

Guilherme Bertuol

**Análise e aplicação da técnica de contornos ativos
com métodos de segmentação tradicionais em
imagens médicas**

Florianópolis – SC

Junho, 2007

Guilherme Bertuol

**Análise e aplicação da técnica de contornos ativos
com métodos de segmentação tradicionais em
imagens médicas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como parte dos requisitos para obtenção
do grau de Bacharel em Ciência da Com-
putação.

Orientador:

Prof. Dr.rer.nat. Aldo von Wangenheim

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA

Florianópolis – SC

Junho, 2007

Guilherme Bertuol

Análise e aplicação da técnica de contornos ativos com métodos de segmentação tradicionais em imagens médicas

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como parte dos requisitos para obtenção
do grau de Bacharel em Ciência da Com-
putação.

Prof. Dr.rer.nat. Aldo von Wangenheim
Orientador

Prof. Dr.rer.nat Eros Comunello
Membro da banca

Msc. Rafael Simon Maia
Membro da banca

Rafael Floriani Bertoldi
Membro da banca

*Dedico esse trabalho à minha família
por me apoiar nos momentos difíceis
e ao meu amor Ulrike por não me deixar
esquecer que a vida é muito mais simples
do que parece.*

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

– os professores doutores Eros Comunello e Aldo von Wangenheim, pela orientação e incentivo;

– os colegas do Laboratório de Processamento de Imagens do Grupo Cyclops do Departamento de Informática e Estatística da UFSC, em especial a Rafael Bertoldi, Vilson Heck Júnior, Karl Phillip, Leandro Coser, André Germano Regert, Adiel Mittman e Antônio Sobieranski, pela ajuda em diversos momentos;

– ao doutorando Daniel Duarte Abdalla e mestrando Rafael Bertoldi pelas construtivas discussões;

– todos os colegas de graduação do curso de bacharelado em Ciência da Computação da UFSC.

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

Abstract

1	Introdução	p. 11
1.1	Motivação	p. 12
1.2	Objetivos Gerais	p. 12
1.3	Objetivos Específicos	p. 13
1.4	Estrutura do trabalho	p. 13
2	Fundamentação teórica	p. 14
2.1	Definições básicas	p. 14
2.1.1	Definição de imagens	p. 14
2.1.2	Definição geral de segmentação	p. 15
2.2	Métodos básicos de segmentação	p. 17
2.2.1	Limiarização	p. 17
2.2.2	Crescimento de regiões	p. 19
2.2.3	Dividir e Agrupar	p. 21

2.2.4	Color Structure Code	p. 22
2.3	Métodos variacionais de segmentação	p. 27
2.3.1	A funcional de Mumford-Shah	p. 28
2.3.2	Snakes	p. 30
3	Contornos ativos para segmentação	p. 36
3.1	Level Sets	p. 37
3.2	Deslocamento por curvatura média	p. 39
3.2.1	Aproximação numérica	p. 40
3.3	Contornos ativos geodésicos	p. 41
3.3.1	Experimentos numéricos	p. 42
3.4	Contornos ativos baseado em regiões	p. 45
3.5	Contornos ativos para segmentação de múltiplas regiões	p. 48
3.6	Modelo hierárquico	p. 51
4	Considerações finais	p. 55
4.1	Trabalhos futuros	p. 57
	Anexo A – Introdução a superfícies implícitas	p. 58
	Anexo B – Esquemas numéricos para o modelo geodésico de contornos ativos	p. 60
	Referências	p. 63

Lista de Figuras

1	Exemplo de limiarização de uma imagem com alto contraste.	p. 18
2	Exemplo de limiarização de uma imagem com baixo contraste.	p. 18
3	Regiões possuem valores de pixel similares.	p. 19
4	Exemplo de topologia de uma imagem binária.	p. 20
5	Exemplo de estrutura usando quadtree.	p. 21
6	Estrutura hierárquica das ilhas que cobrem a imagem, reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 2)	p. 23
7	Agrupamento de <i>code-elements</i> , reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 5)	p. 24
8	Duas regiões r_1 e r_2 que possuem s em comum, reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 7)	p. 26
9	Convergência de uma <i>snake</i> tradicional.	p. 33
10	Convergência de uma <i>snake</i> com fluxo vetorial de gradiente	p. 35
11	Deslocamento por curvatura média com $t = 0, 20, 50, 250$ e 1000 , reim- presso de (BROX, 2005, p. 108)	p. 41
12	Resultados numéricos da técnica utilizada em (GOLDENBERG et al., 2001)	p. 44
13	Segmentação de cérebro usando o algoritmo numérico de (CHAN; VESE, 2001).	p. 47
14	Imagem sintética com ruído onde as regiões possuem mesma média mas desvio padrão distintos, reimpresso de (BROX, 2005, p. 127)	p. 48

15	Representação das regiões em função dos valores de ϕ	p. 49
16	Segmentação utilizando o modelo multiregião de Chan-Vese em múltiplas inicializações e com parâmetro $\nu = 343$	p. 52
17	Exemplo de funções implícitas de uma e duas dimensões, reimpresso de (OSHER; FEDKIW, 2002, p. 4).	p. 58

Resumo

Segmentação de imagens pode ser considerado uma das etapas mais importantes do processamento digital de imagens. Os algoritmos clássicos de segmentação apresentam resultados satisfatórios para imagens com restrições. Uma nova metodologia de segmentação variacional vem sendo pesquisada nos últimos anos, chamada de contornos ativos. Nesse artigo, apresentamos essa nova técnica, apontando suas principais características e possíveis aplicações em imagens médicas.

Abstract

Image segmentation is perhaps the most important step in digital image processing. The classical algorithms for segmentation produce reasonable results for restricted image sets. Novel variational segmentation techniques have been proposed in the past decade, the so called active contours. In this paper, we present an overview of these techniques, pointing out its main advantages and possible applications in medical imaging.

1 Introdução

Uma das áreas de maior relevância em processamento digital de imagens (PDI) que tem durante todo o seu tempo de vida recebido uma grande parcela de atenção dos pesquisadores é a segmentação de imagens. Tamanha atenção se deve ao fato de que, juntamente com o processo de adaptação a intensidade luminosa, a separação dos objetos na cena se torna o aspecto base do sistema de percepção visual dos seres vivos. A capacidade de perceber a luz e a sua intensidade juntamente com a interpretação cognitiva dessa luminância pelo cérebro formam o sentido visual, essencial para a vida. Talvez a parte mais importante na análise de imagens, a segmentação se demonstra também uma das mais difíceis.

Para se alcançar um método de segmentação satisfatório segundo os critérios de avaliação subjetivos, diversas abordagens foram propostas. Essas propostas atingem bons resultados na maioria dos casos, mas no entanto esse sucesso é dependente de um contexto. Em outras palavras, são criados determinados tipos de abordagens que são empregados na solução de problemas específicos. Esses problemas advêm das características da imagem a qual reproduz a cena a ser segmentada. Para tal, explora-se certas propriedades que ocorrem na imagem. As características que definem um determinado tipo de imagem podem advir de fontes diversas, desde a capacidade de captura da cena natural pelos equipamentos digitais, até mesmo na pouca eficiência no armazenamento e/ou visualização. Fatores como robustez e acuidade também ditam a forma como o método deve tratar o processo de segmentação.

A pesquisa na área indica que estamos longe de encontrar um método unificado para

segmentar qualquer tipo de imagem. No entanto, técnicas promissoras como os contornos ativos fornecem uma direção atraente para a qual se voltar.

Este trabalho apresenta-se como uma revisão de técnicas clássicas de segmentação e os novos métodos variacionais. A partir dessa revisão, pode-se comparar as principais características que fazem com que essas técnicas sejam empregadas em determinadas situações. Esses métodos se tornam atrativos pois podem modelar uma vasta gama de problemas específicos. Alterando-se alguns termos da funcional de energia para adaptar o problema, tem-se uma modelagem conceitual consistente do problema. A partir dessa modelagem, pode-se empregar técnicas bem conhecidas de implementação a fim de tornar o algoritmo estável e eficiente tanto em termos computacionais quanto em termos de resultados. Com isso em mente, esse trabalho visa descrever as principais técnicas de contornos ativos, bem como suas vantagens e/ou desvantagens em relação aos critérios de segmentação apresentados.

1.1 Motivação

Esse trabalho busca motivação na carência da literatura específica sobre a análise dos novos métodos variacionais nas imagens médicas. Acredita-se que uma comparação desses novos métodos, juntamente com os tradicionais, pode ajudar na escolha de qual técnica utilizar para determinada situação. Apresentando-se as características desses novos métodos e suas possíveis interpretações numéricas, pode-se contribuir com a área de processamento digital de imagens e computação.

1.2 Objetivos Gerais

O objetivo desse trabalho é avaliar comparativamente os diversos métodos de segmentação de imagens, em especial os métodos variacionais, e analisar a sua aplicação em imagens médicas.

1.3 Objetivos Específicos

Fazem parte dos objetivos específicos do trabalho:

- Apresentar os métodos mais utilizados para segmentar imagens médicas.
- Discutir sobre os novos métodos variacionais, incluindo os contornos ativos.
- Analisar a aplicação dos contornos ativos em áreas específicas de segmentação.

1.4 Estrutura do trabalho

O capítulo 2 refere-se as definições básicas de imagem e segmentação. Além disso, os métodos clássicos de segmentação serão discutidos. Uma introdução sobre os métodos variacionais de segmentação será apresentado.

No capítulo 3 discutiremos a fundo os diversos modelos de contornos ativos para segmentação encontrados na literatura. Partiremos dos modelos mais simples, os chamados modelos baseados em bordas, até aqueles que fazem uso de informações sobre as regiões. Finalmente, apresentaremos modelos que segmentam imagens complexas com múltiplas regiões e que possuem o adicional de suavização da imagem.

Nas considerações finais, discutiremos sobre os modelos apresentados de forma sucinta a fim de apontar suas principais vantagens e desvantagens. Por último, a indicação de trabalhos futuros que podem ser realizados explorando-se os métodos de segmentação aqui apresentados serão relacionados.

2 Fundamentação teórica

O propósito da análise de imagens é dar significado simbólico a dados contidos em imagens, isto é, fazer com que a máquina *entenda* o que está sendo representado na cena.

A análise de uma imagem por meio de computadores passa por etapas bem definidas. Dentre elas, a segmentação possui um papel principal. Para definir segmentação corretamente, é necessário introduzir conceitos sobre a representação da imagem em uma máquina digital.

Esse capítulo trata primeiramente dos métodos de segmentação tradicionais. Aqui as técnicas utilizadas nos primórdios do processamento digital de imagens serão abordadas. Isso se faz necessário para a compreensão dos métodos mais avançados apresentados nas seções seguintes.

2.1 Definições básicas

2.1.1 Definição de imagens

O ambiente que nos cerca existe, em uma escala razoável de observação, no tempo e espaço contínuo. Evidentemente, os sinais e imagens que existem no ambiente são naturalmente analógicos, isto é, o sinal existe no domínio contínuo do tempo/espaço e assume valores em um intervalo contínuo. No entanto, uma vez percebido pelos aparelhos sensíveis, o sinal da imagem deve ser convertido em um formato compatível com computadores, o formato digital. O termo digital significa que o sinal contínuo é convertido para um domínio discreto e assume valores de um conjunto discreto de possibilidades.

Assim sendo, uma imagem digital pode ser definida como uma função $f(x, y)$ onde x e y representam coordenada no espaço discreto, e o valor de f em qualquer ponto (x, y) é chamado de intensidade ou valor de pixel naquele ponto.

O valor que f assume em determinado par de coordenadas depende do tipo de imagem que representa. Quando capturada, os pixels da imagem são quantificados em valores que pertencem a um conjunto de números, chamados de tons de cinza. Uma imagem em tons de cinza geralmente é representada por pixels que possuem um valor de cinza de tamanho 8 bits. De acordo com Bovik em (BOVIK, 2005, p. 9), "... o olho humano geralmente é incapaz de perceber [valores de cinza] além de 6 bits ...". Além de bem representar a escala de cinza, 8 bits representam um byte, o que o faz ser um valor interessante de se manipular.

É claro que a experiência visual do ser humano não é limitada a escalas de cinza. Assim sendo é necessário expressar cores em imagens digitais. Em imagens coloridas os valores de pixels deixam de ser escalares e passam a ser tuplas (ou vetores) de valores. Essas tuplas armazenam valores, de tamanho variado, que estão definidos em um espaço de cor. O espaço de cor mais utilizado, por ser uma boa aproximação de como o ser humano percebe as cores, é o RGB (da sigla em inglês, vermelho, verde e azul). Esse espaço possui as três cores primárias que combinadas assumem as cores do espectro.

2.1.2 Definição geral de segmentação

Segmentação de uma imagem consiste na divisão ou separação da imagem em regiões de atributo similar (PRATT, 2001, p. 551). O atributo mais básico para segmentação é a amplitude de luminância para uma imagem monocromática e componentes de cor para uma imagem colorida. Bordas e textura também são atributos úteis para segmentação.

Segmentação não envolve classificar cada segmento, somente subdivide uma imagem; não há a tentativa de reconhecer os segmentos individuais ou suas relações mútuas.

Para uma segmentação com sucesso, tem-se que definir primeiramente o que seria

uma região na imagem. Em uma imagem identifica-se quatro tipos distintos de região, de acordo com Skarbek e Koschan em (SKARBEEK; KOSCHAN, 1994):

1. Região é um componente conectado de um conjunto de pixels especificado por uma função definida em um espaço de cor. Por exemplo:

- (a) valor de pixel está no espaço contido no plano;
- (b) valor de pixel está no poliedro definido;
- (c) valor de pixel está na célula Voronoi com uma dada representividade;

Observe que geralmente funções definidas em um espaço de cor definem múltiplos conjuntos de pixels. No entanto, se o volume no espaço de cor é pequeno, então intuitivamente, a região é uniforme.

2. Região é um conjunto conectado de pixels que obedece um critério de uniformidade.

Por exemplo:

- (a) região uniforme derivada por crescimento de um bloco inicial juntando-se outros pixels ou blocos de pixels;
- (b) região uniforme obtida particionando-se uma região maior, que não é uniforme.

3. Região é um conjunto de pixels delimitado por pixels da borda criando um contorno.

Observe que, aqui, as regiões também são uniformes, porque estão no conjunto complementar do conjunto não-uniforme que contém os pixels da borda.

4. Região corresponde a uma superfície ou um objeto de material homogêneo. Por exemplo sombra e penumbra não possuem influência no resultado da segmentação apesar de mudarem os valores de cor na imagem.

As definições 1 e 2 usam um predicado de uniformidade, sendo que em 1 o predicado baseia-se em um único pixel enquanto em 2 em área. Definições do tipo 3 usam um predicado de não-uniformidade. O tipo 4 representa uma subclasse suplementar de

regiões que podem ser tratadas também como um caso especial das definições anteriores e aplica-se exclusivamente a imagens coloridas. Nesse caso, a cor não é essencial para a “homogeneidade” da região, fazendo com que características físicas dos objetos da cena se tornem importantes.

Não há teoria de segmentação de imagens. Como consequência, não foi desenvolvido somente um padrão para tal. Ao contrário, há uma coleção de métodos que tiveram sucesso em determinada situação. Por serem métodos tão dependentes de cada caso, há de se ter um meio de aferir sua precisão. Em 1985, Haralick e Shapiro estabeleceram o seguinte critério de avaliação:

As regiões da segmentação devem ser uniformes e homogêneas com relação a algumas características tais como tom de cinza ou textura. O interior dessas regiões devem ser simples e com poucos buracos. Regiões adjacentes da segmentação devem ter valores significantemente diferentes com relação a característica a qual são uniformes. Fronteiras de cada segmento devem ser simples, não irregulares, e devem ser espacialmente acuradas. (HARALICK; SHAPIRO, 1985, p. 1)

Formalmente, a segmentação de uma imagem $f(x, y)$ é uma partição de $f(x, y)$ em sub-imagens R_1, R_2, \dots, R_n tal que:

1. $\cup_{i=1}^n R_i = f(x, y)$,
2. $R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j$,

sendo que toma-se a definição de sub-imagem de algum dos quatro itens apresentados anteriormente.

A seguir apresenta-se algumas técnicas populares de segmentação em imagens médicas.

2.2 Métodos básicos de segmentação

2.2.1 Limiarização

Nos casos simples onde $f(x, y)$ contem um objeto, a imagem em tons de cinza pode ser convertida em uma imagem binária $B(x, y)$. Nessa imagem binária, o valor de pixel

do objeto é 1 e o valor do fundo é 0. Para determinar uma imagem binária utiliza-se uma limiarização T , assim:

$$B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x, y) < T, \\ 0 & \text{se } f(x, y) \geq T. \end{cases} \quad (2.1)$$

Em casos mais complexos, com mais de um objeto por exemplo, o uso de histogramas para determinar a distribuição dos valores de pixel se faz necessário. Para imagens sintéticas esse histograma conterá picos distintos. Porém, em imagens reais os picos não são tão claros. Isto se deve ao fato que imagens reais não contém bordas salientes, ou bruscas, resultando em picos e vales no histograma.

Usando histogramas, divide-se os objetos que possuem aproximadamente os mesmos intervalos de valores de pixels e utiliza-se esses intervalos para limiarização.

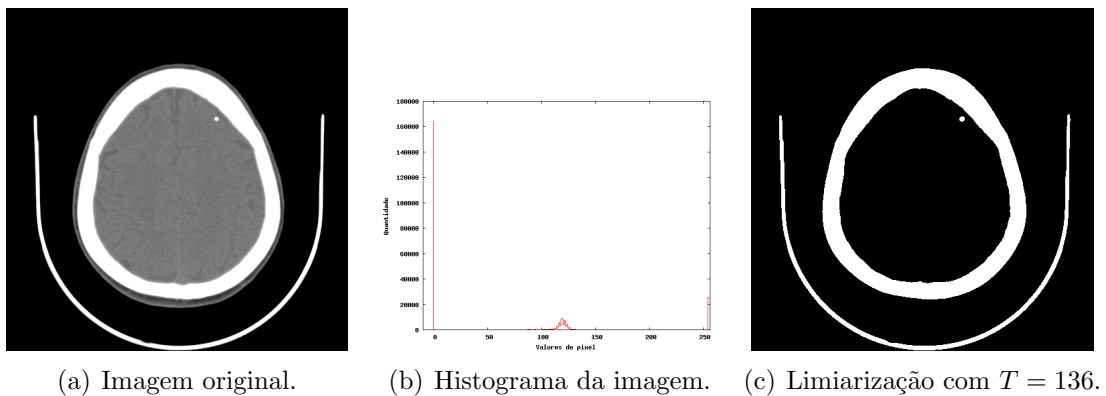


Figura 1: Exemplo de limiarização de uma imagem com alto contraste.

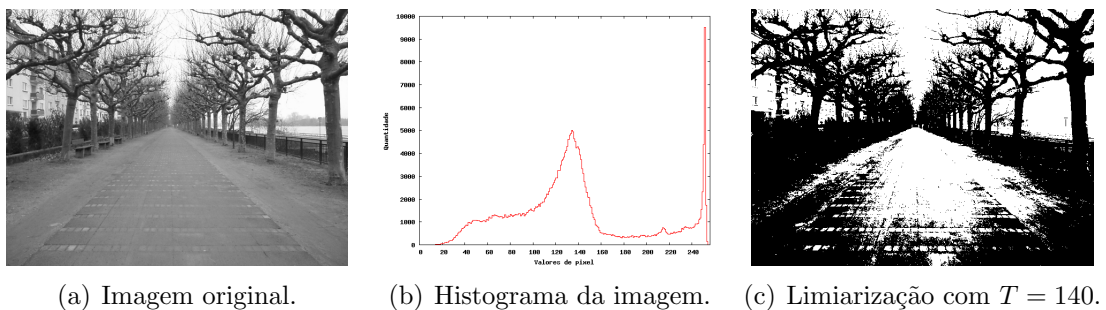


Figura 2: Exemplo de limiarização de uma imagem com baixo contraste.

2.2.2 Crescimento de regiões

Crescimento de regiões é um procedimento que agrupa pixels ou subregiões em regiões maiores baseado em critério predefinido. O procedimento básico é começar com um conjunto inicial de pontos e partir daí crescer esse conjunto adicionando-se a cada conjunto aqueles pixels vizinhos que possuem propriedades similares.

Selecionar um conjunto de um ou mais pixels iniciais geralmente baseia-se na natureza do problema. Quando não há informação *a priori*, inicializa-se cada pixel da imagem como uma região. A partir daí, aplica-se os critérios de junção e avalia-se se ainda resta pixels a serem unidos.

A seleção do critério de junção não depende somente do problema sob consideração, mas também no tipo de imagem a ser analisado. Por exemplo, em imagens com características que dependem somente na diferença de cor dos objetos, há de se escolher um critério de similaridade que use as informações de cor contida na imagem colorida a ser segmentada. Da mesma maneira, para imagens em tons de cinza, o critério deve considerar os valores de pixels dentro da escala de cinza disponível. Apesar dos critérios de similaridade possuírem um forte apelo do valor de pixel, juntar pixels somente levando em consideração o seu valor faz com que o crescimento de regiões seja mais uma maneira de se fazer uma limiarização. Portanto, os critérios de similaridade de alguma maneira devem levar em conta aspectos de conectividade no domínio espacial da imagem.

50	52	240	245
55	60	237	235
100	110	103	195
105	107	95	190

(a) Valores de pixel da imagem.

50	52	240	245
55	60	237	235
100	110	103	195
105	107	95	190

(b) Regiões segmentadas.

Figura 3: Regiões possuem valores de pixel similares.

Além do critério de similaridade, o algoritmo precisa de uma condição de parada. Basicamente, um crescimento de região deve parar quando não há mais pixels satisfazendo os critérios de junção. Considerações sobre tamanho e forma devem ser levados em conta, se disponíveis previamente, para determinar o término do algoritmo. Essas informações são cruciais para o sucesso da segmentação.

Conceitos topográficos e hidrológicos provaram-se úteis no desenvolvimento de métodos de segmentação por crescimento de regiões (BEUCHER; LANTUEJOL, 1979), (HARALICK, 1983). Nesse contexto, uma imagem é considerada uma superfície com altitude no qual pixels com alta amplitude correspondem a pontos de picos, e pixels com baixa amplitude correspondem a pontos de vale. Se uma gota d'água cair em qualquer ponto na superfície, normalmente irá se deslocar para pontos de baixa altitude até que encontre uma altitude mínima local. O acúmulo de água em áreas de altitude mínima é chamado de *catchment basin*. Todos os pontos que drenam água para um local comum fazem parte do mesmo *watershed*. Um vale é uma região que é rodeada de picos. Um pico é um local de gradiente máximo na superfície.

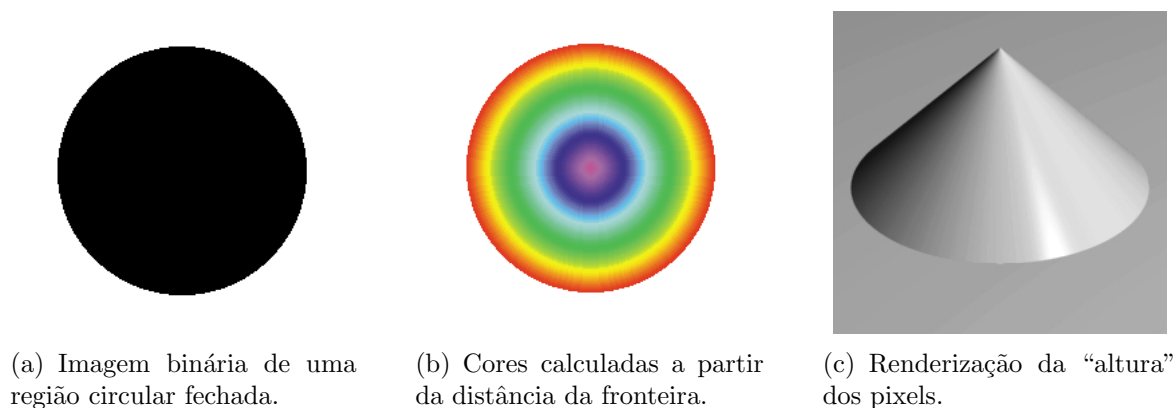


Figura 4: Exemplo de topologia de uma imagem binária.

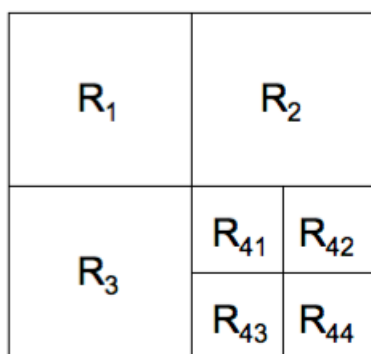
Há dois tipos de algoritmos para computar-se *watersheds* de uma imagem: *rainfall* e *flooding*. No método *rainfall*, mínimos locais são procurados na imagem. Cada mínimo local recebe um identificador único. Mínimos locais adjacentes são combinados e identificados. O próximo passo é fazer com que uma gota d'água conceitual seja colocada em todos os pixels não identificados. A gota move-se para pontos de altitude mínima

na sua vizinhança até que atinge um pixel identificado, nesse ponto a gota recebe essa identificação. O algoritmo continua até não existirem mais pixels não identificados.

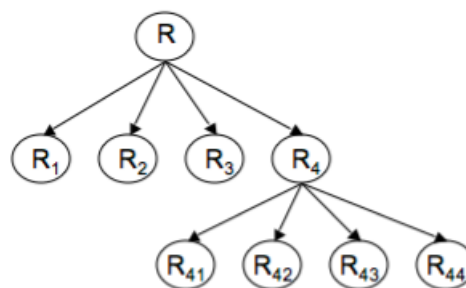
No método *flooding* as regiões que correspondem a depressões são inundadas por água, iniciando-se do mais baixo e então em cada um tão logo que o nível global da água alcance sua altitude. Onde a água de diferentes mínimos irá misturar-se, constroem-se represas para separar as inundações. As represas que surgem identificam uma região diferente na imagem, portanto segmentando-a. Desta técnica surgiu o nome *watershed*, do inglês divisor de águas.

2.2.3 Dividir e Agrupar

Inicialmente apresentada por Horowitz e Pavlidis em (HOROWITZ; PAVLIDIS, 1976), essa técnica tem sido muito utilizada por ser uma base de tratamento de regiões muito fácil e prática de se utilizar. Seja R a região que contém toda a imagem e um determinado predicado P . Um método de segmentar R é subdividi-lo sucessivamente em quadrantes menores R_i toda vez que $P(R) = VERDADEIRO$. Inicia-se com a imagem inteira; se $P(R) = FALSO$, divide-se a imagem em quadrantes; se P é $FALSO$ para qualquer quadrante, subdivide-se aquele quadrante em subquadrantes, e assim por diante.



(a) Estrutura de regiões na imagem.



(b) Quadtree associada.

Figura 5: Exemplo de estrutura usando quadtree.

Essa técnica utiliza uma estrutura de dados chamada *quadtree*, uma árvore que possui quatro descendentes em cada nó. Note que o nó raiz R na Figura 5(b) é toda a imagem

e cada subnodo corresponde a uma subdivisão.

Se somente a operação de dividir for usada, a partição final pode conter regiões adjacentes com propriedades indênticas. Para solucionar esse problema, a operação de união de subdivisões também é aceita. Então, para que duas regiões R_i e R_j sejam unidas, basta que $P(R_i \cup R_j) = VERDADEIRO$.

O algoritmo em alto nível é:

1. Divida em quatro quadrantes disjuntos qualquer região R_i desde que $P(R_i) = FALSE$.
2. Una quaisquer regiões adjacentes R_i e R_j desde que $P(R_i \cup R_j) = VERDADEIRO$.
3. Pare quando não seja mais possível realizar nenhuma divisão e união.

Alterando-se o predicado P para se adequar aos diversos tipos de homogeneidade de regiões, pode-se estender e generalizar esse método para diversas aplicações.

2.2.4 Color Structure Code

O Color Structure Code (CSC) é um método que combina as vantagens de técnicas locais e globais. É um método de crescimento de regiões hierárquico que é inerentemente paralelo e portanto independente da escolha de pontos iniciais e a ordem de processamento. Usa informações locais e globais da imagem e obtém segmentações robustas de cenas em cores.

A topologia hierárquica do CSC vêm da técnica introduzida por Hartmann em (HARTMANN, 1987). Essa topologia é formada por *ilhas* de diferentes níveis. Uma ilha de nível 0 consiste de 7 pixels (um pixel central e 6 vizinhos). A partição da imagem é organizada de tal forma que as ilhas se sobrepõem (cada segundo pixel de cada segunda linha é um centro de uma ilha de nível 0). Uma ilha de nível $n + 1$ é construída de maneira similar: consiste de 7 ilhas sobrepostas de nível n , repetindo-se até que uma ilha cubra totalmente a imagem.

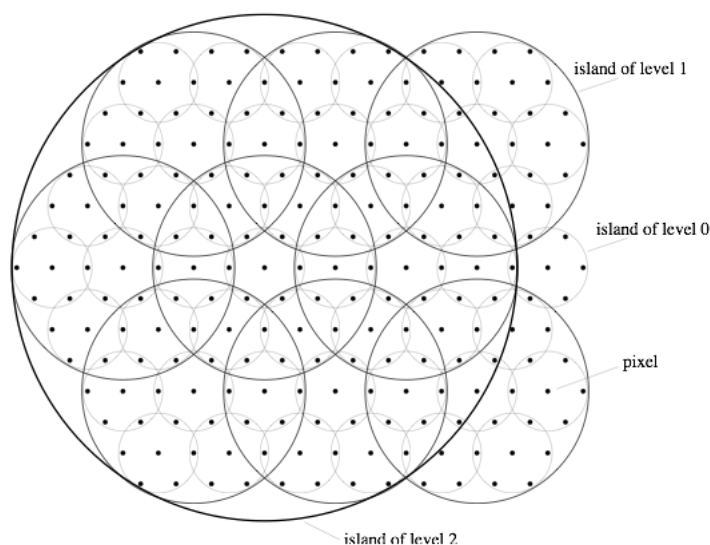


Figura 6: Estrutura hierárquica das ilhas que cobrem a imagem, reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 2)

O CSC opera essencialmente em três fases. Na fase de inicialização a imagem é particionada em regiões atômicas pequenas de nível 0. Na fase de agrupamento, essas ilhas de nível 0 crescem de forma hierárquica para completar os segmentos de cor. Dentro da fase de agrupamento é possível detectar que regiões conectadas por cadeias de gradientes de cores devem ser desagrupadas novamente. Essa última fase chama-se divisão.

Fase de inicialização. Nessa fase, regiões de cor homogênea são agrupadas e mapeadas em ilhas de nível 0 para se formar os *code-elements* iniciais. O critério de homogeneidade é criado a partir de uma limiarização, i.e., pixels com valores dentro de um determinado intervalo são considerados homogêneos. Um *code-element* é uma estrutura de dados que descreve regiões de cor dentro da ilha. A estrutura de dados armazena informação da forma e cor média de uma dada região. Esse processo é independente e pode ser feito paralelamente, desde que a imagem seja particionada corretamente.

Assim que todos os pixels foram devidamente incluídos em ilhas de nível 0, o CSC começa a operar nas respectivas ilhas. O resultado da inicialização é um conjunto de *code-elements*, cada um descrevendo pequenas áreas de cor. Na fase seguinte essas pequenas áreas são processadas por critérios de conectividade e crescem de forma hierárquica a fim de se tornarem segmentos conectados de cor.

Fase de agrupamento. Na fase de agrupamento, os *code-elements* de nível n são agrupados para se tornarem *code-elements* de nível $n + 1$ em 7 ilhas vizinhas sobrepostas de estrutura hexagonal. Serão agrupados se as regiões que representam são conectadas e possuem cor similar. A conectividade se dá facilmente devido a estrutura topológica utilizada, como se vê na Figura 7.

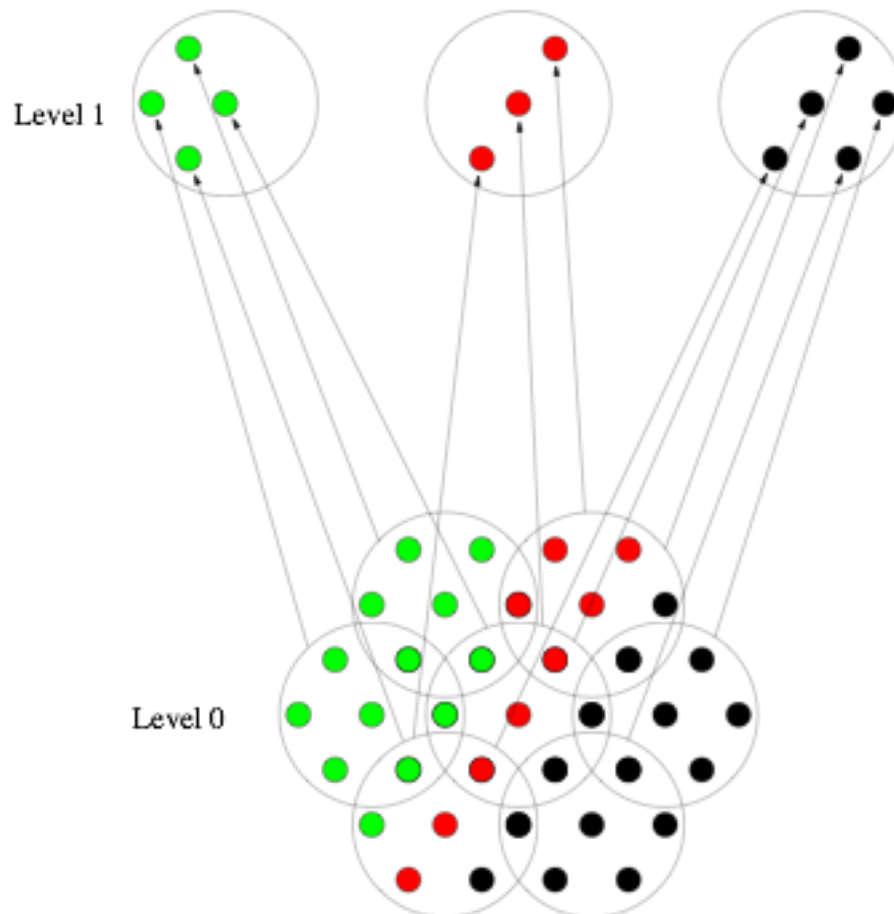


Figura 7: Agrupamento de *code-elements*, reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 5)

Dois *code-elements* são conectados se compartilham uma sub-região comum em sua ilha. No nível 1 isso implica simplesmente que compartilham o mesmo pixel. As operações de agrupamento seguem para todos os níveis. No final do processo somente um nível cobre todo o domínio da imagem.

O agrupamento de *code-elements* dentro de uma ilha se dá de forma similar as operações da fase de inicialização. Nesse caso, o algoritmo opera em regiões ao invés de pixels. Todas as regiões atômicas obtidas da fase anterior crescem concorrentemente

dentro da ilha. O formato hexagonal e a sobreposição de ilhas vizinhas faz com que a checagem de conectividade seja feita de forma eficiente.

Ao final do processo de agrupamento, quando o algoritmo atinge a ilha de nível mais alto, os *code-elements* são armazenados em forma de árvore. O elemento raiz possui informações sobre o formato, valor médio de cor e localização. Os nós folha formam as regiões agrupadas que formaram a região raiz, desde o nível 0 até o mais alto. Fazendo buscas na árvore, encontra-se mais detalhes sobre sua composição. Dessa forma, tem-se a informação global sobre o estado atual da segmentação e a partir daí pode-se decidir sobre uma nova divisão da região em questão. Aplica-se critérios de similaridade de cor entre regiões vizinhas. O processo de divisão é o próximo passo do algoritmo.

Fase de divisão. Nessa fase, corrige-se erros que eventualmente acontecem na fase de agrupamento. Na fase anterior, quando se dá o processo de agrupamento de regiões em ilhas, somente se tem informação local sobre a dada região. No final do processo, tem-se árvores que representam as regiões agrupadas, cada uma representando um possível segmento da imagem. Percorrendo-se pela estrutura de dado, obtém-se informações detalhadas de sub-regiões. Nesse instante, o algoritmo possui informações globais sobre a imagem e pode decidir sobre a divisão e união de regiões existentes através de critérios de similaridade.

Considere o exemplo na Figura 8. Se a diferença de cor entre as regiões r_1 e r_2 for acima de um determinado limiar, essas regiões não devem ser agrupadas, apesar de todas as suas sub-regiões serem localmente similares. É a visão global que possui a capacidade de detectar a mudança suave de cor nas sub-regiões. Devido ao fato da estrutura sobreposta, r_1 e r_2 possuem uma sub-região em comum. Portanto, r_1 e r_2 devem ser explicitamente separadas, o que significa criar uma nova sub-região s .

Ao possibilitar que novas regiões sejam criadas a partir de avaliações globais dos dados da imagem, o algoritmo segmenta as regiões com maior grau de similaridade possível.

Na próxima seção alguns dos métodos de maior ordem que são de interesse para o

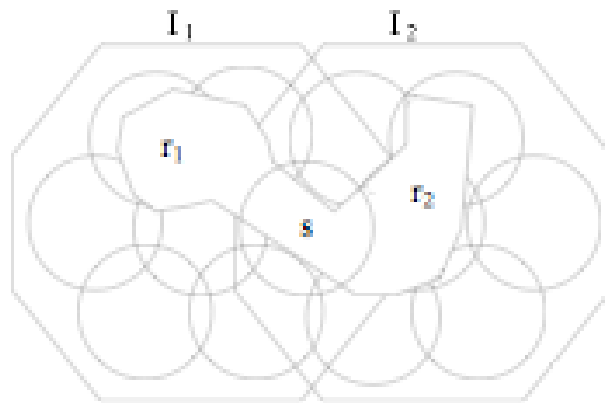


Figura 8: Duas regiões r_1 e r_2 que possuem s em comum, reimpresso de (PRIESE; STURM, 2003, p. 7)

desenvolvimento do trabalho serão descritos.

2.3 Métodos variacionais de segmentação

Numa abordagem variacional, pode-se modelar propriedades de um fenômeno físico A_1, \dots, A_m em termos de uma *funcional de energia*

$$E(u_1(x), \dots, u_n(x)) = \int_{\Omega} (A_1 + \dots + A_m) dx \quad (2.2)$$

e tenta-se encontrar funções u_1, \dots, u_n que minimizam a energia, possivelmente adicionando-se condições especiais (BROX, 2005, p. 33). As propriedades são descritas de tal forma que, através de constantes, e.g., podemos penalizar determinado comportamento inconveniente. De fato, ao se analisar a definição da funcional, tem-se uma perspectiva completa dos fatores que compõem o modelo.

Métodos variacionais são bem genéricos. Pode-se formular problemas complexos em termos que compõem a funcional de energia, e a escolha de como ponderá-los resulta em uma grande flexibilidade. Devido a essa generalidade, esses métodos são aplicados em áreas diversas da ciência.

Além de possuir uma expressividade grande, é construído sobre uma bem formalizada teoria, que é o cálculo variacional, daí seu nome. A teoria de cálculo variacional, através das chamadas equações de *Euler-Lagrange*, provê maneiras de como se minimizar tal funcional. As equações Euler-Lagrange são equações diferenciais parciais e, para funcionais de energia simples, levam a um sistema de equações linear que podem ser resolvidas através de algoritmos numéricos bem conhecidos. Pode-se dizer até que muitas funcionais de energia, se modeladas fielmente, quando aplicadas a algoritmos numéricos, tem como resultado soluções verdadeiramente ótimas.

Na análise de imagens, essa técnica obteve notoriedade com a formulação matemática feita por Mumford e Shah. Os autores propoaram uma funcional que aproxima uma imagem real. Essa funcional determina que as regiões e suas respectivas fronteiras sejam homogêneas e suaves, e encontrar uma função que a minimiza representa segmentar a imagem em objetos representativos.

Nas seções que seguem, apresentaremos a funcional de Mumford-Shah e *Snakes*, outra técnica baseada em funcionais de energia.

2.3.1 A funcional de Mumford-Shah

Seja Ω_i os subconjuntos disjuntos abertos conectados de um domínio planar Ω , cada um com uma fronteira suave diferenciável, e Γ é a união das fronteiras de Ω_i dentro de Ω , tal que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n \cup \Gamma. \quad (2.3)$$

Para a funcional E , seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em $\cup \Omega_i$ e é permitido que $f(x, y)$ seja descontínua em Γ

$$E(f, \Gamma) = \int_{\Omega} |f - g|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla f|^2 dx dy + \nu |\Gamma| \quad (2.4)$$

onde $|\Gamma|$ representa o tamanho total dos arcos contidos em Γ . Quanto menor E , tanto melhor é a segmentação de $g(x, y)$. Na equação (2.4) tem-se:

- (i). O primeiro termo força a aproximação de f a g .
- (ii). O segundo termo não permite que f – e portanto g – varie muito em cada região.
- (iii). O terceiro termo pede que as fronteiras Γ sejam as menores possíveis.

O par (f, Γ) representa a imagem de forma simples. Pode-se compará-la a um *cartoon* da imagem original, com bordas bem definidas e regiões suaves e homogêneas. É, portanto, a representação simplificada de uma imagem do mundo real, sem texturas e ruídos que eventualmente podem ocorrer.

Conjectura-se que para todas as funções contínuas g^1 , E possui um *minimum* no conjunto de todos os pares (f, Γ) , i.e., existe um par (f, Γ) que minimiza E . Há ainda três possíveis configurações para pontos finais e cruzamentos em Γ :

¹Nesse caso imagens, mas a conjectura apresentada pelos autores é genérica e pode ser utilizada em vários casos, desde que as restrições se mantenham

- (i). pontos triplos, onde três arcos se encontram num ângulo de 120° ,
- (ii). pontos de fronteira, onde uma curva encontra-se com a fronteira perpendicularmente,
- (iii). *crack tips*, onde um único arco termina sem cruzamento com outros.

As configurações impostas por Mumford e Shah certamente são uma restrição no formato com que as fronteiras podem ocorrer na segmentação. Essa imposição se deve às provas de existência da energia sobre (f, Γ) .

Um caso reduzido da equação (2.4) é obtido restringindo-se a imagem segmentada f à funções deriváveis constantes em cada sub-domínio Ω_i do problema. Então o problema é chamado “problema de partição mínima”, e para resolvê-lo, Mumford e Shah propõem minimizar a seguinte funcional:

$$E(f, \Gamma) = \sum_i \int_{\Omega_i} (g - c_i)^2 dx dy + \nu |\Gamma|, \quad (2.5)$$

sendo $c_i = \text{média}(g)$ em Ω_i . Resultados teóricos de existência e regularidade de minimizadores de (2.5) podem ser encontrados em (MUMFORD; SHAH, 1988).

As dificuldades em estudar a equação (2.4) são muitas já que envolvem uma função desconhecida f e o conjunto Γ também desconhecido: f é uma função em um espaço N -dimensional ($N = 2$ no nosso caso), enquanto Γ é um conjunto $(N - 1)$ -dimensional. Outra dificuldade é que a funcional (2.4) é não-convexa, e pode possuir inúmeras *loci minima*. Portanto, não é fácil minimizar a funcional na prática. Há algumas alternativas para este problema, tais como o método de aproximação elíptica da formulação fraca de Mumford-Shah descrito em (AUBERT; KORNPROBST, 2002), o modelo de contornos ativos sem bordas proposto por Chan e Vese em (CHAN; VESE, 2001) e (CHAN; VESE, 2002), e ainda a abordagem de evolução de curvas em (TSAI; YEZZI; WILLSKY, 2001).

Um dos grandes problemas é o conjunto de fronteiras Γ , que pode possuir valores infinitesimalmente pequenos. Ambrosio e Tortorelli em (AMBROSIO; TORTORELLI, 1990)

proporam uma versão regularizada de (2.5) onde as fronteiras possuem tamanho finito. Essa técnica permite um algoritmo de descida de gradiente para minimizar a funcional. Outro minimizador de (2.5) foi proposto por Koepfler, Lopez e Morel em (KOEPLER; LOPEZ; MOREL, 1994). Essa proposta é baseada no algoritmo de crescimento de regiões apresentado em (BEVERIDGE et al., 1989). Começando com cada pixel sendo uma região, o algoritmo agrupa regiões que decrescem a energia, atuando com uma heurística elementar de minimização. Devido a sua eficiência e simplicidade, essa proposta se tornou bastante popular, apesar de possuir uma tendência de super-segmentação, e por um longo período foi a técnica com melhores resultados na área.

2.3.2 Snakes

No final dos anos '80 sugeriu-se que seria possível seguir bordas em imagens definindo-se uma curva na imagem, e então deixando a curva por si só mover-se a uma forma e estrutura desejáveis (CASELLES; COLL, 1996) (KASS; WITKIN; TERZOPOULOS, 1988) (COHEN, 1991). Essa curva deve ter características físicas tais como elasticidade e rigidez, e também ser atraída pelas bordas da imagem. Tais curvas são chamadas de contornos ativos, modelos deformáveis ou *snakes* e se tornaram populares especialmente em análise de imagens médicas.

Na sua formulação original, modelos de contornos ativos são baseados em borda, i.e., usam um detector de borda para determinar fronteiras de regiões. Diferentemente de um detector de bordas puro, os contornos ativos asseguram bordas fechadas e portanto representam bem regiões.

Além de contornos ativos serem baseados em bordas, ainda há uma diferença para a funcional de Mumford-Shah: na sua formulação básica, os contornos são restritos a extração de um único objeto na cena, enquanto a funcional de Mumford-Shah captura muitos objetos. Essa restrição introduz uma simplificação da tarefa de segmentação, já que implica que haja o conhecimento de que exista somente um objeto a ser segmentado.

Snakes são contornos deformáveis que são úteis em uma variedade de tarefas da análise de imagens (KASS; WITKIN; TERZOPOULOS, 1988). São usadas frequentemente para aproximar as localizações e formas das fronteiras dos objetos em imagens, baseado na hipótese de que as fronteiras são contínuas e suaves. A formulação matemática de *snakes* surge da teoria de cálculo variacional, mais especificamente da aproximação ótima envolvendo funcionais.

Geometricamente, uma *snake* é um contorno explícito embutido em uma imagem. O contorno é representado parametricamente como $v(s) = (x(s), y(s))$, onde x e y são funções que representam as coordenadas e $s \in [0, 1]$ é o domínio paramétrico.

A forma do contorno embutido na imagem $I(x, y)$ é ditado pela funcional

$$E(v) = S(v) + P(v), \quad (2.6)$$

que representa a energia do contorno. A forma final do contorno corresponde ao *minimum* dessa energia.

O primeiro termo em (2.6),

$$S(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 w_1(s) \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|^2 + w_2(s) \left| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right|^2 ds, \quad (2.7)$$

é chamado de energia interna. Esse termo caracteriza a deformação do contorno, que é flexível. A flexibilidade, i.e., a capacidade do contorno de se adequar à fronteira, é controlado pelas duas funções positivas $w_1(s)$ e $w_2(s)$ em um dado ponto s na curva. Essas duas funções, que podem ser caracterizadas como parâmetros, correspondem a “tensão” e “rigidez” do contorno.

O segundo termo de (2.6) embute o contorno na imagem. Pode ser descrito assim, por exemplo,

$$P(v) = \int_0^1 P(v(s)) ds, \quad (2.8)$$

onde $P(x, y)$ denota uma função indicadora de bordas. Essa função adquire valores próximos a 0 em pontos de vizinhança das bordas da imagem, aumentando seus valo-

res gradualmente à medida que pontos distantes da borda são tomados. Por exemplo, pode-se tomar a função $P(x, y)$ como uma função que identifica os pontos de magnitude do gradiente.

Um detector de borda genérico pode ser definido como uma função positiva e decrescente g , dependente do gradiente da imagem I , tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0. \quad (2.9)$$

Por exemplo

$$g(|\nabla I(x, y)|) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma(x, y) * I(x, y)|^p}, p \geq 1 \quad (2.10)$$

onde $G_\sigma * I$, uma versão mais suave de I , é a convolução da imagem I com a Gaussiana $G_\sigma(x, y) = \sigma^{-1/2} e^{-\frac{|x^2+y^2|}{4\sigma}}$. A função $g(|\nabla I|)$ é positiva em regiões homogêneas e zero nas fronteiras (CHAN; VESE, 2001, p. 1).

De acordo com o cálculo variacional, o contorno $v(s)$ que minimiza a energia $E(v)$ deve satisfazer a equação Euler-Lagrange (KASS; WITKIN; TERZOPOULOS, 1988)

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) + \nabla P(v(s, t)) = 0. \quad (2.11)$$

Essa equação diferencial parcial (EDP) expressa o balanceamento de forças internas e externas quando o contorno está em equilíbrio. Aqui se vê claramente que os dois primeiros termos controlam a rigidez e elasticidade, enquanto o último atrai a curva para a fronteira da região. Note que a curva é representada com uma dimensão a mais t , isso caracteriza uma equação Euler-Lagrange, que é uma evolução no tempo.

Ajustar um contorno a uma forma na imagem é um processo iterativo. O operador deve sugerir um contorno inicial, que é bem parecido com a forma final desejada. O contorno então será atraído para a forma através de atratores bem conhecidos, por exemplo o detector de borda definido em (2.10).

Um exemplo de comportamento de uma *snake* é mostrado na Figura 9. A primeira figura mostra um objeto com uma concavidade convexa em forma de U. Nota-se também

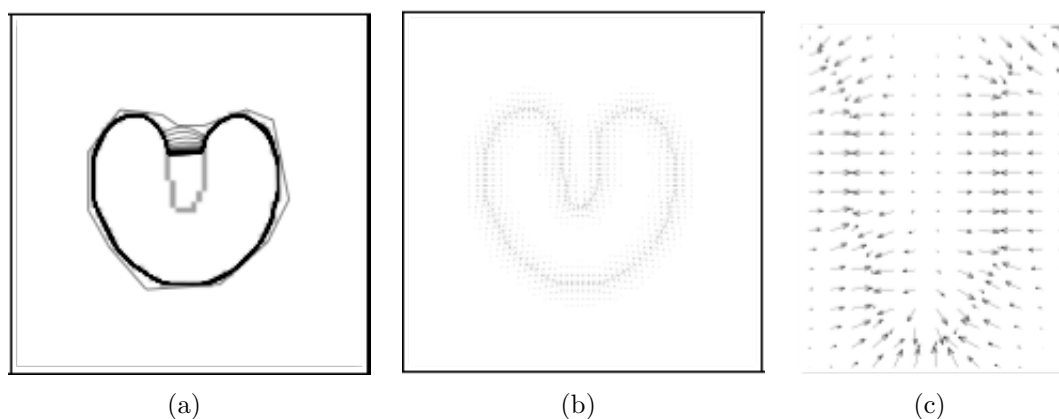


Figura 9: Convergência de uma *snake* tradicional.

uma seqüência de curvas demonstrando a progressão iterativa da *snake* ($w_1 = 0.6$ e $w_2 = 0.0$) inicializada fora do objeto. O campo potencial da borda da curva, obtido através da equação (2.10) com $\sigma = 1.0$, é mostrado na Figura 9(b)). A curva não converge para dentro da concavidade do objeto. A razão para isso se deve ao campo de vetores potenciais mostrado em detalhes na Figura 9(c). Apesar das forças corretamente apontarem para a fronteira do objeto, elas acabam se anulando por terem um sentido oposto. A curva é atraída para o início da concavidade, mas não progride para dentro da mesma. Não há variações dos parâmetros w_1 e w_2 que solucionem o problema (XU; PRINCE, 1998).

Fluxo vetorial de gradiente. Em (XU; PRINCE, 1998) os autores proporam uma nova forma de atrair a *snake* para a fronteira da região. O método redefine a equação (2.8) para refletir um campo de vetores que refletem o gradiente de toda a imagem e que aponta para a fronteira da região. Assim reescreve-se a equação (2.8) como $P(v) = u(x, y)$, chamado de fluxo vetorial de gradiente.

Para se obter o fluxo vetorial, define-se um mapa de bordas $f(x, y)$ derivado da imagem $I(x, y)$. Pode-se utilizar f como sendo o indicador de borda definido em (2.10). Três propriedades dos mapas de bordas são importantes nesse contexto (XU; PRINCE, 1998, p. 362):

- O gradiente de um mapa de borda ∇f possui vetores que apontam na direção das

bordas. Esses vetores são normais a qualquer ponto pertencente à borda.

- Os vetores normais possuem grande magnitude somente na vizinhança imediata das bordas.
- Em regiões homogêneas, onde $I(x, y)$ é aproximadamente constante, ∇f assume valores próximos de 0.

Por causa da primeira propriedade, uma *snake* inicializada próxima à uma borda convergirá para uma configuração estável na borda. Devido à segunda propriedade, no entanto, o alcance de captura será relativamente pequeno. E, por último, a terceira propriedade faz com que em regiões homogêneas, não haverá qualquer tipo de força que moverá o contorno. O fluxo vetorial de gradientes proposto pelos autores visa superar essas dificuldades, além de fazer com que os vetores de borda apontem para as concavidades de fronteira.

Finalmente, define-se o campo de vetores como sendo $u(x, y) = [a(x, y), b(x, y)]$ que minimiza a funcional de energia

$$E = \int \int \mu \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) + |\nabla f|^2 |u - \nabla f|^2 dx dy. \quad (2.12)$$

Aqui nota-se que quando $|\nabla f|$ é pequeno, a energia é dominada pelas derivadas parciais do campo de vetores, refletindo num campo que varia lentamente. Por outro lado, quando $|\nabla f|$ é grande, o segundo termo domina a integral, e é minimizado por $u - \nabla f$. Isso produz o efeito desejado que é manter u aproximadamente igual ao gradiente do indicador de borda quando o mesmo é grande, mas forçando o campo a variar lentamente em regiões homogêneas. O parâmetro μ é um parâmetro que regula o primeiro termo em relação ao segundo, e é dependente do ruído da imagem (maior ruído, maior deve ser μ).

Utilizando-se cálculo variacional, as equações Euler-Lagrange associadas a (2.12) são

$$\mu \nabla^2 a - \left(a - \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mu \nabla^2 b - \left(b - \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.14)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano.

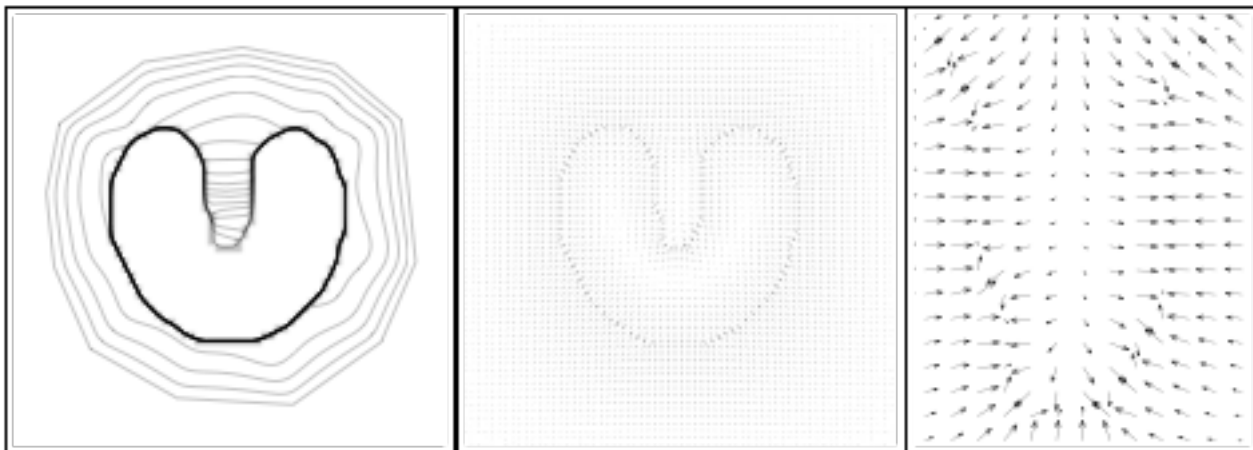


Figura 10: Convergência de uma *snake* com fluxo vetorial de gradiente

Apesar dessa técnica apresentar algumas evoluções nas dificuldades apresentadas nas *snakes* clássicas, ainda possui deficiências que são inerentes ao método. Primeiramente, o contorno é muito sensível à inicialização. A curva inicial deve estar próxima da borda e ainda possuir alguma semelhança com a forma final. Além disso, imagens com muito ruído e regiões com bordas implícitas não apresentam bons resultados. Pode-se aplicar um filtro para diminuir o ruído, porém não é eficaz, pois pode ocultar bordas tênues.

No próximo capítulo apresentaremos a evolução de *snakes*. Esses métodos utilizam propriedades da imagem para atrair o contorno. A curva se torna implícita em uma superfície e informações sobre as regiões são adicionadas à funcional. Essas características formam ferramentas de segmentação mais poderosas.

3 Contornos ativos para segmentação

Nesse capítulo reúne-se os métodos de segmentação variacionais, com ênfase nos contornos ativos. Esses métodos surgiram como uma evolução da idéia original de *snakes* (veja seção 2.3.2).

Uma das principais vantagens apontadas em *snakes* é que trata a detecção de bordas nas imagens através de uma curva fechada. Isso significa um avanço nos algoritmos detectores de borda, pois os mesmos não levam em conta a propriedade que uma região é fechada em si. Por exemplo, um objeto que possui uma luminosidade localizada pode possuir partes de sua borda com diferenças nos valores de pixel, ou até mesmo ter o gradiente de cor afetado. Nesses caso, o detector de borda não consegue identificar essa borda, fazendo com que o objeto não seja reconhecido com exatidão. Esses casos são típicos de imagens médicas, que possuem características de ruído e bordas implícitas mais evidentes. Um esforço para suprimir essa deficiência é forçar uma curva fechada na fronteira da região. Essa é a idéia de *snakes*, que pode ser considerado um detector de borda localizado que mantém a fronteira da região fechada.

Dentre os problemas que *snakes* apresentam, destaca-se:

- Podemos considerar *snakes* como um método paramétrico. Esse tipo de abordagem encontra dificuldades com respeito ao tratamento matemático e numérico dado ao modelo. É difícil construir um esquema numérico computacional eficiente para se tratar uma curva parametrizada, pois temos que tratar cada ponto discretizado separadamente.

- A curva parametrizada não suporta mudanças de topologia, fazendo com que não detecte regiões não conectadas.
- O método é muito dependente do detector de borda que forma o campo vetorial atrator. Isso caracteriza um baixo desempenho em imagens com ruídos, mesmo aplicando-se filtros para realce de bordas. Esses filtros, em muitos casos, podem fazer com que bordas tênues sejam afetadas e, portanto, de difícil detecção.
- O algoritmo numérico é muito dependente da inicialização. A curva inicial deve estar próxima da região de interesse.
- A detecção de regiões que apresentam bordas convexas não são detectadas corretamente. O uso do fluxo do campo de gradientes (XU; PRINCE, 1998) elimina esse problema, porém traz uma complexidade adicional alta.

Dessa maneira, algumas soluções foram propostas. A criação de um modelo geométrico de contornos ativos é a base que discutiremos a seguir. A partir desse modelo, apresentaremos técnicas mais refinadas.

3.1 Level Sets

Para resolver os problemas de topologia e cálculo numérico, utiliza-se modelos de contornos explícitos. Embutindo-se a curva paramétrica em uma superfície¹, transformamos o problema em um modelo geométrico. O modelo de segmentação de contornos implícitos geométricos é baseado nos métodos *level sets*, que se originaram em (OSHER; SETHIAN, 1988).

Suponha que exista uma fronteira separando uma região de outra (uma curva fechada no espaço bidimensional ou uma superfície em um espaço tridimensional), e uma velocidade F que define como mover cada ponto da curva fronteira. Aqui, F pode depender de qualquer tipo de fenômeno físico, como dissipação de calor em uma superfície, por

¹Para uma introdução à superfícies implícitas, referimos o leitor ao Anexo A.

exemplo. No momento, assume-se que a função F é conhecida e nos dá a velocidade na direção perpendicular a interface.

O truque é adicionar mais uma coordenada à função de fronteira, originalmente $C(x, y)$. Chamaremos essa nova fronteira de $\phi(x, y, t)$ e faça com que $\phi(x, y, t = 0) = C(x, y)$. Então constrói-se um valor inicial para $\phi(x, y, t = 0)$ baseado na distância d de cada ponto inicial (x, y) à fronteira. Pela regra da cadeia temos a seguinte equação diferencial parcial (EDP):

$$\phi_t + F(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{1/2} = 0. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é chamada de equação diferencial parcial com valor inicial.

A curva $C(x, y)$ passa a ser uma curva de nível embutida em ϕ , isso pode ser feito, por exemplo, através de uma função de distância com sinal

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\text{sign}(x, y, C) & \text{se } x, y \text{ está fora de } C, \\ \text{sign}(x, y, C) & \text{ao contrário,} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\text{sign}(x, y, C)$ denota a distância do ponto x, y ao ponto mais próximo de C , fornecida por uma determinada medida (por exemplo a distância Euclidiana)².

À primeira vista, o método transforma uma estrutura bidimensional em uma superfície tridimensional e portanto aumenta o esforço computacional. No entanto, podemos destacar várias vantagens:

- A primeira se torna aparente considerando-se a representação não somente da curva em si, mas também a região circunscrita pela curva. Pelo sinal de ϕ podemos determinar imediatamente se um ponto se encontra dentro ou fora da região definida pela curva. Isso é importante na segmentação pois freqüentemente as fronteiras e as regiões são utilizadas para avaliação no processo de segmentação.
- A segunda, e talvez mais importante, a representação em *level set* permite mudanças

²Para mais detalhes de como se construir funções de distância, referimos o leitor à (OSHER; FEDKIW, 2002, p. 63).

topológicas. Considere uma região que é dividida em duas partes não conectadas. A representação de tal região não é trivial usando-se a curva C . A solução seria utilizar-se duas curvas C_1 e C_2 para representar a região. Mas o que aconteceria se a evolução fizesse com que ambas se dirijam uma à outra, até que finalmente se unam? Embutindo-se a curva C na superfície ϕ , não se tem a preocupação com esse tipo de problema, pois isso é tratado implicitamente na superfície. Isso implica a interessante propriedade que regiões a serem segmentadas não precisam ser necessariamente conectadas.

O método de *level sets* provê uma maneira fácil e intuitiva de se embutir uma curva em uma superfície. Para se recuperar a curva, basta fixar $t = k > 0$ e buscar os pontos. Para qualquer ponto pertencente à curva, esse assumirá valores bem próximos de 0 em ϕ e para qualquer outro ponto, se for utilizado a equação (3.2) na inicialização, os valores de ϕ serão negativos se os pontos estiverem fora da curva e positivos se estiverem dentro.

3.2 Deslocamento por curvatura média

A representação implícita do contorno através de uma função *level set* permite uma minimização do comprimento do contorno sem perda de alinhamento com as bordas da imagem. A minimização pode ser feita pelo chamado deslocamento por curvatura média (SPRUCK, 1991). O deslocamento se dá através da EDP:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right). \quad (3.3)$$

O deslocamento por curvatura média minimiza o comprimento de arco Euclidiano da curva C , i.e., minimiza a energia

$$E(C) = \int_C ds. \quad (3.4)$$

Esse termo de minimização do comprimento de arco faz parte de muitos modelos de

segmentação variacionais, inclusive Mumford-Shah. Essa formulação fornece uma maneira prática de se tratar o termo nesses métodos.

3.2.1 Aproximação numérica

Conforme Brox descreve em (BROX, 2005, p. 107), podemos discretizar a equação de evolução por curvatura média (3.3) por diferenças finitas. Segundo Brox não há teoria sobre a estabilidade para esse esquema, mas experimentos demonstram estabilidade numérica para $\tau \leq 0.25$. Dessa maneira a equação (3.3) pode ser reescrita assim:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi_y^2 \phi_{xx} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_x^2 \phi_{yy}}{\phi_x^2 + \phi_y^2}. \quad (3.5)$$

A discretização no espaço das derivadas parciais nos pixels (i, j)

$$\begin{aligned} (\phi_{i,j})_x &\approx \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2} \\ (\phi_{i,j})_y &\approx \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2} \\ (\phi_{i,j})_{xx} &\approx \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} \\ (\phi_{i,j})_{yy} &\approx \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1} \\ (\phi_{i,j})_{xy} &\approx \begin{cases} \frac{2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j-1} + \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1}}{2} & \text{se } (\phi_{i,j})_x (\phi_{i,j})_y < 0, \\ \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j-1}}{2} & \text{contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

e a discretização no tempo com diferenças positivas

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \begin{cases} \phi_{i,j}^k + \tau \frac{(\phi_{i,j}^k)_y^2 (\phi_{i,j}^k)_{xx} - 2(\phi_{i,j}^k)_x (\phi_{i,j}^k)_y (\phi_{i,j}^k)_{xy} + (\phi_{i,j}^k)_x^2 (\phi_{i,j}^k)_{yy}}{(\phi_{i,j}^k)_x^2 + (\phi_{i,j}^k)_y^2} & \text{se } |\nabla \phi_{i,j}^k| = 0 \\ \phi_{i,j}^k & \text{contrário} \end{cases} \quad (3.6)$$

com índice de iteração k e passo de tempo τ .

A Figura 11 ilustra o comportamento de uma curva com deslocamento por curvatura média. Podemos notar que a curva implícita é propagada na direção normal com relação à sua borda e com velocidade dependente da sua curvatura. A curva se contrai a um ponto circular em tempo finito, conforme provado por Grayson em (GRAYSON, 1987).



Figura 11: Deslocamento por curvatura média com $t = 0, 20, 50, 250$ e 1000 , reimpresso de (BROX, 2005, p. 108)

3.3 Contornos ativos geodésicos

Baseado na minimização do comprimento da curva através de deslocamento por curvatura média, os contornos ativos geodésicos³ adicionam um detector de borda $g(|\nabla I|)$, que atrai a curva em direção à borda do objeto na imagem (CASELLES; KIMMEL; SAPIRO, 1997), (KICHENASSAMY et al., 1995). Este indicador de borda é adicionado a equação de evolução em forma de um fator de ponderação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \operatorname{div} \left(g(|\nabla I|) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right). \quad (3.7)$$

Essa equação minimiza a energia

$$E(C) = \int_C g(|\nabla I|) ds \quad (3.8)$$

e empiricamente converge a um estado estável não-trivial. Nesse estado, o comprimento da curva é minimizado localmente em relação a alguma métrica induzida pela imagem através de $g(|\nabla I|)$.

Aplicando-se a regra da cadeia em (3.7), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(|\nabla I|) |\nabla \phi| \operatorname{div} \left(g(|\nabla I|) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + g(|\nabla I|) |\nabla \phi|. \quad (3.9)$$

A equação de evolução contém dois termos. O primeiro termo corresponde ao deslocamento por curvatura média ponderado pelo indicador de borda g . Se a equação consistisse somente desse termo, a curva iria se retrair a um ponto circular a medida que $t \rightarrow \infty$, já

³O termo geodésico refere-se à teoria de geometria diferencial que postula que uma curva geodésica é a menor distância entre dois pontos no espaço, cfe (SHIFRIN, 2006, p. 70).

que g é uma função crescente (BROX, 2005, p. 108). A retração somente iria ser mais vagarosa na presença das bordas, porém não poderia ser parada. Somente o segundo termo na equação pode prevenir retração indesejada, pois atrai a curva em direção a g menores. O segundo termo é comumente chamado de força balão e é utilizado em contornos ativos não-geodésicos, cfe. (COHEN, 1991).

Essa característica de borda do modelo reforça a importância da curva inicial. Isso se deve ao fato que a equação (3.7) é somente um minimizador ótimo local de (3.9). Conseqüentemente, só pode resultar no próximo *locus minimum* da energia. Uma borda que se localize distante da curva inicial, pode não atrair o contorno, se a mesma estiver entre outra borda relevante na imagem. Essa propriedade se torna interessante para localização de bordas conhecidas e de fácil reconhecimento pelo usuário do algoritmo, porém proibitiva para segmentação de diversos objetos na cena. Outra característica é a falta de capacidade de detecção de bordas internas do objeto. Quando o contorno é atraído para a borda externa, o mesmo pára e não detectará possíveis bordas internas, pois atingiu um estado de equilíbrio de acordo com a função (3.9).

3.3.1 Experimentos numéricos

O modelo de contorno ativo geodésico pode ser implementado pela equação Euler-Lagrange (3.9). Seu primeiro termo pode ser discretizado como o deslocamento por curvatura média com um parâmetro adicional de ponderação. Para uma implementação estável do segundo termo, um esquema usando diferenças finitas pode ser aplicado (OSHER; SETHIAN, 1988). Tais esquemas são chamados de esquemas explícitos.

Infelizmente, contorno ativo geodésico implementado através de esquemas explícitos convergem lentamente (BROX, 2005, p. 109). Para se superar essa deficiência, diversas idéias foram apresentadas. Uma dessas idéias é chamada de abordagem *narrow band* (CHOPP, 1993) (ADALSTEINSSON; SETHIAN, 1995). É baseado no fato que a atualização da função ϕ na implementação básica é feita em todo o domínio da imagem, apesar

de somente uma pequena parte desse domínio, que é próximo da curva, é de interesse. Portanto, a abordagem *narrow band* reduz os cálculos a uma pequena área ao redor da curva de nível 0 de ϕ .

Uma estratégia alternativa para se aumentar a velocidade de convergência é substituir a discretização temporal por um esquema semi-implícito que é estável para passos de tempo arbitrários (BROX, 2005, p. 109). Tais esquemas semi-implícitos, como o *Additive Operator Splitting* (AOS), podem diminuir o custo computacional drasticamente. O esquema AOS foi proposto para os modelos geodésicos em (GOLDENBERG et al., 2001) e (WEICKERT, 2001). Ambas as propostas são bastante similares, porém Weickert apresentou um esquema que é livre de reinicialização enquanto o esquema de Goldenberg et al. necessita de uma reinicialização da função ϕ a cada passo de tempo⁴.

Finalmente, estratégias multi-escalares são possíveis para melhorar a velocidade de convergência (PARAGIOS; DERICHE, 2000b). Nessa estratégia, a segmentação é iniciada em uma versão de baixa resolução da imagem, e o resultado dessa segmentação grosseira é utilizado como parâmetro inicial para uma segmentação refinada. Utiliza-se uma versão *downsampled* da imagem em uma primeira iteração. Essa iteração irá resultar em uma aproximação da segmentação desejada. Na iteração seguinte, utiliza-se a versão em escala normal e o parâmetro inicial é ditado pelo resultado da iteração anterior. Além de ser uma estratégia que proporciona uma melhora na velocidade de convergência, proporciona uma robustez maior em relação a *loci minima*.

O modelo de contornos ativos possui diversas vantagens:

- Sua principal vantagem é possuir um minimizador numérico estável e eficiente. Algoritmos de descida de gradientes que não necessitam de regressão suplementares formam um leque variado de opções.
- Adicionalmente, a representação implícita da curva permite mudança de topologia.

Logo, objetos que são divididos em diversas partes podem ser tratados sem o uso

⁴Detalhes sobre os esquemas numéricos podem ser encontrados no Anexo B.

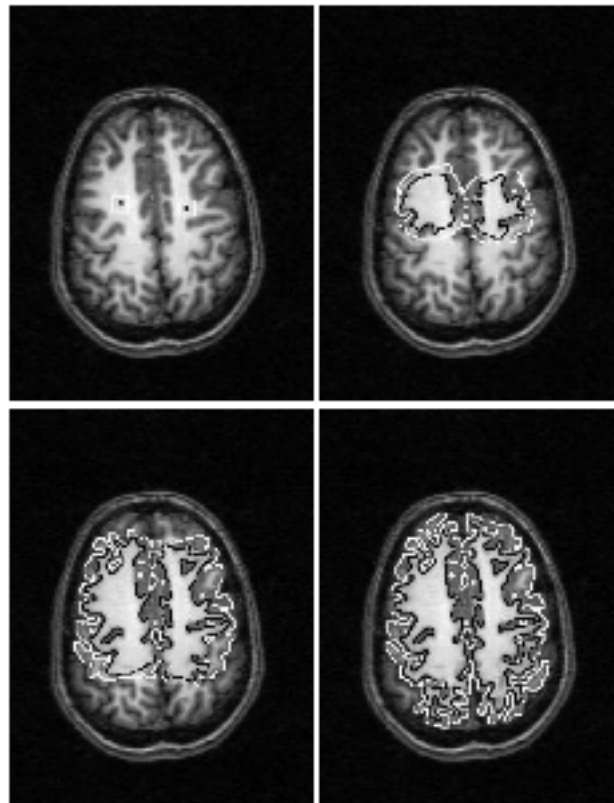


Figura 12: Resultados numéricos da técnica utilizada em (GOLDENBERG et al., 2001)

de ferramentas adicionais.

- A funcional de energia é relativamente simples e contém somente alguns parâmetros, que é a escolha de um detector de borda eficaz que atua como fator de ponderação no deslocamento por curvatura média.

Apesar de possuir boas vantagens, também nota-se algumas limitações:

- Primeiramente, o interior das regiões extraídas é completamente desconsiderado. Os únicos fatores que atraem a evolução da curva são as bordas das regiões. No entanto, bordas não são características muito confiáveis para extração de objetos. Especialmente na presença de bordas implícitas e imagens com ruídos, características comuns em imagens médicas.
- A curva é atraída para a borda mais significativa em uma vizinhança próxima, logo qualquer borda entre a curva inicial e o objeto a ser detectado modifica o

resultado final, que seria detectar o objeto desejado. Isso faz com que o método seja extremamente sensível a inicialização. Enquanto em aplicações de segmentação de imagens médicas supervisionadas esse fator não é crucial, é certamente indesejável em segmentações não-supervisionadas.

Muitos esforços foram empregados para superar essas dificuldades introduzindo-se algumas características das regiões nos contornos ativos com o objetivo de fazê-lo mais robusto em relação à inicialização. Chakraborty, Staib e Duncan propõem em (CHAKRABORTY; STAIB; DUNCAN, 1996) um modelo para segmentação de imagens médicas que integra informação de borda e região dentro do contorno ativo. Essa técnica introduz um conhecimento *a priori* sobre a forma do contorno, um termo de borda que propaga a curva em direção a pontos com grande valor de gradiente, e um termo de região que incorpora alguma informação sobre o objeto dentro do modelo. Esse modelo também é sensível à inicialização devido à forma que é implementado, porém vale mencionar que é pioneiro na tentativa de adicionar informações sobre as regiões no modelo de contornos ativos.

Nas próximas seções discutiremos métodos que superam as dificuldades encontradas nos contornos ativos geodésicos e que mantém as boas características apresentadas por essa técnica.

3.4 Contornos ativos baseado em regiões

Os problemas encontrados nos contornos ativos geodésicos originam-se na falta de informação sobre as regiões (CHAN; VESE, 2001). Por se tratar de um modelo baseado em bordas, as regiões são negligenciadas. Apesar de que os detectores de borda asseguram que há uma discontinuidade no gradiente entre as regiões, não consideram que o interior das regiões seja homogêneo, característica fundamental para a segmentação.

Uma conseqüência imediata dessas considerações é adicionar informações sobre as regiões na funcional de energia dos contornos ativos, como proposto em (CHAN; VESE,

2001).

O modelo proposto por Chan e Vese vai além e negligencia completamente a informação sobre as bordas, apresentando-se como um minimizador da energia de Mumford-Shah que utiliza *level sets*. A seguir reproduziremos o modelo descrito em (CHAN; VESE, 2001).

Se o domínio da imagem Ω é dividido em duas regiões Ω_1 e Ω_2 , a funcional pode ser reescrita assim:

$$E(\Gamma) = \int_{\Omega_1} (I - \mu_1)^2 dx + \int_{\Omega_2} (I - \mu_2)^2 dx + \nu \int_{\Gamma} C(s) ds, \quad (3.10)$$

onde μ_1 e μ_2 denotam os valores médios de pixel das duas regiões e Γ é a fronteira entre elas. O parâmetro $\nu \geq 0$ continua inalterado. Embutindo a curva $C(s)$ desconhecida na função *level set* $\phi(x, y, t)$, e considerando que $\phi(x, y, t) \geq 0$ se o ponto $(x, y) \in \Omega_1$ e $\phi(x, y, t) < 0$ se $(x, y) \in \Omega_2$, a equação (3.10) pode ser reescrita como

$$E(\phi) = \int_{\Omega} (H(\phi)(I - \mu_1)^2 + (1 - H(\phi))(I - \mu_2)^2 + \nu \cdot |\nabla H(\phi)|) dx dy, \quad (3.11)$$

onde $H(s)$ é uma versão regularizada da função Heaviside⁵, i.e, $\lim_{s \rightarrow -\infty} = 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} = 1$, e $H(0) = 0.5$.

A formulação em (3.11) permite uma minimização de energia por meio de uma descida de gradiente na equação Euler-Lagrange associada

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = H'(\phi) \left((I - \mu_2)^2 - (I - \mu_1)^2 + \nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right), \quad (3.12)$$

$$\mu_1 = \frac{\int_{\Omega} I H(\phi) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi) dx dy}, \quad (3.13)$$

$$\mu_2 = \frac{\int_{\Omega} I (1 - H(\phi)) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi)) dx dy}. \quad (3.14)$$

Na Figura 13 o algoritmo numérico apresentado em (CHAN; VESE, 2001) é utilizado para segmentar uma imagem de cérebro. Podemos observar que a curva é atraída para borda exterior da região nas primeiras iterações e logo muda de topologia para refletir a

⁵Comumente utiliza-se a função arcotangente para se expressar uma função Heaviside.

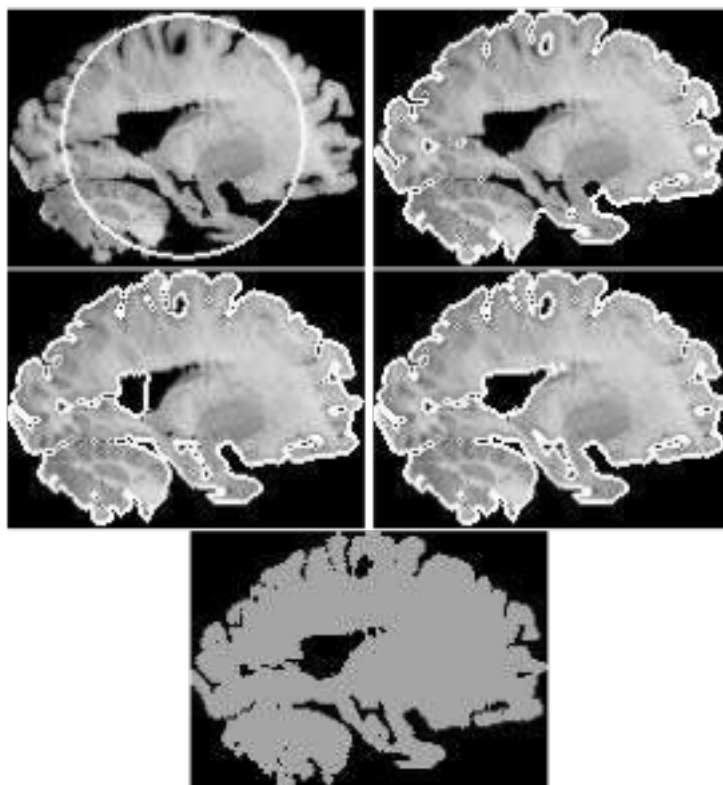


Figura 13: Segmentação de cérebro usando o algoritmo numérico de (CHAN; VESE, 2001).

borda interna também. Essa característica de detecção das bordas internas faz com que o método se diferencie dos métodos que somente possuem informações de borda.

Uma questão importante que surge nos contornos ativos baseados em região é como se modelar o interior das regiões. No modelo Chan-Vese essa modelagem é a mais simples possível, que é a média dos valores de pixel para se impor uma homogeneidade. Pode-se aperfeiçoar essa modelagem para tratamentos de imagens que possuem texturas. Em uma textura, a média de intensidade de dentro da região pode ser muito similar ao resto da imagem, sendo que o seu desvio padrão é diferente. Em (ZHU; YUILLE, 1996) os autores proporam a seguinte funcional de energia:

$$E(\Gamma) = - \int_{\Omega_1} \log p_1(x) dx - \int_{\Omega_s} \log p_2(x) dx + \nu \int_{\Gamma} ds. \quad (3.15)$$

Essa funcional modela o interior das regiões de acordo com uma distribuição de probabi-

lidade arbitrária e pode ser reescrita por meio de *level sets* (ROUSSON; DERICHE, 2003):

$$E(\phi) = \int_{\Omega} (-H(\phi) \log p_1 - (1 - H(\phi)) \log p_2 + \nu |\nabla H(\phi)|) dx. \quad (3.16)$$

De fato, o modelo Chan-Vese (3.11) é um caso especial dessa funcional. Uma escolha usual da distribuição de probabilidade é uma função Gaussiana com média μ e desvio padrão σ :

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.17)$$

Usando-se $\sigma = \sqrt{0.5}$ temos exatamente (3.11).

Pode-se notar na Figura 14 que Chan-Vese ($\nu = 40$) não consegue segmentar a região por ter valores de média muito similares. A seguir a imagem é segmentada com os modelo probabilístico usando-se $\sigma = 6$ e $\sigma = 8$, respectivamente.

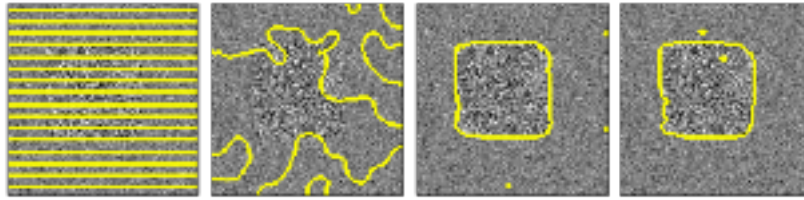


Figura 14: Imagem sintética com ruído onde as regiões possuem mesma média mas desvio padrão distintos, reimpresso de (BROX, 2005, p. 127)

3.5 Contornos ativos para segmentação de múltiplas regiões

O conceito de contornos ativos trouxe inúmeras vantagens. Provavelmente a mais importante é a representação da fronteira do objeto em um *level set* e a modelagem do interior por distribuições de probabilidade. Infelizmente, a restrição de um único contorno impõe somente a separação da imagem em duas regiões distintas. Imagens com mais de um objeto de interesse não podem ser segmentadas com somente um contorno.⁶

Esse problema foi abordado em diversos trabalhos. Esse conceito foi proposto por

⁶A habilidade dos *level sets* de mudarem de topologia não caracteriza múltiplas regiões. Apesar de partes da região serem desconectadas, elas ainda compartilham da mesma característica comum, e portanto devem ser encaradas como um único objeto semântico.

(MERRIMAN; BENCE; OSHER, 1994), (ZHAO et al., 1996) e adotado para segmentação em (SAMSON et al., 2000) e (PARAGIOS; DERICHE, 2000a). A idéia imediata para solucionar esse problema é usar mais de um contorno implícito ϕ_i para segmentar cada região Ω_i

$$E(\phi_i, p_i) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N N(-H(\phi_i) \log p_i + \nu |\nabla H(\phi_i)|) dx \quad (3.18)$$

onde N é o número de regiões.

Enquanto a idéia básica é muito simples, adicionar um novo contorno implícito para cada região não é trivial pois deve-se manter a condição de disjunção das regiões. No modelo com somente um contorno, essa condição é naturalmente satisfeita.

Dois modelos foram sugeridos para se manter a condição de disjunção das regiões. Em (ZHAO et al., 1996), (SAMSON et al., 2000) a condição é mantida utilizando-se um multiplicador de Lagrange. Entretanto, o método introduz um conceito avançado de otimização e de difícil tratamento numérico. Em (PARAGIOS; DERICHE, 2000a) os autores propoeram um parâmetro adicional em forma de uma força artificial. Essa metodologia é mais fácil de implementar, apesar de ter parâmetros numéricos avançados. Uma abordagem diferente

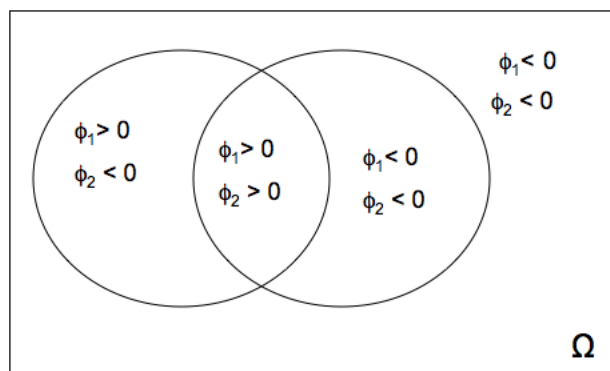


Figura 15: Representação das regiões em função dos valores de ϕ .

foi introduzida em (CHAN; VESE, 2002) por Chan e Vese. Ao invés de se trabalhar com um contorno para cada região, o domínio da imagem é particionado em dois. Dessa maneira, n contornos podem representar $N = 2^n$ regiões (Figura 15). De fato, se o número de regiões é um múltiplo de 2, o modelo naturalmente respeita a condição de disjunção. Porém, se existe um número ímpar de regiões, o modelo introduz regiões vazias e bordas não são corretamente representadas.

Para solucionar o problema encontrado em (CHAN; VESE, 2002), Brox e Weickert introduziram um novo esquema em (BROX; WEICKERT, 2004). Esse esquema utiliza a idéia de particionamento do domínio que Chan e Vese descreveram. Ao invés de se adicionar uma força de junção artificial à funcional de energia, trabalha-se com a função de distribuição de probabilidade para manter a disjunção. Portanto, a tarefa é minimizar a função Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = H'(\phi_i) \left(\log p_i + \nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) \right). \quad (3.19)$$

A função $\log p_i$ é sempre negativa, logo a evolução da curva causará o desaparecimento da região Ω_i . Para evitar isso, utiliza-se o mesmo conceito usado no modelo de duas regiões. No caso de duas regiões onde ambas são representadas por um único contorno, há sempre uma competição entre as regiões. Portanto, o valor negativo de $\log p_1$ é balanceado pelo valor positivo de $\log p_2$. Esse balanceamento não está descrito em (3.19). Com essa consideração em mente, é fácil encontrar uma maneira de se solucionar a equação Euler-Lagrange mantendo-se as condições de disjunção: deve-se adicionar um competidor entre as regiões. Então a função de evolução se torna

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = H'(\phi_i) \left(\log p_i + \nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) - \max_{j \neq i, H'(\phi_j) > 0} \left(\log p_j + \nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_j}{|\nabla \phi_j|} \right) \right) \right). \quad (3.20)$$

Os autores apontam diversas vantagens em relação às propostas anteriores:

- As equações de evolução se tornam simples e compartivamente fáceis de se implementar.

- Em contraste ao modelo (CHAN; VESE, 2002), cada região, incluindo sua fronteira, é diretamente acessível através de sua função *level set*. Além, a evolução é independente do número de regiões envolvidas. Não há a restrição quanto a paridade do número de regiões a serem segmentadas.

3.6 Modelo hierárquico

O modelo proposto por Chan e Vese em (CHAN; VESE, 2002) introduziu a noção de regiões em contornos ativos. Com isso foi possível descrever e segmentar melhor as imagens. Porém, viu-se que o modelo somente tratava imagens com duas regiões distintas, fato que o tornava limitado. Em vista dessa deficiência, desenvolveu-se modelos multi-regiões que utilizam os contornos ativos para segmentar imagens mais complexas. A introdução de mais *level sets* fez com que a complexidade computacional desses métodos aumentasse e outras formas de tratamento desse problema foram desenvolvidas.

Baseado no método de segmentação proposto por Chan-Vese em (CHAN; VESE, 2002), Gao e Bui desenvolveram uma técnica de segmentação hierárquica (GAO; BUI, 2005). O modelo, além de segmentar, aplica um filtro de difusão nas regiões de forma independente para garantir a suavidade constante nas mesmas.

Modelo de segmentação de quatro regiões de Chan-Vese. Nesse caso dois *level sets* ϕ_1 e ϕ_2 são necessários. As equações Euler-Lagrange associadas à funcional de energia são (CHAN; VESE, 2002):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= H'(\phi_1) \left(\nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|} \right) - ((I - c_{11})^2 - (I - c_{01})^2) H(\phi_2) \right. \\ &\quad \left. - ((I - c_{10})^2 - (I - c_{00})^2) (1 - H(\phi_2)) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= H'(\phi_2) \left(\nu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - ((I - c_{11})^2 - (I - c_{10})^2) H(\phi_1) \right. \\ &\quad \left. - ((I - c_{01})^2 - (I - c_{00})^2) (1 - H(\phi_1)) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

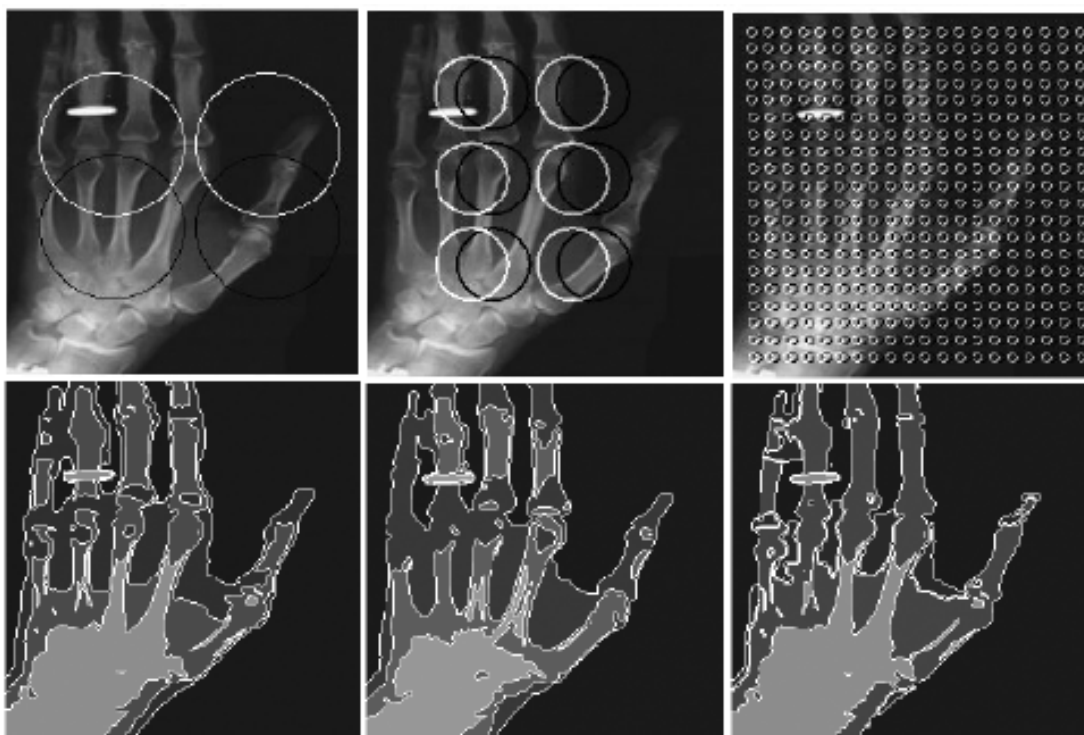


Figura 16: Segmentação utilizando o modelo multiregião de Chan-Vese em múltiplas inicializações e com parâmetro $\nu = 343$.

onde c_{11} , c_{00} , c_{01} e c_{10} representam a média dos valores de pixels em cada região correspondente. Solucionando-se as equações acima para ϕ_1 e ϕ_2 para cada passo de tempo, podemos obter a evolução dos contornos e, portanto, particionar a imagem.

Apesar de ser um método robusto, solver as equações Euler-Lagrange (3.21) e (3.22) significa um custo computacional muito grande, especialmente para imagens naturais com tamanho considerável. Pode-se perceber que os contornos estão acoplados nas equações (3.21) e (3.22), aumentando a complexidade computacional dos modelos numéricos do método. Além disso, há uma grande sensibilidade em relação aos contornos iniciais (Figura 3.6).

O modelo hierárquico proposto por Gao e Bui visa sanar as dificuldades encontradas no modelo Chan-Vese. Os autores propõem uma segmentação e, adicionalmente, um *smoothing* na imagem em passos distintos. No primeiro passo, aplica-se o modelo Chan-Vese com um *level set* ϕ_1 para particionar a imagem em duas. Deve-se notar que no final do primeiro passo, cada partição pode conter muitas partes isoladas. Então, no

segundo passo aplica-se novamente a segmentação com um *level set* ϕ_2 em cada subregião resultante do primeiro passo independentemente. No fim do segundo passo, tem-se uma imagem com quatro fases, i.e., quatro regiões distintas.

As equações de evolução do modelo hierárquico são similares ao modelo Chan-Vese com um *level set*. Há dois contornos C_1 e C_2 , que são representadas pelas suas funções *level set* correspondentes, ϕ_1 e ϕ_2 . No primeiro estágio de segmentação, o contorno ativo C_1 é governado pelo atrator de ϕ_1

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \delta(\phi_1) \left[\nu_0 \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|} \right) - \alpha_1 (I - c_1)^2 + \alpha_2 (I - c_2)^2 \right] \quad (3.23)$$

onde c_1 corresponde a média de I dentro de $C_1(\phi_1 > 0)$ e c_2 é a média de I fora de $C_1(\phi_1 < 0)$. No final do estágio inicial obtemos duas subregiões, definidas por $\{\phi_1 > 0\}$ e $\{\phi_1 < 0\}$. No segundo estágio de segmentação, aplicamos o contorno ativo C_2 para cada subregião separadamente; portanto, para subregião $A\{\phi_1 > 0\}$, temos a seguinte EDP:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \delta(\phi_2) \left[\nu_A \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - \alpha_1 (I - c_1^A)^2 + \alpha_2 (I - c_2^A)^2 \right] \quad (3.24)$$

onde c_1^A é a média de I na subregião A e também dentro da curva $C_2(\phi_1 > 0, \phi_2 > 0)$ e c_2^A é a média de I na subregião A fora da curva $C_2(\phi_1 > 0, \phi_2 < 0)$.

Para a subregião $B\{\phi_1 < 0\}$, a evolução é:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \delta(\phi_2) \left[\nu_B \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - \alpha_1 (I - c_1^B)^2 + \alpha_2 (I - c_2^B)^2 \right] \quad (3.25)$$

onde c_1^B é a média de I na subregião B e também dentro da curva $C_2(\phi_1 < 0, \phi_2 > 0)$ e c_2^B é a média de I na subregião B fora da curva $C_2(\phi_1 < 0, \phi_2 < 0)$. Após a segunda segmentação, obtemos os quatro segmentos finais da imagem original I .

Ao contrário do modelo de quatro regiões de Chan-Vese que aplica os *level sets* ϕ_1 e ϕ_2 simultaneamente, essa técnica calcula os *level sets* separadamente. Portanto, a evolução de ϕ_1 e ϕ_2 é desacoplado. Esse desacoplamento permite a utilização dos parâmetros ν_0, ν_A e ν_B com valores diferentes para cada estágio, permitindo uma maior flexibilidade de configuração.

A escolha desses parâmetros pode ser feita através da variância dessas regiões. A variância de uma região Ω_i na imagem I pode ser calculada assim (GAO; BUI, 2005):

$$\sigma^2 = \frac{\int_{\Omega_i} (I - c_i)^2 dx dy}{\int_{\Omega_i} dx dy}, \quad (3.26)$$

onde c_i representa a média dos valores de pixel dentro da região Ω_i .

A primeira vista, pode-se escolher $\nu_0 = \beta\sigma^2$, onde β é uma constante entre $[0, 1.5]$. Quanto menor o valor de ν_0 tanto maior será a quantidade de segmentos resultantes (sub-segmentação). De outra maneira, quanto maior o valor de ν_0 tanto menor será a quantidade de segmentos resultantes (super-segmentação) (CHAN; VESE, 2001). No final do primeiro passo, tem-se duas partições $A\{\phi > 0\}$ e $B\{\phi < 0\}$, e pode-se calcular as variâncias σ_A^2 e σ_B^2 nessas partições. Se a variância σ_A^2 for maior que σ_B^2 então a partição A precisa de uma segmentação mais detalhada do que B . Baseado nesse fato, pode-se inicializar os parâmetros $\nu_A = \sigma_B^2$ e $\nu_B = \sigma_A^2$. Os autores constataram a partir de experimentos que para imagens com pouco ruído inicializa-se $\beta \leq 0.5$ e $\nu_A = \nu_B = \min(\sigma_A^2, \sigma_B^2)$; para imagens muito ruído $\beta = 1 \sim 1.5$ e $\nu_A = \sigma_B^2$, $\nu_B = \sigma_A^2$.

4 Considerações finais

Os métodos variacionais de segmentação representam um avanço na análise de imagens digitais. Com esses métodos, pode-se fazer uma análise profunda do problema da segmentação em função de conceitos matemáticos bem conhecidos. Especialmente, a propriedade de modelagem teórica das características da imagem em uma funcional de energia que caracteriza a segmentação a torna bastante atrativa. Além disso, tem-se ferramentas do cálculo e geometria diferencial para se estender e aplicar na solução da funcional modelada.

Os contornos ativos formam uma categoria de modelos variacionais que têm recebido bastante atenção da comunidade científica nos últimos anos. Mas o que a torna tão popular? Pode-se pensá-la como uma idéia muito intuitiva, embute-se uma curva fechada em uma imagem e faz-se com que ela se mova para separar duas regiões de interesse. O critério de parada pode ser modificado a fim de refletir melhor as características da imagem em questão. Isso, claramente, é uma propriedade muito atraente. A seguir apresentaremos algumas vantagens desses modelos:

- Os contornos ativos implícitos fazem uso do framework matemático *level set* como representação. Esse tipo de representação é utilizada para se ter um maior controle com relação ao contorno. Embutindo um contorno em uma superfície de maior dimensão implica no tratamento natural das mudanças de topologia. Dessa maneira é possível segmentar regiões não-conectadas.
- O uso de superfícies implícitas traz uma série de ferramentas matemáticas úteis para

o tratamento do contorno. Técnicas do cálculo variacional e da geometria diferencial podem ser empregados, bem como suas respectivas análises numéricas.

- Em especial, os contornos ativos geodésicos apresentam um esquema numérico computacionalmente muito atrativo. O AOS (Anexo B) é um método semi-implícito que possui a interessante propriedade de paralelismo. Nesse caso, uma computação distribuída pode ser empregada para diminuir o tempo de execução do método.
- Os contornos ativos baseados em região adicionam informação sobre as regiões da imagem na segmentação. Essa informação adicional é crucial para uma segmentação com sucesso. Pode-se utilizar diferentes distribuições de probabilidade para modelagem dos valores de pixel das regiões, fazendo com que o método seja interessante para segmentação de imagens com textura.
- Os modelos hierárquicos utilizam os contornos ativos de forma a segmentar imagens mais complexas, i.e., com n regiões. Esse modelos fazem uso dos contornos de forma adaptiva e independente, possibilitando uma maior flexibilidade com relação a parâmetros e inicialização.

No escopo das imagens médicas, é bom salientar que os métodos aqui propostos são supervisionados, apesar de se poder utilizá-los, também, de forma automática. O supervisionamento é interessante, pois proporciona melhores resultados de segmentação.

Apesar de possuir características interessantes, o uso dessa ferramenta requer uma sofisticação no algoritmo numérico. O contorno ativo é tratado como uma equação diferencial parcial que é solvida através de uma equação Euler-Lagrange associada. Essa classe de problemas, apesar de serem conhecidos há tempo, ainda não são completamente seguros e estáveis. Percebe-se, no entanto, que há uma grande motivação entre os pesquisadores para se encontrar soluções que simplifiquem a complexidade computacional do modelo sem perda das características que a tornam tão populares. Em termos gerais, pode-se dizer que ainda falta uma contribuição significativa dos cientistas da computação nessa área.

4.1 **Trabalhos futuros**

Podemos destacar algumas aplicações do modelo:

- Uma implementação dos contornos ativos geodésicos utilizando o modelo numérico AOS pode ser feita para segmentação de imagens. Explorando a capacidade de paralelismo do método numérico, pode-se comparar a performance do modelo. Ainda, a utilização de placas gráficas de alta performance (GPGPU) para aumentar o desempenho a fim de validar um grande número de imagens pode ser estudado a fim de obter uma segmentação rápida e eficiente.
- A aplicação dos contornos ativos para segmentação das imagens timpânicas do software AURIS produzido pelo Grupo Cyclops, e comparação dos resultados obtidos.
- Devido a facilidade de extensão dos modelos para imagens tridimensionais, um algoritmo de segmentação para tais imagens pode ser facilmente proposto.

ANEXO A – Introdução a superfícies implícitas

O material descrito aqui é retirado de (OSHER; FEDKIW, 2002). Os autores apresentam os conceitos introdutórios de superfícies implícitas.

Em uma dimensão espacial, suponha que divida-se a linha real em três intervalos distintos usando-se os pontos $x = -1$ e $x = 1$. Isto é, define-se $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, e $(1, \infty)$ como três subdomínios de interesse e considera-se a primeira e a última parte como sendo uma região. Refere-se $\Omega^- = (-1, 1)$ como a porção dentro do domínio e $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ como a porção fora do domínio. A borda entre a partição consiste de dois pontos $\partial\Omega = \{-1, 1\}$ e é chamada de interface. Em uma dimensão, o interior e exterior são objetos unidimensionais, enquanto a interface é menor que unidimensional. De maneira geral, em \mathfrak{R}^n , subdomínios são n -dimensionais, enquanto a interface é $(n-1)$ dimensional. Dizemos que a interface possui codimensão um.

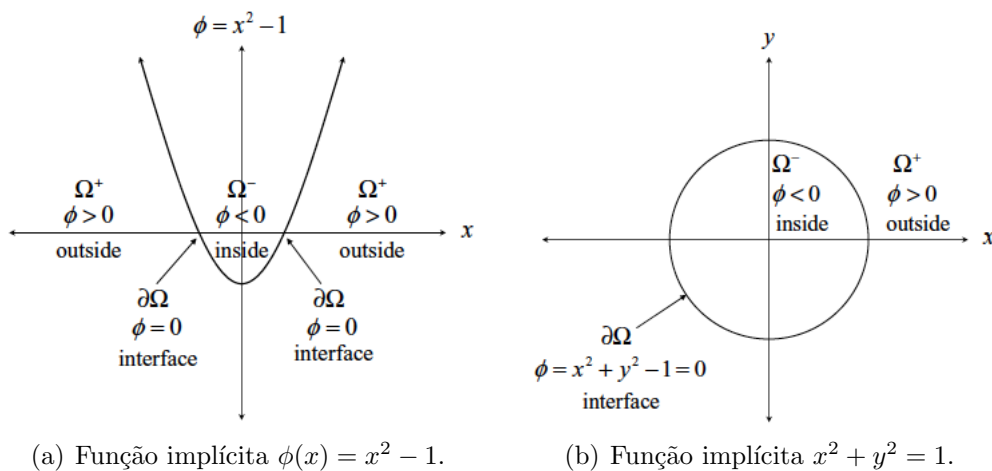


Figura 17: Exemplo de funções implícitas de uma e duas dimensões, reimpresso de (OSHER; FEDKIW, 2002, p. 4).

Em uma representação explícita de interface escreve-se explicitamente os pontos pertencentes à interface, por exemplo $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Numa representação implícita define-se a interface como um isocontorno de alguma função. Por exemplo, o isocontorno zero de $\phi(x) = x^2 - 1$ é o conjunto de todos os pontos onde $\phi(x) = 0$; i.e., é exatamente $\partial\Omega = \{-1, 1\}$.

Em duas dimensões espaciais, nossa interface é uma curva que separa \mathbb{R}^2 em subdomínios com áreas não vazias. Aqui limita-se a interface como sendo uma curva fechada, a fim de evidenciar o interior e exterior da região. Como exemplo, considere $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$, onde a interface explícita é definida pelo isocontorno $\phi(\vec{x}) = 0$ e é o círculo unitário definido por $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$, o interior $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$ e o exterior $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$ (Figura 17(b)).

A representação explícita necessita da especificação de todos os pontos da curva. Para as funções apresentadas anteriormente a especificação é trivial, porém em funções gerais essa tarefa pode ser mais difícil. De modo geral, necessita-se da parametrização da curva com um vetor função $\vec{x}(s)$, onde o parâmetro $s \in [s_0, s_f]$. A condição que a curva necessita ser fechada implica que $\vec{x}(s_0) = \vec{x}(s_f)$. Curvas bidimensionais complicadas não possuem tal representação simples. Uma maneira conveniente de se aproximar uma representação explícita é discretizar o parâmetro s em um conjunto finito de pontos $s_0 < \dots < s_{i-1} < s_i < s_{i+1} < \dots < s_f$, onde os subintervalos $[s_i, s_{i+1}]$ não são necessariamente de mesmo tamanho. Para cada ponto s_i no espaço do parâmetro, armazena-se a localização correspondente da curva bidimensional denotada por $\vec{x}(s_i)$.

A representação implícita pode ser armazenada com uma discretização também, porém agora deve-se discretizar todo o \mathbb{R}^2 , o que é impraticável, já que não é finito. Portanto, discretiza-se um pequeno subdomínio $D \subset \mathbb{R}^2$ e escolhe-se um conjunto finito de pontos $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ para discretizar a função implícita ϕ .

ANEXO B – Esquemas numéricos para o modelo geodésico de contornos ativos

Aditive operator splitting (AOS) foi introduzido por Weickert, Romeny e Viergever em (WEICKERT; ROMENY; VIERGEVER, 1998) como um esquema numérico incondicionalmente estável para difusão não-linear em processamento de imagens. Percebe-se que os contornos ativos geodésicos possuem uma semelhança com a difusão. O termo $div(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})$ pode ser encarado como um fator de “difusividade”. Por ser tão semelhante, o esquema AOS foi adaptado a fim de refletir o termo mencionado na equação de evolução.

O esquema descrito aqui é retirado de (WEICKERT, 2001). O autor apresenta a adaptação feita do esquema AOS para tratamento da evolução do contorno ativo geodésico.

O esquema AOS original trata da equação de difusão não-linear de Perona-Malik (PERONA; MALIK, 1990) da forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= div(g(|\nabla u|)\nabla u) \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

onde u_0 é a imagem original. Reescrevendo o lado direito da equação explicitamente

$$div(g(|\nabla u|)\nabla u) = \sum_{l=1}^m \partial_{x_l}(g(|\nabla u|)\partial_{x_l}u), \quad (\text{B.1})$$

onde m é o número de dimensões do problema, i.e., para imagens 2D $m = 2, x_1 = x$ e $x_2 = y$.

Como primeiro passo para discretização considere o operador

$$A_l(u^k) = \partial_{x_l}(g(|\nabla u^k|)\partial_{x_l}), \quad (\text{B.2})$$

onde o sobrescrito k indica o número de iterações. Podemos escrever o esquema explícito

$$u^{k+1} = \left[I + \tau \sum_{l=1}^m A_l(u^k) \right] u^k, \quad (\text{B.3})$$

onde τ é o passo numérico de tempo. Necessita-se de um limite superior para τ para estabelecer a convergência para um estado estável. A seguir, o esquema semi-implícito

$$u^{k+1} = \left[I - \tau \sum_{l=1}^m A_l(u^k) \right]^{-1} u^k, \quad (\text{B.4})$$

é incondicionalmente estável, porém inverter a matriz é uma operação computacional cara.

Finalmente, o consistente AOS semi-implícito

$$u^{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m [I - m\tau A_l(u^k)]^{-1} u^k, \quad (\text{B.5})$$

pode ser aplicado para eficientemente resolver a difusão não-linear.

O esquema semi-implícito em 2D é portanto um sistema de equações tridiagonal

$$u^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 [I - 2\tau A_l(u^k)]^{-1} u^k, \quad (\text{B.6})$$

onde $A_l(u^k)$ é uma matriz correspondendo as derivadas ao longo do eixo l . Em detalhes a matriz $A_l(u^k) = (a_{ijl}(u^k))$ é dada por

$$a_{ijl}(u^k) = \begin{cases} a_i |\nabla u|_i^k \frac{2}{\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_i^k + \left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_j^k}, j \in N_l(i) \\ -a_i |\nabla u|_i^k \sum_{m \in N_l(i)} \frac{2}{\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_i^k + \left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_m^k}, j = i \\ 0, \text{senão,} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

onde $N_l(i)$ representa os pixels vizinhos em relação ao eixo $l \in \{x, y\}$, e pode ser eficientemente solucionada para u^{k+1} pelo algoritmo de Thomas (WEICKERT; ROMENY; VIERGEVER, 1998).

O segundo termo da equação de evolução, $g|\nabla u|$, representa a força balão e é aproximada com (cfe. (OSHER; SETHIAN, 1988))

$$|\nabla u|_i^k \approx (\max(D^{-x}u_i^k, 0)^2 + \min(D^{+x}u_i^k, 0)^2 + \max(D^{-y}u_i^k, 0)^2 + \min(D^{+y}u_i^k, 0)^2)^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

onde $D^{+x}, D^{+y}, D^{-x}, D^{-y}$ denotam as aproximações das derivadas parciais em x e y (OSHER; SETHIAN, 1988), (SETHIAN, 1999).

Finalmente podemos definir a equação geodésica no espaço discreto

$$u^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} (I - 2\tau A_l(u^k))^{-1} (u^k + \tau |\nabla u|^k g). \quad (\text{B.9})$$

Essa equação se demonstra estável para $\tau \leq 0.5$, conforme (OSHER; SETHIAN, 1988).

A técnica proposta por Weickert necessita do cálculo da matriz diagonal $A_l(u)$ em todos os passos de iteração do algoritmo. Essa restrição faz com que o método seja estável numericamente, porém custoso, mesmo se utilizando o algoritmo de Thomas. Uma outra abordagem feita por Goldenberg et al. (2001), propõem a fixação da matriz com o valor inicial do sistema, i.e., $A_l(u_0)$. Isso implica que a matriz seja calculada somente uma vez, e utilizada em todos os passos da iteração. Assim, pode-se reescrever a equação (B.9)

$$u^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} (I - 2\tau A_l(u_0))^{-1} (u^k + \tau |\nabla u|^k g). \quad (\text{B.10})$$

Para manter a estabilidade numérica, no entanto, deve-se manter u^k como um mapa de distância de u_0 em cada iteração. Essa etapa é chamada de reinicialização, e os autores proporam usar o método *fast marching* de Sethian (SETHIAN, 1999) para manter u^k estável nas iterações.

Referências

- ADALSTEINSSON, D.; SETHIAN, J. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, v. 118, n. 2, p. 269–277, 1995.
- AMBROSIO, L.; TORTORELLI, V. M. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via $\#$ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 43, p. 999–1036, 1990.
- AUBERT, G.; KORNPORST, P. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. [S.l.]: Springer, 2002.
- BEUCHER, S.; LANTUEJOUL, C. Use of watersheds in contour detection. In: *Proc. International Workshop on Image Processing, Real Time Edge and Motion Detection/Estimation*. Rennes, France: [s.n.], 1979.
- BEVERIDGE, J. et al. Segmenting images using localized histograms and region merging. *Int. Journal of Computer Vision*, v. 2, n. 3, p. 311–352, 1989.
- BOVIK, A. C. Introduction to digital image and video processing. In: _____. *Handbook of Image and Video Processing*. 2. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005. cap. 1, p. 3–17.
- BROX, T. *From Pixels to Regions: Partial Differential Equations in Image Analysis*. Tese (Doutorado em Ciências Naturais) — Saarland University, abril 2005.
- BROX, T.; WEICKERT, J. Level set based segmentation of multiple objects. In: _____. *Lectures Notes in Computer Science*. [S.l.]: Springer, 2004. (Pattern Recognition, v. 3175), p. 415–423.
- CASELLES, V.; COLL, T. Snakes in movement. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 33, p. 2445–2456, 1996.
- CASELLES, V.; KIMMEL, R.; SAPIRO, G. On geodesic active contours. *Int. Journal of Computer Vision*, v. 22, p. 61–79, 1997.
- CHAKRABORTY, A.; STAIB, H.; DUNCAN, J. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, v. 15, n. 6, p. 859–870, 1996.
- CHAN, T.; VESE, L. Active contours without edges. *IEEE Trans. Image Processing*, v. 10, p. 266–277, 2001.
- CHAN, T.; VESE, L. A multiphase level set framework for image segmentation using mumford and shah model. *Int. Journal of Computer Vision*, v. 50, p. 271–293, 2002.

- CHOPP, D. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, v. 106, n. 1, p. 77–91, 1993.
- COHEN, L. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image Understanding*, v. 53, n. 2, p. 211–218, Março 1991.
- GAO, S.; BUI, T. D. Image segmentation and selective smoothing by using mumford-shah model. *IEEE Trans. Image Process.*, v. 14, p. 1537–1549, 2005.
- GOLDENBERG, R. et al. Fast geodesic active contours. *IEEE Trans. Image Processing*, v. 10, n. 10, p. 1467–1475, Outubro 2001.
- GRAYSON, M. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential Geometry*, v. 26, p. 285–314, 1987.
- HARALICK, R. M. Ridges and valleys on digital images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, v. 22, n. 10, p. 28–38, Abril 1983.
- HARALICK, R. M.; SHAPIRO, L. G. Image segmentation techniques. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, v. 29, p. 100–132, 1985.
- HARTMANN, G. Recognition of hierarchically encoded images by technical recognition of hierarchically encoded images by technical and biological systems. *Biological Cybernetics*, v. 57, n. 1–2, p. 73–84, Agosto 1987.
- HOROWITZ, S. L.; PAVLIDIS, T. Picture segmentation by a tree traversal algorithm. *Journal of the ACM*, v. 23, p. 368–388, 1976.
- KASS, M.; WITKIN, A.; TERZOPOULOS, D. Snakes: active contour models. *Int. Journal of Computer Vision*, v. 1, p. 321–331, 1988.
- KICHENASSAMY, S. et al. Gradient flows and geometric active contour models. In: *Proc. Int. Conf. Computer Vision*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 810–815.
- KOEPFLER, G.; LOPEZ, C.; MOREL, J. M. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 1, p. 282–299, 1994.
- MERRIMAN, B.; BENCE, J.; OSHER, S. Motion of multiple junctions: A level set approach. *Journal of Computational Physics*, v. 112, p. 334–363, 1994.
- MUMFORD, D.; SHAH, J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and variational problems. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XLII, n. 5, p. 577–685, 1988.
- OSHER, S.; FEDKIW, R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. California: Springer, 2002.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, v. 79, p. 12–49, 1988.
- PARAGIOS, N.; DERICHE, R. Coupled geodesic active regions for image segmentation: A level set approach. In: *Proc. 6th European Conference on Computer Vision*. Dublin, Irlanda: [s.n.], 2000. p. 224–240.

- PARAGIOS, N.; DERICHE, R. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 22, n. 3, p. 266–280, Março 2000.
- PERONA, P.; MALIK, J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 12, p. 629–639, 1990.
- PRATT, W. *Digital Image Processing*. 3. ed. California: John Wiley & Sons, 2001.
- PRIESE, L.; STURM, P. Introduction to the color structure code and its implementation. Março 2003. Disponível em: <http://www.uni-koblenz.de/lb/lb_downloads/download-csc.pdf>.
- ROUSSON, M.; DERICHE, R. Dynamic segmentation of vector valued images. In: _____. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*. [S.l.]: Springer, 2003.
- SAMSON, C. et al. A level set model for image classification. *Int. Journal of Computer Vision*, v. 40, n. 3, p. 187–197, 2000.
- SETHIAN, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- SHIFRIN, T. *A First Course in Curves and Surfaces*. Georgia: University of Georgia, 2006.
- SKARBEEK, W.; KOSCHAN, A. *Colour Image Segmentation — A Survey*. [S.l.], Outubro 1994.
- SPRUCK, L. E. J. Motion of level sets by mean curvature. *Journal of Differential Geometry*, v. 33, n. 3, p. 635–681, 1991.
- TSAI, A.; YEZZI, A.; WILLSKY, A. Curve evolution implementation of the mumford-shah functional for image segmentation, denoising, interpolation and magnification. *IEEE Trans. Image Processing*, v. 10, p. 1169–1186, 2001.
- WEICKERT, J. Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, v. 70, n. 1, p. 33–50, 2001.
- WEICKERT, J.; ROMENY, B. ter H.; VIERGEVER, M. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Trans. Image Processing*, v. 7, n. 3, p. 398–410, Março 1998.
- XU, C.; PRINCE, J. L. Snakes, shapes and gradient vector flow. *IEEE Trans. Image Processing*, v. 7, p. 359–369, 1998.
- ZHAO, H. K. et al. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, v. 127, p. 179–195, 1996.
- ZHU, S. C.; YUILLE, A. L. Region competition: unifying snakes, region growing, energy/bayes/mdl for multi-band image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 18, n. 9, p. 884–900, 1996.