

METHODO
PARA
APRENDER A CONTAR
COM SEGURANÇA E FACILIDADE

João
OBRA POSTHUMA
DE

Condorcet
CONDORCET

TRADUZIDA FIELMENTE DO FRANCEZ E PRECEDIDA DE
UM RAPIDO ESBOÇO BIOGRAPHICO DO AUTOR

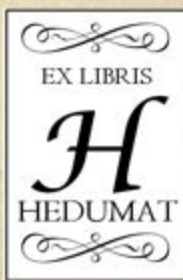
Alves
POR

G. S. M.



RIO DE JANEIRO
LIVRARIA NICOLAU — ALVES
Successores — ALVES & C. — editores
46 — RUA DE GONÇALVES DIAS — 48

1883



*Amigo e verdadeiro amigo:
João Paulo da Fonseca Junior
Porto Alegre.*

Oscar Castello.

Anno: $\frac{1899}{1899}$

A. MEMORIA

DE

L. A. A.

DEDICA

O TRADUCTOR.

PREFACIO

Offerecendo ao publico esta traducção da obra posthuma de Condorcet—*Moyens d'apprendre à compléter surement et avec facilité*—, pareceu-nos que seria util esboçar, ainda a traços rapidos, uma noticia dos principaes acontecimentos da vida de tão illustre quão infeliz servidor da humanidade.

Em esta crença escrevemos as linhas que se seguem ácerca de Condorcet, e que, sem encerrarem estudo biographico, contém o resumo de sua vida publica, esboçada com tanta fidelidade quanta permitem os estudos historicos a seu respeito.

M. J. Ant. Nic. Caritat, marquez
de CONDORCET

De nobre procedencia veio á luz, em 17 de Setembro de 1743 em Ribemonte, o marquez de Condorcet. Durante os primeiros annos de sua infancia dispensaram-lhe os seus maiores educação que, por efeminada, prejudicou o seu desenvolvimento physico sem, seguramente, concorrer para avigorar-lhe as faculdades intellectuaes. Já na idade de onze annos deixou elle as vestes femininas, que até

então trouxera, e foi entregue aos cuidados dos jesuitas de Reims, que lhe ministraram os primeiros elementos de instrução, até aos quinze annos, quando seguiu para Pariz a completar os estudos no collegio de Navarra. Cerca de um anno depois defendia elle uma these sobre *Analyse*, arguido por d'Alembert, Clairaut e Fontaine, e o fez com tal proficiencia que encheu de admiração seus povectos juizes, que logo lhe auguraram a brilhante carreira que trilhou. Foi este o seu primeiro passo no mundo scientifico. Dous annos depois escrevia elle um opusculo, dedicado a Turgot, intitulado *Mi-ha profissão de fé*, e aos vinte e dous annos dirigia á *Academia das sciencias* os *Ensatos sobre o calculo integral*, que constituem um trabalho de elevada importancia e que mereceu os maiores elogios da parte de d'Alembert.

Continuando em profundas indagações scientificas, escreveu ainda o illustre mathematico diversas obras sobre assumptos como fossem—*Calculo das differenças finitas*,—*Series recorrentes*,—*Calculo de probabilidades*—, etc., que o collocaram na altura dos maiores sabios de seu tempo e permittiram-lhe alcançar lugar distincto entre os que mais illustravam então a França, elevando-se á dignidade de secretario perpetuo da *Academia das sciencias* e tambem de membro da *Academia Franceza*, onde

distinguiu-se ainda por seus trabalhos litterarios, conseguindo grangear a admiração de Voltaire, com quem privou por muito tempo. Assim expandindo-se o seu talento, pôde elle, mais á vontade, exercitar o seu incomparavel poder analytico no estudo dos factos sociaes, como confirmam os seus trabalhos escriptos nas vesperas e durante a revolução de 89.

Digamos de passagem, que, ainda que entregue a novo curso de idéas, jámais deixou de cultivar assiduamente a sciencia que lhe dera luz ao espirito e que occupara exclusivamente os primeiros annos de sua brilhante carreira.

—Ao chegarem á Európa os primeiros écos da independencia americana, voltaram-se as vistas de Condorcet para o estado social do velho continente e particularmente de sua patria; seu espirito, ferido pela decomposição da monarchia absoluta e de todas as velhas instituições, presentio o abalo que ia soffrer a civilização occidental e talvez mesmo a terrivel convulsão que ameaçava sua propria patria. Suas idéas fixaram-se definitivamente nas instituições republicanas, de modo que ao nascer a revolução, tinha elle o espirito perfeitamente preparado e constituia um valioso elemento para auxiliar o regular desenvolvimento das novas idéas.

— Até 1786 se conservara em celibato e contava

já quarenta e quatro annos, quando o amor veio sorprehendel-o no meio de suas meditações e levou-o a contrahir nupcias com Mlle. Grouchy, irmã do depois marechal do mesmo nome. A felicidade desta amorosa união não foi entretanto muito longa; durou apenas oito annos que, formam o complemento da vida social deste grande servidor da humanidade.

— Deputado á legislativa e membro da constituinte e da Convenção, presidio a assembléa em 1792. Raramente era sua voz ouvida na tribuna, porém o seu conselho jámais foi despresado e o seu talento impunha-se, mesmo sem os artificios da oratoria, que lhe eram vedados pela fiação physica como pela repugnancia que seu character oppunha ás decisões tumultuosas.

Depois do 10 de Agosto foi encarregado pela assembléa de dirigir um manifesto á Europa e aos francezes explicando a suppressão do *Roi*. Foi eleito membro e tinha toda influencia na commissão composta de girondinos, a cargo da qual ficou o projecto de constituição que, uma vez apresentado, foi adiado por instancias da montanha, cujas opiniões acabaram por predominar, sendo nomeada outra commissão para organizar novo projecto, antes de cuja discussão foi decretada a arrestaão dos principaes chefes girondinos.

Condorcet manifestou-se energicamente contra o novo projecto e protestou contra a violencia feita aos seus correligionarios em um manifesto dirigido ao povo. Seu escripto foi denunciado á convenção por Chobot e esta chamou-o á barra para responder. Condorcet sabia o que esperar desse terrivel tribunal e procurou fugir ás suas garras.

A montanha só esperava occasião azada para obter da convenção a arrestação de mais esta victima. Condorcet havia, por occasião do julgamento de Luiz XVI, envidado todos os esforços para evitar a condemnação do desgraçado rei á morte; o seu voto foi « *pela pena mais grave que não seja a de morte* » e, uma vez condemnado o rei, appellou para o povo. Estes factos denunciavam claramente aos jacobinos a brandura e compassibilidade do seu carácter, e por isso não trepidaram em submettel-o a julgamento. Foi, pois, Condorcet condemnado á morte por contumacia, seus bens foram confiscados e seu nome inscripto na lista dos emigrados.

Algun tempo antes deste terrivel acontecimento fôra impresso, por ordem da Convenção, um dos ultimos escriptos que este grande espirito deu á luz *Quadro dos progressos do espirito humano*. — Como já dissemos, procurára elle fugir ás garras da Convenção, ao saber da denuncia que delle dera Cha-

bot ; com effeito conseguiu occultar-se durante nove mezes em casa de Mme. Vernet, cuja generosidade chegava assim ao ponto de, por tão preciosa existencia, expôr a propria cabeça. Durante este tempo escreveu elle o livrinho que ora traduzimos e por fim, receiando comprometter sua generosa guardiã, sahio sem ser presentido, atravessou Pariz e foi ter á aldêa de Clamart. Esta ultima peregrinação durou dous dias, ao cabo dos quaes a fome obrigou-o a entrar em uma miseravel taverna, onde suas maneiras, a brancura de suas mãos e a distincção de sua phisionomia despertaram suspeitas, que deram lugar a ser elle preso e conduzido a Bourg-la-Reine onde foi encarcerado a 7 de Abril de 1794. A 8, quando chegaram os guardas para conduzil-o a Paris encontraram-o morto, ao abrir a prisão, verificando-se que se havia elle envenenado, servindo-se para isso de uma substancia que trazia no castão de um anel.

Tão triste sorte concorre ainda para mais realçar o brilho desse talento privilegiado, que sem duvida teria prestado assignalados serviços á sua patria, se houvera sido chamado a trabalhar na sua reorganisação.

O TRADUCTOR.

Escola Castilho

Porto Alegre

ARITHMETICA

PARA APRENDER A CONTAR COM SEGURANÇA
E FACILIDADE

PRIMEIRA LIÇÃO (A)

Se em presença de dous objectos quaesquer que nos parecem semelhantes, dirigimos a attenção para cada um em particular e em seguida para a reunião dos dous, formamos a idéa de um objecto e de dous objectos, de *um* e de *dous*.

Se depois de *um* e *dous* vemos *tres*, *quatro*, formamos a principio a idéa de *um*, em seguida a de *dous*, de *tres*, de *quatro*, que não são *um* e que differem entre si ; isto é, formamos a idéa de *unidade* e a do que é *um* repetido mais ou menos vezes, a idéa de *numero*. (a)

Aos numeros foram dados nomes ; assim *um* reunido a *um* denomina-se *dous*, é a mesma cousa que *dous*, é igual a *dous* ; *um* e *um* são—*dous*

Um reunido a *dous* ou, o que é o mesmo, a *um* e a *um*, denomina-se *tres*, é igual a *tres* ; *um* e *dous* são—*tres*.

Um reunido a *tres* denomina-se *quatro*, é igual a *quatro*; *um* e *tres* são—*quatro*.

Um reunido a *quatro* denomina-se *cinco*, é igual a *cinco*; *um* e *quatro* são—*cinco*.

Um reunido a *cinco* denomina-se *seis*; *um* e *cinco* são—*seis*.

Um reunido a *seis* denomina-se *sete*; *um* e *seis* são—*sete*.

Um reunido a *sete* denomina-se *oito*; *um* e *sete* são—*oito*.

Um reunido a *oito* denomina-se *nove*; *um* e *oito* são—*nove*.

Um reunido a *nove* denomina-se *dez*; *um* e *nove* são—*dez*. (b).

Reunir *um* a *dous* é o mesmo que reunir *dous* a *um*, pois são sempre *dous* objectos e *um* objecto que se reúnem.

Um e *dous* são—*tres*; *um* e *tres* são—*quatro*; assim, *quatro* é o mesmo que *dous* a que se reunisse *um* e depois *um*, o mesmo que *dous* a que se reunissem *dous*; *dous* e *dous* são—*quatro*.

Quatro ou *um* a que se reuniu *um*, depois *um* depois *um*, é pois o mesmo que *dous* e *dous*, *trez* e *um*; são todos numeros iguaes.

Cinco e *um* são *seis*; *seis* e *um* são *sete*; *sete* e *um* são *oito*: assim *oito* é a mesma cousa que *cinco* a que se reunisse *um*, depois *um* e ainda *um*, porém a reunião de *um*, depois *um* e ainda *um* é a mesma cousa que reunir *tres*; então *oito* é o mesmo que *cinco* a que se reunissem *tres*: *cinco* e *tres* são *oito*.

Oito e *um* são *nove* e *um* são *dez*; logo *oito* e *dous* são *dez*; porém, como já vimos, *cinco* e *tres* são *oito*; logo *cinco*, *tres* e *dous* são *dez*. (c).

Diz-se de outro modo; a somma de *cinco* e *tres* é

oito; a *somma* de *seis* e *um* é sete; a *somma* de *cinco*, *tres* e *dous* é dez.

A *somma* de dous *numeros* é o *numero* que provém da reunião desses *numeros* um ao outro: a *somma* de muitos *numeros* é o *numero* que provém da reunião daquelles, successivamente uns aos outros.

Sabe-se, pois, já exprimir os *numeros* até dez, bem como *sommar* e exprimir sua *somma*, quando esta não é maior do que dez.

Do mesmo modo que temos até aqui procedido poderíamos continuar, *sommando* successivamente unidades a dez e dando a cada um dos *numeros* assim formados um nome particular; porém seria tal a dificuldade de reter de memoria tantos nomes que d'isso resultaria grande fadiga e inutil trabalho; convindo ainda notar que a cada *numero* que se tivesse formado poder-se-ia sempre accrescentar ainda uma unidade formando um novo *numero* ao qual seria necessario dar um novo nome; resultando d'ahi que para fazermos-nos entender teriamos necessidade de explicar esses nomes aos outros, que por sua vez ver-se-ião na necessidade de guardal-os de memoria. Para evitar tal dificuldade procurou-se exprimir todos os *numeros* com um pequeno *numero* de nomes, de modo que, qualquer que fosse o *numero* que se exprimisse, todos os que conhecessem o modo de formar os nomes podessem entendel-o.

Notou-se depois que praticando as contas, estas se tornariam muito longas se se tivesse sempre de escrever os nomes de todos os *numeros*, e procurou-se exprimil-os por meio de signaes ou caracteres que se podessem formar mais promptamente.

<i>Um</i> escreve-se.....	1
<i>Um e um</i> ou <i>dous</i> escreve-se...	2
<i>Um e dous</i> ou <i>tres</i> escreve-se...	3
<i>Um e tres</i> ou <i>quatro</i> escreve-se.	4
<i>Um e quatro</i> ou <i>cinco</i> escreve-se	5
<i>Um e cinco</i> ou <i>seis</i> escreve-se..	6
<i>Um e seis</i> ou <i>sete</i> escreve-se....	7
<i>Um e sete</i> ou <i>oito</i> escreve-se....	8
<i>Um e oito</i> ou <i>nove</i> escreve-se...	9
<i>Um e um, um</i> mais <i>um</i> escreve-se	1 + 1
<i>Um</i> mais <i>dous</i> escreve-se.....	1 + 2

O signal + entre dous numeros indica que se os considera como sommados um ao outro: *um* mais *um* é igual a *dous*, escreve-se:

$$1+1=2$$

Um mais *dous* é igual a *tres*, escreve-se:

$$1+2=3$$

O signal = indica que dous numeros são iguaes entre si (d) (B).

Do mesmo modo que para os nomes, foi necessario limitar a um pequeno numero de signaes os empregados para exprimir todos os numeros, evitando assim a difficuldade de reter muitos e a necessidade de inventar novos todas as vezes que novos numeros fossem formados.

Estes signaes chamam-se *algarismos*.

Este modo de exprimir todos os numeros com um pequeno numero de palavras e *algarismos*, chama-se *numeração*; sendo possivel exprimir os numeros de muitos modos, cada um d'elles chama-se *um systema de numeração*.

SEGUNDA LIÇÃO

Eis qual o systema de numeração em uso entre nós :

Um sommado a *dez* diz-se *dez e um* ou *onze*.¹

Um sommado a *dez e um* ou *dous* sommado a *dez* diz-se *dez e dous* ou *doze*.

Um sommado a *dez e dous* ou *tres* sommado a *dez* diz-se *dez e tres* ou *treze*.

Um sommado a *dez e tres* ou *quatro* sommado a *dez* diz-se *dez e quatro* ou *quatorze*.

Um sommado a *dez e quatro* ou *cinco* sommado a *dez* diz-se *dez e cinco* ou *quinze*.

Um sommado a *dez e cinco* ou *seis* sommado a *dez* diz-se *dezeséis*.

Um sommado a *dez e seis* ou *sete* sommado a *dez* diz-se *dezesete*.

Um sommado a *dez e sete* ou *oito* sommado a *dez* diz-se *dez e oito* ou *dezoito*.

Um sommado a *dez e oito* ou *nove* sommado a *dez* diz-se *dezenove*.

Para exprimir o numero seguinte ou *um* sommado a *dez e nove* não diremos *dez e dez*, pois a continuar chegaríamos a formar nomes tão longos que seria difficil comprehender e pronunciar. (e) Chama-se pois a este numero *dienta* ou *vinte*. Assim:

Um e dez e nove, *dez e dez* diz-se DIENTA ou VINTE.

Um e vinte diz-se *vinte e um*.

Um e vinte e um, *dous* sommado a *vinte* diz-se *vinte e dous*.

Um e vinte e dous, tres sommado a vinte diz-se vinte e tres.

Um e vinte e oito, nove sommado a vinte diz-se vinte e nove.

Um e vinte e nove, vinte e dez diz-se trinta ou trinta.

Vê-se logo que *um e trinta* deve-se dizer *trinta e um*, e assim por diante até *um e trinta e oito* que se diz *trinta e nove*.

Continuando diz-se:

<i>Um e trinta e nove, trinta e dez.....</i>	<i>quarenta.</i>
<i>Um e quarenta e nove, quarenta e dez...</i>	<i>cincoenta.</i>
<i>Um e cincoenta e nove, cincoenta. e dez</i>	<i>sessenta.</i>
<i>Um e sessenta e nove, sessenta e dez...</i>	<i>setenta.</i>
<i>Um e setenta e nove, setenta e dez.....</i>	<i>oitenta.</i>
<i>Um e oitenta e nove, oitenta e dez.....</i>	<i>noventa.</i>

Temos assim um meio de exprimir successivamente todos os numeros, desde *um* até *noventa e nove*.

Exprimindo depois :

<i>Um e noventa e nove, noventa e dez por cento ou... ..</i>	<i>cem.</i>
<i>Cem e cem ou duas vezes cem por.....</i>	<i>duzentos.</i>
<i>Cem e duzentos ou tres vezes cem por..</i>	<i>trezentos.</i>
<i>Cem e oitocentos ou nove vezes cem por.</i>	<i>novecentos.</i>

E collocando depois da palavra *cento* os nomes dos numeros inferiores a *cem* desde *um* até *noventa e nove*, para exprimir, que sommados a *cem*, a *duzentos*, a *novecentos* formam o numero que se quer indicar, poder-se-ha exprimir todos os numeros, de *unidade* em *unidade*, até *novecentos e noventa e nove*.

Um e novecentos e noventa e nove, novecentos e cem, dez vezes cem, diz-se mil.

Collocando antes da palavra *mil* o numero de vezes que ella é repetida e depois della as que exprimem o numero de *unidades* inferior a *mil*, que se lhe quer addicionar, ter-se-ha o meio de exprimir todos os numeros de *unidade* em *unidade*, até *novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Um sommado a este numero seria o mesmo que *mil* sommado a *novecentos e noventa e nove mil*, que *cem mil* sommado a *novecentos mil*, *dez vezes cem mil* ou *mil mil*. Para exprimir este numero emprega-se a palavra *milhão*; assim enunciando antes da palavra *milhão* o numero de vezes que ella é répetida, desde *uma vez* até *novecentas e noventa e nove vezes*, e depois della o numero inferior a um milhão, que é sommado ao numero de milhões para formar o que se quer indicar, podemos exprimir todos os numeros de *unidade* em *unidade*, até *novecentos e noventa e nove milhões, novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Se a este numero se junta uma unidade forma-se *novecentos e noventa e nove milhões e um milhão* ou *mil milhões* que se denomina *bilhão*, e empregando para os bilhões o mesmo meio de que nos servimos para os milhões poderemos ler todos os numeros até *novecentos e noventa e nove bilhões novecentos e noventa e nove milhões novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*, designando pois *mil bilhões* pela palavra *trilhão*, *mil trilhões* pela palavra *quatrilhão* e assim por

diante, se poderá exprimir todos os numeros sem se ser obrigado a empregar uma nova palavra até que se tenha necessidade de exprimir um numero mil vezes maior do que aquelle ao qual já se deu um nome. (a)

TERCEIRA LIÇÃO

Até aqui só sabemos exprimir por algarismos os números *um*, *dous*, até *nove*, com auxilio dos caracteres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Já fizemos ver que, se como estes caracteres quizessemos adoptar um para cada numero a memoria não os poderia guardar além de um termo muito proximo; foi portanto necessario adoptar um meio de exprimir todos os numeros com poucos caracteres, por exemplo, com os nove mencionados.

Para isso admittio-se que, exprimindo o primeiro algarismo o numero de unidades até nove, o que lhe ficasse immediatamente á esquerda exprimisse tantas dezenas quantas unidades elle exprimiria se estivesse isolado.

Assim na expressão 32 o algarismo da direita designa unidades, o que está á sua esquerda exprime dezenas; 32 exprime pois que se trata de um numero formado de *duas unidades*, e de *tres dezenas*; de *dous* e de *trinta*; a fórmula em algarismos 32 exprime *trinta e dous*.

Estabelecido isto, para exprimir um numero que, como *dez*, *vinte*, *trinta*, é composto de numero exacto de dezenas, bastará indicar que o algarismo que exprime esse numero está na segunda ordem, que está á esquerda do lugar onde se deveria collocar as unidades se se quizesse escrever o numero que as exprimisse: o meio mais

existem entre duas *centenas*, de 1 a 99 ; podemos pois exprimir todos os numeros de 1 a 999.

Continuando do mesmo modo e collocando um quarto algarismo á esquerda do que indica *centenas*, indicará elle tantas *dezenas* de *centenas* ou tantos *milhares* quantas *centenas* elle indicaria se recuasse uma ordem para a direita ; tantas *centenas* de *dezenas* quantas *dezenas* indicaria se recuasse duas ; finalmente tantos *milhares* quantas unidades indicaria se recuasse tres : assim, pois. 6452 indica *seis milhares, quatro centenas, cinco dezenas e duas unidades* e exprime o numero *seis mil quatrocentos e cincoenta e dous*.

O quinto algarismo, pois, exprimirá tantas *dezenas* de milhar, o sexto, tantas *centenas* de milhar, o setimo tantos *milhões*, o nono tantas *dezenas* de *milhões* e assim por diante, quantas unidades exprimiria se se achasse collocado na primeira ordem.

Um algarismo qualquer exprime, pois, sempre tantas *dezenas*, quantas unidades exprimiria se recuasse uma ordem para a direita ; tantas *centenas* quantas unidades exprimiria se recuasse duas ordens ; tantos *milhares* quantas unidades exprimiria se recuasse tres ; tantas *dezenas* de milhar, tantas *centenas* de milhar, tantos *milhões*, etc.... como exprimiria de unidades se recuasse quatro, cinco, seis ordens para a direita, e assim por diante.

O maior numero que se pôde exprimir com um só algarismo é 9 ; com dous é 99 ; com tres é 999 ; com quatro é 9999, em geral, o maior numero que se pôde exprimir com um certo numero de algarismos compõe-se de uma série de 9 ; pois elle conterá assim o maior numero de unidades, dezenas, cen-

simples é pois preencher o primeiro lugar com um symbolo ou character destinado unicamente a indicar que o algarismo que ahi estivesse exprimiria unidades e que o que se acha á esquerda exprime portanto dezenas. Tomou-se para tal fim o character 0 que se pronuncia *zero*:

Assim, *dez* escreve-se 10; o algarismo que se acha em segundo lugar indicando dezenas, 10 exprime uma *dezena* ou *dez*.

Vinte escreve-se 20; o algarismo que occupa o segundo lugar exprimindo dezenas, 20 exprime *duas dezenas* ou *dez e dez* ou *vinte*.

Como entre uma dezena e uma outra não ha senão nove unidades, os nove caracteres adoptados bastam para exprimir todos os numeros que existem entre as dezenas; a vista do que poderemos exprimir com dous ^{os}unicos algarismos todos os numeros até *noventa e nove* ou *nove dezenas mais nove unidades* $90 + 9 = 99$.

Prosigamos do mesmo modo e convençionemos que um algarismo á esquerda do que indica dezenas exprime tantas dezenas de dezenas ou tantas centenas quantas dezenas exprimiria se recuasse uma ordem para a direita.

Tomemos a expressão 234, o algarismo 4 indica *quatro unidades*, o algarismo 3 indica *tres dezenas*, o algarismo 2 indica duas centenas, tantas dezenas quantas unidades exprimiria se estivesse no lugar de 3, tantas centenas quantas unidades exprimiria se se achasse no lugar do 4, isto é, se recuasse duas ordens para a direita.

Assim, com o terceiro algarismo exprime-se *centenas*, desde *cem* até novecentos, e com os dous algarismos seguintes todos os numeros que

tenas, etc., que é possível indicar nas respectivas ordens.

O menor numero que se póde exprimir com dous algarismos é 10, com tres é 100, com quatro é 1000; em geral o menor numero que se pode exprimir com um determinado numero de algarismos é a *unidade* seguida de *zero*; pois a *unidade* é o menor dos numeros que podem occupar a ultima ordem á esquerda, e qualquer outro numero que fosse collocado em lugar de um dos *zeros* formaria um numero total maior.

O maior numero que se póde exprimir com um só algarismo e o menor que demanda dous, 9 e 10, differem entre si de uma *unidade*. O maior numero que se póde exprimir com dous unicos algarismos e o menor que demanda tres, 99 e 100, differem entre si de uma unidade. Em geral, o maior numero que se póde exprimir com um determinado numero de algarismos e o menor que demandar mais um differirão entre si de uma unidade; com effeito, dos dous numeros em questão o menor compõe-se de uma serie de 9; se se somma uma unidade ás nove d'este numero fórma-se uma dezena, que reunida ás nove fórma uma centena, que reunida ás nove fórma um milhar, etc., formando assim sempre um numero expresso pela—*unidade* seguida de tantos *zeros* quantos eram os *noves* do menor dos numeros.

D'este modo se poderá exprimir todos os numeros.

Com effeito, se a um numero qualquer composto da unidade seguida de *zeros* se augmenta um *zero* e o numero torna-se dez vezes maior, é claro que é sempre possível exprimir assim um numero maior

do que qualquer que se tivesse escripto, ficando este expresso por menor numero de algarismos.

Tomando o maior numero que se pôde exprimir com o numero de algarismos que compõem o numero que se quer escrever e collocando em lugar do 9 que occupa a casa das unidades 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, é claro que o numero ficará successivamente menor de uma, duas, tres, etc., e, finalmente, de nove unidades ; realizando a mesma operação com o algarismo 9 que occupa a casa das dezenas diminuiremos estas successivamente de uma, duas, etc., até nove dezenas e assim por diante, de modo que o numero ficará, a principio, unidade por unidade, diminuido de nove unidades; depois de uma dezena e nove unidades, duas dezenas e nove unidades, etc., conseguindo-se assim chegar até a combinação de algarismos que exprime o numero que se quer escrever.

Se se nos propõe escrever em algarismos um numero expresso por palavras, suppondo primeiro que não exceda a centenas, como por exemplo : *trezentos e cincoenta e dous*, observaremos que este numero é composto de 3 centenas, 5 dezenas e 2 unidades. Escrevendo primeiro o algarismo que indica centenas, em seguida e á direita o que indica dezenas e, ainda á direita d'este, o que indica unidades, teremos expresso em algarismos o numero 352.

Por quanto já sabemos, que escrevendo um algarismo á esquerda de outro elle indicará dezenas se o outro indicava unidades, e que, portanto, o algarismo collocado á direita de outro indicará unidades se o outro indica dezenas.

Se o numero encerrar quantidade maior do que centenas, como nos sabemos que as denominações mudam todas as vezes que o numero se torna mil vezes maior, isto é, que dez centenas ou mil unidades se denomina *mil* ou *milhar*, que mil milhares se denomina *milhão*, mil milhões, *bilhão*, etc., nos bastará escrever successivamente da esquerda para a direita o numero de centenas, dezenas e unidades de milhão, centenas, dezenas e unidade de milhar e assim até as unidades à medida e segundo a ordem em que se as pronuncia.

Assim, para escrever *trezentos e vinte e oito milhões quinhentos e setenta e quatro mil novecentos e sessenta e um*, escreve-se successivamente os algarismos 3, 2, 8, 5, 7, 4, 9, 6, 1.

328574961.

Quando não ha denominação de unidade, dezenas ou centenas não se pronuncia o respectivo nome; assim se se diz *trezentos e nove mil e trinta e um*, não se pronuncia o nome das dezenas de milhar nem o das centenas de unidades; como porém, escrevendo em algarismos o lugar é o que indica o valor de cada um, para que elles o tenham realmente é preciso collocar zero no lugar correspondente á denominação que não se pronuncia: escrever-se-ha pois, 309031, porquanto se se escrevesse 9, 3, 1 sem collocar zero no lugar que deviam occupar as centenas, ter-se-ha 931 *novecentos e trinta e um* e não *nove mil e trinta e um*.

Querendo escrever *nove mil*, escreve-se 9000 collocando 0 no lugar que occupariam as centenas, dezenas e unidades que não existem no numero dado.

Para enunciar um numero escripto em algaris-

nos procura-se conhecer a denominação por onde se deve principiar, assim, tendo 4325 e sabendo que o primeiro algarismo da direita indica unidades, acharemos que o segundo indica dezenas, o terceiro centenas e o quarto e ultimo milhares ; é pois por mil que principia o enunciado, dizendo antes de cada denominação o numero expresso pelo respectivo algarismo; enunciaremos então *quatro mil trezentos e vinte e cinco*.

Se tivéssemos o numero 327256498, como o primeiro algarismo da direita designa unidades, diríamos, indo da direita para a esquerda, *unidades, dezenas, centenas, milhares, dezenas de milhar, centenas de milhar, milhão, dezenas de milhão, centenas de milhão*; tendo chegado ao ultimo algarismo 3, enunciaríamos *trezentos e vinte e sete milhões duzentos e cinquenta e seis mil quatrocentos e noventa e oito, 327256498*.

Se ha zeros não se pronuncia as denominações correspondentes ás classes que elles occupam, pois só são escriptos para dar lugar a que cada algarismo seja collocado na ordem que lhe corresponde e que determina o seu valor, emquanto que na numeração expressa por palavras são as denominações que indicam o valor dos numeros e é portanto preciso supprimir aquellas a que não corresponde numero algum.

Se, por exemplo, temos 203005304, diremos *duzentos e tres milhões, cinco mil trezentos e quatro*, pois que não ha no numero nem dezenas de milhão nem centenas ou dezenas de milhar, nem dezenas de unidades. (A) (a)

— 16 —

Sabemos, pois, agora exprimir por palavras e por algarismos todos os números que se pôde formar, escrever um algarismo os que são pronunciados e exprimir por palavras os que vemos escriptos por algarismo.

QUARTA LIÇÃO

Acabou-se de ver como se formavam os numeros, reunindo unidades a unidades, dezenas a dezenas, centenas a centenas, etc.

Supponhamos agora conhecer dous numeros cuja somma nos seja necessario determinar, isto é, conhecer o numero que resultaria da reunião dos conhecidos, ou o numero total de objectos representados, parte por um destes numeros e parte pelo outro. (A)

Seja, por exemplo, que tenhamos 13 objectos em um lugar e 26 em outro, e que queiramos saber quantos são os objectos ao todo : isto se conseguirá sommando os dois numeros dados, ou reunindo 13 a 26.

Nota-se immediatamente, que 13 compõe-se de 1 dezena e de 3 unidades, que 26 compõe-se de 2 dezenas e 6 unidades ; sabemos já, que 3 unidades e 6 unidades formam 9 unidades, que 1 dezena e 2 dezenas formam 3 dezenas : assim, pois, os dois numeros encerram ao todo 9 unidades e 3 dezenas : sua somma é pois 39.

O mesmo processo é applicavel a dous numeros quaesquer : obtendo-se por meio d'elle a somma das unidades, das dezenas, das centenas que contém os dois numeros fica conhecida a somma desses numeros.

Tomemos, por exemplo, para sommar 135 a 643 ou 2345 a 3621 : notaremos em primeiro lugar que os dois primeiros numeros reunidos contém 8 unidades, 7 dezenas e 7 centenas ; sua somma será

pois, 778. Os dois segundos números reunidos conterão 6 unidades, 6 dezenas, 9 centenas e 5 milhares ; será a sua somma 5966. (a)

Assim procedendo concebe-se já quão difficil será guardar em memoria a somma das *unidades*, das *dezenas*, das *centenas*, dos *milhares*, quando os números a reunir se computarem de grande numero de algarismos ; vence-se porém facilmente a difficuldade escrevendo um número por baixo do outro de modo que fiquem unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas, centenas debaixo de centenas : isto feito, para sommar os dois primeiros números diremos : 5 e 3 são 8, escreve-se 8 sob as unidades ; 3 e 4 são 7 que se escreve sob as dezenas ; 1 e 6 são 7 que se escreve debaixo das centenas ; a somma é pois 778, e portanto 135 mais 643 fazem 778.

Do mesmo modo para os dois segundos números diremos : 5 e 1 são 6, que se escreve sob as unidades ; 4 e 2 são 6, escreve-se 6 ; 3 e 6 são 9, escreve-se 9 ; 2 e 3 são 5, escreve-se 5 : a somma será 5966 e portanto 2345 mais 3621 fazem 5966.

$$\begin{array}{r}
 \text{Formula} \\
 \text{da} \\
 \text{operação}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{r}
 135 \\
 + 643 \\
 \hline
 = 778
 \end{array}
 \right.
 \qquad
 \left\{
 \begin{array}{r}
 2345 \\
 + 3621 \\
 \hline
 = 5966
 \end{array}
 \right.$$

Tomemos agora os dois números 18 e 25 ; diremos 8 e 5 são 13, escreve-se 13 ; 1 e 2 dezenas são 3 dezenas ou 30, escreve-se 30 : tem-se assim 18 mais 25 igual a 13 mais 30.

-- 19 --

$$\left\{ \begin{array}{r} 18 \\ + 25 \\ \hline = 13 \\ + 30 \end{array} \right.$$

Diremos em seguida ; 3 unidades do primeiro numero e 0 do segundo são 3 unidades ou, mais simplesmente, 5 e 0 são 5, escreve-se 3 sob as unidades, 1 dezena e 3 dezenas são 4 dezenas, escreve-se 4 sob as dezenas : teremos assim 13 mais 30, que é o mesmo que 18 mais 25, igual a 43.

$$\left\{ \begin{array}{r} 13 \\ + 30 \\ \hline = 43 \end{array} \right.$$

Para chegar a este ultimo resultado foi-nos necessario effectuar duas operações que seria commodo reduzir a uma unica ; para isso notemos que depois de haver dito 8 e 5 são 13 não ha mais unidades a considerar : escreve-se então 3 unidades, restando 1 dezena que se conserva em memoria, dizendo 8 e 5 são 13, escreve-se 3 sob as unidades e resta 1 dezena : 1 dezena de reserva e 1 dezena são duas, e 2 são 4, escreve-se 4 sob as dezenas.

$$(B) \left\{ \begin{array}{r} 18 \\ + 25 \\ \hline = 43 \end{array} \right.$$

Tomemos ainda os dous numeros 4758 e 8967: diremos 8 e 7 são 15, escreve-se 5 sob as unidades e reserva-se uma dezena, dizendo vai 1; 1 dezena e 5 dezenas são 6 dezenas e 6 dezenas são 12 dezenas, escreve-se 2 sob ás dezenas e reserva-se 1 centena dizendo vai 1; 1 e 7 são 8 e 9 são 17, escreve-se 7 sob as centenas dizendo vai 1 (1 *dezena de centenas* ou 1 milhar); 1 e 4 são 5 e 8 são 13 (13 milhares) escreve-se 13, ficando o algarismo 3 sob os milhares: acha-se assim que 4758 mais 8967 é igual a 13725.

$$(C) \quad \left. \begin{array}{r} 4758 \\ + 8967 \\ \hline \end{array} \right\} = 13725$$

Sendo tres numeros a sommar segue-se o mesmo processo: collocam-se os tres numeros de modo a ficarem sempre as unidades todas na mesma columna vertical e assim as dezenas, centenas, etc.: sommam-se depois as unidades do 1º numero ás do 2º, a sua somma ás do 3º; as dezenas do 1º numero ás do 2º, a somma ás do 3º; as centenas do 1º numero ás do 2º, a somma ás do 3º e assim por diante; ao termo de cada uma destas addições parciaes de unidades, de dezenas, de centenas, etc., escrevem-se as unidades simples, as unidades de dezenas, de centenas que resultam dellas e reservam-se as dezenas de unidades, de dezenas, de centenas, etc., que forem apparecendo.

Assim, se se quer sommar os tres numeros 1759, 7837, 8453, depois de os haver escripto como dissemos á cima prosegue-se, dizendo 9 e 7 são 16 e 3

são 19, escreve-se 9 e reserva-se 1 dizendo vai 1; 1 e 5 são 6 e 3 são 9 e 5 são 14, escreve-se 4 e reserva-se 1 dizendo vai 1; 1 e 7 são 8 e 8 são 16 e 4 são 20 (ou 2 dezenas), escreve-se 0 e reserva-se 2 dezenas dizendo vão 2; 2 e 1 são 3 e 7 são 10 e 8 são 18, escreve-se 8, e vê-se que 1759 mais 7837 mais 8453 é igual a 18049.

$$\left\{ \begin{array}{r} 1759 \\ + 7837 \\ + 8453 \\ \hline = 18049 \end{array} \right.$$

(b) Reconhece-se agora com facilidade que seguindo a mesma marcha pôde-se executar a mesma operação sobre quantos números se queira, contemham elles quantos algarismos contiverem. Esta operação por meio da qual reune-se muitos números em um só, chama-se adição.

a) definição a mais geral; veja no fim do livro o nº 2, Livro quarto parte (B) nº 2)

QUINTA LIÇÃO.

Até aqui temos visto como podem ser formados todos os números pela adição, mais ou menos repetida, de unidades ou de outros números, successivamente; o número dez, por exemplo, pode ser formado adicionando-se a 7 tres unidades, assim: $7+3=10$: será facil portanto concluir que se de dez se tirarem successivamente tres unidades o resto será sete e que $10-3=7$. (A)

Os mesmos motivos que nos fizeram reconhecer a necessidade de reunir muitos números em um só, indicam-nos também que teremos muitas vezes de tirar ou *subtrahir* um número menor de um maior. Sendo assim, para executar a operação de que necessitamos ser-nos-ia necessario e também possível *subtrahir* successivamente, do maior número tantas unidades quantas forem as contidas no menor; é porém facil reconhecer que tal processo seria demasiado longo, mesmo quando o número a *subtrahir* não fosse muito grande.

Convirá pois procurar um modo mais simples de executar a operação: tentemos applicar aqui o meio que, com successo, já empregamos para a adição, *subtrahindo* as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, as centenas das centenas como sommamos antes (para facilitar a operação d' adição) unidades a unidades, dezenas a dezenas, centenas a centenas, etc.

(a) Colloquemos do mesmo modo um número por baixo do outro de maneira que os algarismos que indicam denominações semelhantes se correspondam, e convenhamos em collocar o número a *subtrahir* abaixo daquelle de que se quer *subtrahir*.

Seja por exemplo: 124 a subtrahir de 367; diremos, tirando 4 unidades de 7 unidade: ou tirando 4 de 7 restam 3 unidades ou restam 3; tirando 2 dezenas de 6 dezenas ou tirando 2 de 6 restam 4 dezenas ou restam 4; tirando 1 centena de 3 centenas ou tirando 1 de 3 restam 2 centenas ou restam 2; assim acharemos, que se se tira 124 de 367 restam 243; que 367 menos 124 é igual a 243.

$$\begin{array}{r} \text{Formula} \\ \text{da operação} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 367 \\ - 124 \\ \hline = 243 \end{array} \right. (1)$$

Seja agora 54 a subtrahir de 71; nota-se á primeira vista que não se pode subtrahir unidades de unidades, porquanto 4 é maior que 1: porém nos é possível tomar uma dezena ao maior dos números, que ficará ainda igual ou maior do que o numero a subtrahir. Restam ainda 6 dezenas de que se devem subtrahir 5 somente; o mesmo acontecerá em todos os casos semelhantes.

Co n effeito, supponhamos menor do que 5 o resto de dezenas, que o será pelo menos de 1, isto é, de 1 dezena; mas então elle era igual a 5 antes de lhe haveremos subtrahido uma dezena e por tanto os dois numeros dados conteriam o mesmo numero de dezenas, centenas... e differiriam unicamente pelas unidades. Mas o numero a subtrahir contém

(1) Segui aqui o processo ordinario da subtração; porém nas notas finaes apresento dois outros, dos quaes o ultimo me parece preferivel.

mais unidades e portanto era maior c'o que o numero de que se o quer subtrahir; a operação seria impossível. (b)

Diremos pois: tirar 4 de 1 é impossível; tomo uma das 7 dezenas, tomo uma dezena emprestada, 10 e 1 são 11, tiro 4 de 11 restam 7; tiro 5 dezenas de 6 dezenas que restam, pois que haviam 7 e já tirei uma; tiro 5 de 6, resta 1.

Vemos assim que havendo tirado 54 de 71 restam 17; que 71 menos 54 é igual a 17.

$$\left. \begin{array}{r} 71 \\ - 54 \\ \hline = 17 \end{array} \right\}$$

Se tivéssemos agora de subtrahir 4535 de 6223 diríamos: tirar 5 de 3 é impossível; tomo emprestada uma dezena; 10 e 3 (unidades que entram no primeiro numero) são 13; tiro 5 de 13, restam 8, tirar 3 (dezenas) de 1 unica dezena que resta, por quanto já tomei emprestada uma das duas que haviam, é impossível; tomo emprestada uma centena; uma dezena de dezenas e uma dezena que eu tinha são 11 dezenas; 10 e 1 são 11; tiro 3 (dezenas) de 11 (dezenas) restam 8 (dezenas). Tirar 5 centenas, de 1 centena que resta é impossível; tomo emprestada uma dezena de centenas ou mil; uma dezena de centenas e uma centena que me resta, 10 e 1 são 11, tiro 5 de 11, restam 6 centenas. Tiro finalmente 4 milhares de 5 milhares, pois que dos 6 que haviam já tomei um emprestado, tiro 4 de 5 resta 1; e acho que subtrahindo 4535 de 6223 restam 1688, que 6223 menos 4535 é igual a 1688.

— 25 —

$$\left\{ \begin{array}{r} 6223 \\ - 4535 \\ \hline = 1688 \end{array} \right.$$

Tomemos finalmente um ultimo exemplo e subtrahíamos 2453 de 3201; diremos: tirar 3 de 1 é impossivel; notaremos então que o primeiro dos numeros não contem dezenas, mas unicamente centenas; pode se pois tomar uma certa ou dez dezenas e dellas tomar emprestada uma dezena, reservando as nove outras. Assim diremos: tomo emprestada uma dezena; 10 e 1 são 11; tiro 3 de 11 restam 8.

Temos agora de subtrahir 5 (dezenas); como restam 9 das 10 que haviamos tom do, diremos: tirar 5 de 0 é impossivel, tomo emprestado uma dezena (de dezenas) da qual já tomei uma dezena, restam 9; tiro 5 de 9, restam 4; tirar 4 centenas de uma centena que resta é impossivel; tomo emprestado uma dezena de centenas; 10 e 1 que resta são 11; tiro 4 de 11 restam 7; tiro 2 milhares de 2 milhares que restam, resta 0; acho pois que subtrahido 2453 de 3201, restam 748; que 3201 menos 2453 é igual a 748.

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{r} 3201 \\ - 2453 \\ \hline = 748 \end{array} \right.$$

Pode-se agora observar que bastará sempre tomar emprestada uma unidade ao algarismo que exprime dezenas em relação ao que se quer subtrahir.

Com effeito, supponhamos que a esta unidade de dezenas já tivemos necessidade de tomar emprestada uma unidade, restarão 9; ora, o numero que se tem de subtrahir será sempre igual a 9 ou menor do que 9; e já vimos que, todas as vezes que se toma emprestada uma dezena, o que resta da totalidade dos numeros é necessariamente (e) igual ou maior do que o que ainda resta a subtrahir.

O que resta de um numero, depois de haver d'elle subtrahido um menor, o numero que representa o excesso do maior sobre menor, chama-se *difference* entre esses numeros.

A operação por meio da qual se tira, se subtrahе um numero de outro, chama-se *subtracção*.

Dá-se o nome de *arithmetic* à arte de fazer quaesquer operações sobre os numeros.

Justamente como, Augustus Comte bem define a arithmetica generalizando a definição:

Arithmetica é o calculo dos numeros.

SEXTA LIÇÃO

E' possível commetter engano fazendo uma addição ou uma subtracção. (a)

Seria pois conveniente conhecer um meio de verificar a operação.

Este meio é uma outra operação que deve dar um certo resultado d'antemão conhecido, se a primeira operação estiver certa.

Assim ; tendo-se subtrahido um numero de outro, por exemplo, 17 de 54 ; achou-se uma differença que será então de 37. Se esta differença de 37 for a verdadeira, será necessario que, addicionando-a ao menor numero 17, ache-se de novo o maior 54.

Com effeito, se 17 mais 37 são 54, tirando 17 de 54 restarão 37.

Se um numero somma lo a outro forma um certo numero dado, é claro que, se do ultimo numero subtrahirmos um dos primeiros, acharemos para differença o outro. (b)

Assim, por exemplo, depois de haver achado que 1728 menos 859 são 869.

$$\left\{ \begin{array}{r} 1728 \\ - 859 \\ \hline = 869 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{r} 869 \\ + 859 \\ \hline = 1728 \end{array} \right.$$

Sommaremos o menor dos numeros (859) com a differença (869) e, sendo a somma igual a 1728, concluiremos que não nos enganámos na operação.

Se a somma do menor numero com a differença não for igual ao maior numero, será forçoso concluir que houve engano na operação, podendo ser na somma ou na differença, ou em ambos; deve-se então recommençar uma e outra operação, e assim até que ellas apresentem o resultado que deve ter lugar, quando estiverem certas. (A)

Se sommando a differença com o menor dos numeros o resultado for igual ao maior, é ainda possível que se tenha commettido enganos nas duas operações, mas, de maneira tal que elles se compensassem; como se, tendo achado a differença menor do que realmente ella é, de duas unidades por exemplo, achassemos uma somma maior de duas unidades da que devesse ella ser; ou se, achando a differença menor achassemos a somma maior de duas unidades. Mas deve ser mui raro commetter-se nas duas operações enganos em sentido contrario e do mesmo numero em ambas.

E' muito provavel que a primeira como a segunda operação estejam certas, quando esta apresentar o resultado que deveria quando ambas estivessem realmente certas. E' mais provavel que ambas estejam certas do que contenham ambas precisamente um erro igual e em sentido contrario. (c)

Se se quer verificar uma addição, por exemplo esta

$$\left\{ \begin{array}{r} 357 \\ + 229 \\ + 342 \\ \hline = 928 \end{array} \right.$$

notaremos que, subtraído 229 da somma dos tres numeros, o resto será igual á somma dos dous restantes. Faremos por tanto as duas operações seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{r} 928 \\ - 229 \\ \hline = 699 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{r} 357 \\ + 342 \\ \hline = 699 \end{array} \right. \quad (1)$$

De ser a differença entre a somma de tres numeros e um delles igual á somma dos dous restantes, concluiremos que a operação foi bem feita ; de outra sorte seria preciso que nos houvessemos enganado em duas destas operações e que os erros se tivessem compensado, o que não é provavel. A operação ou operações por meio das quaes se verifica a que se tem feito, formam o que se chama *a prova*.

A somma de dous numeros é o maior mais o menor. Sejam 5 e 9, sua somma é 14, $5+9=14$. A differença entre dous numeros é o maior menos o menor ; a differença entre 9 e 5 é 4, $9-5=4$. Se juntarmos a somma com a differença, teremos o maior numero mais o menor, mais uma vez o maior menos o menor ; porém sommar um numero menos um outro é sommar o primeiro e subtrahir o segundo ; porquanto, juntando o primeiro

(1) A prova da addição conhecida ordinariamente é complicada e desgosta quasi todos os principiantes : a que lhe substituímos aqui é mais simples e, alem disso não se esquece tão facilmente.

juntou-se um numero maior do que devia ser de uma quantidade igual ao segundo.

As duas operações de sommar e subtrahir o menor dos numeros destroem-se: assim pois a somma — da somma e da differença dos dous numeros — será igual a duas vezes o maior;

$$9+5+9-5=99+=18, \quad 14+4=18,$$

14 mais 4 é igual a 18, é igual a duas vezes 9

Assim tambem, se da somma de dous numeros se subtraher a sua differença, tem-se o maior numero, mais o menor, de que é necessario subtrahir o maior menos o menor: mas subtrahir o maior menos o menor é o mesmo que subtrahir o maior e sommar o menor; porque subtrahindo unicamente o maior, tira-se um numero que excede o que se deveria tirar de um numero igual ao menor; tira-se pois este de mais, e então deve-se sommal-o para restabelecer a identidade; teremos portanto que a differença entre a somma e a differença de dous numeros é igual a duas vezes o menor dos numeros; ao que se deve sommar ainda o maior e subtrahil-o de novo, operações que se destroem; a differença ficará pois igual a duas vezes o menor dos numeros: 14 menos 4 é igual a 10, que é o dobro de 5,

$$(g) \quad \left\{ \begin{array}{l} (9+5)-(9-5) \\ = 9-9+5+5 \\ = 5+5 = 10 \\ 14-4 = 10 \end{array} \right.$$

SETIMA LIÇÃO

Acontecendo que nos seja necessario sommar, um com o outro, dous numeros iguaes entre si, poderemos lançar mão do processo que para tal fim acabamos de estudar; mas, se se tratar de sommar vinte, trinta, cem numeros iguaes entre si, tal processo daria em resultado uma operação extremamente longa: ser-nos-ha, pois, util conhecer um meio que nos permitta abrevial-a.

Para procurar esse meio tomemos o numero 254 e suponhamos que elle deve ser repetido cinco vezes, ou, o que é o mesmo, sommado quatro vezes a si mesmo. Para executar a addição escreveremos cinco vezes este numero, em seguida sommaremos quatro vezes o numero 4 a si mesmo, o que dá 20, escreve-se 0 no respectivo lugar e leva-se 2 para a columna seguinte; feito isto, teremos de sommar quatro vezes o numero 5 dezenas a si mesmo, o que dá 25, a que juntaremos 2 que trouxemos da columna precedente, prefazendo assim 27; escreve-se 7, levando 2 para a columna seguinte; finalmente, sommaremos quatro vezes o numero 2 centenas a si mesmo, o que dá 10, a que juntaremos ainda 2 que trouxemos da precedente columna, prefazendo assim 12; escreve-se 12 e teremos assim 254 tomado cinco vezes, sommado quatro vezes a si mesmo; igual a 1270

$$\left. \begin{array}{r} 254 \\ + 254 \\ + 254 \\ + 254 \\ + 254 \\ \hline \end{array} \right\} = 1270$$

Porém em vez de dizer 4 e 4 são 8 e 4 são 12 e 4 são 16 e 4 são 20, poderemos dizer, 4 repetido cinco vezes, cinco vezes 4 são 20; escreve-se 0 e guarda-se 2; em vez de 5 e 5 são 10 e 5 são 15 e 5 são 20 e 5 são 25, diremos 5 repetido cinco vezes ou cinco vezes 5 são 25 e 2 de reserva são 27; escreve-se 7 e guarda-se 2; finalmente, poderemos dizer cinco vezes 2 são 10 e 2 de reserva são 12, escreve-se 12. Este meio é muito mais espedito e apenas exige que se conserve em memoria que cinco vezes 4 são 20, que cinco vezes 5 são 25, que cinco vezes 2 são 10.

Seja agora o numero 3546 e procuremos a somma deste numero repetido 7 vezes ou sommado 6 vezes a si mesmo: diremos sete vezes 6 são 42, escreve-se 2 e reserva-se 4; sete vezes 4 são 28 e 4 de reserva, são 32; escreve-se 2 e reserva-se 3; sete vezes 5 são 35 e 3, de reserva, são 38; escreve-se 8 e reserva-se 3; sete vezes 3 são 21 e 3, de reserva, são 24; escreve-se 24.

$$\text{Formula} \left\{ \begin{array}{l} + \quad 3546 \\ \quad \quad 7 \\ \hline = 24822 \end{array} \right.$$

Fazer a somma de sete numeros iguaes entre si, do mesmo numero repetido sete vezes, ou tomar sete vezes o mesmo numero, chama-se tambem *multiplicar* o numero por 7.

O numero que se deve sommar consigo mesmo, repetir ou tomar muitas vezes, chama-se *multiplicando*; o que designa quantas vezes o primeiro deve ser tomado, chama-se *multiplicador*.

O numero que se obtem tomando um certo numero de vezes outro numero, multiplicando um numero por outro, chama-se *producto*. A operação por meio da qual se fórma o producto, chama-se *multiplicação*, e acabamos de ver que ella não é mais do que uma *addição abreviada*.

No exemplo precedente 3546 é o *multiplicando*, 7 o *multiplicador*, 24822 o *producto*; o sig'ial \times indica que o numero que o precede deve ser multiplicado pelo que o segue. A formula acima exprime que 3546 multiplicado por 7 é igual a 24822.

Tres vezes 1 é o mesmo que uma vez tres: com effeito, tres vezes 1 é a unidade repetida tres vezes, e uma vez 3 não é mais do que 3 ou uma unidade repetida tres vezes.

Cinco vezes 9 é o mesmo que nove vezes 5, por quanto 9 é a unidade repetida nove vezes, e cinco vezes a unidade são 5; cinco vezes 9 é pois a mesma cousa que 5 repetido nove vezes, o mesmo que nove vezes 5.

$$9 \times 5 = 5 \times 9$$

Se tivéssemos de multiplicar 2 por 3 e o producto achado multiplicar por 4, teriamos

$$2 \times 3 = 6, \quad 6 \times 4 = 24;$$

porém em vez de 6 poderiamos escrever 2×3 , por quanto as duas expressões designam o mesmo numero; teremos pois

$$2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Acabamos de ver que

$$6 \times 4 = 4 \times 6, \quad 4 \times 6 = 4 \times 2 \times 3$$

e por consequencia

$$2 \times 3 \times 4 = 4 \times 2 \times 3$$

Donde se conclue que, tendo de multiplicar successivamente muitos numeros, uns pelos outros, o producto será o mesmo, qualquer que seja a ordem da multiplicação; como já vimos que a somma era a mesma, qualquer que fosse a ordem em que estivessem collocadas as parcelas.

Poderemos agora, sem auxilio de qualquer operação nova, multiplicar um numero de um só algarismo por outro, se formarmos e guardarmos de memoria os valores dos productos de

	2—3—4—5—6—7—8—9,	por 2
de.....	3—4—5—6—7—8—9,	por 3
de.....	4—5—6—7—8—9,	por 4
de.....	5—6—7—8—9,	por 5
de.....	6—7—8—9,	por 6
de.....	7—8—9,	por 7
de.....	8—9,	por 8
de.....	9,	por 9

Com effeito, não ha necessidade de reter em memoria o producto de 2 por 3 desde que conhecemos o de 3 por 2 que é a mesma cousa, e assim por diante: serão pois apenas 36 productos que precisaremos formar previamente e reter de memoria,

OITAVA LIÇÃO

Sabemos já qual o meio a empregar para achar o producto de um numero qualquer por outro formado de um só algarismo. Precisamos agora comprehender a applicação de tal processo aos casos em que o multiplicador tem muitos algarismos. Seja, por exemplo, 467 a multiplicar por 238: seguiremos a mesma marcha que até aqui nos tem servido, encarando o numero 238 como formado de 8 unidades, 3 dezenas e 2 centenas; assim não teremos mais do que multiplicar 467 por 8 unidades, por 3 dezenas ou 30 e por 2 centenas ou 200, e depois sommar estes tres productos para obter o de 467 por 238.

Ora, nós já sabemos multiplicar 467 por 8 unidades, agora observaremos que multiplicar por 3 dezenas é o mesmo que multiplicar por tres e depois o producto por 10, e que multiplicar por 10 é tornar o numero dez vezes maior, de sorte que elle vem a conter tantas dezenas quantas unidades simples continha a principio, tantas centenas quantas dezenas, e assim por diante, ou, em geral, tantas dezenas quantas unidades.

Para obter, pois, o producto de 467 por 3 dezenas, multiplicaremos este numero por 3 e em seguida tornaremos o producto obtido dez vezes maior, o que se consegue collocando 0 á direita dos algarismos que o exprimem.

Por fim observaremos de um modo analogo que multiplicar por 2 centenas é o mesmo que multiplicar por dous a principio e depois o producto por 100, tornando o cem vezes maior, fazendo com que elle contenha tantas centenas quantas unidades

continha, o que se consegue collocando dous 0 á direita dos algarismos que o exprimem.

Diremos pois: 8 vezes 7 são 56, escreve-se 6 e reserva-se 5; 8 vezes 6 são 48 e 5 de reserva, são 53; escreve-se 3 e reserva-se 5; 8 vezes 4 são 32 e 5 de reserva, são 37, escreve-se 37: o producto de 467 por 8 será pois 3736.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{r} 467 \\ \times 8 \\ \hline = 3736 \end{array} \right.$$

Diremos depois : 3 vezes 7 são 21, escreve-se 1 e reserva-se 2; 3 vezes 6 são 18 e 2 de reserva, são 20, escreve-se 0 e reserva-se 2; 3 vezes 4 são 12 e 2 de reserva, são 14, escreve-se 14: teremos pois o producto de 467 por 3, igual a 1401; porém este producto deve ser multiplicado por dez ou igual a 14010.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{r} 467 \\ \times 3 \\ \hline = 1401 \end{array} \right. \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{r} 467 \\ \times 2 \\ \hline = 934 \end{array} \right.$$

Finalmente diremos: 2 vezes 7 são 14, escreve-se 4 e reserva-se 1; 2 vezes 6 são 12 e 1 de reserva, são 13, escreve-se 3 e reserva-se 1; 2 vezes 4 são 8 e 1 de reserva, são 9, escreve-se 9: o producto de 467 por 2 é 934; mas o producto de 467 por 200 deve ser cem vezes maior; será pois 93400.

Para termos agora o producto de 467 por 238 é preciso sommar os tres productos parciaes de 467

— 37 —

por 8, por 30 e por 200; faremos pois a adição dos tres productos e acharemos sua somma igual a 111146: o producto de 467 por 238 será pois igual a 111146.

$$(4) \quad \left(\begin{array}{r} 3736 \\ + 14010 \\ + 93400 \\ \hline = 111146 \end{array} \right.$$

Póde-se entretanto simplificar o modo de executar esta operação, multiplicando em primeiro lugar o numero 467 por 8 e escrevendo o respectivo producto; multiplicando-o em seguida por 3 e escrevendo, immediatamente abaixo do primeiro, este novo producto, de modo que as unidades do segundo correspondam ás dezenas do primeiro; finalmente, multiplicando por 2 e escrevendo, immediatamente abaixo dos dous primeiros, este terceiro producto, de modo que as suas unidades correspondam ás dezenas do segundo e ás centenas do primeiro.

$$\left(\begin{array}{r} 467 \\ \times 238 \\ \hline 3736 \\ 14010 \\ 93400 \\ \hline = 111146 \end{array} \right.$$

Assim, para achar o producto de um numero por outro qualquer, multiplica-se-o pelos numeros simples que formam o multiplicador, começando pelas unidades, e collocando os productos formados de modo tal, que as suas unidades passem a exprimir unidades, dezenas, centenas, milhares, etc., conforme exprimir o algarismo do multiplicador, que serviu para o formar, unidades, dezenas, centenas, milhares, etc. (a) A

NONA LIÇÃO

Assim como sentimos a necessidade de conhecer o resultado da adição de muitos números iguaes, pôde acontecer que, conhecendo um número, tenhamos necessidade de saber quantas vezes seria necessario repetir um outro número menor para formar o primeiro; ou ainda, qual seria o número, que repetido um número dado de vezes, produziria o primeiro.

Se tivermos, por exemplo, o número 2124, pôde acontecer que precisemos conhecer quantas vezes será preciso repetir o número 6 para obter 2124; quantas vezes o número 6 é contido em 2124; ou ainda, conhecer qual é o número que repetido seis vezes dá 2124, ou que é contido seis vezes em 2124.

Ser-nos-hia necessario saber: que número de vezes 6 é contido em 2124 ou quantas vezes é necessario repetir 6 para formar 2124, se, por exemplo, tendo 2124 objectos a distribuir, devendo dar 6 a cada pessoa, quizessemos saber a quantas pessoas se estenderia a distribuição: teriamos necessidade de saber que número é contido 6 vezes em 2124, qual o número que repetido 6 vezes dá 2124, se, tendo 2124 objectos a distribuir igualmente por 6 pessoas, quizessemos saber qual o número de objectos a dar a cada pessoa.

Se, tendo 2124 objectos, quizessemos saber por quantas pessoas os poderiamos distribuir, dando 6 objectos a cada uma, ser-nos-hia facil reconhecer, que subtrahindo 6 de 2124, do resto subtrahindo ainda 6 e assim por diante, poderiamos dar 6 a tantas

pessoas quantas fossem as vezes que pudéssemos effectuar a subtracção.

Se se tratar de partilhar igualmente o mesmo numero de objectos entre 6 pessoas, veremos que nos será necessario lançar mão de 6 objectos para dar um a cada pessoa e que, portanto, poderemos dar a cada pessoa tantos objectos quantas forem as vezes que poderemos por ellas distribuir 6; consequentemente, tantas vezes quantas poderemos subtrahir 6 de 2124. (A)

Poderíamos executar immediatamente esta operação; porém é facil reconhecer, por mais simples que seja cada subtração em particular, quão longa e penosa se tornaria a operação pelo grande numero de subtracções a fazer. (B)

Procuremos, pois, abrevial-a: para isso observe-mos que se, por exemplo, subtrahirmos 60 em vez de 6, teremos subtrahido dez vezes 6, e que, portanto, poderemos subtrahir 6 tantas dezenas de vezes quantas vezes poderemos subtrahir 60.

Assim tambem, se subtrahirmos 600 em vez de 60 ou em vez de 6, teremos subtrahido dez vezes 60, ou, o que é o mesmo, com vezes 6: poderemos pois subtrahir 60 tantas dezenas de vezes, e 6 tantas centenas de vezes quantas vezes poderemos subtrahir 600.

Como não nos é possivel subtrahir 6000 de 2124, por ser este menor, começaremos por subtrahir 600, tantas vezes quantas a operação fôr possivel, e teremos assim o numero de centenas de vezes que é possivel subtrahir 6.

Com effeito, não póde então restar senão um

numero inferior a 600, do qual 6 não pôde ser subtraído cem vezes.

O numero de vezes, que se pôde subtrahir 600, é menor do que 10; porque dez vezes 600 são 6000, e o numero dado é menor do que 6000.

Tomando o resto, que é menor do que 600, delle subtrahiremos 60, tantas vezes quantas a operação for possível, e teremos assim o numero de dezenas de vezes que delle é possível subtrahir 6 e um resto menor do que 60; o numero de dezenas de vezes que se fez a subtracção será menor do que 10, porquanto o numero de que subtrahimos 60 é, como já vimos, menor do que 600.

Finalmente, tomando este ultimo resto que se obtém, delle subtrahiremos 6 tantas vezes quantas for possível, e teremos o numero de vezes que 6 pôde delle ser subtraído, numero este menor do que 10, pois que o resto era menor do que 60.

Teremos, finalmente, em primeiro lugar, o numero de centenas de vezes, em seguida o de dezenas de vezes e por ultimo o numero de simples unidades de vezes que se pôde subtrahir 6; consequentemente o numero de vezes que 6 pôde ser subtraído de 2124.

Porém, se tivéssemos de subtrahir 600 de 2124, veriamos, praticando a operação, que nos restariam tantas unidades e dezenas quantas existiam em 2124, pois que delle não teriamos de subtrahir quer unidades, quer dezenas; reconheceriamos ter 6 centenas a subtrahir de 21 centenas, 6 de 21, e que a subtracção pôde ser feita 3 vezes; que por consequencia 6 só pôde ser subtraído tres centenas de vezes, e que restarão 3 centenas; mas, do numero 2124 nos restavam ainda 24 unidades; teremos por-

tanto um resto total igual a 324. Procuraremos depois quantas vezes se póde subtrahir 60 de 324 ; notaremos, em primero lugar, que nos restam as 4 unidades (pois que não temos unidades a subtrahir) e teremos sómente 6 dezenas a subtrahir de 32 dezenas, 6 de 32.

Esta operação póde ser repetida cinco vezes; 6 póde pois ser subtraído cinco dezenas de vezes e restar-nos-hão 2 dezenas, ás quaes reuniremos 4 unidades, que já sabemos nos restarem.

Teremos assim 24 de que devemos subtrahir 6, e acharemos que só se póde fazer isso 4 vezes. Teremos, em summa, achado que 6 póde ser subtraído de 2124, 3 centenas de vezes, 5 dezenas de vezes e 4 vezes, ou 354 vezes (C) (1)

Quando se póde subtrahir um numero de um outro um certo numero de vezes, até que o resto seja menor do que o primeiro numero, concluímos que este primeiro numero é contido no segundo o mesmo numero de vezes, com um resto : assim, por

(1) Esta prova da divisão pareceu-me dever ser substituída á prova ordinaria, no texto disse a razão disso, porque neste periodo da instrucção os alumnos devem estar sufficientemente exercitados para sentil-a, e porque é importante deixar ver no ensino o menos que fôr possível ás *denominações e methodos arbitraríos*. Ouvi um grande philosopho censurar a algebra por querer ella conduzil-o á verdade despoticamente, sem dizer-lhe porque o fazia seguir tal ou tal caminho, e como se tinha vindo a saber que um tal conduziria ao resultado desejado : confessava elle que esta falta, não do methodo em si, mas dos livros, inspirava-lhe um certo desgosto involuntario por este estudo.

exemplo, 6 é contido 3 vezes em 21, com o resto 3; 6 é contido 5 vezes em 32, com o resto 2; 6 é contido 4 vezes em 24 e nada resta.

Achar quantas vezes um numero pôde ser contido em outro, chama-se *dividir* o segundo pelo primeiro, porque isto importa dividir o segundo em tantas partes quantas são as unidades do primeiro.

Achar quantas vezes 6 é contido em 2124, e dividir 2124 por 6; é dividir 2124 em seis partes iguaes, pois que uma das partes repetida seis vezes fará 2124. O numero que se divide chama-se *dividendo*; aquelle pelo qual se divide chama-se *divisor*; o numero de vezes que o divisor é contido no dividendo chama-se *quociente*.

Assim, no presente exemplo, 2124 é o *dividendo*, 6 o *divisor*, 354 o *quociente*.

Como as subtracções successivas que se precisa executar para saber quantas vezes um numero é contido em outro, podem ainda conduzir a mui longa operação, procuremos, para o mesmo fim, um meio mais simples.

Notemos, em primeiro lugar, que o primeiro numero é contido no segundo pelo menos uma vez, pois que o segundo é necessariamente maior do que o primeiro; em seguida, que é contido nove vezes no mais, pois que, se fosse contido dez vezes ou mais de dez vezes, teriamos podido subtrahir ao menos uma vez este mesmo numero, tornado dez vezes maior; enquanto que, seguindo a marcha da operação precedente, vimos não ser mais isto possível.

Diremos pois: em 21 quantas vezes ha 6? supponho que ha quatro vezes; quatro vezes 6 são 24, mas 24 é maior do que 21, $24 > 21$, ha pois menos

de quatro vezes; supponhamos que haja tres vezes; tres vezes 6 são 18, 18 é menor do que 21, $18 < 21$, ha pois menos de quatro vezes e mais de tres; ha então *tres vezes* com um resto.

Em geral, será preciso fazer estas tentativas até que se tenha achado dois numeros consecutivos taes, que o producto do menor pelo divisor seja menor do que o dividendo, e o producto do maior pelo divisor seja maior do que o dividendo. Se o producto do divisor por 9 é menor do que o dividendo, é claro que o divisor será contido no dividendo nove vezes, pois que se sabe de antemão que o producto do divisor por 10 é maior do que o dividendo. Com effeito, será então o menor dos numeros o quociente, pois que o divisor será contido este numero de vezes no dividendo, com um resto menor do que o divisor.

Supponha-se que temos agora 25348 a dividir por 7; notaremos em primeiro lugar que o quociente não póde conter dezenas de milhar, pois que sete vezes 10000 são 70000 > 25348 . mas que póde conter milhares, pois que sete vezes 1000 são 7000 < 25348 . Diremos pois: em 25 (milhares), quantas vezes ha 7? ha tres vezes; tres vezes 7 são 21, tiremos 21 de 25, restarão 4 (milhares), escreveremos pois 3 (milhares) no quociente. Para termos depois o numero de centenas de vezes que 7 póde ser contido no numero que resta, consideraremos que além do resto 4 (milh.) temos tres centenas que o dividendo continha; diremos então: em 43 (cent.) quantas vezes ha 7? ha seis vezes (seis centenas de vezes); seis vezes 7 são 42, resta uma centena. Para achar o numero de dezenas de vezes que 7 póde ser contido no novo resto, notaremos que além de uma centena

restam-nos 4 dezenas, que continha o dividendo : teremos assim quatorze dezenas, e diremos : em 14 (dezenas) quantas vezes ha 7? ha duas (duas dezenas de vezes); duas vezes 7 são 14, que subtrahindo de 14 dá para resto 0.

Para achar o numero de vezes que 7 pode ser contido no numero que resta, observaremos que só nos restam as 8 unidades do dividendo, e diremos: em 8 quantas vezes ha 7? uma vez e resta 1. Assim saberemos que em 25348, 7 é contido tres mil vezes, seis centenas de vezes, duas dezenas de vezes e uma vez, com o resto 1; ou 3621 vezes, com resto 1; o quociente de 25348 por 7 será, portanto, 3621 com o resto 1.

$$(D) \left\{ \begin{array}{r} 25348 \mid \\ 7 \mid 3621, \text{ resto } 1 \\ \hline 43 \\ 14 \\ 8 \end{array} \right.$$

Seja ainda 1634 a dividir por 8; observaremos que o quociente não pôde conter mais do que centenas; e diremos : em 16 (centenas) quantas vezes ha 8? duas (centenas de vezes); duas vezes 8 são 16; tiramos 16 de 16, resta 0. Teremos depois 3 (dezenas) sómente, e diremos: em 3 (dezenas) quantas (dezenas de vezes) ha 8? nem uma (dezena de vezes). O quociente não poderá então conter dezenas; e diremos em seguida, não havendo mais senão 34 unidades, em 34 quantas vezes ha 8? quatro vezes; quatro vezes 8 são 32;

— 46 —

tira-se 32 de 34, restam 2: 8 será pois contido em 1634, duas centenas de vezes, nenhuma dezena de vezes, quatro vezes, ou 204 vezes, com resto 2, o quociente da divisão de 1634 por 8 será, portanto, 204, resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 1634 & \\ 8 & 204, \text{ resto } 2 \\ \hline 34 & \end{array}$$

DECIMA LIÇÃO

Admittamos agora que o divisor tenha muitos algarismos; poderemos empregar ainda o mesmo methodo

Por exemplo, tendo 27237 a dividir por 123, procuraremos, em primeiro lugar, qual é a mais elevada denominação numerica que possa ter o quociente, acharemos que não pôde conter milhares, pois que mil vezes 123 são $123000 > 27237$; mas que pôde conter centenas, pois que 100 vezes 123 são $12300 < 27237$. Em seguida observaremos que as dezenas e as unidades do dividendo não influem sobre o numero de centenas de vezes que o divisor pôde nelle ser contido, e que, em geral, todo numero de denominação inferior á do que deve entrar no quociente, não influe sobre elle, pois que o augmento de uma unidade neste ultimo numero, importa, pelo menos, augmento de uma unidade da ordem deste mesmo numero, no dividendo.

Da mesma maneira que na nona lição, para saber que numero de vezes é 123 contido em cada um dos dividendos parciaes que teremos de formar, observaremos que esse numero não pôde ser maior do que 9; procuraremos então, desde 1 até 9, dous numeros consecutivos taes, que o producto do divisor pelo menor seja menor, e o producto do divisor pelo maior seja maior do que o dividendo. Se o producto do divisor por 9 é menor do que o dividendo, ter-se-ha, por isso mesmo, 9 no quociente.

Assim diremos: em 272 (centenas) quantas vezes ha 123? duas (centenas de vezes); 2 vezes 123 são

246; tirando 246 de 272, restam 26 (centenas), e 3 (dezenas) que ha no dividendo, são 263; em 263 (dezenas) quantas vezes ha 123? duas (dezenas de vezes), 2 vezes 123 são 246; tirando 246 de 263, restam 17 (dezenas), que com as 7 unidades do dividendo, são 177. Em 177 quantas vezes ha 123? uma vez; tirando 123 de 177 restam 54. O quociente será pois composto de duas centenas, duas dezenas e uma unidade; será 221, com o resto 54.

$$\begin{array}{r|l}
 27237 & \\
 123 & 221 \\
 \hline
 263 & \\
 177 & \\
 \text{Resto...} & 54
 \end{array}
 \quad (A)$$

Compreende-se que quando o divisor é um numero grande, a necessidade de tentar todos os numeros de 2 a 9, para saber quantas vezes é elle contido em cada um dos dividendos parciaes, importa perda de tempo que convirá evitar.

Consequiremos isso do modo que segue: supponha-se que temos 727 a dividir por 122; attendendo a que $700 < 727$ e $200 > 122$, reconhece-se que 200 sendo contido tres vezes em 700, 122 o será pelo menos tres vezes em 727; attendendo depois a que $800 > 727$ e $100 < 122$, reconhece-se tambem que 100 contendo-se exactamente 8 vezes em 800, 122 não poderá se conter mais de 7 vezes em 727; restar-nos-ha agora unicamente experimentar os numeros de 3 a 7.

Do mesmo modo se tivermos 2134 a dividir por 326, observaremos que $2200 > 2134$, $300 < 326$, e concluiremos que, 300 não se podendo conter mais de sete vezes em 2200, 326 não poderá ser contido também mais de sete vezes em 2134.

Observaremos depois que $2100 < 2134$ e $400 > 326$; pois que 400 é contido cinco vezes em 2100, 326 será contido ao menos cinco vezes em 2134.

Se em vez de 2134 tivéssemos 2034 a dividir por 326, observaríamos que $2100 > 2034$ não contendo senão sete vezes, exactamente $300 < 326$, 326 não póde ser contido senão seis vezes, no mais em 2034. Verificando em seguida que $400 > 326$ é contido cinco vezes em $2000 < 2034$, concluiremos que 326 é contido ao menos cinco vezes em 2034; bastar-nos-ha pois tentar o numero 6 (a).

Porque, se o producto fôr maior do que 2034, 326 será contido cinco vezes neste numero, e seis se o producto fôr menor.

UNDECIMA LIÇÃO

Quando procuramos, em um dos exemplos da nona lição, partilhar 1634 objectos, igualmente, entre 8 pessoas, achamos que cada uma dellas podia receber 204 e que restariam 2.

Supponhamos que os objectos em questão são dos que se, podem dividir em muitas partes, e que tenhamos dividido um delles em 8 partes iguaes; poderemos dar uma destas partes a cada uma das 8 pessoas e, dividindo o outro objecto que resta, tambem em 8 das mesmas partes, poderemos dar ainda uma destas partes a cada pessoa; cada uma das pessoas teria assim recebido *duas destas partes*, das quaes 8 formam um objecto inteiro, ou dous oitavos do objecto.

Deveremos pois dar a cada pessoa 204 objectos e ainda dous oitavos, que se escrevem $\frac{2}{8}$: deve-se então dar $204 + \frac{2}{8}$.

Se supponmos uma cousa dividida em um certo numero de partes iguaes, de modo que a somma de todas estas partes seja a propria cousa, exprime-se uma destas partes accrescentando *avos* ao nome do numero que indica em quantas partes a cousa considerada está dividida. (1)

(1) Adoptamos a palavra *avos* em vez da terminação *simo*, porque esta precisaria de uma explicação muito mais longa e menos intelligivel ás crianças. O professor poderá ir introduzindo vagarosamente os termos com a ultima terminação, sem contudo entrar em longas explicações.

Se supponmos a cousa dividida em 100 partes, cada parte chama-se um-cem-avos (um centesimo); se a supponmos dividida em 238 partes, cada parte chama-se *um duzentos-e-trinta-e-oito-avos*.

Assim, *dous oito-avos* (oitavos), $\frac{2}{8}$, indicam que uma cousa foi dividida em oito partes e que se tomam duas destas partes.

Pela mesma razão *dez oito-avos*, $\frac{10}{8}$, indicam que a unidade foi dividida em oito partes, e que se tomam dez dessas partes; porém oito formam um objecto inteiro; então, tomar 10 partes é o mesmo que tomar um objecto e dous oito-avos, $1 + \frac{2}{8}$.

Quando tivermos de partilhar 1634 objectos entre oito pessoas, poderemos dividir cada objecto em oito partes e dar a cada pessoa 1634 destas partes; porém, 1634 destas partes são a mesma cousa que 204 e $\frac{2}{8}$, que 204 objectos inteiros e dous oitavos de um destes objectos. Assim $1634\frac{2}{8} = 204 + \frac{2}{8}$.

Vemos pois que, suppondo que a divisão real dos objectos não apresente inconveniente algum, teríamos ainda vantagem em dar 204 objectos inteiros e não dividir senão 2, e, por consequencia, achar o resultado da divisão indicada por $1634\frac{2}{8}$.

Podemos agora notar que $\frac{2}{8}$, duas partes de um objecto dividido em oito, é o mesmo que a quarta parte, que $\frac{1}{4}$ deste objecto.

Se em vez de querer partilhar 1634 objectos entre oito pessoas, quizessemos saber a quantas pessoas poderíamos dar oito destes objectos, acharíamos ainda 204 e o resto 2; ser-nos-hia possível, pois, dar 8 a 204 pessoas; teríamos assim 204 porções, cada uma composta de 8 objectos inteiros, e uma porção composta de dois dos mesmos objectos; porém esta porção composta de dois objectos é igual

a $\frac{2}{8}$ de uma porção de oito objectos: teremos pois 204 porções e 2 oitavos de uma porção; o quociente será $204\frac{2}{8}$.

Se tivéssemos tido 164 a dividir por 9, acharíamos 18 e um resto igual a 2: se pois tivéssemos 164 objectos a partilhar entre 9 pessoas, caberiam 18 a cada uma, e, dividindo os dous restantes em 9 partes, cada pessoa teria ainda duas destas partes: o quociente seria $18\frac{2}{9}$. Se quizessemos distribuir estes 164 objectos em porções compostas de 9, cada uma, teríamos 18 porções e restaria uma porção composta sómente de dous objectos, porção esta que seria $\frac{2}{9}$ de uma das outras; seria pois o quociente $18\frac{2}{9}$.

Pelo que fica dito reconhece-se que não basta, depois de haver feito a divisão, indicar simplesmente o resto, dizendo, por exemplo, se se divide 1634 por 8, vem para o quociente 204 com resto 2; se se divide 164 por 9, quociente 18 com resto 2; mas que é preciso dizer, resto $\frac{2}{8}$, resto $\frac{2}{9}$, porque, ainda que em ambos os casos restem dois objectos, são, em um caso, dois objectos a partilhar entre oito pessoas, e no outro, dois objectos a partilhar entre nove: em um, uma parte que é igual a dois oitavos das outras partes, no outro, uma parte que é igual a dois nonos das outras.

As expressões $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{9}$ chamam-se *fracções*; chamam-se *numeros inteiros* os que até aqui temos considerado, quando é necessario distinguil-os das expressões $\frac{2}{8}$, $204\frac{2}{8}$, por exemplo, que são ou encerram *fracções*.

O numero de partes que designa uma fracção chama-se *numerador da fracção*; o numero de partes em que está o objecto dividido, chama-se *denominador*. (A).



DUODECIMA LIÇÃO

Vimos na sexta lição que, depois de haver executado uma operação arithmetica, nos conviria ter um meio de verificá-la ; já sabemos como se póde verificar uma *subtração* ou uma *adição* ; resta-nos agora procurar um meio de verificar uma *divisão* e uma *multiplicação*.

Supponhamos que tendo dividido 1272 por 24, achou-se para quociente 53 ; é claro que, se 24 se contém exactamente 53 vezes em 1272, 53 vezes 24 serão a mesma cousa que 1272. e que, por consequente, o producto de 24 por 53 será 1272.

Assim, nas divisões em que não ha resto, o producto do divisor pelo quociente, ou, o que é o mesmo, o producto do quociente pelo divisor, será igual ao dividendo, se ambas as operações forem bem feitas.

Se tivéssemos agora um resto, como se houvessemos dividido 1253 por 25 e achado para quociente 50 com um resto 3, é claro que 50 vezes 25 deve ser igual a 1253 menos 3 ; que o producto de 25 por 50 deve ser igual a 1253 menos 3, e que, em geral, a somma composta do producto do divisor pelo quociente, em numeros inteiros, e do resto tambem em numeros inteiros, é igual ao dividendo, isto se verificará se as operações forem bem feitas.

Em geral, o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente, tanto inteiro como fraccionario ; 1253 é igual ao producto de 25 por $50 + \frac{3}{25}$, pois que 25 vezes 3 partes de um objecto, que se suppõe dividido em 25 partes, é o mesmo que 3 vezes 25 dessas partes, e portanto o mesmo que 3 vezes o objecto inteiro ; assim como $\frac{3}{25}$ de 25 objectos são

tres vezes a vigesima quinta parte de 25 objectos, ou tres vezes um objecto inteiro.

Tendo multiplicado 54 por 25 e achado o producto 1350 é claro que 54 contém-se 25 vezes em 1350 se o producto estiver exacto. Assim poderemos verificar a exactidão da operação, dividindo 1350 por 25; e acontecerá em geral, que, nas operações que forem bem feitas, acharemos que o quociente da divisão do producto pelo multiplicador é igual ao multiplicando.

Porém, acontece que, quando o multiplicando é um numero grande, esta operação torna-se penosa; seria portanto bom substituir-lhe outras mais simples: notemos para isso que quando se multiplica 54 por 25 multiplica-se, primeiro por 5 unidades e obtem-se o producto 270, depois por 2 dezenas e obtem-se o producto 108 (dezenas): assim 5 deve conter-se 54 vezes em 270 e 2 se deve 54 em 108, se a operação for bem feita. Poderemos, pois, verificar a multiplicação dividindo successivamente os productos parciaes, que formam o producto total, pelos algarismos correspondentes do multiplicador, devendo então todos os quocientes ser iguaes ao multiplicando.

Restaria por fim unicamente verificar se a adição dos productos parciaes foi exacta.

Esta prova da multiplicação importa maior numero de operações, que são entretanto mais simples; tem ella, além disso, a vantagem de mostrar immediatamente em que lugar da multiplicação está o erro (b) (A).

Oscar Castilho.

Estimar feito durante o anno
de $(\frac{113}{1901})$ no periodo de duas
experiencias d'arithmetica.

Porto Alegre: 25 Cezar 113
17 maio. 1901.

OBSERVAÇÕES

RELATIVAS AO ENSINO

DA

ARITHMETICA

Residência:

Andradas: 390 (2^o ano)

Oscar Castilho

Porto Alegre

PRIMEIRA LIÇÃO

(A) Uma lição contém o que pareceu possível expôr em uma *aula* e util conservar sem mutilação; entretanto, depois desta primeira exposição, podem os desenvolvimentos desta mesma lição e as operações, sobre que convém exercitar os alumnos, afim de tornar-lh'as mais familiares, occupar muitas aulas.

(a) O instituidor terá cuidado de explicar aqui aos alumnos como a *idéa de numero*, provindo da percepção simultanea de muitas cousas semelhantes, estendê-se a cousas não semelhantes. Dir-lhes-ha que, para fazer esta extensão, attribue-se a estas cousas diferentes uma qualidade semelhante e que se as considera sómente em relação a esta qualidade.

Assim se disse: *uma maçã e uma maçã são duas maçãs*; depois, *uma maçã e uma pêra são duas fructas*; e ainda, *uma maçã e uma pêra são um corpo e um corpo, são dous corpos*.

Emfim, deixou-se mesmo de considerar estas qualidades semelhantes e, então, se disse *uma cousa e uma cousa são duas cousas*; *um e um são dous*, considerando as duas cousas como possuindo uma qualidade semelhante qualquer, em relação á qual se as pudesse considerar como identicas.

Quando se considera uma qualidade commum a muitos objectos, sem attender ás que os distinguem, separando a idéa desta qualidade commum da das outras qualidades, diz-se que a idéa desta qualidade é uma *idéa abstracta*, porque se a separa das outras qualidades, com as quaes ella se encontra nos diversos objectos, abstrahindo destas. A' esta idéa dá-se tambem o nome de *geral*, porque ella é a idéa de uma qualidade ou de muitas qualidades que são communs a objectos differentes.

Muitos objectos que têm uma ou mais qualidades communs formam um genero de objectos.

Não acreditamos necessario analysar minuciosamente, para os alumnos, as idéas expressas pelas palavras *percepção, attenção, idéa, objecto, qualidade*; basta que se lhes faça comprehender o sentido por meio de exemplos.

(b) Aqui convém que se faça observar aos alumnos os diversos usos das palavras, que são: 1º solicitar a attenção de outrem para a idéa que a palavra exprime, o que exige, que para todos os individuos em todas as occasiões em que fôr ella empregada, exprima a mesma idéa; dahi resulta que o sentido das palavras deve ser *fixo* e, por tal fórma determinado, que possa ser promptamente comprehendido pelos diversos individuos; emprega-se tambem para repassar a propria attenção sobre idéas que sejam sempre as mesmas: finalmente para que se possa, á medida da vontade, lembrar certas idéas que convém ter e conservar.

Se, por exemplo, nos servimos da palavra *nove* para fazer comprehender a outrem que em tal lugar existe este numero de taes ou taes outros objectos, servimo-nos tambem para lembrar á nós mesmo

o numero destes objectos, sem ter necessidade de recorrer ás operações feitas para os contar.

Taes nomes foram estabelecidos por se reconhecer não só a necessidade de lembrar, á nossa vontade, as idéas dos diversos numeros, como que taes idéas eram da classe daquellas sobre que convém exercitar o espirito.

(c) O professor fará notar que quando se diz, *um e um e ainda um* são tres; *um e dous* são tres; isto significa que a expressão *um e um* e a expressão *dous*; a expressão *um e um e ainda um* e a expressão *tres*; a expressão *um e dous*, e a expressão *tres*, se se attende unicamente ao numero, designam uma mesma idéa; não é entretanto menos exacto que *um e um* exprimem um objecto e outro objecto, e que *dous* exprimem os mesmos objectos considerados juntamente e como reunidos.

Assim tambem as expressões *um e um e mais um*, *um e dous*, *tres*, designam um mesmo numero; porém a primeira apresenta as tres unidades como distinctas; a segunda apresenta uma desligada das duas outras e estas como reunidas; a terceira as apresenta como reunidas.

As palavras *um e um*, e *um* apresentam immediatamente tres unidades distinctas; as palavras *um e dous*, uma unidade e *uma collecção de duas unidades*; a palavra *tres*, *uma collecção de tres unidades*.

E' claro, pois, que a proposição *um e dous* são tres, não exprime sómente que se chama *tres*, *um* sommado a *dous*; mas significa tambem que sommado *um* a *dous* tem-se o mesmo numero que se obtem sommando a principio *um* a *um* e depois ainda *um*.

Esta observação escapou a metaphysicos celebres.

Far-se-ha notar em muitas proposições desta especie (convém multiplicar os exemplos), as duas idéas que as formam e as palavras *é* e *são*, que exprimem a existencia de uma identidade parcial entre estas duas idéas.

Aquella para que se reconhece a identidade, denomina-se *sujeito*; aquella em que existe esta identidade parcial com a primeira, chama-se *attributo*.

Na proposição — *dous é um numero*, — reconhece-se uma identidade parcial entre a idéa de *dous*, *collecção de duas unidades*, e a idéa de *numero*, *collecção de unidades* em geral.

Quando os meninos estiverem um pouco adestrados em dizer: *quatro e tres são sete, cinco e quatro são nove, etc*, se lhes fará notar que elles aceitam estas proposições, ainda que no momento de as pronunciar não se recordem distinctamente como aprenderam a formar o numero *sete*, reunindo á *quatro*, um depois *um* e ainda *uma unidade*: notando porém ao mesmo tempo, que elles recordam-se distinctamente que, quando fizeram estas operações, viram claramente que *quatro e tres são sete*. E' esta crença pois aceita com confiança, visto como elles lembram-se de ter chegado a perceber a identidade parcial destas duas idéas, a igualdade entre estes dous numeros.

Consequentemente ficarão elles sabendo que a lembrança distincta de ter tido a percepção da identidade destas duas idéas, que formam uma proposição, isto é, da evidencia desta proposição, é o unico motivo que ha para aceitá-la, quando não

se percebe mais immediatamente esta evidencia, e que unicamente a lembrança de haver sempre repetido ou escripto esta proposição, sem ter reconhecido a sua evidencia, não seria um bom motivo para accital-a.

E' facil reconhecer que taes analyses applicam-se ás proposições que se encontram nas lições seguintes. Será portanto inutil insistir nellas até que os alumnos as tenham perfeitamente comprehendido e decorado; será entretanto necessario reproduzil-as applicando-as a outros exemplos.

Não ha fundamento para assustar-se com a difficuldade de prender a estas analyses a attenção de meninos ainda muito jovens; se, segundo a marcha natural do espirito humano, não se lhes mostrar as proposições, as observações geraes, senão depois de lhes haver feito notar muitos exemplos, sobre os quaes hajam elles repetido as mesmas operações, não terão elles repugnancia, verão por si mesmo o que ha de commum entreestes exemplos e adquirirão, portanto, as idéas geraes que se lhes quer dar.

Far-se-ha seguir e observar aos estudantes as diversas operações por meio das quaes elles chegam a um resultado; se lhes fará notar como, sabendo que oito é a mesma cousa que cinco a que se juntassem *um, um e um*, e sabendo ainda que sommar *um e um e um* é o mesmo que sommar *tres*, se percebe que *oito* é o mesmo que *cinco* a que se sommassem *tres*. E' de importancia fazer-lhes observar que elles não podem perceber a identidade expressa nas duas primeiras proposições, sem ter simultaneamente a idéa da identidade expressa pela terceira, o que significa que a terceira proposição resulta das duas outras. Assim tambem, quando

elles dizem *oito e um e um são dez*, logo *oito e dous são dez*, não podem perceber a identidade expressa pela primeira proposição sem simultaneamente perceber a que é expressa pela segunda.

Para que tal aconteça é entretanto necessario lembrar-se que *um e um são dous*.

No primeiro exemplo é impossivel deixar de perceber a identidade expressa pela terceira proposição, desde que se perceba a expressa pelas duas outras; no segundo exemplo seria possivel perceber a identidade expressa pela primeira e não a da segunda: isto aconteceria se não fosse lembrado que *um e um são a mesma cousa que dous*; que acrescentar *um e um e acrescentar dous são a mesma cousa*: se esta ultima proposição não é enunciada é porque se supõe que ella se apresenta por si mesma.

Perceber a dependencia em que se acha uma proposição de duas outras ou de uma só, chama-se *concluir*. A palavra *logo* exprime que se conclue uma proposição de uma ou de duas outras anteriormente enunciadas.

Chama-se *raciocinio* a operação por meio da qual se chega a assentir em uma proposição, reconhecendo que ella resulta de outras já aceitas. Um raciocinio é a reunião destas proposições e de seu resultado; o resultado chama se *conclusão* porque é concluido das outras proposições.

As duas proposições de que se conclue chamam-se *premissas*, porque se as considera como adoptadas previamente.

Convem, antes de progredir mais, tornar estas noções familiares aos estudantes, por meio de bons exemplos. Convem tambem, sempre que apresen-

tarem-se conclusões deduzidas de uma só proposição, exercitar os alumnos em supprir a proposição que estiver subentendida.

Já expuzemos analyticamente:

- 1.º A formação das idéas abstractas ;
- 2.º A natureza das proposições exactas, que consistem na *percepção de uma identidade parcial* entre duas idéas ;
- 3.º A natureza do assenso ás proposições, quando apenas nos lembramos de haver tido esta percepção da identidade ;
- 4.º A natureza das proposições em que esta identidade resulta da que tem sido percebida em outras proposições.

Temos, portanto, já noções sobre as tres operações intellectuaes de que é capaz nosso espirito: a *formação das idéas*, o *juízo*, o *raciocínio*.

Conhece-se, além disso, duas especies de assenso a um juízo ; a primeira, fundada na percepção immediata ou mediata da identidade parcial entre as idéas ; a outra na lembrança de ter tido esta percepção.

E' possível que, mesmo em um raciocínio simples, esta ultima especie de assenso tenha lugar para as premissas ; esta ultima analyse, porém, é muito subtil para della nos occuparmos em uma instrucção commum.

(B) O instituidor adestrará os alumnos em formar e reconhecer os algarismos e os signaes $+$ e $=$; assim como em formar os numeros até dez por addições.—*Dous e tres são . . . cinco ; quatro e tres são . . . sete ; se no curso do exercicio elles se propuzerem a reunir numeros cuja somma seja maior do que dez,*

convirá demonstrar-lhes que ella excede a dez e accrescentar que na lição seguinte elles aprenderão a enunciar e a escrever em algarismo os numeros acima de dez.

Se, por exemplo, se propuzerem elles achar a somma de oito e sete, se lhes dirá *oito* e *um* são nove, e *um* são *dez*: immediatamente elles perceberão que a somma é maior do que dez.

Poder-se-ha então fazer-lhes ainda observar que já addicionaram *um* e *um* ou dous; que sete é o mesmo que *dous* e *cinco*; que, portanto, lhes restam ainda *cinco* para addicionar: que a somma será então a mesma cousa que *dez* a que se addicinassem *cinco*. Seria então possível que alguém desse a denominação de *dez* e *cinco* ou se lhes poderia lembral-a, e seria já uma preparação para a segunda lição.

(d) Far-se-ha notar aos alumnos a commodidade dos algarismos 1, 2, ... 9, que occupam menos espaço e escrevem-se mais facilmente que as palavras *um*, *dous*, ... *nove*.

Cabe a mesma observação acerca dos signaes +, =; convindo fazer notar, por exemplo, que $3+6=9$, não só escreve-se mais depressa do que *tres mais seis é igual a nove*, mas percebe-se ao primeiro olhar.

Finalmente, far-se-ha observar que os algarismos, como os signaes, como as palavras *um*, *dous*, ... *nove*, são arbitrarios; que se poderia ter escolhido algarismos de outra fórmula, outros signaes, outras palavras; que tendo estas palavras sido convencionadas entre um certo numero de individuos, a principio, os que a estes vieram reunir-se adopta-

ram a mesma convenção, de que foram instruidos, como se acaba de instruir aos alumnos ; isto porque lhes era commodo entender e ser entendidos; que estas palavras variam nas diferentes linguas, e que se os algarismos variam menos, è porque sentio-se a vantagem de os tornar communs, apezar da differença das linguas, vantagem que facilmente foi estabelecida e conservada em vista do pequeno numero de signaes.

SEGUNDA LIÇÃO

(a) Será necessario fazer notar que as palavras *vinte* (*dienta*), *trinta*, *quarenta*, etc., são derivadas dos nomes *dous*, *tres*, *quatro*, etc., que exprimem o numero de dezenas representado respectivamente pelos primeiros. Esta observação permittirá reter mais facilmente a significação destas palavras.

Da mesma fórma, *milhão* exprimindo *mil mil*; *bilhão*, *mil milhões*; *trilhão*, *mil bilhões*, etc., vê-se que estes nomes são ainda derivados dos nomes *dous*, *tres*, *quatro*, que então exprimem o numero de vezes que foi necessario recorrer a taes denominações, para exprimir os numeros de mil em mil vezes maiores.

Disto seremos conduzidos a ver que, se a terminação em *lhão* ou em *enta* foi arbitrariamente escolhida, ha motivos de utilidade em estabelecer esta relação entre esta série de nomes e a dos das unidades.

Veremos quão mais commodo é nas linguas o uso de palavras determinadas em parte por certas relações, do que de palavras arbitrarías que, sobre serem mais difficilmente retidas, a sua significação de modo algum é lembrada.

Convirá tambem explicar o uso dos pontos intermediarios, de que nesta lição encontram-se dous exemplos; e, para melhor o fazer comprehender, convém preencher os intervallos escrevendo immediatamente o que estiver subentendido, exercitando os alumnos em fazel-o por si mesmos, e fazendo-lhes vêr que seria mais longo e, de ordinario, menos claro tudo exprimir; porquanto, sendo tudo expres-

so, seria ainda necessario advertir que nem um intermediario fôra suppresso.

Com effeito, quem lesse poderia, ou descuidar-se de observar, ou não se lembrar por fim da série inteira de taes nomes.

Finalmente, fazendo pronunciar nomes de numeros muito extensos, não se deverá descuidar de chamar a attenção para o arranjo symetrico que apresenta este systema de numeração; arranjo este tal, que pronunciando sempre um certo numero de centenas, de dezenas e de unidades, os nomes *mil*, *milhões*, *bilhões*... pronunciados depois d'este numero, indicam immediatamente se os que os precedem designam centenas, dezenas e unidades, de mil, de milhão, ou de bilhão, etc.

TERCEIRA LIÇÃO

(A) Far-se-ha notar a correspondencia da numeração fallada com a numeração escripta, mostrando que tres algarismos correspondem sempre a cada denominação *unidade, mil, milhão*, o que determina sempre a denominação de centenas ao primeiro da esquerda destes tres algarismos, a de dezenas ao segundo, a de unidades ao terceiro. Convirá exercitar os alumnos nas duas especies de numeração, multiplicando tambem as observações como a que acabamos de apresentar. Em summa, se lhes tornará as duas especies de numerações tão familiares quanto possível, sem entretanto perder muito tempo, porquanto as lições seguintes fornecerão occasião de acabar a instrução dos que se tiverem atrazado, sem correr perigo de fatigar estes ou desgostar os outros.

E' aqui occasião de explicar aos alumnos as palavras *primeiro, segundo, decimo, undecimo, duodecimo, vigesimo, etc.*; assim como as expressões *primo, secundo, tertio e primeiramente, etc.*; com o modo de escrever estas expressões por meio de algarismos, designando sua terminação e seu sentido por uma letra collocada á direita e um pouco acima do algarismo.

Se lhes poderá fazer escrever e construir quadros para si mesmo. Convém, entretanto, evitar quanto possível os quadros impressos nos primeiros elementos; pois, quanto mais commodos são elles tanto mais preguiçoso tornam o espirito, e, em uma instrução em que não pode este ir além do

primeiro passo, convém exercital-o o mais que fôr possível.

(a) E' inutil observar aqui que as denominações dos numeros, como a escripta por meio dos algarismos, seguem a mesma marcha de um numero para outro dez vezes maior, uma *progressão decupla*; é necessario explicar o termo *progressão*, que é derivado de *andar*; a palavra *decupla*, que significa *dez vezes maior*.

Esta *progressão decupla* encontra-se nos systemas de numeração de todos os paizes; uniformidade que parece ter origem nos dez dedos que nós temos, com os quaes é facil indicar todos os numeros até dez; para ir além seria necessario recorrer a outros meios.

Convém, entretanto, mostrar que se poderia adoptar outra *progressão*: talvez mesmo fosse conveniente que o professor dêsse exemplos disso, se se achasse em estado de o fazer, e mostrasse, por exemplo, como, chamando *dez-e-um*, *onze* e *dez-e-dous*, *doze*, se poderia então dizer *doze-e-um* em vez de *dez-e-tres*; *doze-e-dous* em vez de *dez-e-quatro*; e *doze-e-onze* em vez de *vinte-e-tres*, etc...

QUARTA LIÇÃO

(A) Convém aqui fazer sentir aos alumnos, por meio de exemplos, que elles podem ter desejo ou necessidade de sommar dous numeros; que lhes póde ser agradavel ou util saber fazer esta operação.

Ao professor compete escolher taes exemplos, porque convém escolhel-os de modo que os alumnos sintam realmente a utilidade e o prazer, e não os recebam como uma mera hypothese.

E' pois em vista das circumstancias particulares em que se possam achar os alumnos, que taes exemplos devem ser determinados. Os que de longo tempo são inseridos nos livros elementares possuem quasi sempre, o inconveniente, ou de desgostarem os meninos, ou de lhes parecerem ridiculos.

(B) O professor terá cuidado: 1º, em fazer notar quanto è commodo o methodo de collocar, uns scb os outros, em uma mesma columna vertical os algarismos que correspondem às mesmas denominações do systema de numeração; 2º: em fazer applicar a muitos exemplos a operação que aqui se fez sobre os numeros 18 e 25; 3º: em exercitar sobre varias addições de dous numeros, tendo o cuidado de escolher exemplos em que se tenha, ora de guardar reservas, ora de nada guardar; em que se tenha 0 a escrever ou 0 a sommar, afim de habituar os alumnos a se não embaraçarem com estas difficuldades, mui pequenas sem duvida, mas muito reaes para os principiantes que, sem terem ainda habito algum de calculo, forem além disso dotados de pouca sagacidade natural.

Mas é então essencial collocal-os em estado de resolver taes duvidas por si mesmos, afim de evitar

que tomem o habito de repetir as palavras, *escreve-se, reserva-se*; sem reflexão e por um acto machinal da memoria.

(a) Apresentam-se duas observações essenciaes,

1.º A do raciocinio pelo qual, reconhecendo que a somma das unidades de dous numeros é 6, a das dezenas é 6, a das centenas é 9, a dos milhares é 5, concluimos que a somma dos dous numeros é 5966. A conclusão é aqui deduzida das quatro proposições, e não se pôde reconhecer a verdade destas proposições sem admittir a da conclusão. A conclusão resulta pois aqui de mais de duas proposições: em geral uma conclusão pôde resultar de muitas proposições.

2.º A da operação pela qual, sabendo que, se se reúnem as unidades, e separadamente as dezenas contidas em dous numeros, obtem-se a somma dos dous números, chega-se á proposição geral; que o mesmo tem lugar para as centenas, os milhares, as dezenas de milhar, etc., para todas as denominações de numeros, ainda que se não tenha percebido immediatamente a identidade de todas as proposições que a proposição geral encerra. Far-se-ha então notar, que claramente se percebe não poder esta proposição ser verdadeira para duas denominações sem o ser para todas as outras: convém fazer ver que tal é o modo por que nos apercebemos da identidade nas proposições geraes, quando á ellas somos conduzidos por consideração de outras que o são menos.

Far-se-ha notar a differença que existe entre esta e a marcha que segue o espirito, quando principia por conceber as idéas geraes que entram na pro-

posição, e imediatamente em seguida percebe a identidade.

Assim a verdade desta proposição geral—*a somma de dous numeros é igual á das sommas parciais formadas pela addicção dos numeros de denominações semelhantes que compoem cada um dos primeiros*—póde ser percebida, quer considerando immediatamente esta proposição geral, quer considerando as proposições particulares que lhe correspondem, no caso dos numeros que não encerram senão duas ou tres denominações, e observando que as proposições correspondentes não podem ser para estas verdadeiras, sem o serem para um numero qualquer de denominações.

Eu me permittirei aqui uma observação unicamente para o professor. Se, tomando o raciocinio n. 1, se lhe acrescenta a proposição geral que acabamos de enunciar, empregando-a como uma proposição menor, teremos um verdadeiro syllogismo, mas é claro que neste caso esta menor não é senão a expressão da ligação necessaria que existe entre as duas proposições. Ella não servirá portanto senão para dar uma fôrma regular e technica ao raciocinio.

Do mesmo modo, se se reduzisse as proposições que estão separadas no mesmo n. 1 a formar uma unica, afim de dar ao raciocinio a fôrma syllogistica; ou, se, conservando-as separadas, se as combinasse com proposições intermediarias para formar uma série de syllogismos, resultaria ainda que se póde sempre reduzir todos os raciocinios a syllogismos, mas não que nós sigamos naturalmente esta fôrma em todos os raciocinios.

Ora eu creio que a conversão de todos os raciocínios em syllogismos, ainda que muito util aos que pretendem aprofundar a arte do raciocínio, fatigaria inutilmente os alumnos em uma educação commum.

3. Quando se considera separadamente nos numeros 2345 e 3621 as unidades, as dezenas, as centenas, os milhares contidos em cada um delles, para formar a somma parcial das unidades, das dezenas, das centenas, dos milhares, cuja reunião fórma a somma total: chama-se a esta operação, que consiste em decompor os numeros dados e considerar separadamente suas partes correspondentes, *analyse*.

Quando não se reconhece immediatamente a identidade entre duas idéas, se as decompõe em partes *analogas* entre si, comparam-se estas partes para reconhecer a sua identidade, a fim de, por este meio, reconhecer a identidade das idéas primitivas. O meio pelo qual se chega á verdade de uma proposição que não era immediatamente perceptível, chama-se *methodo analytico*.

E' bom fazer comprehender aos alumnos em que consiste este methodo, com o qual terão de encontrar-se em todas as partes da instrucção, e que terão necessidade de empregar mesmo em sua conducta habitual.

(C) Tive cuidado de detalhar previamente todo o curso da operação, sem supprimir uma só idéa intermediaria, a não ser da ordem das que podem ser supprimidas pelo entendimento mais limitado. Em seguida, supprimindo successivamente algumas destas, reduzi a operação ao que ella deve ser no uso ordinario. Por este meio, tomando os

alumnos o habito de fazer a operação com a necessaria promptidão, jámais a farão entretanto pela rotina, porquanto terão principiado por executar-a raciocinando sobre todos os detalhes que ella encerra.

O professor poderá tornar esta marcha mais lenta do que a fizemos aqui, e attenuar as suppressões muito bruscas de alguns intermediarios.

(b) Aqui se fará notar, que, se ha por exemplo, necessidade de sommar os numeros 5, 7, 8, 6, 4, e achar um numero igual a $5+7+8+6+4$, e que se diga

$$\begin{array}{l} 5+7=12 \\ 12+8=20 \\ 20+6=26 \\ 26+4=30 \end{array} \quad \text{logo,}$$

$5+7+8+6+4=30$, a conclusão resulta das quatro proposições que a precedem.

Acompanhando estas operações, nota o espirito que elle addiciona successivamente todos os numeros que devem entrar na somma, e percebe tambem successivamente a identidade de cada proposição, e assim percebe que esta identidade não póde ter lugar em todas sem que o tenha tambem na conclusão.

Póde-se notar aqui, como na observação precedente (a), que a proposição geral na qual só se enunciasse a ultima destas sommas de numeros, tomados dous a dous, seria igual áquella em que se enunciasse a somma dos cinco numeros; pois, as proposições intermediarias que se teria de empregar

para dar a fôrma syllogística, operação pela qual se chega á conclusão, não devem ser consideradas como fazendo parte essencial da operação, e a conclusão seria a mesma.

Assim, não mostrar aos alumnos como estes raciocínios pódem reduzir-se a syllogismos, não é occultar-lhes a marcha da natureza.

QUINTA LIÇÃO

(A) E' necessario dar alguns exemplos desta operação, que consiste em *tirar* um numero de outro, fazendo ver, por exemplo, que 7 mais 3 sendo igual a 10, 10 menos 3 deve ser igual a 7; e que 10 menos 4 sendo igual a 6, 6 mais 4 deve ser igual a 10. Em taes operações convirá exercitar os alumnos, como na addição de numeros simplicés.

a) Convém fazer notar aos alumnos que, se uma tal decomposição ou analyse dos numeros facilitou-lhes a addição, ha algum fundamento para crer que tal marcha será de algum modo util ás outras operações sobre numeros, por exemplo, á operação cujo objecto é subtrahir um numero de outro. Tal crença funda-se em primeiro lugar na analogia, em serem semelhantes as duas operações por serem ambas executadas sobre numeros, e por se ter em vista para uma como para outra, simplificar, abreviar, facilitar a execução, ainda que ellas não sejam semelhantes, e antes, oppostas em seu fim immediato; tendo a *primeira* por fim reunir um numero a outro; a *segunda* tirar um numero de outro. São pois *analogas* sem serem *semelhantes*. A palavra *semelhante* não indica se ha conformidade absoluta ou quasi absoluta, ou se ha sómente em certos pontos: a palavra *analogo* exclue a conformidade absoluta ou quasi absoluta

Esta confiança, fundada na analogia, o é tambem sobre a experiencia, pois ella constantemente mostra, que cousas, nas quaes se encontra semelhança em alguns pontos, trambem a têm, frequentemente, em alguns outros; e que por isso seremos muitas

vezes bem sucedidos, applicando á uma o que já foi, com successo, applicado á outra.

Se lhes fará observar que quanto maior é a analogia, mais extensa é a relação entre a conformidade a verificar e as que já são conhecidas, e mais também a experiencia prova, que esta nova analogia seria verificada pelo exame.

Procedendo como se a analogia existisse, maior esperanza de successo se deve ter, e, portanto, um motivo de obrar mais poderoso.

Deve-se distinguir aqui este *motivo de obrar* do *motivo de crer*, que será verificado pela supposta analogia.

Se lhes fará ver, que se como no presente exemplo, desejam elles achar um meio de abreviar uma operação, e que seja preciso procural-o, uma crença, ainda fraca, no successo de um meio que se apresenta deve ser sufficiente para determinar a tentalo.

(b) Os alumnos já reconheceram que o raciocinio consiste em ver que a identidade, que não lhes era immediatamente perceptivel entre as duas idéas que formam uma proposição, resulta da que elles têm percebido em muitas outras. Se lhes deverá mostrar, por este exemplo, que o raciocinio consiste também em ver que a negação da identidade que elles não percebem entre duas idéas, resulta da negação desta identidade, que elles percebem entre outras idéas, idênticas com as primeiras.

Se lhes fará observar que uma proposição negativa consiste em exprimir que se percebe a não identidade entre duas idéas. *Tal numero não é igual a tal outro*, significa que se percebe que a identidade de numero não existe entre elles.

Seja um certo numero, 12 por exemplo, e a identidade de grandeza deste numero com tal outro, $8+4$ por exemplo, temos os dous termos da proposição; se percebemos a identidade existente, formamos a proposição positiva; se não a vemos, temos entretanto a idéa da uma proposição positiva, e resta-nos procurar vêr se podemos perceber ou não a identidade que ella enuncia.

Seja ainda um certo numero, 12 por exemplo, e a identidade de grandeza deste numero com outro, $7 + 4$, por exemplo: temos dous termos de uma proposição; Se percebemos que esta identidade não existe, formamos uma proposição negativa; mas se não cremos, temos então sómente a idéa de tal proposição e resta-nos verificar se percebemos ou não que esta identidade não existe.

Observo que se pôde dizer, que uma proposição negativa pôde tornar-se positiva, quando se diz, como por exemplo: *tal numero não igual a tal outro*, em lugar de: *tal numero não é igual a tal outro*; e que até se reconhece uma verdadeira identidade parcial entre a idéa do primeiro numero e a da não igualdade com o segundo. Mas, applico aqui o que dissemos antes ácerca da redução dos raciocinios á forma syllogistica, desta possibilidade de tornar positivas todas as proposições não resulta que a proposição, *tres não é quatro*, não consista em ver que não ha identidade de grandeza entre 3 e 4. Será portanto inutil occupar os alumnos com tal discussão.

Da observação que acabamos de fazer sobre o raciocinio, cuja conclusão é negativa, resulta que, independentemente desta conclusão, o raciocinio encerra ao menos uma proposição positiva e uma

negativa; por quanto, não se pôde perceber a não identidade entre as duas idéas que entram na conclusão, senão por se haver percebido a não identidade entre duas outras e a identidade destas com as primeiras.

Se lhes fará comprehender tambem esta forma de raciocinio: *o numero será igual ou maior do que tal outro; porque, se fosse menor resultaria tal absurdo.*

Aqui nem se percebe a identidade enunciada pela primeira proposição, nem que esta identidade não existe; mas reconhece-se que ella está necessariamente ligada a outras identidades; e então conclue-se que ella não pôde deixar de existir.

O que distingue este raciocinio é que a principio faz-se abstracção da verdade das proposições, da identidade entre as idéas que as formam, para não attender senão á sua dependencia, até o momento em que, percebendo a identidade ou a não identidade de uma nova proposição e lembrando a já notada ligacão, conclue-se a identidade ou a não identidade da primeira proposição.

Temos acima um exemplo do que acontece nos raciocinios desta especie, quando se reconhece a não identidade.

Para exemplo do caso em que se conclue a identidade, tomemos a operação seguinte: supponhamos que 12 menos 5 sejam 7; então 5 e 7 serão 12; mas 5 e 7 são 12; assim percebemos a principio a identidade de 12 menos 5 e de 7, ligada á de 5 mais 7 e de 12; em seguida percebemos esta ultima identidade e concluimos a primeira, que a principio só consideramos com o fim de reconhecer que outras identidades seriam della consequencia.

Far-se-ha notar aos alumnos a seguinte proposição: *tal numero é maior ou igual a tal outro*; aqui a identidade parcial é entre tal numero e a qualidade de ser maior ou igual a tal outro.

(B) Poder-se-hia fazer a subtracção assim:

$$\begin{array}{r} 6223 \\ 4535 \\ \hline 1688 \end{array}$$

Tirar 5 de 3 é impossível: tomo uma dezena emprestada: 10 e 3 são 13; tiro 5 de 13 restam 8; 3 e 1 que já tomei emprestado são 4: tirar 4 de 2 é impossível; tomo emprestada uma dezena: 10 e 2 são 12, tiro 4 de 12, restam 8; 5 e 1 que já tomei emprestado são 6: tirar 6 de 2 é impossível; tomo uma dezena emprestada, 10 e 2 são 12: tiro 6 de 12 restam 6; 4 e 1 que já tomei emprestado são 5: tiro 5 de 6 resta 1.

Este methodo é mais simples, no caso em que o numero de que se subtrahé contém um zero e que se é obrigado a tomar emprestada uma centena, á qual toma-se uma dezena reservando 9.

Póde se ainda servir dest'outro methodo: 6223 é o mesmo que 6000 mais 223: 6000 é o mesmo que 5999 mais 1, tiro 4535 de 5999, tenho para resto 1464; addiciono 1 e 223 ou 224, que havíamos subtrahido do primeiro numero, e tenho a differença igual a 1688.

Se tivéssemos de subtrahir 6534 de 7612, sendo o algarismo 1 o primeiro (a contar da esquerda) do maior numero que é inferior ao correspondente do menor, diríamos: 7612 é o mesmo que 7600 mais

12; 7600 é o mesmo que 7599 mais 1; tomo a diferença entre 7599 e 6534, acho 1065; addiciono 13 e tenho 1078, que é a differença procurada.

Este ultimo methodo é ainda mais simples; ao professor cumpre julgar se deve ensinar estes dous ultimos juntamente com o methodo ordinario exposto no texto (4).

(C) Dever-se-ha explicar a palavra *necessariamente*, dizendo que uma coisa é *necessariamente* tal, quando se reconhece que ella não póde ser de outro modo, quando se concebe que se ella fosse de outro modo, resultaria um absurdo, uma identidade entre duas idéas que se reconhece não poder existir.

SEXTA LIÇÃO

(a) E' impossivel que algum alumno se não tenha enganado nas regras que lhe foram dadas para applicar aos exemplos.

O professor deve ter notado e mostrado em que consistia o erro, bem como o que o motivou

Aqui deverá elle recordar o facto, para fazer sentir aos alumnos quanta utilidade ha em saber reconhecer os proprios erros

Entretanto, dos erros que commettem os principiantes pôde-se tirar importantes lições, fazendo-lhes analysar os processos que a elles os conduzem.

1º Acontece dizer, por exemplo, em uma operação ; *6 e 8 são 16*, ou ainda, *tiro 7 de 16 restam 8*.

E' preciso mostrar-lhes que quando elles assim enunciam sommas ou differenças, não têm consciencia das operações por meio das quaes, adicionando 6 unidades a 8 unidades, acha-se a somma, ou bem, subtrahindo 7 unidades de 16 unidades, acha-se a differença: porém, que sabendo por experiencia, que quando fizeram estas operações e acharam o resultado recordaram-se, não só de as haver feito em outra occasião, como de haver chegado ao mesmo resultado, conseguindo-o de novo todas as vezes que têm procurado formal-o, repetindo as mesmas operações, e então julgaram que a memoria lhes fornecia constantemente resultado verdadeiro: observaram depois que, mesmo sem ter consciencia distincta de haver executado esta operação e achado este resultado, sua memoria lhes apresentava, immediatamente após dous numeros, o que representava realmente a somma

ou a differença ; e acontece que, por esta experiencia aceitam sem mais exame, o que ella apresenta.

Seu erro proveio, pois, de os haver enganado esta memoria de habito, á qual se confiaram antes de haver sufficientemente verificado se ella lhes fazia enunciar as verdadeiras sommas ou differenças.

Alem disso esta memoria engana ainda, quando nos recordamos, com certa duvida, que tal era o resultado que se tem achado.

E' necessario pois não fiar na memoria de habito, senão depois de ter verificado muitas vezes a exactidão dos resultados ; e nunca fiar-se quando houver sentimento de incerteza.

2º Enganam-se elles ainda, esquecendo-se de attender na addição ás reservas e na subtracção aos empréstimos.

Mas então a confiança no resultado é fundada em suporem elles ter executado certas operações e lembrarem-se de ter tido a convicção de que estas operações cênduziam a um resultado exacto.

O erro provém então de representar-se-lhe mal á memoria esta serie de operações, ou de acreditarem elles na identidade das que executam com as de que se lembram, sem ter um sentimento claro de tal identidade : em tal circumstancia uma attenção mais forte e menos precipitação os impedirão de formar um resultado, antes de verificar se têm lembrança distincta da serie de operações que convêm executar e de as haver executado.

(b) Aqui se fará observar aos alumnos a proposição condicional, *se 37 e 17 são 54, 54 menos*

17 são 37. Se lhes fará ver que esta proposição é equivalente a esta outra: *a identidade expressa pela segunda proposição resulta da identidade expressa pela primeira*; mas que esta proposição nada enuncia acerca da identidade expressa por uma ou por outra.

Seria útil que o professor escolhesse, uma vez ou outra, alguns exemplos de proposições compostas, para reduzir a proposições simples e exercitar assim os alumnos em reconhecer as identidades que ellas exprimem. Os exemplos devem ser escolhidos na parte puramente arithmetica do texto.

(A) O professor fará empenho em dar para exemplos do caso em que a prova faz descobrir erro, alguns dos erros reaes que os alumnos tiverem commettido. Em geral convém evitar tanto quanto possivel que a utilidade do que se ensina apresente-se, de principio, como puramente hypothetico.

(c) O primeiro exemplo de uma crença fundada na probabilidade e ao mesmo tempo de uma marcha dirigida por esta probabilidade, é por demais complicado para que seja possivel empregal-o aqui, com o fim de desenvolver a natureza desta especie de crença, e dos motivos que nos podem determinar a tomal-a para base de nossas accões.

Limitar-nos-hemos pois a observar que, se em cousas ou acontecimentos, que parecem igualmente possiveis, ha um grande numero que dá um certo resultado e um numero mui pequeno que dá um resultado contrario, diz-se que é mais provavel que realise-se um dos acontecimentos da primeira especie, porque se tem observado que em geral, é assim. Somos pois induzidos a crêr que se realisará o acontecimento mais provavel, e nos conduzimos

como se elle se devesse realisar, por que é tambem mais provavel que ta' conducta seja a que produza a vantagem que se almeja.

Depois se fará vêr aos alumnos que, quando se executa a operação attentamente é raro commetter engano ; que mais raramente ainda se commetterá engano em duas operações consecutivas, e que, ainda mais raro será enganar-se de modo que os erros se compensem. — Por meio de exemplos se tornará mais sensiveis, não só estas primeiras idéas sobre probabilidade, como sua applicação ao caso actual.

Serão tomados para exemplos acontecimentos physicos que são constantes, ainda que sujeitos a excepções, e nos quaes é necessario conduzir-se como se taes excepções não devessem ter lugar. Ter-se-ha o cuidado de os escolher taes que esta falta de previdencia seja claramente justificavel.

Ha todo o fundamento para crêr que o que ha de pouco profundo e pouco rigoroso no que dissemos, não chamará a attenção dos alumnos, que elles não procurarão penetrar além do que se lhes apresenta ; entretanto, se o fizessem, se lhes deveria dizer que taes obscuridades serão dissipadas adiante ; fazendo-lhes sentir, com o proprio exemplo das lições passadas, que nada se póde aprender senão successivamente e segundo uma certa ordem ; isto seria mais uma lição.

(B) O professor terá cuidado de dar muitos exemplos desta proposição geral, afim de a fazer comprehender ; insistindo, em taes exemplos, sobre a identidade da operação que consiste em addicionar a somma já formada á differença tambem já forma-

da, ou em subtrahir uma da outra, e a que consiste em fazer esta addição e esta subtracção conservando os elementos que serviram para formar a somma e a differença.

Devem ser cuidadosamente observados os dentre os alumnos que tiverem facilidade em appropriar-se esta proposição geral, em comprehender que, *addicionar um numero menos um outro, é addicionar o primeiro e subtrahir o segundo; que subtrahir um numero menos um outro, é subtrahir o primeiro e addicionar o segundo*. Os que sentirem prazer, uma sorte de satisfação em conhecer esta proposição geral, darão um signal de sua capacidade natural para as concepções e as verdades abstractas.

SETIMA E OITAVA LIÇÕES

Estas duas lições nenhuma nota particular offerecem.

Mas é necessario que o professor continue a fazer observar pelos alumnos as diversas especies de raciocinios que ellas apresentam, as fórmãs que servem para reconhecer cada demonstração, seguir-lhes o fio e comprehender o conjuncto.

Elle lhes fará ver como a decomposição do multiplicando na setima lição e a dupla decomposição do multiplicando e do multiplicador na oitava, conduzem a achar o methodo de executar a operação proposta, insistindo no que foi dito a tal respeito nas observações precedentes.

Terá tambem o cuidado de lhes fazer notar como elles se servem aqui da addição, que já conhecem, e dos principios sobre que assenta o systema da numeração escripta, para achar facilmente os productos de um numero por outro dado, de dezenas, de centenas, de milhares, etc., ou para deduzir o producto total destes productos parciaes achados separadamente.

Far-lhes-ha vêr que tendo uma lembrança bem distincta de haver reconhecido a verdade destes principios e a certeza destas operações, podem-as executar sem temor de enganar-se, e adherir ás conclusões que resultam claramente destes principios, quando mesmo não tenham a consciencia immediata de sua exaetidão, da identidade das idéas que formam a proposição pela qual são expressos estes principios.

De novo lhes fará sentir como, tendo-lhes uma

experiencia constante provado que sempre se chega a descobrir esta identidade, se a ella se tiver chegado uma vez, somos depois involuntariamente levados a crer que ella existe, mesmo quando não a percebemos, comtanto porém, que nos lembremos claramente de a haver percebido em outra occasião. Sobre tal assumpto é necessario insistir, porque é precisamente sobre este fundamento que os alumnos terão depois de apoiar-se, para em novos raciocinios servirem-se das proposições cuja verdade tem elles successivamente reconhecido.

Quando o professor os julgar sufficientemente exercitados, lhes fará distinguir as tres especies de assenso que se pode prestar a uma proposição.

1.^o Em primeiro lugar o que nasce da percepção da identidade, ou da negação da identidade entre os dous termos; quer elle seja immediato, quer resulte de um raciocinio cujo conjunto comprehendemos, por assim dizer, de uma só visita.

Diz-se então que taes proposições são evidentes.

2.^a Depois o assenso que se presta a uma proposição, que resulta de muitas outras, por nos lembrarmos distinctamente haver reconhecido que a identidade por ella expressa resulta da que foi immediatamente percebida em outras proposições.

3.^a Finalmente, se fará notar as proposições a que se assente unicamente porque a experiencia tem demonstrado, que mais frequentemente se chega a um resultado verdadeiro seguindo a mesma marcha; como quando se supõe certa uma opperação cujo resultado se verifica. (Veja a ultima observação sobre a sexta lição.)

(4) Será necessario fazer os alumnos exercitarem-se na pratica da multiplicação o tempo suffi-

ciente, para os familiarisar com os trinta e seis productos de numeros simplicies, que presizam guardar em memoria para executar promptamente esta operação.

Não convém fazer-lhes decorar a taboa dos productos, nem fornecer-lhe esta taboa confeccionada, porquanto é muito mais importante fortificar-lhes, pelo exercicio, a intelligencia e a memoria, do que indicar-lhes os meios de poupar-se ao trabalho de servir-se dellas.

Convirá portanto fazer-lhes formar por si mesmo taes productos, quando não os conhecerem ou os tiverem esquecido: Se o numero de alumnos fôr um pouco elevado, acontecerá que alguns delles não tenham occasião de formar por si mesmo alguns productos, porém, como elles serão obrigados a retel-os ouvindo os outros enunciarem, serão naturalmente levados a examinar por si mesmo se estão certos: o que não aconteceria se elles os encontrassem estampados em um livro ou se o professor lh'os ensinasse.

Alem disso é ao professor que compete achar meio de exercitar os alumnos com igualdade; esta igualdade não deve entretanto ser absoluta; convém proporcional-a ás disposições naturaes dos meninos, exercitar os que as possuem em menor gráo de preferencia sobre as cousas mais faceis, e sobre as mais difíceis, os que se mostrarem mais aptos; deixando para exercitar os mais fracos, sobre as causas mais difíceis, quando elles já estiverem convenientemente instruidos com o exemplo dos outros.

NONA LIÇÃO

(A) Em uma divisão dous objectos se pôdem ter em vista, ainda que o seu fim geral seja dividir um certo numero de cousas em partes iguaes, porquanto pôde-se suppor conhecido o numero de partes, e então tem-se em vista saber o que é cada uma dellas; ou ainda pôde-se suppor conhecido o que é cada parte, e o objecto será conhecer quantes se podem formar.

Vimos no texto porque a operação sobre os numeros era a mesma cousa em ambos os casos

O professor deve ter cuidado de escolher exemplos em que se tenha em vista ora uma cousa, ora outra e demonstrar como, tomando o inverso do mesmo problema ter-se-hia attingido outro fim por meio da mesma operação.

(B) Seria util tornar sensivel esta difficuldade com algumas tentativas.

(C) E' indispensavel que o professor faça executar numericamente estas operações sobre alguns numeros e que tambem as faça executar do mesmo modo para a divisão composta; isto afim de que os alumnos, tendo seguido em todos os seus detalhes a marcha da operação, entendam-a mais facilmente e tenham della uma idéa mais distincta quando a tiverem de executar sob fôrma abreviada. O mesmo meio será empregado para fazelhes comprehender e ta ultima, se nisso encontrarem alguma difficuldade.

Alem de tudo este methodo é muito simples e bastante commodo, ainda que longo; e haverão alumnos que, ou por pouca applicação ou por

natural fraqueza de intelligencia, não possam, no espaço do tempo e com os cuidados que é possível consagrar a tal estudo, bem comprehender a regra ordinaria e guardal-a convenientemente de memoria para della servir-se.

Esta regra, assás complicada, é um dos primeiros pontos em que a experiencia prova que se estabelece uma sorte de separação entre os espiritos.

Muitos homens, de profissões em que o calculo é necessario, acham-se parados neste termo, por não haverem empregado o tempo e a applicação necessaria para transpol-o: em taes circumstancias este methodo lhes será um util supplemento.

(D) O professor, ensinando a dispor a formula, explicará porque ella é commoda, como occupa menos espaço e apresenta as operações parciaes de modo mais claro do que qualquer outra disposição.

Não convém, em geral, fazer ler descripção de uma operação sensível, salvo o caso de não haver outro recurso, e deve-se ter de antemão habituado os meninos a ouvir a discripção verbal dos proprios objectos, de uma operação que se executa, de uma figura que se traça, antes de lhes fazer ler a discripção de um objecto, cuja imagem se lhes mostra, ou da operação que se lhes representa executada.

Voltarei a tal assumpto nas observações sobre os elementos de geometria.

DECIMA LIÇÃO

(A) Ainda que aqui só se encontre um exemplo, vê-se claramente que é indispensável exigir muita pratica dos alumnos sobre esta operação.

(a) Na exposição deste meio muito simples de abreviar as tentativas para os calculos um pouco complicados, e em muitas outras operações, tenho me contentado com applicar o principio geral, a um ou muitos exemplos, sem o desenvolver.

Será necessario fazer com que os alumnos pratiquem um certo numero de exemplos e fazer-lhes em seguida observar o principio geral, que é commum a todo exemplo particular, para que elles o descubram, de algum modo, por si mesmos, fazendo então com que o enunciem.

Depois se chamará sua attenção para a marcha que seguem nesta generalisação, fazendo notar como, a medida que applicam um raciocinio a um numero ou que executam uma operação sobre este numero, têm elles um sentimento distincto da possibilidade de applicar este raciocinio a um outro numero, de fazer uma operação semelhante.

Se lhes esclarecerá, que, assim como elles têm adquirido idéas geraes, fixando sua attenção sobre as partes communs a muitas idéas particulares, da mesma maneira farão idéa de uma operação geral, fixando a attenção sobre o que ha de commum a muitas operações; e como, executando uma operação particular, têm elles depois sentimento claro de que seguem a operação geral.

Sabendo, pois, que seguindo-a devem chegar a um resultado exacto, seguem elles a operação

particular com confiança, sem ter necessidade de sentir a sua exactidão.

Assim, depois de haver comprehendido a exactidão do methodo geral e das operações particulares, acabam elles por apoiar sua confiança na exactidão das operações que executam, sobre a do methodo geral.

Se farão tambem observações: 1º, sobre a natureza destas operações ; tal quociente é inferior a 10, é maior do que 3 e menor do que 8, será, portanto, 4, 5, 6 ou 7 ; ou a identidade parcial existe entre a qualidade de *ser quociente* em tal hypothese e a de *ser inferior a dez*, de ser maior do que 3 e menor do que 8, de ser um dos quatro numeros 4, 5, 6, 7.

A identidade existe pois entre a qualidade absoluta e determinada de *ser um tal quociente* e a qualidade determinada de *estar sujeito a uma tal condição* ; mas esta qualidade é indeterminada quanto á grandeza do quociente.

Se notará, portanto, que toda a proposição é em si mesmo determinada ; mas que em relação a um ponto de vista particular pó le ser indeterminada.

Convém notar além disso que a proposição não póde ser verdadeira senão no sentido em que ella é determinada ; que esse é o unico sentido que permite reconhecer ou concluir uma identidade parcial.

As proposições precedentes nada exprimem quanto á quantidade absoluta deste quociente, mas unicamente quanto aos limites desta quantidade.

2º Sobre o raciocinio, por meio do qual se prova que 122 contém-se pelo menos tres vezes em

727, porque $200 > 122$ contém-se tres vezes em $700 < 727$.

As dezenas e as unidades tornam aqui os numeros mais complicados, e por consequencia tem-se maior trabalho em reconhecer quantas vezes um póde conter o outro; póde-se, pois, reduzil-os a numeros mais simplicies, porém taes que o numero de vezes que um for contido no outro, seja igual ou maior do que era para os numeros dados.

Não conhecendo o limite abaixo do qual este quociente não póde estar, procura-se dous numeros mais simplicies cujo quociente tenha um limite inferior, igual ou menor.

O mesmo tem lagar para o outro limite: não é, pois, por acaso que fomos conduzidos a este methodo; mas, nasce elle desta reflexão, que não se vê facilmente um limite proximo para o quociente quando os numeros são grandes e que se vê facilmente quando são pequenos.

UNDECIMA LIÇÃO

(A) E' necessario cuidado em exercitar os alumnos de modo a tornar-lhes familiares as primeiras idéas sobre numeros fraccionarios, que ádiante ellas lhes serão uteis para a perfeita comprehensão da de uma relação [em geral. E' tambem necessario adestral-os no uso do pequeno numero de signaes que nestas lições introduzimos.

(a) Advertir-se ha aos alumnos que a palavra fracção deriva de uma palavra latina que significa *uma porção que se destaca de um objecto quebrando-o*; que o numerador da fracção assim se chama, por indicar o numero de porções ou partes que se consideram; as fracções $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ se denominam *um oitavo, dous oitavos, tres oitavos*: o denominador deve seu nome a que elle indica o numero de partes do objecto, que se suppõe dividido em tantas quantas são as unidades que o denominador contém.

Se lhes fará ver como estas denominações foram introduzidas na linguagem scientifica, sem arbitrio, mas por analogia.

Se lhes fará comprehender, que quando se convém empregar uma palavra, de sentido vago e geral, em uma sciencia ou arte, a palavra recebe por isso mesmo uma limitação de sentido que se torna então determinado e preciso.

As palavras *divisão, multiplicação, etc.*, que conservam diversas accepções vulgares relativas a seu sentido geral e primitivo, e que tomam na sciencia um sentido proprio a designar uma operação arithmetica, são bons exemplos disso.

DUODECIMA LIÇÃO

Naturalmente observou-se que nas tres ultimas lições os desenvolvimentos escriptos são muito menos extensos. Ao professor compete suppril-os. Haveria inconveniente em seguir por muito tempo a mesma marcha que nas primeiras lições ; ella se tornaria fastidiosa por muito facil e favoreceria a preguiça de espirito. Porém a passagem desta marcha para uma mais cerrada deve ser facilitada por explicações verbaes: a memoria de taes explicações é um auxilio para a intelligencia do texto, quando se o relê ; pois por ora ella não é devida unicamente á attenção.

FIM

EXTRACTO DO CATALOGO

Grammatica Nacional, por Aulete.....	1\$000
Selecta portugueza para uso das escolas, por Andrade.....	2\$000
Luziadas, por Camões.....	1\$000
Novo methodo theorico e pratico de ana- lyse syntatica, por Costa e Cunha....	1\$500
Florilegio Brasileiro da Infancia, para exercicios de leitura de versos nas es- colas publicas, por Jordão.....	2\$000
Lições praticas de orthographia, por Matta Araujo.....	1\$200
Grammatica analytica e explicativa da lingua portugueza, obra adoptada pela inspectoria de instrucção publica, com approvação do governo imperial para compendio das escolas publicas, por Ortiz & Pardal.	2\$000
Systema metrico decimal, por Jordão...	\$800
Compendio de arithmethica para instruc- ção primaria, obra adoptada pela inspe- ctoria de instrucção publica com appro- vação do governo imperial, pelo Exm. Sr. senador Ottoni.....	1\$000
Arithmetica para crianças, por Pinheiro.	\$800

GEOGRAPHIA DAS PROVINCIAS DO BRAZIL, pelo Dr. Alfredo Moreira e Pinto, autor do Diccionario Geographico do Brazil	2\$000
Noções elementares de geographia geral e especialmente do Brazil, por Zaluar.	1\$000
Collectaneas dos Autores Classicos, por Coutinho.....	2\$000
Grammatica Franceza, por Sevène.....	2\$000
Beautés de Chateaubriand et du Théâtre Classique Français, par Marcou.....	3\$000
Grammatica pratica da lingua ingleza, por Motta.....	5\$000
Select Passages of prose and Poetry, by M. Neville.....	4\$000
Grammatica latina (exercicios e vocabu- larios), por Clintok, trad. do Dr. Lu- cindo.....	5\$000
Arte versificatoria (medição dos versos latinos), por Silveira.....	1\$000
Historia Antiga (pontos), por Leitão.....	1\$000
Historia media, idem, pelo mesmo.....	1\$000
Philosophia Elementar (compendio), por Pelissier.....	4\$000
Explicador de Arithmetica, por Eduardo de Sá.....	3\$000
Elementos de Algebra, pelo Exm. Sr. se- nador Ottoni.....	3\$000
Elementos de Geometria e trigonometria, pelo Exm. Sr. senador Ottoni.....	5\$000
Noções da vida pratica, por Felix Fer- reira.....	2\$000
Noções da vida domestica, por Felix Fer- reira.....	2\$000