o ensino da aritmética pela compreensão

Foster E. Grossnickle
Leo J. Brueckner

FUNDO DE CULTURA

R$10,00

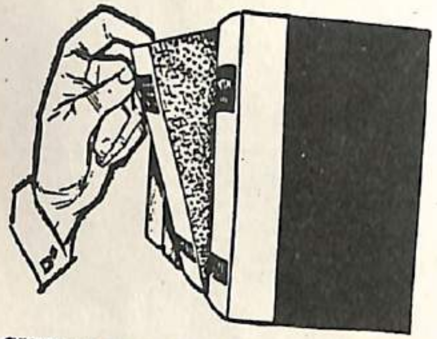
Rosália Policarpo

BIBLIOTECA

FUNDO UNIVERSAL DE CULTURA

ESTANTE DE PEDAGOGIA

BIBLIOTECA
FUNDO
UNIVERSAL
DE CULTURA



CUIDADA SELEÇÃO DE OBRAS MODERNAS E CLÁSSICAS QUE, POR SEU VALOR PERMANENTE, CONSTITUEM UM FUNDO UNIVERSAL DE CULTURA

Direção Editorial:
MÁRIO DE MOURA

ESTANTE
DE
PEDAGOGIA

EDITÔRA FUNDO DE CULTURA

O ENSINO DA ARITMÉTICA PELA COMPREENSÃO

VOLUME 1

FUNDO de CULTURA

O ENSINO DA ARITMÉTICA PELA COMPREENSÃO

FOSTER E. GROSSNICKLE
Professor de Matemática da Universidade Estadual de Jersey City, Jersey City, N. J.

LEO J. BRUECKNER
Emérito Professor de Educação, Universidade de Minnesota

EDITÔRA FUNDO DE CULTURA
BRASIL PORTUGAL

Primeira edição brasileira: dezembro de 1965
Traduzida de:
DISCOVERING MEANINGS IN ARITHMETIC
Holt, Rinehart and Winston — New York

Esta obra foi traduzida e publicada em colaboração com o Setor de Recursos Técnicos da Aliança — Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional — USAID.

PLANO DA OBRA

VOLUME 1

VOLUME 2

Tradução de

OLGA BARROCA, HELENA LOPES, RIZZA DE ARAÚJO PÔRTO,

EVANGELINA MEIRELES DE MIRANDA e REGINA ALMEIDA

Prefácio

Os professôres, atualmente, concordam em que os alunos aprendem melhor a Matemática quando compreendem e quando a Aritmética tem significação matemática para êles. Os professôres reconhecem também que os alunos apresentam resultados diversos e aprendem de maneiras diferentes. O professor de Aritmética defronta-se com dois problemas: primeiro, como selecionar, organizar e apresentar a matéria de modo que tôdas as crianças com diferentes níveis de possibilidades possam descobrir significação e compreender o trabalho; segundo, como usar os processos de ensino e auxílios audiovisuais para, efetivamente, atender às diferenças individuais. Os professôres devem levar em consideração as atividades extras, atividades de enriquecimento para tôdas as crianças e, de modo particular, para aquelas mais bem dotadas.

Os métodos a serem usados na apresentação de um tópico ou processo em Aritmética, de modo significativo para a criança, dependem de suas experiências anteriores, de sua prontidão para a nova aprendizagem e da espécie de materiais usados para favorecer a compreensão. A aprendizagem em Aritmética é um processo de crescimento. O professor deve estar atento para os diferentes caminhos seguidos pelas crianças na elaboração de conceitos quantitativos ou na aprendizagem das operações numéricas. Êste livro mostra ao professor como determinar a prontidão do aluno para o nôvo trabalho. Descreve também os processos de ensino e materiais usados para levar a criança da fase de experiências concretas aos níveis cada vez mais altos de abstração, até que ela seja capaz de manejar inteligentemente os conceitos quantitativos e os símbolos no mais alto nível de maturidade.

A fim de atender às diferenças individuais, o professor deve não sòmente variar os processos de ensino como diferenciar também a própria matéria. O *Ensino da Aritmética pela Compreensão* contém:

1) uma discussão sistematizada dos métodos de seleção e organização de um programa de Aritmética;
2) uma análise das operações numéricas a serem ensinadas, com base nas experiências anteriores da criança, a fim de garantir maior sucesso na aprendizagem;
3) uma seqüência do conteúdo de um programa de Aritmé-

tica nos diferentes níveis da escola elementar;

4) meios efetivos para diferenciação da matéria para os alunos de habilidades diferentes numa mesma classe, e

5) atividades de enriquecimento para as crianças mais bem dotadas.

Em *O Ensino da Aritmética pela Compreensão,* os Autores tentam consistentemente aplicar os resultados de pesquisas sôbre problemas básicos, com os quais se defrontam todos os professôres de Aritmética. Ao invés de entrar em detalhes, apresentam sòmente sumários concisos dos resultados e discutem as implicações deixadas. A bibliografia e as fontes de referência são fornecidas em notas ao pé da página para aquêles que desejarem consultar as fontes originais. Uma seção de cada capítulo traz questões, problemas e tópicos para dirigir a discussão das idéias principais.

Êste livro contém uma reformulação e extensão das idéias básicas apresentadas em obra anterior. Queremos agradecer as inúmeras sugestões enviadas e que foram incorporadas nesta edição. Os autores agradecem também às escolas que enviaram ilustrações para esclarecer melhor as idéias discutidas.

1

Introdução: O Programa Moderno de Aritmética

a. QUE É UM PROGRAMA MODERNO DE ARITMÉTICA

Aritmética é a ciência do número. Ela envolve regras, princípios e processos que regem o uso do número e operações com números, bem como situações quantitativas. A função primordial de um programa moderno de Aritmética é desenvolver na criança:

1) a habilidade de usar inteligentemente o número e as operações numéricas e com certa presteza;

2) a habilidade de aplicar efetivamente recursos quantitativos nas situações sociais dentro e fora da escola.

A história do crescimento e desenvolvimento da Matemática como uma ciência é tão interessante quanto dramática, pôsto que é paralela ao crescimento e desenvolvimento da civilização. Há muitos anos atrás o homem começou a contar. Principiou separando uma pedra ou vareta para representar um animal ou coisa, duas varetas ou pedras para representar duas coisas, e assim por diante. Qualquer quantidade além de três era designada como uma *pilha*. Arqueólogos descobriram que os primeiros registros de *escrita* feitos pelo homem consistiram em entalhes — marcas feitas na pedra, na árvore, ou em argila para registrar os dias que se passaram. Através do tempo, o homem lentamente foi aperfeiçoando os métodos de medir e sistemas rudes de contar. O sistema de numeração *indo-arábico* que usamos hoje sobreviveu devido à sua eficiência e tornou possível a moderna civilização. É simples, flexível, compreensível e fàcilmente adaptável às necessidades que surgem em milhares de situações.

Gradualmente o homem foi criando processos mais rápidos baseados na contagem, trabalhando com grupos. Aprendeu a combinar números pela adição e a separá-los pela subtração. Mais tarde o homem inventou a multiplicação como um método rápido de somar quantidades organizadas em grupos iguais, e a divisão como processo rápido de subtrair quantidades da mesma espécie quando os grupos são do mesmo tamanho. Aprendeu também a comparar grupos pela subtração e divisão e inventou as frações para identificar partes de coisas e grupos. Para conduzir os negócios mais eficientemente, o homem teve que inventar novas maneiras de medir as coisas e aperfeiçoar os métodos já em uso.

À proporção que o homem foi estendendo o campo de suas atividades de instrução, êle acrescentou o levantamento de plantas e a navegação ao seu cabedal de idéias matemáticas. Como resultado do comércio, viagens e conquistas houve uma fusão gradual dos conhecimentos matemáticos acumulados pelas diversas civilizações. Navegadores, astrônomos, mercadores e padres, todos êles contribuíram para a expansão das ciências matemáticas.

A Aritmética é a base de todos os ramos da Matemática. É um dos mais importantes elementos de nossa herança social. O número é o elemento básico num sistema de pensamento em constante expansão, que torna o homem capaz de proceder efetivamente com os aspectos quantitativos de seu ambiente. Sem o número, uma extensa variedade de atividades cooperativas que caracterizam a vida de hoje não poderia ser desenvolvida. Como exemplos, podemos citar: o banco, a eleição, o sistema de taxas e impostos, os seguros, e muitas outras atividades.

Sem o número, a ciência não se desenvolveria. O número pode ser chamado como "a linguagem da ciência".[1] Diz-se que "a Medicina tornou-se uma ciência quando os médicos começavam a contar". Os recentes progressos e o interêsse em tecnologia, métodos estatísticos, eletrônica e computadores automáticos evidenciam que o nível de educação em Aritmética e nos outros ramos da Matemática, bem como no campo das ciências, precisa ser melhorado. Essa situação apresenta-se como um desafio para todos os professôres de Matemática, desde o jardim da infância até mesmo depois do ginásio.

Judd[2] assinala a importância do domínio do conhecimento sôbre nosso sistema de numeração dizendo:

> O sistema de numeração desenvolvido por uma raça é um complexo de símbolos e regras de combinações. Algum esfôrço mental torna-se necessário para o domínio dêsse sistema. Por outro lado, a Aritmética é matéria de conteúdo. Que o sistema de numeração é um meio de sistematizar os fatos de experiências, de tal maneira que êles possam ser organizados com precisão, apesar de serem caóticos em sua própria qualidade e ordem de apresentação, é também uma verdade. Porque o sistema de numeração ajuda o indivíduo a organizar suas experiências, é um instrumento indispensável para tôda ciência e para o comércio, onde os fatos precisam ser tratados não de uma maneira caótica, mas de tal forma que as relações sejam definidas e claramente registradas.

[1] DANTZIG (Tobias), *Number: The Language of Science.* Nova Iorque: The Macmillan Co., 1954.

[2] JUDD (Charles), *Psychological Analysis of the Fundamentals of Arithmetic.* Chicago: University of Chicago Press, 1927, pág. 107.

b. QUAIS OS PRINCIPAIS PROBLEMAS ENCONTRADOS PELO PROFESSOR DE ARITMÉTICA?

Ao planejar um programa de Aritmética que corresponda às exigências da vida moderna, o professor encontra muitos problemas difíceis. Êsses problemas podem ser agrupados em três categorias:

1. Currículo
2. Ensino
3. Avaliação.

1. Problemas Relacionados ao Currículo

a) Que poderia ser considerado como objetivos principais do programa de Aritmética?

Tradicionalmente a Aritmética era considerada como matéria instrumental. A função principal de seu ensino era assegurar à criança domínio de habilidades de computação como instrumento a ser usado sempre que surgisse uma necessidade. Sob tais circunstâncias muito pouco era feito no sentido de desenvolver a compreensão das operações numéricas ou no sentido de mostrar como eram aplicadas na vida diária. A aprendizagem era considerada mais ou menos como um processo mecânico, e a repetição automática era o principal meio usado para assegurar o domínio do que era considerado essencial.

A concepção dos objetos de um programa moderno de Aritmética difere de muitas maneiras do ponto de vista tradicional. Reconhece-se que o conteúdo da Aritmética é parte da cultura de uma raça. A transmissão dêsse conhecimento requer ensino sistemático e, em conseqüência, precisa ser planejada cuidadosamente. Acredita-se hoje que a criança deve entender a estrutura do sistema de numeração e a maneira pela qual êle funciona quando se efetuam as operações. Para assegurar compreensão, a criança precisa aprender a computar inteligentemente, vendo significado no que realiza. É necessário também que sinta a contribuição que o número tem dado ao progresso científico e social. É preciso que a criança tenha experiências que venham possibilitar-lhe uma riqueza de recursos para perceber e funcionar com os aspectos quantitativos das situações sociais. Deve participar de atividades que tenham significação, de maneira que possa apreciar o papel das medidas na vida. Numa palavra, o programa moderno de Aritmética precisa ser realístico e funcional.

O professor de Aritmética deve também preocupar-se com as possíveis contribuições que o ensino dessa matéria pode dar à aquisição dos objetivos gerais da educação. Isto inclui o desenvolvimento de interêsses sociais desejáveis, atitudes, apreciações e tipos de comportamento básicos à nossa vida democrática. Participação real em estudos cooperativos e solução de problemas significativos que emergem da vida escolar e da comunidade concernentes à criança são a experiência mais valiosa na vida democrática.

Ao planejar o currículo de Aritmética, o professor deve ter também em mente a finalidade das experiências de aprendizagem relacionada à personalidade dos alunos, incluindo seu desenvolvimento mental, emocional e social. É importante que os alunos tenham sucesso em seu trabalho em Aritmética. Disto resultará que êles desenvolverão um interêsse perseverante e estarão sempre ávidos de continuar a estu-

Estas crianças estudam os mostradores dos relógios, fazendo experiências com material concreto.

dar Matemática quando atingirem o ginásio.

b) Como selecionar e organizar o conteúdo do currículo de Aritmética?

O currículo moderno de Aritmética inclui uma grande variedade de experiências de aprendizagem cuidadosamente selecionadas, nas quais o número funciona diretamente. É claro que quanto mais intimamente o trabalho de Aritmética fôr integrado à sua aplicação prática na vida, mais produtivas serão as experiências. Isto é especialmente verdadeiro em se tratando da escola elementar. O programa de Aritmética deve consistir de ricas, vitais, sistemáticas e bem integradas experiências, adaptadas às necessidades, interêsses, aptidões e estágio de maturidade da criança. A boa pedagogia insiste em estabelecer o ensino em têrmos de prontidão para qualquer nôvo trabalho apresentado. O professor deve empregar todo o esfôrço possível para concretizar os conceitos e operações aritméticos em situações sociais que tenham significado para a criança.

O Capítulo 3 contém, em detalhe, os aspectos importantes de um programa de Aritmética. Êstes aspectos incluem uma visão geral da Aritmética, as contribuições que ela pode dar a outras áreas do currículo, os princípios que o professor deve ter em mente ao selecionar o conteúdo do currículo, e itens relacionados com a organização e graduação do conteúdo.

2. Problemas Relacionados ao Ensino

a) Como conseguir que os processos de ensino em Aritmética sejam relacionados às atuais teorias da aprendizagem?

Tradicionalmente o ensino da Aritmética foi baseado na doutrina da *disciplina formal*. De acôrdo com essa teoria, a mente consiste em *faculdades* separadas, cada uma suscetível de treinamento. Considerava-se que, quanto mais rigorosamente fôsse treinada a *faculdade especial do número*, mais forte ela se tornava e mais larga e eficazmente seria empregada. A aprendizagem consistia em muita memorização. O professor usava muito exercício de repetição para conseguir o domínio mecânico. Comumente havia pouca consideração acêrca da utilidade do que era ensinado.

No programa moderno de Aritmética, diferente ponto de vista prevalece. A sala de aula de Aritmética é considerada como um laboratório de aprendizagem. Os processos modernos dão ênfase à importância de tornar cheio de sentido matemático e social aquilo que a criança aprende. Vamos ilustrar: matemàticamente falando, o número 0,964 é uma fração decimal, que pode ser arredondada para o mais próximo milhar. É, aproximadamente, igual à fração 24/25 e pode ser expressa como 96 por cento, mais ou menos. Significa ainda cêrca de 24 em 25. A significação social do número depende do contexto no qual é usado. Por exemplo, quando um grande admirador de basebol imagina que 0,964 representa a média de jogadas de um dos mais fortes jogadores do ano de 1957, tais perguntas poderão surgir: Quantas faltas cometeu êle por jôgo? Que representa essa média comparada às dos demais jogadores? Tal média foi mais baixa que a dos outros porque tentou êle fazer jogadas mais difíceis? É evidente que quanto mais variados forem os contextos nos quais o aluno tem contato com os números e seu uso, mais profundo será seu sentido e mais rica sua significação social.

Teorias correntes da aprendizagem dão grande importância ao princípio de se ajudar a criança a descobrir significações, fatos e desenvolver a compreensão. A aprendizagem é considerada como um processo de crescimento gradual. Acredita-se que experiências dirigidas asseguram o progresso em direção aos objetos desejados. Nem tôdas as crianças aprendem da mesma maneira ou ao mesmo tempo. Por isto, é necessário prover uma larga variedade de experiências indo das mais simples às mais complexas. Assim as crianças de diferentes habilidades poderão trabalhar no nível de abstração que possam compreender.

O Capítulo 4 contém uma discussão dos princípios de aprendizagem e ensino em que se baseiam num laboratório de aprendizagem os métodos modernos de instrução.

b) Quais os materiais necessários para que o professor possa conduzir a aula de Aritmética como um laboratório de aprendizagem?

Na escola tradicional, o ensino era feito totalmente pelos processos verbais. O professor demonstrava os processos de computação que a criança deveria aprender, e esta os memorizava. Depois copiava exemplos abstratos e nêles trabalhava na base da repetição mecânica. Quando a sala de aula é considerada como um laboratório de aprendizagem, a criança encontra problemas e experimenta com números e materiais variados. Isto a conduz à descoberta de fatos e soluções. A criança participa das experiências dirigidas de aprendizagem nas quais o número tenha função. O professor preocupa-se em tornar a sala de aula um ambiente estimulante e atrativo. Os recursos da comunidade são usados para vitalizar e enriquecer a aprendizagem na sala de aula.

No Capítulo 4 há uma discussão detalhada de como o professor pode usar uma variedade de material exploratório, visual e simbólico para tornar a Aritmética significativa e vital para as crianças.

c) Que pode ser feito para aumentar na criança a habilidade de pensar quantitativamente de maneira eficiente e aplicar processos quantitativos inteligentemente quando enfrenta situações problemáticas que surgem na vida diária?

Resolver problemas tem sido um dos principais objetivos do ensino de Aritmética. Entretanto, tradicionalmente, resolver problemas tornou-se uma forma de *exercício mecânico disfarçado* envolvendo as operações numéricas. Pedia-se à criança para ler sentenças relacionadas, contendo fatos e questões para os quais as respostas eram encontradas através de operações usando as informações dadas no *problema*. Muitas vêzes os problemas eram verdadeiros enigmas, freqüentemente fora do interêsse e experiência da criança. Conseqüentemente, o aluno achava-os difíceis de serem resolvidos. No programa moderno de Aritmética tem-se feito esfôrço para levar a criança a resolver problemas reais que surgem na vida diária. Livros-têxto mais modernos também contêm séries de problemas interessantes que são baseados em situações que surgem na vida da criança. Através dessas unidades, a informação quantitativa de significação social em tôdas as áreas do currículo lhe é transmitida. Dá-se especial ênfase também à leitura e interpretação de apresentações sistemáticas, incluindo tabelas, gráficos, cartazes, diagramas e outros materais semelhantes. Última-

Seguir uma receita para fazer pão de gengibre exige precisão nas medidas.

mente tem-se dado crescente atenção à aritmética mental pela necessidade de aplicar processos de aproximação para verificar computação feita por profissionais e computadores automáticos em lojas, armazéns e outros ramos do comércio.

O Capítulo 13 contém uma discussão de métodos já testados, que podem ser usados para desenvolver na criança o pensamento quantitativo e a habilidade de resolver problemas. O Capítulo 13 ainda salienta a importância dos métodos de estimativa e aproximação usados na verificação e computação das várias operações numéricas.

d) Como pode o professor planejar para atender às diferenças individuais em Aritmética?

Tradicionalmente ensinava-se à criança por um sistema rígido. Todos os alunos eram ensinados da mesma maneira e deviam realizar o mesmo trabalho, apesar de variarem em habilidade para a Aritmética. O conteúdo era baseado na prescrição do programa e não se fazia nenhuma provisão para atender às diferenças individuais.

Um dos mais importantes pontos revelados por modernas pesquisas educacionais diz respeito à larga variedade de diferenças em habilidade das crianças para aprender Aritmética. Enquanto algumas crianças cedo revelam marcada aptidão para o trabalho em Aritmética, outras aprendem num ritmo lento e com extrema dificuldade. O professor estará alerta para usar variados processos a fim de atender a essas diferenças. Poderá agrupar as crianças de acôrdo com suas necessidades e capacidades de aprendizagem, usando variedade de material de aprendizagem que facilitará sua compreensão e ajustando os objetivos aos níveis de habilidade. Muitos professôres cuidam também de fazer um programa de enriquecimento para estimular as crianças mais habilitadas, conseguindo alargar seu interêsse em tôdas as áreas da Aritmética. Isto é especialmente importante em vista da crescente necessidade de matemáticos competentes.

Nos capítulos que se seguem, os Autores descrevem muitos processos práticos que o professor pode usar para adaptar o ensino às diferenças individuais. O Capítulo 17 contém uma discussão especial sôbre os métodos de enriquecer o trabalho para todos os alunos, especialmente para as crianças bem dotadas.

3. Problemas Relacionados à Avaliação

a) Como deve a aprendizagem em Aritmética ser avaliada?

Os professôres usam constantemente testes, quer sejam estandardizados, quer sejam preparados por órgãos controladores do ensino, ou preparados pelos próprios professôres, a fim de determinar como estão as crianças aprendendo. Os testes medem um

resultado muito restrito, usualmente envolvendo habilidades de computação e resolução de problemas. O uso de tais testes vem levando os professôres a dar muita ênfase aos aspectos computacionais da Aritmética, negligenciando outros valôres importantes.

Nos últimos anos, a avaliação vem sendo considerada como um processo contínuo, do qual participam professôres e alunos como parte integrante da situação ensino-aprendizagem. O conceito de avaliação estendeu-se para abranger resultados mais amplos, incluindo o conhecimento do significado dos números, a estrutura do sistema de numeração, a compreensão, tanto quanto o trabalho com as operações numéricas, a habilidade em utilizar processos quantitativos e medidas em situações sociais e interêsses relacionados à Matemática. O que citamos representa alguns dos pontos que vêm recebendo relêvo nos novos testes de Aritmética. Atualmente outros variados meios são aplicados em Aritmética, incluindo sistemàticamente testes informais, observação de comportamento, entrevistas pessoais, inventário de interêsses e hábitos de trabalho, processos de avaliar produtos de trabalho criativo e para estudar as relações de grupo. O Capítulo 15 contém várias ilustrações dos métodos modernos de avaliar os resultados do ensino de Aritmética.

b) Que pode o professor fazer a fim de diagnosticar e corrigir as dificuldades de aprendizagem?

Invariàvelmente a avaliação mostra uma ampla diferença no crescimento da criança ao aprender a Aritmética. Há muitas razões que levam o aluno a fazer um progresso satisfatório. Algumas delas estão fora do contrôle do professor, tais como não-comparecimento por motivo de doença, transferências, dificuldades emocionais e sociais, defeitos físicos etc. Uma das causas mais importantes do pouco aproveitamento em Aritmética é a devida à dificuldade em ajustar o programa de ensino à capacidade e possibilidade da criança. Inevitàvelmente, quando a aprendizagem não é bem sucedida nasce o desgôsto pela matéria. É preciso evitar que as dificuldades de aprendizagem se acumulem, antes que surjam sérios problemas.

O Capítulo 16 contém muitas sugestões úteis sôbre os meios através dos quais o professor pode analisar as dificuldades dos alunos e as medidas que devem ser tomadas para corrigi-las.

C. QUAL É A NATUREZA DO COMPORTAMENTO MATEMÁTICO?

O comportamento matemático está relacionado à maneira pela qual o indivíduo usa o número e a quantidade. O problema principal do ensino de Aritmética é desenvolver no aluno a habilidade de sentir os elementos de uma situação social que o possibilite fazer uma análise quantitativa. Quando o aluno torna-se ciente dêsses aspectos, êle pode, com o auxílio do professor, aprender a usar diferentes técnicas de agrupar, encontrar diferenças, medir, avaliar, comunicar e interpretar os vários elementos envolvidos na situação. Uma linguagem matemática especial e muitos instrumentos têm sido idealizados para tais situações. A criança precisa aprender a usar a linguagem e aplicar êsses instrumentos.

Vamos ilustrar: a criancinha é fisicamente sensível às mudanças de temperatura. Usa expressões, como *frio*, *quente*, *muito quente*, para descrever suas reações ao frio e ao calor. Ela pode, casualmente, observar seus pais consultando o termômetro. Quando êles fazem algum comentário sôbre a temperatura, esta tem pouca significação para ela. Gradualmente a criança vai tomando consciência do termômetro e começa a inquirir a respeito dêle. Pode mesmo imitar seus pais, consultando-o. Mais tarde, quando o professor fala sôbre o termômetro, sua estrutura e função, com o objetivo de ensinar, o aluno está preparado pela experiência anterior para ver o sentido daquilo que está aprendendo. A criança torna-se capaz de pensar na mudança de temperatura em têrmos numéricos. Aprende a ler a escala termométrica, a expressar a temperatura em graus, a comparar a temperatura em horas diferentes, a exprimir suas idéias em têrmos mais precisos e significativos, e a interpretar expressões numéricas relacionadas à temperatura. Em outras palavras, seu comportamento torna-se cada vez mais matemático. Por fim a criança passa a apreciar a eficiência com que o termômetro funciona e o grau de precisão com que pode a temperatura ser medida.

O que é verdade sôbre a maneira de encarar a temperatura, pode-se dizer sôbre outros aspectos do ambiente que levam a criança à análise quantitativa, tais como valôres, quantidade, localização, tamanho, pêso, comprimento, área, volume, tempo, isto citando apenas os aspectos mais comuns que o homem reconhece e analisa. À criança precisa-se ensinar como aplicar os instrumentos e técnicas de medir que têm sido inventados.

Há, naturalmente, muitas qualidades e coisas que não conduzem a criança a um exame quantitativo, como a beleza, a suavidade, a côr, o gôsto. Tais aspectos podem ser descritos com palavras, mas não com números. A criança precisa aprender a diferença entre a mera descrição e as medidas.

Idéias Matemáticas Traduzem Aprendizagem em Aritmética

O comportamento matemático é também evidente no uso de números, assim como na contagem racional ou em computação.

Quando a criança menor conta um grupo de 3 blocos, um a um, e diz *3 blocos*, ela mostra ter um comportamento matemático rudimentar. Quando o aluno chega a perceber que, em nosso sistema de numeração, a idéia básica de *dezena* e valor posicional do número envolvem todos os números inteiros, pensa matemàticamente. Quando percebe que a idéia básica da *reserva* é usada em cada exemplo de adição, que damos abaixo, mas de diferentes maneiras, êle pensa matemàticamente.

(a)	(b)	(c)	(d)
27	$6\frac{1}{2}$	6,4	3 h 50 m
+ 23	$+ 7\frac{1}{2}$	+ 2,6	+ 2 h 10 m

No exemplo (a), o aluno troca 10 unidades por 1 dezena e leva a dezena para seu respectivo lugar; no exemplo (b), troca 2/2 por 1 inteiro; em (c), troca 10 décimos por 1 inteiro e leva o inteiro para o respectivo lugar; em (d), troca 60 minutos por 1 hora. O aluno pode ver que em todos os exemplos está envolvida a *reserva*, que é comum em muitos casos de adição. De maneira semelhante, poderá perceber que a *decomposição* é usada em subtração como um processo inverso, sempre que a subtração é impossível a menos que o minuendo seja mudado, como em 30 — 16; $2 - \frac{1}{2}$; ou 3,1 − 1,7. O professor deve providenciar experiências para que o aluno perceba essas e outras inter-relações, desde que são fundamentais para o pensamento matemático.

O professor deve considerar a Aritmética como um sistema unificado de idéias, conceitos e princípios que são como teias integrando o ensino de Aritmética. Por exemplo: todos os fatos fundamentais de multiplicação por 5 podem ser ensinados relacionados um ao outro, guiando-se a criança a descobrir a generalização: todos os produtos terminam em 0 e 5. Isto facilita a aprendizagem. As idéias de agrupamento e decomposição são básicas em tôdas as operações envolvendo o sistema de numeração decimal. Quando se ensina frações ordinárias e decimais como processos isolados, a criança não percebe a relação entre números como 1/8 e $0,12\frac{1}{2}$. Da mesma forma, se se ensina a criança a achar a resposta para $4 = \frac{1}{2}$ de ..., $6 = 0,5 \times$ ..., e $8 = 50\%$ de ..., como exemplos isolados ela não poderá perceber a relação entre fração ordinária, decimal e porcentagem. Quando se ensina a Aritmética como matéria estruturada, é certo que o nível de comportamento aritmético será mais elevado que quando os fatos e processos numéricos são ensinados como itens isolados.

Um alto nível de comportamento matemático é evidente quando o indivíduo reúne informação fatual de várias fontes, organiza e apresenta os dados em forma de tabelas ou gráficos. A interpretação de dados requer o uso de linguagem técnica e processos semelhantes àqueles aplicados largamente em ciências e em pesquisas. Freqüentemente, na escola elementar, o aluno precisa ler e interpretar tabelas e gráficos relacionados às várias áreas do currículo, particularmente em ciências e estudos sociais. O sucesso com que pode realizar essa leitura é a medida do seu nível de comportamento matemático. A escola precisa guiar o aluno nesta direção.

d. QUAIS SÃO OS ASPECTOS DE HIGIENE MENTAL DO PROGRAMA DE ARITMÉTICA?

O programa de Aritmética deve consistir de ricas experiências funcionais que farão nascer um interêsse genuíno no aluno e um desejo de dominar os vários elementos da matéria. A Aritmética precisa ser ensinada de maneira significativa matemática e socialmente, a fim de que a criança compreenda o que está aprendendo. O currículo deve consistir de experiências variadas adaptadas à idade, habilidades, interêsses e necessidades da criança. Esta precisa sentir o valor e a utilidade do que está aprendendo na sala de aula.

O programa moderno de Aritmética deve ser caracterizado por uma vida mais enriquecida e feliz. Deve consistir em atividades que provoquem uma aprendizagem bem sucedida. Uma vida efetiva é caracterizada pela verdadeira saúde mental. Isto implica em emoções sadias, habilidade para resolver problemas, relação satisfatória consigo mesma, com os colegas e com a sociedade. A criança precisa sentir que está pessoalmente envolvida nas atividades de aprendizagem levadas a efeito; por êsse meio alcançará o respeito próprio. Deve aprender como enfrentar e resolver problemas reais e de importância para ela, de maneira que desenvolva a confiança em si mesma e o sentimento de segurança. Deve aprender a cooperar com outros ao enfrentar necessidades pessoais e de grupo e respeitar as idéias alheias. O professor deve ser um indivíduo competente, bem ajustado, que mostre à criança que respeita suas idéias, criando uma atmosfera agradável de aprendizagem.[3]

O ambiente físico deve ser atraente, contendo variedade de material que estimule a aprendizagem.

É preciso haver um programa de orientação bem planejado com avaliação bem adequada, e um sistema de registro para assistir as crianças que estão em graus variados de desajustamento educacional: físico, social e emocional. Êste programa deve ajudar a criança a se adaptar à escola e à vida em comunidade.

[3] ROGERS (Dorothy), *Mental Higiene in Elementary Education*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1957.

Limitações dos Programas de Aritmética Atuais

Um estudo feito por Dutton,[4] sôbre a atitude que 435 estudantes de educação elementar tinham em relação à Aritmética quando estavam na escola elementar, revela claramente algumas limitações do ensino como vem sendo feito. As sete respostas desfavoráveis mais freqüentemente mencionadas são as seguintes:

Freqüência	*Razão*
1. Nunca foram ensinados os *porquês*	60
2. Ensino divorciado da vida e do uso social	54
3. Páginas de problemas	42
4. Exercício mecânico tedioso, forçado, odiado	42
5. Ensino pobre; ausência de paciência; pouca ajuda	32
6. Aritmética sempre sem interêsse; motivação pobre	26
7. Mêdo de cometer erros; não se importar com a resolução de problemas	25

Há muito o que pensar nessa lista para aquêles que estejam interessados em desenvolver uma atitude mental favorável em relação à Aritmética. Acreditamos que a Aritmética deve ser ensinada de tal maneira que o que as crianças estão aprendendo seja significativo e compreensivo para elas. Acreditamos também que as operações numéricas devam ser apreendidas em estreita relação com seu uso na vida diária e não como atividade intelectual isolada. Acreditamos que a prática para desenvolver destreza é essencial. Exercícios para o automatismo devem ser bem motivados e organizados de tal forma que o aluno adquira um sentimento de sucesso no domínio das etapas nas operações que estão sendo apresentadas. Quando surgem dificuldades, devem ser prontamente diagnosticadas e corrigidas.

diagnosticada e corrigidas

Acreditamos que o mêdo que as crianças têm de *páginas de problemas* pode ser eliminado em boa parte trocando os *problemas* do tipo quebra-cabeça, muitas vêzes usados no passado, por séries de atividades interessantes, envolvendo problemas e tópicos dentro das experiências da criança. Acreditamos que provisões especiais precisam ser feitas para atender às crianças mais capazes, organizando experiências que as estimulem a dar o melhor de seus esforços.

SUGESTÕES PARA LEITURA

"Arithmetic in General Education," *Sixteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941. Chapters 2 and 7.

Brownell, W. A. "The Revolution in Arithmetic," *The Arithmetic Teacher*, 1:1-5.

[4] DUTTON (W. H.), "Attitudes of Prospective Teachers Toward Arithmetic", *Elementary School Journal*, 52:84-90.

Buckingham, B. R. *Elementary Arithmetic, Its Meaning and Practice.* Boston: Ginn and Co., 1947. Chapters 1 and 3.

Buckingham, B. R. "Significance, Meaning and Insight—These Three," *The Mathematics Teacher,* 31:24-30.

Clark, J. R., and Eads, L. *Guiding Arithmetic Learnings.* Yonkers: World Book Co., 1954. Chapters 1 and 9.

"Educational Diagnosis," *Thirty-Fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education,* Bloomington, Ill.: Public School Publishing Co., 1935. Chapter 14.

Hogben, Lancelot. *The Wonderful World of Mathematics.* Garden City, N. Y.: Garden City Books, 1955.

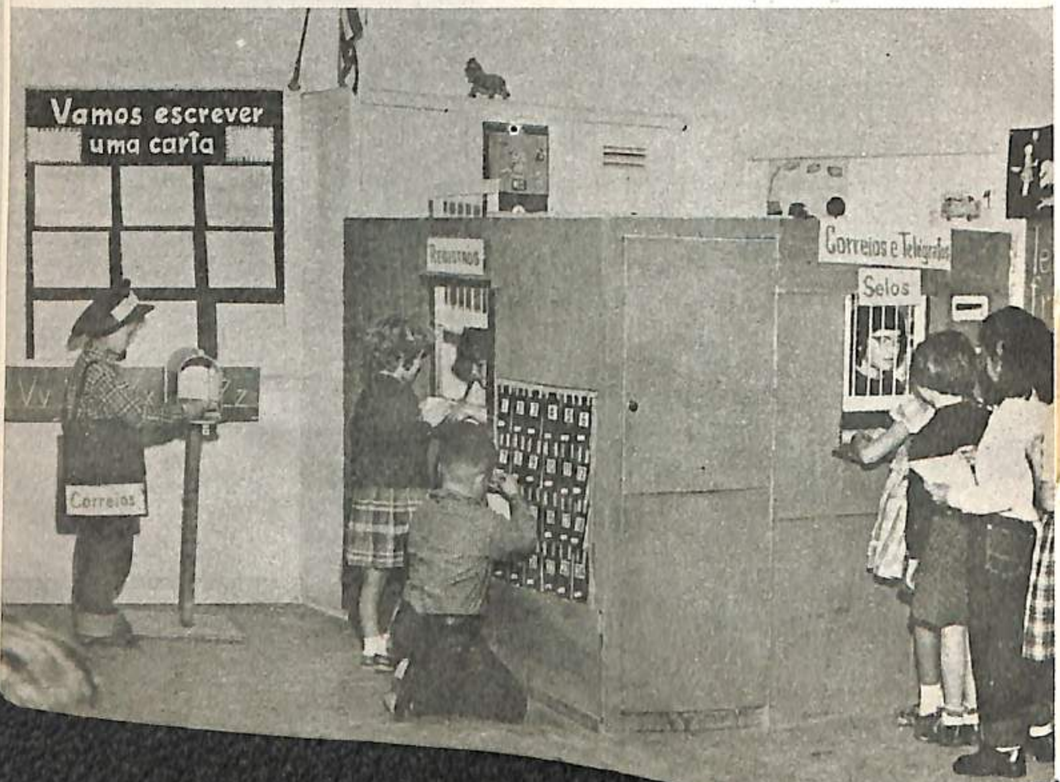
Judd, C. H. "Certain Neglected Social Institution," *Elementary School Journal,* 25:254-264.

"Mathematics in General Education," *Report of the Committee on the Function of Mathematics in General Education for the Commission on the Secondary School Curriculum,* New York: D. Appleton-Century Co., Inc., 1940. Chapters 1 and 2.

Newman, James. *The World of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, Inc., 1956.

Spencer, P. L., and Brydegaard, M. *Building Mathematical Concepts in the Elementary School.* New York: Henry Holt and Co., Inc., 1952. Chapter 2.

Quais os resultados úteis que podem ser conseguidos usando o assunto "Correios e Telégrafos"? Quais os outros assuntos que podem ter significação nesta unidade?



"The Teaching of Arithmetic," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education,* Chicago: University of Chicago Press, 1951. Chapters 2, 7, and 8.

"The Teaching of Arithmetic," *Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1935. Chapters 3 and 4.

Dantzig, Tobias. *Number, the Language of Science.* Garden City, N. Y.: Doubleday and Co., Inc., 1956.

Wheat, H. G. *How to Teach Arithmetic.* Evanston, Ill.: Row, Peterson and Co., 1951.

2

Sistema de Numeração Decimal

NOSSO SISTEMA DE NUMERAÇÃO é produto da inteligência criadora do homem. O número tal como é atualmente não existia em nosso ambiente. O homem inventou os números para auxiliá-lo a manipular quantidades. Inventou muitos sistemas de numeração, mas poucos sobreviveram à passagem do tempo. O sistema que usamos é o indo-arábico e é designado como *sistema decimal*. Os Hindus inventaram o sistema, mas foram os Árabes quem o introduziram nas civilizações ocidentais. Embora o sistema indo-arábico tivesse sido introduzido na Europa Ocidental antes do ano 1000 A.D., sòmente no comêço do século XIII um autor europeu escreveu um tratado, bem compreensivo, sôbre êsse sistema.

Êste Capítulo trata da estrutura e características de nosso sistema de numeração. Os tópicos apresentados incluem:

a. Necessidade de um processo para operar com conjuntos
b. Características essenciais do sistema de numeração
c. Como o homem descobriu a base decimal
d. Comparação dos sistemas de numeração romano e arábico
e. Uso do ábaco
f. Extensão de nosso sistema de numeração

a. NECESSIDADE DE UM PROCESSO PARA OPERAR COM CONJUNTOS

O Homem Primitivo e Suas Necessidades Quantitativas

O homem primitivo tinha necessidade de encontrar resposta para perguntas envolvendo aspectos quantitativos como: "Quanto?" "Quantos?"

A primeira pergunta envolve medida, e a segunda envolve contagem.

A história da humanidade bem em seu comêço nos mostra que o homem precisou saber quanto de alimento tinha em seu depósito ou quantos objetos possuía. Para dar uma resposta à pergunta sôbre quanto alimento tinha guardado para o inverno, êle se expressava em têrmos de *punhados, pilhas* etc. Usava pedras, seus dedos ou entalhes em madeira para designar ou representar o que possuía.

Muitos séculos de desenvolvimento foram necessários para chegarmos aos métodos que hoje usamos para responder às perguntas quanto e quantos. Uma diferença surpreendente existe entre os métodos usados pelo homem primitivo e os atualmente usados para representar quantidades. O homem primitivo não podia contar porque não existia um padrão estabelecido que êle pudesse seguir. Podia estabelecer diferença entre um e dois e talvez dois e três, mas para qualquer grupo de quatro ou mais caracterizava como sendo *monte, muitos* etc. Era um problema complexo para o homem expressar de maneira inteligente o que significa *muito*. O homem primitivo observava que um grupo de três ou quatro animais era diferente de um grupo de 30 animais; no entanto, êle designava cada grupo como *muitos*.

Na história dos primeiros tempos da humanidade encontramos o homem estabelecendo a correspondência entre um objeto e outro. Como os seixos eram convenientes para transportar e o estoque era inesgotável, um seixo era usado para representar uma das coisas que o homem possuía, como um carneiro, por exemplo.

O dono do rebanho não sabia como expressar o número de carneiros que possuía, a não ser indicando o total através de coleções de seixos que fizera. Se os seixos eram do mesmo tamanho, quanto maior a pilha, maior o número de carneiros representado. O pastor só poderia saber se todos os seus carneiros estavam juntos se estivesse um seixo para corresponder a cada carneiro. De acôrdo com Hogben, "... em algumas partes do Velho Mundo ainda encontramos pastôres que usam o processo de fazer marcas em madeira quando contam seus rebanhos".[1]

b. CARACTERÍSTICAS ESSENCIAIS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Cinco Elementos do Sistema de Numeração

Considerando a complexidade das operações, designaremos *contagem* como a primeira etapa; é a correspondência de um a um, quando lidamos com quantidades. Contagem implica essa correspondência de um a um bem como a habilidade de encontrar o total de objetos em um grupo. É necessário um sistema de numeração para que seja possível contar sistemàticamente. Para contar e registrar o que foi contado é essencial o seguinte:

1. Nome dos números.
2. Símbolos numéricos.
3. Valor dos números.
4. Ordem numérica.
5. Base numérica.

[1] HOGBEN (Lancelot), *The Wonderful World of Mathematics*, Garden City, N. I.: Garden City Books, 1955, pág. 9.

A seqüência dos cinco elementos não é necessàriamente a mesma do desenvolvimento do sistema de numeração. Do ponto de vista do ensino com compreensão dos números, a seqüência acima tem um ponto de apoio. Todos os itens mencionados foram escolhidos arbitràriamente, na formação de nosso sistema de numeração. Os nomes dos algarismos variam de uma para outra língua. Aparentemente o símbolo 1 derivou-se de um simples traço. O algarismo 2 representa uma forma modificada de dois traços horizontais. Do mesmo modo o 3 é uma modificação de três traços horizontais. Não temos certeza da derivação dos símbolos dos demais algarismos. O conhecimento da origem dos dez símbolos tem pouco valor prático, não só para o professor como para o aluno. Os dez algarismos bem como as lêtras do alfabeto são parte da cultura da raça humana.

O valor de um algarismo e sua ordem no sistema de numeração foram atribuídos arbitràriamente. O algarismo 5 representa cinco objetos. Na ordem ou seqüência, 5 é depois de 4 e antes de 6. O valor e a seqüência dos algarismos devem ser estabelecidos para que tenhamos um sistema de numeração. Uma vez que o valor e a ordem do algarismo sejam estabelecidos, não poderá haver exceção dêsses elementos determinados se é para funcionar um sistema de numeração.

A *base* de um sistema de numeração é o número de unidades necessário que agrupadas têm o valor igual a uma unidade da ordem imediatamente superior. No sistema que usamos o valor de uma casa à esquerda é igual a dez unidades da direita, desde que a base de nosso sistema é 10. A base é igual ao número de algarismos diferentes usados no sistema de numeração. São 10 os algarismos no nosso sistema de numeração. É quase certo que o 10 foi usado porque temos 10 dedos nas duas mãos. Qualquer número, exceto o 1, pode ser usado como número-base.

Há fortes razões para se acreditar que as bases 8 ou 12 seriam preferíveis à base 10. Se nosso sistema fôsse *duodecimal* (12), as operações com frações seriam mais fáceis que agora, porque 12 tem mais fatôres que 10. Excluindo-se êle próprio e 1, os únicos fatôres de 10 são 2 e 5, enquanto os fatôres de 12 são 2, 3, 4 e 6. Se fôsse 8 a base do nosso sistema, seria fácil transformar um número para uma *base binária* ou base 2.

Quase todos os computadores eletrônicos usam números expressos na base 2. Um dos símbolos corresponde ou a circuito aberto ou a circuito fechado no computador. Para que um número possa ser representado em tipos de computadores iguais ao descrito, o número da base decimal deve ser transformado para um número equivalente na base 2. Na base 2, os únicos algarismos são 1 e 0. Os quatro primeiros números na base 2 são 1, 10, 11 e 100. Seguindo essa regra, o oitavo número na série é 1 000. Há oito algarismos na base 8, por conseguinte, 8 no nosso sistema decimal é igual a 10 na base 8 e 1 000 na base 2.

O número de algarismos diferentes necessário no sistema de numeração depende de duas coisas: (1) a base do sistema, (2) o uso do valor relativo do lugar no sistema. Nosso sistema usa o *valor relativo*. Isto significa que o valor do algarismo depende de sua posição no número. O sistema romano de numeração não tem valor relativo como nós usamos o têrmo em nosso sistema de numeração. Por essa razão não há necessidade de um número constante de símbolos no sistema de numeração romano, como acontece no nosso sistema. Compararemos os dois sistemas mais adiante, neste Capítulo.

Características de Nosso Sistema de Numeração

As características de nosso sistema de numeração podem ser resumidas como se segue:

1) A base do sistema de numeração é 10.

2) Os dez algarismos usados no nosso sistema de numeração são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

3) Cada casa em um número tem um valor ou uma base 10. O algarismo mostra a freqüência da base. Assim, no número 203 o 2 mostra o número de centenas na casa das centenas; o zero (0), o número de dezenas na casa das dezenas; e o 3, o número de unidades na casa das unidades.

4) Movendo-se um algarismo para a esquerda, multiplicaríamos seu valor por uma potência de 10. A potência é correspondente ao número de casas que movemos o algarismo. Assim, o valor do 3 em 314 é cem vêzes o valor do 3 em 43. O 3 no número 314 está duas casas para mais para a esquerda que o 3 no número 43; conseqüentemente, o primeiro 3 tem um valor cem vêzes ou $(10)^2$ do valor do segundo 3. O número 314 é igual a $3\ (10)^2 + 1\ (10)^1 + 4\ (10)^0$.

5) Desde que movendo-se um algarismo para a esquerda de um número multiplica-se o valor do algarismo por uma potência de 10, movendo-se o algarismo para a direita divide-se o seu valor por uma potência de 10. A potência é igual ao número de casas movidas. Assim, o valor do 2 em 12 é 0,001 do valor do 2 em 2 140.

6) Cada algarismo em um número inteiro tem dupla função. Êle ocupa a casa e mostra a freqüência da base. Algumas vêzes o zero tem sòmente a função de ocupar a casa, para expressar uma medida. Se declaramos que a distância do Sol é 150 000 000 de quilômetros, os zeros no número estão apenas ocupando as casas. O valor exato das casas ocupadas pelos zeros não é conhecido. Assim, os zeros simplesmente preenchem êsses lugares vagos. Esta é a razão por que os

zeros são chamados constantemente de preenchedores de casas. O zero também mostra a freqüência da base, do mesmo modo que os outros nove algarismos do nosso sistema de numeração. No número 203 o zero mostra que não há dezenas na casa das dezenas.

c. COMO O HOMEM DESCOBRIU A BASE DECIMAL

Desenvolvimento de Um Sistema de Numeração

Freqüentemente os alunos de Aritmética não conseguem compreender os problemas encontrados no desenvolvimento do sistema de numeração. Nosso sistema de numeração é parte de nossa cultura. Como no caso de qualquer outra instituição que faz parte de nossa cultura, o sistema de numeração representa herança de séculos, tendo sofrido modificações e mudanças. O sistema de numeração não foi criação de nenhum gênio na história de nossa cultura. A Bíblia apresenta uma descrição gráfica de como Moisés recebeu os *Dez Mandamentos* no Monte Sinai. O sistema de numeração não começou sua existência dessa maneira mística. O sistema de numeração representa uma evolução do pensamento do homem lidando com quantidades. Usando os números o homem aprendeu a dar sentido à palavra *muitos*.

Uma Viagem Através dos Séculos

Vamos imaginar um giro cósmico que nos projetará nos tempos primitivos. Vamos fazer uma volta ao passado e ver como os métodos de trabalhar com quantidades foram criados. Vamos considerar o homem primitivo e imaginar como lutou para resolver o problema de como encontrar *quantos objetos no grupo?*

A primeira e a mais fácil etapa no desenvolvimento do número foi a correspondência de um a um. A etapa seguinte foi tentar dar um valor ao número de diferentes seixos que correspondesse ao que possuíam ou outros objetos representados. Nosso homem primitivo deve ter aprendido a diferenciar os seixos, tendo um seixo particular para representar um determinado carneiro ou rebanho. É claro que êsse plano não era satisfatório porque êle podia fàcilmente se esquecer que seixo correspondia a determinado carneiro. O problema que o homem primitivo encontrou é o mesmo que encontraríamos se tentássemos encontrar o número de objetos num grupo sem contar ou estimar êsse número.

O plano de dar uma identidade particular a um objeto, como um nome, ou um seixo de diferente tamanho ou côr, diferentes de outros objetos, não é um processo efetivo para determinar o número de objetos em um grupo. O homem primitivo não teve muita dificuldade na contagem de grupos pequenos. Êle usava os dedos para marcar quando o grupo não tinha mais que dez objetos. Quando o número de objetos era maior que 10, o problema tornava-se mais difícil de ser resolvido. Os dedos constituíram a primeira máquina de calcular. Era possível contar ou marcar dez objetos para formar um grupo, mas surgia um problema complexo quando tinha que lidar com mais de dez objetos. O homem primitivo podia contar até 10 e repetir o mesmo processo muitas vêzes formando grupos de 10. Infelizmente podia-se esquecer quantos grupos de 10 tinha formado. Assim, não havia nenhum caminho para êle descobrir o número de objetos, exceto recontando os objetos.

Dois Planos de Ação

Nossos homens primitivos tiveram que criar alguns processos para lidar com grupos de mais de dez coisas. É provável que tenha seguido um dos dois processos, ou usou um símbolo diferente para representar um número maior que 10, ou êle poderia colocar o segundo grupo em posição diferente do primeiro grupo, indicando, dessa maneira, o valor do nôvo grupo. Cada um dêsses planos apresentou dificuldades.

Um processo lógico seria ter um símbolo diferente para representar um grupo maior que 10. Se um seixo pequeno representa uma unidade, um seixo maior poderia representar 10 dessas unidades. Da mesma maneira um seixo maior poderia representar 10 do segundo grupo de seixos. Êsse plano poderia ser usado para representar grupos formados de diferentes potências de 10. Contudo, a desvantagem dêsse plano é clara desde que não haja relação entre os tamanhos dos seixos que indicavam os valôres representados. No caso, se nosso homem primitivo se esquecia do valor representado por um seixo de um tamanho dado, não tinha outro caminho para descobrir seu valor exceto comparando seu tamanho com outros seixos de tamanho desigual. A um sistema de numeração formado dessa maneira faltam unidade e coerência, que são características de nosso sistema de numeração.

d. COMPARAÇÃO DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO ROMANO E ARÁBICO

Como os Romanos Operavam com Grupos

Os Romanos usavam o método de introduzir um nôvo algarismo para base de ordem superior. Os numerais ao lado são os mais conhecidos no sistema romano de numeração.

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1 000

Quando surge um grupo maior deve ser introduzido um nôvo símbolo para representar o valor dêsse grupo. Não há relação entre o símbolo usado para representar um grupo menor e o próximo grupo de uma ordem imediatamente superior. Assim, não há relação definida entre V e X, X e L, L e C, C e D, ou D e M. Se uma pessoa esquece o número que precede um nôvo símbolo, como C, não há nenhum caminho para encontrar êsse número baseando-se no número dado.

Mesmo no século XX são usados algarismos romanos. Qual é a data escrita neste marco?

Irwin[2] explicou, da seguinte maneira, o uso dos símbolos romanos como um esquema de traços para representar números:

Pode-se ver que os antigos Romanos usavam traços para registrar os votos em épocas de eleição. Era um arranjo feito de 5 em 5. Traços verticais eram feitos para os quatro primeiros votos e uma diagonal através dos 4 traços marcava o 5. Os romanos usavam diagonal em cruz para 10 traços. Para registrar o resultado da contagem cada 10 era representado por um X; um cinco adicional apareceria como um V; cada traço adicional menor que 5 aparecia como I.

Números Romanos

Traços	/	//	///	////	~~////~~
Numero	I	II	III	IIII	V
	~~////~~/	~~////~~//	~~////~~///	~~////~~////	~~////~~~~////~~
	VI	VII	VIII	VIIII	X

Na linha desenhada você pode ver porque êles representavam V por 5.

[2] IRWIN (Keith G.), *The Romance of Writing*. Nova Iorque: The Viking Press, Inc., 1956, págs. 136-37.

Para os números maiores, no processo de contar de 5 em 5, os Romanos usaram alguns símbolos etruscos que haviam sido omitidos através do desenvolvimento do alfabeto latino. Êles foram usados para 50, 100 e 1 000. A idéia era provàvelmente muito boa. Mas, essas figuras particulares não tendo sido usadas como lêtra, desenvolveram-se de diferentes formas. Finalmente o velho sinal para 50 foi deliberadamente firmado no L, enquanto que para 100 fixou-se o C e para 1 000 o M. Nos dois últimos casos as lêtras eram bem apropriadas. A palavra latina para 100 é *centum*, começando com C; e para 1 000 é *mille*, começando com M. O uso romano do D para 500 foi explicado como um corte na metade do velho símbolo para 1 000 e utilizaram a metade à direita, que tem muita semelhança com D, como o símbolo para a metade de 1 000. Incidentalmente o uso de IV para 4 e IX para 9 não começou no tempo dos Romanos, mas mil anos depois.

O sistema de numeração romano não teve sucesso devido ao uso de novos símbolos para representar quantidades diferentes. Seria impraticável representar números grandes usando novos símbolos. Exceto para um uso limitado, como ocorre nas datas, nas pedras fundamentais de edifícios e monumentos, para numerar capítulos ou para marcar as horas em alguns relógios, êsse sistema de numeração é raramente usado. Tal sistema tornou-se antiquado porque faltam-lhe as características essenciais de um sistema de numeração que tem por finalidade operar com quantidades numéricas. O primeiro plano, introduzindo um nôvo símbolo para representar, sucessivamente, grupos maiores de potência de 10, não é satisfatório para construção de um sistema de numeração.

Uma Diferente Maneira de Operar com Grupos

Uma maneira diferente de resolver os problemas com grupos é convencionar uma nova posição para um símbolo. O homem primitivo podia usar dez seixos para representar um grupo de dez coisas. Êle tomaria um dos seixos e o colocaria numa posição diferente. Poderia colocar o seixo numa pilha à esquerda ou à direita da pilha original. Um seixo nessa nova posição podia representar 10 dos seixos da pilha original. Da mesma maneira o processo poderá ser repetido até que a segunda pilha tenha, também, 10 seixos. Agora um dêsses seixos podia ser colocado em outra posição representando a pilha de 10 dezenas. Desta maneira, um seixo removido duas vêzes da pilha original será igual a 100 seixos nessa pilha.

Conant[3] descreveu como êsse método foi usado em Madagáscar para encontrar o número de soldados no exército. Cada soldado

[3] CONANT (L. L.), "Couting", *The World of Mathematics*, 1:436. Nova Iorque: Simon and Schuster, Inc., 1956.

entrava em um corredor e caminhava até o chefe. Quando o soldado passava, colocava-se um seixo no chão. Tão logo 10 seixos fôssem colocados no chão eram recolhidos, e um dêles colocado em um lugar próximo. Êsse processo se repetia até que a segunda pilha contivesse 10 seixos. Assim, escolhia-se um terceiro lugar para a formação de nova pilha. Tal plano foi seguido até que se contasse todos os soldados do exército.

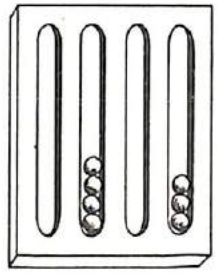
O segundo plano tinha uma vantagem sôbre o primeiro plano descrito. De acôrdo com o segundo plano, não havia necessidade de uma variedade de seixos de diferentes tamanhos. Todos os seixos eram, aproximadamente, do mesmo tamanho, mas seu valor dependia da posição que ocupava. Contudo, êste era o principal defeito do processo. Não havia meios para identificar o valor da posição representada por um seixo, a menos que a pessoa que usasse o método tivesse certeza de memorizar duas coisas sôbre o seixo. A primeira seria lembrar-se de que pilha tirara o seixo, e a segunda, o valor do seixo nessa pilha. Não havia características que identificassem um seixo para indicar seu valor. O homem primitivo deve ter descoberto, no mínimo, duas diferentes maneiras de operar com grupos maiores que 10. Certamente, em cada caso, certas dificuldades específicas tornaram impossível construir um sistema de numeração autônomo.

e. USO DO ÁBACO

Um Ábaco Para Preencher um Lugar

De acôrdo com o segundo plano descrito, o valor de um seixo dependerá da posição do grupo ou pilha do qual êle fazia parte. Êsse plano para organizar um sistema de numeração foi pouco eficiente porque não havia uma maneira para identificar o valor do lugar ocupado pela pilha ou seixo. Uma vez determinado o valor da posição pelo arranjo dos grupos, seria fácil identificar o valor dos seixos nesse grupo. Se uma pilha representava centenas contendo três seixos, o valor dêsses seixos era 300. Contudo, para se ter um plano funcional era necessário estabelecer o valor do grupo dado.

A invenção do *ábaco* tornou possível designar um valor fixo para um grupo de seixos. A *tábua de contar* foi o precursor do ábaco. A tábua de contar consistia, em geral, em um pouco de areia, marcada com encaixes ou sulcos que correspondiam, no número, às casas. O princípio da tábua de contar pode ser representado fazendo encaixes na madeira e assinalando os valôres dêsses encaixes como o desenho que se segue. Seixos ou qualquer outro material podem ser colocados nos encaixes para representar, em um número, o algarismo em determinada casa. A tábua de contar desenhada mostra o número 403. Os quatro seixos no lu-



gar das centenas representam 400. Os três seixos no lugar das unidades representam 3 unidades. Não há seixos no lugar das dezenas porque não há dezenas representadas no número 403. Um encaixe estaria com excesso de seixos se colocássemos mais que 9 seixos. Assim, se houver 13 seixos na casa das unidades, êsses seixos deverão ser reagrupados para representar 1 dezena e 3 unidades.

O ábaco opera com os mesmos princípios descritos. Os contadores no ábaco são contas livres que podem deslizar nos fios de arame ou aço. Um ábaco pode ser feito prendendo-se alguns fios paralelos numa armação de madeira. Se o fio contém mais que 9 contas, o fio está com excesso de contas porque 9 é o maior número possível que se pode representar em qualquer casa em um número.

Os povos mais antigos usavam uma tábua de calcular ou um ábaco. Esta invenção tornou possível a realização de muitos cálculos que não podiam ser feitos sem êste auxílio mecânico. Era impossível multiplicar com os números romanos, mas a multiplicação tornou-se possível pelo uso da tábua de contar. O produto poderia ser anotado no sistema romano de numeração, mas o cálculo teria que ser feito na tábua de contar pela adição repetida.

O ábaco possibilitou ao homem usar os números de maneira sistemática. Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 podiam ser representados por contas em um fio. Grupos de contas ou outro material simbolizavam os nove algarismos. Cada fio correspondia a uma casa, prèviamente designada, em um número. Dêsse modo foi possível representar qualquer número de cinco algarismos, da base 10, num contador contendo cinco fios, tendo em cada fio até nove contas.

Embora o ábaco tenha contribuído para que o homem aumentasse de muito sua capacidade em usar os números, essa mesma invenção impediu, mais tarde, o progresso. É uma afirmação muito certa a de que o zero teria sido inventado muitos séculos antes se o homem não tivesse inventado o ábaco. A necessidade é a mãe das invenções. O zero não foi uma necessidade enquanto foi possível usar o ábaco.

A necessidade é a mãe das invenções

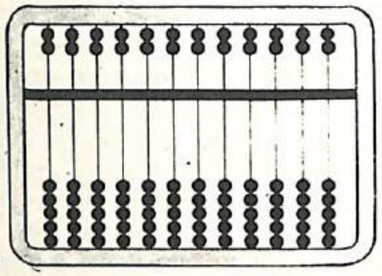
Não é possível ter um sistema autônomo de numeração quando um material suplementar tem que ser usado para representar determinado número. Um sistema de numeração completo deve ser autônomo e o seu uso não deve depender de nenhum auxílio, como o ábaco. No ábaco foi possível identificar o valor das diferentes posições do algarismo no número. O sistema de numeração não será completo se tais valôres não puderem ser determinados dentro de sua própria estrutura.

O homem levou muitos séculos para dar um passo definido desde um sistema de numeração que funcionava quando suplementado por auxílios mecânicos, como o ábaco, até chegar a um sistema autônomo. Teve que inventar o zero a fim de ter um sistema de numeração completo. A invenção ou descoberta do zero foi um grande passo dado pela reflexão intelectual. De acôrdo com Dantzig,[4] "Na história do desenvolvimento da cultura, o zero destacou-se como uma das maiores realizações da raça humana."

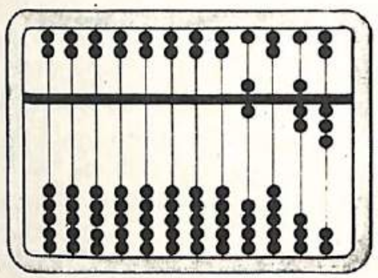
O Antigo Ábaco

O ábaco desempenhou um papel importante na história dos números porque eram imperfeitos os sistemas de numeração, devido à falta de material para escrever e realizar as operações, bem como o conhecimento limitado de como realizar as operações com números. O ábaco apareceu seis séculos antes de Cristo. Os povos antigos, como os Gregos, Romanos, Egípcios, Russos, Japonêses e Chineses usaram o ábaco.

Muitos ábacos de formas diferentes foram usados entre os diferentes povos. O desenho que se segue mostra o ábaco que foi usado pelos Chineses durante muitos séculos. Consiste em contas dispostas em fios verticais, dentro de uma moldura de madeira. Uma barra horizontal divide os fios separando $\frac{1}{3}$ do restante da moldura. Há cinco contas no fio maior e cada conta vale uma unidade; há duas contas no fio mais curto e cada conta vale 5. Quando as contas se encontram na posição da figura apresentada em A, está claro que não temos nenhum número representado.



A



B

[4] DANTZIG (Tobias), *Number: The Language of Science*. Nova Iorque: The Macmillan Co., 1954, pág. 35.

Para representar um algarismo menor que 5 desprezando o valor da posição, é necessário mover o número de contas correspondentes do fio ou segmento maior até a barra horizontal que divide a moldura; para representar 5 é necessário mover uma das contas do fio menor até a barra horizontal. Para representar um número entre 5 e 10 é necessário representar o 5 mais a parte complementar componente. Assim, 8 será representado como 5 e 3. Cada fio representa um determinado valor relativo. Assim, o segundo fio a partir da direita representa a casa das dezenas. A figura marcada com a letra B mostra o número 6 073 representado no ábaco chinês.

Desde que o maior algarismo que pode ser representado em qualquer casa de um número é 9, descobriu-se que não era necessário nem incluir duas contas com o valor de cinco cada, em um fio, nem cinco contas cada uma com o valor de um. O ábaco seria mais fácil de ser manejado se no segmento menor tivesse sòmente uma conta com o valor de cinco e no segmento maior sòmente quatro contas tendo o valor de um, cada conta. O ábaco japonês moderno, conhecido como *soroban,* foi transformado em 1920 de acôrdo com os princípios enumerados.[5] Com um ábaco dessa espécie é possível ao operador grande ligeireza nos cálculos. Cêrca de dois anos de treinamento eram necessários para que se adquirisse habilidades suficientes a fim de operar com o ábaco japonês.[6]

Uma pesquisa levada a efeito pelo Comitê de Estudos do Ábaco encontrou que a freqüência relativa dos quatro processos fundamentais nos negócios era a seguinte: adição, 50%; subtração, 25%; multiplicação, 20%; divisão, 5%.[7] Se os números usados na multiplicação e divisão não excederem à casa das dezenas, um operador habilidoso pode resolver as operações tão rápido como uma máquina de calcular. Considerando o preço relativo de um calculador elétrico e de um ábaco, vê-se claramente por que êsse velho computador ainda hoje é usado na maioria das casas comerciais do Oriente.

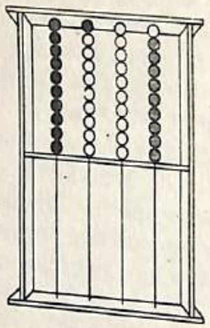
Um Ábaco Moderno

O ábaco desempenhou um papel significante na história do desenvolvimento do nosso sistema de numeração. Um instrumento dêsse tipo deve fazer parte do equipamento da sala de aula com a finalidade de auxiliar o aluno a compreender a estrutura do nosso sistema de numeração. Há muitas espécies diferentes de ábaco. Um tipo que é de ajuda efetiva na sala de aula é o que chamamos um *ábaco*

[5] KOJIMA (Takashi), *The Japanese Abacus*. Rutland, Vt.: Charles E. Tuttle Co., 1954, pág. 25.

[6] KOJIMA (Takashi), *ibid.*, pág. 19.

[7] KOJIMA (Takashi), *ibid.*, pág. 21.



moderno.[8] A figura acima mostra um ábaco dêsse tipo.

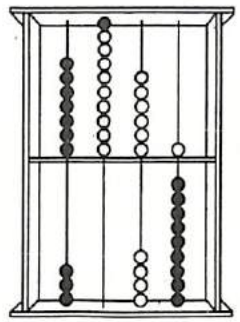
Um ábaco moderno tem fios estendidos em posição vertical, com uma barra em posição horizontal que os divide pela metade. As contas podem passar de uma metade para outra, porque os fios são flexíveis e assim é possível a conta atravessar a barra horizontal. Quando as contas estão como na figura, não há nenhum número representado. Quando as contas estão na metade inferior, representam determinados números.

Cada fio, no ábaco moderno, contém dez contas. Nove dessas contas são da mesma côr. A côr da décima conta é a mesma côr das nove primeiras contas do fio à esquerda. Vamos supor que a côr das nove primeiras contas no fio à direita, na casa das unidades, é azul. A côr da décima conta deve ser diferente, amarelo, por exemplo. Assim, as nove primeiras contas no próximo fio, casa das dezenas, devem ser de côr amarela, e a décima conta, dêsse mesmo fio, deve ser diferente, por exemplo, vermelho. Assim, as nove primeiras contas na casa das centenas devem ser vermelhas. É pouco recomendado um ábaco para uso em sala de aula com mais de quatro fios, com dez contas cada um.

O ábaco moderno deve ser usado para ajudar o aluno a compreender duas características de nosso sistema de numeração: (1) o valor da casa à esquerda é dez vêzes o valor da casa à direita e (2) um fio no ábaco guarda uma casa no número da mesma maneira que um zero ocupa uma casa no número escrito.

Vamos considerar a primeira característica. O aluno pode mover dez contas na casa das unidades e uma conta na casa das dezenas para a parte inferior do ábaco. As quantidades representadas são iguais. A décima conta, na casa das unidades, é a conta de referência, como bem mostra a sua côr. Essa conta tem a mesma côr das contas da casa das dezenas. Do mesmo modo a mesma razão entre duas casas consecutivas pode ser mostrada usando a casa das dezenas e centena ou a casa das centenas e milhar. O uso de côres diferentes ajudará a criança a descobrir a relação entre o valor de quaisquer duas casas conse-

[8] Distribuído por The John C. Winston Co., Filadélfia.



cutivas no ábaco. Esta relação é a mesma expressa entre duas casas consecutivas no sistema de numeração.

A segunda característica do sistema de numeração é a função do zero de preencher lugar. O ábaco acima mostra o número 3 049. As nove contas, da mesma côr, numa coluna correspondem aos algarismos de 1 a 9 em nosso sistema de numeração. O valor representado por uma coluna depende da posição da coluna. Arbitràriamente ficou determinado que o lugar das unidades era a coluna à direita e cada coluna sucessiva tem o valor dez vêzes maior que a precedente. O número de contas de cada coluna representa a freqüência da base. Assim, a primeira coluna à direita mostra 9 unidades; a segunda coluna, 4 dezenas; a terceira diz que não temos nenhuma centena representada, e a quarta coluna mostra 3 milhares. A falta de uma conta na coluna que representa centenas mostra que não há centenas representadas. Por esta razão o zero é como o algarismo que guarda um lugar. O zero não sòmente guarda o lugar das centenas no número 3 049, mas também mostra a freqüência da base da mesma maneira que os outros algarismos em um número escrito.

Quando um ábaco é usado para representar um número, uma coluna representa um determinado lugar. Se a freqüência da base é zero, a coluna permanece vazia. Assim ficou demonstrado por que um ábaco moderno tem nove contas da mesma côr em cada coluna. Nunca é necessário o uso de mais de nove contas na coluna para representar os algarismos de um número na coluna de um ábaco. A décima conta, de côr diferente, é usada sòmente para demonstrar a razão decimal entre duas casas próximas no sistema de numeração.

Outros Tipos de Ábaco

Há dois tipos de ábaco. O ábaco chinês anteriormente descrito representa um dos tipos, e o ábaco moderno representa o outro tipo. Sueltz[9] e Mayer[10] descrevem como fazer um ábaco. Cada um dêsses tipos ou modelos é um ábaco aberto, inserin-

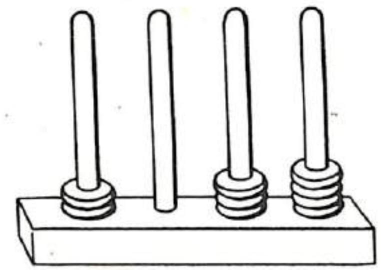
[9] SUELTZ (Ben A.), "Counting Devices and Their Uses", *The Arithmetic Teacher*, 1:25-30.

[10] MAYER (Louise A.), "The Scarabacus or Scarsdale Abacus", *The Arithmetic Teacher*, 2:159.

do-se fios em uma base de madeira. Sueltz recomenda o uso do ábaco quadrado, com contas quadradas. Mayer recomendou aros de marfim e pregos cilíndricos. Qualquer um dêsses tipos é fácil de fazer. Provàvelmente há muito interêsse e compreensão que se originam quando se fabrica um ábaco, o que não acontece quando se usa o ábaco comercial.

O elemento importante a ser considerado pelo professor quando usa o ábaco é o seu valor como ajuda ao ensino, para mostrar a estrutura do sistema de numeração. No ábaco moderno, o número de contas numa coluna é fixado e a côr pode ajudar a criança a descobrir a relação entre dois lugares consecutivos em um número. Os ábacos feitos a mão não possuem êsses elementos. Não há também um número fixo de marcas para determinada coluna a fim de indicar quantos devem ser usados para representar uma determinada quantidade, bem como não há côr determinada para sugerir que se deve reagrupar, após ter colocado a nona conta da coluna. Algumas vêzes os professôres não reconhecem a importante função de um ábaco na sala de aula. Numa aula de Aritmética o professor pode gastar tempo considerável para levar a classe a fazer operações usando essa espécie de calculador. Os benefícios de uma atividade dessa natureza são muito limitados. Aprender a calcular num ábaco não aumenta necessàriamente o conhecimento das crianças quanto aos sistemas de numeração. O professor deve usar o ábaco para que a criança descubra a *razão decimal* dos valôres de quaisquer lugares consecutivos em um número, bem como a função do zero como preenchedor de lugar no sistema de numeração. A não ser para satisfazer à curiosidade das crianças, mostrar como é possível fazer as operações, especialmente adição e subtração, o ábaco não deve ser usado na

Uma vendedora de frutas usa um ábaco para fazer seus cálculos



sala de aula como calculador. Uma máquina moderna de calcular é instrumento bem mais efetivo que o ábaco. O tempo gasto para se adquirir as habilidades é tão grande que o ábaco não pode ser considerado um meio efetivo para computar.

Um Sistema de Numeração com Valor Relativo

A história do homem primitivo mostra que qualquer dos dois processos deve ter sido usado quando se manipulavam conjuntos maiores que dez. O menos efetivo dos dois planos consistia em introduzir um nôvo símbolo para cada potência da base. O outro plano consistia em usar uma ajuda mecânica para guardar um lugar vazio. Um sistema de numeração não é completo até que se baste a si mesmo e não necessite de ajuda suplementar ou símbolos adicionais para que sua função seja perfeita. Não foi possível tornar a estrutura do sistema de numeração completa até que o homem descobrisse um meio de preencher os lugares vagos. Aquilo que deu ao 2 em 20 um valor diferente de duas unidades é a posição de 2 em 20. O zero guarda o lugar das unidades e conseqüentemente torna possível ao 2 em 20 ocupar o lugar das dezenas. O número 370 pode ser escrito como $\overset{c}{3}\ \overset{d}{7}$, em que c representa as centenas e d as dezenas. Êsses símbolos suplementares são necessários para designar o lugar das centenas e dezenas, nos números escritos, quando não se usa zero. Com o zero não é necessário usar símbolos especiais para designar as casas em um número escrito.

O uso do zero fêz o valor relativo completamente possível, sem o uso de auxílios suplementares, como em um ábaco. O zero tornou possível o valor relativo em um número escrito como representado num ábaco. O zero foi introduzido dentro do sistema de numeração indo-arábico cêrca de 600 D. C.[11] Embora o zero tenha sido introduzido dentro de nosso sistema de numeração cêrca de mil e trezentos anos atrás, o uso eficiente do zero como um algarismo tem menos de mil anos.

A invenção do zero é considerada uma das maiores conquistas intelectuais do homem. É bom aprender por que levou tanto tempo para que se inventasse o zero. Há duas razões para a demora dêste conhecimento.

---

[11] SANFORD (Vera), "Hindu-Arabic Numerals", *The Arithmetic Teacher*, 2:157.

Primeiro, o homem não podia conceber a necessidade de um símbolo ou algarismo para representar a ausência de uma quantidade que nada representava. É lógico que se tenha um traço para representar 1. Quando não há quantidade para ser representada, é igualmente lógico desprezar êste fato. Segundo, o uso de um ábaco que preenchia a função do zero para guardar lugar. Deve-se recordar que, há alguns séculos atrás, o uso do número, pelo homem, era limitado. Os padres e os escribas realizavam a maior parte das computações necessárias naquela época. Êsse grupo restrito tinha possibilidade de trabalhar com os números, mas o povo, em geral, não tinha capacidade para tal. Antes do século XV, a imprensa era desconhecida e raramente as pessoas necessitavam ler ou escrever. Em tais condições, o zero para preencher casas era desnecessário. Com a introdução do zero no nosso sistema de numeração, ficamos com 10 algarismos. Os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são os símbolos necessários para a existência de um sistema de numeração decimal.

O Traço Marcante do Nosso Sistema de Numeração

O princípio completo do valor relativo é o traço marcante do sistema de numeração indo-arábico. Muitos estudantes de Aritmética concluem que a base decimal é o traço mais característico de nosso sistema de numeração. A maioria dos sistemas de numeração primitivos tinha base cinco, dez ou vinte. Êsses números mostram que os dedos dos pés e das mãos afetaram a seleção da base. Os antigos sistemas de numeração não utilizavam o zero, daí não tinham possibilidade de usar o valor relativo, a não ser usando auxílios suplementares, como um ábaco, para marcar os lugares vazios.

Quando um sistema de numeração utiliza o valor relativo, um número inteiro com maior número de algarismos tem o maior valor. O menor número de quatro algarismos tem um valor maior que o maior número de três algarismos. Isto não acontece no sistema de numeração romano. O número representado por M tem um valor muito maior que o número representado por CXXXVII.

Valor Relativo no Sistema de Numeração Romano

O sistema de numeração romano não tem um símbolo para zero, mas há uma certa utilização do valor relativo seguido na escrita de números. Há dois princípios que governam a seqüência dos símbolos em um número expresso com algarismos romanos. Primeiro, o símbolo de maior valor é escrito à esquerda, seguido pelos símbolos de menor valor. Os símbolos de menor valor são escritos, em seguida, em ordem decrescente. O número escrito é a soma dos valôres representados pelos diferentes símbolos. Assim, o número MDCCLXVIIII é igual a .... 1 000 + 500 + 200 + 50 + + 10 + 5 + 4, ou 1 769. Segundo, se um símbolo de menor valor precede um símbolo de maior valor, o menor valor deve ser subtraído do maior. Dessa forma, o número representado é encontrado como no primeiro caso. Assim, MCDXLXXIV é igual a 1 000 + (500 — 100) + (50 — — 10) + 20 + (5 — 1), ou 1 000 + 400 + 40 + 20 + 4, ou 1 464. O método de escrever o símbolo representando um valor menor, antes do símbolo representando um valor maior, ilustra o princípio subtrativo aplicado ao sistema romano de numeração. Êste processo é uma inovação mais ou menos recente no sistema de numeração romano.

As duas ilustrações mostram que há um uso particular do valor do lugar no sistema de numeração romano. Esta forma de valor relativo não pode nunca ser associada com o valor relativo que caracteriza o sistema de numeração arábico.

O Zero Tem Diferentes Significados

Cada algarismo tem que exercer duas funções em um número. Um algarismo mostra a freqüência da base e guarda um lugar no número. Desde que o zero é um algarismo, êle também exerce estas funções. Algumas vêzes as crianças adquirem a impressão errada de que zero é sòmente um número que guarda um lugar vago.[12] O zero tem diferentes valôres ou significados. Dentre êles, temos:

1. Freqüência da base, como em 403.
2. Apenas preencher uma casa, como em 3 000 m.
3. Mostrar o progresso de um jôgo, como:

Visitantes	0	0	2	0	0	1	0	0	0
Locais	0	0	0	3	1	0	0	0	

4. Ponto inicial na escala, como no termômetro.
5. Um expoente, como $(12)^0$.

O primeiro e o segundo significados foram discutidos anteriormente nas págs. 29-30. Todos os fãs de basebol conhecem o uso do zero no marcador. Os zeros, no marcador acima, indicam que não foram marcadas corridas em certas entradas. Além disto, os zeros mostram o progresso do jôgo. A ausência de um zero na última metade da nona entrada indica que a equipe local avançou e que aquela particular metade da entrada não foi jogada. Usar um zero, em vez de conservar vazio êste espaço no marcador, indicaria que a equipe local jogou a entrada e não marcou corridas.

12 SHUSTER (Carl N.), "Teaching the Digit Zero", *The Arithmetic Teacher*, 4:13-14.

O quarto uso do zero mostra-o iniciando escalas como o termômetro, ou num velocímetro. A escala no termômetro estende-se em duas direções: positiva e negativa. A escala de um velocímetro começa com zero e estende-se apenas na direção positiva.

A quinta aplicação do zero mostra que também pode ser usado como um expoente. Para se ter um sistema racional de expoentes é necessário que qualquer número elevado à potência zero tenha valor 1. Assim, o valor de 10^0 ou $(4a^2)^0$ é 1.

Dos exemplos acima podemos inferir que o zero adquiriu novos usos e significados desde que foi introduzido dentro de nosso sistema de numeração. Deve-se ter bem claro, contudo, que o uso do zero para preencher o lugar foi uma valiosa contribuição para a história do pensamento quantitativo.

Valôres Agrupados, Reagrupados e Não-Agrupados

Os algarismos em um número composto de dois ou mais algarismos podem ter um *valor agrupado* ou um *valor não-agrupado*. O valor agrupado do 3 em 30 é 3 dezenas. O valor não-agrupado do 3 em 30 é 30 unidades. O valor de um algarismo em um número é o seu próprio valor. Cada algarismo em seu valor absoluto mostra a freqüência da base. No número 326, o valor agrupado dos três algarismos é 3 centenas, 2 dezenas, 6 unidades, respectivamente. O valor não-agrupado dêsses algarismos depende da transformação ou *reagrupamento* que seja feito; assim, 326 pode ser 3 centenas e 26 unidades, 32 dezenas e 6 unidades, ou 326 unidades.

A soma dos números à direita é 23 unidades. A soma representa um número não-agrupado. Os números somados podem ser objetivados com marcadores. É possível colocar 8 marcadores num monte, depois mais 9, e finalmente mais 6, perfazendo um total de 23 no monte; 23 é um número não-agrupado. Tão logo esta soma é escrita, cada algarismo tem um valor agrupado. O 2 representa 2 dezenas, e o 3 representa 3 unidades.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 9 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Os algarismos no número 360 têm um valor agrupado. Pode ser reagrupado ou transformado de diferentes maneiras, como 36 dezenas ou 360 unidades. Para fazer a divisão no exemplo ao lado, 36 dezenas não podem ser divididas como dezenas em 45 grupos iguais; assim, o número deve ser tomado em unidades: 360 unidades. A resposta 8 é escrita no lugar das unidades, no quociente, porque 360 unidades foram divididas em 45 grupos iguais.

$$360 \,\underline{|\,45}$$

O número 360 também pode ser reagrupado para se subtrair 147, como no exemplo ao lado. Êle será reagrupado como 3 centenas, 5 dezenas e 10 unidades.

$$\begin{array}{r} 360 \\ -\ 147 \\ \hline \end{array}$$

Muitas outras maneiras de reagrupar 360 são possíveis, como 2 centenas, 15 dezenas e 10 unidades. Êste reagrupamento não é necessário na subtração dada, mas necessita sê-lo no exemplo 360 — — 177.

Dos exemplos conclui-se que os alunos nem sempre trabalham com o valor agrupado dos algarismos num número de dois ou mais algarismos. Freqüentemente os professôres de Aritmética levam os alunos a identificar sòmente o valor agrupado dos algarismos em um número. Os alunos devem adquirir a habilidade para identificar o valor absoluto e o relativo dos algarismos em qualquer número de dois ou mais algarismos, como no número 25. O valor agrupado é de 2 dezenas e 5 unidades. O valor não-agrupado é de 25 unidades.

Classes Numéricas

É muito difícil ler um número — como, por exemplo, 371495 — quando é escrito como o fizemos. Para facilitar a leitura de números maiores nós usamos separar as classes por um pequeno intervalo ou ponto. Começando à direita, três números consecutivos constituem uma classe; a última classe à esquerda pode ter sòmente um ou dois algarismos. A primeira classe é chamada das unidades. As três ordens dessa classe são: unidades, dezenas e centenas, como mostra o desenho adiante.

UNIDADES		
CENTENAS	DEZENAS	UNIDADES

A seqüência das classes depois das unidades é milhar-milhões-bilhões. Cada classe à esquerda tem um valor 1 000 vêzes maior que a classe à direita. Há mil milhares em um milhão, e mil milhões em um bilhão. Assim, é possível representar um milhão como o valor reagrupado de mil milhares. Da mesma maneira um número mil milhares reagrupado representa um bilhão.

O valor de um bilhão não é o mesmo em todos os países. Nos Estados Unidos, um bilhão é igual a mil milhões; na Inglaterra, um bilhão é igual a um milhão de milhões. Um bilhão dêste valor é 1 000 vêzes maior que o dos Estados Unidos.

Há outras classes que podem representar a classe à esquerda dos bilhões. Para um número ter valor superior aos números da classe dos bilhões, precisamos no mínimo de 13 ordens. Um número dêste valor tem uso limitado, como, por exemplo, na Astronomia. Para evitar o uso de números com tantas classes diferentes é comum expressar números muito grandes em *notação científica*.

Assim, o número 1 500 000 000 000 pode ser escrito nesta notação: $1{,}5 \times 10^{12}$. Para expressar um número em notação científica divide-se um número por 10 elevado à potência que dará um quociente de no mínimo 1, mas menor que 10. Em um número inteiro, a potência de 10 é igual ao número de ordens dêsse mesmo número a partir da primeira ordem das unidades ao último número à esquerda. Assim, se o orçamento nacional dos Estados Unidos foi \$72 500 000 000, essa quantia pode ser escrita em notação científica como $\$7{,}25 \times 10^{10}$.

f. EXTENSÃO DE NOSSO SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Frações Ordinárias

Na discussão do sistema de numeração, temos tratado até agora com números inteiros. A primeira extensão de nosso sistema de numeração inclui maneiras de expressar um número menor que 1, porém maior que zero. Tal número é conhecido como *fração.*

Os livros mais antigos de Aritmética continham muitos exemplos de frações envolvendo difíceis computações. As frações usadas não tinham nenhuma significação social. Tópicos como encontrar o maior ou o menor denominador-comum de frações constituía o trabalho básico com frações. "Antes da invenção das decimais, frações como $\frac{3\,345\,312}{4\,320\,864}$ eram comuns."[13] Era então necessário reduzir essas frações a têrmos menores para facilitar as computações e interpretações. Encontrar o maior fator comum dos têrmos das frações era o propósito ao lidar com tais frações. A aplicação social das frações recebia pouca consideração num currículo que continha frações com numeradores e denominadores muito grandes. Depois da introdução dos números decimais, as frações ordinárias, com números muito grandes, foram aos poucos desaparecendo dos livros de Aritmética, como mostra o Capítulo 10 dêste mesmo livro; as únicas frações que estão adicionadas ou subtraídas representam unidades de medidas.* Essas frações, de modo geral, têm denominadores menores.

A Vírgula Decimal Torna Mais Extenso o Princípio do Valor do Lugar

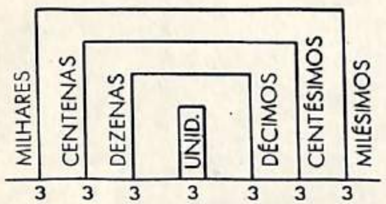
Neste mesmo Capítulo (pág. 14) encontramos cinco pontos essenciais para o trabalho com inteiros. Para tornar o sistema completo deve haver um sexto elemento: *a vírgula decimal.* O uso da vírgula decimal é uma extensão do valor do lugar e assim tornou-se possível representar um número com o valor me-

[13] SMITH (David Eugene), *History of Mathematics,* II:221. Boston: Ginn and Company, 1925.

* Isto em se tratando do Sistema de Medidas Inglês. (N. T.)

Identifique os diferentes níveis de aprendizagem demonstrados por estas crianças.

nor que 1 e maior que zero. Em 1585 apareceu na imprensa a primeira discussão sistemática da vírgula decimal.[14] Assim, o uso da vírgula decimal tem menos que quatro séculos.



A vírgula decimal identifica a casa das unidades no sistema de numeração. No desenho podemos ver que há extensão à direita e à esquerda das unidades do princípio de valor do lugar. O primeiro lugar à esquerda das unidades é o lugar das dezenas, e o primeiro lugar à direita das unidades é o lugar dos décimos. Para cada lugar à esquerda das unidades há um lugar correspondente à direita das unidades. Em cada um dos números apresentados abaixo o valor do 2 à esquerda é 1 000 vêzes o valor do 2 à direita.

2142 - 214,2 - 2,142 - 0,2142 - 0,02142

A posição da vírgula decimal no número não afeta o valor do lugar dos algarismos nos números. A vírgula estabelece o lugar das unidades. Assim, o uso da vírgula para escrever um valor maior que zero, mas menor que 1, torna possível realizar as mesmas operações com números decimais que são realizadas com inteiros.

A introdução das frações decimais substitui as incômodas frações ordinárias. Não é mais necessário calcular denominadores-comuns para somar frações expressas na forma decimal. As adições com frações decimais são realizadas da mesma forma que a adição de inteiros.

Outras Extensões de Nosso Sistema de Numeração

Estendendo o valor relativo à direita e à esquerda do lugar das unidades é possível representar qualquer número de zero até o infinito. As crianças que desenvolvem compreensão dos números costumam perguntar: "Qual é o maior número ou o menor número?" Tão logo elas possam escrever qualquer número maior que zero, podem sempre escrever o próximo número maior ou menor. Se n é qualquer número maior que zero, torna-se fácil escrever n + 1 ou n − 1, por causa do valor do lugar no sistema de numeração.

É claro que o sistema de numeração descrito trabalha com quantidades iguais ou maiores que zero. Um sistema de numeração não seria completo se lhe não fôsse possível representar um número menor que zero. Tais números podem ser representados numa escala numérica começando em zero. Assim, os números na escala à direita do zero

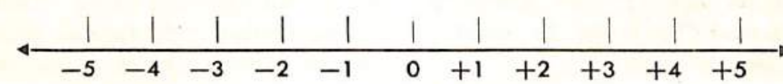
[14] **Sanford** (Vera), *ibid.*, pág. 157.

têm valor maior que zero, e os números à esquerda do zero têm valor menor que zero. Números expressos nesta escala são conhecidos como *números relativos.* Com o uso dos números relativos o sistema de numeração pode ser descrito em qualquer das direções de um ponto chamado zero.

Os *números racionais* são aquêles cujos valôres podem ser expressos ou representados como um inteiro ou como razão entre dois inteiros. Se a representa um inteiro e b representa qualquer outro inteiro, exceto zero, a razão de a/b é um número racional. Um *número irracional* não pode ser expresso como a razão de dois inteiros. Um número irracional não pode ser escrito na forma a/b se a e b são inteiros. Números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ou π são irracionais porque não há dois inteiros que tenham um quociente igual a qualquer um dêsses números.

Outra extensão do sistema de numeração foi a introdução de *números imaginários*. Numa equação algébrica do tipo $x^2 + 1 = 0$ não há solução com números reais. A raiz da equação é $\sqrt{-1}$, que para os primeiros matemáticos não tinha sentido, daí a expressão números imaginários. No comêço do século XIX a descoberta da interpretação geométrica dos números imaginários tornou-os úteis. Hoje, os números imaginários têm grande valor nas ciências aplicadas, como por exemplo no campo da eletricidade.

A longa discussão sôbre o sistema de numeração e as várias extensões que foram criadas mostram que o homem inventou um sistema de numeração para responder à pergunta "Quantos?" O número de dedos das mãos parece-nos que foi o fator que contribuiu para se escolher 10 como número-base. Com o auxílio de instrumentos mecânicos é possível trabalhar com números inteiros sem o uso do zero. Depois da introdução do zero, o valor da casa estava completo dentro do sistema de numeração. A invenção da vírgula decimal estendeu o princípio do valor relativo à direita do lugar das unidades, para escrever quantidades menores que 1 e maiores que zero. Extensões posteriores tornaram possível o trabalho com números irracionais e imaginários. Com as novas condições que foram surgindo, exigindo a apresentação de quantidades, o sistema de numeração cresceu para atender a essas exigências. É inteiramente possível e altamente provável que, com as novas fronteiras que estão sendo exploradas em investigações científicas, extensões futuras serão necessárias para representar quantidades em nosso sistema de numeração.



Computadores Eletrônicos

A crescente expansão dos computadores eletrônicos possibilitou a solução de problemas numéricos que formalmente eram impraticáveis de resolver, devido às muitas horas de trabalho necessárias para sua solução. A direção de projéteis e o contrôle de foguetes no espaço dependeram da solução de problemas intricados numa pequena fração de segundo. Um computador eletrônico é capaz de dar essas soluções neste tempo. Sem a invenção de computadores eletrônicos não haveria satélites à volta da Terra, nem naves espaciais estariam sendo planejadas para viagens a outros planêtas. Êsses computadores usam os princípios básicos do sistema de numeração. Já que êstes rápidos calculadores são eletrônicos, o fluir da corrente através do circuito é comparável à velocidade da luz. Assim, num computador eletrônico normal a novidade não é o sistema de numeração, mas a rapidez dos cálculos.

Número Não É Um Instrumento

O homem levou muitos séculos para desenvolver o nosso sistema de numeração. Hoje êsse sistema é parte de nosso patrimônio social. O homem descobriu como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Êsses quatro modos de operar com números são conhecidos como as quatro operações básicas.

O conhecimento dos fatos de adição, como $3 + 5 = 8$ ou $5 + 7 = 12$, adquirido pela criança nas primeiras séries abrange largas experiências em Aritmética e que foram experimentadas pelo homem durante séculos. Esta grande aquisição de uma criança é possível devido à nossa herança social. O sistema de numeração é uma instituição social que se modificou muito, em um período de mais de mil anos. Tais modificações transformaram o sistema de numeração, que era limitado ao uso de selecionado grupo, num simples e eficiente sistema que é adaptável às massas.

O fato de que o homem levou muito tempo para descobrir nosso sistema de numeração é uma prova de que é difícil compreender os números. Número é abstrato. É uma criação intelectual destinada a operar com quantidades. Após o estabelecimento do sistema de numeração decimal, é relativamente fácil solucionar os processos básicos com números. A criança, nas primeiras séries, pode aprender rotineiramente os fatos básicos de adição, ou como adicionar ou subtrair, mas o significado matemático dêsses processos não são ainda dominados por ela. Através de suficiente prática as crianças podem adquirir muita habilidade em resolver ditas operações. Dêsse modo, a Aritmética é considerada uma matéria instrumental cuja função principal é encontrar resposta para

Os computadores eletrônicos resolvem, ràpidamente, os problemas matemáticos. A indústria e as agências do govêrno, atualmente, acham indispensáveis estas máquinas.

uma situação quantitativa de maneira mecânica. Êsse conceito estreito da aprendizagem das operações não está de acôrdo com o programa que dá ênfase ao significado e crescimento na *habilidade de manipular quantidades.*

Número não é um instrumento que pode ser aprendido rotineiramente. Ao contrário, é uma maneira cultural que opera com quantidades. A criança deve compreender a significação do valor do lugar e a contribuição do zero tornando possível o valor do lugar em nosso sistema de numeração. A maioria de nossas crianças não descobre as características de nosso sistema de numeração simplesmente fazendo as operações básicas de maneira mecânica. Judd[15] expressou o seguinte ponto de vista: "A criança penetra num ambiente social que possui o mais alto e perfeito sistema de numeração, mas não sente necessidade do mesmo e é incapaz do pensamento abstrato que é necessário para o uso inteligente dêste sistema. Para a criança, o sistema de numeração é, em si mesmo, uma experiência complicada... O esfôrço deliberado da sociedade é dar aos alunos, em poucos anos, e de modo altamente aperfeiçoado, aquilo pelo qual a raça humana lutou durante longos anos."

[15] JUDD (Charles N.), *Psychological Analysis of the Fundamentals of Arithmetic.* Chicago: University of Chicago Press, 1927, pág. 103.

A compreensão da criança em relação ao sistema de numeração se desenvolve lentamente. Ela deve ter experiências variadas que a capacite a compreender o valor do lugar. O uso do ábaco ou de um *cartaz valor do lugar* ajuda a criança a descobrir a razão que existe entre os lugares em nosso sistema de numeração. Êste livro mostra ao professor, em várias partes, como usar material visual e exploratório no ensino da estrutura de nosso sistema de numeração. A compreensão de nosso sistema de numeração é essencial para o crescimento contínuo em Aritmética. O conhecimento de Anatomia é básico na prática da Medicina, porque a maior parte dos elementos do corpo humano deve ser interpretada e diagnosticada em têrmos da estrutura da anatomia humana. Da mesma maneira o conhecimento da estrutura do sistema de numeração é necessário para o sucesso do estudo em Aritmética. Tôdas as operações com números devem ser realizadas dentro dos princípios do sistema de numeração. Há importantes regras básicas ou princípios que governam tôdas as operações com números com os quais as crianças devem estar familiarizadas e devem compreender. A criança deve compreender êsses princípios, essas regras, justamente como deve compreender as regras que governam um jôgo antes que possa jogá-lo com muita habilidade. O professor deve ter muitas e ricas experiências das características do sistema de numeração e estar capacitado a prover as espécies de experiências que possibilitarão à criança a descobrir e distinguir a estrutura de nosso sistema de numeração. A criança deve ser conduzida a descobrir que nosso sistema de numeração apresenta o que de melhor o homem encontrou para lidar com quantidades.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Qual é a diferença entre a correspondência de um-a-um e a contagem?
2. A palavra latina *calculus* significa seixos. Qual é a relação entre a palavra *calcular* e sua derivação latina?
3. Quais são os seis elementos essenciais de um sistema de numeração autônomo?
4. Que significa base de um número?
5. São necessários cinco algarismos para ter um número de base 5. Usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 0, escrever os números de 1 a 100 na base 5.
6. Qual é a significação do valor do lugar; como é usado no nosso sistema de numeração?
7. Demonstre por que o sistema de numeração romano não podia ter sucesso como um sistema satisfatório para operar com números.
8. Quais são os aspectos essenciais que distinguem o sistema de numeração indo-arábico do sistema de numeração romano?
9. Por que as pessoas acham mais fácil operar com grupos maiores do que dez do que com grupos menores do que dez?
10. Cite algumas das maneiras descobertas pela raça humana para operar com grupos maiores do que dez. Quais eram as limitações de cada maneira?
11. Por que o ábaco desempenhou um papel importante na história do desenvolvimento do sistema de numeração?
12. Um ábaco moderno pode ser usado para demonstrar dois princípios importantes de nosso sistema de numeração. Quais são êsses dois princípios?
13. Muitos dos ábacos usados nas salas de aula têm doze contas em cada fio. Demonstre por que o professor não deve usar um ábaco dêsse tipo. Quantas contas deve haver em cada fio, para que um ábaco possa ser um eficiente material de ensino na sala de aula?

14. No ábaco japonês moderno cada fio contém quatro contas com o valor de 1 e uma conta com o valor de 10. Qual é a vantagem de um ábaco dêsse tipo, comparado com um ábaco que contém nove contas com o valor de 1 em cada fio?
15. Discuta o seguinte assunto em aula: Resolver se a classe deve fazer um ábaco em vez de comprar um em uma casa comercial.
16. O teclado de um calculador moderno tem uma série de teclas para os algarismos de 1 a 9, mas não tem uma tecla para o zero. Dê a razão.
17. Cite, ao menos, cinco significados ou usos diferentes do zero.
18. Por que não é necessário ter um símbolo para o zero, no sistema de numeração romano?
19. Dê um exemplo de número agrupado, número não-agrupado e número reagrupado.
20. Usando o número 60, dê dois valôres reagrupados dêsse número.
21. Duas classes em um número são adjacentes. Qual é o valor da classe à esquerda comparado com a classe à direita?
22. Quantos milhares há em um milhão? em um bilhão?
23. Qual é o nome dado a um número que é igual a um milhão de milhões? Qual é o nome dado a êsse número na Inglaterra?
    Escreva um milhão de milhões com algarismos. Agora escreva êsse mesmo número em notação científica.
24. Escreva com algarismos: (a) Dez mil milhares. (b) Dez mil milhões. (c) 4,5 mil milhões de cruzeiros.
25. Depois que o sistema de numeração se desenvolveu de modo a tornar possível escrever qualquer número inteiro, quais as adições que foram feitas para ampliar o alcance dêsse sistema?
26. Use os seguintes números: 3 603, 36,03, 0,3603, 3,603.
    a) Qual é o valor do 3 à esquerda comparado com o valor do 3 à direita?
    b) Qual é o valor do 3 à direita comparado com o valor do 3 à esquerda?
    c) Qual é o valor do 6 comparado com o valor do 3 à direita? com o valor do 3 à esquerda?
    d) Que influência tem a posição da vírgula sôbre os valôres relativos dos diferentes algarismos de um número?
27. O que significa a afirmação de que a Aritmética não é um instrumento? Se a Aritmética fôr considerada um instrumento qual será o efeito sôbre o ensino da matéria?

28. Se você fôsse o diretor de uma escola primária, enumere as coisas que desejaria que os professôres ensinassem para a melhor compreensão do sistema de numeração.
29. Escreva uma pequena composição de 200 palavras, mostrando como a raça humana criou o sistema de numeração.
30. Por que o nosso sistema de numeração é chamado sistema de numeração indo-arábico?

SUGESTÕES PARA LEITURA

Adler, Irving. *Magic House of Numbers.* New York: The John Day Co., 1957.

Bakst, Aaron. *Mathematics, Its Magic and Mystery.* Princeton, N. J.: D. Van Nostrand Co., 1952.

Bendick, Jeanne. *How Much and How Many.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.

Dantzig, Tobias. *Number: The Language of Science.* New York: The Macmillan Co., 1954. pp. 1-75.

Hogben, Lancelot. *Mathematics for the Milion.* New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1937. pp. 1-229.

—— *The Wonderful World of Mathematics.* Garden City, N. Y.; Garden City Books, 1955.

Hooper, A. *The River Mathematics.* New York: Henry Holt and Co., Inc., 1945. pp. 1-55.

Irwin, Keith G. *The Romance of Writing.* New York: The Viking Press, Inc., 1956. Chapter 10.

Kasner, Edward and Newman, James. *Mathematics and the Imagination.* New York: Simon and Schuster, Inc., 1956. pp. 1-111.

Kojima, Takashi. *The Japanese Abacus: Its Use and Theory.* Rutland, Vt.: Charles E. Tuttle Co., 1954.

Meyer, Jerome S. *Fun with Mathematics.* Cleveland: The World Publishing Co., 1952. pp. 1-56.

Newman, James R. *The World of Mathematics.* 1:430-464. New York: Simon and Schuster, Inc., 1956.

Newsom, C. V. "Mathematical Background Needed by Teachers of Arithmetic," *The Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, II: 232-250. Chicago: University of Chicago Press, 1951.

Ore, Oystein. *Number Theory and Its History.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1948. Chapters 1 and 2.

Reid, Constance. *From Zero to Infinity.* New York: Thomas Y. Crowell Co., 1955.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics.* II: 88. Boston: Ginn and Co., 1925.

Wheat, Harry G. *How to Teach Arithmetic.* Evanston, Ill.: Row, Peterson and Co., 1951. pp. 365-461.

3

Organização do Programa de Aritmética

DURANTE OS ÚLTIMOS cinqüenta anos tem havido uma revolução no ensino de Aritmética. Os objetivos têm sido examinados e ampliados, o conteúdo do currículo cuidadosamente estudado e reorganizado mais de acôrdo com os requisitos da vida moderna. Reconhece-se que a Aritmética possui um conteúdo próprio, mas também fornece importantes contribuições a tôdas as áreas de aprendizagem, especialmente a leitura, estudos sociais e ciências. A seqüência e o arranjo do conteúdo vêm sendo organizados em face das descobertas sôbre as dificuldades de aprendizagem da matéria.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Mudanças no currículo de Aritmética
b. Conteúdo do currículo moderno de Aritmética
c. Seleção do conteúdo do currículo
d. Organização do currículo

a. MUDANÇAS NO CURRÍCULO DE ARITMÉTICA

Desenvolvimento Histórico do Currículo

A Aritmética não era incluída no currículo das primeiras escolas no tempo dos pioneiros. Foi introduzida, primeiramente, nas classes de adultos devido à procura da indústria e do comércio de trabalhadores competentes e bem treinados nos cálculos relacionados com suas ocupações. Subseqüentemente, devido a pressões sociais de várias espécies, ela foi introduzida no programa das séries mais adiantadas (ginásios) e, gradativamente, no curso primário, nas classes mais elementares. O currículo de Aritmética acumulou por vários anos uma massa de ensinamentos tão difícil e desorganizada que mal podia ser manejada. Um estudo sôbre o problema de repetência, realizado por volta da década de 1890, mostrou que a ineficiência em Aritmética era a maior responsável pela repetência.

1890

O Valor Social do Conteúdo do Currículo

Num esfôrço para aliviar a situação apresentada pela grande porcentagem de reprovação, fizeram-se investigações para determinar o valor social dos processos e tópicos que estavam sendo ensinados no campo da Aritmética. Êsses estudos mostraram que grande parte do programa estava inteiramente desatualizada e raramente usada pelo povo em suas atividades diárias. Muitos tópicos como raiz cúbica, frações complexas e medidas antiquadas, como os pesos de farmácia, eram incluídos no programa de Aritmética só porque faziam parte da ciência dos números, ainda que fôssem raramente usados. Prosseguindo na hipótese de que a Aritmética ensinada na escola deveria incluir os processos e tópicos de comprovado valor social, grande parte daquele pêso morto acumulado durante muitos anos foi abolida do programa por meio de um processo demorado de eliminação. A tendência atual é trazer para o programa de Aritmética experiências envolvendo problemas que emergem das necessidades da vida diária. O currículo moderno de Aritmética consiste, em grande parte, de tópicos que realmente funcionam nas atividades da vida diária. Por isso os meios vitais em que a Aritmética contribui para o enriquecimento da vida das crianças devem merecer consideração especial.

Mudanças de Pontos de Vista Quanto à Natureza da Aprendizagem

A educação moderna acentua o fato de que aprender é um processo de experiências. É reconhecido que os resultados dêsse processo são os pontos discutidos no primeiro capítulo. O aluno aprende por meio de experiências em situações significantes e reagindo a essas experiências como membro de um grupo. O valor de unidades ricas em experiência como base da aprendizagem aritmética é geralmente reconhecido. Isto está provado pelo número crescente de unidades ilustrativas que aparecem em livros, nos livros-texto e guias. Essas unidades abordam aspectos quantitativos de instituições sociais e aplicações do número em acontecimentos da comunidade, sôbre as quais as crianças pensam colhêr informações. Êsses aspectos quantitativos são sempre problemas de genuína significação social. Tais experiências enriquecem a vida da criança.

A aprendizagem das operações numéricas é muito mais fácil e muito mais significativa quando associada às situações em que elas são usadas. Quando isto é feito, as crianças podem ver a utilidade das operações numéricas que estão estudando. Os resultados dessa aprendizagem por experiências não são apenas conhecimento, destreza e habilidade, mas também atitudes desejáveis, propósitos, compreensão, interêsse e apreciações, bem como o desenvolvimento de importantes qualidades sociais essenciais à vida em grupo.

A Aritmética e o Progresso Social

O programa de Aritmética deve ser planejado de modo a satisfazer às necessidades de uma sociedade democrática industrial em mudança. O criticismo atual ao esultado da educação indica insatisfação por parte do comércio, indústria, instituições superiores de aprendizagem e fôrças armadas, para mencionar umas poucas fontes. A rápida expansão do uso de máquinas computadoras, aproximação, automação em medidas e outros processos mecânicos levanta questões de grande significação para o programa de Aritmética. Que nível de habilidade em operações numéricas deve ser exigido de uma criança? O uso de máquinas computadoras deveria ser ensinado? a quem? Que lugar ocuparia o cálculo mental envolvendo estimativa e aproximação? Que habilidades aritméticas são necessárias para verificação dos cálculos aritméticos mecânicos? Que habilidades aritméticas são exigidas para os métodos modernos de registro? Que pode ser feito para desenvolver uma padronização dos sistemas de medida que tenham aceitação universal? Quais são as exigências mínimas da idade atômica que ajudarão o homem comum a compreender a situação social e ajustar-se a ela?

b. CONTEÚDO DO CURRÍCULO MODERNO DE ARITMÉTICA

Padrões de Organização de Currículo

O padrão de currículo escolar afeta o lugar da Aritmética no programa geral de educação. Na escola tradicional, o currículo era organizado como um grupo de matérias em compartimentos estanques, sem nenhuma tentativa de relacionamento entre os diversos campos de estudo. A Aritmética era ensinada como instrumento a ser usado no futuro e não para satisfazer a necessidades. Nas escolas modernas fazem-se organizações do currículo como áreas mais amplas de aprendizagem. Dá-se ênfase aos problemas e experiências concretos que se cruzam nos diversos campos. Outras variações importantes na organização de currículo estão aparecendo também: o estudo de centros de interêsse, o currículo baseado em atividades, o programa geral, os programas específicos de cada área, e o uso de unidades de estudo em que é realizada a inter-relação das diversas áreas do currículo.

Qualquer que seja o currículo, é inteiramente viável a determinação dos conceitos aritméticos

básicos e habilidades mais freqüentemente necessários às atividades diárias das crianças dentro e fora da escola. É possível determinar também bastante satisfatòriamente a extensão que pode ser dominada pela criança de inteligência normal nos diversos níveis.

Cinco Aspectos do Programa de Aritmética

Há cinco aspectos no programa de Aritmética:

1. Estudo do número e do sistema de numeração
2. Desenvolvimento dos fatos numéricos e processos fundamentais
3. Medidas e sua aplicação
4. Comunicação — vocabulário, leitura, pensamento, habilidades do estudo
5. Estudo de instituições sociais que operam com números.

1. *Estudo do Número e do Sistema de Numeração*

Êste aspecto do currículo inclui conteúdo para todos os níveis. O estudo dos números envolve muito mais do que aprender a contar, ler e escrever os números, a identificar grupos de objetos e a computar com êles. Pesquisas provam que a menos que a criança compreenda bem o sistema no qual os números são baseados, ela não poderá operar inteligentemente com êles. Como foi visto no Capítulo 2, o estudo do sistema de numeração se estende às frações decimais e frações ordinárias. Habilidades no uso dos números simplificam o raciocínio e torna-o mais rápido. Experiências de aprendizagem cuidadosamente planejadas ajudam a criança a usar o número como um método de raciocínio exato e a apreciar a eficiência de seu emprêgo nas operações.

2. *Desenvolvimento dos Fatos Numéricos e Processos Fundamentais*

Para cada um dos quatro processos fundamentais há um grupo de fatos básicos que devem ser dominados. A aprendizagem dêsses fatos se faz gradativamente em vários anos e é indicada pela maior prontidão e acêrto nas respostas.

O currículo de Aritmética da escola elementar inclui também uma cuidadosa gradação para o desenvolvimento dos quatro processos com números inteiros, frações ordinárias, decimais e medidas. Êste desenvolvimento gradual é geralmente paralelo ao uso de problemas nos quais os processos são apresentados em situações sociais. Os métodos para o ensino dêsses processos serão discutidos nos capítulos seguintes. Os métodos de seleção e organização dessa matéria serão apresentados em outra parte dêste Capítulo.

3. *Medidas e sua Aplicação*

O ensino de medidas já foi considerado certa vez como um dos aspectos mais importantes do programa de Aritmética. As crianças eram obrigadas a decorar as tabelas de medidas e a aplicá-las em problemas. No currículo moderno reconhece-se que os conceitos sôbre medidas são desenvolvidos num processo gradual que se desenvolve através de vários anos. Mais ainda, as medidas que a criança aprende a aplicar crescem em dificuldade à proporção que ela progride na escola. O aluno deveria ter muitas experiências em que a medida é a chave da situação. Êle aprende a usar efetivamente os instrumentos de medida e como localizar qualquer fato sôbre unidades de medida no apêndice de seus livros-texto ou em qualquer material de referência quando em face de uma situação problemática. Êle deveria aprender a fazer estimativas e aproximações de medidas e a fazer variações, bem como perceber o conceito de precisão e seu papel nas atividades humanas.

As medidas oferecem um caminho para a aprendizagem dos conceitos mais simples de Geometria, como medida linear, perímetro, medidas quadradas no cálculo da área de retângulos, e escalas. A construção de gráficos e diagramas é outra aplicação da Geometria.

No Capítulo 14 há uma discussão mais ampla sôbre a história das medidas e como ensiná-las.

4. *Comunicação*

As crianças são sempre solicitadas a comunicar e a interpretar fatos e idéias quantitativos. Aliás, leitura envolve não sòmente uma compreensão de quantidade e outros conceitos numéricos, mas também a habilidade de aplicar essas idéias a novas relações e situações.

A Matemática torna possível ao homem registrar e comunicar idéias e descrever fenômenos em têrmos quantitativos. Pelo uso de símbolos a comunicação é concisa, ordenada e exata. Para comunicar e interpretar idéias quantitativas, as crianças necessitam de vocabulário, com o qual identificar, descrever e mostrar as relações. O vocábulário se desenvolve por meio de muitas e variadas experiências com números e conceitos numéricos.

Devem ser objeto de atenção as expressões quantitativas encontradas na leitura e no estudo de tôdas as áreas do currículo. O meio mais efetivo e apropriado para ajudar o aluno a desenvolver a sua capacidade e habilidade de interpretar êsse tipo de material é levá-lo a usar essas informações em situações nas quais elas são aplicadas. Idéias matemáticas, gráficos, diagramas etc. têm significação para a criança quando são relacionados às suas experiências. Sob uma direção segura e sistematizada, as crianças vão gradualmente desenvolvendo os conceitos numéricos e aprendem a expressá-los em linguagem mais específica e acurada e com maior precisão.

5. *Estudo de Instituições Sociais que Operam com Números*

Devido ao reconhecimento do aspecto social da Aritmética, têm sido incluídas no currículo unidades de trabalho sôbre instituições sociais que operam à base do número. Pesquisas feitas em livros-texto mostram que muitas unidades de trabalho envolvendo tais atividades e instituições como as que se seguem estão sendo incluídas no currículo de Aritmética:

a) Como é usado o dinheiro que se paga em selos.
b) O que se compra com uma determinada quantia.
c) O preço de uma viagem.
d) Como fazer previsão do tempo (serviço de Meteorologia).
e) Práticas comerciais como contas-correntes e empréstimos.
f) Salários em diversas ocupações.
g) A Aritmética no esporte.
h) Como são usadas as decimais na vida diária.
i) Compras a prestação.

Tópicos como êstes algumas vêzes constituem a base para a organização de grupos de problemas no livro; outras vêzes o professor planeja um estudo mais extenso quando um tópico despertar maior interêsse em sua classe.

c. SELEÇÃO DO CONTEÚDO DO CURRÍCULO

Princípios Para a Seleção de Matéria

Para a seleção de matéria para o currículo, devemos levar em consideração os seguintes princípios:

1) *O conhecimento da Aritmética é essencial para o seu domínio e para a aprendizagem de outros ramos mais elevados da Matemática.*

A Aritmética é um campo de estudo sistemàticamente organizado que pode ser analisado em seus elementos constituintes. Por exemplo, o conhecimento dos fatos fundamentais é pré-requisito para se encontrar a soma de números maiores, a adição é pré-requisito para a reserva na multiplicação, em operações com frações, na álgebra e em todos os ramos da Matemática. Podemos fazer análise semelhante nos elementos e inter-relações de tôdas as operações numéricas. Isto oferece uma boa base para a seleção do conteúdo do currículo.

2) *O conhecimento da Aritmética é útil para a realização de experiências dentro e fora da escola.*

Alguns conhecimentos necessários à realização de atividadesdes da vida diária são considerados úteis, enquanto outros, cuja contribuição é mínima para o desenvolvimento das mesmas atividades, não satisfazem ao princípio de utilidade. Êste critério é pouco aplicado em muitos currículos. Wilson fêz um estudo dos números e processos aritméticos requeridos para a solução de problemas encontrados pelas crianças das sexta e oitava séries (1º e 2º ano ginasiais). Esta informação foi coletada pelos pais das crianças num período de duas semanas. Estudos semelhantes têm sido feitos sôbre os números que aparecem em jornais, livros e revistas, notas de venda, e outras fontes. Usualmente tais informações eram ao nível do adulto. A ênfase era tôda sôbre os números em si, sem nenhuma atenção à situação social em que êles apareciam ou aos problemas que surgiam em tais situações. Muitos estudos sôbre o uso de números envolvem o seu emprêgo em certas profissões. Qualquer tentativa no sentido de limitar, na Escola Primária, o trabalho com decimais[1] em suas aplicações industriais demonstra desconhecimento do fato de que muitos trabalhadores deveriam estar familiarizados com os números decimais e que a habilidade de usá-los inteligentemente pode ser essencial no manuseio das máquinas modernas.

Em quase todos os estudos, a utilidade estêve definida em têrmos de freqüência no uso. Os itens mais freqüentemente empregados pelos adultos eram considerados como mais úteis e por conseguinte mais valiosos como conteúdo de currículo. A falta de consideração especial ao contexto social em que aparecem os números e a falta de consideração às necessidades pessoais e sociais restringiram muito os resultados dêsses estudos sôbre a utilidade.[2]

3) *A matéria tem interêsse para o aluno e está dentro de sua capacidade de experiência.* Pesquisas recentes mostram que a Aritmética figura entre as matérias de maior interêsse para as crianças. Talvez se deva isto aos esforços dos organizadores de currículo e autores de livros-texto que procuram incluir conteúdo baseado nos interêsses e atividades das crianças. O sucesso crescente no estudo da Aritmética foi devido ao emprêgo de novos métodos e ao uso de recursos audiovisuais, que podem ser um fator importante nesta situação.

Alguns autores sustentam que o currículo de Aritmética não pode ser planejado com antecedência e que deveria ser baseado no interêsse imediato das crianças. Acredita-se também que a base para a seleção do conteúdo deveriam ser os problemas que surgem na escola e na comunidade. Essa tendência para o ensino incidental dá origem ao ensino não-sistematizado, característico das primeiras séries em algumas escolas. Estudos recentes mostram que há certos interêsses mais ou menos persistentes nos vários níveis escolares. Isto possibilita ao professor a previsão do conteúdo que despertará maior ou menor interêsse por parte das crianças de determinada idade nos vários níveis escolares. Quanto mais comuns forem as experiências vividas pelas diversas crianças mais semelhantes serão seus interêsses. Assim sendo, é necessário adaptar o conteúdo do currículo ao interêsse de grupos de crianças com necessidades diferentes. Um livro-texto não pode ser escrito de maneira a atender a todos os interêsses das crianças em geral e em qualquer ponto do país. Na classe, o professor é o responsável pela seleção de experiências que atendam às necessidades de seu grupo de alunos. O conteúdo de um currículo será considerado bom quando os interêsses e necessidades das crianças forem satisfeitos.

[1] WANDT (E.) e BROWN (G. W.), "Non-Occupational Uses of Mathematics — Mental and Written — Approximate and Exact", *The Arithmetic Teacher*, 4:151-154.

[2] Os autores desejam agradecer a valiosa contribuição dada sôbre os princípios gerais no livro de B. O. SMITH, W. U. STANLEY e J. H. SHORES, *Fundamentals of Curriculum Development*. Yonkers: World Book Company, 1950.

4) *A Aritmética contribui para a autodireção e compreensão da sociedade pelo aluno.*

A sociedade atual se acha num processo de transição no qual várias formas de existência e mudanças nas instituições sociais vão surgindo. Os líderes educacionais afirmam que a escola pode assistir a sociedade nesta mudança, modelando o futuro pela seleção de conteúdo tendo em vista esta finalidade. A história de como a Matemática e a civilização se desenvolveram juntas é o tema do livro de Lancelot Hogben, *The Wonderful World of Mathematics*[3] (*O Mundo Maravilhoso da Matemática*). Êsse livro mostra que o crescimento e desenvolvimento da civilização é também a história do crescimento e desenvolvimento da Matemática como ciência. Descreve a formulação da Matemática moderna por meio de gênios como Galileu e Newton. Termina com uma descrição do papel da Matemática e da ciência nas maravilhas técnicas da atualidade e sugere que talvez maiores contribuições ainda sejam feitas no futuro.

Um meio de trazer o currículo de Aritmética atualizado é correlacioná-lo com os problemas e tendências sociais mais importantes. Quando se faz isto, seleciona-se o conteúdo de modo a caminhar lado a lado com as mudanças em curso. O estudo dos

[3] Publicado por Garden City Books, Garden City, N. I., 1955.

meios empregados pela sociedade na solução de certas situações no passado e das futuras tendências que parecem surgir pode levar à elaboração de regras de conduta de profunda significação social. O aluno mesmo poderia sentir as contribuições que pode fazer ao progresso social pela participação no estudo cooperativo e na solução de problemas como membro de uma sociedade democrática.

Significação Dêsses Princípios

Êstes quatro princípios de seleção de conteúdo não são igualmente focalizados na organização de programas hoje em dia. Os princípios merecem maior ou menor relêvo, de conformidade com os propósitos e perspectivas sociais das diversas escolas de pensamento. Os conservadores, como os essencialistas, dão ênfase ao conteúdo de aprendizagem organizada no campo da Matemática. Acreditam que os números devem ser ensinados como um instrumento que pode ser dominado e subseqüentemente aplicado nas situações da vida diária. Êste é o ponto de vista estático e não dinâmico. Outros dão maior importância ao princípio de utilidade. Algumas vêzes êste princípio é aplicado de maneira muito restrita, limitando-se aos números e processos usados por adultos e pelas crianças nas atividades da vida diária. Ao papel do número no pensamento, nas comunicações e na solução dos problemas é dada pouca consideração.

Outros dão mais importância ao interêsse como critério de escolha do conteúdo para currículo. Esta corrente tende a dar uma consideração indevida ao interêsse imediato da criança em detrimento do valor social dêsses interêsses, ou da sua contribuição para a formação dos conceitos aritméticos. Nem sempre as crianças estão interessadas naquilo que muitas pessoas bem intencionadas pensam que elas deveriam estar. Algumas medidas precisam ser tomadas para provocar o interêsse das crianças por alguns tópicos e problemas de significação social. Esta é uma das razões pelas quais o organizador de um currículo deve prever as contribuições que a instrução aritmética pode trazer para o desenvolvimento de uma participação individual dos alunos em atividades cuja contribuição será o desenvolvimento de maior compreensão de uma situação social.

Como Proceder na Seleção do Conteúdo Para o Currículo

Pode-se usar quatro processos básicos na seleção do conteúdo para o currículo:

1. Processo crítico
2. Processo experimental
3. Processo analítico
4. Observação do consenso geral e das crenças.

1. *Processo Crítico*

Os problemas básicos a serem considerados num processo crítico ou de julgamento na seleção dos tópicos são: "Que objetivos devem ser propostos num programa de Aritmética? Como pode a escola alcançá-los de maneira adequada? Que conhecimentos e que experiências serão mais indicados para se alcançarem êsses objetivos nas condições existentes?"

Êsse processo de julgamento requer, inicialmente, grupos de discussão quanto ao assentamento dos objetivos e metas. Êsses objetivos podem ser gerais para o currículo como um todo, ou específicos para o programa de Aritmética. Análises já existentes de objetivos deveriam ser avaliadas, criticadas e reconstituídas se necessário. Preconceitos pessoais e de grupo e racionalização deveriam ser examinados. Podem ser modificados e reorganizados para que haja concordância entre êles. O valor do julgamento torna-se muito limitado quando o conteúdo de um currículo é selecionado por pessoas mal informadas ou destituídas de espírito crítico, baseadas apenas nos seus preconceitos e crenças. Quando usado por pessoas bem informadas e capazes de uma crítica judiciosa, levando em consideração as condições existentes, o processo crítico é um dos mais importantes para a seleção do conteúdo de um currículo. Um professor defronta-se continuamente com o problema de julgar e selecionar o conteúdo e planejar as experiências de modo a satisfazer às necessidades de sua classe ou de cada criança individualmente.

2. *Processo Experimental*

O processo experimental procura responder a perguntas como "Podem as crianças mais novas aprender Aritmética? Até que ponto as crianças aprendem Aritmética através de atividades? Em que série deveria ser ensinada a subtração de frações, como 7 3/8 − 5 5/6? Como deveríamos estabelecer o currículo para as crianças que têm aptidão especial para a Aritmética?"

As respostas serão dadas por meio de currículos em experiência sob certas condições e técnicas de contrôle que reduzam ao mínimo os erros experimentais devidos aos preconceitos de pessoas ou de grupos, às condições extrínsecas e a julgamentos falsos. É excessivamente difícil controlar as condições nas quais é feita uma experimentação de currículo. É pràticamente impossível repetir uma dada experiência em igualdade de condições, por causa da complexidade dos vários elementos que variam muito de uma situação para outra. Não obstante estas limitações, os resultados de qualquer estudo mais ou menos controlado podem ser considerados por qualquer pessoa que pretenda julgar o valor de qualquer currículo.

O padrão geral para experimentação na organização de currículo consiste dos seguintes elementos:

(a) Um problema para ser resolvido ou uma idéia para ser experimentada

(b) A organização de um plano para o levantamento das informações necessárias

(c) Contrôle das condições sob as quais se faz a experiência

(d) Determinação dos resultados

(e) Conclusões tiradas.

Êste esquema foi seguido mais ou menos efetivamente por Harap[4] na aprendizagem de operações com frações ordinárias e números decimais ensinadas através de um programa bem ativo. Nesses estudos os processos eram aplicados quando surgiam as oportunidades em grande variedade de situações sociais selecionadas para assegurar a aplicação dos processos ensinados.

3. *Processo Analítico*

Êste processo consiste em analisar as coisas que as pessoas fazem para verificar os conhecimentos aritméticos que funcionam nessas atividades. Êste processo tem sido usado largamente para determinar a utilidade do conteúdo do currículo de Aritmética. Os três processos de análise geralmente usados seguem um padrão geral. Em *análise de atividades,* o primeiro passo é determinar as situações sociais em que as crianças empregam os números e os processos numéricos e analisar o uso dos números nessas situações. Os resultados constituem base de matéria instrucional. Em *análise de trabalho,* esta técnica se aplica às atividades vocacionais, usualmente ao nível do adulto. Por exemplo, o trabalho de um professor que demonstra grande sucesso em tornar a Aritmética compreensível para as crianças fornece grande ajuda para um programa de formação de professôres. A análise do trabalho da criança quando desenha um gráfico ou faz o desenho de uma escola ilustra o uso do processo de análise de trabalho ao nível da criança. Um terceiro processo analítico consiste em determinar os conhecimentos e habilidades mais gerais. Assim, um dos meios de determinar os tipos de números, operações numéricas etc. mais usados é analisar o conteúdo de materiais impressos, como livros de cozinha, jornais ou noticiários de acontecimentos esportivos. As técnicas de análise mais freqüentemente usadas são:

a) *Entrevistar* uma pessoa para obter a informação desejada. Usa-se muitas vêzes uma fórmula preparada com os itens-chave para guiar a entrevista.

b) *Realizar uma operação,* separando-a em partes, para determinar a aritmética envolvida. Assim, a análise feita por um professor das habilidades necessárias no processo da divisão poderá estabelecer uma base para as etapas a serem seguidas para o ensino efetivo do processo.

c) *Análise do trabalho por um profissional* que seja familiarizado com detalhes, por exemplo, o caixeiro de um armazém.

d) *Questionário*: um inquérito para determinar o uso do número na vida da criança fora da escola.

e) *Análise documentária,* compreendendo um estudo sistemático da Aritmética que aparece nos livros, compêndios, nos programas, revistas, jornais, reportagens, registros públicos etc. A análise poderia incluir números, conceitos e aplicações da Aritmética. O resultado desta análise pode esclarecer mais quanto à aritmética necessária para as pessoas que usam ou preparam êsses documentos.

f) *Observação das atividades* das pessoas para conseguir dados sôbre o contato que elas têm com números e suas aplicações nas atividades diárias. Baseados nessa técnica os pais têm preparado relatórios sôbre as experiências de seus filhos, no lar ou em qualquer lugar, envolvendo números.

Gostaríamos de lembrar, entretanto, que os processos de análise descritos dão informação sôbre o que as crianças estão realmente fazendo, mas não revelam se elas compreendem o que fazem, nem dão meios para melhorar a sua atuação. Os processos de análise não determinam objetivos mas fornecem uma grande riqueza de informações sôbre a matéria e atividades pelas quais os objetivos podem ser delineados.

4. *Observação do Consenso Geral e das Crenças*

O processo de consenso envolve meios para assegurar o conhecimento da opinião pública sôbre o conteúdo do currículo. Uma ilustração dêsse princípio é um inquérito entre pais, professôres ou homens de negócio sôbre qual a sua opinião acêrca dos aspectos da Matemática que deveriam ser incluídos ou focalizados no currículo. Em geral se usa um questionário. Em alguns casos se tem lançado mão, também, de entrevistas ou conferências com pequenos grupos. Recentemente têm sido usados questionários cuidadosamente organizados nos quais se registra o julgamento sôbre o mérito dos itens relacionados.

Êste método tem tôdas as limitações do processo de julgamento já discutido. A menos que se faça uma discussão preliminar e um esclarecimento dos problemas e itens apresentados, é quase certo que as respostas serão ditadas por interêsses pessoais, tradição e prevenções não examinados.

[4] HARAP (H. L.) e MAPES (C.), "Learning the Fundamentals in an Activity Program", *Elementary School Journal*, 34:515-526.

—, "The Learning of Decimals in an Activity Program", *Journal of Educational Research*, 29:686-693.

d. ORGANIZAÇÃO DO CURRÍCULO

Quando iniciar o Ensino de Aritmética?

Atualmente há uma grande variedade de opiniões quanto à introdução da Aritmética nas primeiras séries. Em algumas escolas, o ensino de Aritmética é iniciado no jardim da infância; em outras, um ensino sistematizado dessa matéria é introduzido na segunda ou mesmo terceira série. Em muitas escolas o ensino de Aritmética é inteiramente incidental, sem organização nem planejamento. Os resultados de tais programas não têm sido satisfatórios.

A decisão quanto à época de iniciar a aprendizagem de Aritmética deveria basear-se nas necessidades das crianças mais novas e na sua capacidade para aprendê-la. As informações dadas na Tabela A sôbre os conhecimentos que as crianças trazem ao entrar para a escola são baseadas numa análise feita por Brownell[5] em cêrca de oitenta investigações sôbre os conhecimentos aritméticos das crianças das 1ª e 2ª séries. A maioria dos itens nesta lista é relacionada a alguns aspectos do sistema de numeração como tal, mais do que em suas aplicações nas atividades da vida diária. A conclusão de Brownell foi que "as crianças ao entrarem para a escola já sabem muita coisa sôbre os números; deduz-se que elas podem aprender mais; nada se ganha e muito se perde se a escola adia para as séries mais adiantadas a sua obrigação".

TABELA A

O Conhecimento Aritmético dos Principiantes

A. Conhecimentos bem desenvolvidos quando as crianças entram para a escola.

1. Contagem de rotina, de 1 em 1 até 20.
2. Contagem de objetos até 20.
3. Identificação, pela contagem, do número de objetos até 20.
4. Combinações numéricas com objetos em situações simples e em somas de 6 ou 7.
5. Metades e quartos de um inteiro.
6. Reconhecimento das horas certas.
7. Reconhecimento das moedas.
8. Reconhecimento de *círculos* e *quadrados* desenhados.

B. Mais ou menos desenvolvidos entre uma porcentagem *razoável* de crianças.

1. Contagem de rotina de 1 em 1 até 100; de 10 em 10 até 100, e de 2 em 2 até 20 ou 30.
2. Combinações numéricas com somas de 9 ou 10 em problemas orais.
3. Leitura de números até 10.

C. Conhecimentos desenvolvidos em menos de um têrço das crianças.

1. Leitura de números além de 10.
2. Escrita de números além de 10.
3. Contagem de 3 em 3 até 30.
4. Frações próprias não-unitárias.
5. Reconhecimento das meias-horas e quartos-de-hora.
6. Reconhecimento do tamanho de unidades de medida de volume e linear.
7. Valor relativo das moedas.

[5] BROWNELL (W. A.), *Arithmetic in Grades I and II*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1941.

Tipos de Organização do Conteúdo de Aritmética

Dois planos distintos de organização se desenvolveram em alguns anos: o plano tipo *escada* e o plano *espiral*. Nos programas mais antigos, o tipo *escada* era o adotado. Nesse plano a atenção era focalizada exclusivamente em um processo de cada vez. Klapper[6] faz a seguinte descrição dêsse plano:

> Em uma série, o assunto de numeração era todo esgotado; na série seguinte, a adição recebia atenção exclusiva. De modo semelhante, a subtração, a multiplicação, a divisão, sistemas de medidas, decimais e porcentagem, um por um, eram ensinados sucessiva e completamente antes que outro assunto ou processo fôsse abordado. Na *série da adição* as crianças somavam quaisquer quantidades. Na *classe* ou *classes das frações* tôdas as modalidades de exercícios com frações eram feitas de modo a assegurar um domínio completo das mesmas.

Neste plano, o conteúdo aritmético é repartido e as relações entre as suas diversas partes não são desenvolvidas. Quando frações ordinárias e decimais são ensinadas como áreas isoladas, a criança não chega a perceber que $\frac{3}{4}$ e 0,75 têm o mesmo valor. Há também carência de uma boa graduação do assunto. Assim, uma criança aprenderia a somar números de cinco ou seis algarismos em um ano, enquanto, no ano seguinte, ser-lhe-ia ensinado como subtrair 37 de 69.

Pelo moderno plano espiral, vários aspectos da Aritmética são ensinados simultâneamente e elementos de complexidade crescente vão sendo introduzidos de forma espiral com círculos cada vez mais amplos. O resultado é que há grande variedade de aprendizagem em determinada série e um número limitado de habilidades é desenvolvido em qualquer das áreas. Por êste plano, torna-se possível maior correlação entre os vários ramos da Aritmética. Isto leva a associações mais racionais e melhor compreensão das diversas áreas. A aplicação dos processos aritméticos se torna mais natural e mais variada. A graduação do conteúdo é melhor que no plano tipo *escada*, porque o assunto aumenta gradualmente, de série

[6] KLAPPER (Paul), *The Teaching of Arithmetic*. Nova Iorque: D. Appleton-Century Co., Inc., 1934, pág. 47.

para série, de complexidade e dificuldade. Os processos e generalizações são introduzidos com desenvolvimento gradativo que leva em consideração a crescente maturidade da criança. Uma revisão sistemática do trabalho feito nas séries anteriores assegura a manutenção das habilidades adquiridas através de uma prática bem distribuída.

O Papel do Livro-Texto

Em muitas escolas a organização do conteúdo é determinada pelo livro-texto. Usualmente o conteúdo é arranjado num plano espiral modificado. Cada série dá mais ênfase a certas fases das diversas áreas da Aritmética de modo a constituir uma contribuição mais efetiva para cada nível escolar. Para ilustrar, daremos aqui a seqüência graduada da multiplicação de números inteiros como foi apresentada pelo programa de Los Angeles em 1957:

Terceira Série — O conceito de adição de grupos iguais é desenvolvido para encontrar o seu total, como dois grupos de 5, dois de 10 etc.

Quarta Série — Todos os fatos de multiplicação são aprendidos e o processo de multiplicação por número representado por um algarismo.

Quinta Série — Multiplicação por dois algarismos.

Sexta Série — Multiplicação por três e quatro algarismos.

Êste programa, òbviamente, aplica o desenvolvimento espiral do processo. Com pequenas variações, os livros-texto seguem a mesma seqüência.

Os autores de livros-texto enfrentam o problema de organizar o conteúdo de modo a atender às implicações de cada série. A prática é variada nesse sentido. Alguns livros-texto são organizados num plano espiral, enquanto outros apresentam unidades de estudo relativamente grandes com um largo período de tempo a elas devotado. A seguinte seqüência de tópicos demonstra a organização espiral de um livro típico de quinta-série:

Capítulo 1. Revisão sistemática e diagnóstico sôbre os assuntos estudados nas séries anteriores.

Capítulo 2. Multiplicação por dois algarismos.

Capítulo 3. Divisão por dois algarismos — um algarismo sòmente no quociente. O quociente estimado é o quociente correto em todos os casos.

Capítulo 4. Adição e subtração de frações com o mesmo denominador — sem reserva na adição nem reagrupamento na subtração.

Capítulo 5. Divisão por dois algarismos, com um, dois, três ou quatro algarismos no quociente, incluindo as dificuldades com zero.

Capítulo 6. Adição e subtração de frações com denominadores iguais, com reserva na adição e reagrupamento (empréstimo) na subtração.

Capítulo 7. Gráficos, desenhos sob escalas; áreas.

Capítulo 8. Adição e subtração de metades, quartos e oitavos.

Capítulo 9. Introdução de decimais, incluindo adição e subtração de décimos e centésimos.

Note-se a lista dos tópicos, a extensão do período dedicado a cada um, o tratamento dado e a maneira como são distribuídos pelo ano todo. Em cada capítulo há uma série de exercícios e problemas nos quais os processos são aplicados. Isto mantém o treino das habilidades em alto nível. Um exame em diversos livros-texto e programas prova que o arranjo da seqüência dos tópicos varia largamente entre êles em tôdas as séries. É prova de que não há uma concordância geral sôbre o conteúdo do currículo nas várias séries. A organização e seqüência do assunto varia em função da opinião do autor quanto à melhor maneira de organizar o material. Deve-se notar também que os livros-texto não podem apontar uma seleção de aplicações sociais de valor e interêsse gerais. O professor deve sentir-se livre para suplementar o livro-texto chamando a atenção das crianças para as situações locais em que aspectos de grande significação aritmética e suas aplicações são elementos vitais.

Sugestões Para a Distribuição da Matéria nas Diversas Séries

Há diferentes caminhos para proceder à distribuição do conteúdo pelas diversas séries. Um dêles é determinar as áreas da matéria de acôrdo com os interêsses e níveis de desenvolvimento das crianças. Para fazer isto, os professôres devem conhecer os interêsses, experiências anteriores e habilidades das crianças e então selecionar a matéria de acôrdo com êste conhecimento. Outra direção a seguir é o estabelecimento de conteúdo instrucional a determinada série e então ajustar a criança a essa organização. Esta orientação dá ênfase à experiência geral e conhecimentos prévios. Um terceiro caminho é ajustar os objetivos instrucionais adaptando o conteúdo e atividades da criança, até mesmo modificando os objetivos da instrução em têrmos de necessidades e habilidades individuais da criança.

É mais lógico, parece, que todos êstes caminhos sejam seguidos em conjunto do que separadamente. A menos que isto seja feito, a graduação do currículo poderá atender apenas às necessidades e interêsses da criança em detrimento de um currículo adequado, ou doutro modo o conteúdo será mais focalizado com prejuízo das necessidades da criança e seu desenvolvimento.

A natureza lógica da Aritmética e sua crescente complexidade são fatôres decisivos a serem considerados na seqüência dos tópicos. Assim, é evidente que para efetuar de modo convencional o exemplo de divisão ao lado é necessário que o indivíduo saiba: (1) como estimar o quociente correto pela experiência que tem com a divisão por um número de um algarismo; (2) como dividir por dois algarismos em exemplos mais fáceis; (3) como multiplicar 27 por 6, o que envolve transporte de reserva (processo aditivo), e como subtrair 162 de 185. Tôdas essas habilidades são pré-requisitos que devem ser aprendidos prèviamente se se deseja êxito na aprendizagem da divisão. Uma das razões de dificuldades no processo longo de divisão é a complexidade das habilidades envolvidas. Conclui-se que o ensino da divisão por dois algarismos, como no exemplo acima, seja adiada até que as habilidades envolvidas sejam dominadas.

$$\begin{array}{r|l} 185 & 27 \\ \hline 162 & 6 \\ \hline 23 & \end{array}$$

Por causa das diferenças de desenvolvimento, experiências e habilidades das crianças de uma classe, o professor não pode esperar que tôdas elas atinjam o mesmo nível de sucesso, mas deveria ajustar certos padrões de desenvolvimento às suas habilidades e capacidades. Na seleção de experiências na qual as aplicações da Aritmética são focalizadas, o professor deveria levar em consideração não só as necessidades, habilidades e interêsses da criança, mas também a utilidade da matéria e sua contribuição para o desenvolvimento de conceitos aritméticos.

Processos Usados na Graduação da Matéria pelas Diversas Séries

São quatro os processos gerais que têm sido usados para determinar a distribuição da matéria nas diversas séries:

1) pesquisas sôbre as práticas correntes;
2) julgamento;
3) estudo objetivo das dificuldades de aprendizagem do assunto;
4) experimentação.

O estudo das práticas em uso envolve um exame dos livros-texto e programas para estabelecer a freqüência média de certos tópicos em determinada série. Em graus variados, a validade das práticas correntes é determinada com base no julgamento da graduação feito por pessoas em grupos bem informados e no conhecimento da dificuldade relativa dos vários elementos da Aritmética, estabelecida por estudos científicos e experimentações. A análise das práticas correntes leva a resultado desapontador devido à grande variedade na distribuição da matéria de escola para escola, o que torna difícil estabelecer-se um padrão. O problema se complica ainda mais com os fatos conhecidos sôbre as diferenças individuais e capacidades das crianças que o professor deve levar em consideração na sala de aula ao ajustar o currículo de modo a atender às necessidades de seus alunos. O currículo deveria ser não sòmente flexível, mas também adaptável às condições de ambiente e às necessidades das crianças em situações locais. Idealmente o professor deveria estudar as necessidades das crianças e experimentar organizar as experiências de aprendizagem à vista da capacidade e interêsse individuais.

A Dificuldade Relativa dos Fatos Numéricos e Processos

A dificuldade da Aritmética pode ser determinada pelo sucesso com que as crianças a dominam. Um processo largamente usado para determinar êsse sucesso é a aplicação de testes contendo itens em diferentes níveis de habilidade e o cálculo da porcentagem de acêrto. Segue-se a teoria que nos diz que julgamento baseado em informações objetivas oferece mais segurança para a graduação da matéria do que o julgamento pessoal. Uma ilustração dos tipos de informação que êsse processo fornece é dada na Tabela B. Os dados demonstram a relativa dificuldade de alguns exemplos das quatro operações com números inteiros, frações e decimais. O nível de dificuldade para cada tipo de exemplo é medido pela porcentagem de respostas certas numa amostra de crianças escolhidas ao acaso em tôdas as partes do país. Tôdas elas eram de idade e inteligência aproximadamente normais. Os dados básicos foram fornecidos pelo *California Test Bureau*, Los Angeles, Califórnia.

Os itens foram agrupados de acôrdo com os níveis de dificuldade. O Grupo I consiste de cinco exemplos cuja porcentagem de acêrto se situa no intervalo de 90% a 100%. A porcentagem de acêrto variou dêsse alto nível de correção até menos de 20%. Os resultados dos itens dos Grupos I e II são os esperados de crianças que já terminaram a sexta série. Entretanto, os dados para os outros grupos deveriam levantar sérias dúvidas sôbre a capacidade de crianças normais para aprender os tipos de habilidades que apresentam. Os exemplos dos Grupos VIII e IX envolvem habilidades matemáticas de pouca utilidade social, mas servem para testar a compreensão de princípios matemáticos. Os professôres das quinta à oitava séries deveriam examinar cuidadosamente os detalhes incluídos na tabela e considerar as suas implicações para a graduação da matéria e o nível de correção esperado, no fim da escola elementar, das crianças de maior ou menor índice de habilida-

TABELA B

Escala de Dificuldades Para Tipos Selecionados de Exemplos Baseados no Sétimo Grau. Resultados Para Crianças de Idade Normal e, aproximadamente, Q.I. 100

GRUPO I — 90-100%

$\begin{array}{r} 47 \\ +\ 45 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 71 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 400 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $24\ /\ \underline{6}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 500 \\ \times\ 40 \\ \hline \end{array}$

GRUPO II — 80-89%

$\begin{array}{r} 27 \\ 38 \\ 51 \\ 74 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 387 \\ -\ 252 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 609 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $248\ /\ \underline{4}$ $\quad$ $\begin{array}{r} \frac{1}{4} \\ +\ \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$

GRUPO III — 70-79%

$\begin{array}{r} \text{Cr\$}\ 56{,}35 \\ 93{,}74 \\ 12{,}98 \\ 3{,}07 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 370 \\ -\ 1\ 890 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 486 \\ \times\ 32 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $535\ /\ \underline{5}$ $\quad$ $\begin{array}{r} \frac{2}{5} \\ -\ \frac{1}{5} \\ \hline \end{array}$

GRUPO IV — 60-69%

Cr\$ 30.00 + Cr\$ 12 + Cr\$ 4 + Cr\$ 1,90 = $\quad$ $\begin{array}{r} \text{Cr\$}\ 17{,}25 \\ -\ 1{,}45 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8} =$ $\quad$ $8\ 610\ /\ \underline{42}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 12\ \frac{1}{4} \\ +\ 3\ \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$

GRUPO V — 50-59%

$\begin{array}{r} \frac{7}{8} \\ +\ 4\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} \frac{3}{4} \\ -\ \frac{1}{8} \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 5\ 023 \\ \times\ 807 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $5{,}04\ /\ \underline{3}$ $\quad$ $\frac{1}{5} \div 2 =$

GRUPO VI — 40-49%

Cr\$ 200 − Cr\$ 14,25 = $\quad$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ $\quad$ $6 \times 2\frac{2}{3} =$ $\quad$ $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3\ \frac{4}{5} \\ +\ 4\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$

GRUPO VII — 30-40%

$\begin{array}{r} 53\ \frac{1}{2} \\ 12\ \frac{2}{3} \\ +\ 32\ \frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 32{,}3 \\ \times 0{,}035 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $4\frac{1}{4} \times 6\ \frac{2}{3} =$ $\quad$ $3\ 262\ /\ \underline{34}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 9 \\ -\ 5\frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$

GRUPO VIII — 20-29%

$120 \div 1\ \frac{1}{5} =$ $\quad$ $5\ \frac{1}{2} + 3{,}5 =$ $\quad$ $\begin{array}{r} 545 \\ \times\ 13 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $0{,}504\ /\ \underline{0{,}03}$

GRUPO IX — Abaixo de 20%

$57{,}09 - 7{,}0435 =$ $\quad$ $6\ \frac{3}{4} \div 2\ \frac{1}{3}$ $\quad$ $8\ /\ \underline{0{,}04}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 4\ \text{h} \quad 4\ \text{min} \quad 7\ \text{seg} \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $0{,}13\ \frac{1}{3} + 14{,}2 =$

de. É altamente provável que os itens do Grupo V ao IX sejam muito difíceis para as crianças de capacidade média ou abaixo da média. É possível também que resultados muito melhores sejam alcançados se o ensino e materiais usados nas diversas classes tiverem sido aplicados da maneira sugerida por êste livro.

A Tabela C contém informação adicional que mostra o crescimento da habilidade em Aritmética em crianças de idade e habilidade mental normais, medidas pela variação das porcentagens de correção em um grupo de exemplos típicos das séries 4.1 à 8.1. Os dados básicos também foram fornecidos pelo *California Test Bureau.*

Um estudo das porcentagens de acêrto em cada exemplo nas séries sucessivas mostrará que há um crescimento gradativo de correção, de série para série. Os exemplos de 1 a 3 são típicos da quarta série. A habilidade para resolver os onze exemplos cresce de série para série, porém em níveis diferentes de crescimento. Se alguém julga 80% de correção como porcentagem satisfatória, tal resultado para o item 1 só será atingido na série 6.1; para o item 2 não seria obtido nem na série 8.1; para o item 3 será alcançado na série 7.1; para o item 4, na série 8.1. Esta porcentagem de conhecimento não será alcançada em nenhum dos outros exemplos, exceto nos de números 6 e 8. Pergunta-se: "Em que série deveriam exemplos dêsse tipo ser incluídos no currículo? Até que ponto deveriam ser consideradas essas informações no estabelecimento dos níveis de conhecimento para as diversas séries? Podem os níveis de conhecimento aumentar se se melhorarem os métodos de ensino? O ensino da Aritmética pela compreensão poderia melhorar o resultado?" Estas e outras questões semelhantes deveriam ser cuidadosamente investigadas.

Idade Mental Como Fator de Graduação

Muitos estudos importantes sôbre idade mental têm sido feitos no sentido de estabelecer o nível mental em que as crianças podem aprender determinada operação sem esfôrço e sem tensões indevidas. O mais importante dêles foi o trabalho da Comissão dos Sete, que conduziu uma série de estudos experimentais em tôdas as partes dos Estados Unidos. Baseada em seus estudos essa Comissão recomendou a idade mental em que as várias operações podem ser ensinadas. A conclusão geral foi de que a maioria do centeúdo aritmético estava sendo ensinada antes de as crianças terem capacidade mental para aprender. Os detalhes dêsses estudos são dados no anuário *Child Development and the Curriculum.*[7]

Comissão do Sete

[7] *Thirty-Eight Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1939, Capítulos 14 e 15.

TABELA C

Crescimento Medido Pelo Aumento de Porcentagem de Precisão, em Crianças de Idade e Q.I. Normais, nos Graus Consecutivos

	Série				
Tipos de Exemplos	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1
Operação com um número inteiro					
1. $39 + 48$	70	78	80	95	95
2. $6\,805 - 2\,438$	24	42	53	68	79
3. 805×9	21	48	77	85	81
4. $8\,610 / 42$	8	5	42	69	79
Operações com frações					
6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	8	4	43	80	89
7. $7 - 3\frac{1}{3}$	5	2	7	34	52
8. $\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} =$	4	7	11	61	82
9. $4\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4} =$	8	8	10	11	32
Operações com decimais					
10. $285{,}7 \times 3$	8	15	27	16	43
11. $7{,}02 / 6$	7	17	33	58	70

Devido às recomendações da Comissão dos Sete, muitas partes do currículo têm sido transferidas para as séries mais adiantadas. Por exemplo, a divisão por dois algarismos significativos era ensinada, primeiramente, na quarta série; atualmente ela é introduzida na quinta série e completada nas sexta e sétima. Deve-se notar que há uma grande variedade para a idade mental das crianças nas diversas séries. Isto implica em que o ajustamento do currículo deve ser feito pelo professor, na classe, de acôrdo com a capacidade de seus alunos.

Críticas[8] há ao trabalho da Comissão dos Sete, e réplicas a elas por parte do Dr. Washburne, Coordenador da Comissão. Outros estudos[9] feitos têm chegado às mesmas conclusões da referida Comissão. Os dados foram revistos e apresentados pelos autores com alguns detalhes no Capítulo 3 da edição anterior de *Making Arithmetic Meaningful*[10] e não serão apresentados aqui.

Tentativa de Graduação do Conteúdo do Currículo

Os autores crêem que as bases mais eficientes para a graduação do currículo são as necessidades das crianças e as dificuldades de aprendizagem dos diversos elementos, processos e tópicos. Não há uma única base determinadora de dificuldade que seja considerada inteiramente satisfatória. As informações existentes são, entretanto, o melhor guia para aquêles que têm de tomar decisões quanto à graduação da matéria. Atividades nas quais se devem envolver quaisquer grupos de crianças devem ser determinadas pelos objetivos gerais e específicos da escola, a natureza dos alunos, seus propósitos, interêsses e necessidades.

O quadro adiante (Graduação Recomendada dos Processos Aritméticos) apresenta o julgamento dos autores baseado numa revisão sistemática das pesquisas existentes sôbre graduação e as práticas que têm dado bons resultados com relação à idade mental em que os vários processos podem ser ensinados com sucesso. Êles adotam o critério do nível de idade mental como base de graduação por que êste critério tem aplicação universal. O critério de graus ou séries tem pouco valor como base para a organização e distribuição do conteúdo porque êsse critério é quase sem significação. Se o professor conhece o desenvolvimento da criança em Aritmética e

---

[8] Brownell (W. A.), "A Critique of the Committee of Seven's Recommendations on the Grade Placement of Arithmetic Topics", *Elementary School Journal*, 38:495-508. Washburne (C. W.), "A Reply to Brownell's Critique of the Committee of Seven Experiments", *Elementary School Journal*, 39:417-431.

[9] Brueckner (Leo J.) e Melbye (H. O.), "Relative Difficulty of Types of Examples in Division with Two-Figure Divisors", *Journal of Educational Placement*, 33:401-413.

[10] Publicado por The John C. Winston Co., Filadélfia, 1953, págs. 90-97.

GRADUAÇÃO RECOMENDADA DOS PROCESSOS ARITMÉTICOS

*Idade Mental**	*Números Inteiros*	*Frações*	*Decimais*	*Porcentagem*
6-7	1. Contar 2. Identificação de números até 200 3. Escrever números até 100 4. Idéia de série 5. Uso de números em tôdas as atividades	1. Contatos em atividades dentro de unidade e em medidas simples	1. O dez como base de nosso sistema de numeração	
7-8	1. Leitura e escrita de números até 1 000 2. Conceito de desenvolvimento 3. Fatos fundamentais de adição e subtração até 10	1. Reconhecimento de partes fracionárias	1. Valor relativo 2. O zero como guardador de lugar vago	
8-9	1. Adição e subtração em processos simples 2. Multiplicação e divisão 3. Multiplicação por um número de um algarismo 4. Divisão exata por número de um algarismo	1. Extensão do uso de frações em medidas 2. Encontrar partes de um número	1. Leitura de valôres em dinheiro 2. Adição e subtração de cruzeiros 3. Multiplicação e divisão de quantias	
9-10	1. Domínio de todos os fatos de multiplicação e divisão 2. Fatos fundamentais de divisão aproximada 3. Qualquer multiplicação e divisão por um número de um algarismo	1. Ampliar o uso e significado de frações 2. Adição e subtração com o mesmo denominador por meios concretos e visuais 3. Encontrar uma parte de um número	1. Cálculo com quantias em todos os processos	

* A idade aritmética pode ser substituída na primeira coluna.

GRADUAÇÃO RECOMENDADA DOS PROCESSOS ARITMÉTICOS

*Idade Mental**	*Números Inteiros*	*Frações*	*Decimais*	*Porcentagem*
10-11	1. Multiplicação por dois algarismos 2. Divisão por dois algarismos. O quociente aparente não precisa ser corrigido 3. Zeros no quociente	1. Adição e subtração de frações semelhantes; também da família dos meios, quartos e oitavos	1. Adição e subtração até centésimos	
11-12	1. Multiplicação por três e quatro algarismos 2. Divisão por dois algarismos em que o quociente aparente tem de ser corrigido	1. Adição e subtração de frações relacionadas, tais como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$; operações fáceis com frações não relacionadas como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ 2. Multiplicação 3. Divisão de números inteiros e mistos por frações	1. Adição e subtração até milésimos 2. Multiplicação e divisão de decimais por números inteiros	
12-13	1. Divisão por três algarismos	1. Adição e subtração de frações como: $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$, $4\frac{3}{8}-3\frac{5}{6}$ 2. Todos os tipos de divisão	1. Multiplicação e divisão de números inteiros e decimais por decimais. 2. Reduzir frações ordinárias a decimais e vice-versa	1. Casos I e II de porcentagem usando inteiros como taxa
13-14	1. Ampliação do uso de números inteiros	1. Ampliação do uso de frações	1. Ampliação do uso de decimais	1. Caso III de porcentagem 2. Taxas fracionárias

* A idade aritmética pode ser substituída na primeira coluna.

também sua idade mental, as informações no quadro tornarão possível ao professor tomar decisões inteligentes quanto ao seu trabalho na classe e lhe possibilitará também fazer quaisquer ajustamentos dos padrões de desenvolvimento e processos de ensino. Muitas escolas estão experimentando ajustar o currículo a grupos de alunos a fim de melhor atender às diferenças individuais.

No quadro, os elementos mais importantes de cada uma das quatro operações estão organizados de acôrdo com a idade mental. Numa visão rápida pode ser constatado que as dificuldades das operações, frações, decimais e porcentagem se sobrepõem. Isto justifica a organização do conteúdo do currículo. O professor e o organizador do currículo têm ainda o problema de arranjar a matéria para tornar a aprendizagem facilitada para qualquer grupo de crianças. Para isto, os livros-texto podem trazer valiosas contribuições.

Unidade de Ensino em Aritmética

A teoria educacional moderna dá ênfase à instrução organizada de tal maneira que o aluno não sòmente aprenda a matéria ensinada e as habilidades de genuíno valor e significação sociais, mas também adquira hábitos e maneiras de pensar corretamente. O ponto importante do programa de Aritmética é a unidade de ensino, em que exista uma organização lógica seqüencial dos números e operações numéricas. Nos livros-texto êste desenvolvimento é paralelo às unidades que focalizam aplicações sociais dos processos numéricos, incluindo problemas sôbre o uso de medidas, problemas em outras áreas, e situações numéricas descritas no decorrer das atividades da vida diária. Nesse trabalho, em geral, se dá mais importância ao domínio da Aritmética, que pode ser mais ou menos vital e interessante para as crianças. Em livros mais recentes, os autores dão atenção especial à solução de problemas para o desenvolvimento de técnicas efetivas de pensamento, habilidade em fazer descobertas, perceber relações, desenvolvimento de generalizações, e métodos para assegurar, organizar e avaliar informações sôbre determinado tópico ou problema. (Ver o Capítulo 13 para informações mais detalhadas.)

Unidades ricas[11] em experiências de grande valor podem surgir da organização cooperativa entre alunos e professor, de um plano de ataque a algum problema ou tópico de grande significação para as crianças e em que o professor possa ver valiosas experiências para trabalho individual e em grupos. Uma unidade de rica de experiências consiste numa série de experiências de aprendizagem com a finalidade de atingir um objetivo que as crianças aceitam como seu. Ela envolve o relacionamento de assuntos diversos e torna a matéria mais significativa. Essa experiência torna mais visível, também, a relação entre as diversas áreas do currículo. Uma unidade bem escolhida oferece inúmeras oportunidades para as crianças usarem a Aritmética e as suas habilidades de maneira funcional. As experiências são unificadas em volta de um objetivo realmente significativo e são desenvolvidas em interação com um grupo social num ambiente variado e sugestivo.

O esquema sôbre "Como Podemos Medir o Tempo", dado abaixo, é uma adaptação do conteúdo do currículo de uma unidade, de um tópico em *Um Guia para o Ensino de Aritmética*.[12]

Como Podemos Medir o Tempo

1. Calendários e seu uso
   - *a*) Origem
   - *b*) Movimentos do Sol
   - *c*) Fases da Lua
   - *d*) Movimentos de certas constelações
   - *e*) Desenvolvimento de um calendário
   - *f*) Nomes dos meses
   - *g*) Nomes dos dias
   - *h*) Comparação de nosso calendário com outros
   - *i*) Mudanças possíveis no calendário.
2. Instrumentos para medir unidades menores de tempo
   - *a*) Meios usados pelo homem primitivo
   - *b*) Relógios de sombra
   - *c*) Relógios mais aperfeiçoados
   - *d*) Os relógios modernos e sua história
   - *e*) Precisão dos relógios modernos
   - *f*) Fabricação
   - *g*) Mecanismo
   - *h*) Relógios fora do comum
   - *i*) Importância da precisão do tempo, em nossa complexa civilização.
3. Hora oficial
   - *a*) Diferença de hora no mundo em relação à longitude
   - *b*) Necessidade de uma hora oficial
   - *c*) Hora oficial nos Estados Unidos
   - *d*) Quando foi adotada
   - *e*) Como o govêrno nos ajuda a conseguir a hora exata.

Atividades Dentro da Unidade

Dentro de uma unidade de trabalho há tantas e tão variadas atividades que cada aluno pode fazer contribuições valio-

---

[11] Há uma excelente discussão de unidade de processo de ensino em W. H. BURTON, *Guidance of Learning Activities*. Nova Iorque: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1952.

[12] Publicado pelo Minnesota State Department of Education, St. Paul, Minnesota, 1948.

sas de acôrdo com seus interêsses, habilidades e talentos especiais. Essas experiências incluem solução de problemas, confecção de materiais, apreciações, atividades criadoras, excursões e atividades práticas. Damos abaixo uma ilustração dessas experiências.

Sugestões de Atividades Possíveis Numa Unidade de Trabalho

1. Atividades relacionadas à solução de um problema envolvendo:
   a) A formulação do problema
   b) Considerações sôbre a finalidade e significação do problema
   c) Planejamento de meios para a sua solução
   d) Distribuição de tarefas para indivíduos e grupos
   e) Localização, coleta e organização de informações, conseguidas de pessoas ou de material impresso
   f) Pesquisas e experiências necessárias para conseguir novos dados
   g) Reunião, organização e apresentação de trabalhos
   h) Conclusões e decisões
   i) Passos necessários para o cumprimento das decisões tomadas.

2. Atividades de construção como:
   a) Construção de gráficos, cartazes e diagramas
   b) Confecção de materiais diversos
   c) Organização de exposições
   d) Realização de experiências
   e) Construção de equipamentos, utensílios e ferramentas
   f) Participação em campanhas
   g) Compras e vendas, coletas etc.
   h) Manipulação e agrupamentos de materiais concretos.

3. Atividades de apreciação como:
   a) Apreciar diapositivos, filmes-documentários, gravuras
   b) Leitura de histórias, livros e boletins
   c) Audição de programas de rádio
   d) Assistir a peças de teatro e dramatizações
   e) Audição de conferências por pessoas peritas da comunidade
   f) Visitar exposições.

4. Atividades criativas como:
   a) Pintura, desenho, murais, decoração
   b) Composições, descrição
   c) Planejamento para melhoras
   d) Sugestão de soluções novas, originais
   e) Invenção de novos métodos, materiais
   f) Dramatizações.

5. Excursões a lugares como:
   a) Centros de transportes
   b) Indústrias, fábricas e entrepostos

   c) Fazendas de plantação e criação
   d) Casas de negócio, bancos, lojas
   e) Livrarias, museus, centros artísticos
   f) Locais históricos
   g) Hospitais, centros médicos
   h) Casas populares, favelas
   i) Edifícios públicos, correio.

6. Atividades práticas como:
   a) Uso de habilidades de leitura
   b) Prática de linguagem tanto escrita como oral
   c) Prática com números e cálculos
   d) Localização e utilização de fontes de informação
   e) Uso de ferramentas, instrumentos e equipamentos
   f) Pintura, desenho.

As atividades a serem desenvolvidas em conexão com qualquer unidade de experiência dependerão, naturalmente, da natureza do problema ou tópico considerado, dos passos necessários para a sua solução completa, das experiências necessárias para tornarem o problema significativo para a criança, da riqueza e variedade dos materiais disponíveis, e da facilidade de contato dos alunos com pessoas ou lugares da comunidade onde possam obter informações diretas.

Sugestões para Unidades

A melhor fonte para unidades são as atividades presentes das crianças, dentro e fora da escola. A unidade pode surgir de uma reunião de problemas ou de um tópico apresentado no livro-texto, o qual as crianças podem querer investigar mais completamente. Problemas reais e dificuldades podem surgir a qualquer hora. Em alguns casos, a unidade pode ser iniciada pelas crianças e o professor procurará torná-la tão ampla e proveitosa quanto possível.

Os livros modernos apresentam muitas sugestões para unidades de trabalho consideradas valiosas. Os títulos seguintes sugerem muitas unidades de estudo cujo aspecto principal é o aritmético:

Como usar o termômetro
Como medir comprimento utilizando réguas
Como medir o pêso das coisas
Como construir uma linha de tempo com os acontecimentos ou datas importantes
Como desenhar mapas usando escalas
Como construir e ler gráficos.

A lista seguinte sugere unidades com aplicações sociais mais amplas, incluídas no *Minnesota Guide for Instruction in Arithmetic*:[13]

Como os correios nos servem
Como medir o tempo
Como o dinheiro nos ajuda a viver no mundo moderno

[13] Publicado pelo Minnesota Department of Education, St. Paul, Minnesota, 1948.

Como reduzir as despesas no lar
Nutrição.

O grau de flexibilidade das unidades sugeridas nos programas variam de escola para escola. Em alguns sistemas escolares, as unidades são previstas para cada série com tempo predeterminado para as mesmas. Em outros, as unidades são sugeridas mas os professôres e as crianças têm ampla liberdade para planejar cooperativamente qualquer outra unidade que seja mais interessante e que exerça mais atração sôbre as crianças.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Qual a sua opinião sôbre o fato de a Aritmética não ser incluída nos currículos mais antigos?
2. É a Aritmética, ainda, uma causa de repetência?
3. Como você pode estabelecer o valor social do conteúdo de um programa de Aritmética? Há elementos de pouca utilidade social nos programas que você conhece?
4. Por que a Aritmética deveria ser ensinada em conexão com situações sociais?
5. Quais são as suas respostas a algumas das questões dadas na pág. 58 sôbre a relação entre o progresso social e a Aritmética?
6. Como é organizado o currículo das escolas elementares?
7. Ilustre com exemplos concretos cada um dos cinco aspectos do programa de Aritmética apresentado na pág. 59. Que contribuições o currículo de Aritmética pode dar às outras áreas?
8. Você reconhece como válidos os princípios para seleção da matéria das págs. 61 a 64? São adequados? Aplique-os ao conteúdo de qualquer aula de Aritmética que dá ou observa. Examine, também, um livro-texto e aplique os princípios a alguma unidade de estudo que você encontrar.
9. Algum aluno da classe deveria examinar e rever o interessante livro de Hogben e comentá-lo em aula.
10. Ilustre cada um dos quatro processos básicos para a seleção do conteúdo do currículo. Qual dêsses processos você acha mais valioso? Como pode o professor assegurar-se de que o conteúdo de uma unidade será de valor para as crianças?
11. Alguém na classe deveria estudar o trabalho de Harap, apresentado na pág. 66, e comentá-lo em classe. Quais são as implicações dêsses estudos para o currículo e o ensino?
12. Descreva a maneira de aplicar um dos processos analíticos e de seleção de conteúdo apresentados na pág. 66.
13. Quando deveria ser iniciado o ensino sistemático de Aritmética?
14. Examine o conteúdo de um livro-texto. Veja se o conteúdo é organizado segundo o plano escada ou espiral.
15. Como deveria ser determinada a distribuição de matéria pelas diversas séries?
16. Discuta a dificuldade dos tipos selecionados de exemplos dados na Tabela B. Qual é a sua significação?
17. Quais as contribuições dos dados da Tabela C, sôbre o crescimento da precisão, para o estabelecimento dos padrões de resultado nas várias séries?
18. Um grupo de alunos pode examinar e comentar o capítulo escrito pelo Dr. Washburne, no *38th Yearbook*, sôbre a Comissão dos Sete e sôbre a avaliação dêsse trabalho referida na pág. 77.
19. Demonstre que a graduação dos processos aritméticos do quadro das págs. 78 e 79 é de natureza espiral. Como pode o professor ou elaborador de um currículo usar os dados ali apresentados? O conteúdo do programa local está de acôrdo com aquêle quadro?
20. Que significa unidade de ensino? Como você desenvolveria a unidade "Como Medir o Tempo"? Escolha uma unidade que gostaria de ensinar. Faça um plano geral para o seu desenvolvimento.

SUGESTÕES PARA LEITURA

"Arithmetic in General Education," *Sixteenth Yearbook of the National Council of the Teachers of Mathematics.* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941. Chapters 3, 4, 9, and 11.

"Child Development and the Curriculum," *Thirty-Eighth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Bloomington, Ill.: Public School Publishing Co., 1939. Chapters 15 and 16.

Harap, H. L., and Barrett, U. "Experimenting with Real Situations in Third Grade Arithmetic," *Educational Method,* 16:188-192.

Harding, L. W., and Bryant, I. "An Experimental Comparison of Drill and Direct Experience in Learning Arithmetic in a Fourth Grade," *Journal of Educational Research,* 37:321-338.

Hickerson, J. A. *Guiding Children's Arithmetic Experiences.* New York: Prentice-Hall, Inc., 1952. Appendices A and B.

Lee, J. M., and Lee, Doris. *The Child and His Curriculum.* New York: D. Appleton-Century-Crofts Co., Inc., 1950. Chapter 11.

"The Teaching of Arithmetic," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education.* Chicago: University of Chicago Press, 1951. Chapters 2 to 7 and 14.

"The Teaching of Arithmetic," *Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Bureau of Publications. Teachers College, Columbia University, 1935. Chapters 1, 5, 8, and 11.

Wilson, G. M. *Teaching the New Arithmetic.* New York: Mc-Graw-Hill Book Co., 1951.

4

A Sala de Aula Como Um Laboratório de Aprendizagem

A APRENDIZAGEM da Aritmética é um processo de crescimento. É o resultado de experiências em que as crianças enfrentam problemas e tentam resolvê-los. Para facilitar o processo de aprendizagem, a sala de aula deve ser considerada como um laboratório de aprendizagem. Deve ser equipada com uma série variada de recursos audiovisuais que possibilitem à criança fazer descobertas de sentidos e idéias e trabalhar na solução de problemas, ganhando, assim, compreensão dos números e de seu uso nas várias atividades da vida. Para se tornar mais eficiente nas operações numéricas a criança deve usá-las numa série variada de situações significativas.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Natureza de um laboratório de aprendizagem
b. Princípios de aprendizagem e ensino
c. Materiais para guiar e dirigir a aprendizagem.

a. NATUREZA DE UM LABORATÓRIO DE APRENDIZAGEM

Papel da Sala de Aula

O material audiovisual necessário numa classe de Aritmética depende da natureza das atividades da aprendizagem que serão desenvolvidas. Se a função da sala de aula é ser um lugar onde as crianças trabalham com exemplos em um exercício intensivo, para resolver problemas isolados, os materiais necessários são: papel, lápis e livros. A sala de aula, neste caso, é um lugar onde as crianças aprendem a fazer operações mecânicamente, nada mais que isso. Se, por outro lado, a sala de aula fôr um laboratório de aprendizagem onde as crianças vão experimentar, descobrir significados e processos para essas experiências ou atividades de aprendizagem, materiais adequados são necessários.

Espécies de Materiais Necessários

Três espécies de materiais são necessárias para ensinar Aritmética efetivamente na escola elementar. Podem ser classificadas como: *exploratórios, visuais e simbólicos.* Material *exploratório* é todo aquêle que a criança pode tocar, mover, manipular, como o ábaco, partes fracionárias etc. Quando a criança usa partes fracionárias para descobrir um princípio que ela não pode compreender em uma pura discussão verbal, essas partes fracionárias são usadas com objetivos exploratórios. Se a criança usa essas partes fracionárias de maneira superficial, êste material é apenas manipulativo, sem nenhum propósito exploratório. Gravuras, cartazes, filmes, *slieds* e cartões postais são modelos de material *visual.* Uma página de explicações, num livro de exercício, uma lista de problemas ou uma série de exemplos são modelos de material *simbólico.*

Uso do Material

O valor advindo de uma sala de aula como um laboratório de aprendizagem depende do uso do material disponível. Os alunos podem, dirigidos pelo professor, simplesmente manipular o material, sem contudo ganhar nenhuma idéia a respeito do que está sendo apresentado. O professor, todavia, pode ensinar às crianças como usar material concreto para descobrir relações entre as quantidades envolvidas. É claro que a experiência que as crianças adquirem lidando com as várias espécies de material determinará o tipo particular necessário para o seu nível de pensamento. Nos primeiros estágios de aprendizagem não se deve dar muita ênfase aos materiais abstratos e simbólicos. Experiências com material exploratório e visual devem preceder o trabalho com material simbólico, para que os conceitos possam ser melhor compreendidos e para que não haja dificuldade proveniente da leitura. A função específica de cada tipo de material é necessária para um programa significativo em Aritmética.

Deve ser feito, nas primeiras séries, considerável uso dos materiais exploratórios e visuais. À medida que a criança cresce em habilidade ao lidar inteligentemente com os números, deve mostrar o mesmo crescimento em sua habilidade ao lidar com materiais simbólicos. Em um laboratório de aprendizagem, o professor dirige as atividades, faz perguntas para guiar o pensamento da criança e conduz as discussões. As descobertas são feitas pelos alunos, individualmente. A compreensão básica é obtida através das várias etapas da contagem, como sejam: contar um grupo ou um número de grupos, c o m p a r a r conjuntos, combinar conjuntos e separar conjuntos em partes.

O processo de aprendizagem é mais importante que o produto da aprendizagem. Um problema para o qual a criança esteja preparada para atacá-lo é a base ideal para a aprendizagem. Os números auxiliam as crianças a analisar as várias situações e a formular as relações nelas envolvidas. Através do uso de material exploratório a criança pode testar um ou mais possíveis caminhos para chegar a uma solução, e principalmente descobrir um método para encontrar uma resposta que lhe seja significativa. Assim estará pronta para aprender de maneira sistemática os processos básicos que são encontrados nos livros e, conseqüentemente, aplicar o nôvo passo em uma variedade de outras situações, ampliando assim seu conhecimento, sua compreensão.

Muitos professôres avaliam a aprendizagem em Aritmética em têrmos de habilidades já formadas e não dão maior atenção à compreensão adquirida pelo aluno para formá-las. O resultado é a tendência em abandonar a importância da compreensão na aprendizagem. Se o processo de aprendizagem é um elemento vital no programa, o professor deverá usar uma variedade de materiais e experiências que fará com que o aluno adquira compreensão do que está sendo ensinado.

b. PRINCÍPIOS DE APRENDIZAGEM E ENSINO

Teorias de Aprendizagem

A transformação da sala em laboratório está acorde com os estudos feitos nos últimos anos sôbre a psicologia da aprendizagem. Houve um tempo em que se supunha ser a inteligência um *reservatório* dentro do qual o conhecimento era derramado. Esta teoria é, de modo geral, pouco aceita hoje. Outra teoria considerava *a inteligência um músculo,* que poderia ser desenvolvido e aumentado exercitando-o pelo uso de fatos difíceis e sem muito interêsse. Essa teoria também não está mais em voga nos tempos atuais. Uma terceira teoria chamada *associacionista* assegura que o melhor caminho para a aprendizagem dos processos de computação é através de períodos longos de intensivo e repetido exercício. Pequena ou nenhuma consideração era dada se os exercícios eram ou não significativos para as crianças ou se elas compreendiam o que estavam praticando. Infelizmente essa teoria ainda predomina em muitas salas de aula.

Os Autores dêste livro acreditam que a criança deve compreender o que está aprendendo para que o que aprende tenha significado para ela. O processo de aprendizagem é mais importante que o produto. Não se deve dar à criança exercícios de fixação enquanto o professor não estiver certo de que ela compreende as operações que está realizando.

Aula Ilustrando a Aplicação de Um Princípio Moderno

O processo usado pelo professor da terceira série, em uma aula de subtração, na descrição que se segue, é um exemplo da aplicação dos princípios de aprendizagem que os Autores defendem. Os referidos princípios serão discutidos, mais tarde, neste Capítulo.

Aula Ilustrativa

Um problema surge em conexão com o estudo do termômetro, numa classe de terceira série, quando encontra o exemplo de subtração figurado ao lado. A classe ainda não tinha estudado a subtração com empréstimo. O professor escreveu o exemplo no quadro para que a atenção das crianças fôsse focalizada no nôvo passo, na nova dificuldade.

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

Uma das crianças disse: "Não podemos subtrair 7 de 5 porque 7 é maior que 5."

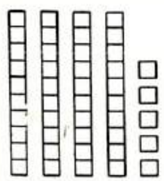
O professor então perguntou às crianças se elas poderiam pensar outra maneira para encontrar a resposta, usando o que elas já sabiam sôbre números.

Uma criança disse: "Nós podemos contar de 45 a 27, ou de 27 até 45, usando discos de cartolina." Ela demonstrou seu plano colocando 45 discos sôbre a mesa, tirando 27 e contando o que sobrou. Sua resposta foi 18.

Outra criança disse: "27 e 10 são 37; mais 3 são 40; e mais 5 são 45; 10 e 3 são 13, mais 5 são 18."

O professor disse, então: "Quem pode mostrar 45 com os quadradinhos e depois tirar dêles 27 quadradinhos?"

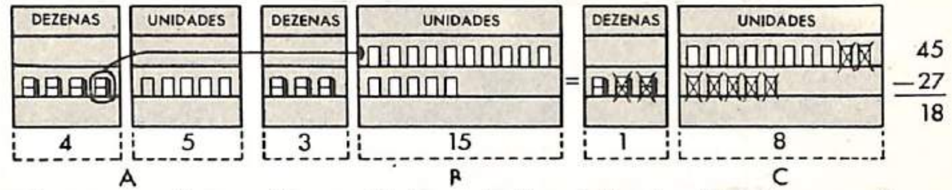
Uma das crianças mostrou o agrupamento que está no desenho e disse: "Não há quadradi-



nhos separados suficientes para se retirar 7. Eu posso trocar uma tira de 10 quadradinhos em 10 quadradinhos separados e assim eu terei três tiras de 10 e 15 quadradinhos separados. Eu posso tirar 7 dos quadradinhos separados e duas das tiras de 10." Ela demonstrou o processo e encontrou a resposta 18. O professor levou assim tôdas as crianças a demonstrarem a solução com seus quadradinhos e sentiu que as crianças estavam prontas para enfrentar a nova dificuldade.

Para verificar se o reagrupamento estava realmente compreendido, o professor escolheu um aluno para demonstrar o processo usando fichas e o quadro *Valor do Lugar*, como mostra a ilustração que se segue.

Primeiro o aluno mostrou 45 com quatro pacotes de 10 e 5 fichas separadas como no desenho A; em seguida êle reagrupou um pacote de uma dezena em 10 fichas separadas e as co-



locou no lugar das unidades, perfazendo assim 3 dezenas e 15 unidades, como mostra o desenho B; depois retirou 7 unidades das unidades e 2 dezenas das dezenas, como em C, encontrando o total de uma dezena e oito unidades, ou 18. Outra criança demonstrou, novamente, todo o processo anteriormente discutido.

Em seguida o professor escreveu a solução com números, como mostra o exemplo ao lado. Usou um recurso visual para mostrar às crianças o pensamento que estava envolvido no reagrupamento de 45 como 3 dezenas e 15 unidades. Em seguida tôdas as crianças fizeram o mesmo exemplo em seus cadernos.

$$\begin{array}{rcc} & & {}^{3}\ \ {}^{15} \\ 45 & = & \cancel{4}\ \ \cancel{5} \\ -27 & = & 2\ \ 7 \\ \hline & & 1\ \ 8 \end{array}$$

Finalmente o professor pediu que as crianças lessem as explicações apresentadas no livro de Aritmética onde a dificuldade era apresentada. As atividades com material concreto que precedem o trabalho em nível abstrato foram muito úteis e tornam mais fácil à criança compreender a explicação do livro. As crianças copiaram e resolveram uma série de exemplos apresentados no livro, mostrando como haviam aprendido bem o nôvo passo em subtração. O professor olhou ràpidamente os trabalhos feitos localizando e corrigindo as dificuldades encontradas. Sugeriu mais exercícios para todos aquêles que haviam dominado a nova dificuldade e deu especial atenção a todos que evidentemente necessitavam maior ajuda. Mostrou então às crianças como usar adição para verificar o trabalho feito e comparou o processo de reserva em adição com o reagrupamento em subtração.

Princípios de Aprendizagem Implícitos Nesta Aula

Os princípios de aprendizagem que servem de base às atividades usadas na aula acima descrita são assim assinalados:

1. *As experiências de aprendizagem devem ser objetivas e reais.*

A necessidade de aprender o nôvo passo em subtração surgiu de uma situação problemática real: as crianças precisaram saber a mudança de temperatura de um dia para o dia seguinte. O professor acreditava que a hora mais efetiva para a aprendizagem é a de solução de problemas. Antes que haja uma nova aprendizagem precisa haver uma situação problemática na qual a criança sinta uma dificuldade real desejando vencê-la. Nenhuma nova aprendizagem se realiza quando a criança simplesmente aplica conhecimentos anteriores para resolver uma situação. Quando os esforços das crianças são bloqueados por uma situação problemática e elas não podem atingir seu objetivo, empenham-se para conseguir possíveis caminhos de resolver o problema. Aplicam um ou mais planos de ação até que, finalmente, possam resolver a situação satisfatòriamente. Quanto mais desenvolvido fôr o nível de pensamento da criança mais inteligentes serão suas ações e menor o uso do processo de tentativas e erros. Quando as crianças resolvem um problema, estão prontas para reajustar seu comportamento em têrmos do que aprenderam. Normalmente, com a ajuda do professor, elas vão, através de todos os passos, em busca de uma solução satisfatória; tentam compreender o processo; examinam-no criticamente, tiram conclusões e generalizações acêrca de suas experiências. Assim, desenvolvem um padrão nôvo de comportamento que irão empregar quando novos problemas forem encontrados em situações novas.

2. *Descobrir fatos e processos leva a criança a uma maior compreensão.*

O descobrir ocupa um importante papel na aprendizagem. Através do uso de materiais concretos como discos, quadrados, quadro *Valor do Lugar*, quadro-négro, o professor conduziu a criança a descobrir por diversos caminhos a resposta de um exemplo dado. Estas atividades são de muita significação para as crianças e elas adquirem compreensão do processo usado. O professor então seguiu algumas etapas necessárias para se certificar de que as crianças compreenderam bem o processo que estavam aprendendo para usar em trabalhos futuros. O reagrupamento foi demonstrado no quadro *Valor do Lugar* e com fichas. O pensamento envolvido foi escrito e êste trabalho foi feito paralelamente ao uso de recursos visuais, os quais ajudaram as crianças a compreenderem a nova dificuldade. As descobertas que as crianças fizeram no início do trabalho tornaram-nas capazes de seguir a demonstração do professor e, conseqüentemente, capazes de compreender as explanações do livro.

A atitude automática em descobrir e explorar deve ser desenvolvida através da seleção de atividades de aprendizagem em que a criança tenha oportunidade de descobrir processos que a auxilie a chegar a soluções de problemas, ou enfrentar situações de interêsse imediato para ela.

Em uma sala de aula onde a ênfase é dada no uso contínuo de muito exercício e onde os exercícios são apresentados formalmente pelos professôres há pouca ou quase nenhuma oportunidade da criança fazer descobertas. Al-

Usando uma balança de modo realístico, no estudo de medidas.

gumas vêzes as descobertas são feitas incidentalmente, mas por poucas crianças, as mais desenvolvidas.

3. *As experiências de aprendizagem devem ser apresentadas de tal maneira que a percepção de generalizações e relações seja facilitada.*

A Aritmética consiste num sistema inter-relacionado de fatos, processos, conceitos e generalizações. As crianças que participaram da aula descrita neste Capítulo tinham aprendido anteriormente o significado de adição e subtração. Elas tinham ainda aprendido muitos fatos básicos em cada um dos processos; tinham estudado um processo usado para adição com e sem reserva e a subtração quando não há reagrupamento. O professor deu-lhes oportunidade de aplicar na nova situação apresentada o que haviam anteriormente aprendido. Como resultado elas mostraram a solução em diferentes níveis. Algumas crianças usaram a contagem, outras, objetos separados em grupos, para encontrar o resto. O professor usou o quadro *Valor do Lugar* para demonstrar o reagrupamento. Êle deu ênfase à relação entre adição e subtração mostrando às crianças como usar a adição para verificar a subtração. O professor motivou as crianças mais capazes, levando-as a comparar o processo de reserva em adição e reagrupamento em subtração, fazendo com que se aprofundassem mais na relação entre os dois processos.

É claro que nesta aula as crianças tiveram oportunidade de reorganizar e reconstruir o que já haviam aprendido de Aritmética. O professor guiou as crianças para fazer generalizações sôbre o que elas aprenderam. Uma das generalizações é a idéia de que adição e subtração são processos opostos implicando o ato de *juntar* e *separar*; outra generalização é que adição e multiplicação são processos relacionados. Muitas outras podem ser desenvolvidas.

Experiências demonstram a relativa facilidade de aprendizagem quando se apresenta a matéria numa organização que possibilite à criança a percepção de relações. Demonstram também a necessidade do professor guiar o aluno na reorganização do que está aprendendo, em níveis mais elevados. Por exemplo, quando a criança estuda um fato numérico isolado, como acontece num ensino que se preocupa exclusivamente com o treino mecânico, terá dificuldade em relembrar êste fato. Quando os fatos numéricos são ensinados de maneira que a criança possa perceber relações entre êles e como os mesmos se situam dentro do sistema de numeração, a aprendizagem se torna relativamente fácil.

Generalizações, como as que se seguem envolvem muitos fatos relacionados:

a) Quando um número é retirado dêle mesmo, o resultado é zero: $8 - 8 = 0$.

b) Quando se soma uma unidade a um determinado número, a soma é o próximo número.

c) O produto de 3×4 é igual à soma de $4 + 4 + 4$.

d) Um número, como 36, cuja soma dos algarismos é 9, é divisível por 9.

Muitas destas generalizações serão apresentadas nos capítulos que se seguem.

4. *O uso de muitas e variadas experiências de aprendizagem e material adaptado ao nível de desenvolvimento da criança aumenta e enriquece a compreensão e alarga as experiências anteriores.*

A aprendizagem realmente se realiza mais eficientemente quando o que se aprende é experimentado em situações vivas, reais e significativas. As experiências de aprendizagem que foram usadas na aula de subtração variam em grau de abstração. Foi incluída a contagem pelo uso de contas e outros materiais considerados exploratórios; foi incluído auxílio visual dando sentido, num nível mais alto, ao processo de reagrupamento, e finalmente o estudo de explicações abstratas contidas no livro. O uso de variadas experiências de aprendizagem possibilitou ao professor a adaptação do ensino à maneira e rendimento da aprendizagem das crianças. Focalizou-se a aprendizagem em situação funcional e assim as crianças puderam perceber o valor social do que estavam aprendendo.

Ampla variedade de experiências e de material enriqueceu e deu mais dinamismo à aprendizagem.

Há muitas maneiras de clarear e estender a compreensão em Aritmética. Por exemplo, as várias unidades de medir podem ser melhor compreendidas dando-se às crianças a oportunidade de aplicar essas unidades em muitas e variadas situações sociais. Significados relacionados à aplicação social da Aritmética podem ser efetivamente apreendidos quando a criança entra em contato direto com a origem das experiências por meio de excursões e tendo oportunidade de participar de eventos da comunidade onde vive. As experiências ainda podem ser enriquecidas quando se estimula a criança a fazer leituras e pesquisas em material impresso e usando material visual como gravuras, cartazes, filmes, exposições, museus etc.

5. *Aprendizagem é um processo de crescimento que dirige a criança, gradualmente, a respostas em níveis cada vez mais amadurecidos.*

Na aula de subtração apresentada é evidente que a classe não foi atirada na aprendizagem de uma nova dificuldade em subtração sem uma preparação, uma exploração preliminar. O professor providenciou uma série de experiências dando às crianças as bases necessárias à nova aprendizagem. A apresentação gradual da nova dificuldade por meio do uso de material exploratório possibilitou mesmo às crianças mais fracas a compreensão dessa nova etapa. É perfeitamente provável que os alunos mais capazes vencessem esta dificuldade sem algumas das atividades desenvolvidas, mas mesmo assim muito lucraram essas crianças com o resultado desta variedade de experiências.

Uma distinção pode ser feita entre o processo de aprendizagem e o que foi aprendido. O processo de aprendizagem de Aritmética envolve uma seqüência de comportamento no qual métodos mais maduros de resposta substituem outros menos maduros, conduzindo assim, gradualmente, a criança a uma maior compreensão e habilidades. Os passos para o domínio total do processo de subtração, o qual pode ser olhado como o produto da aprendizagem, incluem uma variedade de experiências em seqüência. Através dessas experiências a criança, gradualmente, aprende os fatos básicos da subtração, a significação do processo e adquire a habilidade de resolver rápida e corretamente operações cada vez mais difíceis. Ambos, rapidez e acuidade de trabalho, crescem quando a criança passa de uma série para outra.

Nos programas de ensino mecânico onde a ênfase é dada ao resultado, os processos de ensino são completamente diferentes daqueles descritos acima. No programa de ensino mecânico o professor, no início da aprendizagem, experimenta ensinar às crianças o uso de maduros processos mentais, os quais são usados por adultos na subtração com reagrupamento. Usualmente o processo de reagrupamento na subtração é ensinado como um truque que as crianças aplicam mecânicamente sem qualquer compreensão da operação envolvida e desenvolvida. Assim, o pensamento de um menino, trabalhando o exemplo visto ao lado, foi expresso como segue: "Você não pode subtrair 7 de 1. Então tome 1 de 8 e junte-o ao outro 1. Isto faz 11. Depois subtrai." Quando solicitado para explicar por que isto fazia 11, sua resposta indicou o processo que êle tinha aprendido. Está claro que êle usava um truque mecânico, o qual não tinha nenhuma significação matemática para êle. A verdadeira aprendizagem não se realiza sob tais condições.

$$\begin{array}{r} 81 \\ -37 \\ \hline \end{array}$$

6. *A prática necessária para desenvolver contrôle e eficiência de habilidades não deve ser dada até que a criança entenda o que vai praticar.*

Nesta aula o professor não deu exercícios para fixar a dificuldade que estava sendo *aprendida* antes de se certificar que as crianças a tinham entendido bem. As pesquisas têm mostrado que exercícios de repetição sem compreensão são mero desperdício de tempo, de trabalho. Quando a criança compreende as bases matemáticas do reagrupamento em subtração, nós, então, podemos dizer que ela entendeu a dificuldade envolvida. Ela deve, contudo, praticar, exercitar sistemàticamente o nôvo passo aprendido para desenvolver habilidade e eficiência no uso do mesmo. Habilidades são mais fàcilmente aprendidas quando se acham ìntimamente relacionadas a significações e quando a criança vê como usá-las. Quanto maior fôr a variedade de situações nas quais as habilidades são usadas, tanto melhor serão elas aprendidas. Com exercícios sistemáticos e freqüente uso, as habilidades gradualmente mudam de lentos e inseguros métodos de respostas, característicos da imaturidade, para fluentes e rápidas respostas com processos de pensamento semelhantes ao do adulto.

No início do trabalho dentro da nova dificuldade em subtração, o professor cuidadosamente guiou o pensamento da criança e também analisou o trabalho escrito que foi feito descobrindo pontos que estavam causando dificuldade. Quando o diagnóstico feito localizou pontos fracos, medidas corretivas foram aplicadas. À medida que o trabalho se desenvolveu, nas aulas que se seguiram, o professor, sem dúvida, empregou o melhor de seus esforços para conduzir a criança a métodos mais maduros de reflexão para eliminar a contagem e outros artifícios, próprios de processos imaturos. O bom professor reconhece o fato de que o uso real de habilidades em diferentes situações é uma das mais eficientes formas de prática.

Tradicionalmente a palavra *exercício* tem sido usada para identificar um processo de repetição, necessário para que a aprendizagem ocorra. Num ensino de exercício intensivo o processo de aprendizagem é portanto considerado mais ou menos um processo de natureza mecânica. Nesta circunstância, pouco é feito pelo professor para tornar o processo vital e significativo para o aluno.

O têrmo *prática* implica, contudo, um conceito da natureza da aprendizagem e da função do processo de repetição diferente daquele do têrmo *exercício*. É evidente que os contatos constantes que o aluno tem com os processos e conceitos numéricos numa variedade de situações e em diferentes livros são uma das mais valiosas experiências de repetição. O aluno é conduzido assim a sentir o valor da aprendizagem dos vários processos, por que êles são necessários para alcançar seus objetivos com sucesso. A extensão desta espécie de contato direto por meio de prática sistematizada e de exercícios organizados é necessária se desejamos que, além da compreensão, seja desenvolvida a rapidez, o contrôle e a exatidão. Um ponto importante e que o professor deve ter sempre presente é que prática formal e sistemática deve ser sempre precedida ou acompanhada de uma variedade de experiências que desenvolva de maneira concreta o significado do material que está sendo usado no exercício de repetição. A aprendizagem é essencialmente completa quando o aluno compreende os princípios básicos envolvidos no que aprende. Então é tempo de prover oportunidade para uma prática sistemática com a finalidade de desenvolver um alto nível de trabalho.

Aplicação Geral Dêstes Princípios

Todo esfôrço deve ser desenvolvido pelos professôres a fim de descobrir métodos efetivos para a aplicação dêstes seis princípios de aprendizagem ao ensino de tôda a Aritmética. Os métodos mecânicos tradicionais que davam ênfase à repetição como base da aprendizagem devem ser substituídos por práticas significativas. A evidência cumulativa[1] em favor do ensino de Aritmética com significação deve levar todos os professôres a utilizar métodos e materiais de ensino que auxiliarão o aluno a compreender as operações numéricas. É esta a chave do sucesso do ensino de Aritmética. Ela é o coração do método moderno ao qual os Autores dão ênfase nos capítulos que seguem.

Organização da Prática

A organização da prática para desenvolver e aperfeiçoar habilidades pode ser grandemente reforçada pela aplicação de alguns princípios como os discutidos abaixo:

1) Habilidades não são processos mecânicos que podem ser adquiridos isolados de situações reais em que são usados e depois aplicados automàticamente em novas situações. Habilidades são melhor adquiridas quando estreitamente relacionadas a situações significativas e quando o aluno vê como as pode usar. Quanto maior fôr a variedade de situações em que a nova habilidade possa ser usada, melhor será sua aprendizagem e fixação.

2) A aquisição de habilidades não se faz antes que o aluno ganhe compreensão e familiaridade com as mesmas. Há um período que tem sido chamado de prática *integrativa*, durante o qual o aluno explora, torna-se familiar com a nova etapa, ganhando uma compreensão de sua necessidade. Essa etapa precederá o trabalho de prática sistemática para desenvolver contrôle e rapidez. É necessário haver

[1] DAWSON (D.) e RUDDELL (A.), "The Case for the Meaning Theory in Teaching Arithmetic", *Elementary School Journal*, 55:393-399.

Estas crianças estudam os mostradores dos relógios, fazendo experiências com material concreto.

um objetivo, uma motivação nesta aprendizagem; só assim esforços serão desenvolvidos para aquisição de nova habilidade.

3) Habilidades não são métodos fixos e imutáveis para aprender que podem ser adquiridos através de repetição mecânica e de maneira automática. As respostas crescem constantemente em rapidez, maturidade e uniformidade de reação quando são praticadas até que se aproximem das características do processo de pensamento do adulto. A maneira como uma habilidade é usada varia também com as condições nas quais é aplicada. Assim, nós agimos vagarosa e cuidadosamente quando necessitamos de um alto grau de exatidão, porém mais ràpidamente e com menos ênfase na exatidão quando apenas fazemos aproximação de uma resposta.

4) Devemos dar ênfase ao diagnóstico nas etapas iniciais da aprendizagem. O professor deverá determinar se a resposta encontrada pelas crianças é ou não correta quando apresenta, pela primeira vez, um nôvo passo. Deverá também observar o método de trabalho das crianças e através de um questionário analisar o processo de reflexão que elas usam. Todo o esfôrço deve ser feito para conduzir a criança a utilizar métodos mais maduros de pensamento à proporção que pratica um processo. Exercícios individuais, autodirigidos, constituem uma forma valiosa de experiências de aprendizagem, desde que a criança seja levada a sentir uma responsabilidade crescente de aperfeiçoamento de suas próprias habilidades. A prática é mais produtiva quando o aluno sente que está fazendo progresso.

5) Períodos dedicados à prática devem ser relativamente curtos e mais freqüentes. Alguns minutos, do período escolar, devem ser separados para esta finalidade. Nas primeiras etapas da aprendizagem é desejável empregar uma série de exercícios com objetivo limitado aos novos passos apresentados. Depois usaremos exercícios variados contendo um número de diferentes habilidades para mantê-las. Êstes exercícios apresentando diferentes habilidades devem ser de natureza cumulativa, de forma que os alunos tenham oportunidade de aplicar os novos e os conhecimentos mais remotos. Se os exercícios de fixação e aplicação não forem sistemàticamente organizados e distribuídos como geralmente encontramos nos livros, os conhecimentos vão sendo esquecidos porque as atividades gerais da escola oferecem pouca oportunidade para as crianças aplicar alguns dos processos aritméticos que elas devem aprender. Contudo, o esquecimento dos mesmos será reduzido quando a aprendizagem fôr funcional e cheia de significação e quando as crianças compreendem as operações que lhes foram ensinadas.

6) Deve-se estabelecer um nível razoável de aprendizagem adaptado à capacidade e ritmo dos alunos, de maneira a evitar repetições inúteis. Os alunos mais capazes deverão ter oportunidade de desenvolver habilidades a um nível de eficiência mais elevado que os alunos menos capazes.

Processo Generalizado Para Ensinar Uma Nova Dificuldade

A seqüência dos passos que devemos seguir, na apresentação de uma nova dificuldade num processo, pode ser situada em têrmos gerais como se segue:

1) Apresentar o nôvo conhecimento numa situação social concreta em que a necessidade e o uso social sejam bem evidentes para a criança. A necessidade pode surgir em alguma atividade de classe, ou em conexão com o trabalho em algumas das outras áreas do currículo ou em situação já delineada nos livros de Aritmética.

2) Levar as crianças a indicar a operação que é usada e escrever o exemplo envolvido. Levá-las também a dizer qual é a nova dificuldade e por que o citado exemplo difere das outras operações que elas já aprenderam para trabalhar no mesmo processo.

3) Levar a criança a descobrir uma resposta, usando desenhos ou experiências passadas ou inventando outros meios para encontrar a solução do exemplo. O objetivo desta atividade é levar a criança à aquisição da compreensão da nova dificuldade. Constantemente os processos apresentados pelas crianças são bem próximos dos processos a serem ensinados. Isto indica um alto grau de prontidão para o nôvo trabalho.

4) Desenvolver agora a maneira de realizar a operação de modo que as crianças compreendam o sentido matemático da nova dificuldade. Usar materiais objetivos, gravuras, diagramas para ajudar a criança a visualizar o significado dos vários passos na solução. Os modernos livros de Aritmética, de modo geral, apresentam experiências e explicações essenciais. Tudo isto deve ser feito com cuidado.

5) Levar a criança a trabalhar com muitos exemplos encontrados no livro-texto e a explicar os processos usados. É também aconselhável que cada um dos exemplos seja resolvido no quadro pelos alunos. Assim, todos podem ver os passos na solução. Levá-los a ver como verificar a resposta.

6) Em seguida, levar as crianças a copiar e trabalhar individualmente alguns exemplos sem consultar os modelos. Os alunos que encontram soluções certas, que explicam os passos seguidos, que verificam as respostas, estão prontos para uma prática intensiva onde desenvolverão habilidade e eficiência.

Seguir o *slogan*: "Nunca dê exercícios de fixação enquanto não estiver seguro que as crianças compreendem o que estão praticando."

7) Reensinar os passos do nôvo processo aos alunos que não resolveram bem os exemplos apresentados. Êles necessitam de trabalho mais simples e mais concreto que o que foi dado inicialmente.

8) Nos dias seguintes dar aos alunos oportunidade de aplicar o nôvo passo numa variedade de situações sociais. Quanto mais amplos e variados forem os exercícios de aplicação tanto melhor o nôvo passo será aprendido. Prática sistemática também é necessária para aperfeiçoar as habilidades e conseguir eficiência. Auxiliar as crianças que estão usando processos pouco eficientes, empregando de maneira crescente processos mais maduros de pensamento.

9) Prover exercícios para manter as habilidades adquiridas. O aluno deve ser encaminhado a atacar, com coragem, os seus problemas de aprendizagem. Quando o aluno compreende as bases matemáticas de um processo de computação, podemos dizer que de fato êle o aprendeu. Contudo, deve praticá-lo, usando-o em situações variadas, ampliando sua significação. Ao mesmo tempo, deve-se dar à criança treino intensivo, para adquirir rapidez e exatidão no uso das novas habilidades. Exercícios para prática, bem organizados e variados, devem ser dados para manter as habilidades. As habilidades computacionais em resolver operações não se fixam usando as mesmas respostas adquiridas através de repetição de rotina. Elas devem ser ensinadas como respostas inteligentes e significativas que se transformam gradualmente de respostas lentas e ineficientes, características de imaturidade, para respostas rápidas, bem completas, próprias de adulto.

A aplicação detalhada dêstes princípios gerais ao ensino das operações fundamentais com números inteiros, frações decimais e medidas é discutida nos capítulos seguintes.

Uso do Livro na Apresentação de Nôvo Trabalho

Para introduzir um nôvo passo, alguns professôres preferem apresentar a dificuldade oralmente, no quadro, sem fazer referência às explicações apresentadas no livro, enquanto outros usam o plano apresentado pelo livro e o acham mais organizado e mais eficiente. O ponto fraco do método oral é que pode ser falho em organização e também pode acontecer que alguns alunos não compreendam o que o professor lhes fala. A atenção pode ser falha e pontos importantes podem ser perdidos. As crianças também não terão um ponto de referência para posteriores estudos se dúvidas surgirem mais tarde, ou para uma revisão quase sempre necessária. Estas limitações são tôdas evitadas quando, com a orientação do professor, as crianças estudam cuidadosamente os exemplos do livro, suplementando-os com experiências bem significativas e com o uso de materiais e recursos audiovisuais que dão significação ao trabalho. Quando necessário, o professor ajuda os alunos com outras explicações.[2] Considerando que as necessidades das crianças são variadas, não pode um simples livro atender às necessidades de tôdas. O professor é sempre um elemento essencial em uma situação de aprendizagem.

Vamos apresentar um exemplo, de uma página bem organizada de um livro-texto, contendo os elementos essenciais para a apresentação de uma nova etapa na adição de número misto, com redução na soma, sem reserva. Êsse exemplo dá as bases do processo de ensino descrito anteriormente. Uma análise da página vai revelar os seguintes elementos:

1) Um problema é dado apresentando uma situação na qual há necessidade de um nôvo passo. O professor pode preferir utilizar-se de alguma situação da sala de aula onde haja a necessidade do emprêgo do nôvo passo, antes de proceder à apresentação da discussão no livro. Neste caso os alunos podem descobrir a solução usando materiais manipulativos ou visuais. Isto os preparará para o desenvolvimento do trabalho apresentado no livro e fará com que o mesmo seja significativo para êles.

2) É dado um quadro, com a respectiva solução. Assim, a criança pode ver a solução antes mesmo de resolver qualquer operação. O professor pode suplementar êsse desenho usando objetos concretos ou outros desenhos, quando necessário, especialmente para os alunos mais lentos.

3) Segue-se uma explanação do processo que foi seguido, para estudo e futuras referências. Testes para o diagnóstico são apresentados mais adiante e podem ser a chave para esta página, para facilitar consultas, em caso de necessidade. Êsses testes são discutidos no Capítulo 16.

4) Muitos outros exemplos sôbre a mesma dificuldade são apresentados em seguida. A classe deve estudá-los sob a direção do professor para assegurar compreensão do trabalho. O professor poderá verificar, cuidadosamente, êste ponto de compreensão através de questões dirigidas.

5) A direção dada ao trabalho, nesta página, requer que a criança copie os exemplos já re-

[2] GROSSNICKLE (Foster E.), "How to Use the Arithmetic Textbook", *NEA Journal*, 47:41-42.

solvidos e trabalhe nos mesmos com os livros fechados. Depois deve comparar o seu trabalho com a página já feita para descobrir os possíveis erros. Se o trabalho estiver certo, o professor pode então supor que as crianças estão prontas para fixar o que aprenderam. Quando houver evidências de falta de compreensão, o *reensino,* de maneira mais concreta, talvez seja necessário.

6) Prática com outros exemplos semelhantes ao do nôvo passo que está sendo ensinado é o que se encontra ao fim da página.

7) A última parte consiste em apresentar um grupo de exemplos da nova dificuldade, bem como outros já anteriormente aprendidos. Isto oferece uma forma excelente de revisão como também pode ser considerado como um teste verificando a habilidade para trabalhar com exemplos envolvendo o nôvo passo.

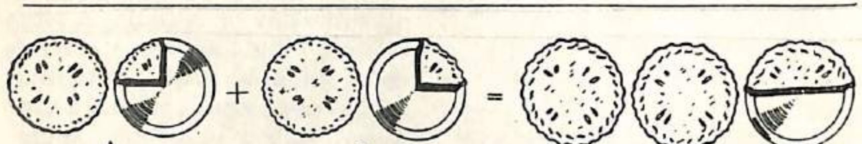
c. MATERIAIS PARA GUIAR E DIRIGIR A APRENDIZAGEM

Níveis de Maturidade de Aprendizagem

O professor deve reconhecer que as crianças não aprendem do mesmo modo e que, quase sempre, aprendem em diferentes níveis de maturidade. Como ilustração, examinemos o exemplo abaixo. Alguns alunos mais ma-

$$3\frac{1}{4} = 2\frac{5}{4}$$
$$-1\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$
$$1\frac{2}{4} + 1\frac{1}{2}$$

duros na classe compreenderão as etapas seguidas na solução dêste exemplo, mesmo nesta apresentação simbólica, mais abstrata, como mostramos. Outros necessitarão de diagramas e desenhos para ajudá-los a visualizar a transformação de $3\,{}^1/_4$ em $2\,{}^5/_4$. Outros mais lentos poderão julgar necessário o uso de material manipulativo, como partes fracionárias, para que possam perceber a transformação mostrada no exemplo.


A B C

COMO SOMAR NÚMEROS MISTOS

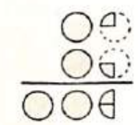
1. O Sr. João tinha $1\frac{1}{4}$ de torta de maçã e $1\frac{1}{4}$ de torta de morango, como mostra o desenho. Quantas tortas êle tinha no total?

a) Quantas tortas você vê em A? em B?

b) Em C você tem $1\frac{1}{4}$ de torta mais $1\frac{1}{4}$ de torta colocados juntos. Quantos quartos de torta você vê no desenho A e B? Quantas tortas inteiras em A e B?

c) Use as ilustrações C e D para mostrar que $2\frac{2}{4}$ de uma torta são o mesmo que $2\frac{1}{2}$ da mesma torta.

2. Nós podemos adicionar êstes dois números mistos como mostra o desenho abaixo.

D 

$$\begin{array}{r} 1\frac{1}{4} \\ +\,1\frac{1}{4} \\ \hline 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Primeiro encontrar a soma usando os desenhos, como é mostrado à esquerda.

Agora vamos trabalhar com o exemplo.

Primeiro adiciona $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Temos $\frac{2}{4}$.

Em seguida adiciona $1 + 1$. Temos 2.

A soma é $2\frac{2}{4}$.

Como podemos mudar $2\frac{2}{4}$ para $2\frac{1}{2}$? Por que não mudamos $2\frac{1}{2}$?

3. Explique cada passo de seu trabalho, em cada um dêstes exemplos:

a)	b)	c)	d)
$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$
$+\,2\frac{1}{4}$	$+\,\frac{3}{8}$	$+\,3\frac{1}{6}$	$+\,5\frac{3}{8}$
$5\frac{2}{4} = 5\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}$	$9\frac{2}{6} = 9\frac{1}{3}$	$5\frac{6}{8} = 5\frac{3}{4}$

4. Agora copie os exemplos, sem as respostas, nos seus cadernos. Feche seu livro e procure encontrar as somas. Compare depois seu trabalho com o trabalho acima e veja se suas respostas estão corretas. Se cometeu algum êrro, corrija-o. Se precisar de alguma ajuda, peça ao seu professor. Se não cometeu nenhum êrro, está pronto para resolver os exemplos abaixo.

5. Procure as somas

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$3\frac{1}{4}$	$6\frac{3}{8}$	$5\frac{1}{6}$	$6\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$8\frac{3}{8}$
$5\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$3\frac{5}{8}$	$3\frac{1}{4}$	$6\frac{3}{8}$

PRÁTICA, COM NÚMEROS MISTOS, EM ADIÇÃO

6.	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$4\frac{1}{3}$	$7\frac{3}{8}$	5	$\frac{3}{8}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{8}$	$3\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{8}$

Muitos tipos de material exploratório podem ser usados para enriquecer o estudo, nas séries primárias.

Sem dúvida, o primeiro dêstes três processos é mais maduro e indica a habilidade da criança de trabalhar num nível mais elevado de abstração. De qualquer maneira, o nível da criança que usa desenhos e diagramas é menos maduro que o primeiro. O mais baixo nível de aprendizagem nós encontramos naquelas crianças que necessitam de muita experiência concreta com material manipulativo e exploratório.

Geralmente em classes não homogêneas todos os níveis de maturidade são encontrados. Por esta razão, na apresentação inicial de um nôvo processo, ou de uma nova dificuldade, o professor deve incluir algumas experiências dentro de cada um dos níveis de aprendizagem, como foi feito na aula de subtração. Êste

processo muito enriquecerá a aprendizagem de tôdas as crianças. Depois da apresentação inicial, o professor deve dividir as crianças em grupos[3] de acôrdo com as diferenças de níveis de maturidade de aprendizagem e de desenvolvimento do raciocínio e assim poderá atender melhor às necessidades de cada uma. Pelo menos dois grupos devem ser organizados: um com tôdas as crianças que têm possibilidade de um trabalho em nível mais abstrato e já estão prontas para uma prática sistemática, e outro com tôdas que ainda precisam de ajuda com recursos audiovisuais. Algumas crianças, mais lentas, certamente necessitam mais experiências com material manipulativo.

O professor, em face do problema, deve ajustar os métodos e os materiais aos diferentes níveis de aprendizagem das várias crianças. Assim, cada uma é levada a trabalhar no mais alto grau possível de raciocínio, de acôrdo com sua possibilidade de compreender o trabalho que está realizando. *Um ensino que podemos chamar pobre é evidenciado pelo uso indistinto de materiais que são adaptados a níveis mais elevados ou menos elevados que o nível em que a criança compreende o trabalho.* A espécie de material que uma criança deve usar durante a aprendizagem de algum processo ou tópico deve ser determinada pelo professor por meio de observação e análise do trabalho e respostas dessa criança.

Material Exploratório

Material exploratório

Material exploratório inclui todo aquêle que o aluno pode manipular, mover etc. Alguns dêsses materiais são usados em situações sociais e têm significação social, como moedas, instrumentos de medir, termômetros, réguas. Outros materiais são especialmente usados para ajudar o aluno a compreender alguns aspectos do objetivo matemático da Aritmética. Por exemplo, discos são usados para contagem e agrupamento; o ábaco e o quadro *Valor do Lugar*, para mostrar o significado dos números, das operações, o papel do zero; e partes fracionárias, para ajudar a criança a descobrir relações entre frações de diferentes valôres.

Ábaco e Q.V.L.

O uso de materiais exploratórios que as crianças podem manipular ou organizar de diferentes maneiras é um excelente caminho para que adquiram experiências diretas com números e sua aplicação. Estas atividades são de muito valor, principalmente nas primeiras séries, quando as crianças estão ganhando as experiências básicas. Material de contagem e agrupamento como discos, botões, pauzinhos, blocos pequenos, são maneiras concretas de tornar o número signi-

[3] JOHNSON (C.E.), "Grouping Children for Arithmetic Instruction", *The Arithmetic Teacher*, 1:16-20.

ficativo e de desenvolver o conceito de conjunto.

A necessidade do uso de material exploratório diminui à proporção que as crianças tornam-se mais maduras, capazes de pensar em nível abstrato e de fazer generalizações. Contudo, o professor não deve hesitar em usar tais materiais quando uma demonstração com objetos torna um nôvo trabalho mais claro e significativo.

Materiais Exploratórios Usados na Demonstração da Estrutura dos Sistemas e Processos Fundamentais de Numeração

Em outros capítulos dêste livro o leitor encontrará discussões sôbre o uso de muitas espécies diferentes de materiais exploratórios que demonstram o significado dos números e das operações numéricas.

Alguns dos materiais de mais valor, para ajudar a criança a compreender a estrutura do sistema de numeração, são os seguintes:

1) Círculos, pauzinhos ou fichas para mostrar como agrupar e reagrupar unidades, dezenas e centenas.

2) Quadro de Cem Quadrados para mostrar o significado dos números até 100.

3) Quadro Valor do Lugar para mostrar o significado do valor relativo dos algarismos e o agrupamento e reagrupamento nas operações numéricas.

4) Ábaco para demonstrar o valor do lugar dos algarismos e o valor do zero.

5) Uma coleção de cartões com 100 quadrados, tiras com 10 quadrados, e simples quadrados para mostrar números até 1 000.

6) Círculos e partes fracionárias de círculos, envolvendo especialmente meios, quartos e oitavos.

7) Flanelógrafo com partes fracionárias.

8) Quadro de frações para descoberta das equivalências.

Alguns dos materiais exploratórios mais valiosos para ajudar a criança a descobrir e compreender os vários passos nos diferentes processos com números inteiros, frações ordinárias e decimais são:

1) Quadro Valor do Lugar.

2) Círculos e partes fracionárias dos círculos.

3) Coleção de quadrados.

Coleções Para Professôres e Alunos

É ideal que cada criança, nas várias séries, tenha a sua coleção de material. Essa coleção deve corresponder à coleção do material usado pelo professor nas demonstrações. O material que as crianças usam não precisa ser tão grande como o usado pelo professor, considerando que o material usado por êste deve

ser visível de tôdas as partes da sala.

O material da coleção dos alunos deve variar e aumentar de série para série, porque novos tópicos são introduzidos em cada série. Como mostraremos nos Capítulos 5 e 6, as crianças nas primeira e segunda séries devem ter pequenos objetos para agrupar quando aprendem o significado dos números, descobrem agrupamentos numéricos e aprendem os fatos fundamentais. Estas experiências quase não são necessárias nas séries mais adiantadas. Por outro lado, o material das crianças de quinta série deve conter partes fracionárias que serão usadas no estudo dos processos com frações, como descreveremos no Capítulo 10.

O professor tem sob sua responsabilidade determinar uma lista mínima de material que as crianças devem usar para fins de instrução e descoberta.

1. Uma coleção típica para as primeiras séries deve incluir:

a) Círculos, discos e outros objetos que serão usados em contagem, agrupamento etc.

b) Quadro de 100 quadrados, tiras retangulares de 10 quadrados, e simples quadrados para facilitar a aprendizagem do valor do algarismo de acôrdo com o lugar que ocupa.

c) Réguas divididas em decímetros e centímetros.

d) Cartões individuais e fichas para jogos.

2. Uma coleção típica para o professor deve incluir o seguinte material:

a) Cartões para percepção de grupos maiores que 10 riscos sistemàticamente agrupados.

b) Flanelógrafo e pequenos objetos de flanela para mostrar números, agrupamentos, fatos etc.

c) Quadro de 100 (optativo).

d) Pequeno ábaco, para mostrar o valor do lugar.

e) Quadro Valor do Lugar e fichas.

f) Frações recortadas em flanela.

3. Uma coleção típica para séries mais adiantadas deve incluir:

a) Dez tiras com figuras geométricas, dispostas em grupos de 2, 3, 4, 5 até 9, para serem usadas na descoberta de produtos e quocientes.

b) Régua para a criança perceber decímetros e centímetros como frações do metro.

c) Material de fração.

d) Quadrados agrupados em unidades, décimos e centésimos para o ensino de decimais.

e) Cartões individuais e fichas para jogos.

4. O material para as demonstrações do professor nas séries mais adiantadas deve conter:

a) Ábaco.

b) Quadro Valor do Lugar — números inteiros e decimais.

c) Quadro das frações equivalentes em cartolina ou flanela.

d) Flanelógrafo.

e) Quadros de frações equivalentes.

f) Quadrados maiores iguais aos dos alunos, para estudo de decimais.

O uso dêstes e de outros materiais é largamente discutido nos capítulos seguintes. No momento, nosso objetivo, ao apresentar estas coleções, é deixar bem claro as espécies de material exploratório que a escola pode providenciar se a criança vai realmente trabalhar num laboratório de experiências significativas. Direção detalhada para a confecção dêstes materiais está no Apêndice, nas páginas indicadas entre parênteses.

1) Quadros de frações equivalentes (541).

2) Flanelógrafo (537).

3) Coleção de frações (541 e 542).

4) Quadro Valor do Lugar (537 a 541).

5) Quadrados para mostrar números inteiros e decimais (542).

Instrumentos de Medida

O uso dos instrumentos de medida em situações concretas é uma excelente atividade de aprendizagem. Através destas experiências as crianças familiarizam-se com várias unidades de medir e com as situações de aplicação das mesmas. A construção de instrumentos de medir, como réguas, relógios, termômetros, dá à criança mais oportunidade de penetrar nos vários conceitos relativos a unidades de medir e suas divisões.

Nas primeiras séries, o professor deverá prover atividades de aprendizagem de maneira tal que a criança tenha freqüentes oportunidades de observar o uso dos instrumentos de medir e também de usá-los. Depois a criança pode aprender a ler escalas nas várias espécies de instrumentos e ser levada a familiarizar-se com as partes fracionárias das unidades e sentir a precisão das medidas. O professor, em classes mais adiantadas, pode dar às crianças experiências com instrumentos, como odômetro, cronômetro, barômetro, termômetro, para mostrar-lhes alguns dos modos em que as frações decimais são usadas na vida diária.

Daremos a seguir algumas espécies de aparelhos de medir que devem fazer parte da sala de aula como laboratório. O professor poderá selecioná-los de acordo com a necessidade:

1) *Quantidade:* ábaco, máquina de somar, cartazes com números, disco de telefone, placas de automóvel, placas com números de ruas, blocos para contagem, contadores.

2) *Comprimento:* régua, metros de diferentes espécies, aparelhos para medir altura, velocímetro, odômetro, micrômetro.

3) *Tempo:* calendário, relógio de diferentes espécies, relógio de sol, de sombra, ampulheta, metrômetro, horários, fusos horários.

4) *Valor:* moedas, cédulas, cheques, selos, passagens, lista de preços, títulos, registro de caixa.

5) *Pêso:* escalas postais, balanças de diferentes espécies, escalas de enfermeiras, escalas de farmácia, gravuras de escalas para grandes pesos, medidas de pressão, fichas mostrando pesos de diversas coisas.

6) *Área:* cartões com 1, 2, 5, 10, 20 e mais centímetros quadrados, quadrado de um metro, tamanhos de tapêtes e salas, plantas de casa e jardim, mapas.

7) *Volume:* litro, meio-litro, quarto de litro, garrafas, copos, colheres, xícaras, medidas culinárias, medidores de água e gás, pluviômetro, cubo de um decímetro, de um metro.

8) *Temperatura:* termômetro, termômetro de médico, termômetro de medir a temperatura de doces, medidores de temperatura de automóvel e de forno.

O leitor deverá consultar o Capítulo 14, que contém uma discussão detalhada da maneira de ensinar medidas em tôdas as séries.

Material Para Ensinar Dimensões e Áreas de Figuras

O laboratório de Aritmética deve ser equipado com certos materiais manipulativos que possibilitem o ensino de alguns elementos simples de Geometria, incluindo dimensões, perímetros e áreas de retângulos. Os seguintes são essenciais:

1) Régua.

2) Retângulo recortado de papelão de 10 cm x 7 cm, dividido em centímetros quadrados por linhas pontilhadas.

3) No mínimo 12 quadrados de um centímetro, separados.

4) Um metro quadrado dividido em decímetros (para o professor).

Há, no Capítulo 14, discussão detalhada de como usar êstes materiais.

Participação nas Atividades da Escola e da Comunidade

O professor deve aproveitar tôdas as oportunidades que surgem na vida da escola e da comunidade para proporcionar às crianças experiências concretas do uso da Aritmética. Esta é uma das mais valiosas maneiras de torná-las cientes de sua significação social. Atividades como as abaixo relacionadas são ricas na aplicação de uma larga variedade de situações quantitativas.

1) Preparo de um relatório dos fundos depositados no banco da escola.

2) Inventário do equipamento escolar bem como do material suplementar.

3) Traçado do jardim da escola.

4) Cálculo do custo de refrescos para uma festa da classe.

5) Coleta de dinheiro para as despesas de excursões.

6) Registros da freqüência diária da classe.

7) Participação em vendas da escola.

8) Registro dos resultados de jogos ou outros acontecimentos esportivos da escola.

9) Registro diário da temperatura.

10) Planejamento de exposições ou outras atividades da escola.

Excursões e Passeios ao Campo

A experiência tem demonstrado o valor das excursões e passeios ao campo como excelente meio de se dar à criança contatos de primeira mão com situações da comunidade nas quais os números funcionam diretamente. O professor, com o auxílio dos pais e das crianças, pode fazer uma pesquisa dos lugares que a classe pode visitar. A lista seguinte indica os vários lugares que são ricos em contatos com números.

1) *Lojas*: mercados, açougues, padarias, mercearias etc.

2) *Casas de negócio*: leitarias, bancos, mercados etc.

3) *Edifícios públicos*: Correios e Telégrafos, Corpo de Bombeiros, Coletorias, Postos de Fiscalização, Departamento de Água, Fôrça e Luz.

4) *Casas de saúde*: hospitais, clínicas, departamento de saúde, estação de repouso.

5) *Fábricas e centros de produção:* Departamento de Compras, Departamento de Expediente.

6) *Praças de esporte:* campos de basebol, futebol, basquete, vôlei etc.

7) *Transportes:* passagens, aeroportos, rodoviárias.

8) *Centros culturais:* bibliotecas, parques, museus.

9) *Agricultura:* fazendas, pomares, florestas, centro de pesca.

10) *Construções:* casas e grandes edifícios projetados na vizinhança.

As excursões devem ser realizadas sòmente quando tiverem a possibilidade de aumentar as experiências das crianças, contribuindo para a aprendizagem mais que qualquer outra atividade escolar. As excursões devem ser precedidas de uma preparação cuidadosa de maneira que a criança perceba o objetivo a ser alcançado. Por exemplo, antes de visitar uma padaria para ver como o padeiro usa a Aritmética, o assunto deve ser discutido com as crianças à luz das suas experiências anteriores. As coisas que vão ser observadas bem como as perguntas que serão feitas devem ser relacionadas numa lista. Devemos encorajar as crianças a fazer voluntàriamente perguntas para obterem certas informações essenciais. Depois da excursão as crianças devem discutir suas experiências e as informações colhidas devem ser organizadas e sumariadas. O professor deve esforçar-se para conduzir a discussão de tal maneira que as experiências se tornem tão ricas e significativas quanto possível e a compreensão básica desenvolvida. Algumas das questões levantadas pelas crianças poderão não ser respondidas com segurança: tais questões constituirão a base de futuras investigações, que podem ser feitas individualmente ou em pequenos grupos.

Ilustrações e Gravuras

Gravuras como as mostradas na pág. 106 podem servir de base para a discussão do uso da Aritmética na vida diária, quando o contato direto com a situação não fôr possível. As gravuras são especialmente valiosas nas primeiras séries, pois elas possibilitam ao professor mostrar às crianças, num curto espaço de tempo muitas das diferentes situações em que se aplica a Aritmética.

Os modernos livros de Aritmética, bem como os livros de exercícios, contêm uma grande variedade de material ilustrativo dêste tipo, para enriquecer e ampliar significações. Também os museus têm excelentes coleções. Em tôdas as séries, os professôres devem colecionar e arquivar gravuras, fotografias e outros materiais audiovisuais para casos futuros, quer seja na suplementação do livro-texto, quer mesmo na introdução de novos conhecimentos aritméticos. O desenho de figuras baseadas no uso da Aritmética em alguma situação é uma experiência que estimula o pensamento quantitativo. O estudo de mapas, plantas de casa, planos de negócios etc. também enriquece a aprendizagem. É evidente que o uso de gravuras e outros materiais audiovisuais é um dos meios mais eficientes que temos para estimular o interêsse da criança por determinado assunto, tornando-o compreensivo para ela.

O professor deve considerar cuidadosamente os objetivos das gravuras e dos outros recursos audiovisuais nos materiais de instrução. As gravuras dos livros podem ser classificadas[4] em três tipos: (1) mera ilustração, (2) associativa e (3) funcional.

Uma gravura classificada como do tipo *mera ilustração* apenas completa a composição do livro. Melhora a aparência do livro, mas dá pouca ou nenhuma contribuição ao sentido da matéria apresentada. A criança recebe pouca ajuda das gravuras dêste tipo.

Uma gravura pode ser classificada como associativa quando se relacionar com alguma atividade incluída em um grupo de problemas ou em discussões de algum tópico, e não tiver uso específico

[4] GROSSNICKLE (F. E.), "Illustrations in Arithmetic Textbook", *Elementary School Journal*, 47:84-92.

no texto. Por exemplo, quando numa página com problemas sôbre o uso da Aritmética na fazenda aparecem cenas ou algumas atividades rurais, teremos gravura do tipo *associativo*. Do mesmo modo a gravura de um menino numa bicicleta pode ser usada para ilustrar um grupo de problemas sôbre as despesas que tem o dono de uma bicicleta. Em nenhum dos casos a gravura acresce coisa alguma à significação da experiência, pois em ambos os exemplos a situação já é por si compreendida pelas crianças. Tais ilustrações tornam interessante a página, que, de outra forma, poderia apresentar-se monótona ou desinteressante.

Uma gravura ou ilustração classificada como *funcional* é aquela que dá uma contribuição precisa à discussão. É usada como base do trabalho e dá significação à situação. Ordinàriamente uma gravura funcional contém informações nas quais os problemas são baseados, ou fatos que são necessários para resolver um ou mais problemas. Por exemplo, a gravura pode conter uma lista de preços à qual a criança precisa recorrer para achar os preços dos artigos mencionados no problema. Um exame dos livros-texto de Aritmética nos mostra que o uso de gravuras *funcionais* está crescendo notòriamente.

A discussão de gravuras simples sôbre o uso diário da Aritmética é importante elemento num bem elaborado programa de prontidão nas primeiras séries. Durante êste tipo de discussão com gravuras as dificuldades de leitura são eliminadas e maior ênfase é dada às significações e ao vocàbulário oral. As gravuras tornam as crianças capazes de perceber relações que, por outro lado, seriam difíceis de ser notadas.

Gráficos, mapas, diagramas, projetos de negócios, recortes de jornais e revistas são excelentes tipos de ilustrações funcionais. Pode-se usar tal material como base para grupos de questões que sòmente podem ser respondidas pela consulta às ilustrações para obtenção das informações necessárias. Êstes materiais são às vêzes encontrados em livros de referência e em livros-texto usados em estudos sociais, ciências, saúde e outras áreas do currículo. (Veja o Capítulo 3 para sugestões sôbre como apresentar tais materiais.)

Filmes e Televisão

Experiências numerosas com o uso de filmes e televisão mostram que a aprendizagem, tanto direta como indireta, apresenta melhores resultados do que aquêles obtidos por qualquer outro meio. Os resultados são melhores quando os filmes são usados em conexão com outros métodos de instrução. Os filmes contribuem muito para significação, riqueza e exatidão dos conceitos que estão sendo elaborados, especialmente aquêles relacionados às

Uma coleção de placas de automóveis leva as crianças a perceber o valor dos números.

aplicações sociais da Aritmética. As experiências se tornam mais significativas, o raciocínio se desenvolve de modo mais efetivo, e o verbalismo é reduzido. Através de filmes é mais fácil despertar e manter o interêsse. Há evidentemente uma retenção maior das informações, particularmente no caso de crianças de inteligência média, ou abaixo da média.

Os filmes são excelentes substitutos para as excursões. Êles podem ser usados para esclarecer pontos importantes relacionados a visitas e situações que surgem durante as discussões das salas de aula. Muitos sistemas escolares americanos já têm excelentes coleções de recursos audiovisuais e os filmes são freqüentemente usados pelos professôres para dar vitalidade ao ensino da Aritmética. Alguns já têm programas de televisão, como, por exemplo, Portland, Detroit e Pittsburgh.

O valor do ensino pela televisão pode ser mostrado pelos resultados de uma experiência realizada em Pittsburgh, Pensilvânia,[5] durante o ano escolar 1955-56. Cêrca de 20 classes de televisão e 19 classes de contrôle ou comparação, de quinta série, nos distritos escolares próximos de Pittsburgh participaram da experiência. Os assuntos ensinados diàriamente pela televisão incluíam Leitura, Aritmética e Francês. Nós trataremos aqui de resultados obtidos em Aritmética. Havia 655 crianças no grupo da televisão e 696 no grupo de contrôle. Os dois grupos foram equiparados de acôrdo com a habilidade mental e a habilidade em Aritmética. Os resultados e conclusões alcançados foram os seguintes:

1. No fim da experiência, em Aritmética, o grupo de contrôle apresentava um rendimento equivalente a um mês mais de rendimento do que o grupo da TV.

2. O rendimento significativo do grupo de contrôle em relação ao grupo de TV, em Aritmética, se deu nos grupos de crianças com Q. I. normal ou acima do normal. As crianças do grupo de comparação e contrôle e as do grupo de TV, com Q. I. abaixo da média, saíram-se igualmente bem em Aritmética.

3. Professôres e alunos concordaram em que o principal valor do ensino pela televisão, em comparação com o ensino regular da sala de aula, estava na sua capacidade de trazer abundante enriquecimento para os alunos.

4. Ambos, professôres e diretores, concordaram que o principal valor do ensino regular da sala de aula sôbre o ensino pela TV residia nas relações possíveis entre professor e aluno e no ajustamento das diferenças individuais das crianças.

Os professôres devem entrar em contato com os produtores e distribuidores para a obtenção de listas de filmes para serem usados na escola. Os seguintes são alguns dos produtores de filmes sôbre o ensino da Aritmética:

Bailey Films, 6509 DeLongpre Avenue, Hollywood 28, California

Coronet Films, Coronet Building, Chicago, Illinois

Encyclopaedia Britannica Films, Wilmette, Illinois

Knowledge Builders, 625 Madison Avenue, New York 22, New York

United World Films, 1445 Park Avenue, New York 29, New York

Wayne University, 5272 Second Bolvd., Detroit, Michigan

[5] *Pittsburgh Schools Bulletin*, 4-5: 177; 180. Pittsburgh: Division of Curriculum Development and Research, 1957.

Young America Films, 18 E. 41st Street, New York 17, New York.

A seguinte lista de títulos selecionados[6] sugere uma larga variedade de filmes que podem ser obtidos:

1) What is Four? (Que é Quatro?)

2) Fred Meets a Bank (Frederico Encontra um Banco)

3) Know Your Money (Conheça seu Dinheiro)

4) Getting Your Money's Worth (Entendendo o Valor de seu Dinheiro)

5) Transportation (Transporte)

6) Mysteries of Snow (geometry of form) — Mistérios da Neve (formas geométricas)

7) Let's Measure: Pints, Quarts, Gallons (Vamos Medir: Quartos e Galões)

8) Geometry in Action (Geometria em Ação)

9) Science Rules the Range (A Cadeia de Regras Científicas)

10) The Story of Weights and Measures (A História dos Pesos e Medidas).

Análise de Situações Imaginárias

Em lugar de experiências concretas, a análise de situações imaginárias proporciona excelente prática de raciocínio quantitativo. O professor apresenta às crianças uma situação problemática e sob a sua liderança há uma discussão dos passos que terão de seguir para resolver o problema. Damos abaixo três destas situações:

1) Que devemos conhecer para sabermos quanto custarão os refrigerantes para uma festa de aniversário?

2) Como poderemos encontrar o meio mais barato de se viajar de nossa cidade para o Rio de Janeiro?

3) Como poderemos saber o custo de todos os livros-texto que nossa classe está usando êste ano?

Discussões dêste tipo, sob a direção do professor, são semelhantes àquelas desenvolvidas por pais inteligentes que, de tempo em tempo, discutem com seus filhos situações típicas, que êles, como adultos, sabem que seus filhos provàvelmente encontrarão na vida diária. Tais pais desejam que suas crianças tenham alguma base para ação quando tiverem que enfrentar situações da vida real. Estas discussões são geralmente de grande interêsse para as crianças, que, por sua vez, muito lucram com os conselhos e advertências dos seus parentes mais velhos.

Materiais Simbólicos

Livros-texto e livros de exercícios contêm os mais importan-

[6] Para uma avaliação da extensa lista de filmes e filmes naturais, o leitor poderá consultar "The Teaching of Arithmetic", *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, Capítulo 9.

tes materiais simbólicos usados no ensino da Aritmética. Um bom livro-texto acompanhado do manual do professor é um guia valioso para o planejamento do ensino de Aritmética, e pode ser considerado como uma fonte sôbre métodos de ensino da Aritmética.

Um moderno livro-texto é considerado como um livro de aprendiz. É bem ilustrado, com gravuras funcionais e desenhos. Apresenta um desenvolvimento cuidadoso e sistemàticamente arranjado de todos os passos para o desenvolvimento dos processos numéricos, os quais são clara e significativamente apresentados. O desenvolvimento de um livro-texto moderno ajusta-se ao uso de materiais exploratórios e visuais como os descritos nas seções precedentes. Contém a necessária visualização e explicações simples e adequadas sôbre cada nova dificuldade a ser aprendida. Sempre que necessário, as crianças podem recorrer ao livro-texto para ajuda.

Contém uma série de exercícios para estabelecer e manter as habilidades básicas em cálculo e solução de problemas. As atividades para prática incluem exercícios para desenvolver habilidade em leitura, interpretação de tabelas, mapas, gráficos, diagramas e outros tipos de material quantitativo encontrados em leituras gerais e em outras áreas do currículo.

Um moderno livro-texto apresenta muitas ilustrações e problemas envolvendo as aplicações sociais e diárias da Aritmética que estão dentro da cadeia dos interêsses e necessidades da maioria das crianças. Êle é uma fonte de materiais para o enriquecimento do trabalho de Aritmética dos alunos mais capazes. (Ver Capítulo 7.) Para ajudar o professor na apreciação dos resultados das crianças o moderno livro-texto oferece os testes necessários para a avaliação do progresso feito e para o diagnóstico e correção das dificuldades da aprendizagem. (Ver os Capítulos 15 e 16.)

Avaliação e Seleção dos Livros-Texto

Devemos fazer considerações básicas na avaliação de uma série de livros-texto de Aritmética: Em que extensão a série se ajusta ou torna possível um moderno programa de instrução de Aritmética? Um eficiente programa de Aritmética requer o uso de materiais exploratórios visuais e simbólicos, tal como tem sido descrito nas seções precedentes.

A escolha de um livro-texto não deve nunca ser feita antes do exame sistemático de certo número de livros para determinar sua fôrça bem como suas limitações. A lista de itens dados na pág. 119 sugere algumas das mais importantes informações que devem ser consideradas na avaliação. Os tópicos da lista indicam as áreas às quais deve ser dada atenção especial.

A comissão de professôres encarregada de fazer um estudo preliminar de várias séries de livros-texto deve selecionar, para estudo, aquêles itens da lista que ela considera como os mais importantes. Uma lista de páginas e ilustrações que se relacionem com êstes itens deve, então, ser compilada para cada livro. Estas informações devem constituir a base da seleção das três ou quatro séries para uma melhor consideração antes da escolha final. Se se deseja dar pontos para a classificação dos livros-texto, deve-se, então, selecionar os itens da lista principal e, de acôrdo com os mesmos, fazer a classificação. O pêso ou valor de cada item será estabelecido, por acôrdo, pelos membros da comissão.

A base de uma classificação pode ser um julgamento subjetivo como a qualidade do conteúdo relacionado a um item da lista ou uma avaliação baseada na análise de dados numéricos encontrados pela contagem do número de vêzes que itens selecionados aparecem no livro-texto. No primeiro caso as questões levantadas serão: "Que oportunidades oferece para o uso dos materiais explorativos? Quão eficiente é o uso dos materiais audiovisuais? Os exercícios são bem distribuídos?" Um item pode ser classificado de *excelente* a *pobre*.

Quando se deseja obter dados quantitativos, a pergunta básica é: "Quantas ilustrações, exemplos, testes ou problemas há neste livro?" Baseado nestes fatos, um julgamento do valor do conteúdo de vários livros-texto pode ser feito pela comparação direta dos dados quantitativos obtidos em várias séries. Os pontos fracos de certos livros-texto têm sido revelados, com freqüência, através de tais análises quantitativas de seus conteúdos.

Os itens a serem considerados no exame e seleção dos livros-texto[7] são:

1) O ponto de vista dos autores, sua concepção das funções da Aritmética e os princípios de aprendizagem e ensino aos quais êles dão maior ênfase.

2) Métodos de organização da revisão do trabalho dos anos precedentes.

3) A distribuição dos assuntos nas diversas séries.

4) O uso de auxílios visuais e de outros materiais de aprendizagem na apresentação de dificuldades em processos ou problemas.

5) A consideração das aplicações sociais da Aritmética e as necessidades que surgem em tôdas as áreas curriculares.

6) Os meios que oferecem para a avaliação do progresso da criança e para o diagnóstico de suas dificuldades.

---

[7] SPITZER (H. F.), *Teaching of Arithmetic*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1954, Capítulo 11; e BRUECKNER (L. J.) e GROSSNICKLE (F. E.), *Making Arithmetic Meaningful*. Filadélfia: The John C. Winston Co., 1953, Capítulo 14.

7) Provisão para as diferenças individuais em prontidão, habilidade e interêsses.

8) Ilustrações, atrações e durabilidade.

9) Guias e auxílios para o professor.

Material Suplementar Para Exercícios

As experiências concretas de primeira mão, necessárias para dar significação aos números e aos processos numéricos, podem ser indicadas nos livros-texto, mas as experiências diretas devem realmente ser arranjadas pelo professor. O livro-texto deve ser suplementado pelo trabalho com material exploratório e recursos audiovisuais, como já se falou nas seções anteriores.

Os modernos livros-texto e livros de exercícios contêm uma tal riqueza de exercícios práticos que só raramente se torna necessário que o professor prepare exercícios adicionais. Contudo, quando uma criança necessita de prática ou de exercícios mais simples que aquêles apresentados pelo livro-texto, o professor deve usar os materiais encontrados no livro-texto para a série anterior, ou então preparar o material suplementar de acôrdo com a necessidade. Os autores acham que cada professor deve ter uma coleção de livros-texto e de livros de exercícios de, pelo menos, três séries diferentes. (A série para a qual leciona, a série imediatamente inferior, e a imediatamente superior.) Dêste modo, os materiais de instrução podem ser adaptados às necessidades da criança e ao seu nível de desenvolvimento. Por exemplo, se uma criança cuja habilidade em leitura é baixa necessitar de ajuda especial na solução de problemas, o professor pode selecionar grupos de problemas mais simples no livro-texto da série inferior.

Os professôres devem ser muito criteriosos no que diz respeito ao material suplementar que êles preparam. Os materiais para exercícios confeccionados apressadamente, em casa, constituem às vêzes pequena ajuda para a cadeia de dificuldades que a criança tem. Os materiais do livro-texto, rigorosamente construídos por especialistas, são preferíveis àqueles inventados de repente pelo professor sobrecarregado de trabalho.

Trabalho Oral em Aritmética

Muito do nosso trabalho com números é feito sem o uso direto de papel e lápis. Assim, quando vemos que a população de certa cidade é de 487 000 habitantes, usualmente transformamos êsse número em 500 000, ou meio milhão, para facilitar o raciocínio. Usamos esta espécie de raciocínio sem lápis e papel. Nas nossas atividades diárias, a maior parte das operações que realizamos é bastante simples e pode ser feita mentalmente. Êste fato mostra que é necessário incluir muito

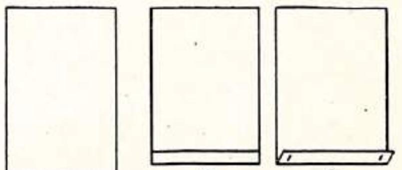
trabalho oral, ou melhor, trabalhos aritméticos sem uso de papel, nas atividades de prática em Aritmética.

A aritmética oral dá ênfase ao uso das relações numéricas bem como outros aspectos importantes do sistema de numeração Faz-se um extensivo uso das aproximações e estimativas de valôres. Em vez de tentar multiplicar por 49 ou 68, usamos números redondos, 50 e 70, porque êles são mais fáceis de ser trabalhados. Para encontrar a soma de 49 e 47, pode-se ver, de relance, que a soma dos dois números é um pouco menos de 100, desde que cada um dos dois números é um pouco menos de 50, ou a metade de 100. Se desejamos encontrar a soma exata podemos, ràpidamente, fazê-lo somando 1 e 3, que constituem as diferenças entre os números e 50, e subtrair essa soma de 100; podemos também somar 40 + 40, depois 9 e 7, e em seguida adicionar as duas parcelas. Em muitas situações sociais não necessitamos da resposta exata.

A aritmética oral é, provàvelmente, mais importante nas primeiras séries porque elimina a dificuldade da leitura e escrita e focaliza a atenção da classe nas relações numéricas envolvidas, especialmente na solução de problemas. O trabalho oral em Aritmética também oferece excelente meio de rever e praticar fatos e processos numéricos. A eficiência dêstes exercícios pode ser aumentada, levando a criança a numerar 20 linhas, e em seguida escrever as respostas de uma lista de fatos, exemplos ou problemas sem usar lápis ou papel para as operações necessárias. Esta atividade requer muita atenção dos alunos no trabalho e seleção dos pontos importantes envolvidos.

Jogos em Aritmética

Alguns jogos aumentam o interêsse para a Aritmética; outros são de pouco valor. Um excelente expediente para usar em exercícios orais de Aritmética é o jôgo *Todos Mostram*. A cada criança, na classe, dá-se uma fôlha de papel de 15 x 20 cm dobrada a 1,5 cm da extremidade inferior, como mostram os desenhos abaixo, para colocar os cartões.



B C

Cada criança recebe também 11 cartões de 7 x 12 cm. Em cada um dos 10 cartões escreve um algarismo, indo de 0 a 9. Os 10 cartões são próprios para tôdas as atividades com os fatos fundamentais, em todos os processos, exceto somas com o total 11, para as quais um cartão extra deve ser providenciado. Se o jôgo vai ser usado para mostrar números com dois algarismos, demonstrando conhecimento do sistema de numeração, são necessários dois cartões para cada um dos dez algarismos.

Para que êsse jôgo possa ser usado na subtração o professor manda que as crianças coloquem seus cartões em ordem em sua carteira. Se dois conjuntos de cartões forem usados, a criança coloca a segunda coleção logo acima da primeira. O professor, em seguida, dita um fato numérico ou escreve-o no quadro, como 9 — 4. Para mostrar sua resposta, cada criança seleciona seu cartão e o coloca no porta-cartão. Quando o professor der o sinal *Alto,* cada criança levanta o seu cartão de modo que o professor possa verificar as respostas. Desta maneira, olhando ràpidamente, o professor descobre as respostas incorretas. Assim, para um grupo de 20 questões o professor pode ver 700 respostas em uma classe de 35 alunos.

Êste jôgo é um processo muito mais eficiente de aprendizagem do que aquêle outro de levar uma só criança a dar uma resposta ou a classe a dar uma resposta em côro. No primeiro caso, não há possibilidade de obter a resposta das outras crianças, e no segundo caso não é possível saber as respostas individuais das crianças.

Uso do Papel e Lápis

Usualmente quando trabalhamos com lápis e papel para resolver operações numéricas ou fazer um teste, trabalhamos cuidadosamente porque procuramos uma resposta exata e podemos depois verificar nosso trabalho. Usamos também papel e lápis para anotar fatos e informações derivados de análise dos aspectos quantitativos de uma situação. Usamos em seguida os dados para executar os cálculos necessários para se chegar a uma solução. Em geral anotamos estimativas e aproximações que fazemos mentalmente, como um registro de nosso pensamento. Isto é útil, de modo especial, no ensino de operações numéricas nas primeiras séries. O registro de números e fatos numéricos faz com que a atenção se focalize nestes fatos e reforce a aprendizagem. A anotação dos fatos no papel ajuda na sua sistematização e assim torna a aprendizagem vívida e permanente.

Nas séries mais adiantadas, a atividade de escrever os processos seguidos na aprendizagem de um nôvo passo de uma operação numérica ajuda a tornar o pensamento mais claro. Desenhar uma figura ou construir um diagrama muitas vêzes favorece a compreensão de uma situação e torna evidentes relações numéricas básicas, tais como aquelas para encontrar o perímetro de um retângulo. Pode-se usar um quadro-negro ou papel para demonstrar e anotar as várias maneiras possíveis de resolver um problema, de modo que os processos usados pelas crianças pos-

Muitas experiências com mostradores de relógio são feitas por esta classe sam ser comparados e avaliados. A preparação de trabalhos escritos e de tópicos relacionados à aritmética social constitui valiosa experiência de aprendizagem, especialmente em se tratando de crianças mais capazes.

Desenvolvimento de Um Cartaz de Experiência

Spencer[8] descreve o uso de um cartaz de experiências para desenvolver idéias matemáticas. A cada criança dá-se uma fôlha de papel na qual ela escreve tôdas as histórias de números que pode descobrir com objetos de alguma espécie, como blocos, um retângulo, três-quartos retirados de um círculo, ou um grupo de medidas como copos, litros. Assim, à vista do retângulo ela pode registrar suas dimensões, as diferenças entre as mesmas, pode comparar tais dimensões, determinar o perímetro, a área etc. Cada parte da informação é anotada no cartaz de experiência de alguma forma adequada, tal como um fato, um exemplo, uma regra etc. A classe pode discutir e avaliar os resultados. São possíveis muitas experiências semelhantes.

Livros Suplementares e Materiais de Referência

Na maioria das enciclopédias escolares — como *The World Book*, *Compton's Pictured Encyclopedia* e *Britannica Junior* — há discussões autênticas de muitos tópicos estudados em Aritmética. O *World Almanac* é outra fonte valiosa de informação sôbre muitos tópicos. A preparação de relatórios orais ou escritos pelas crianças mais capazes baseados nestes materiais é uma atividade excelente. Tôdas as crianças devem ser encorajadas a consultar êstes e outros materiais semelhantes devido ao interêsse que daí pode surgir.

Têm sido publicados muitos livros para crianças relacionados com a aplicação social da Aritmética, como a história do dinheiro, a aritmética da temperatura, da aviação etc. O conteúdo é de natureza largamente informativo. Muitos escritórios, indústrias etc. publicam valiosas informações sôbre suas atividades, muitas das quais são de natureza quantitativa. O professor deverá visitar as livrarias da localidade observando livros e boletins que tragam informações sôbre os tópicos discutidos em classe; haverá, assim, um enriquecimento no trabalho das crianças e ao mesmo tempo elas se familiarizam com as fontes de informações. (Ver págs. 509 a 511 para uma bibliografia selecionada.)

Nos últimos anos foram publicadas diversas coleções de livros sôbre estudos sociais contendo discussões interessantes sôbre a função social de instituições como maneiras de medir o tempo, dinheiro, banco, medidas e a Aritmética na Medicina. Estas discussões são bem mais completas que as encontradas, sôbre o mesmo assunto, nos livros de Aritmética. Não estamos distantes da época em que livros suplementares de Aritmética serão publicados contendo descrições interessantes do papel de cada uma dessas instituições.

Catálogos, boletins governamentais, relatórios especiais e materiais semelhantes também oferecem excelentes fontes de informação sôbre problemas que têm sido investigados em classe. O professor deve usar um arquivo para colocar, tópico por tópico, êste material para referências. Êsse arquivo deve ser suplementado de tempos em tempos com novos materiais.

Quadro de Boletim e Exposições

Muitos professôres dão vitalidade às suas atividades de aprendizagem colocando no quadro de boletim recortes de jornais e revistas e outros materiais semelhantes. Êsses recortes podem também ser trazidas para a classe pelas crianças, e podem constar de anúncios, informações sôbre as variações do tempo, gravuras, mapas, tabelas de preços ou reportagens sôbre prejuízos causados por fogo e tempestades, informações estatísticas etc. Revistas escolares e outros jornais freqüentemente contêm artigos interessantes em que o número ocupa um lugar de destaque. Panfletos e boletins sôbre o preço de alimentos, economia e matérias similares são publicados por agências de publicidade. A discussão dêste material faz a criança tornar-se sensível à importância do número nas atividades diárias.

[8] SPENCER (P. L.) e BRYDEGAARD (M.), *Building Mathematical Concepts in the Elementary School*. Nova Iorque: Henry Holt and Company, Inc., 1952, págs. 322-23.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Por que deve a sala de Aritmética ser considerada como um laboratório de aprendizagem?
2. Em que circunstâncias se justifica o uso do material exploratório?
3. Examine alguns livros-texto e descubra as espécies de material visual que contêm e que possam ajudar na aprendizagem. Avalie-os.
4. Deve o material simbólico ser sempre usado nas primeiras séries?
5. Por que o processo de aprender Aritmética é tão importante?
6. Ilustre, com exemplos concretos, os seis princípios de aprendizagem discuti-

dos nas págs. 91 a 98. Pode usar alguns dos itens contidos na descrição da lição nas págs. 90 e 91 ou qualquer outro exemplo?

7. Como aplicaria você êstes mesmos princípios para ensinar o nôvo passo de subtração de frações, 3 — — 1½?
8. Se possível, aplique êstes seis princípios em uma aula que você vai dar ou observar.
9. Por que é defeituoso um programa de exercício intensivo do tipo tradicional?
10. Discuta as implicações para o ensino dos princípios que fundamentam a organização de exercícios de prática sugeridos às págs. 98 a 101.
11. Escreva um plano de aula mostrando como você seguiria os passos nos processos generalizados apresentados nas págs. 104 a 107, para ensinar uma nova dificuldade numa operação numérica escolhida por você.
12. Por que uma apresentação verbal de um nôvo passo como é dada num livro-texto de Aritmética não conduz à compreensão? Por que deve essa apresentação ser precedida de um trabalho exploratório com material concreto? Discuta os valôres da página de um livro de Aritmética apresentada às págs. 104 e 105.
13. Ilustre o que significa nível de maturidade em aprendizagem.
14. Faça uma lista do material que a sala de aula de uma determinada série deve possuir para transformá-la num laboratório de aprendizagem.
15. Os alunos da classe podem voluntàriamente preparar ou colecionar alguns dos materiais de ensino descritos no capítulo como parte de uma exposição de Aritmética. Prepare uma lista de material para o professôr de acôrdo com a série que você vai ensinar.
16. Visite alguma sala de aula e avalie o material existente incluindo livros suplementares e material de referências.
17. Por que a participação das crianças nas atividades da escola e da comunidade é de valor como aquelas que estão relacionadas na pág. 111?
18. Sugira uma lista de possíveis excursões em sua localidade; selecione um lugar e faça um plano de visita para a sua classe.
19. Examine alguns livros-texto e avalie as gravuras que contêm.

20. Procure observar algum filme sôbre o ensino da Aritmética. Avalie-o.
21. Esboce um plano a ser usado por um grupo de professôres para a avaliação e seleção de uma série de livros-texto de Aritmética.
22. Por que pode ser valioso o *cantinho de Aritmética*?
23. A sala de aula deve ser equipada com materiais comerciais ou com materiais feitos em casa?

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brownell, W. A. *Arithmetic in Grades I and II*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1941. Chapter 1.

Brownell, W. A. *Learning As Reorganization*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1939. Chapter 5.

Brownell, W. A. *Meaningful vs. Mechanical Learning: A Study in Grade III Subtraction*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1949.

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades*. *Philadelphia*: The John C. Winston Co., 1957. Chapter 4.

Clark, J. R., and Eads, L. *Guiding Arithmetic Learning*. Yonkers: World Book Co., 1954.

"Learning and Instruction," *Forty-ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago: University of Chicago Press, 1949. Chapter 9.

"The Teaching of Arithmetic," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago: University of Chicago Press, 1951. Chapter 7.

Thiele, C. L. *The Contribution of Generalization to the Learning of Addition Facts*. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1938.

5

Primeiros Passos no Ensino da Aritmética

1920 a 1950

DURANTE O PERÍODO de 1920 a 1950 muitas escolas adotaram o plano de eliminar a Aritmética do currículo de jardim da infância e das primeira e segunda séries. Esta política foi seguida principalmente sob a errônea suposição de que as crianças novas não podiam aprender Aritmética. Descobriu-se, contudo, que a maioria das crianças entra para a escola com uma considerável base de compreensão dos números e conceitos que, tudo indica, foram ganhos através de experiências no meio ambiente. As experiências mostraram que crianças jovens muitas vêzes têm um genuíno interêsse pela Aritmética e podem fàcilmente aprender muitos dos conceitos mais simples. As crianças encontram na vida diária muitas situações nas quais não podem proceder inteligente e efetivamente a não ser que tenham uma compreensão do número e do modo pelo qual o número as auxilia para lidar com aspectos quantitativos de situações sociais. No presente momento, a tendência geral é começar a instrução planejada da Aritmética logo que a criança entra na escola.

Neste Capítulo discutiremos os seguintes tópicos:

a. Aritmética nas primeiras séries
b. Contagem
c. Ensino da leitura e escrita dos números
d. Agrupamentos e valor do lugar
e. Comunicação das idéias quantitativas
f. Experiências envolvendo aplicações sociais dos números.

a. ARITMÉTICA NAS PRIMEIRAS SÉRIES

Variações nos Programas Elementares de Aritmética

O momento de começar o ensino da Aritmética depende da qualidade do programa que é adotado. Alguns professôres das primeiras séries pensam que a instrução em Aritmética deve ser inteiramente incidental. Isto significa que não haverá nenhuma instrução planejada. Outros acreditam que a Aritmética pode ser aprendida através de experiências sociais porque elas encerram o uso do número. Sob tais condições, a fase matemática da Aritmética receberia p o u c a consideração, mas sobretudo seria dada ênfase à aplicação do número. Outros professôres acreditam que deve haver um intensivo programa de exercícios nas primeiras séries, dando ênfase ao domínio dos fatos básicos de adição e subtração e aos processos elementares de computação nestes dois processos. O resultado inevitável é que aos aspectos intelectuais do trabalho numérico é dado indevido valor e às aplicações sociais da Aritmética é dada pouca consideração. Sob tais condições a aprendizagem se torna um processo desvitalizado e estéril.

No presente momento há uma visível tendência no sentido de começar a instrução sistemática da Aritmética quando a criança entra para a escola. Observações mostram que, devido às experiências da criança em casa e na comunidade, ela vem para a escola com uma grande quantidade de informações sôbre número e seu uso na vida diária.[1] Contudo, esta informação é desorganizada e assistematizada, e pode ter pouco sentido real para a criança. As crianças pequenas variam largamente em suas bases de experiências com números por causa das diferenças em seus ambientes.

[1] BROWNELL (W. A.), *Arithmetic in Grades I and II*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1941, págs. 6-8.

Um programa planejado e organizado para o ensino de Aritmética não implica que todo o trabalho deve ser formal. Em um programa formal todo o trabalho está baseado na fase abstrata do número e a principal atividade é o exercício sôbre fatos e processos. Os Autores acreditam que um programa sistemático de Aritmética nas primeiras séries deve dar ênfase a ambos: ao sentido matemático e à aplicação social do número. A parte principal do programa consistiria de uma série de experiências de aprendizagens seqüenciais, sistemáticas e planejadas. O professor, contudo, não deve hesitar em usar as situações de interêsse que surgem incidentalmente em muitas atividades na sala de aula. Essas situações dão às crianças a oportunidade de usar o número na sua aplicação funcional.

Aritmética no Jardim da Infância

No jardim da infância, o professor deve providenciar experiências nas quais as crianças aprendam a comunicar idéias numéricas e se familiarizem com os conceitos simples de medida. As crianças pequenas devem aprender números e palavras numéricas e aprender a reconhecer alguns dos símbolos. Devem aprender como contar pequenos grupos e compará-los. Devem aprender como usar têrmos quantitativos para descrever e comparar coisas. As crianças pequenas são interessadas em muitos aspectos de medidas. Devem observar como o professor ganha informações numéricas consultando o calendário, relógio, termômetro, e instrumentos similares. O professor deve também dar às crianças oportunidade de usar semelhantes instrumentos de medida como xícaras, réguas, metros, balanças simples, dinheiro, relógios e termômetros durante as atividades diárias em sala de aula. Em resumo, o professor de jardim da infância deve aproveitar as oportunidades para alargar e enriquecer as experiências aritméticas das crianças. Êste deve ser considerado como um programa de prontidão para um trabalho mais sistemático nas primeira e segunda séries.

Quanto de Aritmética Pode a Criança Aprender nas Primeira e Segunda Séries?

Os professôres, algumas vêzes, levantam as questões: "Podem as criança novas aprender Aritmética nas primeira e segunda séries? Estão elas bastante maduras para dominar conceitos e idéias quantitativas?"

Como já foi discutido na pág. 129, Brownell achou que logo ao entrar para a escola muitas crianças adquiriam um conhecimento considerável de Aritmética através de experiências em contagem, fatos numéricos simples e medidas. Poucas aprenderam a ler e escrever números além de 10.[2]

Informação sôbre o conhecimento que as crianças têm no fim das primeira e segunda séries é dada no quadro adiante. Os dados são baseados em resultados de testes aplicados em aproximadamente 500 crianças de 17 escolas das seções leste e meio-oeste dos Estados Unidos. Na maioria dos exemplos, os alunos meramente tinham de verificar uma das séries de gravuras ou símbolos. Êste processo eliminava as dificuldades de leitura. Uma parte do teste incluía itens que requeriam das crianças executar simples computações de adição e subtração de números inteiros.

A seção I do quadro contém uma amostra de dados sôbre o conhecimento que as crianças tinham relativamente a conceitos numéricos e simples processos computacionais. A seção II contém dados sôbre o conhecimento que as crianças tinham sôbre as aplicações sociais da Aritmética largamente relacionadas às medidas. A porcentagem de respostas certas é dada para ambas as séries, primeira e segunda. Em cada seção estão incluídos itens dos mais fáceis até os mais difíceis. Seria muito revelador e

[2] PRIORE (Angela), "Achievement by Children Entering the First Grade", *The Arithmetic Teacher*, 4:55-60.

interessante examinar os itens da tabela um por um e considerar as implicações das porcentagens de exatidão para o programa instrucional. Os resultados seriam, indubitàvelmente, ainda melhores se o programa de Aritmética no jardim da infância e nas primeira e segunda séries fôsse cuidadosamente planejado.

I. CONHECIMENTO DE DEZESSEIS CONCEITOS NUMÉRICOS SELECIONADOS PELAS CRIANÇAS DAS PRIMEIRA E SEGUNDA SÉRIES (EM MAIO)

Itens	Porcentagem de Respostas Corretas	
	1.ª Série	2.ª Série
A. Habilidade de contar até oito		
1. Faça cruzes em 3 xícaras	98,9	100
2. Faça cruzes em 8 cestas	98,8	95,8
3. Faça cruzes em 6 maçãs	95,6	98,3
B. Reconhecimento de números impressos		
1. Desenhe um círculo em volta de cada 5	96,7	100
2. Desenhe um círculo em volta de cada 25	84,5	99,2
3. Desenhe um círculo em volta de cada 128	15,2	45,8
C. Habilidade de escrever números ditados		
1. Escreva 8	90,6	100
2. Escreva 19	70,2	98,3
3. Escreva 120	20,4	65,3
D. Leitura e compreensão de frações		
1. Faça uma cruz sôbre a metade do bôlo	71,7	93,2
2. Faça uma cruz sôbre três-quartos da torta	34,8	42,6
3. Marque a fração que representa a menor parte de uma polegada (escolha $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$)	3,6	11,6

Itens	Porcentagem de Respostas Corretas 1.ª Série	2.ª Série
E. Habilidade de adicionar e subtrair números inteiros		
1. 12 + 3 (forma vertical)	44,3	81,4
2. 21 + 42 (forma vertical)	8,7	89,0
3. 36 — 11 (forma vertical)	0,0	80,5
4. 87 — 59 (forma vertical)	0,7	1,1

II. CONHECIMENTO DE 34 APLICAÇÕES SOCIAIS SELECIONADAS DE ARITMÉTICA POR CRIANÇA NAS PRIMEIRA E SEGUNDA SÉRIES (EM MAIO)

A. Identificação de instrumentos de medida		
1. Régua	97,2	94,9
2. Moeda (*penny*)	93,3	100
3. Termômetro comum	77,9	82,2
4. Compasso	57,2	62,1
5. Medida para cereais (*bushel basket*)	47,1	55,3
B. Conhecimento das unidades com que compramos coisas Fazer uma cruz nas coisas que compramos (escolha uma em cinco):		
1. Por litro (leite)	96,7	93,2
2. Por dúzia (ovos)	80,7	89,0
3. Por metro (pano)	67,6	83,9
4. Por quilo (tomate)	32,6	34,8
C. Ver horas Marque o relógio que mostra:		
1. 1 hora e 30 minutos (ou meia hora depois de uma)	90,6	95,8
2. 6 horas	80,1	98,3
3. 6 horas e 15 minutos (ou um quarto depois das 6)	50,6	68,6
4. 3 horas e 5 minutos (5 minutos depois das 3)	34,1	70,0
5. 3 horas e 35 minutos (ou 25 minutos para 4)	25,4	73,7

Itens	Porcentagem de Respostas Corretas 1.ª Série	2.ª Série
D. Itens relacionados com medida para líquidos		
1. Marque a xícara de medir	90,1	97,5
2. Marque o copo que está cheio pela metade	75,7	80,5
3. Quantos *pints* há em um *quart*?	8,0	51,6
E. Itens relacionados com dinheiro		
1. Reconhecimento do décimo (faces)	93,9	98,3
2. Identifique a caixa registradora	90,6	89,8
3. Identifique o sinal	60,9	96,9
4. Saber quantos décimos fazem um dólar	30,0	57,9
F. Itens relacionados com distância		
1. Marque o jarro mais profundo	85,5	92,1
2. Identifique o velocímetro	82,9	92,4
3. Reconheça a fita métrica	58,0	82,1
4. Marque o espaço de ½ polegada na régua	30,9	58,5
G. Itens relacionados com pêso		
1. Reconheça a balança (precisa)	95,6	100
2. O que compramos por tonelada (carvão)	72,4	84,7
3. Marque a coisa que pesa uma libra	14,4	17,8
H. Itens relacionados com volume ou capacidade		
1. Marque a maior bola	97,2	100
2. Marque o que usamos para medir farinha	62,3	94,0
3. Marque a coisa que compramos por *bushel* (ervilha)	30,4	49,5

Itens	Porcentagem de Respostas Corretas 1.ª Série	2.ª Série
I. Itens relacionados com temperatura		
1. Marque o que nos diz que temos febre (termômetro clínico)	80,4	98,0
2. Marque a temperatura que indica muito calor (96°)	30,0	55,8
3. Marque a temperatura que indica muito frio (32°)	5,8	18,4

Pelos dados acima, parece que as crianças nas primeira e segunda séries são capazes de aprender muito a respeito do número e seus usos. As classes que participam não foram selecionadas porque não tinham programa de Aritmética de aspecto particular. Os dados, contudo, representam os resultados de uma variedade de programas típicos na Aritmética primária. É muito provável que os programas sistemáticos produziriam sem dúvida melhores resultados. Especial atenção é chamada para a porcentagem relativamente alta de respostas corretas na primeira série para contagem, leitura e escrita de números, e para a baixa porcentagem para a habilidade de somar e subtrair números inteiros.

A prática em algumas escolas de protelar a instrução sistemática de Aritmética até a terceira série não é uma política que se possa justificar. Felizmente isto está sendo ràpidamente banido, em favor do programa planejado em que a devida consideração é dada à prontidão da criança para trabalhar em Aritmética.

Conteúdo dos Programas de Aritmética nas Primeira e Segunda Séries

Uma análise do conteúdo dos programas de Aritmética nos modernos cursos em tôdas as partes do país mostra que são os seguintes os principais tópicos da Aritmética nas primeira e segunda séries:

1. Contagem de rotina e contagem racional até 100
2. Leitura e escrita de números até 100
3. O conceito de valor de lugar incluindo dezenas e unidades
4. Comunicação de idéias quantitativas por métodos verbais, visuais e gráficos
5. Introdução das medidas de tempo, valor, distância, líquidos, pesos, temperatura

6. Aplicações de números e medidas nas situações sociais
7. Adição e subtração de fatos básicos até 10; até 18 é opcional.

Existem livros-texto e livros de exercício que provêem às bases para um desenvolvimento sistemático dos vários aspectos da Aritmética mencionados acima. Êstes materiais seriam suplementados por muitas situações reais que surgem na sala de aula, de maneira que o trabalho será vital e interessante, a todo tempo, para as crianças.

Teste de Prontidão Para Aritmética Primária

Teste de prontidão

No curso de um mês ou mais o professor atento descobrirá que há grandes diferenças na prontidão das crianças para o trabalho sistemático em Aritmética. Essas diferenças são reveladas pelas suas respostas inteligentes às ordens e perguntas do professor que pedem fatos envolvendo números.

O mais eficiente processo que o professor pode usar para determinar o conhecimento aritmético das crianças ao entrarem na escola é ministrar um teste de prontidão bem estruturado tal como o apresentado nas págs. 136 e 137. O teste consta de duas partes. A Parte I contém 20 itens relacionados com a fase matemática da Aritmética. A Parte II contém 20 itens relacionados com a aplicação social da Aritmética. Os números dentro dos parênteses antes de cada item são as porcentagens de respostas corretas dadas pelas crianças de primeira série às quais o teste foi aplicado. Os itens em cada uma das partes do teste vão de muito fácil a muito difícil. A média para cada parte é aproximadamente de 45 por cento. A ausência de pontos bem como muitos pontos são raramente conseguidos pelas crianças. O teste é administrado individualmente. O tempo médio requerido é de 10 minutos. O professor lê cada item para a criança e registra suas respostas marcando + se a resposta fôr correta, e — se não fôr correta. As respostas devem ser tècnicamente corretas, sem mero verbalismo ou expressões inexatas. Todos os números em I 2a e b devem ser lidos corretamente para marcar um ponto. A nota da criança é o número total de itens respondidos corretamente nas duas partes do teste combinado. O teste tem uma veracidade de + 0,92. A correlação entre as notas de setembro no teste de prontidão e na realização do teste de compreensão ministrado aproximadamente no fim do ano escolar[3] foi de 0,87. Êste coeficiente de previsão é mais alto que muitos dos outros testes de prontidão existentes em Leitura ou Aritmética.

[3] BRUECKNER (L. J.), "Development and Validation of an Arithmetic Readiness Test", *Journal of Educational Research*, 40:495-502.

TESTE DE PRONTIDÃO PARA A ARITMÉTICA PRIMÁRIA*

I. Fase matemática

1. Seqüência numérica (oral — leitura pelo professor):
   - a. (90) Quando eu digo 1, 2, 3, 4, que vem depois?
   - b. (40) Quando eu digo 5, 10, 15, 20, que vem depois?
   - c. (15) Quando eu digo 2, 4, 6, 8, que vem depois?
   - d. (70) Que número está faltando: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9?
   - e. (60) Que número está faltando: 100, 200, 300, 400, 600?
   - f. (45) Que número está faltando: 10, 20, 30, 50, 60?

1. Leitura de números (apresentar em cartões separados):
   - a. (50) Leia êstes números para mim: 5 8 9.
   - b. (20) Leia êstes números para mim: 21 34 47.

3. Frações (oral — leitura pelo professor):
   - a. (50) Que parte desta empada foi comida?
   - b. (5) Que parte da empada não foi comida?

   - c. (55) Quantas metades tem uma empata inteira?
   - d. (30) Quantos ovos há em meia dúzia?
   - e. (30) Quantas moedas de Cr$ 1 são necessárias para fazer Cr$ 5?

4. Uso do número na solução de problemas (oral — leitura pelo professor):
   - a. (90) Roberto tinha Cr$ 5. Êle gastou Cr$ 1. Quanto sobrou?
   - b. (60) Maria tinha Cr$ 2. Sua tia lhe deu Cr$ 3. Quantos cruzeiros tem ao todo?
   - c. (60) Quantas balas de Cr$ 2 cada uma pode você comprar com Cr$ 10?
   - d. (40) Luzia tem 4 anos. Sua irmã é um ano mais môça. Que idade ela tem?
   - e. (20) João tem Cr$ 20. Êle precisa de duas vêzes essa quantia. De quanto mais êle precisa?
   - f. (20) Carlos foi convidado para uma festa às 3 horas. Êle chegou às 3 horas e 30 minutos. De quanto foi o seu atraso?
   - g. (10) Se eu dividir 9 livros entre 3 crianças, quanto receberá cada criança?

II. Conhecimento de aplicações sociais

1. Uso de instrumentos de precisão (oral):
   - a. (90) Que coisa nós usamos para saber as horas?
   - b. (80) Que coisa nós usamos para saber o comprimento da sala?

* Êste teste foi adaptado para atender às necessidades de nossas crianças. (N. T.)

   - c. (80) Que coisa nós usamos para saber o dia do mês?
   - d. (65) Que coisa nós usamos para saber quando um quarto está quente ou frio?
   - e. (40) Que coisa nós usamos para ver melhor as estrêlas?
   - f. (25) Que coisa nós usamos para saber o pêso de uma criança?
   - g. (10) Que coisa o homem lê em sua casa para saber a quantidade de eletricidade gasta em sua casa?

2. Unidades de medida (oral):
   - a. (50) Quantos centavos há em Cr$ 10?
   - b. (30) Quantos Cr$ 1 há em Cr$ 10?
   - c. (80) Quantos meios metros há em um metro?
   - d. (60) Quantos pacotes de 250 gramas posso fazer com um quilo de manteiga?
   - e. (20) Quantos dias tem uma semana?
   - f. (5) Quantas horas há do meio-dia de hoje até o meio-dia de amanhã?

3. Uso geral do número (oral):
   - a. (70) Quantos lados tem um quadrado?
   - b. (55) Quantas coisas há em um par de coisas?
   - c. (40) Qual é o nome do último dia da semana?
   - d. (35) Qual é a data de seu aniversário (mês e dia)?
   - e. (30) Nós compramos o açúcar por quilo. Como nós compramos os ovos?
   - f. (25) Nós compramos o milho por quilo. Como nós compramos o leite?

Os resultados dêste teste dão ao professor um valioso índice relativo ao *status* da criança na sala de aula, e também dão um índice do provável aproveitamento das crianças no correr do ano. O resultado do teste pode dar ao professor base para o agrupamento das crianças para fins de ensino. A fôlha de registro das respostas da criança pode ser duplicada pelo professor e as fôlhas do teste arquivadas para futuras referências. A média de números de pontos para meninos e meninas é aproximadamente igual.

Existe um grupo de teste de prontidão de fácil aplicação, e os pontos têm correlação de cêrca de 0,70 com os pontos sôbre o teste individual descrito acima. Êste teste e as técnicas para sua aplicação são dados na referência[4] abaixo.

[4] MERTON (Elda L.) e BRUECKNER (L. J.), *Ready for Numbers*. Filadélfia: The John C. Winston Co., 1955.

Em acréscimo aos resultados dos testes de prontidão, o professor também consideraria fatôres, tais como habilidade mental da criança, maturidade social, experiências prévias, contrôle motor, hábitos de trabalho, e seus interêsses e atitudes. A saúde da criança, visão e audição são também fatôres importantes. O programa de Aritmética seria organizado de maneira a prover uma série sistemática de experiências que são ajustadas à prontidão e necessidades das várias crianças.

b. CONTAGEM

Natureza da Contagem

A maioria das crianças é capaz de contar pelo menos até 10 quando entra para a escola. Brownell[5] relatou que a habilidade de contar até 20 era *bem desenvolvida* quando as crianças entravam para a escola. Contudo, as crianças novas variam grandemente em sua habilidade de contar. MacLatchy[6] acha que 8 por cento de um grande grupo de crianças da primeira série não contariam até 10, enquanto 8 por cento do grupo poderiam contar até 100. Em média, eram capazes de contar até 29.

Há pelo menos seis estágios no processo completo de contagem: (1) contagem de rotina, (2) enumeração (3) identificação, (4) reprodução, (5) comparação, e (6) agrupamento.

1. *Contagem de rotina*. É a mera repetição dos números na ordem seqüencial, sem significação. As crianças repetem os nomes dos números em seqüência nas rimas e canções, como 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9, para 12 faltam 3. A contagem de rotina é largamente aprendida através da imitação. O valor da contagem de rotina não deve ser diminuído desde que a criança deve aprender os nomes dos númeors e sua seqüência a fim de ser capaz de contar racionalmente.

2. *Enumeração*. Ou contagem racional, significa contar para achar o número de objetos em um grupo. O modo mais simples de ensinar a criança a achar o número é levá-la a tocar ou mover os objetos em grupo um de cada vez enquanto êles são contados, estabelecendo assim a relação de um a um entre o nome dos números e o objeto. A enumeração responde à pergunta "Quantos?"

3. *Identificação*. A identificação responde a questões tal como: "Em que grupo há quatro bolas?" A criança que responde a esta questão corretamente pode

identificar o número em um grupo ou por contagem ou por mero reconhecimento.

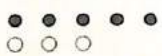
[5] BROWNELL (W. A.), *ibid.*

[6] MACLATCHY (J.), "Seeing and Understanding in Number", *Elementary School Journal,* 45:144-152.

Deve-se proporcionar, no primário, uma grande variedade de atividades para ajudar as crianças a compreender o significado dos números.

4. *Reprodução.* É a resposta correta a afirmações tal como "Destas bolas, dê-me 4." A criança deve apanhar de um grupo maior o número de bolas que responde certo à solicitação.

5. *Comparação.* A comparação é requerida para rseponder a questões tal como: "Quantas



bolas pretas há mais que bolas brancas?" A criança vê de um relance que há mais bolas pretas que bolas brancas, e conta para achar a resposta.

6. *Agrupamento.* Verifica-se se a criança possui habilidade em agrupar quando identifica, de relance, o número em um grupo ou parte de um grupo sem contar os objetos. Então, a criança pode ver um grupo de 4 à esquerda e contar os outros objetos um a um para chegar ao total. Outra criança pode contar de dois a dois para achar o total. Uma criança bem dotada pode reconhecer dois agrupamentos de pontos e contar de cinco a cinco para obter o total.

Carper[7] acha que as crianças que usavam um processo de agrupamento quando contavam em situações numéricas concretas tinham também sucesso em dar respostas para os fatos numéricos e problemas verbais. Aquelas que não pudessem contar por grupos, mas dependiam das relações de um a um em disposições concretas, não podiam agir efetivamente com situações abstratas. A incapacidade para agrupar é um sintoma de imaturidade.

As crianças devem ser levadas a reconhecer, de relance, agrupamentos de até 5 figuras geométricas organizadas em padrões sistematizados. Os padrões dados abaixo devem ser usados. Seriam êles colocados em grandes cartões e apresentados às crianças um de cada vez para identificação.

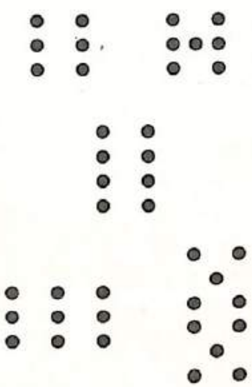
Carper achou, em um grupo de cêrca de 300 alunos que iniciavam a primeira série, que 81% reconheciam grupos de 3; 66%, grupos de 4, e 52%, grupos de 5. Dawson[8] mostrou que a disposição dos grupos deve ser sistematizada, como foi descrito acima, para facilitar o conceito de agrupamento. A apresentação casual de objetos sob a forma de gravuras impede o *pronto reconhecimento de grupos.* Visto que a habilidade em agrupar parece estar intimamente relacionada ao êxito no trabalho de números abstratos mais que à simples contagem, o professor verá nisto a

[7] CARPER (D.), "Seeing Numbers as Groups in Primary-Grade Arithmetic", *Elementary School Journal,* 43:166-170.

[8] DAWSON (Dan T.), "Number Grouping as a Function of Complexity", *Elementary School Journal,* 54: 35-42.

necessidade de que os alunos aprendam como agrupar e identificar de relance o número em um grupo de qualquer tamanho, até 5 pelo menos.

Agrupamentos de pontos de 6 a 10 seriam baseados naqueles de 1 a 5. O seguinte arranjo de dominós seria usado:



As formas alternativas de 10 são:

Através de tôda a discussão neste livro, será mostrado que há diferentes estágios no desenvolvimento da habilidade em qualquer nível de execução de contagem, indo da contagem de rotina para a contagem parcial ou para a contagem por grupos de dois ou mais. Do mesmo modo o trabalho do aluno no processo pode representar qualquer nível de desenvolvimento de simples contagem ou manipulação de números para o ponto em que cada fase da operação tem um sentido claro e êle é capaz de usar métodos maduros para as respostas. O nível em que uma criança opera depende da qualidade de experiências numéricas que ela tem. Se o aluno vai aprender a operar em um alto nível de compreensão, suas experiêncisa de aprendizagem devem ser cuidadosamente planejadas e sistemàticamente organizadas.

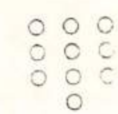
Testando Nível de Maturidade da Contagem

Há diversos testes fàcilmente administrados que o professor pode usar para determinar o nível de maturidade da criança na contagem.

1. Um teste coletivo criado por J. Kern, da Universidade de Freiburg:

a) Faça um desenho dêste agrupamento de 10 círculos em uma fôlha de papel branca (10 círculos de mais ou menos 3 cm, mostrado abaixo, em uma fôlha de papel branca de 20 por 28 cm).

b) Dê a cada criança, do grupo a ser testado, uma fôlha de papel e um lápis.



c) Diga às crianças: "Vou mostrar-lhes uma figura. Olhem para ela cuidadosamente." (Dito isto, exponha a figura durante 10 segundos.)

d) Então, diga: "Agora, em sua fôlha, faça um desenho igual ao que lhes mostrei." (Pausa.)

e) Quando você terminar seu desenho, abaixe o lápis e vire a fôlha de papel.

f) Recolha as fôlhas e analise os desenhos.

Para avaliar o trabalho, Kern imaginou um plano como segue:

Classificação A. Os desenhos são substancialmente corretos em forma e disposição dos círculos.

Classificação B. Os desenhos mostram semelhança de forma mas incorreção no número de círculos nas fileiras ou nos totais.

Classificação C. Desenhos incorretos na forma, disposição e número de círculos.

Os desenhos da pág. 143 ilustram cada um dos três niveis de classificação. Os desenhos são imitação do trabalho original das crianças. Segundo Kern, a classificação A revela maturidade substancial do conceito de agrupamento de 10 círculos; a classificação B revela que a criança tem alguma concepção de agrupamento, mas não identifica corretamente um grupo de 10; a classificação C indica quase completa falta de conceito e grande imaturidade. É admirável como êste simples teste de grupo revela a distribuição de maturidade do conceito de grupo na primeira série do jardim da infância.

2. Um teste individual:

a) Faça um desenho de 12 pontos em cartões medindo 15 x 20 cm, como é mostrado abaixo. Use pontos grandes para serem vistos fàcilmente.

b) Teste uma criança de cada vez, dizendo: "Eu tenho um cartão aqui com alguns pontos. Quero que você me diga quantos ponto há no cartão." Então, deixe o cartão na frente da criança.

c) Observe como a criança procede para achar o número. Faça um registro de suas observações e dê uma avaliação geral do nivel de maturidade da criança. Os processos seguintes dispostos em ordem de maturidade terão descoberto:

1) Conjeturas ao acaso ou pura contagem de rotina com erros em contagem.

2) Contagem de um a um, tocando cada ponto.

3) Contagem de um a um, não tocando cada ponto.

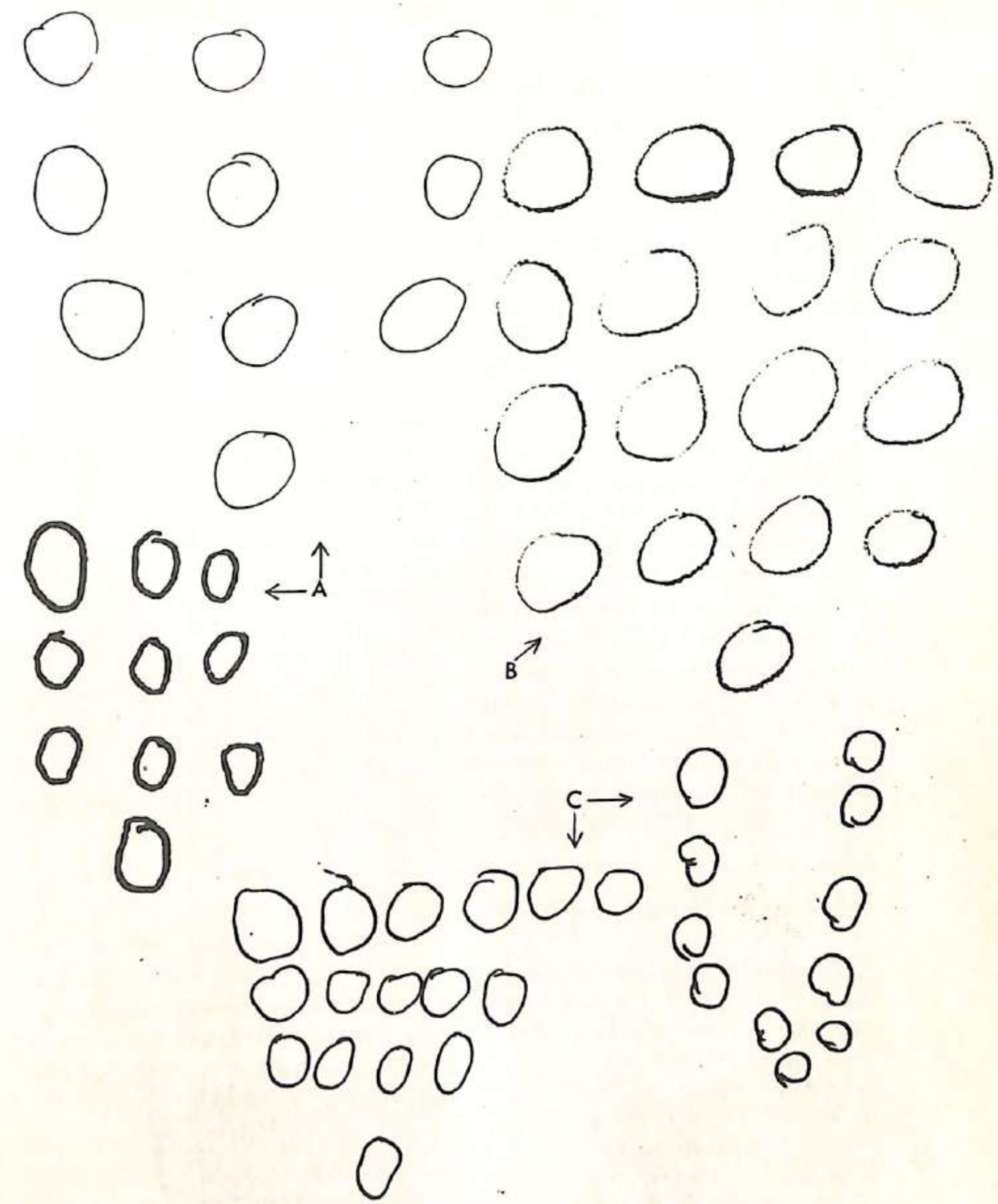
4) Contagem parcial — vê um grupo de quatro e conta de um a um o resto dos pontos.

5) Contagem de dois em dois.

6) Contagem por grupos de 4.

7) Pensa: "Duas vêzes seis, 12; ou 6 e 6 são 12."

8) Vê de relance o grupo como um todo.



3. Um outro teste individual:

a) Pedir à criança que conte de um em um até onde ela possa.

b) Apanhe 10 botões, blocos ou moedas de brinquedo. Tome 5. Ponha-os sôbre a mesa em um grupo inteiramente compacto. Pedir à criança que os conte. Observe suas técnicas e quaisquer erros ou omissões em contagem Ela pode contar de um em um. Por outro lado, ela pode reconhecer o número no grupo sem contar. Conserve um registro das respostas da criança. Inicie uma pasta para cada aluno.

c) Proceda de maneira semelhante com 7, 9 e 10 blocos.

d) Faça uma avaliação de quando a criança é capaz de contar bem. Esta informação é de valor para o planejamento do que ensinar sôbre contagem. Conserve um registro de suas observações.

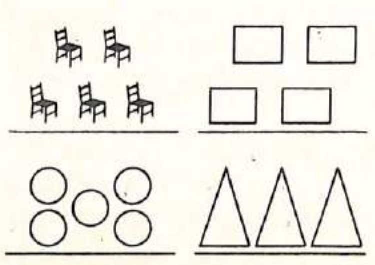
Números Ordinais e Cardinais

Os números são usados de dois modos, designados pelos têrmos *ordinal* e *cardinal*. Um número tem uma posição ou ordem na escala numérica e também um valor. O têrmo *ordinal* faz referência à posição ou ordem de um número em relação a outros números. Assim, 4 é o quarto número na série numérica. Êle vem depois do 3 e antes do 5. Quando o tempo é expresso como 4 horas, o 4 representa um número ordinal. A pergunta "Qual dêles?" pede o uso de um número ordinal. O valor de um número representa um número cardinal. Assim: 4 significa 4 unidades. O número cardinal responde à pergunta "Quantos?" Se uma coisa é a quarta na linha, há três coisas antes dela. O 3 é um número cardinal.

O professor deve fazer questões que levem as crianças a usar as duas formas de número. O conhecimento do uso dos números cardinais ajuda a criança a arranjar números em ordem, a localizar as páginas dos livros, a achar datas no calendário, e dizer se um número é maior que um outro. A criança deve saber que não pode subtrair 57 de 30, porque 57 tem um valor maior que 30 e também uma ordem mais alta na escala numérica. Um simples exercício envolvendo números ordinais: Escreva o número que faz parte de cada linha:

Depois	Antes	Entre
7 —	— 10	17 — 19
11 —	— 20	29 — 31
20 —	— 39	40 — 42

Um simples exercício envolvendo números cardinais: Sob cada gravura, escreva o número de coisas apresentadas:



c. ENSINO DA LEITURA E ESCRITA DOS NÚMEROS

Dando Significação aos Números de 1 a 10

O fato de a criança fazer a contagem de rotina de 1 a 10 não garante que ela compreendeu o significado dêsses números. Os primeiros dez números devem ser mostrados objetivamente de diversas maneiras antes de a criança aprender inteiramente o significado de cada número.

Na aprendizagem inicial de como contar, a criança terá material manipulativo para ajudá-la a adquirir o significado dos números. A criança deve aprender os nomes dos números e os símbolos numéricos usados em nosso sistema de numeração se ela é capaz de pensar com números. As características de nosso sistema de numeração são descritas no Capítulo 2. A criança deve aprender a contar números, a comparar grupos, a analisar um grupo para separá-lo em dois ou mais, e contar grupos juntos e separadamente.

Ensinando Agrupar com Números

Como tem sido dito, a maioria das crianças pode contar por rotina até 10 quando entra para a escola. Contudo, para assegurar que as séries dos números têm significação, o professor deve dar às crianças experiência na contagem de grupos de 1 a 10. O professor pode começar êste trabalho fazendo perguntas tais como: "Quantos botões há sôbre a mesa? Quantos livros há nesta pilha?" A criança deve contar para determinar o número. Mais tarde, o professor levará a criança a contar objetos na sala de aula.[9] Muitas situações surgirão

[9] O leitor deve consultar o seguinte material para uma discussão sôbre o emprêgo de blocos coloridos para o desenvolvimento do conceito de números e grupos:

STERN (Catherine), *Children Discover Arithmetic.* Nova Iorque: Harper and Brothers, 1949, Capítulos IV e V.

GATTEGNO (C.), "New Developments in Arithmetic Teaching in Britain", *The Arithmetic Teacher*, 3:85-89.

HOWARD (C. F.), "British Teachers' Reactions to the Cuisenaire-Gattegno Materials", *The Arithmetic Teacher*, 4:191-195.

durante as atividades na sala de aula em que as crianças podem praticar a contagem até 10. Podemos pedir-lhes para identificar um grupo contendo um dado número de coisas, para reproduzir um grupo de dado tamanho, e para comparar o tamanho de dois grupos de coisas. Mais tarde, poderão agrupar coisas de vários modos, assim como agrupar em dois etc.

Enquanto cada um dos números é introduzido, o professor pode colocar uma fila de figuras montadas de objetos familiares, tais como coelhos, pássaros ou cachorros, sôbre o flanelógrafo, e levar as crianças a contá-los. Isto ajudará a criança a ver o significado do número.

O diagrama acima mostra como a demonstração completa dos números de 1 a 10 pode aparecer. Os alunos podem ajudar no arranjo dos grupos e contá-los para mostrar que o número de figuras está correto. Depois, as crianças farão um cartaz similar, usando objetos semiconcretos, tais como figuras montadas de quadrados, círculos ou estrêlas.

Uso de Marcadores de Grupos

Marcadores são materiais manipulativos que a criança pode usar para identificar números. Os marcadores incluem: pequenos discos, quadrados, varetas, tampinhas de garrafa, sementes de melancia, fichas, palitos e outros materiais. Pedaços de giz ou um lápis são também marcadores.

No comêço da contagem, o aluno representará cada número com marcadores, à proporção que é introduzido. Assim, pode mostrar o número 4 com quatro discos, cartões etc. As crianças aprenderão a usar o dominó, como mostramos na pág. 141. As crianças podem aprender também a separar um grupo de 4 discos em grupos separados e dizer quantos há em cada grupo. As crianças podem também mostrar dois grupos de marcadores, tais como 3 discos e 2 discos, e contá-los para achar quantos há ao todo. Mais tarde, aprenderão a escrever os agrupamentos como fatos numéricos. No estágio inicial, as crianças estão ainda interessadas em contar, separar e unir grupos de marcadores. Os marcadores são de especial valor no ensino dos conceitos numéricos para as crianças de aprendizagem lenta.

Aprendendo a Ler os Símbolos Numéricos

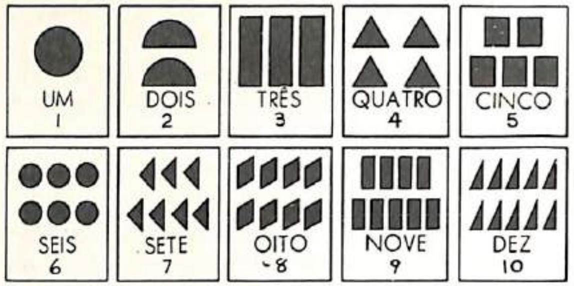
As crianças não necessitam de símbolos numéricos nos seus primeiros trabalhos de contagem. A finalidade dêste trabalho inicial é familiarizá-la com as palavras e os grupos em si mesmos. A aprendizagem de como ler e escrever os símbolos numéricos requer cuidadoso ensino e muita prática.

O professor apresentará os símbolos numéricos como meio de responder à pergunta "Quantos?" Por exemplo, o professor pode levantar um lápis e perguntar: "Quantos lápis eu tenho?" A criança conta e responde: "Um." O professor então diz: "Escreverei o algarismo que diz *um* no quadro-negro." O mesmo processo será usado com os outros números. O professor preparará uma coleção de dez grandes cartões, uma para cada número. Êstes serão colocados de modo que as crianças possam vê-los bem nìtidamente.

Cada símbolo numérico será introduzido como o grupo particular que está sendo estudado. Cartazes e cartões serão apresentados para ajudar a visualização do significado de cada um dos números à proporção que cada um é apresentado. Diversas espécies de cartazes para exibição na sala de aula são apresentadas abaixo.

Os primeiros cartazes consistirão de 10 cartões, um para cada número. As fôlhas, medindo 20 x 25 cm, serão colocadas sôbre uma grande fôlha de jornal ou papel de embrulho. Sôbre cada fôlha aparecerá o nome do número, uma pequena gravura para representá-lo e o próprio símbolo. Enquanto cada um dos números é apresentado, a fôlha será preparada e colocada sôbre o cartaz. As gravuras para representar o valor de um número podem ser cortadas de modelos feitos pelo professor, ou tiradas de jornais, livros e revistas. A ilustração abaixo mostra um cartaz típico. Note o arranjo regular dos objetos nas ilustrações.

Um cartaz semelhante também será preparado com fôlhas para mostrar o número, símbolo numérico, nome e uma ilustração



em posição horizontal para cada número.

Um terceiro cartaz será usado para mostrar a significação dos dez primeiros números em um nível mais abstrato. Êsse cartaz constará dos nomes dos números e de seu símbolos e será ilustrado com material semiconcreto, como quadrados, círculos, triângulos, estrêlas, e outras formas geométricas. O arranjo dos desenhos deve ser em padrões sistematizados e horizontalmente como no segundo cartaz. Diferentes côres poderão ser usadas para cada fileira, de maneira que a coleção das figuras geométricas sobressaia vivamente.

Um cartaz poderá ser usado para ensinar às crianças agrupamento e o uso de agrupamento na identificação dos números. Assim, a criança pode aprender a reconhecer ràpidamente 4 como dois grupos de 2; 6 como três grupos de dois; 8 como quatro grupos de 2, ou como dois grupos de 4; 9 como três grupos de 3; 10 como dois grupos de 5 etc.

Um interessante jôgo pode ser feito para prover prática no reconhecimento dos nomes, agrupamentos e símbolos dos números de 1 a 10. O professor poderá preparar três coleções de cartões medindo 10 x 15 cm. Numa coleção de 10 cartões os nomes dos números deverão ser impressos; na segunda coleção, os dez símbolos numéricos, e na terceira, gravuras representando cada um dos números. As crianças então compararão as três coleções de cartões para verificar quão bem elas compreenderam os três modos de representar os números de 1 a 10.

As crianças poderão também executar jogos nos quais usem os cartões para comparar números. Por exemplo, duas crianças podem retirar simples cartões de uma das coleções. Cada criança lê seu número. Uma criança diz: "Meu número é 4. O número de João é 2. Meu número é maior que o de João." Mais tarde, pode ser capaz de dizer quanto o número é maior ou menor. Em outro jôgo, três crianças podem

jogar. Cada uma retira um cartão apenas de uma das três coleções. Cada criança diz qual o número que está em seu cartão. A criança que tem o maior número *venceu* e coloca os outros cartões em sua pilha.

A maioria das crianças nas primeiras séries necessita ter considerável experiência com números e situações reais para aprender o seu significado. Essas experiências serão suplementadas pelo uso de materiais manipulativos e recursos visuais como foi descrito.

As séries de níveis de experiência na aprendizagem dos números são as seguintes:

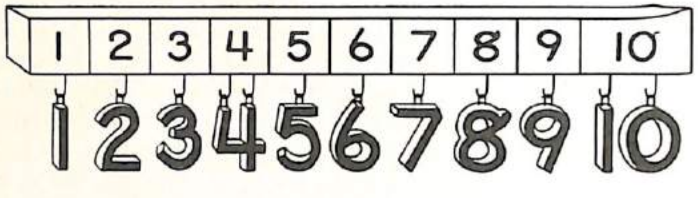
1. Representações com objetos concretos e marcadores
2. Uso de gravuras e ilustrações
3. Desenhos semiconcretos e agrupamentos
4. Apresentação de símbolos abstratos.

Aprendendo a Escrever os Símbolos Numéricos

Visto que quase tôdas as escolas atualmente ensinam a escrita manuscrita antes que a cursiva nas primeira e segunda séries, usar-se-á também a escrita dos símbolos numéricos. A criança não está pronta para os movimentos musculares mais delicados que são requeridos pela escrita cursiva. A aprendizagem da escrita de números requer ensino cuidadoso, vigilância e muita prática. O professor preparará grandes cartões com os símbolos numéricos e os apresentará, como modêlo, às crianças. A característica de cada símbolo numérico será discutida no momento da apresentação. As crianças notarão por onde iniciar e terminar a escrita, o tamanho e a largura das diferentes partes dos algarismos mais difíceis, especialmente 2, 3, 4, 5 e 8. As crianças podem traçar os modelos para *ganhar o sentido* das figuras apresentadas. O professor também poderá preparar uma coleção especial de algarismos com 2 cm de largura e feitos de papel-lixa para aquelas crianças que têm dificuldade em conseguir a imagem mental correta. As crianças podem passar o dedo indicador sôbre essas figuras. Esta experiência sinestética ajuda muito em tais casos.

Uma adaptação das *Figuras para Armar Fretsaw* é também meio efetivo de ensinar o aluno que tenha dificuldade em aprender a traçar os diferentes algarismos. As *Figuras para Armar Fretsaw*, feitas de baquelita, ajustam-se a um quadro ou molde. Cada algarismo pode ser removido da matriz e o aluno pode traçar o contôrno do número com seu dedo. Dêste modo, ambos os sentidos sinestético e visual são usados para aprender o formato de um dado algarismo.

Os Autores ensinaram a muitos de seus alunos, que se estão preparando para lecionar no jardim da infância ou na primeira



série, a fazer adaptação dos algarismos das Figuras para Armar Fretsaw recortando os dez algarismos em uma tábua com cêrca de 2 cm de espessura. Êstes algarismos têm cerca de 15 cm de altura. Êles são suspensos por ganchos ao longo de um cabide, como é mostrado no desenho acima.

Cada gancho tem um número. Logo que o professor percebe que as crianças aprenderam a seqüência dos dez primeiros algarismos, poderá remover os números que identificam os ganchos. Os alunos lentos na aprendizagem da escrita dos números são freqüentemente auxiliados pelo uso de material manipulativo desta espécie. A classe poderá progredir do estágio de uso dos materiais manipulativos para o uso de recursos visuais e depois para o estágio dos materiais simbólicos.

Ritmo na Escrita dos Números

A exposição seguinte deve ser demonstrada no quadro-negro pelo professor, a fim de ajudar as crianças a estabelecer direção e ritmo na escrita dos números de 1 a 10. Cada demonstração pode ser feita pelo traçado lento de um grande algarismo com giz colorido, depois escrevendo a figura.

1) Pense: "Para baixo", cada vez que você escreve o 1.

2) Pense: "Uma volta, desço e dou outra volta", quando você escreve o 2.

3) Pense: "Um giro e outro giro", quando você escreve o 3.

4) Pense: "Para baixo e para diante. Agora cruze com o 1", quando você escreve o 4.

5) Pense: "Para baixo e em tôrno, agora uma linha", quando você escreve o 5.

6) Pense: "Para baixo, uma volta e a feche para fazer uma curva", quando você escreve o 6.

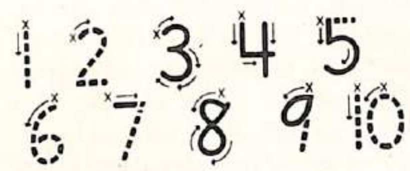
7) Pense: "Para diante e para baixo", quando você escreve o 7.

8) Pense: "Esquerda! Direita! Esquerda! Direita!", quando você escreve o 8.

9) Pense: "Volteio à esquerda, fecho e desço", quando você escreve o 9.

10) Pense: "Para baixo! E aí está o 1. Uma linha curva fechada", quando você escreve o 10.

As crianças traçarão primeiro diversos algarismos pontilhados sôbre uma fôlha de papel com seus dedos, depois com seus lápis seguem as direções estabelecidas pelo professor. Os algarismos poderão aparecer sôbre o papel com uma linha pontilhada mostrando onde começar cada traço e setas mostrando a direção que o lápis deve tomar, como é mostrado abaixo.



Algumas crianças podem ser chamadas para escrever o algarismo no quadro-negro. Depois escreverão os algarismos diversas vêzes, auxiliadas pelas linhas interrompidas, e depois sem tal auxílio. Um algarismo apenas deve ser apresentado de cada vez. Depois de bem praticada a escrita do nôvo algarismo, a criança poderá escrever todos os algarismos que aprendeu. O professor ajudará a tôda criança que revelar dificuldade em guiar seu dedo indicador, sôbre o' número, no papel-lixa sinestético.

Dificuldades na Escrita dos Números

O professor deve ter em mente que as crianças podem não distinguir os diferentes padrões numéricos, e podem mesmo não vê-los corretamente. Por exemplo, se uma criança não faz distinção entre o 3 e o 5, ou o 6 e o 9, é indício de que tem incorretas imagens mentais, que a confundem quando tenta ler ou escrever êsses símbolos numéricos. Quando o professor suspeita que há confusão, pedirá à criança para indicar ou escrever os números que êle disser. Uma atenção pronta esclarecerá a compreensão do significado dos números e a correção dos erros de escrita.

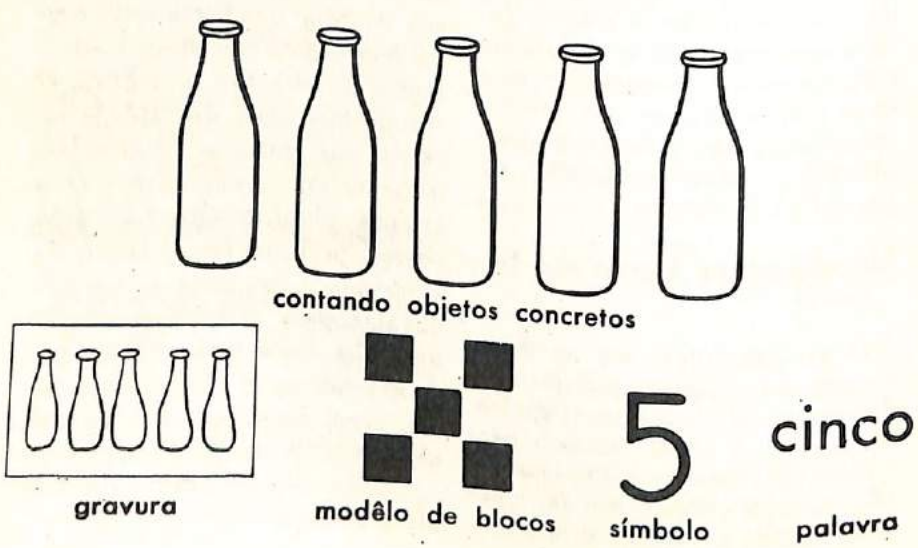
Certos símbolos numéricos parecem apresentar especial dificuldade. As crianças algumas vêzes escrevem o 5 como um S maiúsculo, e o 8 com dois círculos que não são ligados. Algumas vêzes as crianças iniciam o 7 e o 9 pela base e fazem um movimento para cima. Outras vêzes começam os algarismos do ponto errado ou os escrevem ao contrário. As crianças freqüentemente escrevem os algarismos na forma reversa. Assim, o 3 é muitas vêzes escrito como um E maiúsculo. Os algarismos 2, 5, 6 e 7 são também freqüentemente confundidos. Esta tendência é semelhante às reversões na leitura. O tratamento desta dificuldade na escrita dos números consiste largamente em assegurar-se que a criança adquiriu uma percepção correta pela análise cuidadosa do algarismo e guiando o traçado do algarismo feito com papel-lixa. Nos casos mais difíceis pode-se ainda mostrar à criança como fazer sòmente parte de um algarismo e praticá-lo, tal como , e depois escrever o número inteiro.

Os passos dados na aprendizagem da leitura e escrita dos números estão sumarizados no diagrama abaixo.

A gravura da pág. 145 provê a uma excelente base para discussão com as crianças dos diversos modos em que o número 2 pode ser visto na sala de aula. Gravuras semelhantes poderão ser usadas para outros números. O professor pode usar um plano similar levando a criança a identificar qualquer número na sala de aula quando o algarismo é apresentado. Um relógio e um calendário serão úteis em tôda sala de aula. O professor deve aproveitar tôda ocasião própria que apareça no curso das atividades de aprendizagem para dar às crianças a oportunidade de usar o que estão aprendendo sôbre contagem.

Contagem Até 20 e Escrita dos Números

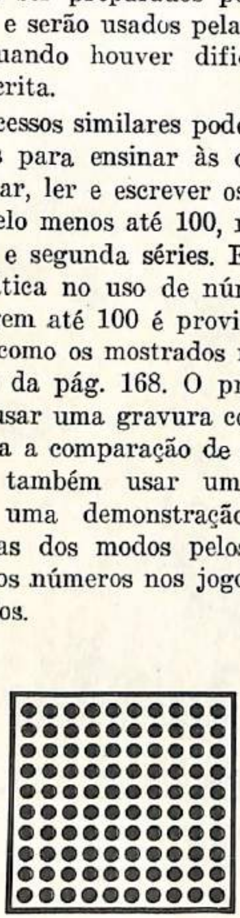
As crianças estão agora prontas para a contagem até 20 e para a escrita dos números. Primeiramente o professor providenciará 20 marcadores para serem contados e, se possível, o mostrador de fatos com 20 botões. As crianças, então, contarão, com o professor, os marcadores de um a um até 20, para que êle fique certo de que as palavras estão usadas corretamente e na seqüência exata. Depois, poderá pedir a diversas crianças que contem os objetos. Tanto quanto necessário, a contagem individual e a em conjunto devem ser feitas até que as crianças possam dizer os números em seqüência correta sem referência ao objeto.



A participação em audiências ajuda as crianças a adquirir confiança em seu conhecimento numérico.

Para guiar o trabalho da escrita de números de 11 a 20, o professor poderá usar os modelos impressos no livro de trabalho da criança ou preparar uma ficha mostrando os números que podem ser colocados no quadro-negro para referência. Modelos podem ser preparados pelo professor e serão usados pelas crianças quando houver dificuldade na escrita.

Processos similares poderão ser usados para ensinar às crianças a contar, ler e escrever os números, pelo menos até 100, nas primeira e segunda séries. Excelente prática no uso de números e contagem até 100 é providenciar jogos como os mostrados na ilustração da pág. 168. O professor pode usar uma gravura como base para a comparação de grupos. Pode também usar um debate e uma demonstração pelas crianças dos modos pelos quais usam os números nos jogos apresentados.



Com a ajuda do professor, as crianças podem construir uma tábua numérica como a mostrada acima. As crianças descobrirão a regularidade no arranjo seqüencial dos números. Êste arranjo é uma característica do sistema de numeração.

O cartaz pode ser usado de muitas maneiras para a prática de contar e comparar números. Outra forma de *Quadro de Cem* é a mostrada abaixo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Todos os números impressos são cobertos com um disco de papelão. O aluno não vê os números enquanto conta. Quando acha um dado número pela contagem dos discos sôbre o cartaz, remove o último disco contado e faz a verificação com o número impresso no cartão. Dêste modo pode o aluno verificar sua contagem.

A classe pode fazer um cartaz dos números pares, assim como o fêz das unidades. Parte do cartaz é apresentada adiante. Depois a classe fará uma lista das coisas que descobriu sôbre o cartaz

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
.	.	.	.	.
92	94	96	98	100

A lista pode incluir generalizações como as seguintes:

1) Todos os números terminam em 2, 4, 6, 8 e 0.

2) Cada número na linha é mais 2 que o número antes dêle.

3) Há cinco números pares em cada linha.

4) Todos os números em cada coluna têm a mesma terminação.

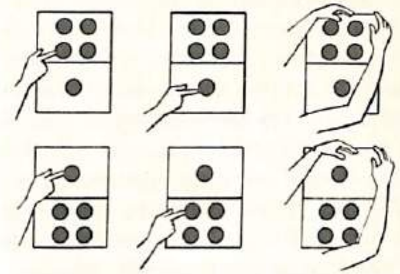
5) Um número sim outro não de 2 a 100 foram omitidos.

A contagem de cinco em cinco pode ser ensinada de maneira semelhante. A contagem por dezenas pode ser feita usando a última coluna de números ou contando de dez em dez partindo de dado número, como 4 ou 7.

d. AGRUPAMENTOS E VALOR DO LUGAR

Descobrindo Agrupamentos de Números Até 10

Quando a criança pode contar objetos, identificar números e grupos, e escrever os algarismos, está pronta para descobrir e escrever agrupamentos numéricos. O processo é simples. Por exemplo, cada criança toma 5 marcadores. Ela os manipula para descobrir os diferentes agrupamentos que pode fazer. Cada vez ela mostra os grupos, usando as figuras do dominó.



Descobrirá as seguintes adições para grupos de 5:

4	3	2	1
1	2	3	4
5	5	5	5

Agrupamentos semelhantes podem ser discutidos para os outros números de 1 a 10.

Os agrupamentos podem ser escritos horizontal ou verticalmente com gravuras, palavras e, mais tarde, com símbolos:

Do mesmo modo, a criança pode usar marcadores para achar os agrupamentos na subtração. O professor diz: "Mostre-me 5 marcadores. Separe um marcador. Quantos marcadores restaram?" O raciocínio solicitado é o processo subtrativo. A criança tem 5 marcadores, remove ou cobre um dêles e vê que restaram 4 marcadores. Os agrupamentos descobertos podem ser apresentados do mesmo modo como foram feitos os de adição.

A finalidade dêste trabalho na primeira série será meramente formar o número mais significativo, não para estabelecer uma base de exercício sôbre os fatos fundamentais. A prática sistemática virá mais tarde. Muitas experiências envolvendo juntar os marcadores e separá-los farão os números e os agrupamentos grandemente significativos para as crianças. Nas segunda e terceira séries estas experiências com agrupamentos podem-se estender aos números de 11 a 18.

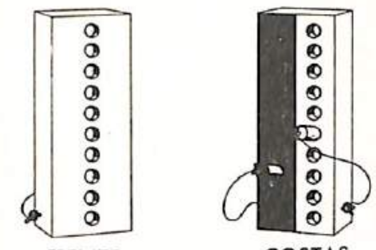
Introduzindo Valor do Lugar

Quando a criança pode contar de um em um até 20, e lê e escreve os números, estamos certos de que compreende a seqüência dos números. Contudo, a criança deve também aprender o significado matemático dos números no sistema de numeração[10] e seu tamanho relativo. Assim, 14 significa 1 dezena e 4 unidades, e 20 significa 2 dezenas e nenhuma unidade.

O bloco para contar e o ábaco serão dois valiosos recursos em tôdas as classes das séries primárias. O bloco para contar é uma peça retangular de madeira, com cêrca de 4 cm de espessura, 25 cm de comprimento, e 7 cm de largura. Em uma face, lado das unidades, há 10 buracos, cada um com cêrca de 6 mm de diâmetro e 19 mm de profundidade, e são situados no centro do bloco. Na outra face há colunas paralelas de buracos com as dimensões dos buracos da face reversa. As colunas paralelas que representam dezenas e unidades serão pintadas de côres diferentes, a fim de se distinguir a coluna das unidades da coluna das dezenas. Se o branco representa a coluna das unidades, a outra face do contador será pintada de branco também. Devem ser atados dois grampos com fios para serem introduzidos nos buracos de contar. Cada grampo será pintado da mesma côr da coluna em que será usado. É possível representar os primeiros dez números na face que contém sòmente uma coluna de buracos, e qualquer número até 100 do lado oposto do bloco.

A gravura mostra a parte da frente e a parte de trás do contador. Os grampos na parte de trás representam o número 35.

[10] PETERS (Ann C.), "The Number System and the Teacher", *The Arithmetic Teacher*, 4:155-160.

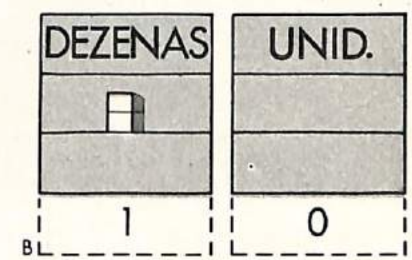


Uma descrição do ábaco foi dada no Capítulo 2. Um ábaco para o começo dos trabalhos com números poderá conter sòmente duas fileiras com 10 contas cada uma. Com a expansão dos conceitos numéricos das crianças, um ábaco com quatro ou cinco fileiras contendo sòmente nove contas em cada uma será usado. Como foi mostrado no Capítulo 2, a fileira em um ábaco desempenha a mesma função de conservador de lugar que o zero desempenha no sistema de numeração; portanto, sòmente nove contas são necessárias para representar os restantes nove números.

Ensinando o Valor do Lugar das Dezenas e Unidades

Os Autores acham que o cartaz Valor do Lugar é um dos mais eficientes meios de mostrar o significado dos números de 1 a 99 e também para mostrar as transformações de números que devem ser feitas na operação com números de dois algarismos, em reserva na adição e decomposição na subtração. O cartaz e sua construção são descritos na pág. 538.

Para exposição do significado do número 10, o professor pode usar fichas para mostrar que 1 significa um grupo de dez. Então o professor dirá à classe que o 1 está escrito no lugar das dezenas para mostrar uma dezena, e que o 0 mostra que não há unidades para escrever no lugar das unidades. O 0 mantém o lugar das unidades e conserva o 1 no lugar das dezenas. Por isso dizemos que o zero *preenche casas*. Os cartazes abaixo mostram como ensinar o significado do número 10.



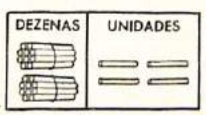
Primeiro o professor coloca 10 fichas uma ao lado da outra no lugar das unidades. Depois remove-as uma a uma e as une com um elástico para formar um único grupo de 10 fichas, colocando êste feixe ou maço no lugar das dezenas que está à esquerda do lugar das unidades. Não há agora fichas no lugar das unidades. De maneira semelhante o professor pode usar fichas para mostrar que 11 significa um grupo de 10 e 1 unidade, que 14 significa um grupo de 10 e 4 unidades, e que 20 significa 2 grupos de dezenas e nenhuma unidade. Com feixes de dezenas e fichas simples as crianças podem aprender a mostrar qualquer número de 1 a 99.

O conceito do zero como um preenchedor de lugar não é fácil de ser apanhado pela criança. Elas necessitam ter muitas experiências com números em que há zeros antes de compreenderem esta função do zero. Outros meios de usar marcadores para mostrar os significados do número 24 estão ilustrados abaixo.

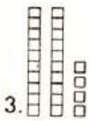
1) Marcadores dispostos em fileiras

★★★★★★★★★★ 1 DEZENA
★★★★★★★★★★ 1 DEZENA
1. ★★★★ 4 UNIDADES

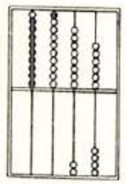
2) Feixes com 10 varetas e varetas simples

2. 

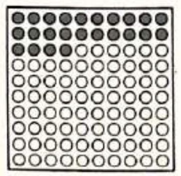
3) Tiras com quadrados de 10 e quadrados simples

3. 

4) Um ábaco



5) Um Quadro de Cem



Usando o Quadro Numérico Para Fazer Descobertas Sôbre Valor do Lugar

O professor usará o quadro da pág. 154 para ajudar a criança a descobrir relações entre os números. Algumas das generalizações que as crianças podem fazer são as seguintes:

1) O algarismo no lugar das unidades é o mesmo em cada coluna.

Muitas experiências com mostradores de relógio são feitas por esta classe.

2) O algarismo das unidades em cada linha é o mesmo, exceto no último número da linha.

3) Cada número seguinte na linha vale 1 a mais.

4) Cada número seguinte na coluna vale mais 10.

5) O menor número de dois lugares é 10 e o menor número de dois lugares é 99.

6) 30 são 3 dezenas; 40 são 4 dezenas; 100 são 10 dezenas.

7) 25 são 2 dezenas e 5 unidades; 30 são 3 dezenas e nenhuma unidade.

8) 29 é 30 menos 1.

O professor pode usar o quadro para ensinar às crianças a contar de 10 em 10, de 2 em 2, e de 5 em 5.

e. COMUNICAÇÃO DAS IDÉIAS QUANTITATIVAS

Localizando Coisas Pelo Uso dos Números

As crianças podem ter muitas experiências significativas nas quais os números são usados para localizar coisas:

1) Endereços de casa; número de quarto; número de rua.

2) Datas no calendário; anos.

3) Achar páginas nos livros; índices.

4) Leitura de mapas simples, cartas, tabelas, gráficos.

5) Localização de objetos em exposições, armários, prateleiras, guarda-louça, catálogos.

6) Direções, tais como norte, sudoeste (bússola).

Os sistemas subjacentes a êstes processos serão claramente apresentados às crianças demonstradas suas utilidades e necessidades. As crianças virão a apreciar a eficiência dos números arranjando e agrupando coisas.

Comparação

Em suas atividades, as crianças muitas vêzes usam experiências quantitativas para descrever e comparar coisas. A lista abaixo é um guia para os inúmeros tipos de experiências através dos quais os professôres no jardim da infância e na primeira série podem conferir e estender os conceitos quantitativos das crianças. Mais tarde os conceitos podem ser clareados e refinados pelo uso de medidas.

1) *Tamanho:* pequeno-grande; fino-grosso; diminuto-gigantesco; metade-inteiro

2) *Comprimento ou distância:* comprido-curto, perto-longe, alto-baixo

3) *Quantidade:* pouco, muito, mais, menos, algum, todo, par, dúzia

4) *Pêso:* leve-pesado

5) *Volume:* cheio-vazio, algum, mais, bastante, xícara, copo

6) *Posição:* acima-abaixo, direita-esquerda, primeiro-último, entre, abaixo-acima

7) *Forma:* círculo, linha, reto, meio, fim, redondo, quadrado

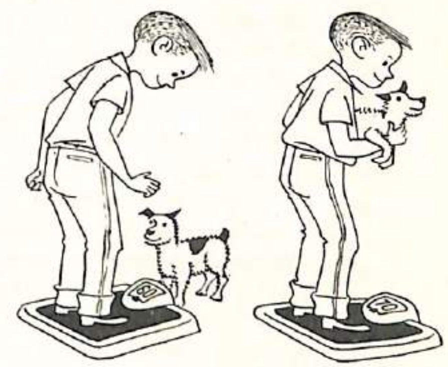
8) *Tempo:* dia, hora, minuto, semana, inverno, mês, ano, amanhã, ontem, meio-dia, tarde, cedo, noite

9) *Temperatura:* quente, frio, muito quente, gelado.

Primeiros Passos Para Ensinar Medidas

Para tornar os conceitos indefinidos mais significativos e precisos, às crianças nas primeira e segunda séries serão dadas simples experiências através das quais aprenderão mais acêrca das unidades rudimentares e outros simples recursos de medida. As crianças terão também prática em aplicar as unidades de medida. A lista abaixo resume os itens que serão desenvolvidos. Em conexão com a análise dêste esbôço, o professor consultará o Capítulo 14, no qual há uma detalhada discussão sôbre os métodos do ensino de medidas. A pág. 428 apresenta uma análise das medidas a ensinar em tôdas as séries.

1. Tempo
   a) Dizer a hora pelo relógio com os intervalos de 5 minutos.
   b) O estudo do calendário: anos, meses, dias da semana.
   c) Estações.
2. Pêso
   a) Quilo, meio-quilo e gramas.
   b) Escalas e como trabalham.
3. Comprimento ou distância
   a) Régua, fita métrica.
   b) Metro, decímetro, milímetro.



4. Valor
   a) Dinheiro, como é feito e usado.
   b) Reconhecimento e equivalência de cédulas e moedas.

5. Líquidos
   a) Xícaras, litro, meio-litro, quarto de litro.
6. Temperatura
   a) Termômetro.

7. Quantidade
   a) Dúzia, par, casal, dupla etc.

O trabalho com estas medidas será alargado nas duas primeiras séries. Por exemplo, para ensino de tempo, na primeira série, as crianças trabalham com relógios de brinquedo. Elas aprenderão a dizer as horas exatas, as meias-horas, os quartos de hora. Dizer as horas com intervalos de 5 minutos será deixado para a segunda série. Naturalmente algumas crianças mais habilitadas já poderão aprender a dizer as horas por minutos na primeira série, mas o professor deve considerar também a capacidade dos alunos lentos. O trabalho com dinheiro pode ser feito com moedas e cédulas de brinquedo. As crianças têm muito interêsse no trabalho com dinheiro.

O trabalho com tôdas as medidas será tão concreto quanto possível, envolvendo a exploração dos recursos de medir e sua aplicação em situações significativas, como é mostrado na pág. 163.

Filmes naturais e outros filmes podem também ser usados para suplementar o estudo de tópicos tais como êstes alistados abaixo. Exemplos dêstes filmes são apresentados por Coronet: *The Story of Pounds and Ounces* e *The Story of Pints and Quarts.*

Introdução do Conceito de Fração

No final da segunda série, todo aluno saberá o que significam as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e talvez $\frac{1}{3}$. Não há necessidade de se ensinar a representação simbólica dessas frações nas primeiras séries; contudo, a maioria das crianças aprende prontamente a leitura dêstes símbolos. Polkinghorne[11] chegou à conclusão que, indiferente ao que o programa escolar oferece, as crianças no jardim da infância e primeiras séries inferiores tiveram experiências em seus afazeres diários e através das quais adquiriram algum conhecimento de frações unitárias. A fração unitária tem por numerador 1, como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$. Sòmente um pequeno número conhecia as outras espécies de frações, como $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$.

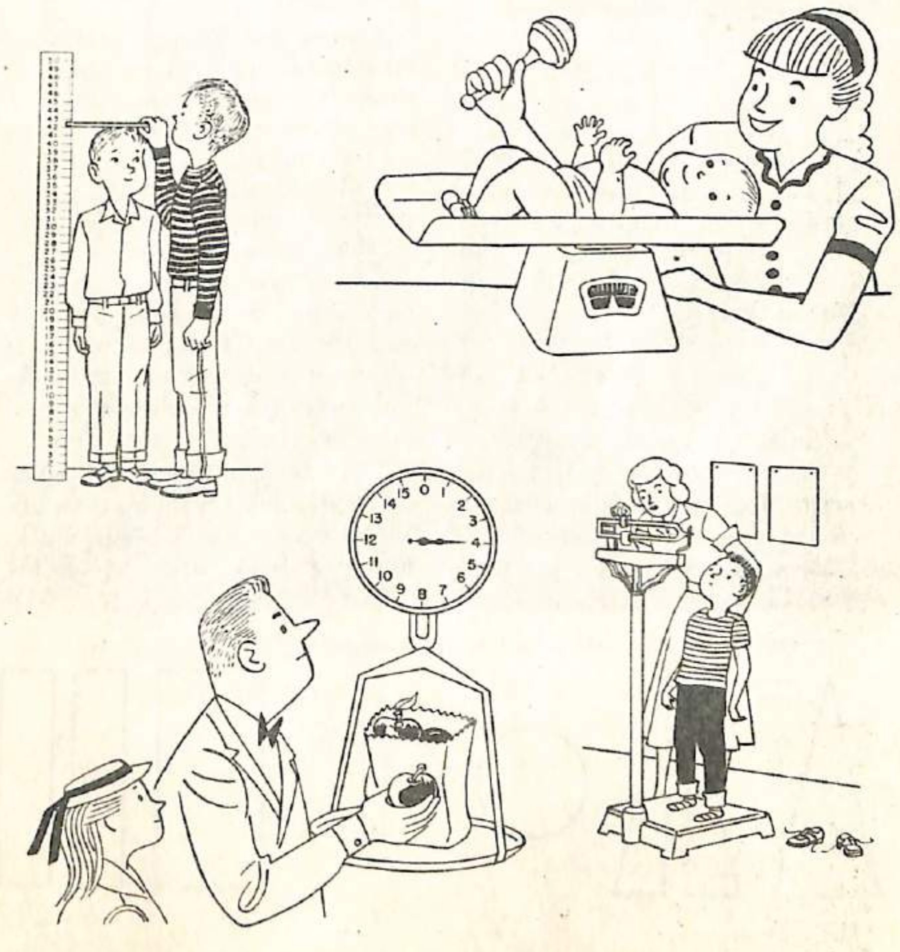
[11] POLKINGHORNE (Ada R.), "Young Children and Fractions", *Childhood Education*, 11:354-358.

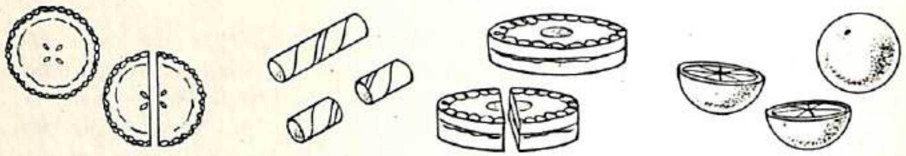
GUNDERSON (Agnes G.) e GUNDERSON (Ethel), "Fraction Concepts Held by Young Children", *The Arithmetic Teacher*, 4:167-174.

Um recente estudo[12] mostrou que aproximadamente 550 alunos da segunda série de dezessete distritos escolares, em quatro diferentes situações, reconheciam inteiros e metades com quase 100 por cento de exatidão. Sòmente cêrca de um-têrço do grupo reconhecia o valor de uma parte de um bloco que foi dividido em terços. O objeto usado para representar a parte fracionária de um inteiro é fator importante a ser considerado para ajudar o aluno a reconhecer uma fração. Sòmente cêrca de 25 por cento do grupo testado identificaram a fração $\frac{1}{4}$ usada para mostrar um-quarto de rôsca. Por outro lado, qua-

[12] BRUECKNER (L. J.), *Arithmetic Knowledge and Abilities of Children in Grades 1 and 2.* Minneapolis: Educational Test Bureau, Inc., 1948, pág. 18.

PRIORE (Angela), "Achievement by Children Entering the First Grade", *The Arithmetic Teacher*, 4:55-60.





se 43 por cento do grupo identificaram a fração $\frac{3}{4}$ usada para mostrar três-quartos de uma torta.

Antes de a criança poder compreender o significado matemático de uma fração ela deve saber o significado de um inteiro. O professor ilustrará um inteiro com frutas, como maçãs e laranjas.

Depois o professor cortará uma maçã ou uma laranja inteira em duas partes iguais. Cada parte é metade de um inteiro. De diversas ilustrações concretas, os alunos descobrirão que *2 metades fazem 1 inteiro.* O aluno pode também dobrar uma fôlha de papel em duas partes iguais. O professor deve estar certo de que as duas partes fracionárias são iguais. Os círculos cortados são valiosíssimos para mostrar as partes fracionárias.

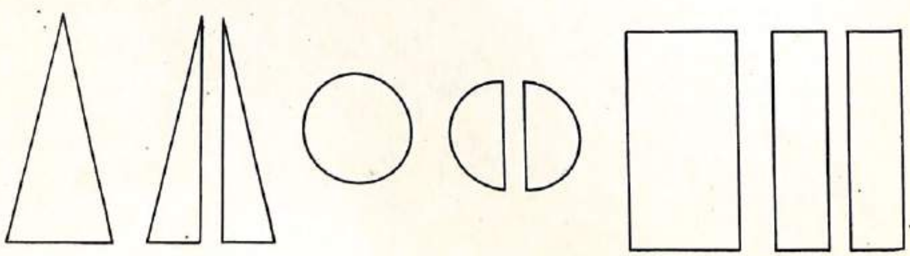
No início do trabalho com frações devemos usar objetos reais. Depois usaremos inteiros e metades no flanelógrafo, como é mostrado adiante. O aluno combinará as duas metades, pondo uma sôbre a outra, para verificar que são iguais. Êle pode também provar que as duas metades de um objeto fazem um inteiro.

Então o aluno estudará as gravuras de objetos como é mostrado acima.

Alguns dos objetos mostrados representam inteiros e alguns representam metades, enquanto outros representam objetos cortados em duas partes desiguais. Os alunos identificarão as metades e as partes que não são metades, justificando suas respostas.

O próximo passo é mostrar o significado de metade e consiste em identificar metades entre materiais semiconcretos, como aquêles mostrados nos desenhos geométricos abaixo.

Finalmente o aluno será capaz de representar metades com diferentes espécies de figuras geométricas. Será capaz de dividir



Uma futura dona-de-casa descobre que as frações têm aplicação na cozinha.

um quadrado, um retângulo, ou um círculo em duas partes aproximadamente iguais.

Algumas das aplicações sociais de *metade* e que serão discutidas são aquelas usadas em dizer as horas e aquelas usadas em tais medidas, como dúzia, metro, litro. Em uma unidade tratando de como fazer e vender, todos os alunos da segunda série tiveram reais experiências em que contavam por dúzia e meia-dúzia. Mais adiante, as atividades envolviam medidas de garrafas de leite. Os alunos descobriram que um copo contém $\frac{1}{4}$ da garrafa. Ao mesmo tempo, descobriram que o conteúdo de dois copos é igual a meio-litro, e que quatro copos formam 1 litro. Tais ilustrações mostram aos alunos algumas das aplicações sociais de *metade*.

Ao introduzir o conceito *quarto*, o professor seguirá a mesma seqüência de passos que foi descrita para o ensino do significado de *metade*. Êste processo é o seguinte:

1) Dividir objetos reais em quartos.

2) Identificar quartos no flanelógrafo.

3) Levar os alunos à identificação de objetos, alguns em inteiros, outros em metades, e outros em quartos.

4) Identificar frações representadas por materiais visuais semiconcretos, como figuras geométricas.

5) Reproduzir quartos pela divisão de objetos visuais em quartos.

6) Demonstrar aplicações sociais de quartos como são usados nas horas e nas medidas.

f. EXPERIÊNCIAS ENVOLVENDO APLICAÇÕES SOCIAIS DOS NÚMEROS

Cursos de estudo e livros-texto contêm muitas sugestões de experiências que os professôres podem providenciar e nas quais as crianças nas primeira e segunda séries terão contato direto com os números e seu uso na vida diária. A lista abaixo sugere diversas atividades que têm sido consideradas por muitos professôres como valiosas nas primeira e segunda séries.

1) Uso do calendário como um registro de tempo, aniversários, temperaturas, feriados.

2) Uso do número em jogos, como *pular corda*, jôgo de bola, esconde, lôto.

3) Confecção de um livro de Aritmética, de recortes, por tôda a classe ou individualmente.

4) Organização do cantinho de Aritmética com jogos e livros, ou um quadro com gravuras mostrando o uso dos números.

5) Contagem das crianças presentes, ausentes, atrasadas, em um grupo ou em uma fila.

As crianças precisam de experiências variadas com o difícil conceito de par.

6) Cuidado de animais na sala de aula; medição de alimentos; crescimento.

7) Uso do telefone; números do telefone; mostrador do telefone.

8) Dramatização sôbre o uso do dinheiro; fazendo trôco; comprando.

9) Trabalho no correio escolar; selos; custo das cartas; registrados etc.

10) Trabalho no depósito da escola.

11) Coleções de figurinhas.

12) Planejamento de um jardim na escola.

13) Pagamento de lanches; leite; provisão escolar.

14) Planejamento e execução de uma excursão a um armazém, padaria, correio.

15) Confecção de marcadores de livro usando a régua.

16) Verificação do pêso e altura das crianças para a ficha de saúde.

17) Estudo de tamanho dos recipientes para alimento.

18) Discussão sôbre os preços de alimentos, como pão, leite, fruta.

QUESTÕES, TÓPICOS E PROBLEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Quais são as limitações e os méritos de um programa incidental de Matemática para as primeiras séries?

2. Por que não é a *introdução social* um programa satisfatório?

3. Quais são os pontos fracos de um *programa intensivo de exercícios*?

4. Por que é necessário um programa de Aritmética sistemàticamente planejado nas primeiras séries?

5. Dos dados apresentados nas págs. 131-134, quais são os mais importantes para você? Foi surprêsa para você algum dos dados?

6. Esteja pronto para defender ou criticar o esbôço dos conteúdos de currículo para primeira e segunda séries, dados na pág. 134. Compare os conteúdos com os materiais contidos em diversos livros de Aritmética elementar ou em cursos locais de estudo.

7 Aplique o teste de prontidão das págs. 136-137 para algumas crianças da primeira série. A classe deve discutir e sumarizar os resultados para um grupo de crianças e discutir suas implicações.

8. Ilustre com exemplos específicos cada um dos seis estágios da contagem discutidos na pág. 138.

9. Por que é importante que a criança aprenda a reconhecer grupos de 1 a 5 de relance? Como identificar grupos de 6 a 10?

10. Aplique o teste de Kern, descrito na pág. 141, a alguma classe de primeira série. Analise os resultados e dê as classificações às crianças. Comente os resultados.

11. Aplique o teste dos 12 círculos, descrito na pág. 142, a três ou quatro crianças e avalie seus trabalhos.

12. Que cartazes pensa você serem necessários para guiar as experiências das crianças na aprendizagem da leitura de números?

13. Observe os trabalhos de algumas crianças que estão começando a escrita de números e diagnostique algumas dificuldades que têm no traçado dos algarismos. Se possível, use os cartões sinestéticos descritos na pág. 149 para ajudar na correção das falhas de alguns alunos.

14. Tente o exercício rítmico descrito à pág. 150. Êste plano pode também ser usado nas séries superiores.

15. Discuta os meios de usar uma tabela numérica, como aquela apresentada na pág. 154.

16. Faça um plano de aula mostrando como ajudar a criança a descobrir a adição e a subtração para agrupamentos de 6.

17. Faça um plano de aula e prepare os materiais necessários mostrando como você pode ensinar o significado de valor do lugar, especialmente os significados de 10, 12 e 30. Você pode usar qualquer dos planos descritos na pág. 119.

18. Enriqueça a lista dos meios usados para mostrar como os números ajudam a criança a localizar coisas em uma página dada.

19. Diga como você desenvolverá o vocabulário citado para alguns tópicos na pág. 160.

20. Que pode ser ensinado às crianças sôbre o real significado de medida, a ser discutido no Capítulo 14? Como pode isto ser aplicado na sala de aula?

21. Discuta as ilustrações de medidas da pág. 163. Diga como você usaria uma delas em uma situação de ensino-aprendizagem.

22. Como você ensinaria a fração $\frac{1}{4}$ às crianças de segunda série?

23. Leia a lista de experiências da pág. 166. Selecione uma delas e diga como você a usaria em classe.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brownell, William A. *Arithmetic in Grades I and II*. Durham, N. C.: Duke University Press, 1941.

Brueckner, L. J. *Arithmetic Knowledge and Abilities of Children in Grades One and Two*. Minneapolis: Educational Test Bureau, 1948.

Clark, J. R., and Eads, A. *Guiding Arithmetic Learning*. Yonkers: World Book Co., 1954, Chapters 1, 2, and 3.

Deans, Edwina. "The Practical Aspects of Number Work at the Primary-Grade Level," *Arithmetic 1947*. Chicago: University of Chicago Press, 1947. pp. 17-21.

Gunderson, Agnes G. "Number Concepts Held by Seven-Year Olds," *The Mathematics Teacher*, 33: 18-24.

Hollister, G. E., and Gunderson, A. *Teaching Arithmetic in Grades I and II*. Boston: D. C. Heath and Co., 1954.

MacLatchy, Josephine. "Seeing and Understanding in Number," *Elementary School Journal*, 45: 144-153.

Morton, R. L. *Teaching Children Arithmetic*. Morristown, N. J.: Silver Burdett Co., 1954.

Stern, Catherine. *Children Discover Arithmetic*. New York: Harper and Brothers, 1949. pp. 17-79.

Swenson, Esther. "Arithmetic for Preschool and Primary-Grade Children," *Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago: University of Chicago Press, 1951. pp. 53-75.

Thiele, C. L. "Arithmetic in the Early Grades from the Viewpoint of Interrelations in the Number System," *Sixteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1941. pp. 45-54.

Wheat, H. G. *How to Teach Arithmetic*. Evanston, Ill.: Row, Peterson and Co., 1951. Chapters 1 and 2.

6

Ensino dos Fatos Fundamentais na Segunda Série

O Capítulo 5 nos mostrou como formar os conceitos aritméticos nas primeira e segunda séries. A compreensão dos conceitos básicos constitui o programa de prontidão para a introdução das quatro operações fundamentais. Não há uma linha divisória entre o programa de prontidão e o programa de introdução dos fatos fundamentais, num processo em que as duas fases do número se sobrepõem. A prontidão para a introdução dos processos fundamentais implica que a criança entenda o seguinte:

1) O valor cardinal e ordinal dos primeiros 10 números

2) A seqüência dos números e a ordem de repetição dos algarismos até 100

3) O valor de posição dos algarismos em um número de dois algarismos

4) A representação, com fichas, no quadro Valor do Lugar de um número de um ou de dois algarismos

5) A formação (também no quadro Valor do Lugar) de um grupo juntando dois grupos de fichas, ou a separação de um grupo de fichas em dois grupos.

Há vários princípios que determinam todo o trabalho referente a êsses processos básicos e que devem ser apresentados no comêço do trabalho com o número. Tais princípios são:

1) O princípio da descoberta deve ser aplicado tanto nas primeiras séries como nas séries mais adiantadas.

2) Cada criança deve usar materiais que a capacitem a fazer descobertas de relações entre as quantidades.

3) Tôda a representação simbólica deve ser apresentada e registrada partindo de uma experiência significativa.

4) A criança deve usar os fatos numéricos numa grande variedade de situações.

5) O professor deve aproveitar tôdas as situações quantitativas que surjam na classe para enriquecer a significação dos conceitos envolvidos nestas situações.

A aplicação dêstes cinco princípios torna o professor capaz de fazer significativas tôdas as experiências numéricas das crianças em um planejado, sistemático e seqüente programa para o ensino da Aritmética nas primeira e segunda séries.

Êste Capítulo discute os seguintes tópicos que devem ser introduzidos na segunda série:

a. Fatos fundamentais e ordem de seu ensino

b. Ensino dos fatos de adição

c. Ensino dos fatos de subtração

d. Adição e subtração de números de dois algarismos

e. Problemas orais.

a. FATOS FUNDAMENTAIS E ORDEM DE SEU ENSINO

Significação de Um Fato Fundamental

Fato fundamental é a combinação de dois números simples com a resposta. Assim, $3 + 4 = 7$, $15 - 6 = 9$, $2 \times 6 = 12$, e $15 \div 3 = 5$ são todos fatos fundamentais. A combinação de quaisquer dois números simples sem a resposta é um agrupamento.[1] Assim, $6 + 1$ e 3×7 representam agrupamentos.

Há 100 fatos fundamentais de adição e 100 de subtração. Dêsses fatos, 19 envolvem zero e os outros 81 envolvem todos os possíveis agrupamentos com os outros nove algarismos. É possível formar dois fatos fundamentais para cada agrupamento de diferentes números pela troca de dois números. Os dois fatos fundamentais derivados do agrupamento $\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline \end{array}$ são $2 + 3 = 5$ e $3 + 2 = 5$.

Os 100 fatos fundamentais da adição podem ser arranjados de acôrdo com a seguinte classificação:

1) 19 fatos envolvendo zero.

2) 45 fatos com a soma igual ou menor que 10, excluindo zeros

3) 36 fatos com a soma maior que 10.

Agrupamentos com zero, na adição:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Agrupamentos com soma igual a 10 ou menor que 10, excluindo zeros:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9

2	2	2	2	2	2	2
2	3	4	5	6	7	8

3	3	3	3	3
3	4	5	6	7

[1] A expressão *agrupamento* é usada para identificar expressões sem respostas, como $2 + 1$, $9 - 5$, 2×8, ou $16 \div 4$. A expressão aparece no texto de Lucy Rosenquist, *Young Children Learn to Use Arithmetic*. Boston: Ginn and Company, 1949, pág. 23.

4 4 4
4 5 6
— — —

5
5
—

Agrupamentos com a soma maior que 10:

2
9
—

3 3
8 9
— —

4 4 4
7 8 9
— — —

5 5 5 5
6 7 8 9
— — — —

6 6 6 6
6 7 8 9
— — — —

7 7 7
7 8 9
— — —

8 8
8 9
— —

9
9
—

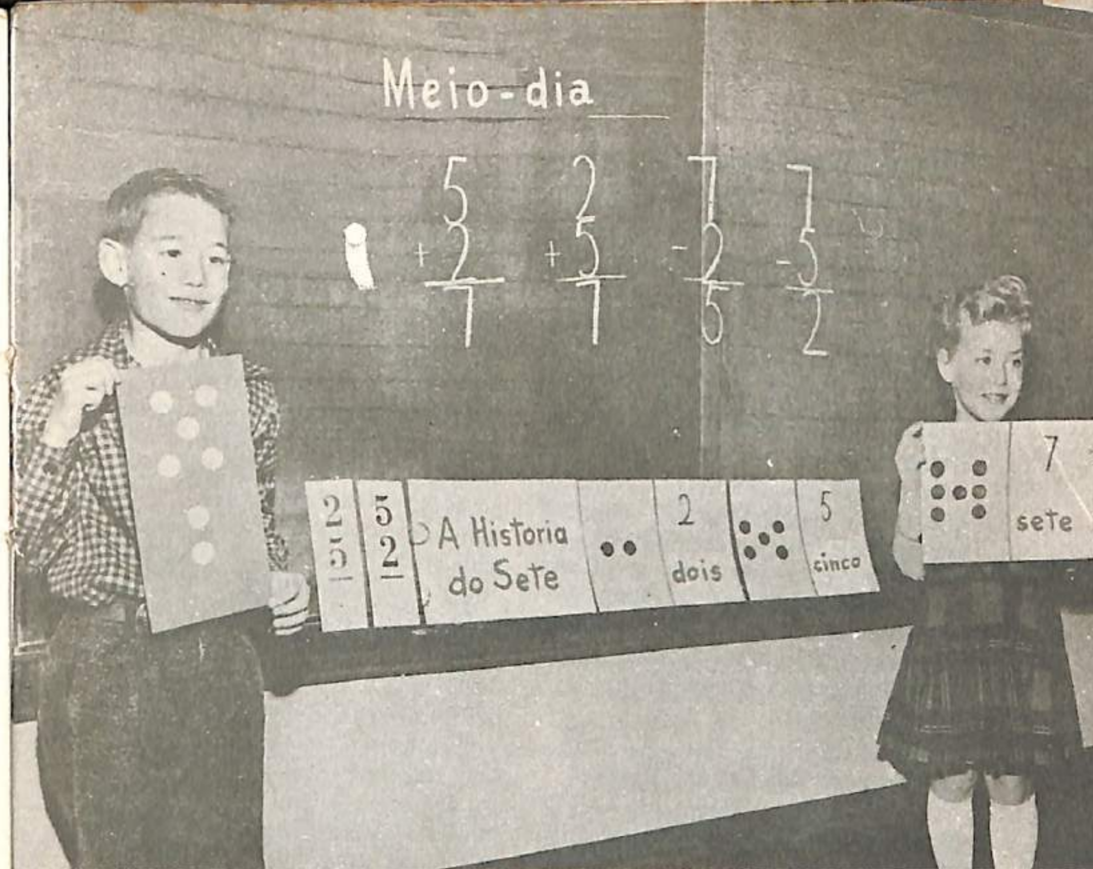
Exceto para os fatos de duplicação, há dois fatos fundamentais resultantes de cada agrupamento.

Uma vez que adição e subtração são processos inversos, a mesma classificação se aplica tanto aos fatos da subtração como aos da adição. Assim, para o agrupamento $3 + 7$, os quatro fatos derivados dos processos relacionados são $3 + 7 = 10$, $7 + 3 = 10$, $10 - 3 = 7$, e $10 - 7 = 3$. Os dezenove fatos envolvendo zero na subtração são formados pela subtração de zero do próprio zero e de cada um dos outros nove algarismos, bem como pela subtração dos fatos de duplicação, como $4 - 4 = 0$.

O Capítulo 5 nos mostrou que os programas de Aritmética para as primeira e segunda séries diferem largamente entre si. Não há padrão definido que caracterize o trabalho com número nestas duas séries. Isto é particularmente verdadeiro no que diz respeito ao número de fatos fundamentais a serem apresentados. Os outros recomendam que pelo fim da segunda série a criança adquira o domínio dos 45 fatos fundamentais da adição com resultado 10 ou menor que 10, excluindo os fatos que envolvam zero e os fatos de subtração correspondentes. Esta recomendação é sugerida para *um mínimo programa de Aritmética* na segunda série.

Ensino da Adição e Substração Junto ou Separadamente

O registro de um fato numérico é coisa nova para a criança no comêço do trabalho com o número. Se uma criança tem 2 cruzeiros e ganha mais 1, ela sabe



Um nôvo fato numérico deve ser apresentado em uma grande variedade de situações

que fica com 3 cruzeiros. Mas a representação simbólica dêste fato não é familiar à criança. Por esta razão, o registro simbólico dos fatos da adição e da subtração não deve ser apresentado simultâneamente. Para conservar a discriminação entre os dois registros que são muito parecidos, a criança deve aprender alguns fatos de adição e, também, os fatos de subtração correspondentes. Quando ela aprender os fatos de subtração, ela descobre a relação entre os dois processos e, assim, a aprendizagem de um processo suplementa a do outro. Não há vantagem do ensino simultâneo dos dois processos se as crianças não conseguiram compreensão dos mesmos separadamente.

É aceitável ensinar os fatos de adição com resultado maior que 10 e, simultâneamente, os fatos de subtração correspondentes. A esta altura a criança já se familiarizou com a representação simbólica dos fatos e com a significação dos processos. Mas, por outro lado, é igualmente aconselhável seguir o mesmo plano de ensino de alguns fatos de adição e, então, os de subtração correspondentes, como foi seguido com os fatos de resultado igual ou menor que 10. De acôrdo com êste plano a criança descobriria todos os fatos com o mesmo resultado ou soma, tal como 12. Então, derivaria todos os fatos de subtração correspondentes e dêste modo ela descobriria a relação entre os dois processos.

Ordem de Ensino dos Fatos

Como na maioria dos casos no ensino da Aritmética, as pesquisas ainda não provaram qual a melhor ordem a ser seguida no ensino dos fatos fundamentais da adição e da subtração. No entanto, está fora de dúvida que qualquer ordem de ensino aceitável deve tornar a criança capaz de ver as relações entre os fatos. Êstes não devem ser aprendidos como específicos ou isolados de outros. Qualquer plano ou ordem de ensino, que torne a criança capaz de descobrir um padrão que caracterize um grupo ou coleção de fatos, merece consideração. Um plano dêste tipo será muito diferente de um plano seguido há duas décadas passadas, quando tôda a ênfase era colocada na dificuldade relativa dos fatos. Naquela época os fatos eram ensinados como específicos e não eram relacionados uns com os outros. As pesquisas, naquele tempo, estavam interessadas em descobrir a ordem de dificuldade dos fatos, dificuldade esta determinada pelo número de repetições necessárias para a aprendizagem do fato. Como Brownell[2] muito bem considera, "Não há dificuldade intrínseca nos fatos; a dificuldade é relativa, dependendo de muitos fatôres, dos quais o mais importante é o método de ensino. Em outras palavras, depende do número, ordem e natureza das experiências de aprendizagem que a criança tem."

O aluno será capaz de descobrir relações entre os fatos quando êstes forem introduzidos como *famílias* ou quando forem agrupados de uma maneira tal que possibilite a aplicação de uma *generalização para um grupo ou um conjunto de fatos*. O têrmo *conjunto* é um têrmo matemático para representar uma coleção. Os objetos que formam o conjunto são chamados *membros* ou *elementos* do conjunto. Assim, todos os números pares ou todos os números ímpares constituem um conjunto. Os números pares de 10 a 98, inclusive, constituem o conjunto de números pares de dois algarismos. Uma família ou conjunto, na adição, consiste dos fatos com os quais têm a mesma

[2] BROWNELL. (W. A.), *Arithmetic in Grades I and II*. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1941, pág. 127.

soma ou total. Os fatos de subtração correspondentes constituem os fatos de subtração daquela família. Assim, os fatos para a família de 7 são os seguintes:

$3 + 4 = 7$	$7 - 3 = 4$
$4 + 3 = 7$	$7 - 4 = 3$
$2 + 5 = 7$	$7 - 5 = 2$
$5 + 2 = 7$	$7 - 2 = 5$
$1 + 6 = 7$	$7 - 6 = 1$
$6 + 1 = 7$	$7 - 1 = 6$

Se os zeros forem incluídos, haverá dois fatos a mais em cada processo. Êsses dois fatos em adição são $7 + 0 = 7$, $0 + 7 = 7$; em subtração, $7 - 0 = 7$, e $7 - 7 = 0$.

De um estudo do conjunto ou grupo de fatos de adição acima relacionados, é possível fazer as seguintes descobertas ou generalizações:

1. Um dos números de cada fato em seqüência é acrescido de 1 enquanto o outro número é diminuído de 1.

2. A ordem dos números em um fato não altera a soma ou total.

3. Não há fato onde os dois números de um agrupamento sejam os mesmos. A soma de cada agrupamento é um número ímpar. Se a soma fôsse um número par, os números em um dos grupos seriam os mesmos.

4. Para famílias com total igual ou menor que 10, o número de fatos na família será um a menos que o número da família, se os zeros não forem incluídos. Se os zeros forem incluídos, o número de fatos é um a mais que o número da família, decrescendo de um em cada família à medida que seu valor aumenta.

5. Adição e subtração são processos opostos.

Com exceção da segunda generalização, tôdas as generalizações para a adição se aplicam à subtração. Na subtração, a criança deve descobrir que o número da família permanece o mesmo em cada grupo de fatos. Quando o número subtraído decresce de um, a resposta é acrescida de um.

Pela lista de generalizações dadas, vê-se que a introdução dos fatos numéricos na adição e subtração por famílias oferece amplas oportunidades à criança para a descoberta de padrões e relações, os quais caracterizam uma coleção ou família.

É evidente que a maioria das crianças na segunda série não chega a tôdas as generalizações dadas acima. Mas as crianças de segunda série podem fazer as descobertas citadas nos itens 1 e 2. O professor que está certo das relações que há entre os elementos de uma família será capaz de levar as crianças bem dotadas a tôdas essas generalizações.

Um plano aconselhável para a introdução dos fatos fundamentais consiste no ensino dos fatos por famílias. Outro plano aceitável consiste no agrupamento do fatos de modo que um padrã discernível seja comum aos fato de um grupo. Thiele[3] verificou que crianças levadas a descobrir um padrão particular referente a um grupo de fatos de adição aprenderam os fatos muito mais efetivamente que outras que os aprenderam ao acaso, sem qualquer seqüência e sem um padrão de identificação. Os fatos de adição que envolvem o 1 constituem um grupo que tem um elemento de identificação. A criança deve descobrir que, somando 1 a um número, êsse número se torna maior 1 unidade. Nem todos os agrupamentos recomendados por Thiele são práticos, a não ser que a criança aprenda todos os 100 fatos de adição. Os agrupamentos dos 100 fatos fundamentais apresentados na pág. 198 do capítulo seguinte estão de acôrdo com as recomendações de Thiele.

O professor deve introduzir, na segunda série, os fatos fundamentais agrupados em família. Depois da introdução das famílias com resultados até 10, o professor pode agrupar os fatos de acôrdo com um padrão de identificação como o sugerido por Thiele. Alguns dêsses padrões serão dados nos capítulos seguintes.

[3] THIELE (C. L.), *The Contribution of Generalization to the Learning of the Addition Facts.* Nova Iorque: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1938.

Materiais Para o Ensino dos Fatos Fundamentais

Materiais de Classe

Vimos no Capítulo 4 que a sala de aula deve ser equipada com certos materiais. Não há uma lista-padrão de materiais. Um mínimo dêsses materiais de baixo custo, quando usados adequadamente, torna a criança capaz de lidar com as representações simbólicas das experiências numéricas. Tais materiais consistem de um *flanelógrafo,* um *ábaco* e de um quadro *Valor do Lugar.* Veja na pág. 109 a descrição dêsses materiais e seu uso.

Um outro material de grande valor instrutivo é o *quadro magnético,* que consiste de uma lâmina fina de aço com uma superfície lisa. Um tamanho conveniente para tal quadro será 38 x 50 cm. No centro de um disco de madeira, de 5 cm de diâmetro e de 1 cm de espessura, há um pequeno ímã, o qual faz com que o disco adira ao metal. Muitos dos modernos quadros-negros podem ser usados em lugar da peça de aço para a exposição dos discos. Com uma coleção de 10 dêsses discos é possível representar qualquer um dos fatos fundamentais com soma igual ou menor que 10.

Materiais das Crianças

A criança deve ter materiais para usar em sua carteira. O professor engenhoso achará objetos

na sala de aula que a criança pode usar para encontrar a resposta para um agrupamento numérico. A criança pode usar lápis, livros, giz, ou outros objetos semelhantes encontrados na sala de aula. O professor não deve falhar na ênfase do uso dêstes materiais. Por outro lado, a criança deve ter seu material próprio para usá-lo especìficamente na descoberta dos fatos numéricos e suas relações. Êste material inclui discos cilíndricos, mostradores de fatos, fichas retangulares e quadrados. Veja na pág. 109 a descrição dêstes materiais.

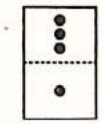
Finalmente a criança necessita de marcadores de 5 x 7 cm aproximadamente. Tais materiais são necessários para se fazer um cartaz para estudo de cada um dos fatos introduzidos na segunda série. Na pág. 543 pode-se ver como fazer êstes cartazes.

b. ENSINO DOS FATOS DE ADIÇÃO

Introdução da Família Numérica

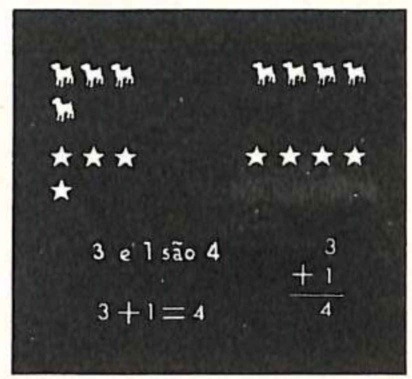
Na segunda série, o professor introduz os fatos fundamentais de adição através das famílias numéricas. Depois da apresentação dos fatos que formam uma família em adição, a classe aprende os fatos de subtração correspondentes. Cada número será introduzido como uma família. Deixe-nos considerar como introduzir um dos fatos fundamentais, $3 + 1 = 4$, como da família de quatro. Segundo estudos e observações feitos por Priore,[4] a maioria das crianças que entra para a primeira série conhece êste fato. Ela verificou que quase 75% das crianças de uma cidade de 100 000 habitantes ao entrar para a primeira série conheciam o fato $3 + 1 = 4$ quando apresentado oralmente, mas não na forma simbólica. A seguinte seqüência de atividades mostra como introduzir êste fato:

1. Usar a gravura de um agrupamento, como o mostrado ao lado, e levar a criança a apontar cada número representado e a ler cada um dêles.



2. Levar cada criança a mostrar o agrupamento com pequenos discos ou sôbre um mostrador de fatos. O professor deve certificar-se da maneira como a criança lê a representação.

3. Pedir a um ou mais alunos que mostrem o fato por uma representação no flanelógrafo.



[4] PRIORE (Angela), "Achievement of Pupils Entering the First Grade", *The Arithmetic Teacher,* 4:57.

4. Fazer as crianças representarem o fato com quadrados ou círculos no quadro-negro.

5. Modificar o arranjo das gravuras no flanelógrafo de modo a formar outro agrupamento, 1 + 3, e deixar que a criança leia os números.

6. Escrever os fatos no quadro-negro, como segue:

a) 3 e 1 são 4 e 1 e 3 são 4

b) $3 + 1 = 4$ e $1 + 3 = 4$

c) Apresentar a forma vertical:

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 1 \\ \hline 4 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

O professor deve levar a classe a discutir o uso dos sinais, lembrando, por exemplo, a significação do verde e do vermelho nos sinais de tráfego, ou a significação da mão erguida do guarda de trânsito. Tais sinais dizem ao motorista de um carro se êle deve parar ou seguir. Do mesmo modo, levar a ver que na Aritmética usamos sinais para indicar o que se deve fazer com os números. O sinal + nos diz que devemos somar, isto é, juntar dois grupos para formar um outro. O sinal = nos diz que duas coisas são iguais ou equivalentes.

7. Ler os fatos na forma simbólica, como "3 e 1 são 4", e "1 e 3 são 4".

A criança deve descobrir que a resposta para cada agrupamento é a mesma. Assim, a criança aprende que, mudando os lugares dos números em um agrupamento de adição, a resposta não muda.

O próximo agrupamento a ser introduzido deve ser 2 e 2. A seqüência de atividades é a mesma que foi usada para o agrupamento 1 e 3. A criança usa seus discos para comparar o agrupamento 1 e 3 com o agrupamento 2 e 2. Ela deverá fazer as seguintes descobertas sôbre os dois agrupamentos:

1. As somas ou totais são os mesmos.

2. Os dois grupos de 2 e 2 são iguais.

3. Tomando-se uma ficha de um grupo de 3 fichas e colocando-a no grupo de 1 ficha, os dois grupos se tornarão iguais.

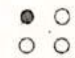
Finalmente a criança escreve os fatos que constituem a família do número 4.

Reconhecimento das Formas Estruturadas de Uma Família

Mahoney[5] nos descreve uma interessante técnica de levar a criança a reconhecer os diferentes agrupamentos de uma família numérica. O professor demonstra no flanelógrafo, com discos circulares ou outras formas geométricas, a soma de uma família numérica como 4. Os discos a serem usados devem ter cada face de uma côr, por exemplo, vermelho de um lado e verde do

[5] MAHONEY (John P.), "Arithmetic at the Primary Level", *The Arithmetic Teacher*, 4:112-118.

outro, ou então duas coleções de discos de côres diferentes. Os discos devem ser dispostos no flanelógrafo de modo a corresponder ao arranjo das bolinhas de um dominó, como , para mostrar 4. O professor deve levar a classe a identificar e dizer o número representado. Para isto êle coloca uma fôlha de papel sôbre o desenho e vira a face de um dos discos como no desenho.



Depois remove o papel para que a criança possa ver o agrupamento de 1 e 3. Esta identifica o agrupamento e diz o fato fundamental representado. Se os discos que representarem o agrupamento original forem verdes e os que representarem o nôvo grupo forem vermelhos, o número dos discos vermelhos será lido primeiro como 1 e 3. Os diferentes agrupamentos para o número 4 são mostrados aqui.

4 1 + 3 2 + 2 3 + 1

Da mesma maneira pode ser mostrada cada uma das outras famílias numéricas até 10 inclusive.

À medida que a criança se familiariza com o método, o professor diminui o tempo de exposição e trabalho com cada agrupamento. Isto é útil e necessário para a criança aumentar seu poder de reconhecimento da forma estruturada.

c. ENSINO DOS FATOS DE SUBTRAÇÃO

Família Numérica em Subtração

O professor introduz a família numérica com seus fatos de adição e, depois, de subtração correspondentes. Êste critério pode ser seguido para a introdução de fatos em famílias de total até 10. Para as famílias numéricas com total 11 até 18, os dois processos podem ser introduzidos tanto simultânea como separadamente.

No capítulo seguinte veremos que a subtração pode transmitir diferentes idéias e que há, pelo menos, duas situações de subtração. Na introdução do trabalho com a subtração na segunda série, o professor deve começar pelo legítimo conceito de subtração, isto é, de um grupo maior tira-se uma parte para achar o número restante.

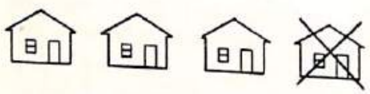
A seqüência de atividades para a introdução dos fatos de subtração é semelhante à seqüência de atividades para a introdução dos fatos de adição. Usando a família numérica do 4 como exemplo para cada família, as atividades para a introdução dos fatos de subtração são:

1. Chamar um grupo de quatro crianças das carteiras da frente da classe; depois pedir a uma criança que deixe o grupo. Levar a classe a descrever a situação numérica. Repetir o processo para mostrar três subtraídos de quatro.

2. Levar cada criança a mostrar os agrupamentos com discos na própria carteira ou com um mostrador de fatos, e então descrever as representações numéricas.

3. Levar a criança a representar, com gravurinhas ou figuras recortadas, os fatos no flanelógrafo.

4. Levar a criança a representar cada fato no quadro-negro por meio de desenhos, como o seguinte:



5. Escrever o fato no quadro-negro atendendo à seguinte seqüência:

a) 4 menos 1 são 3 e
4 menos 3 é 1

b) $4 - 1 = 3$ e
$4 - 3 = 1$

c) Dar a forma vertical:

$$\begin{array}{r} 4 \\ -\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -\ 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

O professor explica a significação do sinal —. Êste é o sinal que indica que devemos subtrair. A criança deve descobrir que na subtração ela começa com um grupo e depois tira uma parte dêle. A êste nível de compreensão, o processo significa tirar um certo número de um grupo dado. Quando as crianças enriquecem sua compreensão da subtração, elas descobrem que esta encerra também outras idéias.

6. Levar a criança a mostrar a correspondência aos fatos adicionais ou $3 + 1 = 4$ e $1 + 3 = 4$.

7. Levar a classe a dizer como a adição difere da subtração. É muito importante para a criança descobrir o seguinte:

a) Na adição, tomamos dois grupos para formar um. (Mais de dois grupos podem ser combinados, mas a êste nível de compreensão a criança combina sòmente dois grupos.)

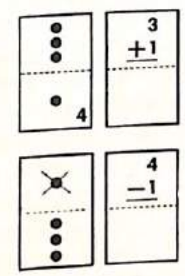
b) Na subtração tiramos uma parte do grupo para achar o resto ou quantos sobraram.

O professor deve levar a criança a descrever, oralmente, cada passo da operação, quando ela demonstrar com materiais ou símbolos uma atividade ou situação de adição ou subtração. A criança lê o fato registrado ao lado como "4 menos 1 são 3".

$$\begin{array}{r} 4 \\ -\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

A palavra *menos* descreve o ato que a criança pratica quando aprende a significação da subtração. Mais tarde, a criança lerá o mesmo registro "1 *para* 4, 3". Como veremos no próximo capítulo, a criança realiza a adição partindo de cima para baixo, e a subtração considerando o algarismo de baixo com relação ao de cima. As direções a serem tomadas pelas crianças, na realização destas operações, são seguidas depois que a criança entende a significação de cada processo.

Na aula seguinte, o professor introduzirá o fato $4 - 2 = 2$. A classe se empenhará nas mesmas atividades para a descoberta dêste fato como já foi descrito acima. As próprias crianças poderão preparar cartões de estudo com todos os fatos de adição e subtração da família de 4. O diagrama abaixo mostra a representação, em cada face do cartão de estudo, do fato de adição $3 + 1 = 4$. Para o fato de subtração correspondente, uma face do cartão mostra a representação estruturada de 4 com uma das bolinhas riscadas. As três bolinhas restantes representam a resposta. A outra face do cartão mostra a representação simbólica do agrupamento.

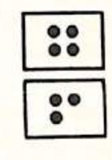


É difícil fazer a representação visual de uma situação de subtração porque há ação envolvida. A criança deve entender que na subtração tiramos um número de um número dado. Êste tipo de ação pode ser melhor representado levando a criança a estruturar um grupo, como o mostrado acima, e então riscar ou cortar uma parte do grupo. A parte restante representa o resto ou parte faltosa numa situação de subtração.

Os alunos usam êstes cartões em suas carteiras para estudar os fatos numéricos. Para êste estudo êles podem trabalhar aos pares. Um aluno mostra o agrupamento numérico e outro aluno dá a resposta representada pelas bolinhas.

Uso do Flanelógrafo na Subtração

O professor deve usar a forma descrita no Capítulo 5, pág. 140, para levar a criança a reconhecer a forma estruturada da família numérica. Em vez de dois discos coloridos como os usados na adição, discos de uma côr são suficientes para o reconhecimento de um agrupamento de subtração. O professor representa no flanelógrafo a forma estruturada da família de 4, como se vê ao lado.



A seguir, cobre o padrão, retira alguns dos discos e, depois, descobre a representação. A criança faz, oralmente, a descrição da atividade. Assim, para a representação mostrada, a criança poderia descrever a ação como segue: "Havia 4 bolinhas (ou círculos). Você tirou 1 bolinha, de modo que só ficaram 3 bolinhas." A criança poderá dar uma descrição mais resumida, como: "4 menos 1 são 3". Antes da representação do agrupamento seguinte, o professor mostra a forma estruturada da família de 4. Então, repete-se o processo para representar um outro fato de subtração, como $4 - 2 = 2$ ou $4 - 3 = 1$. O professor deve, gradualmente, diminuir o tempo de exposição da representação.

Agrupamento dos Fatos Segundo Generalizações Feitas

O professor apresenta os fatos fundamentais de acôrdo com as famílias numéricas. Depois da apresentação dos fatos com total 10 ou menor que 10 e os fatos de subtração correspondentes, o professor pode agrupar os fatos de modo que a classe seja capaz de fazer generalizações que se apliquem aos mesmos em uma dada classificação ou *conjunto*. Thiele[6] mostrou como as crianças de segunda série encontraram a soma de um agrupamento incluindo 9, como $9 + 7$, pela aplicação de generalizações aos fatos nesta classificação. As crianças descobriram que adicionando 9 a um número é o mesmo que adicionar 10 e depois subtrair 1 da soma. Teremos no próximo capítulo, pág. 198, os 100 fatos de adição agrupados de modo que uma generalização se aplica para cada coleção dos fatos compreendidos em um grupo.

Os fatos com soma 10 ou menor que 10, excluindo os agrupamentos que incluem zero, podem ser reunidos em três grupos diferentes:

1. Os agrupamentos com números repetidos:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

2. Os agrupamentos com vizinhos do repetido:

1	2	3	2	4	3	5	4
2	1	2	3	3	4	4	5

3. Os agrupamentos com 1:

1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1

1	8	1	9	1
7	1	8	1	9

A criança deve ser capaz de descobrir o padrão, o qual caracteriza a soma em cada classificação. Cada soma sucessiva na seqüência dos números repetidos aumenta de 2. A criança pode usar esta descoberta para achar a soma de um nôvo fato ou para verificar a soma de um fato já apresentado. Assim, $3 + 3 = 6$, porque $2 + 2 = 4$, pois a soma de $3 + 3$ deve ser 2 a mais que a soma de $2 + 2$. A soma de $6 + 6$ deve ser 2 mais que a soma de $5 + 5$. Portanto, a soma de $6 + 6$ é 12.

O aluno acha a soma de um agrupamento com vizinhos do repetido usando como referência o

[6] THIELE (C. L.), "Fostering Discovery with Children", *The Arithmetic Teacher*, 1:6-11.

repetido, o qual corresponde a um dos números no agrupamento. A soma de $2 + 3$ deve ser 5, porque $2 + 2 = 4$ e também 3 é 1 a mais que 2. Do mesmo modo usar o repetido $3 + 3 = 6$. Desde que 2 é 1 a menos que 3, a soma de $2 + 3$ deve ser 1 a menos que 6, ou 5.

O terceiro grupo inclui os fatos que envolvem o 1. A criança descobre que somando 1 a um número êste fica aumentado de 1.

Se o professor, na segunda série, apresenta os fatos que envolvem zero ou noves, um grupo de fatos pode ser formado para cada uma destas classificações.

As generalizações acima se aplicam aos agrupamentos de adição; todavia, semelhantes generalizações podem ser feitas para os agrupamentos correspondentes de subtração.

Os agrupamentos dos números de acôrdo com as generalizações não permitem a estruturação dos fatos de adição. Tais agrupamentos são apenas meios eficientes de capacitar a criança a formar padrões de aprendizagem dos fatos fundamentais. A criança estrutura os fatos quando os relaciona à base decimal do sistema numérico e, quando ela faz isto, já não está mais interessada nos padrões particulares de aprendizagem dêsses fatos. Por isso, o agrupamento de acôrdo com generalizações deve ser passo intermediário entre a aprendizagem dos fatos em uma seqüência casual e a estruturação dos mesmos com referência ao sistema numérico. Um certo número de agrupamentos de acôrdo com generalizações constitui meio eficiente de levar a criança a aprender os fatos na segunda série.

Adição de Coluna

A criança da segunda série, que conhece a adição de fatos com soma igual ou menor que 10, pode experimentar dificuldades na adição de colunas com os mesmos fatos em virtude da falta de habilidade de somar um *número visto* com outro *não-visto*. No exemplo ao lado, a criança pode conhecer o fato $3 + 4 = 7$, quando somados os números de cima para baixo, ou o fato $5 + 2$, se somados de baixo para cima. Mas esta criança pode ter dificuldade na adição de coluna porque aí ela tem de pensar em um 3 não-visto, se considerarmos a adição de cima para baixo, ou em um 5 não-visto, se considerarmos a adição de baixo para cima.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ +\,4 \\ \hline \end{array}$$

A criança deve somar os números na seqüência dada na coluna. Depois que a criança aprende isto, o professor deve levá-la a ver, através de exemplos, que os números podem ser somados em qualquer seqüência. No exemplo acima, os números podem ser somados na seqüência $2 + 4 + 1$ ou $4 + 2 + 1$. Isto ilustra o princípio de que os números podem ser somados em qualquer ordem.

É possível levar a criança a desenvolver a habilidade de lidar com um número não-visto nas colunas de adição. O trabalho inicial na adição de um número visto e de um não-visto deve envolver a adição de sòmente dois números. Um dos números deve ser ditado. Os passos na introdução do trabalho devem ser os seguintes:

1) Levar a criança a arranjar os cartões *Todos Mostram* sôbre a carteira da mesma maneira que ela arranja os cartões para prática dos fatos fundamentais.

2) Levar a criança a pensar um certo número como 2, por exemplo.

3) Escrever um número de um algarismo no quadro, por exemplo o número 3.

4) Levar a criança a dar a soma e a mostrá-la segurando o cartão correspondente.

A criança que dá a resposta incorreta para um dos exemplos deve escrever o agrupamento. Se ela fôr capaz de dizer a soma do agrupamento, ela conhece o fato. (Se ela não o conhece, deve-se seguir o plano de ensino de acôrdo com os passos acima mencionados.) Depois, o professor leva a criança a olhar os dois números no agrupamento e a colocar os dedos sôbre um dos números. A criança diz, então, o número coberto somando-o ao número visto.

Quando se nota que a criança é capaz de somar dois números, um dos quais não é visto, pode ser-lhe dada a coluna de adição de três números de um só algarismo com soma igual ou menor que 10. A criança que experimenta dificuldades na adição dêstes números deve colocar o dedo sôbre o terceiro número. Somando de cima para baixo na coluna ao lado, a criança cobrirá o 4. Ela pensaria 5 e então descobriria o 4 para achar a soma 9. Somando de baixo para cima, cobriria o 2. Êste método é recomendado sòmente para as crianças que têm dificuldades em lidar com números não-vistos na procura da soma de uma coluna. Êste processo contribui para o aparecimento de respostas mentais de algumas crianças que são capazes de tratar efetivamente com números não-vistos.

2
3
4
—

Há 120 possíveis combinações de três números de um só algarismo incluindo zero e cujas somas não excedem a 10. Exemplos dêste tipo são adaptados ao trabalho das crianças de segunda série. Se usarmos três algarismos diferentes, poderemos organizar seis exemplos. Tomando os algarismos 1, 2 e 3, os seis exemplos são:

1	2	1	3	3	2
2	1	3	2	1	3
3	3	2	1	2	1
—	—	—	—	—	—

Se os três primeiros exemplos forem somados em ambas as di-

Uma loja de brinquedos, em uma classe de segunda série, dá às crianças a oportunidade de usar o dinheiro de maneira interessante.

reções, as mesmas combinações serão usadas quando se somarem todos os seis exemplos em uma só direção. Exemplos fáceis como os acima mencionados ajudam a criança a adquirir a habilidade de somar números não-vistos nas colunas de adição. O crescimento nesta habilidade é essencial para a adição de colunas maiores.

d. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS DE DOIS ALGARISMOS

Adição Sem Reserva

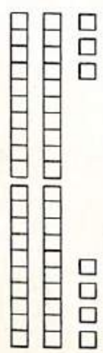
Logo que a criança conheça os fatos fundamentais com soma igual ou menor que 9, ela pode usá-los na adição de números de dois algarismos sem reserva. Vimos no Capítulo 5 currículos diferentes para as primeira e segunda séries. A introdução da adição dos números de dois algarismos sem reserva é um procedimento sujeito a debates ou discussão. Exemplos dêste tipo devem enriquecer o conceito da criança sôbre o valor de lugar do algarismo. O problema seguinte pode ser usado para introduzir a adição sem reserva de dois números de dois algarismos.

"Há 20 crianças em uma classe e 24 em outra. Quantas crianças há nas duas classes?"

O professor apresenta o problema oralmente. A classe identifica o número de crianças num grupo e no outro. Os dois grupos serão combinados; por isso, somamos para encontrar o número em ambos os grupos. O professor deve seguir o plano descrito para levar a criança a entender a significação de uma situação de adição. Os passos para a aprendizagem da adição no exemplo mostrado são os seguintes:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\,24 \\ \hline \end{array}$$

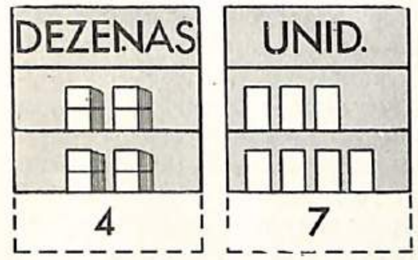
1) Cada criança usa suas fichas retangulares e quadrados para representar os números. (Veja pág. 542 para a descrição dêstes materiais.) A criança combina os quadrados que representam as unidades. Da mesma maneira ela combina as fichas retangulares que representam as dezenas. A soma é 4 dezenas e 7 unidades.



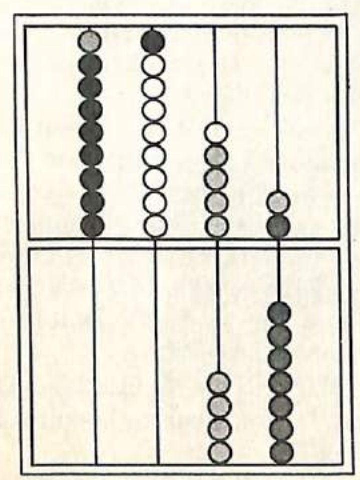
A criança pode combinar, primeiramente, as dezenas, e depois, então, as unidades. Não lhe é possível descobrir por que é necessário começar com a coluna das unidades quando somamos números de dois algarismos sem reserva. A necessidade de começar pela coluna das unidades

torna-se evidente nos casos de adição com reserva.

2) Demonstrar para a classe o processo da adição usando o cartaz Valor do Lugar. (A pág. 537 descreve êste cartaz.) Levar a criança a representar cada número no cartaz. A seguir a criança agrupa as fichas para encontrar a soma dos números no lugar das unidades e das dezenas. O diagrama mostra uma representação gráfica dos números em cada cartaz.



3) Representar os números no ábaco. Levar a criança a dizer a soma dos números representados.



4) Escrever a representação simbólica do exemplo ao lado. Levar a criança a dizer o que significa cada um dos algarismos em cada um dos números somados e também na soma.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +\,24 \\ \hline 47 \end{array}$$

5) Levar a classe a explicar os passos seguidos neste exemplo. Se a criança fôr capaz de dar uma explicação certa é sinal de que ela está pronta para praticar a adição de números de dois algarismos sem reserva.

Mesmo depois que a criança entende os passos da adição dos números de dois algarismos sem reserva, ela ainda experimenta alguma dificuldade na subtração de números dêste tipo, isto é, números que não envolvam reagrupamento. A seqüência dos passos na subtração dêstes números é a mesma aconselhada para a adição e podemos descrevê-la nesta ordem:

1) Usar as fichas retangulares e os quadrados para achar a resposta.

2) Dar um exemplo e demonstrar a operação usando o quadro Valor do Lugar e o ábaco.

3) Levar a classe a explicar os passos na representação simbólica do exemplo dado.

4) Levar a criança a entender e generalizar que só podemos subtrair unidades de unidades e dezenas de dezenas.

Os Fatos com Zero

Um programa mínimo de fatos fundamentais na segunda série consiste na apresentação dos 45 fatos de adição com total igual ou menor que 10 e os fatos de subtração correspondentes. O professor pode sentir que a classe é capaz de dominar os 19 fatos que envolvem zero, em adição e subtração. Tais fatos devem ser ensinados como um grupo e não como fatos específicos. A criança deve descobrir a generalização que se aplica à adição de zero a um número, bem como à subtração do zero de qualquer número.

Não é freqüente o aparecimento de situações sociais onde seja necessário somar o zero ou subtraí-lo de um número de um só algarismo, como 3 + 0 ou 3 − 0. Contudo, é às vêzes necessário somar 3 e 0 quando se trata com números de dois algarismos, como no exemplo aqui mostrado. A criança representa cada número com seus quadrados e fichas retangulares. A representação de 20 consistirá de duas fichas retangulares de dezenas; não haverá nenhum quadrado, pois não há unidades. A soma das duas representações consistirá de 6 fichas retangulares de dezenas e de 3 quadrados para as unidades, ou 63. A criança deve descobrir que a soma de zero com um número é igual ao número. Depois, então, ela fará o registro simbólico de todos os fatos com zero. Da mesma maneira, descobrirá a generalização que se aplica também à subtração de zero de um número.

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\ 20 \\ \hline \end{array}$$

e. PROBLEMAS ORAIS

Introdução de Problemas Usando Todos os Processos

A maioria das crianças na segunda série é incapaz de ler problemas, mas isto não quer dizer que as crianças não devem ou não podem resolver problemas.

O professor apresenta o problema oralmente ou a criança usa o livro-texto ou livro de exercícios que apresente um mínimo de dificuldades de leitura. Gravuras devem ser usadas para ajudar a retratar a situação quantitativa. Os modelos aqui apresentados mostram como as dificuldades de leitura se reduzem com o uso de gravuras funcionais. Embora o trabalho com os fatos fundamentais seja limitado à adição e à subtração, os problemas orais não devem restringir-se sòmente a êstes dois processos. A maioria das crianças de segunda série deve ser capaz de resolver problemas que envolvam multiplicação e divisão desde que o trabalho não seja feito com símbolos.

A êste nível de compreensão e aprendizagem, o professor deve encorajar a criança a dar várias soluções para o problema que envolver situações de adição ou subtração. Consideremos o método a ser usado na solução do seguinte problema:

"Maria tinha 5 biscoitos. Comeu 2 dêles. Quantos biscoitos ficaram?"

Um cantinho de Aritmética, na sala de aula, proporciona variedade de materiais com os quais as crianças podem fazer suas descobertas.

__ meninas estão juntas

__ meninas vêm chegando

faça um círculo em tôrno de tôdas as meninas

__ meninas ao todo

$$\begin{array}{r} 5 \\ +2 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ +2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ +1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ +2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ -4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -1 \\ \hline \end{array}$$

__ meninas ao todo

__ meninas estão saindo

ponha um X nas meninas que estão saindo

__ meninas ficaram

$$\begin{array}{r} 7 \\ -2 \\ \hline 5 \end{array}$$

Para achar a resposta a classe deve:

1) Usar fichas ou tampinhas.

2) Fazer um desenho, como

3) Usar símbolos.

Depois de discutir os métodos usados para encontrar a resposta, o professor deve fazer perguntas para determinar o padrão de raciocínio da criança na procura da resposta. Questões e respostas como estas são próprias do nível de segunda série:

Professor: Que é que o problema pergunta?

Aluno: Quantos biscoitos sobraram?

Professor: Quantos grupos nós tínhamos no comêço?

Aluno: Um grupo.

Professor: Que aconteceu ao grupo?

Aluno: Parte dêle foi tirada.

Professor: Que o problema pediu para achar?

Aluno: O número de biscoitos que ficou.

Professor: Você somou ou subtraiu para achar o número que ficou no grupo?

Aluno: Subtraí.

Da mesma maneira o professor leva a classe a resolver proble-

mas de adição. As crianças indicarão diferentes maneiras de encontrar a resposta. O professor deve testar o raciocínio da criança para verificar se ela entende a significação de adição. Uma situação de adição envolve a formação de um grupo pela combinação de dois ou mais grupos.

Gunderson[7] fêz um estudo da maneira pela qual 24 alunos de segunda série resolveram problemas que envolviam situações de multiplicação e divisão. Ela deu nove problemas (quatro envolvendo multiplicação e cinco envolvendo divisão) para o grupo e observou como os alunos os resolviam. O primeiro problema envolvendo multiplicação perguntava o preço de quatro lápis a três cruzeiros cada. Todos os alunos, exceto um, encontraram a resposta. Algumas crianças usaram fichas, tampinhas, para concretizar a situação; outras fizeram desenhos para encontrar a resposta, e ainda outras contaram de 3 em 3 para achar o custo. As crianças não sabiam coisa alguma sôbre a multiplicação de números. Certamente o professor não fêz nenhuma menção ao processo.

Um dos problemas de divisão no referido estudo feito por *Miss* Gunderson perguntava o número de selos de três cruzeiros que se pode comprar com dezessete cruzeiros. Tal problema pode ser considerado um problema difícil se o aluno usar os algarismos na forma convencional da divisão. Os alunos encontraram a resposta usando fichas, desenhos e outros meios. Não houve resposta errada por causa do resto. Os alunos interpretaram corretamente o resto como uma quantia insuficiente para comprar um sêlo, ou bastante para comprar um sêlo de dois cruzeiros, como alguns outros satisfatòriamente responderam.

O preparo para a solução de problemas fáceis que envolvem multiplicação e divisão através de métodos imaturos, na segunda série, deve ser uma parte do programa de prontidão para o trabalho com aquêles processos nas terceira e quarta séries. Muitas vêzes o professor não dá problemas cuja solução envolve um determinado processo antes que o aluno seja capaz de usar os números de acôrdo com a convenção estabelecida naquele processo para resolver o problema. Um programa de prontidão em Aritmética é assim planejado de modo que o aluno encontre situações numéricas as quais resolve num nível imaturo antes de aprender a lidar com as mesmas numa forma simbólica precisa.

---

[7] GUNDERSON (Agnes G.), "Thought-patterns of Young Children in Learning Multiplication and Division", *Elementary School Journal*, 55:453-461.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Dar a diferença entre um fato fundamental e um agrupamento numérico. Quantos são os fatos fundamentais de adição e quantos são os de subtração?
2. Organize um programa de Aritmética para a primeira e segunda séries de sua comunidade ou para uma comunidade vizinha. Determine o número de fatos fundamentais que, de acôrdo com o programa por você organizado, deve ser ensinado nestas duas séries.
3. Mostre por que você poderia ou não poderia ensinar os fatos fundamentais na primeira série.
4. Dê os argumentos favoráveis e contrários ao ensino simultâneo dos fatos de adição e dos de subtração correspondentes.
5. Dê três diferentes ordens ou seqüências para o ensino dos fatos fundamentais em um processo. Faça uma avaliação de cada modalidade.
6. Faça uma lista dos materiais que você gostaria de ter na sala de aula, para fins de demonstração, e dos materiais que você forneceria a cada criança, na segunda série, no ensino dos fatos fundamentais de adição e de subtração.
7. Escreva um plano de aula que seja um modêlo típico de plano que você seguiria para introduzir um fato fundamental de adição ou subtração.
8. Mostre como você introduziria a adição ou subtração de números de dois algarismos não havendo reserva na adição, ou reagrupamento na subtração.
9. Quando bem ensinados, os fatos com zero são os mais fáceis para a criança aprender. Mostre por que você os ensinaria ou não na segunda série.
10. Faça o esquema de um plano que você seguiria para ensinar problemas a uma classe de segunda série.
11. Alguns professôres de primeira e segunda séries sòmente introduzem um fato fundamental quando a necessidade para o conhecimento do fato surge nas atividades da sala de aula. Avalie êste plano.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brownell, William A. *Arithmetic in Grades I and II.* Durham, N. C.: Duke University Press, 1941.

Drasin, Lillian P. "The Forgotten Level: Semi-Concrete Materials — A Valuable Bridge," *The Arithmetic Teacher*, 4: 211-213.

Gunderson, Agnes G. "Thought-Patterns of Young Children in Learning Multiplication and Division," *Elementary School Journal*, 55: 456-461.

——— "Arithmetic for Today's Six-and-Seven-Year-Olds," *The Arithmetic Teacher*, 2: 95-101.

Hollister, George E. and Gunderson, Agnes G. *Teaching Arithmetic in Grades I and II.* Boston: D. C. Heath and Company, 1954.

Maloney, John P. "Arithmetic at the Primary Level," *The Arithmetic Teacher*, 4: 112-118.

Spitzer, Herbert. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. pp. 83-109.

Stern, Catherine. *Children Discover Arithmetic.* New York: Harper and Brothers, 1949. pp. 17-78.

Thiele, C. L. "Fostering Discovery with Children," *The Arithmetic Teacher*, 1: 6-11.

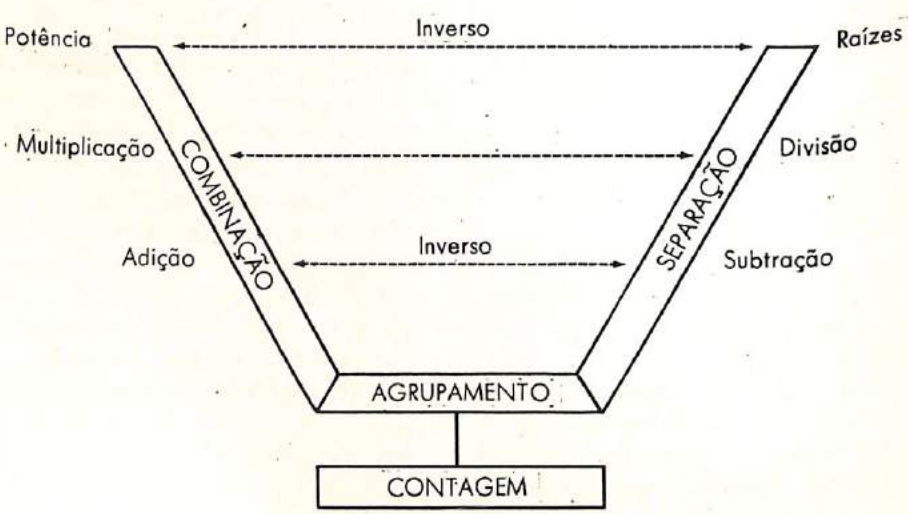
7

Adição e Subtração de Números Inteiros

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO são processos inversos. Um processo anula ou desfaz o outro. Exatamente como fechar uma porta é o oposto de abri-la, assim a adição é o oposto da subtração.

A Aritmética trata com grupos. É possível formar um grupo de dois ou mais grupos, e é possível separar um grupo em dois ou mais grupos. O Capítulo 5 mostrou que o aluno aprende a contar pelo reconhecimento da correspondência de um a um. Depois, aprende a reconhecer o número de coisas em pequenos grupos sem contar. O reconhecimento de grupos condiz com os meios de tratar com êles, como será mostrado.

A projeção à esquerda do diagrama mostra que a adição, a multiplicação e as potências tratam bàsicamente com a formação de um grupo dentro de dois ou mais grupos. Elevar um número a uma potência é um poderosíssimo meio de multiplicar. A multiplicação é um caminho curto de achar a soma de grupos iguais. A projeção à direita do diagrama mostra que a subtração a divisão e as raízes tratam da separação de um grupo dentro de dois ou mais grupos. A extração da raiz de um número é uma poderosíssima forma de divisão. A divisão é um método curto de subtração para achar quantos grupos iguais podem ser formados. As linhas pontilhadas, no diagrama, indicam os processos inversos.



Fundamentalmente o problema que o aluno encontra em Aritmética é descobrir e compreender as regras que governam, dentro da estrutura do sistema de numeração, a operação de números representando grupos. Depois que compreende êstes princípios, deve-se desenvolver a habilidade em usá-los. O trabalho neste texto — que trata dos quatro processos básicos, a saber: adição, multiplicação e divisão — descreve meios de habilitar o aluno a descobrir o significado dêstes processos e como usá-los eficientemente.

Êste Capítulo discute os seguintes tópicos:

a. Agrupamento dos fatos básicos de adição e subtração

b. Conceitos transmitidos pela subtração

c. Adição de números de dois algarismos com reserva

d. Somas elevadas

e. Subtração composta

f. Descoberta de relações entre a adição e a subtração.

a. AGRUPAMENTO DOS FATOS BÁSICOS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Generalizações por Agrupamento

O Capítulo 6 mostra como apresentar os fatos de adição com resultado até 10 ou menos. O professor deve seguir os mesmos passos para introduzir, por família, os 36 fatos com resultados além de 10. São sugeridos os seguintes passos para apresentar um fato, como $6 + 6 = 12$, da família de 12:

1) Levar o aluno a formar dois grupos de 6 marcadores cada um e declarar o número total dos dois grupos.

2) Representar o fato por meio de composição, usando pontos ou algum desenho geométrico.

3) Escrever a representação simbólica do fato.

4) Verificar um fato através de fatos prèviamente aprendidos.

5) Dar ambos o valor agrupado e o não-agrupado da soma. O valor não-agrupado são 12 unidades, e o valor agrupado é 1 dezena e 2 unidades.

6) Deduzir por meio de marcadores os fatos correspondentes de subtração, tirando 6 marcadores de um grupo de 12 marcadores.

7) Escrever o fato de subtração na forma simbólica.

8) Levar o aluno a descobrir a relação entre o fato de adição e o fato correspondente de subtração. Usar os números na caixa; os fatos básicos derivados são: $5 + 6 = 11$, $6 + 5 = 11$, $11 - 5 = 6$, e $11 - 6 = 5$.

5	6	11

9) Ler o desenvolvimento dado no livro-texto.

10) Usar os fatos nos problemas.

Durante a próxima lição o professor levará a classe a descobrir um outro fato da família do 12, como $7 + 5 = 12$. O mesmo processo, usando os dez passos dados acima, será seguido ao apresentar êste fato. O professor seguirá o mesmo padrão para apresentar todos os fatos relacionados que têm por soma 12. De modo semelhante o professor introduzirá os fatos que constituem outras famílias na adição e na subtração.

Descobrindo Padrões Entre Grupos de Fatos

O Capítulo 6 mostrou como é possível agrupar certos fatos possibilitando ao aluno descobrir um padrão ou uma idéia consolidado dentro de um grupo. Os grupos à pág. 173 mostraram alguns dos 100 fatos de adição. Todos os fatos podem ser agrupados de acôrdo com o padrão recomendado por Thiele.[1] Êle recomendava que aos grupos fôssem incluídos os repetidos, os seus vizinhos, os grupos de 1, de 2, de 9, de 0, e os diversos grupos de fatos aos quais nenhuma generalização é aplicada. Os grupos de 100 em adição, de acôrdo com a classificação acima e as generalizações que se aplicam a cada grupo, são:

1) *Os repetidos.* Em números repetidos consecutivos, cada soma que sucede é aumentada de dois.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) *Os vizinhos de repetidos.* A soma de um vizinho de repetido é 1 a mais que a soma do repetido do menor número do grupo ou 1 a menos que a soma do repetido do maior número daquele grupo.

1	2	2	3	3	4	4	5
2	1	3	2	4	3	5	4

5	6	6	7	7	8	8	9
6	5	7	6	8	7	9	8

3) *Adendo 1.* Se 1 é adicionado a um número, a soma é 1 a mais que o número.

3	1	4	1	5	1	6
1	3	1	4	1	5	1

[1] THIELE (C. L.), ob. cit. Veja nota de rodapé da pág. 178.

1	7	1	8	1	9	1
6	1	7	1	8	1	9

4) *Adendo 2.* Se 2 é adicionado a um número, a soma é 2 a mais que o número.

2	4	5	2	6	2
4	2	2	5	2	6

7	2	8	2	9	2
2	7	2	8	2	9

5) *Adendo 9.* Adicionar 9 a um número é o mesmo que adicionar 10 ao número e depois subtrair 1.

3	9	4	9	5	9	6	9	7	9
9	3	9	4	9	5	9	6	9	7

6) *Adendo 0.* Se zero fôr adicionado a um número ou se ao número fôr adicionado zero, a soma será igual ao número.

0	1	0	2	0	3	0	4	0	5
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0

0	6	0	7	0	8	0	9	0
5	0	6	0	7	0	8	0	9

7) *Grupos diversos.* Não há generalização que se possa aplicar aos grupos desta classificação.

5	3	6	3	7	3	8	3	6	4
3	5	3	6	3	7	3	8	4	6

7	4	8	4	7	5	8	5	8	6
4	7	4	8	5	7	5	8	6	8

Em geral, os grupos da última classificação são difíceis para o aluno porque não há um padrão unificado para êstes fatos. Contudo, se o aluno aprende os fatos por famílias, não haverá grupos nesta classificação.

Alguns dos grupos podem ser colocados sob diferentes classificações. Por exemplo, os grupos podem ser classificados na série do adendo 9.

1	9	2	9
9	1	9	2

De maneira semelhante, outros grupos podem ser dados com classificação diferente da que foi apresentada. O arranjo acima é um meio pelo qual os 100 fatos de adição podem ser agrupados.

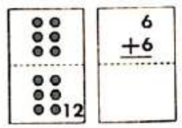
Não se pede ao professor que escolha como ensinar os fatos por famílias ou pela classificação acima. Há mérito no ensino dos fatos por ambas as seqüências. Um plano praticável é introduzir os fatos por famílias. Depois de apresentar algumas das famílias de fatos, o professor arranjará os fatos de acôrdo com a classificação mostrada e levará o aluno a descobrir a generalização que se aplica a cada grupo de fatos relacionados. Não é necessário dar todos os fatos de uma determinada classificação para levar o aluno a descobrir uma generalização. Êste descobre o princípio único de uns poucos fatos dados. Então, poderá achar as somas dos outros grupos em uma coleção aplicando a generalização.

Praticando os Fatos

A prática ou exercício é parte essencial do programa de Aritmética. Para ter o domínio de um fato, o aluno deve ser capaz de respondê-lo espontâneamente e com segurança. Prática ou exercício ajudará a atingir êste fim, levando o aluno a compreender os fatos. Se êle participar da lista de atividades que são dadas, a quantidade de exercícios necessária para o domínio dos fatos será muito reduzida. Brownell,[2] tendenciosamente, expressou com uma frase a finalidade do exercício como *hábito significativo*. Recorrendo ao fato básico, o aluno será capaz de dar uma resposta habitual ao fato que compreende.

As atividades seguintes são meios efetivos de prover prática para os fatos básicos de adição e subtração.

1) Levar o aluno a fazer uso de cartões, medindo 5x7 cm, feitos de papelão, cartolina ou papel-manilha. A ilustração mostra os dois lados do cartão para o fato $6 + 6 = 12$. O aluno pode tes-



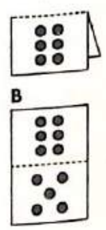
tar seu conhecimento dos fatos ou dois alunos podem usar os cartões para um testar o outro. O aluno testado vê o grupo simbólico, e o outro aluno vê a representação simbólica do fato.

2) Usar os cartões do jôgo *Todos Mostram*. Ver à pág. 543 a descrição dêstes cartões e como devem ser usados.

3) Usar *cartões de percepção* e levar o aluno a escrever a resposta da questão dada pelo professor. A pág. 544 apresenta as instruções para fazer um dêstes cartões. O professor mostra à classe, uma representação, como em A. Depois o professor abre o cartão e mostra a outra representação, como em B. O aluno escreve sôbre o seu papel os números representados, bem assim a resposta. Êstes cartões podem também ser usados para exercícios orais.

A

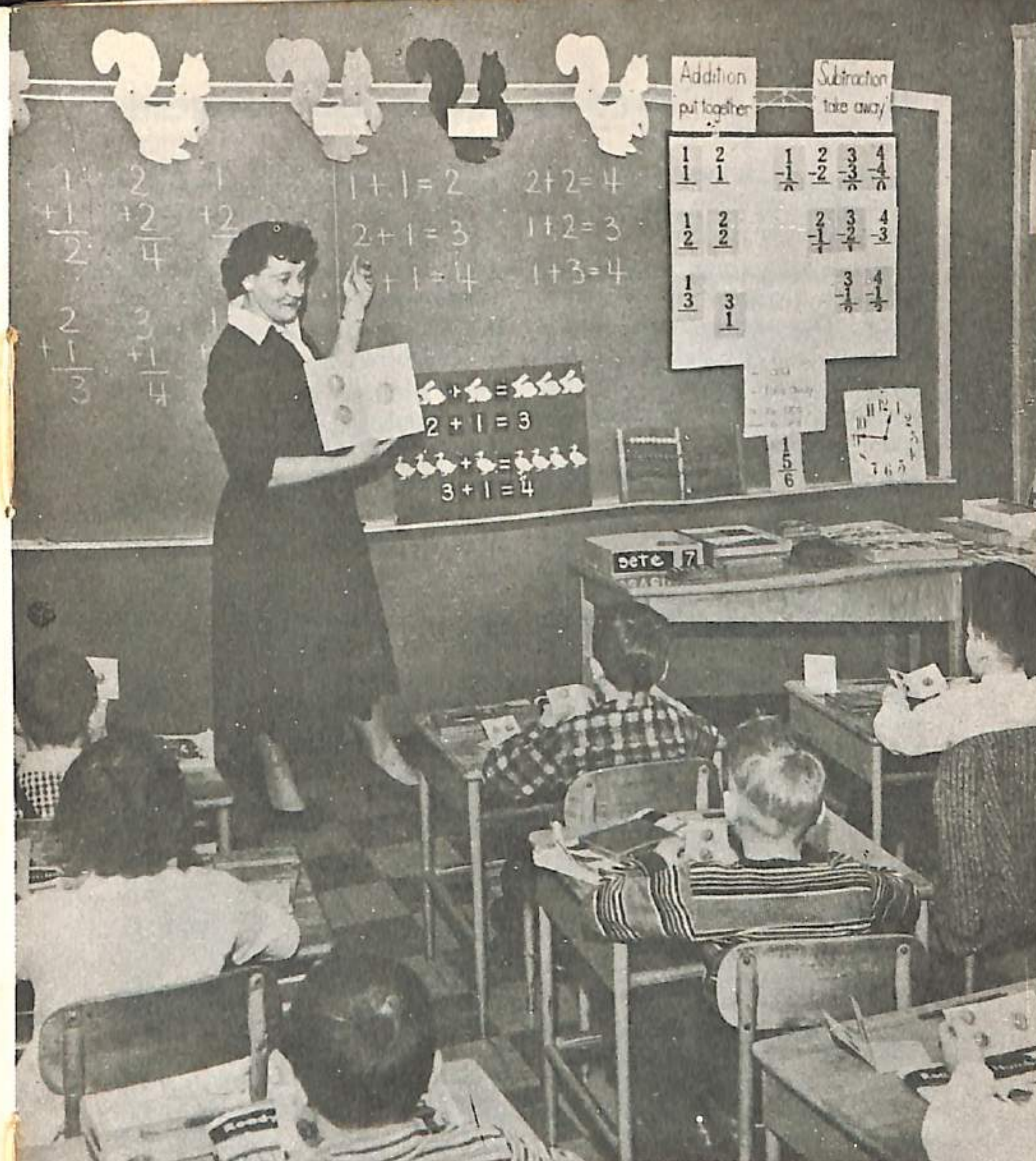
B



4) Levar o aluno a deduzir a resposta de um grupo de fatos conhecidos. Suponhamos que seja apresentado $5 + 5 = 10$. Levar o aluno a dizer como êle pode provar que $6 + 7 = 13$.

5) Levar o aluno a escrever as respostas em uma fôlha dobra-

[2] BROWNELL (Wm. A.), "Meaning and Skill: Maintaining the Balance", *The Arithmetic Teacher*, 3:129-136.



Esta classe tem um cantinho de Aritmética, equipado com muitos materiais úteis, fáceis de serem utilizados pelos alunos e pelo professor.

da embalagem dos grupos dados no livro-texto, ou idem para os grupos que serão praticados.

Dar a cada aluno uma fôlha e levá-lo a registrar as respostas. Estas fôlhas poderão ser usadas mais de uma vez pelo aluno que segue o plano sugerido pelo uso do livro-texto. O professor escreve as respostas no quadro-negro na mesma ordem que elas irão aparecer na fôlha de prática. Os alunos trocam os papéis e comparam as respostas com aquelas dadas no quadro. Cada aluno registra as respostas incorretas na fôlha que marca os pontos. Depois o professor faz o diagnóstico para determinar se os erros são cometidos por acaso ou se resultam de um conhecimento defeituoso dos fatos. Veja a pág. 493, que apresenta como fazer um completo diagnóstico.

Situações de Adição

Apresenta-se uma situação de adição sempre que é necessário usar adição para resolver um problema. Tôdas as situações de adição envolvem a formação de um só grupo com dois ou mais grupos. Van Engen[3] identifica três tipos de situações de adição:

1) Para um grupo de tamanho conhecido achar o tamanho do outro grupo a ser adicionado para igualar um terceiro grupo de tamanho conhecido, como $5 + ? = 8$.

2) Para um grupo de tamanho não-conhecido deve ser adicionado um grupo de um dado tamanho para igualar um terceiro grupo conhecido, como $? + 5 = 8$.

3) Dois ou mais grupos de tamanhos conhecidos são juntados para formar um terceiro grupo de tamanho não-conhecido, como $3 + 5 = ?$.

Como Reckzeh[4] pròpriamente assinalou, não há razão matemática para designar os tipos 1 e 2 como situações diferentes. Ambos envolvem a separação de dois grupos. A soma dos dois grupos e um dos grupos são dados. O grupo faltoso é achado pela subtração. Portanto, das três situações apresentadas por Van Engen, sòmente a terceira representa uma situação de adição. Em uma situação de adição, *dois ou mais grupos de tamanho conhecido são dados para formar um grupo de tamanho não-conhecido.*

Muitas vêzes as crianças não sabem se devem somar ou subtrair para resolver problemas relacionados com a união de dois grupos. Alguns professôres tentaram resolver esta dificuldade levando o aluno a procurar uma *chave* no problema. Êle identificaria uma palavra-chave ou uma frase que lhe daria uma sugestão na decisão do processo a ser usado para a solução. A adição seria identificada por expressões como: Quantos ao todo? Qual é o custo? Quanto ao todo? Qual é o total? Qual é a soma? A identificação de chaves representa o epítome, o resumo da aprendizagem desintegrada. Não há padrão que caracterize uma situação de adição quando o aluno identifica o uso dêste processo por chaves. Ao invés dêste processo êle identificará os dois grupos a serem unidos. As palavras ou frases dadas acima significam que é necessário formar um grupo dos grupos dados. Por exemplo, a expressão *ao todo* significa que um grupo está para ser formado, o qual é igual a todos os outros grupos. Quando o aluno trabalha com dois grupos, poderá pensar assim: "Eu conheço dois grupos. Eu devo formar um grupo que seja igual aos dois grupos. Eu somo." "Eu mostro a soma de dois grupos e um grupo. Eu devo achar o grupo faltoso. Eu subtraio."

Neste plano, o aluno não procura chaves como característica.* Ao invés das chaves, adapta um padrão geral para identificação das situações de adição. Em se tratando de dois grupos, o aluno descobre que é necessário adicionar para achar o grupo não-conhecido, que é igual em valor aos dois grupos conhecidos.

b. CONCEITOS TRANSMITIDOS PELA SUBTRAÇÃO

Situações de Subtração

É muito mais difícil dar uma definição concisa de uma situação de subtração que de uma situação de adição, porque a subtração tem dois usos distintos. Primeiro, é usada para achar o restante depois de tirado um grupo. Segundo, é usada para comparar o tamanho de dois grupos. Cada uso está ligado à compreensão da subtração. Do ponto de vista matemático, como será mostrado mais tarde, êstes usos podem ser combinados para formar uma situação básica de subtração.

É possível identificar quatro diferentes situações que exigem a subtração. São elas:

1) Achar o resto
2) Achar a diferença
3) Achar quanto um grupo tem a mais ou a menos que outro grupo
4) Achar a parte componente de um grupo.

Os quatro usos podem ser identificados nos problemas seguintes:

1) "João tem 6 livros de história e dá 4 para seu irmão. Quanto lhe resta?" A resposta mostra o restante depois que uma certa quantidade é tirada, como indica o diagrama.

* Quantos lhe restam?

[3] VAN ENGEN (Henry), "Which Way Arithmetic", *The Arithmetic Teacher*, 2:131-140.

[4] RECKZEH (John), "Addition and Subtraction Situations", *The Arithmetic Teacher*, 3:94-97.

2) "Uma bala custa Cr$ 6 numa confeitaria e Cr$ 4 em outra. Qual é a diferença de preço?" A resposta mostra a diferença entre os dois números, conforme indica a ilustração. Aí as duas

⊘ ⊘ ⊘ ⊘ ○ ○
⊘ ⊘ ⊘ ⊘

quantidades são comparadas por subtração. Os números são comparados por subtração ou por divisão.

3) "Ana precisa de 6 botões para um vestido. Ela tem 4 botões. Quantos botões ela precisa comprar?" A resposta mostra quanto um número tem mais que outro. O diagrama mostra que 6 são 2 mais que 4.

| ○ | ○ | ○ | ○ | ○ ○

4) "Antônio tem 6 bolas, que são vermelhas e amarelas. Se 4 bolas são vermelhas, quantas são amarelas?" A soma dos dois grupos e um grupo são dados. A ilustração mostra êstes fatos.

● ● ● ● ○ ○

A resposta indica o número faltoso que é achado pela subtração. Êste número é uma das duas partes componentes de uma soma dada.

O último problema representa a mais generalizada forma de subtração. Segue muito intimamente o significado matemático da subtração. Em uma situação de subtração um grupo é dado, e é separado em dois grupos, sendo um dêles conhecido. Subtraímos para achar o outro grupo.

Já discutimos o terceiro tipo de problema dado acima. Van Engen classificou o problema dêste tipo como apresentando uma situação de adição. Desde que a soma dos dois grupos é dada, o problema não pode representar uma situação de adição.

O problema 1 representa uma situação de tirar e o problema 2 representa uma situação de comparar. Reckzeh[5] afirma que tôdas as situações de subtração podem ser padronizadas depois da forma pela qual um grupo é tirado do outro para achar o terceiro grupo.

Em um estudo experimental tratando de tipos de problemas de subtração, Gibb[6] concluiu que os alunos apresentaram uma porcentagem maior de respostas corretas para os problemas envolvendo o conceito de subtração de tirar do que para os problemas envolvendo os outros conceitos de subtração. As soluções mais incorretas foram dadas aos problemas envolvendo comparação.

Há quatro meios de descrever uma situação de subtração. Os números nos problemas acima são 6 e 4. Suponhamos que pensamos nestes números como representados por objetos, círculos. Então os quatro modos de descrever uma situação de subtração são:

[5] *Ibid*, págs. 96-97.

[6] GIBB (E. Glenadine), "Children's Thinking in the Process of Subtraction", *Journal of Experimental Education*, 25:71-80.

1) De um grupo de 6 círculos tiram-se 4 círculos, *restam* 2 círculos.

2) A *diferença* entre um grupo de 6 círculos e um grupo de 4 círculos são 2 círculos.

3) Um grupo de 6 círculos tem 2 círculos *a mais que* um grupo de 4 círculos.

4) Um grupo de 4 círculos tem 2 círculos *a menos que* um grupo de 6 círculos.

O aluno que compreende a subtração será capaz de expressar o fato de subtração em cada uma das quatro maneiras apresentadas. Para fazer isto, deve compreender o significado dos têrmos comparativos *diferença, a mais que* e *a menos que*. Contudo, o aluno é capaz de descrever um fato de subtração nestes quatro modos; dependendo da situação no problema, escreve o fato da mesma forma, como $\begin{array}{r}6\\-4.\\\hline 2\end{array}$ Pensa no fato como representando um grupo separado em dois outros grupos. Um dos grupos é dado e êle acha o outro grupo subtraindo o grupo dado do grupo original. A fraseologia para a leitura do fato é "6 menos 4 são 2", ou em número geral esta fraseologia é "A menos B é C".

Uma das mais efetivas provas da subtração é adicionar a resposta ao subtraendo. Considerando o fato $6 - 4 = 2$, a soma de 2 e 4 é igual a 6. Dêste modo o aluno descobre que a adição e a subtração são processos inversos. Dois ou mais grupos são combinados para formar um grupo desconhecido. Isto representa uma situação de adição. Se um grupo é separado em dois grupos e um dos grupos é dado, mas o outro está faltando, o grupo faltoso é achado por subtração. Por conseguinte, um problema desta espécie apresenta uma situação de subtração.

Adição de Cima Para Baixo ou de Baixo Para Cima

É possível somar uma coluna de cima para baixo, ou de baixo para cima. Um dos princípios básicos pertinentes à adição implica que a ordem de combinação dos números não afeta a soma. O professor se defronta com o problema de levar o aluno a adicionar de baixo para cima, de cima para baixo, ou ao acaso. Evidências científicas não dão uma resposta à ordem a ser usada na adição. A prova mais geralmente aplicada em adição é adicionar em direção oposta à direção usada para achar a soma. Os Autores recomendam que o aluno adicione de baixo para cima e verifique o trabalho pela adição de cima para baixo. A maioria das pessoas subtrai de cima para baixo em um exemplo. Desde que a adição e a subtração são processos inversos, é lógico adicionar de baixo para cima. A direção na adição não é tão importante quanto a consistência da direção. O aluno pode seguir o plano de sempre: adicionar de cima para baixo ou de baixo para cima. Uma boa prova consiste em adicionar em direção oposta.

c. ADIÇÃO DE NÚMEROS DE DOIS ALGARISMOS COM RESERVA

Descoberta de Meios para Achar a Soma

A pág. 188 mostra como introduzir adição de números de dois algarismos sem reserva. O plano que segue mostra como introduzir a adição de números similares com reserva. O professor habilidoso planeja sempre uma situação problemática para a classe que envolva o uso do processo a ser introduzido. Se o professor planeja introduzir reserva na adição, um problema do seguinte tipo pode ser usado para introduzir o trabalho: "Há 26 cadeiras na sala de aula e 28 cadeiras em uma outra sala de aula. Quantas cadeiras há em ambas as salas?" O professor deve levar o aluno a descobrir diferentes meios de achar a resposta. A classe pode sugerir um ou mais dos seguintes meios:

1) "Começar de 28 e contar mais 26."

2) "Adicionar 20 e 20 e 6 e 8. O total de 26 e 28 será igual a 40 + 14, ou 54."

3) "28 e 10 são 38; mais 10 são 48; mais 2 são 50; 50 + 4 são 54."

4) "26 é 1 mais que 25, e 28 são 3 mais que 25. Donde 25 + 25 são 50, 26 + 28 serão 4 mais que 50, ou 54."

5) "Adicione 26 e 30. A soma é 56. Logo, 28 é 2 menos que 30, a soma de 26 e 28 será 2 menos que 56, isto é, 54."

6) "Adicione 30 e 30. A soma é 60. Logo, 28 são 2 menos que 30, e 26 são 4 menos que 30, a soma de 28 e 26 é 6 menos que 60, ou seja 54."

A classe pode sugerir muitos outros meios de achar a soma de 26 e 28. O maior valor no grande número de meios que a classe pode oferecer para achar a soma é a certeza de que os alunos estão desenvolvendo percepção imediata dentro do número. A classe que não pode oferecer pelo menos um meio para achar a soma dos números não tem uma base adequada para compreender o desenvolvimento seqüencial dos passos na operação. Muito provàvelmente não descobrirá o processo que representa o modo mais conciso que a geração descobriu para executar esta operação. Todos os seis meios sugeridos são quaisquer meios imaturos de raciocínio, ou são um consumo de tempo comparados com os meios padronizados de adição. Apesar

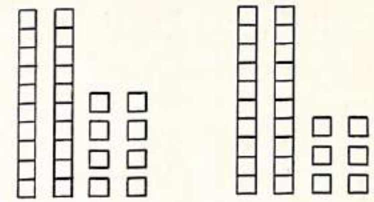
dêstes meios não serem concisos, representam processos que o aluno compreende. O problema imediato a ser enfrentado pelo professor é tornar o aluno capaz de compreender como adicionar números de dois algarismos envolvendo reserva e levá-lo a adquirir razoável proficiência na operação.

A descoberta de meios para encontrar uma resposta não é ficar limitado àqueles períodos em que os novos processos são introduzidos. Quando o aluno sabe adicionar exemplos envolvendo reserva, explorará diferentes meios de achar a resposta além do processo convencional. Quando a reserva é introduzida, o aluno pode descobrir sòmente um dos meios enumerados. Quando o aluno desenvolve melhor compreensão do processo e ganha mais percepção imediata dentro do número, poderá descobrir todos os meios mencionados para achar a resposta e usar ainda outros meios não mencionados.

Seqüência dos Passos no Ensino da Adição Com Reserva

A pág. 188 apresenta a seqüência dos passos para introduzir a adição de números de dois algarismos sem reserva. A mesma seqüência usada na adição sem reserva é aplicada à adição de números de dois algarismos com reserva. A ordem das atividades para adicionar 26 e 28 é a seguinte:

1) Levar o aluno a achar a soma usando as tiras retangulares e os quadrados.



2) Demonstrar o processo com o cartaz Valor do Lugar. Começar com as unidades.

3) Fazer uma representação visual do processo como foi mostrado. Levar a classe a dizer o que cada número representa nas diferentes dobras dos cartazes A e B.

4) Ler e interpretar a apresentação dada no livro-texto.

5) Fazer uma representação simbólica do processo. 1 dezena escrita na coluna das dezenas resulta do reagrupamento das 14 unidades, um número não-agrupado. O aluno escreve a reserva até que seja capaz de pensar neste número como um número oculto, e então adiciona.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 26 \\ 28 \\ \hline 54 \end{array}$$

6) Pôr no quadro-negro um modêlo executado e levar a classe a dizer os passos para a solução.

Agora, o aluno será capaz de fazer generalizações sôbre o processo a seguir na adição de números de dois algarismos com reserva. A generalização é: Achar a soma da coluna das unidades.

A B C

Expressar êste número como unidades e dezenas. Escrever o dígito das unidades no lugar das unidades e transportar o dígito das dezenas para a coluna das dezenas, e somar. Então a classe está pronta para praticar a adição envolvendo reserva.

Há muitos exemplos de diferentes estruturas que ilustram o exemplo da reserva em adição. No exemplo ao lado a soma das dezenas é 12. Quando êste número é escrito, êle tem o valor de 1 centena e 2 dezenas.

$$\begin{array}{r} 58 \\ +\ 67 \\ \hline 125 \end{array}$$

Os exemplos abaixo mostram como o reagrupamento da soma é necessário na adição de dois números de três algarismos. No

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 324 & 463 & 487 \\ +\ 158 & +\ 175 & +\ 296 \\ \hline \end{array}$$

exemplo A, 1 dezena é transportada para a coluna das dezenas; no exemplo B, 1 centena é transportada para a coluna das centenas; no exemplo C, 1 dezena é transportada para a coluna das dezenas e 1 centena para a coluna das centenas. O aluno não deve aprender como usar a *reserva* num exemplo de tipo específico.

O professor levará o aluno a descobrir que transportar para o lugar das centenas envolve o mesmo processo de transportar para o lugar das dezenas. O aluno então aplicará esta generalização ao transporte para o lugar dos milhares ou para qualquer outro lugar na escala numérica.

d. SOMAS ELEVADAS

O trabalho com *somas elevadas* consiste em adicionar um número de dois algarismos a um número simples em uma só operação mental. No exemplo ao lado, se o aluno pensa: "18 + 5 são 23", êle usa soma elevada. Por outro lado, se êle pensa: "8 + + 5 são 13, 1 + 1 são 2", êle adiciona e usa a reserva.

$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ \ 5 \\ \hline 23 \end{array}$$

A soma de um número de dois algarismos e um número simples pode estar na *mesma década*, como no exemplo A, ou na *década seguinte*, como em B.

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ 23 & 27 \\ +\ 4 & +\ 4 \\ \hline 27 & 31 \end{array}$$

O processo ilustrado em B é algumas vêzes

designado como *mudança de década*.

A soma elevada é usada em dois casos: primeiro, na coluna de adição. Somando de baixo para cima, a classificação dos agrupamentos numéricos é a seguinte: 7 + 6 = 13, que é um fato fundamental; 13 + + 8 = 21, soma elevada com agrupamento; 21 + 4 = 25, soma elevada sem agrupamento.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Segundo, a soma elevada é usada na multiplicação, quando é necessário adicionar a reserva a um produto de dois algarismos. No exemplo ao lado, é necessário adicionar 5 a 32 (8 × 4) e 3 a 48 (8 × 6), obtendo assim o produto 5 176. A soma 32 + 4 está na mesma década como o produto 32, mas a soma de 48 + 3 está na década seguinte como o produto 48.

$$\begin{array}{r} 647 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 5\,176 \end{array}$$

A reserva máxima em multiplicação é sempre 1 menos que o multiplicador. Assim, a reserva máxima quando multiplicamos por 6 é 5, como pode ser mostrado pelo multiplicando 999 e o multiplicador 6, quando o 6 é multiplicado por um número menor que 10. A tabela à pág. 253 dá o número de exemplos possíveis em multiplicação que representa a soma elevada.

Começando com as dezenas, há 90 exemplos de adição representando adição pelas somas elevadas em cada década. Na metade dos 90 exemplos as somas estão na mesma década, com números de dois algarismos, e na outra metade a soma está na década imediatamente superior. A tabela abaixo mostra o número possível de exemplos para as dezenas. Uma tabela similar pode ser formada para cada década acima desde 20 até 90. A linha reforçada divide a tabela ao meio, considerando a mudança de década.

10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9
11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9
12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9
13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9
14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9
15 1	15 2	15 3	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9
16 1	16 2	16 3	16 4	16 5	16 6	16 7	16 8	16 9
17 1	17 2	17 3	17 4	17 5	17 6	17 7	17 8	17 9
18 1	18 2	18 3	18 4	18 5	18 6	18 7	18 8	18 9
19 1	19 2	19 3	19 4	19 5	19 6	19 7	19 8	19 9

Achar a soma de um exemplo representando somas elevadas é similar a achar a soma do agrupamento numérico relacionado ao fato básico. Assim, o exemplo 12 + 3 tem o elemento comum 2 + 3. O agrupamento 2 + 3 constitui a *chave* do exemplo 12 + 3. Se o aluno conhece o agrupamento-chave e o reconhece no exemplo envolvendo a soma elevada, terá o mínimo de dificuldades com êste tipo de adição. É importante que o aluno identifique o *exemplo-chave*. Contudo, não há número fixo de exemplos a serem praticados, como sejam aquêles que têm soma menor que 40. O aluno poderá praticar com exemplos envolvendo as somas elevadas, até que seja capaz de identificar o agrupamento-chave em um exemplo dado e dar então a soma daquele exemplo.

Meios de Adicionar Por Somas Elevadas

Os exemplos de adição com somas elevadas que envolvem mudança de década são comumente mais difíceis para o aluno do que os exemplos que não envolvem mudança de década. Flournoy[7] fêz um estudo do tratamento das somas elevadas envolvendo a mudança de década em 6 livros-texto de Aritmética de terceira série. A investigação mostrou que três diferentes métodos foram usados:

1) Adição por somas elevadas envolvendo mudança de década

2) Uso do *método das dezenas*

3) Plano usado pela reserva em adição.

De acôrdo com o primeiro plano, o aluno daria a soma em uma única operação mental, como "17 + 8 = 25".

De acôrdo com o método das dezenas, o aluno adicionaria um número ao número de dois algarismos para formar um múltiplo de 10. A esta soma adicionaria a parte componente constituída do número simples. Para achar a soma de 18 + 5, o aluno poderia pensar: "18 + 2 = 20; 20 + 3 = = 23". De acôrdo com o primeiro plano, o pensamento-padrão seria: "18 + 5 = 23".

O terceiro plano usado nos circulantes livros-texto de Aritmética leva o aluno a achar a soma de exemplo de adições por somas elevadas do mesmo modo que leva à reserva na adição. No exemplo $\begin{array}{r}18\\+\ 5\\\hline\end{array}$ o aluno pensaria: "8 + 5 = 13; escreveria 3; 1 + 1 = 2". Êste método está muito sujeito a objeções porque ensina ao aluno um processo que inibe seu trabalho na coluna de adição. No exemplo ao lado, o aluno não pensaria: "6 + + 8 = 14; 1 + 1 = 2", para achar a soma de 16 e 8. A operação extramental requerida pela reserva parece tor-

$\begin{array}{r}7\\9\\8\\\hline\end{array}$

[7] FLOURNOY (Frances), "Controversy Regarding the Teaching of Higher-Decade Addition", *Arithmetic Teacher*, 3:170-73.

Uma mercearia de brinquedo é outro meio de aplicação direta da adição e da subtração.

nar o processo mais difícil do que dar a soma em uma única operacia mental. Os escritores estão mais de acôrdo com o primeiro plano e com um limitado uso do segundo plano que foi descrito acima.

Ensinando a Adicionar por Somas Elevadas Sem Mudança de Década

Na introdução da adição pelas somas elevadas, os exemplos seriam escritos na forma vertical e em seqüência, como se verifica no exemplo abaixo. O aluno po-

$$\begin{array}{r}12\\+3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}22\\+3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}32\\+3\\\hline\end{array}$$

derá descobrir que as somas de todos os exemplos terminam no mesmo dígito como o fato básico-chave, e que a soma do dígito das dezenas é o mesmo número das dezenas. Logo que o aluno seja capaz de fazer esta descoberta, sob a orientação do professor, os exemplos podem ser escritos ou na forma vertical ou na forma horizontal, como 12 + 3.

Uma das finalidades da adição pelas somas elevadas é possibilitar ao aluno adicionar um número de dois algarismos a um número simples em uma coluna em uma só operação mental. Se a forma horizontal é usada, o aluno terá mais probabilidades de combinar os números em uma só operação mental do que quando são escritos na forma vertical. Flournoy achou em três dos livros-texto examinados exemplos dêste gênero sòmente na forma vertical.[8]

O número de dois algarismos em um exemplo envolvendo somas elevadas quer na coluna de adição quer na multiplicação não é visto. No exemplo ao lado, o número 14 não é visto. A êste 14 que se vê é nessário adicionar 3, que é um número que se vê. O professor pode escrever um dígito no quadro-negro e levar a classe a escrever no papel a soma dêste número com um número que será ditado.

$$\begin{array}{r}6\\8\\3\end{array}$$

Suponhamos que o professor escreve o dígito 4 e leva a classe a adicionar a êsse 4 os números 12, 23, 14, 31. O aluno escreve a soma. Os números de dois algarismos não são vistos, portanto, deve-se pensar nesses números e adicioná-los ao número visto. A prática desta espécie de adição por somas elevadas aproxima-se ìntimamente do uso dessa forma de adição para achar a soma em uma coluna de números.

Ensinando a Adicionar por Somas Elevadas Envolvendo Mudança de Década

Na introdução da adição por somas elevadas envolvendo mudança de década, os exemplos seriam escritos em seqüência e na forma vertical. É aconselhável começar com o grupo básico, como $\begin{array}{r}8\\+4.\\\hline\end{array}$ Logo em seguida os exem-

[8] *Ibid.*

plos representando a adição das décadas superiores usando o grupo-chave que será escrito como foi mostrado. Se o aluno não pode dar as somas por inspeção, poderá adicionar como em reser-

$$\begin{array}{r}8\\+4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}18\\+4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}28\\+4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}28\\+4\\\hline\end{array}$$

va. Depois de achar as somas de uns poucos exemplos semelhantes, o professor levará o aluno a fazer as seguintes descobertas pertinentes às relações entre o agrupamento-chave e os outros exemplos. Primeiro, os dígitos no lugar das unidades são os mesmos em todos os exemplos. Segundo, o dígito no lugar das dezenas em cada soma é mais 1 do que o dígito no número de dois algarismos. O professor não deve expressar o aumento do dígito das dezenas como um processo de reserva. Depois de o aluno ser capaz de aplicar estas generalizações, os exemplos seriam escritos em uma seqüência feita ao acaso.

Finalmente o aluno terá oportunidade de praticar conforme as sugestões descritas adiante. O professor pode escrever um dígito no quadro-negro e ditar um número de dois algarismos. O aluno escreveria a soma do número visto com o número ditado.

Para prática escrita, a forma mostrada é eficiente. O número de dois algarismos é apresentado em forma de palavra. O aluno deve pensar nesse número e a êsse número pensado êle adiciona cada um dos números vistos, como é mostrado abaixo.

	4	________
Dezesseis	8	________
	7	________
	5	________

Alguns alunos têm dificuldade em achar em uma só operação mental a soma de um exemplo envolvendo somas elevadas com mudança de década. A êstes alunos não será exigido operar no mesmo nível de maturidade que àqueles que foram bem sucedidos com êste tipo de adição. Ao aluno que encontrar dificuldade nesta fase da adição será ensinado como adicionar pelo *método das dezenas*. Êste método já foi descrito na pág. 210. O método das dezenas pode não ser tão eficiente quanto a técnica da reserva. Por outro lado, êsse método freqüentemente possibilita ao aluno ter sucesso, quando o uso de um método mais maduro é ineficiente.

e. SUBTRAÇÃO COMPOSTA

Métodos de Subtração

A subtração composta é usada quando se torna necessário reagrupar o número maior para fazer a subtração, como no exemplo ao lado. Há três métodos bem conhecidos e usados nesta forma de subtração. São êles:

$$\begin{array}{r}62\\-17\\\hline\end{array}$$

1) *Método da decomposição*
2) *Método das adições iguais*
3) *Método aditivo.*

Os métodos das adições iguais e da decomposição são os dois métodos de subtração mais largamente usados nos Estados Unidos. O método aditivo e o método das adições iguais usam diferentes padrões de pensamento, mas os fatos básicos usados em um exemplo de subtração são os mesmos para êstes dois métodos.

Para subtrair no exemplo ao lado pelo método da decomposição, o padrão de pensamento é o seguinte: "13 menos 6 = 7; 11 menos 5 = 6; 6 menos 1 = 5." Os dígitos nos lugares das dezenas e das centenas no número 723 foram agrupados.

$$\begin{array}{r} 723 \\ -\ 156 \\ \hline \end{array}$$

Usando o mesmo exemplo para subtrair pelo método das adições iguais, o pensamento-padrão é o seguinte: "6 para 13 = 7; 6 para 12 = 6; 2 para 7 = 5." Os dígitos das dezenas e das centenas de 156 foram aumentados de 1. O dígito no lugar das unidades em 723 foi aumentado de 10.

Usando o método aditivo, o pensamento-padrão é como segue: "6 e 7 são 13, escreva o 7 e leve o 1 para ser adicionado ao 5; 6 e 6 são 12, escreva o 6 e leve o 1 para ser adicionado ao 1; 2 e 5 são 7, escreva o 5." Como se vê no exemplo dado, o método aditivo usa as mesmas combinações básicas de subtração que o método das adições iguais, mas a fraseologia de cada método é diferente. No exemplo dado, os fatos básicos usados por ambos os métodos são 13 − 6, 11 − 5, e 6 − 1. Há variedades de métodos que combinam o princípio aditivo com reagrupamento do minuendo.

O método aditivo, conhecido algumas vêzes como método austríaco de subtração, foi usado muito mais amplamente durante as décadas de 20 e 30 do que no presente. Os proponentes dêsse método supunham que a mesma *conexão* é usada na aprendizagem de ambos os fatos, adição e subtração. Assim, se um aluno estabelecia a conexão que 4 e 8 são 12, supunha que êle soubesse a resposta para os dois agrupamentos $\begin{array}{r} 4 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array}$ e $\begin{array}{r} 12 \\ -\ 4 \\ \hline \end{array}$ Os defensores dêste método supunham que havia uma transferência fácil da anotação de adição para a anotação de subtração. Concluía-se que haveria economia de tempo no ensino dos dois processos como um processo unificado ao invés de processos separados.

Pouca ou nenhuma ênfase foi dada ao significado do processo subtrativo, quando ensinado pelo método aditivo. A ênfase maior era dada ao *processo* e não à compreensão. Por conseguinte, o método aditivo de subtração não deve ser usado em um programa que dá ênfase ao desenvolvimento dos significados e

compreensões. Não daremos consideração ulterior a êste método de subtração.

Bases Matemáticas dos Dois Métodos

O professor escolherá o método da decomposição ou o método das adições iguais para apresentar a subtração composta. Cada método ilustra um ou mais princípios matemáticos que o aluno deve compreender se esta fase da subtração deve ser significativa para êle. Para subtrair, no exemplo ao lado, pelo método da decomposição, 54 deve ser reagrupado como 4 dezenas e 14 unidades. O aluno deve estar familiarizado com os reagrupamentos numéricos, portanto, deve ser capaz de compreender o processo da subtração no exemplo.

$$\begin{array}{r} 54 \\ -\ 28 \\ \hline \end{array}$$

O nome *método das adições iguais* vem do processo usado nesta forma de subtração. Para subtrair por êste método, no exemplo acima, é necessário adicionar 10 unidades às 4 unidades. Então, será possível subtrair 8 unidades de 14 unidades. Desde que 10 unidades são adicionadas a 54, uma quantia igual deve ser adicionada a 28, para evitar mudança de valor na diferença entre os dois números no exemplo dado. Adicionar 1 dezena é o mesmo que adicionar 10 unidades, portanto, adicione 1 dezena às 2 dezenas de 28. Os dois princípios matemáticos envolvidos na operação são:

1) Adicionando-se o mesmo número a ambos os números de uma subtração, não muda o valor da diferença entre os números.

2) Adicionando-se 10 ao dígito das unidades, no minuendo, é o mesmo que adicionar-se 1 ao dígito das dezenas, no subtraendo.

Dos princípios matemáticos acima que caracterizam o processo de subtração pelos dois métodos, é aparente que o aluno ache mais fácil compreender o método da decomposição que o das adições iguais. É fácil objetivar com marcadores o processo seguido no método da decomposição. É muito mais difícil usar materiais objetivos para levar o aluno a descobrir o processo usado no método das adições iguais. A diferença na facilidade com que o aluno pode compreender o processo do método da decomposição comparado com o método das adições iguais é a principal razão para o ensino da subtração de números compostos pelo método da decomposição.

Pesquisa Sôbre Subtracão de Números Compostos

Provàvelmente mais pesquisas de estudo têm sido feitas sôbre o valor relativo do método da decomposição e do método das adições iguais em subtração do que qualquer outro tópico em Aritmética. O primeiro dêstes estudos foi relatado no princípio dêste século e o estudo mais recente foi relatado em 1955. Uma observação da primitiva investigação é dada por Ruch e Mead[9] e por Johnson.[10]

Depois de fazer uma análise das diferentes investigações sôbre a subtração, Ruch e Mead concluíram que as diferenças de resultados entre os diversos métodos de subtração devem ser pequenas. Em tôdas as primitivas investigações sôbre os métodos da subtração, rapidez e exatidão eram os únicos fatôres medidos. O fator vital da compreensão não recebia consideração alguma nos experimentos até que o trabalho de Brownell e Moser[11] fôsse publicado. Êles ensinaram subtração de números compostos a quatro grupos semelhantes de alunos. A dois grupos foi ensinado subtrair pelo método da decomposição, e aos outros dois grupos foi ensinado pelo método das adições iguais. Para cada método havia um grupo que recebia o ensino da subtração de maneira mecânica, e outro que recebia o ensino de maneira que compreendesse o processo. Podemos dizer que um grupo aprendia o *porquê*, e o outro grupo aprendia o *como* da subtração. Portanto, um grupo aprendia o método da decomposição com significação, e o outro grupo o aprendia mecânicamente. O mesmo processo foi aplicado aos dois grupos que aprendiam a subtrair pelo método das adições iguais.

Os resultados do experimento feito por Brownell e Moser provaram que o método das adições iguais produzia melhores resultados se o aluno aprendia a subtrair mecânicamente. Por outro lado, o método da decomposição produzia os melhores resultados se o aluno aprendia a subtrair significativamente. Os resultados podem ser interpretados como segue: *Se o aluno deve compreender o trabalho da subtração de números compostos, ensine-lhe o método da decomposição; se o aluno vai aprender mecânicamente, ensine-lhe o método das adições iguais.*

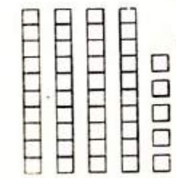
O desenvolvimento à pág. 90 mostra a seqüência dos passos que o professor deve seguir para introduzir a subtração de números compostos, de maneira que o aluno possa compreender o trabalho. A enumeração dos passos é a seguinte:

1) Levar cada aluno a achar a resposta para o problema usando suas tiras retangulares e os quadrados.

[9] RUCH (G. M.) e MEAD (C. D.), "A Review of Experiments on Subtraction", *The Twenty-Ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, pags. 671-78. Bloomington, Ill.: Public School Publishing Co., 1930.

[10] JOHNSON (John T.), *Relative Merits of Three Methods of Subtraction*. Nova Iorque: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1938.

[11] BROWNELL (W. A.) e MOSER (H. E.), *Meaningful vs. Mechanical Learning: Study in Grade III Subtraction*. Durham, N. C.: Duke University Press, 1949.



2) Levar o aluno a dar uma demonstração do processo com marcadores no cartaz Valor do Lugar.

3) Fazer a representação visual do processo no quadro-negro. Levar a classe a dizer o número representado por cada número no diagrama.

4) Levar o aluno a ler o desenvolvimento apresentado no livro-texto. Fazer perguntas aos alunos para ficar certo de que êles compreendem o significado de cada passo no desenvolvimento da operação.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\ {\scriptstyle 13} \\ \cancel{4}\ \cancel{5} \\ -\ 2\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

5) Fazer a representação simbólica no quadro-negro.

6) Levar o aluno a dizer os passos do processo em seu modêlo.

7) Levar o aluno a demonstrar com exemplos práticos que compreende o processo da subtração.

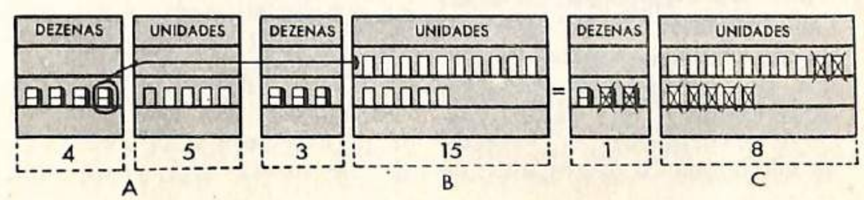
Depois que o aluno demonstrar que é capaz de subtrair, será encorajado a mostrar que a resposta está correta. Êle aprendeu que a adição e a subtração são processos inversos. Agora pode descobrir como verificar que a resposta de um exemplo de subtração está correta. A soma do resto com o subtraendo é igual ao minuendo. No exemplo $18 + 27 = 45$, portanto, a resposta está correta.

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 27 \\ \hline 18 \end{array}$$

Usando Auxílios Simbólicos Suplementares

Alguns professôres não aprovam a representação simbólica, como mostra o exemplo ao lado. Não permitem que seus alunos reagrupem os números na forma simbólica escrita. Neste caso, o aluno tem de executar uma operação mental com um número que não vê a fim de fazer a subtração. É, naturalmente, mais fácil para o aluno compreender o processo de reagrupamento quando o trabalho é todo escri-

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\ {\scriptstyle 13} \\ \cancel{4}\ \cancel{5} \\ -\ 2\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$



to, como foi mostrado acima, do que quando o exemplo é escrito na forma mostrada ao lado. O aluno que compreende o processo e efetua a subtração, neste exemplo opera num nível de abstração mais alto do que o aluno que subtrai no exemplo com o número 45 escrito sob a forma reagrupada de 3 dezenas e 15 unidades. Desde que a aprendizagem é um processo de crescimento, parece razoável sugerir que o aluno comece o processo em um nível imaturo, onde é certo compreender o trabalho e progredir para um nível de abstração mais alto e mais maduro.

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

O exemplo dado acima pode ser reescrito assim:

45 = 3 dezenas e 15 unidades
− 27 = 2 dezenas e 7 unidades

ou escrever como

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\ \ {\scriptstyle 15} \\ \cancel{4}\ \ \cancel{5} \\ -\ 2\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

O professor pode mostrar uma das formas ou ambas para reagrupar 45. Há alguns alunos na classe que descobrirão e compreenderão o processo de rèagrupamento se uma ou duas ilustrações forem apresentadas. Êstes alunos são capazes de operar em um nível mais alto de abstração do que os outros alunos. Os alunos que podem dizer que processo seguir e que podem executar mentalmente o processo usando o número reagrupado que não vêem, serão encorajados a subtrair o exemplo sem escrever o número a ser reagrupado. Por outro lado, ao aluno que tem dificuldade de compreender o processo de reagrupamento ou de trabalhar com os números que não vê, será permitido escrever o número reagrupado como foi mostrado acima. Isto constitui realidade se o aluno se sente inseguro quando opera em um nível maduro de abstração.

Os Autores observaram uma aula na terceira série sôbre a subtração de números compostos. Os alunos usavam tiras retangulares e reescreviam o número subtraído como já foi mostrado. Depois de algumas ilustrações, um aluno disse: "Terei de usar meus quadrados e cancelar os números? Eu posso subtrair sem estas coisas." Êsse aluno descobriu o princípio de reagrupamento e não necessitava de auxílios suplementares.

A escrita do número reagrupado em um exemplo de subtração é algumas vêzes conhecida como *muleta*. Muitos professôres desaprovam o uso da muleta na computação. Suponhamos que um aluno não seja bem sucedido na subtração quando o número a ser reagrupado não é reescrito. O processo não constitui, então, uma muleta. Naquele caso, o trabalho escrito é um *auxílio essencial de aprendizagem* para aquêle aluno. Por outro lado, o aluno que, com sentimento de confiança e segurança, pode ter sucesso sem o uso dêste

auxílio de aprendizagem mas persiste em escrever todo o trabalho, usa uma muleta. O uso da muleta leva êsse aluno a operar em um nível mais baixo de abstração do que o nível que lhe seria possível trabalhar. Neste caso seria difícil para êle revelar crescimento em se tratando com números. Logo, o que pode constituir *muleta* para um aluno poderá servir como auxílio de aprendizagem para outro aluno. Contudo, o aluno será encorajado a tentar operar sem o uso dêste auxílio. Será encorajado a se mostrar orgulhoso pelo fato de ser capaz de subtrair como a maioria dos adultos.

Reagrupando Números de Três Algarismos Para Subtrair

O nôvo elemento em um exemplo usando números de tres algarismos é a compreensão de reagrupar as centenas em cada número. Se o reagrupamento é necessário na subtração de números de três algarismos, há possibilidade de três diferentes exemplos estruturados como os exemplos abaixo.

A	B	C
346	346	346
− 128	− 164	− 158

No exemplo A, é necessário reagrupar dezenas para subtração das unidades; no exemplo B, reagrupar centenas para subtração das dezenas; em C, reagrupar centenas e dezenas para subtração das unidades e dezenas.

O aluno que se revelar incapaz de descobrir o padrão a ser usado em A, com seus conhecimentos de subtrair números de dois algarismos, será encorajado a usar seus quadrados e tiras retangulares. O diagrama da pág. 217 mostra a representação visual da subtração com números compostos. Para a subtração das unidades seria necessário reagrupar 346 como 3 centenas, 3 dezenas e 16 unidades. O professor deve levar o aluno a descobrir como trabalhar com o processo de reagrupamento de maneira que sòmente o uso limitado de material seja necessário na subtração de números de três algarismos. Durante a aprendizagem inicial da operação permitir-se-á ao aluno escrever o número reagrupado, como mostra o exemplo ao lado.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3}\ \ {\scriptstyle 16} \\ 3\ \ \cancel{4}\ \ \cancel{6} \\ -\ 1\ \ 2\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

O mesmo plano de lidar com o material para números de dois algarismos aplica-se também aos números de três ou mais algarismos. O uso do cartaz Valor do Lugar ou sua representação visual é eficiente para mostrar a transformação necessária.

Zeros na Subtração

Muitos dos primeiros estudos sôbre dificuldades na subtração mostravam que os zeros no número a ser subtraído eram a fonte de um grande número de erros. Êstes estudos foram feitos quando pouca ênfase era dada à compreensão do trabalho. Muitas das dificuldades encontradas em subtração resultavam da falta de compreensão da função do zero. O aluno deve compreender que o zero é um número, como em 702, que conserva o lugar das dezenas e representa o número de dezenas naquele lugar. Êste conhecimento será suplementado pelo processo a seguir de reagrupar um número em que o zero ocupa um ou mais lugares.

É razoável concluir que o processo de reagrupamento é mais difícil de o aluno compreender no exemplo A do que no exemplo B.

A	B
702	732
− 156	− 156

Em B, 1 dezena pode ser tirada de 3 dezenas e transformada em 10 unidades, fazendo um total de 12 unidades. O último processo requer nível mais alto de compreensão de reagrupamento do que é necessário para compreender o reagrupamento em A. Por conseguinte, um aluno pode experimentar dificuldade de lidar com zeros em subtração ainda que compreenda a função do zero em um número.

Há três estágios de crescimento no processo de o aluno lidar com exemplo do tipo mostrado adiante. Êsses estágios de operação são os seguintes:

$$\begin{array}{r} 702 \\ -135 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} \overset{6}{\cancel{7}} & \overset{10}{\cancel{0}} & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} \overset{6}{\cancel{7}} & \overset{\overset{9}{\cancel{10}}}{\cancel{0}} & \overset{12}{\cancel{2}} \\ -1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

1) O dígito no lugar das centenas é reagrupado primeiro, logo o número de dezenas é reagrupado e, finalmente, o número de unidades também. As 7 centenas são transformadas em 6 centenas e 10 unidades. No final o número reagrupado é 6 centenas, 9 dezenas e 12 unidades.

2) Ao número 702 é dado um valor agrupado de 70 dezenas e 2 unidades. Êste número é então reagrupado como 69 dezenas e 12 unidades, ou 6 centenas, 9 dezenas e 12 unidades.

3) Aos dígitos de 702 é dado um valor sem considerar o processo de reagrupamento. Para subtrair o exemplo dado, o aluno pensa em 2 como 12, em 0 como 9, e em 7 como 6.

É claro que os alunos que subtraem usando os três padrões de raciocínio dados acima operam em diferentes níveis de compreensão. O aluno que segue o processo de reagrupamento descrito em primeiro plano usará seu material para objetivar o processo.

De acôrdo com o segundo plano, o aluno deve compreender como os dígitos em um número podem ter ambos os valôres: agrupado e não-agrupado. Se êle sabe que há 70 dezenas em 702, é fácil compreender por que pode ser reagrupado com 6 centenas, 9 dezenas e 12 unidades.

De acôrdo com o terceiro plano, o aluno descobriu um padrão maduro de raciocínio como é aplicado na subtração de números compostos. Êle descobriu que quando um dos nove dígitos significativos do número a ser subtraído é menor do que o dígito correspondente do número abaixo, ao dígito do número a ser subtraído é dado o seu valor absoluto mais 10.

Assim, a fim de subtrair o primeiro quatro no lugar das unidades, no exemplo ao lado, é-lhe atribuído o valor de 14; ao segundo quatro no lugar das dezenas é dado o valor de 13. Se um dos dígitos do número a ser subtraído fôr 0 e o dígito correspondente do número abaixo fôr 1 ou mais que 1, o valor atribuído a zero será 10 ou 9. Assim, para subtrair, no exemplo ao lado, ao zero no lugar das unidades é atribuído o valor 10; ao zero no lugar das dezenas é atribuído o valor 9. O aluno que descobriu êste processo de efetuar a subtração desenvolveu muito maior raciocínio dentro da estrutura do processo que é necessário para a subtração nos outros dois níveis de operação. O terceiro nível representa um meio maduro de lidar com os dígitos na subtração composta. Logo, os zeros não oferecem maior fonte de dificuldades na subtração do que qualquer outro dígito.

$$\begin{array}{r} 744 \\ -\ 158 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 700 \\ -\ 156 \\ \hline \end{array}$$

É essencial que o professor compreenda que o aluno começa com o uso de materiais objetivos, e passa para níveis mais altos de abstração, antes de ser capaz de operar com zero na subtração composta, no nível maduro descrito acima.

Prova da Adição e da Subtração

A prova mais largamente usada em adição é adicionar as colunas na direção oposta à direção usada para achar a soma. O aluno pode adicionar as colunas de baixo para cima e verificar a soma adicionando de cima para baixo. Isto foi discutido na pág. 205.

A prova mais largamente usada em subtração é adicionar o resto ao subtraendo. Se não houver erros na subtração nem na adição, a soma dêstes dois números é igual ao número maior (minuendo).

Esta prova é valiosa, porque demonstra que a adição e a subtração são processos opostos. A adição anula ou desfaz o trabalho da subtração.

O aluno deve compreender o trabalho de prova a fim de ter uma prova válida. Na aprendizagem de rotina a aplicação da prova é descuidada, negligenciada. Sob tais condições, verificar a subtração pela adição não resultará nenhuma exatidão maior da que já foi atingida sem provar uma solução.[12]

[12] GROSSNICKLE (Foster E.), "To Check on Not to Check", *Elementary School Journal*, 38:436-441.

O uso de um quadro Valor do Lugar mostra o que acontece na reserva, em um problema de adição.

É difícil avaliar o valor da prova em um programa que dá ênfase ao desenvolvimento da significação e compreensão do trabalho. Nenhuma experiência relatada foi alguma vez feita em um programa total. À luz dos desfavoráveis resultados obtidos do valor de tirar a prova em um programa de exercício, as seguintes conclusões podem ser tiradas:

1) O aluno deve compreender o valor e a importância da prova, em um processo como a subtração.

2) É necessário ensinar a tirar a prova tão cuidadosamente quanto o é ensinar o processo.

3) A todos os alunos deve-se ensinar uma prova básica, mas os alunos que demonstram perspicácia dentro do número podem ser encorajados a descobrir muitas outras provas que podem ser aplicadas em um exemplo dado. O professor deve estar certo de

que o processo usado dará uma prova válida. Suponhamos que vamos usar diferentes modos para verificar o exemplo ao lado. A prova-padrão é adicionar 546 e 158. A soma é 704. Uma outra prova é subtrair 546 de 704. A resposta é 158. Outra prova é subtrair 100 de 704. O resto é 604. Êste exemplo se torna igual ao acima apresentado. Agora, o aluno subtrai. Êle pode perceber que 704 é quase 700. Pode subtrair 158 de 700 e depois adicionar 4 ao resto. O aluno pode descobrir muitas maneiras diferentes de verificar o seu trabalho. Quando êle descobre um padrão para verificar o seu trabalho, está enriquecendo sua compreensão numérica. O processo de verificação não é mais um processo estereotipado. A verificação sob tais condições representa um excelente meio de estimular o aluno superior como meio de enriquecer suas experiências numéricas.

$$\begin{array}{r} 704 \\ -\ 158 \\ \hline 546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 604 \\ -\ 58 \\ \hline 546 \end{array}$$

4) Constitui ineficiente gasto de tempo pedir que todos os exemplos sejam verificados. O professor e a classe podem entrar num acôrdo em que pelo menos uma vez por semana todos os exemplos sejam verificados. Se a verificação é uma parte do programa diário, sòmente certos exemplos devem ser verificados, assim como alternados de três em três exemplos

Se a verificação é ensinada eficientemente para que seja um processo de raciocínio, deve haver tempo para o aluno fazer a operação exigida pela prova. Então, o número de exemplos que um aluno pode resolver em um dado período de tempo será aproximadamente metade do que resolvia quando não usava a verificação. Se o professor exige que o aluno resolva e verifique o trabalho usando o mesmo período de tempo que normalmente usava para resolver as questões sem verificá-las, o trabalho de verificação será superficial.

f. DESCOBERTA DE RELAÇÕES ENTRE A ADIÇÃO E A SUBTRAÇÃO

Enriquecimento do Programa de Aritmética

Desde que a adição e a subtração são processos opostos, é possível dar quatro exemplos para cada grupo de dois números diferentes e sua soma.

10	15	25

Usando os números mostrados, os exemplos são o sseguintes:

$$10 + 15 = 25$$
$$15 + 10 = 25$$
$$25 - 10 = 15$$
$$25 - 15 = 10$$

O aluno será capaz de deduzir os quatro exemplos de qualquer grupo de números dados. Êste plano é especialmente eficiente para os fatos básicos de adição e subtração. Pelos exemplos dados, o aluno será capaz de identificar um princípio básico que se aplica à adição e à subtração. Êstes princípios são:

1) *A ordem em que os números são adicionados não afeta a soma.* O aluno teve ilustrações dêste princípio quando aprendeu os fatos básicos. Êle aprendeu também a verificar um exemplo de adição somando as colunas na direção oposta à que achou a soma.

2) *Se um dos dois números é subtraído da soma, o resto é o outro número.* Êste princípio é ilustrado pelo uso dos números na caixa.

Um outro princípio matemático pode ser formulado, e que se relaciona à adição e à subtração, com o seguinte enunciado:

3) *Sòmente quantidades e valôres homogêneos podem ser adicionados ou subtraídos.* O aluno primeiro aprendeu o significado dêste princípio quando combinou objetos. Êle não pode combinar discos e bolas de gude e ter um grupo consistindo sòmente de discos ou de bolas de gude. Em um nível mais alto de compreensão descobriu que podia combinar sòmente dígitos nas suas devidas ordens. Êle aprendeu a adicionar ou subtrair os dígitos nos lugares das unidades, nos lugares das dezenas, ou em outros lugares correspondentes.

Os três princípios matemáticos dados acima são os únicos princípios básicos que se aplicam ao processo de adição e subtração. Quando o aluno lida com números sinalizados como em álgebra, um outro princípio deve ser aprendido em subtração. Para todo o trabalho de Aritmética na escola elementar, os princípios dados são suficientes para a compreensão matemática do trabalho nestes processos.

Organizando Exemplos

Os exemplos na fila (a) abaixo mostram como as somas podem variar em adição. O professor levará a classe a organizar os exemplos de acôrdo com o valor da soma, começando com a soma de menor valor. O aluno tentará organizar os exemplos por observação e depois solucionará os exemplos para verificar sua organização. O aluno que é incapaz de descobrir por inspeção como o tamanho dos números adicionados afeta a soma, poderá adicionar e então organizar os exemplos.

(a)	50	50	50	50	50
	+ 17	+ 21	+ 68	+ 42	+ 39

Depois que os alunos organizam os exemplos e verificam as organizações, o professor pode levar os alunos superiores a fazer uma generalização sôbre as somas como foram ilustradas pelos exemplos. A concisão das afirmações é indicativa do grau

de perspicácia que o aluno tem do princípio envolvido. O aluno que pode dar a seguinte exposição ou generalização mostra que compreende o princípio envolvido:

Se números diferentes são adicionados a um mesmo número, as somas serão desiguais. Quanto maior o número adicionado, maior será a soma.

Em um nível muito mais maduro de pensamento, a generalização acima pode ser expressa assim: Se números diferentes são adicionados a números iguais, as somas são diferentes na mesma ordem.

Os exemplos na fila (b) mostram como o resto pode variar na subtração. O professor levará o aluno a organizar os exemplos em ordem de tamanho do resto por observação ou por resolução dos exemplos, e depois ordenação.

(b)	75	75	75	75	75
	− 40	− 18	− 56	− 31	− 64

Um meio eficiente de enriquecimento para o aluno superior é levá-lo a fazer uma exposição verbal sôbre o tamanho do resto como os exemplos ilustram. Uma exposição satisfatória seria como segue: Se números diferentes são subtraídos dos mesmos números, os restos serão diferentes na ordem reversa.

Os exemplos na fila (b) podem ser arranjados de forma diferente, como é mostrado em (c). O aluno será capaz de achar os números faltosos por compreensão, pelas relações entre a adição e a subtração ou pelos dois princípios numéricos dados na pág. 224. O mesmo plano descrito para tratar com os exemplos das fileiras (a) e (b) será seguido para tratar com os exemplos na fila (c).

(c)	75	75	75	75	75
	?	?	?	?	?
	40	18	56	31	64

O professor incentivará o aluno superior a dizer os números faltosos e compará-los pelo tamanho. Uma exposição satisfatória seria: numa subtração de números diferentes de um mesmo número, os restos achados são também diferentes. Quanto menor fôr o número subtraído, maior será o resto. O tópico sôbre desigualdade é muito importante na moderna Matemática. O professor deve compreender que sòmente o aluno muito superior será capaz de fazer uma exposição concisa ao descrever as relações matemáticas representadas pelas três ordens de exemplos dados acima. Exercícios desta espécie constituirão um estímulo para o enriquecimento do programa de Matemática para o aluno superior.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Discuta a conveniência de ensinar os fatos fundamentais de adição e subtração simultâneamente, e ensiná-los separadamente.
2. Relacione alguns tipos de atividades que devam ser usados para fixar fatos fundamentais de adição ou subtração.
3. Agrupe os fatos fundamentais de subtração, para que uma generalização diferente se aplique a cada classificação.
4. Que significa uma situação de subtração? Exemplifique diferentes tipos dessas situações.
5. Um aluno, na primeira série, aprende a usar em subtração a fraseologia "A é tirado de B", mas na série seguinte aprende a expressar a mesma situação como "B menos A". Como se justifica uma mudança desta espécie na fraseologia?
6. Que significam *somas elevadas*? Quando são usadas? Descreva o tipo de atividade que usaria para tornar o aluno capaz de ser bem sucedido nesta forma de adição.
7. Êste texto encoraja o aluno a descobrir um ou mais meios para encontrar a resposta para uma situação nova, como calcular a soma de números de dois algarismos com reserva antes de ter aprendido o processo. Por quê? Deve o aluno aprender os modos para descobrir as diferentes soluções antes ou depois de aprender o processo que se aplic a a uma determinada situação?
8. Use três métodos diferentes para subtrair, no exemplo ao lado. Identifique pelo nome cada método usado.

$$\begin{array}{r} 7\,013 \\ -\ 4\,556 \\ \hline \end{array}$$

9. Faça uma lista de algumas das vantagens e desvantagens dos métodos de decomposição e de adições iguais na subtração.
10. Você deve recomendar aos professôres de sua escola o método de subtração que deve ser usado. Qual método recomenda? Por quê?
11. Suponha que alguns professôres em sua escola fazem objeções à notação mostrada ao lado. Justifique sua opinião sôbre êste assunto.

$$\begin{array}{rr} 5 & 13 \\ \cancel{6} & \cancel{3} \\ -2 & 8 \\ \hline \end{array}$$

12. Faça uma representação visual do processo, para que o aluno possa compreender os passos dados, na subtração do exemplo ao lado.

$$\begin{array}{r} 304 \\ -\ 156 \\ \hline \end{array}$$

13. Dê dois exemplos de cada um dos princípios básicos

da Matemática aplicados à adição e subtração.

14. Que método ou métodos para tirar a prova da adição e da subtração recomendaria? Dê, no mínimo, três maneiras para verificar a soma de exemplos contendo quatro ou mais números de dois algarismos.
15. Faça uma lista de sugestões para ampliar o estudo dos alunos mais adiantados no trabalho relacionado com adição e subtração.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. pp. 128-154.

Brownell, W. A. and Moser, H. E. *Meaningful vs. Mechanical Learning.* Durham, N. C.: Duke University Press, 1949.

Clark, John R. and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learning.* Yonkers: World Book Co., 1954. pp. 59-88.

McSwain, E. T. and Cooke, Ralph J. *Understanding and Teaching Arithmetic.* New York: Henry Holt and Co., 1958. pp. 35-73.

Morton, Robert L. *Teaching Children Arithmetic.* Morristown, N. J.: Silver Burdett Co., 1953. Chapter 4.

Spitzer, Herbert F. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. Chapter 4.

Swain, Robert L. *Understanding Arithmetic.* New York: Rinehart & Co., Inc., 1957. pp. 67-79.

8

Multiplicação de Números Inteiros

A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO são processos inversos da mesma maneira que adição e subtração o são. Na multiplicação, combinamos dois ou mais grupos iguais para acharmos o total sem contagem; na divisão, separamos um grupo total em dois ou mais grupos iguais sem contagem. Assim, para o agrupamento $3 \times \times 4$, um grupo de 12 é formado de três grupos de 4. No agrupamento $12 \div 3$, quatro grupos de 3 são formados de um grupo de 12. O total dos três grupos de 4 pode ser encontrado tanto pela adição como pela multiplicação. Assim como a multiplicação é um substituto para a adição de grupos iguais, a divisão pode ser um substituto para a subtração de grupos iguais. O diagrama da pág. 196 mostra a relação entre êstes processos inversos de adição e subtração. Porque a multiplicação e a divisão são, basicamente, formas de adição e subtração respectivamente, é possível apresentar tôdas as operações fundamentais dêstes processos nas máquinas de calcular.

116

No teclado dessas máquinas há uma tecla que indica + e outra que indica −. Uma terceira tecla é usada para indicar a operação repetida. Por isto é possível realizar, em tais máquinas, operações repetidas de adição e subtração apertando de cada vez a tecla com o sinal "mais" ou "menos", respectivamente. Para multiplicar 36×7, primeiro indicamos 36 no teclado dos números. Depois pressionamos a tecla com a letra R, e a seguir a tecla com sinal *mais* sete vêzes. A máquina apresentará o produto 252. Da mesma maneira é possível dividir, usando a tecla com sinal *menos*. Para dividir 28 por 7, subtrair 7 de 28 apertando 4, por pressão da tecla com sinal *menos*, até que o resto zero é indicado. O número de subtrações 4 registrado na máquina é igual ao quociente de 28 dividido por 7.

Nos processos descritos para multiplicar e dividir usando a máquina de calcular nós encontramos duas relações que caracterizam a multiplicação e a divisão. Primeira, elas são processos opostos e por isso se anulam. Segunda, a multiplicação é uma forma abreviada de adição para achar o total de dois ou mais grupos iguais; a divisão é uma forma curta de subtração ou um processo de separação quando faz, de um grupo maior, dois ou mais grupos iguais. Em se tratando de dois grupos, êstes processos não são mais curtos que a adição e subtração, respectivamente. O Capítulo 9 discute, detalhadamente, a divisão.

Êste Capítulo trata dos seguintes tópicos:

a. Número de fatos fundamentais de multiplicação

b. Ensino dos fatos de multiplicação

c. Formação de tabelas

d. Multiplicação por número simples

e. Multiplicação por número de dois ou mais algarismos.

a'. NÚMERO DE FATOS FUNDAMENTAIS DE MULTIPLICAÇÃO

Função do Zero no Multiplicador

Incluindo os agrupamentos com zero, há 100 fatos fundamentais tanto na adição como na subtração, mas sòmente 90 fatos fundamentais na multiplicação e na divisão. Num programa onde se dá ênfase à significação e à compreensão, o número de fatos fundamentais, em um processo, é pouco importante. Por outro lado, o ensino das funções do zero é importante. O Capítulo 2 nos mostrou algumas das diferentes funções do zero. A diferença entre o número de fatos fundamentais de adição e subtração e dos de multiplicação e divisão resulta dos agrupamentos que envolvem zero. É possível ter o agrupamento 4×0 representando uma situação social, mas o agrupamento reverso, 0×4, nunca pode representar uma experiência significativa. Um jogador de futebol pode chutar quatro vêzes a bola no *goal* e não fazer *goal* algum. Seu *score* para os quatro chutes seria, então, zero. A representação simbólica da experiência pode ser assim expressa: $4 \times 0 = 0$. Por outro lado, não é possível registrar uma experiência correspondente ao agrupamento reverso, ou seja 0×4.

O zero no multiplicador, como em 20, 204 ou 20 301, deve ser considerado apenas como um guardador de lugar. Nunca é necessário multiplicar por zero. Não é possível usar zero como um divisor, por isso também não é possível usá-lo como multiplicador É possível dividir no exemplo $0 \,\underline{|4}$. O quociente será zero. O produto do divisor pelo quociente será igual ao dividendo, ou zero. Não é possível divisão no exemplo $4 \,\underline{|0}$, porque o produto do divisor pelo quociente nunca poderá ser igual a 4 Por isso não deve haver agrupamentos numéricos nos quais seja necessário multiplicar ou dividir por zero. Há 9 agrupamentos possíveis de zero com os algarismos simples: 1×0, 2×0, . . ., 9×0. nos quais é necessário multiplicar zero por um número. Nos 90 fatos fundamentais da multiplicação e divisão há 81 fatos significativos e 9 fatos com zero.

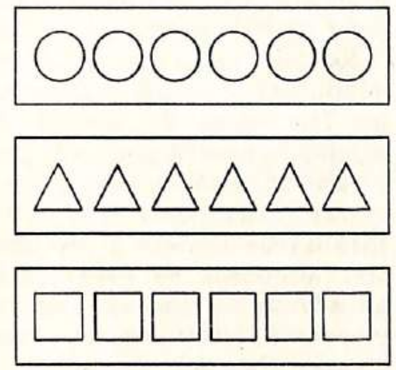
b. ENSINO DOS FATOS DE MULTIPLICAÇÃO

Distribuição dos Fatos de Multiplicação Pelas Diferentes Séries

É prática corrente ensinar alguns dos fatos fundamentais de multiplicação na terceira série e os restantes na quarta série. Um estudo dos livros-texto de Aritmética e de programas nos mostra, contudo, que há uma grande variedade na distribuição dos fatos fundamentais de multiplicação pelas diferentes séries. Em alguns casos o trabalho de multiplicação na terceira série envolve apenas os fatos com 2 e 3, os com 2 e 5, os com 2, 3 e 5, ou os com 2, 3, 4 e 5. Algumas vêzes os fatos são agrupados de acôrdo com os produtos. Os fatos com um determinado produto são ensinados na terceira série. Em cada caso os fatos restantes não são introduzidos na terceira série, mas sim na quarta série.

Não é possível determinar uma série para o ensino de um tópico ou de um processo por causa das diferenças individuais das crianças, quer no que diz respeito à prontidão, quer no que diz respeito à base de experiências. A introdução de um certo tópico em uma determinada série é satisfatória quando o tópico pode ser apresentado à maioria da classe, de modo que a aprendizagem se realize sob ótimas condições de higiene mental na sala de aula. Isto significa: (1) que as crianças devem ter o tempo necessário para descobrirem os fatos ou princípios referentes ao tópico ou processo dado; (2) que uma ampla provisão deve ser feita para o desenvolvimento de habilidades no processo, e (3) que oportunidades adequadas devem surgir para desafiar o raciocínio da criança sôbre o tópico, tornando maior a sua ha-

bilidade em tratar com o mesmo. À luz da prática corrente é aconselhável ensinar alguns dos fatos de multiplicação na terceira série e os restantes nas séries seguintes. Um programa mínimo para a terceira série deve incluir fatos com 2 e 3. Os fatos com 4 e 5 serão incluídos opcionalmente.



Materiais Para o Ensino dos Fatos Fundamentais

Cada criança deve ter tiras de papel, preferìvelmente de papel-manilha, mostrando desenhos geométricos. Deve haver pelo menos três diferentes tipos de desenhos geométricos no material usado na classe. Algumas crianças podem ter tiras mostrando círculos; outras, tiras mostrando quadrados, e outras ainda podem ter tiras em que apareçam triângulos. O diagrama acima mostra tiras com os três tipos de desenho.

Os desenhos podem ser dispostos numa fôlha grande de papel ou cortados em nove tiras separadas para corresponder aos fatos a serem apresentados. As tiras mostradas acima podem ser usadas para introduzir os fatos de 3. Tiras com grupos de 3 podem ser formadas cortando-se o papel entre duas filas consecutivas de modo a ficar três desenhos do mesmo tipo em cada tira.

Suponhamos que o professor planeja introduzir os fatos de 3 de multiplicação. Cada criança deverá deixar a sua carteira ou mesinha livre para colocar sôbre a mesma sòmente a coleção do material a ser usado. Êste material consistiria das tiras de 3. O livro-texto usado poderia mostrar filas de três objetos. A criança agruparia objetos familiares, como discos, para representar um fato; depois demonstraria o fato com a tira de desenhos geométricos e, finalmente, descreveria os grupos em uma gravura.

Aprendizagens Necessárias nos Fatos de Multiplicação

A introdução dos fatos de multiplicação apresenta três aprendizagens novas para a criança:

1) A notação ou registro do fato

2) A significação do processo

3) A linguagem da multiplicação.

O professor não se deve preocupar em levar a criança a entender que a maneira de escrever o fato como notação é convencional. Por outro lado, é de importância que a criança entenda a significação do processo e a linguagem usada para transmitir uma situação de multiplicação. Quanto menos as crianças compreendem a linguagem da multiplicação e da divisão, tanto mais cresce a dificuldade de aprendizagem significativa dêsses processos.

Descobrindo os Fatos de Multiplicação

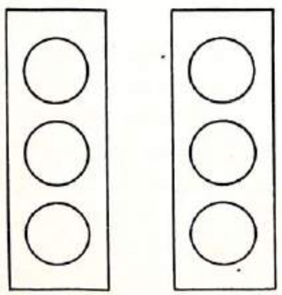
Vamos discutir um plano a ser seguido na introdução dos fatos de multiplicação com o número 3. Êste plano é aplicável também à introdução de outros fatos de multiplicação. O professor apresenta um problema como o seguinte: Achar o custo de duas balas a Cr$ 3 cada uma. A criança diz como achar tal custo. Depois, o professor usa duas tiras com desenhos de três figuras geométricas, do mesmo padrão, para provar que dois grupos de 3 são 6. (Não começar com um grupo de 3.) O professor registra, então, os fatos numéricos no quadro-negro da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 3 \text{ círculos} \\ \times 2 \\ \hline 6 \text{ círculos} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \text{ quadrados} \\ \times 2 \\ \hline 6 \text{ quadrados} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \text{ triângulos} \\ \times 2 \\ \hline 6 \text{ triângulos} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

A classe lê as notações como segue: "2 grupos de 3 círculos são 6 círculos; 2 grupos de 3 quadrados são 6 quadrados; 2 grupos de 3 triângulos são 6 triângulos." O professor mostra, então, a notação. A classe lê o fato como "2 grupos de 3 são 6". Novamente o professor dá ênfase ao fato de que o 2, nesta notação, representa o número de grupos, e o 3 representa o número em cada grupo.

Na introdução dos fatos de multiplicação a criança deve ler um fato, como $2 \times 5 = 10$, do seguinte modo: "2 grupos de cinco são 10", e não na forma abreviada: "duas vêzes 5 são 10". Esta última forma é a desejada, mas a criança só deve usá-la quando se familiarizar com o processo da multiplicação e sua notação. No início do ensino da multiplicação não há lugar para a palavra *vêzes* na leitura de um fato fundamental, como "2 *vêzes* 5 são 10". Esta expressão é mero verbalismo nos estágios iniciais da aprendizagem da multiplicação.



A seguir, o professor deve levar a criança a colocar as tiras em sentido vertical, a fim de mostrar o agrupamento reverso correspondente. Ela vê, então, três grupos de 2. O mesmo plano, como o dado antes, é seguido na escrita dêstes fatos numéricos. Assim, para as tiras mostrando círculos, o fato numérico é registrado como se mostra. A criança lê o fato como "3 grupos de 2 círculos são 6 círculos". Da mesma maneira, a classe lê os agrupamentos restantes de 2. O professor deve perguntar à criança se ela descobriu qual o efeito que a troca dos membros no agrupamento teve sôbre a resposta. Em seguida pedirá à classe para dar um exemplo de um outro processo (adição) no qual é também possível trocar os números, no agrupamento, sem afetar a resposta.

$$\begin{array}{r} 2 \text{ círculos} \\ \times 3 \\ \hline 6 \text{ círculos} \end{array}$$

Deve ser percebida a razão pela qual o professor supre a classe com diferentes tipos de desenhos geométricos. O uso dêsses desenhos deve levar a criança a ver que dois grupos de 3 círculos, quadrados ou triângulos fazem 6 daquele desenho particular. Aí, ela terá certeza para generalizar que dois grupos de 3 são 6.

Depois que as crianças trabalharem com o material para achar a resposta para agrupamentos tal como 2×3, o professor lhes pedirá que apresentem uma outra maneira de achar a resposta para o agrupamento. No caso de as crianças não sugerirem nenhum método a ser usado, o professor deve perguntar como o mesmo fato de multiplicação poderia ser mostrado usando a adição $\begin{array}{r} 3 \\ +\,3 \\ \hline \end{array}$.

O professor deve seguir o mesmo padrão descrito acima para a introdução de cada um dos outros fatos que envolvam 3. O próximo agrupamento a ser apresentado é três grupos de 3. A criança usa suas tiras e acha, pela contagem de 3 a 3, que os três grupos de 3 são 9. Algumas das crianças podem descobrir que três grupos de 3 são um grupo a mais que dois grupos de 3. Desde que dois 3 são 6, com um 3 a mais terão 9. Depois, colocando as tiras em sentido vertical, elas descobrirão que o mesmo agrupamento aparece como fôra mostrado antes. Se os dois números fôssem diferentes haveria dois agrupamentos, os quais teriam a mesma resposta.

O plano descrito mostra como introduzir o 3 começando com dois grupos de 3 até nove grupos dêsse mesmo número. Depois de a classe descobrir todos êstes fatos, o professor leva as crianças a representar um grupo de 3 usando a forma de multiplicação. Aí, elas devem descobrir que uma vez um grupo de um número é igual ao próprio número. Então elas entenderão como escrever, sob a forma simbólica, um fato envolvendo multiplicação por 1.

Quando a classe constrói uma tábua de multiplicação como a descrita neste Capítulo, 10 vêzes o número da tábua ou tabela deve fazer parte da mesma. Assim a tabela de 3 deve incluir o elemento $10 \times 3 = 30$. A criança deve descobrir a relação entre as duas formas $1 \times 3 = 3$ e $10 \times \times 3 = 30$. Ela deve descobrir as duas coisas que caracterizam a multiplicação por 1 e por 10: primeira, um número multiplicado por 1 tem um produto igual ao número; e segunda, acrescentando zero a um número, multiplica-se êsse número por 10. Não é necessário que a criança domine os fatos que envolvam 10, mas é altamente desejável para ela tornar-se familiar com a multiplicação por 10. Seu conhecimento desta forma de multiplicação pode ser usado efetivamente para determinar o lugar do primeiro algarismo do quociente, na divisão com um divisor de dois algarismos.

A Ordem Seqüente dos Fatos

O professor introduz os fatos de multiplicação em seqüência, mas a esta altura êles não são ainda organizados sob a forma de tabela. A tabela mostra o arranjo sistemático dos fatos. Mais tarde a criança fará o arranjo, em seqüência, dos fatos de multiplicação a fim de descobrir o padrão dos números. Ela deve descobrir que cada produto sucessivo, na tabela de 3, aumenta de 3. Da mesma maneira deve descobrir que um dos números de cada agrupamento permanece o mesmo enquanto que o outro em cada sucessivo agrupamento cresce de uma unidade.

Alguns professôres são contra o ensino das tabelas de multiplicação. A causa desta desaprovação pode estar no modo pelo qual a criança aprende os fatos na tabela. Muitas vêzes ela os aprende mecânicamente, e é capaz de *recitá-los* tanto em ordem crescente como decrescente, mas sem nenhuma compreensão do trabalho. As tabelas devem ser formadas depois que a criança deduz cada fato de um conjunto, seja por adição ou pelo uso de materiais. Também ela deve ser capaz de dar qualquer produto de um agrupamento dentro de um dado conjunto. Então, as objeções às tabelas se reduzem a um mínimo.

Na multiplicação, os fatos com zero podem ser introduzidos como um grupo ou uma família. Se uma criança descobre o padrão dos produtos dos fatos com zero, deveria ser capaz de dar a resposta a cada um dêsses fatos. Há poucas aplicações da multiplicação de zero por um número, exceto quando multiplicamos um número de dois ou mais algarismos. É necessário que a criança aprenda o agrupamento 3×0 no exemplo ao lado. Do trabalho com exemplos semelhantes saberá que o produto de zero multiplicado por qualquer número é zero. Aí, então, deve ser capaz de

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

O uso de máquinas de calcular para verificar as respostas provou ser útil em muitas situações na classe.

escrever os nove fatos de multiplicação incluindo zero. Um fato não deve ser aprendido como específico. O plano oposto para a aprendizagem dos fatos com zero como específicos é o de levar a criança a descobrir uma generalização que se aplique a todos êsses fatos. A generalização referente ao zero identifica os fatos desta família. Essa generalização diz que o produto de zero e um número é zero.

Os fatos de multiplicação podem ser escritos tanto na forma vertical como na horizontal, como $2 \times 3 = 6$ ou $\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$. Os fatos são usados na multiplicação e na divisão. Neste exemplo de multiplicação, a forma vertical é usada.

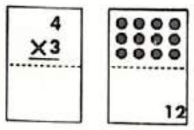
$$\begin{array}{r} 427 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array} \qquad 165 \,\underline{|\ 33} \atop \quad 5$$

No exemplo de divisão, a forma usada aproxima-se mais da horizontal que da vertical. Por isso, a criança deve-se familiarizar com ambos os tipos de notação ou registro. É convencional escrever os fatos na forma horizontal particularmente quando os mesmos são organizados para formar uma tabela, e na forma vertical quando usados em exercícios ou prática.

Fixando os Fatos de Multiplicação

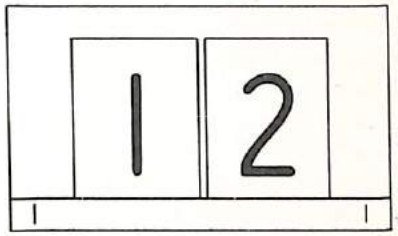
Depois que a criança descobre alguns dos fatos de multiplicação, como os fatos de 3, ela deve ter variadas experiências com os mesmos a fim de conseguir o domínio dêsses fatos. As seguintes sugestões ajudarão a criança a obter êste domínio:

1) Levar cada criança a fazer, para si, um cartão de estudo do fato. O cartão deve ter cêrca de 5×7 cm. Uma das faces do cartão deve conter o agrupamento simbólico, e a outra, a representação visual do agrupamento, como mostrado abaixo.



A criança usa êstes cartões em trabalho individual ou trabalho com um companheiro. A criança mostra a representação simbólica ao companheiro. Êste vê o registro simbólico enquanto a criança que segura o cartão vê, no verso do mesmo, a representação visual. Isto a ajuda a verificar a exatidão da resposta dada pelo companheiro. Mesmo que raramente as crianças usem êstes cartões para estudo individual, lucram muito fazendo os mesmos, pois a própria confecção dêste material as ajuda na aprendizagem dos fatos.

2) Dar exercícios orais que levem a criança a usar um cartão semelhante ao do desenho para mostrar a resposta. Se o professor perguntar a resposta do agrupamento 3×4, a criança indica o produto como mostrado. Para curtos períodos de



exercícios, o uso de tais cartões é um dos mais eficientes meios de treinar os fatos fundamentais tanto de multiplicação como de divisão. (Veremos na pág. 543 como usar êstes cartões.)

3) Levar as crianças a escrever todos os números de 1 a 30, em seqüência, para os fatos de 3. Depois levá-las a riscar cada terceiro número. Quando riscarem um número, deverão escrever o agrupamento que tem êsse número como produto. Exemplo: se ela riscar 21, o agrupamento será 3×7 ou 7×3. Fazer o mesmo para os fatos de 4, escrevendo-os de 1 a 40. Riscar cada quarto número e escrever o agrupamento que tem êsse mesmo número como produto.

4) Levar as crianças a contar de 3 em 3 ou de 4 em 4 etc. de acôrdo com o número designado pela tabela. Será bom que a criança seja capaz de contar de 3 em 3 começando de qualquer múltiplo dêsse número, tal como 18. Assim, quando ela der um número em seqüência, também deve ser capaz de dar o agrupamento cujo produto seja igual a êsse número.

5) Levar a classe a fazer grandes cartazes com figuras diversas onde possam ser mostrados alguns dos usos familiares do número em estudo. Por exemplo, para mostrar alguns dos usos mais comuns do 3, um cartaz conteria as coisas mostradas abaixo.

Levar as crianças a *inventar* problemas sôbre as gravuras. Um problema como "Quantas rodas há em quatro velocípedes?" é um modêlo típico de problema oral que a classe organiza depois do estudo de um cartaz como o acima referido.

6) Usar os materiais do livro-texto e do livro de exercícios. A maioria dos livros-texto sugere atividades que são eficientes meios para praticar ou treinar os fatos fundamentais em um dado processo.

Enriquecendo a Compreensão das Crianças Sôbre os Fatos

A criança compreende melhor os diferentes fatos quando descobre as relações entre os mesmos. Ela terá mais recursos se fôr capaz de deduzir um fato desconhecido de fatos já conhecidos. Naturalmente algumas crianças desenvolvem mais a capacidade de discernimento que outras e, por isso, são capazes de descobrir relações que outras crianças não descobriram. Por outro lado, há certos conhecimentos ou compreensões básicos que todos da classe devem dominar. Suponha que o professor peça à classe que indique diferentes maneiras de provar que $6 \times 3 = 18$. Aqui estão alguns meios que as crianças deveriam ser capazes de indicar. As maneiras assinaladas com um asterisco devem ser indicadas por todos da classe:

*1. Usar objetos ou tiras com desenhos geométricos para provar o fato.

*2. Fazer um desenho de seis grupos de 3.

*3. Somar seis grupos de 3.

*4. Somar três grupos de 6.

5. Se $5 \times 3 = 15$, seis vêzes 3 serão mais que 15.

6. Se $3 \times 3 = 9$, então seis vêzes 3 serão duas vêzes mais, porque 6 são duas vêzes 3.

7. Se $2 \times 3 = 6$, então seis vêzes 3 serão três vêzes mais, porque 6 são três vêzes 2.

O professor deve encorajar as crianças a descobrir estas relações e outras semelhantes. Depois que a classe aprender os fatos de divisão correspondentes, as crianças devem expandir o número de descobertas incluindo as relações entre multiplicação e divisão. A preparação para descobertas do tipo descrito constitui uma das mais eficientes maneiras de enriquecer o currículo para uma verdadeira aprendizagem de Aritmética. Quando a criança demonstra que pode achar a resposta para um agrupamento numérico através de modos diversos, cresce em confiança no estudo da matéria. Êste crescimento é básico para o desenvolvimento da segurança e do sentimento de sucesso no estudo da Aritmética.

Seqüência do Ensino dos Fatos de Multiplicação e Divisão

É possível ensinar os fatos de multiplicação e de divisão tanto juntos como separadamente. No último caso, o professor introduziria um grupo de fatos de multiplicação, como os de 3, e a seguir os fatos de divisão correspondentes. As notações para a escrita dos fatos são diferentes, e por isso a criança não terá dificuldades em distinguir os dois processos. Se a multiplicação e a divisão forem ensinadas juntas, o conceito da criança sôbre o fato será enriquecido, pois ela aprenderá mais sôbre tal fato do que quando o estudar isoladamente, quer como um fato de divisão ou como um de multiplicação. Para o agrupamento 3×4, a criança deve saber que três grupos de 4 são 12 e que quatro grupos de 3 são igualmente 12. Da mesma maneira

deve saber que em 12 há três grupos de 4 e quatro grupos de 3.

Por isto é possível introduzir os fatos correspondentes formados de um agrupamento, nos dois processos, em uma mesma lição.

É igualmente defensável, quando ensinando um grupo de fatos de multiplicação, passar ao ensino dos fatos de divisão correspondentes. A criança descobre em cada fato a relação entre os dois processos. Não há economia de tempo nem significado diferente de uma seqüência comparada com a outra.

O plano descrito supõe que a criança comece com um agrupamento, tal como 3×4, e encontre a resposta. É também possível começar com um produto, tal como 12, e levar a criança a encontrar seus fatôres. Assim, para 12 há três grupos de 4, quatro grupos de 3, dois grupos de 6, ou seis grupos de 3. Êste plano pode ser designado como o ensino dos fatos de multiplicação por *famílias*. Há vantagens e desvantagens resultantes da apresentação dos fatos por êste plano. A criança enriquece o seu conceito de multiplicação se ela fôr capaz de dar todos os fatôres de um produto dado. Para um produto que tenha sòmente dois fatôres (não incluindo êle próprio e 1), tal como 10, o plano é fácil de administrar. Por outro lado, um produto tendo dois grupos de fatôres, tal como 12, introduz tantos fatôres a um só tempo que a criança pode encontrar dificuldade em arranjar os fatos numa tabela a fim de descobrir o padrão das respostas na tabela. Depois que a criança conhece os fatos para os vários agrupamentos e tem a habilidade de formar uma tabela, deve ser capaz de sintetizar seu conhecimento assim como dar os fatôres do produto. Os itens 3 e 4 da pág. 237 sugerem esta atividade como um meio de enriquecer e praticar um fato já aprendido em multiplicação.

Introdução dos Fatos de Multiplicação na Quarta Série

É convencional ensinar alguns fatos de multiplicação na terceira série e os fatos restantes na quarta série. No comêço da quarta série, o professor deve fazer um inventário dos fatos de multiplicação que foram apresentados nas séries anteriores e ensinar os fatos ainda não conhecidos. O método para inventariar êstes fatos é semelhante ao usado para achar os fatos não-conhecidos em adição e subtração, depois de êstes fatos terem sido apresentados. (Veja pág. 484.) Se o professor seguir o plano de

4ª série

desconhecido de fatos já conhecidos. Naturalmente algumas crianças desenvolvem mais a capacidade de discernimento que outras e, por isso, são capazes de descobrir relações que outras crianças não descobriram. Por outro lado, há certos conhecimentos ou compreensões básicos que todos da classe devem dominar. Suponha que o professor peça à classe que indique diferentes maneiras de provar que $6 \times 3 = 18$. Aqui estão alguns meios que as crianças deveriam ser capazes de indicar. As maneiras assinaladas com um asterisco devem ser indicadas por todos da classe:

*1. Usar objetos ou tiras com desenhos geométricos para provar o fato.

*2. Fazer um desenho de seis grupos de 3.

*3. Somar seis grupos de 3.

*4. Somar três grupos de 6.

5. Se $5 \times 3 = 15$, seis vêzes 3 serão mais que 15.

6. Se $3 \times 3 = 9$, então seis vêzes 3 serão duas vêzes mais, porque 6 são duas vêzes 3.

7. Se $2 \times 3 = 6$, então seis vêzes 3 serão três vêzes mais, porque 6 são três vêzes 2.

O professor deve encorajar as crianças a descobrir estas relações e outras semelhantes. Depois que a classe aprender os fatos de divisão correspondentes, as crianças devem expandir o número de descobertas incluindo as relações entre multiplicação e divisão. A preparação para descobertas do tipo descrito constitui uma das mais eficientes maneiras de enriquecer o currículo para uma verdadeira aprendizagem de Aritmética. Quando a criança demonstra que pode achar a resposta para um agrupamento numérico através de modos diversos, cresce em confiança no estudo da matéria. Êste crescimento é básico para o desenvolvimento da segurança e do sentimento de sucesso no estudo da Aritmética.

Seqüência do Ensino dos Fatos de Multiplicação e Divisão

É possível ensinar os fatos de multiplicação e de divisão tanto juntos como separadamente. No último caso, o professor introduziria um grupo de fatos de multiplicação, como os de 3, e a seguir os fatos de divisão correspondentes. As notações para a escrita dos fatos são diferentes, e por isso a criança não terá dificuldades em distinguir os dois processos. Se a multiplicação e a divisão forem ensinadas juntas, o conceito da criança sôbre o fato será enriquecido, pois ela aprenderá mais sôbre tal fato do que quando o estudar isoladamente, quer como um fato de divisão ou como um de multiplicação. Para o agrupamento 3×4, a criança deve saber que três grupos de 4 são 12 e que quatro grupos de 3 são igualmente 12. Da mesma maneira

deve saber que em 12 há três grupos de 4 e quatro grupos de 3.

Por isto é possível introduzir os fatos correspondentes formados de um agrupamento, nos dois processos, em uma mesma lição.

É igualmente defensável, quando ensinando um grupo de fatos de multiplicação, passar ao ensino dos fatos de divisão correspondentes. A criança descobre em cada fato a relação entre os dois processos. Não há economia de tempo nem significado diferente de uma seqüência comparada com a outra.

O plano descrito supõe que a criança comece com um agrupamento, tal como 3×4, e encontre a resposta. É também possível começar com um produto, tal como 12, e levar a criança a encontrar seus fatôres. Assim, para 12 há três grupos de 4, quatro grupos de 3, dois grupos de 6, ou seis grupos de 3. Êste plano pode ser designado como o ensino dos fatos de multiplicação por *famílias*. Há vantagens e desvantagens resultantes da apresentação dos fatos por êste plano. A criança enriquece o seu conceito de multiplicação se ela fôr capaz de dar todos os fatôres de um produto dado. Para um produto que tenha sòmente dois fatôres (não incluindo êle próprio e 1), tal como 10, o plano é fácil de administrar. Por outro lado, um produto tendo dois grupos de fatôres, tal como 12, introduz tantos fatôres a um só tempo que a criança pode encontrar dificuldade em arranjar os fatos numa tabela a fim de descobrir o padrão das respostas na tabela. Depois que a criança conhece os fatos para os vários agrupamentos e tem a habilidade de formar uma tabela, deve ser capaz de sintetizar seu conhecimento assim como dar os fatôres do produto. Os itens 3 e 4 da pág. 237 sugerem esta atividade como um meio de enriquecer e praticar um fato já aprendido em multiplicação.

Introdução dos Fatos de Multiplicação na Quarta Série

É convencional ensinar alguns fatos de multiplicação na terceira série e os fatos restantes na quarta série. No começo da quarta série, o professor deve fazer um inventário dos fatos de multiplicação que foram apresentados nas séries anteriores e ensinar os fatos ainda não conhecidos. O método para inventariar êstes fatos é semelhante ao usado para achar os fatos não-conhecidos em adição e subtração, depois de êstes fatos terem sido apresentados. (Veja pág. 484.) Se o professor seguir o plano de

4ª série

deduzir ambos os fatos de um agrupamento, como $4 \times 6 = 24$ e $6 \times 4 = 24$ para o agrupamento 4×6, e levar a classe a organizar a tabela partindo dos fatos conhecidos, as crianças descobrirão que $\boxed{9 \times 9 = 81}$ é o único fato nôvo que envolve o 9. Os mesmos meios para prática dos fatos, como os dados antes, se aplicam igualmente a cada série.

Representação Gráfica de Um Agrupamento

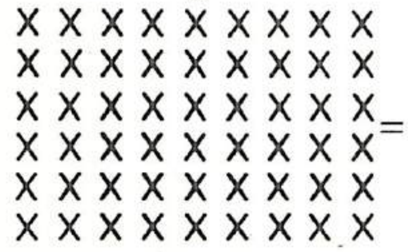
A maioria das respostas incorretas dadas para um agrupamento em multiplicação são respostas para outros agrupamentos. Isto é especialmente verdadeiro para os agrupamentos 6×9 e 7×8. Freqüentemente as crianças trocam as respostas para êstes dois agrupamentos. Os únicos dois produtos de fatos de multiplicação na casa de 50 são 54 e 56; por isso, é fácil entender por que a criança troca êsses produtos. Às vêzes a criança não está certa se o produto de 9 e 6 é 54 ou 56. Ela deve ter recursos suficientes para descobrir que $10 \times 6 = 60$; por isso, 9×6 deve ser um 6 a menos que 60, ou seja 54.

9x6

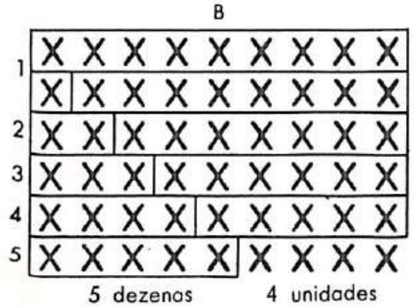
Um outro meio efetivo de encontrar o produto de um agrupamento consiste em fazer uma representação gráfica do agrupamento.

A criança deve fazer tal representação para os fatos de multiplicação que são difíceis

A



B



para ela. O diagrama A mostra a representação gráfica do agrupamento 6×9. Há seis filas de X. O diagrama B mostra os X reagrupados em grupos de 10. O diagrama mostra que 6×9 é igual a 5 dezenas e 4 unidades, ou 54. De maneira semelhante a criança poderá fazer outras representações gráficas para os fatos fundamentais que acha difícil dominar.

Os Noves em Multiplicação

Quando a criança descobre algumas das interessantes caracte-

rísticas do número 9, geralmente encontra facilidade em aprender os fatos de multiplicação que envolvem o 9. Desde que 9 é 1 menos que 10, ou seja a base de nosso sistema de numeração, cada sucessivo produto de 9 cresce de 10 menos 1. A criança deve descobrir, pela observação de produtos consecutivos numa tabuada de 9, que o algarismo no lugar das unidades decresce de 1 e o algarismo no lugar das dezenas cresce de 1. Êste incremento em produtos consecutivos é igual a $10 - 1$, ou 9. Ela deve também descobrir que a soma dos algarismos em cada produto é igual a 9. A soma dos algarismos de qualquer número que seja múltiplo de 9 é igual a 9, 18, 27, 36 etc. Esta importante característica do número 9 torna possível a *prova dos noves*, na verificação da exatidão de uma solução.

$9 \times 1 = 9$
$9 \times 2 = 18$
$9 \times 3 = 27$
$9 \times 4 = 36$
$9 \times 5 = 45$

A prova dos noves, ou seja a eliminação dos noves, é uma valiosa prova para a multiplicação, especialmente para os alunos das séries mais elevadas. Alguns professôres usam, erròneamente, esta prova ou verificação para a adição e subtração. A aplicação da prova nestes processos é mais difícil e consome mais tempo do que refazer o trabalho.

Os Autores[1] discutem em outra publicação maneiras de como verificar a exatidão da multiplicação e divisão.

c. FORMAÇÃO DE TABELAS

Tabela Composta dos Fatos de Multiplicação

A tabela composta dos fatos de multiplicação mostra todos os produtos dos agrupamentos de dois números simples. Essa tabela mostra um arranjo ordenado dos números. Cada criança deve fazer uma tabela para si. A classe deve fazer um cartaz contendo a tabela dos fatos de multiplicação para expor num quadro-boletim.

O professor faz, no quadro-negro, um traçado da tabela a ser usada. Cada criança faz uma cópia do mesmo. A seguir, o professor preenche a primeira fila com os respectivos produtos. Depois de certificar-se de que as crianças compreenderam o padrão a ser seguido, o professor lhes pede que completem a tabela.

A ilustração adiante mostra uma tabela composta dos fatos de multiplicação. Cada número, dentro de um pequeno quadrado, é o produto de um fato de multiplicação.

[1] BRUECKNER (L. J.), GROSSNICKLE, (F. E.) e RECKZEH (J.), *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades*. Filadélfia: The John C. Winston Co., 1957, págs. 158-60.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Os números em tipo negrita, que estão escritos no comêço de cada fila e acima de cada coluna, são os fatôres do produto dado no quadrado correspondente. Exceto para os quadrados dos números 1, 4, 9 etc. e para os zeros, há dois agrupamentos para cada produto no quadrado. Assim, para o prcduto 21 os agrupamentos são 3×7 e 7×3. Se um produto fôr zero, um dos fatôres deve ser zero, o qual é o primeiro número em tipo negrita, no alto da tabela. O outro fator é o número à esquerda da fila na qual o produto é dado. Assim, para o produto 0 na fila contendo os multiplos de 4, o único agrupamento dos fatôres é 4×0.

A tabela também dá as respostas para os agrupamentos na divisão. Para achar quantos 7 há em 21, achar 21 na fila dos múltiplos de 7. O quociente 3 é dado, em tipo negrita, no alto da coluna contendo 21.

Depois que tôdas as crianças tiverem a tabela, o professor deve levar a classe a apontar algumas das características distintivas da mesma. Algumas das descobertas que a classe deve fazer sôbre os números na tabela são as seguintes:

1) Cada número que sucede na fila horizontal é acrescido da quantidade indicada pelo número escrito, em tipo negrita, na coluna da esquerda.

2) Cada número que sucede em uma coluna de cima para baixo é aumentado da mesma quantidade indicada pelo número dado, no alto da coluna.

3) Os números em cada fila podem ser encontrados somando-se o número da margem esquerda a cada número que sucede. Semelhante método é usado para obter os números em uma coluna.

4) Se um número na tabela é dividido pelo número do comêço da fila, o quociente será o número do alto daquela coluna.

5) Se um número na tabela é dividido por um número, exceto zero, dado no comêço da coluna, o quociente será o número à esquerda da fila.

6) Cada número nos quadrados que vão, em diagonal, do quadrado com o número 1, no ângulo supèrior esquerdo, ao ângulo inferior direito tem dois fatôres iguais. (Êstes produtos são os quadrados dos números de 1 a 9, inclusive.)

Construção de Uma Tabela com Fatos Conhecidos

Cada criança deve saber como achar a resposta para um agrupamento de multiplicação, como 4×7, pelo uso de materiais objetivos como discos ou tiras com desenhos geométricos, figuras e também pelo emprêgo da adição. Se ela sabe um fato de divisão, deve ser capaz de deduzir o fato de multiplicação correspondente. Estas são as aprendizagens para tôdas as crianças, em se tratando de fatos de multiplicação.

A classe deve fazer uma tabela, como a tabela dos fatos de 6, partindo de certos conhecimentos a fim de descobrir as relações entre os vários fatos de multiplicação. O propósito da tabela não é introduzir os fatos nem mostrar a seqüência dos mesmos. Estas realizações devem ser parte de um programa mínimo pará a classe. A organização de uma tabela partindo de fatos já conhecidos é principalmente para fins de enriquecimento. Tôdas as crianças devem participar da construção da tabela, mas as crianças mais perspicazes, dotadas de maior capacidade de discernimento, lucram mais com esta atividade.

Consideremos a organização de uma tabela envolvendo os fatos com 6. Certos fatos são dados. Dêsses fatos conhecidos, a classe deduz outros. Na introdução de cada nôvo fato ou nôvo elemento da tabela, o professor leva as crianças a pensar em tantas maneiras quantas forem possíveis de encontrar o nôvo fato. Quando cada nôvo fato da tabela fôr examinado, pode o mesmo ser usado para a descoberta dos fatos restantes.

O processo a seguir na organização de uma tabela de fatos de 6 partindo dos fatos conhecidos pode ser ilustrado supondo que os fatos mostrados ao lado sejam os conhecidos.

$1 \times 6 = 6$
$2 \times 6 = 12$
$10 \times 6 = 60$

O próximo passo na organização da tabela é deduzir o fato $3 \times 6 = 18$. A classe oferece tantos meios de encontrar êsse fato quantos os possíveis, não sòmente pelo uso dos fatos supostos serem conhecidos como também pelo uso dos conhecimentos básicos referentes ao processo de multiplicação. A classe deve ser capaz de descobrir que $6 \times 3 = 18$, dando as seguintes respostas: "Desde que um 6 é 6 e dois 6 são 12, somam-se 6 e 12 para encontrarmos três 6." "Somar três 6." "Somar seis 3."

O outro passo a seguir na construção da tabela consiste em achar $4 \times 6 = 24$. Os seguintes recursos podem ser usados para achar o produto de 4 e 6: "Somar um 6 ao produto de três 6." "Desde que dois 6 são 12, quatro 6 serão duas vêzes mais, ou 24." "Somar oito 3 ou quatro 6." "Desde que dez 6 são 60, cinco serão a metade, ou 30. Então, quatro 6 serão um 6 a menos, ou 24."

As respostas acima são algumas dos tipos de resposta típica das crianças para expressar as relações entre os fatos de multiplicação dados na tabela. O professor deve encorajar atividades dêste tipo para levar a criança a revelar seu pensamento quando tratando com os números. A aprendizagem só tem lugar quando o pensamento é envolvido. A organização de uma tabela através das técnicas sugeridas oferece algumas das melhores experiências de aprendizagem que o professor pode preparar para desenvolver o pensamento dos alunos, especialmente daqueles mais inteligentes.

Famílias de Tabelas

A criança que adquire compreensão e discernimento do número, sintetiza pequenos grupos dentro de grupos maiores e descobre as relações entre o grupo maior e o menor. As crianças dotadas de inteligência superior, nas quarta e quinta séries, devem ser capazes de descobrir que as tabelas podem ser agrupadas em *famílias* ou *conjuntos*. Há algumas idéias ou fatôres comuns a cada tabela, quando se trata de uma família. Os fatos de 2, 4 e 8 podem ser classificados na família de 2; os de 3, 6 e 9, na famlíia de 3. As duas tabelas restantes com fatos de 5 e 7 não podem ser agrupadas com outras.

Consideremos a família de 2. O professor de Aritmética deve levar as crianças mais inteligentes, das quarta e quinta séries, a escrever os fatos das três tabelas que compreendem esta família e a descobrir a seqüência dos produtos em cada uma delas.

$2 \times 0 = 0$	$8 \times 0 = 0$	$4 \times 0 = 0$
$2 \times 1 = 2$	$8 \times 1 = 8$	$4 \times 1 = 4$
$2 \times 2 = 4$	$8 \times 2 = 16$	$4 \times 2 = 8$
$2 \times 3 = 6$	$8 \times 3 = 24$	$4 \times 3 = 12$
$2 \times 4 = 8$	$8 \times 4 = 32$	$4 \times 4 = 16$
$2 \times 5 = 10$	$8 \times 5 = 40$	$4 \times 5 = 20$
$2 \times 6 = 12$	$8 \times 6 = 48$	$4 \times 6 = 24$
$2 \times 7 = 14$	$8 \times 7 = 56$	$4 \times 7 = 28$
$2 \times 8 = 16$	$8 \times 8 = 64$	$4 \times 8 = 32$
$2 \times 9 = 18$	$8 \times 9 = 72$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 10 = 20$	$8 \times 10 = 80$	$4 \times 10 = 40$

A criança deve descobrir que os fatos com as seguintes características pertencem à família ou conjunto de 2:

1) Todos os produtos são números pares.

2) A seqüência dos algarismos no lugar das unidades para os fatos de 2 é 0 — 2 — 4 — 6 — 8, que depois se repete na mesma ordem. No ponto de repetição uma nova década é formada e, em cada caso, um algarismo maior segue a um algarismo menor na mesma década.

3) A seqüência dos algarismos no lugar das unidades, para os fatos de 8, está na ordem reversa em relação à seqüência dos fatos de 2. Sempre que o algarismo seguinte fôr menor que o algarismo precedente, os dois produtos estarão em décadas diferentes. As linhas na tabela mostram os pontos de mudança de década.

4) A seqüência dos algarismos, no lugar das unidades para os fatos de 4 é 0 — 4 — 8 — 2 — 6, que se repete na mesma ordem. Nessa seqüência, como em outras, se um algarismo maior segue um algarismo menor, os dois produtos estão na mesma década. Se a seqüência reversa aparece, os produtos estão em décadas diferentes. As linhas designam os pontos de mudança de décadas.

A família dos fatos de 3 consiste da tabela de 3 e de 9. A tabela de 6 pode ser classificada uma parte dentro da família de 3 e outra parte dentro da família de 2.

A coluna à direita dos produtos na tabela de 3 e de 6 dá a soma dos algarismos dos produtos. A classe deve ser capaz de fazér algumas das seguintes descobertas e generalizações, quando fazendo um estudo da seqüência dos produtos:

3 × 1 = 3	3	9 × 1 = 9	6 × 1 = 6	6
3 × 2 = 6	6	9 × 2 = 18	6 × 2 = 12	3
3 × 3 = 9	9	9 × 3 = 27	6 × 3 = 18	9
3 × 4 = 12	3	9 × 4 = 36	6 × 4 = 24	6
3 × 5 = 15	6	9 × 5 = 45	6 × 5 = 30	3
3 × 6 = 18	9	9 × 6 = 54	6 × 6 = 36	9
3 × 7 = 21	3	9 × 7 = 63	6 × 7 = 42	6
3 × 8 = 24	6	9 × 8 = 72	6 × 8 = 48(12)	3
3 × 9 = 27	9	9 × 9 = 81	6 × 9 = 54	9

1) Os produtos alternados com os fatos de 3 e 9 são pares, mas todos os produtos com 6 são pares. Dá-se isto com os produtos de 6 porque 2 é um fator de 6.

2) A seqüência das somas dos algarismos nos produtos de 3 é 3 — 6 — 9, que depois se repete. Uma nova década aparece em cada ponto de repetição.

3) A seqüência da soma dos algarismos dos produtos na tabela dos fatos de 6 é 6 — 3 — 9, que se repete na mesma ordem. Se um algarismo menor, em uma soma, segue a um algarismo maior, os produtos estão em décadas diferentes. Numa situação reversa, os produtos estarão na mesma década. Encontrar a soma dos algarismos em um produto é equivalente a extrair os 9 naquele produto.

4) As crianças devem assinalar as características dos produtos de 9, como mostrado abaixo:

A maioria das crianças que aprendem a tabela dos fatos de 5 descobrem a seqüência e as terminações dos produtos. A seqüência dos algarismos é 0 — 5 (começando com $5 \times 0 = 0$), com repetições. Os produtos estarão em décadas diferentes em cada ponto de repetição da seqüência dos algarismos. Cada produto de números ímpares termina em 5 e cada produto de números pares termina em 0. Desde que 5 é a metade do número-base, isto é, 10, o produto de qualquer número e 5 deve terminar em 0 ou 5.

Não há um padrão aparente para a tabela de 7, porque essa tabela é *prima* (nenhum fator, exceto 1), no que diz respeito ao número-base e às outras famílias de tabelas. A seqüência dos algarismos no lugar das unidades para os produtos de 7 é 7 — 4 — 1 — 8 — 5 — 2 — 9 — 6 — 3 — 0. Incluindo os fatos com zero, cada um dos 10 algarismos aparece nesta seqüência. Isto acontece sòmente nas tabelas de 3, 7 e 9

Há uma diferença de 3 entre os números que se sucedem na série quando o número precedente é maior que o número seguinte. Se o número seguinte é maior que o número precedente, como em 1 — 8, o 1 deve ser considerado como 10 a mais, ou 11. Desde que 7 é 3 menos que o número-base, cada número que sucede será acrescido de 10 menos 3. Os produtos de 7 serão:

7 | 14 | 21   28 | 35 | 42   49 | 56 | 63

A linha entre certos produtos indica que os números de cada lado da linha estão em diferentes décadas. Se o algarismo no lugar das unidades de um número que sucede é menor que o seu correspondente no número precedente, os dois produtos estão em décadas diferentes. Quando uma seqüência contrária aparece, como em 21 e 28, os produtos estão na mesma década.

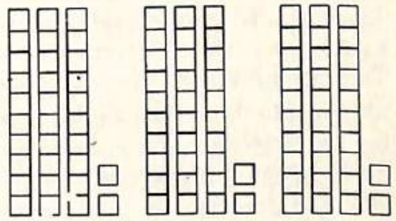
O número de descobertas que a criança é capaz de fazer, quando lidando com conjuntos de tabelas, depende, sobretudo, da compreensão que ela tem do número. É bom têrmos em mente que o estudo de conjuntos de tabelas é para propósitos de enriquecimento ao programa para as crianças mais inteligentes nas séries mais elevadas da escola elementar. A criança bem dotada recebe, às vêzes, maior estímulo para explorar os números sob tais condições do que lhe é oferecido por quaisquer outros meios dentro da estrutura do material do livro-texto.

d. MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO SIMPLES

Multiplicação Sem Reserva

Na multiplicação de um número de dois algarismos por um número de um só algarismo, a reserva pode ou não estar envolvida. Não é necessário *carregar* a dezena no caso A, mas no caso B temos de fazê-lo. Quando a criança aprende os fatos de multiplicação, ela deve usá-los em exemplos como os do tipo A. Assim que ela conhece os fatos de 2, pode usá-los em multiplicação com números de dois algarismos, uma vez que a reserva não seja envolvida.

A	B
43	46
× 3	× 3
129	138



A criança pode usar suas tiras retangulares e seus quadrados para mostrar que compreende o processo e para dar ênfase ao valor do lugar. Assim, para achar o produto de 3 e 32, ela pode usar seu material, como mostrado aqui, para fazer a representação do exemplo. A seguir o professor deve representar o exemplo no cartão Valor do Lugar, e depois a criança escreverá a solução. É difícil mostrar à classe a seqüência da multiplicação por unidades e depois por dezenas, se não houver necessidade de reserva. Contudo, a criança deve descobrir que ela multiplica dezenas quando multiplica por unidades. Ela deve também encontrar a resposta pela adição para demonstrar que compreende a relação entre adição e multiplicação. O primeiro processo pode também ser usado para provar os outros processos.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

Reserva na Multiplicação

Duas novas aprendizagens são essenciais para a introdução da reserva na multiplicação de um número de dois algarismos por um número simples. Essas aprendizagens não são necessárias se a reserva não fôr envolvida. Tais aprendizagens são: (1) o conhecimento da seqüência dos passos no processo; (2) a habilidade de somar o número carregado, isto é, a reserva, ao produto no lugar das dezenas. Usualmente êstes números não são vistos. Uma criança que não sabe a seqüência dos passos na multiplicação, no exemplo ao lado, pode dar a solução mostrada. Ela somou a reserva às 3 dezenas, perfazendo 4 dezenas, e então multiplicou. A criança deve saber que ela multiplicou as unidades e, depois, as dezenas. Ela deve saber também que soma a reserva vinda do lugar das unidades ao produto das dezenas. No último caso é necessário tratar com números não-vistos. Quando o produto é um número de dois algarismos, como 14, a soma da reserva constitui-se em uma adição dos algarismos finais. É aconselhável que o professor leve as crianças a escrever a seqüência dos passos no processo. Então será fácil verificar se cada criança sabe como proceder na operação.

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 2 \\ \hline 74 \end{array}$$

Muitos estudantes, inclusive professôres de colégio, não entendem por que é necessário multiplicar e depois somar. A alguns estudantes foi recomendado o uso de um recurso mnemônico como "Meu Dedicado Amigo Sadi", para determinar a ordem da aplicação do processo. A seqüência é multiplicação, divisão, adição e subtração, como indicado pela primeira lêtra de cada uma das quatro palavras. Muitos estudantes de curso secundário são incapazes de determinar se a resposta para o exemplo $2 + 3 \times 5$ é 17 ou 25. Êles não entendem a significação da multiplicação. Essa significação se torna clara, através de uma situação descrita dos números dados. Suponhamos que tais números representem crianças. Então, há um grupo de duas crianças mais três grupos de 5 crianças. Lògicamente o total é 17 crianças. Por outro lado, não há

cinco grupos de 5 crianças. O agrupamento 3×5 é uma maneira abreviada de escrever $5 + 5 + 5$.

O professor poderá seguir a seqüência dos tópicos no livro-texto. O próximo tópico a ser introduzido trata com a multiplicação de um número de dois algarismos por um número simples, com reserva. O desenvolvimento no texto pode mostrar como multiplicar 26 por 3. O professor deve levar as crianças a descobrir meios de encontrar a resposta. Algumas das maneiras sugeridas podem ser as seguintes:

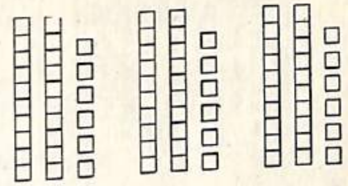
1) Somar 26 três vêzes.

2) Desde que 26 é 1 a mais que 25, somar 25 três vêzes e juntar 3 mais.

3) Reagrupar 26 como 20 e 6, multiplicar cada número por 3 e então somar os produtos.

A classe deve ser capaz de pensar diferentes maneiras de encontrar o produto de 3 por 26. Então, o professor deve levar as crianças a descobrir o processo usado na multiplicação. Os seis passos seguintes são meios efetivos de levar a criança a aprender a multiplicação com reserva.

Primeiro, levar a criança a usar as suas fichas retangulares e quadrados. Ela pode representar o exemplo como adiante. Ela combina as unidades perfazendo um total de 18 unidades, as quais representam o mesmo que



1 dezena e 8 unidades. Então, haverá 7 dezenas e oito unidades.

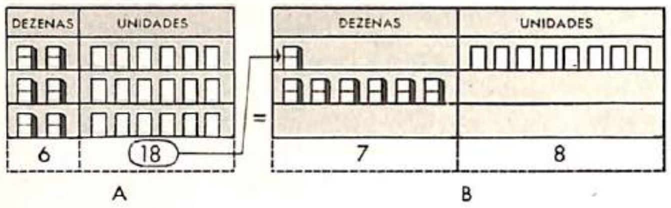
Segundo, mostrar o exemplo com fichas no cartaz Valor do Lugar. Levar uma criança a fazer a demonstração na frente da classe para todos os colegas.

Terceiro, fazer uma representação do tipo mostrado no quadro-negro. Levar as crianças a dizer os passos na representação. As 2 dezenas no lugar das dezenas representam o 2 em 26, e as 6 unidades no lugar das unidades representam as unidades. O total mostra 6 dezenas no lugar das dezenas, e 18 unidades no lugar das unidades. As 18 unidades são reagrupadas como 1 dezena e 8 unidades. Há, então, 7 dezenas e 8 unidades.

Quarto, dar uma representação simbólica, como mostrado. Escrever os números que faltam à medida que a classe fôr falando a dezena que vem do lugar das unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 26 \\ \times\ 3 \\ \hline 78 \end{array}$$

Quinto, levar a classe a observar o desenvolvimento dado no livro-texto. Levar a criança a seler a explicação e a seguir a seqüência dos passos. O trabalho com objetivo e materiais visuais deve dar à criança a experiên-



cia que a torna capaz de ler o texto com compreensão.

Sexto, levar a classe a explicar os passos em alguns exemplos já calculados. Em tais exemplos fazer com que a criança diga como achar cada resposta. Se ela entender a seqüência dos passos, é sinal de que já está pronta para exercícios de prática.

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 2 \\ \hline 74 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 3 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 2 \\ \hline 96 \end{array}$$

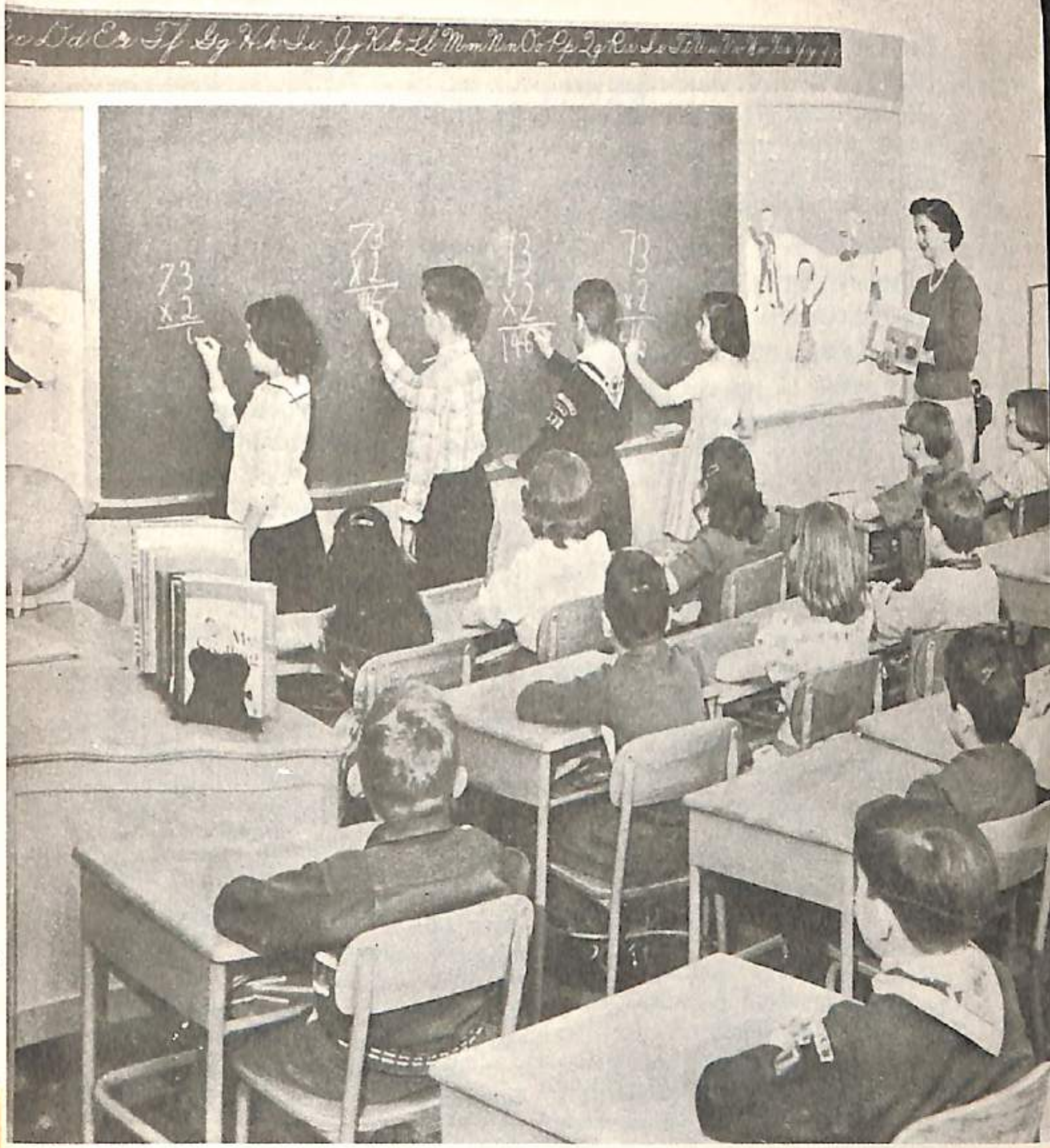
Finalmente, levar as crianças a resolver multiplicações envolvendo reserva, em exemplos dados no livro-texto ou livro de exercícios.

Quando as crianças começam a praticar com materiais simbólicos, pode ser necessário para algumas continuar usando suas coleções de materiais para achar os produtos. O professor deve formar pelo menos dois grupos de crianças, de acôrdo com a habilidade de operar em diferentes níveis de maturidade. Aquelas que compreendem o processo e podem prosseguir com exercícios de prática, devem trabalhar em um nível mais alto de maturidade e formam um grupo. As crianças que entendem o processo mas se sentem mais seguras usando material exploratório, devem formar outro grupo e continuar a usar essa ajuda até que se sintam seguras em seu trabalho sem o uso do material suplementar.

Soma Pelas Terminações na Multiplicação

Quando observava uma classe de quarta série, um dos Autores notou uma criança multiplicando um número de dois algarismos por um número simples usando o seguinte método: em muitos dos exemplos a criança reagrupa o número a ser multiplicado, como mostrado pelo exemplo 8 × 78. Perguntou à criança por que ela usava êste método. "Eu sempre consigo o resultado exato dêste modo", ela disse. Essa criança tinha um sentimento de segurança que lhe faltava quando usava o método convencional. O

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times\ 8 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 8 \\ \hline 64 \\ 560 \\ \hline 624 \end{array}$$



O quadro-negro é útil para a prática e demonstrações na classe.

professor sàbiamente permitiu à criança seguir o plano que descobrira, mas advertiu-a de que o seu método era mais longo, e por isso mesmo mais demorado que o padrão usual seguido na multiplicação.

Provàvelmente essa criança tinha dificuldade em somar pelas terminações como é necessário somar a reserva. No exemplo mostrado é necessário somar 6 ao produto de 8×7.

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Freqüentemente as crianças acham difícil somar a reserva quando o multiplicador vai de 6 a 9, inclusive. O leitor viu, no capítulo anterior, que a maior *reserva* é um a menos que o multiplicador. Portanto, a reserva pode ser de 5 a 8, respectivamente, quando o multiplicador fôr de 6 a 9. Desde que a adição da reserva e de um produto envolve, geralmente, trabalho com números não-vistos nas décadas mais altas, é certo que algumas crianças acharão esta parte do processo da multiplicação difícil de dominar.

A primeira coluna da Tabela A contém os produtos de dois algarismos dos agrupamentos em multiplicação. A segunda coluna contém o maior fator de um só algarismo do produto correspondente. Se o produto é 36, os fatôres de um só algarismo serão 4, 9 e 6. O maior fator será 9; logo, a reserva máxima, em multiplicação, a ser somada a 36 será 8. A terceira coluna mostra o número de exemplos possíveis de adição, pela terminação, para um dado produto. Se o produto é 36, os exemplos dêste tipo são os seguintes:

36 + 1	36 + 4	36 + 7
36 + 2	36 + 5	36 + 8
36 + 3	36 + 6	

Os três exemplos no grupo à esquerda têm a soma na mesma década do dado número de dois algarismos; os cinco exemplos restantes têm a soma na década seguinte. As duas colunas à direita da Tabela A contêm o número de exemplos que ultrapassam ou não a década.

O professor pode dar exemplos oralmente envolvendo adições pelas terminações. Êle dita um produto de multiplicação e um número simples. O produto deve ser um dos números dados na primeira coluna da Tabela A. O número a ser somado ao produto não deve ser maior que o número correspondente dado na terceira coluna. Um exercício dêste tipo é, geralmente, muito eficiente para ajudar a criança a tratar com números não-vistos, como acontece com a reserva na multiplicação.

Enriquecendo o Trabalho com Multiplicadores de Um Só Algarismo

Um bom programa para ensino dos processos básicos em Aritmética tem duas características. Primeira, há estipulação para

Tabela A. Produtos de Multiplicação Mostrando o Número Possível de Adições Pela Terminação

Produto	*Maior Fator*	*Número de exemplos*	*Número de Exemplos*	
			Ultrapassando a Década	*Não Ultrapassando a Década*
10	5	4	0	4
12	6	5	0	5
14	7	6	1	5
15	5	4	0	4
16	8	7	4	3
18	9	8	7	1
20	5	4	0	4
21	7	6	0	6
24	8	7	2	5
25	5	4	0	4
27	9	8	6	2
28	7	6	5	1
30	6	5	0	5
32	8	7	0	7
35	7	6	2	4
36	9	8	5	3
40	8	7	0	7
42	7	6	0	6
45	9	8	4	4
48	8	7	6	1
49	7	6	6	0
54	9	8	3	5
56	8	7	4	3
63	9	8	2	6
64	8	7	2	5
72	9	8	1	7
71	9	8	0	8
	Total	175	60	115

um mínimo de resultados a serem alcançados por tôdas as crianças. Segunda, há estipulação para as crianças de inteligência superior no que diz respeito ao domínio do processo e ao desenvolvimento da compreensão do significado do processo, o que a maioria da classe não obterá. Tais crianças devem descobrir outros meios de efetuar a multiplicação de um número de dois algarismos por um número simples além da maneira convencional. Entre outros meios podemos incluir os seguintes:

1) Para multiplicar um número qualquer por um número composto (um número que tem outros fatôres além de si mesmo e a unidade), multiplica-se o número dado pelos fatôres dêsse número. Assim, para multiplicar por 6, multiplicamos primeiro por um dos fatôres, como 3, e depois multiplicamos o produto pelo outro fator, ou 2.

2) Para multiplicar um número por 9, podemos multiplicá-lo por 10 e depois subtrairmos o número dado do produto obtido.

3) Para multiplicar um número qualquer por outro, podemos multiplicar o primeiro por dois outros números cuja soma seja igual ao número multiplicador e, depois, somamos os produtos. Assim, para multiplicar 58 por 7, separamos o 7 em dois números, como 5 e 2. Multiplicamos 58 por 5 e depois por 2, e somamos os dois produtos.

4) Reagrupar o número de dois algarismos e dar a cada um dêsses algarismos o seu valor posicional. Multiplicar, então, cada um dêsses números pelo multiplicador e somar os produtos. Para achar o produto de 7 e 86, achar a soma dos produtos de 7 e 80 e 7 e 6.

Dos terceiro e quarto métodos as crianças mais inteligentes poderão deduzir um princípio matemático muito importante da multiplicação. Êsse princípio pode ser assim enunciado:

Podemos multiplicar uma soma indicada por um número, multiplicando cada parcela pelo número e somando os resultados.

Êsse princípio se aplica também à divisão. Um número de dois algarismos, como 86, pode ser expresso como $80 + 6$ para representar uma soma indicada. Para multiplicá-lo por 7, multiplicamos cada um dos números, 80 e 6, por 7 e depois somamos os produtos.

e. MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO DE DOIS OU MAIS ALGARISMOS

Usando Multiplicador de Dois Algarismos

A multiplicação por um número de dois algarismos consiste na multiplicação por um número simples e por um múltiplo de 10. Assim, multiplicar por 34 é o mesmo que multiplicar por 4 e por 30. Para que a criança en-

tenda a multiplicação por um número de dois algarismos, ela deve saber como multiplicar por 10 ou por um múltiplo de 10.

No começo dêste Capítulo vimos como introduzir a multiplicação por 10 em se tratando de grupos tais como 1×6 e 10×6. A criança aprendeu que, anexando um zero ao número, tal número fica multiplicado por 10. Aprendeu também que a posição dos números, ou seja a ordem dos fatôres, não altera o produto. Por isso, 10×2 é o mesmo que 2×10. Da mesma maneira, 20×3 é o mesmo que 3×20. A criança deve descobrir como multiplicar por 10 ou por um múltiplo de 10 sem o uso de materiais objetivos. No exemplo ao lado o 1 representa o número de dezenas. O produto será 24 dezenas. Uma vez que não há unidade no lugar das unidades, deve haver um zero naquele lugar para mostrar que o produto é 24 dezenas, ou 240.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 10 \\ \hline \end{array}$$

O professor pode introduzir a multiplicação por um número de dois algarismos usando problemas como o que segue:

"Um cacho de bananas contém 14 dúzias de bananas. Quantas bananas contém o cacho?"

A classe deve sugerir meios para encontrar a resposta. Entre outras poderão ser apresentadas as seguintes sugestões:

1) Somar quatorze 12 vêzes, ou doze 14 vêzes.

2) Pensar 14 como 10 e 4. Há 120 bananas em 10 dúzias, e 48 bananas em 4 dúzias. Somar 120 e 48.

3) Pensar 14 como 7 e 7. Achar o número de bananas em 7 dúzias, e dobrar êsse número.

4) Alterar a posição de 12 e 14. Pensar 12 como 10 e 2. Achar $10 \times 14 = 140$, e $2 \times 14 = 28$. Somar 140 e 28.

Há muitas outras soluções possíveis que as crianças podem sugerir para encontrar a resposta. Se a classe não fôr capaz de indicar pelo menos uma maneira de encontrar a resposta, as crianças não estarão prontas para a multiplicação por um número de dois algarismos. Seria mais proveitoso para o professor rever a significação da multiplicação antes da introdução de uma nova dificuldade no processo.

Os passos a seguir na procura do produto de 14 e 12 são:

1) Levar a classe a dar o valor posicional dos algarismos em 14 e, então, multiplicar.

(a)
$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 10 \\ \hline 120 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rl} 12 & \\ \times\ 14 & \\ \hline 48 & (4 \times 12) \\ +\ 120 & (10 \times 12) \\ \hline 168 & \end{array}$$

2) Levar as crianças a dizer a seqüência dos passos em (c). A classe deve entender por que

o zero é escrito no lugar das unidades quando multiplicado por 10.

3) Levar as crianças a ler o desenvolvimento do processo explicado no livro-texto e a dizer a razão para cada passo.

4) Levar as crianças à explicação dos passos usando como modêlo um exercício já efetuado.

5) Levar a classe a praticar o processo resolvendo exemplos semelhantes dados no livro-texto.

O leitor pode notar que o material exploratório não foi usado na apresentação. Se a criança estiver pronta para multiplicar por um número de dois algarismos, ela não deve ter necessidade de usar tal material. Ela deve entender o processo pelo conhecimento que tem da estrutura do sistema de numeração.

Uso de Computador Mecânico no Estudo da Multiplicação

Um recente estudo[2] comparou os resultados obtidos pelos alunos de quatro quintas séries, na multiplicação por número de dois algarismos, usando um computador mecânico, com os resultados obtidos por um grupo comparável de crianças que não usou o computador. As crianças que usaram o calculador mecânico resolviam os exemplos usando papel e lápis, e depois verificavam os mesmos através da máquina ou seguiam uma seqüência reversa na solução dos casos. A experiência continuou durante meio ano escolar.

Os resultados da experiência mostraram que o proveito, tanto em raciocínio como em computação, foi maior no grupo que usou o computador que no outro grupo que dêle não fizera uso. Contudo, a diferença de resultados entre os dois grupos não foi estatìsticamente significante. Os experimentadores concluíram que as crianças que usaram o computador ganharam mais em computação e compreensão do processo que aquelas que sòmente usaram papel e lápis. Além disso, o primeiro grupo mostrou um interêsse maior por Aritmética que o grupo que não usou o computador mecânico. Podemos, assim, concluir que resultados benéficos são quase certos numa classe que usa uma máquina de calcular para suplementar o trabalho regular com um multiplicador de dois algarismos.

Multiplicação Por Um Número de Três Algarismos

A multiplicação por um número de três algarismos é uma expansão do princípio aprendido na multiplicação por um número de dois algarismos. No exemplo ao lado, a criança pensa 120 como 100 e 20. Ela aprendeu como multiplicar por 20. O nôvo elemento consiste na multiplicação por 100. O produto de 1 centena e 426 é 426 centenas. Para mostrar centenas o número deve ser escrito dois lugares para a esquerda dos lugares das unidades. Por isso, dois zeros devem ser escritos, como no exemplo, para indicar que não há dezenas no lugar das dezenas, nem unidades no lugar das unidades.

$$\begin{array}{r} 426 \\ \times\ 120 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 426 \\ \times\ 120 \\ \hline 8520 \\ 42600 \\ \hline \end{array}$$

Um exemplo do tipo dado ao lado mostra por que o zero do multiplicador é sempre considerado como um guardador de lugar. O número 204 é igual a 200 e 4. A criança multiplica por 4 unidades e depois por 2 centenas. As soluções dadas em (a) e (c) são aceitáveis. A solução (b) não é recomendável.

$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 204 \\ \hline \end{array}$$

(a)	(b)	(c)
423	423	423
× 204	× 204	× 204
1692	1692	1692
84600	8460	846
86292	86292	86292

No exemplo (a), os zeros no segundo produto guardam lugares vazios. No exemplo (c), os zeros foram omitidos. A criança que usa esta forma entendeu o trabalho e descobriu que o primeiro algarismo de um produto parcial é sempre escrito na mesma coluna correspondente ao algarismo do multiplicador. Tal criança usa um método maduro e opera eficientemente sem o uso dos zeros como guardadores de lugares vazios.

No exemplo (b), a criança usa o zero final como um guia para colocar o produto parcial. Êste procedimento não tem significação e pode resultar em uma série de erros, se o multiplicador tiver zeros em posições alternadas, como no número 20 304.

QUESTÕES, PROBLEMAS E TÓPICOS PARA DISCUSSÃO

1. Que se entende por *processo inverso* em Aritmética?
2. Mostre como os quatro processos fundamentais se acham relacionados.
3. Mostre por que não pode haver 100 fatos fundamentais em cada um dos quatro processos fundamentais.
4. Indique, segundo o programa de seu Estado ou de sua escola, a distribuição do ensino da multiplicação pelas diferentes séries da escola elementar.

[2] FEHR (H. F.), McMEAN (G.) e SOBEL (M.), "Using Hand-Operated Computing Machines in Teaching Arithmetic", *The Arithmetic Teacher*, 3:145-150.

5. Qual o material que você considera essencial para o ensino dos fatos fundamentais em multiplicação?

6. Faça uma lista de seis generalizações a que as crianças podem chegar pelo conhecimento dos fatos de multiplicação.

7. Dê uma lista de seis diferentes maneiras de se encontrar a resposta para o agrupamento 6×7.

8. Explique por que você ensinaria ou não as tabelas em multiplicação.

9. Dê as razões por que você levaria ou não a criança a ler um fato, tal como $3 \times 4 = 12$, como "Três vêzes 4 são 12".

10. Dê, pelo menos, quatro diferentes maneiras que você usaria para levar a criança a fixar os fatos em multiplicação.

11. Mostre como verificar o exemplo ao lado pela eliminação dos noves.

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ \underline{26} \end{array}$$

12. A tabela de 6 na base duodecimal corresponde à tabela de 5 na base decimal. Os três primeiros fatos envolvendo 6 na base duodecimal são: $6 \times 1 = 6$; $6 \times 2 = 12$; $6 \times 3 = 18$. Dê os produtos restantes até 6×9.

13. Procure a resposta para o seguinte exemplo:

$$2 + 5 \times 6 - 4 + 9 \div 3$$

14. Você tem uma criança em sua classe que não consegue respostas corretas para os exemplos em multiplicação. Como poderia você descobrir a causa? Como corrigiria a deficiência?

15. Um professor leva suas crianças a usar fichas para mostrar os passos na procura do produto em multiplicação por um número de dois algarismos. Avalie êste método.

16. Para se elevar um número ao quadrado, multiplica-se o número por si mesmo. Ache o quadrado dos números 20 e 304.

SUGESTÕES PARA LEITURA

Adler, Irvin. *Magic House of Numbers.* New York: The John Day Co., 1957. pp. 9-54.

Brownell, W. A. *Learning the Multiplication Combinations.* Durham, N. C.: Duke University Press, 1943.

Brueckner, L. J., Grossnickle, F. E., and Reckzeh, J. *Developing Mathematical Understandings in the Upper Grades.* Philadelphia: The John C. Winston Co., 1957. Chapter 5.

Clark, John and Eads, Laura. *Guiding Arithmetic Learning.* Yonkers: World Book Co., 1954. Chapter 5.

McSwain, E. S. and Cooke, Ralph J. *Understanding and Teaching Arithmetic.* New York: Henry Holt and Co., 1958, Chapter 5.

Morton, Robert L. *Teaching Children Arithmetic.* Morristown, N. J.: Silver Burdett Co., 1953. pp. 1[illegible] 229.

Spitzer, Herbert. *The Teaching of Arithmetic.* Boston: Houghton Mifflin Co., 1954. Chapter 5.

Swain, Robert L. *Understanding Arithmetic.* New York: Rinehart and Co., 1957, pp. 80-88.