

Alysson Rodrigo Marques Gomes de Assis

**Adaptação do algoritmo Backtracking Search Optimization para o tratamento de problemas com restrições**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, no Departamento de Engenharia Civil, do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Rafael Holdorf  
Lopez, Dr.

Coorientador: Prof. Leandro Fleck  
Fadel Miguel, Dr.

Florianópolis  
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gomes de Assis, Alysson Rodrigo Marques

Adaptação do algoritmo Backtracking Search Optimization para o tratamento de problemas com restrições

/

Alysson Rodrigo Marques Gomes de Assis ; orientador, Prof. Dr. Rafael Holdorf Lopez, coorientador, Prof. Dr. Leandro Fleck Fadel Miguel, 2014.

115 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2014.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. otimização estrutural. 3. algoritmos genéticos. 4. algoritmos metaheurísticos. 5. problemas de otimização com restrição. I. Lopez, Prof. Dr. Rafael Holdorf . II. Fadel Miguel, Prof. Dr. Leandro Fleck. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

Alysson Rodrigo Marques Gomes de Assis

**Adaptação do algoritmo Backtracking Search Optimization para o  
tratamento de problemas com restrições**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa Pós-graduação em Engenharia Civil – PPGEC.

Florianópolis, 11 de Agosto de 2014.

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Prof. Leandro Fleck Fadel Miguel, Dr.  
Co-orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. André Jacomel Torri, Dr.  
Universidade Federal da Paraíba

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Marcos Aurélio Marques Noronha, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



## RESUMO

Neste trabalho um novo algoritmo evolucionário (EA), o *Backtracking Search Optimization Algorithm* (BSA), é adaptado para a resolução de problemas de otimização com restrições, e com variáveis de projeto contínuas e discretas. O algoritmo em questão, BSA, possui uma estrutura simples, que é eficiente, rápida e capaz de resolver problemas multimodais, o que permite a este algoritmo se adaptar a diferentes problemas numéricos de otimização. O BSA possui uma memória que permite utilizar informações de gerações anteriores na geração da população de uma iteração posterior. No presente trabalho o funcionamento do algoritmo é descrito, seu desempenho avaliado na resolução de oito problemas benchmark da literatura e o código do BSA é associado a um código de elementos finitos para resolução de problemas práticos de engenharia. O desempenho do algoritmo é comparado com os de outros otimizadores de eficiência reconhecida. Os resultados obtidos nestes experimentos numéricos confirmam a validade do algoritmo proposto.

**Palavras-chave:** Otimização estrutural; Algoritmos genéticos; Algoritmos metaheurísticos.



## **ABSTRACT**

In this dissertation, a new evolutionary algorithm (EA), the Backtracking Search Optimization Algorithm (BSA), will be adapted for the resolution of constrained optimization problems, with continuous and discrete project variables. The algorithm structure is simple, efficient, quick and capable to solve multimodal problems, this allows the algorithm to adapt it to different optimization numerical problems. The BSA algorithm memory allows it to use information about previous offsprings in the generation of the next population. In the present work, the operation gear is described, the code is adapted by the adaptive penalization method (AMP) for the treatment of constrained problems, the algorithm performance is evaluated in the resolution of eight literature benchmark problems and the BSM-AMP is used with a finite element routine for solving practical trusses optimization problems. The comparison of the results of the numerical experiments performed with the BSA in this dissertation with those obtained by other optimization algorithms confirmed the validity of the propose algorithm.

**Keywords:** Structural optimization; Genetic algorithms; Metaheuristic algorithms.





## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1- Problema de otimização da treliça de 494 barras (modificado de TALATAHARI et al, 2012). .....	21
Figura 2- Otimização de ponte treliçada (modificado de SOH e YANG, 1998). .....	21
Figura 3- Bloco de fundação de 9 estacas (modificado de Sales et al, 2014). .....	22
Figura 4-Esquema de um exemplo de atualização de modelo numérico. ....	22
Figura 5-Comparação de gráficos de convergência. ....	23
Figura 6- Mínimos locais e global.....	27
Figura 7- Ilustrações do método de escolha de soluções de algoritmos genéticos e meméticos (modificado de ELBELTAGI et al, 2005). ....	31
Figura 8- Ilustração do método de escolha de solução do algoritmo ACO. ....	31
Figura 9- Ilustração do método de escolha de solução do algoritmo PSO. ....	32
Figura 10- Analogia entre improvisação musical e otimização estrutural (LEE e GEEM, 2005).....	32
Figura 11- Esquema de funcionamento do algoritmo TLBO (modificado de DEGERTEKIN e HAYALIOGLU, 2012). ....	33
Figura 12- Esquema de funcionamento do algoritmo MBA (SADOLLAH et al, 2012). ....	34
Figura 13- Algoritmo 1, estrutura geral do BSA .....	38
Figura 14- Recombinação genética. ....	40
Figura 15- Algoritmo 2, estratégia de crossover do BSA .....	41
Figura 16- Algoritmo 3, mecanismo de controle dos limites do BSA. ..	41
Figura 17- Fluxograma do funcionamento do BSA. ....	43
Figura 18- Determinação de $f$ . ....	45
Figura 19- Pseudo código do BSA. ....	45
Figura 20- Problema da viga de concreto armado bi apoiada.....	48
Figura 21- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da viga biapoiada. ....	51
Figura 22- Problema da viga telescópica. ....	53
Figura 23- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.....	56

Figura 24- Problema da treliça de três barras. ....	57
Figura 25 - Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras. ....	59
Figura 26- Problema do vaso de pressão. ....	60
Figura 27- Gráfico de convergência obtido pelo BSA para o problema da treliça do vaso de pressão. ....	63
Figura 28- Problema do redutor de velocidade. ....	65
Figura 29- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras. ....	68
Figura 30- Problema da mola de tração/compressão. ....	69
Figura 31- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da mola de tração/compressão. ....	71
Figura 32- Problema da viga soldada. ....	75
Figura 33- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras. ....	77
Figura 34- Problema do trem de engrenagens. ....	79
Figura 35- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras. ....	81
Figura 36- Fluxograma funcionamento do código de elementos finitos associado ao algoritmo BSA-MPA. ....	84
Figura 37- Problema da treliça de onze barras. ....	85
Figura 38- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para a otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras. ....	88
Figura 39- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras. ....	88
Figura 40- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	91
Figura 41- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	92
Figura 42- Problema da treliça de 39 barras. ....	93
Figura 43- Topologia correspondente ao mínimo global encontrada para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras. ....	96

Figura 44- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.....	96
Figura 45- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	99
Figura 46- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	99
Figura 47- Estrutura de base do problema da treliça 3D de 25 barras.	100
Figura 48- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça tridimensional de 25 barras. ....	105
Figura 49- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça de vinte e cinco barras.....	106
Figura 50- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.....	109
Figura 51- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras. ....	109



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1- Áreas de aço correspondentes aos valores que a variável discreta $x_1$ pode assumir. ....	49
Tabela 2- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga biapoiada. ....	50
Tabela 3- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga biapoiada. ....	51
Tabela 4- Parâmetros envolvidos na formulação do problema da viga telescópica.....	54
Tabela 5- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga telescópica. ....	54
Tabela 6- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga telescópica.....	55
Tabela 7- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da treliça de três barras. ....	58
Tabela 8- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da treliça de três barras. ....	58
Tabela 9 - Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do vaso de pressão. ....	61
Tabela 10- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do vaso de pressão.....	62
Tabela 11- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do redutor de velocidade. ....	66
Tabela 12- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do redutor de velocidade. ....	67
Tabela 13- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da mola de tração/compressão. ....	70
Tabela 14- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da mola de tração/compressão. ....	72

Tabela 15- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga engastada. ....	76
Tabela 16- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga engastada. ....	78
Tabela 17- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do trem de engrenagens.	80
Tabela 18- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do trem de engrenagens.....	80
Tabela 19- Parâmetros de projeto dos materiais utilizados nos exemplos de otimização de treliças. ....	83
Tabela 20- Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados no presente estudo e por outros autores para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras. ....	86
Tabela 21- Resultados estatísticos encontrados para a otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.....	87
Tabela 22- Comparação entre os mínimos globais e número de avaliações da função objetivo encontrados no presente estudo e por outros autores para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	89
Tabela 23- Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	90
Tabela 24- Resultados estatísticos encontrados para a otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.....	90
Tabela 25 - Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados por diferentes autores para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras. ....	94
Tabela 26 - Resultados estatísticos encontrados para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras. ....	95
Tabela 27- Comparação entre os mínimos globais e número de avaliações da função encontrados no presente estudo e por outros	

autores para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras...	98
Tabela 28- Resultados estatísticos encontrados no presente estudo e por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.....	98
Tabela 29- Carregamentos aplicados na treliça tridimensional de vinte e cinco barras.....	101
Tabela 30- Coordenadas dos nós e grupos de elementos da treliça tridimensional de 25 barras.....	101
Tabela 31- Comparação entre os resultados da otimização das áreas das barras e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de 25 barras.....	103
Tabela 32- Resultados estatísticos encontrados para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.....	104
Tabela 33- Comparação entre os resultados da otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de 25 barras.....	107
Tabela 34- Resultados estatísticos encontrados no presente estudo e por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.....	108
Tabela 35- Resumo dos resultados encontrados para os experimentos numéricos realizados com problemas de formulação fechada (Capítulo 5).....	110
Tabela 36- Resumo dos resultados encontrados para os exemplos práticos de engenharia formulados pelo MEF (Capítulo 6).. ....	111





## SUMÁRIO

<b>1.INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1 Motivação .....	20
1.2 Objetivo.....	23
1.3 Organização do trabalho .....	24
<b>2.REVISÃO LITERÁRIA .....</b>	<b>25</b>
2.1 Conceitos de otimização .....	25
2.2 Algoritmos meta-heurísticos.....	29
<b>3.ALGORITMO BSA .....</b>	<b>37</b>
3.1 Inicialização.....	37
3.2 Seleção-I .....	38
3.3 Mutação.....	39
3.4 Recombinação .....	39
3.5 Seleção-II.....	42
<b>4.ADAPTAÇÃO DO BSA PARA PROBLEMAS COM RESTRICÇÕES .....</b>	<b>44</b>
<b>5.EXPERIMENTOS NUMÉRICOS EM PROBLEMAS DE FORMULAÇÃO FECHADA.....</b>	<b>47</b>
5.1 Problema da viga de concreto armado biapojada.....	47
5.2 Problema da viga telescópica .....	52
5.3 Problema da treliça de três barras .....	56
5.4 Problema do vaso de pressão.....	59
5.5 Problema do redutor de velocidade.....	64
5.6 Problema da mola de tração/compressão.....	68
5.7 Problema da viga soldada .....	73
5.8 Problema do trem de engrenagens .....	79
<b>6.EXEMPLOS PRÁTICOS DE ENGENHARIA FORMULADOS PELO MEF .....</b>	<b>82</b>
6.1 Otimização de estruturas treliçadas.....	82

6.1.1 Exemplo da treliça de onze barras.....	85
6.1.1.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras .....	86
6.1.1.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras .....	89
6.1.2 Exemplo da treliça de trinta e nove barras.....	92
6.1.2.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.....	93
6.1.2.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras. ....	97
6.1.3 Exemplo da treliça 3D de 25 barras. ....	100
6.1.3.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça 3D de vinte e cinco barras .....	102
6.1.3.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.....	106
<b>7.RESUMO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>110</b>
<b>8.CONSIDERAÇÕES            FINAIS            E            TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>112</b>
<b>REFERÊNCIAS LITERÁRIAS .....</b>	<b>115</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A otimização estrutural é uma importante área de pesquisa dentro da matemática aplicada. O objetivo dos algoritmos de otimização é encontrar valores para um sistema de parâmetros sob diversas condições (ARORA, 2004). Otimização estrutural é um processo numérico/matemático que visa a obtenção de uma configuração da estrutura que resulta em uma performance ótima segundo alguma medida de desempenho pré-definida (mínima massa, máxima rigidez, máxima carga de flambagem, etc.). Além disso, devem ser satisfeitas restrições tanto sobre as variáveis de projeto, quanto sobre o comportamento da estrutura (tensão de escoamento, frequência natural crítica, deslocamentos permitidos etc.). Entende-se por estrutura, qualquer sistema cujo objetivo seja transmitir esforços mecânicos estáticos ou dinâmicos.

As técnicas de otimização datam dos tempos de Isaac Newton, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli e Joseph Louis Lagrange, destacando que o último usou da otimização para resolver problemas como o da forma da curva catenária. Métodos como o do “gradiente conjugado” e dos “mínimos quadrados”, atribuídos a Gauss, remontam ao século XVIII. Leonid Kantorovich foi um dos primeiros a formular a teoria que deu origem à programação linear e o pioneiro no uso da técnica como instrumento de planejamento econômico, em 1939. Entretanto, a otimização numérica só alcançou proeminência na era digital. A utilização de técnicas de otimização permite, a partir de uma abordagem sistemática, resolver problemas das mais variadas disciplinas.

Métodos de otimização possuem um papel muito importante no projeto estrutural, pois dão suporte para que o projetista tome decisões que resultarão no máximo benefício a partir dos recursos disponíveis. A ideia básica por trás do projeto intuitivo, ou indireto, é a memória adquirida em experiências anteriores, motivações inconscientes, processos lógicos incompletos, seleções aleatórias e até mesmo superstição. Isto, geralmente, não resultará no melhor projeto. As deficiências relativas a um projeto indireto podem ser superadas pela adoção de um projeto ótimo, ou direto. O que diferencia um projeto ótimo de um projeto intuitivo é que o primeiro é elaborado com base apenas em decisões lógicas (IYENGAR, 1997).

O presente trabalho se insere no contexto da engenharia assistida por computador, no qual a tendência atual é de que o projeto estrutural seja realizado o mais automaticamente possível, de forma sistemática, buscando o projeto mais econômico e com sua segurança garantida.

## **1.1 Motivação**

Nesta seção serão apresentadas vantagens associadas ao uso da otimização estrutural, algumas aplicações práticas relacionadas ao tema em estudo, bem como uma justificativa da necessidade de estudos comparativos entre algoritmos de otimização.

Durante a concepção de uma nova estrutura, o projetista lança mão de normas técnicas, intuição e experiência adquirida em projetos anteriores. Esse processo, muitas vezes, se caracteriza por uma evolução lenta onde as sucessivas tentativas e erros são muito comuns. Tratar um problema de engenharia como um problema de otimização possibilita avaliar um grande número de projetos em tempo reduzido, comparativamente às abordagens convencionais, o que aumenta as chances de se obter um projeto mais econômico e melhor ajustado ao seu fim.

Dentre os trabalhos de otimização aplicados a problemas práticos de engenharia com elevada complexidade pode-se citar: o de Talatahari et al (2012), que otimizou três torres, incluindo a torre ilustrada na Figura 1, com 244 nós e 942 elementos. Para este exemplo o autor encontrou com o algoritmo meta-heurístico Firefly o melhor resultado disponível na literatura até o momento; o de Soh e Yang (1998) que otimizou uma ponte treliçada, conforme ilustrado na Figura 2; e o de Sales et al (2014), que otimizou o problema do bloco de fundação de 9 estacas proposto por Poulos (2001).

Figura 1- Problema de otimização da treliça de 494 barras (modificado de TALATAHARI et al, 2012).

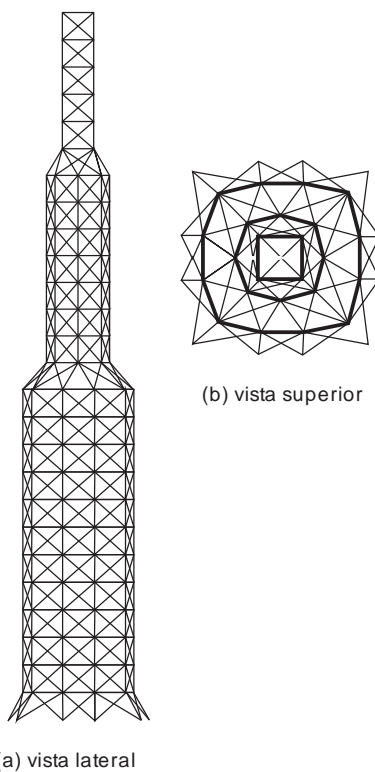


Figura 2- Otimização de ponte treliçada (modificado de SOH e YANG, 1998).

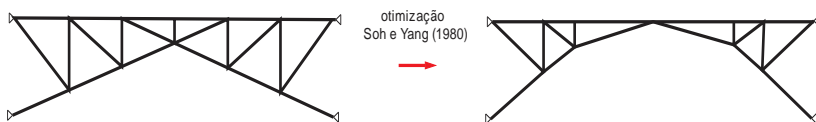
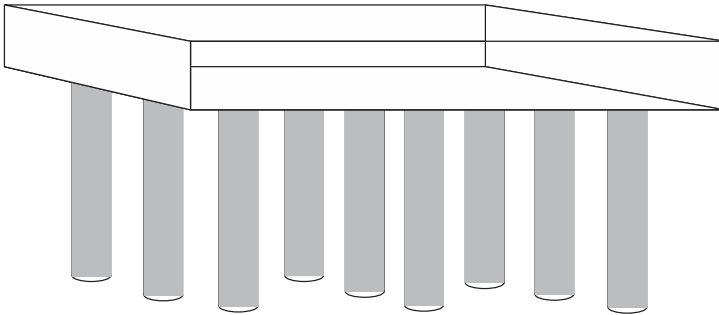
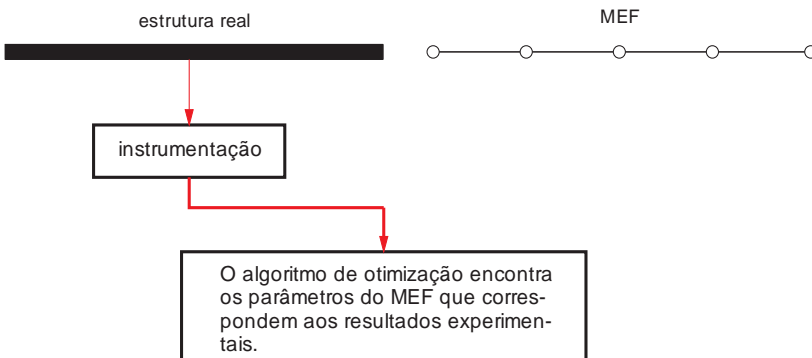


Figura 3- Bloco de fundação de 9 estacas (modificado de Sales et al, 2014).



A aplicação de rotinas de otimização estrutural, além de fornecer resultados ajustados aos critérios previamente estabelecidos, permite a atualização e determinação de parâmetros ótimos em modelos numéricos, reduzindo assim a suscetibilidade destes modelos numéricos à experiência do projetista, o que torna estes algoritmos particularmente interessantes nesta área de atuação.

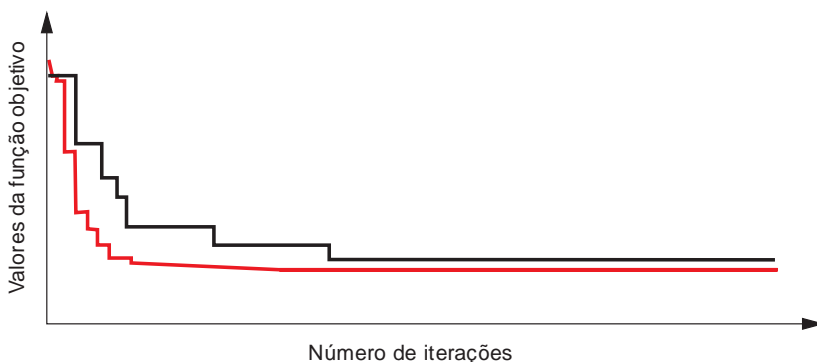
Figura 4-Esquema de um exemplo de atualização de modelo numérico.



Por fim, a escolha do algoritmo de otimização é um passo muito importante, pois está diretamente ligada à qualidade dos resultados a serem obtidos e ao custo computacional envolvido na resolução do

problema, desta forma, deve ser feita considerando a natureza e complexidade do problema a ser otimizado. Uma das formas de se medir o desempenho de um algoritmo na resolução de um determinado problema é através do gráfico de convergência. Na Figura 5 pode-se observar uma ilustração do que seria a comparação entre dois algoritmos, pode-se concluir que o algoritmo representado pela linha vermelha converge para um mínimo global menor e com menos iterações que o algoritmo que corresponde à linha preta.

Figura 5-Comparação de gráficos de convergência.



## 1.2 Objetivo

O objetivo principal do presente trabalho é adaptar o algoritmo evolucionário meta-heurístico *Backtracking Search Algorithm* (BSA) para resolução de problemas de otimização com restrições e comparar os resultados obtidos com os resultados encontrados por outros algoritmos de eficiência reconhecida. Serão resolvidas duas classes de problemas, a primeira, tópico 6 deste trabalho, corresponde à problemas com formulação fechada. A segunda classe de problemas a serem resolvidos corresponde a problemas práticos de engenharia com formulação aproximada, utilizando o método dos elementos finitos. Como objetivos específicos são elencados:

- Estudar e compreender o funcionamento do algoritmo BSA;

- Reescrever a descrição deste algoritmo de forma que facilite a compreensão;
- Incluir o tratamento de restrições neste algoritmo através de penalização;
- Avaliar o desempenho do algoritmo resultante em problemas benchmark da literatura para sua validação.

Vale destacar que os dois últimos tópicos dão um caráter inédito para o presente trabalho. O artigo que divulgou o algoritmo BSA data de 2013. A adaptação do algoritmo BSA para tratar problemas com restrições e sua utilização para a resolução de problemas de engenharia, com ênfase na otimização de treliças, ainda não foram realizadas na literatura.

### **1.3 Organização do trabalho**

Neste trabalho, os capítulos estão organizados da seguinte forma:

- Capítulo 2: é realizada a revisão literária, neste capítulo são expostas as notações e os conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho. Nesta seção constam também informações a cerca da classificação de algoritmos de otimização e formas de avaliar o seu desempenho. Ainda neste capítulo, são apresentados alguns tipos de algoritmos de otimização, bem como informações, esclarecimentos e referências sobre outros trabalhos relacionados ao tema.
- Capítulo 3: neste capítulo o algoritmo BSA é apresentado e seu funcionamento é descrito.
- Capítulo 4: é apresentado o método utilizado para a adaptação do algoritmo BSA a problemas com restrições, o Método da Penalização Adaptativa (MPA) é descrito e são comentadas as vantagens relacionadas a escolha do método.
- Capítulo 5: são realizados experimentos numéricos em problemas de formulação fechada para avaliar o desempenho do BSA adaptado para o tratamento de problemas com restrições em problemas benchmark da literatura.
- Capítulo 6: neste capítulo o BSA adaptado para o tratamento de problemas com restrições é associado a um código de elementos finitos para resolução de problemas práticos de engenharia.



- Capítulo 7: é realizada a conclusão e são elencados possíveis trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO LITERÁRIA

Antes de apresentar os conceitos envolvidos num problema de otimização e os aspectos gerais dos algoritmos meta-heurísticos, a notação utilizada é apresentada a seguir:

- letras maiúsculas em negrito: matrizes - as populações geradas pelo BSA são armazenadas em matrizes, onde cada linha representa um indivíduo, por exemplo,  $\mathbf{P}$  representa a matriz composta pelos indivíduos de uma dada iteração, e  $\mathbf{P}_i$  representa o indivíduo  $i$  da população.
- letras maiúsculas em itálico: variáveis aleatórias e conjuntos, por exemplo, o conjunto admissível do problema de otimização será denominado  $S$ , a distribuição normal será denominada  $N$ .
- letras minúsculas em negrito: vetores - as variáveis de projeto serão armazenadas no vetor  $\mathbf{x}$ .
- letras minúsculas em itálico: funções, variáveis e parâmetros -  $l_{inf}$ ,  $p_{mist}$

### 2.1 Conceitos de otimização

O uso prático de processos de otimização se inicia com a definição de pelo menos uma função objetivo, que é a medida do desempenho do sistema a ser analisado. A função objetivo pode ser, por exemplo, a minimização do custo para obtenção de um desempenho previamente estabelecido. Este objetivo depende de certas características do sistema, que são chamadas de variáveis de projeto. O objetivo da otimização é encontrar os valores das variáveis de projeto que fornecem os melhores valores para a função objetivo. Estas variáveis são frequentemente limitadas a certos valores ou por funções, tornando o problema em análise num problema de otimização com restrição.

Assim sendo, um problema de otimização é definido por três elementos:

- a função objetivo: em geral, uma função associada com os parâmetros do sistema em análise, que mede de alguma maneira o desempenho deste sistema. Por exemplo, uma função  $f : \mathfrak{R}^{dim} \rightarrow \mathfrak{R}$  o valor do desempenho do sistema associado com  $n$  parâmetros que assumem valores reais. Este exemplo se aplica ao caso da minimização do volume de um cilindro.
- as variáveis de projeto: são os parâmetros que o projetista pode alterar para modificar as características que definem o sistema para melhorar seu desempenho. Por exemplo, um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{L}, x_{dim}) \in \mathfrak{R}^{dim}$  pode transladar  $dim$  parâmetros ajustáveis assumindo valores reais. O domínio associado é  $V = \mathfrak{R}^{dim}$ . No exemplo citado, as variáveis de projeto  $x_1$  e  $x_2$  podem ser o raio e comprimento do cilindro, respectivamente.
- O espaço de projeto, as restrições limitam as escolhas do projetista. Em geral, o espaço de projeto é um subconjunto não nulo  $S$  de  $V$ . No exemplo do cilindro, a relação entre as variáveis de projeto pode ser imposta, por exemplo,

$$0.5 \leq \frac{x_1}{x_2} \leq 2.0.$$

Então, um problema de otimização pode ser apresentado da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin} \{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S \}, \quad (1)$$

Onde:

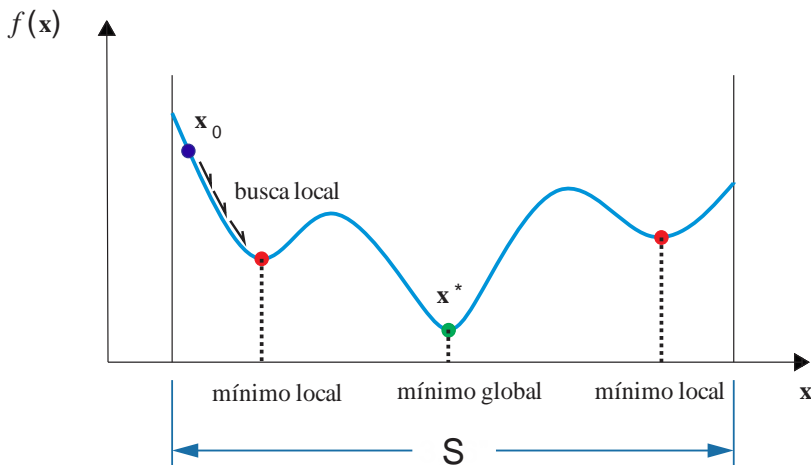
- $f : \mathfrak{R}^{dim} \rightarrow \mathfrak{R}$  é a função objetivo a ser minimizada (ex., custo, peso...),
- $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{dim}$  são as variáveis de projeto,
- $S = \{ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, 1 \leq i \leq n_c, h_j(\mathbf{x}) = 0, 1 \leq j \leq n_e \}$  é o espaço de projetos admissíveis ou conjunto admissível,

$g_i : \mathcal{R}^{dim} \rightarrow \mathcal{R}$  e  $h_j : \mathcal{R}^{dim} \rightarrow \mathcal{R}$  são restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

O problema consiste em encontrar o mínimo global de  $f$ , isto é, encontrar  $\mathbf{x}^* \in S$  tal que  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in S$ . Note que, se  $f$  ou  $S$  não são convexos, pode existir um mínimo local, isto é,  $\mathbf{x}^* \in S$  tal que  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in S / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$ .

Em situações gerais, muitos mínimos globais e mínimos locais podem existir. A Figura 6 ilustra o exemplo de uma função de uma única variável com mínimos locais e um único mínimo global. Dentre os mínimos, aquele que possui o menor valor de  $f$  é o mínimo global.

Figura 6- Mínimos locais e global.



Algoritmos de otimização são geralmente iterativos. Eles são inicializados com um valor inicial  $\mathbf{x}_0$  e geram uma sequência de pontos  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{int}\}$  que supostamente converge para solução do problema de otimização. A estratégia utilizada para mover de um ponto para o próximo é o que distingue os diferentes algoritmos de otimização. A

maioria das estratégias propostas na literatura emprega os valores da função objetivo, restrições e a primeira e segunda derivadas destas funções. Alguns algoritmos acumulam informações obtidas ao longo das iterações, enquanto outros usam apenas a última informação computada obtida. Deste ponto de vista, os algoritmos podem ser classificados de acordo com as informações requeridas por eles. Podendo ser:

- Algoritmos de ordem zero, que usam apenas os valores da função objetivo e das restrições. Por exemplo:
  - Nelder-Mead;
  - Algoritmos heurísticos, por exemplo, EAs;
- Métodos de primeira ordem, que usam as derivadas da função objetivo e das restrições. Por exemplo:
  - Método do gradiente;
  - Método do gradiente projetado;
  - Método das penalizações;
  - Método Lagrangiano aumentado.
- Os métodos de segunda ordem, que também usam informações da segunda derivada das funções objetivo e de restrição. Por exemplo: método de Newton.

Algoritmos de otimização também podem ser classificados como:

- Local: chamam-se “local” os métodos que convergem para um mínimo local.
- Global: métodos que são capazes de convergir para um mínimo global.

Existem muitos métodos locais e globais na literatura. Dentre os métodos locais mais populares, pode-se mencionar: os métodos de primeira ordem citados acima, o método de Newton e o método de Nelder-Mead. Métodos globais geralmente incluem o uso de probabilidades (ex., algoritmos genéticos, recozimento simulado, BSA) (LOPEZ et al. 2009a; LOPEZ et al. 2009b). Algoritmos que combinam algoritmos locais e globais são chamados algoritmos híbridos. Pode-se citar, por exemplo: “Global e Nealder-Mead limitado” (LUERSEN e LE RICHE 2003; RITTO et al. 2011) ou o método do “gradiente de perturbação aleatória” (SOUZA DE CURSI 1994). Para o leitor interessado, uma metodologia geral para hibridização de algoritmos foi apresentada por Souza de Cursi (1995).

Para a comparação de algoritmos, podem-se considerar três critérios (NOCEDAL e WRIGHT 2006):

- Eficiência, que pode ser avaliada pelo número de chamadas da função objetivo necessário para a convergência;
- Robustez, que pode ser definida como a capacidade do algoritmo em encontrar o ponto ótimo, independentemente da configuração do problema, e particularmente, não dependendo do ponto inicial;
- Precisão, que é a capacidade de encontrar uma solução específica, sem apresentar muita sensibilidade a erros de dados e arredondamentos que ocorrem quando o algoritmo é implementado em um computador.

Estes diferentes elementos são conflitantes geralmente. Por exemplo, um método que converge rapidamente para um extenso problema não linear pode requerer muita memória de armazenamento. Por outro lado, um método robusto pode ser lento. Equilíbrio entre velocidade de convergência, requisitos de armazenamento e robustez são as questões centrais da otimização numérica. É importante pontuar que uma das dificuldades inerentes dos procedimentos de otimização é o fato de que nenhum algoritmo universal está disponível. Por exemplo, para problemas combinatórios, existe um teorema chamado *No Free Lunch Theorem* (WOLPERT e MACREADY 1997) que mostra que não existe um algoritmo ótimo para todos os problemas. Este teorema mostra que qualquer método de otimização que possui um bom desempenho em uma determinada classe de funções pode ter um desempenho ruim para outra classe de problemas. A responsabilidade de escolher um algoritmo adequado para uma determinada aplicação é do projetista. A escolha do algoritmo é também um passo importante, pois isso geralmente determina a qualidade e a velocidade de obtenção da solução do problema.

## 2.2 Algoritmos meta-heurísticos

Nas últimas décadas vários algoritmos foram utilizados para a otimização de problemas de engenharia. A maioria destes algoritmos é baseada em métodos de programação linear e não linear, que requerem informações do gradiente das funções e de suas restrições, usualmente,

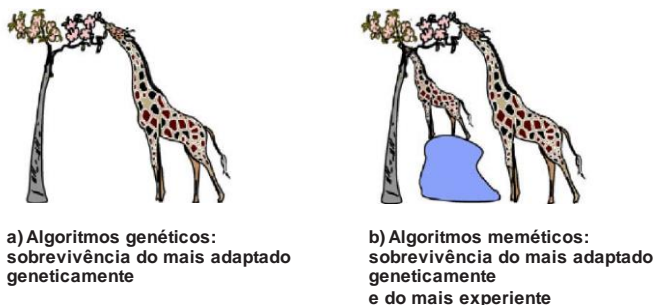
estes algoritmos buscam melhorar a solução na vizinhança de um determinado ponto (SADOLLAH et al, 2013).

Algoritmos de otimização baseados em programação linear e não linear fornecem estratégias muito úteis para se obter mínimos de modelos simples, isto é, mínimos de problemas convexos (para definição de convexidade, ver ARORA, 2004). Entretanto, problemas reais de otimização estrutural são, por natureza, muito complexos. Normalmente, a função objetivo e/ou as funções de restrição não são convexas nem contínuas. Se o problema possui mais de um mínimo local, os resultados dependerão do estimativa inicial e o ponto ótimo obtido pode não ser necessariamente o mínimo global. Além disso, a maioria dos problemas de engenharia estrutural são altamente não lineares, incluem diferentes tipos variáveis de projeto (por exemplo, variáveis discretas e contínuas) e complexas restrições, como por exemplo, tensões, frequências naturais, deslocamentos e configuração geométrica (GANDOMI et al, 2011).

As complexidades citadas acima inviabilizam a aplicação de métodos de otimização baseados em gradientes em várias situações reais da engenharia. Este fato motivou pesquisadores a desenvolverem algoritmos meta-heurísticos, baseados na simulação e imitação do comportamento de fenômenos naturais, para resolver problemas de otimização estrutural complexos. A grande vantagem da utilização destes algoritmos é que eles são capazes de lidar de maneira eficaz com problemas de otimização cujas funções não são convexas nem contínuas, assim como problemas que possuem tanto variáveis discretas e contínuas. Lee e Geem (2005) afirmam que, um ponto comum aos algoritmos de otimização meta-heurísticos é que eles combinam regras e aleatoriedade para imitar fenômenos naturais. Entre os meta-heurísticos pode-se citar os SIAs (algoritmos baseados na inteligência de enxames) e os EAs (algoritmos evolucionários). Algoritmos de otimização baseados na inteligência de enxames geralmente são modelos matemáticos simplificados do comportamento social complexo de seres vivos. Entretanto, algoritmos de otimização baseados em inteligência de enxames também têm sido inspirados por eventos naturais envolvendo física (RASHEDI et al., 2009), comportamento de pássaros (SIMON, 2008) e vários ramos de arte, como a música (LEE e GEEM, 2005). Um EA, algoritmo de otimização evolucionário, é a implementação de um meta-heurístico modelado com base na evolução biológica.

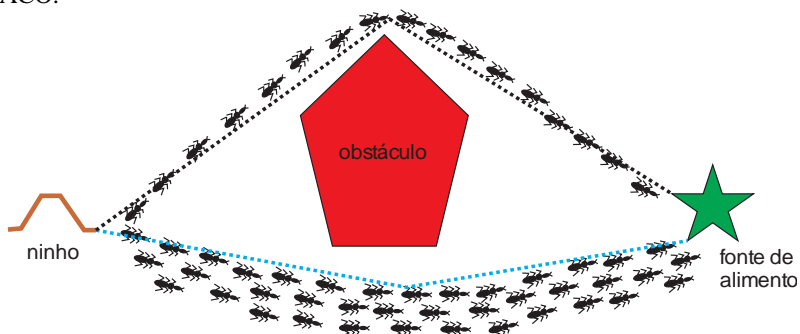
O GA (algoritmo genético) foi desenvolvido baseado no princípio Darwiniano de sobrevivência do indivíduo mais adaptado e no processo natural de evolução por reprodução. Com o objetivo de reduzir o tempo de processamento e melhorar a qualidade das soluções, particularmente para evitar que o algoritmo fique preso em mínimos locais, novos EAs foram desenvolvidos baseados em outros processos naturais, como por exemplo algoritmos meméticos (ELBELTAGI et al, 2005).

Figura 7- Ilustrações do método de escolha de soluções de algoritmos genéticos e meméticos (modificado de ELBELTAGI et al, 2005) .



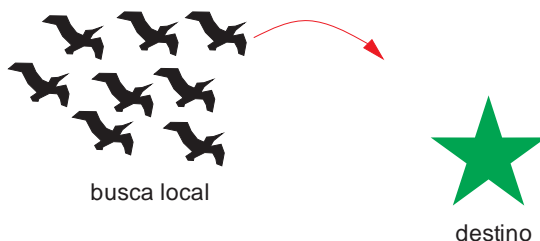
O algoritmo ACO, desenvolvido por Dorigo et al (1989), é baseado na estratégia de busca que colônias de formigas utilizam para encontrar o caminho mais curto até uma fonte de alimento.

Figura 8- Ilustração do método de escolha de solução do algoritmo ACO.



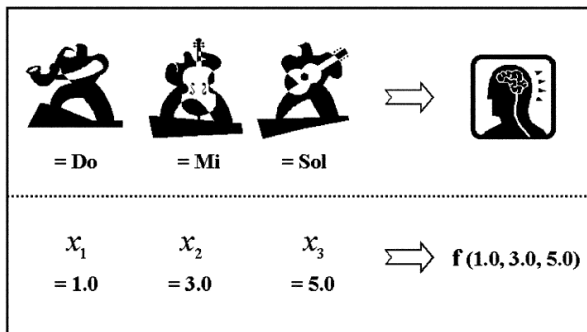
Dentre os algoritmos mais utilizados, e que apresentam melhores resultados na literatura, pode-se citar o algoritmo PSO, desenvolvido por Kennedy e Eberhart (1995). O PSO é inspirado no comportamento social de grupos de pássaros que imigram para chegar a um destino desconhecido. No PSO, cada solução é um pássaro do bando, o autor usa o termo partícula para designar cada pássaro. O algoritmo imita o comportamento de um passaredo que se comunica enquanto voa.

Figura 9- Ilustração do método de escolha de solução do algoritmo PSO.



Recentemente, Geem et al (2001) desenvolveu o algoritmo HS (algoritmo de busca harmônica), um meta-heurístico baseado nos processos musicais de busca por uma harmonia perfeita para uma determinada melodia. Em uma música, a harmonia pode ser considerada análoga à otimização de um vetor solução e o improviso dos músicos são análogos aos esquemas de busca local e global.

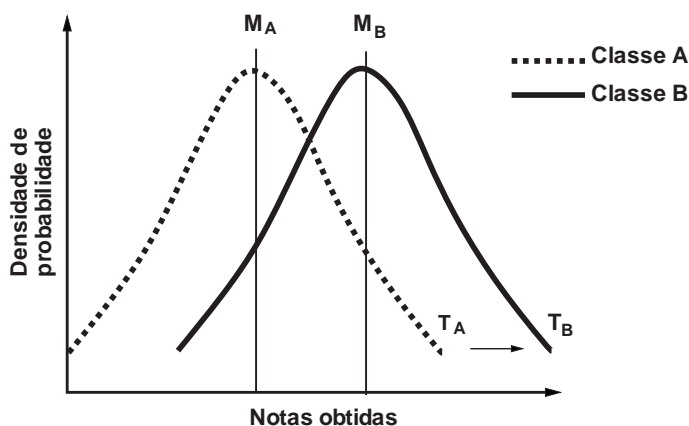
Figura 10- Analogia entre improvisação musical e otimização estrutural (LEE e GEEM, 2005).





Outro algoritmo meta-heurístico baseado no comportamento humano é o TLBO, este algoritmo se inspira no processo de ensino e aprendizado. No TLBO os aprendizes em uma sala de aula são considerados uma população. O algoritmo admite que o professor é o indivíduo que apresenta o valor de avaliação da função objetivo mais ajustado. O professor dissemina conhecimento na classe, desta forma a média da turma está diretamente associada à capacidade do professor. Se o professor for competente a média da turma passará de A para B (Figura 11) e o um novo professor surgirá. O processo é repetido até atingir-se o número especificado de iterações e o mínimo global corresponde ao melhor professor obtido.

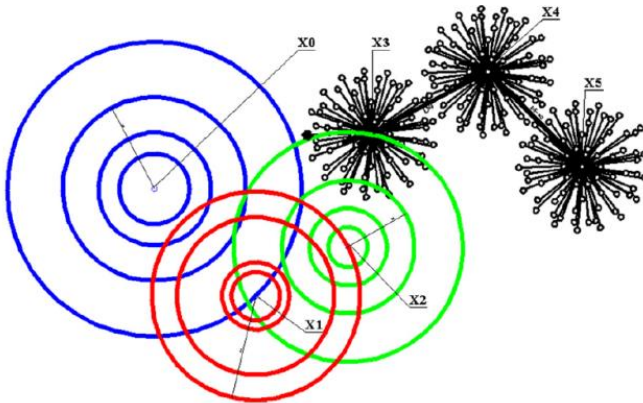
Figura 11- Esquema de funcionamento do algoritmo TLBO (modificado de DEGERTEKIN e HAYALIOGLU, 2012).



O MBA, desenvolvido por Sadollah et al (2012), é um algoritmo baseado no conceito de explosões de minas. Após a explosão de uma mina, estilhaços da bomba colidem com outras minas nas proximidades da área, resultando em novas explosões. Para entender a analogia entre o fenômeno e o processo de busca por um mínimo global, considere um campo minado onde se deseja encontrar as minas, o objetivo pode ser alcançado encontrando a mina com o maior potencial explosivo e localizada num ponto ótimo X, ou seja, a mina que pode causar o maior

número de explosões. As explosões causadas pela mina são consideradas como seu valor da função objetivo naquele ponto.

Figura 12- Esquema de funcionamento do algoritmo MBA (SADOLLAH et al, 2012).



O algoritmo FA simula o comportamento social de vagalumes buscando por parceiros sexuais usando sua bioluminescência. No FA existe dois aspectos importantes: a variação da intensidade luminosa e a formulação da atratividade. De forma simplificada pode-se assumir que a atratividade de um vagalume é determinada pelo seu brilho e pela distância dos outros vagalumes. A atratividade é associada ao valor da função objetivo.

Dentre as utilizações de algoritmos meta-heurísticos disponíveis na bibliografia pode-se citar: projetos de sistemas de engenharia bioquímica (LOBATO e STEFFEN, 2013), otimização de comportamento dinâmico de veículos (BORGES et al, 1996), resolução de problemas inversos de condução de calor (LOBATO et al, 2014), otimização de componentes estruturais de aeronaves (VIANA et al, 2009), otimização de estruturas treliçadas (FADEL MIGUEL et al, 2013), otimização de compostos laminados (LOPEZ et al, 2009), estimativa de parâmetros ótimos para amortecedores de massa sintonizada (FADEL MIGUEL et al, 2013), detecção de dano estrutural (FADEL MIGUEL et al, 2012), otimização de sistemas dinâmicos estocásticos (LOPEZ et al, 2014), otimização de malhas elementos

finitos (SERPA, 1991), predição de gravidade de lesões em atletas (MAGALHÃES et al, 2013), predição de desempenho de candidatos à vagas de emprego (BARBOSA et al, 2013) e muitas outras.

O algoritmo utilizado neste trabalho, o *Backtracking Search Optimization Algorithm* (BSA), pertence a classe dos EAs.

EAs usam apenas os valores da função objetivo e das restrições no processo de progredir em direção a uma solução. As funções avaliadas não precisam ser contínuas ou diferenciáveis. Portanto, são algoritmos muito gerais, que podem ser aplicados a todos os tipos de problemas, discretos, contínuos e não diferenciáveis. Além disso, por se tratar de um meta-heurístico, um EA permite a obtenção de mínimos globais, em oposição às soluções locais determinadas por algoritmos de otimização baseados em gradientes (GANDOMI et al, 2011). De acordo com Karaboga et al. (2007), EAs devem possuir capacidade de exploração global e local. Possuir capacidade de exploração global significa que o algoritmo de otimização deve varrer efetivamente todo o espaço de busca, enquanto que a capacidade de exploração local é a que permite a busca pela melhor solução nas proximidades de uma solução previamente encontrada. O sucesso de um algoritmo de otimização depende significativamente de suas capacidades de exploração global e local, e do equilíbrio natural entre elas.

De acordo com Brest et al.(2006), dentre as características desejáveis para um algoritmo de otimização incluem-se: a capacidade de encontrar o mínimo global de um problema rapidamente, com um pequeno número de parâmetros de controle e com baixo custo computacional, assim como robustez e facilidade de aplica-lo em diferentes modelos de problemas.

Segundo Deb et al. (2002), em um EA, a proteção da diversidade genética de uma população é muito importante para que esta população sustente iterativamente seu desenvolvimento. Acredita-se que na natureza, a diversidade genética resulta de processos genéticos básicos como recombinação, ou crossover, mutação, seleção e adaptação. Muitos EAs são baseados em regras básicas da genética, como o ABC, o *cuckoo search*, *covariance matrix adaptation evolution strategy* (CMAES) (IGEL et al., 2007) e o *differential evolution algorithm* (DE) (STORN e PRICE, 1997).

Storn e Price (1997) afirmam que o DE tem uma estrutura simples e tem sido utilizado para resolver muitos problemas de engenharia. A busca pelo mínimo global no DE é sensível às estratégias de mutação e crossover que ele usa, aos valores iniciais dos fatores de mutação e crossover introduzidos, tamanho da população e número de iterações. Versões avançadas do DE, como o *adaptive differential evolution algorithm* (JDE) (BREST et al., 2006), *parameter adaptive differential evolution algorithm* (JADE) (ZHANG e SANDERSON, 2009) e o *self-adaptive differential evolution algorithm* (SADE) (QIN e SUGANTHAN, 2005), foram desenvolvidos para aprimorar o índice de sucesso do DE em resolver problemas. Em contraste, o ABC é um EA que difere do DE por usar regras genéticas, mas não usar estratégia de crossover (KARABOA et al., 2009). Além disso, enquanto busca por um mínimo global, o ABC tende a fazer uso das soluções adquiridas no espaço de busca, o que fornece melhores resultados.

Em linhas gerais, EAs são mecanismos de busca estocásticos que procuram uma solução próxima da ótima para um problema de otimização. Um EA tenta substituir um indivíduo por outro com melhor valor a partir de indivíduos experimentais. Para gerar um indivíduo experimental o EA trata indivíduos existentes escolhidos como material genético bruto e os combina utilizando operadores genéticos. Se o indivíduo experimental tem um valor melhor que o indivíduo original, este é substituído por aquele na população da próxima geração. Os EAs diferem entre si em suas estratégias para gerar os indivíduos experimentais. Por estas estratégias terem um efeito considerável no sucesso e na velocidade de resolução, muitos esforços são direcionados para o desenvolvimento de EAs com processos que aceleram e melhoram a resolução de problemas (CIVICIOGLU, 2013).

O mecanismo de geração da população experimental do BSA o permite resolver problemas de otimização numérica com sucesso e rapidez. O BSA usa três operadores genéticos básicos – seleção, mutação e crossover – para gerar os indivíduos experimentais. O algoritmo em questão usa uma estratégia não uniforme de recombinação que é mais complexa que as estratégias de recombinação usadas em outros algoritmos. A escolha do BSA para o presente trabalho se justifica no seu ótimo desempenho na solução de problemas de otimização sem restrições (CIVICIOGLU, 2013) e pelo fato deste algoritmo ter somente um parâmetro a ser ajustado (como será mostrado

no Capítulo 4), de acordo com as características desejáveis para um algoritmo de otimização, segundo Deb et al (2006).

### 3. ALGORITMO BSA

O BSA é um EA, projetado para ser um minimizador global e capaz de lidar com variáveis discretas e contínuas simultaneamente. O BSA pode ser explicado dividindo suas funções em cinco operadores: inicialização, seleção-I, mutação, recombinação e seleção-II. No Algoritmo 1, pode-se observar a estrutura geral do BSA.

As principais diferenças do BSA para os demais EAs são as funções de mutação e recombinação. Após a geração da população inicial a função de mutação controla a amplitude da matriz de direção de busca. Por conta da utilização do histórico de populações no cálculo da matriz de direção de busca, o BSA gera novas populações tirando vantagem das gerações anteriores.

A função recombinação processa a forma final da população gerada. Para Civicioglu et al (2013), o que diferencia a estratégia da função recombinação do BSA da utilizada por outros EAs é o parâmetro *índice de mistura*, que controla o número de indivíduos que irão sofrer mutação na população.

Nas seções seguintes serão descritos os cinco operadores constituintes do BSA.

#### 3.1 Inicialização

O BSA inicializa a população  $\mathbf{P}$  a partir da Eq. (1):

$$\mathbf{P}_{i,j} \sim U(l_{inf\_j}, l_{sup\_j}) \quad (1)$$

Sendo  $l_{inf}$  e  $l_{sup}$  os limites inferior e superior das variáveis de projeto, respectivamente. Para  $i=1,2,3,\dots,t_{pop}$  e  $j=1,2,3,\dots,dim$ , onde  $t_{pop}$  e  $dim$  são o tamanho da população e a dimensão do problema.  $U$  é a distribuição uniforme e cada  $\mathbf{P}_i$  é um indivíduo da população  $\mathbf{P}$ .  $\mathbf{P}$  é uma população gerada aleatoriamente contida dentro do domínio do problema.

### 3.2 Seleção-I

O estágio Seleção-I do BSA determina a população histórica  $\mathbf{P}_{hist}$  que é usada para calcular a direção de busca. A população histórica inicialmente é determinada a partir da Eq.(2):

$$P_{hist_{i,j}} \sim U(l_{inf\_j}, l_{sup\_j}) \quad (2)$$

Figura 13- Algoritmo 1, estrutura geral do BSA

---

```

1. Inicialização
   Repetir
     2. Seleção - I
     Geração da população experimental
       3. Mutação
       4. Recombinação
     end
     5. Seleção - II
   Até as condições serem atendidas

```

---

O BSA possui uma opção que permite redefinir a  $\mathbf{P}_{hist}$  no começo de cada iteração a partir de um comando ‘se-então’, conforme mostrado na Eq. (3):

$$se\ a < b\ então\ \mathbf{P}_{hist} := \mathbf{P}|a, b \sim U(0,1) \quad (3)$$

Onde  $a$   $b$  são constantes aleatórias e  $:=$  é operador de atualização. Ou seja, a Eq.(3) garante que há uma probabilidade de 50% de que  $\mathbf{P}_{hist}$  seja igual a pop e 50% de chances de que  $\mathbf{P}_{hist}$  seja uma geração aleatória independente de  $\mathbf{P}$ .

Após  $\mathbf{P}_{hist}$  ser determinada, a Eq.(4) é utilizada pra modificar aleatoriamente a ordem dos indivíduos da  $\mathbf{P}_{hist}$ :

$$\mathbf{P}_{hist} := \text{permuta}(\mathbf{P}_{hist}). \quad (4)$$

A função de permuta usada na Eq.(4) é uma função de embaralhamento aleatório. A utilização da função de embaralhamento

poderá ser compreendida após a descrição do próximo processo do algoritmo, a Mutação.

### 3.3 Mutação

O processo de mutação gera a forma inicial da população experimental mutante a partir da Eq.(5).

$$\text{Mutante} = \mathbf{P} + F \cdot (\mathbf{P}_{hist} - \mathbf{P}). \quad (5)$$

Na Eq.(5),  $F$  é uma constante aleatória, neste trabalho a constante  $F$  foi gerada pela equação correspondente ao *Brownian walk*,  $3 \cdot \text{randn}$  ( $\text{randn}$  gera uma constante a partir de uma distribuição normal).  $F$  controla a amplitude da matriz de direção de busca ( $\mathbf{P}_{hist} - \mathbf{P}$ ).

Durante a geração da população mutante, a direção de busca é obtida pela subtração do vetor  $\mathbf{P}_{hist}$  do vetor  $\mathbf{P}$ , ou seja, quando  $\mathbf{P}_{hist}$  é igual a  $\mathbf{P}$ , sem o embaralhamento, a matriz de direção de busca resultaria em uma matriz nula, e ao fim da iteração a matriz  $\mathbf{P}$  permaneceria inalterada.

Por usar a população histórica no cálculo da matriz de direção de busca, o BSA gera a população experimental aproveitando sua experiência em gerações anteriores, e é este fato que justifica o algoritmo ter memória.

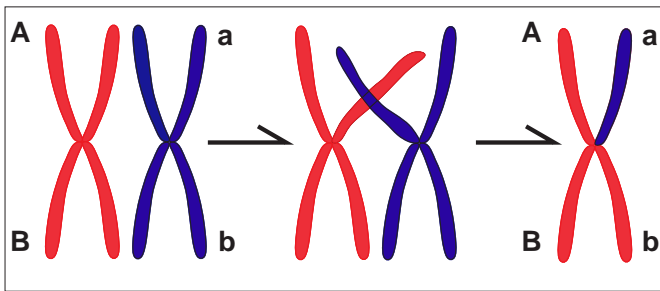
### 3.4 Recombinação

O processo de recombinação, ou crossover, do BSA gera a forma final da população experimental  $\mathbf{T}$ . O código calcula uma matriz com valores inteiros binária  $\mathbf{M}$ , de dimensão  $t_{pop} \times dim$ , que indica os indivíduos de  $\mathbf{T}$  a serem manipulados usando os indivíduos de  $\mathbf{P}$ . Se  $\mathbf{M}_{n,m} = 1$ , onde  $n \in \{1, 2, 3, \dots, t_{pop}\}$  e  $m \in \{1, 2, 3, \dots, dim\}$ ,  $\mathbf{T}$  é atualizada com  $\mathbf{T}_{n,m} := \mathbf{P}_{n,m}$ .

Para a montagem de  $\mathbf{M}$ , podem ser utilizadas aleatoriamente duas estratégias distintas, cada uma com 50% de probabilidade de ocorrência. Na primeira, inicialmente é gerada uma matriz nula com as dimensões de  $\mathbf{M}$ , a seguir, o parâmetro índice de mistura,  $ind_{mist}$ , é usado para definir aleatoriamente quais variáveis de cada indivíduo da população serão

atualizados, a posição destes elementos assumirão o valor unitário na matriz  $\mathbf{M}$ . A segunda estratégia escolhe aleatoriamente apenas uma variável de cada indivíduo de  $\mathbf{P}$  para assumir valor igual à unidade na matriz  $\mathbf{M}$ . O processo pode ser melhor compreendido a partir da analogia com o processo genético que dá nome a esta etapa do algoritmo.

Figura 14- Recombinação genética.



Na Figura 7, acima, o cromossomo vermelho representa um indivíduo da população  $\mathbf{P}$  no início de uma iteração e cada braço do cromossomo representa uma variável deste indivíduo. Pode-se observar na Figura 2 que, ao fim do processo de recombinação o indivíduo vermelho de  $\mathbf{P}$  tem uma de suas variáveis atualizadas (braço superior direito do cromossomo vermelho). No algoritmo a recombinação é realizada multiplicando os elementos da matriz  $\mathbf{M}$  pela matriz obtida após o processo de mutação ( $F \cdot (\mathbf{P}_{hist} - \mathbf{P})$ ), ao fim do processo, a população  $\mathbf{P}$  é somada à matriz que resulta desta operação. Assim sendo, os elementos de  $\mathbf{T}$  correspondentes aos elementos não nulos de  $\mathbf{M}$  serão atualizados, conforme pode ser observado na equação (6):

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} + (\mathbf{M} \cdot F) \cdot (\mathbf{P}_{hist} - \mathbf{P}) \quad (6)$$

A Figura 15 mostra a estratégia de recombinação do BSA. A linha 3 indica a função teto, definida por  $rnd \sim U(0,1)$ . A estratégia de crossover do BSA é diferente da usada no DE e suas variantes. O parâmetro de índice de mistura,  $ind_{mist}$ , no processo de recombinação do BSA controla o número de variáveis de cada indivíduo que irão assumir



valor unitário na matriz  $\mathbf{M}$  usando  $[ind_{mist} \cdot rnd \cdot dim]$  (Algoritmo 2, linha 3) (CIVICIOGLU, 2013).

A primeira estratégia para geração de  $\mathbf{M}$ , utilizando o parâmetro  $ind_{mist}$ , pode ser observada nas linhas 2-4 da Figura 15. Na linha 6 da Figura 15 pode-se observar a estratégia alternativa para a geração de  $\mathbf{M}$ .

Alguns indivíduos da população experimental obtidos no fim do processo de recombinação do BSA podem ultrapassar o limite do espaço de busca, como resultado da estratégia de mutação do BSA. Os indivíduos além dos limites do espaço de busca são regenerados usando o Algoritmo 3, Figura 16.

Figura 15- Algoritmo 2, estratégia de crossover do BSA

---

**Entrada:** Mutante,  $ind_{mist}$ ,  $t_{pop}$  e  $dim$ .  
**Saída:**  $\mathbf{T}$ : População experimental.

```

0  $\mathbf{M}_{(1:t_{pop},1:dim)} = 1$  // map inicial é uma matriz unidade  $t_{pop} \times dim$ .
1 se  $a < b$  |  $a, b \sim U(0,1)$  então
2   | para  $i$  de 1 até  $t_{pop}$  fazer
3   |   |  $\mathbf{M}_{i,u_{(1:[ind_{mist} \cdot rnd \cdot dim])}} = 0$  |  $u = \text{permuta}(\langle 1,2,3, \dots, dim \rangle)$ 
4   |   fim
5   se não
6   |   para  $i$  de 1 até  $t_{pop}$  fazer  $\mathbf{M}_{i,randi(dim)} = 0$ , fim
7   fim
8  $\mathbf{T} := \text{Mutante}$  //  $\mathbf{T}$  inicial
9 para  $i$  de 1 até  $t_{pop}$  fazer
10  | para  $j$  de 1 to  $dim$  fazer
11  |   | se  $\mathbf{M}_{i,j} = 1$  então  $\mathbf{T}_{i,j} := \mathbf{P}_{i,j}$ 
12  |   fim
13 fim

```

---

Figura 16- Algoritmo 3, mecanismo de controle dos limites do BSA.

---

**Entrada:**  $\mathbf{T}$ , Limites do espaço de busca (i.e.,  $l_{inf\_j}$ ,  $l_{sup\_j}$ )

**Saída:**  $\mathbf{T}$

**para**  $i$  **de** 1 **até**  $t_{pop}$  **fazer**

**para**  $j$  **de** 1 **até**  $D$  **fazer**

**se**  $(\mathbf{T}_{i,j} < l_{inf\_j})$  **ou**  $(\mathbf{T}_{i,j} > l_{sup\_j})$  **então**

$\mathbf{T}_{i,j} = rnd \cdot (l_{sup\_j} - l_{inf\_j}) + l_{inf\_j}$

**fim**

**fim**

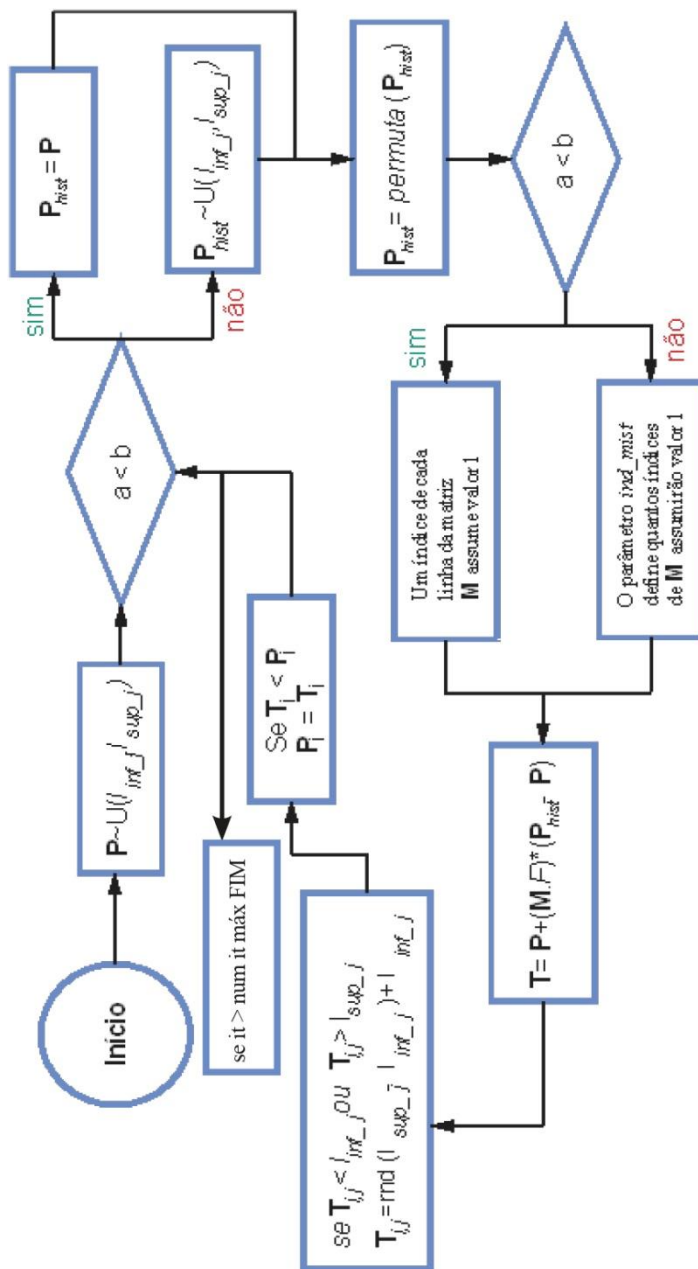
**fim**

---

### 3.5 Seleção-II

No estágio de Seleção-II do BSA, os  $\mathbf{T}_i$  que possuem um menor valor da função objetivo que os correspondentes  $\mathbf{P}_i$  são usados para atualizar os  $\mathbf{P}_i$ . Se o melhor indivíduo de  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}_{best}$ ) tem um menor valor da função objetivo que o mínimo global obtido até então pelo BSA, o minimizador global é atualizado para assumir o valor de  $\mathbf{P}_{best}$ . A estrutura do BSA é muito simples; desta forma, ele pode ser facilmente adaptado para diferentes problemas numéricos de otimização. O fluxograma do funcionamento do BSA pode ser observado na Figura 17, a seguir. O pseudo código do BSA pode ser observado na Figura 19.

Figura 17- Fluxograma do funcionamento do BSA.



#### 4. ADAPTAÇÃO DO BSA PARA PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES

O BSA foi desenvolvido para lidar com problemas de otimização sujeitos apenas às restrições dos limites das variáveis. Entretanto, a grande maioria dos problemas de otimização em engenharia apresentam outros tipos de restrições, como por exemplo, tensão admissível, deslocamento máximo admissível, frequência de excitações harmônicas, entre outras. Uma das formas mais comuns de tratar os problemas com restrições é transformá-los em problemas sem restrições através da introdução de uma função de penalidade.

Neste trabalho será utilizada uma técnica de penalização adaptativa, sugerida por Lemonge e Barbosa (2004), e que se ajusta através do comportamento da população no espaço de busca ao longo das gerações. O método em questão utiliza informações como a média dos valores da função objetivo da população e o grau de violação de cada restrição ao longo da evolução.

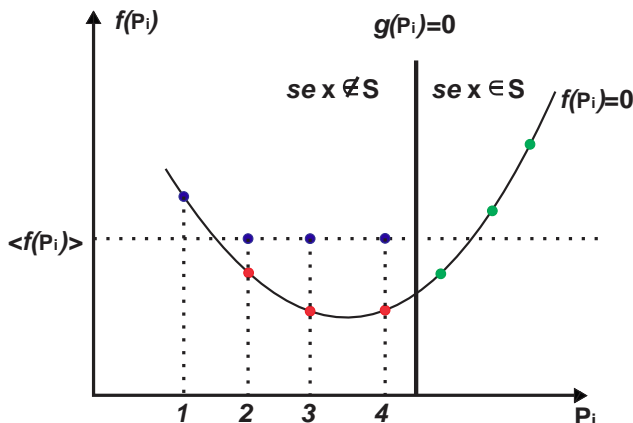
A função objetivo proposta no Método da Penalização Adaptativa (MPA) é descrita pela Eq. (7):

$$f(\mathbf{P}_i) = \begin{cases} f(\mathbf{P}_i), & \text{se } \mathbf{P}_i \in S \\ \bar{f}(\mathbf{P}_i) \times \left(1 + \sum_{j=1}^m k_j g(\mathbf{P}_i)\right) & \text{se } \mathbf{P}_i \notin S \end{cases} \quad (7)$$

Onde  $k_j$  são constantes a serem determinadas,  $g_j$  são as restrições de desigualdade,  $n_c$  é o número de restrições de desigualdade da função objetivo e,

$$\bar{f}(\mathbf{P}_i) = \begin{cases} f(\mathbf{P}_i), & \text{se } f(\mathbf{P}_i) > \langle f(\mathbf{P}_i) \rangle \\ \langle f(\mathbf{P}_i) \rangle & \text{se não} \end{cases} \quad (8)$$

onde  $E \langle f(\mathbf{P}_i) \rangle$  é a média da função objetivo para cada população. A Figura 18, a seguir, ilustra o procedimento descrito na equação 8. Pode-se observar na figura tanto as soluções factíveis quanto as que violam as restrições, as bolas vermelhas representam os casos em que os valores  $f(\mathbf{P}_i)$  são substituídos por  $\langle f(\mathbf{P}_i) \rangle$  (bolas azuis, pontos 2, 3 e 4). Para as soluções representadas pelo ponto 1, que possuem valores da função objetivo piores do que a média da população,  $\bar{f}(\mathbf{P}_i) = f(\mathbf{P}_i)$ .

Figura 18- Determinação de  $\bar{f}$ .

O parâmetro de penalização é definido para cada geração por:

$$k_j = \frac{|\sum_{i=1}^{t_{pop}} f(\mathbf{P}_i)|}{\sum_{l=1}^{n_c} [\sum_{i=1}^{t_{pop}} g(\mathbf{P}_i)]^2} \sum_{i=1}^{t_{pop}} g_j(\mathbf{P}_i) \quad (9)$$

A ideia é que os valores dos coeficientes de penalização sejam distribuídos de uma maneira que as restrições que são mais difíceis de serem atendidas tenham um coeficiente de penalização relativamente mais alto.

Figura 19- Pseudo código do BSA.

---

```

Input: j, N, D, iterações,  $ind_{mist}$ ,  $l_{inf\_1:D}$ ,  $l_{sup\_1:D}$ 
Output: mínimo global, variáveis do mínimo global
//  $rnd \sim U(0,1)$ ,  $rndn \sim N(0,1)$ ,  $w = rndint(\cdot)$ ,  $rndint(\cdot) \sim U(1,\cdot) | w \in \{1,2,3, \dots, \cdot\}$ 
1 função bsa(j, n, d, iterações, inf, sup)
  // INICIALIZAÇÃO
2 mínimo global=inf
3 para i de 1 até n fazer
4   | para j de 1 to d fazer

```

---

```

5       $P_{i,j} = \text{rnd}.(l_{\text{sup}_j} - l_{\text{inf}_j}) + l_{\text{inf}_j}$  // Inicialização da população,  $\mathbf{P}$ .
6       $P_{\text{hist},i,j} = \text{rnd}.(l_{\text{sup}_j} - l_{\text{inf}_j}) + l_{\text{inf}_j}$  // Inicialização de  $\mathbf{P}_{\text{hist}}$ .
7  end
8  fitness $\mathbf{P}_i = \text{funobj}(\mathbf{P}_i)$  // Valores de  $\mathbf{P}$  inicialmente ajustados
9 fim
10 para iteração de 1 até iterações fazer
    // SELEÇÃO-I
11 se  $(a < b | a, b \sim U(0,1))$  então  $\mathbf{P}_{\text{hist}} := \mathbf{P}$  fim
12  $\mathbf{P}_{\text{hist}} := \text{permuta}(\mathbf{P}_{\text{hist}})$  // 'permuta' mudanças arbitrárias nas posições
    de dois indivíduos de  $\mathbf{P}_{\text{hist}}$ .
13 Geração da população experimental
    // MUTAÇÃO
14 mutant =  $\mathbf{P} + 3 \cdot \text{rndn} . (\mathbf{P}_{\text{hist}} - \mathbf{P})$ 
    // RECOMBINAÇÃO
15  $\mathbf{M}_{(1:N,1:D)} = 1$  //  $\mathbf{M}$  inicial é uma matriz unidade  $N \times D$ .
16 se  $c < d | c, d \sim U(0,1)$  então
17     para i de 1 até n fazer
18          $\mathbf{M}_{i, \mathcal{U}_{(1:\{\text{mixrate} \cdot \text{rnd} \cdot D\})}} = 0$  |  $u = \text{permuta}(\{1,2,3, \dots, D\})$ 
19     fim
20 se não
21     para i de 1 até n fazer,  $\mathbf{M}_{i, \text{randi}(D)} = 0$ , fim
22 fim
    // Geração da população experimental,  $\mathbf{T}$ 
23  $\mathbf{T} := \text{Mutant}$ 
24 para i de 1 até n fazer
25     para j de 1 até d fazer
26         se  $\text{map}_{i,j} = 1$  então  $\mathbf{T}_{i,j} := \mathbf{P}_{i,j}$ 
27     fim
28 fim
    // Mecanismo de controle dos limites
29 para i de 1 até n fazer
30     para j de 1 até d fazer
31         se  $(\mathbf{T}_{i,j} < l_{\text{inf}_j})$  ou  $(\mathbf{T}_{i,j} > l_{\text{sup}_j})$  então
32              $\mathbf{T}_{i,j} = \text{rnd} . (l_{\text{sup}_j} - l_{\text{inf}_j}) + l_{\text{inf}_j}$ 
33         fim
34     fim
35 fim
36 fim
    // SELEÇÃO-II
37 fitness $\mathbf{T} = j(\mathbf{T})$ 
38 para i de 1 até n fazer
39     se fitness $\mathbf{T}_i < \text{fitness}\mathbf{P}_i$  então
40         fitness $\mathbf{P}_i := \text{fitness}\mathbf{T}_i$ 

```

---

41			$P_i := T_i$
42			<b>fim</b>
43			$fitnessP_{best} = \min(fitnessP)   best \in \{1,2,3, \dots, N\}$
44			<b>se</b> $fitnessP_{best} < \text{mínimo global}$ <b>então</b>
45			$\text{mínimo global} := fitnessP_{best}$
			$\text{mínimo global} := P_{best}$
			// Exportar mínimo global e variáveis do mínimo global, <b>fim</b> , <b>fim</b>

---

## 5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS EM PROBLEMAS DE FORMULAÇÃO FECHADA

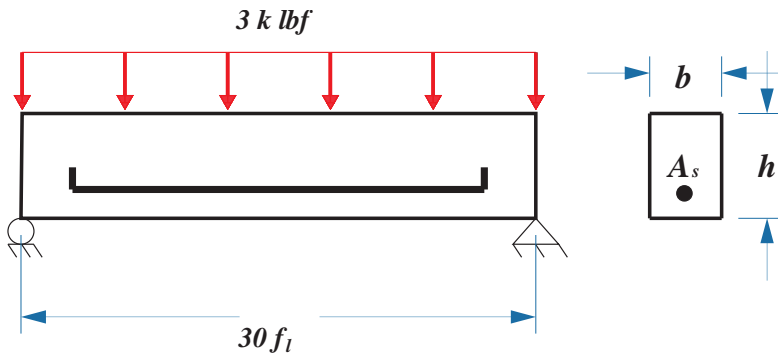
Nesta seção serão estudados problemas do tipo benchmark para algoritmos de otimização. O foco se dará na apresentação dos resultados obtidos pelo BSA-MPA, assim como na comparação destes resultados com os disponíveis na literatura para outros algoritmos de eficiência reconhecida. Para cada exemplo, cem rodadas independentes do BSA-MPA foram realizadas com o intuito de se fazer um estudo estatístico de sua convergência e possibilitar uma comparação mais justa com outros algoritmos meta-heurísticos, a comparação se deu através das médias e desvios padrão encontrados. Para solução destes problemas foi utilizado  $F = 3 \cdot rndn$ , onde  $rndn \sim N(0,1)$  ( $N$  é a distribuição normal). Os números de avaliações das funções objetivo (AFO = ao número de iterações multiplicado pelo tamanho da população) foram estabelecidos a fim de se comparar os resultados do BSA-MPA com os disponíveis nas referências literárias, o algoritmo se mostrou robusto para um tamanho de população igual a 10% do número de iterações. O ajuste do parâmetro *índice de mistura* do algoritmo BSA foi definido com base num processo de tentativa e erro, de onde se concluiu que, para os problemas estudados, os melhores resultados correspondem a um *índice de mistura* entre 0,75 e 1, para simplificação, optou-se por adotar o valor 1 em todos os problemas resolvidos.

### 5.1 Problema da viga de concreto armado biapoçada

Este problema foi originalmente proposto por Amir e Hasegawa (1989). A viga, simplesmente apoiada em dois pontos espaçados de 30 ft (9,14 m), é solicitada por uma carga acidental de 2000 lbf (8,90 kN) e uma carga permanente de 1000 lbf (4,45 kN), incluindo o peso próprio da viga. A resistência à compressão do concreto ( $\sigma_c$ ) é 5 ksi (34,47

MPa), enquanto a tensão de escoamento do aço ( $\sigma_y$ ) é 50 ksi (344,74 MPa). O custo unitário do concreto e do aço são, respectivamente, 0.02 e 1\$/in<sup>2</sup> por ft linear (0,094 \$/cm<sup>2</sup> por metro linear). A área da seção transversal das barras de reforço ( $x_1$ ), a largura da viga de concreto ( $x_2$ ) e a altura da viga de concreto ( $x_3$ ) são definidas como variáveis de projeto. A área da seção transversal das barras de aço ( $x_1$ ) é uma variável discreta que pode assumir apenas os valores listados na Tabela 1. A largura da viga de concreto ( $x_2$ ) pode assumir apenas valores inteiros. A altura efetiva é admitida como 0.8h.

Figura 20- Problema da viga de concreto armado bi apoiada.



Minimizar:

$$f(x) = 29.4x_1 + 0.6x_2x_3 \quad (10)$$

Sujeita às restrições:

$$g_1(x) = \frac{x_3}{x_2} - 4 \leq 0 \quad (11)$$

A estrutura deve ser projetada para satisfazer as seguintes exigências, indicadas na norma ACI 318-77:



$$Mu = 0.9x_1\sigma_y(0.8x_3) \left(1 - 0.59 \frac{x_1\sigma_y}{0.8x_2x_3\sigma_c}\right) \geq \quad (12)$$

$$\geq 1.4M_d + 1.7M_l$$

Onde  $M_u$ ,  $M_d$  e  $M_l$  são, respectivamente, o momento resistente, o momento devido à carga acidental e o momento devido à carga permanente. Neste caso,  $M_d = 1350 \text{ kip.in}$  ( $2,36 \cdot 10^6 \text{ kN.m}$ ) e  $M_l = 2700 \text{ kip.in}$  ( $4,72 \cdot 10^6 \text{ kN.m}$ ). Esta restrição pode ser simplificada para:

$$g_{2(x)} = 180 + 7.375 \frac{x_1^2}{x_2} - x_1 x_3 \leq 0 \quad (13)$$

$$x_2 = \{28, 29, \dots, 40\} \text{ in } (\{71, 12; 73, 76; \dots, 101, 6\} \text{ cm})$$

$$5 \text{ in } (12,7 \text{ cm}) \leq x_3 \leq 10 \text{ in } (25,4 \text{ cm})$$

Os valores que a variável  $x_1$  pode assumir podem ser consultados na Tabela 1, abaixo:

Tabela 1- Áreas de aço correspondentes aos valores que a variável discreta  $x_1$  pode assumir.

Tipo de barra	$A_s(\text{in}^2)$	Tipo de barra	$A_s(\text{in}^2)$	Tipo de barra	$A_s(\text{in}^2)$	Tipo de barra	$A_s(\text{in}^2)$
1#4	0.2	6#5	1.86	9#6	3.95	9#8	7.11
1#5	0.31	10#4,2#9	2	4#9	3.96	12#7	7.2
2#4	0.4	7#5	2.17	13#5	4	13#7	7.8
1#6	0.44	11#4,5#6	2.2	7#7	4.03	10#8	7.9
3#4,1#7	0.6	3#8	2.37	14#5	4.2	8#9	8
2#5	0.62	12#4,4#7	2.4	10#6	4.34	14#7	8.4
1#8	0.79	8#5	2.48	15#5	4.4	11#8	8.69
4#4	0.8	13#4	2.6	6#8	4.65	15#7	9
2#6	0.88	6#6	2.64	8#7	4.74	12#8	9.48
3#5	0.93	9#5	2.79	11#6	4.8	13#8	10.27
5#4,1#9	1	14#4	2.8	5#9	4.84	11#9	11

Tipo de barra	$A_s (in^2)$	Tipo de barra	$A_s (in^2)$	Tipo de barra	$A_s (in^2)$	Tipo de barra	$A_s (in^2)$
6#4,2#7	1.2	15#4,5#7,3#9	3	12#6	5	14#8	11.06
4#5	1.24	7#6	3.08	9#7	5.28	15#8	11.85
3#6	1.32	10#5	3.10	7#8	5.4	12#9	12
7#4	1.4	4#8	3.16	13#8	5.53	13#9	13
5#5	1.55	11#5	3.41	10#7,6#9	5.72	14#9	14
2#8	1.58	8#6	3.52	14#6	6	15#9	15
8#4	1.6	6#7	3.6	8#8	6.16		
4#6	1.76	12#5	3.72	15#6,11#7	6.32		
9#4,3#7	1.8	5#8	3.86	7#9	6.6		

Tabela 2- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga biapoçada.

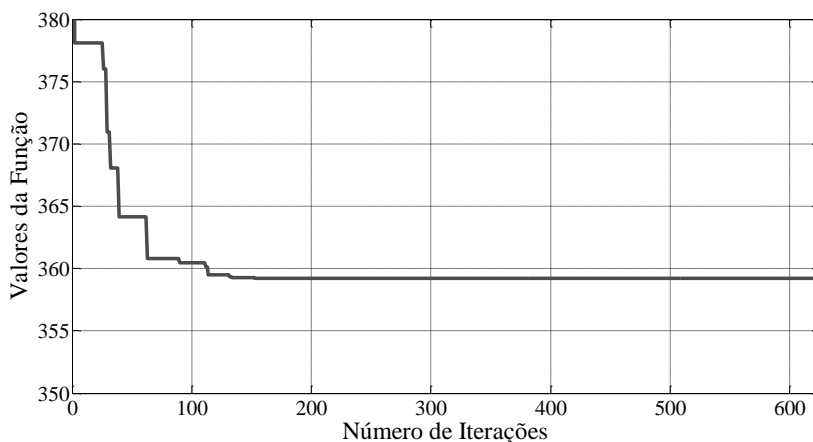
Referência	Amir e Hasegawa	Shih e Yang	Yun	Montes e Oceña	Gandomi et al	Presente estudo	
Método	SD-RC	GHN-ALM	GHN-EP	GA	GA-FL	BFO	BSA-MPA
$f_{min}$	374.2	362.2455	362.00648	366.1459	364.8541	376.2977	359.2080
X1	7.8	6.6	6.32	7.20	6.16	N/A	6.32
X2	31	33	34	32	35	N/A	34
X3	7.79	8.495227	8.637180	8.0451	8.7500	N/A	8.5000
g1	-4.2012	0.0159	-0.7745	-2.8779	-3.6173	N/A	-0.2241
g2	-0.0205	-0.1155	-0.0635	-0.0224	0	N/A	0
AFO	396	N.A.	N.A.	100000	100000	30000	25000

Tabela 3- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga biapoiada.

Ref	Metódo	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Gandomi et al	FA	669.150	460.706	359.208	80.7387	25000
Presente estudo	BSA-MPA	359.2081	359.2080	359.2080	5.5582E-06	25000

Os resultados da otimização e da análise estatística estão detalhados nas Tabelas 2 e 3. Na Tabela 2 pode-se observar que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA corresponde ao valor numérico do mínimo global encontrado pelo algoritmo Firefly (FA), embora os pontos correspondentes aos valores numéricos das variáveis de projeto dos dois algoritmos sejam diferentes. Já os parâmetros estatísticos apresentados na Tabela 3 permitem concluir que o algoritmo BSA-MPA é mais eficiente que o FA na resolução do problema da viga biapoiada para as calibrações adotadas nos dois algoritmos, pois apresentou média e desvio padrão inferiores.

Figura 21- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da viga biapoiada.



Nota-se no gráfico da Figura 21 que a convergência do algoritmo BSA para o problema da viga biapoiada se deu relativamente cedo, após aproximadamente 15% das iterações.

## 5.2 Problema da viga telescópica

A viga telescópica engastada observada na Figura 22 deve ser projetada de tal forma que se obtenha o mínimo volume. Este problema foi originalmente proposto por Thanedar e Vanerplaats (1995). A viga é composta por cinco segmentos de seção transversal variável, já que a altura e a largura da seção transversal de cada segmento são definidas como variáveis de projeto. O problema em questão possui 10 variáveis de otimização. A função de custo do problema pode ser escrita como:

Minimizar o volume simplificado pelo comprimento de cada segmento, expresso por:

$$f(x) = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9 + x_{10}x_{11}x_{12} + x_{13}x_{14}x_{15} \quad (14)$$

Sujeita às seguintes restrições de tensão, deslocamento e geometria:

$$g_{1(x)} = \frac{6Pl_5}{b_5h_5^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_{2(x)} = \frac{6P(l_5+l_4)}{b_4h_4^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_{3(x)} = \frac{6P(l_5+l_4+l_3)}{b_3h_3^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_{4(x)} = \frac{6P(l_5+l_4+l_3+l_2)}{b_2h_2^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_{5(x)} = \frac{6P(l_5+l_4+l_3+l_2+l_1)}{b_1h_1^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_{6(x)} = \frac{Pl^3}{3E} \left( \frac{1}{I_5} + \frac{7}{I_4} + \frac{19}{I_3} + \frac{37}{I_2} + \frac{61}{I_1} \right) - \Delta_{max} \leq 0 \quad (15)$$

$$g_7(x) = \frac{x_{10}}{x_9} - 20 \leq 0$$

$$g_8(x) = \frac{x_8}{x_7} - 20 \leq 0$$

$$g_9(x) = \frac{x_6}{x_5} - 20 \leq 0$$

$$g_{10}(x) = \frac{x_4}{x_3} - 20 \leq 0$$

$$g_{11}(x) = \frac{x_2}{x_1} - 20 \leq 0$$

O espaço de projeto possui seis variáveis discretas (as dimensões das seções transversais dos três primeiros segmentos da viga) e é definido por:  $b_1: \{1,2,3,4,5\}$ ,  $b_2, b_3: \{2.4, 2.6, 2.8, 3.1\}$ ,  $h_1, h_2: \{45, 50, 55, 60\}$ ,  $h_3: \{30, 31, \dots, 65\}$ ,  $1 \leq b_4, b_5 \leq 5$ ,  $30 \leq h_4, h_5 \leq 65$ . Todas as dimensões são expressas em cm. Os valores das constantes envolvidas na formulação do problema estão listadas na Tabela 4, a seguir.

Figura 22- Problema da viga telescópica.

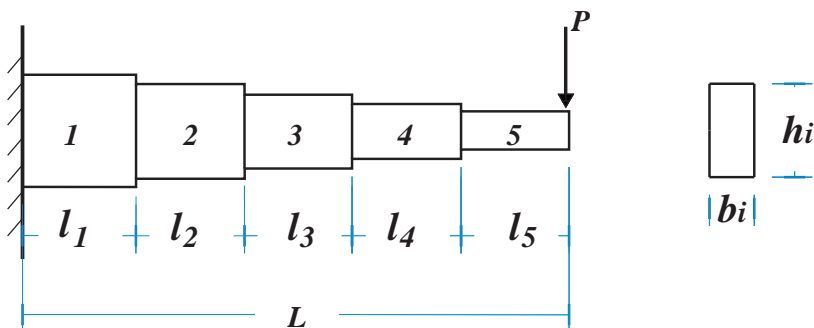


Tabela 4- Parâmetros envolvidos na formulação do problema da viga telescópica.

Constante	Descrição	Valor
$P$	Carga concentrada	50000 ( $N$ )
$\sigma_d$	Tensão de flexão de projeto	14000 ( $N/cm^2$ )
$E$	Módulo de elasticidade	$2 \times 10^7$ ( $N/cm^2$ )
$\Delta_{max}$	Deflexão admitida	2.7 ( $cm$ )
$L$	Comprimento total da viga	500 ( $cm$ )

Tabela 5- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga telescópica.

Ref	Método	AFO	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	Objetivo
Chen e Chen (2009)	RNES <sub>1</sub>	12000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.311	43.108	1.822	34.307	64269.59
	RNES <sub>2</sub>	12000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.267	43.797	1.849	34.282	64322.43
	RNEA <sub>3</sub>	12000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.348	42.804	1.783	34.753	64299.11
	RNES <sub>4</sub>	12000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.491	41.51	2.113	33.231	65416.90
Lamberti e Pappalettere (2003)	DOT	N.A.							N.A.				65391.59
	SLP	N.A.							N.A.				65451.50
	MLD-SLP	N.A.							N.A.				65352.20
	C/RU	N.A.	4	62	3.1	60	2.6	55	2.205	44.09	1.751	35.03	73555
Tanedar e Vanderplaats (1995)	PD	N.A.	3	60	3.1	55	2.6	50	2.276	45.528	1.75	34.995	64537
	LAD	N.A.	3	60	3.1	55	2.6	50	2.262	45.233	1.75	34.995	64403
	CAD	N.A.	3	60	3.1	55	2.6	50	2.279	45.553	1.75	35.004	64403
Erbatur et al (2000)	GA1	N.A.	3	60	3.1	55	2.6	50	2.3	45.5	1.8	35	64558
	GA2	10000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.27	45.25	1.75	35	64447

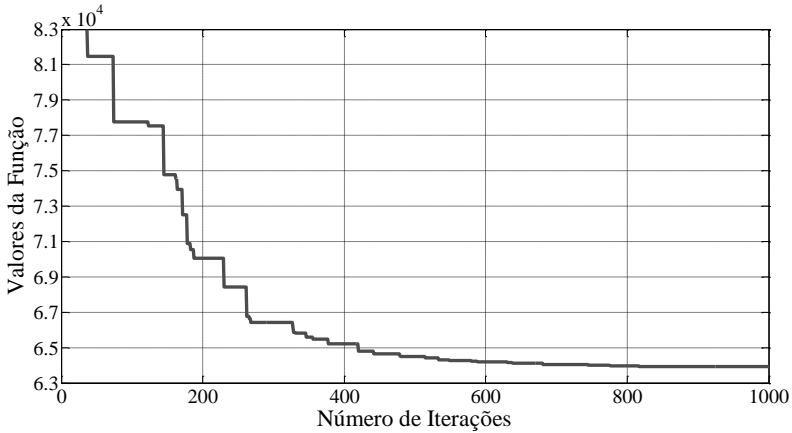
Ref	Método	AFO	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	Objetivo
Lemonge e Barbosa (2004)	GA- APM	10000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.289	45.626	1.793	34.593	64698.56
Bernadino et al (2007)	AIS-GA	35000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.235	44.395	2.004	32.879	65559.6
	AIS- GA-C	35000	3	60	3.1	60	2.6	50	2.311	43.186	2.225	31.250	66533.47
Gandomi et al (2010)	FA	50000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.205	44.091	1.750	34.995	63893.52
Presente estudo	BSA- MPA	50000	3	60	3.1	55	2.6	50	2.2053	44.0874	1.750	34.9943	63896.2328

Tabela 6- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga telescópica.

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Gandomi et al (2010)	FA	64262.99420	64144.75312	63893.52578	175.91879	50000
Presente estudo	BSA-MPA	63896.23277	63896.23277	63896.23277	0	50000

Os resultados da otimização e da análise estatística estão detalhados nas Tabelas 5 e 6. Na Tabela 5 pode-se observar que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA é 0,04% superior ao valor numérico do mínimo global encontrado pelo algoritmo FA e 2,23% superior ao do MLD-SLP. Entretanto, o pior resultado, a média e o desvio padrão encontrados para cem rodadas do algoritmo BSA-MPA são inferiores que os encontrados pelo FA, estes parâmetros podem ser considerados como uma medida de eficiência do algoritmo, pois indicam que para um número pequeno de execuções dos dois algoritmos é mais provável que o valor do mínimo global encontrado pelo BSA-MPA seja inferior ao encontrado pelo FA. Em relação ao MLD-SLP nada se pode afirmar, pois o autor não apresentou os parâmetros estatísticos referentes ao experimento realizado com o algoritmo.

Figura 23- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.



### 5.3 Problema da treliça de três barras

O problema da treliça de três barras outro dos problemas testes de minimização com restrição que serão estudados neste trabalho. A formulação do problema é expressa da seguinte maneira:

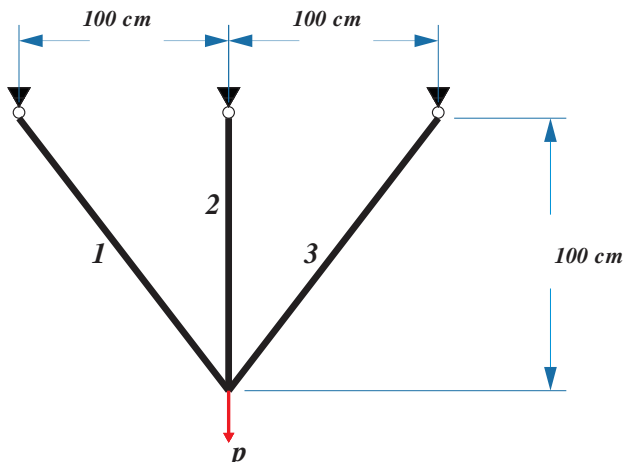
Minimizar o volume da treliça, expresso por:

$$f(x) = (2\sqrt{2}x_1 + x_2) \times l \quad (16)$$

Onde  $x_1$  corresponde a área das barras 1 e 3 e  $x_2$  é a área da barra 2, a Figura 24, abaixo, ilustra o problema das treliça de três barras:



Figura 24- Problema da treliça de três barras.



Sujeita às seguintes restrições de tensão:

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= \frac{\sqrt{2x_1 + x_2}}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}} p - \sigma \leq 0 \\
 g_2(x) &= \frac{x_2}{\sqrt{2x_1^2 + 2x_1x_2}} p - \sigma \leq 0 \\
 g_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x_2 + x_1}} p - \sigma \leq 0 \\
 0 &\leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$l = 100 \text{ cm}, \quad p = 2 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma = 2 \text{ kN/cm}^2$$

Na Tabela 7, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 8. Os resultados do BSA-MPA correspondem a uma população de dez indivíduos,  $t_{pop}=22$ , e um número de iterações igual a quinhentos,  $iterações=227$ .

Tabela 7- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da treliça de três barras.

	DEDS Zhang et al (2008)	PSO-DE Liu et al (2010)	MBA Sadollah et al (2013)	BSA-MPA (5000 AFO)	BSA-MPA (17000 AFO)
X1	0.78867513	0.7886751	0.7885650	0.7886934	0.7886751
X2	0.40824828	0.4082482	0.4085597	0.4081964	0.4082483
g1(X)	1.77E-08	-5.29E-11	-5.29E-11	-5.69135E-11	0
g2(X)	-1.4641016	-1.4637475	-1.4637475	-1.4641605	-1.4641015
g3(X)	-0.53589836	-0.5362524	-0.5362524	-0.5358394	-0.5358984
f(X)	263.8958434	263.8958433	263.8958522	263.8958436	263.8958433

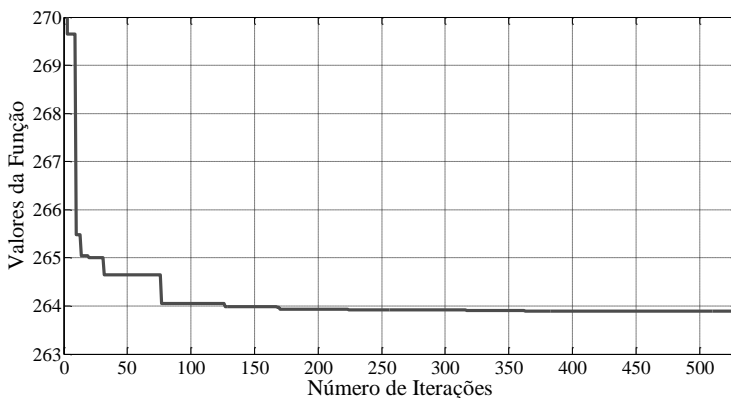
Tabela 8- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da treliça de três barras.

Ref	Método	Pior resultado	Media	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Ray e Liew (2003)	SC	263.969756	263.903356	263.895846	1.3E-02	17,610
Liu et al (2010)	PSO-DE	263.895843	263.895843	263.895843	4.5E-10	17,600
Zhang et al (2008)	DEDS	263.895849	263.895843	263.895843	9.7E-07	15,000
Wang et al (2009)	HEAA	263.896099	263.895865	263.895843	4.9E-05	15,000
Sadollah et al (2013)	MBA	263.915983	263.897996	263.895852	3.93E-03	13,280
	BSA-MPA	263.8958434	263.8958433	263.8958433	3.6796e-009	17,600
Presente estudo	BSA-MPA	263.8958527	263.8958436	263.8958433	3.5973E-07	13,000
	BSA-MPA	263.900585	263.896403	263.8958436	9.64801E-04	5,000

Na Tabela 7 pode-se observar que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para um número de avaliações da função objetivo de 17.600 é inferior ao encontrado pelo *Mine Blast Algorith*m (MBA), porém para um AFO equivalente ao utilizado no MBA, o mínimo global

do *Mine Blast* é inferior. Com base nos parâmetros apresentados na Tabela 8, pode-se concluir que o pior resultado, a média e o desvio padrão encontrados para cem rodadas do algoritmo BSA-MPA são inferiores que os encontrados pelo MBA mesmo para um AFO igual a 5.000, estes parâmetros podem ser considerados como uma medida de eficiência do algoritmo, pois indicam que para um número pequeno de execuções dos dois algoritmos é mais provável que o valor do mínimo global encontrado pelo BSA associado ao MPA seja inferior ao encontrado pelo FA.

Figura 25 - Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.



Pode-se constatar no gráfico da Figura 25 que os resultados do BSA-MPA convergiram para um resultado próximo ao ótimo antes das 100 primeiras iterações, entretanto o mínimo global só foi encontrado após a metade do número de iterações estipulado.

#### 5.4 Problema do vaso de pressão

No problema do vaso de pressão, proposto por Kannan e Kramer (1994), o objetivo é minimizar o custo total, incluindo custos de material, forma e solda. No problema há quatro variáveis de projeto:  $t_s$  ( $x_1$ , espessura da casca),  $t_h$  ( $x_2$ , espessura da cabeça),  $r$  ( $x_3$ , raio interno) e  $l$  ( $x_4$ , comprimento da seção cilíndrica do vaso de pressão), conforme pode ser observado na Figura 26. As variáveis  $t_s$  ( $x_1$ ) e  $t_h$  ( $x_2$ ) são

variáveis discretas, múltiplas de 0.0625, enquanto  $r$  ( $x_3$ ) e  $l$  ( $x_4$ ) são variáveis contínuas.

Minimizar:

$$f(x) = 0.6224x_1x_2x_3 + 1.7781x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \quad (18)$$

Sujeita às seguintes restrições geométricas:

$$g_1(x) = -x_1 + 0.0193x_3 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_2 + 0.00954x_3 \leq 0 \quad (19)$$

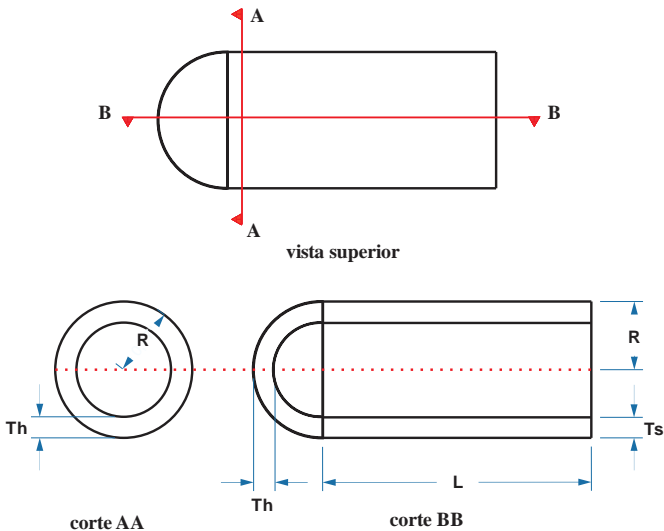
$$g_3(x) = -\pi x_2^2 x_4 - (4/3)\pi x_3^2 + 1296000 \leq 0$$

$$g_4(x) = -x_4 - 240 \leq 0$$

$$0 \leq x_i \leq 100 \text{ in (254 cm)}, \quad i = 1, 2$$

$$10 \text{ in (25,4 cm)} \leq x_i \leq 200 \text{ in (508 cm)}, \quad i = 3, 4$$

Figura 26- Problema do vaso de pressão.



Na Tabela 9, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 10.

Tabela 9 - Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do vaso de pressão.

	GA3 Coello (2000)	GA4 Coello (2002)	CPSO He e Wang (2006)	HPSO He e Wang (2007)	NM- PSO Zahara e Kao (2009)	G- QPSO Coello (2010)	CDE Wang e Cai (2012)	MBA Sadollah (2013)	FA Gandomi et al (2010)	BSA- MPA Presente estudo
X1	0.8125	0.8125	0.8125	0.8125	0.8036	0.8125	0.8125	0.7802	0.75	0.78
X2	0.4375	0.4375	0.4375	0.4375	0.3972	0.4375	0.4375	0.38560	0.375	0.39
X3	40.3239	42.0974	42.0913	42.0984	41.6392	42.0984	42.098411	40.4292	38.86010	0.4041
X4	200.0000	176.6540	176.7465	176.6366	182.4120	176.6372	176.637690	198.4964	221.36547	1.9869
$g^1(X)$	-3.42E-02	-2.01E-03	-1.37E-06	-8.80E-07	3.65E-05	-8.79E-07	-6.67E-07	0	0	-5.42E-8
$g^2(X)$	-5.28E-02	-3.58E-02	-3.59E-04	-3.58E-02	3.79E-05	-3.58E-02	-3.58E-02	0	-0.0043	-4.44E-3
$g^3(X)$	-304.4020	-24.7593	-118.7687	3.1226	-1.5914	-0.2179	-3.705123	-86.3645	-0.0134	-0.060

	GA3 Coello (2000)	GA4 Coello (2002)	CP SO He e Wang (2006)	HP SO He e Wang (2007)	NM- PSO Zahara e Kao (2009)	G- QPSO Coello (2010)	CDE Wang e Cai (2012)	MBA Sadollah (2013)	FA Gandomi et al (2010)	BSA- MPA Presente estudo
g4(X)	-400.0000	-63.3460	-63.2535	-63.3634	-57.5879	-63.3628	-63.362310	-41.5035	-18.6345	-41.3137
f(X)	6288.7445	6059.9463	6061.0777	6059.7143	5930.3137	6059.7208	6059.7340	5889.3216	5850.3831	5901.3821

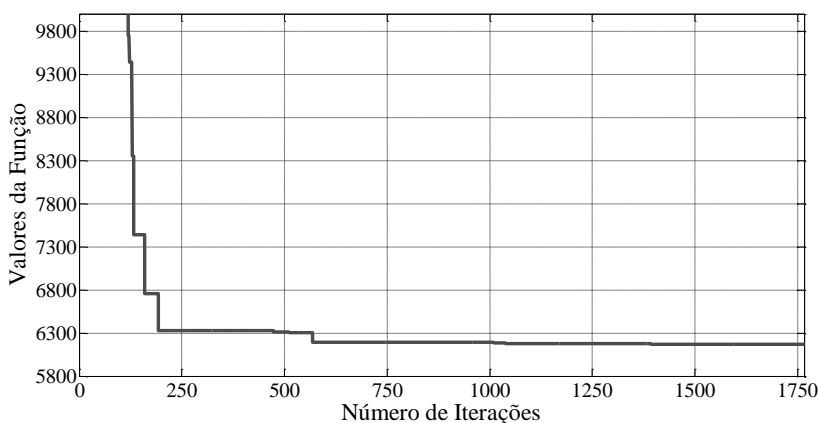
Tabela 10- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do vaso de pressão.

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Coello (2000)	GA3	6308.4970	6293.8432	6288.7445	7.4133	900,000
Coello (2002)	GA4	6469.3220	6177.2533	6059.9463	130.9297	80,000
He e Wang (2006)	CP SO	6363.8041	6147.1332	6061.0777	86.45	240,000
He e Wang (2007)	HP SO	6288.6770	6099.9323	6059.7143	86.20	81,000
Zahara e Kao (2009)	NM- PSO	5960.0557	5946.7901	5930.3137	9.161	80,000
Coello (2010)	G- QPSO	7544.4925	6440.3786	6059.7208	448.4711	8000
Coello (2010)	QPSO	8017.2816	6440.3786	6059.7209	479.2671	8000
Kennedy e Eberhart (1995)	PSO	14076.3240	8756.6803	6693.7212	1492.5670	8000
Wang e Cai (2012)	CDE	6371.0455	6085.2303	6059.7340	43.0130	204,800
Parsopoulos e Vrahatis (2005)	UPSO	N.A	9032.55	6544.27	995.573	100,000
Liu et al (2010)	PSO- DE	N.A	6059.714	6059.714	N.A	42,100
Karaboga e Basturk (2007)	ABC	N.A	6245.308	6059.714	205	30,000
Wang e Cai (2011)	( $\mu$ + $\lambda$ )- ES	N.A	6379.938	6059.7016	210	30,000

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Rao e Patel (2012)	TLBO	N.A	6059.71434	6059.714335	N.A	10,000
Sadollah (2013)	MBA	6392.5062	6200.64765	5889.3216	160.34	70,650
Gandomi et al (2010)	FA	6258.9682	5937.3379	5850.3831	164.54747	25,000
Presente estudo	BSA-MPA	7685.240	6257.8814	5901.3825	285.42	70,650

Nos resultados observados na Tabela 9 pode-se constatar que o BSA-MPA encontrou um mínimo global 0,2% superior ao MBA para um mesmo valor de AFO, igual a 70.650, e 0,8% superior ao FA com AFO de 25.000. Mesmo os parâmetros estatísticos encontrados pelo BSA-MPA para o problema do vaso de pressão são ligeiramente piores que os apresentados para os algoritmos FA e MBA.

Figura 27- Gráfico de convergência obtido pelo BSA para o problema da treliça do vaso de pressão.



Nota-se no gráfico da Figura 27 que os resultados do BSA convergiram para um resultado próximo ao ótimo antes das 250 primeiras iterações, entretanto o mínimo global só foi encontrado após a metade do número de iterações estipulado.

## 5.5 Problema do redutor de velocidade

Neste problema de otimização com restrições (Figura 28) o peso do redutor de velocidade deve ser otimizado respeitando as restrições de tensão devida à flexão do dente da engrenagem, tensão na superfície, deflexão transversal dos eixos e tensões dos eixos (MEZURAMONTES e COELLO, 2005). As variáveis  $x_1$  à  $x_7$  representam a espessura da face ( $b$ ), módulo do dente ( $m$ ), número de dentes ( $z$ ), comprimento do primeiro eixo entre rolamentos ( $l_2$ ) e diâmetros do primeiro ( $d_1$ ) e do segundo eixo ( $d_2$ ), respectivamente.

A terceira variável,  $x_3$  (número de dentes), pode assumir apenas valores inteiros, enquanto todas as outras variáveis são contínuas. A função objetivo está sujeita a 11 restrições, resultando em um problema de alta complexidade.

Minimizar o peso do redutor de velocidade:

$$f(x) = 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) + 7.4777(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \quad (20)$$

Sujeita às restrições:

$$g_{1(x)} = \frac{27}{x_1x_2^2x_3} - 1 \leq 0$$

$$g_{2(x)} = \frac{397.5}{x_1x_2^2x_3^2} - 1 \leq 0$$

$$g_{3(x)} = \frac{1.93x_4^3}{x_2x_6^4x_3} - 1 \leq 0$$

$$g_{4(x)} = \frac{1.93x_5^3}{x_2x_7^4x_3} - 1 \leq 0$$

$$g_{5(x)} = \frac{\left[ (745(x_4/x_2x_3))^2 + 16.9 \times 10^6 \right]^{1/2}}{110x_6^3} - 1 \leq 0$$



$$g_6(x) = \frac{\left[ (745(x_5/x_2x_3))^2 + 157.5 \times 10^6 \right]^{1/2}}{85x_6^3} - 1 \leq 0 \quad (21)$$

$$g_7(x) = \frac{x_2x_3}{40} - 1 \leq 0$$

$$g_8(x) = \frac{5x_2}{x_1} - 1 \leq 0$$

$$g_9(x) = \frac{x_1}{12x_2} - 1 \leq 0$$

$$g_{10}(x) = \frac{1.5x_6 + 1.9}{x_4} - 1 \leq 0$$

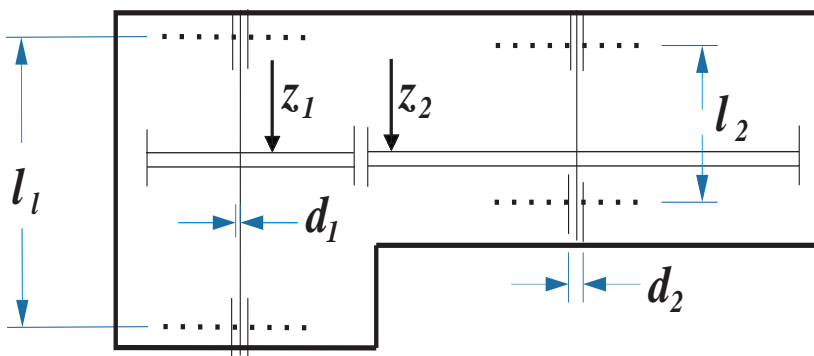
$$g_{11}(x) = \frac{1.1x_7 + 1.9}{x_5} - 1 \leq 0$$

Onde,

$$2.6 \text{ cm} \leq x_1 \leq 3.6 \text{ cm}, \quad 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, \quad 17 \leq x_3 \leq 28, \\ 7.3 \text{ cm} \leq x_4 \leq 8.3 \text{ cm},$$

$$7.3 \text{ cm} \leq x_5 \leq 8.3 \text{ cm}, \quad 2.9 \text{ cm} \leq x_6 \leq 3.9 \text{ cm}, \quad 5.0 \leq x_7 \leq 5.5$$

Figura 28- Problema do redutor de velocidade.



Na Tabela 11, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 12.

Tabela 11- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do redutor de velocidade.

	DEDS Zhang et al (2008)	DELIC Wang e Li (2010)	HEAA Wang et al (2009)	MDE Mezurura- Montes et al (2006)	PSO-DE Liu et al (2010)	MBA Sadollah et al (2013)	BSA-MPA Presente estudo
X1	3.5 + 09	3.5 + 09	3.500022	3.500010	3.5000000	3.500000	3.5000215
X2	0.7 + 09	0.7 + 09	0.70000039	0.700000	0.7000000	0.700000	0.7000000
X3	17	17	17.000012	17	17.0000000	17.000000	17.0000000
X4	7.3 + 09	7.3 + 09	7.300427	7.300156	7.3000000	7.300033	7.3000000
X5	7.715319	7.715319	7.715377	7.800027	7.8000000	7.715772	7.7166986
X6	3.350214	3.350214	3.350230	3.350221	3.350214	3.350218	3.3514863
X7	5.286654	5.286654	5.286663	5.286685	5.2866832	5.286654	5.2866976

	DEDS Zhang et al (2008)	DELC Wang e Li (2010)	HEAA Wang et al (2009)	MDE Mezurura- Montes et al (2006)	PSO-DE Liu et al (2010)	MBA Sadollah et al (2013)	BSA-MPA Presente estudo
f(X)	2994.471066	2994.471066	2994.499107	2996.356689	2996.348167	2994.482453	2994.9884686

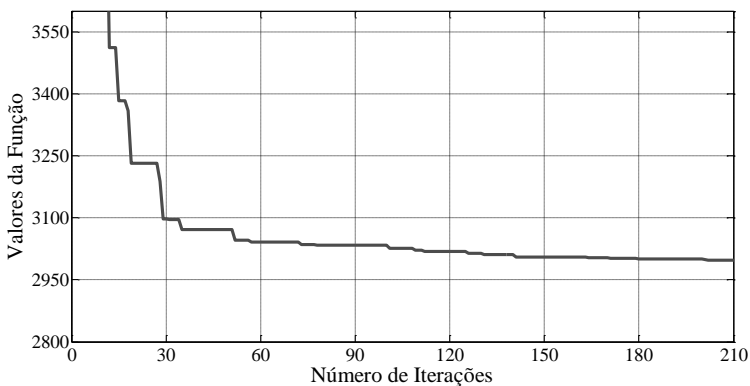
Tabela 12- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do redutor de velocidade.

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Ray e Liew (2003)	SC	3009.964736	3001.758264	2994.744241	4.0	54,456
Liu et al (2010)	PSO-DE	2996.348204	2996.348174	2996.348167	6.4E-06	54,350
Wang e Li (2010)	DELC	2994.471066	2994.471066	2994.471066	1.9E-12	30,000
Zhang et al (2008)	DEDS	2994.471066	2994.471066	2994.471066	3.6E-12	30,000
Wang et al (2009)	HEAA	2994.752311	2994.613368	2994.499107	7.0E-02	40,000
Mezurura-Montes et al (2006)	MDE	N.A	2996.367220	2996.356689	8.2E-03	24,000
Wang e Cai (2011)	( $\mu + \lambda$ )-ES	N.A	2996.348	2996.348	0	30,000
Karaboga e Basturk (2007)	ABC	N.A	2997.058	2997.058	0	30,000
Rao e Patel (2012)	TLBO	N.A	2996.34817	2996.34817	0	10,000
Sadollah et al (2013)	MBA	2999.652444	2996.769019	2994.482453	1.56	6,300
Presente estudo	BSA-MPA	3001.242678	2997.2598394	2994.9884686	1.28	6,300

Pode-se observar nas Tabelas 11 e 12, acima, que o melhor resultado disponível na literatura foi encontrado pelo algoritmo DELC, seguido pelo DEFS e pelo MBA, porém os números de AFO dos

algoritmos DELC e DEDS são aproximadamente cinco vezes superior aos do algoritmo MBA. Os resultados encontrados para o BSA-MPA são ligeiramente piores que os encontrados pelo MBA com o mesmo número de AFO, inclusive a média, entretanto o desvio padrão das repostas do BSA-MPA é menor. Assim sendo, é razoável concluir que não há diferença significativa entre os resultados dos dois algoritmos.

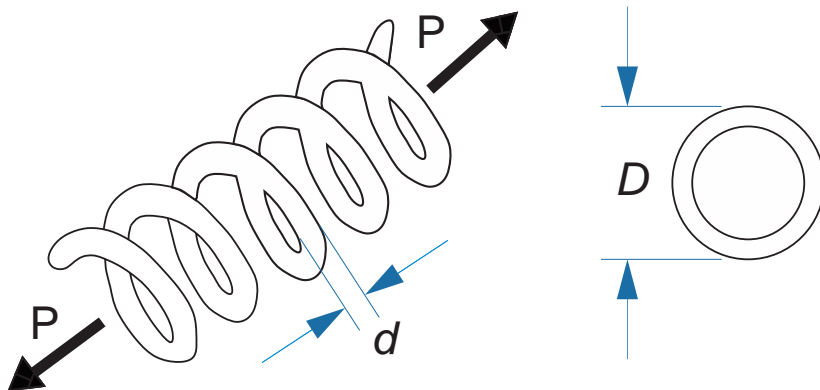
Figura 29- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.



## 5.6 Problema da mola de tração/compressão

O problema da mola de tração/compressão está descrito em Arora (2004), o objetivo deste problema é minimizar o peso ( $f(x)$ ) da peça (Figura 30) sujeita às restrições de mínima deflexão ( $g_1$ ), tensão cisalhante ( $g_2$ ), onda de frequência ( $g_3$ ) e limites do diâmetro exterior e das variáveis de projeto ( $g_4$ ). As variáveis de projeto são o diâmetro do fio  $d(x_1)$ , diâmetro médio da bobina  $D(x_2)$  e número de bobinas ativas  $P(x_3)$ . A Figura 23, abaixo, ilustra o problema em questão.

Figura 30- Problema da mola de tração/compressão.



Minimizar:

$$f(x) = (x_3 + 2)x_2x_1^2 \quad (22)$$

Sujeita às restrições:

$$g_1(x) = 1 - (x_2^3x_3/71785x_1^4) \leq 0$$

$$g_2(x) = 4x_2^2 - x_1x_2/12566(x_2x_1^3 - x_1^4) + (1/51808x_1^2) - 1 \leq 0 \quad (23)$$

$$g_3(x) = 1 - (140.45x_1/x_2^2x_3) \leq 0$$

$$g_4(x) = (x_2 + x_1)/1.5 - 1 \leq 0$$

$$0.05 \text{ cm} \leq x_1 \leq 2 \text{ cm}$$

$$0.25 \text{ cm} \leq x_2 \leq 1.3 \text{ cm}$$

$$2 \leq x_3 \leq 15$$

Na Tabela 13, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 14.

Tabela 13- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da mola de tração/compressão.

BSA-MPA Presente estudo	0.052821	0.384509	9.873484	-0.00448	-9.88E-5	-4.08207	-0.70844
MBA Sadollah et al (2013)	0.051656	0.355940	11.344665	0	0	-4.052248	-0.728268
HEAA Wang et al (2009)	0.051689	0.356729	11.288293	3.96E-10	-3.59E-10	-4.053808	-0.727720
G-QPSO Coello (2010)	0.051515	0.352529	11.538862	-4.83E-05	-3.57E-05	-4.0455	-0.73064
NM-PSO Zahara e Kao (2009)	0.051620	0.356498	11.333272	1.01E-03	9.94E-04	-4.061859	-0.728588
HPSO He e Wang (2007)	0.051706	0.357126	11.265083	-3.06E-06	1.39E-06	-4.054583	-0.727445
CPSCO He e Wang (2006)	0.051728	0.357644	11.244543	-8.25E-04	-2.52E-05	-4.051306	-0.727085
DEDS Zhang et al (2008)	0.051689	0.356717	11.288965	1.45E-09	-1.19E-09	-4.053785	-0.727728
DELIC Wang e Li (2010)	0.051689	0.356717	11.288965	-3.40E-09	2.44E-09	-4.053785	-0.727728
Wang e Li (2010)	X1	X2	X3	g1(X)	g2(X)	g3(X)	g4(X)

Wang e Li (2010)	DELIC Wang e Li (2010)	DEDS Zhang et al (2008)	CP SO He e Wang (2006)	HP SO He e Wang (2007)	NM-PSO Zahara e Kao (2009)	G-QPSO Coello (2010)	HEAA Wang et al (2009)	MBA Sadollah et al (2013)	BSA-MPA Presente estudo
f(X)	0.012665	0.012665	0.0126747	0.0126652	0.0126302	0.012665	0.012665	0.012665	0.012738

Nos resultados observados na Tabela 13 pode-se constatar que o BSA-MPA encontrou um mínimo global 0,5% superior ao MBA para um mesmo valor de AFO, igual a 7.650. Os algoritmos G-QPSO e QPSO apresentaram resultados inferiores ao BSA-MPA para um AFO igual a 7650. Mesmo os parâmetros estatísticos encontrados pelo BSA-MPA para o problema da mola de tração/compressão são ligeiramente piores que os apresentados para o algoritmo MBA.

Figura 31- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da mola de tração/compressão.

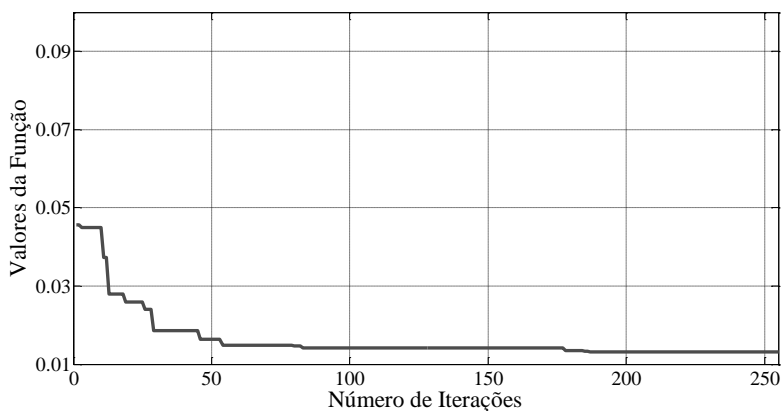


Tabela 14- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da mola de tração/compressão.

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Coello (2000)	GA3	0.0128220	0.0127690	0.0127048	3.94E-05	900,000
Coello (2002)	GA4	0.0129730	0.0127420	0.0126810	5.90E-05	80,000
Coello e Becerra (2004)	CAEP	0.0151160	0.0135681	0.0127210	8.42E-04	50,020
He e Wang (2006)	CPSO	0.0129240	0.0127300	0.0126747	5.20E-04	240,000
He e Wang (2007)	HPSO	0.0127190	0.0127072	0.0126652	1.58E-05	81,000
Zahara e Kao (2009)	NM-PSO	0.0126330	0.0126314	0.0126302	8.47E-07	80,000
Coello (2010)	G-QPSO	0.017759	0.013524	0.012665	0.001268	2000
Coello (2010)	QPSO	0.018127	0.013854	0.012669	0.001341	2000
Kennedy e Eberhart (1995)	PSO	0.071802	0.019555	0.012857	0.011662	2000
Wang e Cai (2011)	DE	0.012790	0.012703	0.0126702	2.7E-05	204,800
Wang e Li (2010)	DELIC	0.012665575	0.012665267	0.012665233	1.3E-07	20,000
Zhang et al (2008)	DEDS	0.012738262	0.012669366	0.012665233	1.3E-05	24,000
Wang et al (2009)	HEAA	0.012665240	0.012665234	0.012665233	1.4E-09	24,000
Liu et al (2010)	PSO-DE	0.012665304	0.012665244	0.012665233	1.2E-08	24,950
Ray e Liew (2003)	SC	0.016717272	0.012922669	0.012669249	5.9E-04	25,167
Parsopoulos e Vrahatis (2005)	UPSO	N.A	0.02294	0.01312	7.20E-03	100,000
Wang e Cai (2012)	CDE	N.A	0.012703	0.01267	N.A	240,000
Wang e Cai (2011)	( $\mu + \lambda$ )-ES	N.A	0.013165	0.012689	3.9E-04	30,000
Karaboga e Basturk (2007)	ABC	N.A	0.012709	0.012665	0.012813	30,000
Rao e Patel (2012)	TLBO	N.A	0.01266576	0.012665	N.A	10,000
Sadollah et al (2013)	MBA	0.012900	0.012713	0.012665	6.30E-05	7650



Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Presente estudo	BSA-MPA	0.014348	0.013201	0.012738	8.7336e-004	7650

Pode-se constatar no gráfico da Figura 31 que os resultados do BSA-MPA convergiram para um resultado próximo ao ótimo antes das 50 primeiras iterações, entretanto o mínimo global só foi encontrado após aproximadamente 65% do número de iterações estipulado.

### 5.7 Problema da viga soldada

Este problema, proposto por Coello (2002), tem sido utilizado com frequência como problema de referência (*benchmark problem*). Neste problema uma viga soldada, sujeita às restrições de tensão cisalhante ( $\tau$ ), tensão devida à flexão ( $\sigma$ ), carga de flambagem na barra ( $P_b$ ) e deflexão na viga ( $\delta$ ) e restrições laterais, é projetada para um custo mínimo. Há quatro variáveis de projeto para este problema, incluindo  $h(x_1)$ ,  $l(x_2)$ ,  $t(x_3)$  e  $b(x_4)$ , como mostrado na Figura 32.

Minimizar:

$$f(x) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14 + x_2) \quad (24)$$

Sujeita às restrições:

$$g_1(x) = \tau(x) - \tau_{max} \leq 0$$

$$g_2(x) = \sigma(x) - \sigma_{max} \leq 0$$

$$g_3(x) = x_1 - x_4 \leq 0$$

$$g_4(x) = 0.10471x_1^2 + 0.04811x_3x_4(14 + x_2) - 5 \leq 0 \quad (25)$$

$$g_5(x) = 0.125 - x_1 \leq 0$$

$$g_6(x) = \delta(x) - \delta_{max} \leq 0$$

$$g_7(x) = P - P_c(x) \leq 0$$

$$0.1 \text{ in } (0,254 \text{ cm}) \leq x_1 \leq 2 \text{ in } (5,08 \text{ cm}), \quad i = 1,4$$

$$0.1 \text{ in } (0,254 \text{ cm}) \leq x_1 \leq 10 \text{ in } (25,4 \text{ cm}), \quad i = 2,3$$

Onde:

$$\tau(x) = \sqrt{\tau' + 2\tau' \tau'' \frac{x_2}{2R} + (\tau'')^2} \quad (26)$$

$$\tau' = \frac{P}{\sqrt{2}x_1x_2} \quad (27)$$

$$\tau'' = \frac{MR}{J} \quad (28)$$

$$M = P \left( L + \frac{x_2}{2} \right) \quad (29)$$

$$R = \sqrt{\frac{x_2^2}{4} + \left( \frac{x_1x_3}{2} \right)^2} \quad (30)$$

$$J = 2 \left\{ \sqrt{2} x_1x_2 \left[ \frac{x_2^2}{12} + \left( \frac{x_1 + x_3}{2} \right)^2 \right] \right\} \quad (31)$$

$$\sigma(x) = \frac{6PL}{x_4x_3^2} \quad (32)$$

$$\delta(x) = \frac{4PL^3}{Ex_3^3x_4} \quad (33)$$

$$P_c(x) = \frac{4.013E\sqrt{(x_3^2x_4^6/36)}}{L^2} \cdot \left( 1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{E}{4G}} \right) \quad (34)$$

$$P = 6000 \text{ lb } (2,72 \cdot 10^3 \text{ kg}), \quad L = 14 \text{ in } (35,56 \text{ cm})$$

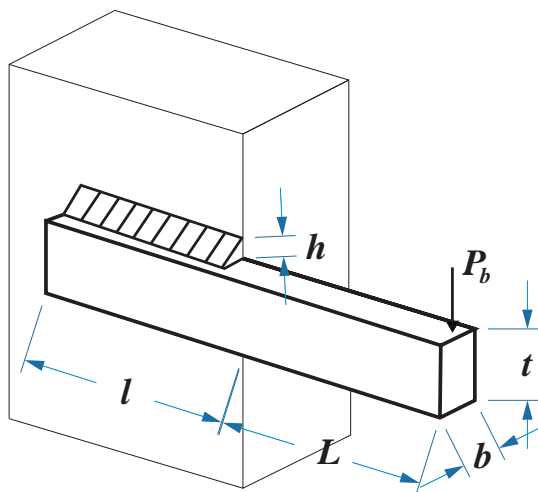
$$E = 30 \cdot 10^6 \text{ psi } (206,84 \cdot 10^6 \text{ kPa}),$$

$$G = 12 \cdot 10^6 \text{ psi } (82,74 \cdot 10^6 \text{ kPa})$$

$$\tau_{max} 13600 \text{ psi } (9,38 \cdot 10^4 \text{ kPa}), \quad \sigma_{max} = 30000 \text{ psi } (2,07 \cdot 10^5 \text{ kPa})$$

$$\delta_{max} = 0,25 \text{ in } (0,635 \text{ cm}).$$

Figura 32- Problema da viga soldada.



Na Tabela 15, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 16.

Nos resultados apresentados nas Tabelas 15 e 16 pode-se observar que o mínimo global encontrado pelo BSA tem valor numérico superior a três pontos de mínimo global encontrados pelos algoritmos utilizados em outros trabalhos. Com um AFO igual ou menor, os algoritmos  $(\mu + \lambda)$ -ES, ABC, TLBO e MBA obtiveram um mínimo global inferior ao do BSA, entretanto, os parâmetros estatísticos do BSA denotam uma melhor eficiência deste algoritmo em relação aos algoritmos  $(\mu + \lambda)$ -ES e ABC. O desvio padrão do algoritmo TLBO não foi informado, comprometendo assim a comparação do desempenho. É

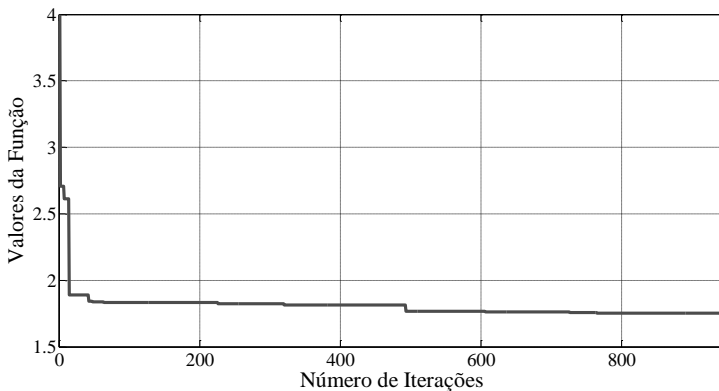
importante notar que para um AFO de 66.600 o PSO-DE apresentou melhores resultados que o BSA-MPA. O MBA se mostrou o mais eficiente dentre os algoritmos testados.

Tabela 15- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga engastada.

BSA-MPA Presente estudo	0.2058	3.4697	-0.5707	-3.64E-007	-3.4328	-0.0808	-0.2355
FA Gandomi et al (2010)	0.2015	3.562	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
MBA Sadollah et al (2013)	0.205729	3.470493	-0.016911	-2.40E-07	-3.432982	-0.080729	-0.235540
NM-PSO Zahara e Kao (2009)	0.20583	3.468338	-0.053122	0.0001	-3.433169	-0.08083	-0.235540
HP-PSO He e Wang (2007)	0.20573	3.470489	-0.053122	0	-3.432981	-0.08073	-0.235540
CP-PSO He e Wang (2006)	0.202369	3.544214	-1.247467	-1.49E-03	-3.429347	-0.079381	-0.235536
CAEP Coello e Becerra (2004)	0.205700	3.470500	4.481548	0	-3.433213	-0.080700	-0.235538
CP-PSO He e Wang (2006)	0.202369	3.544214	-78.81407	-3.35E-03	-3.424572	-0.077369	-0.235595
HGA Yuan e Qian (2010)	0.2057	3.4705	4.481548	0	-3.433213	-0.080700	-0.235538
GA4 Coello (2002)	0.205986	3.471328	-0.231747	-5E-04	-3.430044	-0.080986	-0.235514
	X1(h)	X2(l)	g2(X)	g3(X)	g4(X)	g5(X)	g6(X)

$f(x)$	$g7(x)$	
1.728226	-58.646888	GA4 Coello (2002)
1.724852	2.603347	HGA Yuan e Qian (2010)
1.728024	-4.472858	CPSO He e Wang (2006)
1.724852	2.603347	CAEP Coello e Beccerra (2004)
1.728024	-11.68135	CPSO He e Wang (2006)
1.724852	-0.031555	HPSO He e Wang (2007)
1.724717	-0.031555	NM-PSO Zahara e Kao (2009)
1.724853	-0.001464	MBA Saddollah et al (2013)
1.73121	N.A.	FA Gandomi et al (2010)
1.7251	-0.0546	BSA-MPA Presente estudo

Figura 33- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.



No gráfico da Figura 26 pode-se que os resultados do BSA-MPA convergiram para um resultado próximo ao ótimo logo nas primeiras iterações, entretanto o mínimo global só foi encontrado após aproximadamente 75% do número de iterações estipulado.

Tabela 16- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema da viga engastada.

Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Coello (2000)	GA3	1.785835	1.771973	1.748309	1.12E-02	900,000
Coello (2002)	GA4	1.993408	1.792654	1.728226	7.47E-02	80,000
Coello e Becerra (2004)	CAEP	3.179709	1.971809	1.724852	4.43E-01	50,020
He e Wang (2006)	CPSO	1.782143	1.748831	1.728024	1.29E-02	240,000
He e Wang (2007)	HPSO	1.814295	1.749040	1.724852	4.01E-02	81,000
Liu et al (2010)	PSO-DE	1.724852	1.724852	1.724852	6.7E-16	66,600
Zahara e Kao (2009)	NM-PSO	1.733393	1.726373	1.724717	3.50E-03	80,000
Coello (2000)	MGA	1.9950	1.9190	1.8245	5.37E-02	N.A
Ray e Liew (2003)	SC	6.3996785	3.0025883	2.3854347	9.6E-01	33,095
Wang e Cai (2011)	DE	1.824105	1.768158	1.733461	2.21E-02	204,800
Parsopoulos e Vrahatis (2005)	UPSO	N.A	2.83721	1.92199	0.683	100,000
Wang e Cai (2012)	CDE	N.A	1.76815	1.73346	N.A	240,000
Wang e Cai (2011)	( $\mu + \lambda$ )-ES	N.A	1.777692	1.724852	8.8E-02	30,000
Karaboga e Basturk (2007)	ABC	N.A	1.741913	1.724852	3.1E-02	30,000
Rao e Patel (2012)	TLBO	N.A	1.72844676	1.724852	N.A	10,000
Sadollah et al (2013)	MBA	1.724853	1.724853	1.724853	6.94E-19	47,340
Gandomi et al (2010)	FA	2.3455793	1.8786560	1.7312065	0.2677989	50,000
Presente estudo	BSA-MPA	1.7268	1.7252	1.7251	3.32E-004	47,340

## 5.8 Problema do trem de engrenagens

Este problema visa minimizar o custo da razão de engrenagens de um trem de engrenagens, como mostrado na Figura 34. As variáveis de projeto são discretas, pois cada engrenagem deve possuir um número inteiro de dentes.

A variáveis de projeto do problema são  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $n_D$  e  $n_F$ , que são denotadas como  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ , respectivamente.

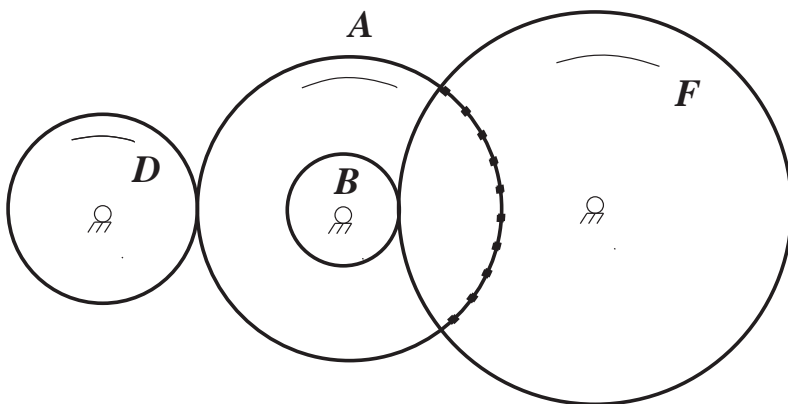
Minimizar:

$$f(x) = \left( (1/6.931) - (x_3 x_2 / x_1 x_4) \right)^2 \quad (35)$$

Sujeito às seguinte restrição:

$$12 \leq x_i \leq 60$$

Figura 34- Problema do trem de engrenagens.



Na Tabela 17, abaixo, pode-se observar os valores de mínimo encontrados para a função objetivo, bem como as variáveis de projeto correspondentes a estes mínimos. Os resultados estatísticos obtidos a

partir de diferentes algoritmos de otimização podem ser observados na Tabela 18.

Tabela 17- Comparação dos resultados ótimos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do trem de engrenagens.

	ABC Karaboga e Basturk (2007)	MBA Sadollah et al (2013)	BSA-MPA Presente estudo
X1	49	43	43
X2	16	16	16
X3	19	19	19
X4	43	49	49
f(x)	2.700857E-12	2.700857E-12	2.700857E-012

Tabela 18- Comparação dos resultados estatísticos obtidos pelo BSA-MPA e em estudos anteriores para o problema do trem de engrenagens.

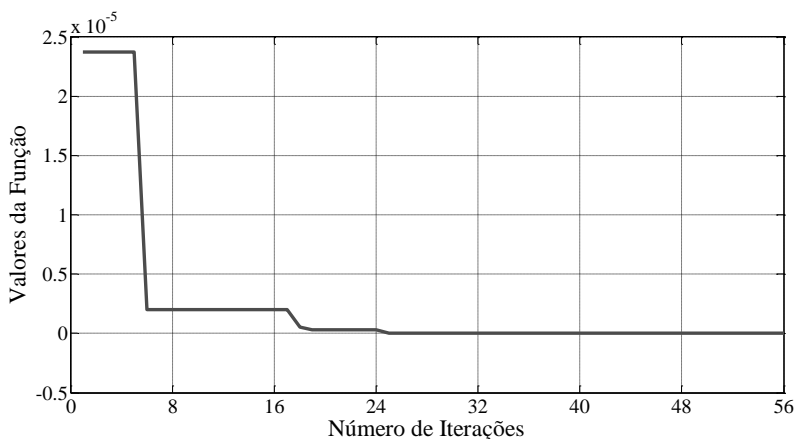
Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Parsopoulos e Vrahatis (2005)	UPSO	N.A	3.80562E-08	2.700857E-12	1.09E-07	100,000
Karaboga e Basturk (2007)	ABC	N.A	3.641339E-10	2.700857E-12	5.52E-10	-
Sadollah et al (2013)	MBA	2.062904E-08	2.471635E-09	2.700857E-12	3.94E-09	1120



Ref	Método	Pior resultado	Média	Melhor resultado	Desvio Padrão	AFO
Presente estudo	BSA-MPA	5.456111e-07	4.064477e-08	2.700857e-E12	6.9056e-008	1120

Para o problema do trem de engrenagens, o algoritmo BSA-MPA encontrou o mesmo valor de mínimo global que os algoritmos testados, entretanto, o algoritmo ABC encontrou um ponto com coordenadas diferentes. Para um mesmo AFO, o BSA-MPA encontrou o mesmo ponto de mínimo global que o MBA. Karaboga e Basturk não informaram o número de avaliações da função objetivo utilizado em seu trabalho com o algoritmo ABC, dificultando a comparação dos resultados. Pode-se afirmar que os resultados estatísticos encontrados pelos algoritmos avaliados são equivalentes no que diz respeito aos valores de mínimo global.

Figura 35- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema da treliça de três barras.



Nota-se no gráfico de convergência da Figura 35 obtido pelo BSA-MPA para o problema do trem de engrenagens que a convergência se deu após aproximadamente 40% do número de iterações estipulado.

## 6. EXEMPLOS PRÁTICOS DE ENGENHARIA FORMULADOS PELO MEF

Nesta seção, a variante do BSA adaptada para resolução de problemas com restrição, o BSA-MPA, será testada na resolução de problemas *benchmark* de otimização de treliças, a fim de verificar sua eficiência aplicado à problemas de elevada complexidade.

Para os exemplos estudados nessa seção o algoritmo em questão foi associado a um código de elementos finitos em ambiente MATLAB. Esta associação permite a aplicação de rotinas de otimização a um grande número de problemas do dia a dia de projetos de engenharia.

Assim como nos experimentos numéricos da seção anterior, para cada exemplo, cem rodadas independentes do BSA foram realizadas, a fim de se realizar um estudo estatístico de sua convergência e possibilitar uma comparação mais justa com outros algoritmos meta-heurísticos, a comparação se deu através das médias e desvios padrão encontrados. Para solução destes problemas foi utilizado  $F = 3 \cdot rndn$ , onde  $rndn \sim N(0,1)$  ( $N$  é a distribuição normal). Os números de avaliações das funções objetivo (AFO = ao número de iterações multiplicado pelo tamanho da população) foram estabelecidos a fim de se comparar os resultados do BSA com outros resultados disponíveis nas referências literárias, o algoritmo se mostrou robusto para um tamanho de população igual a 10% do número de iterações. O ajuste do parâmetro *índice de mistura* do algoritmo BSA foi definido com base num processo de tentativa e erro, de onde se concluiu que, para os problemas estudados, os melhores resultados correspondem a um *índice de mistura* entre 0,75 e 1, para simplificação, optou-se por adotar o valor 1 em todos os problemas resolvidos.

### 6.1 Otimização de estruturas treliçadas

Neste tópico serão apresentados os resultados encontrados pelo BSA-MPA para alguns exemplos de otimização de treliças amplamente utilizados por outros autores da literatura.

A estrutura geral de funcionamento do código de elementos finitos associado ao algoritmo BSA-MPA pode ser visualizada no fluxograma da Figura 36, abaixo.

Serão otimizadas as áreas das barras, a topologia e a posição dos nós das treliças.

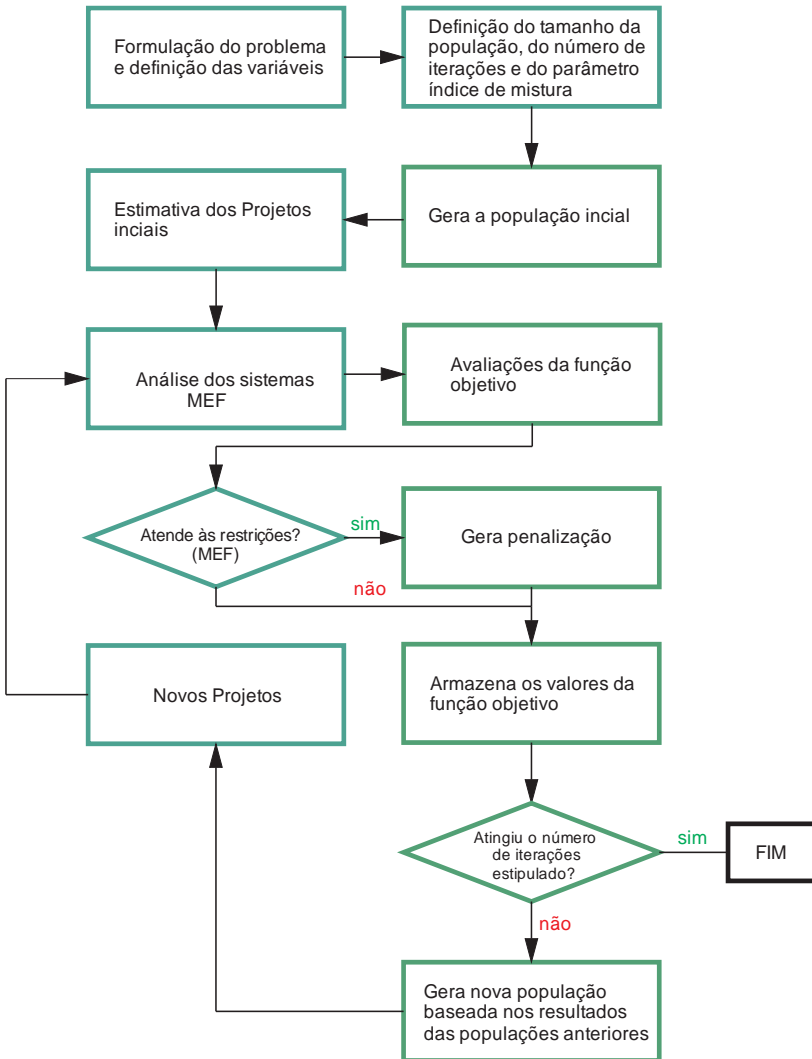
Foram introduzidas restrições de tensão e deslocamento, que foram tratadas pelo método MPA, conforme descrito no item 5 deste trabalho. Para tratar os resultados da otimização topológica que resultam em estruturas hipoestáticas, optou-se por substituir o valor da função objetivo por um alto valor numérico nos casos em que o cálculo do determinante ou o condicionante da matriz de rigidez resultam em valores próximos do valor nulo.

Os parâmetros de projeto dos materiais utilizados nos exemplos desta seção podem ser observados na Tabela 19, abaixo.

Tabela 19- Parâmetros de projeto dos materiais utilizados nos exemplos de otimização de treliças.

Parâmetro de projeto	Valor
Módulo de elasticidade	$10^4$ ksi (68947,57 Mpa)
Densidade	0,1 lb/in <sup>3</sup> (2767,99 Kg/m <sup>3</sup> )
Tensão de tração admissível	25 ksi (172,37 Mpa)
Tensão de compressão admissível	25 ksi (172,37 Mpa)
Deslocamento em y admissível	2 in (5,08 cm)

Figura 36- Fluxograma funcionamento do código de elementos finitos associado ao algoritmo BSA-MPA.

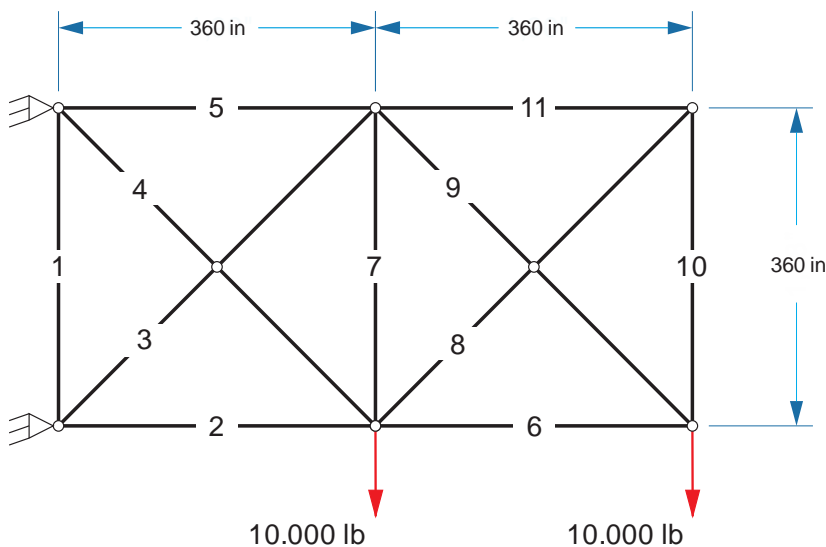


### 6.1.1 Exemplo da treliça de onze barras

Este exemplo é um conhecido problema *benchmark* e tem sido utilizado em muitos trabalhos neste campo. Foram realizados dois estudos independentes: ( i ) otimização das áreas das barras e da topologia e ( ii ) otimização das áreas das barras, da topologia e da posição dos nós.

A geometria inicial, bem como as condições de contorno do problema podem ser observadas na Figura 37.

Figura 37- Problema da treliça de onze barras.



As áreas das barras serão consideradas variáveis discretas e os valores que poderão assumir serão armazenados em um vetor de áreas. A otimização topológica será efetuada a partir da introdução de áreas aproximadamente nulas no vetor de áreas.

As seções das barras das treliças poderão variar de 0,0 à 30 in<sup>2</sup> (0,0 à 193,55 cm<sup>2</sup>), com incrementos de 0,1 in<sup>2</sup> (6,45 cm<sup>2</sup>).

### 6.1.1.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras

Muitos pesquisadores estudaram este problema utilizando algoritmos meta-heurísticos, porém com diferentes conjuntos de variáveis discretas para a área das barras. Dentre os resultados disponíveis, os melhores encontrados são referentes aos estudos desempenhados por Deb e Gulati (2001) e Fadel Miguel et al (2011), portanto, assim como nos trabalhos dos autores citados, no presente estudo as áreas das barras das treliças poderão variar de 0,0 à 30 in<sup>2</sup> (0.0 à 193.55 cm<sup>2</sup>), com incrementos de 0,1 in<sup>2</sup> (6,45 cm<sup>2</sup>).

Este trabalho pretende atingir a mesma precisão dos resultados encontrados pelos autores citados com o mesmo número de avaliações da função objetivo que Fadel Miguel et al (2011), 30.000 AFO.

As áreas das barras, o correspondente peso do melhor projeto encontrado, bem como os resultados encontrados por Hajela e Lee (1995), Deb e Gulat (2001) e Fadel Miguel et al (2011) podem ser observados na Tabela 20.

Tabela 20- Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados no presente estudo e por outros autores para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.

Número da barra	Área das barras (in <sup>2</sup> )			
	BSA-MPA	Fadel Miguel et al (2011)	Deb e Gulati (2001)	Hajela e Lee (1995)
2	24	24	24	24
3	20	20	20	21
4	6	6	6	6
5	30	30	30	28
6	16	16	16	16
9	21	21	21	22
Peso (lb)	4912,85	4912,85	4912,85	4942,7
Peso (kg)	2228,43	2228,43	2228,43	2241,97
AFO	30000	30000	49500	-

Em 100 rodadas foram encontrados 60 projetos distintos, a média e o coeficiente de variação obtidos podem ser observados na Tabela 21, a seguir:

Tabela 21- Resultados estatísticos encontrados para a otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	4919,77	4923,51
Média (kg)	2231,57	2233,27
Coeficiente de variação	0,11%	0,16%

O deslocamento ao longo do eixo y atingiu 99,85% (intersecção dos membros 6 e 9) e 99,95% (intersecção dos membros 2, 4 e 6) do deslocamento máximo admissível. A tensão máxima foi observada no elemento 4 e tem magnitude correspondente à 94,28% da tensão admissível.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 38.

Figura 38- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para a otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.

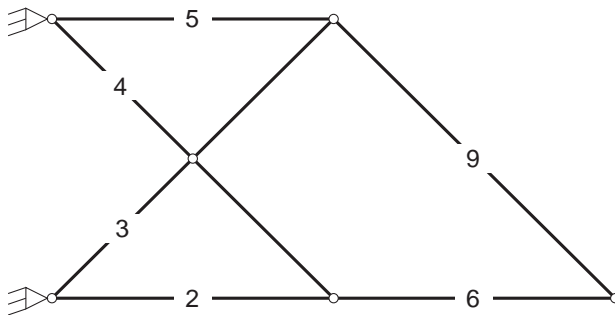
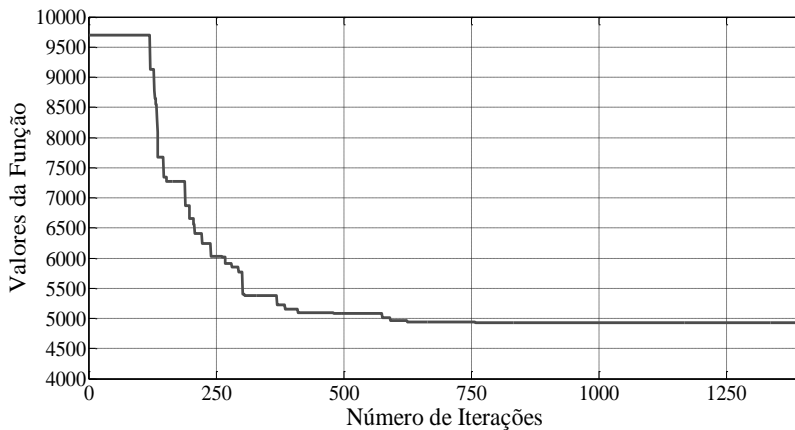


Figura 39- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.



Dos resultados apresentados nesta seção pode-se concluir que o BSA-MPA é capaz de reproduzir os melhores resultados encontrados na bibliografia para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de onze barras.



### 6.1.1.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras

Neste exemplo, além das áreas das barras e da topologia, a forma da treliça de onze barras será otimizada. Para tanto, as coordenadas verticais dos três nós superiores serão admitidas como variáveis de projeto, e poderão variar de 180 in (4,57 m). a 1000 in. (25,4 m), considerando a origem na intersecção dos membros 1 e 3. Como as coordenadas dos nós são variáveis contínuas e as áreas das barras são variáveis discretas, trata-se de um problema de variáveis mistas.

Dentre os pesquisadores que estudaram este problema pode-se citar Fadel Miguel et al (2011), Rajan (1995), Balling et al (2006) e Martini (2011).

Este trabalho pretende atingir a mesma precisão dos resultados encontrados pelos autores citados com o mesmo número de avaliações da função objetivo que Fadel Miguel et al (2011), 50.000 AFO.

Os resultados encontrados pelos autores citados podem ser observados na Tabela 22.

Tabela 22- Comparação entre os mínimos globais e número de avaliações da função objetivo encontrados no presente estudo e por outros autores para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

	BSA-MPA	Fadel Miguel (2011)	Rajan (1995)	Balling et al. (2006)
Melhor resultado (lb)	2735,14	2705	3254	3254
Melhor resultado (kg)	1240,64	1226,97	1475,99	1475,99
AFO	50000	50000	3840	500000

As áreas das barras e o correspondente peso do melhor projeto encontrado, bem como os resultados encontrados por Fadel Miguel et al (2011) podem ser observados na Tabela 23.

Tabela 23- Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

Número da barra	Área das barras (in <sup>2</sup> )	
	BSA-MPA	Fadel Miguel et al (2011)
2	11,50	11,50
3	2,88	2,88
4	5,74	5,74
5	13,50	11,50
6	5,74	7,22
9	13,50	13,50
Peso (lb)	2735,14	2705
Peso (kg)	1240,63	1226,67

Em 100 rodadas foram encontrados 100 projetos distintos, devido ao caráter contínuo das variáveis referentes às coordenadas dos nós superiores da treliça. Assim como no tópico anterior, todos os resultados encontrados são próximos do mínimo global atingido. A média e o desvio padrão obtidos podem ser observados na Tabela 24, a seguir:

Tabela 24- Resultados estatísticos encontrados para a otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	2893,45	2850,62
Média (kg)	1312,45	1293,02
Coefficiente de variação	2,12%	2,07%

O deslocamento ao longo do eixo  $y$  atingiu 99,56% (intersecção dos membros 6 e 9) e 99,91% (intersecção dos membros 2, 4 e 6) do deslocamento máximo admissível. A tensão máxima foi observada no elemento 4 e tem magnitude correspondente à 76,71% da tensão admissível.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 40.

Figura 40- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

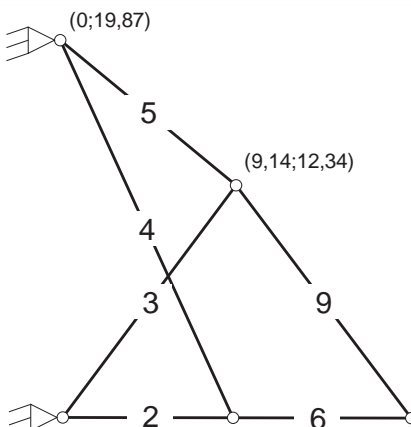
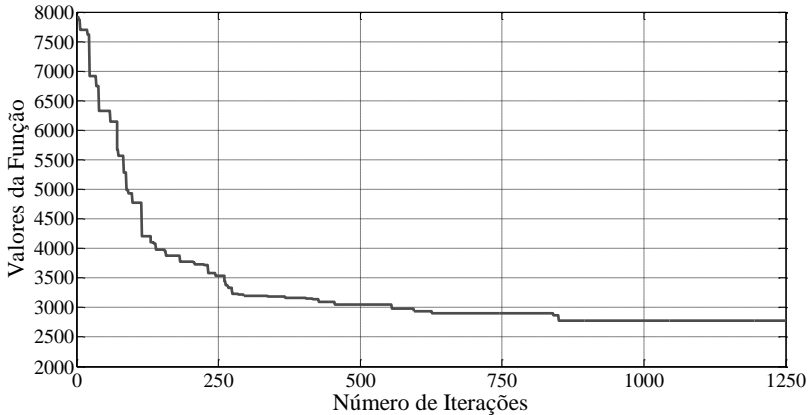


Figura 41- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.



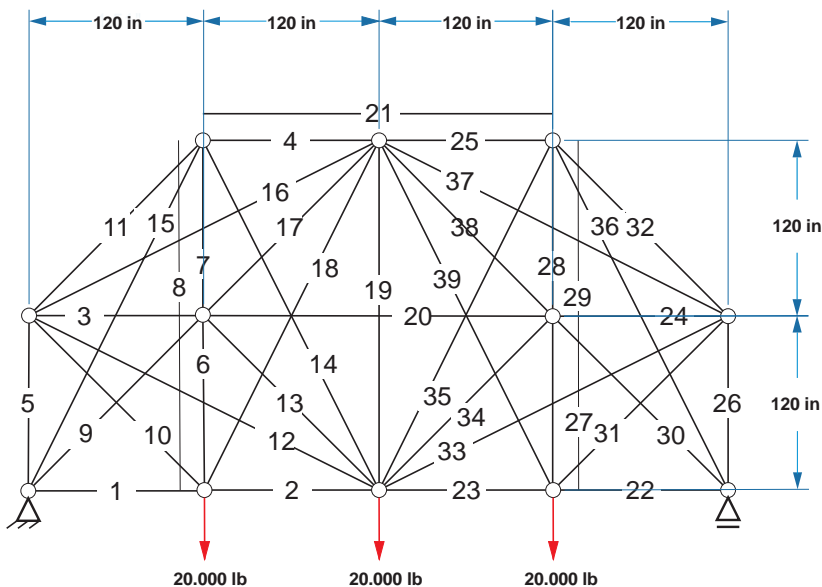
Com base nos resultados apresentados para a otimização das áreas das barras, da topologia e da forma da treliça de onze barras, pode-se concluir que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA possui valor numérico 1% superior ao mínimo global encontrado por Fadel Miguel et al. (2011), entretanto, a média dos resultados encontrados pelo BSA-MPA é aproximadamente 2% inferior à média encontrada pelo FA (*Firefly*). É importante ressaltar que o BSA-MPA possui apenas um parâmetro a definir, enquanto que o algoritmo FA, utilizado por Fadel Miguel et al., possui 4 parâmetros referentes ao otimizador e mais 2 parâmetros referentes ao esquema de penalização utilizado pelos autores.

### 6.1.2 Exemplo da treliça de trinta e nove barras

Assim como o exemplo anterior, este exemplo é um conhecido problema *benchmark* e tem sido utilizado em muitos trabalhos neste campo. Novamente foram realizados dois estudos independentes: ( i ) otimização das áreas das barras e da topologia e ( ii ) otimização das áreas das barras, da topologia e da posição dos nós.

A geometria inicial bem como as condições de contorno do problema podem ser observadas na Figura 42.

Figura 42- Problema da treliça de 39 barras.



As áreas das barras das treliças serão consideradas variáveis contínuas e poderão variar entre  $-0,225$  à  $2,25$  in<sup>2</sup> ( $-1,45$  à  $14,5$  cm<sup>2</sup>), é considerada uma área crítica de  $0,05$  in<sup>2</sup> ( $0,32$  cm<sup>2</sup>).

### 6.1.2.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras

O procedimento deste exemplo consiste em otimizar 21 variáveis contínuas. Dentre os resultados disponíveis, os melhores encontrados são referentes aos estudos desempenhados por Deb e Gulati (2001) e Fadel Miguel et al (2011).

Este trabalho pretende atingir a mesma precisão dos resultados encontrados pelos autores citados com o mesmo número de avaliações da função objetivo que Fadel Miguel et al (2011), 50.000 AFO.

As áreas das barras, o correspondente peso do melhor projeto encontrado, bem como os resultados encontrados pelo BSA-MPA, por Deb e Gulati (2001) e Fadel Miguel et al (2011) podem ser observados na Tabela 25.

Tabela 25 - Comparação entre as áreas das barras e correspondentes pesos encontrados por diferentes autores para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.

	Área das barras (in <sup>2</sup> )		
	BSA-MPA	Fadel Miguel et al (2011)	Deb e Gulati (2001)
1	0,05	0,05	-
2	0,75	0,75	0,75
	-		0,05
5	1,50	1,50	1,50
	-	-	0,05
8	0,25	0,25	0,25
	-	-	0,05
10	1,06	1,06	1,06
11	1,06	1,06	1,06
14	0,56	0,56	0,56
21	1,00	1,00	1,00
22	0,05	0,05	-
23	0,75	0,75	0,75
	-	-	0,05
26	1,50	1,50	1,50
	-	-	0,05
29	0,25	0,25	0,25
	-	-	0,05
31	1,06	1,06	1,06
32	1,06	1,06	1,06
35	0,56	0,56	0,56
Peso (lb)	193,20	193,55	196,55
Peso (kg)	87,63	87,79	89,15
AFO	50000	50000	-

Em 100 rodadas foram encontrados 100 projetos distintos, devido ao caráter contínuo da variável área. A média e o coeficiente de variação obtidos podem ser observados na Tabela 26, a seguir:

Tabela 26 - Resultados estatísticos encontrados para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	221,68	209,33
Média (kg)	100,55	94,95
Coeficiente de variação	12,9%	4,84%

O deslocamento máximo ao longo do eixo y atingiu 72% do deslocamento máximo admissível. Dos esforços internos calculados observa-se que, para o carregamento externo imposto, os elementos 1 e 22 estão descarregados e a tensão nos demais elementos do projeto ótimo encontrado é igual ao valor da tensão admissível definida.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 43.

Figura 43- Topologia correspondente ao mínimo global encontrada para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.

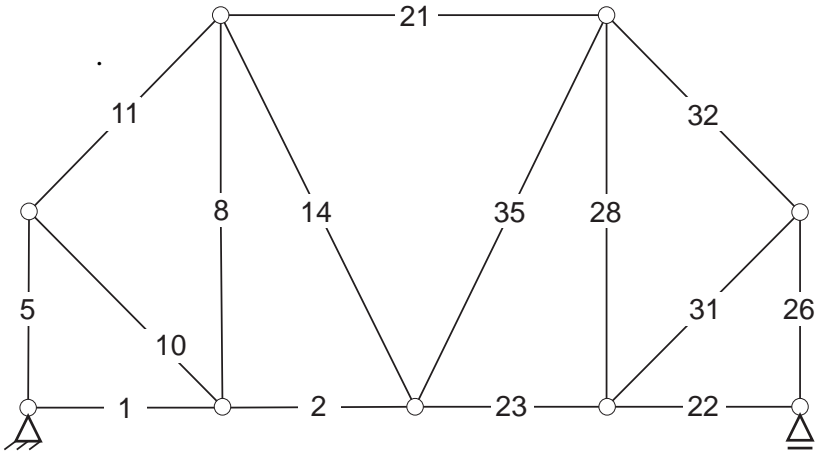
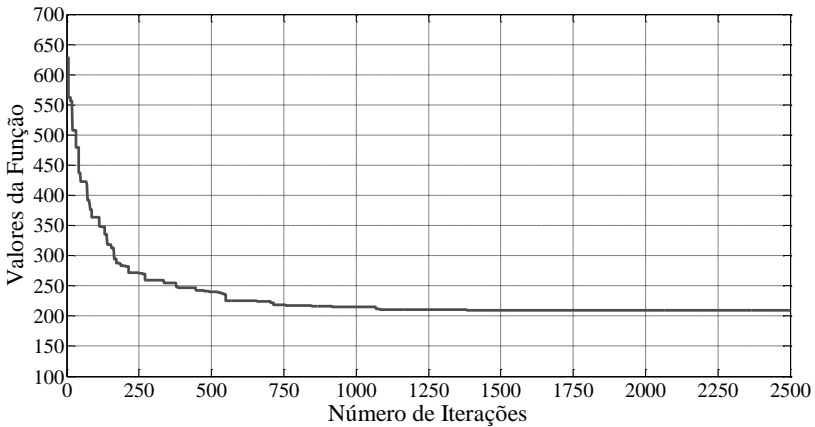


Figura 44- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de trinta e nove barras.





Dos resultados apresentados nesta seção observar-se que o BSA-MPA encontrou um mínimo ligeiramente inferior ao encontrado por Fadel Miguel et al e que a média e o coeficiente de variação obtidos pelo BSA-MPA são inferiores aos encontrados pelo autor citado. Pode-se concluir que para o caso de otimização das áreas das barras e da topologia da treliça de 39 barras o BSA-MPA encontrou resultados melhores do que os disponíveis na bibliografia consultada.

#### **6.1.2.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.**

Neste exemplo, além das áreas das barras e da topologia, a forma da treliça de trinta e nove barras será otimizada. Considerando que a estrutura otimizada deverá ser simétrica, que as coordenadas dos nós na região do apoios e dos nós carregados serão fixas e que o nó superior no centro da estrutura não poderá se mover lateralmente, é possível reduzir o número de coordenadas nodais do problema a 7. Cada um desses nós poderá se mover de -120 à 120 in. (-3,048 à 3,048 cm) em relação à sua posição inicial

Novamente os resultados do BSA-MPA serão comparados aos encontrados por Fadel Miguel et al e Deb e Gulati.

Este trabalho pretende atingir a mesma precisão dos resultados encontrados pelos autores citados com o mesmo número de avaliações da função objetivo que Fadel Miguel et al (2011), 50.000 AFO.

Os resultados encontrados pelos autores citados podem ser observados na Tabela 27.

Tabela 27- Comparação entre os mínimos globais e número de avaliações da função encontrados no presente estudo e por outros autores para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

	BSA-MPA	Fadel Miguel et al (2011)	Deb e Gulati (1995)
Melhor resultado (lb)	195,95	191,30	192,19
Melhor resultado (kg)	88,88	86,77	87,17
AFO	50000	50000	504000

Em 100 rodadas foram encontrados 100 projetos distintos, devido ao caráter contínuo das variáveis referentes às áreas das barras e às coordenadas dos nós passíveis de variação. Assim como nos tópicos anteriores, todos os resultados encontrados são próximos do mínimo global atingido. A média e o coeficiente de variação obtidos podem ser observados na Tabela 28, a seguir:

Tabela 28- Resultados estatísticos encontrados no presente estudo e por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	207,34	220,17
Média (kg)	94,05	99,87
Coeficiente de variação	5,3%	4,4%

O deslocamento máximo ao longo do eixo y atingiu 88,53% do deslocamento máximo admissível. A tensão máxima foi observada no elemento 4 e tem magnitude correspondente à ao valor da tensão admissível.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 45.

Figura 45- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.

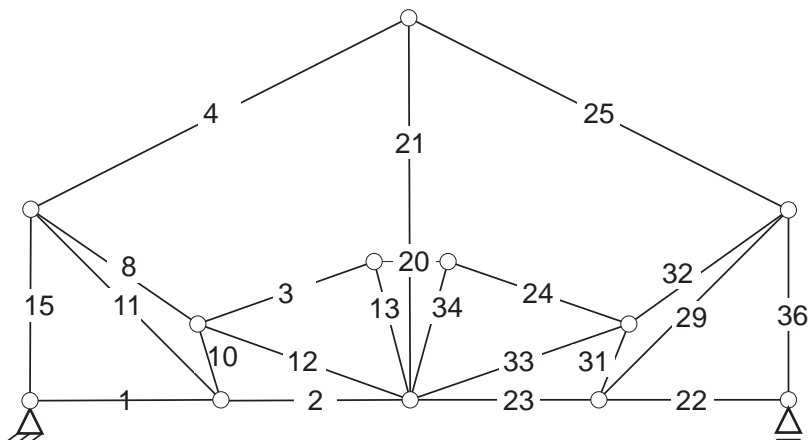
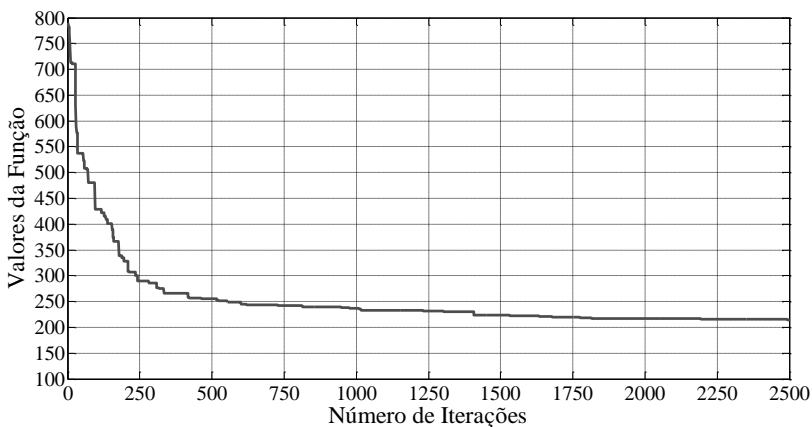


Figura 46- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça de onze barras.



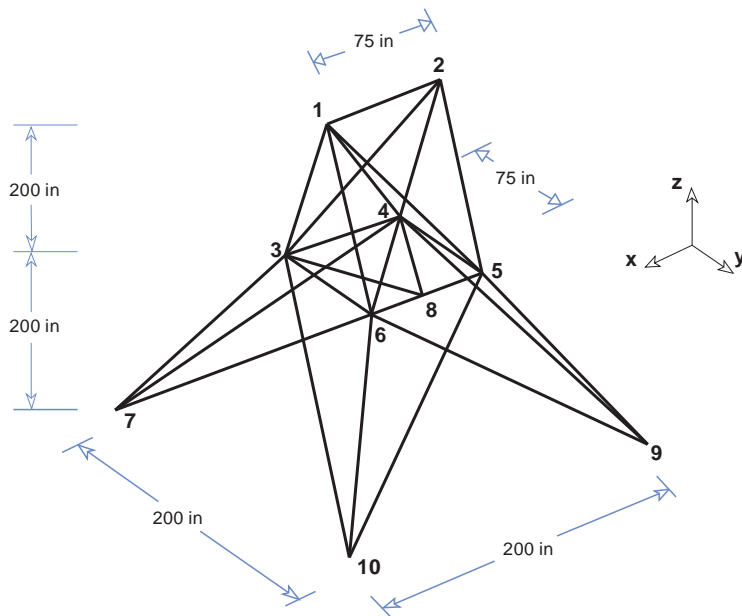
Com base nos resultados apresentados para a otimização das áreas das barras, da topologia e da forma da treliça de trinta e nove barras, pode-se concluir que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA possui valor numérico 2% superior ao mínimo global encontrado por Fadel Miguel et al. É importante ressaltar que o BSA-MPA possui apenas um parâmetro a definir, enquanto que o algoritmo FireFly, utilizado por Fadel Miguel et al., possui 4 parâmetros referentes ao otimizador e mais 2 parâmetros referentes ao esquema de penalização utilizado pelos autores.

### 6.1.3 Exemplo da treliça 3D de 25 barras.

O exemplo de otimização de treliça tridimensional é outro conhecido problema *benchmark*. Foram realizados dois estudos independentes: ( i ) otimização das áreas das barras e da topologia e ( ii ) otimização das áreas das barras, da topologia e da posição dos nós.

A geometria inicial bem como as condições de contorno do problema podem ser observadas na Figura 47.

Figura 47- Estrutura de base do problema da treliça 3D de 25 barras.



As áreas das barras da treliça 3D de 25 barras serão escolhidas dentre os elementos do vetor:

$$\mathbf{d}=[0,1;0,2;0,3;0,4;0,6;0,7;0,8;0,9;1;1,1;1,2;1,3;1,4;1,5;1,6;1,7;1,8;1,9;2;2,1;2,2;2,3;2,4;2,5;2,6;2,7;2,8;3;3,2;3,4].$$

Os carregamentos aplicados na estrutura e os correspondentes nós de atuação podem ser observados na Tabela 29, abaixo:

Tabela 29- Carregamentos aplicados na treliça tridimensional de vinte e cinco barras.

Nó	P <sub>x</sub>		P <sub>y</sub>		P <sub>z</sub>	
	lb	kN	lb	kN	lb	kN
1	1000	3,66	-10000	-36,60	-10000	-36,60
2	0	0	-10000	-36,60	-10000	-36,60
3	500	1,83	0	0	0	0
6	600	2,20	0	0	0	0

Tabela 30- Coordenadas dos nós e grupos de elementos da treliça tridimensional de 25 barras.

Nó	x (in)	y (in)	z (in)	Grupo	Membros e nós de extremidade
1	-37,5	0	200	A1	1 (1,2)
2	37,5	0	200	A2	2 (1,4), 3(2,3), 4(1,5), 5(2,6)
3	-37,5	37,5	100	A3	6(2,5), 7(2,4), 8(1,3) 9(1,6)
4	37,5	37,5	100	A4	10(3,6),11(4,5),
5	37,5	-37,5	100	A5	12(3,4), 13(5,6)
6	-37,5	-37,5	100	A6	14(3,10), 15(6,7), 16(4,9), 17(5,8)

Nó	$x$ (in)	$y$ (in)	$z$ (in)	Grupo	Membros e nós de extremidade
7	-100	100	0	A7	18(3,8), 19(4,7), 20(6,9), 21(5,10)
8	100	100	0	A8	22(3,7), 23(4,8) 24(5,9), 25(6,10)
9	100	-100	0		
10	-100	-100	0		

### 6.1.3.1 Otimização das áreas das barras e da topologia da treliça 3D de vinte e cinco barras

O procedimento deste exemplo consiste em otimizar as áreas das barras e a forma da treliça tridimensional ilustrada na Figura 47. As coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos nós 7-10 serão consideradas variáveis de projeto e os nós 1 e 2 da treliça serão considerados fixos. Devido à dupla simetria requerida pelo problema, nos planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , o problema possui oito variáveis de projeto referentes às áreas das barras e cinco variáveis que correspondem às coordenadas nodais da treliça tridimensional de vinte e cinco barras. As restrições das coordenadas são:

$$20 \text{ in } (50,8 \text{ cm}) \leq x_4 \leq 60 \text{ in } (152,4 \text{ cm});$$

$$40 \text{ in } (101,6 \text{ cm}) \leq x_8 \leq 80 \text{ in } (203,2 \text{ cm});$$

$$40 \text{ in } (101,6 \text{ cm}) \leq x_8 \leq 80 \text{ in } (203,2 \text{ cm});$$

$$100 \text{ in } (254 \text{ cm}) \leq y_8 \leq 140 \text{ in } (355,6 \text{ cm});$$

$$90 \text{ in } (228,6 \text{ cm}) \leq z_4 \leq 130 \text{ in } (387,1 \text{ cm}).$$

Dentre os autores que estudaram este problema pode-se citar Fadel Miguel et al (2011), Tang et al (2005), Rajeev e Krishnamoorthy (1992) e Wu e Chow (1995) os melhores encontrados são referentes aos estudos desempenhados por Fadel Miguel et al (2011).

Este trabalho pretende atingir a mesma precisão dos resultados encontrados por Fadel Miguel com o mesmo número de avaliações da função objetivo que o autor, 60.000 AFO.

As áreas das barras, o correspondente peso do melhor projeto encontrado, bem como os resultados encontrados pelo BSA-MPA e pelos outros autores para o problema em questão podem ser observados na Tabela 31.

Tabela 31- Comparação entre os resultados da otimização das áreas das barras e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de 25 barras.

Variáveis de projeto	Rajeev e Krishnamoorthy (1992)	Wu e Chow (1995)	Tang et al (2005)			Fadel Miguel et al (2011)	Presente estudo
			GAI	GA2	GA3	FA	BSA-MPA
A1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1
A2	1,8	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
A3	2,3	1,1	0,9	1	1,1	0,9	0,9
A4	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
A5	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
A6	0,8	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
A7	1,8	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1
A8	3	0,9	1,1	1,1	0,7	1	1
X4		41,07	24,87	39,327	35,47	37,32	37,36
Y4		53,47	62,39	61,296	60,37	55,74	53,26
Z4		124,6	117,88	115,906	129,07	126,62	130
X8		50,8	42,36	65,477	45,06	50,14	50,94
Y8		131,48	129,46	135,905	137,04	136,40	135,98

Variáveis de projeto	Rajeev e Krishnamoorthy (1992)	Wu e Chow (1995)	Tang et al (2005)				Fadel Miguel et al (2011)	Presente estudo
			GA1	GA2	GA3	BSA-MPA		
Peso (lb)	546,01	136,2	136,09	130,2	124,94	118,83	118,83	
Máxima Tensão (lb/in <sup>2</sup> )		15589,7	15834,32	16043,5	18228,6	18830,23	1897,89	
Máximo deslocamento (in)		0,347	0,3486	0,3395	0,35	0,35	0,35	

Em 100 rodadas foram encontrados 100 projetos distintos, devido ao caráter contínuo da variável área. A média e o coeficiente de variação obtidos podem ser observados na Tabela 32, a seguir:

Tabela 32- Resultados estatísticos encontrados para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	132,3	125,12
Média (kg)	60,01	56,75
Coefficiente de variação	5,5%	2,93%

O deslocamento máximo ao longo do eixo y atingiu aproximadamente 100% do deslocamento máximo admissível. Dos esforços internos calculados observa-se que, o elemento mais solicitado



foi o 21 e que a tensão neste elemento corresponde a 47% do valor da tensão admissível.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 48.

Figura 48- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça tridimensional de 25 barras.

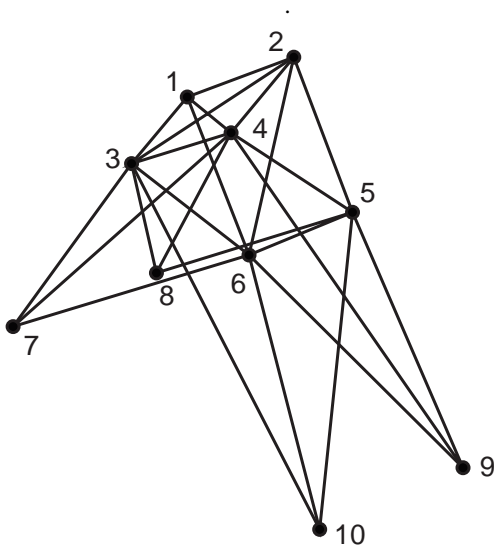
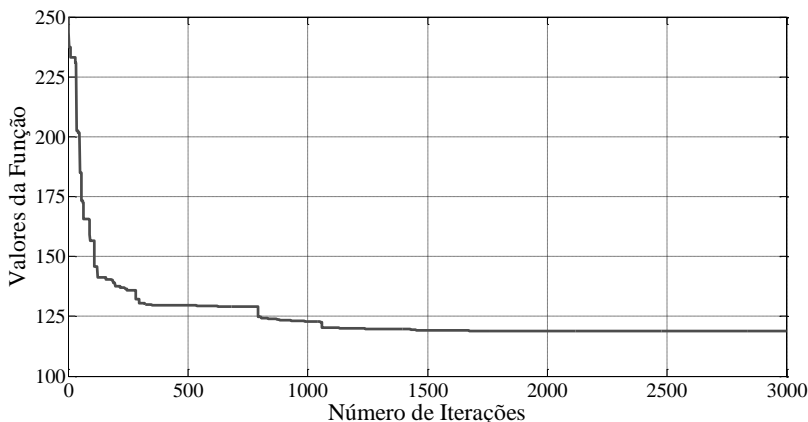


Figura 49- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras e da forma da treliça de vinte e cinco barras.



Dos resultados apresentados nesta seção observar-se que o BSA-MPA encontrou um mínimo global de mesmo valor numérico que o encontrado por Fadel Miguel et al e que a média e o coeficiente de variação obtidos pelo BSA-MPA são inferiores aos encontrados pelo autor citado. Pode-se concluir que para o caso de otimização das áreas das barras e da forma da treliça tridimensional de 25 barras que o BSA-MPA encontrou resultados melhores do que os disponíveis na bibliografia consultada.

### **6.1.3.2 Otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.**

Neste exemplo, além das áreas das barras e da forma, a topologia da treliça 3D de vinte e cinco barras será otimizada. Além das 8 variáveis discretas referentes às áreas das barras e das cinco variáveis que correspondem às posições dos nós 1-7, considerando a simetria nos planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , os 8 grupos da Tabela 30 serão considerados variáveis topológicas.

Novamente os resultados do BSA-MPA serão comparados aos encontrados por Wu e Chow (1995), Tang et al (2005) e Fadel Miguel et al (2011).

Este trabalho pretende encontrar resultados equivalentes aos obtidos pelos autores citados com o mesmo número de avaliações da função objetivo que Fadel Miguel et al (2011), 60.000 AFO.

Os resultados encontrados pelos autores citados podem ser observados na Tabela 33.

Tabela 33- Comparação entre os resultados da otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de 25 barras.

Variáveis de projeto	Wu e Chow (1995)	Tang et al (2005)			Fadel Miguel et al (2011)	Presente estudo BSA-MPA
		GA1	GA2	GA3	FA	
A1	0,1	0	0	0	0	0
A2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A3	1,1	1	0,9	0,9	0,9	0,9
A4	0,2	0	0	0	0	0
A5	0,3	0	0	0	0	0
A6	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A7	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
A8	0,9	1,1	1	1,1	0,9	1,1
X4	41,07	38,83	39,91	39,51	38,50	38,50
Y4	53,47	50,62	61,99	70,18	64,35	72,08
Z4	124,6	126,55	118,23	105,16	112,87	100,64
X8	50,8	50,37	53,13	55,15	49,13	46,87
Y8	131,48	125,63	138,49	136,27	134,94	135,18
Peso (lb)	136,2	120,88	114,74	118,73	116,058	117,44
Máxima Tensão (lb/in <sup>2</sup> )	15589,66	18840,45	17353,01	21240,45	19791,08	16839,88
Máximo deslocamento (in)	0,347	0,35	0,35	0,3494	0,35	0,3499

Em 100 rodadas foram encontrados 100 projetos distintos, devido ao caráter contínuo das variáveis referentes às coordenadas dos nós passíveis de variação. Assim como nos tópicos anteriores, todos os resultados encontrados são próximos do mínimo global atingido. A média e o coeficiente de variação obtidos podem ser observados na Tabela 34, a seguir:

Tabela 34- Resultados estatísticos encontrados no presente estudo e por Fadel Miguel et al. para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.

	Fadel Miguel et al (2011)	BSA-MPA
Média (lb)	139,16	125,21
Média (kg)	63,12	56,80
Coefficiente de variação	8%	3,6 %

O deslocamento máximo ao longo do eixo y atingiu 99,98% do deslocamento máximo admissível. A tensão máxima foi observada no elemento 21 e tem magnitude correspondente a aproximadamente 42% do valor da tensão admissível.

A topologia correspondente ao melhor projeto encontrado pode ser observada na Figura 50.

Figura 50- Topologia correspondente ao mínimo global encontrado pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.

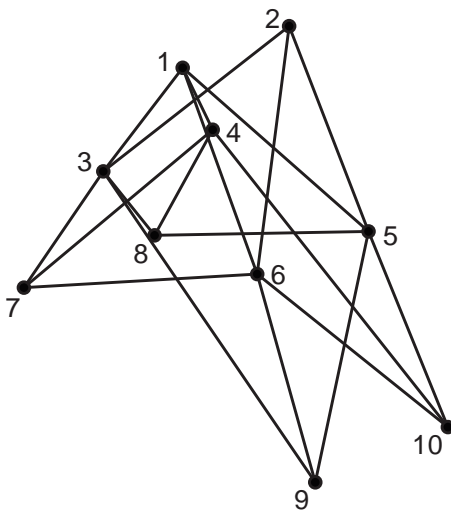
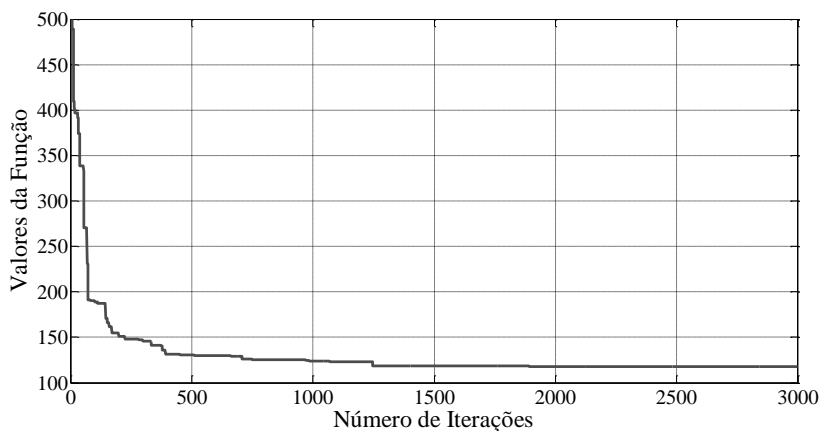


Figura 51- Gráfico de convergência obtido pelo BSA-MPA para o problema de otimização das áreas das barras, da topologia e das coordenadas dos nós da treliça tridimensional de vinte e cinco barras.



Com base nos resultados apresentados para a otimização das áreas das barras, da topologia e da forma da treliça tridimensional de vinte e cinco barras, pode-se concluir que o mínimo global encontrado pelo BSA-MPA possui valor numérico 2,35% superior ao mínimo global encontrado por Tang et al e 0,73% superior ao mínimo global apresentado no trabalho de Fadel Miguel et al. Os valores numéricos correspondentes à média e ao coeficiente de variação encontrados pelo BSA-MPA são inferiores aos encontrados por Fadel Miguel et al. Nos estudos realizados por Tang et al não constam as médias e coeficientes de variação das análises realizadas.

## 7. RESUMO DOS RESULTADOS

Nesta seção os resultados encontrados para os experimentos numéricos realizados com problemas de formulação fechada (Capítulo 5) e para os exemplos práticos de engenharia formulados pelo MEF (Capítulo 6) são resumidos para facilitar a avaliação do desempenho do algoritmo na resolução dos problemas propostos.

Tabela 35- Resumo dos resultados encontrados para os experimentos numéricos realizados com problemas de formulação fechada (Capítulo 5).

Problema	Algoritmo	AFO	Média	D.P	Mínimo
5.1	BSA-MPA	25000	359,208	5,56e-6	359,208
	FA	25000	460,706	80,7387	359,208
5.2	BSA-MPA	50000	63896,23	0	63896,23
	FA	50000	64144,75	175,9188	63893,52
5.3	BSA-MPA	5000	263,896403	9,648e-4	263,895844
	MBA	13280	263,897996	3,93e-3	263,895852
5.4	BSA-MPA	70650	6257,8814	285,42	5901,3825
	FA	25000	5937,3379	164,54747	5850,3831
5.5	BSA-MPA	6300	2997,260	1,28	2994,9884
	FA	6300	2996,769	1,56	2994,4824

Problema	Algoritmo	AFO	Média	D.P	Mínimo
5.6	BSA-MPA	7650	0,013201	8,73e-4	0,012738
	FA	7650	0,012713	6,30e-5	0,012665
5.7	BSA-MPA	47340	1,7252	3,32e-4	1,7251
		50000	1,8786	0,2678	1,7312
5.8	BSA-MPA	1120	4,0645e-8	6,90e-8	2,7008e-12
		1120	2,4716e-9	3,94e-9	2,7008e-12

Tabela 36- Resumo dos resultados encontrados para os exemplos práticos de engenharia formulados pelo MEF (Capítulo 6).

Problema	Algoritmo	AFO	Média	C.V (%)	Mínimo
6.1.1.1	BSA-MPA	50000	4923,51	0,16	4912,85
	FA	50000	4919,77	0,11	4912,85
6.1.1.2	BSA-MPA	50000	2850,62	2,07	2735,14
	FA	50000	2893,45	2,12	2705
6.1.2.1	BSA-MPA	50000	209,33	4,84	193,20
	FA	50000	221,68	12,9	193,55
6.1.2.2	BSA-MPA	50000	220,17	4,4	195,95
	FA	50000	207,34	5,3	191,30
6.1.3.1	BSA-MPA	60000	125,12	2,93	118,83
	FA	60000	132,3	5,5	118,83
6.1.3.2	BSA-MPA	60000	125,21	3,6	117,44
	FA	60000	139,16	8	116,058

Nas Tabelas 35 e 36 os valores numéricos que indicam equivalência entre o BSA-MPA e o algoritmo de comparação estão anotados em verde, os que indicam que o BSA-MPA é mais eficiente estão anotados em azul e os valores numéricos que indicam que o

algoritmo de comparação teve um desempenho melhor que o BSA-MPA no problema avaliado estão em vermelho.

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho o algoritmo meta-heurístico Backtracking Search Algorithm (BSA) foi adaptado para resolução de problemas de otimização com restrições. Para se chegar a este resultado se fez necessário estudar o funcionamento do algoritmo. No capítulo 4 consta a descrição do BSA reescrita de forma mais precisa, eliminando dificuldades de entendimento encontradas no texto original de Civicioglu (2013). Para o estudo da eficiência do algoritmo proposto, o BSA-MPA, o algoritmo original foi implementado, assim como a sugestão de modificação para o tratamento de restrições através de penalização adaptativa (MPA). A escolha pelo MPA se deu por este método de tratamento das restrições não necessitar de nenhum parâmetro adicional a ser calibrado, desta forma o algoritmo proposto tem somente um parâmetro a ser determinado. O fato de possuir um único parâmetro é a principal vantagem do MPA-BSA em relação aos algoritmos heurísticos clássicos, como por exemplo, o GA ou o PSO. O desempenho do algoritmo resultante foi avaliado na resolução de problemas benchmark da literatura de formulação fechada e problemas formulados pelo método dos elementos finitos, onde se constatou que os resultados obtidos para as calibrações especificadas, se não melhores, são equivalentes aos encontrados por outros algoritmos de eficiência reconhecida. Pode-se concluir deste trabalho que o BSA-MPA possui todas as características desejáveis para um algoritmo de otimização segundo Brest et al.(2006), a saber: a capacidade de encontrar o mínimo global de um problema rapidamente, com um pequeno número de parâmetros de controle e com baixo custo computacional, assim como robustez e facilidade de aplica-lo em diferentes modelos de problemas.

Vale destacar que a adaptação do algoritmo BSA para o tratamento de restrições e sua aplicação em problemas engenharia, com ênfase na otimização de geometria, dimensão e topologia de estruturas treliçadas, dão um caráter inédito para o presente trabalho.

Como sugestões para futuros trabalhos pode-se citar: a realização de otimização multimodal, aproveitando a capacidade do algoritmo BSA-MPA em encontrar diferentes resultados próximos do mínimo global; a realização de meta-otimização, ou seja, utilizar outro método



de otimização para determinação do parâmetro *índice de mistura* ótimo para cada problema; a hibridização do algoritmo, ou seja, incluir um otimizador local ao BSA-MPA, ou associa-lo à técnica de *clusterização*, que consiste em reduzir os domínios de busca para acelerar a convergência; introduzir análise de confiabilidade nos códigos de otimização de treliças; e por fim, devido ao caráter estocástico dos algoritmos meta-heurísticos, que viola as condições de normalidade e homocedasticidade, se torna difícil tirar conclusões em alguns casos (por exemplo, no caso problema correspondente ao tópico 5.5 deste trabalho), portanto, sugere-se a comparação do desempenho do BSA com o de outros algoritmos meta-heurísticos por métodos de comparação não paramétricos, a exemplo do *Wilcoxon signed ranks test*.



## REFERÊNCIAS LITERÁRIAS

AMIR, H. M., HASEGAWA T. Nonlinear mixed-discrete structural optimization. *J Struct Eng.* v. 115(3), p. 626–45, 1989.

ARORA, J. Introduction to optimum design. Elsevier Inc. p. 530 – 533, 2002.

AUGUSTO, D. A. ; BERNARDINO, H. S. ; BARBOSA, HELIO J.C. . Predicting the Performance of Job Applicants by Means of Genetic Programming. In: BRICS Countries Conference on Computational Intelligence (BRICS-CCI), 2013, Porto de Galinhas, PE. Proceedings of the BRICS Countries Conference on Computational Intelligence, 2013.

BALLING R.J., BRIGGS R.R., GILLMAN K. Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm. *J Struct Eng.* 132(7):1158–65, 2006.

BALLING RJ, BRIGGS RR, GILLMAN K. Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm. *J Struct Eng.* 132(7):1158–65, 2006.

BARBOSA, H. J. C. ; LAVOR, C. ; RAUPP, F. M. . Computational Experiments with an Adaptive Genetic Algorithm for Global Minimization of Potential Energy Functions. In: C.A. Floudas; P.M. Pardalos. (Org.). *Frontiers In Global Optimization.* : Kluwer Academic Publishers, 2003, v. , p. 17-82. benchmark problems, *IEEE Trans. Evol. Comput.* v. 10, p. 646–657, 2006.

BERNARDINO H.S., BARBOSA H.J.C., LEMONGE A.C.C. A hybrid genetic algorithm for constrained optimization problems in mechanical engineering. *IEEE Congr Evolution Comput.* 646–53, 2007.

BORGES, J. A. F. ; STEFFEN Jr, V. ; SCHARDIJN, E. ; ARGENTINO, M. A. . optimization of the dynamical behavior of vehicles. sae technical paper series - Paper Nb. 96230 E, Estados Unidos, 1996.

BREST, J.; GREINER, S.; BOSKOVIC, B.; MERNIK, M. ; ZUMER, V. Self-adapting control parameters in differential evolution: a

comparative study on numerical benchmark problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 6, p. 646-657, 2006.

CHEN T.Y., CHEN H.C. Mixed-discrete structural optimization using a rank-niche evolution strategy. *Eng Optimiz.* v. 41(1) p. 39–58, 2009.

CIVICIOGLU, P. Backtracking Search Optimization Algorithm for numerical optimization problem, *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, p. 8121-8144, 2013.

COELLO C.A.C. Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique. *Civil Engineering and Environmental Systems.* v. 17, p. 319–346, 2000.

COELLO C.A.C. Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems. *Computers in Industry.* v. 41, p. 113–127, 2000.

COELLO C.A.C., BECERRA R.L. Efficient evolutionary optimization through the use of a cultural algorithm. *Engineering Optimization.* v. 36, p. 219–236, 2004.

COELLO C.A.C., MEZURA MONTES E. Constraint-handling in genetic algorithms through the use of dominance-based tournament selection. *Advanced Engineering Informatics.* v. 16, p. 193–203, 2002.

COELLO L.D.S. Gaussian quantum-behaved particle swarm optimization approaches for constrained engineering design problems. *Expert Systems with Applications.* v. 37, p. 1676–1683, 2010.

COELLO, C.A.C. Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique. *Civil Eng Environ Syst* 2000;17:319–46. *Comput.* v. 13, p. 398–417, 2009.

CUSTÓDIO, F. L.; BARBOSA, H. J. C.; DARDENNE, L. E. A multiple minima genetic algorithm for protein structure prediction. *Applied Soft Computing (Print)*, v. 15, p. 88-99, 2014.

DEB K, GULATI S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. *Finite Elem Anal Des.* v. 37, p. 447–465, 2001.

DEB K., GULATI S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. *Finite Elem Anal Des.* 37:447–65, 2001.

DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-II, *IEEE Trans. Evol. Comput.* v. 6, p. 182–197, 2002.

DORIGO M., MANIEZZO V., COLORNI A. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Trans SystMan Cybern;* 26(1):29–41, 1996.

ERBATUR F., HASANCEBI O., TUTUNCU I., KILIC H. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms. *Comput Struct.* 75:209–24, 2000.

FADEL MIGUEL, L. F. ; MIGUEL, L. F. F. ; KAMINSKI, J. ; RIERA, J. D. . Damage detection under ambient vibration by harmony search algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 39, p. 9704-9714, 2012.

FADEL MIGUEL, L. F.; HOLDORF LOPEZ, R. ; FADEL MIGUEL, L. F. . A hybrid approach for damage detection of structures under operational conditions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, p. 4241-4260, 2013.

FADEL MIGUEL, L. F.; LOPEZ, R H. ; MIGUEL, L. F. F. Discussion of paper: -Estimating optimum parameters of tuned mass dampers using harmony search- [Eng. Struct. 33 (9) (2011) 2716-2723]. *Engineering Structures*, v. 54, p. 262-264, 2013.

GARCÍA, S. FERNÁNDEZ, A.; LUENGO, J.; HERRERA, F.; A study of statistical techniques and performance measures for genetics-based machine learning: Accuracy and interpretability, *Soft Computing* 13. v. 10, p. 959–977, 2009.

GARCÍA, S.; MOLINA, D.; LOZANO, M.; HERRERA, F. A study on the use of nonparametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: A case study on the CEC'2005 special session on real parameter optimization, *Journal of Heuristics.* v. 15, p. 617-644, 2009.

GEEM Z.W., KIM J.H., LOGANATHAN G.V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. *Simulation* 76. v. 2, p. 60-68, 2001.

HAJELA P, LEE E. Genetic algorithms in truss topological optimization. *Int JSolids Struct.*32(22):3341–57, 1995.

HE Q., WANG L. A hybrid particle swarm optimization with a feasibility-based rule for constrained optimization. *Applied Mathematics and Computation*. v. 186, p.1407–1422, 2007.

HE Q., WANG L. An effective co-evolutionary particle swarm optimization for engineering optimization problems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. v. 20, p. 89–99, 2006.

HOLLANDER, M.; WOLFE, D. *Nonparametric Statistical Methods*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 1999.

IGEL, C.; HANSEN, N.; ROTH, S. Covariance matrix adaptation for multi-objective optimization, *Evol. Comput.* v. 15, . p. 1–28, 2007.

IYENGAR,N.G.R. E GUPTA,S.K. Structural design Optimization,Affiliated. East west press Ltd. New Delhi, 1997.

KANNAN, K.; KRAMER, S.N. An augmented lagrange multiplier based methodfor mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design, *Journal of Mechanical Design*. v. 116, p. 405–411, 1994.

KARABOGA D., BASTURK B. Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems, *LNAI, Springer-Verlag, Berlin*. v. 4529, p. 789–798, 2007.

KARABOGA, D.; AKAY, B.; A comparative study of artificial bee colony algorithm, *Appl. Math. Comput.* v. 214, p.108–132, 2009.

KARABOGA, D.; BASTURK, B. Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems, *LNAI, vol. 4529, Springer-Verlag, Berlin*. p. 789–798, 2007.

KENNEDY J., EBERHART R. Particle swarm optimization. Proceedings of the IEEE international conference on neural networks (Perth, Australia), 1942–1948. Piscataway, NJ: IEEE Service Center; 1995.

KENNEDY J., EBERHART R. Particle swarm optimization, in: Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, Australia, p. 1942–1948, 1995.

LAMBERTI L., PAPPALETTERE C. Move limits definition in structural optimization with sequential linear programming. Part II: Numerical examples. *Comput Struct.* v. 81 p. 215–38, 2003.

LEE K. S., GEEM Z. W. A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* v.194, p. 3902–3933, 2005.

LEE, K.S.; GEEM, Z.W. A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* v. 194, p. 3902–3933, 2005.

LEMONGE A. C. C., BARBOSA H.J.C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *Int J Numer Methods Eng.* v. 59, p. 703–36, 2004.

LEMONGE A.C.C., BARBOSA H.J.C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *Int J Numer Methods Eng.* 59:703–36, 2004.

LIU H., CAI Z., WANG Y. Hybridizing particle swarm optimization with differential evolution for constrained numerical and engineering optimization, *Applied Soft Computing.* v. 10, p. 629–640, 2010.

LOBATO F. S.; VALDER STEFFEN, Jr. Multi-Objective Optimization Firefly Algorithm Applied to (Bio)Chemical Engineering System Design. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, v. 1, p. 110-116, 2013.

LOBATO, F. S.; STEFFEN Jr., V.; SILVA NETO, A. J. Resolução de Problemas Inversos de Condução de Calor usando o Método dos

Elementos de Contorno e o Algoritmo de Colônia de Vagalumes. In: Fran Sergio Lobato, 2014.

LOPEZ, R. H. ; LUERSEN, M. A.; CURSI, J. E. S. Optimization of hybrid laminated composites using a genetic algorithm. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (Impresso), v. 31, p. 269-278, 2009.

LOPEZ, R. H. ; RITTO, T. G. ; SAMPAIO, R.; CURSI, J. E. S. Optimization of a stochastic dynamical system. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (Impresso), v. 36, p. 257-264, 2014.

LOPEZ, R. H.; LUERSEN, M.A. ; CURSI, E.S. Optimization of laminated composites considering different failure criteria. Composites. Part B, Engineering, v. 40, p. 731-740, 2009.

LUERSEN, M. A.; LE RICHE, R. O. Optimisation de monopalmes de nage Rapport Technique. 2003.

MAGALHAES, T. T. ; KREMPSE, E. ; AUGUSTO, D. A. ; BARBOSA, HELIO J.C. Prediction Of The Severity Of Injuries In Athletes Via Genetic Programming. In: XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013, Pirenópolis, GO. Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013.

MARTINI K. Harmony search method for multimodal size, shape, and topology optimization of structural frameworks. J Struct Eng. 137:11, 2011.

MEZURA MONTES E., VELAZQUEZ-REYES J., COELLO C.A.C. Modified differential evolution for constrained optimization. Evol. Comput., CEC 2006, IEEE Congress, p. 25–32, 2006.

MEZURA-MONTES, E.; COELLO, C.A.C.; Useful infeasible solutions in engineering optimization with evolutionary algorithms, in: MICAI 2005: Lect. Notes Artif. Int. v. 3789, p. 652–662. 2005.

MIGUEL, L. F. F. ; LOPEZ, R. H. ; FADEL MIGUEL, L. F. . Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures



using the Firefly algorithm. *Advances in Engineering Software* (1992), v. 56, p. 23-37, 2013.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operation Research and Financial Engineering. 2006.

PARSOPOULOS K., VRAHATIS M. Unified particle swarm optimization for solving constrained engineering optimization problems. *Adv. Nat. Computation*, Springer-Verlag, Berlin LNCS. v. 3612, p. 582–591, 2005.

PEREIRA, G. C. ; OLIVEIRA, M. M. F.; EBECKEN N F. F. Genetic Optimization of Artificial Neural Networks to Forecast Virioplankton Abundance from Cytometric Data. *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*, v. 05, p. 57-66, 2013.

PRICE, K.V.; RAINER, M.; LAMPINEN, J.A. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, Springer-Verlag, 2005.

QIN, A.K.; HUANG, V.L.; SUGANTHAN, P.N.; Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization, *IEEE Trans. Evol. Comput.* 1–3, p. 1785–1791, 2005.

RAJAN S.D. Sizing, shape, and topology design optimization of trusses using genetic algorithms. *J Struct Eng.* 121(10):1480–7, 1995.

RAJAN SD. Sizing, shape, and topology design optimization of trusses using genetic algorithms. *J Struct Eng.* 121(10):1480–7, 1995.

RAJEEV S., KRISHNAMOORTHY C.S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. *J Struct Eng.* 118(5):1233–50, 1992.

RAO R.V.,SAVSANI V.J., VAKHARIA D.P. Teaching-learning-based optimization: a novel method for constrained mechanical design optimization problems, *Computer-Aided Design.* v. 43, p. 303–315, 2011.

RASHEDI, E.; NEZAMABADI-POUR, H.; SARYAZDI, S. GSA: a gravitational search algorithm, *Inf. Sci.* v. 13 (2009) p. 2232–2248, 2009.

RAY T., LIEW K.M. Society and civilization: an optimization algorithm based on the simulation of social behavior. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. v. 7, p. 386–396, 2003.

SADOLLAH, A.; BAHREININEJAD, A; ESKANDAR, H.; HAMDI, M.. Mine blast algorithm: A new population based algorithm for solving constrained engineering optimization problems. Applied Soft Computing. v.13 p. 2592-2612, 2013.

SALES M. M., LIMA B. S., ALMEIDA S. R. M., FARIAS M. M. Automatic optimization of pile draft design based on branch na bound method. The Struct. Design Tall Spec. Build., 2014.

SHIH C. J.; YANG Y. C. Generalized Hopfield network based structural optimization using sequential unconstrained minimization technique with additional penalty strategy. Adv Eng Software. 33:721–9, 2002.

STEFFEN, V. JR; NETO, A. J. S. (Org.). Técnicas de Inteligência Computacional com Aplicações em Problemas Inversos de Engenharia. 5.1ed.Curitiba: Ompipax. p. 93-106, 2014.

STORN, B.; PRICE, K.; Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, J. Global Optim. 11 (1997) structural design. J Struct Eng, ASCE. 2(121):301–6, 1995.

TANG W., TONG L., GU Y. Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables. Int J Numer Meth Eng.v. 62, p. 1737–62, 2005.

THANEDAR P.B., VANDERPLAATS G.N. Survey of discrete variable optimization for structural design. J Struct Eng, ASCE. 2(121):301–6, 1995.

THANEDAR, P. B.; VANDERPLAATS G. N. Survey of discrete variable optimization for structural design. J Struct Eng, ASCE. 2(121):301–6, 1995.

VIANA, F. A. C. ; STEFFEN, V.; BUTKEWITSCH, S.; FREITAS LEAL, M. Optimization of aircraft structural components by using

nature-inspired algorithms and multi-fidelity approximations. *Journal of Global Optimization*, v. 45, p. 427-449, 2009.

WANG L., LI L.P. An effective differential evolution with level comparison for constrained engineering design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 41, p. 947–963, 2010.

WANG Y., CAI Z. Combining multiobjective optimization with differential evolution to solve constrained optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. v. 16 (1), p. 117–134, 2012.

WANG Y., CAI Z. Constrained evolutionary optimization by means of  $(\mu + \lambda)$ -differential evolution and improved adaptive trade-off model. *Evolutionary Computation*. v. 19 (2), p. 249–285, 2011.

WANG Y., CAI Z., ZHOU Y., FAN Z. Constrained optimization based on hybrid evolutionary algorithm and adaptive constraint handling technique. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 37, p. 395–413, 2009.

WU S.J., CHOW P.T. Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms. *Comput Struct*. 56(4):695–702, 1995.

YANG X-S. Firefly algorithms for multimodal optimization. In: *Stochastic algorithms: foundations and applications, SAGA 2009. Lecture notes in computer sciences*, v. 5792, p. 169–178, 2009.

YUAN Q., QIAN F. A hybrid genetic algorithm for twice continuously differentiable NLP problems. *Computers and Chemical Engineering*. v. 34, p. 36–41, 2010.

YUN, Y. S. Study on adaptive hybrid genetic algorithm and its applications to engineering design problems. Waseda University: MSc thesis, 2005.

ZAHEARA E., KAO Y.T. Hybrid Nelder-Mead simplex search and particle swarm optimization for constrained engineering design problems. *Expert Systems with Applications*. v. 36 p. 3880–3886, 2009.

ZHANG M., LUO W., WANG X.. Differential evolution with dynamic stochastic selection for constrained optimization, *Information Sciences*. v. 178, p. 3043–3074, 2008.

ZHANG, J.; SANDERSON, A.C. JADE: adaptive differential evolution with optional external archive, *IEEE Trans. Evol. Comput.* v. 13, p. 945–958, 2009.

