

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

Talita Cristiane Dal Santo Neves

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA ANALÍTICA  
DE CÁLCULO DE RELUTÂNCIAS MAGNÉTICAS PARA  
ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS**

Florianópolis  
2017



Talita Cristiane Dal Santo Neves

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA ANALÍTICA  
DE CÁLCULO DE RELUTÂNCIAS MAGNÉTICAS PARA  
ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. João Pedro Assumpção Bastos.

Coorientador: Prof. Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz.

Florianópolis  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária  
da UFSC.

Dal Santo Neves, Talita Cristiane

Desenvolvimento de uma metodologia analítica de cálculo de relutâncias magnéticas para análise de dispositivos eletromagnéticos / Talita Cristiane Dal Santo Neves ; orientador, João Pedro Assumpção Bastos, coorientador, Mauricio Valencia Ferreira da Luz, 2017.

178 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Relutância magnética equivalente. 3. Circuito equivalente magnético. 4. Máquinas elétricas. I. Assumpção Bastos, João Pedro. II. Ferreira da Luz, Mauricio Valencia. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Talita Cristiane Dal Santo Neves

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA ANALÍTICA  
DE CÁLCULO DE RELUTÂNCIAS MAGNÉTICAS PARA  
ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Jean Viane Leite, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Orlando José Antunes, Dr.  
Instituto Federal de Santa Catarina



Este trabalho é dedicado à minha querida mãe, Adelaide Dal Santo por todo carinho, dedicação e principalmente amor durante todos esses anos da minha formação pessoal e profissional.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a minha mãe, por todo o amor que expressa por mim desde pequena, por ter me ajudado neste longo caminho. Pois com sua força, amor, carinho, compreensão e apoio é que consegui alcançar este objetivo que sonhamos juntas. Obrigada por sempre ter proporcionado as melhores condições para os meus estudos e para a minha vida, possibilitando esta conquista. Amo eternamente a Senhora.

À Deus por ter me dado uma mente criativa e por me dar saúde para que eu pudesse chegar ao fim desta jornada. Sem isso, com certeza nada teria sido feito.

Aos Professores Assumpção e Maurício por me proporem este tema de trabalho e me ajudarem com suas valorosas informações, a solucionar os problemas que foram surgindo durante o desenvolvimento deste trabalho. E esse apoio e orientação foram essenciais à realização desta dissertação.

Agradeço aos demais professores que contribuíram para a minha formação academia e profissional, pois sem uma base sólida não seria possível construir uma edificação firme.

Ao CNPq pelo suporte financeiro durante esses dois anos de mestrado, na Universidade Federal de Santa Catarina.

Agradeço aos meus amigos e colegas do GRUCAD por dividirem bons momentos de amizade e aprendizado comigo. Aos meus amigos e familiares que estiveram junto comigo nesta caminhada, por todos os momentos de alegria vividos. Obrigado.



A menos que modifiquemos à nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.

(Albert Einstein)



## RESUMO

O presente trabalho apresenta o estudo, desenvolvimento e implantação de um método de circuitos equivalentes magnéticos para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos. A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste método busca particionar o campo magnético do dispositivo eletromagnético em configurações de fluxo que formam as relutâncias magnéticas do circuito equivalente magnético. O presente método será desenvolvido buscando-se boa precisão na representação de cada configuração de fluxo e do dispositivo como um todo. Ao mesmo tempo, procura-se não utilizar cálculos demasiadamente complexos que demandem uma ferramenta computacional para a sua solução e que demande muito tempo. Ou seja, os cálculos e a solução do circuito devem ser plausíveis de serem realizados analiticamente. No intuito de avaliar a aplicabilidade do método desenvolvido será realizado o estudo das fórmulas analíticas aqui desenvolvidas para o cálculo da relutância magnética de cada configuração de fluxo. Utiliza-se de análises teóricas do fenômeno físico em questão, de técnicas matemáticas e será efetuada a comparação com resultados obtidos para cada configuração de fluxo através do método de elementos finitos. Após o problema ser desenvolvido matematicamente e averiguado a adequação de cada fórmula analítica para a representação da relutância magnética, é então aplicada a metodologia à dispositivos eletromagnéticos. Finalmente, para analisar a eficácia da metodologia proposta neste trabalho, será utilizado o software EFCAD para cálculo de campos eletromagnéticos baseado no método de elementos finitos para fim de comparação entre os resultados obtidos pelo método proposto e pela metodologia clássica para os dispositivos eletromagnéticos completos. Utilizou-se referência para várias relutâncias equivalentes e devido à complexidade dos dispositivos aqui calculados, expressões de relutância ao final foram também propostas.

**Palavras-chave:** Relutância magnética equivalente. Circuito equivalente magnético. Máquinas elétricas.



## ABSTRACT

This work presents the study, development and implementation of a magnetic equivalent circuits method for the modeling of electromagnetic devices. The methodology is based on the partition of the magnetic field of the into flux configurations forming the magnetic reluctance of the magnetic equivalent circuit. The present work is developed on the way of obtaining good precision for the representation of each flow configuration and of the whole device. At the same time, we try to avoid the use of complex calculations requiring a computational cost in terms of timing. The calculation and the solution of the circuit must be plausible to be performed analytically. In order to evaluate the applicability of the developed method we carried out the study of analytical formulas developed here to calculate the magnetic reluctance of each flow configuration. Theoretical approaches of the physical phenomenon in question, are carried out and the results obtained for each flow configuration through the finite element method is used for comparisons. Once the problem is developed and checked mathematically, the methodology is applied to electromagnetic devices. Finally, in order to analyze the effectiveness of the methodology proposed in this work, the EFCAD software for the calculation of electromagnetic fields based on the finite element method is used to compare the results obtained by the proposed method and the classical methodology for complete electromagnetic devices. References were used for several equivalent reluctances. Due to the complexity of the devices calculated here, some expressions of reluctance were also proposed at the final part of this work.

**keywords:** Equivalent magnetic reluctance. Magnetic equivalent circuit. Electric machines



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Circuito magnético: aplicação da Lei de Ampère .....	30
Figura 1.2 Circuito magnético: aplicação do método de circuito equivalente magnético.....	31
Figura 1.3 Circuito magnético: aplicação do método de redes de relutância.....	31
Figura 1.4 Circuito magnético: Aplicação de método de elementos finitos .....	32
Figura 1.5 Organização da metodologia do trabalho.....	36
Figura 1.6 Tubo de Fluxo Magnético.....	42
Figura 1.7 Comparação Entre Circuitos Elétricos e Magnéticos.....	46
Figura 1.8 Equivalência entre ímãs permanentes e bobinas de corrente	47
Figura 1.9 Circuito magnético em análise.....	49
Figura 1.10 Circuito Magnético equivalente.....	50
Figura 1.11 Ponto de Operação de Um Ímã. ....	51
Figura 2.1 Representação do domínio de estudo e sua fronteira para o modelo magnetostático. ....	57
Figura 3.1 Superfícies planas paralelas. ....	66
Figura 3.2 Configuração de fluxo: Faces planas e paralelas. ....	67
Figura 3.3 Configuração de fluxo em anel. ....	68
Figura 3.4 Configuração de fluxo: Anel.....	69
Figura 3.5 Configuração de fluxo: Cilindro semicircular.....	70
Figura 3.6 Configuração de fluxo: Quadrantes esféricos. ....	71
Figura 3.7 Configuração de fluxo: Quadrante de casca esférica. ....	72
Figura 4.1 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do comprimento das linhas de fluxo..	76
Figura 4.2 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da área de cálculo. ....	77
Figura 4.3 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da espessura do anel de fluxo. ....	78
Figura 4.4 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do anel de fluxo. ....	79
Figura 4.5 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do ângulo do anel de fluxo. ....	80
Figura 4.6 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do semicírculo. ....	82
Figura 4.7 Configuração de fluxo: Semicírculo de fluxo. ....	83
Figura 4.8 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do raio do semicírculo. ....	84

Figura 4.9 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do ângulo do semicírculo. ....	85
Figura 4.10 Configuração de fluxo: quarto de elipse. ....	86
Figura 4.11 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da geometria da elipse. ....	87
Figura 4.12 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do quadrante esférico ....	89
Figura 4.13 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da espessura da casca esférica. ....	90
Figura 4.14 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro da casca esférica. ....	91
Figura 5.1 Alto falante em corte. ....	94
Figura 5.2 Dimensões do dispositivo. ....	95
Figura 5.3 Esquemático para aplicação da Lei de Ampère e Lei de Gauss. ....	96
Figura 5.4 Circuito equivalente com permeabilidade do ferro infinita e sem dispersão. ....	101
Figura 5.5 Divisão das relutâncias no entreferro. ....	103
Figura 5.6 Circuito equivalente com permeabilidade do ferro infinita e considerando o fluxo de dispersão. ....	105
Figura 5.7 Divisão das relutâncias no dispositivo completo. ....	109
Figura 5.8 Circuito equivalente completo. ....	112
Figura 5.9 Curva de permeabilidade magnética levantada. ....	115
Figura 5.10 Simulação alto falante com permeabilidade do ferro linear. ....	121
Figura 5.11 Simulação Alto falante com permeabilidade do ferro não linear. ....	122
Figura 5.12 Comparativo entre os valores de indução analíticos e numéricos, caso linear. ....	125
Figura 5.13 Comparativo entre os valores de indução analíticos e numéricos, caso não linear. ....	126
Figura 6.1 Dimensões do dispositivo. ....	130
Figura 6.2 Carta de campo magnético e partição das relutâncias do dispositivo. ....	132
Figura 6.3 Circuito equivalente magnético para o campo magnético gerado pelo indutor. ....	140
Figura 6.4 Circuito equivalente magnético para o campo magnético gerado pelo ímã permanente e pelas correntes nas bobinas. ....	146
Figura 6.5 Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente. ....	152

Figura 6.6 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente.....	153
Figura 6.7 Simulação considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente .....	154
Figura 6.8 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente.....	155
Figura 6.9 Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases.	157
Figura 6.10 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases .....	158
Figura 6.11 Simulação da distribuição de fluxo magnético considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases .....	160
Figura 6.12 Comparativo da indução entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases.....	161



## LISTA DE QUADROS

Tabela 5.1 Dimensões do dispositivo.....	95
Tabela 5.2 Valores numéricos Seção 5.5 .....	101
Tabela 5.3 Valores numéricos das relutâncias de dispersão.....	106
Tabela 5.4 Valores numéricos das relutâncias do dispositivo calculadas analiticamente. ....	112
Tabela 5.5 Valores numéricos das relutâncias do dispositivo calculadas analiticamente com variação da permeabilidade magnética. ....	118
Tabela 5.6 Permeabilidades relativas do ferro calculadas.....	119
Tabela 5.7 Comparativo do valor da indução magnética, Seções 5.4, 5.5, 5.6 e numéricos. ....	123
Tabela 6.1 Valores das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e linear.....	141
Tabela 6.2 Valores das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e não linear .....	143
Tabela 6.3 Valores numéricos das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e linear com o campo magnético gerado pelo ímã permanente e pelas correntes nas bobinas.....	147
Tabela 6.4 Valores numéricos das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e não linear com o campo magnético gerado pelo ímã e pela armadura.....	149
Tabela 6.5 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente .....	153
Tabela 6.6 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente.....	156
Tabela 6.7 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes elétricas nas três fases .....	159
Tabela 6.8 Comparativo dos valores das induções numéricos entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases .....	162



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

EFCAD – Electromagnetic Field Computer Aided Design

MATLAB – Matrix Laboratory

MEC – Magnetic Equivalent Circuit



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>29</b>
1.1	RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA DO TEMA.....	29
1.2	OBJETIVOS E METODOLOGIA PARA A REALIZAÇÃO DO TRABALHO .....	34
1.3	ESTADO DA ARTE.....	36
1.4	ELETROMAGNETISMO .....	40
1.5	A RELUTÂNCIA MAGNÉTICA .....	42
1.6	CIRCUITOS EQUIVALENTES MAGNÉTICOS .....	44
1.7	REPRESENTAÇÃO DO ÍMÃ EM CIRCUITOS ELÉTRICOS .....	46
<b>1.7.1</b>	<b>Representação do ímã permanente por fonte de tensão.....</b>	<b>46</b>
<b>1.7.2</b>	<b>Representação do ímã permanente por fonte de corrente.....</b>	<b>49</b>
1.8	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	52
1.9	CONCLUSÃO .....	53
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>55</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	55
2.2	MODELO MAGNETOSTÁTICO.....	55
2.3	A FORMULAÇÃO EM POTÊNCIAL ESCALAR.....	57
2.4	A FORMULAÇÃO EM POTENCIAL VETOR .....	58
2.5	FORMULAÇÕES FRACAS .....	59
2.6	O METODO DE ELEMENTOS FINITOS .....	61
2.7	CONCLUSÃO .....	63
<b>3</b>	<b>RELUTÂNCIA.....</b>	<b>65</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	65
3.2	FÓRMULAS ANALÍTICAS PARA O CÁLCULO DA RELUTÂNCIA EM CONFIGURAÇÕES ESPECÍFICAS DE FLUXO .....	65
<b>3.2.1</b>	<b>Superfícies planas e paralelas.....</b>	<b>65</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Anel de fluxo magnético.....</b>	<b>67</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Cilindro semicircular.....</b>	<b>70</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Quadrante esférico.....</b>	<b>71</b>

3.2.5	Quadrante de casca esférica.....	72
3.2.6	Semicírculo e quarto de elipse de fluxo.....	73
3.3	CONCLUSÃO.....	73
<b>4</b>	<b>RELUTÂNCIAS SIMULADAS E DESENVOLVIDAS.....</b>	<b>75</b>
4.1	INTRODUÇÃO.....	75
4.2	CONFIGURAÇÕES DE FLUXO COM SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO E AXISIMETRIA .....	75
4.2.1	Superfícies planas e paralelas.....	75
4.2.2	Anel de fluxo magnético.....	78
4.2.3	Cilindro semicircular.....	81
4.2.4	Semicírculo de fluxo.....	82
4.2.5	Quarto de elipse de fluxo.....	85
4.2.6	Aplicação das configurações de fluxo com simetria de translação para os casos axissimétricos.....	87
4.3	CONFIGURAÇÕES DE FLUXO TRIDIMENSIONAIS .....	88
4.3.1	Quadrante esférico.....	88
4.3.2	Quadrante de casca esférica.....	90
4.4	CONCLUSÃO.....	92
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO DO MODELO DE RELUTÂNCIA AO ALTO FALANTE.....</b>	<b>93</b>
5.1	INTRODUÇÃO.....	93
5.2	PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO .....	93
5.3	DISPOSITIVO EM ANÁLISE.....	94
5.4	CÁLCULO ANÁLITICO PELA LEI DE AMPÈRE E PELA CONSERVAÇÃO DE FLUXO.....	96
5.5	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO INFINITA E SEM DISPERSÃO .....	99
5.6	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO INFINITA E CONSIDERANDO OS FLUXOS DISPERSOS .....	102

5.7	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E CONSTANTE E CONSIDERANDO A DISPERSÃO DO FLUXO .....	107
5.8	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO NÃO LINEAR E CONSIDERANDO O FLUXO DE DISPERSÃO.....	114
<b>5.8.1</b>	<b>Representação da permeabilidade magnética não linear no cálculo analítico.....</b>	<b>114</b>
<b>5.8.2</b>	<b>Circuito Equivalente magnético do dispositivo.....</b>	<b>116</b>
5.9	SIMULAÇÕES E COMPARAÇÕES ENTRE AS CONFIGURAÇÕES DO CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO ESTUDADAS COM OS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES .....	120
<b>5.9.1</b>	<b>Comparação entre os valores da indução magnética no entreferro obtidos analiticamente e numericamente, com a permeabilidade do ferro infinita.....</b>	<b>123</b>
<b>5.9.2</b>	<b>Comparação entre os resultados obtidos analiticamente, através do circuito equivalente magnético com permeabilidade do ferro linear e com dispersão, e numericamente.....</b>	<b>124</b>
<b>5.9.3</b>	<b>Comparação entre os resultados numéricos e analíticos com permeabilidade não linear e dispersão.....</b>	<b>125</b>
5.10	CONCLUSÃO .....	127
<b>6</b>	<b>APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RELUTÂNCIA EM UM MOTOR SINCRONO.....</b>	<b>129</b>
6.1	INTRODUÇÃO .....	129
6.2	O MOTOR .....	129
6.3	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E LINEAR, E COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE.....	131

6.4	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E NÃO LINEAR E COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE .....	143
6.5	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E LINEAR, E COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE E PELAS CORRENTES NAS TRÊS FASES .....	145
6.6	CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E NÃO LINEAR, COM O CAMPO MAGNÉTICO DO ÍMÃ PERMANENTE E DAS BOBINAS .....	148
6.7	COMPARAÇÕES ENTRE AS CONFIGURAÇÕES DO CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM AS SIMULAÇÕES EM ELEMENTOS FINITOS.....	151
6.7.1	<b>Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e o ímã permanente e comparação com o circuito equivalente magnético proposto.....</b>	<b>151</b>
6.7.2	<b>Simulação com a permeabilidade do ferro não linear e com o ímã permanente, comparação com o circuito equivalente magnético.....</b>	<b>154</b>
6.7.3	<b>Simulação com a permeabilidade do ferro linear e com o ímã permanente e as correntes nas três fases e comparação com o circuito equivalente magnético.....</b>	<b>156</b>
6.7.4	<b>Simulação considerando a permeabilidade do ferro não linear e com o ímã permanente e as correntes nas três fases e comparação com o circuito equivalente magnético.....</b>	<b>159</b>
6.8	CONCLUSÃO.....	162
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	165
	REFERÊNCIAS.....	169
	APÊNDICE A.....	175

# 1 INTRODUÇÃO

Este capítulo ilustra a importância do problema da representação de um dispositivo eletromagnético através de seu circuito equivalente magnético. Primeiramente, são apresentadas as razões pelas quais torna-se importante desenvolver técnicas para a representação de dispositivos eletromagnéticos em circuitos equivalente magnéticos e os motivos pelos quais tal tema será estudado neste trabalho.

A seguir são abordados os objetivos e a metodologia utilizada para a realização deste trabalho, e então, é feita uma apresentação da revisão bibliográfica dos trabalhos existentes no meio científico que são correlacionados ao tema em questão.

Em sequência, são apresentadas as equações de Maxwell, e as relações constitutivas que complementam a representação matemática de problemas eletromagnéticos. A partir dessas equações, chegam-se as “*Leis de Ampère* e de *Faraday*” que permitem definir o conceito de relutância magnética e de tubo de fluxo magnético.

Por fim, ilustra-se o método de circuitos equivalentes magnéticos, e a representação de um ímã permanente por intermédio da equivalência por bobina de corrente e por sua representação através de uma fonte de corrente no circuito equivalente magnético. Finalmente, apresentamos a organização desta dissertação.

## 1.1 RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA DO TEMA

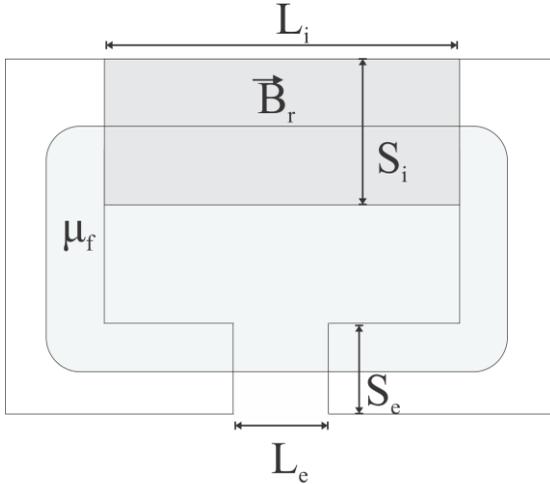
No desenvolvimento do projeto de dispositivos eletromagnéticos é de fundamental importância calcular a indução magnética em determinados pontos do dispositivo. Neste intuito, pode-se lançar mão de quatro metodologias para este fim: cálculos analíticos, análise por circuito equivalente magnético (MEC), redes de relutâncias e análise por elementos finitos.

A primeira metodologia, cálculos analíticos, exige do projetista uma experiência prévia para determinar as simplificações que poderão ser feitas sem causar prejuízos ao modelo analítico que representa o dispositivo real que se busca modelar ou desenvolver. Mesmo considerando-se que o projetista tenha experiência suficiente para evitar tais tarefas, deve-se levar em conta que dependendo do dispositivo em análise ou projeto, serão feitas simplificações que poderão acarretar em perda de precisão que, dependendo do caso, inviabilizará a aplicação desta metodologia.

Na Figura 1.1, por exemplo, tem-se a aplicação do método de cálculo analítico para a solução do dispositivo ilustrado, na qual as

equações analíticas que modelam matematicamente este dispositivo estão apresentadas nas Equações (1.1), (1.2) e (1.3).

Figura 1.1 Circuito magnético: aplicação da Lei de Ampère



Fonte: Próprio autor.

$$H_i L_i + h_f L_f + H_e L_e = 0 \quad (1.1)$$

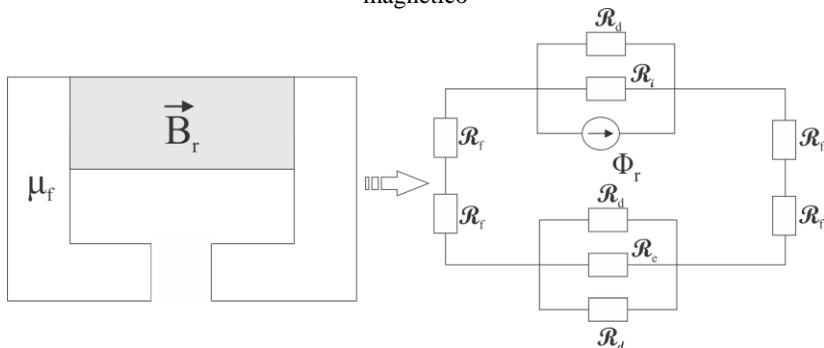
$$\phi_i = \phi_f = \phi_e \quad (1.2)$$

$$B_i = \mu_0 H_i + B_r \quad (1.3)$$

O segundo método que o projetista pode lançar mão, é o método do circuito equivalente magnético. Na literatura encontram-se vários trabalhos que utilizam circuitos equivalentes magnéticos para a representação de dispositivos magnéticos.

Este método baseia-se na representação do dispositivo magnético em um circuito magnético similar à um circuito elétrico, mas com parâmetros referentes aos fenômenos eletromagnéticos. A Figura 1.2 ilustra como é aplicado este método à um dispositivo eletromagnético.

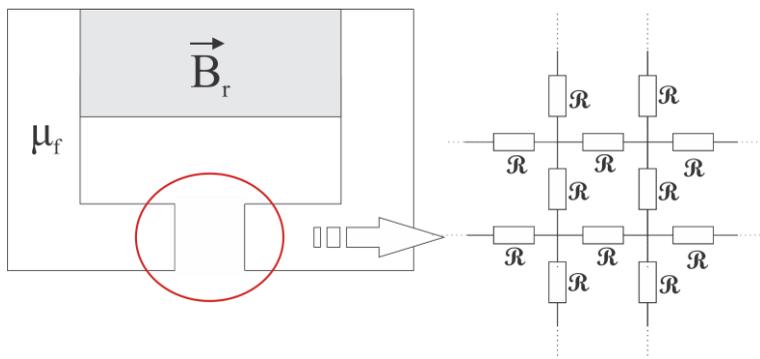
Figura 1.2 Circuito magnético: aplicação do método de circuito equivalente magnético



Fonte: Próprio autor.

No intuito de melhorar a modelagem dos problemas eletromagnéticos, o método de circuito equivalente magnético foi estendido a um patamar que pode ser considerado quase diferencial, conhecido como rede de relutâncias. Este é constituído por um número de relutâncias elevado e que, por exemplo, num entreferro, vai além de uma simples região, como habitualmente se considera numa aproximação mais simplificada.

Figura 1.3 Circuito magnético: aplicação do método de redes de relutância



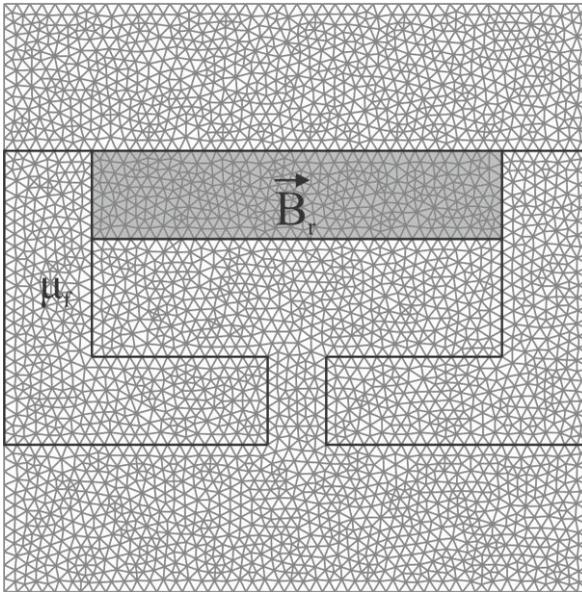
Fonte: Próprio autor.

O terceiro método, de redes de relutância, conforme está exemplificado na Figura 1.3, permite uma melhor representação do fenômeno eletromagnético, e principalmente da representação do fluxo disperso. Entretanto, é necessária a aplicação de métodos numéricos ou

mesmo de um software adequado à aplicação e solução deste problema. Observa-se ainda, que a grande maioria destes softwares são comerciais, dificultando sua aplicação principalmente em estudos acadêmicos.

Enfim, o quarto método pode ser numérico. Trata-se, por exemplo, do método por elementos finitos, conforme está ilustrado na Figura 1.4. Neste caso, o profissional necessitará além do conhecimento prévio da metodologia empregada, dispor de uma ferramenta para a realização do desenho do dispositivo, para criação da malha de elementos finitos e por fim, da ferramenta que realizará o cálculo numérico.

Figura 1.4 Circuito magnético: Aplicação de método de elementos finitos



Fonte: Próprio autor.

Este método, apesar de possuir muito menos simplificações e ser mais preciso que os métodos anteriores, deve ser utilizado com devida atenção, pois, dependendo do dispositivo que se planeja analisar ou projetar, o esforço computacional é bem maior.

No caso da necessidade de análise ou projeto em três dimensões, ainda podemos citar as peculiaridades de se executar um cálculo em 3D em elementos finitos, como a dificuldade de geração de malhas em

determinadas geometrias. Ao fim, e mais importante, temos o tempo de cálculo que é um dos principais pontos a se observar na aplicação do método de elementos finitos em 3D.

Em casos como o projeto de dispositivos eletromagnéticos, onde há necessidade de se analisar diversos dispositivos de estruturas parecidas, há então a necessidade de se redesenhar cada nova estrutura do dispositivo para cada cálculo. Tal fato torna a aplicação do método de elementos finitos trabalhosa, demandando muito tempo ao projetista.

Já quando se está trabalhando com otimização de dispositivos a aplicação de elementos finitos é ainda mais demorada, visto que nesses casos, a cada iteração do cálculo de otimização há a necessidade de se avaliar uma nova geometria. Assim, para cada nova geometria é necessário redesenhar o dispositivo, remalhar a estrutura e realizar o cálculo novamente. Isto acarreta um processo lento para a otimização de dispositivos.

Na literatura encontram-se vários trabalhos referentes utilizando circuitos equivalentes magnéticos para a representação de dispositivos eletromagnético. Entretanto, uma boa parte desta literatura está voltada para método e soluções numéricas.

A pequena parte dos trabalhos que apresentam um desenvolvimento para a obtenção de circuitos equivalentes magnéticos com elementos agrupados conforme a configuração de fluxo, utiliza fórmulas prontas extraídas de outras bibliografias ou as desenvolve através da teoria de tubos de fluxo, e são pouquíssimos os trabalhos que avaliam a desenvoltura do método. A maior parte dos trabalhos utiliza o método de circuito equivalente magnético para a fase inicial do projeto ou em processos de otimização de dispositivos.

Outro ponto a ser observado na literatura já existente é com relação à representação do fluxo disperso e da não linearidade da permeabilidade magnética. Esse fenômeno pode ser desconsiderado apenas nos casos onde há pouca dispersão do fluxo principal ou no caso da característica da permeabilidade magnética linear, para dispositivos que operem longe da região de saturação.

Como será visto a seguir, esses efeitos são de grande importância no funcionamento da grande maioria dos dispositivos eletromagnéticos e devem ser considerados em sua modelagem no circuito equivalente magnético.

Por fim, ainda com relação a literatura já existente, foi observado que nenhum dos autores encontrados se preocupou em estudar individualmente a adequação das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância magnética da configuração de fluxo magnético que aqui

busca-se representar. Tal fato ocorre mesmo em literaturas já consagradas como em (ROTTERS, 1970). Contudo, deve-se observar que no período da referência citada o uso do MEF não era comum.

Todavia, tanto em (ROTTERS, 1970) como em outros trabalhos mais recentes, a análise da adequação das fórmulas analíticas aplicadas ao cálculo das relutâncias é realizada através da modelagem e solução do circuito equivalente magnético total. Na maioria dos trabalhos que fazem esta averiguação, esta é realizada através da comparação do valor da indução magnética no entreferro, ou ainda em parâmetros oriundos deste. São escassos os trabalhos científicos publicados que realizam tal verificação.

## 1.2 OBJETIVOS E METODOLOGIA PARA A REALIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho proposto tem por finalidade o estudo do método e da bibliografia desenvolvida até o momento a respeito do método de circuitos equivalentes magnéticos bem como a aplicação do método de circuito equivalente magnético para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos. O método de representar um dispositivo eletromagnético pelo seu circuito equivalente magnético tem como objetivo representar o fenômeno físico eletromagnético através de um circuito semelhante ao circuito elétrico.

No circuito magnético a relutância magnética que o fluxo magnético irá encontrar para passar de um maior potencial magnético para o menor, é equivalente à resistência elétrica que a corrente elétrica encontrará para passar de um maior potencial elétrico para o menor potencial. Através da solução do circuito equivalente magnético, calculam-se parâmetros do dispositivo relevantes a seu estudo e projeto como o valor do fluxo magnético, da indução magnética e do campo magnético em várias regiões do dispositivo por exemplo.

O método do circuito equivalente magnético estudado neste trabalho será desenvolvido buscando-se uma boa precisão na representação de cada configuração de fluxo e do dispositivo como um todo. Ao mesmo tempo, não será necessário desenvolver cálculos que demandem uma ferramenta computacional necessitando de muito tempo de cálculo.

Busca-se desenvolver um método que permita representar um dispositivo eletromagnético em seu circuito equivalente magnético cujos cálculos sejam plausíveis de serem realizados analiticamente. Todavia, como será visto no decorrer do trabalho, tal objetivo só é possível de ser alcançado quando consideramos a permeabilidade magnética linear.

Considerar a permeabilidade magnética linear não é uma hipótese sempre aplicável. Entretanto, esta hipótese é largamente aplicada para se ter uma ideia do valor inicial dos parâmetros físicos do dispositivo, desde que este não opere na região de saturação. Deste modo, no intuito de avaliar a adequação do método desenvolvido à condição real do fenômeno correlacionado, será realizada uma extensão do método proposto neste trabalho ao caso não linear. Para tanto será utilizado um processo iterativo para a solução do método de circuito equivalente magnético.

Partindo do estudo e desenvolvimento das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância de diferentes configurações de fluxo magnético, será realizado um estudo individual de cada fórmula analítica no intuito de averiguar sua aplicabilidade no fenômeno físico em questão.

Após o problema ser desenvolvido matematicamente e averiguado a adequação de cada fórmula analítica para a representação da relutância de cada configuração de fluxo é então aplicada a metodologia desenvolvida a dispositivos completos.

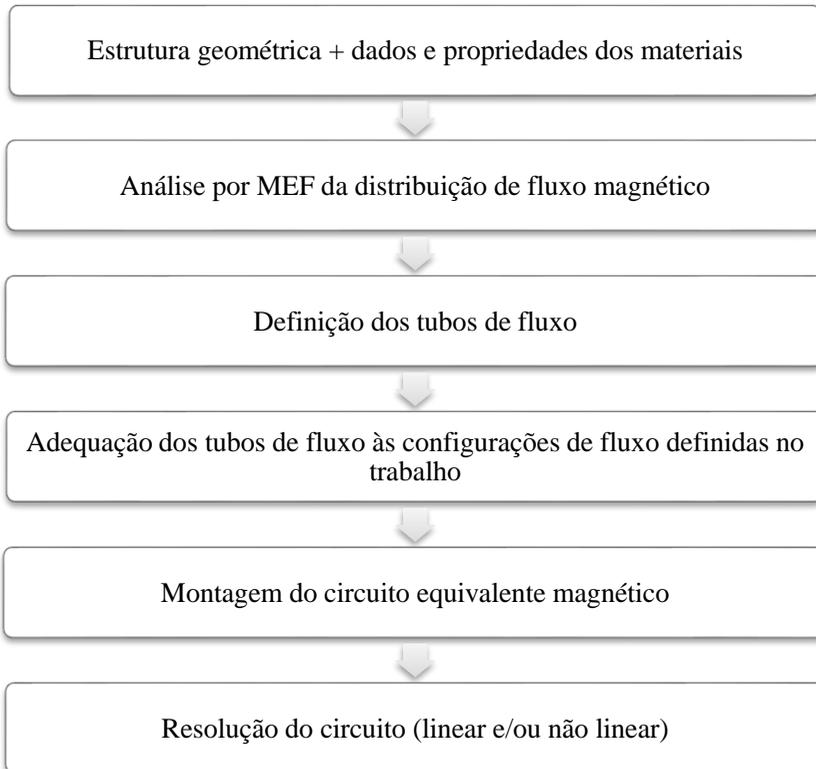
Para a aplicação da metodologia à dispositivos completos será feito um estudo da carta de campo para a determinação das configurações de fluxo magnético mais adequadas a cada região, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 1.5.

A partir de então, pode-se desenvolver o circuito equivalente magnético, e conseqüentemente obter-se as equações do circuito equivalente magnético através das “*Lei de Kirchoff*”, usando a dualidade entre o fenômeno elétrico e magnético.

Após ser modelado matematicamente o dispositivo, o problema é representado na linguagem do software MATLAB, para a solução tanto do problema com a permeabilidade magnética linear quanto no caso não linear. Observa-se que o caso linear foi solucionado através do software matemático apenas por praticidade. Entretanto, nota-se que o problema será desenvolvido de modo que este possa ser solucionado de forma analítica.

Por fim, para analisar a desenvoltura da metodologia proposta neste trabalho será utilizado o software para cálculo de campos eletromagnéticos baseado no método de elementos finitos, EFCAD (Electromagnetic Field Computer Aided Design), tanto para o estudo das configurações de fluxo magnéticas de forma individual como para o estudo do dispositivo completo.

Figura 1.5 Organização da metodologia do trabalho



Fonte: Próprio autor.

### 1.3 ESTADO DA ARTE

O cálculo matemático preciso da relutância de um caminho de fluxo através do ar ou mesmo em outros materiais, exceto em alguns casos especiais, é uma tarefa árdua na prática, e na maioria dos casos demanda um método numérico e tempo de cálculo considerável. Tal fato decorre pois o fluxo magnético não costuma limitar-se a qualquer caminho particular que tem uma lei matemática simples que permite o cálculo de sua relutância.

Assim em (ROTTERS, 1970), está apresentado duas formas de se calcular de maneira analítica relativamente simples, a permeância de um caminho ou tubo de fluxo magnético. Com o objetivo de realizar os cálculos de forma analítica, conforme era necessário na época, o autor

realiza suposições e simplificações sobre os caminhos de fluxo para desenvolver fórmulas analíticas para o cálculo da permeância do caminho de fluxo no ar. O outro método apresentado utiliza um método inteiramente gráfico, normalmente referido como "mapeamento do campo". Desta forma, ambos os métodos apresentados nesta bibliografia são aplicados a vários casos práticos. Entretanto, apenas é considerados o fluxo magnético no ar. Ou seja, a relutância magnética dos materiais que compõem o dispositivo e a não linearidade da permeabilidade magnética dos materiais não são levadas em conta.

A busca pela precisão na representação da relutância de um dispositivo eletromagnético está fundamentada na melhor representação do funcionamento do mesmo. Pode-se chegar a seu circuito equivalente magnético e, conseqüentemente, calcular os demais parâmetros do dispositivo. Porém, representar com precisão o funcionamento de um dispositivo eletromagnético através de seu circuito equivalente magnético sem igualar a complexidade do MEF é um objetivo que vem sendo abordado pela comunidade científica já há algum tempo.

Desde (E. R. LAITHWAITE, 1967), (OSTOVIC, 1989), (CARPENTER, 1968) e (ROTTERS, 1970), os autores ilustram a teoria de circuitos equivalentes magnéticos em comparação com os circuitos elétricos. Até as mais recentes publicações como (TANG, PAULIDES e LOMONOVA, 2015), (ELLOUMI, IBALA, *et al.*, 2015), (PENG, GYSELINCK, *et al.*, 2016), (TAVANA e DINAVAHI, 2016), (LIU e DINAVAHI, 2016), (HAN e CHANG, 2016) e (HANIC, ZARKO e HANIC, 2016), os autores utilizam a modelagem através de circuitos equivalentes magnéticos a dispositivos eletromagnéticos.

Como pode ser visto (YILMAZ e KREIN, 2008), os autores fazem uma revisão da literatura a respeito das capacidades e limitações da análise pelo MEF e através de circuitos magnéticos equivalentes magnéticos para o projeto de máquinas elétricas.

Já em (RASMUSSEN e RITCHIE, 1997), os autores apontam que o método do circuito equivalente magnético é uma técnica que combina a rapidez dos métodos analíticos com a flexibilidade da análise por elementos finitos. Pode ser aplicado em casos estáticos e dinâmicos para estimar os parâmetros como o fluxo magnético, a força magnetomotriz, as correntes e o torque em todas as partes da máquina. Acrescenta que, o método de circuitos equivalentes magnéticos é similar ao método de elementos finitos porém com duas particularidades: a primeira é com relação a número de elementos, que no caso do circuito equivalente magnético é muito menor que no MEF; a segunda, é com relação ao fluxo magnético, que pode passar através de um elemento em

apenas direções pré-definidas no caso do método de circuitos equivalentes magnéticos, enquanto que no MEF a direção do fluxo através de qualquer elemento é um resultado da solução do método.

O método do circuito equivalente magnético tem como base a teoria de tubos de fluxos magnéticos, conforme apresentado na Seção 1.5, onde estes definem as relutâncias do circuito equivalente magnético. Partindo desse princípio, pode-se observar que o número de relutâncias que representam o dispositivo magnético depende diretamente da geometria deste e do tamanho dos tubos de fluxo arbitrados pelo projetista. Assim, observa-se que quanto menores forem os tubos de fluxo mais precisos serão os resultados, especialmente se é considerado a saturação do material (RASMUSSEN e RITCHIE, 1997).

Neste âmbito foram desenvolvidos vários trabalhos, onde a representação da relutância no circuito equivalente magnético tem maior número de elementos para representar a relutância do dispositivo, ou seja, a rede de relutâncias é mais densa como em (OSTOVIC, 1986), (OSTOVIC, 1987), (OSTOVIC, 1988), (OSTOVIC, 1989) e (DERBAS, WILLIAMS, *et al.*, 2009). Passando por (REN, FANG, *et al.*, 2007), (HSIEH e HSU, 2012), (ZHU, Y. PANG, *et al.*, 2005) e (KANO, KOSAKA e MATSUI, 2005). E por fim, chega-se às redes de relutâncias menos densa como as ilustradas em (TANG, PAULIDES e LOMONOVA, 2015), (CHILLET e VOYANT, 2001), (KIM, JANG, *et al.*, 2012) e (KIM, JOO, *et al.*, 2004), conforme serão desenvolvidas neste trabalho.

A seguir tem-se alguns trabalhos que utilizam metodologias na mesma linha que serão aqui apresentados. É importante observar que até o momento nenhum trabalho científico realizou estudos das fórmulas analíticas para o cálculo das relutâncias de forma individual; consideram-se apenas o circuito completo que representa o dispositivo em análise. Tal estudo é importante, pois se cada fórmula analítica para o cálculo da relutância tem sua precisão garantida, espera-se que o circuito equivalente como um todo apresentará uma boa precisão.

Em (LIU, ZHANG, *et al.*, 2011), os autores desenvolvem um circuito equivalente magnético para um motor sensível à voz humana, que leva em consideração tanto o fluxo magnético disperso quanto a saturação do material ferromagnético por se tratar de uma estrutura que necessitava deste nível de detalhamento. O circuito equivalente magnético é desenvolvido no intuito de se estimar a densidade de fluxo magnético no entreferro de interesse. Os autores fazem uma análise da distribuição de fluxo magnético do dispositivo através do MEF e

modelam o circuito magnético equivalente conforme a configuração das linhas de fluxo e do nível de saturação.

Ao fim é realizada uma comparação entre o valor da indução magnética no entreferro calculado através do circuito equivalente magnético, pelo método de elementos finitos e mensurado no dispositivo real. Chega-se por fim a um erro de cálculo pelo método analítico e numérico inferior ao erro de fabricação, montagem e medida do dispositivo real. A aplicação do método de circuito equivalente magnético é largamente aplicada em máquinas elétricas, assim como pode ser observado por exemplo em (RAMINOSO, RASOANARIVO, *et al.*, 2006), (LI, LI e SARLIOGLU, 2015) e (LEE, LEE e LEE, 2015).

No artigo (OKYAY, KHAMESEE e ERKORKMAZ, 2015), os autores utilizam análise por elementos finitos, o método de circuito equivalente magnético ou ambos para avaliar o campo magnético de um atuador de bobina de voz para aplicações de movimento de precisão. O método de circuito equivalente magnético é aplicado para demonstrar a relação entre a distribuição de campo magnético e as variáveis chaves do projeto, enquanto que os resultados principais são obtidos por elementos finitos.

A solução do circuito equivalente magnético permitiu aos autores verificar as geometrias do dispositivo que deveriam ser otimizadas de forma a maximizar seu desempenho através da maximização da aceleração e minimização da dissipação de calor. Deste modo, os autores não viram necessidade de considerar o fluxo disperso no modelo de circuito equivalente magnético. Para o desenvolvimento do circuito equivalente magnético os autores se basearam em (ROTTERS, 1970).

Em (MORI, HOSHINO, *et al.*, 2003), é apresentado um projeto de um atuador de alta precisão através da aplicação da técnica de circuito equivalente magnético para o projeto e otimização do dispositivo. Os resultados através do método de circuito equivalente magnético e experimentais apresentaram um erro de 4%. De modo similar em (MAKAROVIC, LOMONOVA e COMPTER, 2005), a comparação dos resultados com o método de elementos finitos mostra que a análise preditiva do atuador pelo modelo do circuito equivalente magnético proporcionou uma estimativa do campo magnético no entreferro, da força total e do momento do atuador com uma precisão aceitável.

Já em (KIM, KIM, *et al.*, 2013), os autores utilizam-se de um modelo de circuito equivalente magnético desenvolvido por eles (ROTTERS, 1970), para calcular a força dinâmica na análise no domínio

do tempo de um dispositivo de levitação magnética e guiagem. Para obter a interação eletromagnética entre a levitação e a guiagem magnéticas foi modelado e simulado um sistema de controle através do uso das equações dinâmicas e força resultante dos cálculos do circuito equivalente magnético.

Além das contribuições citadas acima, constam nas referências bibliográficas desta dissertação outros artigos e teses que serão estudadas ao longo do desenvolvimento desta dissertação, bem como referências adicionais a serem citadas nos próximos capítulos deste trabalho.

#### 1.4 ELETROMAGNETISMO

As Equações de Maxwell constituem um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem os fenômenos eletromagnéticos e unificam todos os princípios do eletromagnetismo.

As Equações (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7) são as equações que representam o comportamento físico das grandezas eletromagnéticas. Já as Equações (1.8), (1.9) e (1.10) são as chamadas equações de passagem ou constitutivas e ilustram matematicamente o comportamento dos campos vetoriais no meio em que estão inseridos.

A Equação (1.4) modela matematicamente a geração de campo magnético “ $\mathbf{H}$ ”. Logo, temos que uma densidade de corrente de condução “ $\mathbf{J}$ ” e/ou a variação temporal da indução elétrica “ $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ” geram campo magnético rotacional a estas.

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Já os campos elétricos “ $\mathbf{E}$ ” podem ser gerados através da variação temporal da indução magnética “ $\mathbf{B}$ ”. Como pode ser observado na Equação (1.5), o campo elétrico é gerado no sentido rotacional ao sentido oposto ao vetor de variação temporal de indução magnética.

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.5)$$

A Equação (1.6) por sua vez é uma generalização da *Lei de Gauss Magnética*, e é de grande valia na interpretação do comportamento do fluxo magnético, pois afirma que o divergente da indução magnética é nulo e que o fluxo magnético é conservativo.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.6)$$

A *Lei de Gauss Elétrica*, apresentada na Equação (1.7), representa matematicamente o comportamento físico da indução elétrica “ $\mathbf{D}$ ” a partir de uma densidade volumétrica de carga elétrica. Ou seja, fisicamente uma carga elétrica é capaz de gerar um campo elétrico divergente a ela própria.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.7)$$

A reação de um meio em relação à um campo vetorial é modelada pelas relações constitutivas dadas pelas Equações (1.8), (1.9) e (1.10). No caso das Equações (1.8) e (1.9) quanto maior a permeabilidade magnética “ $\mu$ ” ou permissividade elétrica “ $\varepsilon$ ”, mais susceptível o meio se mostra a passagem do fluxo magnético ou elétrico, respectivamente.

A Equação (1.10), também conhecida como *Lei de Ohm* sob forma local, expressa a capacidade de um meio de induzir corrente elétrica na presença de um campo elétrico, sendo esta relacionada com a condutividade elétrica “ $\sigma$ ”.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.10)$$

Aplicando o *Teorema de Stokes* à Equação (1.4) chega-se a Equação (1.11), onde o termo ligado à densidade de corrente representa a corrente por condução, e o termo ligado à variação temporal da indução representa a corrente de deslocamento. Como a corrente de deslocamento é, em geral, ínfima comparada a corrente de condução no domínio da “quase-estática”, pode-se desconsiderar esse termo da Equação (1.11), chegando-se então a *Lei de Ampère* na forma integral.

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = nI \quad (1.11)$$

onde “ $n$ ” é o número de espiras e “ $I$ ” é a corrente do condutor.

Igualmente, aplicando-se o *Teorema de Stokes* à Equação (1.5) obtemos a *Lei de Faraday* dada pela Equação (1.12), que demonstra que é possível obter um potencial escalar elétrico “ $U$ ” através da variação temporal do fluxo magnético “ $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ”

$$U = \oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.12)$$

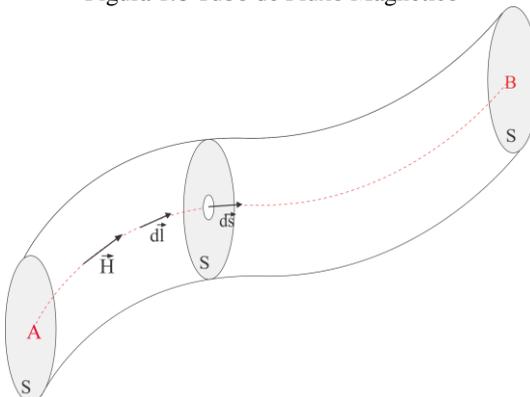
As equações apresentadas nesta seção são de fundamental importância na análise de problemas eletromagnéticos. Partindo desta é possível desenvolver através de cálculos matemáticos e da análise dos fenômenos físicos, equações particulares que representam parâmetros físicos necessários ao estudo e projeto de dispositivos eletromagnéticos.

Na seção subsequente a esta, será apresentado o conceito de relutância magnética e a forma com a qual esse parâmetro físico pode ser obtido a partir das equações fundamentais do eletromagnetismo.

### 1.5 A RELUTÂNCIA MAGNÉTICA

A circulação de uma corrente elétrica, a variação de campos elétricos e a presença de ímãs permanentes são capazes de gerar campos magnéticos. Esses campos gerados irão fluir de uma região de maior potencial magnético para uma região onde o valor do potencial escalar magnético é inferior. Ao tentar atravessar o meio entre esses dois valores de potenciais, o campo magnético estará sujeito às características físicas do material e ao seu volume.

Figura 1.6 Tubo de Fluxo Magnético



Fonte: Próprio Autor.

Conforme descrito acima, o vetor campo magnético está orientado em sentido oposto ao crescimento do potencial escalar magnético. Assim sendo, podemos descrever esse comportamento físico matematicamente através da Equação (1.13).

Assumindo um volume de cálculo dentro do campo magnético gerado, como apresentado na Figura 1.6, e analisando a equação (1.13) é possível realizar uma integração ao longo da linha de campo magnético para se obter o escalar potencial magnético, como demonstrado na equação (1.14).

$$\mathbf{H} = -gradV_m \quad (1.13)$$

$$V_{m_A}^B = - \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.14)$$

Conforme a relação constitutiva instituída por Maxwell (Equação (1.8)), a indução magnética ou densidade de fluxo magnético depende da capacidade do meio em permitir a passagem do campo vetorial, ou seja, da permeabilidade magnética do meio “ $\mu$ ”.

A passagem do campo magnético gerado, sujeito à permeabilidade do meio por uma superfície, define o fluxo magnético. Contudo, é importante ressaltar que o fluxo magnético irá depender não apenas do valor da indução magnética e da área em questão, mas também do ângulo entre o campo magnético e a normal à superfície, como pode ser visualizado matematicamente na equação (1.16).

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.15)$$

$$\Phi = \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.16)$$

Conforme observado no texto acima a passagem de um campo magnético depende tanto do potencial escalar magnético a que este está submetido quanto ao meio e ao volume pelo qual o campo magnético irá atravessar. Logo, no intuito de mensurar essa dificuldade, a passagem do fluxo magnético define-se a relutância magnética.

A relutância magnética é caracterizada pela resistência imposta pelo material à passagem do fluxo magnético, ao qual o mesmo está submetido. É definida pela razão entre o potencial escalar magnético e o fluxo magnético como apresentado na equação (1.17).

$$\mathcal{R}_A^B = \frac{V_{m_A}^B}{\Phi} = \frac{\int_B^A \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}} \quad (1.17)$$

Considerando que o campo magnético é constante em toda a linha de cálculo e paralelo a esta, na integral de linha. E ainda que, nem a permeabilidade magnética do meio nem o campo magnético variam na superfície de cálculo da integral de superfície, que o campo magnético é paralelo a normal desta mesma superfície, e por fim, que esta superfície se mantém constante ao longo da linha da integral de linha, chega-se então na equação simplificada para o cálculo da relutância neste volume de cálculo, dada pela Equação (1.18).

Nesta, é possível observar que a relutância magnética é um parâmetro intrínseco ao material e depende apenas das características físicas do material e de suas dimensões.

$$\mathcal{R}_A^B = \frac{l}{\mu S} \quad (1.18)$$

Observando as Seções 1.4 e 1.5 nota-se que o comportamento do campo magnético no volume de cálculo apresenta semelhanças significativas com o funcionamento de um circuito elétrico. Deste modo, será apresentado na Seção 1.6 como essas semelhanças podem ser utilizadas para simplificar o estudo e o projeto de dispositivos eletromagnéticos.

## 1.6 CIRCUITOS EQUIVALENTES MAGNÉTICOS

O projeto e a análise de dispositivos eletromagnéticos são muito suscetíveis a erros se realizadas diretamente ao dispositivo. Uma forma de minimizar os riscos de erros é a utilização do MEF. Contudo, sua aplicação além de ser trabalhosa e de exigir um software relativamente complexo para sua aplicação, ainda demanda um tempo considerável para a utilização do software. Isto torna muitas vezes um fator de lentidão na evolução do desenvolvimento de um dispositivo.

A representação do funcionamento de dispositivos eletromagnéticos através de circuito equivalentes magnéticos fornece

uma metodologia simplificada e prática de análise do funcionamento destes dispositivos, viabilizando o estudo de estruturas complexas como transformadores e motores elétricos.

Todavia, parte fundamental na representação em circuitos equivalentes magnéticos dos dispositivos eletromagnéticos é a modelagem dos componentes equivalentes aos componentes dos circuitos elétricos.

Observa-se que o potencial escalar magnético, em um meio onde haja permissividade à passagem do campo magnético, estabelece um fluxo magnético. De modo similar em circuitos elétricos, o potencial escalar elétrico, em um meio onde haja condutividade elétrica, estabelece uma corrente elétrica.

Desta forma, temos que o fluxo magnético em um dispositivo eletromagnético é o equivalente à corrente elétrica em circuitos elétricos, e o potencial escalar magnético é equivalente ao potencial escalar elétrico na teoria de circuitos.

A dificuldade imposta por um meio à passagem da corrente elétrica é denominada resistência elétrica, e é inversamente proporcional à condutividade elétrica do material em questão.

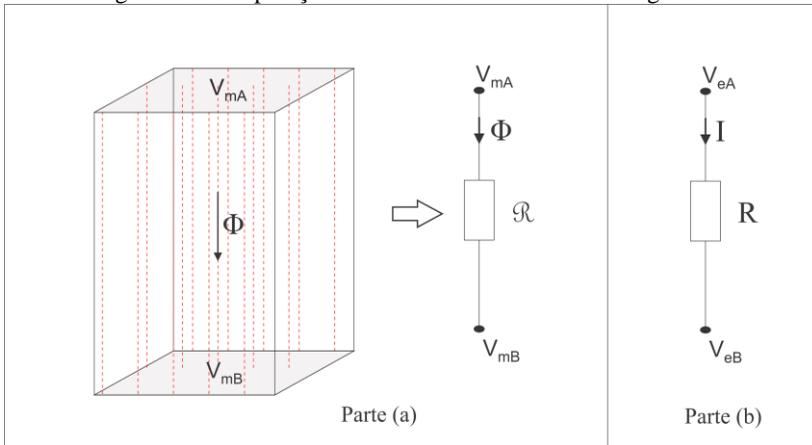
Portanto, de modo similar a resistência elétrica, a resistência imposta por um meio à passagem do fluxo magnético é denominada relutância magnética, e é inversamente proporcional à característica física do material que representa essa capacidade de permitir a passagem do fluxo magnético, denominada permeabilidade magnética.

A Figura 1.7 ilustra a comparação entre circuitos magnéticos e elétricos. Nesta, pode-se observar na parte (b) que o volume de um material sujeito à passagem de um campo magnético foi representado por um ramo elétrico.

Nota-se que o potencial escalar magnético exerce papel similar ao potencial elétrico. E o fluxo magnético que tenta atravessar esse meio para ir do maior para o menor valor de potencial magnético enfrenta a relutância magnética imposta pelo meio, do mesmo modo que a corrente elétrica no circuito elétrico enfrenta a resistência elétrica do material para ir para o menor valor de potencial elétrico.

De maneira similar ao raciocínio lógico desenvolvido partindo das Leis de Maxwell, até o circuito equivalente magnético deste, é possível realizar o caminho inverso e obter novamente as grandezas magnéticas com a indução magnética a partir do circuito equivalente magnético do dispositivo.

Figura 1.7 Comparação Entre Circuitos Elétricos e Magnéticos



Fonte: Próprio Autor.

As fontes de potencial escalar magnético são similares às fontes de tensão elétrica. Contudo, são necessários alguns cálculos e adaptações dos parâmetros do dispositivo real para a obtenção de uma fonte de tensão equivalente. A seguir é apresentado na seção 1.7 a representação equivalente de um ímã permanente em uma fonte de tensão para aplicação no circuito equivalente magnético.

## 1.7 REPRESENTAÇÃO DO ÍMÃ EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Ímãs permanentes são materiais magnéticos que apresentam a característica física de manterem uma indução remanente significativa mesmo depois que o campo externo é extinto. De modo similar aos indutores, os ímãs permanentes são capazes de produzir campos magnéticos, sem a necessidade de nenhum tipo de excitação. Deste modo, podemos considerar os ímãs permanentes como fontes de potencial magnético capazes de gerar fluxo magnético. Portanto, devemos representá-los como uma fonte no circuito magnético equivalente.

A seguir nas seções 1.7.1 e 1.7.2 serão apresentadas duas metodologias para a representação dos ímãs permanentes em circuitos magnéticos equivalentes.

### 1.7.1 Representação do ímã permanente por fonte de tensão

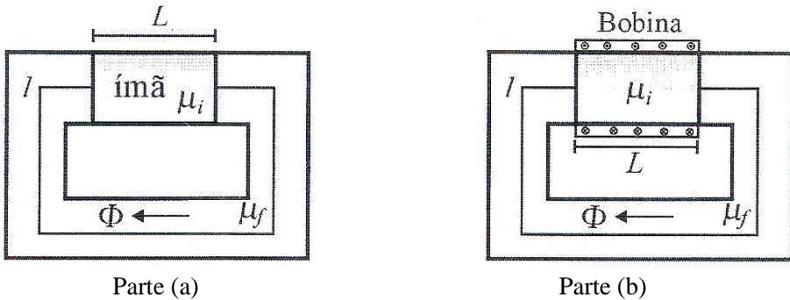
A Figura 1.8 apresenta dois circuitos magnéticos, o circuito da Parte (a) é composto por um núcleo ferromagnético e um ímã

permanente como fonte de campo magnético. Já o circuito da Parte (b) possui como fonte de campo magnético uma bobina de corrente.

O ímã permanente empregado no circuito da Parte (a) possui a característica representada pela Equação (1.21) e uma permeabilidade magnética próxima do ar, definida neste equacionamento por “ $\mu_i$ ”. O ímã permanente irá gerar um fluxo magnético que, em razão da alta permeabilidade do ferro, irá se concentrar no núcleo de ferro.

Desta forma, aplicando-se a *Lei de Ampère* sobre o caminho magnético médio deste circuito chega-se a Equação (1.19). Como utilizamos a hipótese de que não há dispersão do fluxo magnético gerado pelo ímã, chega-se a Equação (1.20).

Figura 1.8 Equivalência entre ímãs permanentes e bobinas de corrente



Fonte: (BASTOS, 2008)

Considerando ainda que as áreas do núcleo de ferro e do ímã são iguais podemos simplificar a equação de conservação do fluxo (Equação (1.20)) e obtemos a indução do ímã em função da permeabilidade do ímã e do campo magnético no ferro (Equação (1.20)).

$$H_i L + h l = 0 \quad (1.19)$$

$$\Phi_i = \Phi_f \rightarrow B_i = \mu_i h \quad (1.20)$$

$$B_i = \mu_i H_i + B_r \quad (1.21)$$

Resolvendo o sistema de equações composta pelas equações (1.19), (1.20) e (1.21), obtemos o campo magnético no ferro como ilustra a Equação (1.22).

$$h = \frac{B_r}{\mu_i} \frac{1}{\left(\frac{\mu_f}{\mu_i} + \frac{l}{L}\right)} \quad (1.22)$$

O circuito magnético da Parte (b) possui uma bobina de corrente com densidade linear de corrente “ $J_l$ ” e comprimento “ $L$ ” e área transversal “ $S$ ” iguais às do ímã, e seu interior é preenchido com um material com a mesma permeabilidade magnética do ímã “ $\mu_i$ ”. Aplicando a *Lei de Ampère* no circuito, obtemos a Equação (1.20), e considerando que não há dispersão obtemos a equação de conservação de fluxo, dada pela Equação (1.24).

$$H_b L + h l = J_l L \quad (1.23)$$

$$\Phi_b = \Phi_f \rightarrow \mu_i H_b = \mu_f h \quad (1.24)$$

Solucionando o sistema de equações (1.23) e (1.24) encontramos analiticamente o campo magnético no ferro, conforme a Equação (1.25).

$$h = J_l \frac{1}{\left(\frac{\mu_f}{\mu_i} + \frac{l}{L}\right)} \quad (1.25)$$

Por fim, com o objetivo de encontrar o valor do potencial escalar magnético gerado pelo ímã, do circuito magnético da Parte (a) da Figura 1.8, podemos considerar que o campo magnético gerado pela bobina de corrente no ferro é igual ao campo magnético gerado pelo ímã permanente no ferro. Assim sendo, igualam-se as Equações (1.22) e (1.25) e isola-se a força magnetomotriz gerada pela bobina hipotética que foi utilizada para encontrar a força magnetomotriz equivalente gerada pelo ímã permanente neste circuito, conforme apresenta a Equação (1.26).

$$fmm = J_l L = \frac{B_r}{\mu_i} L \quad (1.26)$$

A partir da força magnetomotriz gerada pelo ímã, que é equivalente ao potencial escalar magnético, pode-se representar o ímã permanente em um circuito elétrico como uma fonte de tensão com o valor da “ $fmm$ ” calculado pela Equação (1.26) (BASTOS, 2008).

## 1.7.2 Representação do ímã permanente por fonte de corrente

Outra forma de representar um ímã permanente em um circuito elétrico equivalente é através de uma fonte de corrente, que representa o fluxo magnético produzido pelo ímã.

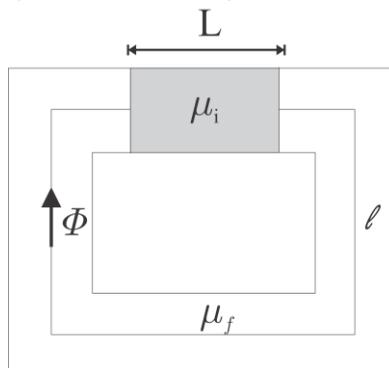
Na Figura 1.9 temos um circuito magnético com um ímã permanente como fonte de campo magnético. Nesta análise será considerado que o ímã possui a mesma seção transversal que o núcleo de ferro, e que não há dispersão de fluxo magnético.

Como mencionado anteriormente, os ímãs permanentes são fontes de fluxo magnético, desta forma, podemos representar o fluxo magnético remanente “ $\Phi_r$ ” produzido pelo ímã da Figura 1.9 como uma fonte de corrente, cujo valor é calculado pela Equação (1.27), onde “ $B_r$ ” é a indução remanente do ímã e “ $S$ ” é a seção transversal do mesmo.

$$\Phi_r = B_r S \quad (1.27)$$

Apesar de os ímãs permanentes gerarem campos magnéticos, eles possuem uma permeabilidade magnética muito próxima ao ar o que eleva a relutância do circuito magnético e conseqüentemente reduz o fluxo remanente produzido pelo ímã. Deste modo, é de fundamental importância que representemos a relutância do ímã “ $\mathcal{R}_m$ ”, e como esta reduz o fluxo remanente. A relutância do ímã deve ser colocada em paralelo com a fonte de corrente que representa o fluxo remanente, pois, ela irá enfraquecer o fluxo remanente gerado pelo ímã ao restante do circuito, em conformidade com o fenômeno físico referente.

Figura 1.9 Circuito magnético em análise



Fonte: Próprio autor.

Seguindo o caminho magnético, o fluxo gerado pelo ímã (sujeito a sua relutância) irá atravessar o ferro. Portanto, deve-se colocar em série ao ramo do circuito que representa o ímã, a relutância correspondente a dificuldade a passagem do fluxo imposta pelo ferro “ $\mathcal{R}_f$ ”.

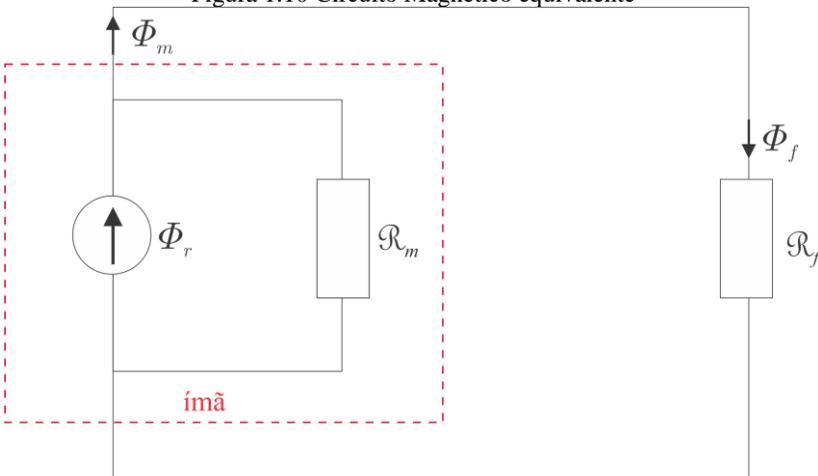
O circuito equivalente magnético desenvolvido está ilustrado na Figura 1.10, onde pode ser visualizado na área delimitada pela linha tracejada os elementos correspondentes à representação elétrica equivalente do ímã, e o circuito equivalente magnético total referente ao dispositivo magnético, apresentado na Figura 1.9.

Observado o circuito equivalente magnético apresentado na Figura 1.10, e aplicando a teoria de circuitos podemos calcular a força magnetomotriz produzida pelo ímã através da Equação (1.28), nota-se que este valor depende apenas dos parâmetros do ímã permanente.

$$fmm = \Phi_r \mathcal{R}_m \quad (1.28)$$

No entanto, analisando a Figura 1.10 percebe-se que o fluxo magnético do ímã “ $\Phi_m$ ”, e conseqüentemente sua indução “ $B_m$ ” depende não apenas de suas dimensões e do tipo de material, mas também da geometria do dispositivo, do caminho magnético que o fluxo irá percorrer e dos materiais pelo qual esse fluxo magnético irá passar no dispositivo.

Figura 1.10 Circuito Magnético equivalente



Fonte: Próprio autor.

Assim sendo, o fluxo magnético produzido pelo ímã é calculado pela Equação (1.29). Nesta, pode-se observar claramente a influência da configuração do restante do dispositivo no funcionamento do ímã.

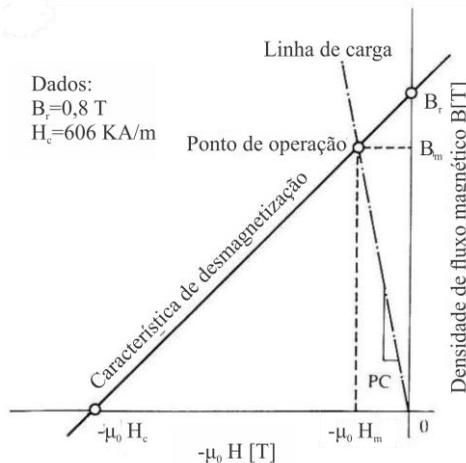
$$\Phi_m = \Phi_r \frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_f} \quad (1.29)$$

A partir do cálculo do fluxo magnético do ímã podemos calcular a densidade de fluxo magnético gerado pelo ímã através da Equação (1.30), e a partir desta, temos o ponto de operação do ímã naquele dispositivo.

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} \quad (1.30)$$

O ponto de operação de um ímã é parte fundamental na utilização desses materiais. Um descuido na definição deste parâmetro pode gerar graves problemas ao dispositivo, inclusive a perda da indução remanente do material e sua conseqüente inutilização. Além disso, o ponto de operação do ímã determina a energia interna do ímã e conseqüentemente a sua capacidade de externar energia.

Figura 1.11 Ponto de Operação de Um Ímã.



Fonte: Adaptado de (MILLER, 1989)

A Figura 1.11 apresenta a curva característica de um determinado ímã permanente, e o ponto de operação para uma

determinada aplicação. O ponto de operação do ímã ilustrado no gráfico pode ser encontrado através do cálculo da sua densidade de fluxo magnético do ímã “ $B_m$ ”, (MILLER, 1989).

A energia interna de um ímã é dada pela Equação (1.31), como pode ser observado, esta energia é diretamente proporcional ao produto da indução e do campo magnético. Portanto, existem dois pontos onde esta energia interna é máxima, próximo à indução remanente “ $B_r$ ”, ou próximo do campo magnético coercitivo “ $H_c$ ”.

No segundo caso o efeito do ímã foi anulado, logo, em termos práticos é de grande interesse que o ímã apresente um campo magnético coercitivo elevado, para que ele não seja desmagnetizado facilmente, bem como um elevado valor de indução remanente, pois assim será capaz de criar campos elevados (BASTOS, 2008).

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} BHdv \quad (1.31)$$

## 1.8 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação do método dos elementos finitos. É apresentado o modelo magnetostático a partir das equações de Maxwell e são apresentadas as condições de contorno, as restrições globais e a representação de um domínio de estudo teórico, necessários para descrever o problema. Em sequência é apresentada a formulação em potencial escalar e a formulação em potencial vetor que serão utilizadas neste trabalho. Para o desenvolvimento do método de elementos finitos é então ilustrada a formulação fraca, e em continuação o equacionamento numérico.

No Capítulo 3 são realizados o desenvolvimento e a análise das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância magnética das configurações de fluxo predeterminadas. As referidas fórmulas matemáticas são desenvolvidas de maneira analítica através da aplicação de técnicas matemáticas e hipóteses simplificadoras através da observação do fenômeno físico que ocorre em cada configuração de fluxo.

A partir das equações analíticas para o cálculo da relutância desenvolvidas no Capítulo 3, é então realizado no Capítulo 4 um estudo da adequação das fórmulas analíticas desenvolvidas por intermédio do método de elementos finitos, aplicado através de simulações realizadas no software EFCAD. Neste mesmo capítulo, são também apresentadas

as fórmulas analíticas para o cálculo da relutância magnética de configurações de fluxo, desenvolvidas nesta dissertação por intermédio das técnicas previamente estudadas na bibliografia, e consideradas pertinentes no estudo de dispositivos eletromagnéticos.

No Capítulo 5 é então aplicada a metodologia desenvolvida neste trabalho à um alto falante. Primeiramente é feita a apresentação do dispositivo em estudo. Através da metodologia proposta neste trabalho é então feito o desenvolvimento do circuito equivalente magnético do dispositivo de forma gradual, partindo do cálculo pela Lei de Ampère, até a representação completa do dispositivo pelo método apresentado neste trabalho, considerando as relutâncias no núcleo ferromagnético com permeabilidade magnética não linear. Por fim, é feito um estudo comparativo entre os valores de induções magnéticas calculadas de forma analítica, e calculadas numericamente através do EFCAD.

O Capítulo 6 apresenta o estudo de uma máquina síncrona de ímãs permanentes por intermédio da aplicação da metodologia proposta neste trabalho. Inicialmente será feita a apresentação do dispositivo em estudo. Em sequência, é realizado o desenvolvimento do circuito equivalente magnético do dispositivo de forma gradual, até se chegar à modelagem realística da máquina. São avaliados os valores de indução magnética em todas as configurações de fluxo. Enfim, para avaliar a adequação do modelo analítico desenvolvido é feito um estudo comparativo entre os valores de indução magnéticas calculados de forma analítica para cada caso, e calculados numericamente através do software EFCAD.

Concluindo o trabalho, são listadas no Capítulo 7 as principais conclusões extraídas deste trabalho e as sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

O apêndice A apresenta a metodologia utilizada para o cálculo iterativo para não linearidades na aplicação do método de circuito equivalente magnético aqui apresentado.

## 1.9 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou as principais razões para o estudo do método de circuitos equivalentes magnético e o desenvolvimento de novos métodos, bem como o tema será tratado neste trabalho. É descrito o método de circuitos equivalentes magnéticos partindo das equações de Maxwell até o circuito equivalente magnético. O estado da arte a respeito do tema é também apresentado.

A contextualização do problema de circuitos equivalentes magnéticos permite inferir a fundamental importância do

desenvolvimento de métodos que busquem solucionar o problema de forma eficiente e precisa, porém, sem demasiada complexidade dos cálculos, possibilitando assim, uma avaliação do comportamento magnético de dispositivos com baixo esforço computacional.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell são capazes de descrever matematicamente os fenômenos eletromagnéticos. Entretanto, tão grande quanto a sua capacidade de representar tais fenômenos, está a complexidade em solucionar tais equações. Para casos mais simples até é possível soluções analíticas e obter a distribuição exata dos campos no domínio estudado. Todavia na maioria dos problemas de eletromagnetismo sua solução de forma analítica é inviável.

Deste modo, deve-se recorrer a métodos numéricos para a solução destes problemas. Como a teoria de Maxwell é dada por equações de derivadas parciais, uma alternativa para a resolução destes problemas é a discretização do domínio de cálculo. Ou seja, em vez de solucionar equações de derivadas parciais contínuas, passa-se a solucionar equações algébricas que formam um sistema linear de soluções relativamente práticas e já largamente difundidos no meio científico. Portanto, através desta técnica chega-se a uma solução aproximada das equações de Maxwell, cujo grau de aproximação está diretamente correlacionado ao grau de discretização do domínio de estudo.

Será apresentado neste capítulo a aplicação do método de elementos finitos, a formulação em potencial escalar magnético e a formulação em potencial vetor magnético, as quais foram utilizadas nas simulações realizadas neste trabalho.

### 2.2 MODELO MAGNETOSTÁTICO

A magnetostática consiste no estudo do fenômeno magnético em condições estacionárias. O campo magnético é, então, invariante no tempo e é devido somente às correntes contínuas impostas “ $\mathbf{J}$ ” ou aos ímãs permanentes (indução remanente “ $\mathbf{B}_r$ ”). As equações consideradas são provenientes das equações de Maxwell quando as derivadas temporais são nulas. São elas as Equações (2.1) e (2.2).

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2.2)$$

A lei de comportamento magnético no caso dos ímãs permanentes a ser adicionada é apresentado na Equação (2.3), (IDA e BASTOS, 1997)

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{Br} \quad (2.3)$$

onde eventualmente temos “ $\mu = \mu(H)$ ” para materiais não lineares. Nessas equações, tem-se que “ $\mathbf{H}$ ” é o campo magnético (A/m), “ $\mathbf{B}$ ” é a indução magnética em (T, Tesla), “ $\mu$ ” é a permeabilidade magnética do material (H/m) que pode ser linear ou não, e por fim, “ $\mathbf{Br}$ ” é a indução remanente do ímã permanente, também em (T).

As condições de contorno são fundamentais para garantir a unicidade da solução encontrada e para tanto devem ser aplicadas de forma adequada sobre a fronteira do domínio de cálculo “ $\Omega$ ”, sendo “ $\Gamma$ ” a fronteira do domínio global “ $\Omega$ ”. Assim, as condições de contorno consideradas são ilustradas nas Equações (2.4) e (2.5).

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_h} = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \Big|_{\Gamma_b} = 0 \quad \text{com} \quad \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b \quad (2.5)$$

As restrições globais que podem ser definidas estão relacionadas com o fluxo magnético “ $\Phi$ ” em Weber (Wb) e a força magnetomotriz “ $Vm$ ” em Ampère-espira (Ae), segundo as Equações (2.6) e (2.7).

$$\Phi_i = \int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, ds \quad (2.6)$$

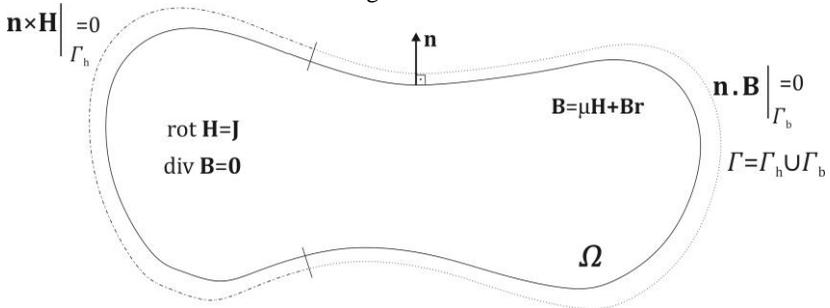
$$Vm_i = \int_{\gamma_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.7)$$

Cuja a relação define a indutância magnética, Equação (2.8).

$$L = \frac{\Phi_i}{Vm_i} \quad (2.8)$$

Onde “ $\mathbf{n}$ ” é o vetor normal a superfície do volume de cálculo, “ $\Gamma_i$ ” é a superfície localizada na fronteira do domínio de estudo e “ $\gamma_i$ ” é uma curva pertencente ao domínio de estudo. As variáveis anteriormente apresentadas podem ser vistas na Figura 2.1, onde está ilustrado o domínio de estudo “ $\Omega$ ” e suas fronteiras “ $\Gamma_h$ ” e “ $\Gamma_b$ ”.

Figura 2.1 Representação do domínio de estudo e sua fronteira para o modelo magnetostático.



Fonte: Próprio autor.

### 2.3 A FORMULAÇÃO EM POTÊNCIAL ESCALAR

A definição de um potencial escalar permite desenvolver uma equação diferencial parcial a partir das Equações (2.1), (2.2) e (2.3). Supondo que o domínio “ $\Omega$ ” é simplesmente conexo e que o campo fonte “ $\mathbf{H}_s$ ” é conhecido, sendo sua condição de contorno dada pela Equação (2.9).

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \Big|_{\Gamma_h} = 0 \quad (2.9)$$

O campo magnético “ $\mathbf{H}$ ” pode ser escrito na forma como está ilustrado na Equação (2.10), de modo a satisfazer a Equação (2.1), considerando “ $\text{rot } \mathbf{H}_s = \mathbf{J}$ ”.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad}(\psi) \quad (2.10)$$

O campo fonte pode ser obtido analiticamente, por exemplo, através da lei de *Biot-Savart*, ou numericamente (LUZ, 2003). Na

Equação (2.10) “ $\psi$ ” representa o potencial escalar magnético definido com a incerteza de uma constante.

Em um domínio multiplamente conexo, um potencial escalar pode ser multivalor, o que exige a introdução de cortes que visam tornar o domínio simplesmente conexo (DULAR, 1994) e, conseqüentemente, o potencial de valor único. É importante ressaltar que em problemas estáticos, o potencial escalar nunca é multivalor. Em magnetostática, é o campo fonte “ $\mathbf{H}_s$ ” que é responsável pelo efeito das fontes de correntes conhecidas.

Reagrupando as Equações (2.10) com (2.2) e (2.3) obtém-se a Equação (2.11).

$$\text{div}[\mu(\mathbf{H}_s - \text{grad}(\psi)) + \mathbf{B}\mathbf{r}] = 0 \quad (2.11)$$

Para o campo magnético, a condição dada pela Equação (2.4) será verificada se a Equação (2.12) for verdadeira, onde, “ $\psi_0$ ” é constante.

$$\psi \Big|_{\Gamma_h} = \psi_0 \quad (2.12)$$

A condição de contorno pode ser correlacionada a uma quantidade global. Neste caso, é a variável “ $Vm_i$ ” definida pela relação (2.7) que corresponde a uma diferença de potencial escalar. Se “ $\gamma_i$ ” conecta duas fronteiras “ $\Gamma_A$ ” e “ $\Gamma_B$ ”, nas quais  $\mathbf{n} \times \mathbf{h} = 0$ , pode se impor as Equações (2.13) e (2.14).

$$\psi \Big|_{\Gamma_A} = 0 \quad (2.13)$$

$$\psi \Big|_{\Gamma_B} = Vm_i \quad (2.14)$$

## 2.4 A FORMULAÇÃO EM POTENCIAL VETOR

Para o problema magnetostático, a Equação (2.2) permite introduzir o conceito de potencial vetor magnético conforme a Equação (2.15).

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.15)$$

Todavia este potencial não é único e, a fim de se ter uma solução única, é necessário impor uma condição de calibre. Substituindo a Equação (2.15) em (2.3) e em (2.1), obtêm-se a Equação (2.16).

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \text{rot}(\nu \mathbf{B} \mathbf{r}) \quad (2.16)$$

Onde “ $\nu$ ” representa a relatividade magnética “ $\nu = 1/\mu$ ”. Com esta formulação, as condições de contorno das Equações (2.4) e (2.5) se tornam as Equações (2.17) e (2.18).

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A} \Big|_{\Gamma_h} = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} \Big|_{\Gamma_b} = 0 \quad (2.18)$$

Pode-se, então, introduzir uma condição de contorno global substituindo na Equação (2.6) a indução magnética pela relação (2.15). Após transformar a equação desse modo obtida, a condição de contorno pode ser expressa na forma de uma integral de contorno.

## 2.5 FORMULAÇÕES FRACAS

As Equações (2.11) e (2.16) somadas as condições de contorno são conhecidas como as formas fortes das formulações em potencial escalar e em potencial vetor, respectivamente.

O estabelecimento das formulações fracas associadas com os problemas considerados de derivadas parciais, e nas quais é baseado o Método de Elementos Finitos, considera duas fórmulas conhecidas como *Fórmulas de Green*. Essas são as Equações (2.19) e (2.20).

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \cdot \text{grad}(v) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\mu} v d\Omega = \int_{\Gamma} v \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} d\Gamma \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ e } v \in H^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \cdot \text{rot } v d\Omega - \int_{\Omega} \text{rot } \boldsymbol{\mu} \cdot v d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}) \cdot v d\Gamma \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\mu}, v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

Estabelecidas das relações de análise vetorial apresentadas nas Equações (2.21) e (2.22).

$$\boldsymbol{\mu} \text{ grad } (v) + v \text{ div}(\boldsymbol{\mu}) = \text{div}(v \boldsymbol{\mu}) \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\mu} . \text{rot}(\mathbf{v}) - \text{rot}(\boldsymbol{\mu}) . \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \quad (2.22)$$

Integrados no domínio “ $\Omega$ ”, com a aplicação do *Teorema da Divergência* para se obter os termos de integrais de superfícies. Nas Equações (2.19) e (2.20), os termos “ $H^1(\Omega)$ ” e “ $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ” representam os *Espaços de Sobolev* (DULAR, 1994), dos campos escalar e vetorial, respectivamente.

Considerando a *Fórmula de Green* do tipo “*grad – div*”, Equação (2.19) aplicada em (2.11), obtêm se a Equação (2.23).

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \text{ grad } (\psi) . \text{grad}(\psi') d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \mathbf{H} \mathbf{s} . \text{grad}(\psi') d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{r} . \text{grad } (\psi') d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} . \mathbf{B} \psi' d\Gamma = 0 \quad (2.23) \\ \psi' \in E_h^0(\Omega) \end{aligned}$$

Onde “ $\psi'$ ” é uma função escalar teste e “ $E_h^0$ ” é um espaço funcional definido pela Equação (2.24).

$$E_h^0(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \psi' \in L^2(\Omega); \\ \text{grad}(\psi') \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \psi' \Big|_{\Gamma_h} = \text{constante} \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

A Equação (2.23) é a forma fraca da formulação em potencial escalar magnético.

Considerando a *Fórmula de Green* do tipo “*rot – rot*”, Equação (2.20) aplicada na Equação (2.16), obtêm se a Equação (2.25).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \text{ rot } \mathbf{A} . \text{rot } \mathbf{A}' d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) . \mathbf{A}' d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \mathbf{J} . \mathbf{A}' d\Omega + \int_{\Omega} v \mathbf{B} \mathbf{r} . \text{rot } \mathbf{A}' d\Omega \quad (2.25) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}' \in E_b^1(\Omega)$$

Onde “ $\mathbf{A}'$ ” é uma função vetorial teste e “ $E_b^1(\Omega)$ ” é um espaço funcional definido conforme a Equação (2.26).

$$E_b^1(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega); \\ \text{rot } \mathbf{A}' \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{n} \times \mathbf{A}' \Big|_{\Gamma_b} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

A Equação (2.25) é a forma fraca da formulação potencial vetor magnético.

## 2.6 O METODO DE ELEMENTOS FINITOS

No método de elementos finitos (MEF) o domínio de cálculo é subdividido ou discretizado em pequenas regiões chamadas de “*elementos finitos*”. Em aplicações bidimensionais (2D), o domínio de cálculo é comumente discretizado em pedaços de áreas finitas em formato triangular. O encontro entre as arestas destes triângulos são os denominados “*nós*” ou “*graus de liberdade*”, enquanto que o triângulo é o “*elemento*”. A montagem de todos os elementos por todo o domínio de cálculo é denominada “*malha de elementos finitos*”, “*malha de cálculo*” ou simplesmente “*malha*” (BASTOS e SADOWSKI, 2003).

Para o cálculo em duas dimensões, normalmente toma-se como elemento de referência um elemento triangular. Dentro desse elemento, considera-se que tanto o potencial escalar magnético quanto o potencial vetor magnético variam linearmente. E assim como está se tratando de um cálculo em duas dimensões, também se consideram as componentes dos potenciais reduzidas a uma única componente em duas dimensões.

Deste modo, em cada elemento, as incógnitas do problema são discretizadas por uma combinação de funções de aproximação ou funções de base. O uso dessas funções permite interpolar o valor da incógnita em todo o ponto do domínio de estudo.

Desta forma, a discretização da forma fraca implica em resolver um sistema de equações cujos graus de liberdade estão diretamente ligados ao número de nós da malha. Para se obter tal sistema, deve-se escolher tanto as funções teste quanto as incógnitas geradas pela malha. Escolhendo-se as funções teste como sendo iguais as funções de base,

tem-se o chamado “*método de Galerkin*”, o qual é utilizado neste trabalho.

Sua aplicação à formulação fraca gera um sistema de equações algébricas cuja resolução fornece uma solução aproximada do problema inicial.

Aplicando-se o “*método de Galerkin*” nas Equações (2.23) e (2.25), obtém-se para o elemento de referência triangular as seguintes matrizes elementares apresentadas nas Equações (2.27) e (2.28).

- Para a formulação 2D em potencial escalar magnético:

$$\frac{\mu}{2D} \left[ \text{matriz de rigidez} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} - \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} q_1 Hs_x + r_1 Hs_y \\ q_2 Hs_x + r_2 Hs_y \\ q_3 Hs_x + r_3 Hs_y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$- \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 Br_x + r_1 Br_y \\ q_1 Br_x + r_1 Br_y \\ q_1 Br_x + r_1 Br_y \end{bmatrix}$$

- Para a formulação 2D em potencial vetor magnético:

$$\frac{\nu}{2D} \left[ \text{matriz de rigidez} \right] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} - \frac{JD}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\nu}{2} \begin{bmatrix} q_1 Br_x - r_1 Br_y \\ q_1 Br_x - r_1 Br_y \\ q_1 Br_x - r_1 Br_y \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde a “*matriz de rigidez*”, ou também “*matriz de contribuição*” é simétrica e contém as informações de geometria do elemento de referência no domínio de cálculo. “*D*” é o dobro da área do triângulo de referência, “ $\Phi_i$ ” com “ $i = 1, 2 \text{ e } 3$ ” são os potenciais escalares nos nós 1, 2 e 3 do elemento finito, “ $A_i$ ” com “ $i = 1, 2 \text{ e } 3$ ” são os potenciais vetores nos nós 1, 2 e 3 do elemento finito, “ $Hs_x$ ” e “ $Hs_y$ ” são os componentes em “ $x$ ” e “ $y$ ” de “ $\mathbf{Hs}$ ”, “ $Br_x$ ” e “ $Br_y$ ” são os componentes em “ $x$ ” e “ $y$ ” de “ $\mathbf{Br}$ ”, e “ $q_i$ ” e “ $r_i$ ” com “ $i = 1, 2 \text{ e } 3$ ” são os fatores que dependem das coordenadas dos nós do elemento finito (BASTOS e SADOWSKI, 2003).

A montagem ou somatório das matrizes elementares em uma matriz global requer que os termos desta matriz sejam montados em linhas e colunas respeitando a numeração dos nós da malha global.

Neste ponto devem ser inseridas as condições de contorno que garantem a unicidade da solução encontrada, ou seja, os potenciais impostos. Estando o sistema matricial formado e as condições de contorno inseridas, pode-se solucionar o sistema de equações por uma técnica de resolução de sistemas linear, que nos fornecerá, portanto, os potenciais incógnitos.

## 2.7 CONCLUSÃO

O presente capítulo apresentou um estudo do método de elementos finitos, partindo das equações de Maxwell e chegando até o desenvolvimento do sistema de equações oriundo da discretização do domínio de cálculo.

Como é possível observar, os resultados obtidos através do método de elementos finitos dependem diretamente da discretização do domínio de estudo. Entretanto, quanto maior for o número de elementos, maior será o tamanho do sistema a ser solucionado. Deve-se sempre ficar atento para que não seja feita uma discretização excessiva, ou seja, uma malha muito densa acarretando a obtenção de uma solução lenta ou mesmo inviável. Evita-se também uma malha de elementos muito grosseira, pois dessa forma se perde a precisão em representar o fenômeno eletromagnético e se obtém, portanto, resultados com baixa precisão.



### 3 RELUTÂNCIA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será realizado o estudo das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância magnética de determinadas configurações de fluxo predeterminadas. As fórmulas matemáticas foram desenvolvidas de maneira analítica, sejam elas através da aplicação de um elemento íntegro diferencial, de maneira linear, ou mesmo através de aproximações, que levam em conta o fenômeno físico que ocorre em determinada configuração de fluxo.

#### 3.2 FÓRMULAS ANALÍTICAS PARA O CÁLCULO DA RELUTÂNCIA EM CONFIGURAÇÕES ESPECÍFICAS DE FLUXO

Observando as mais variadas configurações das linhas de fluxo em dispositivos eletromagnéticos, nota-se a formação de conformações semelhantes de conjuntos de linhas de fluxo. Deste modo, se isolarmos determinadas configurações de linhas de fluxos semelhantes e atribuímos fórmulas analíticas para o cálculo da relutância de cada uma destas configurações, é possível de maneira prática e relativamente rápida calcular a relutância magnética de um dispositivo.

Nos tópicos desta seção serão apresentados as configurações de linhas de fluxo e a fórmula analítica para o cálculo da relutância magnética destas configurações.

##### 3.2.1 Superfícies planas e paralelas

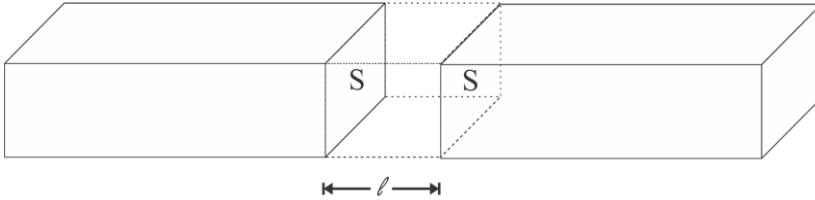
Considera-se a situação mostrada na Figura 3.1, onde temos duas barras de um material de alta permeabilidade magnética, estando as faces das pontas paralelas uma a outra. A distância entre as faces das barras é denominada “*gap*”, e é representada pela letra “*l*” na Figura 3.1.

Essas barras estão sujeitas a um campo magnético, estabelecendo um fluxo magnético que sai da primeira barra pela sua extremidade “*S*” e entra na segunda “*S*” de forma similar. Como o “*gap*” é muito pequeno em comparação com o comprimento da barra podemos considerar que o fluxo disperso é ínfimo em comparação com o fluxo no ferro e perpendicular às faces.

Assim sendo, estamos considerando que todo fluxo presente na primeira barra sai perpendicular à sua face e entra também perpendicular

à face da segunda barra, e que a indução magnética não varia neste percurso.

Figura 3.1 Superfícies planas paralelas.



Fonte: Próprio autor.

Como a seção transversal entre as faces não varia ao longo do comprimento do gap, e que, neste caso, a normal a esta área é paralela ao vetor indução magnética. Podemos então simplificar a Equação (1.15) na Equação (3.1).

$$\Phi = \mu HS \quad (3.1)$$

Por intermédio das hipóteses anteriormente tomadas, chega-se à conclusão que o vetor campo magnético é paralelo às linhas de fluxo magnético entre as faces das barras. Deste modo, pode-se simplificar a Equação (1.14) na Equação (3.2).

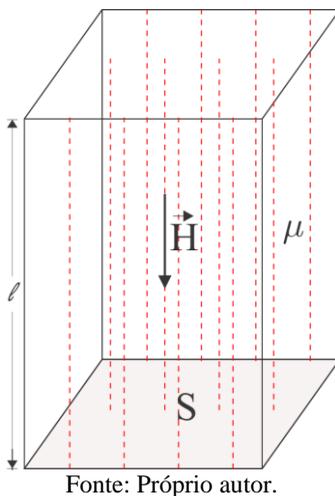
$$V_m = Hl \quad (3.2)$$

Conforme a definição de relutância apresentada na seção 1.5 pode-se descrever analiticamente a fórmula da relutância no ar para essa configuração pela Equação (3.3).

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (3.3)$$

Analisando o raciocínio desenvolvido para a obtenção da Equação (3.3), podemos estabelecer uma fórmula analítica para o cálculo da relutância em situações similares, como a apresentada na Figura 3.2.

Figura 3.2 Configuração de fluxo: Faces planas e paralelas.



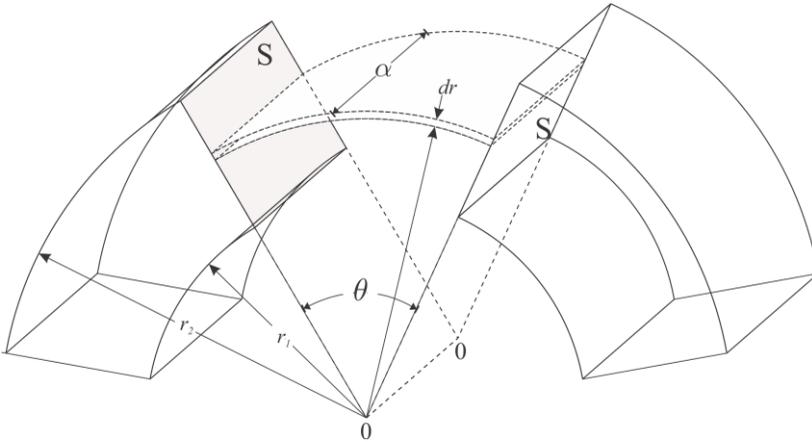
Observa-se na Figura 3.2 que todas as hipóteses realizadas para a obtenção da Equação (3.3) foram mantidas. Desta forma, sempre que for necessário calcular a relutância de uma peça com esta configuração, a fórmula da relutância apresentada na Equação (3.3) pode ser aplicada diretamente, mesmo que a área “S” seja uma figura geométrica diferente da apresentada neste exemplo.

Até este ponto do trabalho estudamos a relutância dos dispositivos eletromagnéticos desconsiderando o fluxo disperso. Todavia, na operação de dispositivos reais o fluxo disperso, apesar de pequeno em comparação com o fluxo útil, exerce influência no funcionamento do equipamento. Assim, iremos abordar nas seções seguintes configurações de fluxo que poderão ser utilizadas tanto na representação do fluxo disperso como no fluxo útil.

### 3.2.2 Anel de fluxo magnético

Um anel de fluxo magnético apresenta a configuração das linhas de fluxo conforme apresentado na Figura 3.3. Nesta configuração, temos que a distribuição das linhas de fluxo magnético ao longo da profundidade do anel “ $\alpha$ ” se mantém constante. No entanto, como o raio externo “ $r_2$ ” é maior que o interno “ $r_1$ ” o campo magnético tende a percorrer o caminho que demande menos energia. Logo, haverá uma concentração maior de linhas de fluxo próximo ao menor raio.

Figura 3.3 Configuração de fluxo em anel.



Fonte: Próprio autor.

Temos, então, uma variação no comprimento das linhas de fluxo e uma maior concentração de linhas no interior do anel, que deve ser levada em conta no desenvolvimento da fórmula analítica da relutância desta configuração. A variação da espessura do anel também influencia no cálculo da área, e consequentemente no valor da relutância.

Todavia, temos que o campo magnético continua sendo paralelo às linhas de fluxo e à normal à área por todo volume de cálculo. Considerando que o campo magnético não varia ao longo da linha e da área de cálculo, mas como mencionando anteriormente, o comprimento das linhas de fluxo e a área de cálculo variam, podemos simplificar a Equação (1.14) na Equação (3.4).

$$\mathcal{R} = \frac{\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\mu \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}} = \frac{\int dl}{\mu \iint_S dS} = \frac{\theta}{\mu \alpha} \frac{1}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}} \quad (3.4)$$

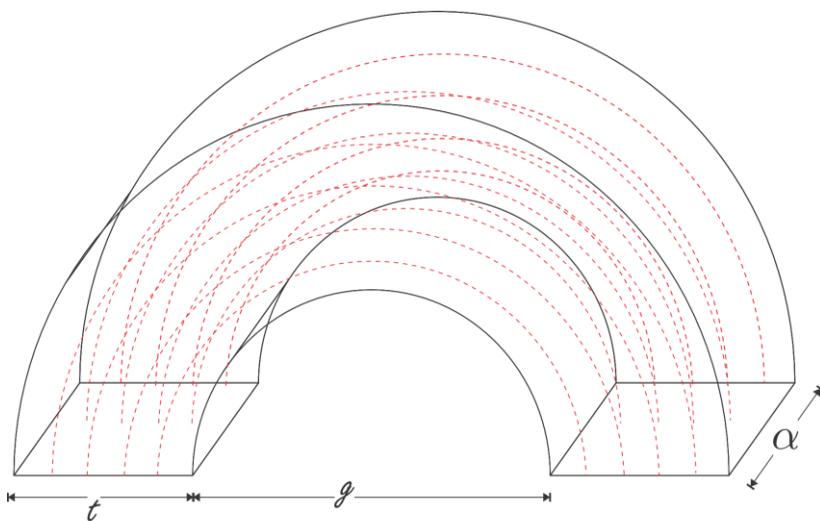
Onde o comprimento da linha de fluxo é dado pelo comprimento do arco no ponto médio do elemento infinitesimal de área. Como não há variação na profundidade do anel, o elemento infinitesimal de área é dado pela profundidade “ $\alpha$ ” vezes o elemento infinitesimal do raio “ $dr$ ”.

Resolvendo a integral da Equação (3.4), obtemos a fórmula analítica da relutância desta configuração de fluxo, dado pela Equação (3.5) (ROTTERS, 1970).

$$\mathcal{R} = \frac{\theta}{\mu\alpha \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (3.5)$$

A Figura 3.4 apresenta esta configuração de anel para as dimensões desta peça em função das variáveis " $t$ " e " $g$ ", e cuja fórmula analítica da relutância desta configuração e dada na Equação (3.6).

Figura 3.4 Configuração de fluxo: Anel.



Fonte: Próprio autor.

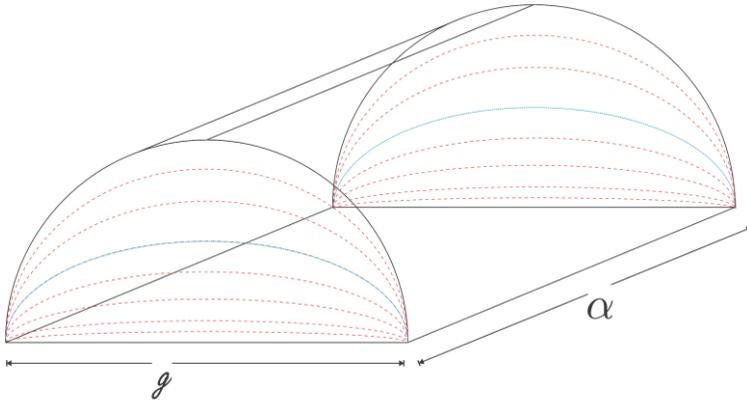
$$\mathcal{R} = \frac{\theta}{\mu\alpha \ln \left( 1 + \frac{2t}{g} \right)} \quad (3.6)$$

No desenvolvimento das fórmulas analíticas das seções subsequentes, serão feitas algumas considerações. Primeiramente, que o campo magnético e a permeabilidade magnética não variam no volume de estrutura estudada. E além disso, o campo magnético pode ser considerado sempre paralelo à linha de cálculo e à normal à superfície de cálculo.

### 3.2.3 Cilindro semicircular

Para casos onde a configuração de fluxo é conforme apresentado na Figura 3.5, pode-se desenvolver uma fórmula para o cálculo da relutância utilizando-se de algumas simplificações para aplicação na fórmula analítica simplificada da Equação (1.18).

Figura 3.5 Configuração de fluxo: Cilindro semicircular.



Fonte: Próprio autor.

Como o comprimento das linhas de fluxo variam ao longo da área de cálculo, podemos considerar que o valor médio das linhas de fluxo dentro do volume de cálculo é igual ao comprimento da linha de fluxo médio. Sendo esse valor, igual ao comprimento de uma linha traçada a meio caminho entre o diâmetro e a semicircunferência mostrada pela linha azul na Figura 3.5, e dado pela Equação (3.7), (ROTTERS, 1970).

$$l = 1,22g \quad (3.7)$$

A área para o cálculo da relutância para essa configuração é considerada como uma área média, e pode ser estimada dividindo-se o volume total do semi-cilindro pelo comprimento da linha de fluxo médio. Portanto, a área média será dada pela Equação (3.8).

$$S = \frac{\frac{\pi}{2} \left(\frac{g}{2}\right)^2 \alpha}{1,22g} \cong 0,322g\alpha \quad (3.8)$$

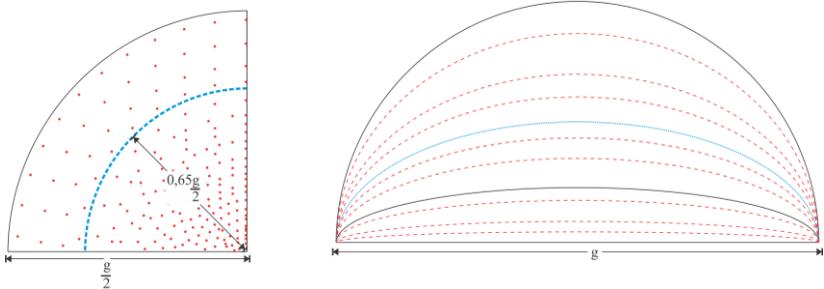
Logo, a fórmula analítica da relutância para essa peça é dada pela Equação (3.9), (ROTTERS, 1970).

$$\mathcal{R} = \frac{1,22g}{\mu 0,322g\alpha} \cong \frac{1}{0,264\mu\alpha} \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Quadrante esférico

A relutância magnética para uma configuração de fluxo da Figura 3.6 será modelada matematicamente, para isso usaremos algumas simplificações.

Figura 3.6 Configuração de fluxo: Quadrantes esféricos.



Fonte: Próprio autor.

Conforme pode ser observado nesta configuração, tanto o comprimento das linhas de fluxo como a área para o cálculo da relutância variam ao longo da peça. Desta forma, podemos ponderar essas variações pela consideração de uma superfície média que irá fornecer a linha para o cálculo do comprimento médio da linha de fluxo e a área média.

Utiliza-se uma superfície média que pode ser aproximada, considerando que a linha média de fluxo está situada à 0,65 do caminho entre o centro da esfera e a semicircunferência, conforme a linha azul tracejada na Figura 3.6.

Portanto segundo medições gráficas, o comprimento da linha média de fluxo é igual à  $1,3g$ , e dado pela Equação (3.10).

$$l = 1,3g \quad (3.10)$$

A área pode ser calculada de forma semelhante ao caso anterior, tomando o volume do quadrante esférico pelo comprimento médio da linha de fluxo, conforme apresenta a Equação (3.11).

$$S = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{g}{2}\right)^3 \frac{1}{4}}{1,3g} \cong 0,1g^2 \quad (3.11)$$

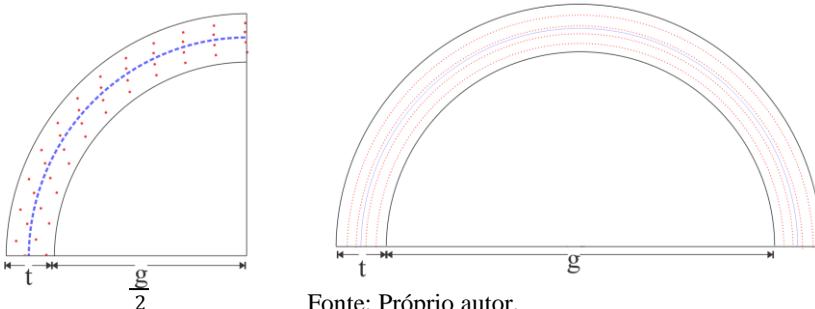
Logo, aplicando a linha de comprimento médio e a área média na Equação (1.18) obtemos na Equação (3.12) a fórmula analítica desta configuração de linhas de fluxo.

$$\mathcal{R} = \frac{1,3g}{\mu 0,1g^2} \cong \frac{13}{\mu g} \quad (3.12)$$

### 3.2.5 Quadrante de casca esférica

Nesta configuração de fluxo, apresentada graficamente na Figura 3.7 o comprimento e a densidade das linhas de fluxo não variam significativamente ao longo da peça.

Figura 3.7 Configuração de fluxo: Quadrante de casca esférica.



Fonte: Próprio autor.

Então, o comprimento da linha média de fluxo pode ser tomado na metade da casca esférica, chegando-se conseqüentemente, na Equação (3.13).

$$l = \frac{\pi}{2}(g + t) \quad (3.13)$$

Para o cálculo da área, primeiramente calculamos a área máxima transversal às linhas de fluxo no comprimento médio destas, conforme apresentado na Equação (3.14). Entretanto, como pode ser observado na Figura 3.7, a área de cálculo varia significativamente ao longo da linha média de fluxo, tendo valor nulo no início e no fim das linhas de fluxo e valor máximo no meio desta.

$$S = \frac{\pi \left(\frac{g}{2} + t\right)^2}{4} - \frac{\pi \left(\frac{g}{2}\right)^2}{4} = \frac{\pi}{4}t(t + g) \quad (3.14)$$

Desta forma, para o cálculo da relutância podemos considerar a área como sendo uma “*área média do caminho*”, dada pela metade da área máxima calculada na Equação (3.14).

Portanto, a fórmula analítica para o cálculo da relutância desta configuração é obtida na Equação (3.15), aplicando-se as Equações (3.13) e (3.14) na Equação (1.18), e levando-se em consideração a variação de área de cálculo conforme apresentado no parágrafo anterior.

$$\mathcal{R} = \frac{\frac{\pi}{2}(g + t)}{\mu \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} t(t + g)} = \frac{4}{\mu t} \quad (3.15)$$

### 3.2.6 Semicírculo e quarto de elipse de fluxo

Estas configurações de fluxo serão tratadas no próximo capítulo tendo em vista que foi necessário o uso de meios computacionais para a definição das fórmulas analíticas de relutância destas.

## 3.3 CONCLUSÃO

Como pode ser observado, foi possível desenvolver fórmulas analíticas para cada configuração pré-determinada de fluxo magnético. Estas foram desenvolvidas a partir de técnicas matemáticas e da observação do fenômeno físico que ocorre dentro de cada configuração de fluxo, principalmente em consideração a densidade das linhas de

fluxo magnético e a direção do vetor de campo magnético em relação a normal a superfície de cálculo. Conforme foi possível observar na maioria dos casos práticos, não é possível deduzir uma fórmula analítica para o cálculo da relutância magnética sem a realização de hipóteses simplificadoras. Assim, será realizado no próximo capítulo um estudo das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância magnética para cada configuração de fluxo estudada neste capítulo. A partir deste estudo serão feitas as considerações e ajustes necessários para que as fórmulas analíticas representem adequadamente os fenômenos físicos.

## 4 RELUTÂNCIAS SIMULADAS E DESENVOLVIDAS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Na seção 3.2 do capítulo 3 foram apresentadas as fórmulas analíticas para o cálculo da relutância para cada configuração de fluxo pré-determinada. Este capítulo apresenta uma análise comparativa entre os valores das relutâncias calculados através das fórmulas analíticas, previamente apresentadas, e o valor da relutância para cada configuração de fluxo calculado numericamente através de simulações realizadas no software EFCAD com a formulação potencial escalar.

Como serão realizados estudos comparativos entre o cálculo analítico e numérico com a variação na geometria das configurações de fluxo, será considerado que o material da peça em estudo apresenta permeabilidade magnética linear. Caso fosse considerado que a permeabilidade magnética do material apresenta comportamento não linear, a peça apresentaria valores de relutância variáveis não apenas com sua geometria, mas também com o valor do potencial magnético imposto, inviabilizando assim este estudo comparativo.

Por fim, no intuito de avaliar a adequação das fórmulas analíticas estudadas e desenvolvidas, será feito um estudo comparativo por intermédio da variação das dimensões de cada configuração de fluxo magnético. Através deste estudo serão realizados ajustes nas fórmulas analíticas quando necessário.

### 4.2 CONFIGURAÇÕES DE FLUXO COM SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO E AXISIMETRIA

Nos casos onde a configuração de linhas de fluxo se mantém idêntica ao longo do eixo “z” no espaço cartesiano, ou seja, possui simetria translacional, podemos tratar o problema em duas dimensões e posteriormente, multiplicar pela profundidade. Para problemas com axissimetria, ou simetria de rotação, podemos aplicar um conceito similar. Contudo, como neste caso o domínio de estudo será afetado e a densidade das linhas de fluxo também poderá variar significativamente, será necessário fazer algumas avaliações e simplificações, conforme será apresentado na seção 4.2.6.

#### 4.2.1 Superfícies planas e paralelas

Configurações de fluxo de superfícies planas e paralelas como a apresentada na Seção 3.2.1 não possuem variação na área e na densidade de linhas de fluxo no eixo de translação. Deste modo, considerando que a área da face possui quatro lados retos como apresentado na Figura 3.2,

temos que a área da face é dada pela Equação (4.1), onde “ $\alpha$ ” é a profundidade.

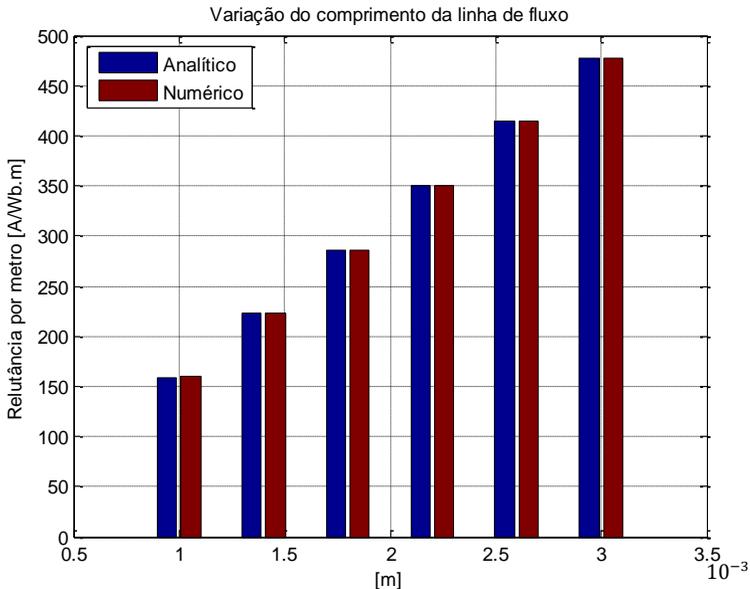
$$S = \beta\alpha \quad (4.1)$$

Logo, a fórmula analítica da relutância pela profundidade é dada pela Equação (4.2).

$$\mathcal{R}\alpha = \frac{l}{\mu\beta} \quad (4.2)$$

Conforme pode ser observada na Equação (4.2), a relutância desta configuração pode variar tanto em função do comprimento das linhas de fluxo, ou seja, da altura da peça, como em função da área de cálculo. Contudo, como iremos tratar o problema em duas dimensões o parâmetro da área que exercerá influência nesta, é representado apenas pelo parâmetro “ $\beta$ ”.

Figura 4.1 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do comprimento das linhas de fluxo.

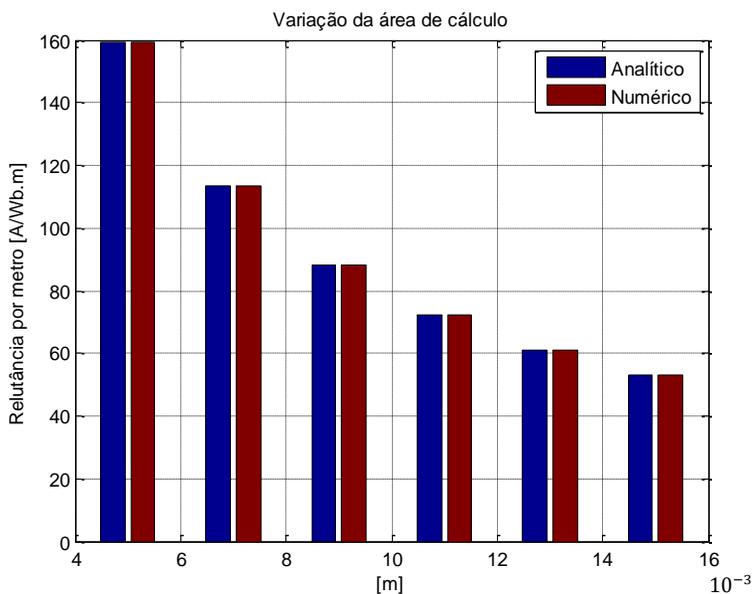


Fonte: Próprio autor.

Primeiramente foi realizado um estudo comparativo entre os valores das relutâncias para esta configuração de fluxo calculados de forma analítica e numérica. Este estudo comparativo pode ser visualizado na Figura 4.1, onde pode ser observado que o valor da relutância calculada de forma analítica é idêntico ao obtido por intermédio do cálculo numérico. A segunda análise a ser observada na Figura 4.1 é com relação a variação do comprimento das linhas de fluxo. Realizou-se uma variação de três vezes o comprimento das linhas de fluxo, mas mantendo a área de cálculo constante. Como pode ser constatado, o cálculo analítico apresenta os mesmos resultados das simulações, independentemente do valor de “ $l$ ”.

A Figura 4.2 ilustra o estudo comparativo dos valores das relutâncias calculados analiticamente e numericamente para o caso onde a área de cálculo varia, ou seja, o parâmetro “ $\beta$ ” é variável. Neste estudo também foi realizado uma variação de três vezes o parâmetro “ $\beta$ ”, mantendo o comprimento das linhas de fluxo constante. Conforme pode ser observado, o valor da relutância analítica se mantém idêntico ao valor calculado na simulação, independentemente do valor de “ $\beta$ ”.

Figura 4.2 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da área de cálculo.



Fonte: Próprio autor.

#### 4.2.2 Anel de fluxo magnético

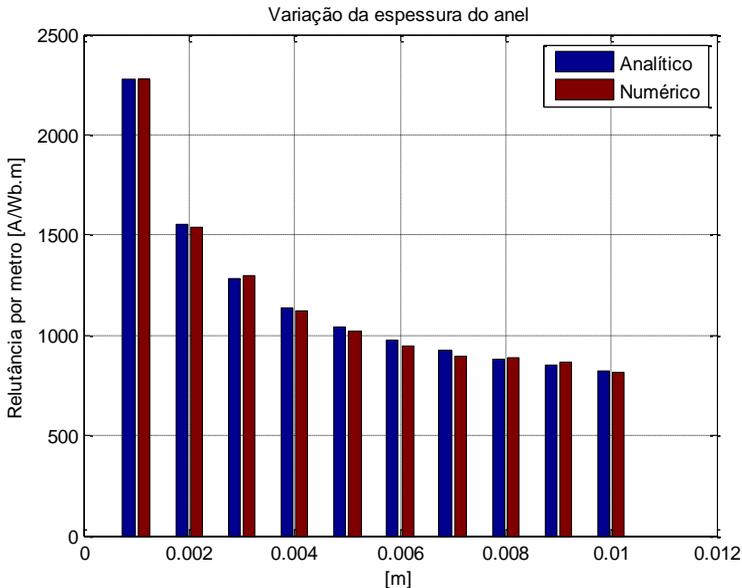
A configuração de fluxo em anel possui, assim como a configuração apresentada na Seção 4.2.1, simetria de translação. Deste modo, podemos reescrever a fórmula analítica da relutância apresentada na Equação (3.6) em função da profundidade, conforme ilustrado na Equação (4.3).

$$\mathcal{R}\alpha = \frac{\theta}{\mu \ln\left(1 + \frac{2t}{g}\right)} \quad (4.3)$$

Segundo pode ser visualizada na Equação (4.3) e na Figura 3.3, a relutância desta configuração pode variar em função da espessura, do diâmetro interno e do comprimento do arco do anel de fluxo.

É realizado primeiramente um estudo comparativo entre os valores das relutâncias para esta configuração de fluxo, calculados de forma analítica e numérica.

Figura 4.3 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da espessura do anel de fluxo.

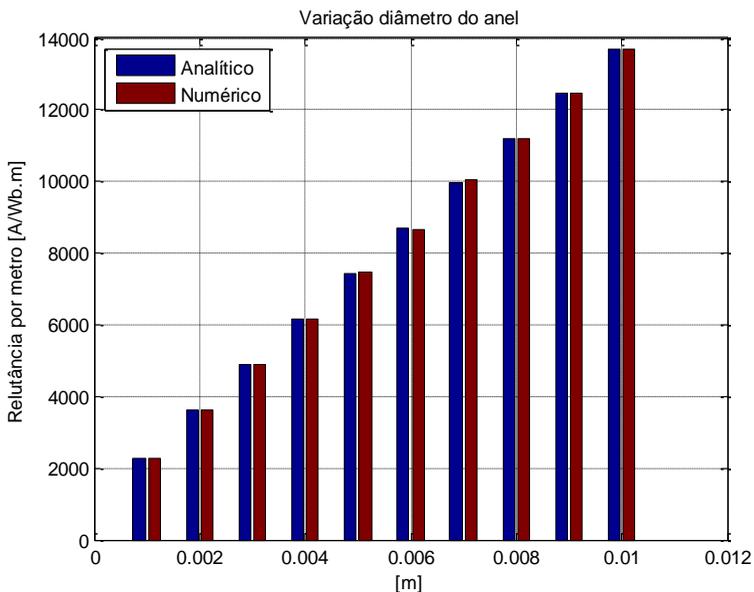


Fonte: Próprio autor.

Este estudo comparativo pode ser visualizado na Figura 4.3, onde se observa que o valor da relutância calculada de forma analítica pode ser considerado praticamente idêntico ao obtido por intermédio do cálculo numérico.

O segundo estudo a ser observado na Figura 4.3 é com relação a variação da espessura do anel de fluxo. A espessura do anel de fluxo é dada pela variável “ $t$ ” na equação analítica da relutância, (Equação (4.3)). Deste modo, foi realizada uma variação de uma à dez vezes o parâmetro “ $t$ ”, mas mantendo os demais parâmetros constantes. Como pode ser constatado, o cálculo analítico apresenta resultados extremamente próximos às simulações numéricas, independente do valor de “ $t$ ”.

Figura 4.4 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do anel de fluxo.



Fonte: Próprio autor.

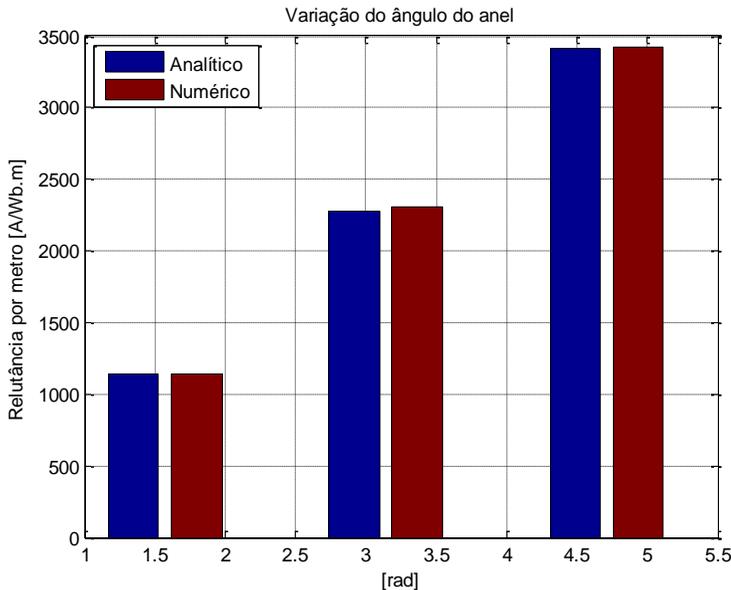
Em sequência, faz-se o estudo comparativo dos valores analíticos e numéricos da relutância considerando uma variação no diâmetro interno do anel de fluxo. O diâmetro interno é representado neste estudo pela variável “ $g$ ” na Equação (4.3). Logo, realizou-se uma variação de uma a dez vezes este parâmetro, mas mantendo os demais

parâmetros constantes, sendo os resultados apresentados na Figura 4.4. Nota-se que, assim como no caso anterior os valores das relutâncias obtidos analiticamente e por intermédio de simulações são praticamente idênticos.

Por fim, foi realizado o estudo comparativo com a variação do comprimento do arco do anel, cujos resultados estão apresentados na Figura 4.5. Neste estudo foram avaliados três anéis de comprimentos,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$ , e mantendo as demais parâmetros constantes.

Conforme pode ser visto na Figura 4.5, assim como nos casos anteriores, os valores das relutâncias calculadas analiticamente são extremamente próximos aos obtidos nas simulações numéricas, afirmando desta forma a boa aplicabilidade da Equação (4.3) para esta configuração de fluxo.

Figura 4.5 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do ângulo do anel de fluxo.



Fonte: Próprio autor.

### 4.2.3 Cilindro semicircular

Partindo da Equação (3.9) pode-se escrever a fórmula analítica da relutância para esta configuração de fluxo em função da profundidade, conforme ilustra a Equação (4.4).

$$\mathcal{R}\alpha = \frac{1}{0,264\mu} \quad (4.4)$$

Observando a Equação (4.4), nota-se que o valor da relutância depende somente da permeabilidade magnética, ou seja, não depende das dimensões da peça. Ao realizar simulações desta configuração para diversas dimensões, observa-se que os valores das relutâncias obtidos não variam com as dimensões das configurações, conforme ilustrado na Figura 4.6.

No entanto, de acordo como está ilustrado na Figura 4.6, nota-se que a relutância calculada numericamente é praticamente o dobro daquela obtida da forma analítica.

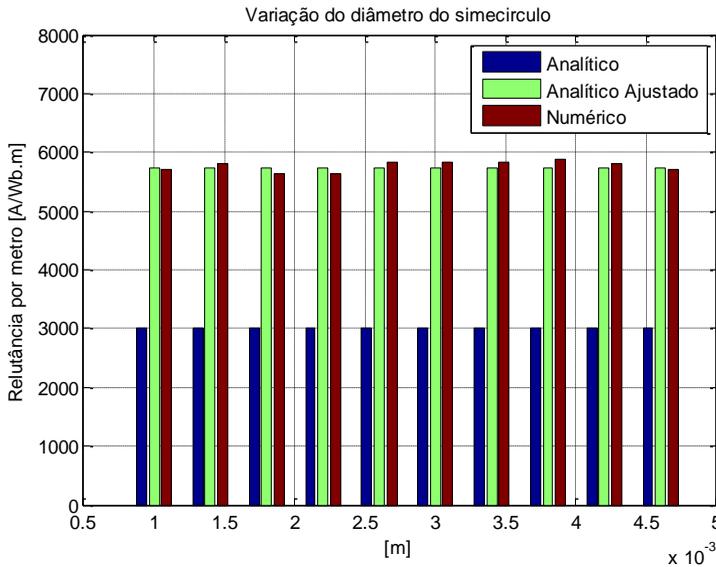
Assim sendo, realizou-se um ajuste via MATLAB no comprimento da linha média de fluxo que havia sido estimado graficamente em (ROTTERS, 1970). Logo, a fórmula analítica para o cálculo da relutância desta configuração será representada pela Equação (4.5).

$$\mathcal{R}\alpha = \frac{1}{0,139\mu} \quad (4.5)$$

Apesar da fórmula analítica da relutância não ser função das dimensões da configuração em questão, foram realizadas simulações numéricas onde o diâmetro é variado de uma a até cinco vezes seu tamanho inicial para avaliar sua aplicabilidade.

Comparando os valores das relutâncias calculadas através da simulação numérica, com a fórmula analítica, dada pela Equação (4.4), e com fórmula analítica ajustada, dada pela Equação (4.5), observa-se que a fórmula analítica ajustada para o cálculo da relutância desta configuração apresenta valores extremamente próximos dos obtidos na simulação, assegurando assim o uso da Equação (4.5) para configurações de fluxo como à apresentada nesta Seção.

Figura 4.6 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do semicírculo.



Fonte: Próprio autor.

#### 4.2.4 Semicírculo de fluxo

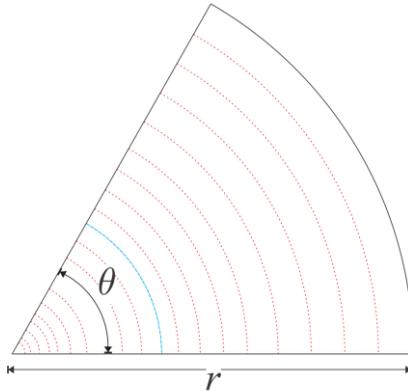
A fórmula analítica da relutância para a configuração de fluxo magnético a ser apresentada nesta seção foi desenvolvida de modo a complementar as demais configurações de fluxo apresentadas na Seção 3.2 para a modelagem da relutância dos dispositivos eletromagnéticos.

A configuração de fluxo a ser analisada está apresentada na Figura 4.7. Pode-se observar que as linhas de fluxo formam semicírculos cujos raios variam desde o raio externo “ $r$ ”, até zero. Pode-se considerar que o campo magnético não varia ao longo da linha de cálculo e que esta será uma linha de fluxo médio pré-estabelecida, como no caso da configuração de fluxo do cilindro semicircular.

O comprimento da linha de fluxo médio é igual ao ângulo do semicírculo “ $\theta$ ” multiplicado pelo raio onde esta linha se encontra, mostrado na Figura 4.7 pela linha em azul. Como há maior concentração das linhas de fluxo no centro do semicírculo, não se pode afirmar em primeira instância sobre qual o fator exatamente o raio máximo será reduzido para se obter o raio da linha de fluxo médio. Portanto,

representaremos este fator pela variável "x" até que o valor desta seja determinado.

Figura 4.7 Configuração de fluxo: Semicírculo de fluxo.



Fonte: Próprio autor.

Observado a Figura 4.7, nota-se que a área de cálculo se mantém constante ao longo da linha de fluxo médio, e é dada pelo produto do raio da configuração "r" por sua profundidade "α". Considerando-se que não há variação do campo magnético na área de cálculo, podemos escrever a fórmula analítica da relutância para esta configuração conforme a Equação (4.6).

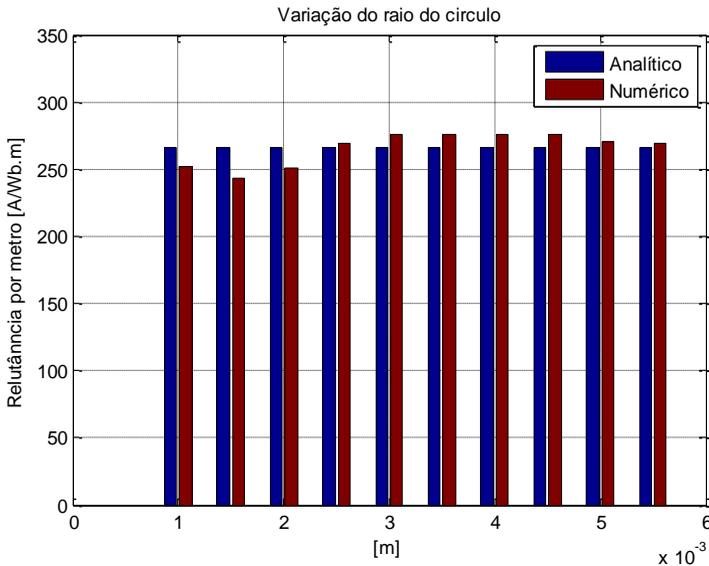
$$\mathcal{R} = \frac{\theta \left( \frac{r}{x} \right)}{\mu r \alpha} \quad (4.6)$$

Para definir o parâmetro "x" foram realizadas uma série de simulações considerando variações nas dimensões da configuração em análise. A partir destas simulações foi realizada uma média dos valores de "x" chegando-se ao valor de 4,7041, ou seja, o raio da linha de fluxo médio é localizado aproximadamente à um quarto do raio da configuração. Logo, a fórmula analítica desta configuração de fluxo em função da sua profundidade é dada pela Equação (4.7).

$$\mathcal{R} \alpha = \frac{\theta}{\mu 4,7041} \quad (4.7)$$

A Figura 4.8 ilustra o estudo comparativo entre o valor da relutância desta configuração de fluxo calculado analiticamente e numericamente. Como pode ser observado, os valores das relutâncias calculadas numericamente são muito próximos daqueles calculados analiticamente, independentemente do raio da configuração em análise.

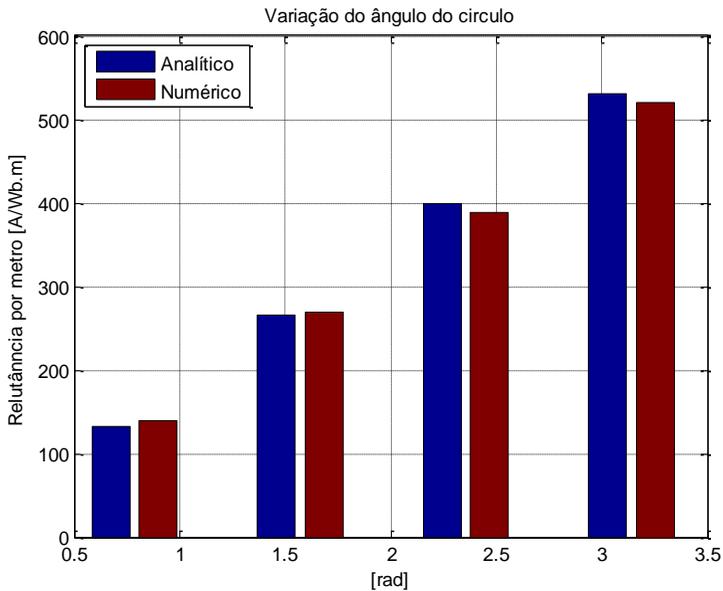
Figura 4.8 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do raio do semicírculo.



Fonte: Próprio autor.

O mesmo ocorre na Figura 4.9, onde realizaram-se variações no ângulo do semicírculo e como pode ser averiguado, independentemente do ângulo da configuração, a fórmula analítica apresentou resultados muito próximos dos obtidos numericamente, assegurando assim, o uso da Equação (4.7) desenvolvida para este tipo de configuração de fluxo.

Figura 4.9 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do ângulo do semicírculo.



Fonte: Próprio autor.

#### 4.2.5 Quarto de elipse de fluxo

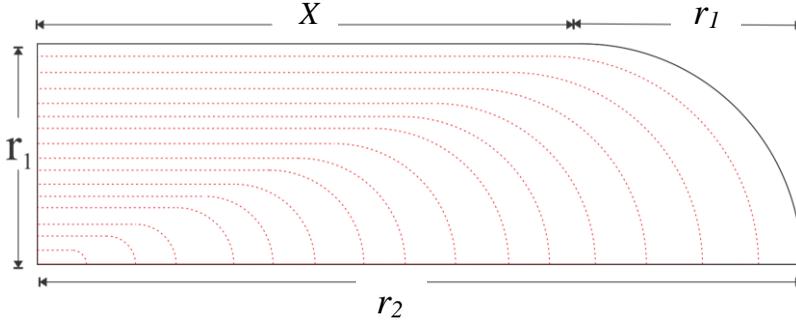
A configuração de fluxo apresentada nesta seção é muito comum em “dentes” de máquinas. No intuito de complementar as demais fórmulas analíticas estudadas anteriormente na Seção 3.2, foi desenvolvida a fórmula analítica da relutância para a configuração de fluxo magnético a ser apresentada nesta Seção.

A configuração de fluxo a ser analisada está apresentada na Figura 4.10. Pode-se observar que as linhas de fluxo formam figuras geométricas parecidas com um quarto de uma elipse. Logo, será usado esta denominação para nos referir a esta configuração de fluxo. A geometria da peça foi modelada conforme é apresentado na Figura 4.10, onde a configuração de fluxo apresenta um lado menor “ $r_1$ ” e um lado maior “ $r_2$ ”.

A configuração de fluxo foi desenvolvida de tal forma a se aproximar o máximo possível da configuração de fluxo correspondente obtida na modelagem de um dispositivo completo. Observando a carta de campo de vários casos, nota-se que a melhor forma de representar

estas configurações é com uma linha reta de comprimento “ $x$ ”, com um semicírculo em uma de suas extremidades de raio igual ao menor lado “ $r_1$ ” da configuração. Deste modo, o lado maior “ $r_2$ ” será dado pela soma do valor da reta “ $x$ ” e do lado menor “ $r_1$ ”.

Figura 4.10 Configuração de fluxo: quarto de elipse.



Fonte: Próprio autor.

Para a determinação de uma fórmula analítica que permita calcular a relutância desta configuração, foram realizadas simulações com a variação da geometria da configuração em estudo. Observa-se que se variarmos “ $r_2$ ” ou variarmos “ $r_1$ ” a configuração de fluxo apresentará resultados similares, partindo de “ $x$ ” igual a zero. Desta forma, optou-se por variar o parâmetro “ $x$ ”, consequentemente “ $r_2$ ” e “ $r_1$ ” mantendo-se constante.

Comparando a configuração de fluxo desta Seção com a apresentada na Seção 4.2.4 nota-se que estas são idênticas para o caso em que “ $x$ ” é nulo. Logo, quando “ $x$ ” for nulo os valores das relutâncias destas configurações devem ser iguais ou muito próximos. Partindo deste pressuposto, foi desenvolvida uma fórmula analítica para o cálculo da relutância desta configuração de fluxo, conforme está apresentado na Equação (4.8).

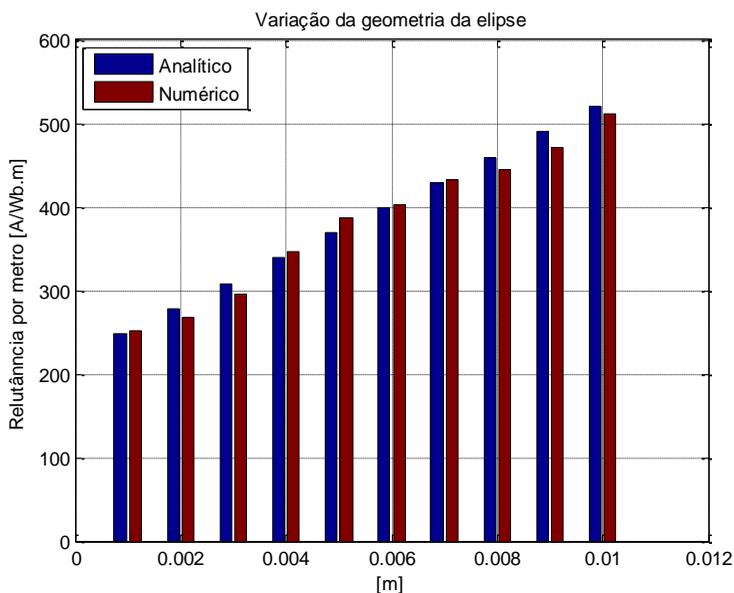
$$\mathcal{R}\alpha = \frac{\pi}{2\mu 4,7041} \left[ \frac{0,1136r_2}{r_1} + 0,82077 \right] \quad (4.8)$$

Observando que os valores das relutâncias calculados numericamente apresentaram o comportamento de uma reta com inclinação proporcional a variação de “ $r_2$ ”, e que o valor da relutância

para quando “ $x$ ” é nulo é igual ao valor calculado pela Equação (4.7), foi utilizado o Toolbox Curve Fitting Tool do Matlab 7.12.0 para ajustar uma curva que se adequasse ao comportamento físico da configuração de fluxo.

A Figura 4.11 apresenta o comparativo dos resultados obtidos pelo cálculo numérico e analítico, calculados através da fórmula desenvolvida, para a configuração de fluxo em questão com o parâmetro “ $x$ ” variando de zero a nove milímetros, um aumento de dez vezes. Como pode ser observado na Figura 4.11, a fórmula analítica desenvolvida apresentou bons resultados em comparação com as simulações, assegurando assim sua aplicação em configurações de fluxos semelhantes à apresentada na Figura 4.10.

Figura 4.11 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da geometria da elipse



Fonte: Próprio autor.

#### 4.2.6 Aplicação das configurações de fluxo com simetria de translação para os casos axissimétricos

As configurações de fluxo estudadas neste Capítulo até o presente momento possuem simetria de translação, ou seja, foram simuladas e analisadas no eixo planar.

Todavia, tais configurações podem ser aplicadas a casos axissimétricos, desde que sejam feitas algumas considerações. Primeiramente, observa-se que nos casos axissimétricos a profundidade não é um parâmetro constante, mas que aumenta em sentido radial. Outro fator importante a ser considerado é com relação à densidade das linhas de fluxo, que tende a diminuir com aumento do raio.

Deste modo, uma forma de utilizarmos as fórmulas analíticas dos casos planares em casos axissimétricos é considerando a profundidade relativa da configuração de fluxo calculada no centro geométrico desta no plano em duas dimensões.

### 4.3 CONFIGURAÇÕES DE FLUXO TRIDIMENSIONAIS

#### 4.3.1 Quadrante esférico

A fórmula analítica para o cálculo da relutância desta configuração foi desenvolvida na Seção 3.2.4, e é apresentada novamente na Equação (4.9).

$$\mathcal{R} = \frac{13}{\mu g} \quad (4.9)$$

Observando a Equação (4.9) nota-se que o valor da relutância desta configuração depende do material e do diâmetro do quadrante esférico. Contudo, como o objetivo do presente estudo é avaliar a adequação da fórmula analítica para o cálculo da relutância à cada configuração de fluxo, foi realizado um estudo comparativo através da variação do diâmetro do quadrante esférico somente.

Foram realizadas simulações a partir de um arco de  $180^\circ$ , de diâmetro “ $g$ ”, com rotação de  $360^\circ$ . Contudo, como estamos calculando apenas um quadrante da esfera, ou seja  $90^\circ$ , foi considerado para o cálculo da relutância numérica apenas um quarto do fluxo magnético calculado na simulação.

Ao realizar a simulação desta configuração de fluxo para determinadas dimensões, de acordo como ilustrado na Figura 4.12, nota-se que as relutâncias calculadas numericamente apresentam uma variação próxima da variação dos valores das relutâncias calculadas analiticamente. Contudo, seus valores são significativamente distintos.

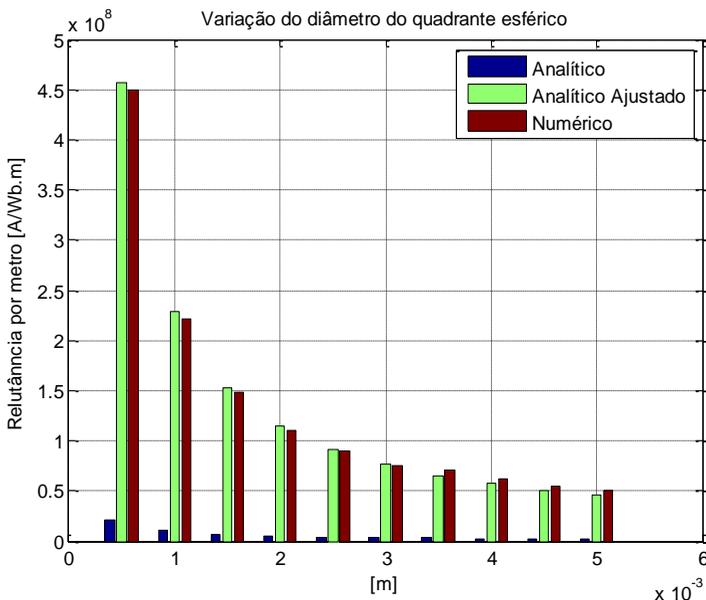
Deste modo, utilizou-se o Toolboxe Curve Fitting Tool do Matlab 7.12.0 para ajustar uma curva que se adequasse aos valores da relutância desta configuração de fluxo. Como a variação no valor da relutância em função do diâmetro é próxima se comparado os resultados

analíticos e numéricos, foi possível realizar um ajuste alterando apenas a localização da linha de fluxo médio, e consequentemente o valor do comprimento médio da linha de fluxo. Logo, a fórmula analítica ajustada para o cálculo da relutância desta configuração é dada pela Equação (4.10).

$$\mathcal{R} = 22,11 \left[ \frac{13}{\mu g} \right] = \frac{287,43}{\mu g} \quad (4.10)$$

Foram realizadas simulações com a variação de até dez vezes o diâmetro do quadrante esférico. A Figura 4.12 apresenta a comparação entre os valores das relutâncias calculadas através da simulação numérica com os valores obtidos com a fórmula analítica sem ajuste (Equação (4.9)) e com a fórmula analítica ajustada (Equação (4.10)). Observa-se que a fórmula analítica ajustada para o cálculo da relutância desta configuração apresenta valores extremamente próximos dos obtidos na simulação, assegurando assim o uso da Equação (4.10) para configurações de fluxo correspondente.

Figura 4.12 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro do quadrante esférico



Fonte: Próprio autor.

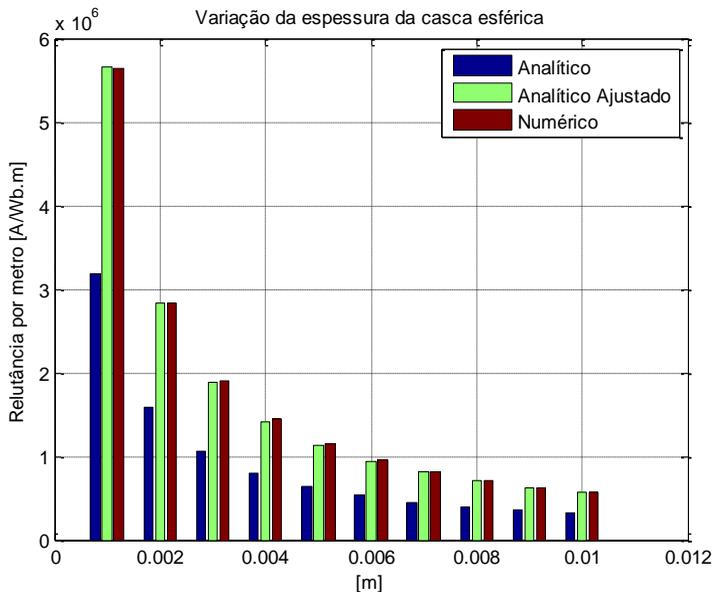
### 4.3.2 Quadrante de casca esférica

Na Seção 3.2.5 foi apresentado o desenvolvimento da fórmula analítica para o cálculo da relutância desta configuração de fluxo, ilustrado na Equação (3.15).

No intuito de averiguar a aplicabilidade da fórmula analítica foram realizadas diversas simulações, variando tanto a espessura como o diâmetro da casca esférica. As simulações foram realizadas a partir de um arco de  $180^\circ$ , de diâmetro “ $g$ ” e espessura “ $t$ ”, com rotação de  $360^\circ$ . Contudo, como estamos calculando um quadrante da casca esférica, ou seja,  $90^\circ$  foi considerado para o cálculo da relutância numérica apenas um quarto do fluxo magnético calculado na simulação.

A Figura 4.13 apresenta o estudo comparativo dos valores da relutância calculados analiticamente através da Equação (3.15) e numericamente para uma variação da espessura da casca esférica de até dez vezes seu valor inicial, mas mantendo seu diâmetro constante.

Figura 4.13 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação da espessura da casca esférica



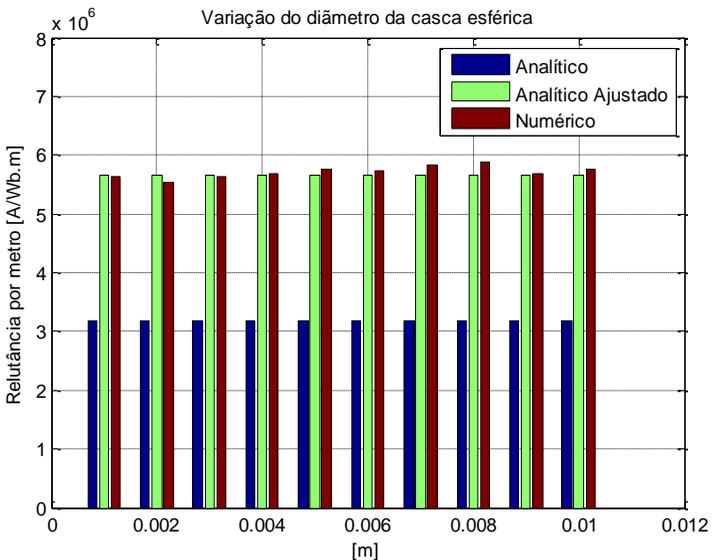
Fonte: Próprio autor.

Já a Figura 4.14 também apresenta um estudo comparativo dos valores da relutância calculados analítica e numericamente, mas para uma variação do diâmetro da casca esférica de até dez vezes seu valor inicial.

Observando ambas as figuras nota-se uma diferença significativa entre os valores calculados para as mesmas dimensões da configuração de fluxo em estudo. Assim, foi realizado um ajuste na fórmula analítica ilustrada na Equação (3.15) através do Toolbox Curve Fitting Tool do Matlab 7.12.0. Chega-se, portanto, à fórmula analítica ajustada para o cálculo da relutância desta configuração mostrada na Equação (4.11).

$$\mathcal{R} = 1,778 \left[ \frac{4}{\mu t} \right] = \frac{7,112}{\mu t} \quad (4.11)$$

Figura 4.14 Comparativo entre o cálculo analítico e o numérico da relutância e com a variação do diâmetro da casca esférica



Fonte: Próprio autor.

Utilizando a Equação (4.11) foi traçado na Figura 4.13 e na Figura 4.14 os novos valores de relutância calculados analiticamente para cada geometria correspondente. Observando a fórmula analítica ajustada, nota-se que esta depende apenas da espessura do anel e é inversamente proporcional a este parâmetro.

Como é possível observar na Figura 4.13, os valores das relutâncias calculados decaem conforme a espessura da casca esférica aumenta, conforme o esperado, e também pode-se visualizar que a fórmula analítica ajustada apresenta resultados muito próximos dos resultados obtidos numericamente.

Por fim, apesar da fórmula analítica não ser função do diâmetro da casca esférica, foram realizadas simulações com a variação deste parâmetro para análise da adequação da fórmula ajustada.

Como pode ser visualizado na Figura 4.14, os valores das relutâncias calculados analiticamente, através da fórmula analítica ajustada, e por intermédio de simulações são próximos e não variam com a variação do diâmetro da casca esférica. Portanto, afirmando assim o uso da Equação (4.11) para o cálculo analítico da relutância desta configuração de fluxo.

#### 4.4 CONCLUSÃO

O presente capítulo apresentou estudos comparativos da viabilidade prática das fórmulas analíticas para o cálculo da relutância em determinadas configurações de fluxo apresentadas na Seção 3.2 em comparação com o cálculo numérico. Conforme foi possível observar a maioria das fórmulas analíticas apresentadas na Seção 3.2 apresentaram resultados satisfatórios em comparação com os resultados numéricos.

Entretanto, deve ser observado que as fórmulas analíticas apresentadas na Seção 3.2 sem auxílio computacional, apresentaram boa adequação à variação de suas grandezas, necessitando apenas de um ajuste numérico.

No intuito de complementar as configurações de fluxo comumente encontradas no funcionamento dos dispositivos eletromagnéticos, foram desenvolvidas fórmulas analíticas baseadas nos estudos previamente realizados e nas simulações realizadas.

## 5 APLICAÇÃO DO MODELO DE RELUTÂNCIA AO ALTO FALANTE

### 5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta o estudo de um alto falante através da aplicação da metodologia proposta neste trabalho. O dispositivo foi obtido de um exemplo teórico retirado de (PARKER, 1990). Primeiramente é feita a apresentação do dispositivo em estudo, seu funcionamento, suas dimensões e os materiais com os quais o dispositivo é composto. Nesta etapa é apresentada a região de interesse em seu projeto e funcionamento, o entreferro, onde é necessário saber o valor de indução magnética gerada pelo ímã permanente, para a determinação dos demais parâmetros de funcionamento do dispositivo.

No intuito de analisar a aplicabilidade da metodologia proposta neste trabalho é, então, feito o desenvolvimento do circuito magnético do dispositivo de forma gradual. Primeiramente consideram-se apenas as relutâncias do ímã permanente e do entreferro através da metodologia clássica, pela Lei de Ampère, e pela metodologia proposta.

Em sequência no intuito de melhor representar analiticamente o dispositivo, é levado em consideração o fluxo magnético disperso através das fórmulas analíticas da relutância estudadas nos Capítulos 3 e 4. Em seguida é feita a abordagem do circuito equivalente magnético considerando, além do fluxo disperso, a relutância oferecida pelo núcleo de ferro com permeabilidade magnética linear à passagem do fluxo. Por último, considera-se as relutâncias no núcleo ferromagnético com permeabilidade magnética não linear.

É então feito um estudo comparativo entre os valores de indução magnéticas obtidos de forma analítica, através do método proposto neste trabalho e os mesmos calculados numericamente através de simulações realizadas no software EFCAD.

### 5.2 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

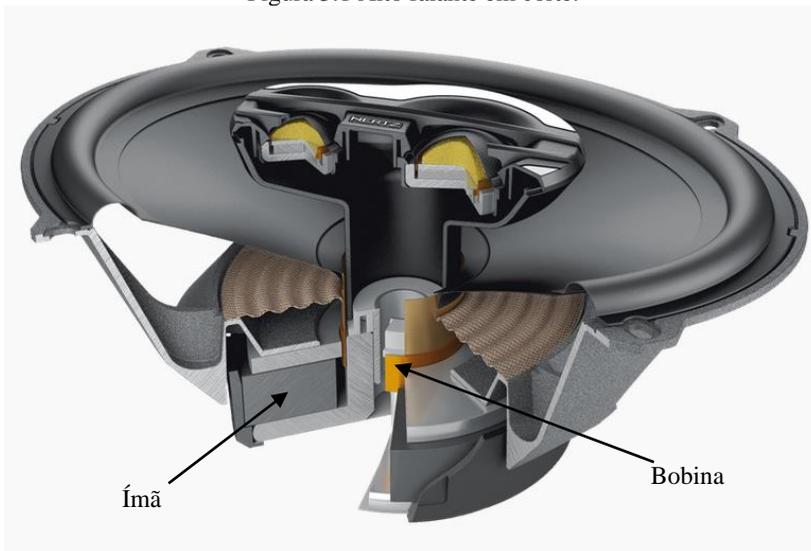
Alto falantes são dispositivos eletromecânicos que utilizam a interação eletromagnética para produzir vibrações mecânicas em frequências audíveis. De modo simplificado, pode-se descrever o funcionamento de um alto falante da seguinte forma. O ímã permanente presente no circuito magnético do alto falante, ilustrado na Figura 5.1, produz um campo magnético normal à face do dente do núcleo de ferro e constante no tempo e no espaço.

A bobina móvel presente no entreferro, ilustrada na Figura 5.1, é então percorrida por uma corrente elétrica variável no tempo conforme

o som que se pretende produzir. Sabe-se da teoria do Eletromagnetismo, que uma corrente elétrica variável no tempo produz uma densidade de fluxo magnético também variável no tempo.

A interação física entre o campo magnético constante gerado pelo ímã e o campo magnético variável no tempo gerado pela corrente elétrica que percorre a bobina móvel irá gerar uma força sobre a bobina conhecida como força de Laplace (BASTOS, 2008). Essa força dá origem ao movimento da centragem e do cone, ocasionando também a movimentação do ar na mesma frequência, gerando a onda sonora.

Figura 5.1 Alto falante em corte.



Fonte: (Hertz MPX 690.3 PRO, 2014)<sup>1</sup>

### 5.3 DISPOSITIVO EM ANÁLISE

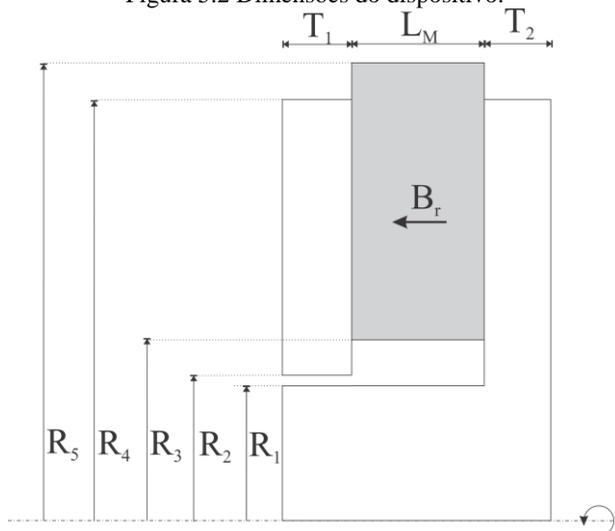
Conforme apresentado na Seção 5.2, o princípio do funcionamento de um alto falante ocorre pela interação eletromagnética entre o núcleo magnético e a bobina móvel de corrente, e a força resultante desta interação. A parte fundamental do projeto de um alto falante é o cálculo da indução magnética gerada pelo ímã permanente no

<sup>1</sup> O dispositivo apresentado na Figura 5.1 é meramente ilustrativo, não apresentando portanto, correlação em termos dimensionais com o dispositivo em estudo neste capítulo.

entreferro, pois com essa grandeza e a margem de variação do valor da corrente elétrica aplicada na bobina calcula-se a força que será aplicada sobre a bobina móvel, e dimensionam-se as demais partes mecânicas do alto falante.

O núcleo eletromagnético do alto falante é composto por um núcleo de ferro com um ímã permanente para a geração de um campo magnético constante no entreferro. No entreferro está localizada a bobina móvel de corrente, conforme está apresentado na Figura 5.1.

Figura 5.2 Dimensões do dispositivo.



Fonte: Próprio autor.

Considera-se que o fluxo magnético gerado pelo ímã sofre pouca influência das demais partes do alto falante, incluindo a bobina móvel. Podemos limitar o estudo para o cálculo da indução gerada pelo ímã no entreferro e no núcleo magnético do dispositivo. Conforme apresentado na Figura 5.2 e na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Dimensões do dispositivo

<b>R<sub>1</sub></b>	1,27 cm	<b>R<sub>5</sub></b>	4,30 cm
<b>R<sub>2</sub></b>	1,37 cm	<b>L<sub>M</sub></b>	1,25 cm
<b>R<sub>3</sub></b>	1,70 cm	<b>T<sub>1</sub></b>	0,64 cm
<b>R<sub>4</sub></b>	3,95 cm	<b>T<sub>2</sub></b>	0,64 cm
Entreferro - <b>L<sub>g</sub></b>			0,10 cm

Fonte: Próprio autor.

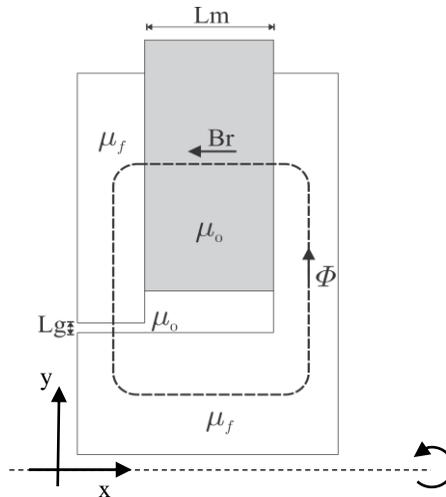
Em posse do dispositivo e de suas dimensões é apresentado nas seções subsequentes o estudo analítico do dispositivo, o desenvolvimento de circuito equivalente magnético, a simulação do dispositivo, e por fim, a comparação entre as modelagens apresentadas para o cálculo da indução no entreferro.

#### 5.4 CÁLCULO ANÁLITICO PELA LEI DE AMPÈRE E PELA CONSERVAÇÃO DE FLUXO

A Lei de Ampère é descrita pela Equação (5.1), obtida pela desconsideração da corrente de deslocamento na Equação (1.11). Observando-se que no dispositivo em análise não há fonte de corrente, logo temos a Equação (5.1) igual a zero.

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5.1)$$

Figura 5.3 Esquemático para aplicação da Lei de Ampère e Lei de Gauss.



Fonte: Próprio autor

(5.2)

$$H_i L_M + H_f L_f + H_g L_g = 0$$

Sendo:

- $H_i$  : Campo magnético no ímã;
- $L_M$  : Comprimento da linha do caminho médio do fluxo magnético no ímã permanente;
- $H_f$  : Campo magnético no ferro;
- $L_f$  : Comprimento da linha do caminho médio do fluxo magnético no núcleo de ferro;
- $H_g$  : Campo magnético no entreferro;
- $L_g$  : Comprimento da linha do caminho médio do fluxo magnético no entreferro.

Primeiramente, aplica-se a Lei de Ampère no caminho fechado que passa pelo ímã permanente, pelo entreferro e pelo núcleo de ferro do dispositivo, conforme é apresentado na Figura 5.3. Admitindo-se que os campos são constantes em suas respectivas zonas, a circulação do campo magnético ao longo do caminho médio de fluxo é dada pela Equação (5.2).

Considerando que o circuito magnético não trabalha saturado e que  $\mu_f \gg \mu_0$  (ou permeabilidade do ferro infinita), podemos supor que a circulação do campo magnético no meio ferromagnético é desprezível já que o campo magnético no ferro é muito menor do que o campo magnético no entreferro e no ímã permanente. A partir dessas hipóteses podemos simplificar a Equação (5.2) na Equação (5.3).

$$H_i L_M + H_g L_g = 0 \tag{5.3}$$

Observando a Equação (5.3) vemos que esta possui duas incógnitas, deste modo, necessitamos de mais uma equação para resolver o sistema. Aplicamos a Lei de Gauss magnética, apresentada na Seção 1.4, ao dispositivo em análise, supondo que todo o fluxo produzido pelo ímã permanente passa pelo entreferro, ou seja, não há fluxo disperso e obtemos a Equação (5.4).

$$\Phi_i = \Phi_g \tag{5.4}$$

Sendo:

- $\Phi_i$ : Fluxo magnético que passa pelo ímã permanente;
- $\Phi_g$ : Fluxo magnético que passa pelo entreferro.

Considerando que não há variação da indução magnética na área de cálculo e que o fluxo magnético é perpendicular a esta, podemos reescrever a Equação (5.4) na Equação (5.5). Deve ser observado para os cálculos da área que a figura apresenta axissimetria em relação ao eixo das abcissas.

$$B_i S_i = B_g S_g \quad (5.5)$$

Sendo:

- $B_i$ : Indução magnética no ímã permanente;
- $S_i$ : Área do ímã permanente normal ao fluxo magnético;
- $B_g$ : Indução magnética no entreferro;
- $S_g$ : Área do entreferro normal ao fluxo magnético (calculada no centro do entreferro).

Onde a indução magnética no entreferro é dada pela relação constitutiva apresentada na Equação (5.6).

$$B_g = \mu_0 H_g \quad (5.6)$$

A inserção da Equação (5.4) acabou por acrescentar mais uma variável desconhecida no sistema de equações, a indução magnética no ímã, portanto necessitamos de mais uma equação para tornar o sistema determinado. Para tanto, podemos fazer o uso da equação característica do ímã permanente, Equação (5.7), onde  $B_r$  é a indução remanente do ímã permanente do dispositivo, que neste exemplo é igual à 0,4 T.

$$B_i = \mu_0 H_i + B_r \quad (5.7)$$

Resolvendo o sistema de equações dado pelas Equações (5.3), (5.5) e (5.7) de modo a isolar a indução magnética no entreferro chegamos a Equação (5.8).

$$B_g = \frac{B_r S_i}{S_g} \left[ \frac{L_M S_g}{L_M S_g + L_g S_i} \right] \quad (5.8)$$

A área do ímã permanente e do entreferro perpendicular ao fluxo magnético produzido pelo ímã é  $49 \text{ cm}^2$  e  $5,308 \text{ cm}^2$  respectivamente. Por fim, aplicando os demais dados numéricos, chega-se ao valor de  $2,1242 \text{ T}$  de indução magnética no entreferro calculado através Lei de Ampère e Lei de Gauss.

### 5.5 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO INFINITA E SEM DISPERSÃO

Como apresentado no Capítulo 1, uma forma prática para representar e estudar o comportamento de dispositivos eletromagnéticos é modelá-los como um circuito equivalente magnético. Desta forma, será apresentado nesta seção a modelagem em um circuito equivalente magnético do dispositivo em análise neste capítulo.

Para tanto, será utilizando a metodologia proposta neste trabalho, de modo a realizar uma comparação entre a dificuldade na aplicação do método proposto e o resultado obtido através deste e a aplicação da Lei de Ampère o resultado obtido com esta.

Assim como ocorreu na aplicação da Lei de Ampère, será considerado que não há dispersão na região do entreferro e que todas as linhas de fluxo saem paralelas à normal a superfície a face do dente superior e entram paralelas e com sentido oposto à normal a superfície do dente inferior.

De forma similar, será considerado que não há dispersão na região fora do núcleo magnético, ou seja, o núcleo de ferro conduz ao entreferro todas as linhas de fluxo geradas pelo ímã permanente. Afinal, será considerado que a permeabilidade magnética do material é infinita, de modo que, a relutância no ferro pode ser desprezada, da mesma forma como foi considerado na aplicação da Lei de Ampère pela desconsideração do campo magnético no ferro.

Com a desconsideração do fluxo disperso, temos que todo o fluxo magnético gerado pelo ímã permanente irá passar pelo próprio ímã permanente, pelo ferro e pelo entreferro. Contudo, como assumimos nesta análise que o ferro não irá oferecer relutância a passagem do fluxo magnético, nos resta para modelar apenas a relutância oferecida pelo ímã permanente e pelo entreferro.

Como estamos analisando a capacidade do ímã permanente de induzir campo magnético no entreferro, não é necessário incluir a bobina móvel nesta análise, assim temos que o entreferro é composto unicamente por ar, logo, possui uma permeabilidade magnética igual a “ $\mu_0$ ” e irá oferecer uma relutância à passagem do fluxo magnético denominada neste trabalho de “ $\mathcal{R}_{10}$ ”.

Por fim, o ímã permanente utilizado nesse dispositivo é de ferrite e possui uma permeabilidade magnética igual a permeabilidade magnética do ar. Por conseguinte, irá oferecer uma relutância a passagem do fluxo magnético criado por ele próprio e intitulado neste trabalho de “ $\mathcal{R}_1$ ”.

Analisando o funcionamento do dispositivo observa-se que as relutâncias “ $\mathcal{R}_{10}$ ” e “ $\mathcal{R}_1$ ” apresentam uma configuração de fluxo similar a configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas, desenvolvida na Subseção 3.2.1 deste trabalho. Assim, aplica-se a Equação (3.3) para calcular essas relutâncias, realizando as devidas considerações com relação ao comprimento das linhas de fluxo e as áreas de cálculo.

Chegamos, portanto as Equações (5.9) e (5.10), observa-se que, como descrito na Subseção 4.2.6, foi utilizado o centro da configuração de fluxo para o cálculo da área da relutância no entreferro (“ $\mathcal{R}_{10}$ ”).

$$\mathcal{R}_{10} = \frac{L_g}{\mu_0 2\pi \left[ \frac{R_2 - R_1}{2} + R_1 \right] T_1} \quad (5.9)$$

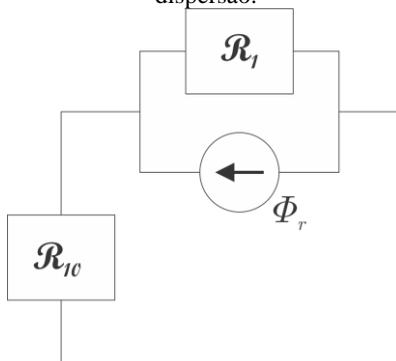
$$\mathcal{R}_1 = \frac{L_M}{\mu_0 \pi (R_5^2 - R_3^2)} \quad (5.10)$$

Para o desenvolvimento do circuito equivalente magnético iremos modelar o ímã permanente através de uma fonte de corrente, conforme apresentado na Subseção 1.7.2. Deste modo, chegamos ao circuito ilustrado na Figura 5.4 para a representação do dispositivo aplicando-se as mesmas simplificações que na solução pela Lei de Ampère.

Aplicando-se os valores numéricos, citados anteriormente, as Equações (5.9), (5.10) e (1.27) obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 5.2. Observa-se que na Equação (1.27) foi aplicada a área do ímã permanente “ $S_{ímã}$ ”.

Utilizando a teoria de circuitos elétricos, resolve-se o circuito equivalente magnético do dispositivo e encontra-se o valor do fluxo magnético no entreferro.

Figura 5.4 Circuito equivalente com permeabilidade do ferro infinita e sem dispersão.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 5.2 Valores numéricos Seção 5.5

Parâmetro	Valor numérico
$\mathcal{R}_1$	$2.029.671,1467 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10}$	$1.499.188,9152 \frac{Ae}{Wb}$
$S_{imã}$	$49 \text{ cm}^2$
$\Phi_r$	$1,9604e^{-3} T$

Fonte: Próprio autor.

Com a solução do circuito equivalente magnético obtêm-se um fluxo magnético no entreferro de  $1,1275e^{-3} Wb$ . Como foi considerado que não há variação nem da área de cálculo, nem da indução magnética na área de cálculo dentro das configurações de fluxo, podemos dividir diretamente o fluxo magnético que atravessa o entreferro pela área deste, obtendo-se portanto uma indução magnética de  $2,1242 T$ . Como pode ser observado, aplicando as mesmas simplificações utilizadas no cálculo da indução no entreferro pela Lei de Ampère e Gauss. Chega-se exatamente ao mesmo resultado através da metodologia proposta neste trabalho.

O mesmo pode ser observado através da Equação (5.8) e do circuito ilustrado na Figura 5.4. Através de manipulações algébricas realizadas na Equação (5.8), chega-se à Equação (5.11), que representa matematicamente um divisor de fluxo, ou seja, o mesmo circuito que foi ilustrado na Figura 5.4.

$$\Phi_g = \Phi_r \left[ \frac{\mathcal{R}_M}{\mathcal{R}_M + \mathcal{R}_g} \right] \quad (5.11)$$

Em virtude das simplificações adotadas para o caso desta seção, o cálculo analítico tanto das relutâncias, como do circuito equivalente magnético, iguala-se em termos de dificuldade ao cálculo pela Lei de Ampère. Entretanto, em casos mais complexos, de geometria mais detalhada ou mesmo quando se deseja considerar a dispersão do fluxo magnético no ar, a aplicação da metodologia proposta neste trabalho representará uma simplificação significativa na complexidade do problema matemático, proporcionando uma solução analítica prática de ser aplicável e de resultados satisfatórios, como será visto a seguir neste capítulo.

## 5.6 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO INFINITA E CONSIDERANDO OS FLUXOS DISPERSOS

Supor que o fluxo disperso é pequeno, de modo que pode ser desconsiderado, é uma simplificação aplicável a casos teóricos e a pouquíssimos casos práticos. Em um dispositivo real, o fluxo disperso causa, dentre outros problemas, o enfraquecimento do campo magnético no entreferro, podendo assim afetar o desempenho do equipamento.

Na Seção 5.5 foi desconsiderado que o fluxo disperso poderia existir na região de ar ao redor de todo o dispositivo e de seu entreferro. No caso do alto falante em análise, não somente a região entorno do entreferro irá apresentar fluxo magnético disperso, mas também, o ar ao redor do volume do ímã permanente que se encontra fora do núcleo de ferro.

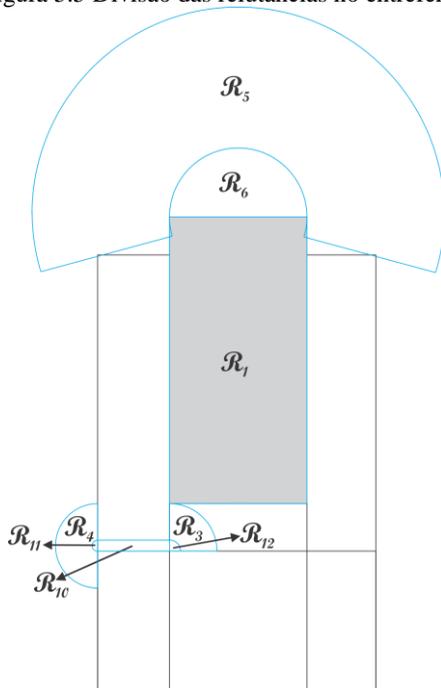
Levando isso em consideração, e também o comportamento das linhas de fluxo magnético nessas regiões, dividiu-se o ar entorno do entreferro e do volume do ímã fora do núcleo de ferro, em conformidade com as configurações de fluxo magnético estudadas nos Capítulos 3 e 4. De modo que, cada partição representará uma relutância pela qual parte do fluxo magnético gerado pelo ímã é desviada da região de interesse.

A Figura 5.5 ilustra como foi arbitrada a divisão das regiões de fluxo disperso, quais configurações de fluxo magnético foram usadas e a denominação de cada uma delas. As relutâncias “ $\mathcal{R}_6$ ”, “ $\mathcal{R}_{11}$ ” e “ $\mathcal{R}_{12}$ ” foram determinadas aplicando a configuração de fluxo de um cilindro semicircular apresentado na Subseção 3.2.3. Já as relutâncias “ $\mathcal{R}_5$ ”,

“ $\mathcal{R}_4$ ” e “ $\mathcal{R}_3$ ” foram determinadas aplicando a configuração de fluxo de um anel de fluxo magnético apresentado na Subseção 3.2.2.

Observa-se neste ponto, que foi feita a consideração de que toda a região do fluxo disperso pode ser modelada por essas seis relutâncias, tendo em vista que é infactível particionar toda a região de ar onde está presente o fluxo disperso até o infinito. Visto a inviabilidade do desenvolvimento de uma fórmula analítica geral que possa ser aplicável a qualquer caso, para o cálculo da relutância de fluxo disperso como o que ocorre entre o ímã permanente, o núcleo ferromagnético e a relutância “ $\mathcal{R}_3$ ”.

Figura 5.5 Divisão das relutâncias no entreferro.



Fonte: Próprio autor.

Essas seis relutâncias arbitradas modelam a resistência oferecida pelo ar à passagem do fluxo magnético disperso, e também compensam as regiões que possuem linhas de fluxo disperso, porém não modeladas.

Em sequência são apresentadas nas Equações (5.12), (5.13) e (5.14) as fórmulas analíticas das relutâncias “ $\mathcal{R}_6$ ”, “ $\mathcal{R}_{11}$ ” e “ $\mathcal{R}_{12}$ ” respectivamente.

$$\mathcal{R}_6 = \frac{1}{0,139\mu_0 2\pi \left[ R_5 + \frac{L_M}{4} \right]} \quad (5.12)$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{1}{0,139\mu_0 2\pi \left[ \frac{R_2 - R_1}{2} + R_1 \right]} \quad (5.13)$$

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2 \cdot 0,139\mu_0 2\pi \left[ \frac{R_2 - R_1}{2} + R_1 \right]} \quad (5.14)$$

A seguir são apresentadas nas Equações (5.15), (5.16) e (5.17) as fórmulas analíticas das relutâncias “ $\mathcal{R}_5$ ”, “ $\mathcal{R}_4$ ” e “ $\mathcal{R}_3$ ” respectivamente. Essas três relutâncias foram modeladas pela configuração de fluxo de um anel de fluxo magnético com a espessura determinada conforme a relutância e as linhas de fluxos que passam por esta.

A relutância “ $\mathcal{R}_5$ ” foi arbitrada com uma espessura de “ $8 \cdot T_1$ ”. Esse valor foi obtido na solução do caso que será apresentado na Seção 5.7 e foi escolhido por fornecer o menor desvio entre o cálculo analítico e o cálculo numérico nos valores da indução magnética em cada configuração de fluxo.

$$\mathcal{R}_5 = \frac{\frac{7\pi}{6}}{\mu_0 \ln \left( 1 + \frac{2 \cdot 8 \cdot T_1}{L_M} \right) 2\pi \left[ R_5 + \frac{L_M}{2} + \frac{8 \cdot T_1}{2} \right]} \quad (5.15)$$

Já as relutâncias “ $\mathcal{R}_4$ ” e “ $\mathcal{R}_3$ ” apresentam uma espessura igual à “ $R_3 - R_2$ ”. Tal parâmetro foi determinado tanto pela configuração das linhas de fluxo, quanto pensando na sua inserção no circuito equivalente magnético para os casos onde o ferro apresenta permeabilidade magnética finita.

$$\mathcal{R}_4 = \frac{\pi}{\mu_0 \ln \left( 1 + \frac{2 \cdot (R_3 - R_2)}{L_g} \right) 2\pi \left[ \frac{R_2 - R_1}{2} + R_1 \right]} \quad (5.16)$$

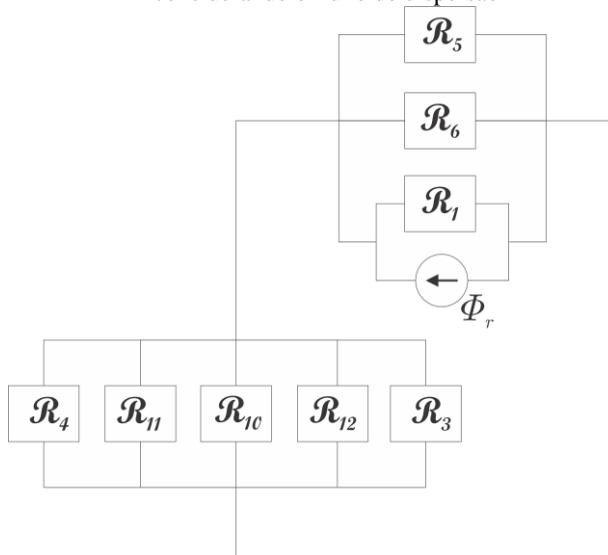
$$\mathcal{R}_3 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\mu_0 \ln \left( 1 + \frac{2 \cdot (R_3 - R_2)}{2L_g} \right) 2\pi \left[ \frac{R_3 - R_1}{2} + R_1 \right]} \quad (5.17)$$

Por fim, observa-se nas seis fórmulas analíticas que a profundidade tanto da configuração do cilindro semicircular, como do anel de fluxo magnético foi obtida no centro geométrico de cada configuração de fluxo, conforme descrito na Subseção 4.2.6 para casos axissimétricos.

Para a determinação do circuito equivalente magnético, foi considerado novamente que o ferro possui permeabilidade magnética infinita, e que o fluxo magnético é o análogo da corrente elétrica neste tipo de estudo.

Modelando assim o dispositivo em análise com as relutâncias apresentadas na Figura 5.5, no circuito equivalente magnético apresentado na Figura 5.6, utilizando a equivalência por fonte de corrente para o ímã permanente.

Figura 5.6 Circuito equivalente com permeabilidade do ferro infinita e considerando o fluxo de dispersão



Fonte: Próprio autor.

Aplicando-se os valores numéricos nas Equações (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17) obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 5.3.

Observa-se que o valor do fluxo remanente do ímã “ $\Phi_r$ ” se mantém o mesmo, tendo em vista que o material e a geometria do ímã permanente não foram alteradas.

Tabela 5.3 Valores numéricos das relutâncias de dispersão.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor numérico</b>
$\mathcal{R}_1$	$2.029.671,1467 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10}$	$1.499.188,9152 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_6$	$19.754.183,7052 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11}$	$69.027.403,2881 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{12}$	$34.513.701,6440 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_5$	$2.795.685,2788 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_4$	$14.862.316,7396 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_3$	$9.184.658,4076 \frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Resolvendo o circuito equivalente magnético, obtêm-se um fluxo magnético no entreferro de  $0,7315e^{-3} Wb$ . Assim como no caso anterior, foi considerado que não há variação nem da área de cálculo, nem da indução magnética na área de cálculo. Partindo deste pressuposto, podemos então dividir diretamente o fluxo magnético que atravessa o entreferro pela área deste, chegando portanto, a uma indução magnética no entreferro de  $1,3780 T$ .

Era esperado que a inclusão do fluxo disperso na análise do funcionamento do alto falante influenciasse de forma a reduzir o fluxo magnético calculado na região de interesse, tendo em vista a baixa permeabilidade magnética do ar.

O núcleo de ferro tende a canalizar as linhas de fluxo magnético em razão da sua alta permeabilidade magnética. Entretanto, quando as linhas de fluxo magnético necessitam passar por uma região de

permeabilidade magnética mais baixa, como no caso das relutâncias “ $\mathcal{R}_{10}$ ” e “ $\mathcal{R}_1$ ”, elas procuram o menor caminho magnético possível.

Como é possível observar nesta seção, a inserção das relutâncias referentes às configurações de fluxo disperso ocasiona uma redução de  $0,396e^{-3} \text{ Wb}$  no fluxo magnético útil. Por sua vez, a indução magnética útil também sofre uma diminuição de  $0,7462 \text{ T}$ , passando de  $2,1242 \text{ T}$  para  $1,3780 \text{ T}$ , cerca de 35% a menos em relação a modelagem sem a representação do fluxo disperso.

É evidente que quanto mais detalhado tornasse a modelagem do dispositivo em seu circuito equivalente magnético, mais próximos serão os resultados obtidos de forma analítica com os valores reais de funcionamento do dispositivo. Nesta seção tornamos mais detalhada a modelagem do dispositivo através da inserção da representação do fluxo disperso. Todavia, ainda se considerou que o núcleo possui permeabilidade infinita, o que não ocorre na prática. Na Seção 5.7 será modelado o circuito equivalente do alto falante, considerando-se a presença do fluxo disperso, e da permeabilidade magnética no ferro atuando de forma linear no funcionamento do dispositivo.

## 5.7 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E CONSTANTE E CONSIDERANDO A DISPERSÃO DO FLUXO

Apesar da permeabilidade magnética do ferro ser alta em comparação com a do ar e a do ímã permanente, ela não é infinita na prática, como havia sido suposto anteriormente. Deste modo, no intuito de tornar a modelagem analítica mais próxima do dispositivo real, é desenvolvido nesta seção o circuito equivalente magnético do dispositivo com o núcleo ferromagnético apresentando uma permeabilidade magnética linear a passagem do fluxo magnético.

Todavia, deve ser observado que esta ainda é uma simplificação em relação ao funcionamento real do dispositivo, pois, um material ferromagnético somente apresenta uma permeabilidade magnética linear em uma pequena parte da curva de magnetização, localizada na região da curva para valores do campo magnético relativamente baixos.

Se for imposto ao material ferromagnético um campo magnético que aumente gradualmente, chegar-se-á um ponto da curva em que o material ferromagnético não irá mais permitir a passagem do fluxo magnético na mesma proporção que o campo magnético aumenta.

No caso do material do núcleo ferromagnético deste dispositivo, a permeabilidade magnética relativa é igual a 1.000 para todo volume de ferro no dispositivo.

Como a permeabilidade do ferro não é aqui considerada como infinita, haverá uma diminuição do fluxo atravessando o ferro. Em razão da maior dificuldade que o fluxo magnético gerado pelo ímã permanente encontrará na passagem pelo núcleo de ferro, imposta pela permeabilidade magnética finita.

Tomando isso em consideração e também o comportamento das linhas de fluxo magnético nessas regiões, e em todo o dispositivo, e o volume de ar ao seu redor, foi particionado todo o volume de cálculo, em conformidade com as configurações de fluxo magnético estudadas nos Capítulos 3 e 4.

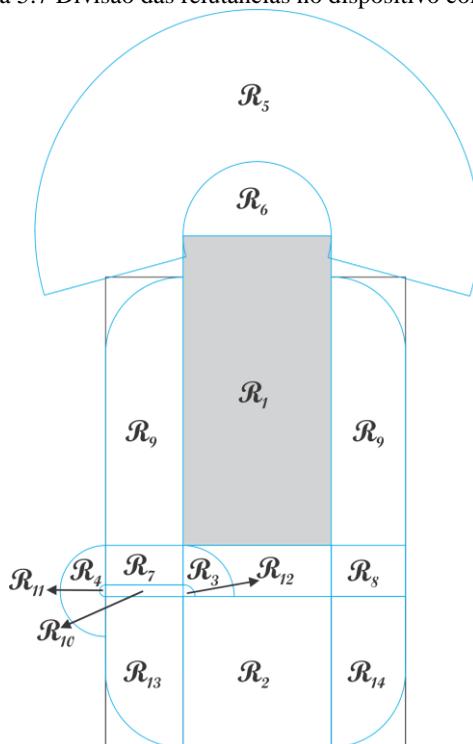
A Figura 5.7 ilustra a divisão das regiões de todo o dispositivo e do volume de ar à ser considerado, quais configurações de fluxo magnético foram usadas e a denominação dada a cada uma delas. As relutâncias referentes ao volume de ar à ser considerado e ao ímã permanente foram mantidas as mesmas dos casos anteriores, apenas foram inseridas as relutâncias correspondentes ao volume do núcleo de ferro.

As relutâncias “ $\mathcal{R}_2$ ”, “ $\mathcal{R}_7$ ” e “ $\mathcal{R}_8$ ” foram determinadas aplicando a configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas apresentada na Subseção 3.2.1. Já as relutâncias “ $\mathcal{R}_9$ ”, “ $\mathcal{R}_{13}$ ” e “ $\mathcal{R}_{14}$ ” foram determinadas aplicando a configuração de fluxo de um quarto de elipse de fluxo apresentado na Subseção 4.2.5.

Analisando a Figura 5.7 observamos que foram feitas algumas considerações. Primeiramente foi feita a consideração de que todo o volume do núcleo de ferro pode ser modelado por essas seis relutâncias. Segundo, as duas configurações de fluxo que representam as relutâncias “ $\mathcal{R}_9$ ” possuem uma configuração de linhas de fluxo idênticas, e não há linhas de fluxo disperso saindo ou entrando neste volume. Por fim, note que foi feita a consideração de que as linhas de fluxo não passam pelos cantos superiores externos do dispositivo, fato que ocorre normalmente na prática.

Já no caso das relutâncias “ $\mathcal{R}_{13}$ ” e “ $\mathcal{R}_{14}$ ” não é possível fazer a consideração de que elas são iguais, apesar de suas geometrias e materiais serem idênticos, pois o fluxo que irá passar por elas é diferente em razão do fluxo disperso no entreferro, influenciando desta forma a permeabilidade magnética, quando esta for considerada não linear.

Figura 5.7 Divisão das relutâncias no dispositivo completo.



Fonte: Próprio autor.

Para modelar as relutâncias “ $\mathcal{R}_2$ ”, “ $\mathcal{R}_8$ ” e “ $\mathcal{R}_7$ ” por sua vez também foi considerado que o fluxo real é tal que pode ser aproximado pela configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas. Note que, a premissa de que o fluxo é conservativo em cada configuração de fluxo é uma consideração implícita a metodologia desenvolvida neste trabalho.

Portanto, essas seis relutâncias arbitradas modelam a relutância magnética oferecida pelo núcleo de ferro à passagem do fluxo magnético gerado pelo ímã permanente.

Na sequência são apresentadas nas Equações (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) e (5.23) as fórmulas analíticas das relutâncias “ $\mathcal{R}_2$ ”, “ $\mathcal{R}_7$ ”, “ $\mathcal{R}_8$ ”, “ $\mathcal{R}_9$ ”, “ $\mathcal{R}_{13}$ ” e “ $\mathcal{R}_{14}$ ” respectivamente.

$$\mathcal{R}_2 = \frac{L_M}{\mu_r \mu_0 \pi R_1^2} \quad (5.18)$$

$$\mathcal{R}_7 = \frac{R_3 - R_2}{\mu_r \mu_0 2\pi \left[ \frac{(R_3 - R_2)}{2} + R_2 \right]} T_1 \quad (5.19)$$

$$\mathcal{R}_8 = \frac{R_3 - R_1}{\mu_r \mu_0 2\pi \left[ \frac{(R_3 - R_1)}{2} + R_1 \right]} T_2 \quad (5.20)$$

$$\mathcal{R}_9 = \frac{\pi}{2\mu_r \mu_0 4,7041 \cdot 2\pi \left[ \frac{R_4 - R_3}{2} + R_3 \right]} \cdot \left[ \frac{0,1136(R_4 - R_3)}{T_1} + 0,82077 \right] \quad (5.21)$$

$$\mathcal{R}_{13} = \frac{\pi}{2\mu_r \mu_0 4,7041 \cdot 2\pi \left[ \frac{R_1}{2} \right]} \cdot \left[ \frac{0,1136 R_1}{T_1} + 0,82077 \right] \quad (5.22)$$

$$\mathcal{R}_{14} = \frac{\pi}{2\mu_r \mu_0 4,7041 \cdot 2\pi \left[ \frac{R_1}{2} \right]} \cdot \left[ \frac{0,1136 \cdot R_1}{T_2} + 0,82077 \right] \quad (5.23)$$

Finalmente, observa-se nas seis fórmulas analíticas que a profundidade tanto da configuração de superfícies planas e paralelas, como do quarto de elipse de fluxo foram obtidas no centro geométrico de cada configuração de fluxo, conforme descrito na Subseção 4.2.6 para casos axissimétricos.

Para o desenvolvimento do circuito equivalente magnético necessitamos realizar algumas simplificações com relação ao enlace de fluxo magnético.

Primeiramente consideramos que o ímã permanente está em série com as relutâncias “ $\mathcal{R}_9$ ”, ou seja, consideramos que não há dispersão das linhas geradas pelo ímã permanente em sua parte inferior. Porém, como há uma dispersão significativa na parte superior do ímã

permanente continuamos considerando a existência desta, e a mesma encontra-se em paralelo com o ímã permanente.

Seguindo o caminho do fluxo magnético chegamos ao “*dente*” do dispositivo. Neste volume são feitas as considerações mais significativas. Considera-se que o fluxo magnético que sai da relutância “ $\mathcal{R}_9$ ” a esquerda da Figura 5.7 se divide entre as relutâncias “ $\mathcal{R}_4$ ”, “ $\mathcal{R}_7$ ” e “ $\mathcal{R}_3$ ”. Essa simplificação foi necessária, pois não há como definir exatamente qual porcentagem da relutância “ $\mathcal{R}_7$ ” é atravessada pelo fluxo que chega à relutância “ $\mathcal{R}_{10}$ ” e qual porcentagem da relutância “ $\mathcal{R}_7$ ” é atravessada pelo fluxo que vai para as relutâncias “ $\mathcal{R}_4$ ” e “ $\mathcal{R}_3$ ”.

Raciocínio similar ocorre no retorno do fluxo magnético ao núcleo de ferro. Não há como determinar qual a porcentagem da relutância “ $\mathcal{R}_{13}$ ” é atravessada pelo fluxo disperso que passa pela relutância “ $\mathcal{R}_4$ ”. Sendo assim, foi arbitrado que o fluxo disperso que passa pela relutância “ $\mathcal{R}_4$ ” passa integralmente pela relutância “ $\mathcal{R}_{13}$ ”.

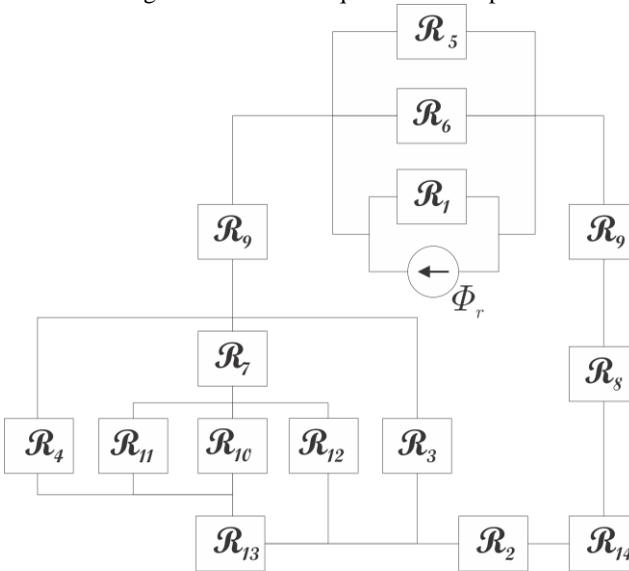
A determinação da relutância “ $\mathcal{R}_{11}$ ” no circuito não exige simplificações, visto que o fluxo magnético que passa por esta está em paralelo com o fluxo que passa pelo entreferro de interesse, modelado por “ $\mathcal{R}_{10}$ ”. Entretanto, o fluxo que passa pelas relutâncias “ $\mathcal{R}_3$ ” e “ $\mathcal{R}_{12}$ ” não atravessará a relutância “ $\mathcal{R}_{13}$ ”, mas sim entrará diretamente na relutância “ $\mathcal{R}_2$ ”. Mais uma vez ocorre o problema de não saber qual a porcentagem da relutância “ $\mathcal{R}_2$ ” será atravessada pelos fluxos magnéticos que vem das relutâncias “ $\mathcal{R}_3$ ” e “ $\mathcal{R}_{12}$ ”.

Portanto, como sabemos que a penetração das linhas de fluxo oriundas dessas relutâncias ocorre no início da relutância “ $\mathcal{R}_2$ ”. Considerando o sentido do fluxo magnético gerado pelo ímã, pode-se desprezar a porcentagem da relutância “ $\mathcal{R}_2$ ” que não é percorrida pelas linhas de fluxo oriundas de “ $\mathcal{R}_3$ ” e “ $\mathcal{R}_{12}$ ”, e considerar que todo o fluxo magnético que sai dessas relutâncias passa integralmente pela relutância “ $\mathcal{R}_2$ ”.

Como é possível observar pela análise desenvolvida acima e pela Figura 5.7, as simplificações acima consideram que todo o fluxo gerado pelo ímã permanente está confinado nessas quatorze configurações de fluxo.

Pode-se então modelar o dispositivo com as relutâncias apresentadas na Figura 5.7, pelo circuito equivalente magnético ilustrado na Figura 5.8.

Figura 5.8 Circuito equivalente completo.



Fonte: Próprio autor.

Aplicando-se os valores numéricos, citados anteriormente, às Equações (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) e (5.23) obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 5.4.

Observa-se que o valor do fluxo remanente do ímã “ $\Phi_r$ ” se mantém o mesmo, tendo em vista que nem o material nem a geometria do ímã permanente foram alterados.

Tabela 5.4 Valores numéricos das relutâncias do dispositivo calculadas analiticamente.

Parâmetro	Valor numérico
$\mathcal{R}_1$	$2.029.671,1467 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10}$	$1.499.188,9152 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_6$	$19.754.183,7052 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11}$	$69.027.403,2881 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{12}$	$34.513.701,6440 \frac{Ae}{Wb}$

$\mathcal{R}_5$	2.795.685,2788 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_4$	14.862.316,7396 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_3$	9.184.658,4076 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_2$	19.631,0186 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_7$	4.254,3758 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_8$	5.730,2332 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_9$	1.826,6132 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{13}$	6.967,7493 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{14}$	6.967,7493 $\frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Valendo-se da teoria de circuitos elétricos, é então solucionado o circuito equivalente magnético do dispositivo e encontrado o valor do fluxo magnético no entreferro de  $0,7165e^{-3} Wb$ .

Assim como nos casos anteriores, foi considerado que não há variação da área de cálculo e da indução magnética na área de cálculo. Partindo deste pressuposto, pode-se então dividir diretamente o fluxo magnético que atravessa o entreferro pela área perpendicular a que este atravessa, e chega-se a uma indução magnética de  $1,3497 T$ .

Como era esperado, a consideração da relutância magnética imposta pelo ferro à passagem do fluxo magnético provoca uma redução do fluxo magnético no entreferro de interesse. Na Seção 5.6 foi considerado que o núcleo ferromagnético tinha uma permeabilidade magnética infinita, logo, havia uma tendência do fluxo magnético em passar pelo núcleo ferromagnético. Nesta seção consideramos que a permeabilidade magnética do núcleo de ferro do alto falante é finita e constante.

Assim sendo, apesar da permeabilidade magnética do núcleo de ferro ainda ser maior que a do ar ela é finita. Ao contrário do caso da Seção 5.6, isso provocou um suave aumento no fluxo disperso do dispositivo em comparação com o caso da Seção 5.6, acarretando deste

modo, uma leve redução do fluxo no entreferro, e consequentemente da indução magnética de interesse.

A inserção das relutâncias referentes às configurações de fluxo no núcleo de ferro ocasionam uma redução de  $0,0150 \text{ mWb}$  no fluxo magnético da região. Consequentemente, a indução magnética do entreferro também sofre uma diminuição de  $0,0283 \text{ T}$ , passando de  $1,3780 \text{ T}$  para  $1,3497 \text{ T}$ , uma redução de aproximadamente  $2,05\%$  em relação à modelagem com a permeabilidade magnética do ferro infinita.

Nesta seção foi feita uma representação mais detalhada do dispositivo em estudo, no seu circuito equivalente magnético. Conforme a análise apresentada, é esperado que este resultado seja mais próximo do valor real de funcionamento do dispositivo, apresentado em detalhes na Seção 5.9.

Apesar do maior detalhamento que demos ao funcionamento do dispositivo nesta seção, ainda está sendo desconsiderado a não linearidade do núcleo de ferro, o que ocorre na prática apenas até certos valores do campo magnético e que dependem do material e da geometria do mesmo. Portanto, será feita na Seção 5.8 uma modelagem do dispositivo em estudo em seu circuito equivalente magnético com a não linearidade do núcleo ferromagnético.

## 5.8 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM PERMEABILIDADE DO FERRO NÃO LINEAR E CONSIDERANDO O FLUXO DE DISPERSÃO

Para desenvolver o circuito equivalente magnético do alto falante, considerando que seu núcleo ferromagnético apresenta uma permeabilidade magnética não linear, deve-se primeiramente modelar analiticamente a curva anisterética do material, do qual é composto o núcleo, através de uma equação analítica.

Assim, iremos apresentar primeiramente, na Subseção 5.8.1, como a não linearidade do núcleo ferromagnético é levada em consideração nos cálculos analíticos e, posteriormente na Subseção 5.8.2 será apresentado o circuito equivalente magnético do dispositivo.

### 5.8.1 Representação da permeabilidade magnética não linear no cálculo analítico

Para realizar uma comparação entre os resultados calculados de forma analítica com os dados reais, foram realizadas simulações no software EFCAD. Pois não se dispõe do dispositivo real para a realização das medições.

Deste modo, é necessário representar nos cálculos analíticos a não linearidade da permeabilidade magnética do núcleo de ferro, de forma similar como está sendo feito nas simulações.

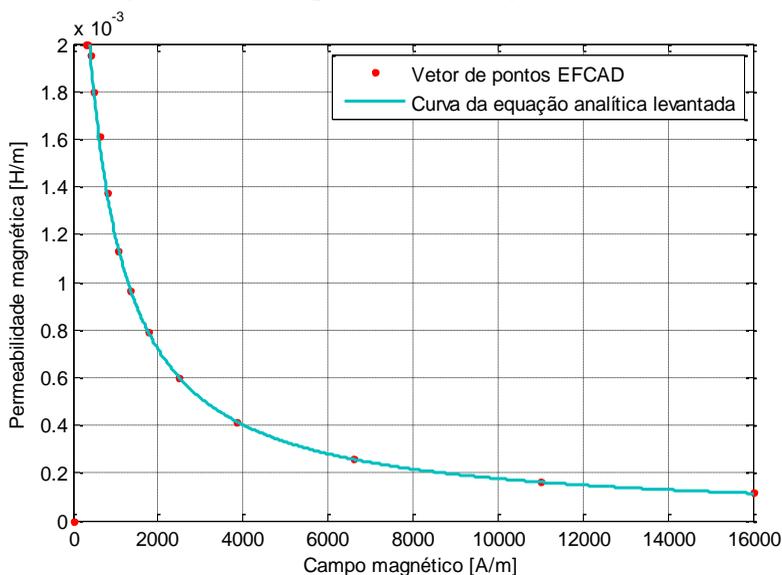
No software EFCAD a curva de magnetização de um material é gerada através do método de Langevin (KOKORNACZYK e GUTOWSKI, 2015) por meio das características do material que se pretende representar ou de pontos obtidos por intermédio de medições em laboratório.

Nas simulações realizadas neste estudo foi utilizado o aço não linear, material de número “2” da lista de materiais do EFCAD, cujo conjunto de pontos foi obtido de medições realizadas em laboratório.

A partir dos pontos obtidos do software para este material, foi utilizado o Toolboxe Curve Fitting Tool do software matemático MatLab para levantar uma equação analítica que melhor represente os pontos obtidos do EFCAD.

Na Figura 5.9 há os pontos retirados do software EFCAD e a curva da equação analítica ajustada. A função analítica que melhor aderiu aos pontos foi uma função racional de primeira ordem, tanto no numerador quanto no denominador, e que está apresentada na Equação (5.24).

Figura 5.9 Curva de permeabilidade magnética levantada.



Fonte: Próprio autor.

O ajuste realizado apresentou como resultado aos parâmetros estatísticos de convergência,  $2,7443e^{-9}$  para a soma quadrática dos resíduos, e 0,9995 para o quadrado do coeficiente de correlação múltipla ou coeficiente de determinação múltipla.

$$\mu(H) = \frac{6,357e^{-6}H + 1,789}{H + 508,3} \quad (5.24)$$

### 5.8.2 Circuito Equivalente magnético do dispositivo

Na Seção 5.7 o circuito equivalente magnético do dispositivo foi modelado considerando a permeabilidade magnética do ferro constante. Essa suposição é válida somente para os casos onde o dispositivo opera longe da região de saturação do material que o compõem.

Atualmente, como os fabricantes de dispositivos eletromagnéticos precisam considerar custos versus desempenho, a redução de material ferromagnético se tornou essencial aos projetos. Porém, essa redução de material pode levar o dispositivo a funcionar em uma região de saturação do ferro.

Modelar a permeabilidade magnética de forma não linear é fundamental na representação de um dispositivo com seu circuito equivalente magnético.

Para a modelagem do circuito equivalente magnético do alto falante, com o núcleo ferromagnético apresentando comportamento não linear, serão feitas algumas considerações necessárias à aplicação da metodologia apresentada neste trabalho.

Considera-se que a presença da permeabilidade magnética não linear do núcleo de ferro não causa significativas alterações nas linhas de fluxo magnético do dispositivo, de tal forma que torna-se possível manter as partições e as configurações de fluxo determinadas na Seção 5.7 e que estão ilustradas na Figura 5.7.

E que a permeabilidade magnética não varia dentro da configuração de fluxo de cada relutância. Essa consideração é necessária visto que foi considerado que não há variação da indução magnética dentro de cada configuração de fluxo para o desenvolvimento das fórmulas analíticas de cada configuração de fluxo, conforme apresentado nos Capítulo 3 e 4.

Pode-se então aplicar as mesmas equações analíticas ao núcleo de ferro, tomando-se apenas o cuidado, de que agora a permeabilidade

magnética não é mais apenas uma constante, mas sim função não linear do campo magnético na configuração de fluxo em questão, e que tem seu comportamento modelado pela Equação (5.24).

Todavia é preciso ressaltar que apesar da permeabilidade magnética ser a mesma dentro de cada configuração de fluxo, ela poderá ser diferente em cada uma das configurações de fluxo que compõe o núcleo de ferro do dispositivo.

Esta dependerá da intensidade do campo magnético em cada configuração de fluxo e da geometria de cada configuração de fluxo, ou seja, da densidade de fluxo magnético que à atravessa.

As relutâncias que compõe o núcleo ferromagnético serão calculadas pelas Equações (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) e (5.23). Como a permeabilidade magnética é não linear é necessário aplicar um processo iterativo para calcular a permeabilidade magnética para cada campo magnético em cada configuração de fluxo.

O processo iterativo aplicado está descrito no Apêndice A e é realizado através do seguinte procedimento. Primeiramente é dado um valor inicial do campo magnético e a partir deste calcula-se a relutâncias magnéticas e depois o circuito equivalente magnético.

Após, encontra-se o novo valor do campo magnético é feita a comparação com seu valor inicial. Caso o módulo da diferença entre estes não seja menor que o valor de tolerância pré-estabelecido, incrementa-se o campo magnético inicial e realizam-se novamente os cálculos até que a convergência seja obtida e então encontrados os valores das induções magnéticas finais.

Os valores das relutâncias no ar e no ímã permanente serão constantes, e podem ser calculados antes do processo iterativo e mantidos constantes até o fim do cálculo.

Para calcular os valores das relutâncias no ar e no ímã permanente foram aplicadas as fórmulas analíticas desenvolvidas anteriormente nas Subseções 5.5 e 5.6, apresentadas nas Equações (5.9), (5.10), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17).

Aplicando-se os valores numéricos, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 5.5. Nota-se que o valor do fluxo remanente do ímã " $\Phi_r$ " se mantém o mesmo, pois, assim como nos casos anteriores nem o material, nem a geometria do ímã permanente foram alteradas.

Conforme pode ser visto na Tabela 5.5 os valores numéricos das relutâncias " $\mathcal{R}_1$ ", " $\mathcal{R}_3$ ", " $\mathcal{R}_4$ ", " $\mathcal{R}_5$ ", " $\mathcal{R}_6$ ", " $\mathcal{R}_{10}$ ", " $\mathcal{R}_{11}$ " e " $\mathcal{R}_{12}$ " se mantiveram os mesmos dos casos anteriores apresentados nas Subseções 5.5, 5.6 e 5.7.

Entretanto, como a permeabilidade magnética do núcleo de ferro é não linear, as relutâncias “ $\mathcal{R}_2$ ”, “ $\mathcal{R}_7$ ”, “ $\mathcal{R}_8$ ”, “ $\mathcal{R}_9$ ”, “ $\mathcal{R}_{13}$ ” e “ $\mathcal{R}_{14}$ ” correspondentes ao volume do núcleo ferromagnético apresentam valores superiores aos do caso linear apresentado na Subseção 5.7.

Tal fato é fundamentado avaliando-se a Tabela 5.6, onde é possível verificar que a permeabilidade magnética relativa em cada configuração de fluxo magnético é menor do que o valor constante que foi considerado no caso linear.

Tabela 5.5 Valores numéricos das relutâncias do dispositivo calculadas analiticamente com variação da permeabilidade magnética.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor numérico</b>
$\mathcal{R}_1$	$2.029.671,1467 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10}$	$1.499.188,9152 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_6$	$19.754.183,7052 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11}$	$69.027.403,2881 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{12}$	$34.513.701,6440 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_5$	$2.795.685,2788 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_4$	$14.862.316,7396 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_3$	$9.184.658,4076 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_2$	$133.036,3735 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_7$	$4.229,8624 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_8$	$11.614,1814 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_9$	$2.349,1295 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{13}$	$13.715,5828 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{14}$	$47.219,3579 \frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Solucionado o circuito elétrico equivalente do dispositivo, com os valores de relutâncias apresentados na Tabela 5.5, é encontrado o valor do fluxo magnético no entreferro igual à  $0,6675 \text{ mWb}$ .

Dividindo-se o fluxo magnético que atravessa o entreferro pela área perpendicular à que este atravessa, chega-se a uma indução magnética de  $1,2575 \text{ T}$ .

Houve uma redução no valor da indução magnética no entreferro de interesse, em razão da consideração da não linearidade da permeabilidade magnética.

Tabela 5.6 Permeabilidades relativas do ferro calculadas.

Permeabilidade relativa	Valor numérico
$\mu_{r_2}$	$145,9247 \frac{H}{m}$
$\mu_{r_7}$	$994,2814 \frac{H}{m}$
$\mu_{r_8}$	$496,4625 \frac{H}{m}$
$\mu_{r_9}$	$775,6410 \frac{H}{m}$
$\mu_{r_{13}}$	$511,0314 \frac{H}{m}$
$\mu_{r_{14}}$	$145,9247 \frac{H}{m}$

Fonte: Próprio autor.

Com a não linearidade há uma redução de  $0,049 \text{ mWb}$  no fluxo magnético da região de interesse. Por conseguinte, a indução magnética também sofre uma diminuição de  $0,0922 \text{ T}$ , passando de  $1,3497 \text{ T}$  para  $1,2575 \text{ T}$ , uma redução de aproximadamente  $6,83\%$  em relação à modelagem com a permeabilidade magnética do ferro linear.

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos analiticamente, será apresentada na Seção 5.9 as simulações realizadas e uma comparação entre os resultados obtidos de forma analítica e numérica.

## 5.9 SIMULAÇÕES E COMPARAÇÕES ENTRE AS CONFIGURAÇÕES DO CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO ESTUDADAS COM OS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Para a realização das simulações do alto falante foi necessário tomar certas precauções, para que estas apresentassem de modo igualitário as condições de funcionamento do dispositivo, que foram assumidas no desenvolvimento dos circuitos equivalentes magnéticos do dispositivo.

A primeira consideração que deve ser feita, é determinar uma caixa de ar ao redor do alto falante de tal forma que esta não influencie as linhas de fluxo disperso. O fato do dispositivo ser uma estrutura axissimétrica viabiliza as simulações em duas dimensões, mas com axissimetria, reduzindo o tempo de simulação em comparação com uma simulação em três dimensões.

Outra consideração é com relação aos materiais que compõem o dispositivo. O ímã permanente utilizado nos cálculos analíticos possui indução remanente de  $0,4 T$  orientada no sentido negativo no eixo das abcissas. Já o núcleo ferromagnético é composto por um aço não linear, cuja curva analítica foi apresentada na Figura 5.9, e com permeabilidade magnética relativa igual a 1000 na região linear.

Desta forma, foi arbitrado o material de número 6 do módulo *efp* do software EFCAD de setembro de 2014, denominado *permanent magnet Ox*, que apresenta  $0,4 T$  de indução remanente, e o material número 2 denominado *non-linear steel*, cujos valores de permeabilidade magnética são os pontos também ilustrados na Figura 5.9.

A partir dessas considerações foram realizadas as simulações e obtido as cartas de campo apresentadas na Figura 5.10 para o caso linear, e na Figura 5.11 para o caso não linear. As simulações consideram 19.966 elementos e 10.206 nós, e oito condições de contorno.

Conforme pode ser visualizado na Figura 5.10 e na Figura 5.11, a caixa de ar arbitrada não exerceu nenhuma influência no caminho do fluxo disperso, e este apresenta um comportamento similar ao que havia sido suposto para a determinação das configurações de fluxo que foram utilizadas na partição do fluxo disperso.

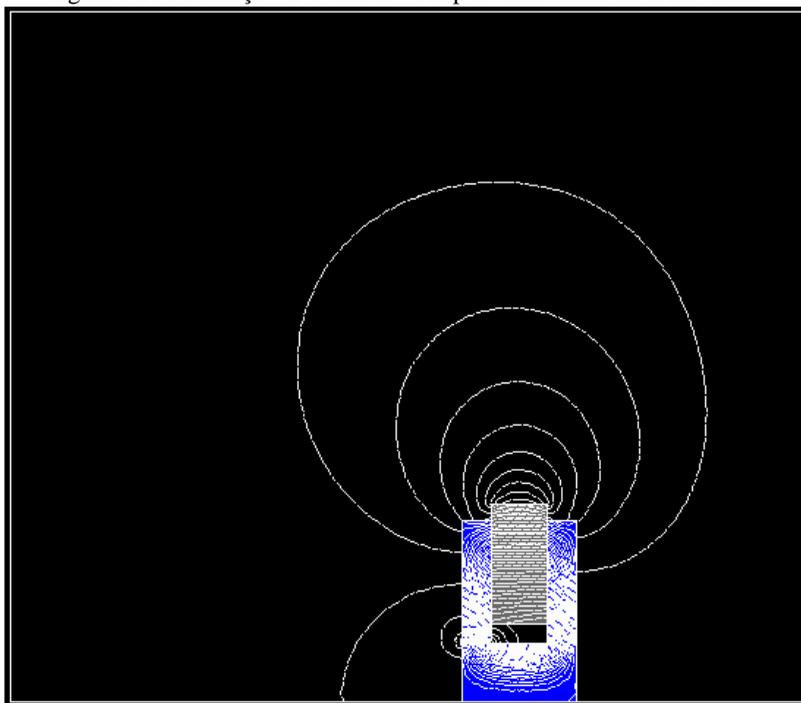
Todavia, nota-se nas figuras que há linhas de fluxo disperso que fogem do modelo apresentado na Seção 5.6 e na Figura 5.5 mas, conforme apresentado na Seção 5.6, essas linhas são compensadas de

certo modo nas configurações de fluxo magnético, de tal forma que, mesmo elas ocorrendo, não é necessário rever o modelo desenvolvido.

A simulação não linear necessitou de seis iterações para atingir a convergência, com erro máximo de  $10^{-6}$ . Observa-se na Figura 5.11, que há um aumento no fluxo magnético disperso em comparação com a Figura 5.10.

Conforme já citado, era esperado que o aumento da relutância magnética provocado pela redução da permeabilidade magnética gerasse um aumento do fluxo disperso.

Figura 5.10 Simulação alto falante com permeabilidade do ferro linear.



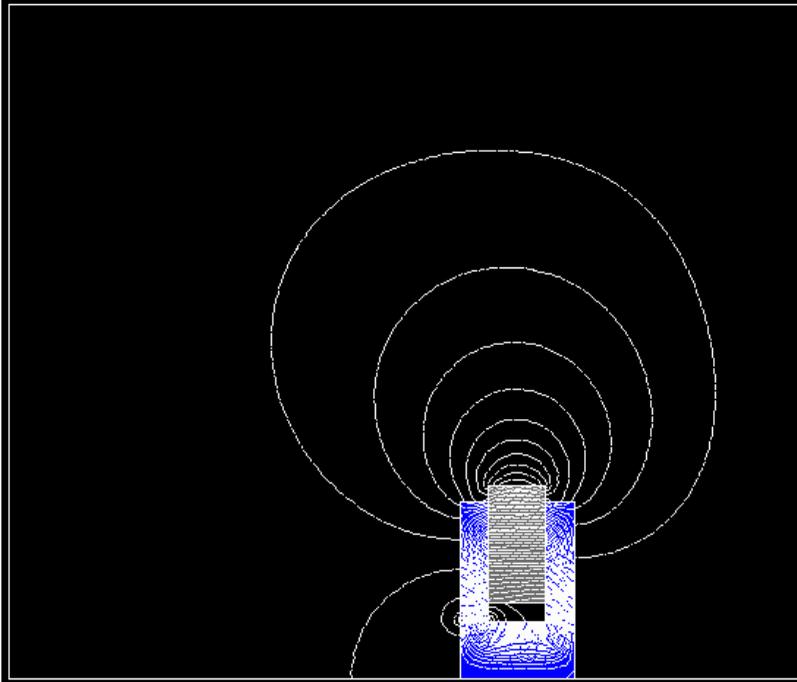
Fonte: Próprio autor.

No projeto de um dispositivo eletromagnético é de grande interesse saber os valores de induções magnéticas no núcleo de ferro e no entreferro. Pode-se então saber em qual região da curva de magnetização do material do núcleo o dispositivo irá operar. E também, que através do valor da indução ou do campo magnético na região do

entreferro é possível determinar a força ou o trabalho que este é capaz de gerar.

Optou-se por realizar a comparação dos valores obtidos de forma analítica e numérica das induções magnéticas apenas nas configurações de fluxo correspondentes ao núcleo de ferro e ao entreferro, visto que estas são as regiões de interesse no projeto.

Figura 5.11 Simulação Alto falante com permeabilidade do ferro não linear.



Fonte: Próprio autor.

A aquisição dos valores de indução magnética em cada configuração de fluxo é realizada utilizando o módulo *efgn* do software EFCAD. Para tanto, traça-se uma linha no *efgn*, que equivale à área utilizada no cálculo analítico para a obtenção da indução magnética através do valor do fluxo magnético, para o cálculo da indução naquela linha.

O software disponibiliza um arquivo de dados com o valor da indução magnética em cada elemento da linha de interesse, e então é realizada uma média aritmética desses valores, no intuito de se obter o valor médio da indução naquela configuração de fluxo, visto que a

metodologia desenvolvida resulta em um único valor de induções em toda a configuração de fluxo magnético.

No caso das configurações de fluxo referentes às relutâncias “ $\mathcal{R}_9$ ”, “ $\mathcal{R}_{13}$ ” e “ $\mathcal{R}_{14}$ ” foi realizado um estudo comparando-se várias possibilidades de áreas a serem arbitradas e utilizadas nos cálculos analíticos e numéricos para a determinação da área que apresentasse menor desvio entre o cálculo analítico e numérico. Esta determinação da área dessas configurações de fluxo não é tão trivial quanto às demais.

### 5.9.1 Comparação entre os valores da indução magnética no entreferro obtidos analiticamente e numericamente, com a permeabilidade do ferro infinita

Nas Seções 5.4, 5.5 e 5.6 foi modelado o dispositivo considerando a permeabilidade magnética do núcleo de ferro infinita. Como visto anteriormente, de forma teórica e analítica, esta consideração nos leva a valores superiores de indução magnética no entreferro aos verificados na prática.

É feito um estudo comparativo entre os valores obtidos analiticamente nessas Seções e os valores calculados nas simulações. Apresenta-se na Tabela 5.7 os valores da indução magnética no entreferro calculados analiticamente nas Seções 5.4, 5.5 e 5.6 e o valor da indução magnética obtido no entreferro através da simulação.

Utiliza-se para comparação o valor adquirido na simulação com o núcleo ferromagnético com permeabilidade magnética da ordem de  $10^6$  para a permeabilidade do ferro infinita.

Tabela 5.7 Comparativo do valor da indução magnética, Seções 5.4, 5.5, 5.6 e numéricos.

<b>Seção 5.4</b>	<b>Seção 5.5</b>	<b>Seção 5.6</b>	<b>Simulação</b>
2,1242 T	2,1242 T	1,3780 T	1,376 T

Fonte: Próprio autor.

Como foi visto no decorrer deste capítulo, as Seções 5.4 e 5.5 apresentam uma modelagem similar do dispositivo. Por conseguinte, ambas chegaram ao mesmo valor de indução magnética. Já na Seção 5.6 o dispositivo foi modelado com maior detalhamento que nas Seções anteriores. Consequentemente, percebe-se que estes cálculos apresentaram um valor mais próximo do obtido na simulação.

Porém, ainda há uma pequena diferença. Isso se deve ao fato do núcleo ferromagnético ter sido considerado com permeabilidade magnética constante e não infinita como no cálculo analítico. Isto

acarreta um valor de indução magnética menor do que o que foi adquirido analiticamente, visto que no modelo analítico a relutância magnética é menor, já que não foi considerada a permeabilidade magnética no ferro.

### **5.9.2 Comparação entre os resultados obtidos analiticamente, através do circuito equivalente magnético com permeabilidade do ferro linear e com dispersão, e numericamente**

Para realizar um estudo comparativo entre os valores de indução magnética obtidos de forma analítica e numérica, foi realizada a simulação do alto falante considerando o núcleo ferromagnético com permeabilidade magnética linear e calculado os valores de induções magnéticas nas configurações de fluxo no núcleo de ferro e no entreferro.

O estudo comparativo entre os valores de indução magnética, calculados pela metodologia proposta neste trabalho, e calculados numericamente através da simulação estão apresentados na Figura 5.12.

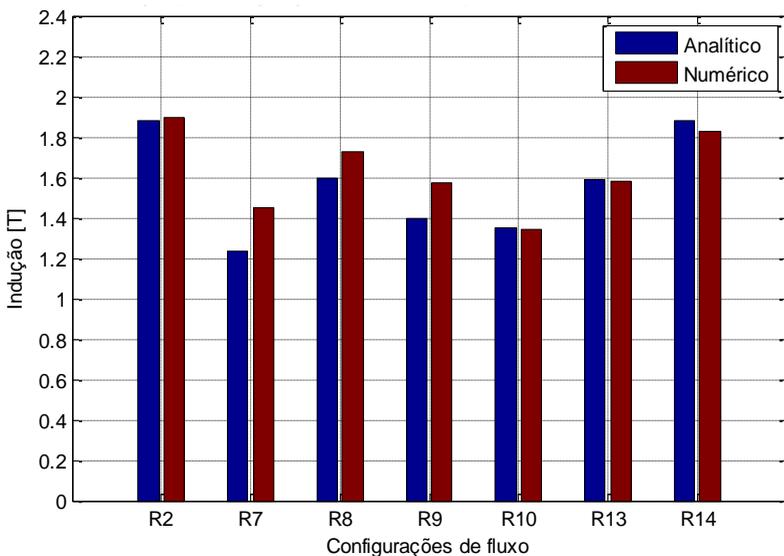
Como pode ser visto na Figura 5.12 ambos os valores, “Analíticos” e “Numéricos”, são significativamente próximos, em especial na região do entreferro, “ $\mathcal{R}_{10}$ ”.

Na Seção 5.7 foi calculado uma indução magnética de  $1,3497 T$  no entreferro, através do circuito equivalente magnético desenvolvido. Já com a simulação, calculou-se um valor de  $1,3450 T$  de indução magnética.

Verifica-se portanto, que a metodologia desenvolvida neste trabalho apresenta um desvio de apenas  $0,0047 T$  em relação ao valor calculado numericamente, cerca de  $0,35\%$  de desvio em relação ao valor simulado.

Já a configuração de fluxo referente à relutância “ $\mathcal{R}_7$ ” apresentou um desvio de  $0,2165 T$ , cerca de  $14,9\%$  em relação ao valor numérico, o maior desvio dentre as configurações. Entretanto, deve-se lembrar que é nesta configuração que ocorrem as maiores simplificações devido à proximidade com o entreferro. Desta forma, pode-se considerar este desvio como um valor aceitável, assegurando assim a aplicabilidade do método desenvolvido neste trabalho.

Figura 5.12 Comparativo entre os valores de indução analíticos e numéricos, caso linear.



Fonte: Próprio autor.

### 5.9.3 Comparação entre os resultados numéricos e analíticos com permeabilidade não linear e dispersão

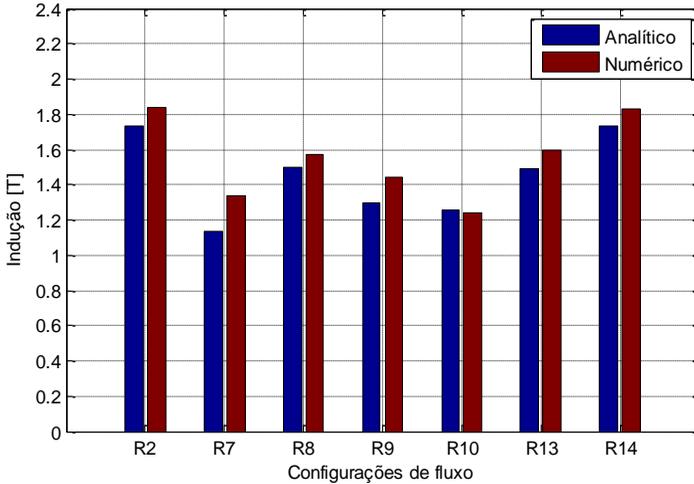
A metodologia apresentada neste trabalho foi desenvolvida considerando a permeabilidade magnética linear nas configurações de fluxo magnético, e apresentou bons resultados em comparação com a simulação, conforme foi apresentado na Subseção 5.9.2.

Nesta seção é realizado um estudo comparativo entre os valores de indução magnéticas obtidos de forma analítica, através da formulação desenvolvida aplicada ao caso estudado, para o núcleo de ferro com permeabilidade magnética não linear, e numérica.

Foram realizadas simulações utilizando a curva de permeabilidade magnética não linear, cujos pontos estão ilustrados na Figura 5.9, para o núcleo ferromagnético. E foram calculados os valores de indução magnéticas das configurações de fluxo no núcleo de ferro e no entreferro.

O estudo comparativo é ilustrado na Figura 5.13. Conforme pode ser visto, ambos os valores, “Analíticos” e “Numéricos”, são próximos assim como no caso linear, em especial na região do entreferro, “ $\mathcal{R}_{10}$ ”.

Figura 5.13 Comparativo entre os valores de indução analíticos e numéricos, caso não linear.



Fonte: Próprio autor.

Na formulação das equações para o cálculo das relutâncias foi considerado que a permeabilidade magnética é constante nas configurações de fluxo. Como ilustrado na Seção 5.8, para a aplicação do método proposto a casos não lineares deve ser feita a simplificação de que a permeabilidade magnética é um valor constante em cada configuração de fluxo, mas esse valor pode variar de uma configuração de fluxo para outra. Analisando os resultados obtidos por ambos os métodos para o caso não linear deste dispositivo, podemos ver que mesmo com todas as simplificações o método proposto apresenta bons resultados para o caso não linear. Assim, observa-se que desde que respeitadas as especificações do método proposto, também podemos aplicá-lo a casos não lineares e obter bons resultados.

Na Seção 5.8 foi calculada uma indução magnética de  $1,2575 T$  no entreferro, através do circuito equivalente magnético desenvolvido. Com a simulação realizada, chegou-se a um valor de indução magnética de  $1,2367 T$ , nesta mesma região. Constata-se deste modo, que a metodologia desenvolvida neste trabalho apresenta um desvio de apenas  $0,0208 T$  em relação ao valor calculado numericamente, cerca de  $1,68\%$  de desvio em relação ao valor simulado.

Assim sendo, mesmo esse desvio sendo superior ao do caso linear, ele ainda é muito pequeno, de tal forma que os resultados obtidos de forma analítica podem ser considerados adequados. Neste caso a configuração de fluxo que apresentou um maior desvio foi a referente à relutância “ $\mathcal{R}_7$ ”, que apresentou um desvio de  $0,2014 T$ , cerca de 15% em relação ao valor numérico, praticamente igual ao do caso linear.

Novamente, deve-se lembrar que é nesta configuração que ocorrem as maiores simplificações devido à proximidade com o entreferro. E de modo similar ao caso linear, pode-se considerar este resultado como aceitável, reafirmando assim, a aplicabilidade do método desenvolvido.

## 5.10 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou o estudo de um alto falante através da aplicação da metodologia proposta neste trabalho. Em um primeiro estágio foi realizada a comparação dos resultados da indução no entreferro obtidos pelo circuito equivalente magnético com os resultados obtidos pela Lei de Ampère e Lei de Gauss magnética. Foi verificado que ambas as abordagens chegaram aos mesmos resultados.

Em sequência foram feitas análises teóricas do circuito equivalente magnético desenvolvido. Nesta etapa foi verificado que todos os resultados numéricos obtidos com o cálculo analítico seguiram a tendência apresentada pela análise teórica previamente apresentada.

Por fim, realizou-se um estudo comparativo entre os valores de indução magnética calculados da forma analítica proposta, e os valores de indução magnéticas calculados numericamente através de simulações realizadas no software EFCAD.

O estudo comparativo realizado demonstrou que o método proposto pode ser adaptado para a representação de materiais não lineares através de um procedimento de cálculo iterativo fornecendo resultados significativamente próximos dos resultados numéricos obtidos por simulação. Casos com saturação a permeabilidade magnética varia significativamente em um pequeno volume, assim para a aplicação do método deve-se colocar um maior número de relutâncias para representar esta maior variação da permeabilidade magnética.

Portanto, a metodologia desenvolvida pode ser aplicada a casos não lineares garantindo bons resultados desde que a não linearidade e a saturação sejam devidamente representadas no método proposto.



## **6 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RELUTÂNCIA EM UM MOTOR SINCRONO**

### **6.1 INTRODUÇÃO**

Este capítulo apresenta o estudo de uma máquina síncrona de ímãs permanentes por intermédio da aplicação da metodologia proposta neste trabalho. Inicialmente é feita a apresentação do dispositivo em estudo, seu funcionamento, suas dimensões, e os materiais que compõem o dispositivo.

A região de interesse da máquina é o entreferro. Nesta região é de fundamental importância saber o valor da indução magnética gerada pelo ímã permanente e pelas correntes de armadura para a determinação dos demais parâmetros de funcionamento do dispositivo.

No entanto, apesar do entreferro ser a região de grande interesse e determinante no torque da máquina, também é de fundamental importância ficar atento para os demais valores de indução no ferro do rotor e do estator para evitar que haja saturação excessiva em determinados locais.

É realizado o desenvolvimento do circuito equivalente magnético do dispositivo de forma gradual avaliando os valores de indução magnética em todas as configurações de fluxo.

Em primeiro lugar, considera-se somente o campo magnético gerado pelo ímã permanente, sendo o ferro do rotor e do estator com permeabilidade magnética linear. Em sequência considera-se apenas o campo magnético gerado pelo ímã, mas desta vez com a permeabilidade magnética do ferro não linear.

Em sequência, considera-se o campo magnético gerado pelo ímã permanente e pelas correntes elétricas nas bobinas, com o ferro linear, em seguida é considerado o campo gerado pelo ímã e pelas correntes, e o ferro como sendo não linear.

Finalmente, para analisar a adequação do modelo analítico desenvolvido com o fenômeno que ocorre na realidade, é feito um estudo comparativo entre os valores de indução magnéticas calculados de forma analítica para cada caso, através do método proposto neste trabalho e calculados numericamente através das simulações realizadas no software EFCAD.

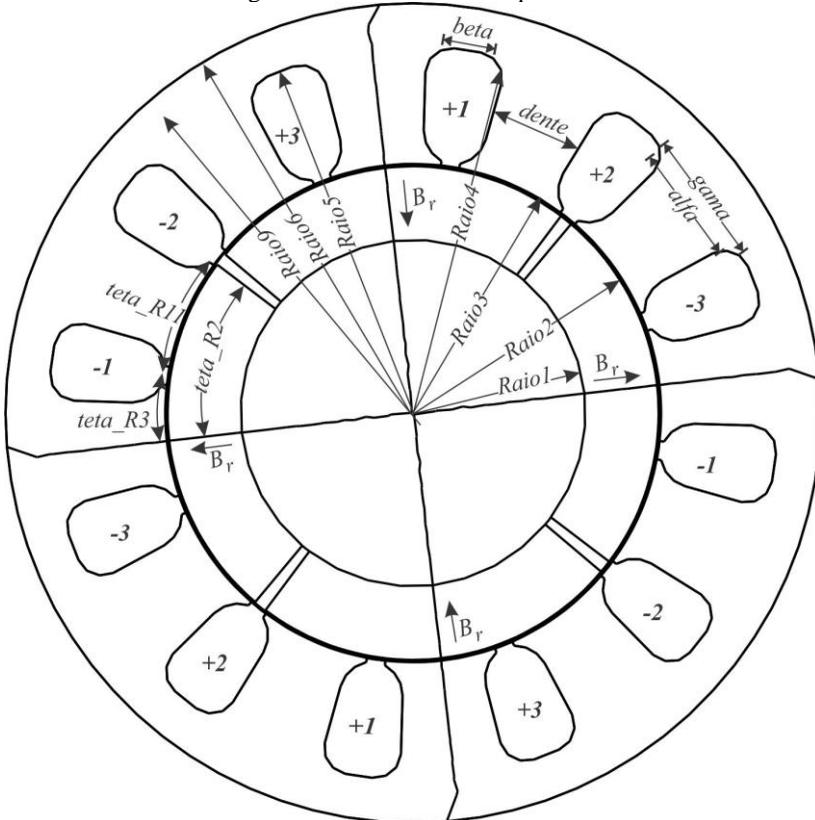
### **6.2 O MOTOR**

A máquina em questão é um motor síncrono apresentado na Figura 6.1. O motor é composto de ímãs permanentes de Ferrite

acoplados externamente ao rotor com indução remanente de 0,42 T e magnetização radial, conforme as orientações apresentadas na Figura 6.1. A equação do ímã está apresentada na Equação (6.1).

$$B_i = \mu_0 H_i + 0,42 \quad [T] \quad (6.1)$$

Figura 6.1 Dimensões do dispositivo



Fonte: Próprio autor.

Tanto o rotor como o estator são compostos de aço não linear laminado como nas simulações do alto falante teórico do Capítulo 5. A curva de magnetização foi obtida através de medições realizadas em laboratório e tem seus valores medidos conforme apresentados na Figura 5.9.

Deste modo, os ímãs permanentes são responsáveis por formar o indutor ou campo. Já o induzido ou armadura é composto por doze ranhuras alimentadas por três fases de um Ampère de pico senoidal e em sequência positiva, com duzentas espiras por fase. A presente máquina é um motor de quatro polos com dez centímetros de profundidade e 9,58 centímetros de diâmetro e cuja a bobinagem está apresentada na Figura 6.1.

Por fim, é ilustrado na Figura 6.1 a geometria da máquina que será necessária para o desenvolvimento do circuito equivalente magnético. É importante ressaltar que os parâmetros foram arbitrados conforme o circuito equivalente magnético foi sendo desenvolvido, e que estas mesmas variáveis serão utilizadas nas fórmulas analíticas do circuito equivalente magnético deste motor.

### 6.3 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA LINEAR, COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE

Como mencionado no Capítulo 1, a metodologia desenvolvida se aplica a casos estáticos. Porém, isso não nos impede de a aplicarmos em máquinas rotativas. Analisando o movimento da máquina, pode-se perceber que esta apresenta uma carta de fluxo característica para cada posição. Desta forma, o funcionamento dinâmico de uma máquina rotativa pode ser visto como um conjunto de cartas de campo estáticas para cada instante.

Assim, pode-se aplicar a teoria apresentada neste trabalho a cada caso estático isoladamente, sendo este oriundo de uma determinada posição geométrica do rotor e com as correntes para aquele determinado instante. Deste modo, pode-se modelar o comportamento da máquina elétrica através de seus circuitos equivalentes magnéticos. Essa abordagem de avaliar a máquina de forma estática, obviamente não permite que consideremos as correntes induzidas nas regiões condutoras.

É importante ressaltar, que a cada posição do rotor há uma mudança na carta de campo e nos valores das correntes, de tal forma que o circuito equivalente magnético só é válido para aquele determinado instante.

No âmbito deste trabalho é realizada a aplicação da metodologia desenvolvida à apenas uma posição do rotor, cuja carta de campo está apresentada na Figura 6.5.

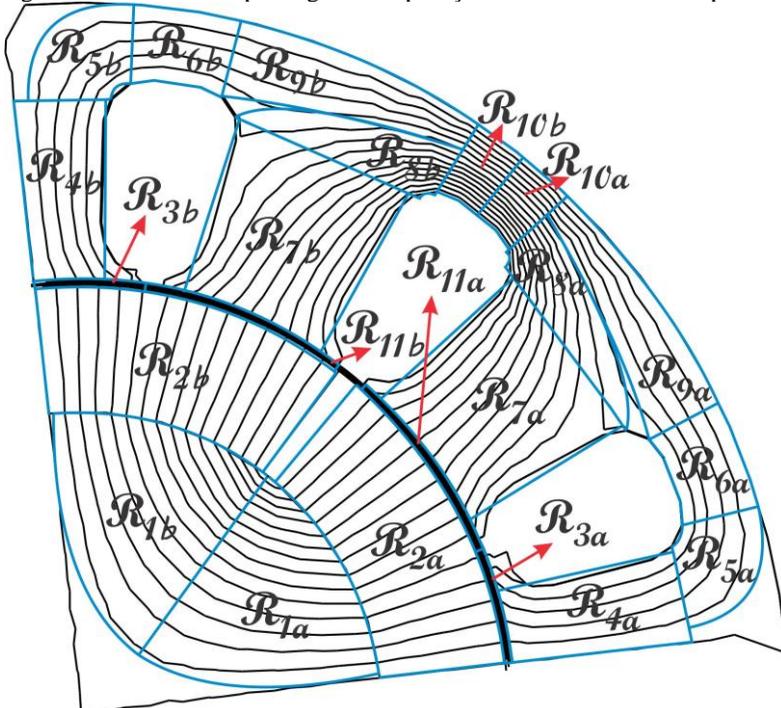
Conforme pode ser observado na Figura 6.5 a carta de campo apresenta dois tipos de simetria. A primeira, e mais nítida, é com relação

ao número de polos, como mencionado na Seção 6.2. Como a máquina apresenta quatro polos iguais, e sendo que as linhas de campo são conservativas em cada polo, podemos limitar o desenvolvimento do circuito equivalente magnético a apenas um dos polos.

Neste polo há uma simetria nas linhas de campo com relação a linha radial que passa pelo centro da bobina que fica no centro do polo. Deste modo, particiona-se a carta de campo de um polo, sendo esta partição simétrica a linha radial que passa pelo centro da bobina que fica no centro do polo.

A Figura 6.2 ilustra como é realizada a divisão da carta de campo em configurações de fluxo (relutâncias). É importante ressaltar que apesar de haver simetria, todas as configurações de fluxo são tratadas separadamente. Isto é necessário quando realizamos o cálculo não linear, pois nesta análise a permeabilidade magnética é variável para cada região onde a relutância é definida e dependente do fluxo magnético que passa por esta.

Figura 6.2 Carta de campo magnético e partição das relutâncias do dispositivo



Fonte: Próprio autor.

E quando há a inserção das correntes de armadura espera-se uma variação da intensidade do fluxo magnético nas configurações de fluxo magnéticas simétricas, porém em lados opostos da simetria, em razão dos valores das correntes em cada ranhura não serem simétricos em relação a ranhura central do polo.

As configurações de fluxo foram arbitradas de tal forma que não trouxessem grande complexidade ao cálculo, já que um dos objetivos deste trabalho é permitir o cálculo das induções sem a necessidade de softwares ou mesmo com a demanda de grande tempo de cálculo, e que representassem bem a carta de campo da máquina.

Assim como no caso do alto falante foi necessário realizar algumas adaptações para que as fórmulas analíticas desenvolvidas nos Capítulos 3 e 4 representassem de forma adequada o trecho da carta de campo correspondente àquela configuração de fluxo. A seguir é explanado todas as fórmulas analíticas para cada configuração de fluxo bem como suas particularidades e simplificações tomadas.

Conforme havia sido mencionado anteriormente, fazemos o uso da simetria com o eixo radial localizado no centro da bobina central do polo. Assim, as configurações de fluxo do lado direito deste eixo terão o subscrito “a” enquanto que as configurações do lado esquerdo terão o subscrito “b” nas fórmulas analíticas de relutâncias deste dispositivo.

Primeiramente temos as fórmulas analíticas de relutância das configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{1a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{1b}$ ”. Essas configurações de fluxo são semelhantes à configuração de um semicírculo de fluxo estudada na Seção 4.2.4. Para definir o ângulo deste semicírculo foi realizado uma medida do eixo radial de simetria até o ponto médio entre o maior e o menor ponto da curvatura do rotor correspondente a esta peça, chegando-se a um ângulo de  $73^\circ$ .

Nas Equações (6.2) e (6.3) podem ser observadas as fórmulas analíticas de relutância “ $\mathcal{R}_{1a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{1b}$ ”. Assim como está descrito, cada uma delas tem sua permeabilidade magnética relativa individual, onde, para o caso linear é 1000, e para o caso não linear é calculada através de um método iterativo e da curva de magnetização do material.

$$\mathcal{R}_{1a} = \frac{73^\circ\pi}{180^\circ\mu_{1a_{ferro}}4,7041p} \quad (6.2)$$

$$\mathcal{R}_{1b} = \frac{73^\circ\pi}{180^\circ\mu_{1b_{ferro}}4,7041p} \quad (6.3)$$

Nas equações (6.4) e (6.5), estão apresentadas as fórmulas analíticas das relutâncias das configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{2a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{2b}$ ” que correspondem à região dos ímãs permanentes. Essas configurações de fluxo podem ser aproximadas pela configuração de superfícies planas e paralelas, estudada na Seção 4.2.1, sem grandes alterações nos resultados, visto que a inclinação dos ímã é muito pequena.

Entretanto, uma forma de levar em consideração essa inclinação, ou seja, que a superfície interna ou arco interno é menor que a superfície radialmente externa ou arco maior é utilizar o comprimento do arco médio entre estas, para o cálculo da área na fórmula da relutância, segundo está ilustrado nas Equações (6.4) e (6.5), onde “ $p$ ” é o comprimento do pacote. Como estamos trabalhando com ímã de ferrite temos que a permeabilidade relativa é igual a um, e os demais parâmetros estão ilustrado na Figura 6.1.

$$\mathcal{R}_{2a} = \frac{Raio2 - Raio1}{\mu_{r_{ímã}} \mu_0 teta\_R2 \left[ \frac{Raio2 - Raio1}{2} + Raio1 \right] p} \quad (6.4)$$

$$\mathcal{R}_{2b} = \frac{Raio2 - Raio1}{\mu_{r_{ímã}} \mu_0 teta\_R2 \left[ \frac{Raio2 - Raio1}{2} + Raio1 \right] p} \quad (6.5)$$

Parte fundamental do cálculo é a representação da relutância do entreferro, assim como a do ímã. Tais relutâncias apresentam valores muito elevados se comparados com as relutâncias do estator e do rotor, causando assim grande influência no cálculo final do circuito equivalente magnético.

Deste modo, mesmo o entreferro tendo uma espessura muito pequena é importante realizar o mesmo procedimento que foi realizado nas relutâncias dos ímãs, tomando seu arco médio para o cálculo da área, na aproximação através da configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas apresentada na Seção 4.2.1 para esta configuração.

Estão apresentadas nas Equações (6.6) e (6.7) as fórmulas analíticas para o cálculo das relutâncias “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, que são referentes a parte do entreferro, conforme ilustrado na Figura 6.1.

$$\mathcal{R}_{3a} = \frac{Raio3 - Raio2}{\mu_0 teta\_R3 \left[ \frac{Raio3 - Raio2}{2} + Raio2 \right] p} \quad (6.6)$$

$$\mathcal{R}_{3a} = \frac{Raio3 - Raio2}{\mu_0 teta\_R3 \left[ \frac{Raio3 - Raio2}{2} + Raio2 \right] p} \quad (6.7)$$

Uma simplificação muito importante realizada que afeta várias configurações de fluxo e a resolução do circuito como um todo, é considerar que não há fluxo disperso nas bobinas. Na prática mesmo o cobre tendo um material com permeabilidade magnética praticamente igual à do ar, há linhas de fluxo magnético que se fecham nas bobinas. No entanto, como este fluxo disperso é muito pequeno, chegando no máximo à 8,5mT, conforme medições realizadas no motor em funcionamento, optou-se por desconsiderar este fluxo disperso em nome da obtenção de um circuito mais simples mas que fornecesse resultados plausíveis.

Nas configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{4a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{4b}$ ” além da simplificação de que não há fluxo magnético disperso passando pelas bobinas de corrente, foi feita a aproximação que o fluxo magnético não passa pela extremidade da sapata polar. Ou seja, que o fluxo magnético sai das relutâncias “ $\mathcal{R}_{5a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{5b}$ ” entra em “ $\mathcal{R}_{4a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{4b}$ ” e a percorre em linha reta até “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”.

Para o cálculo desta relutância é utilizada a similaridade pela configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas. No entanto, como pode ser observado na Figura 6.2, as configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{4a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{4b}$ ” não têm faces paralelas de igual tamanho. Deste modo, foi utilizada a face média dentro da configuração de fluxo para o cálculo da área. Tal face tem um comprimento que é a metade do comprimento denominado “*dente*”, conforme ilustrado na Figura 6.1, assim como os demais parâmetros.

Obtêm-se então as fórmulas analíticas para as configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{4a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{4b}$ ” apresentadas nas Equações (6.8) e (6.9).

$$\mathcal{R}_{4a} = \frac{Raio4 - Raio3}{\mu_{4a\_ferro} \left[ \frac{dente}{2} \right] p} \quad (6.8)$$

$$\mathcal{R}_{4b} = \frac{Raio4 - Raio3}{\mu_{4b\_ferro} \left[ \frac{dente}{2} \right] p} \quad (6.9)$$

Para definir a fórmula analítica das configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{5a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{5b}$ ” foi levado em consideração apenas o fluxo magnético principal, aquele que entra nas configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{6b}$ ”.

Desta forma, é utilizada a fórmula analítica da configuração de fluxo de um anel de fluxo magnético apresentado na Seção 3.2.2 com um arco de noventa graus, e espessura correspondente a ilustrada nas Equações (6.10) e (6.11), que são as fórmulas analíticas das relutâncias “ $\mathcal{R}_{5a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{5b}$ ” e cujas variáveis estão apresentadas na Figura 6.1.

$$\mathcal{R}_{5a} = \frac{\pi}{2\mu_{5a_{ferro}} \ln \left[ 1 + \frac{2 \cdot (\text{Raio6} - \text{Raio5})}{2 \cdot (\text{Raio5} - \text{Raio4})} \right]} p \quad (6.10)$$

$$\mathcal{R}_{5b} = \frac{\pi}{2\mu_{5b_{ferro}} \ln \left[ 1 + \frac{2 \cdot (\text{Raio6} - \text{Raio5})}{2 \cdot (\text{Raio5} - \text{Raio4})} \right]} p \quad (6.11)$$

As relutâncias “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{6b}$ ” quase não necessitam de simplificações, sendo a fórmula analítica de superfícies planas e paralelas utilizada para o cálculo da relutância desta configuração de fluxo, apresentado na Seção 4.2.1.

O comprimento da linha de fluxo é aqui denominado “*beta*”, e pode ser visualizado na Figura 6.1. A inclinação em razão da curvatura do estator é tão pequena que pode ser desprezada, assim como, a curvatura externa da ranhura. Chegando-se, então, as Equações (6.12) e (6.13) para o cálculo das relutâncias “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{6b}$ ”.

$$\mathcal{R}_{6a} = \frac{\text{beta}}{\mu_{6a_{ferro}} (\text{Raio6} - \text{Raio5})} p \quad (6.12)$$

$$\mathcal{R}_{6b} = \frac{\text{beta}}{\mu_{6b_{ferro}} (\text{Raio6} - \text{Raio5})} p \quad (6.13)$$

Nas configurações de fluxo referentes as relutâncias “ $\mathcal{R}_{7a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{7b}$ ”. São feitas simplificações similares as realizadas nas relutâncias “ $\mathcal{R}_{4a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{4b}$ ”. É desprezado a curvatura do fluxo magnético que passa pelas extremidades da sapata polar, e utilizado para o cálculo da relutância uma área média de comprimento “*dente*”, e ainda que todas as linhas de fluxo que entram perpendicularmente à uma face desta configuração de fluxo saem perpendiculares à outra face, ou seja, não é considerado o fluxo disperso que entra nas bobinas.

Deste modo, chegamos as Equações (6.14) e (6.15) para o cálculo analítico da relutância das configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{7a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{7b}$ ”.

$$\mathcal{R}_{7a} = \frac{Raio4 - Raio3}{\mu_{7a_{ferro}} dente \cdot p} \quad (6.14)$$

$$\mathcal{R}_{7b} = \frac{Raio4 - Raio3}{\mu_{7b_{ferro}} dente \cdot p} \quad (6.15)$$

Analisa-se agora as linhas de fluxo da região da carta de campo entre as configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{6a}$ ”, “ $\mathcal{R}_{7a}$ ”, “ $\mathcal{R}_{10a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{6b}$ ”, “ $\mathcal{R}_{7b}$ ”, “ $\mathcal{R}_{10b}$ ”. Podemos notar que esta região pode ser dividida em duas configurações de fluxo já estudadas; uma delas é a de superfícies planas e paralelas apresentada na Seção 3.2.1, e a outra é a de quarto de elipse de fluxo apresentada na Seção 4.2.5.

Desta forma, temos nas Equações (6.16) e (6.17) as fórmulas analíticas para o cálculo das relutâncias “ $\mathcal{R}_{8a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{8b}$ ”. Como a fórmula analítica para o cálculo da relutância de uma configuração de fluxo de um quarto de elipse leva em conta exatamente um quarto, ou seja, no interior da configuração há um ângulo reto e no caso das relutâncias “ $\mathcal{R}_{8a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{8b}$ ” essa ângulo de  $90^\circ$  não existe, mas sim há a curvatura externa da bobina.

Para melhor representar a relutância “ $\mathcal{R}_8$ ” é subtraída em paralelo uma relutância equivalente a um quarto de círculo, ou seja, a fórmula de relutância de uma configuração de fluxo de um semicírculo de fluxo com  $90^\circ$ , conforme apresentado nas Equações(6.16) e (6.17).

$$\mathcal{R}_{8a} = \left[ \left[ \frac{\pi}{2\mu_{8a_{ferro}} 4,7041p} \cdot \left[ \frac{0,1136 \text{ alfa}}{Raio9 - Raio4} + 0,82077 \right] \right]^{-1} - \left[ \frac{\pi}{2\mu_{r_{ferro}} \mu_0 4,7041p} \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (6.16)$$

$$\mathcal{R}_{8b} = \left[ \left[ \frac{\pi}{2\mu_{8b_{ferro}} 4,7041p} \cdot \left[ \frac{0,1136 \text{ alfa}}{\text{Raio9} - \text{Raio4}} + 0,82077 \right] \right]^{-1} - \left[ \frac{\pi}{2\mu_{r_{ferro}} \mu_0 4,7041p} \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (6.17)$$

As relutâncias “ $\mathcal{R}_{9a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{9b}$ ” também foram aproximadas para a configuração de fluxo de superfícies planas e paralelas apresentada na Seção 3.2.1.

As faces paralelas desta configuração de fluxo são significativamente diferentes, e uma forma de levar esta diferença em consideração no cálculo foi utilizar a média entre as duas faces, a que está próxima à “ $\mathcal{R}_6$ ” e a que está próxima à “ $\mathcal{R}_{10}$ ”.

Chega-se assim às Equações (6.18) e (6.19) que representam as configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{9a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{9b}$ ”.

$$\mathcal{R}_{9a} = \frac{\text{gama}}{\mu_{9a_{ferro}} p \left[ \frac{(\text{Raio6} - \text{Raio9}) + (\text{Raio6} - \text{Raio5})}{2} \right]} \quad (6.18)$$

$$\mathcal{R}_{9b} = \frac{\text{gama}}{\mu_{9b_{ferro}} p \left[ \frac{(\text{Raio6} - \text{Raio9}) + (\text{Raio6} - \text{Raio5})}{2} \right]} \quad (6.19)$$

As Equações (6.20) e (6.21) ilustram a fórmula analítica utilizada para calcular as relutâncias “ $\mathcal{R}_{10a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{10b}$ ”. Assim como nas relutâncias “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{6b}$ ” é desconsiderada a curvatura do estator e da ranhura.

$$\mathcal{R}_{10a} = \frac{\text{beta}}{2\mu_{10a_{ferro}} p (\text{Raio6} - \text{Raio5})} \quad (6.20)$$

$$\mathcal{R}_{10b} = \frac{\text{beta}}{2\mu_{10b_{ferro}} p (\text{Raio6} - \text{Raio5})} \quad (6.21)$$

Por fim, temos as Equações (6.22) e (6.23) que são aplicadas para calcular a relutância das configurações de fluxo “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”.

que são referentes ao entreferro em baixo dos dentes do estator. Assim como nas configurações de fluxo de “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, é utilizado o arco médio para o cálculo mais realista da área.

$$\mathcal{R}_{11a} = \frac{Raio3 - Raio2}{\mu_0 teta\_R11 \cdot p \left[ \frac{(Raio3 - Raio2)}{2} + Raio2 \right]} \quad (6.22)$$

$$\mathcal{R}_{11b} = \frac{Raio3 - Raio2}{\mu_0 teta\_R11 \cdot p \left[ \frac{(Raio3 - Raio2)}{2} + Raio2 \right]} \quad (6.23)$$

Após a partição da carta de campo nas configurações de fluxo e o desenvolvimento das fórmulas analíticas das relutâncias, falta ainda a representação dos ímãs permanentes em elementos de circuito elétrico.

Os ímãs permanentes podem ser modelados como fontes de corrente em paralelo com sua relutância característica, conforme apresentado na Seção 1.7.2. Sendo que a área dos ímãs dada na Equação (6.24).

$$S_i = teta\_R2 \left[ \frac{Raio2 - Raio1}{2} + Raio1 \right] p \quad (6.24)$$

O fluxo gerado por cada ímã permanente está apresentado na Equação (6.25), onde “ $B_r$ ” é a indução remanente dos ímãs, ambos os ímãs permanente possuem a mesma indução remanente em módulo, porém, conforme ilustrado na Figura 6.1 um deles tem sentido para o centro do rotor e outro para fora do rotor.

Sendo assim, essa informação deve ser expressa no circuito equivalente elétrico através do sentido das fontes de corrente que representam os ímãs permanentes.

$$\Phi = B_r S_i = 7,8338e^{-4} \quad (6.25)$$

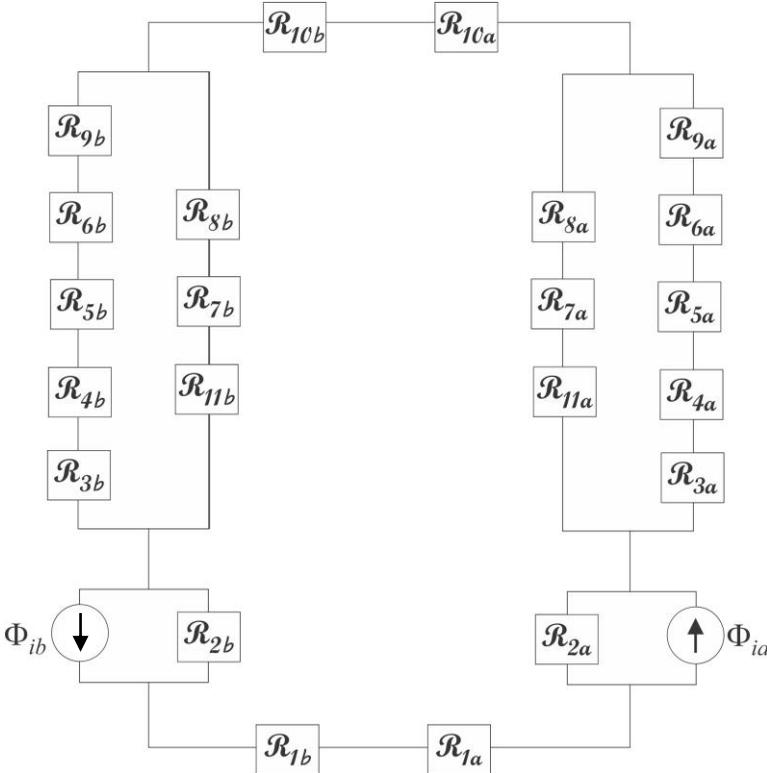
Em posse das fórmulas analíticas para o cálculo das relutâncias e do valor do fluxo gerado pelos ímãs permanente, podemos finalmente desenvolver o circuito equivalente magnético através da análise da carta de campo.

Observando a carta de campo, vemos que o fluxo magnético gerado pelo ímã permanente da relutância “ $\mathcal{R}_{2a}$ ” sai de “ $\mathcal{R}_{2a}$ ” e entra

em “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11a}$ ”, onde de “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” segue para “ $\mathcal{R}_{7a}$ ” e de “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” segue para “ $\mathcal{R}_{5a}$ ” e posteriormente para “ $\mathcal{R}_{6a}$ ”.

Nesta etapa é de fundamental importância analisar com cuidado a carta de campo para definir a ligação entre “ $\mathcal{R}_{7a}$ ”, “ $\mathcal{R}_{8a}$ ”, “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{9a}$ ”. Observando a carta de campo nota-se que o fluxo magnético que sai de “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” segue para “ $\mathcal{R}_{9a}$ ” sem adentrar em “ $\mathcal{R}_{8a}$ ”, e o mesmo ocorre com o fluxo magnético que vem de “ $\mathcal{R}_{7a}$ ” e segue diretamente para “ $\mathcal{R}_{8a}$ ”. Todavia, para se ter certeza de que é este fenômeno que realmente ocorre, foram realizadas medidas na simulação que garantem esse comportamento desses cainhos de fluxo magnético.

Figura 6.3 Circuito equivalente magnético para o campo magnético gerado pelo indutor



Fonte: Próprio autor.

Seguindo com o caminho do fluxo magnético, temos que os fluxos que saem de “ $\mathcal{R}_{8a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{9a}$ ” entram em “ $\mathcal{R}_{10a}$ ”, e continuam para

“ $\mathcal{R}_{10b}$ ”. Como já havíamos comentado, existe um eixo radial de simetria, logo, o caminho de fluxo que foi explanado no lado “ $a$ ” se repete para o lado “ $b$ ”, contudo, com sentido contrário. Ou seja, em vez de o fluxo magnético caminhar para o estator, ele percorre o mesmo caminho, mas em sentido ao rotor.

Enfim, o fluxo magnético que sai do ímã permanente da relutância “ $\mathcal{R}_{2b}$ ” segue para “ $\mathcal{R}_{1b}$ ” e “ $\mathcal{R}_{1a}$ ”, e posteriormente “ $\mathcal{R}_{2a}$ ”, fechando um dos quatro polos magnéticos do motor. Deste modo, chegamos ao circuito equivalente magnético apresentado na Figura 6.3, onde todas as análises precedentes podem ser visualizadas.

Como estamos tratando de um caso com a permeabilidade do ferro linear, basta aplicarmos os valores numéricos às fórmulas analíticas de relutância e chega-se aos valores correspondentes apresentados na Tabela 6.1.

Aplicando-se a teoria de circuitos elétricos, soluciona-se o circuito equivalente magnético do motor para se encontrar o valor da indução magnética na região do entreferro,.

Tabela 6.1 Valores das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e linear

Parâmetro	Valor numérico
$\mathcal{R}_{1a}$	$2.155,3302 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{1b}$	$2.155,3302 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2a}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2b}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3a}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3b}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4a}$	$18.099,5589 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4b}$	$18.099,5589 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5a}$	$8.418,2596 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5b}$	$8.418,2596 \frac{Ae}{Wb}$

$\mathcal{R}_{6a}$	9.910,1896	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6b}$	9.910,1896	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7a}$	9.049,7794	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7b}$	9.049,7794	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8a}$	20.331,2232	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8b}$	20.331,2232	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9a}$	36.164,6244	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9b}$	36.164,6244	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10a}$	4.955,0948	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10b}$	4.955,0948	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11a}$	198.187,0011	$\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11b}$	198.187,0011	$\frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

No caso deste motor o entreferro é dividido em quatro relutâncias, “ $\mathcal{R}_{3a}$ ”, “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Deste modo, através da solução do circuito elétrico equivalente obtêm-se uma indução magnética no entreferro de 0,3405 T para “ $\mathcal{R}_{3a}$ ”, 0,3405 T para “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, 0,3526 T para “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e 0,3526 T para “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Conforme esperado, os valores das induções magnéticas são muito próximos.

Assim como vem sendo adotado neste trabalho, a área de cálculo utilizada para o cálculo das induções nas peças é a área média, a mesma que foi utilizada nas fórmulas analíticas das relutâncias.

Nesta primeira etapa, foi desenvolvido o circuito equivalente magnético para o motor apenas com a presença do campo gerado pelo ímã permanente e considerando que o ferro do estator e do rotor apresentem comportamento linear. Em sequência, é desenvolvido o circuito equivalente magnético do motor de forma mais completa.

#### 6.4 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E NÃO LINEAR E COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE

Ainda que o campo magnético gerado pelo ímã, para o caso do ímã permanente de ferrite, não seja significativamente alto a ponto de saturar o ferro, a representação da não linearidade do ferro é de fundamental importância na modelagem do circuito equivalente magnético do motor, principalmente quando se deseja avaliar o comportamento do motor para diferentes tipos de ímãs permanentes.

É apresentado nesta seção a solução do circuito equivalente magnético do motor apresentado na Figura 6.3, para a permeabilidade magnética não linear.

Para tal, utiliza-se um método iterativo para o cálculo dos valores das relutâncias no ferro e solução do circuito equivalente magnético com a curva de magnetização do ferro representada pela Equação (5.23) desenvolvida na Seção 5.8.1. Com a convergência do processo iterativo chega-se aos valores de relutâncias apresentados na Tabela 6.2

Tabela 6.2 Valores das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e não linear

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor numérico</b>
$\mathcal{R}_{1a}$	$1.069,1811 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{1b}$	$1.069,1811 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2a}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2b}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3a}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3b}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4a}$	$8.712,9357 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4b}$	$8.712,9357 \frac{Ae}{Wb}$

$\mathcal{R}_{5a}$	4.183,5381 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5b}$	4.183,5381 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6a}$	4.924,9676 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6b}$	4.924,9676 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7a}$	4.352,8677 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7b}$	4.352,8677 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8a}$	9.667,2785 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8b}$	9.667,2785 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9a}$	21.444,6782 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9b}$	21.444,6782 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10a}$	10.794,8191 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10b}$	10.794,8191 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11a}$	198.187,0011 $\frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11b}$	198.187,0011 $\frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Chega-se então a uma indução magnética no entreferro de 0,3424 T para “ $\mathcal{R}_{3a}$ ”, 0,3424 T para “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, 0,3524 T para “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e 0,3524 T para “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Conforme esperado, os valores das induções magnéticas são muito próximos, entre as quatro relutâncias que representam o entreferro. Observa-se que houve um pequeno aumento nas induções “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”. Isso se deve à variação no valor da permeabilidade magnética, que neste caso, é modelada pela curva apresentada na Figura 5.9, e não mais por um valor fixo.

O mesmo ocorre com “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Porém, neste caso há uma pequena redução no valor da indução magnética. O fato de “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ” terem aumentado enquanto que “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ” diminuíram se

deve a proximidade e as ligações destas com as regiões do motor que apresentam maior concentração de fluxo.

Até este ponto foi modelado o motor apenas com o campo gerado pelo ímã permanente. Porém, temos ainda que representar o campo gerado pela armadura, ou seja, pelas correntes injetadas no estator. Logo, em continuação, é desenvolvido o circuito equivalente magnético do motor através da análise do campo completo, tanto do ímã quanto das correntes nas bobinas.

## 6.5 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E LINEAR, E COM O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELO ÍMÃ PERMANENTE E PELAS CORRENTES NAS TRÊS FASES

No caso das máquinas à ímãs permanentes, o fluxo no entreferro é idealmente fixado pelos ímãs permanentes e levemente afetado pelas correntes da armadura (MILLER, 1989). Realizando simulações com elementos finitos no EFCAD, observa-se que não há alterações na carta de campo que justifiquem a modificação das configurações de fluxo e conseqüentemente, das relutâncias analíticas apresentadas previamente na Figura 6.2 e nas Equações (6.2) à (6.23). Considerando a mesma posição do rotor que nas Seções 6.3 e 6.4.

Logo, o circuito equivalente magnético apresentado na Figura 6.3 pode ser mantido praticamente o mesmo, apenas sendo alterado para representar as fontes de corrente das três fases.

Através da *Lei de Ampère*, Equação (1.11), tem-se que uma corrente elétrica gera um campo magnético rotacional a esta. Porém, no caso de uma máquina elétrica temos que a corrente elétrica passa " $N$ " vezes dentro de cada ranhura, assim sendo, cada ranhura será uma fonte de força magnetomotriz no circuito equivalente magnético de valor " $NI$ ", sendo que a fase da corrente deve estar em concordância com a posição do motor.

Para arbitrar a polaridade das fontes de força magnetomotriz é utilizada a mesma orientação que foi dada as bobinas na simulação. Logo, conforme for a bobinagem do motor deve ser colocada a polaridade nas fontes de força magnetomotriz, no caso do motor em questão a bobinagem está ilustrada na Figura 6.1.

Como pode ser visto nessa figura, se a corrente de uma bobina sai do papel ela cria um fluxo magnético concordante com o fluxo do ímã permanente, e portanto, a polaridade deve ser que o fluxo do circuito no sentido do ímã passe na fonte de força magnetomotriz do menor para o maior potencial.

Já se o fluxo gerado pela bobina for subtrativo ao do ímã permanente, a fonte de força magnetomotriz deve ser estabelecida do maior para o menor potencial magnético. Chega-se assim ao circuito equivalente elétrico do motor com a presença das correntes de armadura conforme ilustrado na Figura 6.4.

Como nesta primeira etapa estamos tratando do motor com a permeabilidade magnética linear, calculam-se as relutâncias analíticas com as fórmulas das Equações de (6.2) à (6.23), cujos valores estão apresentados na Tabela 6.3.

Figura 6.4 Circuito equivalente magnético para o campo magnético gerado pelo ímã permanente e pelas correntes nas bobinas

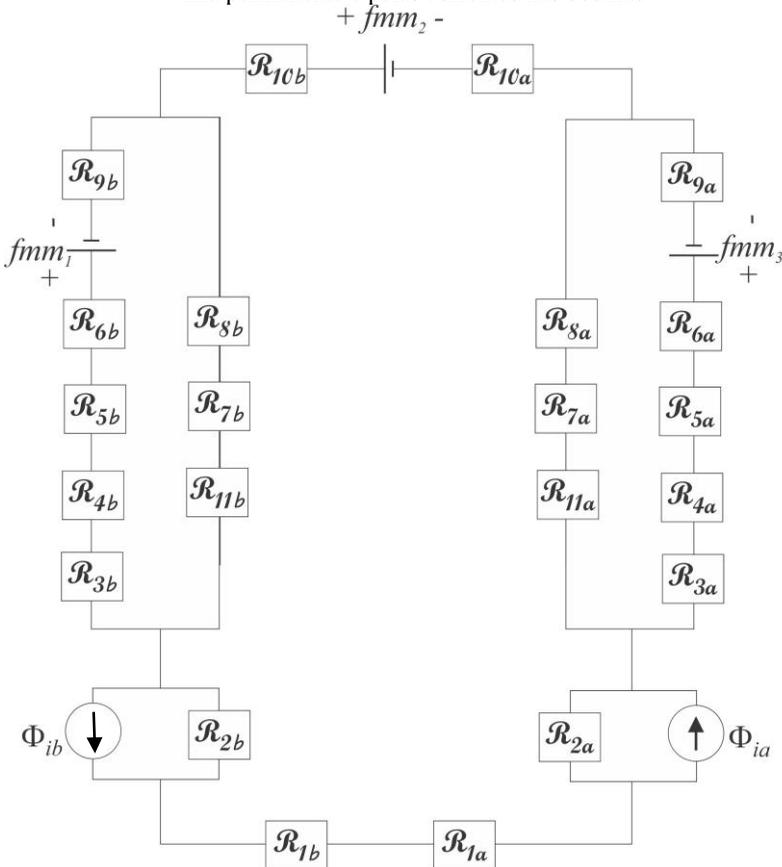


Tabela 6.3 Valores numéricos das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e linear com o campo magnético gerado pelo ímã permanente e pelas correntes nas bobinas

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor numérico</b>
$\mathcal{R}_{1a}$	$2.155,3302 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{1b}$	$2.155,3302 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2a}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2b}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3a}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3b}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4a}$	$18.099,5589 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4b}$	$18.099,5589 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5a}$	$8.418,2596 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5b}$	$8.418,2596 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6a}$	$9.910,1896 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6b}$	$9.910,1896 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7a}$	$9.049,7794 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7b}$	$9.049,7794 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8a}$	$20.331,2232 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8b}$	$20.331,2232 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9a}$	$36.164,6244 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9b}$	$36.164,6244 \frac{Ae}{Wb}$

$\mathcal{R}_{10a}$	$4.955,0948 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10b}$	$4.955,0948 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11a}$	$198.187,0011 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11b}$	$198.187,0011 \frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Observa-se que esses valores de relutâncias são idênticos aos da Tabela 6.2. Tal fato ocorre pois, para o caso onde o ferro apresenta permeabilidade magnética linear as correntes de armadura não exercem influência na relutância equivalente do circuito equivalente magnético.

Solucionando o circuito equivalente magnético apresentado na Figura 6.4 com valores da Tabela 6.3, encontram-se os valores das induções magnéticas na região de interesse.

No caso deste motor, com o indutor e armadura, e com o ferro linear, foi encontrado analiticamente uma indução magnética de 0,4131 T para “ $\mathcal{R}_{3a}$ ”, 0,4372 T para “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, 0,3166 T para “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e 0,3042 T para “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”.

Como pode ser observado comparando esses valores aos obtidos somente com o ímã há uma pequena alteração na indução magnética do entreferro em razão da consideração das correntes nas bobinas. No entanto, os valores de induções no entreferro continuam relativamente próximos entre as quatro relutâncias e aos casos anteriores apresentados nas Seções 6.3 e 6.4.

Para que a representação do motor seja completa deve-se ainda considerar a não linearidade do ferro, com o campo do ímã e da corrente.

## 6.6 CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO DA MÁQUINA COM PERMEABILIDADE DO FERRO FINITA E NÃO LINEAR, COM O CAMPO MAGNÉTICO DO ÍMÃ PERMANENTE E DAS BOBINAS

Por fim, é feita nesta seção a modelagem completa do motor, onde será considerado o campo magnético gerado pelos ímãs permanentes no indutor, pelas correntes de armadura e também o comportamento não linear da permeabilidade magnética do ferro do estator e do rotor.

A representação da não linearidade do ferro é de essencial importância na modelagem do circuito equivalente magnético do motor, especialmente quando se tem corrente envolvida, pois em virtude dos valores destas o motor pode saturar em certas regiões apresentando além de uma significativa queda na indução e conseqüentemente na tração, um aquecimento do dispositivo que pode causar danos como a desmagnetização dos ímãs permanente, e conseqüentemente um dano permanente ao dispositivo.

Através de um circuito equivalente magnético pode-se simular o motor para vários valores de corrente e avaliar a variação da permeabilidade magnética conforme a variação das correntes de armadura.

Será apresentado nesta seção a solução do circuito equivalente magnético do motor apresentado na Figura 6.4, para quando a permeabilidade magnética é não linear.

De modo semelhante ao aplicado na Seção 6.4, utilizou-se um método iterativo para o cálculo dos valores das relutâncias no ferro e solução do circuito equivalente magnético, com a curva de magnetização do ferro representada pela Equação (5.23) desenvolvida na Seção 5.8.1. Com a convergência do processo iterativo obtêm-se os valores de relutâncias apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 Valores numéricos das relutâncias para a permeabilidade do ferro finita e não linear com o campo magnético gerado pelo ímã e pela armadura

Parâmetro	Valor numérico
$\mathcal{R}_{1a}$	$1.070,2418 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{1b}$	$1.070,2418 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2a}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{2b}$	$3.703.828,7124 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3a}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{3b}$	$384.139,4231 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4a}$	$9.423,3209 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{4b}$	$9.681,0186 \frac{Ae}{Wb}$

$\mathcal{R}_{5a}$	$4.571,2192 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{5b}$	$4.713,8210 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6a}$	$5.381,3557 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{6b}$	$5.549,2301 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7a}$	$4.200,1923 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{7b}$	$4.150,8975 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8a}$	$9.342,7365 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{8b}$	$9.237,7354 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9a}$	$25.016,8731 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{9b}$	$26.454,1849 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10a}$	$10.929,1208 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{10b}$	$10.929,1208 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11a}$	$198.187,0011 \frac{Ae}{Wb}$
$\mathcal{R}_{11b}$	$198.187,0011 \frac{Ae}{Wb}$

Fonte: Próprio autor.

Chega-se a uma indução magnética no entreferro de 0,4166 T para “ $\mathcal{R}_{3a}$ ”, 0,4408 T para “ $\mathcal{R}_{3b}$ ”, 0,3155 T para “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e 0,3030 T para “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Assim como todos os demais casos, os valores das induções magnéticas são praticamente idênticos, entre as quatro relutâncias que representam o entreferro.

Realizando uma comparação com o caso do motor completo com permeabilidade do ferro linear, Seção 6.5, observa-se que houve um leve aumento nas induções magnéticas das relutâncias “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ” e uma leve redução em “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ”. Isso se deve a variação no valor da permeabilidade magnética, que neste caso, é modelada pela curva apresentada na Figura 5.9, e não mais por um valor fixo.

O fato da indução magnética em “ $\mathcal{R}_{3a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{3b}$ ” terem aumentado enquanto que em “ $\mathcal{R}_{11a}$ ” e “ $\mathcal{R}_{11b}$ ” diminuíram se deve a proximidade e as ligações destas com as regiões do motor que apresentam maior concentração de fluxo, como a região do estator radialmente acima da ranhura central do polo.

## 6.7 COMPARAÇÕES ENTRE AS CONFIGURAÇÕES DO CIRCUITO EQUIVALENTE MAGNÉTICO COM AS SIMULAÇÕES EM ELEMENTOS FINITOS

Até a presente seção, o motor vem sendo tratado apenas de forma analítica, contudo, no intuito de avaliar a metodologia proposta neste trabalho e a modelagem analítica arbitrada para este dispositivo será ilustrado na Seção 6.7 e em suas subseções as simulações com o MEF do motor, considerando primeiramente apenas o ímã e posteriormente com o ímã e as correntes nas bobinas e em ambos os casos com a permeabilidade linear e depois não linear.

A partir das simulações será então possível apresentar a comparação entre os cálculos analíticos e numéricos para cada caso apresentado nas Seções 6.3, 6.4, 6.5 e 6.6.

### 6.7.1 Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e o ímã permanente e comparação com o circuito equivalente magnético proposto

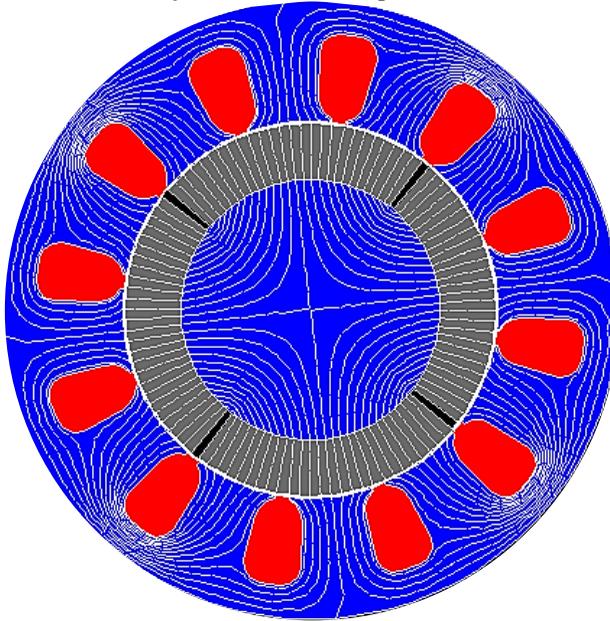
Primeiramente temos o caso mais simples, o motor apenas com os ímãs permanentes e com a permeabilidade magnética linear. Na Figura 6.5 está ilustrada a carta de campo para esta configuração do dispositivo, comparando-se a Figura 6.2 e a Figura 6.5.

Observa-se que a carta de campo é a mesma, e portanto, as configurações de fluxo estão condizentes e representam adequadamente o polo do dispositivo para este caso. As simulações em questão apresentaram um total de 5.578 elementos e 2.828 nós.

O estudo comparativo entre os valores de indução magnética, calculados pela metodologia proposta neste trabalho e calculados numericamente através da simulação, estão apresentados na Figura 6.6.

Nesta figura, pode-se observar um gráfico com os valores calculados através do circuito equivalente magnético, denominados “*Analítico*”, e os valores calculados na simulação numérica, denominados “*Numérico*”.

Figura 6.5 Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente



Fonte: Próprio autor.

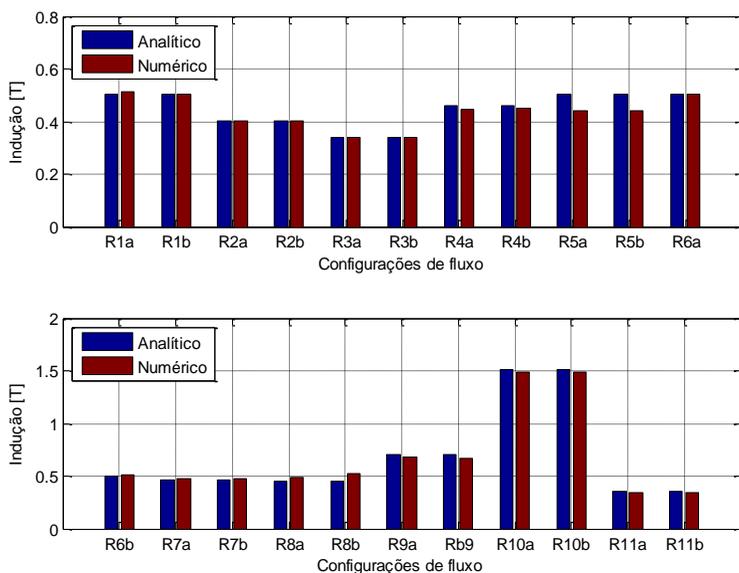
Conforme pode ser observado no gráfico da Figura 6.6 ambos os valores, “Analíticos” e “Numéricos”, são relativamente próximos, em especial na região de interesse do motor, o entreferro.

Para melhor avaliar o modelo desenvolvido é apresentado na Tabela 6.5 os valores de induções magnéticas calculados no entreferro de forma analítica e numérica e também o desvio entre ambos em Tesla, e o desvio percentual em relação ao cálculo numérico.

O modelo de circuito equivalente magnético para o motor apresenta bom desempenho se comparado com as simulações do motor. Observa-se um desvio máximo de 3,2201% em relação a simulação para os valores de indução na região de interesse, o que pode ser considerado um excelente resultado visto as simplificações adotadas.

Deve ser observado que a metodologia proposta considera que cada configuração de fluxo (ou região de relutância) apresenta um valor de indução constante em toda a configuração, o que não ocorre na prática. Assim, no intuito de desenvolver uma comparação justa é realizada uma média dos valores da indução magnética em cada configuração de fluxo.

Figura 6.6 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente



Fonte: Próprio autor.

Tabela 6.5 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação somente do ímã permanente

	$\mathcal{R}_{3a}$	$\mathcal{R}_{3b}$	$\mathcal{R}_{11a}$	$\mathcal{R}_{11b}$
Análítico	0,3405 T	0,3405 T	0,3526 T	0,3526 T
Numérico	0,3385 T	0,3406 T	0,3413 T	0,3416 T
Varição [T]	0,0020 T	0,0001 T	0,0113 T	0,0110 T
Desvio [%]	0,5908%	0,0293%	3,3109%	3,2201%

Fonte: Próprio autor.

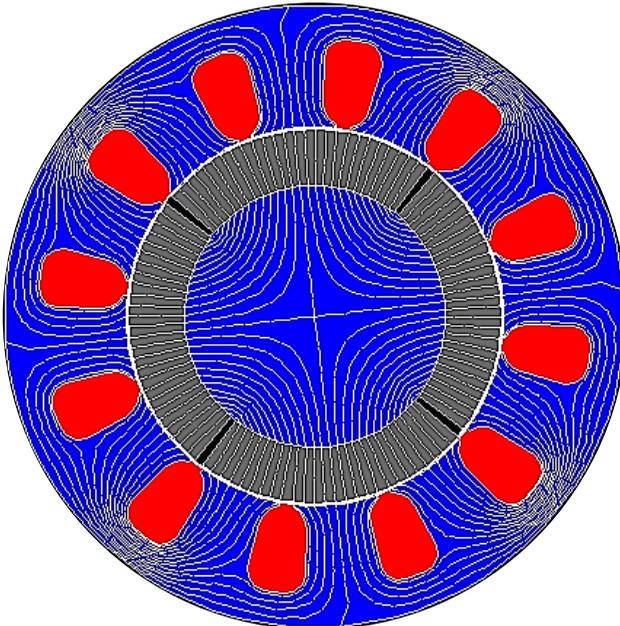
Além disso, tem-se ainda o fato de que o cálculo analítico utiliza o valor da área média, a mesma utilizada na fórmula analítica de cada relutância, para através do fluxo em cada relutância calcular o valor da indução.

Logo, mesmo com algumas configurações apresentando um desvio um pouco maior, pode-se considerar este resultado aceitável, afirmando deste modo, a aplicabilidade do método aqui desenvolvido.

### 6.7.2 Simulação com a permeabilidade do ferro não linear e com o ímã permanente, comparação com o circuito equivalente magnético

Tem-se aqui o caso do motor apenas com os ímãs permanentes, mas com a permeabilidade magnética não linear. A Figura 6.7 apresenta a carta de campo para esta configuração do motor. Como pode ser observado, a carta de campo se mantém praticamente idêntica as da Figura 6.2 e da Figura 6.5. Logo, temos que as relutâncias arbitradas estão condizentes e representam adequadamente esta configuração.

Figura 6.7 Simulação considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente



Fonte: Próprio autor.

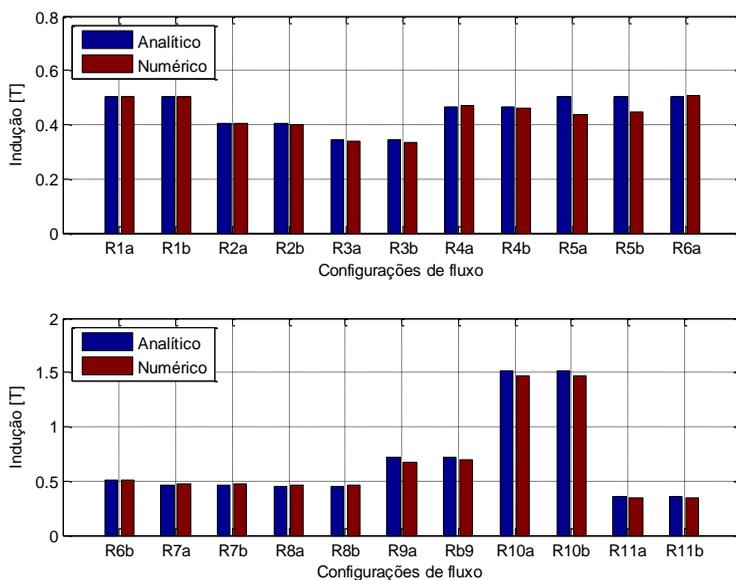
Esta simulação foi realizada utilizando o ferro não linear, cuja a curva de magnetização do material encontra-se na Figura 5.9. O campo magnético gerado pelos ímãs permanentes é baixo, não chegando ao

ponto de saturar o material em nenhuma região. Logo, os valores de indução não são muito diferentes dos valores obtidos para o caso linear com o campo do ímã permanente exclusivamente.

Para realizar um estudo comparativo entre os valores de indução magnética obtidos de forma analítica e numérica, assim como no caso anterior foi feita uma média dos valores de indução para cada configuração de fluxo e comparada com o valor de indução magnética obtidos analiticamente através do circuito equivalente magnético da Figura 6.3 e com os valores de relutância calculado no processo iterativo e apresentados na Tabela 6.2.

A Figura 6.8 apresenta os valores de indução magnética, calculados pelos dois métodos seguindo as mesmas convenções já adotadas.

Figura 6.8 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente



Fonte: Próprio autor.

Conforme pode ser observado no gráfico da Figura 6.8, ambos os valores, “Analíticos” e “Numéricos”, são relativamente próximos, assim como para o caso linear.

Na Tabela 6.6, são apresentados os valores de induções magnéticas calculado no entreferro de forma analítica e numérica, e também a variação entre ambos, e o desvio percentual em relação ao cálculo numérico.

Percebe-se um bom desempenho do método proposto se comparado com os resultados do MEF, para o caso não linear do motor.

Tabela 6.6 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação somente do ímã permanente

	$\mathcal{R}_{3a}$	$\mathcal{R}_{3b}$	$\mathcal{R}_{11a}$	$\mathcal{R}_{11b}$
Analítico	0,3424 T	0,3424 T	0,3524 T	0,3524 T
Numérico	0,3380 T	0,3336 T	0,3412 T	0,3426 T
Variação [T]	0,0044T	0,0088 T	0,0112 T	0,0098 T
Desvio [%]	1,3018%	2,6379 %	3,2825 %	2,8605 %

Fonte: Próprio autor.

Há um desvio máximo de 3,2825% em relação a simulação para os valores de indução no entreferro apresentando melhor adequação do modelo que no caso linear.

Para este caso não linear, assim como no linear foram necessárias as mesmas simplificações. Ou seja, o valor de indução calculado numericamente é uma média dos valores de indução na configuração de fluxo, e as áreas de cálculo aplicadas aos cálculos analíticos são as mesmas aplicadas nas fórmulas analíticas das relutâncias.

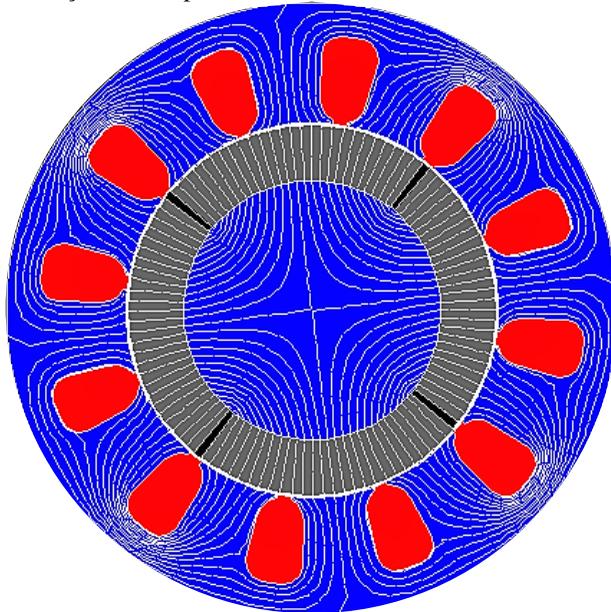
Portanto, mesmo com todas as simplificações adotadas o modelo de circuito equivalente magnético teve boa adequação também para o caso não linear.

### 6.7.3 Simulação com a permeabilidade do ferro linear e com o ímã permanente e as correntes nas três fases e comparação com o circuito equivalente magnético

Foi realizada uma simulação linear com as correntes de armadura nas três fases, cuja a carta de campo está apresentada na Figura 6.9.

Como pode ser visualizado na Figura 6.9 as correntes não exercem influência significativa na carta de campo do motor para a mesma posição. Assim, espera-se que o circuito equivalente magnético desenvolvido na Seção 6.3 apresente bom desempenho no cálculo das induções para cada configuração de fluxo do motor arbitrada.

Figura 6.9 Simulação considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases



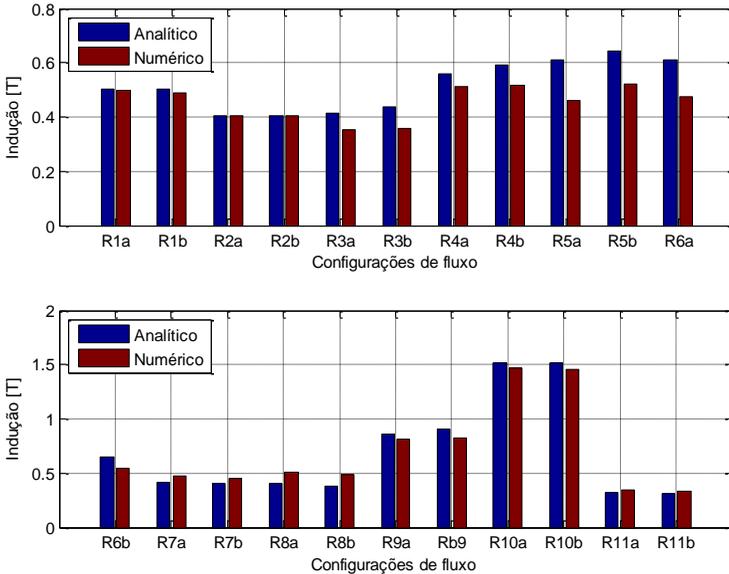
Fonte: Próprio autor.

A Figura 6.10 apresenta o gráfico comparativo entre os valores de indução magnética calculados com os dois métodos, chegando a valores de indução muito próximos para os dois métodos.

Observa-se também na Figura 6.10 que não há mais a completa simetria que havia quando só havia o campo magnético gerado pelos ímãs permanentes. Tal fato decorre, pois, as correntes das fases um e três não são exatamente iguais em módulo.

Logo, era esperado assim como ocorreu, que nem o cálculo analítico nem o cálculo numérico apresentassem valores extremamente próximos para os lados “a” e “b”.

Figura 6.10 Comparativo entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases



Fonte: Próprio autor.

Por fim, ainda em consequência da influência das correntes de armadura, observa-se que a tendência apresentada no cálculo analítico em relação a não simetria também ocorre no cálculo numérico. Por exemplo, a indução magnética em “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” calculada analiticamente é menor que a indução magnética em “ $\mathcal{R}_{6b}$ ”, e o mesmo ocorre na indução calculada numericamente, ou seja, a indução magnética em “ $\mathcal{R}_{6a}$ ” calculada numericamente é menor que a indução magnética em “ $\mathcal{R}_{6b}$ ”.

Realizando uma comparação com os valores numéricos das induções e seus desvios conforme apresentado na Tabela 6.7, observa-se que o desvio máximo do valor de indução magnética calculado analiticamente e numérica chega à 22,0206%, Um valor relativamente alto se comparado com os desvios obtidos até o momento.

Entretanto, visto que tais valores de indução são uma média dos valores obtidos dentro da configuração de fluxo em questão, e também

que foram adotadas mais simplificações conforme já apresentados, pode-se considerar este desvio como aceitável para este caso.

Tabela 6.7 Comparativo dos valores numéricos das induções entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes elétricas nas três fases

	$\mathcal{R}_{3a}$	$\mathcal{R}_{3b}$	$\mathcal{R}_{11a}$	$\mathcal{R}_{11b}$
Analítico	0,4131 T	0,4372 T	0,3166 T	0,3042 T
Numérico	0,3519 T	0,3583 T	0,3445 T	0,3330 T
Variação [T]	0,0612 T	0,0789 T	0,0279 T	0,0288 T
Desvio [%]	17,3913 %	22,0206 %	8,0986 %	8,6486 %

Fonte: Próprio autor.

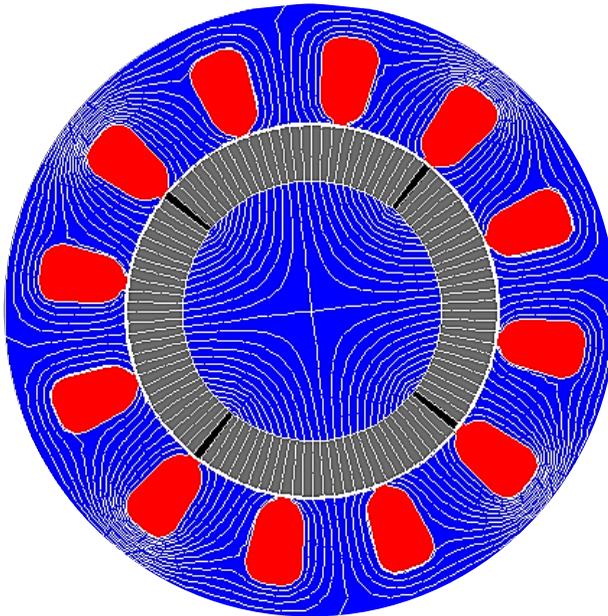
Observa-se ainda que este caso não é o que representa o completo funcionamento do motor, já que não foi considerada a não linearidade do ferro do estator e do rotor.

#### **6.7.4 Simulação considerando a permeabilidade do ferro não linear e com o ímã permanente e as correntes nas três fases e comparação com o circuito equivalente magnético**

Por fim, para analisar a adequação do método para desenvolvimento de circuito equivalente magnético para o motor, é realizado nesta seção a simulação completa do motor. Será considerado os ímãs e as correntes nas três fases bem como a não-linearidade do ferro, através da curva de magnetização do ferro que compõe o estator e o rotor.

Através da simulação com o software EFCAD obteve-se a carta de campo apresentada na Figura 6.11. Conforme pode ser observado nesta figura, mesmo com a consideração da não linearidade do ferro, as correntes de armadura em conjunto com o campo gerado pelos ímãs permanentes não chegam a alterar a carta de campo do motor. Nossa expectativa é que o circuito equivalente magnético desenvolvido na Seção 6.3 apresente bom desempenho na representação do motor para o cálculo das induções de cada configuração de fluxo.

Figura 6.11 Simulação da distribuição de fluxo magnético considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases



Fonte: Próprio autor.

Em sequência é apresentado na Figura 6.12 o gráfico com o comparativo entre os valores de indução magnética calculados para cada configuração de fluxo pelos dois métodos.

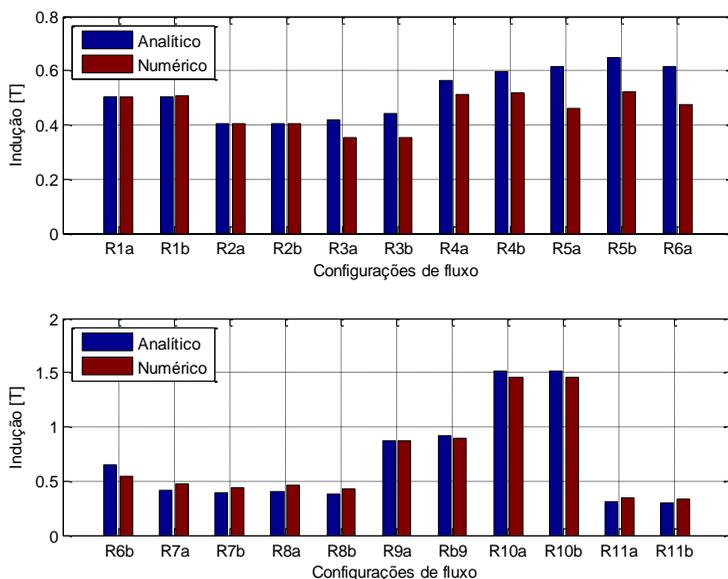
Assim como nos outros três casos apresentados do motor, o circuito equivalente magnético apresentou boa correspondência com os resultados obtidos com o MEF. Por intermédio do circuito equivalente magnético desenvolvido foi possível obter valores muito próximos dos valores médios das induções magnéticas calculados através do MEF, mesmo com a consideração da não linearidade do ferro.

Observa-se na Figura 6.12 que não há mais a simetria que havia para quando só havia o campo magnético gerado pelos ímãs permanentes, em razão dos valores diferentes das correntes das fases um e três.

Portanto, o cálculo analítico e o cálculo numérico não apresentaram simetria nos valores de indução entre os lados “a” e “b”. Porém a consideração da não linearidade do ferro forneceu valores de

induções magnéticas mais próximos para esta configuração entre o cálculo analítico e o numérico quando se trata do caso linear.

Figura 6.12 Comparativo da indução entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases



Fonte: Próprio autor.

Do mesmo modo como ocorre no caso linear, ainda em consequência da influência das correntes nas bobinas, nota-se que a tendência apresentada no cálculo analítico em relação a não simetria, se repete no cálculo numérico, reafirmando a boa adequação do modelo desenvolvido.

Para uma análise mais criteriosa apresenta-se os resultados numéricos para este modelo de circuito equivalente magnético, ilustrados na Tabela 6.8. Fazendo uma comparação com os valores das induções e seus desvios conforme apresentado na Tabela 6.8, nota-se que o desvio máximo é de 24,4494%. Comparando-se esse valor ao mesmo referido do caso anterior observa-se que ele é muito menor que o mesmo parâmetro para o caso linear. É importante observar que no caso não linear há uma maior variação nos valores de induções magnéticas

dentro de cada configuração de fluxo, especialmente naquela que possuem maior concentração de linhas de fluxo magnético.

Tabela 6.8 Comparativo dos valores das induções numéricas entre o cálculo analítico e numérico considerando a permeabilidade do ferro não linear e com a atuação do ímã permanente e das correntes nas três fases

	$\mathcal{R}_{3a}$	$\mathcal{R}_{3b}$	$\mathcal{R}_{11a}$	$\mathcal{R}_{11b}$
Analítico	0,4166 T	0,4408 T	0,3155 T	0,3030 T
Numérico	0,3541 T	0,3542 T	0,3469 T	0,3320 T
Variação [T]	0,0625 T	0,0866 T	0,0314 T	0,0290 T
Desvio [%]	17,6504 %	24,4494 %	9,0516 %	8,7349 %

Fonte: Próprio autor.

Nota-se que a permeabilidade magnética é variável dentro de cada configuração de fluxo no cálculo numérico mas possui um valor constante dentro da configuração de fluxo no cálculo analítico. Mesmo com esta simplificação a metodologia desenvolvida apresenta bons resultados, representando assim com boa precisão o motor.

## 6.8 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou o estudo de um motor síncrono à ímãs permanentes por intermédio da aplicação da metodologia proposta neste trabalho. Primeiramente é apresentado o dispositivo e todas as suas características construtivas e geométricas utilizadas para o desenvolvimento do circuito equivalente magnético.

A partir desses dados, foi ilustrado o desenvolvimento do circuito equivalente magnético conforme a metodologia adotada neste trabalho e baseado em sua carta de campo magnética para uma posição do rotor em particular.

Dotado das fórmulas analíticas das relutâncias do dispositivo é então desenvolvido os seus circuitos equivalentes magnéticos de forma progressiva. Primeiramente considera-se somente o campo magnético gerado pelos ímãs permanentes e posteriormente o campo gerado pelas correntes nas três fases do motor, sendo que em ambos os casos foi considerado o ferro com permeabilidade linear e não linear. Em posse desses circuitos pôde-se então realizar uma comparação com os valores obtidos pelo do método de elementos finitos.

Como pôde ser observado no decorrer deste capítulo, apesar de todas as simplificações adotadas, para evitar que o circuito equivalente magnético se tornasse muito complexo e pudesse ser solucionado analiticamente, foram obtidos resultados satisfatórios.

Para o caso mais completo, que representa o funcionamento real do motor, foi obtido um desvio em relação as simulações da ordem do erro dos equipamentos de medição de indução magnética. Portanto, pode-se afirmar que a aplicação da metodologia proposta a um dispositivo real também apresentou bons resultados com relação ao fenômeno que ocorre na prática.

O uso da metodologia desenvolvida para a representação de dispositivos magnéticos em circuito equivalentes magnéticos se mostra eficaz.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Modelar um dispositivo eletromagnético e seu funcionamento é um trabalho que só pode ser realizado com a aplicação das *Equações de Maxwell*. Apesar de princípios simples, os fenômenos físicos que se procura modelar podem ser de extrema complexidade.

Na busca por técnicas que permitam modelar o fenômeno eletromagnético, surgiram ao longo dos anos, várias propostas que visavam modelar os fenômenos eletromagnéticos que fornecessem bons resultados com tempos de cálculo aceitáveis.

Durante o passar dos anos as técnicas para modelar os fenômenos eletromagnéticos foram acompanhando o avanço dos meios de cálculos disponíveis. Inicialmente, quando não havia à disposição meios computacionais utilizavam-se métodos analíticos. Tais métodos só eram possíveis de serem aplicados através de muitas simplificações acarretando em soluções com baixa precisão. No intuito de melhorar esta técnica surgiu o método de circuitos equivalentes magnéticos, que também demanda simplificações, mas permite cálculos com bons resultados.

Com o advento dos computadores digitais surge então o método dos elementos finitos, que permitiu solucionar as Equações de Maxwell com muito menos aproximações que no caso analítico, e ainda, com um grau de precisão alto e controlável. Todavia, essa melhor precisão implica em maior complexidade nos cálculos e principalmente, maior tempo de cálculo.

Neste cenário, tornou-se relevante reavaliar o método de circuitos equivalentes magnético. Esse método une a aplicação de cálculos simples, coesos e com menor tempo computacional e fornecem uma melhor precisão.

Existem várias bibliografias que fazem o uso do método de circuitos equivalentes magnéticos. Entretanto nessas não há o desenvolvimento detalhado das fórmulas analíticas e sobretudo não há uma verificação efetiva das mesmas. A formulação em potencial escalar viabilizou, neste trabalho, não somente avaliar as fórmulas analíticas encontradas na literatura mas também o desenvolvimento de novas expressões para configurações de fluxo magnético que nos pareceram necessárias para uma avaliação precisa dos dispositivos estudados e outras configurações semelhantes que possam ser consideradas.

Em posse de um conjunto de fórmulas analíticas para o cálculo da relutância de diversas configurações de fluxo foi possível avaliar a

utilização do método de circuitos equivalentes magnéticos aqui desenvolvido aplicado à dispositivos magnéticos.

Apesar das fórmulas analíticas terem sido desenvolvidas considerando a permeabilidade magnética linear, foi possível aplicar a nossa metodologia a casos onde a permeabilidade magnética não é linear obtendo-se bons resultados.

O método proposto neste trabalho foi aplicado a dois dispositivos e em ambos os casos apresentou bons resultados viabilizando sua aplicação em estudos futuros. No caso mais simples, o presente método foi aplicado a um alto falante e, em seu estudo mais completo apresentou um erro relativo em relação ao valor calculado pelo método de elementos finitos de 1,68% para o valor da indução magnética no entreferro. Já no caso mais complexo, da máquina síncrona, o erro máximo foi de 24,45%.

Visto a simplicidade dos cálculos realizados para o desenvolvimento e solução do circuito equivalente magnético e lendo em consideração o tempo de cálculo, é nítido o potencial de aplicabilidade do estudo aqui proposto.

A metodologia realizada neste trabalho foi aplicada à dispositivos reais de modo que não houvesse a necessidade de desenvolver cálculos muito complexos e extensos. Para tanto, foi utilizado o mínimo de relutâncias possível, tornando o circuito equivalente magnético simples, mas fornecendo boa precisão na representação do fenômeno eletromagnético presente. Uma forma de melhorar os resultados seria aumentar a discretização da carta de campo, ou seja, o número de relutâncias. Entretanto, o objetivo era desenvolver uma metodologia com cálculos analíticos relativamente simples.

Como pode ser visto neste trabalho, o método de circuitos equivalentes magnéticos é de grande relevância na modelagem de dispositivos eletromagnéticos, pois permite a obtenção de resultados com boa precisão, com cálculos simples e necessitando de pouco tempo de cálculo.

Na bibliografia, vários pesquisadores fazem o uso deste método e trabalham de modo a aprimorá-lo. Há uma vasta gama de estudos que seriam importantes para as contribuições futuras ao desenvolvimento do método. Dentre elas pode-se citar o desenvolvimento de outras fórmulas analíticas para outros tipos de configurações de fluxo. A representação de fenômenos mais complexos como as correntes de Foucault e perdas requerem abordagens mais sofisticadas.

Finalmente, o método de circuitos equivalentes magnéticos é simples, prático, rápido, e não necessita de um software específico para

a modelagem dos fenômenos eletromagnéticos. As fórmulas apresentadas neste trabalho podem ser aglutinadas num sistema computacional relativamente simples que poderá apresentar bons resultados, apesar das simplificações adotadas.



## REFERÊNCIAS

- BASTOS, J. P. A. **Eletrromagnetismo para Engenharia; Estática e Quase Estática**. 2. ed. Florianópolis: UFSC, 2008.
- BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Electromagnetic Modeling by Finite Elements**. New York, USA: Marcel Dekker, Inc, 2003.
- CARPENTER, C. J. Magnetic equivalent circuits. **Proc. IEE**, 115, n. 10, Outubro 1968. 1503-1511.
- CHILLET, C.; VOYANT, J.-Y. Design-Oriented Analytical Study of a Linear Electromagnetic Actuator by Means of Reluctance Network. **IEEE Transactions on Magnetics**, 37, n. 4, July 2001.
- DERBAS, H. W. et al. A Comparison of Nodal- and Mesh-Based Magnetic Equivalent Circuit Models, 24, n. 2, June 2009.
- DULAR, P. **Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires**. Bélgica: Tese da Université de Liège, 1994.
- E. R. LAITHWAITE, P. D. Magnetic equivalent circuits for electrical machine. **Proc. IEE**, 114, n. 11, Novembro 1967. 1805-1809.
- ELLOUMI, D. et al. Lumped Circuit Accounting for the Rotor Motion Dedicated to the Investigation of the Time-Varying Features of Claw Pole Topologies. **IEEE Transactions on Magnetics**, 51, n. 5, May 2015.
- FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, C. J.; UMANS, S. D. **Electric Machinery**. 6ª. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
- HAN, D. K.; CHANG, J. H. Design of Electromagnetic Linear Actuator Using the Equivalent Magnetic Circuit Method. **IEEE Transactions on Magnetics**, 52, n. 3, March 2016.
- HANIC, A.; ZARKO, D.; HANIC, Z. A Novel Method for No-Load Magnetic Field Analysis of Saturated Surface Permanent-Magnet Machines Using Conformal Mapping. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, 31, n. 2, June 2016. 740-749.

HERTZ MPX 690.3 PRO. **Hertz Elettromedia srl.**, 2014. Disponivel em: <<http://www.hertzaudiovideo.com/car-audio-coaxials-mille-pro-mpx690-3/>>. Acesso em: 06 Agosto 2015.

HSIEH, M.-F.; HSU, Y.-C. A Generalized Magnetic Circuit Modeling Approach for Design of Surface Permanent-Magnet Machines. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 59, n. 2, February 2012.

IDA, N.; BASTOS, J. P. A. **Electromagnetism and calculation of fields**. New York, USA: Record edition Springer-Verlag, 1997.

KANO, Y.; KOSAKA, T.; MATSUL, N. Simple Nonlinear Magnetic analysis for Permanent-Magnet Motors. **IEEE Transactions on Industry applications**, 41, n. 5, September/October 2005.

KIM, C.-H. et al. Dynamic Performance Evaluation of 5-DOF Magnetic Levitation and Guidance Device by Using Equivalent Magnetic Circuit Model. **IEEE Transactions on Magnetics**, 49, 15 July 2013.

KIM, J. K. et al. Static characteristics of Linear BLDC Motor Using Equivalent Magnetic Circuit and Finite Element Method. **IEEE Transactions on Magnetics**, 40, n. 2, March 2004.

KIM, K.-H. et al. Design Criteria of Active Thrust Magnetic Damper in a Flywheel System Using Improved Equivalent Magnetic Circuit Method an Finite Element Method. **IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference**, Seoul-Korea, 9-12 October 2012. 1228-1230.

KOKORNACZYK, E.; GUTOWSKI, M. W. Anhysteretic Functions for the Jiles-Atherton Model. **IEEE Transactions on Magnetics**, 51, 2015.

LEE, K.-D.; LEE, J.; LEE, H.-W. Inductance Calculation of Flux Concentrating Permanent Magnet Motor through Nonlinear Magnetic Equivalent Circuit. **IEEE Transactions on Magnetics**, 51, n. 11, November 2015.

LI, S.; LI, Y.; SARLIOGLU, B. Parctial Irreversible Demagnetization Assessment of Flux-Switching Permanent Magnet machine Using Ferrite Permanent Magnet Material. **IEEE Transactions on Magnetics**, 51, n. 7, July 2015.

LIU, J.; DINAHAHI, V. Detailed Magnetic Equivalent Circuit Based Real-Time Nonlinear Power Transformer Model on FPGA for Electromagnetic Transient Studies. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 63, n. 2, February 2016. 1191-1202.

LIU, Y. et al. Optimization of Voice Coil Motor to Enhance Dynamic Response Based on an Improved Magnetic Equivalent Circuit Model. **IEEE Transactions on Magnetic**, 47, September 2011. 2247-2251.

LUZ, M. V. F. D. **Desenvolvimento de um Software para Cálculo de Campos Eletromagnéticos 3D Utilizando Elementos de Aresta, Levando em conta o Movimento e o Circuito de Alimentação**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: [s.n.]. 2003.

MAKAROVIC, J.; LOMONOVA, E. A.; COMPTER, J. C. Innovative Actuator with Two Controlled Degrees of Freedom for Precision Technology Application. **IEEE PEDS**, 2005. 1177-1183.

MILLER, T. J. E. **Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives**. 1ª. ed. New York, USA: Oxford University Press, 1989.

MORI, S. et al. Air-Bearing Linear Actuator for Highly Precise Tracking. **IEEE Transactions on Magnetics**, 39, n. 2, March 2003. 812-818.

NUNES, A. S. **Cálculo de perdas por fluxo disperso e de forças em transformadores e reatores através do método de rede de relutância**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: [s.n.]. 2013.

OKYAY, A.; KHAMESEE, M. B.; ERKORKMAZ, K. Design and Optimization of a Voice Coil Actuator for Precision Motion Applications. **IEEE Transactions on magnetics**, Waterloo, Canada, 51, n. 6, Junho 2015.

OSTOVIC, V. A Method for Evaluation of Transient and Steady State Performance in Saturated Squirrel Cage Induction Machines. **IEEE Power Engineering Review**, p. 190-197, September 1986.

OSTOVIC, V. Computation of Saturated Permanent-Magnet AC Motor Performance by Means of Magnetic Circuits. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. IA-23, n. 5, September/October 1987.

OSTOVIC, V. A Simplified Approach to Magnetic Equivalent Circuit Modeling of Induction Machines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 24, n. 2, March/April 1988.

OSTOVIC, V. A Novel Method for Evaluation of Transient States in Saturated Electric Machines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 25, n. 1, January/February 1989.

OSTOVIC, V. **Dynamics of saturated electric machines**. 1<sup>a</sup>. ed. New York: Springer-Verlag, 1989.

PARKER, R. J. **Advances in Permanent Magnetism**. New York: John Wiley & Sons, 1990.

PENG, W. et al. Magnetic Equivalent Circuit Modelling of Reluctance Machines. **Eleventh International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)**, 2016.

RAMINOSOA, T. et al. Time Stepping Simulation of Synchronous Reluctance Motor Using Non Linear Reluctance Network Method. **IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 - 32nd Annual Conference on**, Vandoeuvre Lès Nancy, Novembro 2006. 976-981.

RAMINOSOA, T. et al. Time Stepping Simulation of Synchronous Reluctance Motors Using Non Linear Reluctance Network Method. **IEEE**, November 2006. 976-981.

RASMUSSEN, C. B.; RITCHIE, E. A Magnetic Equivalent Circuit Approach for Predicting PM Motor Performance. **IEEE Industry Applications Society**, New Orleans, Louisiana, 5-8 October 1997. 10-16.

REN, Z. et al. Design Optimization of an Interior-type Permanent Magnet BLDC Motor using PSO and Improved MEC. **Proceeding of International Conference on Electrical Machines and Systems**, Seoul, Korea, 8-11 October 2007.

ROTHERS, H. C. **Electromagnetic Devices**. 1<sup>a</sup>. ed. New York, USA: John Wiley and Sons, 1970.

SUDHOFF, S. Magnetics and Magnetic Equivalent Circuits. In: SUDHOFF, S. **Power Magnetic Devices: A Multi-Objective Design Approach**. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: [s.n.], 2014. Cap. 2, p. 488.

TANG, Y.; PAULIDES, J. J. H.; LOMONOVA, E. A. Automated Design of DC\_Excited Flux-Switching In-Wheel Motor Using Magnetic Equivalent Circuits. **IEEE Transactions on Magnetics**, 51, n. 4, Abril 2015.

TAVANA, N. R.; DINAHAHI, V. IEEE Transactions on energy conversion, 31, n. 2, June 2016. 520-530.

YILMAZ, M.; KREIN, P. T. Capabilities of Finite Element Analysis and Magnetic Equivalent Circuits for Electrical Machine Analysis and Design.

**Power Electronics Specialists Conference, 2008. PESC 2008. IEEE**, June 2008. 4027-4033.

ZHU, Z. Q. et al. Analysis of Electromagnetic Performance of Flux-Switching Permanent-Magnet Machines by Nonlinear Adaptive Lumped Parameter Magnetic Circuit Model. **IEEE Transactions on Magnetics**, 41, n. 11, November 2005.



**APÊNDICE A**  
**MÉTODO ITERATIVO PARA CONSIDERAÇÃO DA**  
**PERMEABILIDADE MAGNÉTICA NÃO LINEAR**



**Estrutura do método iterativo aplicado ao circuito equivalente elétrico com o núcleo de ferro com permeabilidade magnética não linear.**

1. Cálculo das relutâncias no ar e no ímã permanente
2. Entrada do valor inicial do campo magnético –  $H_i$
3. Determinação da folga do laço iterativo – *folga*
4. Início do laço iterativo:

4.1. *While*  $|H_{cal} - H_i| \geq folga$

4.1.1. Cálculo a permeabilidade magnética

$$\mu_i(H_i)$$

4.1.2. Cálculo as relutâncias no núcleo ferromagnético

4.1.3. Resolve o sistema matricial do circuito equivalente elétrico

4.1.4. Calcula o valor do fluxo magnético em todas as configurações de fluxo magnético

4.1.5. Calcula o valor da indução magnética em todas as configurações de fluxo magnético

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

4.1.6. Calcula o campo magnético

$$H = \frac{B}{\mu_i}$$

4.1.7. Retorna ao passo 4.1

4.2. *End*

**Notas:**

- O teste do laço iterativo é feito para todas as configurações de fluxo; para aquelas que convergem é mantido o valor do campo magnético inicial ( $H_i$ ), ou seja, da permeabilidade magnética inicial; esse processo é repetido até que haja convergência.
- Utilizou-se um erro absoluto de  $0,1 \frac{A}{m}$ .