p - k)^2 - m_o^2]^3}, \quad (\text{B.51})$$

$$J^{(1)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.52})$$

$$J_\alpha^{(2)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{p_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.53})$$

$$J_{\alpha\beta}^{(3)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_o^2} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.54})$$

$$J^{(4)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{1}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (\text{B.55})$$

$$J_\alpha^{(5)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_\alpha}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (\text{B.56})$$

$$J_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (\text{B.57})$$

$$J_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (\text{B.58})$$

$$J_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^2} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma p_\eta}{(p'^2 - m_o^2)^2}, \quad (\text{B.59})$$

$$\tilde{J}^{(4)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{1}{p'^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.60})$$

$$\tilde{J}_\alpha^{(5)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha}{p'^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.61})$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta}{p'^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.62})$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma}{p'^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.63})$$

$$\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m_o^2)^3} \frac{p_\alpha p_\beta p_\sigma p_\eta}{p'^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.64})$$

$$\check{I}^{(1)}(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.65})$$

$$\check{I}_\alpha^{(2)}(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.66})$$

$$\check{I}_\alpha^{(3)}(p) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.67})$$

$$\check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.68})$$

$$\check{I}_{\alpha\beta\lambda}^{(5)}(p) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{(p-k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.69})$$

$$X(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{1}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.70})$$

$$X_\alpha(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.71})$$

$$X_{\alpha\beta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - m_{ir}^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.72})$$

$$Y_{\alpha\beta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.73})$$

$$Y_{\alpha\beta\lambda}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{(p - k)^2 - m_o^2}, \quad (\text{B.74})$$

$$Y_{\alpha\beta\lambda\eta}(p', p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m_{ir}^2)^2} \frac{1}{(p' - k)^2 - m_o^2} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda k_\eta}{(p - k)^2 - m_o^2}. \quad (\text{B.75})$$

Tendo em mãos as relações destacadas em (B.1-B.33), prosseguimos a seguir com o desenvolvimento das referidas integrais.

Destacamos que apenas as integrais (B.52-B.64), que comparecem no cálculo do tensor de polarização, e (B.38-B.41), relevantes ao momento magnético do elétron, encontram-se calculadas em sua plenitude, no limite de baixas energias apropriado às nossas aplicações. As demais integrais, que compõem a auto-energia fermiônica e o vértice, foram decompostas convenientemente em favor de suas respectivas estruturas tensoriais e expressas em termos de famílias de integrais paramétricas, favorecendo o cálculo computacional das quantidades físicas relevantes aos nossos propósitos, expressas no texto principal, através do *software* WOLFRAM MATHEMATICA, versão 8.0.1.0.

B.3.1 A Integral $I^{(1)}(p)$

Tomando a integral (B.34), empregando (B.7) e (B.1), segue

$$I^{(1)}(p) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{[p^2 z_1^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2)z_1 + m_{cs}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.76})$$

B.3.2 A Integral $I_\alpha^{(2)}(p)$

Voltando-nos a (B.35) e usufruindo de (B.7) e (B.1, B.4), vem

$$I_\alpha^{(2)}(p) = I_p^{(2)}(p)p_\alpha, \quad (\text{B.77})$$

em que

$$I_p^{(2)}(p) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{z_1}{[p^2 z_1^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2)z_1 + m_{cs}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.78})$$

B.3.3 A Integral $I_\alpha^{(3)}(p)$

Por sua vez, lançando mão de (B.9) e (B.1, B.4), a integral (B.36) se traduz em

$$I_\alpha^{(3)}(p) = I_p^{(3)}(p)p_\alpha, \quad (\text{B.79})$$

onde

$$I_p^{(3)}(p) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{[p^2 z_2^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2)z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{3/2}}. \quad (\text{B.80})$$

B.3.4 A Integral $I_{\alpha\beta}^{(4)}(p)$

A integral (B.37), subsidiada por (B.9) e (B.1, B.2, B.4), pode ser expressa por

$$I_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = I_g^{(4)}(p)g_{\alpha\beta} + I_{pp}^{(4)}(p)p_\alpha p_\beta, \quad (\text{B.81})$$

com

$$I_g^{(4)}(p) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[p^2 z_2^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2) z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{1/2}} \quad (\text{B.82})$$

e

$$I_{pp}^{(4)}(p) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^2}{[p^2 z_2^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{cs}^2) z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{3/2}}. \quad (\text{B.83})$$

B.3.5 A Integral $A^{(1)}(p, p')$

Recorrendo a (B.11) e (B.1), escrevemos a integral (B.38) como

$$A^{(1)}(p, p') = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[(-p' z_1 + q z_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.84})$$

Introduzindo um parâmetro de massa regulador do infravermelho m_{ir} no termo correspondente ao propagador do fóton e tomando a condição “*on-shell*” e de “espalhamento progressivo” (isto é, $q \rightarrow 0$), a integral (B.84) traduz-se em

$$\begin{aligned} A^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) &= \\ &= i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[m_o^2 z_1^2 - (m_{cs}^2 + m_{ir}^2) z_1 + (m_{cs}^2 + m_{ir}^2)]^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

e fornece⁴, em primeira ordem no parâmetro m_{ir}/m_o ,

$$A^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \frac{1}{m_o^3} \frac{2}{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2} + 2\sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2}}}. \quad (\text{B.86})$$

⁴Na escala usual de massas, i. e. $m_o \gg m_{cs} \gg m_{ir}$, e na condição “*on-shell*” e de “espalhamento progressivo”, as integrais (B.85, B.91, B.97, B.104, B.105) foram apuradas, em primeira ordem no parâmetro adimensional m_{ir}/m_o , com o auxílio do *software* WOLFRAM MATHEMATICA.

B.3.6 A Integral $A_\alpha^{(2)}(p, p')$

Retornando à integral (B.39), municiados por (B.11) e (B.1, B.4), temos

$$A_\alpha^{(2)}(p, p') = A_{p'}^{(2)}(p, p')p'_\alpha + A_q^{(2)}(p, p')q_\alpha, \quad (\text{B.87})$$

em que

$$A_{p'}^{(2)}(p, p') = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.88})$$

e

$$A_q^{(2)}(p, p') = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.89})$$

Introduzindo a massa reguladora e tomando o limite de “espalhamento progressivo”, a integral (B.88) se escreve “*on-shell*”

$$\begin{aligned} & A_{p'}^{(2)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = \\ & = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1}{[m_o^2 z_1^2 - (m_{cs}^2 + m_{ir}^2)z_1 + (m_{cs}^2 + m_{ir}^2)]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

conferindo, em primeira ordem no parâmetro m_{ir}/m_o ,

$$\begin{aligned} & A_{p'}^{(2)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = \\ & = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \frac{1}{m_o^3} \left[-\frac{2}{2 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2}}} + 2 \operatorname{arccoth} \left(1 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

B.3.7 A Integral $A_{\alpha\beta}^{(3)}(p, p')$

Tomando a integral (B.41) e fazendo uso de (B.1, B.2, B.4, B.11), decorre

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(3)}(p, p') & = A_g^{(3)}(p, p')g_{\alpha\beta} + A_{p'p'}^{(3)}(p, p')p'_\alpha p'_\beta + \\ & + A_{p'q}^{(3)}(p, p')(p'_\alpha q_\beta + p'_\beta q_\alpha) + A_{qq}^{(3)}(p, p')q_\alpha q_\beta, \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

onde

$$A_g^{(3)}(p, p') = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{1/2}}, \quad (\text{B.93})$$

$$A_{p'p'}^{(3)}(p, p') = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1^2}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}, \quad (\text{B.94})$$

$$A_{qq}^{(3)}(p, p') = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^2}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}, \quad (\text{B.95})$$

e

$$A_{p'q}^{(3)}(p, p') = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1 z_2}{[(-p'z_1 + qz_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.96})$$

Na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, a integral (B.93) com a massa infravermelha é expressa por

$$\begin{aligned} & A_g^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = \\ & = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[m_o^2 z_1^2 - (m_{cs}^2 + m_{ir}^2) z_1 + (m_{cs}^2 + m_{ir}^2)]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

resultando em

$$\begin{aligned} & A_g^{(3)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \frac{1}{m_o} \left[2 - 2 \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2}} + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2} \right) \operatorname{arccoth} \left(1 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{ir}^2}{m_o^2}} \right) \right] + O(m_{ir}/m_o). \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

B.3.8 A Integral $B_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p')$

De posse de (B.1, B.2, B.4, B.14), podemos escrever (B.41) como

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') &= B_g^{(1)}(p, p')g_{\alpha\beta} + B_{p'p'}^{(1)}(p, p')p'_\alpha p'_\beta + \\
&+ B_{p'q}^{(1)}(p, p')(p'_\alpha q_\beta + p'_\beta q_\alpha) + B_{qq}^{(1)}(p, p')q_\alpha q_\beta,
\end{aligned} \tag{B.99}$$

com

$$\begin{aligned}
&B_g^{(1)}(p, p') = \\
&= -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(-p'z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{3/2}},
\end{aligned} \tag{B.100}$$

$$\begin{aligned}
&B_{p'p'}^{(1)}(p, p') = \\
&= i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^2}{[(-p'z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}},
\end{aligned} \tag{B.101}$$

$$\begin{aligned}
&B_{qq}^{(1)}(p, p') = \\
&= i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3^2}{[(-p'z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}},
\end{aligned} \tag{B.102}$$

e

$$\begin{aligned}
&B_{p'q}^{(1)}(p, p') = \\
&= -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2 z_3}{[(-p'z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{B.103}$$

As integrais (B.100) e (B.101), regularizadas em todos os termos do propagador do fóton pela massa m_{ir} , são escritas “*on-shell*” e na condição de “espalhamento progressivo” como

$$\begin{aligned}
B_g^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) &= -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdot \\
&\int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 z_2^2 - (m_{cs}^2 + m_{ir}^2) z_2 + m_{cs}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{3/2}},
\end{aligned} \tag{B.104}$$

e

$$B_{p'p'}^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdot \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^2}{[m_o^2 z_2^2 - (m_{cs}^2 + m_{ir}^2) z_2 + m_{cs}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{5/2}}, \quad (\text{B.105})$$

refletindo-se, em primeira ordem no parâmetro m_{ir}/m_o , nas expressões

$$B_g^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \frac{1}{m_o^3} \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}}} - 2 \operatorname{arccoth} \left(1 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}} \right) \right], \quad (\text{B.106})$$

e

$$B_{p'p'}^{(1)}(q \rightarrow 0; m_{ir}) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \frac{1}{m_o^5} \left[\frac{2}{3 \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}}} \left(\frac{4 + 3 \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}}}{2 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}}} \right) - 2 \operatorname{arccoth} \left(1 + \sqrt{\frac{m_{cs}^2}{m_o^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.107})$$

B.3.9 A Integral $B_\alpha^{(2)}(p, p')$

Examinando as integrais (B.39) e (B.42) é nítido que

$$B_\alpha^{(2)}(p, p') = -A_\alpha^{(2)}(p, p'),$$

de forma que podemos escrever

$$B_\alpha^{(2)}(p, p') = B_{p'}^{(2)} p'_\alpha + B_q^{(2)} q_\alpha, \quad (\text{B.108})$$

com

$$B_{p'}^{(2)} = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1}{[(-p' z_1 + q z_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.109})$$

e

$$B_q^{(2)} = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{[(-p' z_1 + q z_2)^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.110})$$

B.3.10 A Integral $B^{(3)}(p', p)$

Estudando, por sua vez, as integrais (B.40) e (B.43) observa-se que

$$B^{(3)}(p', p) = -g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{(3)}(p', p),$$

donde segue

$$B^{(3)}(p', p) = -3A_g^{(3)}(p', p) - p'^2 A_{p'p'}^{(3)}(p', p) - q^2 A_{qq}^{(3)}(p', p) - 2p' \cdot q A_{p'q}^{(3)}(p', p), \quad (\text{B.111})$$

que fica determinada através de (B.93-B.96).

B.3.11 A Integral $C_\alpha(p', p)$

Tendo em conta (B.1, B.4, B.14), a integral (B.44) pode ser expressa por

$$C_\alpha(p', p) = C_{p'}(p', p)p'_\alpha + C_q(p', p)q_\alpha, \quad (\text{B.112})$$

em que

$$\begin{aligned} C_{p'}(p', p) &= \\ &= -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2}{[(-p' z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

e

$$\begin{aligned} C_q(p', p) &= \\ &= i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3}{[(-p' z_2 + qz_3)^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.114})$$

B.3.12 A Integral $C_{\alpha\beta\mu}^{(2)}(p', p)$

No limite de “espalhamento progressivo” (i. e. $q_\mu \rightarrow 0$) e na condição “*on-shell*”, a integral (B.45), subsidiada por (B.1, B.2, B.4, B.5, B.15), se reduz a

$$C_{\alpha\beta\mu}^{(2)}(p', p, q_\mu \rightarrow 0) = C_{gp}^{(2)}(q_\mu \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta} p_\mu + g_{\mu\alpha} p_\beta + g_{\beta\mu} p_\alpha) + C_{ppp}^{(2)}(q_\mu \rightarrow 0) p_\alpha p_\beta p_\mu, \quad (\text{B.115})$$

onde

$$C_{gp}^{(2)}(q_\mu \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{3/2}} \quad (\text{B.116})$$

e

$$C_{ppp}^{(2)}(q_\mu \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^3}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}}. \quad (\text{B.117})$$

B.3.13 A Integral $G(p'; q = 0)$

Retomando a integral (B.46), na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, fazemos uso de (B.1, B.16) para escrever

$$G(p'; q = 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^2}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.118})$$

B.3.14 A Integral $G_\alpha(p'; q = 0)$

De (B.1, B.4, B.16), decorre a integral (B.47) “*on-shell*” e na condição de “espalhamento progressivo”

$$G_\alpha(p'; q = 0) = G_{p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha \quad (\text{B.119})$$

com

$$G_{p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^3}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.120})$$

B.3.15 A Integral $G_{\alpha\beta}(p'; q = 0)$

A partir de (B.1, B.2, B.4, B.16), decorre a integral (B.48) na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”

$$G_{\alpha\beta}(p'; q = 0) = G_g(q \rightarrow 0) g_{\alpha\beta} + G_{p'p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha p'_\beta, \quad (\text{B.121})$$

em que

$$G_g(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^2}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.122})$$

e

$$G_{p'p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^4}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.123})$$

B.3.16 A Integral $G_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0)$

Na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, a integral (B.49) se traduz, com o auxílio de (B.1, B.2, B.4, B.5, B.16), em

$$G_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0) = G_{gp'}(q \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta} p'_\lambda + g_{\lambda\alpha} p'_\beta + g_{\beta\lambda} p'_\alpha) + G_{p'p'p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha p'_\beta p'_\lambda, \quad (\text{B.124})$$

com

$$G_{gp'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^3}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.125})$$

e

$$G_{p'p'p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^5}{[m_o^2 z_1^2 - m_{cs}^2 z_1 + m_{cs}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.126})$$

B.3.17 A Integral $E_{\alpha\beta}(p'; q = 0)$

De posse de (B.1, B.2, B.4, B.19), podemos escrever a integral (B.50) “*on-shell*” e na condição de “espalhamento progressivo” como

$$E_{\alpha\beta}(p'; q = 0) = E_g(q \rightarrow 0) g_{\alpha\beta} + E_{p'p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha p'_\beta, \quad (\text{B.127})$$

onde

$$E_g(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}} \quad (\text{B.128})$$

e

$$E_{p'p'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(7/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^4}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{7/2}}. \quad (\text{B.129})$$

B.3.18 A Integral $E_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0)$

A integral (B.51), municiada de (B.1, B.2, B.4, B.5, B.18) pode ser expressa, na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, como segue:

$$E_{\alpha\beta\lambda}(p'; q = 0) = E_{gp'}(q \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta} p'_\lambda + g_{\lambda\alpha} p'_\beta + g_{\beta\lambda} p'_\alpha) + E_{p'p'p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha p'_\beta p'_\lambda, \quad (\text{B.130})$$

com

$$E_{gp'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(5/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^3}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{5/2}} \quad (\text{B.131})$$

e

$$E_{p'p'p'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(7/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^5}{[m_o^2 z_2^2 - m_{cs}^2 z_2 + m_{cs}^2 z_1]^{7/2}}. \quad (\text{B.132})$$

B.3.19 A Integral $J^{(1)}(k)$

Explorando (B.1, B.20), resulta para a integral (B.52)

$$J^{(1)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{(m_o^2 - z_1(1 - z_1)k^2)^{1/2}}. \quad (\text{B.133})$$

No limite de baixas energias, definido por $k^2 \ll m_o^2$, em que se encontra a fenomenologia de interesse a nossos propósitos, a integral (B.133) pode ser avaliada analiticamente, fornecendo⁵

$$J^{(1)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \frac{1}{\sqrt{k^2}} \ln \left(\frac{2m_o + \sqrt{k^2}}{2m_o - \sqrt{k^2}} \right). \quad (\text{B.134})$$

⁵No limite de resolução de baixas energias introduzido, as integrais (B.52-B.64) do tensor de polarização são analíticas e foram apuradas com o auxílio do *software*.

B.3.20 A Integral $J_\alpha^{(2)}(k)$

De (B.1, B.4, B.20) resulta para (B.53)

$$J_\alpha^{(2)}(k) = J_k^{(2)}(k)k_\alpha, \quad (\text{B.135})$$

com

$$J_k^{(2)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{z_1}{(m_o^2 - z_1(1 - z_1)k^2)^{1/2}}. \quad (\text{B.136})$$

No limite de baixas energias (B.136) consiste em

$$J_k^{(2)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \frac{1}{2\sqrt{k^2}} \ln \left(\frac{2m_o + \sqrt{k^2}}{2m_o - \sqrt{k^2}} \right). \quad (\text{B.137})$$

B.3.21 A Integral $J_{\alpha\beta}^{(3)}(k)$

A integral (B.54), subsidiada por (B.1, B.2, B.4, B.20), se traduz como

$$J_{\alpha\beta}^{(3)}(k) = J_g^{(3)}(k)g_{\alpha\beta} + J_{kk}^{(3)}(k)k_\alpha k_\beta, \quad (\text{B.138})$$

onde

$$J_g^{(3)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(-1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \sqrt{m_o^2 - z_1(1 - z_1)k^2} \quad (\text{B.139})$$

e

$$J_{kk}^{(3)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{z_1^2}{[m_o^2 - z_1(1 - z_1)k^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.140})$$

No limite de baixas energias, as integrais (B.139, B.140) fornecem

$$J_g^{(3)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(-1/2)}{4} \left[m_o + \frac{1}{4\sqrt{k^2}} (4m_o^2 - k^2) \ln \left(\frac{2|m_o| + \sqrt{k^2}}{2|m_o| - \sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.141})$$

e

$$J_{kk}^{(3)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2k^2} \left[m_o - \frac{1}{4\sqrt{k^2}} (4m_o^2 - 3k^2) \ln \left(\frac{2m_o + \sqrt{k^2}}{2m_o - \sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.142})$$

B.3.22 A Integral $J^{(4)}(k)$

Tendo em mente (B.1, B.25), a integral (B.55) fica

$$J^{(4)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.143})$$

No limite de baixas energias, a integral (B.143) se resume a

$$J^{(4)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \frac{1}{(4m_o^2 - k^2)^2} \frac{8}{3m_o}. \quad (\text{B.144})$$

B.3.23 A Integral $J_\alpha^{(5)}(k)$

Nos valendo de (B.1, B.4, B.25), a integral (B.56) se reflete em

$$J_\alpha^{(5)}(k) = J_k^{(5)}(k) k_\alpha, \quad (\text{B.145})$$

com

$$J_k^{(5)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_1 + z_3 - z_2}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.146})$$

Novamente, no limite de baixas energias advém

$$J_k^{(5)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \frac{1}{(4m_o^2 - k^2)^2} \frac{4}{3m_o}. \quad (\text{B.147})$$

B.3.24 A Integral $J_{\alpha\beta}^{(6)}(k)$

Examinando, por sua vez, a integral (B.57) à luz de (B.1, B.2, B.4, B.25), vem

$$J_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = J_g^{(6)}(k) g_{\alpha\beta} + J_{kk}^{(6)}(k) k_\alpha k_\beta, \quad (\text{B.148})$$

em que

$$J_g^{(6)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{3/2}} \quad (\text{B.149})$$

e

$$J_{kk}^{(6)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{(z_1 + z_3 - z_2)^2}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.150})$$

Tomando o limite de interesse físico de baixas energias, decorrem

$$J_g^{(6)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[\frac{4m_o}{k^2} \frac{1}{4m_o^2 - k^2} - \frac{2}{(k^2)^{3/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.151})$$

e

$$J_{kk}^{(6)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[\frac{4}{3m_o(k^2)^2} \frac{12m_o^4 - 5k^2m_o^2 + (k^2)^2}{(4m_o^2 - k^2)^2} - \frac{2}{(k^2)^{5/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.152})$$

B.3.25 A Integral $J_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k)$

Nos beneficiando de (B.1, B.2, B.4, B.5, B.25) podemos decompor (B.58) como segue:

$$J_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = J_{gk}^{(7)}(k)(g_{\alpha\beta}k_\sigma + g_{\sigma\alpha}k_\beta + g_{\beta\sigma}k_\alpha) + J_{kkk}^{(7)}(k)k_\alpha k_\beta k_\sigma, \quad (\text{B.153})$$

onde

$$J_{gk}^{(7)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_1 + z_3 - z_2}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{3/2}} \quad (\text{B.154})$$

e

$$J_{kkk}^{(7)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{(z_1 + z_3 - z_2)^3}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.155})$$

Na escala de energia relevante para nossas aplicações, vêm

$$J_{gk}^{(7)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[\frac{2m_o}{k^2} \frac{1}{4m_o^2 - k^2} - \frac{1}{(k^2)^{3/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.156})$$

e

$$J_{kkk}^{(7)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[\frac{2}{3m_o(k^2)^2} \frac{1}{(4m_o^2 - k^2)^2} (36m_o^4 - 15k^2m_o^2 + 2(k^2)^2) - \frac{3}{(k^2)^{5/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.157})$$

B.3.26 A Integral $J_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k)$

De (B.1-B.5, B.25) decorre a conveniente expressão para (B.59)

$$J_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = J_{gg}^{(8)}(k)(g_{\alpha\beta}g_{\sigma\eta} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\eta} + g_{\alpha\eta}g_{\beta\sigma}) + J_{gkk}^{(8)}(k)(g_{\alpha\beta}k_\sigma k_\eta + g_{\alpha\sigma}k_\beta k_\eta + g_{\alpha\eta}k_\sigma k_\beta + g_{\beta\sigma}k_\alpha k_\eta + g_{\beta\eta}k_\sigma k_\alpha + g_{\sigma\eta}k_\alpha k_\beta) + J_{kkkk}^{(8)}(k)k_\alpha k_\beta k_\sigma k_\eta, \quad (\text{B.158})$$

com

$$J_{gg}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{1/2}}, \quad (\text{B.159})$$

$$J_{gkk}^{(8)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{(z_1 + z_3 - z_2)^2}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{3/2}} \quad (\text{B.160})$$

e

$$J_{kkkk}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \cdot \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{(z_1 + z_3 - z_2)^4}{[(z_1 + z_3 - z_2)(z_1 + z_3 - z_2 - 1)k^2 + m_o^2]^{5/2}} \quad (\text{B.161})$$

No limite de baixas energias as integrais (B.159-B.161) nos conferem

$$J_{gg}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \left[-\frac{m_o}{2k^2} + \frac{4m_o^2 + k^2}{4(k^2)^{3/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right], \quad (\text{B.162})$$

$$J_{gkk}^{(8)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[-\frac{m_o}{2(k^2)^2} \frac{12m_o^2 - 5k^2}{4m_o^2 - k^2} + \frac{3(4m_o^2 - k^2)}{4(k^2)^{5/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.163})$$

e

$$J_{kkkk}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[\frac{1}{6m_o(k^2)^3} \frac{-240m_o^6 + 280k^2m_o^4 - 83(k^2)^2m_o^2 + 8(k^2)^3}{(4m_o^2 - k^2)^2} + \frac{1}{4(k^2)^{7/2}} (20m_o^2 - 15k^2) \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.164})$$

B.3.27 A Integral $\tilde{J}^{(4)}(k)$

A integral (B.60), ancorada por (B.1, B.22), se reflete em

$$\tilde{J}^{(4)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{5/2}}. \quad (\text{B.165})$$

No limite de baixas energias (B.165) culmina em

$$\tilde{J}^{(4)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \frac{8m_o^2 - k^2}{(4m_o^2 - k^2)^2} \frac{1}{3m_o^3}. \quad (\text{B.166})$$

B.3.28 A Integral $\tilde{J}_\alpha^{(5)}(k)$

Explorando (B.1, B.4, B.22), a integral (B.61) pode ser expressa por

$$\tilde{J}_\alpha^{(5)}(k) = \tilde{J}_k^{(5)}(k) k_\alpha, \quad (\text{B.167})$$

com

$$\tilde{J}_k^{(5)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{5/2}}. \quad (\text{B.168})$$

Novamente, estudando o limite de baixas energias, temos

$$\tilde{J}_k^{(5)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \frac{1}{(4m_o^2 - k^2)^2} \frac{2}{3m_o}. \quad (\text{B.169})$$

B.3.29 A Integral $\tilde{J}_{\alpha\beta}^{(6)}(k)$

De posse de (B.1, B.2, B.4, B.22), desenvolvemos (B.62) como segue

$$\tilde{J}_{\alpha\beta}^{(6)}(k) = \tilde{J}_g^{(6)}(k) g_{\alpha\beta} + \tilde{J}_{kk}^{(6)}(k) k_\alpha k_\beta, \quad (\text{B.170})$$

em que

$$\tilde{J}_g^{(6)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{3/2}} \quad (\text{B.171})$$

e

$$\tilde{J}_{kk}^{(6)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3^2}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{5/2}}. \quad (\text{B.172})$$

Na escala de energia de interesse, vêm

$$\tilde{J}_g^{(6)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[-\frac{2m_o^2 - k^2}{4m_o^2 - k^2} \frac{1}{m_o k^2} + \frac{1}{(k^2)^{3/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.173})$$

e

$$\tilde{J}_{kk}^{(6)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[-\frac{2m_o}{3(k^2)^2} \frac{12m_o^2 - 5k^2}{(4m_o^2 - k^2)^2} + \frac{1}{(k^2)^{5/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.174})$$

B.3.30 A Integral $\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k)$

A integral (B.63), subsidiada por (B.1, B.2, B.4, B.5, B.22), fornece

$$\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma}^{(7)}(k) = \tilde{J}_{gk}^{(7)}(k)(g_{\alpha\beta}k_\sigma + g_{\sigma\alpha}k_\beta + g_{\beta\sigma}k_\alpha) + \tilde{J}_{kkk}^{(7)}(k)k_\alpha k_\beta k_\sigma, \quad (\text{B.175})$$

onde

$$\tilde{J}_{gk}^{(7)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{3/2}} \quad (\text{B.176})$$

e

$$\tilde{J}_{kkk}^{(7)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3^3}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{5/2}}. \quad (\text{B.177})$$

Apurando (B.176, B.177) no limite de baixas energias, obtemos

$$\tilde{J}_{gk}^{(7)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[\frac{1}{4m_o^2 - k^2} \frac{m_o}{k^2} - \frac{1}{2(k^2)^{3/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right] \quad (\text{B.178})$$

e

$$\tilde{J}_{kkk}^{(7)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[-\frac{m_o}{3(k^2)^2} \frac{12m_o^2 - 5k^2}{(4m_o^2 - k^2)^2} + \frac{1}{2(k^2)^{5/2}} \operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}} \right) \right]. \quad (\text{B.179})$$

B.3.31 A Integral $\tilde{J}_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k)$

Usufruido de (B.1-B.5, B.22), a integral (B.64) pode ser decomposta convenientemente como

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\alpha\beta\sigma\eta}^{(8)}(k) = & \tilde{J}_{gg}^{(8)}(k)(g_{\alpha\beta}g_{\sigma\eta} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\eta} + g_{\alpha\eta}g_{\beta\sigma}) + \tilde{J}_{gkk}^{(8)}(k)(g_{\alpha\beta}k_{\sigma}k_{\eta} + g_{\alpha\sigma}k_{\beta}k_{\eta} + \\ & + g_{\alpha\eta}k_{\sigma}k_{\beta} + g_{\beta\sigma}k_{\alpha}k_{\eta} + g_{\beta\eta}k_{\sigma}k_{\alpha} + g_{\sigma\eta}k_{\alpha}k_{\beta}) + \tilde{J}_{kkkk}^{(8)}(k)k_{\alpha}k_{\beta}k_{\sigma}k_{\eta}, \end{aligned} \quad (\text{B.180})$$

com

$$\tilde{J}_{gg}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{1/2}}, \quad (\text{B.181})$$

$$\tilde{J}_{gkk}^{(8)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3^2}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{3/2}} \quad (\text{B.182})$$

e

$$\tilde{J}_{kkkk}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_3^4}{[m_o^2 - k^2 z_3(1 - z_3)]^{5/2}}. \quad (\text{B.183})$$

Tendo em vista a escala de energia baixas energias de interesse, as integrais (B.181-B.183) se traduzem em

$$\tilde{J}_{gg}^{(8)}(k) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \left[\frac{m_o}{4k^2} + \frac{1}{8(k^2)^{3/2}}(3k^2 - 4m_o^2)\text{arccoth}\left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}}\right) \right], \quad (\text{B.184})$$

$$\tilde{J}_{gkk}^{(8)}(k) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \left[\frac{m_o}{4(k^2)^2} \frac{12m_o^2 - k^2}{4m_o^2 - k^2} - \frac{(k^2 + 12m_o^2)}{8(k^2)^{5/2}}\text{arccoth}\left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}}\right) \right] \quad (\text{B.185})$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{kkkk}^{(8)}(k) = & i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \left[\frac{m_o}{12(k^2)^3} \frac{1}{(4m_o^2 - k^2)^2} (240m_o^4 - 136m_o^2k^2 + 23(k^2)^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8(k^2)^{7/2}}(3k^2 - 20m_o^2)\text{arccoth}\left(\frac{2m_o}{\sqrt{k^2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.186})$$

B.3.32 A Integral $\check{I}^{(1)}(p)$

Retornando à integral (B.65), nota-se que esta se traduz em (B.34), observada a devida substituição de m_{cs} por m_{ir} . Sendo assim, de (B.76) segue que

$$\check{I}^{(1)}(p) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{[p^2 z_1^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{ir}^2)z_1 + m_{ir}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.187})$$

Na condição “*on-shell*”, a integral (B.187) se resume a

$$\check{I}^{(1)}(p^2 = m_o^2) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{1}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.188})$$

B.3.33 A Integral $\check{I}_\alpha^{(2)}(p)$

A integral (B.66) corresponde a (B.35), efetuando-se a substituição apropriada de m_{cs} por m_{ir} , e pode ser expressa por

$$\check{I}_\alpha^{(2)}(p) = \check{I}_p^{(2)}(p) p_\alpha, \quad (\text{B.189})$$

em que, de (B.78), se lê

$$\check{I}_\alpha^{(2)}(p) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{z_1}{[p^2 z_1^2 - (p^2 - m_o^2 + m_{ir}^2)z_1 + m_{ir}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.190})$$

Na condição “*on-shell*”, esta integral se simplifica para

$$\check{I}_\alpha^{(2)}(p^2 = m_o^2) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(1/2) \int_0^1 dz_1 \frac{z_1}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{1/2}}. \quad (\text{B.191})$$

B.3.34 A Integral $\check{I}_\alpha^{(3)}(p)$

Tendo em conta (B.1, B.4, B.28), a integral (B.67) pode ser escrita “*on-shell*” como

$$\check{I}_\alpha^{(3)}(p) = \check{I}_p^{(3)}(p) p_\alpha, \quad (\text{B.192})$$

com

$$\check{I}_p^{(3)}(p^2 = m_o^2) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.193})$$

B.3.35 A Integral $\check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p)$

Nos valendo de (B.1, B.2, B.4, B.28), podemos decompor a integral (B.68) como

$$\check{I}_{\alpha\beta}^{(4)}(p) = \check{I}_g^{(4)}(p) g_{\alpha\beta} + \check{I}_{pp}^{(4)}(p) p_\alpha p_\beta, \quad (\text{B.194})$$

onde, “*on-shell*”,

$$\check{I}_g^{(4)}(p^2 = m_o^2) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{1/2}} \quad (\text{B.195})$$

e

$$\check{I}_{pp}^{(4)}(p^2 = m_o^2) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.196})$$

B.3.36 A Integral $\check{I}_{\alpha\beta\lambda}^{(5)}(p)$

De (B.1, B.2, B.3, B.4, B.28), a integral “*on-shell*” (B.69) pode ser expressa por

$$\check{I}_{\alpha\beta\lambda}^{(5)}(p) = \check{I}_{gp}^{(5)}(p) (g_{\alpha\beta} p_\lambda + g_{\lambda\alpha} p_\beta + g_{\beta\lambda} p_\alpha) + \check{I}_{ppp}^{(5)}(p) p_\alpha p_\beta p_\lambda, \quad (\text{B.197})$$

com

$$\check{I}_{gp}^{(5)}(p^2 = m_o^2) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{1/2}} \quad (\text{B.198})$$

e

$$\check{I}_{ppp}^{(5)}(p^2 = m_o^2) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2^3}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.199})$$

B.3.37 A Integral $X(p', p)$

Tomando a integral (B.70), à luz de (B.1, B.31), na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, segue

$$X(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.200})$$

B.3.38 A Integral $X_\alpha(p', p)$

Na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”, a integral (B.71), municiada por (B.1, B.4, B.31), se reflete em

$$X_\alpha(q \rightarrow 0) = X_{p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha, \quad (\text{B.201})$$

onde

$$X_{p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.202})$$

B.3.39 A Integral $X_{\alpha\beta}(p', p)$

Nos valendo de (B.1, B.2, B.4, B.31), escrevemos na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*” a integral (B.72) como segue

$$X_{\alpha\beta}(q \rightarrow 0) = X_g(q \rightarrow 0) g_{\alpha\beta} + X_{p'p'}(q \rightarrow 0) p'_\alpha p'_\beta, \quad (\text{B.203})$$

em que

$$X_g(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{1}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{1/2}} \quad (\text{B.204})$$

e

$$X_{p'p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(3/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1^2}{[m_o^2 z_1^2 - m_{ir}^2 z_1 + m_{ir}^2]^{3/2}}. \quad (\text{B.205})$$

B.3.40 A Integral $Y_{\alpha\beta}(p', p)$

Retomando (B.73), tendo em conta (B.1, B.2, B.4, B.32), escrevemos na condição de “espalhamento progressivo” e “*on-shell*”

$$Y_{\alpha\beta}(q \rightarrow 0) = Y_g(q \rightarrow 0)g_{\alpha\beta} + Y_{p'p'}(q \rightarrow 0)p'_\alpha p'_\beta, \quad (\text{B.206})$$

com

$$Y_g(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.207})$$

e

$$Y_{p'p'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.208})$$

B.3.41 A Integral $Y_{\alpha\beta\lambda}(p', p)$

Beneficiando-nos de (B.1, B.2, B.4, B.5, B.32), obtemos para a integral (B.74), na condição “*on-shell*” e de “espalhamento progressivo”, a expressão

$$Y_{\alpha\beta\lambda}(q \rightarrow 0) = Y_{gp'}(q \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta} p'_\lambda + g_{\lambda\alpha} p'_\beta + g_{\beta\lambda} p'_\alpha) + Y_{p'p'p'}(q \rightarrow 0)p'_\alpha p'_\beta p'_\lambda, \quad (\text{B.209})$$

onde

$$Y_{gp'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.210})$$

e

$$Y_{p'p'p'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^3}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.211})$$

B.3.42 A Integral $Y_{\alpha\beta\lambda\eta}(p', p)$

De posse de (B.1-B.5, B.32), decompos a integral (B.75) na condição “*on-shell*” e de “espalhamento progressivo” como

$$\begin{aligned} Y_{\alpha\beta\lambda\eta}(q \rightarrow 0) &= Y_{gg}(q \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta}g_{\lambda\eta} + g_{\alpha\lambda}g_{\beta\eta} + g_{\alpha\eta}g_{\beta\lambda}) + \\ &+ Y_{gp'p'}(q \rightarrow 0)(g_{\alpha\beta}p'_\lambda p'_\eta + g_{\alpha\lambda}p'_\beta p'_\eta + g_{\alpha\eta}p'_\lambda p'_\beta + g_{\beta\lambda}p'_\alpha p'_\eta + g_{\beta\eta}p'_\lambda p'_\alpha + g_{\lambda\eta}p'_\alpha p'_\beta) \\ &+ Y_{p'p'p'p'}(q \rightarrow 0)p'_\alpha p'_\beta p'_\lambda p'_\eta, \end{aligned} \quad (\text{B.212})$$

em que

$$Y_{gg}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(1/2)}{4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{1}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{1/2}}, \quad (\text{B.213})$$

$$Y_{gp'p'}(q \rightarrow 0) = -i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(3/2)}{2} \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^2}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{3/2}} \quad (\text{B.214})$$

e

$$Y_{p'p'p'p'}(q \rightarrow 0) = i \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \Gamma(5/2) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \frac{z_2^4}{[m_o^2 z_2^2 - m_{ir}^2 z_2 + m_{ir}^2]^{5/2}}. \quad (\text{B.215})$$

B.4 Referências do Apêndice

Destacamos a seguir as principais referências para este apêndice.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[40] Mandl, F.; Shaw, G. “*Quantum Field Theory*”. John Wiley and Sons, 1984.

[55] Smirnov, A. V. “*Evaluating Feynman Integrals*”. Springer-Verlag, 2004.

[75] Sakurai, J. J. “*Advanced Quantum Mechanics*”. Addison-Wesley, 1967.

Apêndice C

Relações de Traço

Neste apêndice, apresentaremos resultados gerais envolvendo traços das matrizes γ_μ , γ_5 e τ , que constituem a álgebra associada à QED_3 estendida na representação redutível, bem como algumas relações particularmente úteis no cálculo do fator de ocupação e do tensor de polarização do vácuo.

C.1 Relações de Traço para as Matrizes γ_μ

Com o intuito de estabelecermos as relações de traço, recordamos a seguir as relações algébricas (2.16-2.23), respectivamente, destacadas no Capítulo 2,

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, \\ \{\gamma^5, \gamma^\nu\} &= 0, \\ \{\tau, \gamma^5\} &= 0, \\ [\tau, \gamma^\mu] &= 0, \\ (\gamma^5)^2 &= 1, \quad \tau^2 = 1,\end{aligned}$$

em que $\mu, \nu = 0, 1, 2$ e, de acordo com a representação redutível que empregamos, as matrizes possuem dimensão 4.

Recorrendo à álgebra de Clifford (2.3), segue a nulidade do traço das matrizes gama,

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = \text{Tr}(\gamma_\mu g_{\nu\nu} (\gamma^\nu)^2) \quad (\text{tomando } \nu \neq \mu \text{ e sem contração no índice } \nu)$$

$$\begin{aligned}
&= -g_{\nu\nu}\text{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu) \\
&= -\text{Tr}(\gamma_\mu),
\end{aligned}$$

em que utilizamos a ciclicidade do traço e, portanto,

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Consideremos, então, o traço envolvendo um número ímpar arbitrário de matrizes gama,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}) &= \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5^2) \\
&= (-1)^n\text{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) \\
&= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n})
\end{aligned}$$

em que introduzimos γ_5 através de (2.22), exploramos (2.19) e a ciclicidade do traço, de modo que

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}) = 0 \quad (n \text{ ímpar}). \quad (\text{C.2})$$

Avaliando agora o traço envolvendo um par de matrizes gama, segue novamente de (2.3) que

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) &= \frac{1}{2}\text{Tr}(\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}) \\
&= g_{\mu\nu}\text{Tr}(1_{4\times 4}) \\
&= 4g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Assim, considerando também o traço de um número par arbitrário de matrizes gama, escrevemos

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}) &= (-1)^{n-1}\text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}) + 2g_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\dots\gamma_{\mu_n}) - 2g_{\mu_1\mu_3}\text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}) \\
&\quad + \dots + 2g_{\mu_1\mu_n}\text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{n-1}})
\end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

em que lançamos mão mais uma vez da álgebra de Clifford. Observando a ciclicidade do traço, decorre a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}) &= g_{\mu_1\mu_2}\text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\dots\gamma_{\mu_n}) - g_{\mu_1\mu_3}\text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}) + \dots \\
&\quad + \dots + g_{\mu_1\mu_n}\text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{n-1}}) \quad (n \text{ par}).
\end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

C.2 Relações de Traço para a Matriz τ

Recordando a definição da matriz τ , $\tau = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2$, segue diretamente de (C.2) que

$$\text{Tr}(\tau) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Tomando o traço do produto de um número ímpar arbitrário de matrizes gama com a matriz τ , temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) &= (-1)^n \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\tau\gamma_{\mu_1}) + 2g_{\mu_1\mu_2} \text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) \\ &- 2g_{\mu_1\mu_3} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) + \dots - 2g_{\mu_1\mu_n} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{n-1}}\tau) + \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n} \{\gamma_{\mu_1}, \tau\}). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Contudo, observando o anticomutador entre τ e γ_α

$$\{\tau, \gamma_\alpha\} = 2i[g_{0\alpha}\gamma_1\gamma_2 - g_{1\alpha}\gamma_0\gamma_2 + g_{2\alpha}\gamma_0\gamma_1], \quad (\text{C.8})$$

e a ciclicidade do traço, resulta a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) &= g_{\mu_1\mu_2} \text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) \\ &- g_{\mu_1\mu_3} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) + \dots - g_{\mu_1\mu_n} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{n-1}}\tau) \\ &+ i[g_{\mu_1 0} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_1\gamma_2) - g_{\mu_1 1} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_0\gamma_2) + g_{\mu_1 2} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_0\gamma_1)] \\ &\quad (n \text{ ímpar}). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Considerando, por outro lado, o produto envolvendo um número par arbitrário de matrizes gama e a matriz τ , segue

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) &= \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau\gamma_5^2) \\ &= (-1)^{n+1} \text{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau\gamma_5) \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\tau) \\ &= 0 \quad (n \text{ par}), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

em que exploramos (2.19, 2.20, 2.22) e a ciclicidade do traço.

Cabe comentar ainda as relações que envolvem produtos entre um número arbitrário de matrizes gama e um número arbitrário de matrizes τ sob o sinal do traço. Entretanto, tendo em vista a relação de comutação (2.21), assim como (2.23), segue que o caso envolvendo um número par de matrizes τ se reduz aos traços destacados em (C.1-C.4) e, no caso em que este número é ímpar, os traços recaem em (C.5,C.6,C.8), de maneira que não se faz necessário elencarmos novas relações de traço.

C.3 Relações de Traço para a Matriz γ_5

A partir da definição de γ_5 , $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, verifica-se, observando a propriedade cíclica do traço ou (C.4)¹, a nulidade de seu traço,

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma_5) &= i\text{Tr}(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\ &= ig_{01}\text{Tr}(\gamma_2\gamma_3) - ig_{02}\text{Tr}(\gamma_1\gamma_3) + ig_{03}\text{Tr}(\gamma_1\gamma_2) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{C.11}$$

Agora, examinando o traço envolvendo o produto de um número ímpar arbitrário de matrizes gama e uma única matriz γ_5 , escrevemos

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) &= (-1)^n\text{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}) \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) \\ &= 0 \quad (n \text{ ímpar}),\end{aligned}\tag{C.12}$$

em que recorremos a (2.19, 2.22) e nos valem da ciclicidade do traço.

Ao considerar o produto de um par de matrizes gama e uma matriz γ_5 , observamos que se as primeiras são iguais ($\mu_1 = \mu_2$),

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}^2\gamma_5) &= g_{\mu_1\mu_1}\text{Tr}(\gamma_5) \quad (\text{sem contração em } \mu_1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde usamos a álgebra de Clifford e (C.9). Contudo, se $\mu_1 \neq \mu_2$, podemos seguir o mesmo procedimento que conduziu a (C.1) e novamente lançar mão da álgebra de Clifford para introduzir a identidade $g^{\mu_3\mu_3}(\gamma_{\mu_3})^2$, com $\mu_3 \neq \mu_1, \mu_2$ (e sem contração em μ_3), para escrever

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_5) &= g^{\mu_3\mu_3}\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_5\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_3}) \\ &= (-1)^3g_{\mu_3\mu_3}\text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_5\gamma_{\mu_3}) \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_5) \\ &= 0,\end{aligned}$$

de modo que o traço se anula para quaisquer μ_1, μ_2 .

¹As relações (C.1-C.4) foram demonstradas a partir de (2.3), portanto são válidas para todos os elementos desta álgebra de Clifford e γ_3 , inclusive.

Prosseguimos, então, com o caso envolvendo o produto de quatro matrizes gama e uma única matriz γ_5 . Conforme discutimos anteriormente, somente as matrizes γ_μ com $\mu = 0, 1, 2$ são elementos genuínos da álgebra de Clifford associada às equações dinâmicas da QED em 2+1 dimensões. Assim, ao tomarmos um conjunto de quatro matrizes gama, certamente temos ao menos duas matrizes iguais, de forma que podemos avaliar o traço de interesse como segue,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_5) &= (-1)^2 g_{\mu_1\mu_1} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_5) + \\ + 2(-1)^{1+1} g_{\mu_1\mu_2} \text{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_5) &- 2(-1)^{2+1} g_{\mu_1\mu_3} \text{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_5) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

em que rotulamos, evidentemente, por μ_1 o índice das matrizes que se repetem, recorremos a (2.19) e usamos o resultado, verificado acima, de que o traço envolvendo um número par de matrizes gama e a matriz γ_5 se anula. Os fatores de $(-1)^n$ que introduzimos acima são convenientes para a discussão que faremos logo a seguir.

À luz dos casos particulares analisados nos dois últimos cálculos, consideremos, então, o traço do produto de um número par ($n \neq 2$) arbitrário de matrizes gama e uma matriz γ_5 . Tomando $n \geq 4$, sempre haverá ao menos um par de matrizes gama repetidas, de forma que, denotando por μ_k os índices de um par repetido, temos a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_k}\gamma_{\mu_{k+1}}\dots\gamma_{\mu_k}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) &= (-1)^P \text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_k}\gamma_{\mu_k}\gamma_{\mu_{k+1}}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5) + \\ + 2 \sum_{m=1}^P (-1)^{P_m+1} g_{\mu_k\mu_{P_m}} &\underbrace{\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_k}\gamma_{\mu_{k+1}}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)}_{n-2 \text{ termos}} \\ &= (-1)^P g_{\mu_k\mu_k} \underbrace{\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_{k-1}}\gamma_{\mu_{k+1}}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)}_{n-2 \text{ termos}} + \\ + 2 \sum_{m=1}^P (-1)^{P_m+1} g_{\mu_k\mu_{P_m}} &\underbrace{\text{Tr}(\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_k}\gamma_{\mu_{k+1}}\dots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)}_{n-2 \text{ termos}} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

em que P é o número total de permutações efetuadas (até que os índices repetidos estejam contíguos sob o sinal do traço), P_m é o número acumulado de permutações até se efetuar a m -ésima troca de índices, e μ_m é o índice trocado na m -ésima permutação². Para esclarecer a notação que introduzimos,

²Ressaltamos aqui que a demonstração desta fórmula de recorrência é geral e válida mesmo que existam mais de duas matrizes gama com um mesmo índice μ_k . De fato, é suficiente nos concentrarmos em apenas um par de matrizes idênticas, como convidamos o leitor a verificar.

recomendamos ao leitor que recorde o caso envolvendo dois pares de matrizes gama.

De posse deste resultado, verifica-se, empregando um raciocínio iterativo, que é possível reduzir sucessivamente um número par arbitrário de matrizes gama que compõem no traço com γ_5 até recair em um produto de apenas duas matrizes gama e uma γ_5 sob o sinal do traço, que se anula! Portanto,

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \gamma_5) = 0 \quad (n \text{ par}). \quad (\text{C.15})$$

Estudando também o traço envolvendo n matrizes gama, m matrizes τ e uma matriz γ_5 , observa-se, com o auxílio de (2.19, 2.20, 2.23), que se n for par recaímos em (C.10) e (C.11), resultando em traço nulo; por outro lado, se n for ímpar, somos conduzidos, a menos de sinais de permutação, a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \tau \gamma_5) &= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \gamma_5 \tau) \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \tau \gamma_5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o traço envolvendo o produto de um número arbitrário de matrizes gama e τ , com uma única matriz γ_5 , se anula

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n} \tau^m \gamma_5) = 0. \quad (\text{C.16})$$

Naturalmente, as relações de traço envolvendo potências ímpares de γ_5 também resultam em traço nulo, independentemente do número de matrizes gama e τ , tendo em vista (2.19, 2.20, 2.22) e (C.12) acima. Contudo, ressaltamos que os traços envolvendo um número par de matrizes γ_5 não são nulos, em geral, como se pode observar, recordando (2.22) e as relações (C.4) e (C.7).

C.4 Relações Úteis

A seguir, elencamos algumas relações algébricas úteis envolvendo o (pseudo) tensor de Levi-Civita,

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\mu_1 \nu_2 \nu_3} = \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \delta_{\nu_3}^{\mu_3} - \delta_{\nu_3}^{\mu_2} \delta_{\nu_2}^{\mu_3}, \quad (\text{C.17})$$

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \nu_3} = 2\delta_{\nu_3}^{\mu_3}, \quad (\text{C.18})$$

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = 6, \quad (\text{C.19})$$

$$\epsilon^{\nu\alpha\beta} v_\beta \gamma_\nu \gamma_\alpha = -2i\tau\psi, \quad (\text{C.20})$$

$$\epsilon^{\nu\alpha\beta} v_\beta \gamma_\alpha = -\frac{i}{2}[\gamma^\nu, \psi]\tau, \quad (\text{C.21})$$

$$\epsilon^{\nu\alpha\beta} v_\beta u_\alpha \gamma_\nu = \frac{i}{2}[\psi, \psi]\tau, \quad (\text{C.22})$$

em que (C.16-C.18) decorrem de (C.6), com v_μ e u_μ trivetores arbitrários.

Ademais, destacamos algumas relações de traço particulares recorrentes no cálculo de correções quânticas em nosso modelo em (2+1) dimensões

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} p_\mu \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \psi) = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \tau) = -24i, \quad (\text{C.25})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} p_\mu \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \psi \tau) = -8ip^2, \quad (\text{C.26})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} g_{\beta\lambda} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\eta \gamma_\nu) = -48, \quad (\text{C.27})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} g_{\beta\lambda} p_\nu \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\eta \psi) = -16p^2, \quad (\text{C.28})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} p_\lambda p_\beta \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\eta \gamma_\nu) = -16p^2, \quad (\text{C.29})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\eta \gamma_\nu \gamma_\lambda) = -144, \quad (\text{C.30})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} p_\lambda \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\eta \psi) = -48p^2, \quad (\text{C.31})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} g_{\beta\lambda} g_{\alpha\nu} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\eta \psi \tau) = 0, \quad (\text{C.32})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} p_\nu g_{\mu\eta} \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \tau) = 0, \quad (\text{C.33})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\eta\nu\lambda} g_{\mu\eta} p_\alpha p_\nu \text{Tr}(\gamma_\beta \gamma_\lambda \psi \tau) = 0, \quad (\text{C.34})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\eta\nu\lambda}g_{\lambda\beta}\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\eta\gamma_\nu\not{p}\tau) = 0, \quad (\text{C.35})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\eta\nu\lambda}p_\lambda\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\eta\gamma_\nu\tau) = 0, \quad (\text{C.36})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\eta\nu\lambda}p_\nu p_\alpha\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\eta\gamma_\lambda\not{p}\tau) = 0, \quad (\text{C.37})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\eta\nu\lambda}\text{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\eta\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\tau) = 0. \quad (\text{C.38})$$

As relações (C.19-C.22) decorrem diretamente de (C.4,C.7) e considerações de simetria. As demais relações, destacadas em (C.23-C.34), seguem também de (C.4,C.7) em conjunto com as relações auxiliares (C.13-C.15).

C.5 Referências do Apêndice

Para a escrita deste apêndice, seguimos a referência

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira edição, Springer-Verlag, 2003.

Apêndice D

Renormalização

No presente apêndice discutiremos a renormalização finita de nossos modelos originais da QED_3 com quebra da simetria de Lorentz, empregando o procedimento de renormalização perturbativa [26, 27, 39].

D.1 Renormalização Perturbativa

Como visto em (3.1) e (3.28), a inserção das correções radiativas modifica as funções de Green livres dos campos dinâmicos. Faz-se desejável, então, proceder com a renormalização da teoria no intuito de assegurar que o comportamento dos propagadores na teoria interagente seja o mesmo exibido pela teoria livre nas vizinhanças de seus polos (isto é, na camada de massa), para que se possa avaliar os elementos de transição em processos de espalhamento segundo o procedimento LSZ [42].

Com esta finalidade, reescalamos os parâmetros livres e campos como¹ [31, 39, 42]

$$\begin{cases} \psi(x) = Z_2^{-1/2} \psi^{NR}(x), & A_\mu(x) = Z_3^{-1/2} A_\mu^{NR}(x), \\ m_o = Z_{m_o}^{-1} m_o^{NR}, & m_{cs} = Z_{m_{cs}}^{-1} m_{cs}^{NR}, & e = Z_e^{-1} e^{NR}, \\ b_\mu = Z_b^{-1} b_\mu^{NR}, & R_{\alpha\beta\mu\nu} = Z_R^{-1} R_{\alpha\beta\mu\nu}^{NR}, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

com os fatores de normalização $Z_* = 1 + \delta_*$, e escrevemos a densidade lagrangiana renormalizada para nosso modelo da seguinte forma

¹Introduzimos os rótulos “NR” para designar as quantidades associadas à densidade lagrangiana não renormalizada e diferenciá-las das respectivas quantidades renormalizadas.

$$\begin{aligned}
L(x) = & \bar{\psi}(x) (i\rlap{\not{\partial}} - m_o\tau) \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\zeta} (\partial_\mu A^\mu(x))^2 - e\bar{\psi}(x)\rlap{\not{A}}(x)\psi(x) \\
& + \frac{m_{cs}}{4} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} A^\alpha(x) F^{\beta\lambda}(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^5 \rlap{\not{b}}(x) \psi(x) - \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}(x) F^{\mu\nu}(x) + i\delta_2 \bar{\psi}(x) \rlap{\not{\partial}} \psi(x) \\
& - (\delta_{m_o} + \delta_2) m_o \bar{\psi}(x) \tau \psi(x) - \frac{\delta_3}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) - \delta_3 \frac{1}{2\zeta} (\partial_\mu A^\mu(x))^2 \\
& - \left(\delta_2 + \delta_e + \frac{\delta_3}{2} \right) e \bar{\psi}(x) \rlap{\not{A}}(x) \psi(x) + (\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \frac{m_{cs}}{4} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} A^\alpha(x) F^{\beta\lambda}(x) \\
& - (\delta_2 + \delta_b) \bar{\psi}(x) \gamma^5 \rlap{\not{b}}(x) \psi(x) - (\delta_3 + \delta_R) \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (D.2)
\end{aligned}$$

Os parâmetros livres e , m_o e m_{cs} em (D.2) devem ser entendidos como os parâmetros físicos genuínos, assumindo os valores medidos experimentalmente. Os termos proporcionais aos deltas, denominados contratermos, comparecem na densidade lagrangiana como interações [31, 39, 42], tendo as regras de Feynman a eles associadas exibidas em (A.10-A.13), e podem ser determinados iterativamente, ordem-a-ordem na expansão perturbativa em termos da constante de acoplamento, através de condições de contorno apropriadas.

Sendo assim, examinaremos separadamente nas seções seguintes os modelos envolvendo a quebra da simetria de Lorentz nos setores fermiônico e do fóton, avaliando seus respectivos contratermos.

D.2 Renormalização do Modelo com Quebra Fermiônica

Suprimindo os termos envolvendo o tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ para prestigiarmos o modelo com quebra fermiônica, prosseguimos com a renormalização dos propagadores de seus campos dinâmicos e do vértice.

D.2.1 Vértice Eletromagnético

De (D.2) e (3.83), podemos definir o vértice renormalizado como

$$-ie\Lambda^\mu(p', p) = -ie(1 + \delta_e)\gamma^\mu - ie\Gamma^{(0)\mu}(p', p). \quad (D.3)$$

Agora, na situação de “espalhamento progressivo”, em que $q_\mu = 0$, o vértice clássico γ^μ deve ser naturalmente recuperado [39], sugerindo a condição de renormalização conveniente²

$$\Lambda^\mu(q = 0) = \gamma^\mu, \quad (\text{D.4})$$

de forma que

$$\delta_e \gamma^\mu = -\Gamma^{(0)\mu}(q = 0). \quad (\text{D.5})$$

Sendo assim, recorrendo a (3.83, 3.86, 3.88, 3.92), escrevemos

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{(0)}(q = 0) = & -ie^2 \gamma_\mu \left[4m_o^2 A^{(1)}(q = 0) + 4m_o^2 B_g^{(1)}(q = 0) + \right. \\ & + 4m_o^2 B_{p'p'}^{(1)}(q = 0) - 2A_g^{(3)}(q = 0) - 2m_o^2 A_{p'p'}^{(3)}(q = 0) + \\ & \left. + m_{cs} m_o \left(4A^{(1)}(q = 0) - 2A_{p'}^{(2)}(q = 0) + 4B_g^{(1)}(q = 0) + 4m_o^2 B_{p'p'}^{(1)}(q = 0) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

onde decorre, com o auxílio de (B.84, B.87-B.89, B.92-B.96, B.99-B.103) e do *software*, a constante de renormalização do vértice em primeira ordem na constante de estrutura fina

$$\begin{aligned} \delta_e = & \frac{e^2}{4\pi m_{cs}} \left\{ -2 - \frac{2m_{cs}}{m_o} - \frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{cs}^2}{m_o^2} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \operatorname{arccoth} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right. \\ & \left. + \frac{m_{cs}}{m_o} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \left[\operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{m_{cs}} \right) + \operatorname{arctanh} \left(1 - \frac{m_{cs}^2}{2m_o^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

D.2.2 Propagador Fermiônico

Voltando-nos ao propagador fermiônico clássico genuinamente livre (2.31), isto é sem inserções de quebra e de correções radiativas, observa-se que seu respectivo pólo se fixa sobre a massa m_o e que o referido propagador tem resíduo 1.

Tendo em conta as inserções de auto-energia (3.1), em *1-loop*, e a contribuição dos contratermos fermiônicos (A.12), o propagador “vestido” renormalizado fica

²Cabe destacar aqui que as condições de renormalização impostas às correções radiativas de um modelo são arbitrárias [39], podendo ser escolhidas à conveniência das condições de contorno demandadas pelo sistema físico em análise, contanto que preservem as simetrias inerentes ao modelo e o comportamento adequado dos propagadores nas vizinhanças dos polos clássicos.

$$\begin{aligned}
iS^R(p) &= \frac{i}{S_0^{-1}(p) + (\Sigma_0^R(p) + m_{cs}\Sigma_\epsilon^R(p))} + iS_0(p)\gamma_5\not{p} \frac{1}{S_0^{-1}(p) + (\Sigma_0^R(p) + m_{cs}\Sigma_\epsilon^R(p))} \\
&- iS_0(p) (m_{cs}\Sigma_{\epsilon b}^R(p) + \Sigma_b^R(p)) S_0(p) - iS_0(p) (\Sigma_0^R(p) + m_{cs}\Sigma_\epsilon^R(p)) S_0(p)\gamma_5\not{p} S_0(p) \\
&\quad + O(\alpha_e^2, b^2), \tag{D.8}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \Sigma_R^0(p) = \Sigma^0(p) + \delta_2\not{p} - (\delta_2 + \delta_{m_o})m_o\tau \\ \Sigma_b^R(p) = \Sigma_b(p) - (\delta_2 + \delta_b)\gamma^5\not{p} \\ \Sigma_\epsilon^R(p) = \Sigma_\epsilon(p) \\ \Sigma_{\epsilon b}^R(p) = \Sigma_{\epsilon b}(p), \end{cases} \tag{D.9}$$

e com as funções de auto-energia não renormalizadas definidas por (3.11, 3.14, 3.16, 3.18).

Para que (D.8) preserve o comportamento do propagador livre (2.31) nas vizinhanças do pólo, adotamos

$$\Sigma^R(p)\Big|_{b^\mu=0, \not{p}=m_o\tau} = 0 \tag{D.10}$$

para fixar o pólo em m_o e asseguramos o resíduo igual à unidade impondo³

$$\frac{d}{d\not{p}}\Sigma^R(p)\Big|_{b^\mu=0, \not{p}=m_o\tau} = 0, \tag{D.11}$$

em que $\Sigma^R(p)$ é definida em termos das funções de auto-energia renormalizadas (D.9) segundo (3.4).

Estas relações determinam δ_{m_o} e δ_2 . Por sua vez, a constante de renormalização δ_b pode ser fixada impondo outra condição de renormalização, compatível com (D.10, D.11), que definimos, por simplicidade, como

$$(\Sigma_b^R(p) + m_{cs}\Sigma_{\epsilon b}^R(p))\Big|_{\not{p}=m_o\tau} = 0. \tag{D.12}$$

Ato contínuo, desenvolvendo (D.10) vem

$$\delta_{m_o}m_o\tau = (\Sigma_0(p) + m_{cs}\Sigma_\epsilon(p))\Big|_{\not{p}=m_o\tau}, \tag{D.13}$$

³A derivada em relação a \not{p} , introduzida formalmente em (D.11), atua sobre funções escalares $f(p^2)$ como $\frac{d}{d\not{p}}f(p^2) = 2\not{p}\frac{d}{d(p^2)}f(p^2)$.

de forma que, retomando (3.11, 3.16) e as avaliando com o auxílio de (B.76-B.83), resulta

$$\delta_{m_o} = -\frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{m_o} \left[1 - \frac{m_{cs}}{m_o} + \left(2 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right)^2 \operatorname{arccoth} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right]. \quad (\text{D.14})$$

Ademais, elaborando (D.11), obtemos

$$\delta_2 = -\frac{d}{d\rlap{/}p} (\Sigma_0(p) + m_{cs}\Sigma_\epsilon(p)) \Big|_{b^\mu=0, \rlap{/}p=m_o\tau}. \quad (\text{D.15})$$

Entretanto, recordando a identidade de Ward (3.110), decorre

$$\delta_2 = -\delta_e \quad (\text{D.16})$$

e, portanto, de (D.7) segue

$$\begin{aligned} \delta_2 = & -\frac{e^2}{4\pi m_{cs}} \left\{ -2 - \frac{2m_{cs}}{m_o} - \frac{m_{cs}^2}{m_o^2} + \frac{m_{cs}^2}{m_o^2} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \operatorname{arccoth} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \right. \\ & \left. + \frac{m_{cs}}{m_o} \left(1 + \frac{m_{cs}}{m_o} \right) \left[\operatorname{arccoth} \left(\frac{2m_o}{m_{cs}} \right) + \operatorname{arctanh} \left(1 - \frac{m_{cs}^2}{2m_o^2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{D.17}) \end{aligned}$$

Por sua vez, averiguando (D.12), escrevemos

$$(\delta_2 + \delta_b)\gamma_5 \rlap{/}b = (\Sigma_b(p) + m_{cs}\Sigma_{\epsilon b}(p)) \Big|_{\rlap{/}p=m_o\tau}. \quad (\text{D.18})$$

Recorrendo a (3.14, 3.18), usufruindo de (3.113) e municiados por (B.84, B.87-B.89, B.92-B.96, B.99-B.103, B.112-B.114), avaliamos o membro direito de (D.18) e combinamos com (D.17) para extrairmos a constante δ_b , que se anula

$$\delta_b = 0. \quad (\text{D.19})$$

D.2.3 Propagador do Fóton

Pondo ênfase agora à renormalização do propagador do fóton, averiguamos o propagador livre (2.41) e observamos que, devido ao termo topológico de Chern-Simons, este apresenta dois polos: um localizado sobre a massa topológica m_{cs} e o outro em 0.

Inserindo a contribuição do contratermo do fóton e as correções radiativas advindas do tensor de polarização (3.28), em primeira ordem na constante de acoplamento e suprimindo a contribuição do parâmetro de quebra, o propagador vestido renormalizado fica expresso por

$$\begin{aligned}
& iD_{\mu\nu}^R(k)|_{b^{\mu}=0} = D_g(k)g_{\mu\nu} \left\{ 1 - \left[D_g(P_g^{(0)} - iC_g) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) - k^2 D_g^{-1} D_\epsilon^2(P_g^{(0)} - iC_g) \right] \right\}^{-1} + \\
& + D_k(k)k_\mu k_\nu \left\{ 1 - \left[2D_g(P_g^{(0)} - iC_g) + 2k^2 D_g(P_k^{(0)} - iC_k) + D_k^{-1} D_g^2(P_k^{(0)} - iC_k) \right. \right. \\
& \left. \left. + k^2 D_k(P_g^{(0)} - iC_g) + (k^2)^2 D_k(P_k^{(0)} - iC_k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2D_k^{-1} D_g D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) + D_k^{-1} D_\epsilon^2(P_g^{(0)} - iC_g) \right] \right\}^{-1} \\
& + D_\epsilon(k)\epsilon_{\mu\nu\lambda} k^\lambda \left\{ 1 - \left[D_\epsilon^{-1} D_g^2(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2D_g(P_g^{(0)} - iC_g) - k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) \right] \right\}^{-1}, \tag{D.20}
\end{aligned}$$

em que, para otimizar espaço, introduzimos as funções auxiliares $D_*(k)$, $P_*^{(0)}(k)$ e $C_*(k)$, omitindo sua dependência em k^μ , definidas pelos coeficientes de (2.41), (3.36, 3.37) e do contratermo para fótons, respectivamente, como

$$iD_F^{\mu\nu}(k) = D_g(k)g^{\mu\nu} + D_k(k)k^\mu k^\nu + D_\epsilon(k)\epsilon_{\mu\nu\lambda} k^\lambda, \tag{D.21}$$

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k) = P_g^{(0)}(k)g^{\mu\nu} + P_k^{(0)}(k)k^\mu k^\nu + P_\epsilon^{(0)}(k)\epsilon_{\mu\nu\lambda} k^\lambda, \tag{D.22}$$

$$-iC^{\mu\nu}(k) = -i[C_g(k)g^{\mu\nu} + C_{kk}(k)k^\mu k^\nu + C(k)\epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha], \tag{D.23}$$

com

$$D_g(k) = \frac{i}{m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon} \tag{D.24}$$

$$D_k(k) = i \frac{m_{cs}^2 - \tilde{\zeta} p^2}{(p^2)^2 (\tilde{\zeta} - 1) (m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon)} \tag{D.25}$$

$$D_\epsilon(k) = -\frac{m_{cs}}{p^2 (m_{cs}^2 - p^2 - i\epsilon)}, \tag{D.26}$$

$$P_g^{(0)}(k) = -4e^2[2J_g^{(3)}(k) + k^\alpha J_\alpha^{(2)}(k) + m_o^2 J^{(1)}(k) - g^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}^{(3)}(k)] \quad (D.27)$$

$$P_k^{(0)}(k) = -4e^2[2J_{kk}^{(3)}(k) - 2J_k^{(2)}(k)] \quad (D.28)$$

$$P_\epsilon^{(0)}(k) = -4ie^2 m_o J^{(1)}(k), \quad (D.29)$$

$$C_g(k) = \delta_3 k^2 \quad (D.30)$$

$$C_k(k) = -\delta_3 \frac{\zeta - 1}{\zeta} \quad (D.31)$$

$$C_\epsilon(k) = im_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3). \quad (D.32)$$

Tencionando recuperar o comportamento do propagador clássico “*on shell*”, podemos “fixar” o pólo do propagador vestido de forma semelhante ao que fizemos para o propagador fermiônico. Entretanto, como nosso modelo nos fornece dois polos clássicos, podemos selecionar as condições de renormalização privilegiando um deles. A seguir, então, delinearemos as duas possibilidades, determinando suas respectivas constantes de renormalização associadas.

Polo em $k^2 = 0$

Fixando o pólo em $k^2 = 0$, isto é, impondo as condições⁴

$$\begin{aligned} \left[D_g(P_g^{(0)} - iC_g) - 2k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) - k^2 D_g^{-1} D_\epsilon^2(P_g^{(0)} - iC_g) \right] (k) \Big|_{k^2=0, b^\mu=0} &= \\ &= 0 \end{aligned} \quad (D.33)$$

e

$$\begin{aligned} \left[D_\epsilon^{-1} D_g^2(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) + 2D_g(P_g^{(0)} - iC_g) - k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) \right] (k) \Big|_{k^2=0, b^\mu=0} &= \\ &= 0, \end{aligned} \quad (D.34)$$

obtemos, com vistas a (B.133-B.142), o sistema

$$6e^2 m_o + m_{cs} [e^2 + 6(3\delta_3 + 2\delta_{m_{cs}}) m_o \pi] = 0, \quad (D.35)$$

⁴Estas condições decorrem do primeiro e do último termo de (D.20).

$$e^2 + 2\pi m_{cs}(\delta_3 + \delta_{m_{cs}}) = 0, \quad (\text{D.36})$$

donde decorrem as constantes de renormalização

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi m_o} \quad (\text{D.37})$$

e

$$\delta_{m_{cs}} = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{3m_o} - \frac{1}{m_{cs}} \right). \quad (\text{D.38})$$

Polo em $k^2 = m_{cs}^2$

Por outro lado, fixando o pólo em m_{cs} , escrevemos

$$\begin{aligned} \left[D_g(P_g^{(0)} - iC_g) - 2k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) - k^2 D_g^{-1} D_\epsilon^2(P_g^{(0)} - iC_g) \right] (k) \Big|_{k^2=m_{cs}^2, b^\mu=0} = \\ = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

que fornece⁵, com o auxílio de (B.133-B.142),

$$-4e^2 m_{cs} m_o + e^2 (m_{cs} + 2m_o)^2 \ln \left(\frac{2m_o + m_{cs}}{2m_o - m_{cs}} \right) + 8\pi m_{cs}^3 (2\delta_3 + \delta_{m_o}) = 0. \quad (\text{D.40})$$

Fixando também o resíduo do propagador vestido, tomando-o igual à unidade como o do propagador clássico (2.41), vem⁶

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left[\frac{k^2 + m_{cs}^2}{k^2} (P_g^{(0)} + C_g^{(0)}) - 2im_{cs} (P_\epsilon^{(0)} + C_\epsilon^{(0)}) \right] (k) \Big|_{k^2=m_{cs}^2, b^2=0} = 0, \quad (\text{D.41})$$

que, subsidiada por (B.133-B.142), oferece⁷

⁵A condição auxiliar

$$\left[D_\epsilon^{-1} D_g^2(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) + 2D_g(P_g^{(0)} - iC_g) - k^2 D_\epsilon(P_\epsilon^{(0)} - iC_\epsilon) \right] (k) \Big|_{k^2=m_{cs}^2, b^\mu=0} = 0,$$

resulta, independentemente, na mesma equação (D.40).

⁶Esta relação resulta do resíduo do primeiro termo de (D.20).

⁷A condição auxiliar

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \left[-i \frac{k^2 + m_{cs}^2}{m_{cs}} (P_\epsilon^{(0)} + C_\epsilon^{(0)}) + 2(P_g^{(0)} + C_g^{(0)}) \right] (k) \Big|_{k^2=m_{cs}^2, b^2=0} = 0$$

$$-4e^2 m_{cs} m_o^2 + 2\pi m_{cs}^4 \delta_3 - 4\pi m_o m_{cs}^3 \delta_3 + e^2 m_o (4m_o^2 - m_{cs}^2) \ln \left(\frac{2m_o + m_{cs}}{2m_o - m_{cs}} \right) = 0. \quad (\text{D.42})$$

De (D.40) e (D.42) advêm as constantes de renormalização

$$\delta_3 = \frac{e^2}{2\pi} \frac{m_o}{m_{cs}^3} \frac{1}{m_{cs} - 2m_o} \left[4m_{cs} m_o + (m_{cs}^2 - 4m_o^2) \ln \left(\frac{2m_o + m_{cs}}{2m_o - m_{cs}} \right) \right], \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{aligned} \delta_{m_{cs}} = & \frac{e^2}{8\pi} \frac{1}{m_{cs}^3} \frac{1}{m_{cs} - 2m_o} \left[4m_{cs} m_o (m_{cs} - 10m_o) \right. \\ & \left. - (m_{cs}^3 + 10m_{cs}^2 m_o - 4m_{cs} m_o^2 - 40m_o^3) \ln \left(\frac{2m_o + m_{cs}}{2m_o - m_{cs}} \right) \right]. \quad (\text{D.44}) \end{aligned}$$

D.3 Renormalização do modelo com Quebra Bosônica

Preferindo, por ora, os termos envolvendo a massa topológica m_{cs} e o trivetor de quebra b^μ , em favor do tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, na densidade lagrangiana renormalizada (D.2), procedemos com a renormalização dos propagadores e do vértice de nosso modelo com quebra da simetria de Lorentz no setor do fóton.

D.3.1 Vértice Eletromagnético

Definindo o vértice renormalizado como em (D.3)⁸,

$$-ie\Lambda^\mu(p', p) = -ie(1 + \delta_e)\gamma^\mu - ie\Gamma^\mu(p', p), \quad (\text{D.45})$$

com $-ie\Gamma^\mu(p', p)$ estabelecido por (6.67-6.69), e adotando a condição de renormalização (D.4), segue a relação análoga à (D.5) para a constante δ_e

$$\delta_e \gamma^\mu = -\Gamma^\mu(q=0). \quad (\text{D.46})$$

repercuta na mesma equação (D.42).

⁸Cabe apontar aqui que as condições (D.3) e (D.45) diferem em relação ao tratamento do campo externo de quebra. Isto é, em (D.3) fixamos a condição de renormalização na situação estritamente livre, onde o campo externo de quebra b^μ é nulo. Em contrapartida, a condição (D.45) foi imposta na situação em que o campo externo de quebra $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ se faz presente.

Lançando mão de (6.67-6.69, 6.90, 6.94) e retendo apenas os termos do vértice proporcionais a γ_μ , que contribuem para a constante de renormalização δ_e , vem

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(q \rightarrow 0) = & -ie^2 \left\{ \left[-4m_o^2 X(q \rightarrow 0) + 2m_o^2 X_{p' p'}(q \rightarrow 0) + 2X_g(q \rightarrow 0) \right. \right. \\ & + 4m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) + 4m_o^4 Y_{p' p'}(q \rightarrow 0) \left. \right] + \left[-10m_o^2 X(q \rightarrow 0) + m_o^2 X_{p' p'}(q \rightarrow 0) \right. \\ & + 5X_g(q \rightarrow 0) + 26m_o^2 Y_g(q \rightarrow 0) + 10m_o^4 Y_{p' p'}(q \rightarrow 0) - 8Y_{gg}(q \rightarrow 0) \\ & \left. \left. - 8m_o^2 Y_{gp' p'}(q \rightarrow 0) \right] \frac{u.v}{2} \right\} \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (D.47)$$

que, em conjunto com (D.46) e (B.200-B.208, B.212-B.225), determina

$$\begin{aligned} \delta_e = & -\frac{e^2}{8\pi m_o} \left[1 - \ln(4) + \frac{3m_o}{m_{ir}} + 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right] \\ & - \frac{e^2}{32\pi m_o} \left[5 - \ln(4) + \frac{7m_o}{m_{ir}} + 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right] u.v. \end{aligned} \quad (D.48)$$

D.3.2 Propagador Fermiônico

Voltando-nos ao propagador fermiônico, adotamos condições de renormalização semelhantes àquelas impostas no caso com quebra fermiônica para fixar os polos e o resíduo do propagador *on-shell*, a saber

$$\Sigma^R(p) \Big|_{\not{p}=m_o\tau} = 0, \quad (D.49)$$

e

$$\frac{d}{d\not{p}} \Sigma^R(p) \Big|_{\not{p}=m_o\tau} = 0, \quad (D.50)$$

em que

$$\Sigma_R(p) = \Sigma(p) + \delta_2 \not{p} - (\delta_2 + \delta_{m_o}) m_o \tau \quad (D.51)$$

e com $\Sigma(p)$ definida por (6.52, 6.60, 6.61).

De (D.49) resulta

$$\delta_{m_o} m_o \tau = \Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m_o\tau}, \quad (D.52)$$

de forma que, retendo apenas os termos não derivativos proporcionais a τ em (6.60, 6.61), que contribuem para δ_{m_o} , obtemos

$$\delta_{m_o} = -\frac{e^2}{8\pi m_o} \left[1 + 2\ln(2) - 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right] - \frac{e^2}{32\pi m_o} u.v \left[3 + 2\ln(2) - 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right]. \quad (\text{D.53})$$

Por outro lado, de (D.50) e das identidades de Ward (6.99, 6.101), vem (D.16) e decorre

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{e^2}{8\pi m_o} \left[1 - \ln(4) + \frac{3m_o}{m_{ir}} + 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right] \\ &+ \frac{e^2}{32\pi m_o} \left[5 - \ln(4) + \frac{7m_o}{m_{ir}} + 2\ln\left(\frac{m_{ir}}{m_o}\right) \right] u.v. \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

D.3.3 Propagador do Fóton

Examinando, por fim, o propagador do fóton, lançamos mão de (6.50) e do contratermo do fóton para escrever o propagador vestido

$$\begin{aligned} &iD_{\mu\nu}^R(k, m_{cs} = 0) = \\ &= -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} \left\{ 1 - \frac{i}{k^2} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 + ik^2(\delta_R + \delta_3) \left(\frac{5}{4} u.v - 2\frac{k.u k.v}{k^2} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} \frac{5}{4} u.v \left\{ 1 - \frac{2i}{k^2} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] \right\} + \frac{2i}{(k^2)^2} k.u k.v g_{\mu\nu} \left\{ 1 - \frac{2i}{k^2} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] \right\} \\ &+ \frac{i}{k^2} (u_\mu v_\nu + u_\nu v_\mu) \left\{ 1 - \frac{2i}{k^2} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] + \delta_R + \delta_3 \right\} \\ &+ \text{termos proporcionais a } k^\mu \text{ e } k^\nu, \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

com a função auxiliar $P_g^{(0)}(k)$ definida por (D.27) e pelas resectivas integrais auxiliares alinhavadas no Apêndice B.

Em virtude da ausência do termo de Chern-Simons nesta versão de nosso modelo, o pólo do propagador é único e reside na origem, de forma que o fixamos impondo que cada coeficiente entre chaves na expressão acima se reduza à unidade quando avaliados *on-shell* ($k^2 = 0$), resultando em

$$\delta_3 = -i \frac{P_g^{(0)}(k)}{k^2} \Big|_{k^2=0} = -\frac{e^2}{6\pi m_o} \quad (\text{D.56})$$

e

$$\delta_R = -\delta_3 = \frac{e^2}{6\pi m_o}. \quad (\text{D.57})$$

Agora, se retomarmos os termos de Chern-Simons presentes na densidade lagrangiana renormalizada (D.2), o propagador clássico com quebra adequado é (6.49) e o propagador vestido renormalizado fica expresso por

$$\begin{aligned}
iD_{\mu\nu}^R(k) = & ig_{\mu\nu}C_{1g} \left\{ 1 + \frac{i}{C_{1g}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 + ik^2(\delta_R + \delta_3) \frac{5}{4} u.v \right] [C_{1g}^2 + k^2 C_{3g}^2] \right. \\
& + \frac{i}{C_{1g}} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] (-2k^2) C_{1g} i C_{3g} \left. \right\} + \\
& + ig_{\mu\nu} \frac{k.u.k.v}{k^2} C_{1k} \left\{ 1 + \frac{i}{C_{1k}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] [2C_{1g} C_{1k} + 2k^2 C_{3g} C_{3k}] \right. \\
& + \frac{2}{C_{1k}} (\delta_R + \delta_3) k^2 [C_{1g}^2 + k^2 C_{3g}^2] \\
& - \frac{2i}{C_{1k}} k^2 \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] [C_{1g} i C_{3k} + C_{1k} i C_{3g}] \left. \right\} \\
& + i\epsilon_{\mu\nu\lambda} k^\lambda i C_{3g} \left\{ 1 + \frac{2i}{i C_{3g}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 + ik^2(\delta_R + \delta_3) \frac{5}{4} u.v \right] C_{1g} i C_{3g} \right. \\
& + \frac{i}{i C_{3g}} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] [C_{1g}^2 + k^2 C_{3g}^2] \left. \right\} \\
& + i\epsilon_{\mu\nu\lambda} k^\lambda \frac{k.u.k.v}{k^2} i C_{3k} \left\{ 1 + \frac{2i}{i C_{(3)k}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] [C_{1g} i C_{3k} + C_{1k} i C_{3g}] \right. \\
& + \frac{4}{i C_{3k}} (\delta_R + \delta_3) k^2 C_{1g} i C_{3g} + \\
& + \frac{i}{i C_{3k}} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] [2C_{1g} C_{1k} + 2k^2 C_{3g} C_{3k}] \left. \right\} \\
& + i(u_\mu v_\nu + u_\nu v_\mu) C_4 \left\{ 1 + \frac{i}{C_4} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] [2C_{1g} C_4 + 2k^2 i C_{3g} i C_{14}] \right. \\
& + \frac{i}{C_4} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs}(\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] 2k^2 [C_{1g} i C_{14} - C_4 i C_{3g}] + (\delta_R + \delta_3) k^2 \frac{C_{1g}^2}{C_4} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +i[(k \times v)^\mu u^\nu - (k \times v)^\nu u^\mu + (k \times u)^\mu v^\nu - (k \times u)^\nu v^\mu] iC_{14}. \\
 & \cdot \left\{ 1 + \frac{i}{iC_{14}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] \left[2C_{1g} iC_{14} - C_4 iC_{3g} - iC_{3g} iC_{35} k^2 \right] \right. \\
 & + \frac{i}{iC_{14}} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs} (\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] \left[-C_{1g} C_4 - C_{1g} iC_{35} k^2 - 2iC_{3g} iC_{14} k^2 \right] \\
 & \quad \left. - \frac{k^2}{iC_{14}} (\delta_R + \delta_3) iC_{3g} C_{1g} \right\} \\
 & + i[(v \times k)^\mu (u \times k)^\nu + (v \times k)^\nu (u \times k)^\mu] iC_{35}. \\
 & \cdot \left\{ 1 + \frac{i}{iC_{35}} \left[P_g^{(0)} - i\delta_3 k^2 \right] \left[2C_{1g} iC_{35} + 2iC_{14} iC_{3g} \right] \right. \\
 & + \frac{i}{iC_{35}} \left[P_\epsilon^{(0)} + m_{cs} (\delta_{m_{cs}} + \delta_3) \right] \left[2C_{1g} iC_{14} - 2k^2 iC_{35} iC_{3g} \right] \\
 & \quad \left. - \frac{k^2}{iC_{35}} (\delta_R + \delta_3) (iC_{3g})^2 \right\} + \text{termos em } k^\mu \text{ e } k^\nu, \quad (D.58)
 \end{aligned}$$

onde (D.27, D.29) determinam as funções $P_g^{(0)}(k)$ e $P_\epsilon^{(0)}(k)$ e as novas funções auxiliares $C_*(k)$ são definidas a partir dos coeficientes (6.36-6.48) do propagador (6.49) como segue

$$C_{1g}(k) = \frac{1}{m_{cs}^2 - k^2} - \frac{5}{4} \frac{m_{cs}^2 + k^2}{(m_{cs}^2 - k^2)^2} u.v, \quad (D.59)$$

$$C_{1k}(k) = 2 \frac{m_{cs}^2 + k^2}{(m_{cs}^2 - k^2)^2}, \quad (D.60)$$

$$C_{3g}(k) = \frac{1}{k^2} \frac{m_{cs}}{m_{cs}^2 - k^2} - \frac{5}{2} \frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - k^2)^2} u.v, \quad (D.61)$$

$$C_{3k}(k) = \frac{4m_{cs}}{(m_{cs}^2 - k^2)^2}, \quad (D.62)$$

$$C_4(k) = \frac{k^2}{(k^2 - m_{cs}^2)^2}, \quad (D.63)$$

$$C_{14}(k) = -\frac{m_{cs}}{(m_{cs}^2 - k^2)^2}, \quad (D.64)$$

$$C_{35}(p) = -i \frac{m_{cs}^2}{k^2} \frac{1}{(k^2 - m_{cs}^2)^2}. \quad (D.65)$$

Assim como no caso do modelo com quebra fermiônica, a presença do termo de Chern-Simons notavelmente confere ao propagador do fóton (6.49) dois polos distintos, um sobre a origem e outro sobre a massa topológica m_{cs} . Com a escolha de fixar o pólo do propagador vestido (D.58) sobre a origem quando $k^2 = 0$, exigimos que todos os termos entre chaves em (D.58) se reduzissem unidade nesta condição, recuperando o comportamento do propagador clássico e obtendo um sistema de equações lineares donde decorrem as constantes de renormalização

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi m_o}, \quad (\text{D.66})$$

$$\delta_{m_{cs}} = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{3m_o} - \frac{1}{m_{cs}} \right), \quad (\text{D.67})$$

$$\delta_R = \frac{e^2}{6\pi m_o}. \quad (\text{D.68})$$

Nítidamente, observa-se que (D.66, D.67) coincidem com (D.37, D.38), visto que estas constantes de renormalização independem do tensor de quebra da simetria de Lorentz, que se traduz em (D.68).

D.4 Referências do Apêndice

A seguir, elencamos as principais referências deste apêndice.

[26] Kostelecký, V. A.; Lane, C. D.; Pickering, G. M. “*One-Loop Renormalization of Lorentz-Violating Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **65**, p. 056006, 2002.

[27] Colladay, D.; McDonald, P. “*One-Loop Renormalization of QCD with Lorentz Violation*”, Phys. Rev. D **77**, p. 085006, 2008.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.

[42] Weinberg, S. “*The Quantum Theory of Fields: Foundations*”. Volume Um. Cambridge University Press, 1995.

Apêndice E

O Efeito Magneto-Elétrico

Neste apêndice, faremos uma breve análise de nosso modelo com quebra da simetria de Lorentz no setor do fóton, na ausência do termo de Chern-Simons, em nível clássico, com o intuito de explorar alguns aspectos de sua fenomenologia inerente, enfatizando o efeito magneto-elétrico.

E.1 As Equações de Movimento e a Transversalidade dos Campos

A densidade lagrangiana clássica pertinente aos nossos propósitos consiste em

$$L_{\text{EM}}(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}R_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}(x)F^{\mu\nu}(x). \quad (\text{E.1})$$

Recordando o tensor do campo eletromagnético bidimensional (1.14) e a parametrização do tensor de quebra da simetria de Lorentz em termos dos trivetores fixos u^μ e v^μ (6.5), podemos reescrever (E.1) em termos dos campos elétrico e magnético como¹

$$L_{\text{EM}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}(u \cdot v + R - 1) \left(B^2(\vec{r}, t) - \vec{E}^2(\vec{r}, t) \right) + u^0 v^0 \vec{E}^2(\vec{r}, t)$$

¹Destacamos aqui que, em (2+1) dimensões, o produto vetorial entre dois bivectores arbitrários do plano resulta em um pseudoescalar, isto é, $\vec{q}(\vec{r}, t) \times \vec{s}(\vec{r}, t) = q_x(\vec{r}, t)s_y(\vec{r}, t) - q_y(\vec{r}, t)s_x(\vec{r}, t)$, como o campo magnético.

$$-u^0 B(\vec{r}, t) \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - v^0 B(\vec{r}, t) \vec{u} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{u} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + B^2(\vec{r}, t) \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (\text{E.2})$$

Extraindo as equações de Euler-Lagrange, resulta o sistema²

$$\begin{aligned} (1 - u \cdot v - R + 2u_0 v_0) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + u_0 \vec{\nabla} B(\vec{r}, t) \times \vec{v} + v_0 \vec{\nabla} B(\vec{r}, t) \times \vec{u} \\ - 2u_x v_x \partial_x E_x(\vec{r}, t) - 2u_y v_y \partial_y E_y(\vec{r}, t) \\ - (u_x v_y + u_y v_x) \partial_y E_x(\vec{r}, t) - (u_x v_y + u_y v_x) \partial_x E_y(\vec{r}, t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} (1 - u \cdot v - R - 2u_x v_x) (\partial_t E_x(\vec{r}, t) - \partial_y B(\vec{r}, t)) + u_0 \partial_y (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{v}) + v_0 \partial_y (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{u}) \\ + 2u_0 v_0 \partial_t E_x(\vec{r}, t) + 2u_y v_y \partial_y B(\vec{r}, t) \\ - (u_x v_y + u_y v_x) \partial_t E_y(\vec{r}, t) + (u_0 v_y + u_y v_0) \partial_t B(\vec{r}, t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} (1 - u \cdot v - R - 2u_y v_y) (\partial_t E_y(\vec{r}, t) + \partial_x B(\vec{r}, t)) - u_0 \partial_x (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{v}) - v_0 \partial_x (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{u}) \\ + 2u_0 v_0 \partial_t E_y(\vec{r}, t) - 2u_x v_x \partial_x B(\vec{r}, t) \\ - (u_x v_y + u_y v_x) \partial_t E_x(\vec{r}, t) - (u_0 v_x + u_x v_0) \partial_t B(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Buscando, então, soluções de onda plana que se propagam, por exemplo, na direção \hat{x}

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{-i(\omega t - kx)} \\ B(\vec{r}, t) = B e^{-i(\omega t - kx)}, \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

obtemos as amplitudes dos respectivos campos elétrico e magnético

$$\begin{aligned} E_x = -E_y \{ w [v_0 v_y (\vec{u}^2 - u_0^2) + u_0 u_y (\vec{v}^2 - v_0^2) + (v_y u_0 + u_y v_0) (-1 + R)] \\ - k [v_x v_y (\vec{u}^2 - u_0^2) + u_x u_y (\vec{v}^2 - v_0^2) + (v_x u_y + u_x v_y) (-1 + R)] \} \\ \cdot \{ w [u_0 u_x (\vec{v}^2 - v_0^2) + v_0 v_x (\vec{u}^2 - u_0^2) + (v_x u_0 + u_x v_0) (-1 + R)] \\ + k [u_x^2 v_x^2 - (u_y^2 - u_0^2) (v_y^2 - v_0^2) + (-1 + R) (2u_x v_x + R - 1)] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

²Doravante, neste apêndice, adotaremos o sistema de coordenadas cartesianas retangulares.

$$\begin{aligned}
B = E_y \{ & w [\vec{u}^2 \vec{v}^2 - (1 - R + u_0 v_0)^2] \\
& -k [v_x v_0 (\vec{u}^2 - u_0^2) + u_x u_0 (\vec{v}^2 - v_0^2) + (v_x u_0 + u_x v_0)(-1 + R)] \} \cdot \\
& \cdot \{ w [u_0 u_x (\vec{v}^2 - v_0^2) + v_0 v_x (\vec{u}^2 - u_0^2) + (v_x u_0 + u_x v_0)(-1 + R)] \\
& +k [u_x^2 v_x^2 - (u_y^2 - u_0^2)(v_y^2 - v_0^2) + (-1 + R)(2u_x v_x + R - 1)] \}^{-1}. \quad (\text{E.8})
\end{aligned}$$

A amplitude (E.7) do campo elétrico revela uma quebra da transversalidade da onda no vácuo, devida à anisotropia espacial imposta pelos vetores de quebra da simetria de Lorentz \vec{u} e \vec{v} . Neste cenário, o campo elétrico oscila tanto perpendicularmente quanto paralelamente à direção de propagação da onda, produzindo um modo do tipo TM (*transverse magnetic*).

No contexto envolvendo uma quebra isotrópica da simetria de Lorentz, a amplitude (E.7) é nula e a transversalidade da onda no vácuo é preservada.

E.2 Efeito Magneto-Elétrico

O efeito magneto-elétrico consiste na capacidade de se magnetizar um material através de um campo elétrico ou de induzir uma polarização elétrica através de um campo magnético [34]. Estas inusitadas propriedades podem ser contempladas definindo o vetor de deslocamento elétrico³ [34]

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \epsilon_m B, \quad (\text{E.9})$$

com as permissividades elétrica e “magneto-dielétrica” introduzidas, respectivamente, por

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.10})$$

$$\epsilon_m = \begin{bmatrix} \epsilon_{m1} \\ \epsilon_{m2} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

e a indução magnética [34]

³A equação (E.9) deve ser entendida como uma equação matricial, com o campo magnético B multiplicado pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tendo em mente sua natureza escalar, e as componentes do deslocamento elétrico e do campo elétrico elencadas adequadamente em matrizes coluna. Posto isto, a critério de concisão do texto, tomamos a liberdade de denotar vetorialmente as matrizes associadas a \vec{D} e \vec{E} em (E.9).

$$H = \frac{1}{\mu_m} B + \vec{\mu}_e \cdot \vec{E}, \quad (\text{E.12})$$

em que μ_m é a permeabilidade magnética e μ_e a permeabilidade “magneto-elétrica”.

A partir da densidade lagrangiana (E.1), calculamos o vetor de deslocamento elétrico lançando mão de [29]

$$\vec{D} = \frac{\partial L}{\partial \vec{E}}, \quad (\text{E.13})$$

donde seguem as componentes

$$D_x = -(u.v + R - 1)E_x + 2u^0v^0E_x + u^0v_yB + v^0u_yB - v_x\vec{u} \cdot \vec{E} - u_x\vec{v} \cdot \vec{E}, \quad (\text{E.14})$$

$$D_y = -(u.v + R - 1)E_y + 2u^0v^0E_y - u^0v_xB - v^0u_xB - v_y\vec{u} \cdot \vec{E} - u_y\vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (\text{E.15})$$

Recorrendo a (E.10) e (E.11), decorrem as permissividades

$$\epsilon = \begin{bmatrix} -(u.v + R - 1) + 2u^0v^0 - 2v_xu_x & -(v_xu_y + v_yu_x) \\ -(v_xu_y + v_yu_x) & -(u.v + R - 1) + 2u^0v^0 - 2v_yu_y \end{bmatrix}, \quad (\text{E.16})$$

$$\epsilon_m = \begin{bmatrix} u^0v_y + v^0u_y \\ -u^0v_x - v^0u_x \end{bmatrix}. \quad (\text{E.17})$$

Por sua vez, a indução magnética pode ser extraída tendo em conta [29]

$$H = -\frac{\partial L}{\partial B}, \quad (\text{E.18})$$

fornecendo

$$H = -(u.v + R - 1)B + u^0\vec{v} \times \vec{E} + v^0\vec{u} \times \vec{E} - 2B\vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (\text{E.19})$$

De (E.19) vêm as permeabilidades

$$\mu_m = -\frac{1}{u.v + R - 1 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}}, \quad (\text{E.20})$$

$$\vec{\mu}_e = -(u^0v_y + v^0u_y)\hat{x} + (u^0v_x + v^0u_x)\hat{y}. \quad (\text{E.21})$$

O efeito magneto-elétrico fica estabelecido por (E.17) e (E.21), que evidenciam sua origem na anisotropia espaço-temporal induzida pela quebra da simetria de Lorentz. De fato, examinando a polarização elétrica, definida por [70]

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (\text{E.22})$$

obtemos suas respectivas componentes

$$P_x = \frac{1}{4\pi} \left[-(u.v + R)E_x + 2u^0v^0E_x - v_x\vec{u}.\vec{E} - u_x\vec{v}.\vec{E} + u^0v_yB + v^0u_yB \right], \quad (\text{E.23})$$

$$P_y = \frac{1}{4\pi} \left[-(u.v + R)E_y + 2u^0v^0E_y - v_y\vec{u}.\vec{E} - u_y\vec{v}.\vec{E} - u^0v_xB - v^0u_xB \right], \quad (\text{E.24})$$

que, nitidamente, são suscetíveis ao campo magnético.

Por outro lado, avaliando a magnetização definida por [70]

$$H = B - 4\pi M, \quad (\text{E.25})$$

escrevemos

$$M = -\frac{1}{4\pi} \left[-(u.v + R)B - 2B\vec{u}.\vec{v} + u^0\vec{v} \times \vec{E} + v^0\vec{u} \times \vec{E} \right], \quad (\text{E.26})$$

que reitera a sensibilidade magnética do meio anisotrópico à presença de um campo elétrico.

Face aos resultados (E.23, E.24, E.26), nosso modelo de campo original pode ser empregado para a descrição efetiva de sistemas planares magneto-elétricos em física do estado sólido.

E.3 Referências do Apêndice

Listamos a seguir as referências pertinentes a este apêndice.

[29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. “*Quantum Electrodynamics*”. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.

[34] Khare, A. “*Fractional Statistics and Quantum Theory*”. Segunda Edição. World Scientific, 2005.

[70] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M.; Pitaevskii, L. P. “*Electrodynamics of Continuous Media*”. Segunda Edição, Butterworth-Heinemann, 1984.

Referências Bibliográficas

- [1] Streater, R. F.; Wightman, A. S. “*PCT, Spin and Statistics, and All That*”. Princeton University Press, 2000.
- [2] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. “*CPT Violation and the Standard Model*”, Phys.Rev. D **55**, p.6760, 1997.
- [3] Colladay, D.; Kostelecký, V. A. “*Lorentz-Violating Extension of the Standard Model*”, Phys.Rev. D **58**, p.116002, 1998.
- [4] Jackiw, R.; Kostelecký, V. A. “*Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. Lett. **82**, p.3572, 1999.
- [5] Pisarski, R. D. “*Chiral-Symmetry Breaking in Three-Dimensional Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **29**, p. 2423, 1984.
- [6] Appelquist, W. *et al.* “*Spontaneous Chiral-Symmetry Breaking in Three-Dimensional QED*”, Phys. Rev. D **33**, p. 3704, 1986.
- [7] Appelquist, W.; Nash, D; Wijewardhana, L. C. R. “*Critical Behavior in (2+1)-Dimensional QED*”, Phys. Rev. Lett. **60**, p. 2575, 1988.
- [8] Kondo, K. -I.; Maris, P. “*Spontaneous Chiral-Symmetry Breaking in Three-Dimensional QED with a Chern-Simons Term*”, Phys. Rev. D **52**, p. 1212, 1995.
- [9] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Infrared Dynamics in (2+1) Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **76**, p. 69, 1998.
- [10] Tomazelli, J. L.; Boldo, J. L.; Pimentel, B. M. “*Remarks on Infrared Dynamics in QED in Three Dimensions*”, Canadian Jour. Phys. **80**, p. 1037, 2002.

- [11] de Roo, M.; Stam, K. “*Non-Perturbative Analysis of the Infrared Properties of QED_3* ”, Nuc. Phys. **B246**, p. 335, 1984.
- [12] Burden, C. J.; Praschifka, J.; Roberts, C. D. “*Photon Polarization Tensor and Gauge Dependence in Three-Dimensional Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **46**, p. 2695, 1992.
- [13] Maris, P. “*Confinement and Complex Singularities in Three-Dimensional QED*”, Phys. Rev. D **52**, p. 6087, 1995.
- [14] Bashir, A. *et al.* “*Confinement and Dynamical Chiral Symmetry Breaking in QED_3* ”, Phys. Rev. C **78**, p. 055201, 2008.
- [15] Gusynin, V. P.; Sharapov, S. G.; Carbotte, J. P. “*AC Conductivity of Graphene: From Tight-Binding Model to 2+1-Dimensional Quantum Electrodynamics*”, Int. J. Mod. Phys. **B21**, p. 4611, 2007.
- [16] Luk’yanchuk, I. A.; Kopelevich, Y. “*Dirac and Normal Fermions in Graphite and Graphene: Implications of the Quantum Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **97**, p. 256801, 2006.
- [17] Kim, K. S. *et al.* “*Coexisting Massive and Massless Dirac Fermions in Symmetry-Broken Bilayer Graphene*”, Nature Materials **12**, p. 887, 2013.
- [18] Khveshchenko, D. V. “*Massive Dirac Fermions in Single-Layer Graphene*”, J. Phys.: Condens. Matter **21**, p. 075303, 2009.
- [19] Hatsugai, Y.; Kohmoto, M.; Wu, Y.-S. *Hidden Massive Dirac Fermions in Effective Field Theory for Integral Quantum Hall Transitions*, Phys. Rev. **B54**, p. 4898, 1996.
- [20] Raya, A.; Reyes, E. D. “*Massive Dirac Fermions and the Zero Field Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, p. 355401, 2008.
- [21] Acharya, R.; Swamy, P. N. “*Quantum Hall Effect in 2+1 Quantum Electrodynamics*”, Il Nuovo Cimento **B107**, p. 351, 1992.
- [22] Acharya, R.; Swamy, P. N. “*Relativistic QED in (2+1)-Dimensional Space: The Integer and Fractional Quantized Hall Effects*”, Int. J. Mod. Phys. A **09**, p. 861, 1994.

- [23] Kubo, R. “*Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I: General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems*”, J. Phys. Soc. Jpn. **12**, p. 570, 1957.
- [24] Imai, N. *et al.* “*Field Theory in a Strong Magnetic Field and the Quantum Hall Effect: Integer Hall Effect*”, Phys. Rev. B **42**, p. 10610, 1990.
- [25] Coleman, S.; Hill, B. “*No More Corrections to the Topological Mass Term in QED₃*”, Phys. Lett. **B159**, p. 184, 1985.
- [26] Kostelecký, V. A.; Lane, C. D.; Pickering, G. M. “*One-Loop Renormalization of Lorentz-Violating Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **65**, p. 056006, 2002.
- [27] Colladay, D.; McDonald, P. “*One-Loop Renormalization of QCD with Lorentz Violation*”, Phys. Rev. D **77**, p. 085006, 2008.
- [28] Novozhilov, Y. V. “*Introduction to Elementary Particle Theory*”. Pergamon Press, 1975.
- [29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. “*Quantum Electrodynamics*”. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.
- [30] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Field Quantization*”. Springer-Verlag, 1996.
- [31] Itzykson, I.; Zuber, J. “*Quantum Field Theory*”. McGraw-Hill, 1985.
- [32] Fernandes, G. A. M. A. “*Representações Spinoriais para o Grupo de Lorentz e Equações de Onda Relativísticas*”. Dissertação de mestrado, UFSC, 2012.
- [33] Greenberg, O. W. “*CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance*”, Phys. Rev. Lett. **89**, 2002.
- [34] Khare, A. “*Fractional Statistics and Quantum Theory*”. Segunda Edição. World Scientific, 2005.
- [35] Fradkin, E. “*Field Theories of Condensed Matter Physics*”. Segunda Edição. Cambridge University Press, 2013.
- [36] Shimizu, K. “*C, P and T Transformations in Higher Dimensions*”, Prog. Theor. Phys. **74**, p. 610, 1985.

[37] Anguiano, Ma. de J.; Bashir, A. “*Fermions in Odd Space-Time Dimensions: Back to Basics*”, *Few-Body Systems* **37**, p. 71, 2005.

[38] Avron, Y.; Seiler, R.; Shapiro, B. “*Generic Properties of Quantum Hall Hamiltonians for Finite Systems*”, *Nuc. Phys.* **B265**, p. 364, 1986.

[39] Schwartz, M. “*Quantum Field Theory and the Standard Model*”. Cambridge University Press, 2014.

[40] Mandl, F.; Shaw, G. “*Quantum Field Theory*”. John Wiley and Sons, 1984.

[41] Greiner, W.; Reinhardt, J. “*Quantum Electrodynamics*”. Terceira Edição. Springer-Verlag, 2003.

[42] Weinberg, S. “*The Quantum Theory of Fields: Foundations*”. Volume Um. Cambridge University Press, 1995.

[43] Di Giuseppe, A. “*Metrology and Physical Constants*”, IOS Press, 2013.

[44] von Klitzing, K.; Dorda, G.; Pepper, M. “*New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, p. 494, 1980.

[45] Tsui, D. C.; Stormer, H. L.; Gossard, A. C. “*Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, p. 1559, 1982.

[46] Laughlin, R. B. “*Anomalous Quantum Hall Effect: an Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*”, *Phys. Rev. Lett.* **50**, p. 1395, 1983.

[47] Leitner, M. “*Zero-field Hall effect in (2+1)-Dimensional QED*”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **12**, p. 475, 2008.

[48] Halperin, B. I.; Lee, P. A.; Read, N. “*Theory of the Half-Filled Landau Level*”, *Phys. Rev.* **B47**, p. 7312, 1993.

[49] Read, N. “*Theory of the Half-Filled Landau Level*”, arXiv: cond-mat/9501090.

[50] Haldane, F. D. M. “*Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly”*”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 2015, 1988.

- [51] Frölich, J.; Kerler, T. “*Universality in Quantum Hall Systems*”, Nuc. Phys. **B354**, p. 369, 1991.
- [52] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B.; Laloë, F. “*Quantum Mechanics*”. Volume Um. John Wiley and Sons, 2005.
- [53] Penin, A. A. “*Quantum Hall Effect in Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. B **79**, p. 113303, 2009.
- [54] Beneventano, C. G.; Santangelo, E. M. “*The Finite-Temperature Relativistic Landau Problem and the Relativistic Quantum Hall Effect*”, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, p. 7457, 2006.
- [55] Smirnov, A. V. “*Evaluating Feynman Integrals*”. Springer-Verlag, 2004.
- [56] Bollini, C. G.; Giambiagi, J.J. “*Dimensional Renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter*”, Nuovo Cim. **12B**, p.20, 1972.
- [57] t’Hooft, G.; Veltman, M. “*Regularization and Renormalization of Gauge Fields*”, Nucl. Phys. B **44**, p.189, 1972.
- [58] Bonneau, G.; Tomazelli, J. L.; Costa, L. C. “*Vacuum Polarization Effects in the Lorentz and PCT Violating Electrodynamics*”, Int. J. Theor. Phys. **47**, p. 1764, 2005.
- [59] Costa, L. C. “*Estudo da Violação das Simetrias de Lorentz e CPT na Eletrodinâmica Quântica*”. Tese de doutorado, IFT, 2004.
- [60] Kostelecký, V. A.; Mewes, M. “*Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **66**, p. 056005, 2002.
- [61] Coleman, S; Glashow, S. L. “*High-Energy Tests of Lorentz Invariance*”, Phys. Rev. D **59**, p. 116008, 1999.
- [62] Dunne, G. V. “*Topological Aspects of Low Dimensional Systems*”, Les Houches - Ecole d’Ete de Physique Theorique, **69**, p. 177-263. Springer, 1999.
- [63] d’Inverno, R. “*Introducing Einstein’s Relativity*”. Oxford University Press, 1995.
- [64] Bloch, F.; Nordsieck, A. “*Note on the Radiation Field of the Electron*”, Phys. Rev. **52**, p. 54, 1937.

[65] Gates, S. J.; Grisaru, M.; Rocek, M.; Siegel, W. “*Superspace*”. Benjamin-Cummings, 1983.

[67] Chen, W. F.; Kunstatter, G. “*Constraint from Lamb Shift and Anomalous Magnetic Moment on Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Quantum Electrodynamics*”, Phys. Rev. D **62**, p. 105029, 2000.

[68] Butkov, E. “*Física Matemática*”. Editora LTC, 1988.

[69] Goswami, P.; Tewari, S. “*Axionic Field Theory of (3+1)-Dimensional Weyl Semi-Metals*”, Phys. Rev. B **88**, p. 245107, 2013.

[70] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M.; Pitaevskii, L. P. “*Electrodynamics of Continuous Media*”. Segunda Edição, Butterworth-Heinemann, 1984.

[71] Tomazelli, J. L.; Pimentel, B. M. “*The Green’s Function in the Bloch-Nordsieck Model of QED₃*”, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **20**, p. 845, 1994.

[72] Bogoliubov, N. N.; D. V. Shirkov. “*Introduction to the Theory of Quantized Fields*”. Interscience Publishers, 1959.

[73] Fock, W. A. “*Proper Time in Classical and Quantum Mechanics*”, Physik Z. Sowjetunion **12**, p. 404, 1937.

[74] Bjorken, J. D.; Drell, S. D. “*Relativistic Quantum Mechanics*”. McGraw-Hill, 1964.

[75] Sakurai, J. J. “*Advanced Quantum Mechanics*”. Addison-Wesley, 1967.

[76] Miransky V. A.; Shovkovy I. A. “*Quantum Field Theory in a Magnetic Field: From Quantum Chromodynamics to Graphene and Dirac Semimetals*”, arxiv 1503.00732v2.

[77] Borges, L. H. C.; Dias, A. G.; Ferrari, A. F.; Nascimento, J. R.; Petrov, A. Yu. “*Generation of Axionlike Couplings via Quantum Corrections in a Lorentz-Violating Background*”, Phys. Rev. D **89**, p. 045005, 2014.

[78] Gorbar, E. V.; Gusynin, V. P.; Miransky, V. A. “*Dynamical Chiral Symmetry Breaking on a Brane in Reduced QED*”, Phys. Rev. D **64**, p. 105028, 2001.

[79] Gorbar, E. V.; Gusynin, V. P.; Miransky, V. A.; Shovkovy, I. A. “*Magnetic Field Driven Metal-Insulator Phase Transition in Planar Systems*”, Phys. Rev. B **66**, p. 045108, 2002.

[80] Gusynin, V. P.; Miransky, V. A.; Sharapov, S. G.; Shovkovy, I. A. “*Excitonic Gap, Phase Transition, and Quantum Hall Effect in Graphene*”, Phys. Rev. B **74**, p. 195429, 2006.

[81] Kotikov, A. V.; Teber, S. “*Two-Loop Fermion Self-Energy in Reduced Quantum Electrodynamics and Application to the Ultrarelativistic Limit of Graphene*”, Phys. Rev. D **89**, p. 065038, 2014.