

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT**

Marco Antonio Silva Negri

**CAMINHOS EM UM GRAFO E O ALGORITMO DE
DIJKSTRA**

Florianópolis

2017

Marco Antonio Silva Negri

**CAMINHOS EM UM GRAFO E O ALGORITMO DE
DIJKSTRA**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Negri, MARCO ANTONIO SILVA
CAMINHOS EM UM GRAFO E ALGORITMO DE DIJKSTRA /
MARCO ANTONIO SILVA Negri ; orientador, RAPHAEL
FALCÃO DA HORA, 2017.
75 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. CAMINHOS EM UM GRAFO. 3.
ALGORITMO DE DIJKSTRA. 4. TEOREMA DE Menger. I. DA
HORA, RAPHAEL FALCÃO . II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

Marco Antonio Silva Negri

CAMINHOS EM UM GRAFO E O ALGORITMO DE DIJKSTRA

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial.

Florianópolis, 06 de julho 2017.

Prof. Dr. Celso Melchíades Doria
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Orientador

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão
Universidade Federal de Pernambuco-UFPE.

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

Este trabalho é dedicado a meu pai e à minha mãe que permanecerá sempre no meu coração, a minha família que permaneceu ao meu lado, incentivando e encorajando no percurso deste longo caminho, aos amigos que apoiaram a prosseguir e por último aos professores que, na sua árdua tarefa de ensinar, me entusiasmaram a continuar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me capacitou dos conhecimentos necessários para realização deste trabalho.

Aos meus pais, Felício Gerard Negri e Maria Eunice Silva Negri(em memória).

Ao orientador Raphael Falcão da Hora, por sua paciência, dedicação e disposição para o bom encaminhamento desta dissertação.

A minha esposa Izália, que me apoiou nas horas mais difíceis, encorajando sempre a continuar na batalha.

Aos meus filhos Ana Paula, Maria Claudia e João Vitor que ajudaram com valorosas dicas em informática e correção ortográfica.

A professora Eliane Franca pelas valiosas contribuições durante o curso, que deram ânimo a prosseguir.

Aos professores Aníbio e Waldemar, colegas de trabalho, que tanto me ajudaram e incentivaram a continuar nesta árdua caminhada.

Aos professores do ProfMat-UFSC que com empenho e dedicação compartilharam seus conhecimentos e nos deram oportunidade única de crescimento como profissionais.

Aos colegas de sala que contribuíram para superar as dificuldades encontradas durante o curso.

A Hermesom e Diego que colaboraram com preciosas informações sobre o Latex.

Ao comandante, Capitão de Fragata Ricardo Lhamas Guastini, da Escola de Aprendizes Marinheiros de Santa Catarina que apoiou, desde o início, esta jornada.

E finalmente a todos que direta ou indiretamente me ajudaram com palavras de estímulo.

... mesmo que tu tiveres um coração de crianças e que outros não te compreendem, não te preocupes. Deixe que cada um se transforme conforme o seu conhecimento e a percepção dos ensinamentos da escola Terra.

(Juvêncio de Araújo Figueredo, 1927)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um pouco da Teoria de Grafos para, com isto, termos uma fundamentação teórica que mostrará a viabilidade da aplicação no Ensino Médio, em destaque o Algoritmo de Dijkstra, onde o educando poderá modelar situações problemas num grafo, para obtenção do caminho mais curto. Este algoritmo tem uma vasta aplicação em diversas áreas do conhecimento, em especial na área de tecnologia, como por exemplo em redes de comunicação. Proporcionando assim, uma oportunidade única de aplicações em problemas reais, atuais e do interesse do educando. Não só estudamos a questão do caminho mais curto, mas também consideramos o problema da conectividade em grafos e a existência de caminhos disjuntos, demonstrando o famoso teorema de Menger. Por exemplo, no caso de uma rede de comunicação é interessante saber qual é o ponto vulnerável do sistema e verificar a existência de um caminho alternativo, caso um destes pontos venha a falhar, uma aplicação imediata do Teorema de Menger.

Palavras-chave: Grafo. Conectividade. Algoritmo de Dijkstra. Teorema de Menger.

ABSTRACT

We give a brief presentation of Graph Theory in a way that a student without any knowledge in graphs can learn the basic definitions, examples and properties and can apply these in a real life situation. In particular, we study the Dijkstra algorithm, where the student can apply this algorithm to find the shortest path between nodes in a graph. This algorithm has a lot of real life applications, especially in technology such as paths in a network communication. This gives a unique opportunity of solving current real problems. Not only we study the problem of finding the shortest path, we also consider the problem of connectedness in a graph and the existence of different paths which do not intersect, proving the famous Menger's Theorem. For instance, in the case of a network communication, it is interesting to know the problem points where the system is vulnerable and of one these points fail, one can try to verify the existence of an alternative path, an immediate application of Menger's Theorem.

Keywords: Graphs. connectedness of a graph. Dijkstra algorithm. Menger's theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	As sete pontes de Königsberg.....	23
Figura 2	Foto de Edsger Dijkstra.....	25
Figura 3	Casinha.....	27
Figura 4	A e B diagramas diferentes de um mesmo grafo G	28
Figura 5	Pontos Turísticos.....	28
Figura 6	Grafo A orientado Grafo B não orientado.....	29
Figura 7	Grafo ponderado.....	30
Figura 8	Extremidades de uma aresta.....	31
Figura 9	Aresta paralela.....	32
Figura 10	Laço ou auto-loop.....	32
Figura 11	Multigrafo e grafo simples.....	33
Figura 12	Grafos isomorfos.....	33
Figura 13	Exemplos de: a) caminho fechado b) ciclo c) caminho aberto.....	34
Figura 14	Vértices adjacentes.....	35
Figura 15	Grafo 2 e 3-conexo.....	36
Figura 16	Ponte.....	36
Figura 17	Grafo 2-regular.....	38
Figura 18	Grafo Completo K_5 , (4-regular).....	38
Figura 19	Grafos Complementares.....	39
Figura 20	Grafo Nulo.....	39
Figura 21	Exemplo de: a) árvore b) floresta.....	40
Figura 22	a) Grafo bipartido b) Grafo bipartido Completo $K_{2,4}$	41
Figura 23	a) Grafo Planar b) Grafo de Kuratowski.....	41
Figura 24	Exemplo de grafo euleriano e semi-euleriano.....	41
Figura 25	Caminho T	42
Figura 26	Circuito Único.....	43
Figura 27	Grafo Hamiltoniano.....	44
Figura 28	Grafo com apenas um vértice.....	47
Figura 29	Grafo com $n - 1$ vértices indexados a R'	47
Figura 30	Grafo passando pelo caminho Q	48

Figura 31	Grafo de caminhos para u	49
Figura 32	Grafo ponderado	50
Figura 33	Distâncias entre as localidades	54
Figura 34	Grafo referente a 1ª linha da Tabela 11	55
Figura 35	Grafo referente a 2ª linha da Tabela 11	55
Figura 36	Grafo referente a 3ª linha da Tabela 11	55
Figura 37	Grafo referente a 4ª linha da Tabela 11	55
Figura 38	Grafo referente a 5ª linha da Tabela 11	56
Figura 39	Grafo referente a 6ª linha da Tabela 11	56
Figura 40	Grafo referente a 7ª linha da Tabela 11	57
Figura 41	Grafo referente a 8ª linha da Tabela 11	57
Figura 42	Exemplo de grafo 3-conexo	59
Figura 43	Grafo 2-conexo	59
Figura 44	Grafo 3-conexo	60
Figura 45	Para $k = 1$	60
Figura 46	Caminho C com vértice x	61
Figura 47	Caminho C_j	62
Figura 48	Caminho E	63
Figura 49	Figuras	65
Figura 50	Mapa da escola	66
Figura 51	Grafo da Escola	66
Figura 52	Mapa do Brasil	67
Figura 53	Grafos dos Estados Brasileiros	68
Figura 54	Grafo da atividade 4)	68
Figura 55	Jogo reformulado através de grafos	69
Figura 56	Grafo das localidades P, A, B, C, D, E, F, G	70
Figura 57	Menor caminho entre P, A, B, C, D, E, F, G	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Visualização do primeiro passo	46
Tabela 2	Visualização do segundo e terceiro passo.....	46
Tabela 3	Visualização do quarto passo.....	46
Tabela 4	Atribuição do zero ao vértice inicial	51
Tabela 5	Primeira tabela de distâncias atualizada	51
Tabela 6	Tabela atualizada	51
Tabela 7	Tabela atualizada	52
Tabela 8	Tabela atualizada	52
Tabela 9	Tabela atualizando v	53
Tabela 10	Tabela Distância entre localidades	53
Tabela 11	Cálculo da distância entre as localidades	54
Tabela 12	Tabuleiro	69
Tabela 13	Tabela Distância entre localidades	70

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	UM POUCO DE HISTÓRIA	23
2.1	GRAFOS	23
2.2	ALGORITMO DE DIJKSTRA	24
2.3	CONTRIBUIÇÃO DE KARL MENGER	26
3	TEORIA DE GRAFOS	27
3.1	DEFINIÇÃO	27
3.2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	29
3.2.1	Grafos orientados e não orientados	29
3.2.2	Grafo ponderado ou valorado	29
3.2.3	Grau de um Vértice.....	30
3.3	ALGUMAS DEFINIÇÕES	31
3.3.1	Arestas paralelas	31
3.3.2	Laço	32
3.3.3	Multigrafos	32
3.3.4	Isomorfismo	33
3.3.5	Grafos conexos.....	34
3.3.6	Componentes Conexas	36
3.4	TIPOS ESPECIAIS DE GRAFOS	38
3.4.1	Grafo regular	38
3.4.2	Grafo completo	38
3.4.3	Grafo complementar	39
3.4.4	Grafo Nulo ou Vazio	39
3.4.5	Árvore	39
3.4.6	Grafos bipartidos	40
3.4.7	Grafo planar e Grafo de Kuratowski	40
3.4.8	Grafo Euleriano.....	41
3.4.9	Grafo Hamiltoniano.....	43
4	ALGORITMO DE DIJKSTRA	45
4.1	CORRETEDE DO ALGORITMO DE DIJKSTRA	47
4.2	EXEMPLOS DA APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE DIJKSTRA.....	50
4.2.1	Exemplo 1	50
4.2.2	Exemplo 2	53
5	TEOREMA DE MENGER	59
6	ATIVIDADES	65
7	CONCLUSÃO	73

REFERÊNCIAS 75

1 INTRODUÇÃO

A teoria de grafos é um assunto antigo com muitas aplicações em situações atuais. As ideias básicas foram introduzidas por volta do século XVIII pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler, que utilizou grafos para resolver um problema que hoje é conhecido como “As sete pontes de Königsberg”. Esse problema é considerado por muitos como sendo um marco do início a teoria de grafos e a um novo ramo da matemática, chamado de topologia, o qual teve um avanço considerável no século XX e possui aplicações em diversas áreas de conhecimento. Informalmente, um grafo pode ser visto como um conjunto finito de elementos, chamados de vértices, e as relações existentes entre seus elementos, chamadas de arestas, que nada mais são do que as ligações ou conexões entre seus elementos. As representações utilizadas para vértices são pontos (que representam os elementos) e para as arestas são linhas que conectam os devidos pontos. Tal simplicidade permite a modelagem de diversas situações atuais concretas tais como: redes de computadores, de comunicação, aplicações em engenharia elétrica, como manutenção de redes elétricas, e de telecomunicações, engenharia química, soluções para tráfego aéreo e terrestre entre tantas outras situações nas quais podemos aplicar grafos.

O algoritmo de Dijkstra tem por objetivo obter o menor caminho entre um vértice fixo dado, que será o vértice inicial escolhido, e todos os demais vértices do grafo. Consiste basicamente em fazer um visita por todos os vértices do grafo, começando pelo vértice inicial dado e encontrando sucessivamente o vértice mais próximo, o segundo mais próximo, o terceiro e assim sucessivamente até que todos os vértices do grafo tenham sido visitados. Este algoritmo foi publicado em 1959 e criado pelo matemático holandês Edsger Dijkstra, que trouxe uma solução para o problema do menor caminho num grafo ponderado. O algoritmo de Dijkstra, ainda hoje é considerado um dos algoritmos mais engenhosos na ciência da computação. Edsger Dijkstra era um defensor ferrenho da simplicidade e elegância matemática, acreditava que todo problema complicado tinha uma parte acessível, uma entrada, e a matemática era uma ferramenta a ser usada para encontrá-la e explorá-la.

Por último iremos demonstrar o teorema de Menger que relaciona a conexidade de um grafo com a existência de caminhos disjuntos, pois mais importante que saber se um grafo é conexo, ou não, é saber da existência de caminhos alternativos independentes. Em redes de te-

lecomunicações ou em centrais de distribuição de energia é primordial saber da existência destes caminhos, para o caso de acontecer algum problema com uma das centrais, a rede permanecer em operação, não prejudicando todo o andamento do serviço prestado.

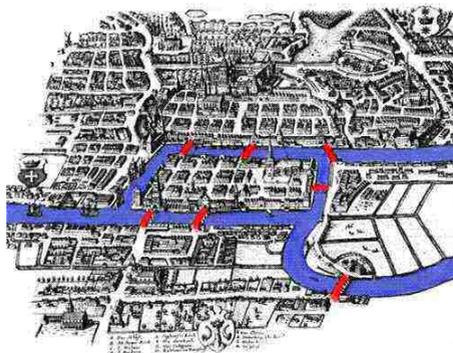
Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No segundo capítulo será apresentado o problema das sete pontes de Königsberg, um marco na teoria de grafos. No terceiro capítulo serão expostos alguns conceitos e definições para um melhor entendimento da teoria. No quarto capítulo será mostrado o algoritmo de Dijkstra, sua demonstração e uma aplicação deste algoritmo. No quinto capítulo será externado o Teorema de Menger e sua demonstração. No sexto capítulo algumas atividades que poderão servir de exemplos para aplicações em atividades em sala. No sétimo capítulo, uma conclusão da possibilidade de inclusão desta teoria no ensino médio.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

2.1 GRAFOS

A teoria dos grafos é um assunto antigo com muitas aplicações modernas. As ideias básicas de grafos foram introduzidas no século *XVIII* pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o problema hoje conhecido como “As sete pontes de Königsberg”. Na antiga cidade de Königsberg, na Prússia Oriental, hoje chamada de Kaliningrado, situada atualmente na região ocidental da Rússia, onde existe uma ilha chamada Kneiphof, que possui 7 pontes como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – As sete pontes de Königsberg



Esta ilha divide o rio Pregel, que banha a cidade, em dois ramos. Para facilitar a travessia dos habitantes da cidade, foram construídas 7 pontes, batizadas pelos seguintes nomes: Ponte do Mel, Ponte Verde, Ponte da Madeira, Ponte do Ferreiro, Ponte do Comerciante, Ponte de Conexão e Ponte Alta. Segundo a lenda, os habitantes dessa cidade tinham como passatempo tentar encontrar um caminho que passasse pelas sete pontes uma única vez e regressar ao ponto de partida. Sendo que nenhuma das tentativas tinha sucesso, houve um questionamento se tal caminho existia. Somente na década de 1730 este problema foi questionado de forma matemática e comprovado ser impossível percorrer tal trajeto, que será confirmado nas próximas seções. O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) , em 1736, não só conseguiu elucidar o problema como acabou por criar uma teoria denominada Teoria

de Grafos e um novo ramo da matemática denominado Topologia que é aplicado a vários problemas da atualidade [6] . Ele usou um modelo simplificado das ligações entre as regiões e estabeleceu um teorema que diz em que condições é possível percorrer cada aresta (ponte) exatamente uma vez e voltar ao ponto inicial[1].

2.2 ALGORITMO DE DIJKSTRA

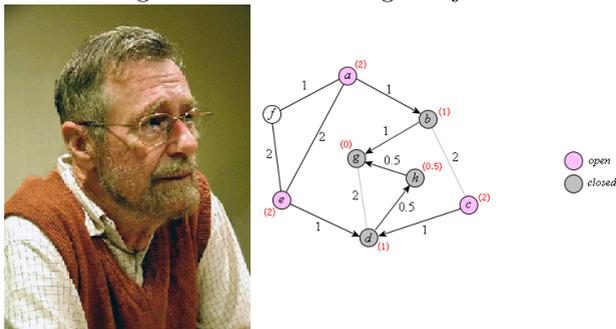
Em 1962 Ford e Fulkerson desenvolveram a teoria dos fluxos em redes, um dos mais importantes resultados da teoria dos grafos. Os grafos são usados na área de Técnicas da Informação, na criação de fluxogramas, redes de comunicação, modelos de fluxo de dados, layout de circuitos, algoritmos de pesquisa e ordenação. A teoria dos grafos constitui uma ferramenta muito útil para a modelagem matemática de problemas do nosso dia-a-dia. Alguns exemplos de problemas que podem ser tratados com grafos são,[2]:

- roteiros de passeio ou viagem
- redes elétricas
- organogramas
- árvores de procedimentos computacionais
- telecomunicações: alocação de frequências
- códigos
- demanda de energia elétrica
- distribuição de serviços: água, luz, gás, telefone
- circuitos impressos (componentes eletrônicos)
- análise ou coloração de mapas
- organização de tráfego
- trajetos ótimos: vendedor, carteiro, caminhão de lixo
- instalações: mecânicas, hidráulicas, elétricas, a cabo
- organização de campeonatos
- minimização de caminhos em geral.

Este último foi solucionado através de um algoritmo publicado em 1959. Criado por um matemático computacional holandês, Edsger Dijkstra, que trouxe uma solução para o problema do caminho mais curto num grafo orientado, este algoritmo que leva seu nome, Algoritmo de Dijkstra, segue como uma das coisas mais engenhosas na ciência da computação. Um defensor ferrenho da simplicidade e elegância na matemática, ele acreditava que todo problema complicado tinha uma parte acessível, uma entrada, e a matemática era uma ferramenta a ser usada para encontrá-la e explorá-la.

Em 1956, Dijkstra estava trabalhando no ARMAC, uma máquina de computação paralela instalada no Centro Matemático da Holanda. Tratava-se da sucessora dos computadores ARRA e ARRA II, que haviam sido, essencialmente, as primeiras máquinas deste tipo no país. Seu dever era programá-la, e assim que estivesse pronta, seria revelada ao público. Após dois anos de esforço conjunto, Dijkstra precisava de um problema para solucionar. “Para uma demonstração feita para pessoas não ligadas à informática, o problema tem que ser descrito de forma que não-matemáticos possam compreender”, lembrou Dijkstra em uma entrevista concedida não muito antes de sua morte, em 2002. “Elas tem que entender até mesmo a resposta. Então projetei um programa que encontraria a rota mais curta entre duas cidades na Holanda, usando uma espécie de mapa reduzido do país, em que havia escolhido 64 cidades” Qual a distância mais curta para ir de Rotterdam à Groningen?”, disse Dijkstra. “É o algoritmo para o caminho mais curto, que desenvolvi em cerca de 20 minutos”. Na figura 2 temos uma foto de Edsger Dijkstra e uma aplicação de seu algoritmo [2].

Figura 2 – Foto de Edsger Dijkstra



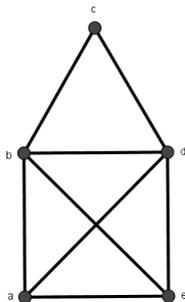
2.3 CONTRIBUIÇÃO DE KARL MENGER

Karl Menger (1902-1985) foi um matemático austríaco-americano que trabalhou em álgebra e geometria, contribuindo também para a teoria dos jogos e ciências sociais. Suas publicações compreendem um período de meio século e abrangem uma incrível variedade de áreas, da lógica à teoria dos conjuntos, à geometria, à análise, à didática da matemática e à economia, entre outras. Em teoria dos grafos, o teorema de Menger, provado em 1927, consiste em um resultado fundamental sobre conectividade em grafos finitos e não direcionados.

3 TEORIA DE GRAFOS

O que é um grafo? O que são vértices e arestas?
 “O leitor seria capaz de desenhar a Figura 3 sem tirar o lápis do papel, tendo que ir a todos os pontos e não podendo passar pela mesma linha duas vezes?” [3].

Figura 3 – Casinha



Uma brincadeira séria, pois pode-se introduzir através da Figura 3 muitos conceitos da teoria de Grafos, como as noções de grafos, vértice, aresta, grau do vértice, ciclo e outros que serão vistas nas próximas seções.

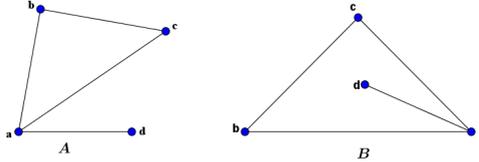
3.1 DEFINIÇÃO

Um grafo G consiste em um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de objetos chamados vértices, juntamente com um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices cujos elementos são chamados de arestas. Pode-se representá-lo por $G = (V; E)$, onde $V = V(G)$ e $E = E(G)$. Seja $G(V; E)$ um grafo e u, v dois de seus vértices, diz-se que u e v são adjacentes se existe uma aresta que incida nestes dois vértices. Pode-se denotar a aresta por $\{u, v\}$ ou simplesmente uv quando não houver perigo de confusão.

Grafos são geralmente representados por diagramas, onde os vértices de V correspondem aos pontos no plano e as arestas de E correspondem aos arcos que ligam os vértices correspondentes. O diagrama

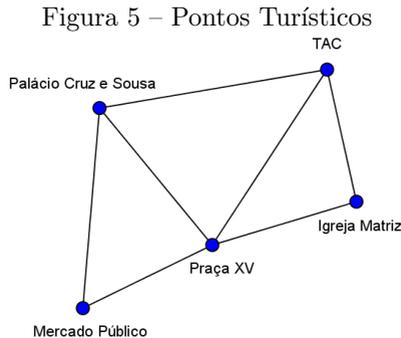
obtido pela Figura 4 não tem significado geométrico, seu propósito é representar um esquema entre as relações de adjacência dos vértices de G . Por exemplo, $G = \{\{a, b, c, d\}; \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}\}$ [5].

Figura 4 – A e B diagramas diferentes de um mesmo grafo G



Informalmente pode-se considerar como um conjunto finito de elementos denominados vértices e suas ligações, as arestas. Exemplo: Conjunto de pontos turísticos do centro de Florianópolis { Praça XV, Teatro Alvares de Carvalho (TAC), Mercado Público, Catedral Metropolitana Nossa Senhora do Desterro, Palácio Cruz e Sousa } e as rotas que os unem.

A Figura 5 apresenta os pontos turísticos, vértices, e suas conexões (arestas). Temos então 5 vértices e 7 arestas.



Para um grafo ficar bem definido são necessários dois conjuntos:

- i) O conjunto V , dos vértices. Neste caso, os pontos turísticos do centro de Florianópolis.
- ii) O conjunto E das arestas, que neste caso são as conexões dos pontos turísticos.

Pode-se concluir que o mais importante no grafo é determinar:

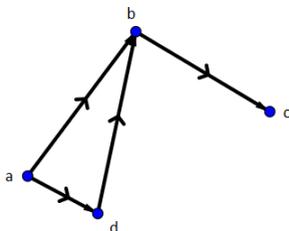
- i) Quem são os vértices.
- ii) Quais são os vértices que estão conectados pelas arestas (vértices adjacentes).

3.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

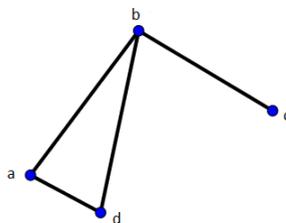
3.2.1 Grafos orientados e não orientados

Um detalhe que varia na definição de G é a existência de uma orientação específica em cada aresta. Os grafos que incluem essa informação são ditos grafos orientados e aqueles que não a apresentam são ditos não orientados. Em um grafo orientado, as arestas são pares ordenados, ou seja, um vértice é considerado a origem da aresta e o outro seu destino. Nas ilustrações de grafos orientados, o sentido de cada aresta é geralmente indicado por uma seta da origem para o destino. Como pode-se verificar na Figura 6, (a, b) é uma aresta do grafo orientado A , logo diz-se que (a, b) incide do vértice a (sai do) e incide no vértice b (entra no).

Figura 6 – Grafo A orientado



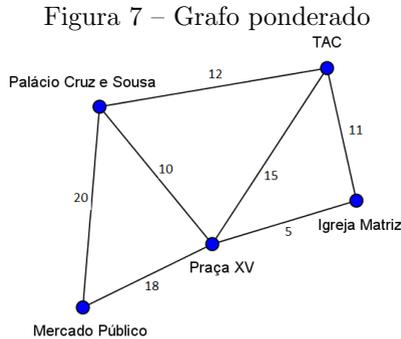
Grafo B não orientado



3.2.2 Grafo ponderado ou valorado

Um grafo é dito ponderado ou valorado se cada aresta tem um valor associado. Este valor pode ser a distância entre os vértices, uma tarifa ou uma dificuldade para ir de um vértice ao outro. Formalmente,

um grafo ponderado $G = (V, E)$ consiste em um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P , onde P representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas. Na Figura 7 observa-se que cada aresta tem um peso. Este peso pode ser a distância, dificuldade ou um pedágio.



3.2.3 Grau de um Vértice

Para cada vértice de G , define-se seu grau como sendo o número de arestas a ele incidentes e denota-se por $gr(v)$. Desta forma obtêm-se o grau de cada vértice da Figura 7 contando quantas arestas incidem em cada vértice:

- O vértice **Palácio Cruz e Sousa** tem grau 3.
- O vértice do **TAC** tem grau 3.
- O vértice da **Igreja Matriz** tem grau 2.
- O vértice da **Praça XV** tem grau 4.
- O vértice do **Mercado Público** tem grau 2.

Teorema 3.2.1 *Para todo grafo simples G , a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.*

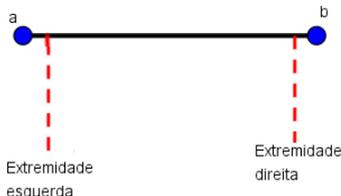
$$\sum_{v \in V(G)} gr(v) = 2 \cdot |E|, \quad (3.1)$$

onde $gr(v)$ é o grau do vértice e $|E|$, o número de arestas.

Demonstração:

Tem-se que o grau de um vértice é o número de arestas que incidem sobre o mesmo, e cada aresta incide sobre dois vértices, ao contarmos os graus dos vértices, contamos as extremidades das arestas que saem de um vértice e aquelas que chegam a outro vértice, ou seja, estamos contando a aresta duas vezes, pois ela apresenta duas extremidades. O que pode-se verificar na Figura 8.

Figura 8 – Extremidades de uma aresta



Corolário 3.2.2 *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração:

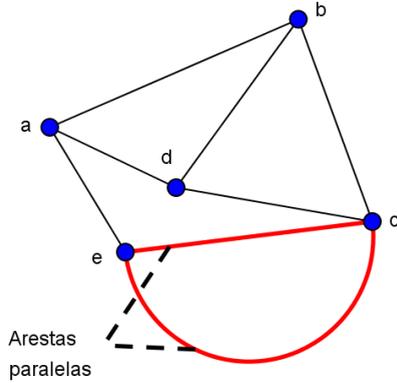
Tendo um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma seria ímpar que somando-se aos graus dos vértices de grau par, teríamos um número ímpar, o que é um absurdo. Pelo teorema 3.2.1 a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto um número par de vértices com grau ímpar.

3.3 ALGUMAS DEFINIÇÕES

3.3.1 Arestas paralelas

A aresta passa a informação de que dois vértices, u e v , são adjacentes. Nessa condição, o conjunto E pode ser definido como um conjunto de pares de vértices u e v que estão ligados se, e somente se, o par $\{u, v\}$ está em E . Em um grafo, duas arestas com os mesmos extremos são denominadas paralelas. Conforme é visto na Figura 9.

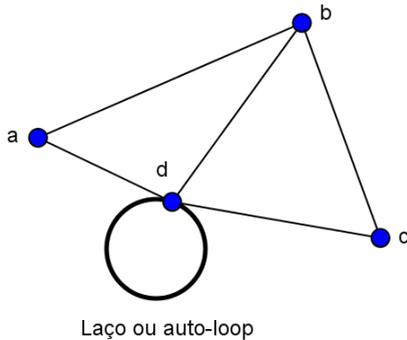
Figura 9 – Aresta paralela



3.3.2 Laço

Tem-se um laço quando uma aresta liga um vértice a ele próprio. Como pode ser visto na Figura 10.

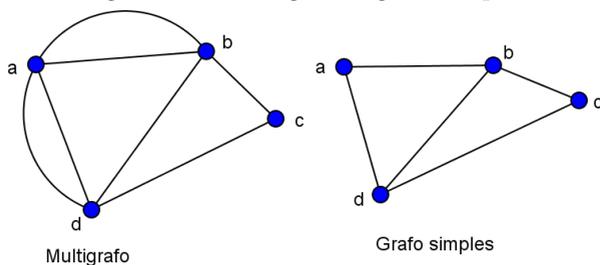
Figura 10 – Laço ou auto-loop



3.3.3 Multigrafos

Quando observada a ocorrência de arestas paralelas em um grafo, o chamamos de multigrafo. Todo grafo sem laços e arestas paralelas é um grafo simples. Vide Figura 11.

Figura 11 – Multigrafo e grafo simples



3.3.4 Isomorfismo

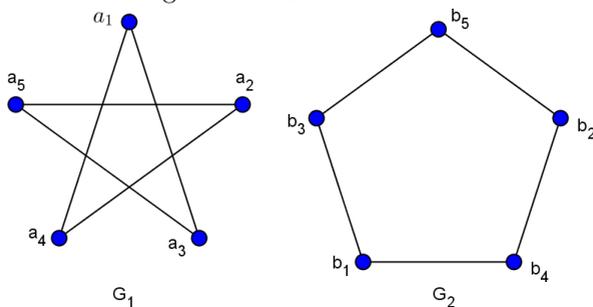
Dois grafos, G_1 e G_2 , dizem-se isomorfos se existe uma bijeção $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ preservando a adjacência de vértices, isto é, tal que o número de vezes em que (u, v) ocorre em $E(G_1)$ é igual ao ao número de vezes que $(f(u), f(v))$ ocorre em $E(G_2)$. Escreve-se $G_1 \cong G_2$ para indicar que G_1 e G_2 são isomorfos.

De acordo com a Figura 12, os grafos G_1 e G_2 são isomorfos, este isomorfismo se dá pela função:

$$f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$a_i \rightarrow b_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.2)$$

Figura 12 – Grafos isomorfos

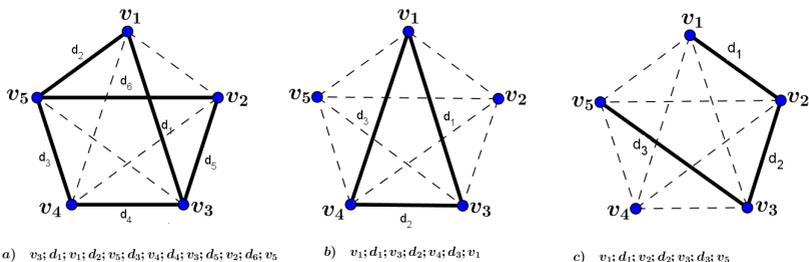


3.3.5 Grafos conexos

Informalmente, um grafo é conexo se for possível caminhar de qualquer vértice para qualquer outro vértice através de uma seqüência de arestas adjacentes.

Chama-se caminho, uma seqüência $v_0; a_1; v_1; a_2; \dots; v_{m-1}; a_m; v_m$, com $v_i \in V(G)$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ e $a_j = (v_{j-1}, v_j) \in E(G)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. O caminho é dito fechado caso $v_0 = v_m$. O caminho fechado sem repetições de vértices intermediários, pois $v_0 = v_m$ por definição, chama-se ciclo, que é considerado um grafo 2-conexo. Se $v_0 \neq v_m$ o caminho é dito aberto. Um grafo é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário é desconexo. Conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Exemplos de: a) caminho fechado b) ciclo c) caminho aberto



Definição: Seja G um grafo. Dois vértices distintos u e v de G estão conectados se, e somente se existe um caminho de u para v . Um grafo G é conexo se, e somente se dado um par qualquer de vértice u e v em G , existe um caminho de u para v . Simbolicamente temos, G é conexo \Leftrightarrow para todos os vértices u e $v \in V(G)$, existe um caminho de u para v [4].

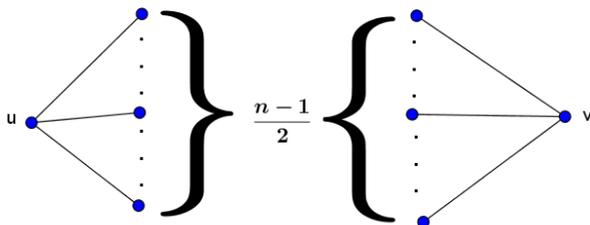
Teorema 3.3.1 *Seja G um grafo com n vértices. Se todo vértice tem grau pelo menos $(n - 1)/2$, então G é conexo.*

Demonstração:

Suponha que G não seja conexo, ou seja, existem dois vértices, u e v , que não estão conectados. Sejam $u, v \in V(G)$, logo de u partem

pelo menos $(n-1)/2$ arestas que ligam u a pelo menos $(n-1)/2$ vértices distintos e diferentes de v . O mesmo acontece para o vértice v , ou seja, de v partem pelo menos $(n-1)/2$ arestas que ligam v a pelo menos $(n-1)/2$ vértices distintos e diferentes de u , como verifica-se na Figura 14

Figura 14 – Vértices adjacentes



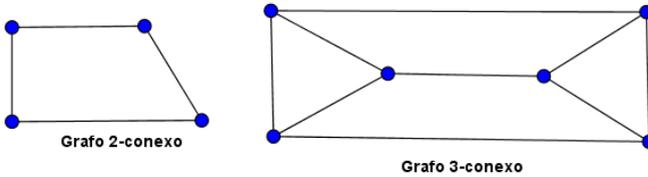
Na figura 14, tem-se um total de $((n-1)/2) + 1$ vértices no lado esquerdo e $((n-1)/2) + 1$ vértices no lado direito, totalizando $((n-1)/2) + 1 + ((n-1)/2) + 1 = n + 1$. O que é um absurdo, se esses vértices são disjuntos, pois tem-se por hipótese n vértices. Logo G é conexo.

Seja G um grafo.

- Se G é conexo, então quaisquer dois vértices distintos de G podem ser conectados por um caminho.
- Se os vértices u e v fazem parte de um ciclo de G e uma aresta é removida do ciclo, ainda assim existe um trajeto de u para v em G .
- Se G é conexo e contém um ciclo, então uma aresta do ciclo pode ser removida sem desconectar G .

Diz-se que um grafo é k -conexo se, ao retirarmos $(k-1)$ vértices (e as arestas a eles adjacentes) quaisquer do grafo, ele continua conexo. Por exemplo, temos na Figura 15 um grafo 2-conexo, pois pode-se retirar um vértice qualquer e mesmo assim o grafo continua conexo e outro 3-conexo, pois pode-se escolher 2 vértices quaisquer para retirar, e mesmo assim o grafo continuará conexo[3].

Figura 15 – Grafo 2 e 3-conexo

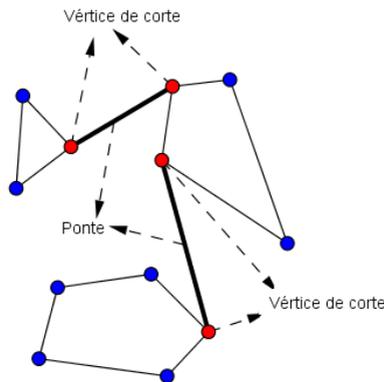


3.3.6 Componentes Conexas

Definição: Um subgrafo conexo maximal de G é chamado componente de G . Um vértice que separa dois outros vértices de componentes distintas é chamado de vértice de corte e a aresta que une estes vértices de corte são chamadas de pontes.

Conforme verifica-se na Figura 16, em qualquer grafo as pontes são as arestas que não pertencem a nenhum ciclo.

Figura 16 – Ponte



Teorema 3.3.2 Se $G(V, E)$ é um grafo tal que $gr(v) \geq 2$ (onde $gr(v)$ é o grau do vértice) para todo $v \in V$, então G contém um ciclo.

Demonstração:

Caso G tenha algum laço ou aresta múltipla, o resultado é imediato. Supondo então que G seja um grafo simples. Dado $v \in V$,

construímos um ciclo através de um processo recursivo, escolhemos um vértice qualquer, v_1 , adjacente a v e, para cada $i > 1$, escolhemos v_{i+1} , algum vértice diferente de v_{i-1} , adjacente a v_i . Temos que a existência de tais vértices é garantida, pois cada vértice pertence a no mínimo duas arestas. Como G tem um número finito de vértices, é necessário, em algum momento, escolher um vértice já escolhido antes. Se v_k é o primeiro tal vértice, então o percurso entre as duas ocorrências de v_k é um ciclo. [6].

Teorema 3.3.3 *Todo grafo G que contém um caminho de tamanho $\delta(G) = \min\{gr(v); v \in V(G)\}$, isto é, o menor grau entre os graus dos vértices de G , contém um ciclo de tamanho maior ou igual a $\delta(G) + 1$, desde que $\delta(G) > 1$.*

Demonstração:

Seja $x_0x_1\dots x_k$ o maior caminho em G . Então todos os vértices adjacentes a x_k estão no caminho $x_0x_1\dots x_k$, pois se algum adjacente a x_k não está nesse maior caminho, poderíamos continuar o caminho via esse tal vértice adjacente a x_k e teríamos um caminho maior, mas isso é uma contradição com o fato de $x_0x_1\dots x_k$ ser o maior caminho.

Suponha por exemplo que x_3, x_5 e x_7 são os vértices adjacentes a x_k (neste caso assumindo que $k > 7$), todos estão no caminho $x_0x_1\dots x_k$. Seja i o menor índice tal que x_ix_k é aresta de G , aqui no nosso exemplo $i = 3$. Considere o ciclo $x_ix_{i+1}\dots x_kx_i$, no exemplo teríamos $x_3x_4\dots x_kx_3$. Veja que os vértices adjacentes a x_k estão nesse ciclo, no exemplo temos que x_3, x_5 e x_7 estão em $x_3x_4x_5\dots x_kx_3$, logo o tamanho desse ciclo é maior ou igual ao grau de x_k mais um (depois de chegar em x_k , volta para x_i). Portanto o tamanho desse ciclo é maior ou igual ao grau (x_k) + 1, que por sua vez é maior ou igual a $\delta(G) + 1$.

Teorema 3.3.4 *Os vértices de um grafo conexo G sempre podem ser enumerados, digamos v_1, v_2, \dots, v_n , de forma que $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ (o subgrafo de G com os vértices v_1, v_2, \dots, v_i e as arestas que conectam esses vértices) é conexo para todo i .*

Demonstração:

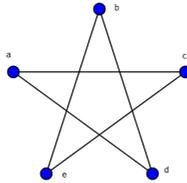
Tome um vértice v_1 qualquer em G e assuma que escolhemos por indução os vértices v_1, v_2, \dots, v_i , com $i < |G|$. Agora escolha um vértice v qualquer em $G - G_i$, onde $G_i = G[v_1, \dots, v_n]$. Como G é conexo, existe um caminho P ligando v a v_i . Seja v_{i+1} o primeiro vértice de P que não está em G_i . Então v_{i+1} é vizinho de G_i , isto é, existe um $v_k \in G_i$ e uma aresta ligando v_k a v_{i+1} . A conexidade de G_i segue por indução em i .

3.4 TIPOS ESPECIAIS DE GRAFOS

3.4.1 Grafo regular

Um grafo G é dito regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau. Em particular, se o grau dos vértices é n , G é chamado n -regular, lido como sendo regular de grau n . A Figura 17 mostra a representação de um grafo regular.

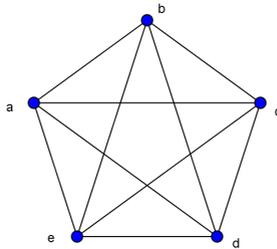
Figura 17 – Grafo 2-regular



3.4.2 Grafo completo

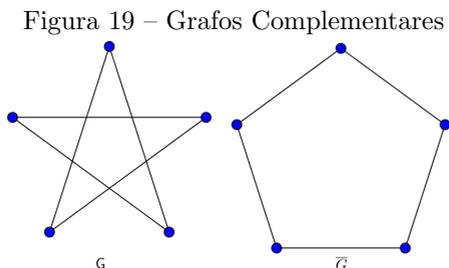
Um grafo G é denominado completo se não possui laços e existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices. Denota-se por K_n um grafo completo com n vértices e é $n - 1$ -regular, conforme pode-se verificar na Figura 18 [5].

Figura 18 – Grafo Completo K_5 , (4-regular)



3.4.3 Grafo complementar

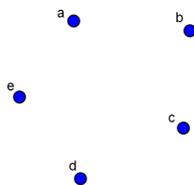
Um grafo A é um grafo complementar do grafo G e denota-se por \overline{G} quando tem-se $V(G) = V(\overline{G})$ e $E(G) \cup E(\overline{G})$ inclui todas as arestas do grafo completo K_n , isto é, da união de G com \overline{G} tem-se um grafo completo, conforme verifica-se na Figura 19 [5].



3.4.4 Grafo Nulo ou Vazio

Um grafo G é nulo ou vazio quando o conjunto de arestas $E(G)$ é vazio, como verifica-se na Figura 20.

Figura 20 – Grafo Nulo



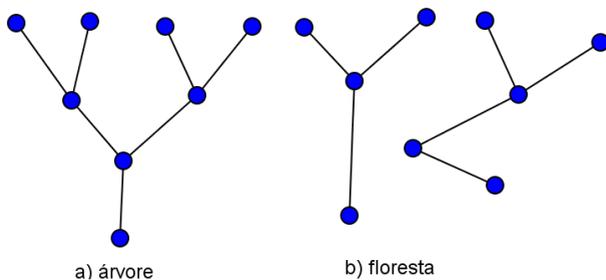
3.4.5 Árvore

Chama-se árvore um grafo conexo sem ciclos. Por não possuir ciclos, a árvore é considerada a maneira mais econômica de conectar vértices. A um grafo não conexo que não possui ciclos denomina-se floresta, ou seja, uma floresta é uma união disjunta de árvores. Pode-se observar na Figura 21 uma árvore e uma floresta [3].

Uma árvore possui as seguintes características:

- É conexo e sem ciclos;
- É conexo e tem n vértices e $n - 1$ arestas;
- Inserindo uma nova aresta e mantendo o mesmo conjunto de vértices, é possível formar um ciclo.

Figura 21 – Exemplo de: a) árvore b) floresta



3.4.6 Grafos bipartidos

Chama-se grafo bipartido o grafo em que o conjunto V de vértices pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 , $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sendo que toda aresta de G tem uma extremidade em cada um dos conjuntos V_1 e V_2 . Define-se também que Grafos bipartidos completos são grafos bipartidos em que todos os vértices de V_1 estão conectados a todos os vértices de V_2 , sua notação é $K_{p,q}$, onde p é a quantidade de elementos de V_1 e q , a quantidade de elementos de V_2 . Conforme pode ser verificado na Figura 22, tem-se um grafo bipartido e outro bipartido completo [3].

3.4.7 Grafo planar e Grafo de Kuratowski

Grafo planar é aquele que permite a representação no plano sem que as arestas se cruzem. Todo grafo que não é planar é chamado de grafo de Kuratowski, como por exemplo o da Figura 23.

Figura 22 – a) Grafo bipartido

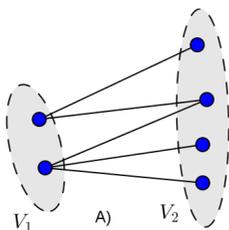
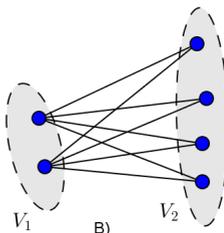
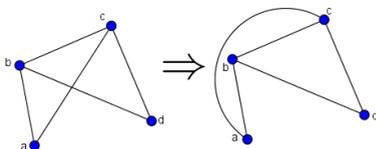
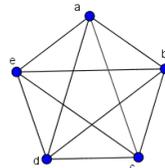
b) Grafo bipartido Completo $K_{2,4}$ 

Figura 23 – a) Grafo Planar



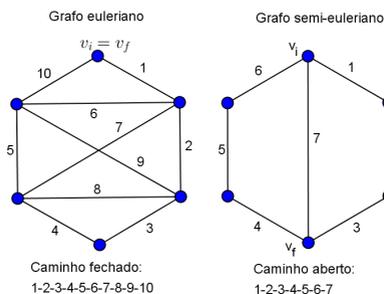
b) Grafo de Kuratowski



3.4.8 Grafo Euleriano

Diz-se que um grafo é euleriano quando este admite um caminho fechado contendo todas as arestas sem repeti-las. Caso este caminho seja aberto, $v_i \neq v_f$, diz-se que é um grafo semi-euleriano, conforme mostra a Figura 24 [6].

Figura 24 – Exemplo de grafo euleriano e semi-euleriano

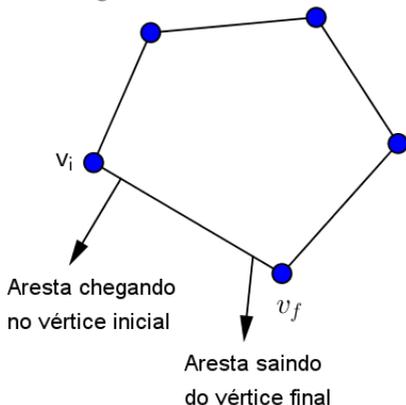


Teorema 3.4.1 (Euler, 1736) *Um grafo conexo G é euleriano se e somente se o grau de qualquer vértice de G for par.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Tem-se que G é um grafo euleriano, logo existe um caminho fechado T que inclui, sem repeti-las, todas as arestas de G . Cada vez que um vértice v aparece no trajeto, o grau de v é contabilizado de duas unidades, pois sempre que uma aresta chegar em v temos outra saindo de v , ou seja, se T passa por um vértice v , então T contribui com pelo menos duas arestas para o grau de v . Isto ocorre em todos os vértices intermediários inclusive, como pode-se observar na Figura 25, para o vértice final, pois tem uma aresta saindo deste e para o vértice inicial, que tem a mesma aresta chegando. Cada aresta aparece exatamente uma vez em T , conforme Figura 25, logo cada vértice possui grau par.

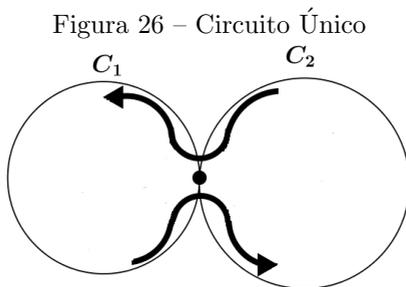
Figura 25 – Caminho T



(\Leftarrow) Supondo que todos os vértices tenham grau par e que v_i seja um vértice qualquer de G constroi-se um caminho C_1 , que não passe duas vezes pela mesma aresta, até que chegue no vértice inicial. Temos que todos os vértices possuem grau par, logo é sempre possível entrar e sair de um vértice, com exceção do vértice v_i onde o caminho termina.

Se C_1 contém todas as arestas de G , então G é um grafo euleriano. Senão, retira-se de G todas as arestas que fazem parte de C_1 , obtendo assim um grafo G' com todos os vértices de grau par e pelo menos um destes vértices pertencente ao grafo C_1 . Caso contrário, o grafo deixaria de ser conexo. Recomeçamos o mesmo processo com G' começando de um vértice comum a C_1 , obtendo assim um novo circuito C_2 . A Figura 26 mostra que dois ciclos com um vértice em

comum podem formar um único ciclo, pois ao percorrer o primeiro e chegar ao vértice comum, basta continuar o percurso no outro. Continuando este procedimento, necessariamente obteremos um circuito único em que todas as arestas de G estão contidas. Portanto G é um Grafo Euleriano[7].



Teorema 3.4.2 *Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Considerando G um grafo semi-euleriano, temos então um caminho aberto que começa no vértice v_i e termina no vértice v_f . Por ser um caminho aberto, tem-se $v_i \neq v_f$, portanto o grau deles é ímpar já que o caminho não volta por onde começou. Quanto aos vértices intermediários, estes tem grau par pois sempre existem duas arestas que incidem sobre cada um destes vértices. Logo pode-se concluir que um grafo semi-euleriano possui exatamente dois vértices de grau ímpar.

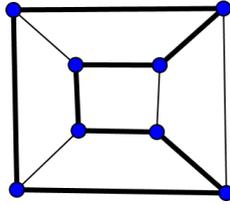
(\Leftarrow) Supondo que G é conexo e possui 2 vértices, v, w , de grau ímpar. Seja um grafo G' obtido de G pela junção de uma aresta que liga v a w . Aplicando o teorema 3.4.1 conclui-se que G' é um grafo euleriano já que todos os vértices tem grau par. Sendo assim, é possível obter um caminho fechado passando, sem repetir, por todas as arestas. Ao retirar a aresta que liga v a w obtém-se um caminho aberto que passa por todas arestas de G , logo o grafo G é semi-euleriano [8].

3.4.9 Grafo Hamiltoniano

Um grafo é Hamiltoniano se possuir um caminho que passa por cada vértice uma única vez, como verificado na Figura 27 [9].

Note-se que, nesta nova abordagem, apesar de se tratar também de procurar caminhos sobre grafos, o problema não está em percorrer todas as arestas existentes sem repetições ou com o mínimo de repetições, mas antes em escolher algumas delas para visitar todos os vértices, sem ter de repetir a visita a qualquer um deles.

Figura 27 – Grafo Hamiltoniano



Grafo hamiltoniano

4 ALGORITMO DE DIJKSTRA

O algoritmo de Dijkstra é um dos algoritmos mais eficientes para solucionar problemas de caminho mais curto, podendo somente ser aplicado para arestas cujos valores atribuídos a elas sejam não negativos. Tem ampla aplicação em redes de telefonia, elétricas, rodoviárias, de esgoto, televisão a cabo, informática, etc. Seu objetivo principal é ligar um ponto inicial s (chamado vértice inicial) a outro ponto qualquer v (vértice) de uma rede específica, da forma mais eficiente e econômica possível. O algoritmo baseia-se em um processo de rotulação dos vértices do grafo (rede) e classificação dos respectivos rótulos. A cada vértice v_i , é atribuído um rótulo $(p(v), d(v_i))$, onde $d(v)$ é a distância atual de s até v e $p(v)$ predecessor de v_i , que pode ser permanente (fixo) ou temporário. Isto é, o rótulo temporário de um vértice representa um limite superior da distância mais curta de s para esse vértice, uma vez que o caminho que lhe está associado pode ser ou não o mais curto. O algoritmo consiste em um processo de fixação dos rótulos dos vértices do grafo (rede). Começando por s , o grafo é ordenado segundo as distâncias de cada vértice a s . Em cada iteração, é escolhido um vértice v_i com rótulo temporário de menor valor $d(v)$ que se torna permanente, para depois varrer todos os vértices adjacentes a v_i (que tenham rótulos temporários), para atualização de seus rótulos. O algoritmo termina quando não existirem vértices com rótulos temporários (caminho mais curto do vértice s para todos os outros) ou quando o rótulo do último vértice passar a permanente (caminho mais curto do vértice s ao vértice final) [10].

Seja V o conjunto de vértices do grafo $G(V, E)$, R um conjunto vazio e s o vértice de partida.

Primeiro passo : Será atribuído o valor zero para o vértice inicial s e infinito ∞ para os demais vértices, ou seja,

$$\text{Para todo } v \in V - \{s\}, \text{ temos } \begin{cases} d(v) := \infty \\ d(s) = 0 \\ R := \emptyset \end{cases} .$$

A Tabela 1 demonstra o procedimento do primeiro passo.

Segundo passo : Todas as distâncias serão comparadas e o vértice de menor valor será anexado ao conjunto R , utilizando a seguinte fórmula:

Se $R \neq V$, tome $u \notin R$ tal que $d(u) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}$ e $R = R \cup \{u\}$. Caso contrário, pare.

Tabela 1 – Visualização do primeiro passo

s	y	z	w
$(s, 0)$	$(*, \infty)$	$(*, \infty)$	$(*, \infty)$

Terceiro Passo : Para todos os vértices de V adjacentes ao vértice u fixado no segundo passo, sendo que $l(u, v)$ é o peso da aresta que liga o vértice u ao vértice v , é aplicada à seguinte fórmula:

$$\text{Se } d(v) > d(u) + l(u, v) \Rightarrow d(v) := d(u) + l(u, v). \quad (4.1)$$

A Tabela 2 demonstra o procedimento do terceiro passo. Sendo a a distância do vértice inicial s até z e b a distância do vértice inicial s até w , tendo $a < b$.

Tabela 2 – Visualização do segundo e terceiro passo

s	y	z	w
$(s, 0)$	$(*, \infty)$	(s, a)	(s, b)

Quarto passo : Enquanto $R \neq V$, retorna-se ao segundo passo e se inicia um novo ciclo até que $R = V$. Neste momento, o algoritmo já calculou a menor distância do vértice inicial s a cada um dos vértices.

A Tabela 3 demonstra o procedimento do quarto passo, retornando ao segundo e fixando z . Este procedimento ocorrerá até que $R = V$.

Tabela 3 – Visualização do quarto passo

s	y	z	w
$(s, 0)$	$(*, \infty)$	(s, a)	(s, b)

4.1 CORRETEDE DO ALGORITMO DE DIJKSTRA

Afirmação: Ao fim desse processo, para cada $v \in V$, o valor final de $d(v) = \delta(v)$ é a distância mínima do vértice de partida s ao vértice v .

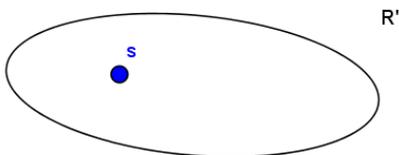
Demonstração:

Esta demonstração será feita por indução sobre o número de vértices.

Seja $|V|$ a quantidade de vértices do grafo $G(V, E)$ e $|V| = n$, n é uma quantidade finita de vértices.

- i) Se $|V| = 1$ então $V = \{s\}$. Esse caso é trivial pois s é o vértice de partida e chegada, logo $d(s) = 0 = \delta(s)$, como visto na Figura 28.

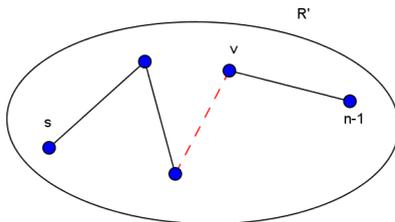
Figura 28 – Grafo com apenas um vértice



- ii) Suponha que este algoritmo funciona para $n - 1$ vértices.

É conhecido o valor da distância mínima da origem para cada um dos $n - 1$ vértices indexados ao conjunto R' , ou seja, temos $d(v) = \delta(v)$ para todo $v \in R'$, como podemos ver na Figura 29.

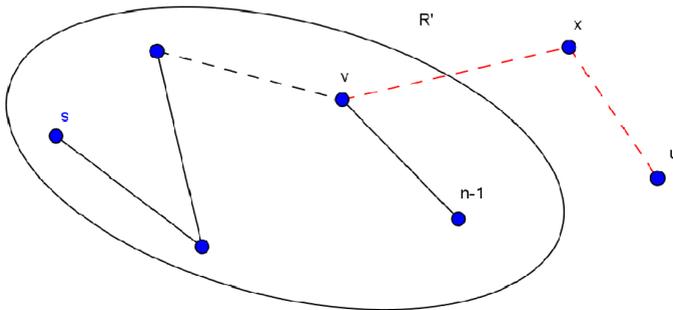
Figura 29 – Grafo com $n - 1$ vértices indexados a R'



iii) Pela Hipótese de indução, se $v \in R'$, então $d(v) = \delta(v)$ (distância mínima do vértice s a um vértice v qualquer). Deve-se mostrar que após a indexação de u ao conjunto R' , obtemos o menor caminho do vértice de origem s até u , ou seja, $d(u) = \delta(u)$. Isto significa que após inserido o vértice u ao conjunto R' temos $R = R' \cup u = V$ e $d(v) = \delta(v)$ para todo $v \in V$.

Para isto, supõe-se que existe um outro caminho, chamado Q , entre a origem s e o vértice u de tal forma que a distância deste caminho seja menor que a distância de s até u , $l(Q) < d(u)$, sendo $l(Q)$ o tamanho do caminho de s até u . Este novo caminho, Q , tem início em $s \in R'$ e em algum momento passa por um vértice $x \notin R'$. Conforme mostra a Figura 30.

Figura 30 – Grafo passando pelo caminho Q



Logo, existe um $v \in R' \cap Q$ e um $x \in Q - R'$ tal que v e x são vértices adjacentes, estão ligados por uma aresta. Desta forma tem-se,

$$l(Qv) + l(v, x) \leq l(Q). \quad (4.2)$$

Como pode ser observado na equação 4.2, a distância de s até o vértice v (um subcaminho de Q) que somado ao tamanho da aresta que liga $v \in R' \cap Q$ a $x \in Q - R'$ é menor ou igual ao tamanho do caminho Q que liga s a u passando pelo vértice x .

Pelo fato de v e x serem adjacentes, $d(v) = \delta(v) \leq l(Qv)$ e pela hipótese de indução, $d(x) \leq d(v) + l(vx)$, sendo Qv um subcaminho de Q que pertence a R' .

Sabendo que $d(v) \leq l(Qv)$ e somando $l(vx)$ em ambos os lados da

desigualdade, obtém-se:

$$d(v) + l(vx) \leq l(Qv) + l(vx). \quad (4.3)$$

Pela suposição proposta anteriormente de que existe um caminho Q ,

$$l(Q) < \delta(u). \quad (4.4)$$

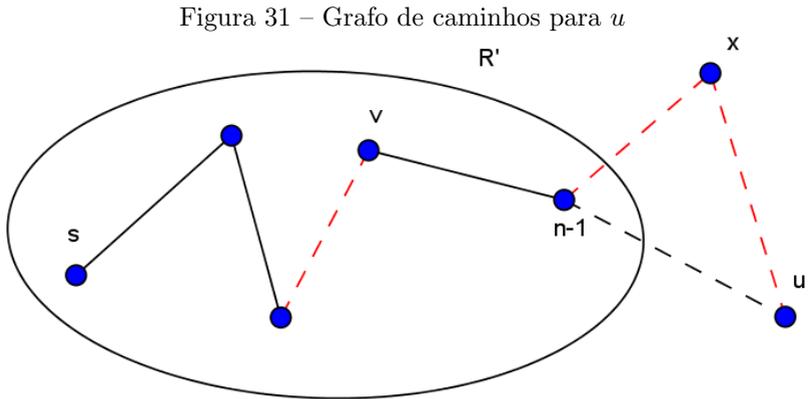
Sabendo também que:

$$d(x) + l(vx) \leq l(Qv) + l(vx) \leq l(Q), \quad (4.5)$$

Tem-se:

$$d(x) + l(vx) \leq l(Qv) + l(vx) \leq l(Q) < d(u). \quad (4.6)$$

Como pode ser observado na Figura 31.



Através do passo 2 do algoritmo de Dijkstra deduz-se que $d(u)$ é a menor distância, logo $d(u) \leq d(x)$. Com o passo 3, que atualiza a tabela, obtém-se $d(u) \leq d(x) \leq d(v) + l(vx)$:

$$d(v) + l(vx) \leq l(Qv) + l(vx) \leq l(Q) < d(u) \leq d(x) \leq d(v) + l(vx). \quad (4.7)$$

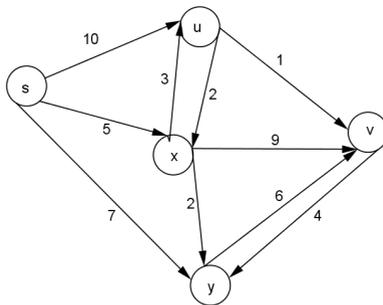
Obtendo $d(v) + l(vx) < d(v) + l(vx)$, que é um absurdo, pois uma distância não pode ser estritamente menor que ela própria. Portanto, o caminho dado pelo algoritmo de fato é o menor caminho entre s e u .

4.2 EXEMPLOS DA APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE DIJKSTRA

4.2.1 Exemplo 1

Aplicando o algoritmo de Dijkstra no grafo apresentado pela Figura 32, pode-se calcular a menor distância entre o vértice origem s e os demais vértices.

Figura 32 – Grafo ponderado



Seja o conjunto de vértices $V = \{s, u, v, x, y\}$ e G um grafo ponderado orientado, tem-se que s é o vértice inicial e sendo u e v vértices adjacentes, define-se $l(uv)$ como sendo o tamanho, ou peso, da aresta que liga o vértice u ao vértice v . Segundo o Algoritmo de Dijkstra:

Seja (G, s) :

$$\text{para todo } v \in V - \{s\}: \begin{cases} d(v) := \infty \\ d(s) = 0 \\ R := \emptyset \end{cases} .$$

O conjunto R será atualizado a cada passo do algoritmo. Enquanto $R \neq V$:

$$\forall u \notin R \text{ com } d(u) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}. \quad (4.8)$$

No primeiro momento, o algoritmo atribui o valor “zero” para o vértice s , indexando este vértice ao conjunto R , pois $R := \emptyset \cup \{s\} = \{s\}$. O próximo passo do algoritmo é que para todos os vértices de V adjacentes a s , conforme visto na equação 4.8, tem-se:

Tabela 4 – Atribuição do zero ao vértice inicial

s	u	v	x	y
(s, 0)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)

Tabela 5 – Primeira tabela de distâncias atualizada

s	u	v	x	y
(s, 0)	(s, 10)	(*, ∞)	(s, 5)	(s, 7)

$$\text{Se } d(v) > d(u) + l(uv) \Rightarrow d(v) := d(u) + l(uv). \quad (4.9)$$

Neste momento é comparado com a Tabela 4 a distância de s até u , $d(u) = 10$, de s até x , $d(x) = 5$, e de s até y , $d(y) = 7$.

(i) Se $d(u) > d(s) + l(su) \Rightarrow \infty > 0 + 10$, então $d(u) = 10$.

(ii) se $d(x) > d(s) + l(sx) \Rightarrow \infty > 0 + 5$, então $d(x) = 5$.

(iii) Se $d(y) > d(s) + l(sy) \Rightarrow \infty > 0 + 7$, então $d(y) = 7$.

Atualizando, como pode-se observar, a Tabela de distâncias 5.

Com $R \neq V$, tem-se que $x \notin R$ e $d(x) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}$, consequentemente o vértice x é indexado ao conjunto R , então $R := \{s\} \cup \{x\} = \{s, x\}$. Como é visto na Tabela 6, fixa-se o vértice de onde ele veio e a distância $d(x)$.

Utiliza-se a equação 4.8 para todos os vértices de V adjacentes ao vértice x . É calculada então a distância de s passando por x até o vértice u , tem-se $d(u) = 5 + 3$, de s passando por x até v , tem-se $d(v) = 5 + 9$ e de s passando por x até y , tem-se $d(y) = 5 + 2$.

Tabela 6 – Tabela atualizada

s	u	v	x	y
(s, 0)	(s, 10)	(*, ∞)	(s, 5)	(s, 7)

Tabela 7 – Tabela atualizada

s	u	v	x	y
(s,0)	$(x, 8)$	$(x, 14)$	(s,5)	(x,7)

Tabela 8 – Tabela atualizada

s	u	v	x	y
(s,0)	(x,8)	$(y, 13)$	(s,5)	(x,7)

Feita a comparação, obtém-se:

- (i) Se $d(u) > d(x) + l(xu) \Rightarrow 10 > 5 + 3$, então $d(u) = 8$.
- (ii) se $d(v) > d(x) + l(xv) \Rightarrow \infty > 5 + 9$, então $d(x) = 14$.
- (iii) Se $d(y) > d(x) + l(xy) \Rightarrow 7 > 5 + 2$, então $d(y) = 7$.

Sendo $R \neq V$ e $y \notin R$ com $d(y) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}$, o vértice y é indexado ao conjunto R atualizando-se os valores de $d(u)$ e $d(v)$, logo $R := \{s, x\} \cup \{y\} = \{s, x, y\}$.

Observa-se na Tabela 7, a fixação do vértice y , o vértice de onde ele veio e sua distância $d(y)$.

Repete-se o processo, ou seja, para todos os vértices de V adjacentes ao vértice y , utiliza-se a equação 4.9, neste caso é feito o cálculo da distância de s passando por y até v , $d(v) = 7 + 6$. Feita a comparação, obtém-se $d(v) > d(y) + l(yv)$ como $14 > 7 + 6 = 13$, o valor de $d(v) = 13$ da Tabela 8 é atualizado. Tem-se que $R \neq V, u \notin R$ e $d(u) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}$ então o vértice u é indexado a R , $R := \{s, x, y, u\}$. A Tabela 8 é atualizada, fixando o vértice de onde veio e a distância $d(u)$.

Aplicando o passo 3 do algoritmo obtém-se a distância do caminho iniciando em s , passando por u até v $d(v) = 8 + 1$ e de s passando por u até x $d(x) = 8 + 2$, onde é feita uma atualização, pois: $d(v) > d(u) + l(uv)$, ou seja $13 > 8 + 1$ então $d(v) = 9$, logo o valor é atualizado, $d(x) > d(u) + l(ux)$, ou seja $5 > 8 + 2$ como a inequação não é satisfeita o valor é mantido, $d(x) = 5$. Tem-se $R \neq V, v \notin R$ e $d(v) = \min\{d(v), \forall v \notin R\}$, logo o vértice v é indexado ao conjunto R e obtém-se $R = V$.

Tabela 9 – Tabela atualizando v

s	u	v	x	y
(s,0)	(x,8)	(u,9)	(s,5)	(x,7)

Observa-se na Tabela 9 a fixação do vértice v , o vértice adjacente anterior u e sua distância $d(v)$. Como temos $R = V$, todas as distâncias já foram calculadas, obtém-se assim o menor caminho para cada vértice, para isto basta pegar o vértice adjacente anterior, sucessivamente até chegar na origem s . Como pode ser visto na Tabela 9, o menor caminho para chegar ao vértice v é passando por u e para chegar neste deve-se passar por x e consequentemente deve-se antes passar por s que é o vértice inicial, obtendo-se assim o caminho $s \rightarrow x \rightarrow u \rightarrow v$ e $d(v) = \delta(V) = 9$, [3].

4.2.2 Exemplo 2

Outra aplicação do algoritmo é em tabelas que indicam as distâncias entre localidades, para isto deve-se primeiramente modelar um grafo ponderado.

Com a Tabela 10 pode-se desenhar um grafo $G(V, E)$ que represente as conexões entre as localizações s, a, b, c, d, e, f, g obtendo-se assim o menor caminho entre estas.

Para melhor visualização do grafo, tenta-se desenhá-lo de modo que

Tabela 10 – Tabela Distância entre localidades

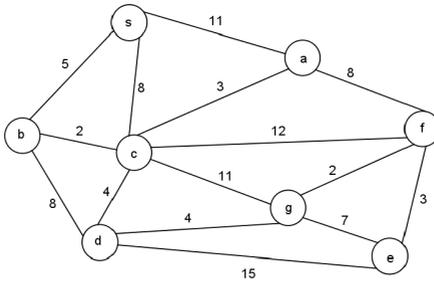
	s	a	b	c	d	e	f	g
s	0	11	5	8	–	–	–	–
a	11	0	–	3	–	–	8	–
b	5	–	0	2	8	–	–	–
c	8	3	2	0	4	–	12	11
d	–	–	8	4	0	15	–	4
e	–	–	–	–	15	0	3	7
f	–	8	–	12	–	3	0	2
g	–	–	–	11	4	7	2	0

Tabela 11 – Cálculo da distância entre as localidades

s	a	b	c	d	e	f	g
(s,0)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)
(s,0)	(s, 11)	(s,5)	(s, 8)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)
(s,0)	(s, 11)	(s,5)	(b,7)	(b, 13)	(*, ∞)	(*, ∞)	(*, ∞)
(s,0)	(c,10)	(s,5)	(b,7)	(c, 11)	(*, ∞)	(c, 19)	(c, 18)
(s,0)	(c,10)	(s,5)	(b,7)	(c,11)	(*, ∞)	(a, 18)	(c, 18)
(s,0)	(c,10)	(s,5)	(b,7)	(c,11)	(a, 26)	(a, 18)	(d,15)
(s,0)	(c,10)	(s,5)	(b,7)	(c,11)	(g, 22)	(g,17)	(d,15)
(s,0)	(c,10)	(s,5)	(b,7)	(c,11)	(f,20)	(g,17)	(d,15)

não haja interseções entre as arestas, por se tratar de mapas tem-se sempre um grafo planar, como pode ser verificado na Figura 33.

Figura 33 – Distâncias entre as localidades



Aplicando o algoritmo de Dijkstra obtém-se a Tabela 11, que indica a menor distância de cada vértice em relação a origem e também o caminho a ser seguido. Para isto, um vértice é selecionado marcando-se o vértice de onde ele veio repetidamente até chegar na origem. Para determinar o menor caminho de g até a origem, deve-se selecionar o vértice de onde ele veio, vértice d , como visto na Tabela 11 o vértice anterior a este é o vértice c , depois o vértice b e finalmente chegando a origem s . Determinando assim o menor caminho que é dado por $g \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow s$ e $d(g) = 15$.

A Tabela 11 é visualizada passo a passo através de grafos apresentados pelas Figuras de 34 a 41, [3].

Figura 34 – Grafo referente a 1ª linha da Tabela 11



Figura 35 – Grafo referente a 2ª linha da Tabela 11

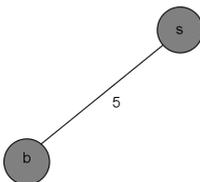


Figura 36 – Grafo referente a 3ª linha da Tabela 11

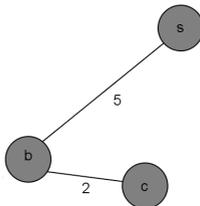


Figura 37 – Grafo referente a 4ª linha da Tabela 11

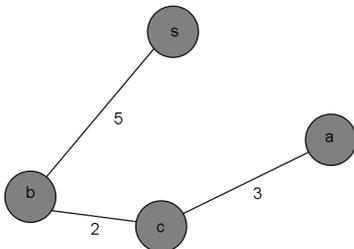


Figura 38 – Grafo referente a 5ª linha da Tabela 11

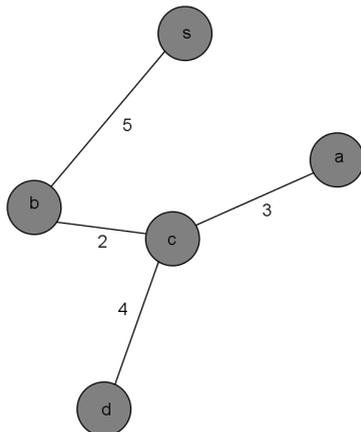


Figura 39 – Grafo referente a 6ª linha da Tabela 11

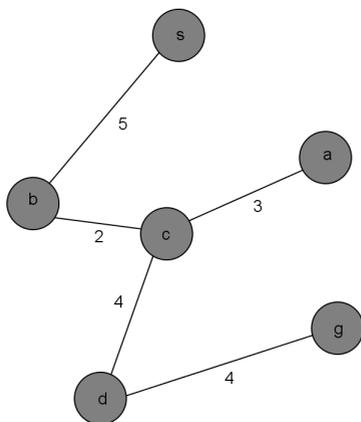


Figura 40 – Grafo referente a 7ª linha da Tabela 11

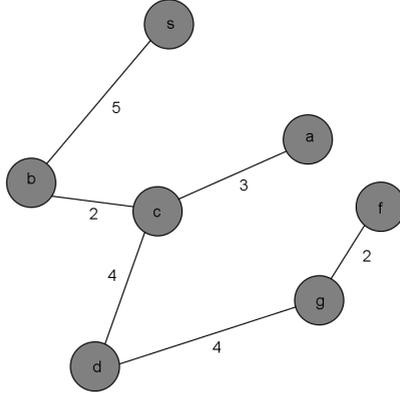
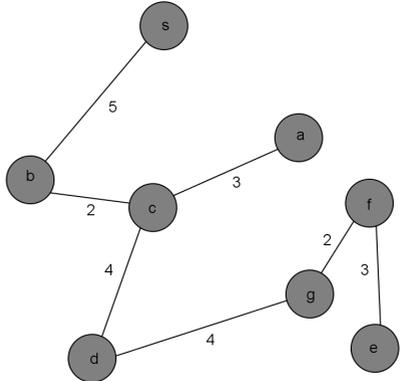


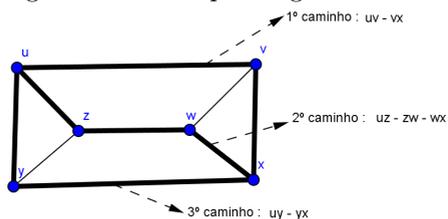
Figura 41 – Grafo referente a 8ª linha da Tabela 11



5 TEOREMA DE MENGER

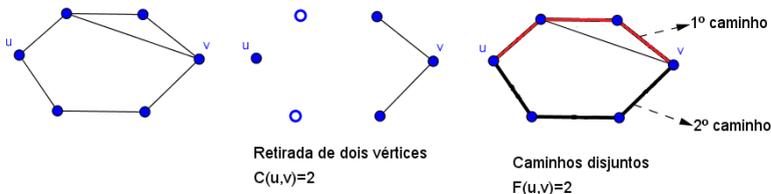
Nem sempre o suficiente é perceber se um grafo é ou não conexo, o mais importante é saber da existência de caminhos alternativos e poder quantificar esta informação, para então poder avaliar até que ponto um grafo é mais conexo que outro. Sabe-se que um grafo k -conexo continua conexo com a retirada de $k - 1$ vértices deste grafo. Desta definição observa-se de imediato, que para todo par de vértices em um determinado grafo k -conexo deve ser conectado por pelo menos k caminhos sem vértices intermediários em comum. A Figura 42 apresenta um exemplo de um grafo 3-conexo com três caminhos, do vértice u ao x , sem vértices intermediários em comum.

Figura 42 – Exemplo de grafo 3-conexo



Sejam u, v dois vértices distintos e não adjacentes de um grafo G . Define-se $C(u, v)$ como sendo a menor quantidade de vértices distintos cuja retirada desconecta u de v e $F(u, v)$, a maior quantidade de caminhos disjuntos que conectam u a v , isto é, sem vértices intermediários em comum, com exceção dos vértices u e v . Conforme pode-se verificar na Figura 43.

Figura 43 – Grafo 2-conexo



Iremos provar que $C(u, v) = F(u, v)$, que é exatamente o que diz o Teorema de Menger.

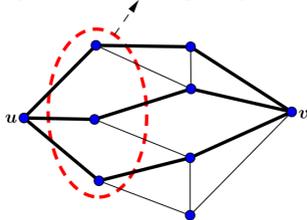
Teorema 5.0.1 (Menger, 1927) *Um grafo é k -conexo se, e somente se, todo par de vértices não adjacentes é conectado por pelo menos k caminhos sem vértices intermediários em comum.*

Demonstração:

Temos que se G é k -conexo, então k é a quantidade mínima de vértices retirados que desconecta u de v . Logo G é $C(u, v)$ -conexo e $F(u, v)$ a quantidade mínima de caminhos independentes que conectam u a v (máxima de caminhos disjuntos).

Tem-se que $C(u, v) \geq F(u, v)$, pois todo conjunto de vértices que separa u de v , tem que ter pelos menos um destes vértices para cada caminho que liga u a v . Conforme pode ser ilustrado na Figura 44.

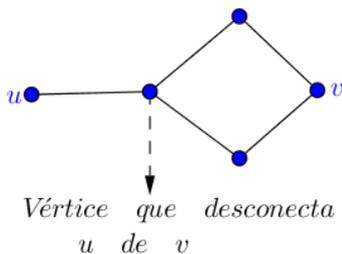
Figura 44 – Grafo 3-conexo
Conjunto de vértices que separa u de v



Provaremos agora que $C(u, v) \leq F(u, v)$. Para isto iremos usar indução sobre k , mostrando que se $C(u, v) = k$ então $F(u, v) \geq C(u, v) = k$, ou seja, se retirarmos k vértices de um grafo G que desconecte u de v , então, existe pelo menos k caminhos unindo estes dois vértices.

Para $k = 1$ é imediato, pois se temos apenas um vértice que separa u de v isto significa que existe pelo menos um caminho entre u e v . Basta verificar na Figura 45.

Figura 45 – Para $k = 1$

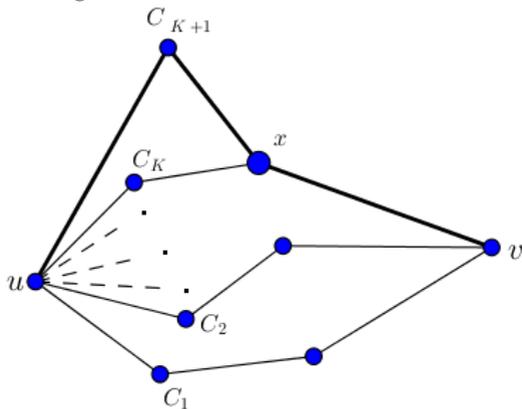


Hipótese de indução: supondo $k \geq 1$ e $C(u, v) = k$ então $F(u, v) \geq k$, ou seja, se G é k -conexo, então existe pelo menos k caminhos que separam u de v .

Vamos provar para $C(u, v) = k + 1$, isto é, devemos retirar pelo menos $k + 1$ vértices para desconectar u de v . Pela hipótese de indução temos k caminhos disjuntos C_1, C_2, \dots, C_k unindo os dois vértices. Como $C(u, v) = k + 1$ então os k vértices adjacentes ao vértice u não separam u de v , logo existe um caminho C conectando estes dois vértices cujo vértice adjacente a u é diferente de todos os outros vértices adjacentes correspondentes aos C_i 's caminhos. Como é mostrado na Figura 46.

Seja $x \in C$ o primeiro vértice depois de u que pertence a algum dos C_i 's e C_{k+1} o caminho de u até x via o caminho C , conforme é apresentado na Figura 46.

Figura 46 – Caminho C com vértice x



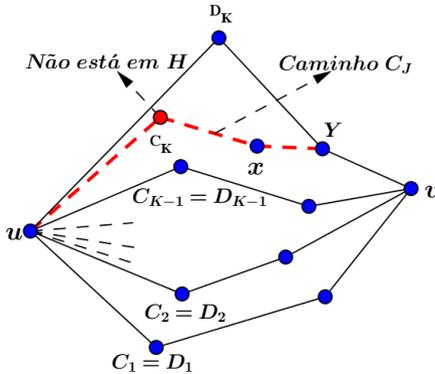
Se $x = v$, encontramos $k + 1$ caminhos disjuntos e o teorema está provado. Deve-se verificar agora para $x \neq v$.

Assumindo $x \neq v$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \notin C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ e que $x \in C_k$.

Agora como $G - \{x\}$ é k -conexo, existem k caminhos disjuntos de u a v em $G - \{x\}$. Veja que podemos escolher os caminhos D_1, D_2, \dots, D_k usando a menor quantidade possível de arestas no conjunto $E(G) - \cup_{i=1}^{k+1} E(C_i)$, i.e., menor quantidade possível de arestas fora dos caminhos $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$. Portanto $D_1 = C_1, D_2 = C_2, \dots, D_{k-1} = C_{k-1}$ e D_k disjunta de D_1, D_2, \dots, D_{k-1} com a menor quantidade possível de arestas em $E(G) - (E(C_k) \cup E(C_{k+1}))$.

Seja H o grafo unindo todos os caminhos $D_{i's}$ e o vértice x . Escolha um caminho C_j cujo primeiro vértice depois de u não está em H e y o primeiro vértice de C_j depois de u que está em H . Temos pela construção dos $C_{i's}$ que x não é um primeiro vértice depois de u no caminho C_j , por isso podemos escolher tal caminho. Veja a Figura 47.

Figura 47 – Caminho C_j



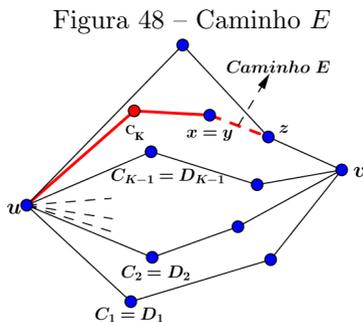
Se $y = v$, temos $k + 1$ caminhos, $D_1 = C_1, D_2 = C_2, \dots, D_{k-1} = C_{k-1}, D_k$ e C_j , logo o teorema está provado. Devemos então verificar para $y \neq v$.

Temos que y é o primeiro vértice de C_j que está em H e $x \in H$, então conclui-se que y está antes de x ou $y = x$, caso contrário y não seria o primeiro vértice.

Se $y \neq x$, então y está em algum D_t . Veja que segue da construção dos $D_i's$ que y está em D_k , e C_j é C_k ou C_{k+1} . Considere o subcaminho em D_k de u até y . Veja que esse subcaminho possui pelo menos uma aresta em $E(G) - (E(C_k) \cup E(C_{k+1}))$, i.e., fora de C_k e C_{k+1} . Por exemplo considerando a aresta wy de D_k , tem-se que wy não está em C_j , pois y é o primeiro vértice de encontro de C_j que está em H , logo $w \notin C_j$. Ao trocarmos o trecho de u até y em D_k pelo trecho de u até y em C_j e seguindo de y até v por D_k , obtém-se um caminho em $G - \{x\}$ disjunto de D_1, D_2, \dots, D_{k-1} com menos arestas em $E(G) - (E(C_k) \cup E(C_{k+1}))$ que o caminho D_k , mas isso contradiz a definição do caminho D_k . Portanto $y = x$.

Seja $y = x$ e E o menor caminho de x a v em $G - \{u\}$. Tomando z como o primeiro vértice de E pertencente a algum D_i . Considere agora, o caminho proveniente da união da parte de C_j , de u a x , seguido pelo caminho E de x a z e depois de z a v via D_i e chame-o de \tilde{E} , como

pode ser verificado na Figura 48.



Se \tilde{E} é disjunto de D_1, D_2, \dots, D_k , temos então $z = v$ e obtém-se $k + 1$ caminhos disjuntos D_1, D_2, \dots, D_k e \tilde{E} demonstrando assim o teorema, caso isto não ocorra temos $z \in D_i$, para algum $i = 1, 2, \dots, k$.

Considere agora os caminhos $E_1 = D_1, E_2 = D_2, \dots, E_k = D_k$ e E_{k+1} o subcaminho de \tilde{E} que liga o vértice u até z . Temos que a interseção destes caminhos é vazia, ou seja, $E_i \cap E_j = \phi$, se $i \neq j$, a menos de u, z e v .

Enquanto $x = y$ aplicamos o procedimento descrito acima, chegando sempre a $k + 1$ caminhos disjuntos. Tem-se que dois deles encontram-se em z , com z cada vez mais próximo de v . Logo quando z for igual a v teremos $k + 1$ caminhos distintos, provando assim o teorema.

Portanto, para $x = y$ repetimos o processo descrito acima até obtermos $k + 1$ caminhos disjuntos. Concluindo então que $C(u, v) = F(u, v)$, provando assim Teorema de Menger [11].

6 ATIVIDADES

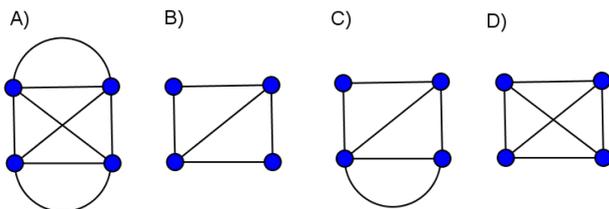
Nesta capítulo serão apresentadas algumas atividades com o objetivo de estimular o raciocínio e a criatividade do educando.

A Teoria de Grafos favorece aplicações interdisciplinares, permitindo também o trabalho com o lado lúdico, ajudando assim na motivação e interesse do aluno pelo assunto.

Atividade 1) Qual dos itens apresentados pela Figura 49 é impossível de ser feito sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez por cada linha?

Obs: Pode-se passar mais de uma vez nos vértices dos desenhos.

Figura 49 – Figuras



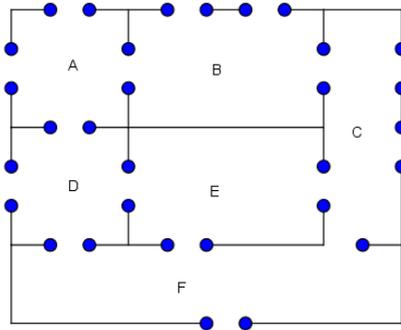
Solução: Resposta correta é a letra “D”, pois pelo Teorema 3.4.1, para obtermos um caminho com todas as arestas sem repetição, devemos ter todos os vértices de grau par. Ou pelo Teorema 3.4.2, dois vértices de grau ímpar (semi-euleriano).

Objetivo: Reconhecer um grafo Euleriano através do grau de seus vértices.

Atividade 2) (OBMEP-2009) A Figura 50 mostra a planta de uma escola que tem seis salas, indicadas pelas letras de *A* até *F*. João Vitor entrou na escola, percorreu todas as salas e foi embora, tendo passado exatamente duas vezes por uma das portas e uma única vez por cada uma das outras. A porta pela qual João Vitor passou duas vezes liga:

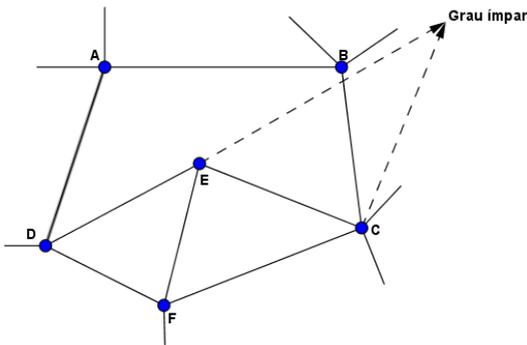
- A) as salas *A* e *B*.
- B) as salas *C* e *E*.
- C) as salas *E* e *F*.
- D) a sala *D* e o lado de fora da escola.
- E) a sala *F* e o lado de fora da escola.

Figura 50 – Mapa da escola



Solução: Resposta correta é a letra “B”. Através da modelagem do mapa da escola, obtemos um grafo semi-euleriano com dois vértices ímpares, conforme podemos verificar pela Figura 51. Conseqüentemente, iniciando em *C* e terminando em *E*. Para sair da escola é necessário voltar para a sala *C* (por este motivo a resposta correta é a letra *B*) e saindo pela última porta que resta.

Figura 51 – Grafo da Escola



Objetivo: Modelar uma situação problema e reconhecer um grafo semi-euleriano.

Atividade 3) Os estados Brasileiros podem ser representados por um grafo, em que cada vértice é um dos estados e dois estados são

adjacentes no grafo se têm uma fronteira comum. Baseado na Figura 52 construa o grafo dizendo quantos vértices e arestas possui.

Figura 52 – Mapa do Brasil



Solução: Um possível grafo seria representado pela Figura 53, com 26 vértices e 98 arestas.

Objetivo: Interdisciplinaridade estimulando o raciocínio, criatividade e a contextualização da matemática em diversas áreas. Modelando um problema e reconhecendo suas arestas e vértices.

Atividade 4) Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Desenhe um possível grafo.

Solução: Um total de 7 arestas, pois $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 2|E|$, logo $E = 7$. A Figura 54 é uma possível representação do grafo pedido.

Objetivo: Aplicação direta do Teorema 3.2.1 e modelagem de um grafo.

Figura 53 – Grafos dos Estados Brasileiros

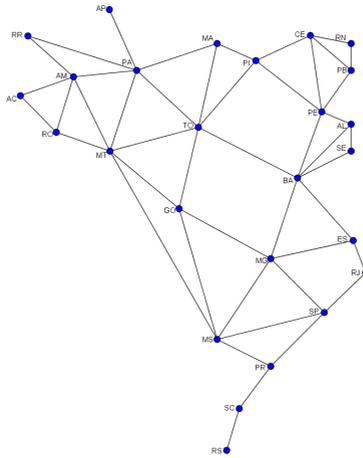
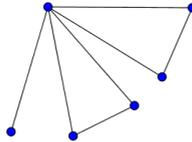


Figura 54 – Grafo da atividade 4)



Atividade 5) Verifique se existe um grafo simples com cinco vértices com os seguintes graus?

- a) 3, 3, 3, 3, 2
- b) 1, 2, 3, 4, 5

Solução: Item a) existe um grafo, pois $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$, e possui uma quantidade par de vértices de grau ímpar. Já no item b) não existe um grafo, pois $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$,

Objetivo: Aplicação direta do Teorema 3.2.1 e corolário 3.2.2.

Atividade 6) Considere um tabuleiro, visto na Tabela 12, com 3×4 quadrículas. Cada quadrícula contém um número:

O objetivo do jogo consiste em deslocar um peão desde o canto superior esquerdo até ao canto inferior direito, através de uma sequência de movimentos para a direita ou para baixo, de forma a

Tabela 12 – Tabuleiro

0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

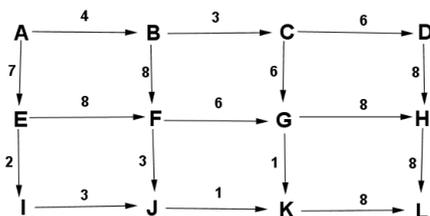
minimizar o somatório dos pontos correspondentes às quadrículas por onde passou.

A) Formule este jogo como um problema de caminho mínimo.

B) Resolva-o, usando o Algoritmo de Dijkstra.

Solução: A) A Figura 55 representa a formulação do jogo através de grafos.

Figura 55 – Jogo reformulado através de grafos



B) Utilizando permutação com repetição temos $P_5^{3,2} = 10$, logo pode-se concluir que existem 10 possíveis caminhos de A até L . Usando o Algoritmo de Dijkstra encontramos o caminho cujo somatório seja mínimo, este caminho é $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L$, totalizando 21 pontos.

Objetivo: Modelagem de um problema estimulando o raciocínio e a criatividade no educando. Aplicação do algoritmo de Dijkstra, podendo usar conhecimentos de análise combinatória para determinar quantos passos precisará executar para alcançar o resultado desejado.

Atividade 7) A Tabela 13 mostra as distâncias em Km entre as localidades P (onde está situada uma pizzaria), A, B, C, D, E, F e G . Só são indicadas distâncias nos casos em que as localidades são ligadas diretamente por uma via.

A) Desenhe um grafo que represente as conexões entre as locali-

dades (tente desenhar o grafo de modo que não haja interseções entre as arestas).

B) Encontre o menor caminho a ser seguido por um entregador de pizza para fazer uma entrega em cada uma das localidades.

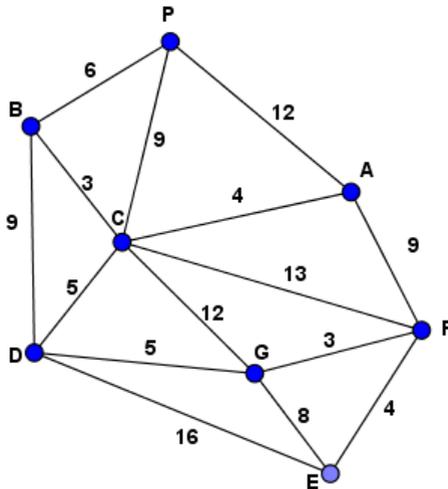
C) Verifique se o grafo é 3-conexo. Caso afirmativo, encontre 3 caminhos disjuntos de P até G .

Tabela 13 – Tabela Distância entre localidades

	P	A	B	C	D	E	F	G
P	0	12	6	9	-	-	-	-
A	12	0	-	4	-	-	9	-
B	6	-	0	3	9	-	-	-
C	9	4	3	0	5	-	13	12
D	-	-	9	5	0	16	-	5
E	-	-	-	-	16	0	4	8
F	-	9	-	13	-	4	0	3
G	-	-	-	12	5	8	3	0

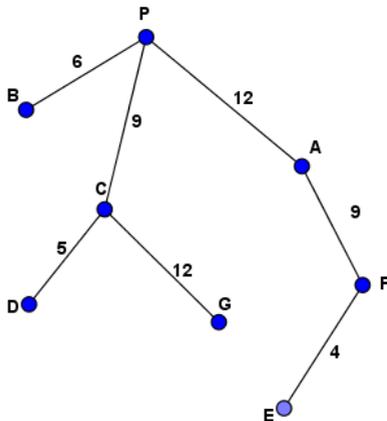
Solução: A) A Figura 56 representa um possível grafo indicando as conexões entre as localidades P, A, B, C, D, E, F, G .

Figura 56 – Grafo das localidades P, A, B, C, D, E, F, G



B) Utilizando o Algoritmo de Dijkstra encontra-se o menor caminho para cada localidade, conforme pode-se verificar na Figura 57.

Figura 57 – Menor caminho entre P, A, B, C, D, E, F, G



C) O grafo é 3-conexo, pois basta retirar os vértices A, B e C que o vértice P fica desconectado dos demais vértices. Os 3 possíveis caminhos disjuntos são $P \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G$, $P \rightarrow C \rightarrow G$ e $P \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow G$.

Objetivo: Trabalhar com a modelagem de uma situação problema, estimulando a criatividade, para que o grafo represente uma melhor visualização da situação exposta e, facilitando assim na aplicação do algoritmo de Dijkstra para a obtenção do menor caminho. Aproveitando também para aplicar o Teorema de Menger, que relaciona a quantidade mínima de vértices retirados com a existência de caminhos disjuntos.

7 CONCLUSÃO

Uma das grandes dificuldades que o professor enfrenta no Ensino Médio é o questionamento do aluno: “Pra que serve este assunto?” “Onde vai ser aplicado este conteúdo?” Lógico, o educando ainda não tem maturidade suficiente para perceber a importância do conteúdo, mas se o professor conseguir unir o conteúdo ministrado com assuntos do interesse do aluno, de seu cotidiano, tais como descobrir a melhor rota entre sua casa e a escola, qual o melhor roteiro de uma viagem observando tempo, custo e comodidade ou como funciona a *Google Maps*, tornaria o assunto mais atraente e conseqüentemente aprenderia mais.

A importância crescente de problemas relacionados com a melhor rota a escolher, manutenção de distribuição de energia elétrica, redes de telefonia, redes de computadores, que implicam em tomadas de decisões, leva a considerar a Teoria de Grafos como um importante tópico a ser introduzido no conteúdo programático do Ensino Médio. A Teoria de grafo consiste em uma ótima ferramenta para incentivar os alunos a trabalhar com modelagem matemática, ao usar grafos para modelar uma situação, há um ganho na compreensão da mesma por permitir uma visualização mais nítida da questão como também uma melhor organização das informações para resolução do problema.

Apresentamos inicialmente uma fundamentação da Teoria de Grafos, que é um assunto de fácil compreensão, para dar suporte teórico na aplicação de problemas de percurso, generalizando para estrutura abstrata de grafos conexos. Através do algoritmo de Dijkstra, o aluno descobre o melhor (no caso o menor) percurso a ser utilizado e percebe, através do Teorema de Menger, a existência de outros caminhos alternativos disjuntos. Problemas como este são uma característica marcante da Teoria de Grafos com várias aplicações no cotidiano dos alunos.

Um fato interessante é que apesar de ser uma matemática muito antiga, ela ainda oferece soluções para problemas atuais, o que incentiva o educando a querer aprender. A única diferença é que agora não nos preocupamos somente com uma solução, mas sim com um algoritmo, ou seja, uma série de procedimentos que, independente da extensão do problema, nos leve a uma solução. O que se fazia na força bruta, hoje basta programar um computador com o algoritmo apropriado para realizar o trabalho. E para termos um bom algoritmo precisamos de um bom conhecimento teórico de matemática.

que:

Os grafos são fonte imensa e inesgotável de problemas teóricos ou aplicados que apresentam, em sua grande maioria, enunciados de simples entendimento, mas que, muitas vezes, escondem uma sofisticada estrutura matemática onde precisam ser modelados visto que, vez por outra, suas soluções (nem sempre exatas) exigem difíceis métodos de procura e obtenção.

Uma argumentação para inclusão de Grafos no ensino médio está na relação da sua capacidade de relacionar conhecimentos matemáticos com questões de tecnologia. Temos então uma grande oportunidade de contribuir para que o ensino da matemática seja atrativo, contextualizado e atual.

REFERÊNCIAS

- [1] J. C. S. B. Mota. (2008) Teoria dos grafos-história. 25 de fevereiro 2017. [Online]. Disponível: http://www.academia.edu/6342431/Teoria_de_Grafos_-_Historia
- [2] J. Bria, “Conheça grafos: Interdisciplinaridade e contextualização,” *Encontro Nacional*, 2004.
- [3] S. Jurkiewicz, “Grafos uma introdução,” *Programa de Iniciação Científica da Matemática*, 2009.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th ed. Dordrecht London, NY: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [5] F. N. S. Cavalcante e S. D. Da Silva, “Grafos e suas aplicações,” Tese de Doutorado, Centro Universitário de São Paulo, 2009.
- [6] P. P. da Costa, “Teoria de grafos e suas aplicações,” Tese de Doutorado, Instituto de Geociências, 2011.
- [7] M. S. de Souza *et al.*, “Aplicação da teoria dos grafos no ensino médio à luz das contribuições do PROFMAT,” 2016.
- [8] J. Picado, “Estruturas discretas,” 2011.
- [9] C. da Silva Cardoso e F. A. de Matos, “Grafos eulerianos e aplicações em sala de aula,” 2014.
- [10] C. M. C. S. Barrico, “Uma abordagem ao problema de caminho mais curto multiobjectivo-aplicação ao problema de encaminhamento em redes integradas de comunicações,” Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra, 1998.
- [11] W. McCuaig, “A simple proof of menger’s theorem,” *Journal of Graph Theory*, vol. 8, no. 3, pp. 427–429, 1984.
- [12] S. Jurkiewicz e P. J. M. Teixeira, “Probleminhas e problemas em grafos,” *Anais da III Bienal da SBM, 001, 1, ISBN*, 2006.