

Mateus Dubiela Oliveira

Escalonamento de Bombas Pumpoff

Florianópolis, SC

2014/2

Mateus Dubiela Oliveira

Escalonamento de Bombas Pumpoff

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para a obtenção do grau de bacharel em Ciências da Computação pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Prof. Eduardo Camponogara

Professor Responsável: Prof. Antônio Augusto Fröhlich

Florianópolis, SC

2014/2

SUMÁRIO

1	Introdução	17
1.1	Contextualização	17
1.2	Justificativa	17
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Objetivo Geral	17
1.3.2	Objetivos Específicos	17
1.4	Estrutura do Documento	18
1.5	Delimitação do Trabalho	18
2	Fundamentação Teórica	19
2.1	Bombeio Mecânico	19
2.1.1	Operação em <i>Pumpoff</i>	20
2.1.2	Modelo da bomba	21
2.1.3	Campos com diversas Bombas <i>pumpoff</i>	21
2.2	Escalonamento	23
2.2.1	Hiperperíodo	24
2.2.2	Atraso Máximo	24
3	Modelos	29
3.1	Modelo das Bombas	29
3.2	Formulação por Sinais Complementares	29
3.2.1	Programa Matemático	31
3.2.2	Fundamentação Matemática	31
3.3	Formulação por Conjuntos Factíveis	32
3.3.1	Embasamento Matemático	32
3.3.2	Aplicação	35
4	Resultados	37
4.1	Dados e Ambiente de Testes	37
4.2	Instância com 5 bombas	38
4.3	Resultados Computacionais do Algoritmo	40
5	Conclusões	43
5.1	Trabalhos Futuros	43

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquemático de uma estação de bombeio mecânico.	19
Figura 2 – Momentos da bomba.	20
Figura 3 – Modelo matemático de uma bomba <i>pumpoff</i>	22
Figura 4 – Variáveis de controle por bomba.	22
Figura 5 – Sinal agregado	23
Figura 6 – O hiperperíodo do sinal.	24
Figura 7 – Comportamento da bomba 3 para um atraso $\delta_3 = 3$	25
Figura 8 – Comportamento da bomba 3 para um atraso $\delta_3 = 4$	25
Figura 9 – Sinal gerado pelo sistema da Tabela 3	38
Figura 10 – Instância de 5 bombas no modelo de sinais complementares	39
Figura 11 – Instância de 5 bombas no modelo de conjuntos factíveis	39
Figura 12 – Relação entre tempo de execução e o número de bombas.	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados de operação das bombas para campo ilustrativo.	22
Tabela 2 – Intervalos de valores para os parâmetros das bombas	37
Tabela 3 – Dados do modelo de 5 bombas	38
Tabela 4 – Resultados da otimização dos dois modelos.	39
Tabela 5 – Tempo de execução das instâncias por algoritmo	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSP	Constraint Satisfaction Problem (Problema de Satisfação de Restrições)
LP	Linear Programming (Programação Linear)
MILP	Mixed Integer Linear Programming (Programação Inteira-Mista)

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{T}	Conjunto de instantes de tempo
\mathcal{W}	Conjunto de bombas
T^{\max}	Tempo total do sistema, ou hiperperíodo
t_w^c	Tempo de ciclo da bomba w
t_w^{on}	Tempo que a bomba w permanece ativa
t_w^{off}	Tempo que a bomba w permanece inativa
P_w	Potência consumida pela bomba w
$P_w(t)$	Potência consumida pela bomba w no instante t
δ_w	Atraso efetivo da bomba w
δ_w^{\max}	Atraso máximo da bomba w
$\phi_w(t)$	Função de estado da bomba w
$y_w(t)$	Função do estado do sinal complementar anterior da bomba w
$z_w(t)$	Função do estado do sinal complementar posterior da bomba w
x^w	Perfil de escolhido da bomba w ,
$b_{w,\delta}$	Variável de escolha do perfil w
$\lambda_{w,l}$	Variável que determina o ramo a ser seguido no nível l da árvore binária da bomba w
\mathcal{K}^w	Conjunto de perfis da bomba w
$\mathcal{K}_0^{w,l}$	Conjunto de perfis pertencentes ao ramo esquerdo em cada nível l de cada bomba w
$\mathcal{K}_1^{w,l}$	Conjunto de perfis pertencentes ao ramo direito em cada nível l de cada bomba w
\mathcal{L}^w	Conjunto de níveis na árvore binária da bomba w

RESUMO

Em campos de extração de petróleo terrestres, é comum observar diversas bombas mecânicas operando em conjunto. As bombas são movimentadas por motores elétricos rotativos, que com o movimento de subida e descida do pistão, fazem com que o óleo seja extraído do poço para a superfície. Em poços mais maduros, a pressão que o reservatório exerce diminui e se faz necessário adicionar um tempo de espera entre um ciclo de bombeio e outro. Este regime de funcionamento da bomba é conhecido como *pumpoff*. Esse comportamento cíclico abre oportunidades de melhorias na utilização dos recursos compartilhados entre essas diversas bombas, tais como alimentação energética e escoamento. Fazendo uso da programação matemática, mais especificamente da programação inteira mista, esse trabalho propõe um modelo que visa reduzir o consumo de pico de um campo composto por diversas destas bombas. As simulações e resultados foram feitas com dados sintéticos.

Palavras-Chave: Bombeio-Mecânico, *Pumpoff*, Escalonamento Offline, Otimização.

ABSTRACT

In onshore oilfields, it is common to observe many sucker-rod pumps operating in conjunction. The pumps are powered by electric rotary machines that, using the upward and downward movement of the piston, enable the oil to be extracted from the reservoir to the surface. In mature reservoirs, the internal pressure of the reservoir diminishes and it becomes necessary to add a wait time between pumping cycles. This working policy is known as *pumpoff*. The cyclic behavior opens opportunities to improve the utilization of the shared resources between a potentially large number of these pumps, such as power supply and production lines. Using mathematical programming, specifically mixed integer linear programming (MILP), this work proposes a model that aims to reduce the peak consumption in an field operated by many sucker-rod pumps. The simulations and results were tested on syntetic data.

Keywords: Sucker-rod Pumping, *Pumpoff*, Offline Scheduling, MILP.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A indústria petrolífera é uma das maiores forças econômicas brasileiras, possuindo plantas de extração localizadas por todo o Brasil.

Na região nordeste localizam-se algumas das bacias de produção mais antigas do Brasil dentre elas, as bacias de Recôncavo e Tucano produzem petróleo desde a década de 1940. Porém, a quantidade a ser extraída é maior do que o total produzido até hoje (1).

Contudo, a idade avançada dos campos começa a trazer desafios no processo de extração. Um dos desafios é a extração do óleo em poços onde a pressão exercida pelo reservatório é tão baixa que são necessárias pausas para que a produção seja viável. Este regime intermitente de produção é conhecido como *pumpoff* (2).

Essas bombas operam continuamente trocando de estados, seguindo um comportamento periódico. Visando melhorar a eficiência da operação deste tipo de situação, este trabalho explora a natureza periódica da operação das bombas, para reduzir os custos operacionais do campo.

1.2 JUSTIFICATIVA

A dificuldade na extração do petróleo inviabiliza economicamente a operação de plantas mais maduras. Técnicas para melhorar a eficiência da operação podem estender o tempo de vida dos reservatórios e aumentar os lucros.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver modelos de programação matemática para a operação de bombas mecânicas *onshore* sob o regime de controle *pumpoff*, com o objetivo de melhorar a eficiência dos poços.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar estudo sobre as características do bombeio mecânico, em especial a operação em *pumpoff*;

- Desenvolver modelos de programação matemática de plantas compostas por estas bombas;
- Testar a eficácia das soluções na redução de custos operacionais da planta;
- Avaliar a eficiência computacional dos modelos desenvolvidos.

1.4 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

O presente trabalho está apresentado da seguinte maneira.

O capítulo 1 fará a descrição inicial do trabalho, expondo os objetivos, as justificativas e a sua organização.

O capítulo 2 irá introduzir os conceitos de engenharia de petróleo sobre bombeio mecânico, o regime de controle *pumpoff* e suas restrições físicas. Após, serão apresentadas características de sistemas periódicos e padrões que podem ser explorados na resolução do problema.

O capítulo 3 explicará os dois modelos frutos deste trabalho. Primeiramente, é exposto o modelo básico do problema de onde se originaram as duas abordagens. Em seguida, apresenta-se o modelo de sinais complementares, no qual se faz uso de duas variáveis auxiliares para representar o estado de cada bomba. Finaliza-se com o modelo de conjuntos factíveis, baseado na enumeração extensiva das configurações iniciais de cada bomba.

O capítulo 4 demonstrará os ganhos obtidos com as soluções. Serão comparados os resultados e a complexidade computacional das duas abordagens.

O capítulo 5 é destinado às conclusões obtidas neste estudo e a possíveis trabalhos futuros.

1.5 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

Os dados para as simulações foram gerados de forma pseudo-aleatória, baseados nos limites de campos reais.

Não faz parte do escopo deste trabalho considerações sobre os parâmetros de operação das bombas. Estes deverão ser providos pelo operador da planta, ou um engenheiro de petróleo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 BOMBEIO MECÂNICO

O bombeio mecânico é uma técnica de elevação artificial usada em plataformas terrestres, também referenciadas como *on-shore*. Conhecida por ser uma das primeiras técnicas de elevação artificial, caracteriza-se principalmente por seu baixo custo de investimento e manutenção, bem como flexibilidade na vazão e profundidade (3).

Seu princípio de funcionamento baseia-se na transformação do movimento rotativo de um motor elétrico ou de combustão interna para o movimento alternado do pistão dentro da camisa do poço.

A coluna de hastes faz a transmissão do movimento do motor para o pistão, que devido à alternância da abertura e fechamento das válvulas de fundo e de passeio, e ao movimento do pistão, elevam o óleo pela coluna de produção até a superfície (4).

Os principais componentes de uma unidade de bombeio estão esquematizados na Figura 1.

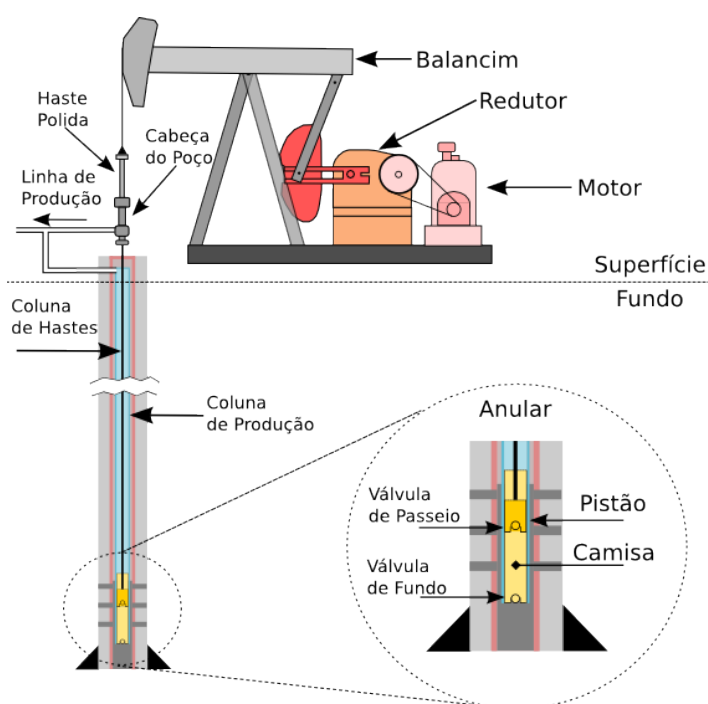


Figura 1 – Esquemático de uma estação de bombeio mecânico.

O processo de elevação se dá com a abertura e fechamento das válvulas presentes na camisa do poço e no pistão. O ciclo de bombeio é dividido em dois momentos, o momento ascendente (*upstroke*) e o momento descendente (*downstroke*).

Durante o momento de ascensão, o pistão está sendo elevado até o topo da camisa. Neste momento, a válvula de passeio se fecha devido ao peso que o óleo presente na coluna de produção. Conjuntamente, a pressão da camisa sofre uma redução, essa diferença entre a pressão da camisa e da pressão do anular faz com que a válvula de fundo se abra, permitindo com que o óleo proveniente do reservatório entre na camisa através dela.

No movimento descendente, o pistão desce em direção ao fundo do poço, exercendo pressão sobre a válvula de fundo, fechando-a. Em decorrência da descida, o pistão comprime o óleo presente na camisa, forçando a válvula de passeio a se abrir e deixar o óleo escoar para a coluna de produção.

Os dois momentos estão representados na Figura 2.

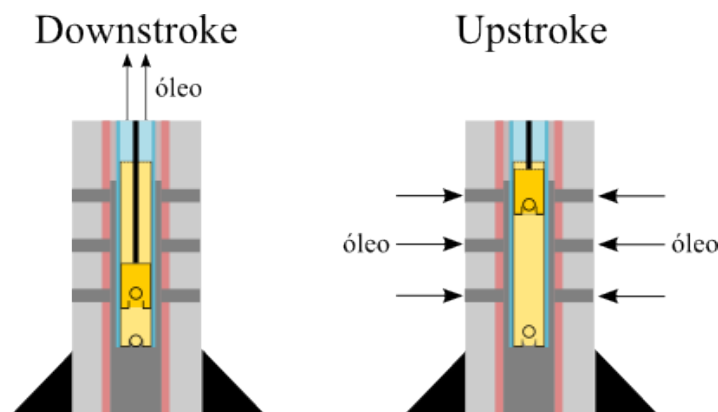


Figura 2 – Momentos da bomba.

2.1.1 Operação em *Pumpoff*

Em poços com um estágio avançado de maturidade, a pressão que o reservatório exerce sobre a camisa começa a diminuir, de tal forma que a pressão que o anular exerce sobre a camisa deixa de ser suficiente para enchê-la rápido o bastante. Essa deficiência cria uma redução na vazão de produção e pode danificar o sistema com o efeito da pancada de fluido (*fluid-pound*) (3).

Uma das soluções propostas é operar a unidade de forma intermitente: desliga-se o motor da unidade até que o nível do anular se torne propício para operação. Após, o motor é religado e mantido neste estado até que o nível do anular não seja mais o ideal para a produção. Esta técnica de controle é chamada de *pumpoff*. Um exemplo do sinal de controle pode ser visto na Figura 3.

O controle *pumpoff* é definido por dois parâmetros, t^{on} e t^{off} , que definem o tempo em que o motor da unidade de produção estará ligado e desligado, respectivamente. A condição de operação em regime *pumpoff* assume que a soma dos tempos t^{on} e t^{off} corresponde ao tempo de ciclo (t^c). Existem diversas técnicas para determinar os parâmetros de funcionamento do *pumpoff* (5), mas estas não são escopo deste trabalho. Aqui, serão considerados apenas dados de poços já ajustados para o funcionamento em *pumpoff*.

2.1.2 Modelo da bomba

Com essas informações é possível construir um modelo simplificado da bomba, para ser utilizado mais tarde no modelo de otimização. O parâmetro P , indica a potência nominal do motor elétrico, ou seja, a potência que o mesmo irá consumir nos instantes que ele estiver em t^{on} .

Um parâmetro t_c que representa o tempo do ciclo de operação da bomba, sendo na verdade o resultado da soma entre t^{on} e t^{off} .

A forma do sinal do modelo da bomba se dá como sendo um sinal binário. Onde os momentos em nível lógico alto indicam que a bomba está operando e consumindo sempre a potência nominal, aqui sendo ignorado qualquer tipo de “arranque” necessário pelo motor antes de chegar ao nível nominal.

Também vale salientar que as potências de alimentação são diferentes entre os poços, já que as mesmas dependem de fatores diversos como, a profundidade do poço, a viscosidade do óleo, o tamanho da camisa, entre outros.

Para que possamos fazer o ajuste das bombas aplicaremos um tempo de atraso, denominado δ , no momento do início de sua operação. A escolha dessa estratégia se deu por sua simplicidade e pelo pouco impacto que gera na operação da planta.

2.1.3 Campos com diversas Bombas *pumpoff*

Em um campo com várias destas unidades compartilhando a mesma linha de alimentação energética, e também muitas vezes a mesma linha de escoamento de produção, começam a surgir oportunidades para a otimização do uso destes recursos compartilhados pelo campo.

Na Figura 4, são apresentados os sinais de controle de 4 bombas com parâmetros de operação e consumo diferentes, conforme a Tabela 1.

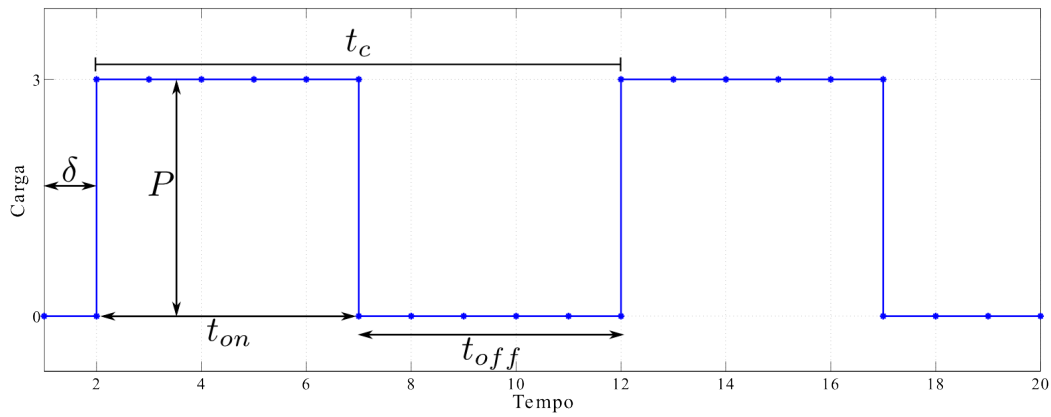
Figura 3 – Modelo matemático de uma bomba *pumpoff*

Tabela 1 – Dados de operação das bombas para campo ilustrativo.

Bomba w	t_w^{on}	t_w^{off}	t_w^c	P_w
1	1	1	2	2
2	2	1	3	3
3	2	3	5	3
4	4	6	10	4

O sinal agregado, ou seja, o sinal de consumo total do sistema, é ilustrado na Figura 5. Tal ensaio demonstra que o comportamento do sistema sem atuação de controle se torna extramente irregular, com momentos de baixo consumo e picos onde todas as bombas estão ativas.

A solução aqui proposta objetiva reduzir as irregularidades e os grandes picos de consumo

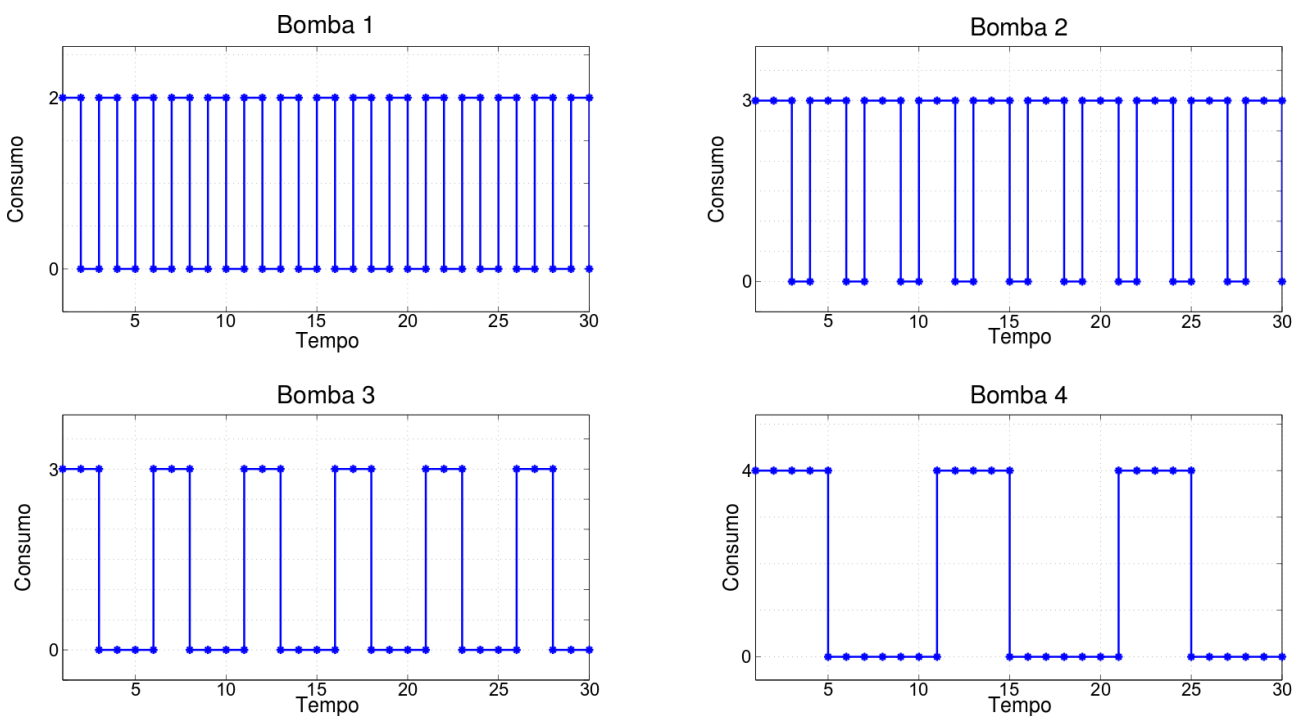


Figura 4 – Variáveis de controle por bomba.

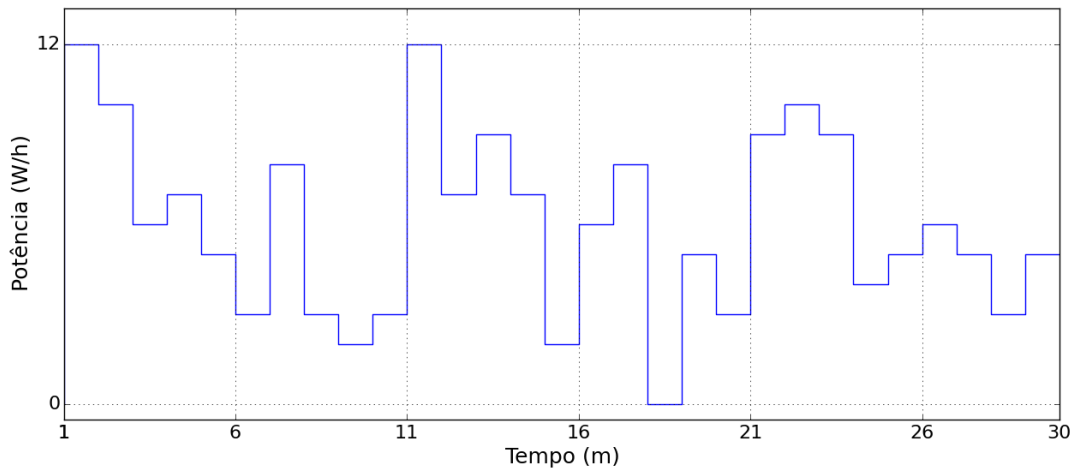


Figura 5 – Sinal agregado

por meio do uso de técnicas de otimização, para que haja uma redução no consumo de pico da planta e conseqüentemente promovendo também uma redução no uso da infraestrutura de escoamento.

2.2 ESCALONAMENTO

A coordenação da operação de bombas *pumpoff* é um exemplo claro de um problema de escalonamento, tal como processos em um sistema operacional ou como tarefas em um processo de produção.

Como dito na seção 2.1, para que o controle das bombas seja feito, um tempo de atraso será dado no início da operação de cada unidade. Esse atraso só será aplicado uma vez, no início da operação do poço e depois o sistema irá operar continuamente, sem intervenções. Foi escolhida essa abordagem, pois requer uma menor supervisão do processo de operação da planta.

As decisões sobre a operação da planta serão tomadas antes do início de sua operação, e todas os parâmetros das bombas serão previamente fornecidas para o algoritmo, essas características classificam o tipo de escalonamento como *offline*(6).

Aqui serão apresentados os conceitos do Hiperperíodo e do Atraso Máximo. O primeiro é uma característica de sistemas periódicos, já o segundo é uma restrição para o problema que garante que o primeiro conceito não seja violado.

2.2.1 Hiperperíodo

Em sistemas de tempo real, o hiperperíodo é conhecido como sendo o tamanho mínimo da janela de tempo necessária para capturar o comportamento completo do sistema. Isto significa que o comportamento do sistema se torna cíclico, repetindo o padrão a cada hiperperíodo até que ocorra alguma variação no sistema (7).

A Figura 6 ilustra o hiperperíodo e o comportamento cíclico do sistema para o campo de produção cujos parâmetros foram especificados na Tabela 1. Note que a barra vertical indica a transição de um hiperperíodo para o próximo.

Uma vez que o hiperperíodo corresponde ao Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos períodos, seu valor para a instância considerada é 30 pois os períodos das bombas são 2, 3, 5 e 10. Isto significa que o espaço de tempo de uma janela ideal é de 30 instantes de tempo.

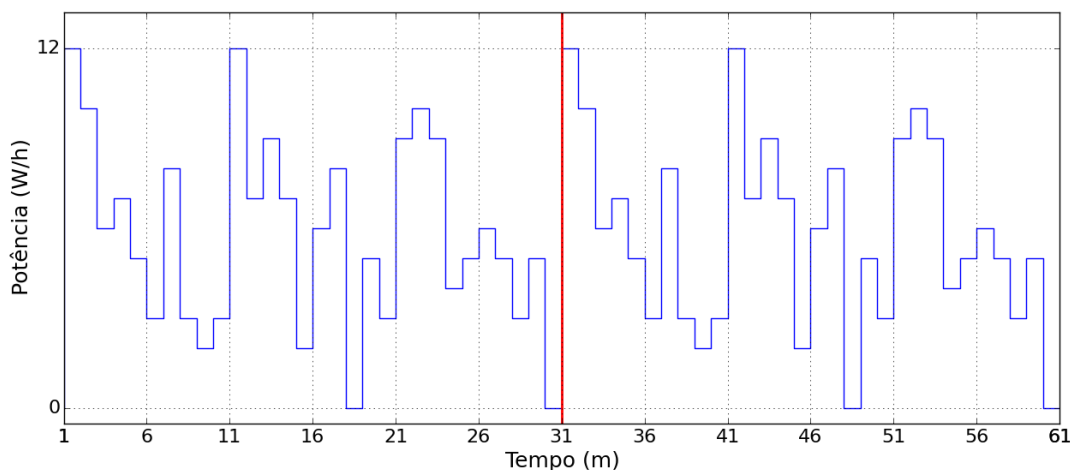


Figura 6 – O hiperperíodo do sinal.

A garantia do hiperperíodo neste caso é importante para limitar o tamanho da janela de otimização. De forma que, se o algoritmo for aplicado em um tempo hiperperíodo, o sistema perpetuará este resultado.

2.2.2 Atraso Máximo

A solução de controle proposta prevê o escalonamento das bombas através da imposição de um atraso na partida de cada unidade. Este atraso é o tempo que a bomba deverá esperar antes de iniciar o processo de produção. O atraso é implementado apenas no início da operação, sendo o comportamento cíclico reproduzido ao término do atraso.

Contudo, para assegurar que o hiperperíodo continue capturando o comportamento cíclico do sistema, o valor do atraso não deverá extrapolar um valor limite, acima do qual a respectiva unidade deixa de apresentar um comportamento cíclico com respeito ao início da operação.

Para ilustrar a importância do atraso máximo, considere a bomba 3 do exemplo ilustrativo conforme Tabela 1. A Figura 7 apresenta o comportamento desta unidade quando sujeita a um atraso $\delta_3 = 3$. Já a Figura 8 mostra o comportamento para um atraso $\delta_3 = 4$. Observe que para um atraso superior a 3 unidades de tempo, a primeira janela de ciclo desta bomba não repete os comportamentos observados nas janelas seguintes, ao contrário do que ocorre quando o atraso é inferior ou igual a 3 unidades de tempo.

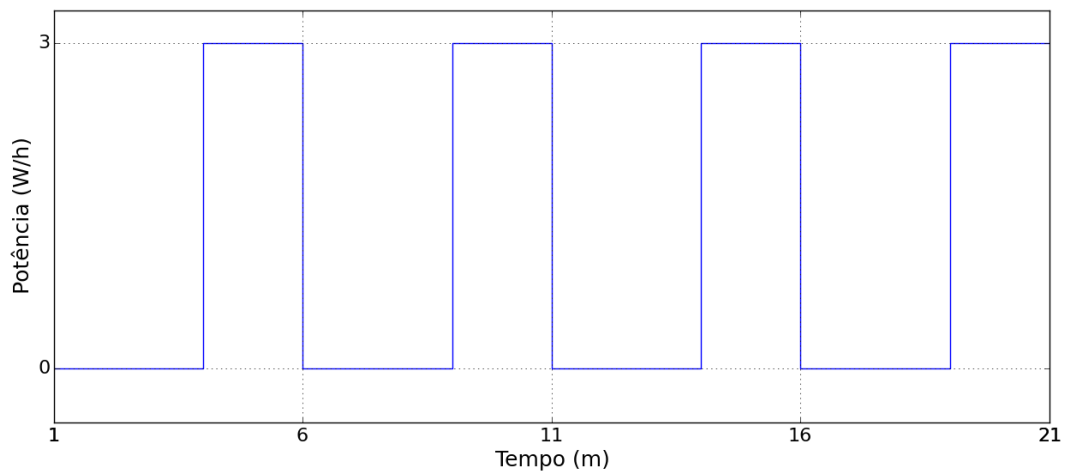


Figura 7 – Comportamento da bomba 3 para um atraso $\delta_3 = 3$.

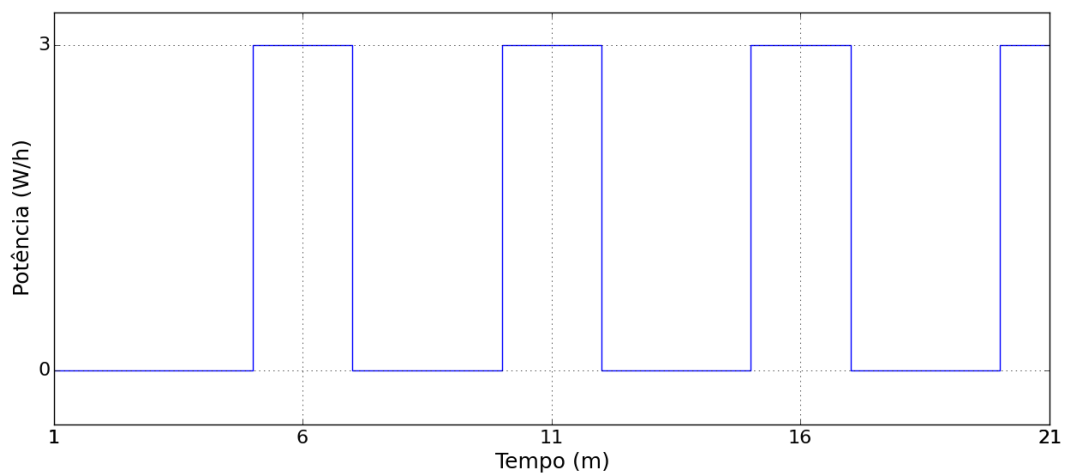


Figura 8 – Comportamento da bomba 3 para um atraso $\delta_3 = 4$.

Aqui se formaliza a noção de atraso máximo. Seja w_i uma tarefa periódica que para o problema em questão corresponde a uma unidade de bombeio. Suponha que a tarefa w_i tem

um período t_i^c e tempo de ativação t_i^{on} .

O escalonamento das unidades de produção será considerado para um hiperperíodo, que por sua vez irá garantir um comportamento cíclico sob condições de atraso máximo conforme ilustração acima. Seja $\mathcal{T} = \{1, \dots, T^{\max}\}$ um conjunto de instantes de tempo para efeitos de escalonamento, onde assume-se que o controle previsto para uma bomba no instante $t \in \mathcal{T}$ será implementado durante o intervalo de tempo $[t, t + 1)$. O estado $\phi_i(t) \in \{0, 1\}$ de uma unidade i define o sinal de controle, sendo $\phi_i(t) = 0$ quando a bomba está inativa e $\phi_i(t) = 1$ quando ativa para o intervalo de tempo $[t, t + 1)$.

O comportamento cíclico de uma unidade i é assegurado quando as seguintes condições são satisfeitas:

$$\phi_i(t) = \phi_i(t - t_i^c), \forall t \in \mathcal{T}, t \geq t_i^c \quad (2.1)$$

Esta condição significa que uma vez conhecidos os estados para o primeiro período da bomba, os demais serão decorrentes destes. Para efeitos de formalização, define-se a seguinte função estado atrasada para uma bomba i :

$$\widehat{\phi}_i(t) = \begin{cases} \phi_i(t - \delta_i) & t \geq \delta_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

Em um modelo em otimização matemática, em que $\phi_i(t)$ passam a ser variáveis de decisão, se faz necessária a introdução de certas condições para assegurar a validade do escalonamento:

1. a somatória dos sinais de controle durante cada ciclo deve ser igual ao tempo de ativação t_i^{on} ; e
2. o sinal de controle durante o período de ativação deve ser contíguo.

Note que se estas condições são satisfeitas durante o primeiro ciclo, a validade para os ciclos futuros será implicada se as condições estabelecidas na equação (2.1) forem satisfeitas.

Matematicamente, as condições 1 e 2 são formalizadas conforme segue:

$$\sum_{k=t}^{t+t_i^c-1} \phi_i(k) = t_i^{on} \quad (2.3a)$$

$$\sum_{k=\delta_i}^{\delta_i+t_i^{on}-1} \phi_i(k) = t_i^{on} \quad (2.3b)$$

Além disso, para assegurar que o hiperperíodo seja representativo do comportamento cíclico do sistema, conforme ilustrado nas Figuras 7 e 8, é necessário que o atraso seja limitado conforme segue:

$$t_i^c - \delta_i \geq t_i^{on} \iff \delta_i \leq \delta_i^{\max} = t_i^c - t_i^{on} \quad (2.4)$$

Uma formulação matemática voltada à otimização do sistema de produção deverá, de uma forma ou outra, respeitar as condições estabelecidas nas equações (2.3a), (2.3b), e (2.4). Mais à frente serão desenvolvidos dois modelos em programação matemática para escalonamento ótimo de um sistema de produção *pumpoff*.

3 MODELOS

O presente capítulo desenvolve duas formulações em programação matemática linear inteira-mista para escalonamento de bombas *pumpoff*. Uma dificuldade a ser contornada se refere à representação linear da condição (2.3b), a qual utiliza a variável de controle δ_w nos índices da somatória.

Inicialmente, são introduzidos conceitos comuns às duas formulações. A primeira formulação faz uso de variáveis binárias para assegurar a contiguidade dos sinais de controle e o tempo de ativação requerido por cada bomba. Por outro lado, a segunda formulação faz uso de padrões pré-determinados dos diversos atrasos possíveis, bem como utiliza uma codificação logarítmica para representar a escolha dos padrões com um número reduzido de variáveis binárias. A segunda formulação está relacionada com a estratégia de geração de colunas, porém todas as colunas são previamente instanciadas, ao contrário da abordagem clássica que gera as colunas sob demanda.

3.1 MODELO DAS BOMBAS

O consumo da bomba w se dá pelo produto de sua potência nominal (P_w) e o valor da função de estado $\phi_w(t)$ em cada instante de tempo t . Matematicamente,

$$P_w(t) = P_w \phi_w(t)$$

é a potência consumida pela bomba w durante o intervalo de tempo $[t, t + 1)$. O objetivo do escalonamento está em encontrar um sequenciamento das bombas tal que a potência total consumida seja a menor possível. Dado um conjunto de bombas $\mathcal{W} = \{1, 2, \dots, W\}$, este objetivo pode ser estabelecido como segue:

$$\begin{aligned} & \min P^{\max} \\ \text{s.t. : } & \sum_{w \in \mathcal{W}} P_w(t) \leq P^{\max}, \forall t \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

3.2 FORMULAÇÃO POR SINAIS COMPLEMENTARES

Esta formulação faz uso de variáveis binárias auxiliares para assegurar as condições estabelecidas pelas equações (2.3a) and (2.3b). A primeira, expressa a necessidade de que o tempo de ativação da bomba w seja t_w^{on} , enquanto a segunda garante a contiguidade do bombeamento.

Especificamente, a variável $y_w(t) \in \{0, 1\}$, $t \in \{0, \dots, \delta_w^{\max} - 1\}$, é definida durante os instantes iniciais em que a bomba w pode sofrer um atraso para o início do bombeio. Quando $y_w(t)$ for igual 1, o sinal de controle $\phi_w(t)$ obrigatoriamente assume o valor nulo, ou seja, a bomba pode estar ativa somente se $y_w(t) = 0$. Além disso, se $y_w(t) = 0$ então $y_w(t + 1) = 0$ quando definida. Por fim, a soma das variáveis $y_w(t)$ para o domínio em que está definida deve corresponder ao atraso δ_w . Sendo assim, isto significa que os sinais $y_w(t)$ assumirão o valor 1 para os instantes iniciais em que a bomba está inativa.

Por outro lado, a variável $z_w(t) \in \{0, 1\}$, $t = t_w^{on}, \dots, t_w^c - 1$, esta definida para os instantes finais do primeiro ciclo de bombeio, a partir do instante que corresponde ao tempo de ativação t_w^{on} .

Nesta modelagem são utilizados dois sinais que complementam o sinal da bomba, para fazer a representação do formato de onda. Um sinal "y" faz a representação do atraso anterior a ativação da bomba, enquanto que o sinal "z" indica o tempo que a bomba ficará desativada após sua ativação.

3.2.1 Programa Matemático

$$\min P^{\max} \quad (3.1a)$$

$$\text{s.t. } \sum_{w \in \mathcal{W}} \phi_w(t) P_w \leq P^{\max}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.1b)$$

$$\sum_{t=0}^{t_w^c-1} \phi_w(t) = t_w^{on}, \quad \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1c)$$

$$\phi_w(t) = \phi_w(t - t_w^c), \quad t = t_w^c + 1, \dots, T, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.1d)$$

$$y_w(t) \geq y_w(t + 1), \quad t = 0, \dots, \delta_w^{\max} - 1, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.1e)$$

$$\phi_w(t) \leq 1 - y_w(t), \quad t = 0, \dots, \delta_w^{\max} - 1, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.1f)$$

$$\sum_{t=0}^{\delta_w^{\max}-1} y_w(t) = \delta_w, \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.1g)$$

$$z_w(t) \leq z_w(t + 1), \quad t = t_w^c, \dots, t_w^c, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.1h)$$

$$\phi_w(t) \leq 1 - z_w(t), \quad t = t_w^c, \dots, t_w^c, \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1i)$$

$$\sum_{t=t_w^c}^{t_w^c} z_w(t) = \delta_w^{\max} - \delta_w, \quad \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1j)$$

$$y_w(t) \in \{0, 1\}, \quad t = 0, \dots, \delta_w^{\max} - 1, \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1k)$$

$$z_w(t) \in \{0, 1\}, \quad t = t_w^c, \dots, t_w^c, \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1l)$$

$$\delta_w \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1m)$$

$$\phi_w(t) \in \{0, 1\}, \quad t = 0, \dots, T^{\max}-1, \forall i \in \mathcal{W} \quad (3.1n)$$

3.2.2 Fundamentação Matemática

A função objetivo, (3.1a) busca diminuir o consumo máximo global, por meio do valor limite P_{\max} , definido em (3.1b). Isso cria o efeito de uma barreira em cima do sinal resultante. A restrição (3.1b) define o valor do consumo máximo, como sendo o limite do somatório de todas as bombas.

A restrição (3.1c) define que o tempo de ativação da bomba w será sempre igual ao parâmetro de entrada t_w^c .

As restrições (3.1e), (3.1f) e (3.1g) são as restrições que definem como o sinal y irá afetar o comportamento da bomba. (3.1e) indica que no instante de tempo em que o valor de y se tornar 0, todos os instantes seguintes serão 0 também. (3.1f) assegura que o valor do sinal da

bomba será o complemento do sinal y . Em (3.1g) o valor do atraso da bomba w é definido como sendo o tempo em que o sinal y ficou ativado.

As restrições (3.1h), (3.1i) e (3.1j) são as restrições que definem como o sinal z irá afetar o comportamento da bomba. (3.1h) indica que o instante de tempo em que o valor do sinal z se tornar 1, todos os instantes seguintes serão também iguais a 1. Em (3.1i) o valor do sinal da bomba é colocado como sendo o complemento do sinal z . Em (3.1j) o valor do sinal z será a diferença entre o atraso máximo, δ_w^{\max} e o atraso efetivo δ_w .

3.3 FORMULAÇÃO POR CONJUNTOS FACTÍVEIS

Nesta abordagem os estados das bombas no tempo são definidos a partir de conjuntos pré-determinados. Estes conjuntos definem os possíveis perfis para cada bomba. Um algoritmo de otimização inteira irá definir os valores das variáveis binárias de maneira a selecionar um determinado perfil, caracterizando assim o comportamento cíclico da bomba. Em vez de se utilizar uma única variável binária para cada perfil, foi desenvolvida uma codificação logarítmica que representa de forma compacta os diferentes perfis factíveis para operação de uma certa bomba.

3.3.1 Embasamento Matemático

Em problemas de programação inteira onde a região factível \mathcal{D}_f é muito menor que o domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n$, podemos definir previamente os conjuntos candidatos à solução factível, utilizando técnicas *ad-hoc* ou algoritmos para problemas de satisfação de restrições (CSP, do inglês *Constraint Satisfaction Problem*).

Uma vez obtidos todos os candidatos factíveis, o problema se reduz a escolher por meio de enumeração o candidato de melhor objetivo. Se o problema não for irrestrito (*unbounded*), o conjunto de candidatos factíveis é finito e cada solução pode ser associada a uma variável binária. Isto significa que o problema original pode ser colocado como um problema clássico do tipo *set packing* ou *set covering*, que consiste em escolher uma solução dentre as candidatas que satisfaz as restrições.

Dado um problema de otimização na forma:

$$\min_x f(x) \tag{3.2a}$$

$$\text{sujeito a: } c_E(x) = 0 \tag{3.2b}$$

$$c_I(x) \leq 0 \tag{3.2c}$$

$$x \in \mathbb{Z}^n \tag{3.2d}$$

onde x é o vetor-variável de otimização, $f(\cdot)$ é a função objetivo, $c_E(\cdot)$ é a função-vetor de restrições de igualdade e $c_I(\cdot)$ é a função-vetor de restrições de desigualdade.

Para o problema acima, o conjunto

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid c_E(x) = 0 \wedge c_I(x) \leq 0\} \tag{3.3}$$

define a região factível.

Associando a k -ésima solução candidata $x^{(k)} \in \mathcal{D}_f$ a uma variável b_k , chega-se a uma formulação equivalente:

$$\min_{b_k} f(x) \tag{3.4a}$$

$$\text{sujeito a: } x = \sum_{k \in \mathcal{K}} x^{(k)} b_k \tag{3.4b}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} b_k = 1 \tag{3.4c}$$

$$b_k \in \mathbb{B}, k \in \mathcal{K} \tag{3.4d}$$

definida sobre as variáveis b_k , sendo $K = |\mathcal{D}_f|$ o número de soluções candidatas e $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ o conjunto de índices destas soluções.

No entanto este modelo é pouco eficiente pois utiliza uma variável binária para cada possível solução.

Esta representação compacta é implementada através de uma codificação binária induzida pelas variáveis $\lambda_l \in \{0, 1\}$, $l \in \mathcal{L}$, onde $L = \lceil \log_2 K \rceil$ e $\mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$. A variável binária λ_l é responsável pela decisão de como se dará a ramificação, onde índice $l \in \mathcal{L}$ indica o nível da árvore binária de decisão. Isto é, a ramificação ocorre à esquerda no nível l quando $\lambda_l = 0$ e à direita, caso contrário quando $\lambda_l = 1$.

Para o exemplo ilustrativo, tem-se $K = 4$ soluções candidatas e assim podemos associar os seguintes códigos:

(λ_1, λ_2)	Solução
(0, 0)	$x^{(1)}$
(0, 1)	$x^{(2)}$
(1, 0)	$x^{(3)}$
(1, 1)	$x^{(4)}$

Seja $\mathcal{K}^{1,l} \subseteq \mathcal{K}$ o conjunto de soluções candidatas para as quais o código possui valor 1 na posição l , enquanto $\mathcal{K}^{0,l}$ corresponde às soluções com valor 0. Note que $\mathcal{K}^{0,l} \cup \mathcal{K}^{1,l} = \mathcal{K}$. Para o exemplo, note que $\mathcal{K}^{0,1} = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ e $\mathcal{K}^{1,1} = \{x^{(3)}, x^{(4)}\}$.

Com base nestas definições, desenvolvemos abaixo uma formulação compacta porém equivalente à formulação (3.4):

$$\min_{b_k, \lambda_l} f(x) \tag{3.5a}$$

$$\text{sujeito a: } x = \sum_{k \in \mathcal{K}} x^{(k)} b_k \tag{3.5b}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{1,l}} b_k \leq \lambda_l \quad \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.5c}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{0,l}} b_k \leq (1 - \lambda_l) \quad \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.5d}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} b_k = 1 \tag{3.5e}$$

$$0 \leq b_k \leq 1 \quad \forall k \in \mathcal{K} \tag{3.5f}$$

$$\lambda_l \in \mathbb{B} \quad \forall l \in \mathcal{L} \tag{3.5g}$$

A restrição (3.5c) habilita a seleção da k -ésima solução somente se seu respectivo código tem valor 1 na l -ésima posição. Por outro lado, a restrição (3.5d) habilita a seleção da k -ésima solução quando o seu respectivo código tem valor 0 na l -ésima posição. Por exemplo, se o código binário selecionado pelas variáveis λ_l for $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$, então somente a variável b_3 poderá assumir o valor 1, o que implicaria na escolha da solução $x^{(3)}$. Todas as demais variáveis b_k , $k \in \{1, 2, 4\}$, forçadamente assumem o valor 0.

A restrição (3.5e) assegura que exatamente uma solução candidata será selecionada. No caso do exemplo, em que $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$, obrigatoriamente será escolhida a solução $x^{(3)}$.

Note que as variáveis b_k assumirão obrigatoriamente valores binários, em função das restrições e da natureza binária das variáveis λ_l .

3.3.2 Aplicação

A aplicação da técnica descrita acima, também conhecida por geração de colunas, é particularmente adequada ao problema, pois os perfis factíveis para operação das bombas são de fácil construção. Para o problema em questão, todas as colunas serão geradas *offline* uma vez uma coluna corresponde a um atraso na partida da bomba. Em problemas mais complexos, a geração de uma coluna pode envolver desde a solução de um problema de satisfação de restrições (do inglês, *constraint satisfaction programming* ou CSP) até a solução de problemas de programação inteira-mista, como no problema de corte de lâminas de aço em que se utiliza o problema da mochila (8).

Para uma bomba $w \in \mathcal{W}$, é gerado um perfil $x^{w,\delta}$ para cada atraso $\delta = 0, \dots, \delta_w^{\max}$. Para a bomba $w = 3$ do exemplo ilustrativo, cujo $t_w^{on} = 2$ e $t_w^{off} = 3$, o perfil $x^{3,2} = [00110]'$ onde 0 indica bomba desligada e 1 bomba operando. Note que o perfil se repete até o tempo final de escalonamento T , o qual deve corresponder ao hiperperíodo para assegurar o comportamento cíclico das bombas do sistema de produção. Uma variável $b^{w,\delta}$ é associada a cada perfil $x^{w,\delta}$, enquanto as variáveis binárias $\lambda^{w,l}$ são empregadas para uma codificação logarítmica conforme discutido acima, onde $l \in \mathcal{L}_w = \{1, \dots, L\}$ com $L = \lceil \log_2(\delta_w^{\max} + 1) \rceil$

Tomando como base a notação definida acima, o problema de escalonamento de bombas *pumpoff* pode ser formulado como segue:

$$\min_{b^{w,l}} P^{\max} \quad (3.6a)$$

$$\text{s.t. : } \sum_{i \in \mathcal{W}} P_w(t) \leq P^{\max}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.6b)$$

$$x^w = \sum_{\delta=0}^{\delta_w^{\max}} x^{w,\delta} b_{w,\delta} \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6c)$$

$$\sum_{\delta \in \mathcal{K}_1^{w,l}} b_{i,\delta} \leq \lambda_{w,l} \quad \forall l \in \mathcal{L}_w, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6d)$$

$$\sum_{\delta \in \mathcal{K}_0^{w,l}} b_{w,\delta} \leq (1 - \lambda_{w,l}) \quad \forall l \in \mathcal{L}_w, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6e)$$

$$\sum_{\delta=0}^{\delta_w^{\max}} b_{w,\delta} = 1 \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6f)$$

$$\phi_w(t) = x_t^w \quad \forall t \in \{0, \dots, t_c^w\}, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6g)$$

$$\phi_w(t) = \phi_w(t - t_c^w) \quad \forall t \in \{t_c^w + 1, \dots, T\}, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6h)$$

$$0 \leq b_{w,k} \leq 1 \quad \forall k \in \mathcal{K}^w, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6i)$$

$$\lambda_{w,l} \in \mathbb{B} \quad \forall l \in \mathcal{L}^w, \forall w \in \mathcal{W} \quad (3.6j)$$

4 RESULTADOS

Após a definição dos modelos, foi feita sua implementação, com o objetivo de testar e comparar a sua eficácia em resolver o problema e sua eficiência computacional.

4.1 DADOS E AMBIENTE DE TESTES

Todas as simulações foram executadas no servidor Dantzig do Laboratório de Automação de Campos Inteligentes (LACI). As especificações do servidor estão apresentadas na Tabela 4.1.

CPU	Intel Xeon CPU E5-2665 @ 2.40 GHz
Memória RAM	75 GB
S.O	Ubuntu 14.04.1 LTS 64bits

Os modelo foram implementados em *AMPL*, uma linguagem de modelagem de problemas de otimização, permitindo a execução do modelo implementado em diferentes *solvers*, softwares especializados na resolução de problemas de otimização (9).

O solver utilizado para a resolução dos modelos foi o *IBM iLOG CPLEX*, ou apenas *CPLEX*, um *solver* de alta performance capaz de resolver diversos tipos de programas matemáticos(10). Na Tabela 4.1, são apresentadas as especificações do *solver*.

Nome	CPLEX
Fabricante	IBM
Versão	12.6.0.0
Licença	Proprietária

Os dados dos poços foram gerados de forma sintética, utilizando um *script* em linguagem de programação *Python* para criar as instâncias. Os intervalos dos parâmetros dos poços foram baseados em características reais (11, 5), a geração das instâncias se deu escolhendo aleatoriamente, valores dentro destes intervalos. A Tabela 2 expõe esses intervalos:

Tabela 2 – Intervalos de valores para os parâmetros das bombas

P^{\min}	1
P^{\max}	5
t_c^{\min}	2
t_c^{\max}	10
t_{on}^{\max}	$t_c^w - 1$
t_{on}^{\min}	1

4.2 INSTÂNCIA COM 5 BOMBAS

Com o objetivo de demonstrar de forma clara a eficácia dos modelos, gerou-se uma instância representando uma planta com 5 bombas. A eficácia da solução será demonstrada se for encontrado um valor para P_{\max} que reduza o consumo de pico da planta. A Tabela 3 expõe os parâmetros das bombas, juntamente com a Figura 4.2, que mostra o sinal gerado na linha de alimentação da planta.

Tabela 3 – Dados do modelo de 5 bombas

Bomba w	t_w^{on}	t_w^{off}	t_w^c	P_w
1	1	1	2	1
2	1	4	5	4
3	1	1	2	3
4	1	1	2	2
5	1	6	7	4

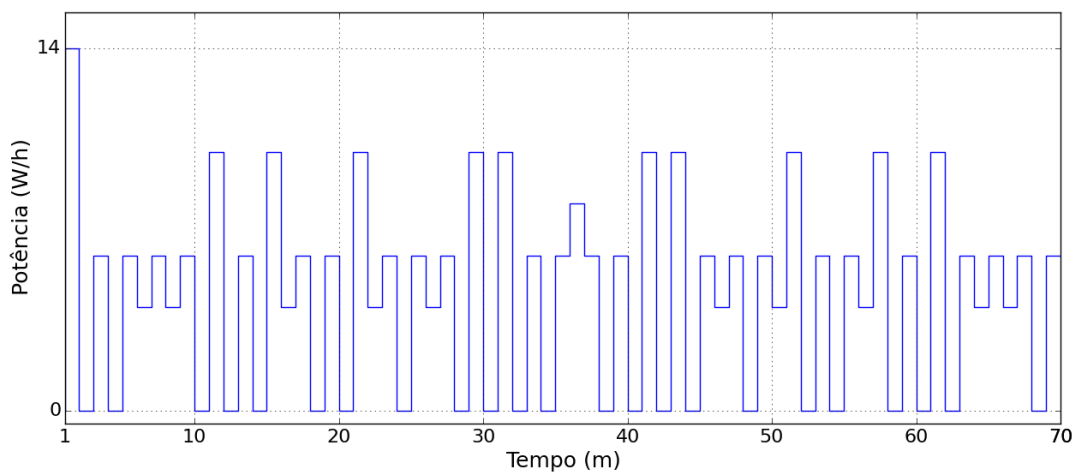


Figura 9 – Sinal gerado pelo sistema da Tabela 3

Pela Figura 4.2 nota-se que há diversos momentos em que a planta atinge consumo 0, ou seja, não há bombas ativadas naquele momento. Mesmo que isso não seja estritamente um problema, é uma subutilização dos recursos disponíveis. Assim sendo, o fato de não haver nenhum tipo de controle prévio na planta fez com que a carga de pico se concentre no início da operação, momento em que todas as bombas são ligadas.

Após definidos os dados de entrada, fez-se então a execução dos modelos pelo *solver*. A saída dos algoritmos são os vetores de atraso, presentes na Tabela 4. De posse dos atrasos,

construiu-se os sinais de consumo provenientes do resultado dos algoritmos, apresentados nas Figuras 10 para o modelo de sinais complementares e 11 para o modelo de conjuntos factíveis.

Tabela 4 – Resultados da otimização dos dois modelos.

Bomba w	δ_w^{SC}	δ_w^{CF}
1	0	0
2	2	3
3	1	1
4	0	0
5	3	0

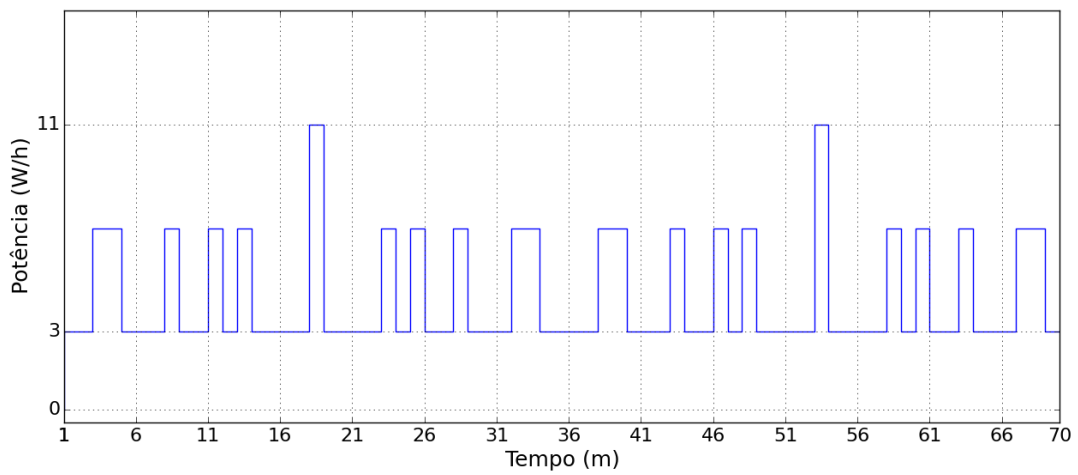


Figura 10 – Instância de 5 bombas no modelo de sinais complementares

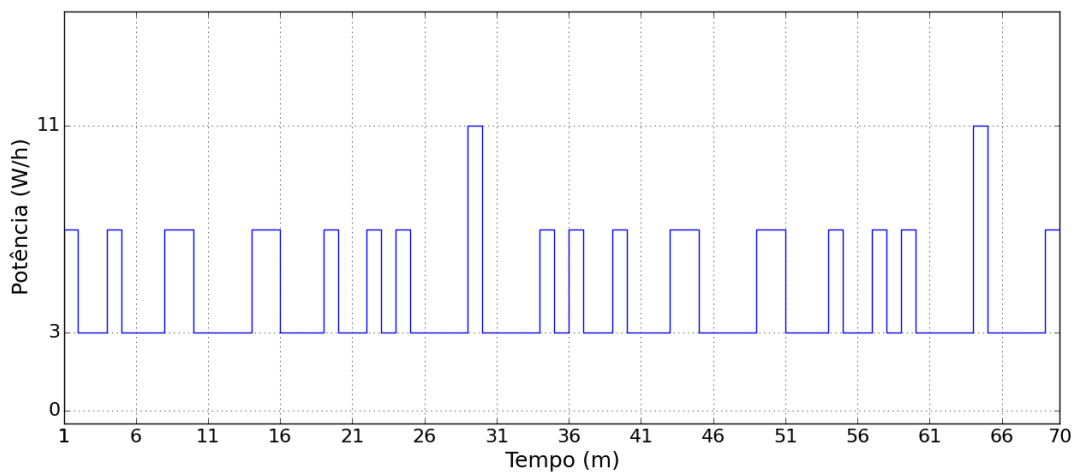


Figura 11 – Instância de 5 bombas no modelo de conjuntos factíveis

Após a execução do exemplo, é comprovada a eficácia dos modelos em resolver o problema — o valor da potência de pico (P_{\max}) após a aplicação do algoritmo ficou fixado em $11W/h$,

uma melhora de $4W/h$ no consumo da planta, em relação ao sinal sem atraso.

Um resultado igualmente importante foi o uso mais eficiente dos recursos da planta. Isso fica claro quando em ambos os resultados o valor de consumo mínimo não foi menor que $3W/h$.

Os vetores de atraso dos modelos se destacam por serem diferentes. Mesmo assim, ambos atingiram um resultado equivalente no valor de P_{\max} . Isso indica que o problema em questão possui uma região de otimalidade, podendo haver mais de uma solução.

4.3 RESULTADOS COMPUTACIONAIS DO ALGORITMO

Com a eficácia comprovada de ambos os modelos, faremos aqui um teste de eficiência computacional, comparando o tempo de execução dos modelos. Para efetuar esse teste, foram criadas instâncias com 10, 20, 30, 40 e 50 bombas, utilizando o *script* citado na seção 4.1.

A captura do tempo de execução se deu utilizando um comando de depuração do *solver*, o *mipdisplay*. Esse comando exibe as iterações do *solver* durante a sua execução, juntamente com o tempo de execução a cada 10 passos. Ao final da execução, o programa exibe o tempo de execução total, contando com o tempo do pré-processamento da árvore e as iterações do algoritmo de solução.

Na Tabela 4.3 estão apresentados os tempos de execução, por número de bombas e por algoritmo. Esses mesmos resultados estão apresentados de forma gráfica na Figura 4.3, utilizando escala logarítmica no tempo de execução.

Tabela 5 – Tempo de execução das instâncias por algoritmo

Bombas	SC	CF
10	0.19s	0.18s
20	43.13s	9.81s
30	124.62s	128.78s
40	767.29s	655.48s
50	4500.15s	8317.60s

Ambos os modelos conseguiram resolver todas as instâncias e obtiveram resultados muito semelhantes, tendo maiores diferenças nas instâncias de 20 e 50 bombas — vale destacar que, no caso da instância de 50 bombas, o modelo de sinais complementares se mostrou quase duas vezes mais eficiente que o outro modelo.

Observando os resultados do experimento, fica evidente que a complexidade de ambos os algoritmos em relação ao número de bombas é aproximadamente exponencial, já que os pontos

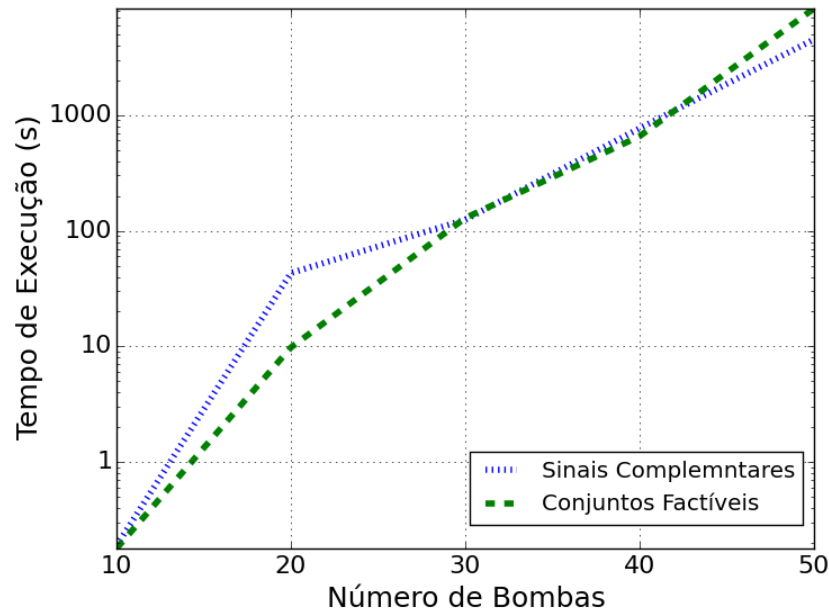


Figura 12 – Relação entre tempo de execução e o número de bombas.

seguem quase que exatamente a diagonal do gráfico.

A eficácia da aplicação dos algoritmos foi comprovada pelos resultados obtidos na Seção 4.2, demonstrando uma clara diminuição da potência total consumida pelo sistema e, conseqüentemente, distribuindo de melhor forma a carga consumida. Por fim, foi feita uma análise de execução computacional, buscando encontrar os limites da solução.

5 CONCLUSÕES

Como pretendido inicialmente, neste trabalho buscou-se a formação de um projeto capaz de auferir a possibilidade de melhora da eficiência de campos *onshore* maduros, com bombas operando sob o regime de controle *pumpoff*.

Para tanto, conduziu-se um estudo sobre a área de extração de petróleo, mais especificamente a técnica de elevação artificial bombeio mecânico e os efeitos que o amadurecimento do reservatório causam nos equipamentos e no processo de operação dessas plantas.

A seguir, fez-se a simplificação do modelo da bomba mecânica, para que se comportasse como uma tarefa em um problema de escalonamento. Com isso, foi possível descobrir propriedades e garantias necessárias para a resolução do problema.

De posse do modelo da bomba, construiu-se dois programas matemáticos para o escalonamento de bombas *pumpoff*, com o objetivo de minimizar o gasto energético da planta — um baseado na criação de dois sinais complementares ao sinal de controle da bomba, e outro na enumeração extensiva dos conjuntos de soluções factíveis de cada bomba.

Por fim, apresentou-se uma instância do problema com dados gerados sinteticamente e o resultado da aplicação dos programas matemáticos na citada instância. Assim, fez-se um comparativo da eficiência computacional dos programas, apresentando-se em seguida os resultados.

A aplicação de técnicas de otimização auxilia na melhoria da eficiência econômica de várias atividades. Dentre elas, a área de petróleo e gás vem se beneficiando enormemente, com a diminuição de gastos e o aumento da produção, permitindo assim uma melhor tomada de decisão por parte dos operadores e dos gerentes de negócio.

Este trabalho é um exemplo de como o campo da otimização pode trazer melhorias na operação de plantas *onshore*. Esses aperfeiçoamentos aumentam a viabilidade e a longevidade de campos maduros, tornando-os economicamente rentáveis e os mantendo em operação, do contrário, a produção não seria mais viável frente aos custos operacionais.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Como a complexidade da solução proposta cresce de maneira exponencial, uma outra abordagem pode ser feita com o horizonte deslizante, na qual o tamanho da janela de otimização

é escolhida de forma arbitrária. Esse tipo de abordagem pode ter mais aplicação prática, pois seu tempo de execução é mais controlado e ajustável, mesmo em detrimento da eficácia da solução.

Quando os períodos das bombas são primos entre si, notou-se que não houve mudança no valor da potência de pico após a aplicação dos programas. Isso cria a suspeita de que o fator de primalidade entre os períodos pode afetar diretamente o valor da função objetivo, abrindo a oportunidade para o cálculo prévio do valor de P_{\max} .

Com essa informação, o *solver* poderia ser mais eficaz na resolução do problema, permitindo até mesmo soluções globalmente ótimas, apenas observando um horizonte limitado.

REFERÊNCIAS

- 1 PETROBRAS S.A. *Bacia do Recôncavo*. Disponível em: <<http://www.petrobras.com.br/pt/nossas-atividades/principais-operacoes/bacias/bacia-do-reconcavo.htm>>.
- 2 TAKÁCS, G. *Sucker-Rod Pumping Manual*. [S.l.]: PennWell, 2003.
- 3 ORDONEZ, B. *PROPOSTA DE CONTROLE DE OPERAÇÃO DE POÇOS COM BOMBEIO MECÂNICO ATRAVÉS DA PRESSÃO DE FUNDO*. Dissertação (Tese de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Junho 2008.
- 4 THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. [S.l.]: Petrobras, 2001.
- 5 WESTERMAN, G. W. Successful application of pump-off controllers. *Society of Petroleum Engineers of AIME*, 1977.
- 6 YOUNG, M.; SHU, L.-C. Hybrid online/offline scheduling for hard real-time systems. In: *2nd International Symposium on Real-Time and Media Systems*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 231–240.
- 7 LIU, C. L.; LAYLAND, J. Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard-real-time environment. *Journal of the Assomation for Computing Machinery*, v. 20, 1973.
- 8 GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, p. 849–859, 1961.
- 9 FOURER, R.; GAY, D. M.; W.KERNIGHAN, B. *AMPL*. [S.l.]: Thompson, 2003.
- 10 IBM, Inc. Mountain View, California. Disponível em: <ftp://public.dhe.ibm.com/software/websphere/ilog/docs/optimization/cplex/ps_usrmanplex.pdf>.
- 11 NEELY, A. B.; TOLBERT, H. Experience with pumpoff control in the permian basin. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1985.