Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial 1981

V. G. Boltianski
Figuras equivalentes y equicompuestas

A. I. Marcushevich
Areas y logaritmos

A. I. Marcushevich
Sucesiones recurrentes

V. G. Boltianski
?Qué es el cálculo diferencial?

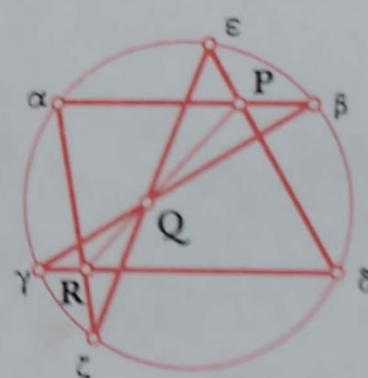
L. Golovina, I. Yaglom
Inducción en la geometría

Editorial MIR Mos

Lecciones populares de matemáticas

LA REGLA EN CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

A. S. Smogorzhevski



Editorial MIR Moscú

Geometria Projetiva
- Várias aplicações:
. Design gráfico
. Pintura
. Desenho Industrial

- Floripa, 13.07.2015 -

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

ЛИНЕЙКА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. S. SMOGORZHEVSKI

LA REGLA EN CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Traducido del ruso por
STANISLAV N. BELOUSOV

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

На испанском языке

IMPRESO EN LA URSS. 1981

CONTENIDO

PREFACIO

Sólo en el siglo XIX fue estudiado por completo el poder constructivo de la regla y el compás, es decir, el círculo de problemas que se solucionan con estos útiles clásicos de las construcciones geométricas (con ambos o con cada uno por separado). Antes de aquel entonces algunos matemáticos consideraban la regla y el compás como instrumentos universales que sirven, al usar los dos, para resolver cualquier problema constructivo [1]. Tal punto de vista desempeñó un papel negativo en la historia del desarrollo de la geometría; éste incitó abordar cada problema de construcción con una idea preconcebida acerca de su solución mediante una regla y un compás y motivó que en muchos casos se gastaron grandes esfuerzos para la búsqueda de soluciones no existentes; así sucedió, por ejemplo, con los problemas acerca de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo [2].

El estudio de las construcciones realizadas con una sola regla fue provocado por el desarrollo de la teoría de la perspectiva, así como por la necesidad de efectuar las construcciones en extensos sectores de la superficie terrestre, donde la aplicación del compás con gran apertura es técnicamente imposible de efectuar, mientras que el trazado de las líneas rectas se logra fácilmente, clavando los jalones.

En el presente libro se examinan los problemas de construcción más típicos resolubles valiéndose sólo de una regla.

Atraen la atención los casos, cuando la efectividad del uso de la regla aumenta gracias a que en el plano de las construcciones fue dibujada con anticipación cierta figura auxiliar (por ejemplo, dos rectas paralelas o dos circunferencias intersecantes). Nosotros examinaremos también muchos de estos casos.

[1] El término "problema constructivo" se emplea como sinónimo del término "problema de construcción".

[2] Así es de costumbre denominar los siguientes problemas: 1) conociendo el radio del círculo, construir un cuadrado equivalente al círculo dado; 2) dividir un ángulo dado en tres partes iguales; 3) conociendo una cara del cubo, construir una cara de un cubo nuevo, cuyo volumen es dos veces mayor que el del cubo dado. Está demostrado que el primer y el tercer problemas no pueden ser solucionados por medio de la regla y el compás, pero el segundo se soluciona con estos instrumentos solamente en algunos casos, por ejemplo, cuando el ángulo dado es recto.

En nuestra exposición nos atendremos a los métodos de geometría sintética, es decir, evitaremos aplicar los procedimientos característicos de aritmética y algebra. Sólo en algunos de los primeros párrafos se permiten insignificantes desviaciones de este principio provocadas por el deseo de simplificar la exposición.

Advertiremos que las demostraciones de los teoremas y las resoluciones de los problemas basadas en la aplicación de los métodos de geometría sintética se distinguen a menudo por una gran elegancia y originalidad; esperamos que el lector encontrará en nuestro libro muchos ejemplos que certificarán estas palabras.

Llamamos la atención del lector sobre el § 18, en el cual se muestra que es imposible construir, valiéndose sólo de una regla, los centros de dos circunferencias no concéntricas dibujadas, si éstas no tienen ni un punto común. Es sabido, que las "demostraciones de imposibilidad" pertenecen en su mayoría al número de los problemas matemáticos difíciles y se basan habitualmente en consideraciones no triviales y originales. Pensamos que el lector se interesará por el contenido del párrafo indicado anteriormente, donde se encuentra una de tales demostraciones.

A continuación se aduce el alfabeto griego, cuyas siglas nosotros emplearemos con frecuencia en el texto del libro.

Alfabeto griego

Αα – alfa	Ηη – eta	Νν – ny	Ττ – tau
Ββ – beta	Θθ – theta	Ξξ – xi	Υυ – ípsilon
Γγ – gamma	Ιι – iota	Οο – ómicron	Φφ – fi
Δδ – delta	Κκ – kappa	Ππ – pi	Χχ – ji
Εε – épsilon	Λλ – lambda	Ρρ – rho	Ψψ – psi
Ζζ – zeta	Μμ – my	Σσ – sigma	Ωω – omega

CAPÍTULO I. ALGUNOS TEOREMAS DE GEOMETRÍA SINTÉTICA Y PROYECTIVA

§ 1. ELEMENTOS DEL PLANO INFINITAMENTE ALEJADOS

Convengamos considerar que cada recta (salvo la recta infinitamente alejada, de lo que hablaremos más adelante) tiene un y sólo un punto infinitamente alejado, perteneciente también a todas las rectas paralelas a ésta y que los puntos infinitamente alejados de dos rectas, que se intersecan a una distancia finita, son diferentes.

A base de este convenio podemos afirmar que cualesquiera de dos rectas se intersecan y, además, en un solo punto; si éstas son paralelas, el punto de su intersección estará infinitamente alejado.

Denominaremos, seguidamente, recta infinitamente alejada el conjunto de todos los puntos del plano infinitamente alejados. Más tarde nos cercioraremos de la conveniencia de esta definición.

La introducción de los conceptos de los puntos infinitamente alejados y de la recta infinitamente alejada está condicionada por el carácter de las cuestiones examinadas en el presente libro. Esto nos libera de la necesidad de complicar las formulaciones de una serie de teoremas, indicando excepciones que tendrían lugar, si nosotros no hubiéramos usado estos conceptos. Por otra parte, ello está ligado directamente con la operación de proyección, que describiremos ahora.

Sea dado el plano α con el punto A, que se encuentra en éste, y el punto P fuera de α. Supongamos que la recta PA interseca el plano β, que no pasa por P, en el punto B. En este caso, el punto B se denomina *proyección* del punto A sobre el plano β; la recta PA, la *recta proyectante*; el punto P, el *centro de proyección* y el plano β, el *plano de proyección*. De modo semejante se puede examinar la proyección de una recta sobre otra, si estas rectas y el centro de proyección se hallan en el mismo plano.

Si en el plano α se da cierta figura F, entonces, al proyectar todos sus puntos del centro P sobre el plano β, obtenemos en el plano β una figura Φ, que se denomina proyección de la figura F. En particular, la proyección de una línea recta será la línea recta.

Puede resultar que el centro de proyección P es un punto infinitamente alejado. Con ello, todas las rectas proyectantes son paralelas.

La operación de proyección se puede repetir muchas veces. Por ejemplo, al proyectar la figura Φ obtenida anteriormente del centro Q, que no se encuentra en el plano β, sobre el plano γ, que no pasa a través de Q, obtenemos la figura Ψ, que también se llama proyección de la figura F. Si los planos α y γ coinciden, entonces F y su proyección Ψ se encontrarán en el mismo plano.

Examinemos un caso especial. Supongamos que en el plano α se dan dos rectas paralelas: $l \parallel m$ (fig. 1). El plano λ, que contiene l y el centro de proyección P, contiene al mismo tiempo

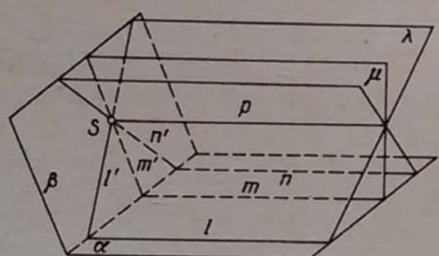


FIG. 1

todas las rectas que proyectan los puntos de la recta l; la intersección l' de este plano con el plano β es la proyección de la recta l sobre β. Con analogía, la intersección m' del plano β con el plano μ, que contiene m y P, es la proyección de la recta m sobre el plano β.

Si los planos α y β no son paralelos y el centro de proyección P se encuentra a una distancia finita, entonces las rectas l' y m' se intersecan en cierto punto S, además $PS \parallel \alpha$. Si en el plano α se da una recta más n, paralela a las rectas l y m, su proyección n' sobre el plano β también pasará por el punto S.

Es natural considerar el punto S como la proyección del punto común infinitamente alejado de las rectas l, m y n. Hablando con exactitud, hemos introducido la noción de los

puntos infinitamente alejados precisamente por que sin ésta, al examinar las rectas l', m' y n' como las proyecciones de las rectas l, m y n, nos veríamos obligados a eliminar de éstas el punto S, en vista de que éste no tendría su preimagen en el plano α.

Es fácil de comprender que la proyección de un conjunto de todos los puntos infinitamente alejados del plano α sobre el plano β será la recta del plano β, que pasa por el punto S

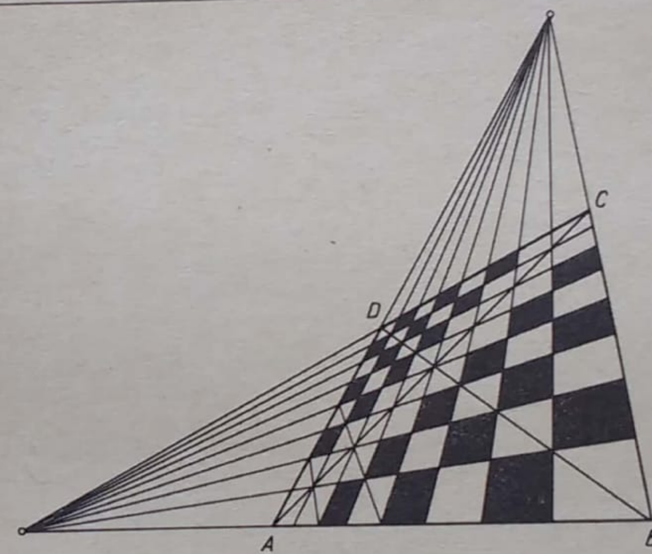


FIG.2

paralelamente al plano α; de aquí está claro por qué hemos referido este conjunto anteriormente a la categoría de las líneas rectas, denominándolo recta infinitamente alejada.

Basándose en los razonamientos indicados antes, no es difícil de construir, por ejemplo, la proyección de un damero, si se da la proyección de su contorno $ABCD$ (fig. 2).

Notemos que las rectas paralelas en perspectiva se nos representan, hablando en general, como convergentes; de esta misma forma se representan éstas en los cuadros y dibujos (véase, por ejemplo, la fig. 3).

La ciencia que estudia las propiedades proyectivas de las figuras geométricas, es decir, sus propiedades que no cambian al proyectarlas, se denomina geometría proyectiva. Algunos de los teoremas de geometría proyectiva serán aducidos en nuestro libro.

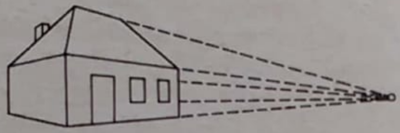


FIG. 3

En conclusión notemos que a veces examinaremos una recta como una circunferencia de radio infinitamente grande con el centro en un punto infinitamente alejado de una perpendicular a esta recta.

§ 2. SIMETRÍA CON RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA

En este párrafo y en los dos siguientes se examinan ciertos teoremas acerca de las circunferencias que desempeñan en nuestra exposición un papel auxiliar.

Sea dada la circunferencia $\varkappa$ de radio r con el centro K y el punto A distinto de K. Elijamos en el rayo KA el punto A' de manera que el producto de los segmentos KA y KA' sea igual al cuadrado del radio de la circunferencia $\varkappa$:

$$KA \cdot KA' = r^2. \qquad (1)$$

Convengamos decir, que los puntos A y A' son simétricos respecto de la circunferencia $\varkappa$.

Si uno de los puntos A o A' se encuentra fuera de la circunferencia $\varkappa$, el otro yace dentro de $\varkappa$, y viceversa; por ejemplo, de la desigualdad $KA' < r$ concluimos, teniendo en cuenta la condición (1), que $KA > r$. Sin embargo, si el punto A o A' se halla en la circunferencia $\varkappa$, entonces A y A' coinciden.

Examinemos la fig. 4, donde AB es tangente a la circunferencia $\varkappa$, BA', perpendicular a KA. Ya que el triángulo KAB es rectángulo, entonces

$$KA \cdot KA' = KB^2 = r^2,$$

por consiguiente, A y A' son simétricos con respecto a $\varkappa$. De aquí está claro el procedimiento de construcción del punto A', si se da el punto A, y del punto A, si se da el punto A'.

Sea que el segmento AA' interseca la circunferencia $\varkappa$ en el punto C y supongamos que $A'C = a$ y $CA = b$. En este caso,

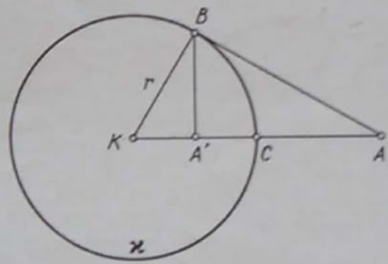


FIG. 4

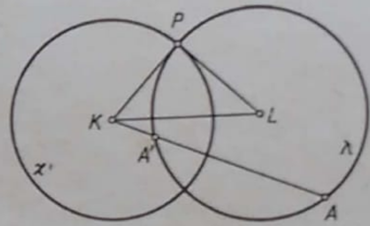


FIG. 5

$KA' = r - a$ y $KA = r + b$. En virtud de la condición (1) obtendremos:

$$(r + b)(r - a) = r^2.$$

De aquí

$$b - a = \frac{ab}{r}. \qquad (2)$$

Si al fijar los puntos C y A, aumentamos infinitamente r, entonces en el límite la circunferencia $\varkappa$ se convierte en la recta CD perpendicular a CA; al mismo tiempo de la condición (2) obtenemos:

$$b = a,$$

por consiguiente, los puntos A y A' estarán dispuestos simétricamente respecto de la recta CD. Así pues, en el caso límite, que hemos examinado, la simetría con respecto a la circunferencia se convierte en la simetría respecto de la recta [1].

TEOREMA 1. *Si la circunferencia λ pasa por dos puntos diferentes A y A', simétricos con respecto a la circunferencia $\varkappa$, entonces las circunferencias $\varkappa$ y λ son ortogonales entre sí.*

Dos circunferencias se llaman recíprocamente ortogonales, si éstas se intersecan bajo un ángulo recto, es decir, las tangentes a éstas en el punto de su intersección (o, lo que es lo mismo, sus radios trazados a este punto) son perpendiculares entre sí [2].

Sean K y L los centros de las circunferencias $\varkappa$ y λ y P, uno de los puntos de su intersección (fig. 5). Ya que KP es el radio de la circunferencia $\varkappa$, entonces la igualdad (1) toma el aspecto: $KA \cdot KA' = KP^2$. De aquí concluimos, tomando en consideración el teorema acerca del producto de la secante con respecto a la circunferencia por su parte exterior, que KP es la tangente a la circunferencia λ, por consiguiente, los radios KP y LP de las circunferencias dadas son recíprocamente perpendiculares y dichas circunferencias son ortogonales entre sí.

TEOREMA 2. *Si las circunferencias $\varkappa$ y λ son recíprocamente ortogonales, entonces la recta que pasa por el centro K de la circunferencia $\varkappa$ y que interseca la circunferencia λ, la interseca en los puntos simétricos respecto de la circunferencia $\varkappa$.*

Aprovechemos las designaciones de la fig. 5, considerando que las circunferencias $\varkappa$ y λ son mutuamente ortogonales y, por consiguiente, KP es tangente a la circunferencia λ. Sea que la recta que pasa a través de K interseca λ en los puntos A y A'. Entonces

$$KA \cdot KA' = KP^2.$$

En vista de que el producto de los segmentos KA y KA' es igual al cuadrado del radio KP de la circunferencia $\varkappa$, los puntos A y A' son simétricos con recpecto a $\varkappa$, lo que se quería demostrar.

[1] De este modo se explica el origen del término introducido anteriormente "simetría con respecto a la circunferencia".

[2] Si una de las dos circunferencias ortogonales entre sí degenera en una recta, entonces ésta pasa por el centro de la segunda circunferencia, de lo que es muy fácil cerciorarse.

§ 3. ORDEN DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA. EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS. CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS.

Sean dadas la circunferencia $\varkappa$ de radio r con el centro K y el punto A, que se encuentra de K a la distancia d. La magnitud

$$\sigma = d^2 - r^2 \tag{1}$$

se llama o r d e n d e l p u n t o A respecto a la circunferencia $\varkappa$.

Examinemos los casos siguientes.

1) A yace fuera de $\varkappa$. Entonces $d > r$, $\sigma > 0$. En este caso, la magnitud σ es igual al cuadrado de la tangente trazada de A hacia $\varkappa$ o, lo que es lo mismo, al producto de la sécante, que sale del punto A, de la circunferencia $\varkappa$ por su parte exterior (fig. 6).

2) A se encuentra en $\varkappa$. Entonces $d = r$, $\sigma = 0$.

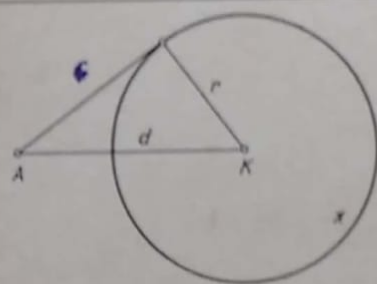


FIG. 6

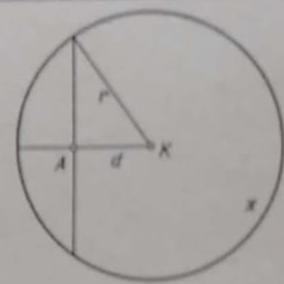


FIG. 7

3) A se halla dentro de $\varkappa$. Entonces $d < r$, $\sigma < 0$. En este caso, la magnitud σ es igual al cuadrado de la mitad de la menor de las cuerdas pertenecientes a la circunferencia $\varkappa$, y que pasan a través de A, tomado con el signo menos o, lo que es lo mismo, tomado con el signo menos el producto de los segmentos obtenidos, al dividir por el punto A cualquiera de las cuerdas pertenecientes a la circunferencia $\varkappa$ y que pasa a través de A (fig. 7).

LEMA. *Si la diferencia de los cuadrados de las distancias del punto M desde dos puntos dados A y B es una magnitud* *constante, entonces el lugar geométrico τ del punto M es una recta perpendicular a la AB.*

Supongamos que el punto N de la recta AB y el punto M fuera de ésta, pertenecen al lugar geométrico τ. Designemos las longitudes de los segmentos AB y AN por a y x, respectivamente. De acuerdo con la condición,

$$AM^2 - BM^2 = c, \tag{2}$$

donde c es una magnitud constante dada, y

$$x^2 - (a - x)^2 = c.$$

De esta última igualdad hallamos:

$$x = \frac{a^2 + c}{2a}.$$

De aquí concluimos que sobre la recta AB se encuentra un y sólo un punto del lugar geométrico τ.

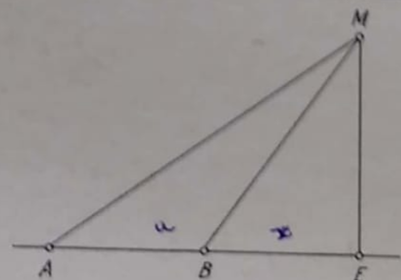


FIG. 8

Construyamos $ME \perp AB$ (fig. 8). Con ello,

$$AM^2 - AE^2 = EM^2 = BM^2 - BE^2.$$ (PITÁGORAS)

Por consiguiente,

$$AM^2 - BM^2 = AE^2 - BE^2.$$

De aquí y de la igualdad (2) tenemos:

$$AB^2 - BE^2 = c,$$

y esto significa que los puntos E y N coinciden. Por esto, τ es una perpendicular trazada a través del punto N a la recta AB, lo que se quería demostrar.

TEOREMA 3. *El lugar geométrico del punto, cuyos órdenes respecto a dos circunferencias dadas son iguales entre sí, es una recta perpendicular a la línea de los centros de dichas circunferencias.*

Sean r_1 y r_2 los radios de las circunferencias dadas, d_1 y d_2, las distancias del punto perteneciente al lugar geométrico buscado de sus centros. Entonces, en virtud de la correlación (1),

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

De donde se desprende que

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2. \tag{3}$$

Al aplicar a esta igualdad con el segundo miembro constante el lema demostrado anteriormente, vemos la justeza del teorema 3.

El lugar geométrico examinado se llama **e j e r a d i c a l** de las dos circunferencias dadas.

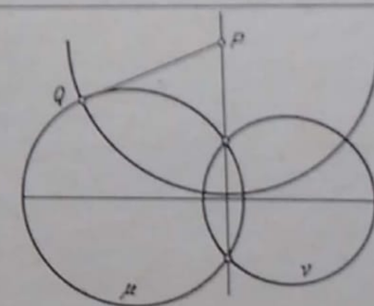


FIG. 9

El eje radical de dos circunferencias que se intersecan pasa por los puntos de su intersección, ya que el orden de cada uno de estos dos puntos con respecto a cada una de las circunferencias dadas es igual a cero.

El eje radical de dos circunferencias, que son tangentes, es su tangente común en su punto de tangencia.

Si dos circunferencias no tienen ni un solo punto común, entonces ni una sola de estas circunferencias no tiene ningún punto común con su eje radical, ya que en caso contrario por este punto pasarían las dos circunferencias dadas.

TEOREMA 4. *El eje radical de las circunferencias* μ y ν (sin su cuerda común, si éstas se intersecan) *es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a* μ y ν.

Tomemos en el eje radical de las circunferencias μ y ν un punto P exterior a éstas (fig. 9). Las tangentes de P a μ y ν son iguales entre sí por efecto de la igualdad de los órdenes del punto P con respecto a las circunferencias dadas. Sea PQ una de estas tangentes. Es evidente, que la circunferencia de radio PQ con centro P es ortogonal a las circunferencias μ y ν. Por otro lado, las tangentes a las circunferencias μ y ν desde el centro M de una circunferencia cualquiera ortogonal a éstas son iguales a su radio; por consiguiente, los órdenes del punto M con respecto a μ y ν son iguales entre sí, y M se encuentra sobre el eje radical de las circunferencias dadas.

Si las circunferencias μ y ν tienen el centro común N, entonces las circunferencias ortogonales a éstas degeneran en rectas, que pasan a través de N, y ya que el "centro" de una recta es un punto infinitamente alejado (véase el § 1), el teorema 4 nos da la base de afirmar, que el eje radical de dos circunferencias concéntricas se debe considerar como una recta infinitamente alejada. No es difícil de convencerse también que ni uno de los puntos, que se hallan a una distancia finita, no puede pertenecer al eje radical de dos circunferencias concéntricas; verdaderamente, para tal punto el primer miembro de la igualdad (3) se reduce a cero, mientras que el segundo, difiere de cero.

TEOREMA 5. *Los ejes radicales de tres circunferencias, tomados de dos en dos, ora se intersecan en un punto, que se llama centro radical de estas circunferencias, ora coinciden.*

En efecto, el punto común de dos ejes radicales tiene un mismo orden con respecto a cada una de las tres circunferencias dadas, por consiguiente, éste pertenece al tercer eje radical. De aquí, en particular, se deriva, que en el caso cuando dos ejes radicales coinciden, el tercero coincidirá con éstos, es decir, tres circunferencias dadas tienen un eje radical común.

Si los centros de tres circunferencias yacen en una recta, sus ejes radicales son paralelos y, por lo tanto, éstos o bien se intersecan en un punto infinitamente alejado, o bien coinciden.

§ 4. HACES DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

Llámase h a z d e r e c t a s un conjunto de rectas del plano, que pasan a través de un mismo punto – e l c e n t r o d e l h a z. Es evidente que por cada punto del plano, distinto del centro del haz, pasa una y solamente una recta del haz.

Se denomina h a z d e c i r c u n f e r e n c i a s un conjunto de circunferencias que poseen un eje radical común que se llama e j e r a d i c a l d e l h a z.

En particular, un conjunto de circunferencias, que son concéntricas con la circunferencia dada, forma un haz de circunferencias con el eje radical infinitamente alejado, además a través de cada punto del plano pasa una circunferencia de este haz (su centro común es una circunferencia reducida a un punto).

Si del centro de una de las circunferencias bajar una perpendicular sobre su eje radical, entonces ésta, en virtud del teorema 3, pasará por el centro de la segunda de estas circunferencias. De aquí llegamos a la conclusión de que las circunferencias del haz tienen una línea común de centros.

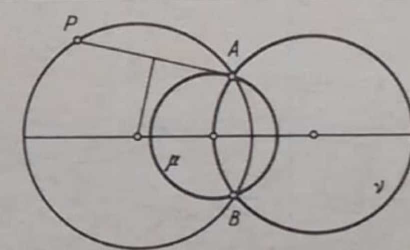


FIG. 10

Del teorema 4 se infiere que la circunferencia ortogonal a las dos circunferencias del haz es ortogonal a cada una de ellas.

Dos circunferencias μ y ν siempre determinan el haz de circunferencias. Mostremos, cómo trazar la circunferencia de este haz a través del punto arbitrario P de un plano, diferente de los puntos de las circunferencias dadas y de los puntos de su eje radical. Examinemos tres casos, considerando que las circunferencias dadas no son concéntricas.

1) Las circunferencias μ y ν se intersecan en los puntos A y B. La circunferencia buscada pasará por los puntos A, B y P. Su centro se encuentra en la línea de centros de las circunferencias μ y ν, que es la mediatriz [1] del segmento AB.

[1] Llámase mediatriz de un segmento una perpendicular a éste en su punto medio.

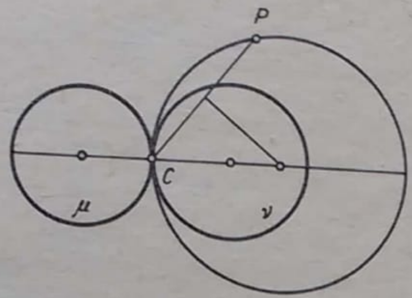


FIG. 11

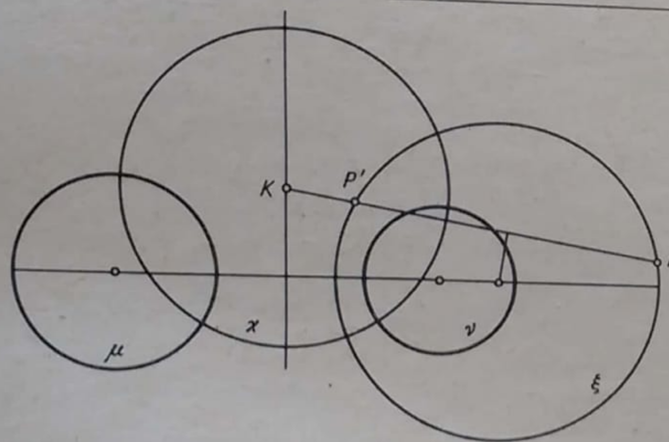


FIG. 12

En este caso, el haz se denomina e l í p t i c o. Todas las circunferencias de un haz elíptico pasan por los puntos de intersección de dos circunferencias de este haz (fig. 10).

2) Las circunferencias μ y ν tienen tangencia en el punto C. La circunferencia buscada es tangente a las circunferencias dadas en el punto C. Su centro estará en el punto de intersección de la mediatriz del segmento CP con la línea de centros de las circunferencias μ y ν.

Tal haz se llama p a r a b ó l i c o (fig. 11).

3) Las circunferencias μ y ν no tienen ni un solo punto común. Construyamos una circunferencia ϰ, ortogonal a μ y ν, y el punto P', simétrico a P respecto de ϰ (fig. 12). El centro

de la circunferencia buscada ξ estará en el punto de intersección de la mediatriz del segmento PP' con la línea de centros de las circunferencias μ y ν. Efectivamente, en virtud del teorema 1, la circunferencia ξ es ortogonal a la circunferencia ϰ, por consiguiente, las tangentes trazadas del centro K de la circunferencia ϰ a las circunferencias μ, ν y ξ son iguales entre sí.

Si los puntos P y P' coinciden, entonces la tangente de P a ϰ desempeñará el papel de mediatriz del segmento PP'. Si P es un punto de intersección de la circunferencia ϰ con la línea de centros de las circunferencias μ y ν, entonces la circunferencia ξ degenera en el punto P.

En el caso examinado el haz de circunferencias se denomina h i p e r b ó l i c o. En el haz hiperbólico no existen dos circunferencias que poseen un punto común.

§ 5. RAZÓN DOBLE

Examinemos en la recta l el segmento AB y el punto C, así como el punto P fuera de esta recta (fig. 13). Designemos respectivamente las rectas PA, PB y PC por a, b y c, los ángulos PAB y PBA por α y β, el ángulo APB por (a, b), etc.

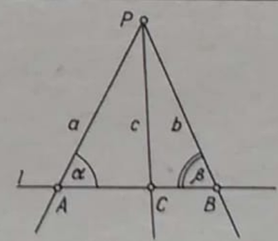


FIG. 13

Empleando el teorema de los senos, obtenemos:

$$AC = CP\frac{\operatorname{sen}(a, c)}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad CB = CP\frac{\operatorname{sen}(c, b)}{\operatorname{sen}\beta}.$$

De donde se desprende que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\operatorname{sen}(a, c)}{\operatorname{sen}(c, b)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad (1)$$

Al calcular la relación $AC:AB$ según la fórmula (1), es necesario tomar en consideración las direcciones de los segmentos y ángulos: atribuiremos signos iguales a dos segmentos, si sus direcciones coinciden, y signos diferentes, si sus direcciones son opuestas. Un acuerdo análogo se introduce también para los ángulos. En virtud de esto $AC:CB>0$, si C se halla entre A y B y $AC:CB<0$, si C se encuentra sobre la recta AB fuera del segmento AB.

Examinemos un punto más D en la recta l y la recta PD, la cual designaremos con d. De modo semejante a la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{\operatorname{sen}(a,d)}{\operatorname{sen}(d,b)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{2}$$

Establezcamos las designaciones siguientes:

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB},$$

$$(abcd)=\frac{\operatorname{sen}(a,c)}{\operatorname{sen}(c,b)}:\frac{\operatorname{sen}(a,d)}{\operatorname{sen}(d,b)}.$$

La magnitud $(ABCD)$ se denomina razón doble de cuatro puntos A, B, C y D en una línea recta, la magnitud $(abcd)$, razón doble de un haz de cuatro rectas a, b, c y d. La razón doble se llama también razón complicada o anarmónica.

De las (1) y (2) se desprende la igualdad siguiente:

$$(ABCD)=(abcd). \tag{3}$$

Tracemos la recta l', diferente de l, que no pasa a través de P, y designemos los puntos de su intersección con a, b, c y d por A', B', C' y D', respectivamente (fig. 14); es obvio que estos puntos se pueden examinar como proyecciones de los puntos A, B, C y D sobre la recta l' del centro P. Análogamente a la igualdad (3) tendremos:

$$(A'B'C'D')=(abcd).$$

De aquí y de la igualdad (3) obtenemos:

$$(A'B'C'D')=(ABCD).$$

De lo dicho anteriormente se desprenden los teoremas siguientes.

TEOREMA 6. *Si cuatro rectas de un haz se cortan por medio de una quinta recta, que no pasa a través del centro del haz, entonces la razón doble de las cuatro rectas dadas es igual a la razón doble de los correspondientes puntos de intersección.*

TEOREMA 7. *La razón doble de cuatro puntos en una recta no varía su magnitud al proyectarla.*

Es fácil convencerse de que una propiedad análoga poseen también cuatro rectas de un haz. No aducimos la demostración, ya que no utilizaremos esta propiedad.

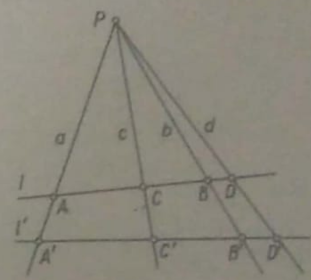


FIG. 14

TEOREMA 8. *Si en la razón doble $(ABCD)$ se cambian de lugar los puntos A y B (o bien C y D), entonces ésta pasará a la magnitud inversa a sí misma.*

En efectivo,

$$(BACD)=\frac{BC}{CA}:\frac{BD}{DA}=\frac{CB}{AC}:\frac{DB}{AD}=\frac{1}{(ABCD)};$$

$$(ABDC)=\frac{AD}{DB}:\frac{AC}{CB}=\frac{1}{(ABCD)}.$$

Notemos para concluir, que la razón doble de cuatro puntos diferentes no puede ser igual a la unidad. Efectivamente, si

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=1,$$

entonces

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}.$$

De aquí se deduce, si A y B son puntos diferentes, los puntos C y D coinciden, por consiguiente, nuestra afirmación es válida.

§ 6. DISPOSICIÓN ARMÓNICA DE CUATRO PUNTOS EN UNA RECTA Y CUATRO RECTAS DE UN HAZ

Diremos que un par de puntos C y D en una recta arbitraria divide armónicamente un par de puntos A y B en la misma recta, si la razón doble $(ABCD)$ de estos puntos es igual a -1:

$$(ABCD) = -1. \tag{1}$$

Esto significa que los puntos C y D dividen el segmento AB en la misma razón según el valor absoluto, uno – de modo interior, otro – exterior. De donde se desprende directamente el

TEOREMA 9. *En cualquier triángulo PQR un par de puntos de intersección de la recta PQ con las bisectrices del ángulo en el vértice R y del ángulo adyacente a éste divide armónicamente el par de puntos P y Q.*

Si la condición (1) está cumplida, también se dice que los puntos A, B; C, D en una misma recta forman un grupo armónico, mientras que el punto D se llama cuarto punto armónico a los puntos A, B; C. Pongamos atención sobre la disposición en esta inscripción de los signos de puntuación: *el punto y coma* separa los puntos de un par de puntos (o de un punto) del otro par.

Terminología análoga se emplea también en la razón de cuatro rectas a, b, c y d de un haz, si

$$(abcd) = -1.$$

TEOREMA 10. *Si un par de puntos C, D divide armónicamente un par de puntos A, B, entonces el par A, B también divide armónicamente el par C, D.*

Efectivamente,

$$(CDAB) = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD) = -1.$$

TEOREMA 11. *Si los puntos A y A' son simétricos con respecto a la circunferencia $\varkappa$ y la recta AA' interseca la circunferencia $\varkappa$ en los puntos M y N, entonces los puntos A, A'; M, N forman un grupo armónico.*

Sea que el punto A está fuera de la circunferencia $\varkappa$ (fig. 15). Tracemos de A las tangentes AB y AC a $\varkappa$ y construyamos las rectas BC, BM y BN. Como la recta AA' pasa por el centro K de la circunferencia $\varkappa$, entonces BC la interseca en el punto A' (véase el § 2, fig. 4).

Es evidente, que $\angle ABM = \angle MBC$, ya que estos ángulos se miden respectivamente mediante las mitades de los arcos BM y MC, iguales entre sí, de la circunferencia $\varkappa$. Así pues, la semirrecta BM es una bisectriz del ángulo B en el triángulo ABA', mientras que la semirrecta BN, perpendicular a ésta, una bisectriz del ángulo adyacente a B. Por este motivo, en virtud del teorema 9, los puntos A, A'; M, N forman un grupo armónico.

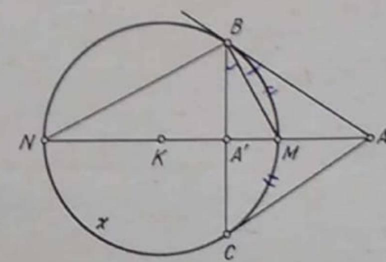


FIG. 15

Del teorema 11 se infiere un simple procedimiento para construir el cuarto punto armónico D a los tres puntos dados A, B; C que se encuentran sobre una recta: en el segmento AB, como en un diámetro, circunscribiremos la circunferencia λ y construimos el punto D, simétrico con C respecto de λ. Si el punto C es el punto medio del segmento AB, entonces, como se ve de esta construcción, D será un punto infinitamente alejado.

En el párrafo 11 mostraremos que la construcción del cuarto punto armónico se puede cumplir, utilizando solamente una regla.

§ 7. PROPIEDADES ARMÓNICAS DE UN CUADRÁNGULO COMPLETO

Los teoremas que serán demostrados en este párrafo tienen gran importancia para la exposición sucesiva; utilizaremos éstos para resolver muchos problemas constructivos.

Cuadrángulo completo se denomina una figura compuesta de cuatro puntos – los vértices del cuadrángulo, tres de los cuales no se disponen sobre una recta (A, B, C y D en la fig. 16), y de seis rectas, que unen estos puntos a pares, es decir, los lados del cuadrángulo.

Los lados de un cuadrángulo completo se intersecan, además de en los vértices, en tres puntos más (en la figura – K, L y M). Las rectas KL, LM y MK se llaman diagonales del cuadrángulo completo.

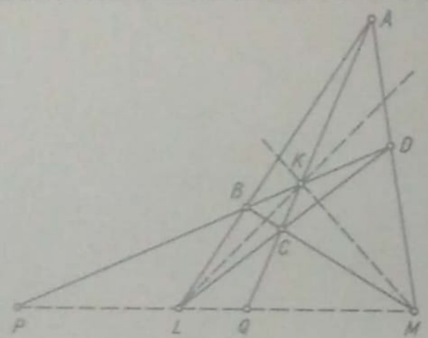


FIG. 16

TEOREMA 12. *Cada par de diagonales de un cuadrángulo completo divide armónicamente un par de sus lados que pasan por el punto de intersección de estas diagonales.*

Sea que las rectas BD y AC intersecan la diagonal LM del cuadrángulo completo $ABCD$ en los puntos P y Q (véase la fig. 16). Los puntos L, M, P y Q son respectivamente las proyecciones de los puntos B, D, P y K del lado BD desde el centro A; por esta razón (teorema 7)

$$(LMPQ) = (BDPK). \qquad (1)$$

Por otro lado, los puntos L, M, P y Q serán respectivamente las proyecciones de los puntos D, B, P y K del centro C; por este motivo,

$$(LMPQ) = (DBPK). \qquad (2)$$

Pero, en virtud del teorema 8, tenemos:

$$(DBPK) = \frac{1}{(BDPK)}.$$

Por consiguiente, al multiplicar término por término las igualdades (1) y (2), obtenemos:

$$(LMPQ)^2 = 1. \qquad (3)$$

En vista de que la igualdad $(LMPQ) = 1$ en este caso es imposible (véase el § 5), de la igualdad (3) tendremos:

$$(LMPQ) = -1. \qquad (4)$$

Por el punto K pasan cuatro rectas que intersecan la diagonal LM en los puntos L, M, P y Q: dos lados y dos diagonales del cuadrángulo completo $ABCD$; de la igualdad (4) a base del teorema 6 deducimos que estas rectas forman un grupo armónico:

$$(KL,\ KM,\ BD,\ AC) = -1.$$

Así pues, el teorema queda demostrado.

TEOREMA 13. *Un par de puntos de la diagonal de un cuadrángulo completo, a través de los cuales pasa sólo un lado de éste, divide armónicamente un par de puntos de aquella misma diagonal, por los cuales pasan dos lados de éste.*

De tal modo, para la diagonal LM del cuadrángulo completo $ABCD$ (fig. 16) los puntos del primer par serán P y Q y los puntos del segundo par, L y M. La validez del teorema se desprende de la igualdad (4).

§ 8. SECCIONES CÓNICAS

Sea que las rectas l y m, que se intersecan en el punto S, forman un ángulo que difiere del ángulo recto. La recta m, girando en torno de la recta fija l, circunscribe un plano infinito – el cono circular K, compuesto por dos huecos unidos mediante el punto S – el vértice del cono.

Al intersecar el cono K mediante cualquier plano α, obtenemos la línea q que se llama **sección cónica**. Tomando en consideración que α no pasa a través del vértice S del cono K, distinguiremos tales casos:

1) el plano α interseca todas las generatrices de un hueco del cono; entonces q es una línea oval cerrada, es decir, **una elipse** (fig. 17); cuando $\alpha \perp l$, la circunferencia es un caso particular de la elipse;

2) el plano α es paralelo a una de las generatrices del cono; entonces q es una línea no cerrada infinita, o sea, una parábola (fig. 18);

3) el plano α corta ambos huecos del cono; entonces q es una línea no cerrada de dos ramas infinitas, es decir, una hipérbola (fig. 19).

Advertiremos, que el punto, así como las dos rectas, pueden ser examinados como secciones del cono **K** mediante un plano que pasa a través de su vértice S; si S es un punto infinitamente alejado, es decir, el cono degenera en un cilindro circular,

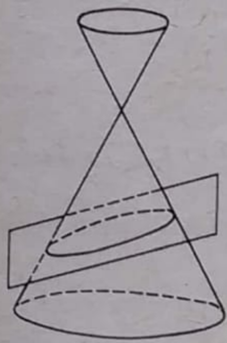


FIG. 17

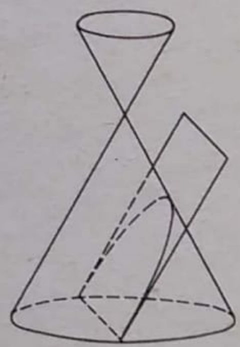


FIG. 18

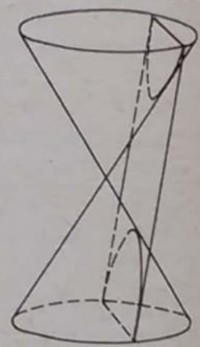


FIG. 19

entonces estas rectas serán paralelas. Sin embargo, acordemos aplicar a continuación el término "secciones cónicas" solamente para las curvas: elipse, parábola e hipérbola.

Sea que la circunferencia $\varkappa$ es una sección del cono **K** por medio del plano β, que es perpendicular al eje del cono l (y, naturalmente, que no pasa por S). Si proyectamos la circunferencia $\varkappa$ del vértice S del cono **K** sobre el plano α, entónces su proyección será la sección cónica q. De aquí se desprende que todas las propiedades proyectivas de la circunferencia se trasladan a cada sección cónica.

Esta observación la emplearemos durante la demostración de teoremas que determinan las propiedades proyectivas de las secciones cónicas: aduciremos las demostraciones para el caso de una circunferencia, de donde se desprende automáticamente la validez de los teoremas correspondientes para una sección cónica cualquiera.

§ 9. PROPIEDADES POLARES DE LAS SECCIONES CÓNICAS

Supongamos que a través del punto P, que se encuentra en el plano de la sección cónica q, pero no sobre la misma sección cónica, está trazada la recta l, que interseca q en los puntos M y N. Designemos por Q el cuarto punto armónico a M, N; P. Si la recta l gira alrededor del punto P en el plano de la sección cónica dada, entonces Q circunscriba una línea π llamada polar del punto P con respecto a q. El punto P se denomina polo la línea π.

Llamaremos polar del punto, que se encuentra en la sección cónica q, la tangente a q en este punto.

De modo semejante se determina la polar del punto con respecto a la figura que consta de dos rectas que se intersecan o de dos rectas paralelas. Si el punto se halla sobre una de las rectas dadas, su polar se llama esta recta. La polar del punto de intersección de dos rectas con respecto a estas rectas será indeterminada. De la definición de la polar se deriva que la polar del centro de la circunferencia respecto de esta misma circunferencia será una recta infinitamente alejada.

TEOREMA 14. *La polar de un punto con respecto a una circunferencia es una línea recta perpendicular a la recta que une el punto dado con el centro de la circunferencia.* (Aquí consideramos que el punto dado difiere del centro de la circunferencia).

Si el punto dado P se halla en la circunferencia dada $\varkappa$, entonces el teorema es evidente. Por este motivo, a continuación, examinemos el caso, cuando P no se encuentra en $\varkappa$.

Construyamos la recta PK, donde K es el centro de la circunferencia $\varkappa$; sea que aquella interseca la circunferencia $\varkappa$ en los puntos A y B. Designemos por Q el punto simétrico con P respecto de $\varkappa$. Sea que la recta l, que pasa a través del punto P e interseca la circunferencia $\varkappa$ en los puntos M y N, difiere de la recta PK.

En el segmento MN, como en un diámetro, construyamos la circunferencia μ. Tracemos, luego, por P y Q la circunferencia ν con el centro en la recta l. La circunferencia ν es ortogonal a la circunferencia $\varkappa$, ya que ésta pasa a través de dos puntos diferentes simétricos con respecto a $\varkappa$ (teorema 1); esta circunferencia es también ortogonal a la circunferencia μ, puesto que su centro se encuentra en el eje radical de las circunferencias $\varkappa$ y μ

(teorema 4). Por esta razón los puntos R y P de su intersección con el diámetro MN de la circunferencia μ y su prolongación son simétricos con respecto a μ (teorema 2).

El ángulo PQR, que se apoya en el diámetro de la circunferencia ν, es recto, por consiguiente, el punto R está sobre la recta perpendicular a PK en el punto Q.

Al aplicar el teorema 11 para las circunferencias $\varkappa$ y μ, nos cercioramos de que los puntos Q y R pertenecen a la recta polar π del punto P con respecto a la circunferencia $\varkappa$. Por consiguiente, π es una perpendicular a la recta PK en el punto Q, lo que se quería demostrar.

Los razonamientos expuestos anteriormente son justos tanto cuando P se encuentra fuera, como cuando P se encuentra dentro de la circunferencia $\varkappa$. Para mayor evidencia ilustramos cada uno de estos casos mediante un dibujo independiente (figs. 20 y 21). Si seguimos la definición, entonces en el primer caso tendríamos que considerar la polar del punto P como *una cuerda* de la circunferencia $\varkappa$, que pasa a través de Q perpendicularmente a PK, con ello, los extremos de esta cuerda serán los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde P a $\varkappa$ (compárese la fig. 4); sin embargo, en virtud de los razonamientos que trataremos a continuación, la polar del punto P en este caso también se llama toda recta que contiene dicha cuerda.

La consecuencia directa del teorema 14 es el

TEOREMA 15. *La polar de un punto con respecto a la sección cónica es una línea recta.*

De lo anterior es fácil hacer las deducciones siguientes:

si el punto P se halla fuera de la sección cónica q, es decir, a través de P se puede trazar una recta que no tiene puntos comunes con q, entonces su polar interseca q en los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde P a q;

si el punto P se encuentra dentro de la sección cónica q, entonces su polar no tiene puntos comunes con q;

si en los puntos A y B de la sección cónica q trazamos tangentes a q, éstas se cortarán en el polo de la recta AB.

TEOREMA 16. *Si el punto Q se encuentra sobre la polar del punto P con respecto a la sección cónica dada, entonces P yace en la polar del punto Q.*

Es suficiente convencerse de que el teorema es válido en el caso, cuando la sección cónica dada es una circunferencia; la designaremos por $\varkappa$, su centro, por K (fig. 22).

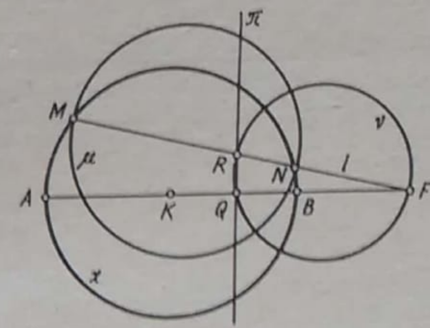


FIG. 20

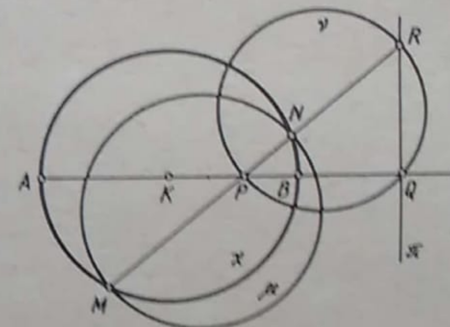


FIG. 21

El punto S, que es simétrico con P respecto de la circunferencia $\varkappa$, se halla en la polar del punto P (teorema 11), y el ángulo PSQ es recto. Por consiguiente, la circunferencia μ construida en el segmento PQ como en un diámetro, pasa a través del punto S y por este motivo es ortogonal a la circunferencia $\varkappa$. Sea que la recta KQ corta por segunda vez μ en el punto T. El punto T es simétrico con Q respecto de $\varkappa$ (teorema 2), y el ángulo PTQ es recto. De aquí, en virtud de la definición de la polar y del teorema 14, concluimos que la recta PT es una polar del punto Q con respecto a $\varkappa$. El teorema está demostrado.

El teorema es también válido cuando y solamente cuando el punto P se encuentra sobre la circunferencia $\varkappa$, ya que la polar de cada punto tangente a $\varkappa$ en el punto P pasa por P.

Señalemos que los puntos P y Q en la figura 22 se hallan fuera de la circunferencia ϰ; de la demostración del teorema 16 se desprende que es conveniente examinar sus polares no como cuerdas de la circunferencia ϰ, sino como rectas infinitas, puesto que en el caso contrario se tendría que introducir en el enunciado del teorema 16 una serie de reservas.

Sea dado que la recta l corta la circunferencia de radio r y con centro O en los puntos A y B. Supongamos que $AC = CB = d$, $OC = h$, donde C es el punto medio de la cuerda AB. Es obvio que $d^2 = r^2 - h^2$. De aquí obtenemos para la magnitud d valores imaginarios, si $h > r$. Acordemos considerar que en este

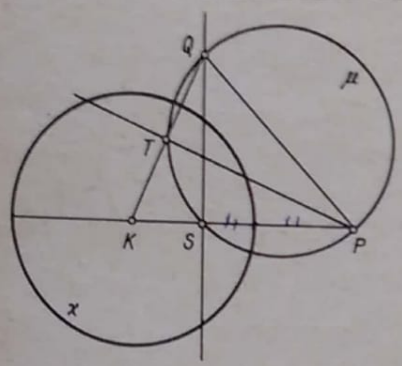


FIG. 22

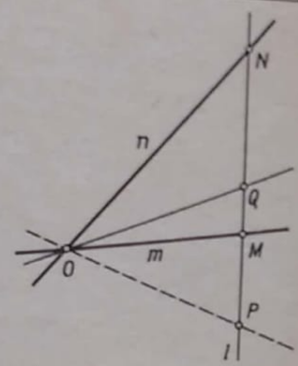


FIG. 23

caso también la recta l corta la circunferencia dada, pero los puntos de su intersección A y B serán imaginarios. La introducción del concepto de puntos imaginarios resultó muy fructífera; en particular esto permitió explicar, por qué, cuando el punto P se encuentra fuera de la circunferencia ω, a la polar del punto P con respecto de la circunferencia ω debe ser adjunta también la parte exterior de la cuerda que une los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde P a ω.

TEOREMA 17. *La polar de un punto con respecto a un par de rectas es una recta que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas (si éstas son paralelas, la polar resulta paralela a ellas).*

Sea que las rectas m y n se intersecan en el punto O (fig. 23). Tracemos por el punto P la recta l que interseca m y n en puntos diversos M y N y designemos con Q el cuarto punto

armónico a M, N; P. Las rectas m, n; OP, OQ forman un grupo armónico (teorema 6); por consiguiente, los puntos de su intersección con una recta cualquiera diferente de OP, que pasa por P, también forman un grupo armónico, de donde se desprende que la recta OQ es la polar del punto P. Si O es un punto infinitamente alejado, entonces las rectas m, n y OQ son paralelas.

§ 10. TEOREMAS DE BRIANCHON Y DE PASCAL

Previamente hagamos la siguiente observación: si en las tangentes a la circunferencia ϰ en sus puntos A y B marcar por un lado de la recta AB segmentos arbitrarios, pero iguales entre sí $AA_1 = BB_1$, entonces a través de los puntos A_1 y B_1 puede ser trazada una circunferencia que haga contacto con las rectas AA_1 y BB_1 (fig. 24). Esto se infiere de la simetría de la figura dada con respecto al diámetro de la circunferencia ϰ perpendicular a la cuerda AB.

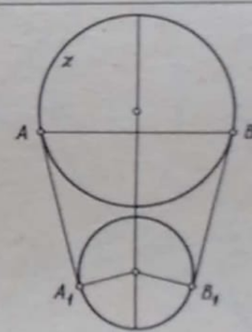


FIG. 24

TEOREMA 18 (de Brianchon). *En el hexágono circunscrito alrededor de la sección cónica las diagonales, que unen los vértices opuestos, se intersecan en un mismo punto.* Es evidente que este teorema es suficiente demostrar para el caso de una circunferencia.

Sea que los lados AB, BC, CD, DE, EF y FA del hexágono $ABCDEF$ hacen contacto con la circunferencia ϰ respectivamente en los puntos a, b, c, d, e y f (fig. 25). Tomemos el segmento arbitrario MN y construyamos correspondientemente en los rayos aB, bB, cD, dD, eF y fF los segmentos:

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon = f\zeta = MN. \qquad (1)$$

Tracemos por los puntos α y δ la circunferencia λ que es tangente a las rectas $A\alpha$ y $E\delta$, por los puntos γ y ζ, la circunferencia μ que es tangente a las rectas $C\gamma$ y $A\zeta$ y por los puntos ε y β, la circunferencia ν que es tangente a las rectas $E\varepsilon$ y $C\beta$. La posibilidad de estas construcciones se desprende de las igualdades (1).

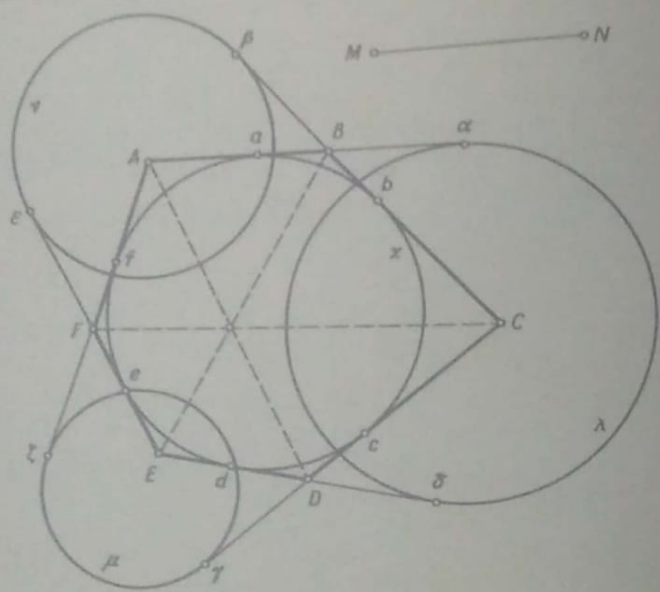


FIG. 25

Es fácil cerciorarse de que las rectas AD, BE y CF serán correspondientemente los ejes radicales de los pares de circunferencias: λ y μ, λ y ν, μ y ν. Por ejemplo, los puntos B y E se encuentran en el eje radical de las circunferencias λ y ν, ya que $B\alpha = B\beta$ y $E\delta = E\varepsilon$ ($B\alpha = MN - aB$, $B\beta = MN - bB$; $E\delta = MN + Ed$, $E\varepsilon = MN + Ee$).

Por consiguiente (véase el teorema 5), las rectas AD, BE y CF

se intersecan en un punto, centro radical de las circunferencias λ, μ y ν. El teorema queda demostrado.

El teorema de Brianchon es también correcto en el caso, cuando los dos lados contiguos del hexágono $ABCDEF$ se hallan en una recta; entonces su vértice común será el punto de tangencia de esta recta con la circunferencia $\varkappa$.

Examinemos, por ejemplo, el cuadrángulo $ACDF$, circunscrito alrededor de la circunferencia $\varkappa$, como el hexágono $ABCDEF$, donde B y E son los puntos de tangencia de los lados AC y DF con la circunferencia $\varkappa$ (fig. 26). En virtud del teorema de Brianchon, la recta BE pasará por el punto S de intersección

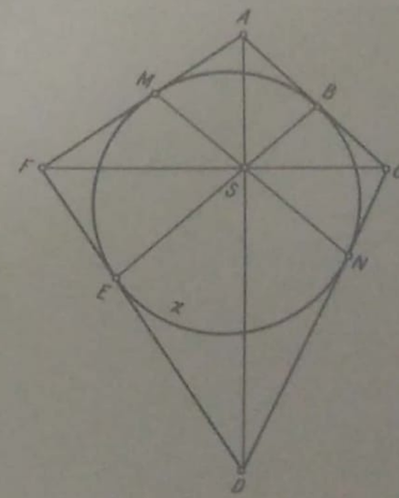


FIG. 26

de las diagonales AD y CF del cuadrilátero dado. Así mismo nos cercioramos de que por el punto S pasa también la recta MN que une los puntos de tangencia de las rectas AF y CD con la circunferencia $\varkappa$. De este modo, en el cuadrángulo circunscrito alrededor de la circunferencia las rectas, que unen los puntos de tangencia de los lados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales.

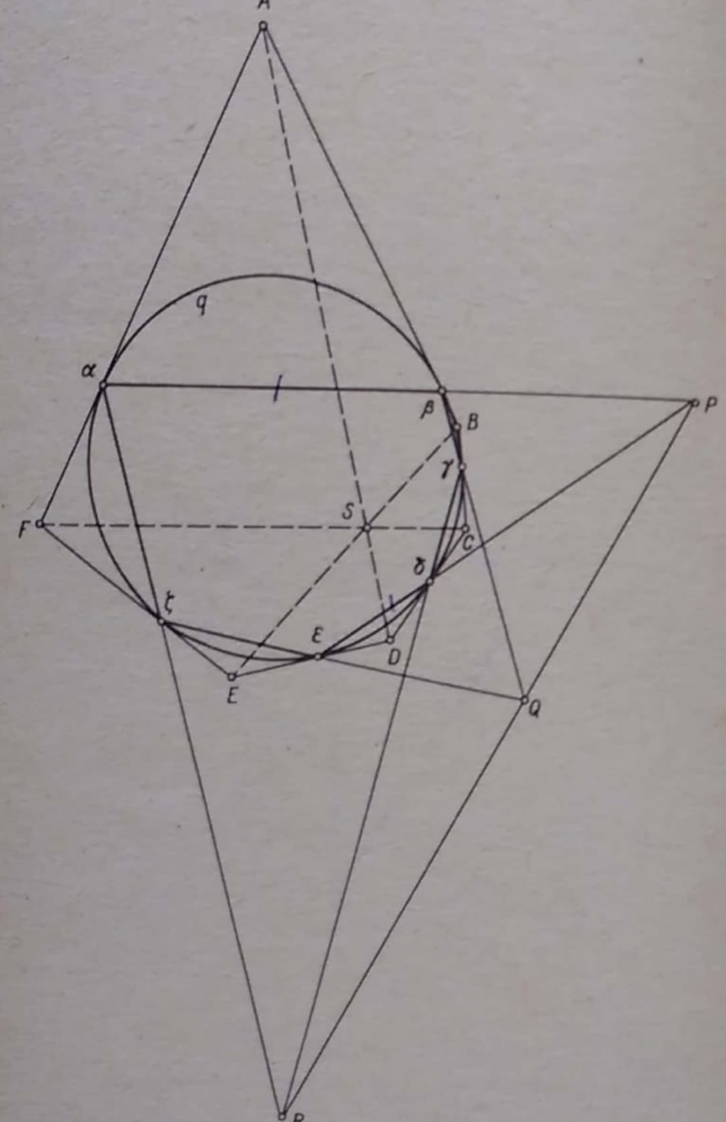


FIG. 27

TEOREMA 19 (de Pascal). *Los puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono inscrito en la sección cónica se encuentran en una recta* [1].

Sea que $\alpha\beta$ y $\delta\varepsilon$ los lados del hexágono $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$, inscrito en la sección cónica q, se intersecan en el punto P, los lados $\beta\gamma$ y $\varepsilon\zeta$, en el punto Q y los lados $\gamma\delta$ y $\zeta\alpha$ en el punto R (fig. 27). Construyamos en los vértices de este hexágono las tangentes a q y designemos por $ABCDEF$ el hexágono formado con éstas.

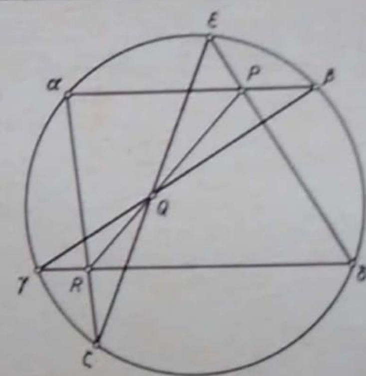


FIG. 28

El punto P se encuentra sobre la polar $\alpha\beta$ del punto A y sobre la polar $\delta\varepsilon$ del punto D; por esta razón (teorema 16) la recta AD es la polar del punto P. De modo análogo nos cercioramos de que las rectas BE y CF serán las polares de los puntos Q y R, respectivamente.

En virtud del teorema de Brianchon, las rectas AD, BE y CF se intersecan en el punto S. Dado que por S pasan las polares de los puntos P, Q y R, entonces P, Q y R se hallan en la

[1] Esto es uno de los teoremas principales de geometría proyectiva. Por primera vez éste fue enunciado y demostrado por Blaise Pascal (1623–1662) a los dieciséis años de edad, quien ya en la tierna infancia mostró un ingenio matemático brillante. El teorema de Brianchon entró en la ciencia considerablemente después, aproximadamente al cabo de 150 años del descubrimiento de Pascal.

polar del punto S, es decir, en una recta, lo que se quería demostrar.

El teorema de Pascal es válido también cuando dos vértices adyacentes del hexágono inscrito en la sección cónica se juntan en uno. En tal caso, es necesario considerar que el lado del hexágono determinado por estos vértices se convierte en la tangente a la sección cónica en aquel punto, donde se encuentran los dos vértices indicados.

Los teoremas de Pascal y de Brianchon, como vemos en sus demostraciones, tienen validez también en el caso, cuando los hexágonos, que cumplen las condiciones de estos teoremas, tienen forma de estrella (véase, por ejemplo, la fig. 28).

CAPÍTULO II. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON AYUDA DE UNA REGLA

§ 11. CONSTRUCCIÓN CON UNA REGLA DE ALGUNAS FIGURAS RECTILÍNEAS

PROBLEMA 1. En la recta l sean dados tres puntos diferentes A, B y C. Construir el punto D que divide armónicamente junto con el punto C el par de puntos A, B.

La idea de la construcción a base del uso de las propiedades armónicas de un cuadrángulo completo es evidente. A pesar de todo, examinaremos detalladamente todas las etapas de la construcción, tomando en consideración la importancia del problema dado.

Tomemos un punto arbitrario E fuera de la recta l y tracemos las rectas AE, BE y CE (fig. 29). En la recta AE tomamos el punto F, diferente de A y E, y construimos la recta BF que interseca CE en el punto G (fig. 30). Trazamos la recta AG que interseca BE en el punto H (fig. 31). La recta FH corta l en el punto buscado D (fig. 32).

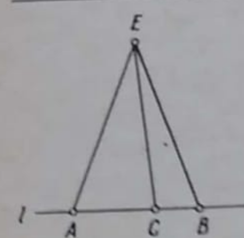


FIG. 29

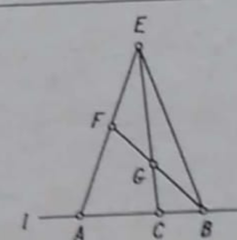


FIG. 30

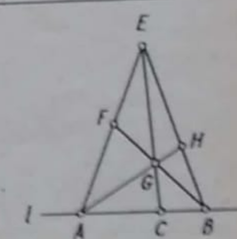


FIG. 31

En efecto, la recta AB es la diagonal del cuadrángulo completo $EFGH$; por este motivo, en virtud del teorema 13, $(ABCD) = -1$.

En la fig. 33 ejecutose la misma construcción para el caso, cuando el punto C se encuentra fuera del segmento AB.

PROBLEMA 2. Sean dadas tres rectas diferentes a, b y c pertenecientes a un haz. Construir la recta d que divide armónicamente junto con c el par de rectas a, b.

Tracemos la recta l que no pasa por el centro del haz, es decir, por el punto de intersección de las rectas dadas; sea que l corta éstas en los puntos A, B y C, respectivamente. Construyamos el punto que divide armónicamente, junto con el punto C, el par de puntos A, B (problema 1) y unámoslo mediante una recta con el centro del haz.

PROBLEMA 3. Trazar una recta por el punto dado A y el punto inaccesible [1] de intersección de las rectas dadas a y b.

La construcción viene representada en la fig. 34; su justeza se demuestra mediante los razonamientos siguientes. Designemos por X el punto inaccesible de intersección de las rectas a y b. Estas son los lados y XA y XF, las diagonales de un cuadrángulo

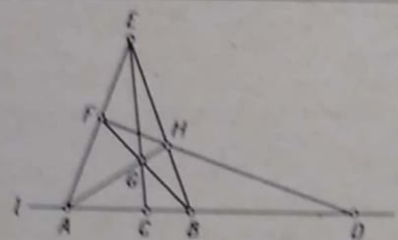


FIG. 32

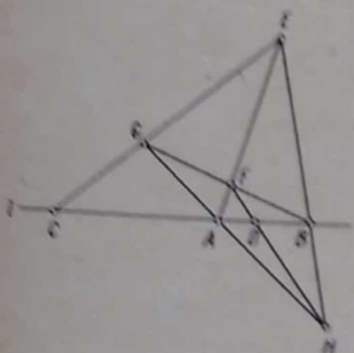


FIG. 33

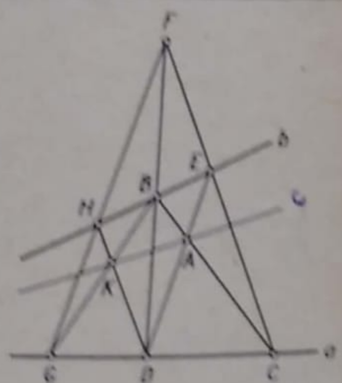


FIG. 34

[1] Llámanse partes inaccesibles de una figura las que se encuentran fuera de los límites del diseño.

completo $BDCE$; por esta razón XA es la cuarta recta armónica a las rectas a, b; XF (teorema 12). Precisamente asimismo, examinando el cuadrángulo completo $BDGH$, nos cercioramos de que XK es la cuarta recta armónica a las mismas rectas a, b; XF. Así pues, las rectas XA y XK coinciden, por consiguiente, AK es la recta buscada.

Proponemos al lector examinar el caso, cuando el punto A se halla fuera de la banda dispuesta entre las rectas a, b.

§ 12. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UNA REGLA RELACIONADAS CON LAS SECCIONES CÓNICAS

PROBLEMA 4. Sea dada una sección cónica q y el punto P que no se encuentra en q. Construir la polar π del punto P.

En las figuras 35, 36 y 37 se dan diferentes variantes de la construcción, basadas en las propiedades armónicas del cuadrángulo completo.

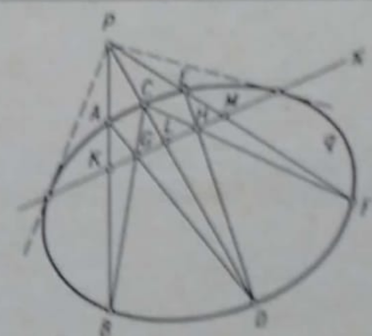


FIG. 35

Examinemos la configuración de la figura 35. Si sobre las secantes PA, PC y PE son construidos los puntos K, L y M de manera que se cumplan las condiciones:

$$(ABPK) = (CDPL) = (EFPM) = -1, \; * \tag{1}$$

entonces, en virtud de las propiedades de los cuadrángulos completos $ABDC$ y $CDFE$, las rectas KL y LM serán correspondientemente las diagonales de estos cuadrángulos, con la parti-

* SIGNIFICADO DE −1? VER PÁGINA 6, BUSCAR UNA RAZÓN DOBLE.

cularidad de que la primera de éstas pasará por el punto G y la segunda, por el punto H. Pero de las igualdades (1) se desprende que los puntos K, L y M pertenecen a la polar π del punto P, por consiguiente, π pasa a través de los puntos G y H. En realidad, los puntos K, L y M no se construyen; los examinaremos solamente al objeto de argumentar la solución propuesta.

La construcción examinada puede ser simplificada, al decidir no trazar la secante PE, ya que la diagonal KL del cuadrángulo completo $ABDC$ debe pasar por el punto G y el punto de intersección de los lados AC y BD (fig. 36).

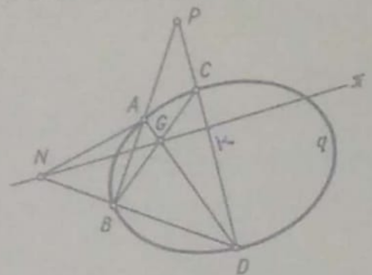


FIG. 36

La construcción hecha en la fig. 37 se puede argumentar así: de la construcción anterior se deriva que las rectas PE y PF (no trazadas en el diseño) serán respectivamente las polares de los puntos F y E; por este motivo, en virtud del teorema 16, la polar π del punto P pasará a través de los puntos E y F.

PROBLEMA 5. Sean dados la sección cónica q y el punto P que no se encuentra en q. Trazar desde P tangentes a q.

Construyamos la polar π del punto P y unamos P mediante rectas con los puntos de intersección de las líneas q y π. En la fig. 35 las tangentes desde P a q vienen representadas por líneas de trazos.

Si las líneas q y π no se intersecan, entonces no existen las tangentes buscadas.

PROBLEMA 6. Sean dadas una sección cónica y la recta π. Construir el polo P de esta recta.

Tomamos en π dos puntos arbitrarios A y B. Construyamos

la polar a del punto A y la polar b del punto B. Las rectas a y b se intersecarán en el punto buscado P (teorema 16).

PROBLEMA 7. Trazar por el punto P de la sección cónica dada una tangente a ésta.

Tracemos a través de P una secante arbitraria y hallemos su polo Q. La recta PQ será la tangente buscada.

PROBLEMA 8. Sean dados cinco puntos A, B, C, D y E de la sección cónica q. Construir un sexto punto cualquiera de la línea q.

Tomamos los puntos A, B, C, D y E por cinco vértices sucesivos del hexágono de Pascal inscrito en la línea q (fig. 38).

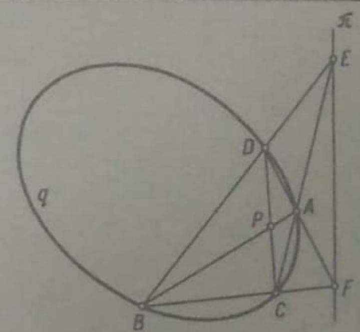


FIG. 37

Construyamos las rectas AB y DE y por el punto de su intersección P tracemos una recta arbitraria l. Sea que las rectas BC y CD intersecan l en los puntos Q y R, respectivamente. Tracemos las rectas EQ y AR; su punto común F se encuentra sobre la sección cónica q.

Efectivamente, los puntos de intersección de los lados opuestos (AB y DE, BC y EF, CD y FA) del hexágono $ABCDEF$ se hallan en una misma recta; si la recta AR por segunda vez intersecara q en el punto F', diferente de F, entonces la recta EF' no atravesaría el punto Q, lo que contradice al teorema de Pascal.

OBSERVACIÓN. Si es conocido el punto de intersección de una recta cualquiera con la sección cónica prefijada mediante cinco puntos, entonces, usando el procedimiento examinado anteriormente, puede ser construido su segundo punto de intersección valiéndose de una regla. Sin embargo, empleando una sola regla es imposible construir los puntos de intersección de la recta dada con la sección cónica determinada por cinco puntos, si ni un solo punto de los de intersección no está prefijado.

PROBLEMA 9. Sean dados cinco puntos A, B, C, D y E de la sección cónica q. Construir la tangente a q en uno de estos puntos.

Construyamos la tangente a q en el punto D (fig. 39). Tomando por lados del hexágono inscrito en q las rectas AB, BC y CD, la tangente a q en D, DE y EA, hallamos el punto P de intersección de las rectas BC y DE y el punto Q de intersección de las rectas CD y EA. Designemos por R un punto común de las rectas AB y PQ. La recta DR será la tangente buscada.

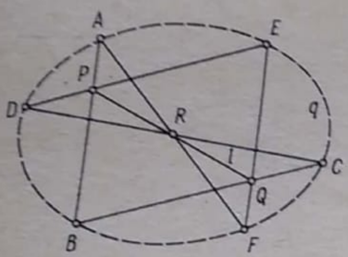


FIG. 38

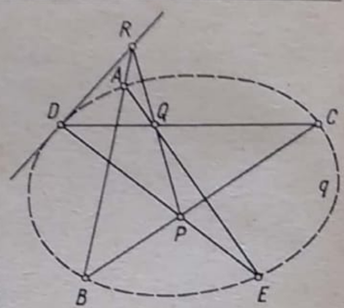


FIG. 39

PROBLEMA 10. Sean dados cuatro puntos A, B, C y D de la sección cónica q y la tangente a hacia q en el punto A. Construir el quinto punto de la línea q.

Tomando por los lados del hexágono inscrito en q las rectas: a, AB, BC y CD encontremos el punto P de intersección de las rectas a y CD. Tracemos a través de P una recta arbitraria l; sea que ésta interseca AB en el punto Q y BC, en el punto R (fig. 40). El punto común E de las rectas AR y DQ se halla en la línea q.

PROBLEMA 11. Sean dadas cinco tangentes a, b, c, d y e a la sección cónica q. Construir una sexta tangente a la línea q.

Tomamos a, b, c, d y e por los lados de un hexágono circunscrito alrededor de q (fig. 41). Sea que las rectas a y b se intersecan en el punto A y las rectas d y e, en el punto D. Tracemos la recta AD, tomemos en ésta un punto arbitrario K, diferente de A y D, y construyamos las rectas BK y CK. Sea

que CK interseca a en el punto F y BK interseca e en el punto E. La recta EF será la tangente buscada.

En efecto, si desde el punto F trazar la tangente f a q, entonces se forma un hexágono $abcdef$ circunscrito alrededor de q. Las rectas que unen los vértices opuestos de este hexágono se intersecan, en virtud del teorema de Brianchon, en un mismo punto. Dos de estas rectas, AD y CF, se intersecan en el punto K. Por consiguiente, la tangente f debe atravesar el punto E que se encuentra tanto en e, como en BK.

PROBLEMA 12. Sean dadas cinco tangentes a, b, c, d y e a la sección cónica q. Construir el punto en el cual la recta a hace contacto con la línea q.

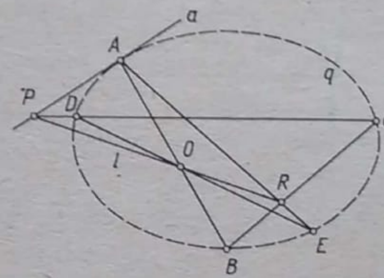


FIG. 40

Hemos notado ya (véase el § 10) que el teorema de Brianchon es también válido, cuando dos lados adyacentes a un mismo vértice del hexágono circunscrito llegan a formar una sola recta. En tal caso por el vértice común a estos lados hay que tomar el punto de su tangencia con la sección cónica dada.

La construcción se efectúa así (fig. 42). Tomando las rectas a, a (¡dos veces!), b, c, d y e por los lados de un hexágono circunscrito alrededor de q, tendremos cinco vértices del hexágono A, B, C, D y E. Tracemos las rectas AD y BE; sea que éstas se intersecan en el punto K. Construyamos la recta CK y hallemos el punto F de su intersección con la recta a. El punto F será el sexto vértice del hexágono y, por consiguiente, en este punto la recta a hace contacto con la sección cónica q.

Al emplear los teoremas de Pascal y de Brianchon, el mismo lector puede sin gran trabajo resolver siete problemas, que se ofrecen a continuación, valiéndose solamente de una regla.

1°. Sean dados cuatro puntos A, B, C y D de la sección cónica q y la tangente a ésta a en el punto A. Construir la tangente a q en el punto B.

2°. Sean dados tres puntos A, B y C de la sección cónica q, la tangente a q a en el punto A y la tangente a q b en el punto B. Construir el cuarto punto de la línea q.

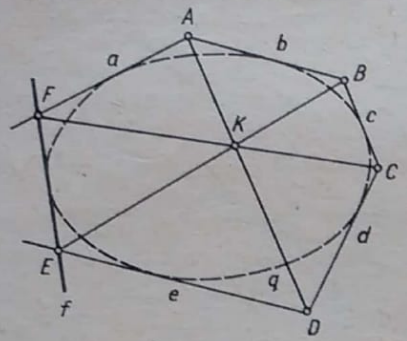


FIG. 41

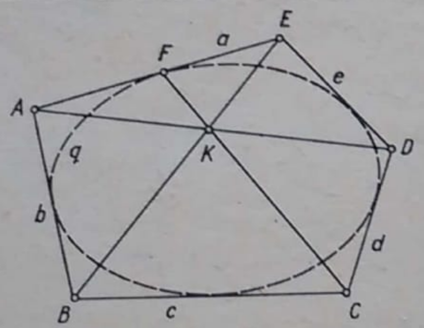


FIG. 42

3°. Sean dados tres puntos A, B y C de la sección cónica q, la tangente a q a en el punto A y la tangente a q b en el punto B. Construir la tangente a q en el punto C.

4°. Sean dadas cuatro tangentes a, b, c y d a la sección cónica q y el punto de tangencia A de la recta a con la línea q. Construir la quinta tangente a q.

5°. Sean dadas cuatro tangentes a, b, c y d a la sección cónica q y el punto de tangencia A de la recta a con la línea q. Construir el punto de tangencia de las líneas b y q.

6°. Sean dadas tres tangentes a, b y c a la sección cónica q, el punto de tangencia A de la recta a con la línea q y el punto de tangencia B de la recta b con la línea q. Construir la cuarta tangente a q.

7°. Sean dadas tres tangentes a, b y c a la sección cónica q, el punto de tangencia A de la recta a con la línea q y el punto de tangencia B de la recta b con la línea q. Construir el punto de tangencia de las líneas c y q.

§ 13. CONSTRUCCIONES POR MEDIO DE UNA REGLA, SI ESTÁN PREFIJADAS DOS RECTAS PARALELAS

En las construcciones, que examinaremos a continuación, emplearemos con frecuencia el teorema siguiente:

TEOREMA 20. *Una recta, que pasa por el punto de intersección de las diagonales de un trapecio y por el punto de intersección de sus lados no paralelos, divide por la mitad cada uno de los lados paralelos del trapecio.*

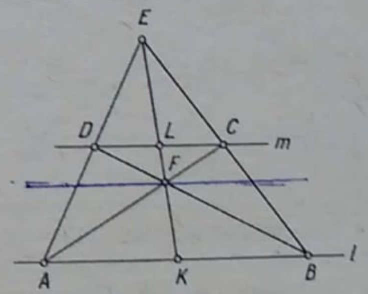


FIG. 43

Este teorema puede ser demostrado a base de las propiedades armónicas del cuadrángulo completo $CDEF$ (fig. 43): ya que la cuarta armónica a los puntos A, B; K es un punto infinitamente alejado, entonces $AK = KB$.

Es posible también otra demostración basada en razonamientos completamente elementales. Tenemos los pares siguientes de triángulos semejantes: AKE y DLE, KBE y LCE, AKF y CLF, KBF y DLF. De aquí concluimos que

$$\frac{AK}{DL}=\frac{KE}{LE}, \quad \frac{KB}{LC}=\frac{KE}{LE} \quad \text{y} \quad \frac{AK}{LC}=\frac{KF}{FL}, \quad \frac{KB}{DL}=\frac{KF}{FL}.$$

De estas correlaciones se desprenden las proporciones:

$$\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC}, \quad \frac{AK}{KB}=\frac{LC}{DL}.$$

Al multiplicar término a término las dos últimas igualdades, obtenemos:

$$\left(\frac{AK}{KB}\right)^2=1.$$

Por consiguiente, $AK=KB$.

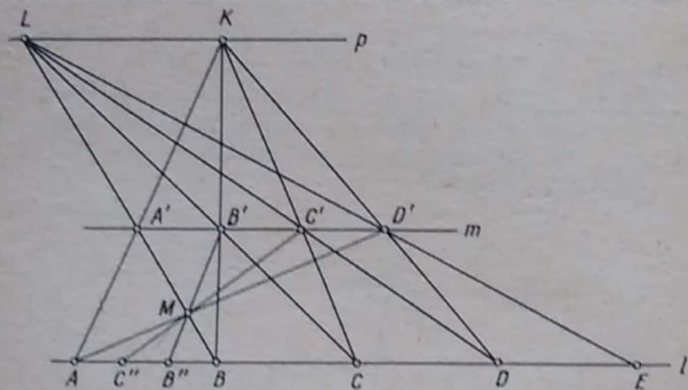


FIG. 44

PROBLEMA 13. Sea dado el segmento AB y su punto medio K. Trazar por el punto dado D una recta paralela a la recta AB.

Construyamos las rectas AD, BD, BE y KE, donde E es un punto arbitrario del rayo AD (véase la fig. 43). Designemos por F el punto de intersección de las rectas BD y KE. Tracemos la recta AF; ésta corta BE en cierto punto C. Construyamos la recta CD; ésta es paralela a la recta AB.

PROBLEMA 14. Las rectas l y m son paralelas. Dividir por la mitad el segmento AE de la recta l.

Tomemos un punto arbitrario E, que no se halla ni sobre l,

ni sobre m (véase la fig. 43), y tracemos las rectas AE y BE. Sea que estas rectas intersecan m correspondientemente en los puntos D y C. Construyamos las rectas AC y BD; designemos su punto de intersección por F. La recta EF pasará a través del punto medio del segmento AB.

PROBLEMA 15. Por el punto A, que se encuentra fuera de las rectas paralelas dadas l y m, trazar una recta paralela a las dadas.

Dividamos por la mitad un segmento arbitrario sobre la recta l (problema 14) y por A tracemos una recta paralela a la recta l (problema 13).

PROBLEMA 16. Sean dadas dos rectas paralelas l y m y el segmento AB sobre l. Aumentar el segmento AB n veces (n es un número entero).

A través del punto arbitrario K (fig. 44), que se encuentra fuera de las rectas l y m, tracemos una recta p paralela a las rectas dadas (problema 15). Construyamos las rectas AK y BK; sea que éstas cortan m en los puntos A' y B', respectivamente. Construyamos la recta BA', que interseca p en el punto L, y la recta LB', que interseca l en el punto C. Entonces $AB=BC$. Al continuar la construcción, obtenemos los segmentos CD, DE, etc.; cada uno de éstos es igual al segmento AB.

PROBLEMA 17. Sean dadas dos rectas paralelas l y m, sobre l se encuentran el segmento AB y el punto C. Construir sobre l el segmento CD igual al segmento AB.

Por el punto arbitrario K fuera de las rectas l y m tracemos una recta paralela a las rectas dadas. La construcción posterior es evidente de la figura 45. El problema tiene dos soluciones (segmentos CD y CD').

PROBLEMA 18. Sean dadas dos rectas paralelas l y m y sobre l el segmento AB. Dividir este segmento en n partes iguales.

Supongamos que se exige dividir el segmento AB (véase la fig. 44) en tres partes iguales. Si aumentamos el segmento AB tres veces, de tal modo como esto fue hecho en el problema 16, obtendremos sobre la recta m los segmentos iguales entre sí $A'B'$, $B'C'$ y $C'D'$. Luego, trazamos las rectas AD' y BA'; designemos el punto de su intersección por M. Construyamos, finalmente, las rectas $B'M$ y $C'M$; éstas dividen el segmento AB en tres partes iguales.

PROBLEMA 19. Sean dadas dos rectas paralelas l y m y sobre l el segmento AB. Construir la $1/n$ parte del segmento AB (n es un número entero).

De acuerdo con el planteamiento del problema es suficiente

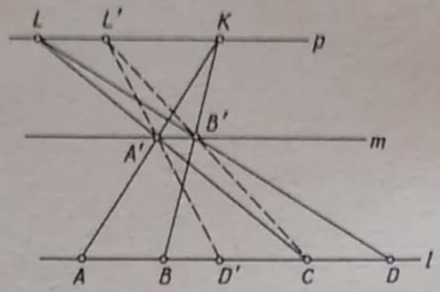


FIG. 45

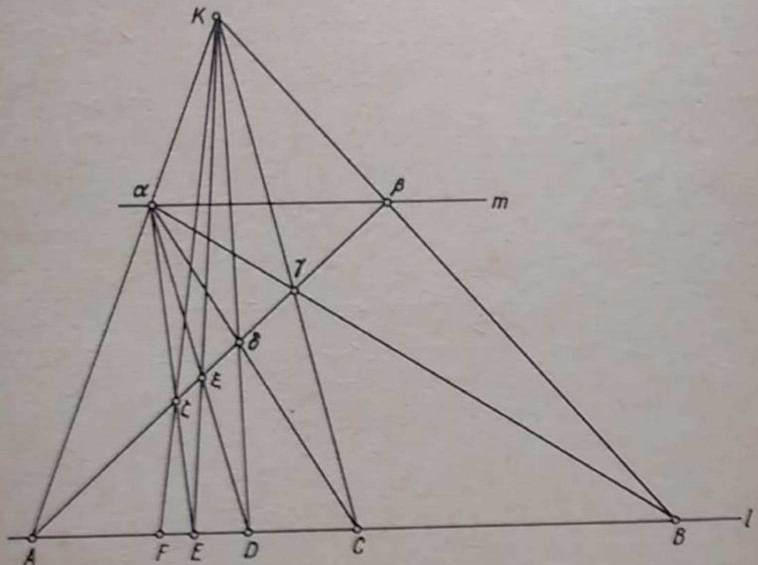


FIG. 46

construir un solo segmento igual a $1/n \cdot AB$, mientras que en el problema anterior había que construir tales n segmentos.

Aduzcamos una solución original de este problema, propuesta por Brianchon.

A través de un punto arbitrario K, fuera de las rectas l y m, tracemos las rectas AK y BK (fig. 46); sea que éstas cortan la recta m en los puntos α y β. Construyamos las rectas $A\beta$, $B\alpha$ (se intersecan en el punto γ), $K\gamma$ (interseca l en el punto C),

αC (interseca $A\beta$ en el punto δ) y $K\delta$ (interseca l en el punto D). Demostremos que $AD = 1/3\,AB$.

Examinando el cuadrángulo completo $\alpha\beta\gamma K$, llegamos a la conclusión de que los puntos A, C; D, B forman un grupo armónico; por consiguiente,

$$AD : DC = AB : CB.$$

Pero, $AB = 2 \cdot CB$ (véase el problema 14), por este motivo de la igualdad anterior tenemos: $AD = 2 \cdot DC$; por consiguiente, $AD = 1/3\,AB$.

Si trazamos además las rectas: αD (interseca $A\beta$ en el punto ξ) y $K\xi$ (interseca l en el punto E), entonces obtenemos el segmento $AE = 1/4\,AB$.

Al construir, a continuación, las rectas αE (interseca $A\beta$ en el punto ζ) y $K\zeta$ (interseca l en el punto F), obtenemos el segmento $AF = 1/5\,AB$.

Para demostrar las dos últimas igualdades, es suficiente tomar en consideración que tanto los puntos A, D; E, B, como también los puntos A, E; F, B forman un grupo armónico.

Continuando la construcción, hallaremos una sexta, una séptima,... parte del segmento AB.

§ 14. CONSTRUCCIONES CON UNA REGLA, SI ESTÁN PREFIJADOS UN PARALELOGRAMO O UN CUADRADO

Empleando un paralelogramo se puede resolver el problema siguiente:

PROBLEMA 20. Trazar por un punto dado una recta paralela a la recta dada l.

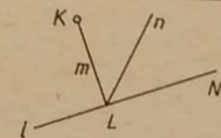
A través del punto de intersección de las diagonales del paralelogramo tracemos una recta paralela a uno de sus lados. Entonces, sobre la recta dada l se forman dos segmentos EF y FG (fig. 47) iguales entre sí; de esta forma llegamos al problema 13. Los casos $l \parallel BC$ y $l \parallel AB$ se aducen para el problema 15.

El segundo procedimiento de solución consiste en la construcción de los puntos G' (intersección de las rectas CD y EM) y E' (intersección de las rectas AB y GM). La recta $E'G'$ es paralela a la recta l; por consiguiente, de nuevo hemos llegado al problema 15.

Empleando el cuadrilátero, se pueden, salvo los problemas 14...20, resolver también dos problemas que vienen expuestos a continuación.

PROBLEMA 21. Trazar por el punto dado K una perpendicular a la recta dada l.

Sea dado el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 48). Construyamos sus diagonales y por su punto de intersección M tracemos la recta EF paralela a l (problema 20). Luego, construyamos $FG \parallel AB$ y $GH \parallel AC$.



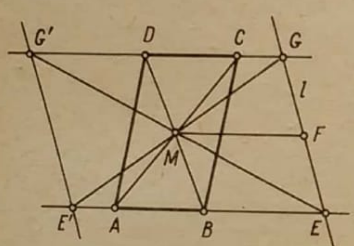


FIG. 47

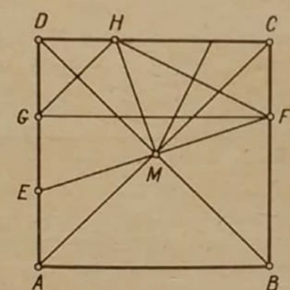


FIG. 48

Es fácil demostrar que $HM \perp EF$. En efecto, de la construcción se infiere que $CF = GD = DH$; a continuación, $MD = MC$, $\angle MDH = \angle MCF = 45°$. Por consiguiente, el triángulo MDH es igual al triángulo MCF. De donde se desprende que

$$\angle HMF = \angle HMC + \angle CMF = \angle HMC + \angle HMD =$$

$$= \angle DMC = 90°.$$

Por lo tanto, para resolver el problema es preciso trazar por el punto K una recta m paralela a HM. Esta recta será la perpendicular buscada.

PROBLEMA 22. Dividir por la mitad un ángulo recto dado.

Sea que se exige dividir por la mitad el ángulo recto dado KLN (fig. 48). En vista de que los lados de este ángulo son

paralelos a los lados del ángulo FMH (véase el problema anterior), entonces, para resolver el problema dado, es suficiente trazar por el punto L una recta paralela a la bisectriz del ángulo FMH, la cual, como es fácil de cerciorarse, es perpendicular a la recta FH. Efectivamente, el triángulo FMH es isósceles, ya que $MF = MH$ a causa de la igualdad de los triángulos MDH y MCF.

Por esta razón, la bisectriz del ángulo KLN será la recta n que pasa por el punto L y es perpendicular a la recta FH (problema 21).

§ 15. CONSTRUCCIONES MEDIANTE UNA REGLA, SI SE DAN UNA CIRCUNFERENCIA Y SU CENTRO

Si el problema de construcción es resoluble valiéndose sólo de una regla y un compás, entonces, como se sabe, su solución mediante el método algebraico se reduce a la construcción de las raíces de una o varias ecuaciones algebraicas de primer y segundo grados. Con motivo de ello, tales problemas suele denominarse problemas de segundo grado.

Merece atención el hecho siguiente: cada problema de construcción de segundo grado puede ser resuelto sólo mediante la regla, si en el plano de las construcciones está trazada una circunferencia e indicado su centro [1]. Para la demostración es suficiente convencerse de que con ayuda de este instrumento se puede hallar los puntos de intersección de una circunferencia, prefijada mediante su centro y su radio, con una línea recta, así como el punto de intersección de dos circunferencias, prefijadas de modo análogo. Verdaderamente, en los problemas

[1] Por primera vez este hecho fue establecido por el matemático frances Poncelet e, independientemente de él, por el matemático alemán Steiner.

Jean Victor Poncelet (1789—1867) durante la juventud era oficial del ejército de Napoleón; tomó parte en la campaña de Rusia en 1812; fue capturado y vivió dos años en la ciudad de Sarátov, donde se dedicó a investigaciones en la esfera de geometría proyectiva.

Jacobo Steiner (1796—1863), hijo de un campesino suizo. A los 19 años de edad, casi no sabiendo escribir, ingresó en la escuela del famoso pedagogo suizo Pestalozzi. A los 38 años fue elegido miembro efectivo de la Academia de Ciencias de Berlín.

de construcción el compás se usa solamente para efectuar estas dos operaciones[1]. Las construcciones correspondientes serán examinadas por nosotros en los problemas 30 y 31. Sin embargo, en una serie de casos se puede excluir su empleo, recurriendo para resolver los problemas a métodos más fáciles. Por esta razón, inicialmente examinaremos algunos problemas de construcciones principales y prácticamente daremos cómodos procedimientos de su solución.

Consideraremos que en el plano del diseño de cada uno de los problemas de este párrafo está trazada una circunferencia auxiliar $\varkappa$ y construido su centro K.

PROBLEMA 23. Construir un cuadrado.

Construyamos el diámetro AB de la circunferencia $\varkappa$ (fig. 49) y tracemos su cuerda $A'B'$ paralela a AB (problema 13). Por el punto C de intersección de las rectas AA' y BB' tracemos la recta CK; ésta cortará la circunferencia $\varkappa$ en los puntos D y E. El cuadrilátero $ADBE$ es un cuadrado.

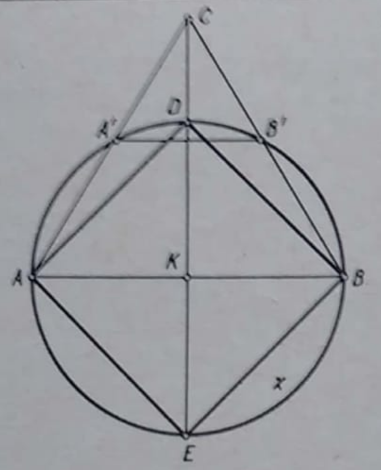


FIG. 49

[1] Es imposible circunscribir una circunferencia, valiéndose de una regla, pero se puede construir una cantidad cualquiera de puntos de la circunferencia, si son conocidos cinco puntos de ésta (problema 8); véase también, a continuación, el problema 29.

De aquí concluimos que todos los problemas de los párrafos 13 y 14 se pueden resolver mediante una regla, si está trazada una circunferencia y construido su centro.

PROBLEMA 24. Trazar por un punto dado una recta paralela a la recta l dada.

Si l pasa a través de K, tenemos el problema 13. En caso contrario es necesario trazar primero una recta cualquiera paralela a l, en consecuencia de lo cual llegaremos al problema 15. La construcción es evidente de la figura 50; la recta GH es paralela a l.

PROBLEMA 25. Trazar por un punto dado una recta perpendicular a la recta l dada.

Si l interseca la circunferencia $\varkappa$ en los puntos A y B, pero no pasa a través de su centro, entonces trazamos el diámetro AC de la circunferencia $\varkappa$; la recta CB es perpendicular a l (fig. 51). Después, por el punto dado trazamos una recta paralela a CB.

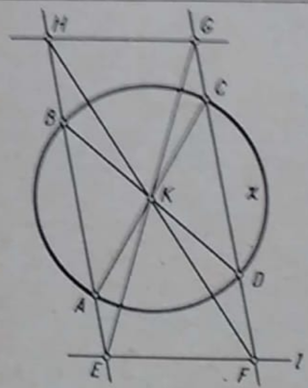


FIG. 50

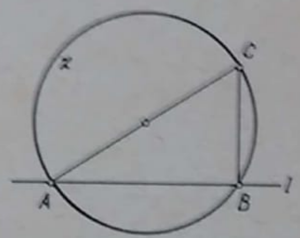


FIG. 51

En otros casos empleamos el mismo método, pero construimos previamente una recta paralela a l y que corta la circunferencia $\varkappa$ en dos puntos, que no se encuentran en un mismo diámetro.

PROBLEMA 26. Trazar por un punto dado P una recta que forme con la recta prefijada l un ángulo dado $MON = \alpha$.

La solución se aduce en la fig. 52, donde $KA \parallel OM$, $KB \parallel ON$, $KC \parallel l$, $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$, $PD' \parallel KD$ y $PE' \parallel KE$.

Si el ángulo α es agudo o bien obtuso, el problema tiene dos soluciones.

PROBLEMA 27. Duplicar el ángulo dado $MON = \alpha$.

Tracemos paralelamente a la recta OM el diámetro AB de la circunferencia $\varkappa$ y paralelamente a la recta ON, la cuerda AC (fig. 53). Entonces $\angle BKC = 2\alpha$. El lado OR del ángulo buscado MOR es paralelo a la recta KC.

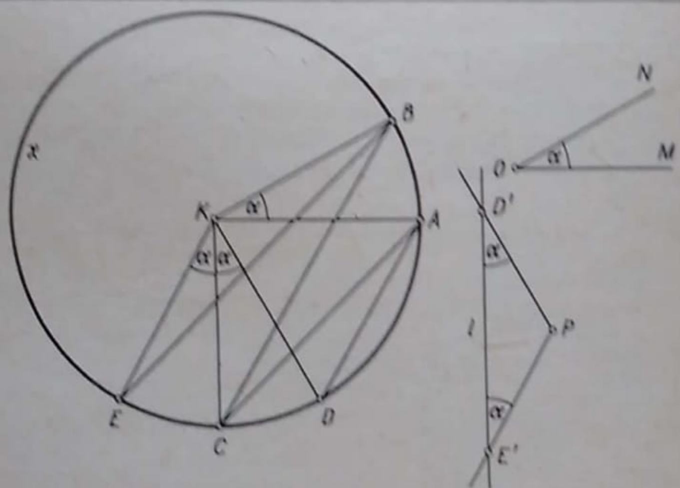


FIG. 52

PROBLEMA 28. Construir la bisectriz del ángulo dado $MON = \alpha$.

La construcción está ejecutada en la fig. 54, donde $AB \parallel OM$, $KC \parallel ON$ y $OR \parallel AC$.

PROBLEMA 29. Sea dado el segmento AB y el rayo h con el vértice C. Construir sobre h el segmento CD igual a AB.

Construyamos el paralelogramo $KABH$ y tracemos paralelamente a h el rayo KF (fig. 55). Sea que los rayos KH y KF intersecan la circunferencia $\varkappa$ en los puntos E y F. Tracemos las rectas EF y $HL \parallel EF$ hasta su intersección con KF en el punto L. Construyamos el paralelogramo $CKLD$. El segmento CD es el buscado.

La construcción se simplifica, si los puntos K, A y B o el punto K y el rayo h se encuentran en una misma recta.

Esta construcción permite hallar los puntos de la circunferencia en las rectas que pasan por su centro, si se dan su centro y su radio.

PROBLEMA 30. Construir los puntos de intersección de la recta dada l con la circunferencia μ prefijada por el centro M y el radio MN, pero no trazada.

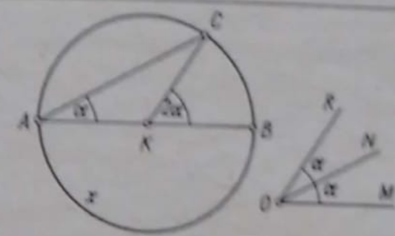


FIG. 53

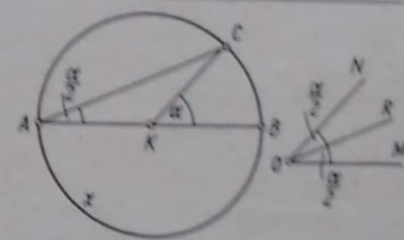


FIG. 54

Tracemos el radio KL de la circunferencia $\varkappa$ paralelo a la recta MN (fig. 56). Construyamos las rectas KM y LN y hallemos el punto A de su intersección que es el centro de semejanza de las circunferencias $\varkappa$ y μ (en la figura está construido el centro exterior de semejanza).

Luego, encontremos la recta l', a la cual pasará la recta l, si aplicamos a la figura dada la transformación de semejanza con el centro A, que traslada la circunferencia μ a la circunferencia $\varkappa$. Para ello tomemos sobre l un punto arbitrario B, construyamos los segmentos BA y BM, tracemos por K la recta

$KC \parallel MB$ hasta que interseque con AB en el punto C y a través de C tracemos $l' \parallel l$. Sea que l' corte la circunferencia $\varkappa$ en los puntos D y E. Las rectas AD y AE cortan la recta l en los puntos F y G buscados.

Si los puntos D y E coinciden, entonces l hace contacto con la circunferencia μ. Si l' no tiene puntos comunes con la circunferencia $\varkappa$, entonces l no tiene puntos comunes con la circunferencia μ.

Si el punto A es infinitamente alejado, entonces en lugar del centro exterior hay que tomar el centro interior de semejanza de las circunferencias $\varkappa$ y μ. ¿Cómo cambia la construcción en el caso, cuando las circunferencias $\varkappa$ y μ son concéntricas?

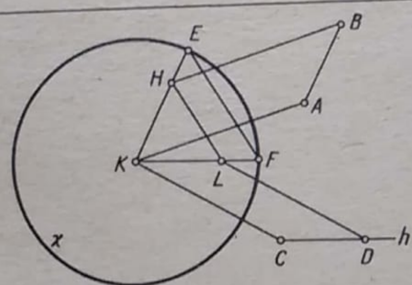


FIG. 55

PROBLEMA 31. Sean dados los centros M y N de las circunferencias μ y ν y sus radios. Construir los puntos de intersección de estas circunferencias.

Empecemos por la construcción del eje radical de las circunferencias dadas. Sea A un punto arbitrario de la circunferencia μ, B, un punto arbitrario de la circunferencia ν, además, por lo menos, uno de los puntos A y B se encuentran en la recta MN (fig. 57).

Construyamos el segmento AB, hallemos su punto medio C y tracemos las rectas MN, MC, NC, $AD \perp CM$, $BE \perp CN$. Sea que las rectas AD y BE se cortan en el punto F; construyamos $FG \perp MN$. La recta FG es el eje radical de las circunferencias μ y ν. En efecto, al construir sobre el segmento AB, como en un diámetro, la circunferencia γ, advertimos que el punto F es un centro radical de las circunferencias μ, ν y γ, por

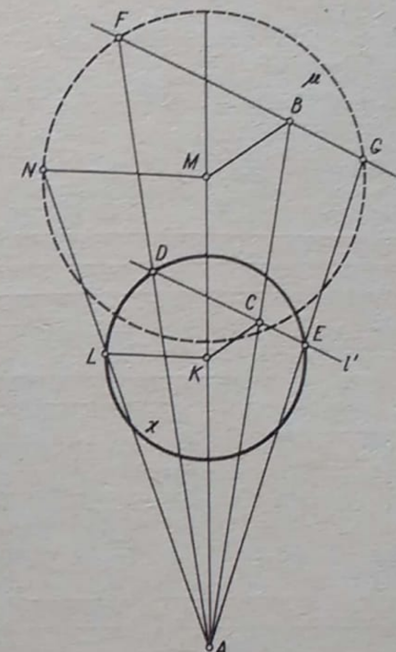


FIG. 56

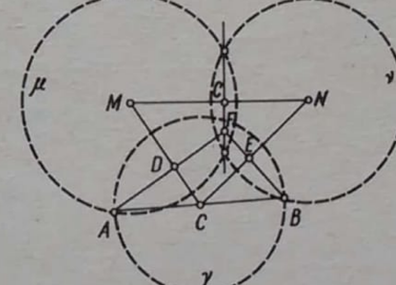


FIG. 57

consiguiente, este punto se encuentra sobre el eje radical de las circunferencias μ y ν.

Puesto que el eje radical de dos circunferencias intersecantes pasa por los puntos de su intersección, entonces el problema dado se reduce al interior: hallazgo de los puntos de intersección de las circunferencias (μ o bien ν) y la recta (FG).

§ 16. CONSTRUCCIONES POR MEDIO DE UNA REGLA, SI SE DAN EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA Y SU ARCO

Sea dada en el plano α una recta π (la llamaremos *recta principal*) y el punto P (*punto principal*) que no se encuentra en ésta. Examinemos la transformación del plano α que consiste en lo siguiente. El punto P y cada uno de los puntos de la recta π se transforman en sí mismo. Cualquier otro punto M del plano α se transforma en el punto N, que es el cuarto punto armónico a P, Q; M, donde Q es el punto de intersección de las rectas π y PM (fig. 58). Directamente de aquí se desprende que el punto N se transforma en M, es decir, los puntos M y N cambian de lugar; en efecto, de la igualdad $(PQMN) = -1$, en virtud del teorema 8, obtenemos: $(PQNM) = -1$, por consiguiente, M es el cuarto punto armónico a P, Q; N.

La transformación examinada la llamaremos *transformación armónica* del plano. Señalemos algunas propiedades de ésta.

Es fácil de ver que la recta que pasa por el punto P se transforma en sí misma. Luego, la recta m, que no pasa por P, se transforma en la recta n, que puede ser construida así: si S es el punto de intersección de m y π y el punto M, diferente de S y perteneciente a la recta m, se transforma en el punto N, entonces trazaremos la recta n por S y N (fig. 59). En efecto, en virtud del teorema 6, cualquier punto M' de la recta m se transforma en el punto de intersección de las rectas PM' y SN.

Si S es un punto infinitamente alejado, entonces $n \parallel m \parallel \pi$.

Si m es una recta infinitamente alejada, entonces n divide por la mitad los segmentos que unen el punto P con los puntos de la recta π.

Si P es un polo de la recta π respecto a la sección cónica q, entonces q se transforma en sí misma, además, los puntos de

intersección de la línea q con la recta, que pasa por P, cambian de lugar. Este hecho es una consecuencia de las propiedades polares de las secciones cónicas (véase el § 9).

PROBLEMA 32. Está trazado el arco AB y el centro K de la circunferencia $\varkappa$. Construir los puntos de intersección de la circunferencia $\varkappa$ con la recta dada m.

Advirtamos, sobre todo, que por el punto dado o construido H de la circunferencia $\varkappa$ (en el arco AB o bien fuera de éste) se puede trazar, usando solamente una regla, la tangente a $\varkappa$ (problema 7); si trazamos por H una recta arbitraria, se puede

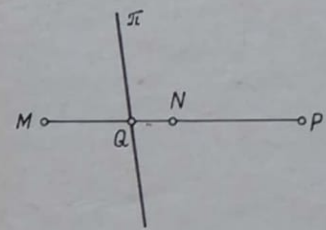


FIG. 58

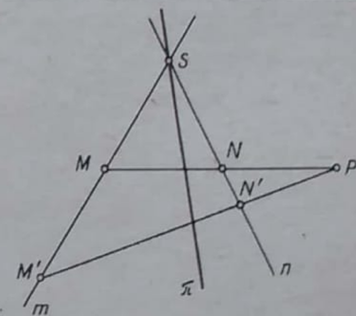


FIG. 59

construir un segundo punto de intersección de esta recta con la circunferencia $\varkappa$ (problema 8). Efectivamente, la circunferencia $\varkappa$ es una sección cónica, y en su arco AB se pueden tomar tantos puntos, como sea necesario para resolver los problemas indicados.

Procedamos a resolver el problema planteado.

Tracemos la recta AB y construyamos su polo P con respecto a la circunferencia $\varkappa$ como el punto de intersección de las tangentes a $\varkappa$ en A y B (fig. 60). Consideraremos que la recta m no tiene puntos comunes con el arco dado AB e interseca la recta AB en el punto S.

Tomemos sobre m un punto arbitrario M diferente de S y tracemos la recta PM; sea que ésta corta la recta AB en el punto Q. Construyamos el cuarto punto armónico N a P, Q; M y la recta SN. Sea que esta recta interseca el arco dado AB en los puntos C y D, mientras que las rectas PC y PD cortan

m en los puntos E y F. Estos serán los puntos buscados de intersección de la circunferencia $\varkappa$ con la recta m.

En efecto, tomando el punto P y la recta AB por el punto y la recta principales y empleando para la figura construida una transformación armónica, notemos que la circunferencia $\varkappa$ se transforma en sí misma, mientras que las rectas m y SN cambian de lugar, por consiguiente, cambian de lugar sus puntos de intersección con la circunferencia $\varkappa$.

El análisis del problema 32 nos lleva a la conclusión, de que cada uno de los problemas constructivos de segundo grado se puede resolver con una regla, si en el plano de las construcciones están trazados el centro y el arco de cierta circunferencia $\varkappa$,

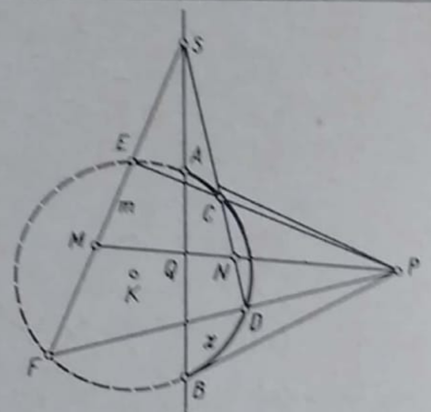


FIG. 60

ya que en este caso también, valiéndose sólo de una regla, se pueden hallar los puntos de intersección de la circunferencia $\varkappa$ con una recta cualquiera, que la cruza y, por esto, cumplir todas las construcciones del párrafo 15. Por primera vez a esta conclusión llegaron, independientemente uno del otro, el matemático italiano Severi y el matemático D. D. Mordujay-Boltovskoy [1].

[1] Dmitri Dmitrievich Mordujay-Boltovskoy (1876–1952) conocido por sus investigaciones en el campo de la geometría e historia de la matemática. El dio comienzo al estudio sistemático de la teoría de las construcciones geométricas en el espacio de Lobachevski.

§ 17. CONSTRUCCIÓN MEDIANTE UNA REGLA DE LOS PUNTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA QUE PERTENECE AL HAZ DADO DE CIRCUNFERENCIAS

Examinemos previamente dos proposiciones auxiliares.

TEOREMA 21. *Si la recta PK, donde K es el centro de la circunferencia $\varkappa$, interseca la polar π del punto P con respecto a $\varkappa$ en el punto P', entonces los puntos P y P' son simétricos con respecto a la circunferencia $\varkappa$.*

Designemos los puntos de intersección de la recta PK con la circunferencia $\varkappa$ por M y N y construyamos el punto Q simétrico a P respecto de $\varkappa$. Del teorema 11 se deriva que los puntos $P, Q; M, N$ forman un grupo armónico. Pero, en virtud de la definición de la polar, los puntos $P, P'; M, N$ también forman un grupo armónico. Por consiguiente, los puntos P' y Q coinciden, lo que se quería demostrar.

TEOREMA 22. *Si están dados un haz de circunferencias y en su plano el punto P, entonces las polares de este punto con respecto a todas las circunferencias del haz se intersecan en un mismo punto Q y el punto medio del segmento PQ se encuentra sobre un eje radical del haz.*

Examinemos tres circunferencias de un haz dado λ, μ y ν con centros L, M y N y el punto P, que no se halla sobre la recta LM (fig. 61). Sea que las polares l y m del punto P con respecto a λ y μ se cortan en el punto Q. Construyamos en el segmento PQ, como en un diámetro, la circunferencia ω; ésta pasará por el punto L' de intersección de las rectas mutuamente perpendiculares l y PL y a través del punto M' de intersección de las rectas mutuamente perpendiculares m y PM.

Los puntos P y L' son simétricos con respecto a λ, los puntos P y M', respecto de μ (teorema 21); por este motivo, en virtud del teorema 1, la circunferencia ω es ortogonal a las circunferencias λ y μ, por consiguiente, ésta es también ortogonal a la circunferencia ν, y su centro O se encuentra sobre el eje radical del haz.

Construyamos la recta PN y designemos por N' el segundo punto de su intersección con la circunferencia ω. La polar n del punto P respecto a la circunferencia ν pasa por N' (en virtud de la ortogonalidad de las circunferencias ν y ω) y es perpendicular a la recta PN; por consiguiente, esta polar será la recta $N'Q$ ($\angle PN'Q = 90°$, ya que éste descansa en el diámetro

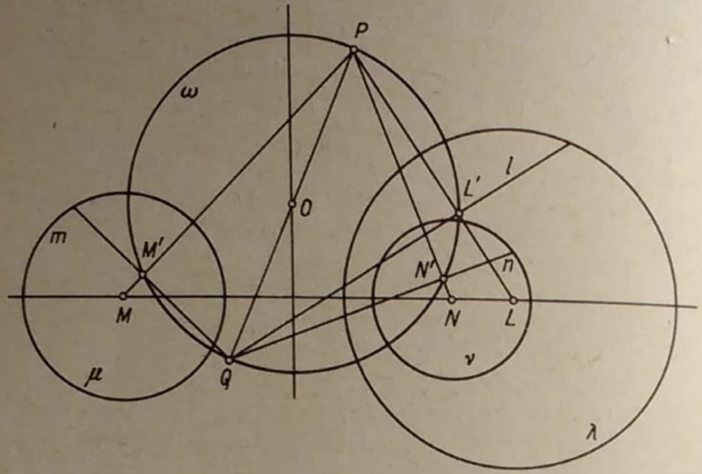


FIG. 61

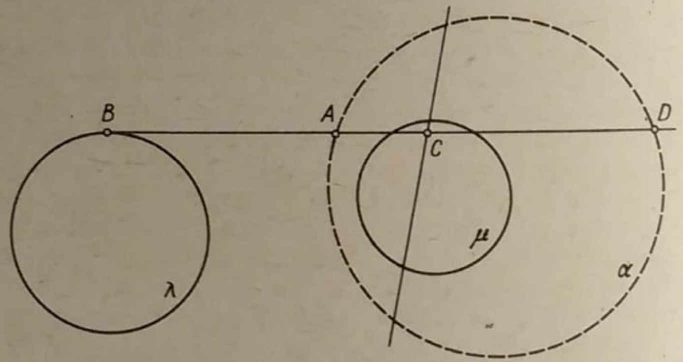


FIG. 62

de la circunferencia ω). De aquí se desprende la validez del teorema.

Si el punto P se encuentra sobre la línea de centros de un haz, entonces sus polares con respecto a las circunferencias λ, μ y ν son paralelas; en este caso, el punto Q estará infinitamente alejado y los puntos P y Q no determinan el segmento.

Del teorema 16 se deriva, que las polares del punto Q con respecto a las circunferencias del haz dado pasan por el punto P.

Denominaremos los puntos P y Q conjugados polarmente.

Examinemos la circunferencia del haz, que pasa por P. La polar del punto P con respecto a esta circunferencia es la tangente a ésta en P; en virtud del teorema 22, ésta pasa por Q. De la misma forma nos cercioramos de que la recta PQ es tangente a la circunferencia del haz, que pasa a través de Q. Por lo tanto, la recta PQ será una tangente común de las dos dichas circunferencias.

PROBLEMA 33. Construir cinco puntos de la circunferencia α, que pasa por el punto dado A y pertenece al haz prefijado por dos circunferencias trazadas λ y μ.

Sea que el punto A se encuentra fuera por lo menos de una de las circunferencias dadas, por ejemplo, fuera de la circunferencia λ (fig. 62).

Tracemos a través de A la tangente AB a λ (B es el punto de tangencia). Construyamos el punto C conjugado polarmente con B (éste se halla sobre la recta AB) y el punto D que es el cuarto punto armónico a B, C; A.

El punto D se encuentra en la circunferencia α; esto se deduce de la definición de la polar y del hecho que la polar del punto B con respecto de α pasa, en virtud del teorema 22, por el punto C.

La construcción se puede prolongar, tomando el punto D por el inicial; en efecto, el punto D se halla en la tangente a la circunferencia λ, por consiguiente, éste se dispone fuera de esta circunferencia. Si D coincide con A, entonces para la construcción de un punto diferente de A y perteneciente a la circunferencia α, puede ser usada la segunda tangente trazada de A a λ.

Si tuviéramos cinco puntos de la circunferencia α o tres puntos y las tangentes a dos de éstos (por ejemplo, AE y DF, donde E y F son los puntos conjungados polarmente con A y D, respectivamente), entonces la construcción de nuevos puntos de esta circunferencia se puede efectuar sin usar las circunferencias λ y μ (véase el § 12).

Ahora examinemos el caso, cuando el punto A se encuentra dentro de cada una de las circunferencias λ y μ (fig. 63).

Construyamos el punto B conjugado polarmente con A. Éste se halla fuera de las circunferencias λ y μ, por consiguiente, se pueden construir tantos puntos como se quiera de la circunferencia β, perteneciente al haz dado y que pasa por B. La recta AB será una tangente común de las circunferencias α y β.

Por el punto C de la circunferencia β, diferente de B, tracemos la recta AC, hallemos el punto D, en el cual AC interseca por segunda vez la circunferencia β, y el punto E que es el cuarto punto armónico a los puntos C, D; A. La recta BE será la polar del punto A respecto a β; construimos el segundo punto (F) de intersección de esta recta con la circunferencia β. Con ello, en la recta AF, tangente a la circunferencia β, se puede construir, como fue mostrado anteriormente, el punto G, diferente de A, de la circunferencia α.

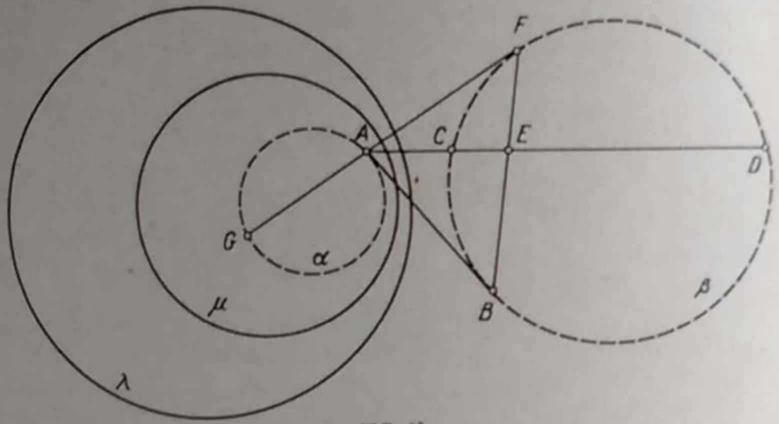


FIG. 63

De modo semejante a lo anterior se puede trazar desde G una tangente a β, diferente de GF, y hallar un tercer punto de la circunferencia α. Al prolongar la construcción, hallemos el cuarto punto de esta circunferencia, después de lo que se puede construir sus nuevos puntos sin utilizar las circunferencias λ y μ (véase el problema 10).

§ 18. SOBRE LA IMPOSIBILIDAD DE CONSTRUIR EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA VALIÉNDOSE DE UNA REGLA

En el párrafo 15 hemos examinado las construcciones mediante una regla, a condición de que en el plano de las construcciones está trazada una circunferencia auxiliar y es conocido su centro. Con motivo de esto, naturalmente, surge una pregunta: ¿es o no

posible, aprovechando solamente una regla, construir el centro de una circunferencia trazada, si éste no está dado? Esta construcción se cumple fácilmente, si, por ejemplo, en el plano de la circunferencia dada está trazado un paralelogramo o bien alguna otra circunferencia con su centro. Sin embargo, en el caso cuando no disponemos de estas u otras figuras auxiliares, el problema planteado, como se deduce del teorema 23 que se expone a continuación, es imposible de resolver.

Examinemos dos circunferencias μ y ν con centros M y N (fig. 64), las que no tienen puntos comunes. Sea que su eje radical

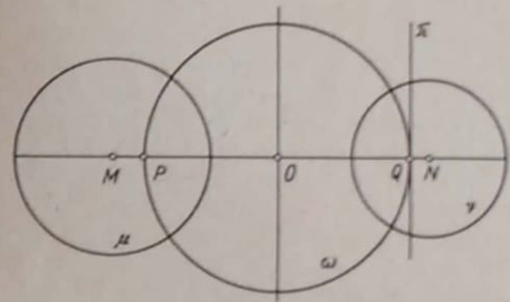


FIG. 64

corta la recta MN en el punto O. Circunscribamos la circunferencia ω con centro O, ortogonal a las circunferencias dadas. Sea que ésta interseca la recta MN en los puntos P y Q. Tracemos por Q la recta π, que es perpendicular a MN.

Los puntos P y Q son simétricos tanto con respecto a la circunferencia μ, como también respecto de la circunferencia ν (teorema 2). Por esta razón, en virtud de los teoremas 11 y 14, el punto P es un polo de la recta π con respecto a cada una de las circunferencias μ y ν.

Apliquemos a la figura construida una transformación armónica, tomando P y π por el punto y la recta principales (véase el § 16). Entonces las circunferencias μ y ν se transforman en sí mismas, pero sus centros, que se encuentran fuera del segmento PQ, se transforman en puntos, que se hallan dentro de este segmento. Esta circunstancia será aprovechada durante la demostración del teorema 23.

TEOREMA 23. *Si dos circunferencias dadas no concéntricas* μ *y* ν *no tienen ni un sólo punto común, es imposible construir sus centros M y N valiéndose solamente de una regla.*

Si tal construcción es posible, ésta se ejecuta así: seleccionemos en el plano de las circunferencias μ y ν algunos puntos arbitrarios y tracemos varias rectas arbitrarias, luego, construyamos rectas que pasen por los puntos elegidos y por los puntos, en los cuales las rectas construidas antes se intersecan una con otra y con las circunferencias dadas; finalmente hallemos el centro de una de las circunferencias dadas, como el punto de intersección de dos de las rectas construidas por nosotros.

Si aplicamos a la figura, obtenida a causa de esta construcción, la transformación armónica examinada antes, así obtenemos una nueva figura, la cual puede ser formada, repitiendo exactamente todas las construcciones hechas por nosotros durante el hallazgo del centro de una de las circunferencias dadas. La diferencia constituirá solamente en el hecho de que los puntos y las rectas elegidas arbitrariamente en el principio de la construcción serán diferentes para la primera figura. Por consiguiente, la nueva construcción es completamente idéntica a la primera, ya que cada una de éstas puede comenzarse sólo por la construcción de puntos arbitrarios y del trazado de rectas arbitrarias.

Por este motivo (si la suposición hecha por nosotros es válida), cada una de las dos construcciones examinadas debe mediante un mismo procedimiento conducir al encuentro del centro de una misma circunferencia. Pero esto es imposible, puesto que en consecuencia de la transformación armónica, los centros M y N de las circunferencias μ y ν se trasladan a puntos diferentes de M y N; por consiguiente, las rectas que en la primera construcción se intersecaron en el centro de la circunferencia μ (o bien ν), se transforman en rectas, cuyo punto de intersección no se encuentra en el centro de esta circunferencia. Así pues, la suposición acerca de la posibilidad de construir mediante una regla el centro de la circunferencia μ o ν es equívoco. Por esta razón, con mayor motivo, no se puede construir el centro de una circunferencia valiéndose de una regla, si está trazada solamente esta circunferencia.

La demostración aducida antes es de vigor también cuando y sólo cuando están trazadas algunas circunferencias no concéntricas del mismo haz hiperbólico; si, por ejemplo, el haz se determina por las circunferencias μ y ν, entonces el uso de una misma transformación armónica demuestra esta afirmación.

§ 19. CASOS CUANDO PUEDEN SER CONSTRUIDOS MEDIANTE UNA REGLA LOS CENTROS DE DOS CIRCUNFERENCIAS TRAZADAS

Para lo posterior es necesario de advertir, que se puede construir mediante una regla el diámetro de una circunferecia trazada, si en su plano están trazadas dos rectas paralelas ($p \parallel q$). Si éstas intersecan una circunferencia dada, entonces hacemos la construcción indicada en la fig. 65; la recta AB es el diámetro buscado. En otros casos llegamos a la misma configuración,

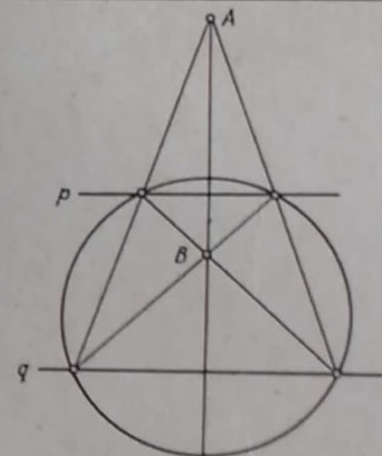


FIG. 65

aprovechando que a través de un punto arbitrario de la circunferencia dada se puede trazar una recta paralela a las circunferencias p y q (problema 15). De aquí se desprende que se puede construir por medio de una regla dos diámetros de una circunferencia trazada, y, por lo tanto, su centro, si en su plano está trazado un paralelogramo.

PROBLEMA 34. Construir mediante una regla los centros de dos circunferecias trazadas λ y μ en cada uno de los casos siguientes:

1° además de las dos circunferencias dadas en su plano está trazado un par de rectas paralelas: $p \parallel q$;

2° las circunferencias dadas se intersecan;

3° las circunferencias dadas son tangentes;

4° las circunferencias dadas son concéntricas, pero su centro común es desconocido;

5° las circunferencias dadas no son concéntricas y no tienen puntos comunes; es conocido el punto A de su eje radical;

6° las circunferencias dadas no son concéntricas y no tienen puntos comunes; es conocido el punto A de su línea de centros.

Examinemos independientemente cada uno de los casos enumerados. No tracemos las rectas indicadas en los diseños a trazos: éstas son necesarias para argumentar las construcciones.

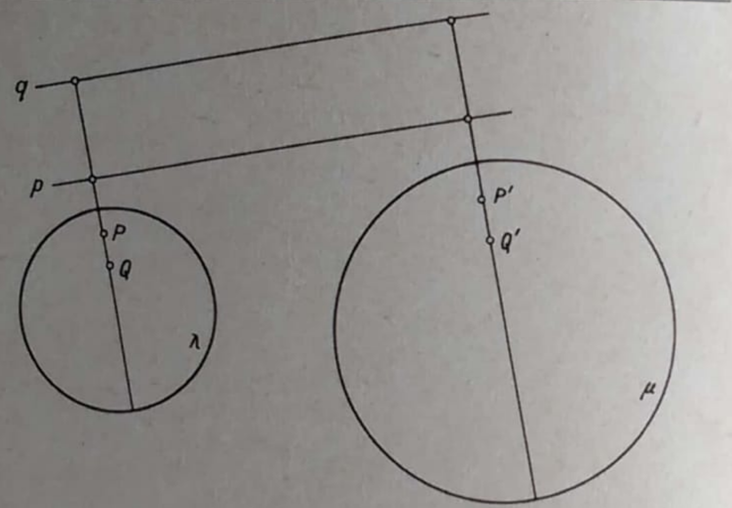


FIG. 66

1°. Construyamos los polos P y Q de las rectas p y q con respecto de λ y los polos P' y Q' de estas mismas rectas respecto a μ (fig. 66). Las rectas p, q, PQ y $P'Q'$ forman un rectángulo, ya que $PQ \perp p$ y $P'Q' \perp p$.

Si la recta $P'Q'$ coincide con PQ, entonces ésta será la línea de centros de las circunferencias dadas. En este caso, el procedimiento indicado anteriormente de construcción no es válido, pero se puede aprovechar la construcción 6°.

2°. PRIMERA SOLUCIÓN. Tomemos dos puntos arbitrarios C y D sobre una de las circunferencias dadas, diferentes de los puntos de su intersección y ejecutemos la construcción indicada

en la fig. 67. Las rectas EH y GF son paralelas, ya que $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6$. A continuación, construyamos de modo semejante dos rectas paralelas más y obtenemos un paralelogramo.

SEGUNDA SOLUCIÓN. Tracemos en el punto B de intersección de las circunferencias dadas la tangente BC a la circunferencia λ, tomemos en λ un punto arbitrario D y construyamos las rectas DA, DB y CE (fig. 68). Entonces $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, por consiguiente, $CE \parallel DB$.

Notemos que el problema puede ser resuelto mediante estos mismos procedimientos también en el caso, cuando una de las circunferencias dadas no está trazada completamente: es suficiente

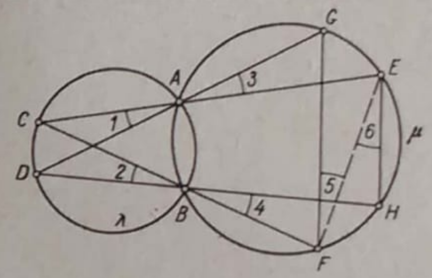


FIG. 67

tener cinco de sus puntos, entre los cuales, obligatoriamente, deben encontrarse los puntos de intersección de las circunferencias dadas.

3°. La construcción de dos rectas paralelas BC y DE viene expuesta en la fig. 69, donde $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

4°. Ejecutemos la construcción representada en la fig. 70 y obtenemos dos rectas paralelas AB y CD.

5°. Construyamos el punto B conjugado polarmente con el punto A del eje radical. La recta AB será el eje radical de las circunferencias dadas. Tomemos el punto C fuera de la recta AB y construyamos el punto D conjugado polarmente con C. La recta AB divide el segmento CD por la mitad (teorema 22), por consiguiente, se puede trazar una recta paralela a CD (problema 13) y aprovechar la construcción 1°. Si el punto A se encuentra tanto sobre el eje radical, como sobre la línea de centros de las circunferencias λ y μ, entonces el eje radical es paralelo a las polares del punto A con respecto a λ y μ.

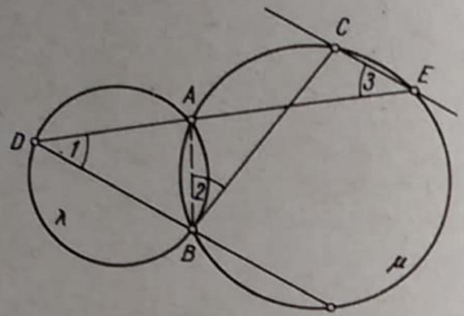


FIG. 68

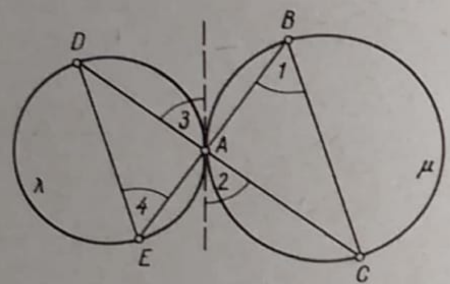


FIG. 69

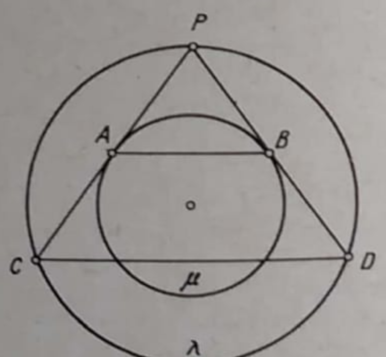


FIG. 70

6°. Al construir las polares del punto A con respecto a las circunferencias λ y μ, trazamos la línea de los centros AB de estas circunferencias (compárese la fig. 65).

Tomemos en la circunferencia λ un punto arbitrario C que no se encuentra en la recta AB (fig. 71), construimos el punto D, conjugado polarmente con C, y cinco puntos de la circunferencia γ, que pasa por D y pertenece al haz determinado por las circunferencias λ y μ (problema 33).

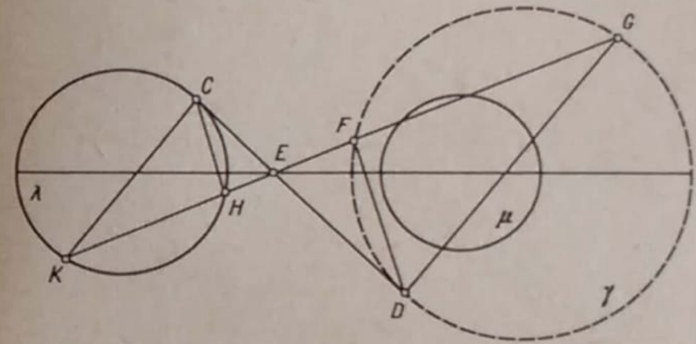


FIG. 71

La recta CD será una tangente común de las circunferencias λ y γ, por consiguiente, el punto E de su intersección con la recta AB será el centro de semejanza de estas circunferencias. Tomemos en γ un punto arbitrario F y tracemos la recta EF; sea que ésta interseca la circunferencia λ en los puntos H y K y, por segunda vez, interseca la circunferencia γ en el punto G. Entonces $DF \parallel CH$ y $DG \parallel CK$.

§ 20. ACERCA DE LA CONSTRUCCIÓN CON UNA REGLA DE LOS CENTROS DE ALGUNAS CIRCUNFERENCIAS

PROBLEMA 35. Están trazadas cuatro circunferencias $\varkappa$, λ, μ y ν con la particularidad de que ninguna de tres de éstas no pertenecen a un mismo haz. Construir con una regla el centro de una de estas circunferencias.

Consideraremos que entre las circunferencias dadas no hay concéntricas o tales que tienen puntos comunes, ya que en caso

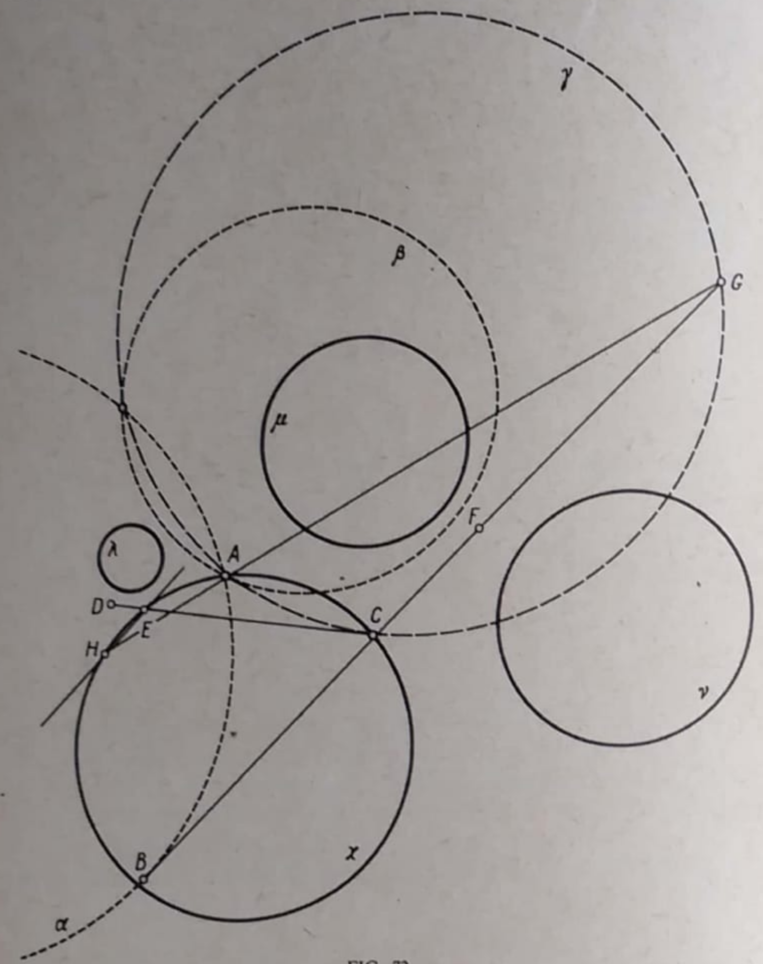


FIG. 72

contrario podríamos aprovechar las construcciones 2°, 3° ó 4° del problema 34.

El idea de la solución consiste en la construcción de una circunferencia auxiliar que interseca una de las circunferencias dadas, además, ambos puntos de intersección deben ser conocidos; después de esto se utiliza la construcción 2° del problema 34.

Tomemos en la circunferencia $\varkappa$ un punto arbitrario A y construyamos cuatro puntos más de la circunferencia α, que pasa

por A y pertenece al haz (λ, μ)[1], y cuatro puntos más de la circunferencia β, que pasa por A y pertenece al haz (μ, ν) (fig. 72).

En vista de que el segundo punto de intersección de las circunferencias $\varkappa$ y α ($\varkappa$ y β) no es conocido, es necesario construir otra circunferencia auxiliar más de manera que sea fácil hallar sus dos puntos de intersección con la circunferencia $\varkappa$. Para ello tomemos en α punto B dentro de la circunferencia $\varkappa$ y tracemos por B una tangente BC a α (C se encuentra en $\varkappa$). Advertiremos que el punto B se puede tomar también fuera de la circunferencia $\varkappa$, a condición de que la tangente B a la circunferencia α interseque la circunferencia $\varkappa$.

Designemos por γ la circunferencia que pasa a través del punto C y pertenece al haz (α, β).

Construyamos los puntos F y D conjugados polarmente con B y C respecto a las circunferencias del haz (α, β), el cuarto punto armónico G a los puntos $B, F; C$ y la recta AG. El punto G pertenece a la circunferencia γ, mientras que la recta CD hace contacto con γ en el punto C (véase el § 17). El punto A también pertenece a la circunferencia γ, ya que γ pasa por los puntos de intersección de las circunferencias α y β. Así pues, son conocidos dos puntos comunes A y C de las circunferencias $\varkappa$ y γ.

Sea que las rectas CD y AG intersecan por segunda vez la circunferencia γ en los puntos E y H. Entonces $EH \parallel BC$ (véase la segunda solución del problema 34, 2°). Luego hacemos uso de la construcción 1° del problema 34.

La solución examinada es también válida en el caso, cuando una de las circunferencias λ, μ o ν está prefijada por cinco puntos.

PROBLEMA 36. Construir con una regla el centro de una de las tres circunferencias trazadas λ, μ y ν que no pertenecen a un haz.

Consideraremos que ninguna de dos de las circunferencias dadas no tienen puntos comunes o centro común.

Tomemos en λ un punto arbitrario A y construyamos los puntos de la circunferencia α que pasa por A y pertenece al haz (μ, ν).

Tracemos, a continuación, por A una recta variable; designemos el segundo punto de su intersección con la circunferenca λ por P,

[1] Así designaremos el haz determinado por las circunferencias λ y μ.

con la circunferencia α, por Q (fig. 73). Si fijamos los puntos B y C, que difieren de A, en las circunferencias λ y α, respectivamente, entonces el punto R de intersección de las rectas BP y CQ circunscribirá, durante la rotación de la recta PQ alrededor del punto A, la circunferencia τ, sobre lo que es fácil de cerciorarse examinando las magnitudes de los ángulos del triángulo PQR; por consiguiente, no es difícil construir los cinco puntos de la circunferencia τ.

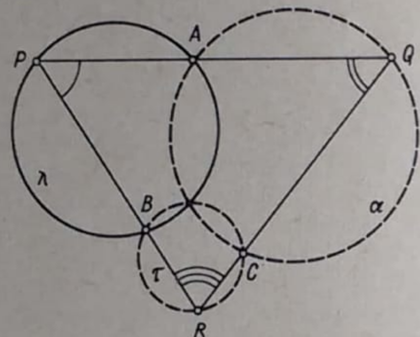


FIG. 73

Ninguna de las tres circunferencias λ, μ, ν y τ no pertenecen a un haz [1], por este motivo, a continuación, puede ser usada la construcción del problema 35.

[1] La circunferencia τ no pertenece al haz hiperbólico (μ, ν), ya que ésta interseca la circunferencia α de este mismo haz. La circunferencia μ (lo mismo que la circunferencia ν) no pertenece al haz elíptico (λ, τ), puesto que ésta no interseca la circunferencia λ.

A NUESTROS LECTORES:

MIR PUBLICA:

BOLTIANSKI V.

Figuras equivalentes y equicompuestas

El folleto del Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas V. Boltianski trata el estudio de algunas cuestiones, vinculadas con la equicomposición de figuras.

Se divide en dos capítulos, en el primero de los cuales se consideran los polígonos, y en el segundo los poliedros. En el primer capítulo uno de los principales teoremas es el de Bolyai – Guervin. En el segundo, el teнˈsma más interesante es el de Dehn.

Los cuatro primeros parágrafos son los más sencillos. Ellos tratan un círculo único de cuestiones, vinculadas con la medida de superficies poligonales. En orden creciente de complejidad le siguen el quinto parágrafo y el comienzo del sexto; ellos requieren el conocimiento de casi todo el curso escolar de geometría y el saber razonar lógicamente. Por último, queda la parte más difícil, dedicada básicamente a los estudiantes de institutos superiores de profesorado y universidades.

El libro se destina a los estudiantes de escuelas de enseñanza media y a los universitarios de los primeros cursos.

MARKUSHÉVICH A.

Areas y logaritmos

Este trabajo del Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, A. Markushévich, fue enunciado primeramente en la Universidad de Moscú ante los alumnos de grados superiores de las escuelas secundarias.

En la obra se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Las propiedades de logaritmos se obtienen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto el libro proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.

No es forzosamente necesario que el lector sepa qué es un logaritmo. No obstante, el lector debe tener conocimientos primarios sobre las funciones y su representación gráfica, progresion geométrica y el límite.

El libro será útil para los escolares y aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en el mismo se exponen.

GOLOVINÁ L., YAGLOM I.

Inducción en la geometría

Este libro, dirigido a los alumnos de grados superiores, profesores de matemáticas y estudiantes de las facultades de física y matemática de los institutos de pedagogía, tiene puntos de contacto con el libro "Método de inducción matemática" de I. Sominski (Editorial Mir, 1974) y puede ser considerado como su continuación; será de interés especial para los que conocen ya el ligro de I. Sominski.

Contiene 37 ejemplos seguidos de la solución detallada y 40 problemas acompañados de breves indicaciones. Está dedicado a diversas aplicaciones del método de inducción matemática para la solución de problemas geométricos. A nuestro parecer, lo más importante en él son los distintos aspectos del método de inducción matemática; algunos (no todos, por supuesto) ejemplos y problemas pueden también representar interés por sí mismos.

Este texto puede utilizarse en el trabajo del círculo matemático de la escuela secundaria, así como en forma autodidacta.