

Lucas Brant Pimenta de Faria

ANÁLISE DE MODELOS DE VISCOELASTICIDADE APLICADOS A TERMOPLÁSTICOS

ESTUDO DE CASO: UHMWPE

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.

Florianópolis
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Faria, Lucas Brant Pimenta de

Análise de modelos de viscoelasticidade aplicados a termoplásticos : estudo de caso: UHMWPE / Lucas Brant Pimenta de Faria ; orientador, Eduardo Alberto Fancello - Florianópolis, SC, 2017.

99 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Modelos constitutivos. 3. UHMWPE. 4. Viscoelasticidade. 5. Simulação numérica. I. Fancello, Eduardo Alberto. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Lucas Brant Pimenta de Faria

ANÁLISE DE MODELOS DE VISCOELASTICIDADE APLICADOS A TERMOPLÁSTICOS

ESTUDO DE CASO: UHMWPE

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 17 de Abril de 2017.

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves, Dr.
Coordenador do Curso

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr. – Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr. – Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Jakson Manfredini Vassoler, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Guilherme Mariz De Oliveira Barra, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador, professor Eduardo Fancello, pela paciência e dedicação que fizeram o desenvolvimento desse trabalho possível.

Sou grato também aos professores Paulo de Tarso, Edson da Rosa e Marcelo Krajnc com que tive aulas durante o mestrado que contribuíram para o aumento do meu conhecimento e de forma indireta para o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço a todos os companheiros do GRANTE. Gostaria de citar especificamente Ana, Guilherme e Jan, que se tornaram verdadeiros amigos, pelas incontáveis horas de conversa sobre os mais variados temas relacionados ou não a este trabalho.

Gostaria de agradecer especialmente ao Thiago que foi fundamental durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Foram vários os momentos de dúvidas e dificuldades com que me ajudou, sempre se mostrando extremamente paciente e interessado em todas as minhas perguntas.

Agradeço aos colegas e professores responsáveis pelo LEBm que possibilitaram a realização da parte experimental deste trabalho. Especificamente agradeço ao Otávio e ao Rogério por todo o apoio prestado na parte experimental, sempre dispostos a ajudar.

Também sou muito grato ao POSMEC e a todas as empresas parceiras que ajudaram a disponibilizar toda a estrutura usada durante esse projeto.

Por último gostaria de agradecer aos meus pais Renilson e Shirley que sempre me incentivaram a correr atrás dos meus sonhos e me deram todo tipo de apoio que precisei.

Nada, absolutamente nada resiste ao trabalho.
(Euryclides de Jesus Zerbini)

RESUMO

Os polímeros termoplásticos são amplamente usados na indústria, uma área em que são muito aplicados é área médica. Devido a esse intenso uso faz-se cada vez mais necessária uma melhor caracterização do comportamento mecânico desses materiais para que sejam possíveis melhores simulações numéricas e projetos. O presente trabalho apresenta ensaios cíclicos e de fluência realizados no Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE). Esse material é usado principalmente em superfícies que estão sujeitas à atrito em próteses de ombro, quadril e joelho. Os ensaios cíclicos foram realizados em três diferentes taxas de deformação (0,12, 0,012, 0,0012mm/s) e os de fluência em três diferentes intensidades de carregamento (4, 8, 16MPa). Os resultados desses ensaios foram usados para a identificação de parâmetros no modelo de viscoelasticidade proposto por Simo [1] e também no modelo com abordagem variacional proposto por Fancello et al. [2]. Nenhum dos dois modelos foi capaz de descrever bem o comportamento do material na faixa sollicitação em que os ensaios foram feitos, mas os resultados indicam próximos passos para que a simulação do comportamento deste polímero possa ser feita com sucesso.

Palavras-chave: Modelos constitutivos, UHMWPE, Viscoelasticidade, Simulação numérica, Polímeros

ABSTRACT

Thermoplastic polymers are widely used in industry, one area in which they are often applied is the medical field. Due to this intense use a better characterization of the mechanical behavior of these materials is increasingly important so that better numeric simulations and designs are made possible. This work presents cyclic and creep tests performed on Ultra High Molecular Weight Polyethylene (UHMWPE). This material is mainly used on surfaces subject to friction in shoulder, hip and knee prosthesis. The cyclic tests were performed in three different strain rates (0,12, 0,012, 0,0012mm/s) and the creep tests in three different loads (4, 8, 16MPa). The test results were used to find parameters in the viscoelasticity model proposed by Simo [1] and also in the variational model proposed by Fancello et al. [2]. None of the models were capable of describing well the material behavior in the range that the tests were executed, but the results indicate new steps so that the numerical modeling of this polymer can be successfully made.

Keywords: Constitutive models, UHMWPE, Viscoelasticity, Numeric Simulation, Polymers

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diferença entre a estrutura de polímeros amorfos e semicristalinos. Fonte: adaptado de ASHBY, M. et al. [4].....	22
Figura 2.2 – Curvas carga-alongamento para um polímero a diferentes temperaturas. Curva A, falha frágil; curva B, falha dúctil; curva C, cold drawing; curva D, comportamento semelhante à uma borracha. Fonte: WARD & SWEENEY [5]	23
Figura 3.1 – Representação reológica do modelo de Maxwell. Fonte: WARD & SWEENEY [1].	34
Figura 3.2 – Representação do modelo de Kelvin-Voigt. Fonte: WARD & SWEENEY [5]	35
Figura 3.4 – Modelo de três elementos generalizado para número arbitrário de elementos de Maxwell. Fonte: SIMO & HUGHES [1]	39
Figura 4.1 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 23°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]	52
Figura 4.2 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 50°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]	53
Figura 4.3 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 80°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]	54
Figura 5.1 – Máquina de ensaios Instron EMIC 23-5S usada nos ensaios cíclicos. Fonte: Emic Website [18].....	55
Figura 5.2 – Máquina de ensaio brasvalvulas usada nos ensaios de fluência.....	56
Figura 5.4 – Dispositivo de compressão uniaxial projetado por Sonnenhohl [19]	57
Figura 5.5 – Dispositivo de ensaio e sistema de fixação do LVDT	59
Figura 7.1 – Resultado dos ensaios cíclicos para cada uma das três velocidades de ensaio e nove corpos de prova	64
Figura 7.2 – Resultado dos ensaios de fluência para cada uma das três tensões (4,8 e 16MPa) e nove corpos de prova.....	65
Figura 7.3 – Média dos resultados Deformação X Tempo obtidos para cada ensaio cíclico	66
Figura 7.4 – Média dos resultados Tensão X Tempo obtidos para cada ensaio cíclico	67
Figura 7.5 – Média dos resultados Tensão X Deformação obtidos para cada ensaio cíclico	68
Figura 7.6 – Média dos resultados obtidos para cada ensaio de fluência.....	69
Figura 7.7 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos usando o modelo variacional/Ogden para diferentes quantidades de braços de Maxwell.....	73
Figura 7.8 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos entre o modelo variacional e o proposto por Simo, ambos incorporando o modelo Neo-Hookean e dois braços de Maxwell.....	74

Figura 7.9 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos usando o modelo variacional/Ogden para um e dois termos na energia de deformação e também o modelo variacional/Ogden, ambos com dois braços de Maxwell.....	75
Figura 7.10 – Ajuste dos modelo variacioanal/Ogden $N = 2$, $n = 1$ para os ensaios cíclicos com velocidades de 0.1%/s e 0.01%/s	76
Figura 7.11 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência usando o modelo variacional/Ogden para um e dois termos na energia de deformação e também o modelo variacional/Ogden, ambos com dois braços de Maxwell.....	79
Figura 7.12 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência usando o modelo variacional/Ogden para diferentes quantidades de braços de Maxwell	80
Figura 7.13 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência entre o modelo variacional e o proposto por Simo, ambos incorporando o modelo Neo-Hookean e dois braços de Maxwell	82
Figura 7.15 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa.....	84
Figura 7.16 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa.....	85
Figura 7.17 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa.....	86
Figura 7.18 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação realizado somente na parte relativa à fluência no ensaio sob 16MPa	87
Figura 7.19 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para os ensaios de fluência sob 4 e 8MPa	88
Figura 7.20 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para os ensaios de fluência sob 8 e 16MPa	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 – Comprimento dos corpos de prova usados nos ensaios	63
Tabela 7.2 – Diâmetro dos corpos de prova usados nos ensaios	63
Tabela 7.3 – Parâmetros identificados nos ensaios cíclicos.....	72
Tabela 7.4 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.10	76
Tabela 7.5 – Parâmetros identificados nos ensaios de fluência	81
Tabela 7.6 – Parâmetros encontrados nos ajustes das Figura 7.16 e 6.15	85
Tabela 7.7 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.16	86
Tabela 7.8 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.17	87
Tabela 7.9 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.18	88
Tabela 7.10 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.19	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CP	Corpo de prova
GRANTE	Grupo de Análise e Projeto Mecânico
LEBm	Laboratório de Engenharia Biomecânica
LVDT	Linear Variable Differential Transformer
UHMWPE	Ultra high molecular weight polyethylene

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto latino:

\mathbf{b}	Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda
c_i	Autovalores da parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
c_i^e	Autovalores da parte elástica da parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
\mathbf{C}	Tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
$\bar{\mathbf{C}}$	Parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
$\bar{\mathbf{C}}^e$	Parte elástica da parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
d_j	Autovalores do tensor taxa de deformação
d_j^v	Autovalores do tensor taxa de deformação viscosa
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
\mathbf{D}^v	Tensor taxa de deformação viscosa
\mathbf{E}	Tensor de deformação lagrangiano
\mathbf{E}_i	Autovetores da parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
\mathbf{E}_i^e	Autovetores da parte elástica da parcela isocórica do tensor de deformação de Cauchy-Green à direita
\mathbf{F}	Gradiente de deformação
$\bar{\mathbf{F}}$	Parcela isocórica do gradiente de deformação
\mathbf{I}	Matriz Identidade
I_i	Invariantes de um tensor
J	Determinante do gradiente de deformação
K	Módulo volumétrico
n	Número de termos usados na energia de deformação do modelo de ogden
\mathbf{M}_i	Autovetores do tensor taxa de deformação
\mathbf{M}_i^v	Autovetores do tensor taxa de deformação viscosa
N	Número de braços de Maxwell
p	Pressão hidrostática
\mathbf{P}	Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff
r	Resíduo
\mathbf{S}	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff
t	Tempo

U	Parcela volumétrica do potencial de energia de deformação
W	Potencial de energia de deformação
W_{iso}	Parcela isocórica do potencial de energia de deformação

Alfabeto grego:

$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor deformação elástica
ε_j	Autovalores do tensor deformação
ε_j^e	Autovalores do tensor deformação elástica
μ	Módulo de cisalhamento
η	Coefficiente de viscosidade
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
Θ	Parcela volumétrica do gradiente de deformação
τ	Tempo de relaxação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Apresentação do problema	19
1.2	Objetivos.....	20
1.3	Estrutura do trabalho	20
2	POLÍMEROS.....	21
2.1	Classificação de polímeros	21
2.1.1	Termoplásticos e termofixos	21
2.1.2	Amorfos e semi-cristalinos	21
2.2	Transição vítrea.....	22
2.3	UHMWPE	23
3	MODELOS CONSTITUTIVOS	25
3.1	Hiperelasticidade	25
3.1.1	Definições básicas	26
3.1.2	Hiperelasticidade isotrópica	27
3.1.3	Hiperelasticidade incompressível	28
3.1.4	Hiperelasticidade compressível	29
3.1.5	Principais formas de energia de deformação	30
3.2	Viscoelasticidade.....	31
3.2.1	Princípio de superposição de Boltzmann.....	32
3.2.2	Modelos viscoelásticos lineares unidimensionais	33
3.2.3	Viscoelasticidade tridimensional para pequenas deformações ...	40
3.2.4	Viscoelasticidade finita com resposta volumétrica desacoplada	44
3.2.5	Modelo de viscoelasticidade finita baseado em uma formulação variacional	46
4	ENSAIOS MECÂNICOS.....	51
4.1	Ensaio cíclico.....	51
4.2	Ensaio de fluência	51
5	DISPOSITIVOS DE ENSAIO	55
5.1	Máquina de ensaio.....	55
5.2	Corpos de prova.....	56
5.3	Dispositivo para ensaio de compressão uniaxial	58
5.4	Dispositivos de medição	58
6	METODOLOGIA.....	61
6.1.1	Ensaio cíclico	61
6.1.2	Ensaio de fluência	62
7	RESULTADOS.....	63
7.1	Resultados experimentais.....	63
7.2	Identificação de parâmetros	69
7.2.1	Ensaio cíclico	70

7.2.2	Ensaio de Fluência.....	77
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	91
8.1	Conclusões.....	91
8.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICE A – DERIVADAS DA ENERGIA DE FORMAÇÃO .	95
	APÊNDICE B – MINIMIZAÇÃO DE W COM RELAÇÃO A ΔQ_j^V	97
	APÊNDICE C – VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VARIACIONAL	99

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do problema

Polímeros são macromoléculas, formadas a partir de unidades de repetição. A estrutura destes pode gerar uma grande variedade de propriedades e por isso têm sido cada vez mais utilizados. As aplicações são diversas, podendo variar de sacolas plásticas (polietileno) à coletes a prova de bala (kevlar).

Dependendo das condições a que estão submetidos, os polímeros podem se comportar como um sólido frágil, como uma borracha elástica ou até mesmo como um líquido viscoso. Devido a esse comportamento e dependendo das condições de sollicitação são frequentemente representados mediante modelos viscoelásticos. Esse termo enfatiza o comportamento intermediário entre um sólido elástico e um líquido viscoso, onde parte da tensão (denominada tensão viscosa) é proporcional à taxa de deformação. Mesmo dentro de uma faixa de atuação mecânica e limitado a família de modelos chamados viscoelásticos, as alternativas são variadas e permitem diferentes graus de complexidade e acoplamento de fenômenos.

O Polímero estudado durante este trabalho é o Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE). Este é muito usado em superfícies de implantes de quadril, joelho e ombro que estão sujeitas a atrito. Devido a essa importante aplicação fazem-se necessários estudos que elucidem o comportamento mecânico deste material sob carregamentos similares àqueles aos quais implantes estão submetidos.

Os implantes são predominantemente sujeitos à esforços de compressão. Desta forma neste trabalho optou-se por realizar ensaios apenas sob esse tipo de carregamento. O primeiro tipo de ensaio escolhido foi o cíclico, este se assemelha a atividades como caminhada e corrida. O segundo tipo de ensaio foi o de fluência, representando o comportamento do material quando sujeito à carregamentos de valor constante por longos períodos de tempo.

Este trabalho envolve:

- Revisão, estudo e implementação de um conjunto de modelos clássicos em viscoelasticidade para deformações infinitesimais e finitas que são classicamente disponíveis em programas comerciais de Elementos Finitos;
- Revisão e implementação do modelo variacional em regime de deformações finitas proposto por Fancello et al. [2];

- Realização de testes cíclicos e de fluência no polímero UH-MWPE sob diferentes condições de carregamento;
- Identificação de parâmetros de material para o polímero UH-MWPE a partir de ensaios cíclicos e de fluência, usando os modelos implementados.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo o estudo e uso de modelos de viscoelasticidade que possam representar o comportamento de fluência e cíclico de termoplásticos de uso médico, em particular o Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE) em regimes de deformação infinitesimal e finita, envolvendo a identificação de parâmetros a partir de dados experimentais para cada modelo e tipo de solicitação/uso pretendido.

1.3 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 é apresentada uma breve descrição sobre polímeros, apresentando conceitos básicos de como são classificados e sobre a variedade de comportamentos que podem apresentar em diferentes faixas de carregamento/temperatura.

O capítulo 3 apresenta uma revisão sobre modelos constitutivos, focando naqueles que foram usados ao longo deste trabalho.

No capítulo 4 são apresentadas informações sobre procedimentos e cuidados que devem ser tomados ao realizar ensaios de fluência e cíclicos, assim como, resultados de ensaios anteriores encontrados para o UH-MWPE.

No capítulo 5 são apresentados todos os equipamentos usados para a realização dos ensaios experimentais e no capítulo 6 a metodologia usada para execução destes.

Os resultados experimentais obtidos e também a identificação de parâmetros são apresentados ao longo do capítulo 7.

2 POLÍMEROS

2.1 Classificação de polímeros

2.1.1 Termoplásticos e termofixos

Uma possível forma de classificar os polímeros é a quanto ao comportamento térmico, separando em termoplásticos e termofixos. A diferença entre esses dois grupos se relaciona ao tipo de ligação entre as cadeias poliméricas – termoplásticos tem ligações secundárias, enquanto que termofixos possuem tanto ligações secundárias quanto primárias [3]. A menor força existente entre as cadeias moleculares dos termoplásticos faz com que estes sejam fundíveis e moldáveis. Os termofixos não podem ser fundidos; quando sujeitos a altas temperaturas se decompõem. Essa impossibilidade de fusão dificulta o processo de reciclagem desses polímeros.

Os polímeros termoplásticos têm menor custo do que os termofixos, porém perdem a sua rigidez à uma temperatura muito mais baixa. Dessa forma, os termofixos são usados em situações em que seja necessária uma maior estabilidade térmica, como em isolantes térmicos e elétricos. Outro uso importante desta classe de polímeros é em casos em que é necessária alta rigidez e resistência mecânica [4].

2.1.2 Amorfos e semi-cristalinos

Uma outra forma bastante importante de classificação dos polímeros é a morfológica, esta os distribui entre o grupo amorfos e o dos semi-cristalinos. Os amorfos são aqueles em que as moléculas estão dispostas de forma totalmente desordenada, já os semicristalinos apresentam regiões parcialmente ordenadas. Essa diferença entre o arranjo molecular é exemplificada na Figura 2.1.

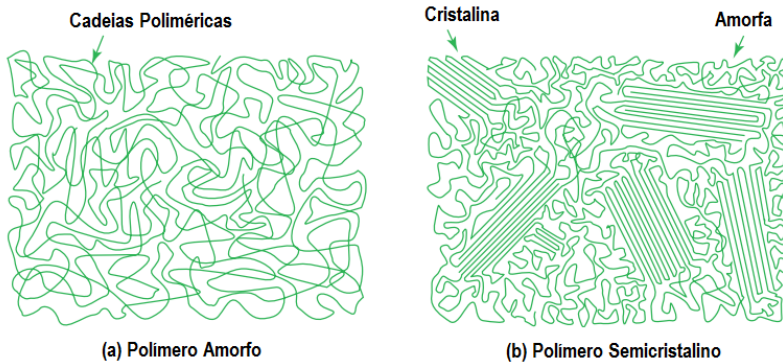


Figura 2.1 – Diferença entre a estrutura de polímeros amorfos e semicristalinos.
 Fonte: adaptado de ASHBY, M. et al. [4]

É importante ressaltar que o grau de cristalinidade dos polímeros é baixo se comparado aos metais cristalinos, cerâmicas e outros materiais. A grande maioria dos polímeros apresenta no máximo 50% de estrutura cristalina [3].

Polímeros (semi) cristalinos, devido ao empacotamento e organização de cadeias poliméricas, apresentam diferenças no comportamento mecânico se comparados aos amorfos, tais como: maior dureza, menor fluência, menor dependência da taxa de deformação, etc.

2.2 Transição vítrea

Quando sujeitos a baixas temperaturas, ou a altas taxas de deformação, polímeros podem se comportar como sólidos frágeis, com módulos de elasticidade de 1 – 10GPa fraturando quando sujeitos a deformações maiores que 5%. Por outro lado, quando submetidos a altas temperaturas, ou baixas taxas de deformação, estes podem apresentar módulos de elasticidade de 1 – 10MPa e suportar deformações até mesmo maiores que 100% sem apresentar deformação permanente [5].

Para valores intermediários de taxas de deformação (ou temperatura) o polímero não se comporta nem de forma vítrea, nem “borrachosa”, oferecendo um comportamento intermediário. Assim fica caracterizada a faixa de transição vítrea.

A Figura 2.2 mostra curvas carga–alongamento para um polímero submetido a quatro diferentes temperaturas. Quando a temperatura é muito inferior à de transição vítrea, ocorre fratura frágil (curva A) à uma pequena deformação. Já quando a temperatura é muito alta o polímero

passa a se comportar de forma semelhante a uma borracha, apresentando grandes deformações antes da ruptura (curva D). Para valores intermediários de temperatura é também observado um comportamento intermediário (curvas B e C).

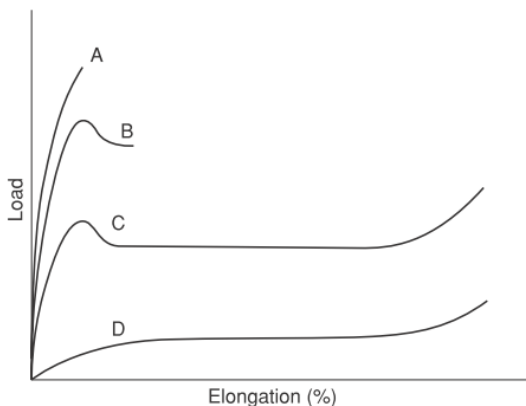


Figura 2.2 – Curvas carga-alongamento para um polímero a diferentes temperaturas. Curva A, falha frágil; curva B, falha dúctil; curva C, cold drawing; curva D, comportamento semelhante à uma borracha. Fonte: WARD & SWEENEY [5]

2.3 UHMWPE

O Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE) é um polímero termoplástico e semi-cristalino. Propriedades como alta tenacidade a fratura, baixo coeficiente de atrito, biocompatibilidade, baixa densidade e alta resistência ao impacto fazem com que este polímero seja muito utilizado em superfícies de implantes que substituem articulações.

As propriedades mecânicas apresentadas dependem tanto das fases cristalina e amorfa. Alterações em cada uma dessas (tais como a proporção das fases ou presença de crosslinking na fase amorfa) podem causar diferenças significativas no comportamento do material [6].

3 MODELOS CONSTITUTIVOS

Os modelos constitutivos são criados com o objetivo de representar o comportamento de materiais através do uso de equações, que devem obedecer ao princípio da objetividade e às leis da termodinâmica. Na mecânica do contínuo estes representam a relação um grupo de variáveis, tais como temperatura e deformação, e a tensão atuante em um corpo. Geralmente esses modelos são implementados computacionalmente, permitindo assim simular o comportamento de corpos de geometrias complexas sujeitos a variados tipos de carregamento.

3.1 Hiperelasticidade

Os modelos constitutivos mais usados se enquadram na classificação de hiperelásticos, estes são capazes de simular o comportamento de uma grande variedade de materiais, particularmente de materiais borrachosos, podendo gerar excelentes resultados em alguns casos em que a deformação supera até 700% [7].

Diferentemente de outros modelos, os hiperelásticos não dependem da história de deformação de um material. Dessa forma pode ser definido um potencial de energia de deformação dado em função apenas da configuração atual

$$W = W(\mathbf{F}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação, que define a configuração atual de cada ponto do corpo. O primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff é definido por

$$\mathbf{P} := \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.2)$$

Ficando assim evidente que a tensão atuante em um material hiperelástico também não depende da história do corpo, apenas do estado de deformação atual.

Este capítulo apresenta os modelos de hiperelasticidade, cobrindo alguns tipos de comportamento, tais como isotrópico, incompressível e compressível. Também são apresentadas as principais formas de energia de deformação.

3.1.1 Definições básicas

Nesse ponto a fim de facilitar o equacionamento matemático que será usado nas próximas seções faz-se útil a apresentação de outros tensores representantes do estado de deformação e de tensão do corpo.

O tensor de tensão de Cauchy, que representa o estado de tensões atuantes em um ponto na configuração deformada é definido como

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{1}{J} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (3.3)$$

onde

$$J := \det \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Faz necessária igualmente a introdução dos tensores de deformação de Cauchy-Green à esquerda

$$\mathbf{b} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (3.5)$$

e à direita

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.6)$$

de forma que a energia de deformação possa ser escrita também a partir desses tensores

$$W = W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{b}) = W(\mathbf{C}) \quad (3.7)$$

Com a introdução do tensor de Cauchy-Green à direita o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff pode ser facilmente definido

$$\mathbf{S} := 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.8)$$

e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e tensor de Cauchy podem ser re-escritos como

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\mathbf{F}}{J} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (3.10)$$

Mais informações sobre esses tensores podem ser encontradas nas referências [8]–[10].

3.1.2 Hipereelasticidade isotrópica

Podem-se impor restrições ao potencial energia de deformação a fim de que este represente o comportamento de materiais isotrópicos. Esse tipo de material se comporta da mesma forma independentemente da direção do carregamento aplicado.

Neste caso a energia de deformação passa a poder ser expressa em termos dos invariantes principais dos tensores tensão de Cauchy-Green [11], [12]

$$\begin{aligned} W &= W[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})] \\ &= W[I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b}), I_3(\mathbf{b})] \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo

$$I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \quad (3.12)$$

$$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \{[\text{tr}(\mathbf{X})]^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)\} \quad (3.13)$$

$$I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \quad (3.14)$$

onde \mathbf{X} representa um tensor qualquer.

Usando a regra da cadeia e as expressões (3.5), (3.6) e (3.11) pode-se reescrever o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\delta I_1}{\delta \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\delta I_2}{\delta \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\delta I_3}{\delta \mathbf{C}} \right) \quad (3.15)$$

Uma outra forma de representação muito útil para materiais isotrópicos pode ser obtida através da decomposição espectral dos tensores de Cauchy-Green à direita

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \quad (3.16)$$

e à esquerda

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a \quad (3.17)$$

Usando também a equação (3.9) e a regra da cadeia pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F} \left(\sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \right) \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} (\mathbf{F} \mathbf{N}_a) \otimes \mathbf{N}_a \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{N}_a \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.3 Hiperelasticidade incompressível

Materiais que mantêm o volume praticamente constante durante todo o processo de deformação podem ser modelados através do uso de modelos incompressíveis. Esse é o caso de vários polímeros. Matematicamente essa restrição pode ser expressa como

$$\det(\mathbf{F}) := J = 1 \quad (3.19)$$

A fim de encontrar uma equação constitutiva para materiais hiperelásticos incompressíveis a energia de deformação pode ser escrita como

$$W = \bar{W}(\mathbf{F}) + p(J - 1) \quad (3.20)$$

onde p é um multiplicador de Lagrange, cuja interpretação física pode ser entendido como a pressão hidrostática.

Usando as equações (3.2) e (3.20) pode-se obter uma expressão para o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{F}^{-T} + \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = -p\mathbf{F}^{-T} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.21)$$

Para o caso incompressível isotrópico pode-se provar que a função energia de deformação é da seguinte forma

$$\begin{aligned} W &= \bar{W}[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})] - \frac{1}{2}p[I_3(\mathbf{C}) - 1] \\ &= \bar{W}[I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b})] - \frac{1}{2}p[I_3(\mathbf{b}) - 1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.1.4 Hiperelasticidade compressível

Materiais que ao se deformarem alteram seu volume perceptivelmente são ditos compressíveis. Nessa classe de modelos a única restrição que deve ser respeitada é que a razão de volumes J seja sempre positiva.

Neste trabalho será usada a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação proposta por Flory [13] em suas parcelas isocórica

$$\bar{\mathbf{F}} := J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (3.23)$$

e volumétrica

$$\Theta := \det \mathbf{F} \quad (3.24)$$

de forma que

$$\mathbf{F} = \Theta^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (3.25)$$

A partir dessa decomposição também podem ser introduzidas as parcelas deviatóricas dos tensores de deformação de Cauchy-Green à direita e Lagrangiano

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \quad (3.26)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) \quad (3.27)$$

Para o modelamento de materiais compressíveis pode-se decompor a energia de deformação também em parcelas isocóricas e volumétricas, respectivamente

$$W(\mathbf{C}) = W_{iso}(\bar{\mathbf{C}}) + U(\theta) \quad (3.28)$$

3.1.5 Principais formas de energia de deformação

A parcela volumétrica U da função energia de deformação é frequentemente definida como uma medida quadrática das deformações volumétricas. Ao longo deste trabalho será usada a expressão:

$$U(\theta) = \frac{K}{2} \ln \theta^2 \quad (3.29)$$

Quando o módulo volumétrico K toma valores elevados (penalização), o modelo tende a reproduzir deformações isocóricas.

Para a parcela isocórica W_{iso} , dois modelos muito usados são os de modelos Hencky e de Ogden. O de Hencky é uma extensão do modelo linear elástico para deformações finitas

$$W_{iso} = \mu \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_j)^2 \quad (3.30)$$

sendo $\varepsilon_a = \ln(\lambda_a)$, chamada de deformação logarítmica.

O modelo de Ogden é um modelo mais geral e permite comportamentos mais complexos mesmo quando o material está sujeito a deformações muito altas. Esse modelo postula que a energia de deformação é função dos alongamentos principais λ_a

$$W_{iso}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3) \quad (3.31)$$

onde $\bar{\lambda}_a = J^{-1/3} \lambda_a$. Em comparação com a teoria linear pode-se obter o módulo de cisalhamento equivalente:

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \geq 0 \quad (3.32)$$

Uma das principais características desse modelo é que outros mais simples podem ser considerados casos especiais deste. O modelo de Mooney-Rivlin, por exemplo, pode ser obtido para $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -2$. Já o modelo de neo-Hookean é obtido com os valores de $N = 1$ e $\alpha_1 = 2$.

3.2 Viscoelasticidade

A principal diferença entre os modelos viscoelásticos e os denominados hiperelásticos apresentados na seção anterior é que nos primeiros passa a existir dependência da história de deformação sofrida pelo corpo e não apenas no estado atual desta.

A principal forma de contabilizar a história de um material é através do uso de variáveis internas. Estas podem ser de valor escalar, tensorial ou vetorial e devem ser tais que seu valor instantâneo deve representar todos os mecanismos de dissipação que o corpo já passou. Dessa forma o estado termodinâmico do corpo será determinado somente através do valor atual de um conjunto de variáveis de estado

$$W = W(\mathbf{F}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.33)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ representa o conjunto de variáveis internas.

Este capítulo clarifica o conceito de viscoelasticidade apresentando modelos de viscoelasticidade linear unidimensional para pequenas deformações nas seções 3.2.1 e 3.2.2 e depois expande os conceitos para viscoelasticidade tridimensional para pequenas e grandes deformações nas seções seguintes.

3.2.1 Princípio de superposição de Boltzmann

O princípio de sobreposição de Boltzmann se baseia na premissa de que cada incremento de carga gera uma contribuição independente à deformação total, e que esta pode assim ser obtida como a soma de cada contribuição [14]. A deformação total para um corpo sujeito à n incrementos de carga pode ser então dada por

$$e(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i Q(t - s_i) \quad (3.34)$$

em que $Q(t - s_i)$ é uma função crescente representando a flexibilidade instantânea que possui valor 0, para $t < s_i$, sendo s_i o momento em que o incremento de carga $\Delta\sigma_i$ foi aplicado.

Tornando os incrementos de carga infinitesimais, a equação (3.34) pode ser reescrita como

$$e(t) = \int_0^t Q(t - s) d\sigma(s) \quad (3.35)$$

Onde o tempo zero é definido no início da história do material, ficando assim claro que esse princípio também assume que o estado atual de deformação é função de toda a história de tensões a qual esse corpo já foi submetido. Pode-se separar a resposta instantânea elástica em termos do módulo de relaxação G_{II}

$$e(t) = \frac{\sigma}{G_{II}} + \int_{0^+}^t Q(t - s) \frac{d\sigma(s)}{ds} ds \quad (3.36)$$

onde σ representa a tensão total no final do experimento.

O princípio de Boltzmann também pode ser formulado em termos da relaxação de tensão, de forma semelhante à feita para a fluência, sendo a tensão dada por

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \Delta e_i G(t - s_i) \quad (3.37)$$

para n incrementos de deformação, nessa equação $G(t - s)$ é o módulo de relaxação de tensão.

Para incrementos infinitesimais de deformação tem-se

$$\sigma(t) = G_r e + \int_{0^+}^t G(t-s) \frac{de(s)}{ds} ds \quad (3.38)$$

em que G_r é o módulo de relaxação de equilíbrio.

É importante destacar que a premissa adotada no princípio de superposição de Boltzmann vinculada a modelos de viscoelasticidade linear, não é necessariamente satisfeita pelos materiais reais, sendo necessário modelos de representação não lineares e portanto baseados em outros princípios constitutivos.

3.2.2 Modelos viscoelásticos lineares unidimensionais

Os modelos viscoelásticos são frequentemente representados com o auxílio de modelos reológicos. Estes geralmente são compostos de molas (representando a parcela elástica) e amortecedores (representado a parcela viscosa).

Existem dois modelos básicos que mostram diferentes formas de descrever o comportamento misto (elástico/viscoso) exibido por polímeros, estes são o modelo de Maxwell e o de Kelvin-Voigt.

3.2.2.1 Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell é composto por uma mola e um amortecedor lineares posicionados em série, como mostrado na Figura 3.1 – Representação reológica do modelo de Maxwell. Fonte: WARD & SWEENEY [1]. A deformação total é dada pela soma das parcelas viscosa e elástica

$$e = e_1 + e_2 \quad (3.39)$$

Já a tensão, por equilíbrio, é mesma em ambos os componentes

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (3.40)$$

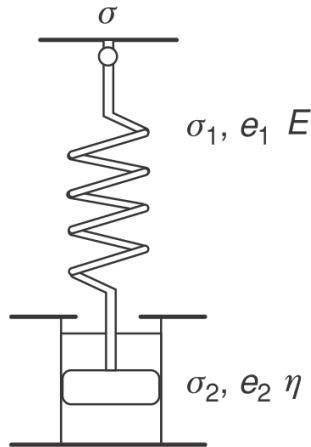


Figura 3.1 – Representação reológica do modelo de Maxwell. Fonte: WARD & SWEENEY [1].

A relação tensão-deformação pode ser encontrada por

$$\sigma_1 = E e_1 \quad (3.41)$$

ou

$$\sigma_2 = \eta \frac{de_2}{dt} \quad (3.42)$$

Para encontrar a relação entre a deformação e a tensão totais, as equações (3.39) - (3.40) podem ser combinadas obtendo

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.43)$$

É importante ressaltar que quando sujeito a deformação constante o amortecedor está livre para poder relaxar. Assim, esse modelo produz uma aproximação do fenômeno de relaxação de tensão. Por outro lado, se uma tensão constante é aplicada haverá deformação instantânea da mola, o que não corresponde a materiais reais.

3.2.2.2 Modelo de Kelvin-Voigt

Nesse modelo a mola e o amortecedor são posicionados em paralelo, como mostrado na Figura 5, assim ambos os componentes estarão sujeitos a mesma deformação

$$e = e_1 = e_2 \quad (3.44)$$

e a tensão total será dada pela soma da tensão em cada componente

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.45)$$

A relação tensão-deformação de cada componente continua sendo dada pelas equações (3.41) e (3.42), já a relação entre a tensão e a deformação totais pode ser encontrada substituindo estas na equação (3.45)

$$\sigma = Ee + \eta \frac{de}{dt} \quad (3.46)$$

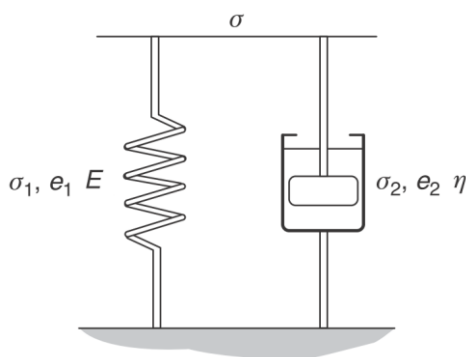


Figura 3.2 – Representação do modelo de Kelvin-Voigt. Fonte: WARD & SWEENEY [5]

Nesse modelo se uma tensão constante é aplicada de forma imediata, não pode haver qualquer variação instantânea do comprimento da mola, pois esta é impedida pela presença de amortecimento. Assim, a deformação aumenta progressivamente até atingir seu valor final. Dessa forma, esse modelo produz uma descrição aproximada do fenômeno da

fluência. Porém quando o modelo está sujeito a uma deformação constante o amortecedor não tem como relaxar, portanto, este modelo não consegue descrever o relaxamento de tensão.

3.2.2.3 Modelo de três elementos

Nenhum dos dois modelos apresentados acima é capaz de representar adequadamente observações físicas dos fenômenos de fluência e relaxação de tensão. Uma possível forma de resolver esse problema é combinar os modelos de Maxwell e o de Kevin-Voigt. A representação reológica de uma das possíveis combinações pode ser vista na Figura 3.3.

As equações constitutivas para a mola 1 e para o amortecedor, respectivamente, podem ser escritas como

$$\sigma_1 = E_1 e \quad (3.47)$$

$$\sigma_2 = \eta \dot{\alpha} \quad (3.48)$$

onde α é uma varável interna que contabiliza a deformação no amortecedor.

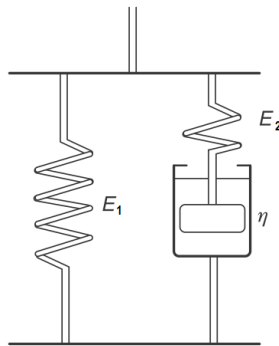


Figura 3.3 – Representação reológica do modelo de três elementos. Fonte: WARD & SWEENEY [5].

A tensão total nesse modelo pode ser encontrada pela soma da tensão atuante na mola 1 e a atuante no amortecedor (tendo esta o mesmo valor da tensão na mola 2). Sendo

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\
&= E_1 e + \eta \dot{\alpha} \\
&= E_1 e + E_2 (e - \alpha) \\
&= (E_1 + E_2) e - E_2 \alpha \\
&= E_0 e - E_2 \alpha
\end{aligned} \tag{3.49}$$

onde o módulo de elasticidade inicial, E_0 , pode ser obtido por

$$E_0 := E_1 + E_2 \tag{3.50}$$

Sabendo que a tensão no amortecedor (3.48) é a mesma da mola 2 pode-se obter a equação de evolução de α

$$\dot{\alpha} + \frac{1}{\tau} \alpha = \frac{1}{\tau} e \tag{3.51}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$$

onde o tempo de relaxação, τ , é definido por

$$\tau := \frac{\eta}{E_2} \tag{3.52}$$

A equação (3.51) pode ser integrada multiplicando ambos os lados pelo fator de integração $\exp(t/\tau)$, resultando em

$$\alpha(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau}\right] e(s) ds \tag{3.53}$$

que pode ser integrada por partes obtendo

$$\alpha(t) = e(t) - \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau}\right] \dot{e}(s) ds \tag{3.54}$$

Substituindo (3.54) em (3.49)⁵ pode-se eliminar a variável interna α das equações constitutivas

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s)\dot{e}(s)ds \quad (3.55)$$

sendo

$$G(t) := E_1 + E_2 \exp(-t/\tau) \quad (3.56)$$

o módulo de relaxação.

A expressão (3.55) pode ser invertida, obtendo uma expressão para a deformação

$$e(t) = \int_0^t J(t-s)\dot{\sigma}(s) ds \quad (3.57)$$

onde

$$J(t) := \frac{1}{E_1} \left[1 - \frac{E_2}{E_0} \exp\left(-\frac{E_1}{\tau E_0} t\right) \right] \quad (3.58)$$

é o módulo de fluência.

Este modelo só é capaz de descrever a fluência e a relaxação mediante respostas exponenciais. A representação do comportamento viscoelástico de materiais reais requer, em geral, a inclusão de um número elevado de elementos de Maxwell em paralelo ou, de forma equivalente, elementos de Voigt em série, incorporando tempos característicos τ diferentes.

3.2.2.4 Modelos generalizados

O modelo de três elementos, mostrado na Figura 3.3, pode ser generalizado para incluir um número arbitrário de elementos de Maxwell posicionados em paralelo com a mola, como mostrado na Figura 3.4 – Modelo de três elementos generalizado para número arbitrário de elementos de Maxwell. Fonte: SIMO & HUGHES .

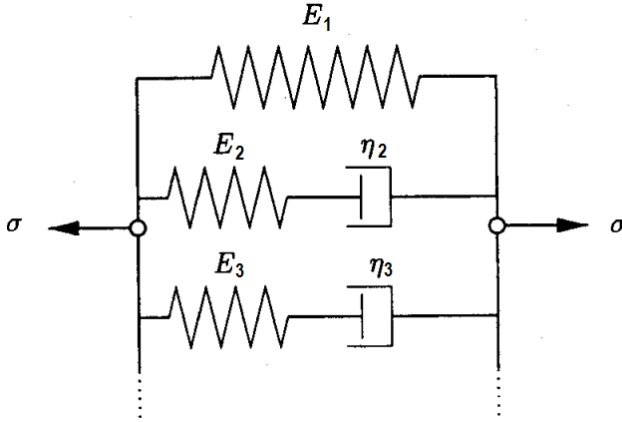


Figura 3.4 – Modelo de três elementos generalizado para número arbitrário de elementos de Maxwell. Fonte: SIMO & HUGHES [1]

Para esse novo modelo a tensão total σ pode ser encontrada por

$$\sigma(t) = E_0 e(t) - \sum_{i=2}^N q_i \quad (3.59)$$

sendo

$$E_0 := \sum_{i=1}^N E_i \quad (3.60)$$

e

$$q_i := E_i \alpha_i \quad (3.61)$$

A variável interna q_i deve ser interpretada como uma tensão fictícia proporcional a deformação do amortecedor. A equação de evolução para esta variável interna equivale à equação (3.51):

$$\dot{q}_i + \frac{q_i}{\tau_i} = \frac{E_i e}{\tau_i} \quad (3.62)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q_i(t) = 0$$

onde

$$\tau_i := \eta_i/E_i, \quad i = 2, 3 \dots, N \quad (3.63)$$

A função de relaxação G pode então ser redefinida como

$$G(t) := E_1 + \sum_{i=2}^N E_i \exp(-t/\tau_i) \quad (3.64)$$

e a tensão representada pela mesma equação (3.55).

3.2.3 Viscoelasticidade tridimensional para pequenas deformações

No caso geral envolvendo cinemática nas três dimensões, a deformação em cada ponto do corpo passa a ser representada por um tensor. Este pode ser decomposto em duas parcelas, uma desviadora e outra hidrostática ou esférica:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \frac{1}{3}\theta \mathbf{I} \quad (3.65)$$

Em (3.64) \mathbf{I} é a matriz identidade, \mathbf{e}_0 a parcela de deformação desviadora

$$\mathbf{e}_0 := \mathbf{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I} \quad (3.66)$$

e Θ a deformação volumétrica

$$\theta := \text{tr}(\mathbf{e}) \quad (3.67)$$

A energia inicial acumulada pelo sistema é dada pela soma das parcelas associadas às deformações desviadora e volumétrica, respectivamente

$$W^0(\mathbf{e}) = \bar{W}^0(\mathbf{e}_0) + U^0(\theta) \quad (3.68)$$

onde U^0 é chamada de reposta elástica volumétrica.

Esse potencial pode ser derivado em relação a \mathbf{e} definindo um tensor tensão inicial

$$\boldsymbol{\sigma}^0 := \frac{\partial W^0}{\partial \mathbf{e}} \quad (3.69)$$

pela regra da cadeia tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = dev \left(\frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}_0} \right) + U^{0'}(\theta) \mathbf{I} \quad (3.70)$$

De forma semelhante à que foi feita na seção anterior, pode-se escrever a equação para a tensão aplicada em função do tempo

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^0 - \sum_{i=2}^N \mathbf{q}_i(t) \quad (3.71)$$

onde a equação de evolução da variável tensorial interna \mathbf{q}_i , assumindo a parcela viscosa como isocórica, é dada por

$$\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} dev \left(\frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}_0} \right) \quad (3.72)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{q}_i = 0$$

sendo que

$$\gamma_i = \frac{E_i}{E_0} \quad (3.73)$$

A equação (3.72) pode ser resolvida obtendo

$$\mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-s}{\tau_i} \right) \frac{d}{ds} \{ dev [\partial_e \bar{W}^0(\mathbf{e}_0(s))] \} ds \quad (3.74)$$

A equação (3.74) pode ser substituída em (3.71), integrada por partes e, utilizando a condição inicial (3.72)₂ pode-se obter a equação constitutiva para o tensor tensão

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = U^{0'}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{I} + \int_0^t g(t-s) \frac{d}{ds} \{dev[\partial_e \bar{W}^0(\mathbf{e}_0(s))]\} ds \quad (3.75)$$

onde

$$g(t) := \gamma_1 + \sum_{i=2}^{N+1} \gamma_i \exp\left[-\frac{t}{\tau_i}\right] \quad (3.76)$$

é geralmente conhecida como função de relaxação normalizada.

3.2.3.1 Algoritmos de integração

Associada à função de relaxação (3.76) pode ser definida a variável algorítmica

$$\mathbf{h}^i(t) := \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \{dev[\partial_e \bar{W}^0(\mathbf{e}_0(s))]\} ds \quad (3.77)$$

Para funções exponenciais a seguinte propriedade é válida

$$\exp[(t + \Delta t)/a] = \exp(\Delta t/a) \exp(t/a) \quad (3.78)$$

que pode ser usada para reescrever a equação (3.77) como

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^i(t_{n+1}) &= \int_{t_0}^{t_n+\Delta t} \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t_n - s}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \\
&= \int_{t_0}^{t_n} \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_i}\right) \exp\left(-\frac{t_n - s}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds + \\
&\quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \tag{3.79} \\
&= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{h}^i(t_n) + \\
&\quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{s}^0(s) := \text{dev}[\partial_e \bar{W}^0(\mathbf{e}_0(s))] \tag{3.80}$$

A integral em cada intervalo de tempo pode ser aproximada pela regra do ponto médio

$$\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) ds \\
&\cong \left| \exp[-(t_n + \Delta t_n - s)/\tau_i] \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0(s) \right|_{s=\frac{t_{n+1}}{2}} \Delta t \tag{3.81} \\
&= \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) \frac{d}{ds} \mathbf{s}^0[(t_n + t_{n+1})/2] \Delta t_n \\
&= \exp(-\Delta t_n/2\tau_i) [\mathbf{s}^0(t_{n+1}) - \mathbf{s}^0(t_n)]
\end{aligned}$$

Combinando as equações (3.79) e (3.81) tem-se uma expressão algorítmica incremental para cálculo das tensões em função da deformação total e variáveis internas \mathbf{h}^i conhecidas no tempo t_n e do novo valor de deformação total no tempo t_{n+1} . Esta função constitutiva incremental está

dada no formato usual requerido nos pontos de integração da equação de balanço num código de elementos finitos.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{0_{n+1}} &:= dev(\mathbf{e}_{n+1}) \\
 \mathbf{s}^0_{n+1} &= dev[\partial_e \bar{W}^0(\mathbf{e}_{0_{n+1}})] \\
 \mathbf{h}^i_{n+1} &= exp(-\Delta t_n / \tau_i) \mathbf{h}^i(t_n) + \\
 &exp(-\Delta t_n / 2\tau_i) [\mathbf{s}^0_{n+1} - \mathbf{s}^0_n]
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = U^{0'}(\theta) \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{s}^0_{n+1} + \sum_{i=2}^{N+1} \gamma_i \mathbf{h}^i_{n+1} \tag{3.83}$$

3.2.4 Viscoelasticidade finita com resposta volumétrica desacoplada

Esta seção trata da extensão do modelo acima apresentado para o caso de cinemática finita. O modelo aqui apresentado corresponde ao modelo proposto por SIMO [1]. Assim como na seção anterior considera-se a separação da energia de deformação da soma de uma parcela isocórica e uma volumétrica

$$W^0(\mathbf{C}) = \bar{W}^0(\bar{\mathbf{C}}) + U^0(\theta) \tag{3.84}$$

Usando a equação (3.8) e a regra da cadeia para diferenciar (3.84) é possível obter que

$$\mathbf{S}^0 = J U^{0'} \mathbf{C}^{-1} + \bar{\mathbf{S}}^0 \tag{3.85}$$

onde

$$\bar{\mathbf{S}}^0 := J^{-2/3} DEV[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^0(\bar{\mathbf{C}})] \tag{3.86}$$

sendo $DEV[\cdot]$ o operador desviador na configuração de referência, definido por

$$DEV[\mathbf{A}] = \mathbf{A} - 1/3(\mathbf{A} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \tag{3.87}$$

A expressão (3.59) pode ser generalizada para deformações finitas

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^0 - J^{-\frac{2}{3}} DEV[\sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{Q}_i(t)] \quad (3.88)$$

Motivado por (3.72) pode ser proposta a seguinte equação de evolução para a variável interna $\mathbf{Q}_i(t)$

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(t) + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{Q}_i(t) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} DEV\{2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0[\bar{\mathbf{C}}(t)]\} \quad (3.89)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{Q}_i(t) = 0$$

Sendo τ_i e γ_i definidos pelas mesmas equações (3.63) e (3.73) respectivamente.

A equação diferencial (3.89) pode ser resolvida, obtendo

$$\mathbf{Q}_i(t) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \left\{ DEV\{2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0[\bar{\mathbf{C}}(s)]\} \right\} ds \quad (3.90)$$

Agora o segundo tensor de Piola-Kirchhoff pode ser obtido fazendo a substituição da equação (3.90) na (3.88) e fazendo o uso da integração por partes junto às equações (3.85) e (3.86).

$$\mathbf{S}(t) = JU^{0'}(\theta)\mathbf{C}^{-1}(t) + J^{-2/3} \int_0^t g(t-s) \frac{d}{ds} DEV\{2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0[\bar{\mathbf{C}}(s)]\} ds \quad (3.91)$$

Sendo que a função de relaxação normalizada $g(t)$ continua sendo dada pela equação (3.76).

3.2.4.1 Algoritmo de Integração

Usando o mesmo raciocínio da seção 3.2.3.1 pode-se chegar à variável interna algorítmica

$$\mathbf{H}^i(t_{n+1}) = \exp(-\Delta t_n/\tau_i)\mathbf{H}^i(t_n) + \quad (3.92)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_i}\right] \frac{d}{ds} DEV\{2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0[\bar{\mathbf{C}}(s)]\} ds$$

Por fim a regra do ponto médio é usada para aproximar o valor da integral

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^i_{n+1} &= \exp(-\Delta t_n/\tau_i) \mathbf{H}^i(t_n) + \\ &\exp(-\Delta t_n/2\tau_i) [\tilde{\mathbf{S}}^0_{n+1} - \tilde{\mathbf{S}}^0_n] \\ \tilde{\mathbf{S}}^0_{n+1} &:= DEV_{n+1}[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0 \mathbf{C}_{n+1}] \\ \tilde{\mathbf{S}}^0_n &:= DEV_n[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}\bar{W}^0 \mathbf{C}_n] \end{aligned} \quad (3.93)$$

Como já comentado anteriormente, este algoritmo constitutivo incremental está dado no formato usual requerido nos pontos de integração da equação de balanço num código de elementos finitos.

3.2.5 Modelo de viscoelasticidade finita baseado em uma formulação variacional

O modelo apresentado nessa seção foi proposto em 2006 por Fanello et al. [2] e é classificado como variacional, pois é formulado de forma que a atualização das variáveis internas a cada incremento de carga obedeça um princípio de mínimo. O modelo reológico usado é o mesmo mostrado na Figura 3.4.

O modelo faz uso das seguintes premissas:

- O braço elástico contém tanto parcelas volumétricas como isocóricas de deformação,

$$\omega(\mathbf{F}) = \varphi(\bar{\mathbf{C}}) + U(J) \quad (3.94)$$

sendo a parte isocórica uma função isotrópica de $\bar{\mathbf{C}}$

$$\varphi(\bar{\mathbf{C}}) = \varphi(c_1, c_2, c_3) \quad (3.95)$$

onde c_i são os autovalores de $\bar{\mathbf{C}}$, cuja decomposição espectral é dada por

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{E}_i \quad (3.96)$$

A parte volumétrica pode ser definida pela expressão (3.29).

- Nos braços de Maxwell a parte viscosa é assumida isocórica

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^v \Rightarrow \bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{v-1}, \quad \det \mathbf{F}^v = 1 \quad (3.97)$$

O tensor taxa de deformação viscosa é definido como:

$$\mathbf{D}^v = \text{sym}(\mathbf{L}^v) = \mathbf{L}^v = \dot{\mathbf{F}}^v \mathbf{F}^{v-1} \quad (3.98)$$

onde foi usada a hipótese de que não há spin viscoso.

$$\dot{\mathbf{F}}^v = \mathbf{D}^v \mathbf{F}^{v-1} \quad (3.99)$$

- O tensor \mathbf{D}^v pode ser escrito através de sua decomposição espectral e restrições adicionais podem ser impostas determinando como o fluxo viscoso acontece

$$\mathbf{D}^v = \sum_{i=1}^3 d_i^v \mathbf{M}_i^v$$

$$d_i^v \in K_Q = \{p_{j0} \in \mathbb{R} : p_1 + p_2 + p_3 = 0\} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{M}_i^v \in K_M = \{N_i \in \text{sym} : N_j \cdot N_j = 1, N_i \cdot N_j = 0, i \neq j\}$$

O conjunto K_Q assegura que o traço de \mathbf{D}^v seja nulo, enquanto que K_M restringe as autoprojeções \mathbf{M}_j^v a serem tensores simétricos ortonormais de segunda ordem.

- Os potenciais elásticos e viscosos associados aos braços de Maxwell também são assumidos como funções isotrópicas das deformações elásticas e viscosas, sendo assim dependentes de seus autovalores:

$$\varphi^e(\bar{\mathbf{C}}^e) = \varphi^e(c_1^e, c_2^e, c_3^e) \quad (3.101)$$

$$\psi(\mathbf{D}^v) = \psi(d_1^v, d_2^v, d_3^v) \quad (3.102)$$

onde a decomposição espectral de $\bar{\mathbf{C}}^e$ é dada por

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e{}^T \bar{\mathbf{F}}^e = \sum_{j=1}^3 c_j^e \mathbf{E}_j^e \quad (3.103)$$

- Mapeamentos exponenciais são usados para atualizar incrementalmente as deformações viscosas

$$\Delta \mathbf{F}^v = \mathbf{F}_{n+1}^v \mathbf{F}_n^{v-1} = \exp[\Delta t \mathbf{D}^v] \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{C}^v &= (\Delta \mathbf{F}^v)^T \Delta \mathbf{F}^v = \mathbf{F}_n^{v-T} \mathbf{C}_{n+1}^v \mathbf{F}_n^{v-1} \\ &= \exp[\Delta t \mathbf{D}^v]^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\Delta t \mathbf{D}^v = \Delta t \left(\sum_{j=1}^3 d_j^v \mathbf{M}_j^v \right) = \sum_{j=1}^3 \Delta q_j^v \mathbf{M}_j^v \quad (3.106)$$

$$\mathbf{D}^v = \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta q_j^v}{\Delta t} \mathbf{M}_j^v = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\Delta \mathbf{C}_{n+1}^v) \quad (3.107)$$

O potencial incremental de energia de deformação pode então ser escrito como (ver referências [2] e [15] para maiores detalhes)

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F}_{n+1}, \mathfrak{E}_n) &= \Delta \varphi(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}) + \Delta U(\theta_{n+1}) + \\ &\sum_{k=1}^p \min_{\mathbf{M}_j^v, \Delta q_j^v} \left\{ \Delta \varphi^e(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^e) + \Delta t \psi \left(\frac{\Delta q_j^v}{\Delta t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde p é o número de braços de Maxwell e

$$\Delta \varphi(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}) = \varphi(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}) - \varphi(\bar{\mathbf{C}}_n) \quad (3.109)$$

$$\Delta\varphi^e(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}) = \varphi^e(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^e) - \varphi^e(\bar{\mathbf{C}}_n^e) \quad (3.110)$$

$$\Delta U(\theta_{n+1}) = U(\theta_{n+1}) - U(\theta_n) \quad (3.111)$$

sendo Δq_j^v , \mathbf{M}_j^v pertencentes aos conjuntos K_Q e K_M das equações (3.100)² e (3.100)³, respectivamente.

A referência [2] mostra que a minimização da equação (3.108) em relação a \mathbf{M}_j^v prova que $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^e$, \mathbf{D}^v e $\bar{\mathbf{C}}^{pr} = \mathbf{F}_n^{vT} \bar{\mathbf{C}}_{n+1} \mathbf{F}_n^{v-1}$ são colineares. Já as condições de otimalidade que resultam da minimização em relação a Δq_j^v gera um conjunto de equações que podem ser resolvidas para encontrar seu valor

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} - \frac{\partial \psi}{\partial d_j^v} + \lambda = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.112)$$

$$\Delta q_1^v + \Delta q_2^v + \Delta q_3^v = 0$$

O APÊNDICE B mostra a solução dessas equações para os casos particulares dos modelos de Hencky e Ogden.

Ao concluir o processo de minimização pode-se calcular o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2J^{-2/3} DE V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^e} \right) \\ &+ \frac{\partial U}{\partial J_{n+1}} J_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (3.113)$$

onde as derivadas são dadas por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial c_j} \mathbf{E}_j \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^e} \frac{\partial c_j^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^e}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} \\
&= \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{-v} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} \frac{1}{2c_j^e} \mathbf{E}_j^e \right) \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{v-T} \\
&= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial c_j^{pr}} \frac{\partial c_j^{pr}}{\partial \bar{\mathbf{C}}^{pr}} \right) \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}^{pr}}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} \\
&= \bar{\mathbf{F}}_n^{-v} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} \frac{1}{2c_j^{pr}} \mathbf{E}_j^{pr} \right) \bar{\mathbf{F}}_n^{v-T}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial U}{\partial J_{n+1}} = K \frac{\ln J_{n+1}}{J_{n+1}} \tag{3.116}$$

As derivadas φ , φ^e e ψ para os modelos de Ogden e Hencky podem ser encontradas no Apêndice A.

4 ENSAIOS MECÂNICOS

Ensaio mecânico são testes realizados a fim de conhecer melhor o comportamento uma peça ou material quando submetidos a um ou mais tipos de carregamento.

Ao fazer um ensaio deve-se tomar o cuidado de verificar as condições ambientais, pois estas podem ter uma grande influência nos resultados. A norma ASTM-D638 [16] estabelece que corpos de prova de polímeros sejam mantidos por no mínimo 40h na temperatura de 23 ± 2 °C e humidade relativa do ar de 50 ± 5 % antes que os ensaios sejam realizados, também nas mesmas condições. Em casos específicos condições ambientais diferentes podem ser usadas desde que devidamente citadas.

Dois dos ensaios mais importantes para evidenciar o comportamento viscoelástico de polímeros são os de fluência, a diferentes tensões, e cíclicos, a diferentes taxas de deformação. Nesta seção será feita uma revisão da literatura sobre esses ensaios, focando os ensaios de compressão axial que correspondem aos executados neste trabalho.

Ensaio de compressão axial geralmente são realizados usando corpos de prova com geometria cilíndrica ou prismática, comprimidos por pratos que devem estar muito bem alinhados para garantir que os esforços estão sendo aplicados somente em uma direção. Também é necessário lubrificar as superfícies de contato entre o corpo de prova e os pratos a fim de reduzir o atrito e permitir que o corpo de prova se deforme mais uniformemente na direção perpendicular ao carregamento.

4.1 Ensaio cíclico

Nestes ensaios os corpos de prova são submetidos a ciclos controlados e periódicos de deformação (ou tensão), enquanto os valores da tensão (ou deformação) resultantes são monitorados.

Não foi encontrado na literatura nenhum ensaio cíclico já realizado no UHMWPE, mas esses ensaios foram realizados neste trabalho e serão apresentados na seção 7.1.

4.2 Ensaio de fluência

Os ensaios de fluência consistem em submeter o corpo de prova a uma carga constante e medir a deformação que o corpo de prova sofre com o tempo.

Resultados de ensaios de fluência são comumente disponibilizados pelos fabricantes de polímeros. As Figuras 7.1–7.3 mostram o comportamento do UHMWPE fabricado pela empresa Ticona. Pode-se ver que a deformação do material ao longo do tempo apresenta um formato logarítmico e também pode-se perceber a grande influência do valor da temperatura no valor da deformação resultante.

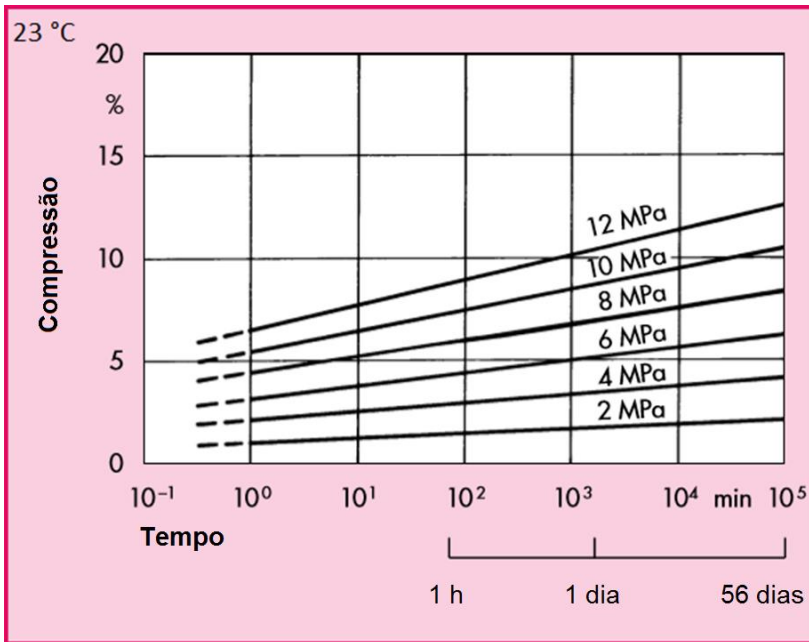


Figura 4.1 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 23°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]

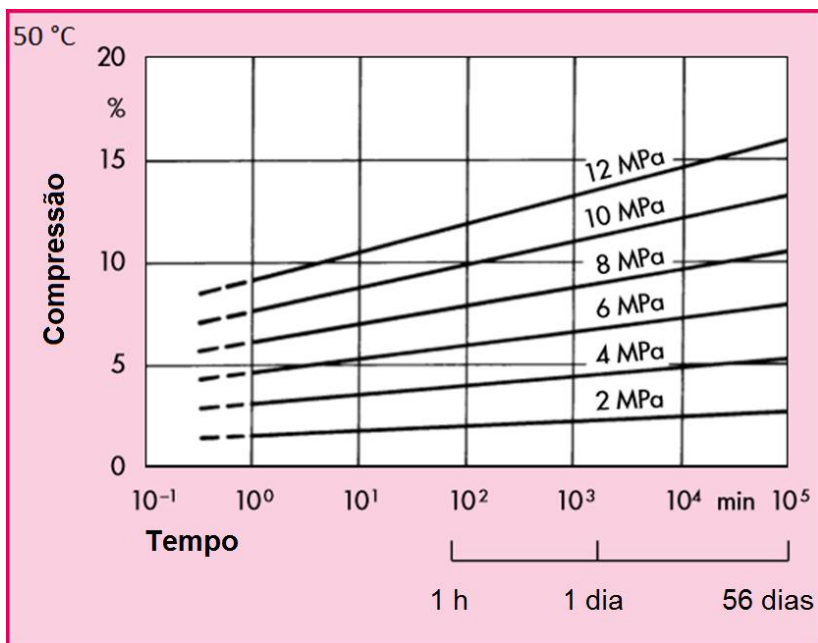


Figura 4.2 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 50°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]

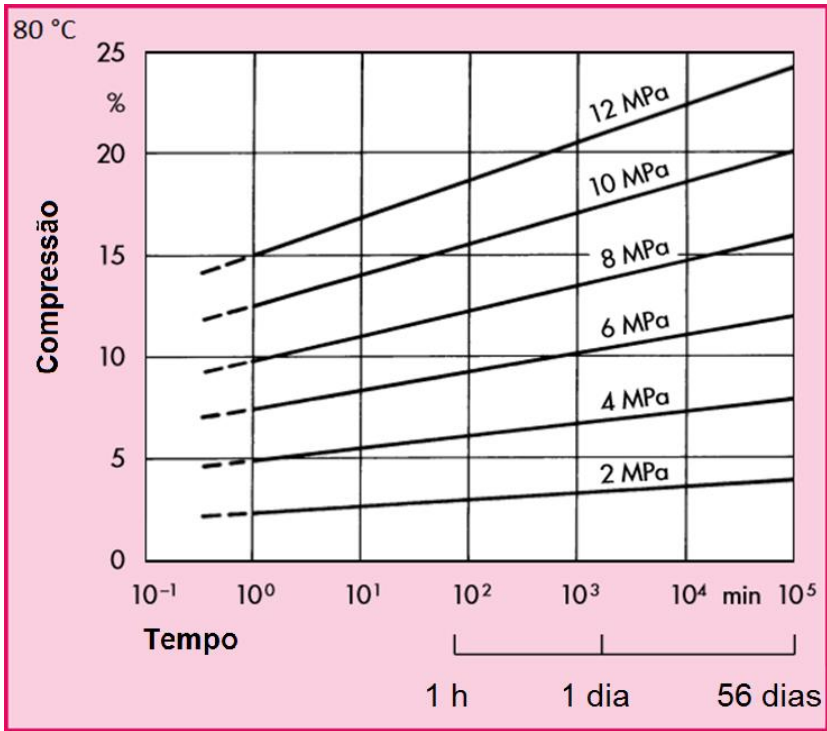


Figura 4.3 – Fluência sob diferentes tensões em um corpo de prova de UHMWPE na temperatura de 80°C. Fonte: GUR UHMW-PE Material Sheet [17]

5 DISPOSITIVOS DE ENSAIO

Nesta seção é apresentado o aparato experimental usado para a realização dos ensaios.

5.1 Máquina de ensaio

Os ensaios cíclicos foram feitos na máquina universal de ensaios Instron EMIC 23-5S (Figura 5.1) com capacidade de carga para ensaios de até 5KN. Já os ensaios de fluência foram feitos na máquina hidráulica brasvalvulas (Figura 5.2) possuindo capacidade de pressão de até 150Kg/cm². Os ensaios de fluência não puderam ser realizados na EMIC 23-5S, pois essa apresentava um problema desconhecido em que o software perdia conexão com a máquina em ensaios com duração superior a 2h.



Figura 5.1 – Máquina de ensaios Instron EMIC 23-5S usada nos ensaios cíclicos. Fonte: Emic Website [18]

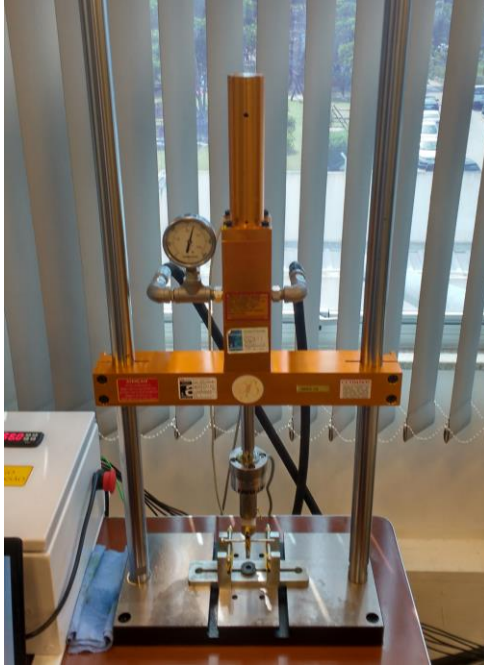


Figura 5.2 – Máquina de ensaio brasvalvulas usada nos ensaios de fluência

5.2 Corpos de prova

Os corpos de prova foram confeccionados através de usinagem, sendo retirados de um cilindro de 65 mm de diâmetro do material UH-MWPE, não reticulado. Este foi fabricado pela Orthoplastics, lote 12105M, linha específica para a produção de próteses e produzido pelo processo de extrusão Ram Extrusion. O material foi doado pela empresa MDT - Indústria Comércio Importação e Exportação de Implantes SA.

As dimensões escolhidas para cada corpo de prova foram de 12mm altura e 6mm de diâmetro, como mostrado na Figura 5.3. Após a usinagem estes foram polidos usando uma lixa de gramatura 600, a fim de melhorar o acabamento superficial e reduzir o atrito com as superfícies do dispositivo de ensaio buscando desta forma garantir um campo de tensões compressivo homogêneo no corpo de prova.

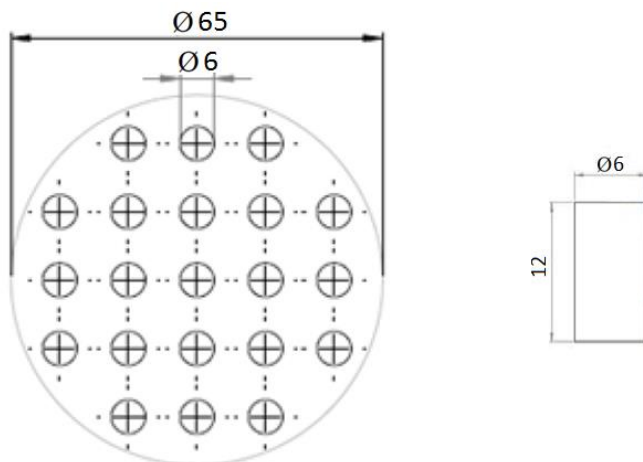


Figura 5.3 – Extração das amostras para compressão uniaxial

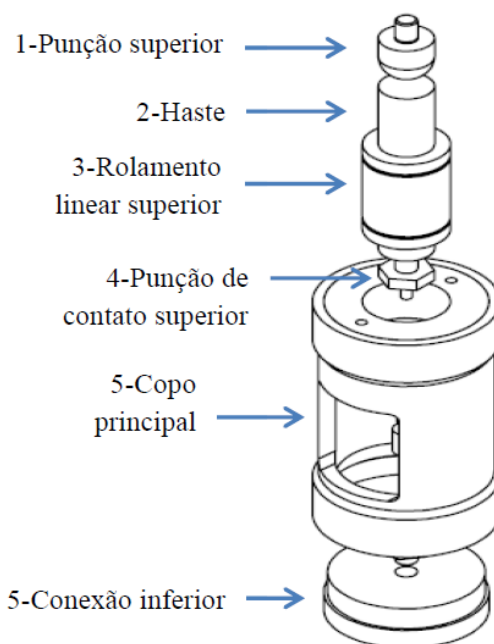


Figura 5.4 – Dispositivo de compressão uniaxial projetado por Sonnenhohl [19]

5.3 Dispositivo para ensaio de compressão uniaxial

Os ensaios foram feitos com o auxílio do dispositivo de compressão projetado por Sonnenhohl [19], mostrado na Figura 5.4, mais detalhes podem ser encontrados nesta mesma referência. Este faz o uso de um mancal linear que garante que as faces opostas do corpo de prova sejam mantidas com um alto grau de paralelismo ao longo do ensaio, resultando em um carregamento uniaxial.

A rigidez do dispositivo é de 60 KN/mm, que comparada à rigidez do corpo de prova de UHMWPE acarreta erros inferiores a 1%.

5.4 Dispositivos de medição

Para medição e aquisição de dados foram usados os seguintes dispositivos:

- LVDT: modelo LD-310-1.5/ômega, podendo realizar medições de deslocamentos de até 3mm. Este foi fixado ao dispositivo de compressão, como mostrado na Figura 5.5.
- Condicionador de sinal para LVDT: modelo DPL-53/ômega.
- Sistema de aquisição de dados: modelo Spider 8/HBM, podendo adquirir dados à uma frequência de até 600 Hz.
- Células de carga: nos ensaios cíclicos foi usada uma célula de carga da marca Emic, podendo suportar cargas de até 500N e no ensaio de fluência foi usada uma célula de carga Gefran que suporta até 1000N.



Figura 5.5 – Dispositivo de ensaio e sistema de fixação do LVDT

6 METODOLOGIA

O presente trabalho foi realizado em três fases partes:

1. Buscou-se um entendimento de modelos constitutivos clássicos de viscoelasticidade, tais como os apresentados por Simo [1] e Holzapfel [8]. Nesta fase também foram estudados modelos baseados em abordagem variacional [2] [15]. Os principais modelos estudados foram sumarizados na seção 3.2.2 e implementados tanto em Matlab, como em Fortran. A versão em Fortran foi implementada dentro do programa CEOS, desenvolvido pela equipe do GRANTE. Esse programa permite a simulação de complexas geometrias pelo método dos elementos finitos, bastando implementar o modelo constitutivo que será usado.
2. Foram feitos ensaios experimentais de fluência e cíclicos no Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE), ambos sob esforços de compressão. Os ensaios cíclicos foram feitos em três diferentes taxas de aplicação de carga e os de fluência em três intensidades de carregamento diferentes. Cada ensaio, sob as mesmas condições, foi repetido três vezes a fim de verificar reprodutibilidade dos resultados. Mais detalhes sobre os ensaios realizados são apresentados nas seções 6.1.1 e 6.1.2.
3. Os ensaios realizados foram usados para identificação de parâmetros nos modelos implementados na primeira etapa do trabalho.

6.1.1 Ensaios cíclicos

Os ensaios cíclicos foram realizados nas seguintes fases:

1. Foi estabelecida uma carga inicial de compressão de 2N para assegurar que a cabeça do prato móvel estivesse realmente em contato com o corpo de prova e que os valores registrados pelo LVDT representariam a deformação do corpo de prova.
2. Em seguida foi feita uma rampa de carregamento com controle de deslocamento. Como cada corpo de prova possuía pequenas variações de altura a velocidade foi estabelecida como uma porcentagem da altura do corpo de prova ensaiado, a fim de que as taxas de deformação fossem equivalentes. Foram feitos ensaios a taxas de 0,01%, 0,1% e 1% da altura do corpo de prova por segundo.

3. Os valores máximos de deformação foram estabelecidos através do momento que a carga de compressão aplicada ao corpo de prova atingisse 16 MPa. Para calcular o valor da força necessário para atingir essa tensão foi considerado o valor inicial da área de cada corpo de prova. A decisão de que os valores máximos de deformação seriam estabelecidos pela carga e não por um deslocamento fixo se deu para proteger a célula de carga, que só suportava até 500N.
4. Assim que o valor máximo de carga era atingido se iniciava uma rampa de descarregamento. Essa também foi feita à mesma taxa que a rampa de carregamento.
5. Os valores mínimos de deformação foram estabelecidos para o momento em que a carga retorna ao valor de 2N, assegurando assim que o contato fosse mantido.
6. O ciclo entre as cargas máximas e mínimas foi repetido três vezes como mostrado nas Figuras 7.3–7.5.

6.1.2 Ensaios de fluência

Os ensaios de fluência foram realizados nas seguintes fases:

1. Foi usada também uma carga de compressão de 2N para assegurar o contato inicial.
2. Iniciou-se uma rampa de carregamento à taxa de 2MPa/min, sendo a tensão sempre calculada com relação à área inicial.
3. Foram feitos testes de fluência por 24h, em três diferentes tensões de compressão, sendo estas 4MPa, 8MPa e 16MPa.
4. Ao termino das 24h os corpos de prova foram descarregados à mesma taxa até o valor de carga de 2N.
5. A máquina foi mantida em controle de carga por mais 24h. O LVDT continuou realizando medições, verificando assim a recuperação de deformação dos corpos de prova.

7 RESULTADOS

7.1 Resultados experimentais

Após a preparação dos corpos de prova foram realizadas três medições de cada dimensão, comprimento e diâmetro, nos corpos de provas usados em cada tipo de ensaio. Os valores médios foram registrados e são mostrados nas Tabelas 7.1 e 7.2.

Tabela 7.1 – Comprimento dos corpos de prova usados nos ensaios

Comprimento						
CP	Fluência 16MPa	Fluência 8MPa	Fluência 4MPa	Cíclico 0.01%/s	Cíclico 0.1%/s	Cíclico 1%/s
1	12.14	12.11	11.90	12.01	12.05	12.08
2	11.97	12.00	12.00	12.03	11.89	12.02
3	12.06	12.04	12.06	12.06	12.00	11.93

Tabela 7.2 – Diâmetro dos corpos de prova usados nos ensaios

Diâmetro						
CP	Fluência 16MPa	Fluência 8MPa	Fluência 4MPa	Cíclico 0.01%/s	Cíclico 0.1%/s	Cíclico 1%/s
1	6.08	6.01	6.03	6.05	6.01	6.01
2	6.03	6.00	6.05	6.07	6.03	6.01
3	6.04	6.05	6.01	6.02	6.03	6.00

A fim de obter uma comparação dos resultados obtidos foram criados gráficos registrando a deformação real em função do tempo para cada um dos ensaios. Os resultados dos ensaios cíclicos são mostrados na Figura 7.1 e os de fluência na Figura 7.2. Pode-se perceber que na maior parte dos casos os resultados corpos de prova ensaiados sob as mesmas condições se mostraram bem próximos.

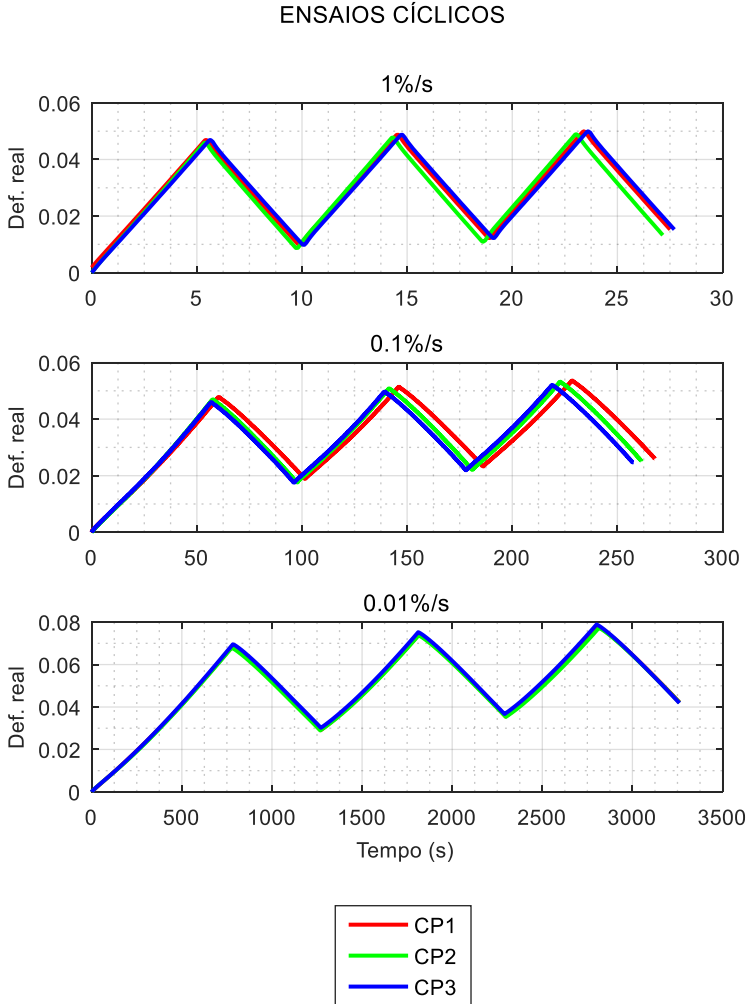


Figura 7.1 – Resultado dos ensaios cíclicos para cada uma das três velocidades de ensaio e nove corpos de prova

ENSAIOS DE FLUÊNCIA

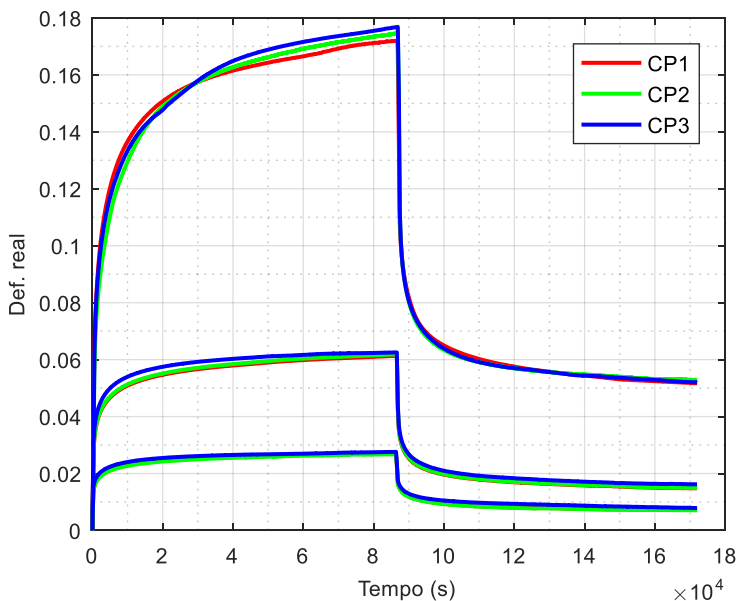


Figura 7.2 – Resultado dos ensaios de fluência para cada uma das três tensões (4,8 e 16MPa) e nove corpos de prova

Após essa análise, foi retida a média aritmética dos resultados obtidos e foram gerados gráficos também da tensão em função do tempo (para os casos de ensaios cíclicos e de fluência) e da deformação (somente ensaios cíclicos), como mostrado nas Figuras 7.3–7.6.

As Figuras 7.3 e 7.5 mostram que quando o material é deformado mais lentamente há mais tempo para deformações inelásticas ocorrerem e, portanto, o material apresenta uma maior deformação para um mesmo valor máximo de tensão. Quando a força é retirada, sem tempo para o material relaxar, a deformação residual é maior.

Na última curva da Figura 7.6 pode-se ver que mantendo a carga constante o material continua se deformando por fluência, como esperado. Também pode-se perceber que quanto maior a carga maior será a deformação alcançada um dado período de tempo.

ENSAIOS CÍCLICOS - DEFORMAÇÃO X TEMPO

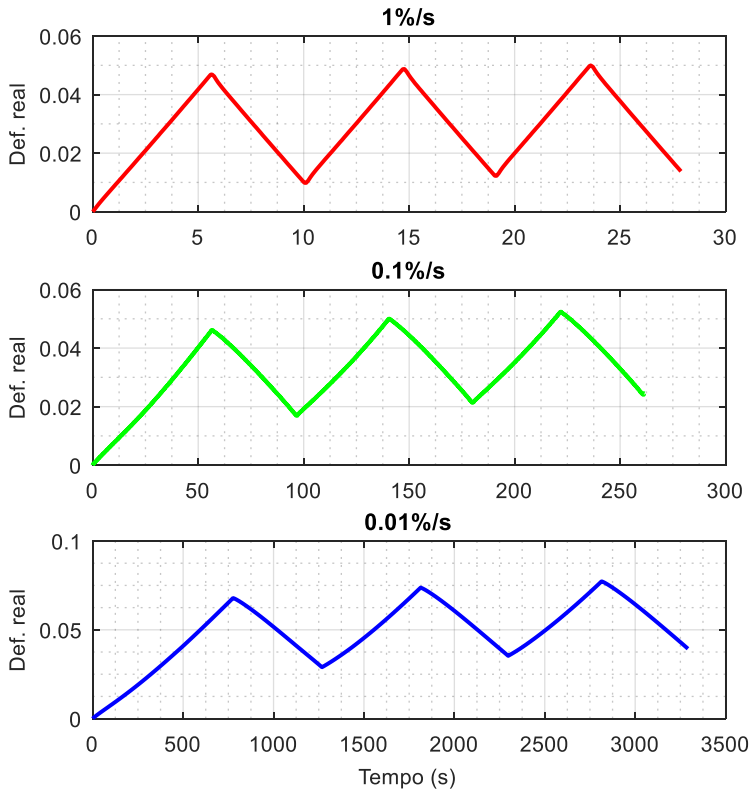


Figura 7.3 – Média dos resultados Deformação X Tempo obtidos para cada ensaio cíclico

ENSAIOS CÍCLICOS - TENSÃO X TEMPO

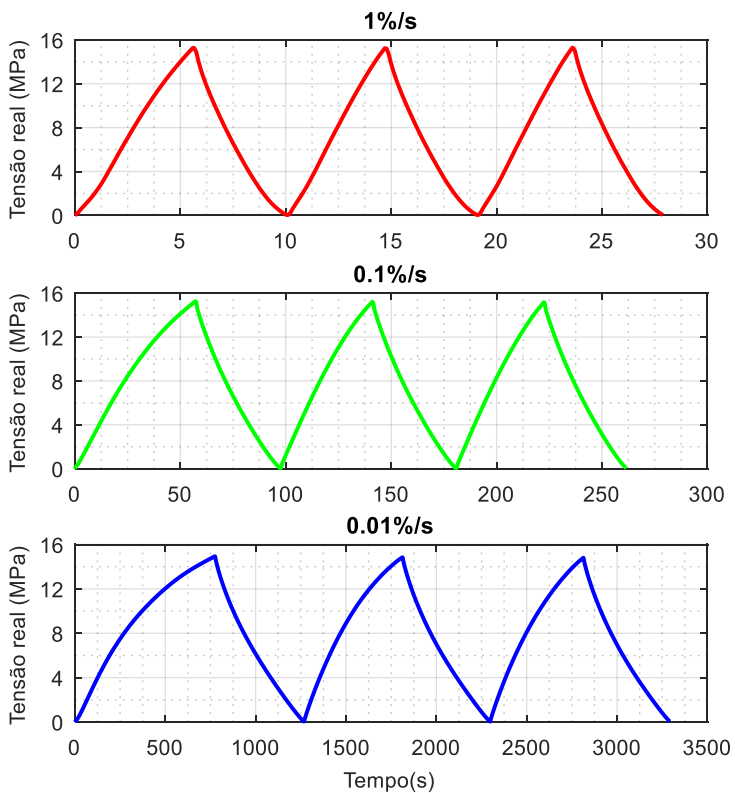


Figura 7.4 – Média dos resultados Tensão X Tempo obtidos para cada ensaio cíclico

ENSAIOS CÍCLICOS - TENSÃO X DEFORMAÇÃO

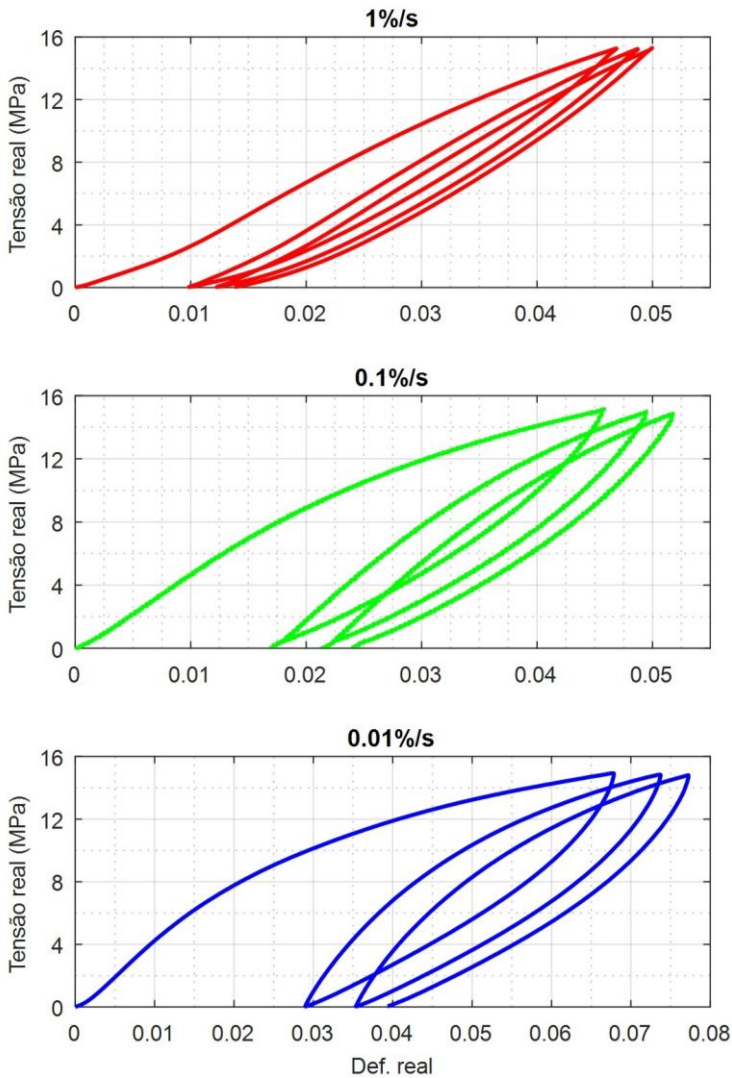


Figura 7.5 – Média dos resultados Tensão X Deformação obtidos para cada ensaio cíclico

ENSAIOS DE FLUÊNCIA

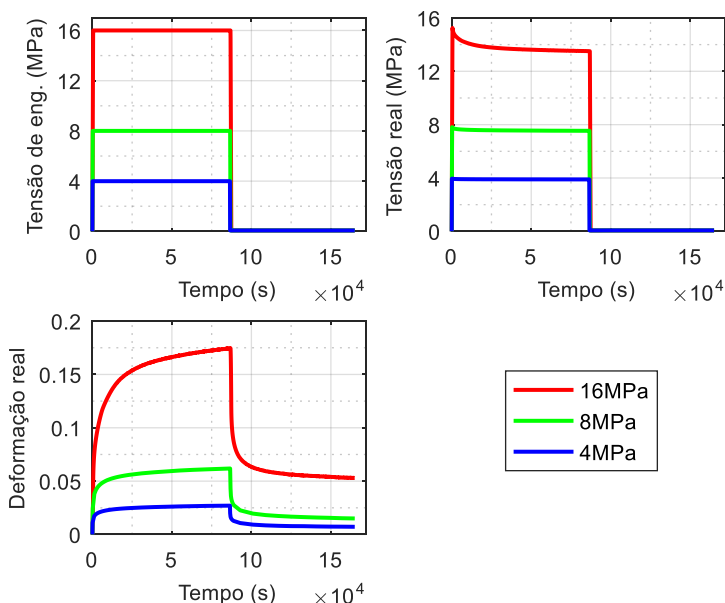


Figura 7.6 – Média dos resultados obtidos para cada ensaio de fluência

7.2 Identificação de parâmetros

Os resultados experimentais obtidos na seção 7.1 foram usados para identificar parâmetros dos modelos de Simo [1] e de Fancello et al. [2], apresentados respectivamente nas seções 3.2.4 e 3.2.5.

Nesta seção foi assumido um coeficiente de Poisson inicial no valor de 0,485, como obtido por Sonnenhohl [19]. Este foi usado para calcular o módulo volumétrico considerando que inicialmente o módulo de elasticidade do modelo era dado pela soma do módulo cada uma das molas do modelo reológico de Maxwell Generalizado (Figura 3.4). Foi também feita a hipótese de que o corpo de prova poderia se deformar livremente na direção perpendicular ao carregamento.

Os parâmetros foram encontrados através dos ensaios cíclicos e de fluência separadamente e depois foi feita uma análise crítica dos resultados.

7.2.1 Ensaios cíclicos

Na Tabela 7.3 podem-se ver os parâmetros encontrados para os ensaios cíclicos. O resíduo foi calculado usando a equação (7.1) onde P representa a carga compressiva em Newtons aplicada no corpo de prova e k o número de pontos usados. Os pontos foram escolhidos de forma que todo incremento de carga até um dos pontos de pico ou de vale fosse representado por sete pontos com espaçamento semelhante.

$$r(p) = \left[\sum_{n=1}^k (|P_{ajuste\ 1\%/s} - P_{real}| + |P_{ajuste\ 0.1\%/s} - P_{real}| + |P_{ajuste\ 0.01\%/s} - P_{real}|)^2 \right]^{1/2} \quad (7.1)$$

Comparando os ajustes 1 – 3 pode-se ver que a adição de um segundo braço de Maxwell causa um efeito significativo na redução do resíduo. Ao adicionar um terceiro braço percebe-se que a diferença é quase insignificante. Um efeito semelhante acontece nos ajustes 4 – 6 e 7 – 9 com o modelo variacional. Os ajustes 7 – 9 são mostrados na Figura 7.7 a fim de evidenciar esse comportamento, os resultados para $N = 2$ e $N = 3$ são tão próximos que praticamente não é possível ver a diferença entre as curvas.

Observando 1 – 3 e 1 – 4 pode-se perceber que modelo de Simo e o variacional se comportam de forma muito semelhante dado que estejam incorporando um mesmo modelo hiperelástico e que sejam usados um mesmo número de braços de Maxwell. A Figura 7.8 compara o ajuste realizado com o modelo de Simo com o ajuste do variacional, ambos fazendo uso do modelo de Neo-Hookean e dois braços de Maxwell deixando claro assim a semelhança do comportamento.

A partir do ajuste 7 o modelo de Ogden é usado e o parâmetro α não é mais mantido constante. Pode-se ver na Tabela 7.3 que os ajustes 7 – 9 apresentam um menor resíduo que 4 – 6. Na Figura 7.9 são comparados os casos com dois braços de Maxwell e pode-se perceber a melhora no ajuste principalmente na velocidade mais lenta de ensaio.

Por último a Tabela 7.3 também mostra a influência do número de termos incluídos na energia de deformação nos ajustes 10 e 11. Ao comparar estes com os ajustes 7 e 8, respectivamente, percebe-se que houve uma pequena influência na redução do resíduo. A Figura 7.9 também

mostra 8 e 11, evidenciando que ambos apresentam um desempenho similar.

Em nenhum dos casos analisados com os modelos implementados foi possível obter um bom resultado, que pudesse representar satisfatoriamente as três velocidades de ensaio. Acredita-se que isso ocorreu porque a região de deformação à que os corpos de prova foram submetidos envolve uma não linearidade elevada no comportamento do material que os modelos utilizados não foram capazes de capturar. Os ajustes nos parâmetros N , n e α contribuíram para uma melhor representação, mas não foram suficientes para conseguir um bom resultado.

Tabela 7.3 – Parâmetros identificados nos ensaios cíclicos

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
1 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 3,9269 \cdot 10^1$	$N = 1; \mu = 6,6053 \cdot 10^1; \eta = 1,2188 \cdot 10^4$	29,31
2 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 3,6259 \cdot 10^1$	$N = 2; \mu_1 = 6,7296 \cdot 10^1; \mu_2 = 4,6641 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 1,6276 \cdot 10^2; \eta_2 = 1,9917 \cdot 10^4$	25,64
3 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 3,6258 \cdot 10^1$	$N = 3;$ $\mu_1 = 4,8059 \cdot 10^1; \mu_2 = 9,0661 \cdot 10^1; \mu_3 = 9,4266 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 6,5192 \cdot 10^1; \eta_2 = 4,4173 \cdot 10^5; \eta_3 = 5,1772 \cdot 10^4$	25,62
4 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 4,3012 \cdot 10^1$	$N = 1; \mu = 6,8992 \cdot 10^1; \eta = 1,1502 \cdot 10^4$	31,50
5 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 2,8056 \cdot 10^1$	$N = 2; \mu_1 = 1,0135 \cdot 10^2; \mu_2 = 5,8573 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 1,7187 \cdot 10^2; \eta_2 = 5,9516 \cdot 10^4$	26,35
6 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 1,1701 \cdot 10^1$	$N = 3;$ $\mu_1 = 1,1222 \cdot 10^2; \mu_2 = 5,6966 \cdot 10^1; \mu_3 = 2,0847 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 1,9565 \cdot 10^2; \eta_2 = 6,4587 \cdot 10^4; \eta_3 = 1,2357 \cdot 10^5$	26,33
7 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = -3,3050 \cdot 10^1;$ $\mu = -9,8950 \cdot 10^{-1}$	$N = 1; n = 1; \alpha = -3,3050 \cdot 10^1;$ $\mu = -3,3050 \cdot 10^1; \eta = -1,7503 \cdot 10^3$	28,66
8 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = -2,6215 \cdot 10^1;$ $\mu = -1,1414 \cdot 10^0$	$N = 2; n = 1; \alpha = -2,6215 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = -3,6166 \cdot 10^0; \mu_2 = -6,0554 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = -5,5269 \cdot 10^3; \eta_2 = -1,5277 \cdot 10^1$	24,30
9 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = -2,5257 \cdot 10^1;$ $\mu = -1,1586 \cdot 10^0$	$N = 3; n = 1; \alpha = -2,5257 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = -3,8044 \cdot 10^0; \mu_2 = -4,5362 \cdot 10^0; \mu_3 = -3,2749 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 6,3999 \cdot 10^3; \eta_2 = 4,5041 \cdot 10^0; \eta_3 = 1,3954 \cdot 10^1$	24,28
10 - Variacional - Ogden	$n = 2;$ $\alpha_1 = 2,0064 \cdot 10^{-2};$ $\alpha_2 = 5,1278 \cdot 10^{-1};$ $\mu_1 = 5,6354 \cdot 10^2;$ $\mu_2 = 1,4176 \cdot 10^2$	$N = 1; n = 2; \alpha_1 = 2,0064 \cdot 10^{-2}; \alpha_2 = 5,1278 \cdot 10^{-1};$ $\mu_{1,1} = 4,6881 \cdot 10^2; \mu_{1,2} = 2,4294 \cdot 10^2;$ $\eta_{1,1} = 2,8555 \cdot 10^5; \eta_{1,2} = 3,3115 \cdot 10^4$	28,25
11 - Variacional - Ogden	$n = 2;$ $\alpha_1 = -3,6558 \cdot 10^0;$ $\alpha_2 = 6,9195 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = -2,1459 \cdot 10^0;$ $\mu_2 = 7,5219 \cdot 10^{-1}$	$N = 2; n = 2; \alpha_1 = -3,6558 \cdot 10^0; \alpha_2 = 6,9195 \cdot 10^1;$ $\mu_{1,1} = -1,0183 \cdot 10^1; \mu_{1,2} = 1,3418 \cdot 10^0;$ $\mu_{2,1} = -2,0303 \cdot 10^0; \mu_{2,2} = 2,7470 \cdot 10^0;$ $\eta_{1,1} = -3,0554 \cdot 10^3; \eta_{1,2} = 8,2399 \cdot 10^2;$ $\eta_{2,1} = -9,4013 \cdot 10^0; \eta_{2,2} = 4,2247 \cdot 10^0$	24,07

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

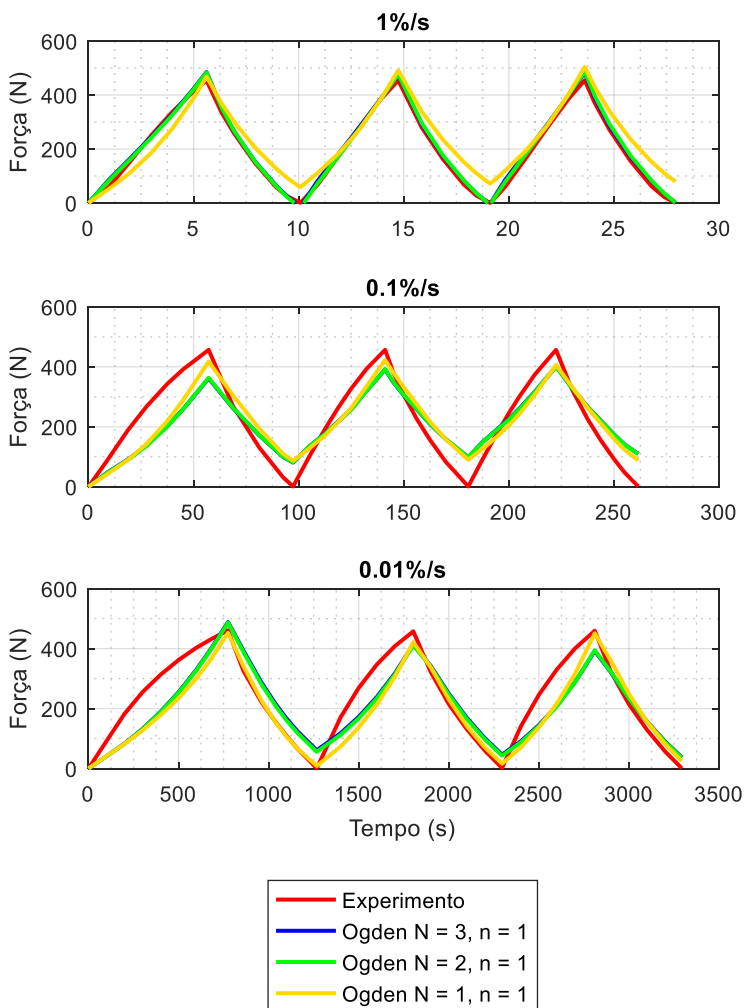


Figura 7.7 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos usando o modelo variacional/Ogden para diferentes quantidades de braços de Maxwell

AJUSTE - COMPARAÇÃO SIMO/VARIACIONAL

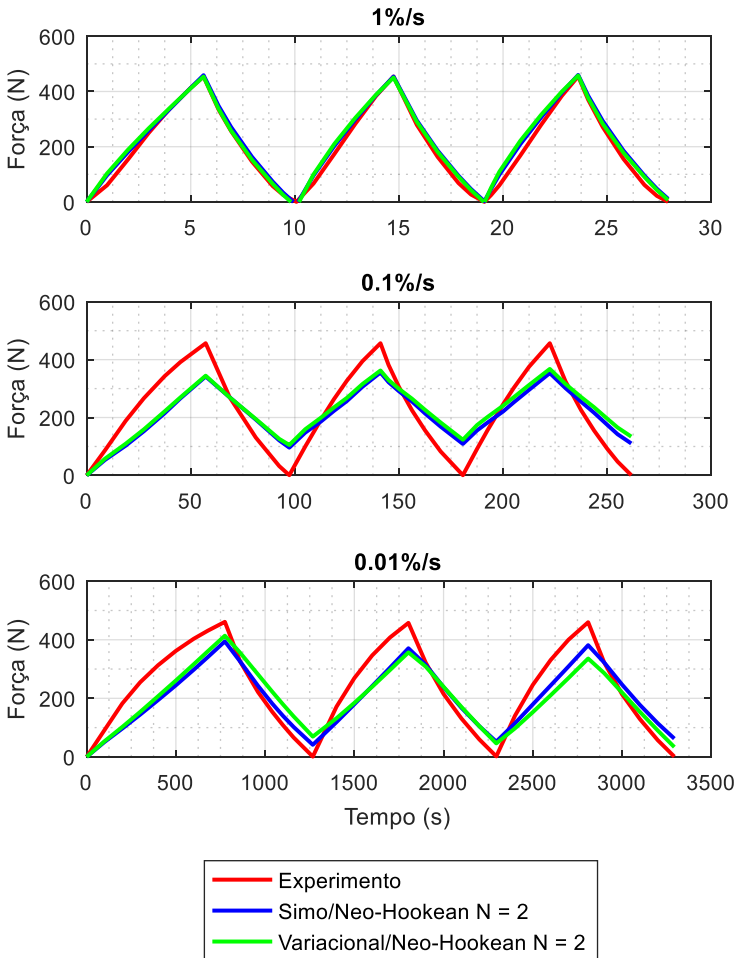


Figura 7.8 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos entre o modelo variacional e o proposto por Simo, ambos incorporando o modelo Neo-Hookean e dois braços de Maxwell

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

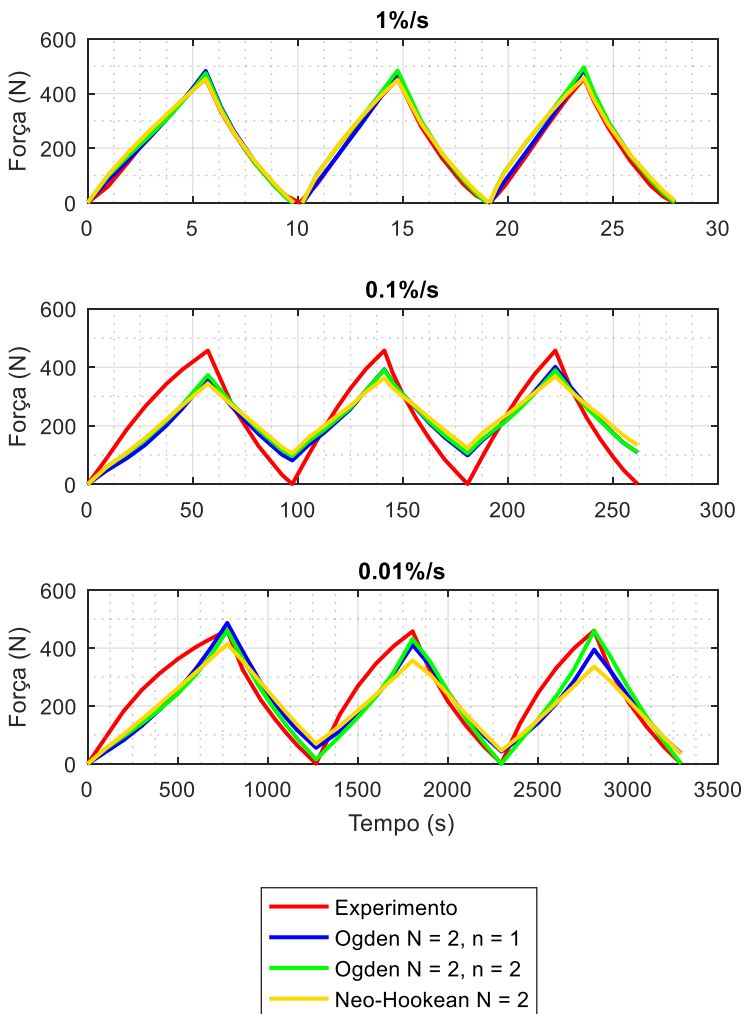


Figura 7.9 – Comparação dos ajustes dos ensaios cíclicos usando o modelo variacional/Ogden para um e dois termos na energia de deformação e também o modelo variacional/Ogden, ambos com dois braços de Maxwell

Nos ajustes 8, 9 e 11, que apresentaram os menores valores de resíduo, foi representada muito bem a velocidade mais rápida e razoavelmente a mais lenta, já a velocidade intermediária não apresentou um bom resultado. A Figura 7.10 mostra uma tentativa de representar apenas as duas velocidades mais baixas e mesmo nesse caso a curva com velocidade mais lenta não é bem representada em alguns trechos. A Tabela 7.5 mostra os parâmetros encontrados para esse caso.

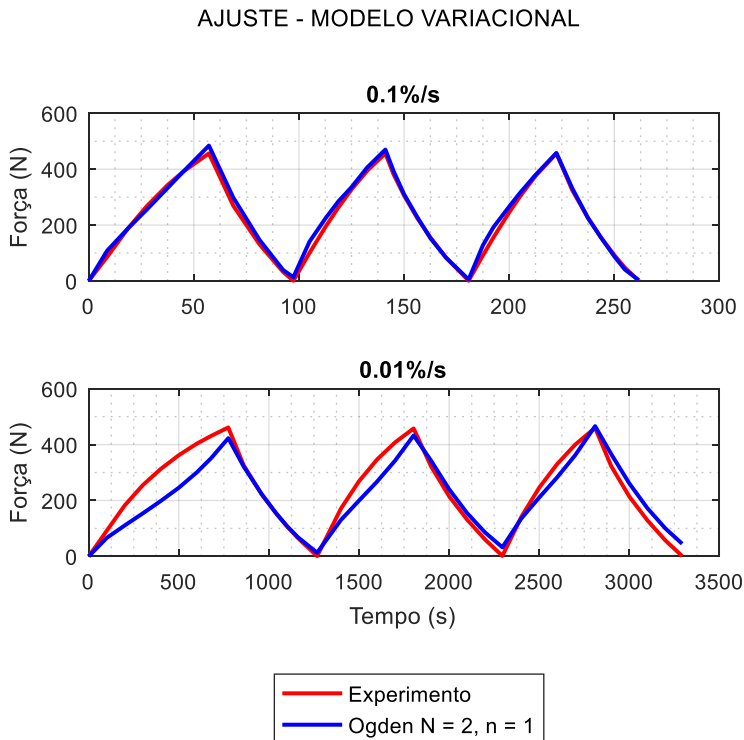


Figura 7.10 – Ajuste dos modelo variacioanal/Ogden N = 2, n = 1 para os ensaios cíclicos com velocidades de 0.1%/s e 0.01%/s

Tabela 7.4 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.10

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	n = 1; $\alpha = 4,8366 \cdot 10^2$; $\mu = 1,9031 \cdot 10^1$	N = 2; n = 1; $\alpha = 4,8355 \cdot 10^2$; $\mu_1 = 2,6686 \cdot 10^1$; $\mu_2 = 7,3749 \cdot 10^1$; $\eta_1 = 6,0601 \cdot 10^3$; $\eta_2 = 7,3597 \cdot 10^2$	10,58

7.2.2 Ensaios de Fluência

Na Tabela 7.5 são mostrados os parâmetros identificados para os ensaios de fluência. Nesta o resíduo foi calculado pela equação (7.2), onde ε representa a deformação verdadeira sofrida na direção axial do corpo de prova.

Os pontos usados para a identificação de parâmetros foram escolhidos de forma a ser usados vinte pontos para descrever a parte do ensaio relativa à fluência e também vinte para descrever a recuperação. Na parte da fluência foi colocado inicialmente um ponto a cada 1000s, até atingir 9000s, e depois um ponto a cada 8000s. Também foram incluídos um ponto no final da rampa de carregamento e um ponto quando o ensaio completou 24h. Na fase de recuperação foram incluídos pontos a cada 250s até 3000s e depois a cada 8000s. De forma semelhante a fluência também foram incluídos um ponto ao final da curva de descarregamento e um ao final do ensaio.

$$r(p) = \left[\sum_{n=1}^k (|\varepsilon_{ajuste\ 16MPa} - \varepsilon_{real\ 16MPa}| / \varepsilon_{real\ 16MPa} + |\varepsilon_{ajuste\ 8MPa} - \varepsilon_{real\ 8MPa}| / \varepsilon_{real\ 8MPa} + |\varepsilon_{ajuste\ 4MPa} - \varepsilon_{real\ 4MPa}| / \varepsilon_{real\ 4MPa})^2 \right]^{1/2} \quad (7.2)$$

Pode-se ver através da Tabela 7.5 e da Figura 7.12 que, assim como no caso anterior a adição de um segundo braço de Maxwell causa uma considerável redução na função resíduo. Ao adicionar um terceiro braço o efeito é bem menos significativo.

Também se percebe ao comparar os ajustes 1 – 3 e 4 – 6 que o modelo variacional novamente se comporta de forma muito parecida com o modelo de Simo, como esperado. Essa semelhança fica clara na Figura 7.13 onde os modelos são comparados para o caso em que o modelo de Neo-Hookean e dois braços de Maxwell são usados.

O comportamento do modelo ao liberar o parâmetro α e ao aumentar número de termos na energia de deformação também foi similar ao caso cíclico. Ambos causaram redução do resíduo, mas em ambos os casos a redução foi pouco significativa como mostrado na

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

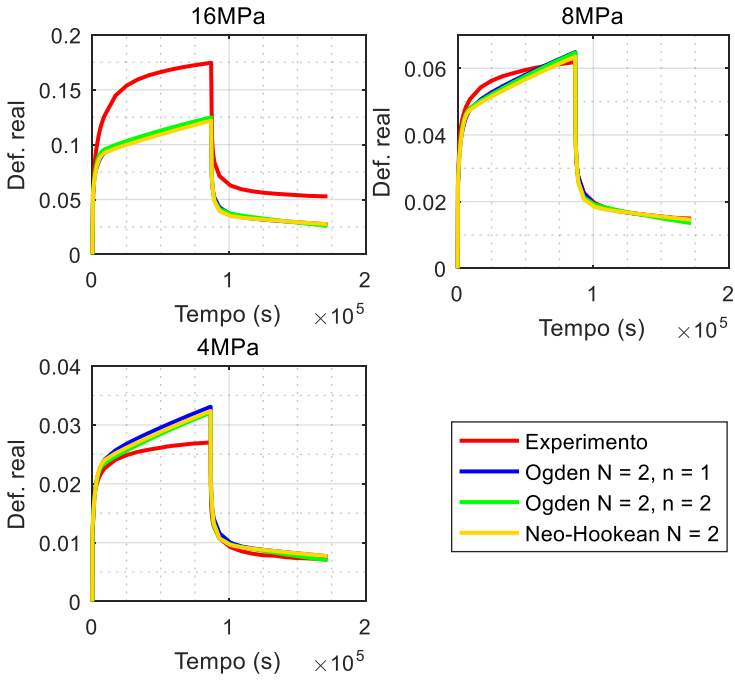


Figura 7.14. Observa-se também que mesmo nos casos que apresentaram

menor valor de resíduo os modelos ainda foram incapazes de se ajustar bem aos diferentes ensaios realizados.

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

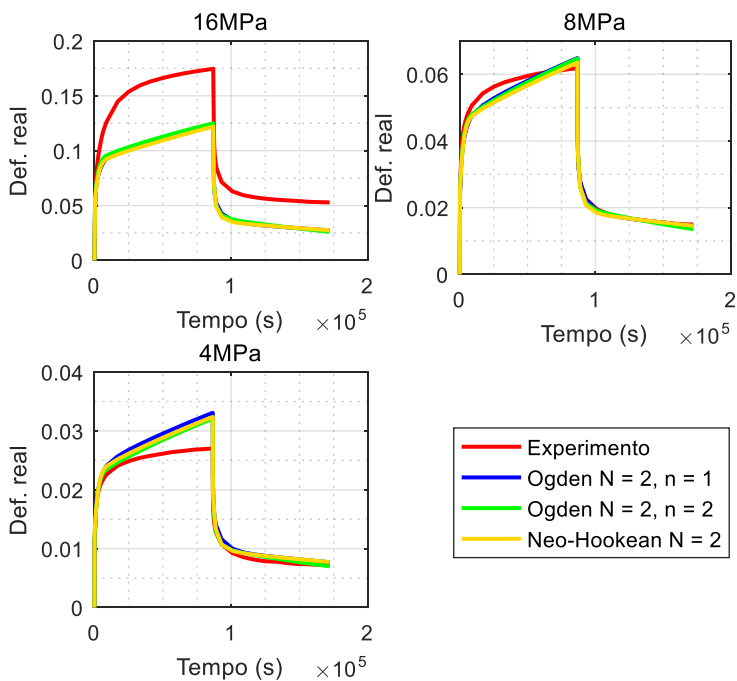


Figura 7.11 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência usando o modelo variacional/Ogden para um e dois termos na energia de deformação e também o modelo variacional/Ogden, ambos com dois braços de Maxwell

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

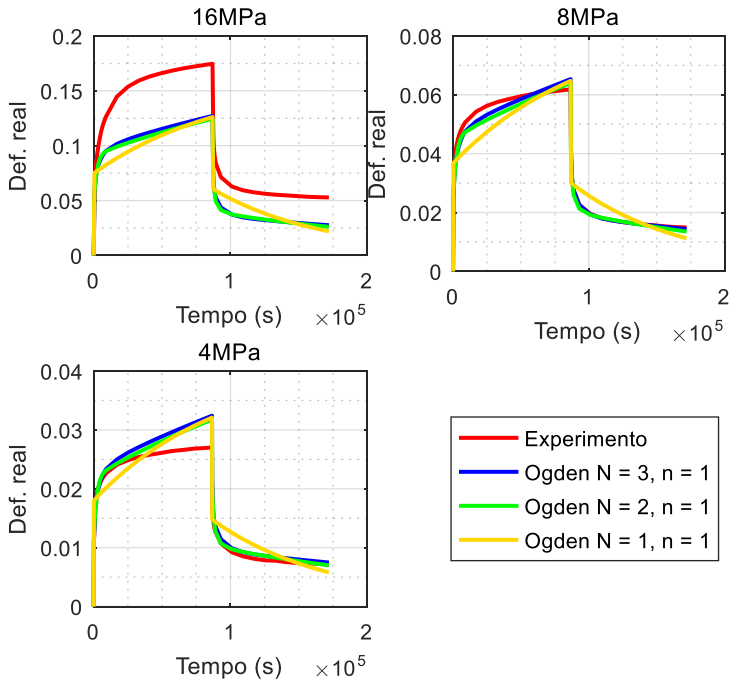


Figura 7.12 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência usando o modelo variacional/Ogden para diferentes quantidades de braços de Maxwell

Tabela 7.5 – Parâmetros identificados nos ensaios de fluência

Modelo	Parâmetros		Resíduo $r(p) \cdot 10^3$
	Mola principal	Braços de Maxwell	
1 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 3,0461 \cdot 10^1$	$N = 1; \mu = 4,2512 \cdot 10^1; \eta = 1,5637 \cdot 10^6$	11,71
2 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 1,2639 \cdot 10^{-1}$	$N = 2; \mu_1 = 9,9330 \cdot 10^1; \mu_2 = 9,6120 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 2,3946 \cdot 10^4; \eta_2 = 1,3586 \cdot 10^6$	8,54
3 - Simo - Neo-Hookean	$\mu = 1,2705 \cdot 10^0$	$N = 3;$ $\mu_1 = 1,0351 \cdot 10^3; \mu_2 = 3,3169 \cdot 10^1; \mu_3 = 7,8082 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 2,1535 \cdot 10^5; \eta_2 = 7,3994 \cdot 10^7; \eta_3 = 4,5198 \cdot 10^6$	8,00
4 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 3,2016 \cdot 10^1$	$N = 1; \mu = 4,1760 \cdot 10^1; \eta = 1,4873 \cdot 10^6$	10,88
5 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 2,1117 \cdot 10^1$	$N = 2; \mu_1 = 3,6422 \cdot 10^1; \mu_2 = 5,9612 \cdot 10^2;$ $\eta_1 = 4,1879 \cdot 10^6; \eta_2 = 5,6754 \cdot 10^4$	7,63
6 - Variacional - Neo-Hookean	$\mu = 2,1141 \cdot 10^1$	$N = 3;$ $\mu_1 = 3,4406 \cdot 10^1; \mu_2 = 2,9520 \cdot 10^1; \mu_3 = 9,9043 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 3,9957 \cdot 10^6; \eta_2 = 6,7165 \cdot 10^4; \eta_3 = 9,3929 \cdot 10^3$	7,53
7 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 1,1093 \cdot 10^1;$ $\mu = 6,1804 \cdot 10^0$	$N = 1; n = 1; \alpha = 1,1093 \cdot 10^1;$ $\mu = 7,8696 \cdot 10^0; \eta = 2,8134 \cdot 10^5$	10,50
8 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 1,2324 \cdot 10^1;$ $\mu = 4,4290 \cdot 10^0$	$N = 2; n = 1; \alpha = 1,2324 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = 5,8215 \cdot 10^0; \mu_2 = 9,8954 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 4,9863 \cdot 10^5; \eta_2 = 8,2285 \cdot 10^3$	7,08
9 - Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 1,2114 \cdot 10^1;$ $\mu = 3,7943 \cdot 10^0$	$N = 3; n = 1; \alpha = 1,2114 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = 6,0563 \cdot 10^0; \mu_2 = 1,4875 \cdot 10^1; \mu_3 = 4,4323 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 6,6820 \cdot 10^0; \eta_2 = 1,6777 \cdot 10^4; \eta_3 = 1,1989 \cdot 10^5$	6,94
10 - Variacional - Ogden	$n = 2;$ $\alpha_1 = 1,1362 \cdot 10^1;$ $\alpha_2 = 3,0111 \cdot 10^{-1};$ $\mu_1 = 5,7619 \cdot 10^0;$ $\mu_2 = 3,8017 \cdot 10^{-3}$	$N = 1; n = 2; \alpha_1 = 1,1362 \cdot 10^1; \alpha_2 = 3,0111 \cdot 10^{-1};$ $\mu_{1,1} = 7,5509 \cdot 10^0; \mu_{1,2} = 2,2068 \cdot 10^0;$ $\eta_{2,1} = 2,7989 \cdot 10^5; \eta_{2,2} = 6,7413 \cdot 10^5$	10,19
11 - Variacional - Ogden	$n = 2;$ $\alpha_1 = 1,3671 \cdot 10^1;$ $\alpha_2 = 3,2865 \cdot 10^{-1};$ $\mu_1 = 3,9700 \cdot 10^{-1};$ $\mu_2 = 1,2975 \cdot 10^{-4}$	$N = 2; n = 2; \alpha_1 = 1,3671 \cdot 10^1; \alpha_2 = 3,2865 \cdot 10^{-1};$ $\mu_{1,1} = 4,5256 \cdot 10^0; \mu_{1,2} = 2,5709 \cdot 10^1;$ $\mu_{2,1} = 2,3232 \cdot 10^{-2}; \mu_{2,2} = 3,5875 \cdot 10^2;$ $\eta_{1,1} = 3,9944 \cdot 10^5; \eta_{1,2} = 2,1139 \cdot 10^6;$ $\eta_{2,1} = 7,1908 \cdot 10^3; \eta_{2,2} = 2,7309 \cdot 10^2$	7,07

AJUSTE - COMPARAÇÃO SIMO/VARIACIONAL

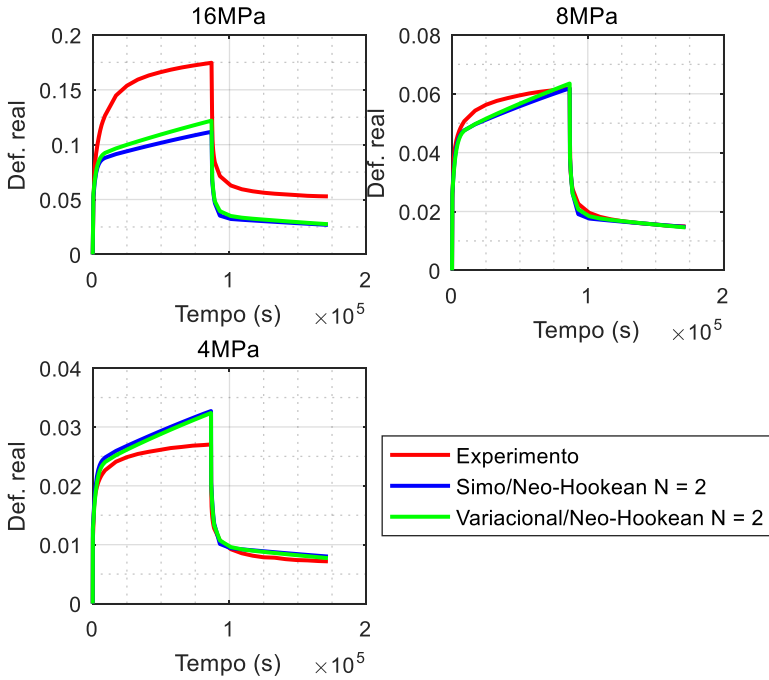


Figura 7.13 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência entre o modelo variacional e o proposto por Simo, ambos incorporando o modelo Neo-Hookean e dois braços de Maxwell

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL

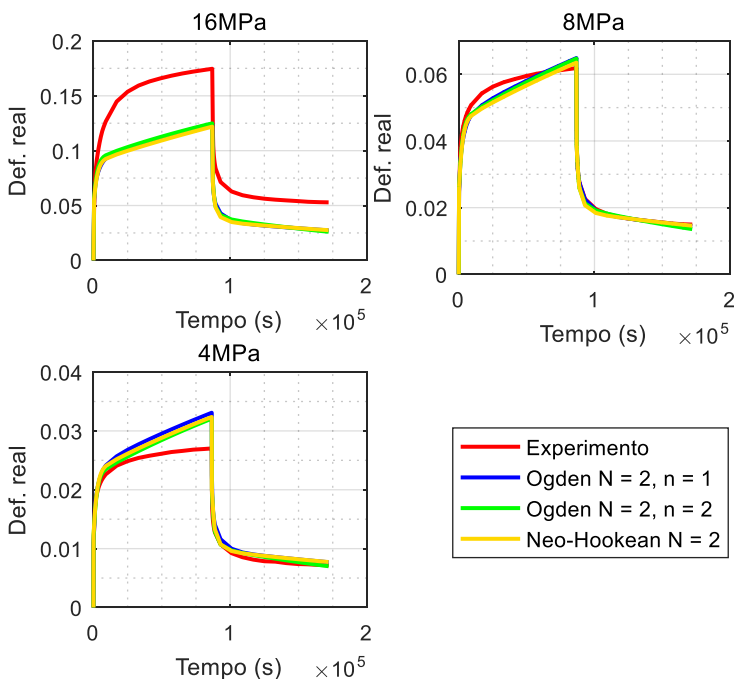


Figura 7.14 – Comparação dos ajustes dos ensaios de fluência usando o modelo variacional/Ogden para um e dois termos na energia de deformação e também o modelo variacional/Ogden, ambos com dois braços de Maxwell

É importante salientar que na equação (7.2) a diferença entre a deformação obtida no ajuste e a real foi dividida por esta última de forma que o resíduo fosse normalizado. Uma outra possibilidade seria retirar essa normalização do resíduo e usar apenas a diferença das deformações, como mostrado na equação (7.3).

Na Figura 7.15 é apresentado um ajuste usando essa função objetivo e o modelo Variacional/Ogden com dois braços de Maxwell e um termo na energia de deformação. Pode-se perceber que os ajustes foram qualitativamente semelhantes aos mostrados nas figuras anteriores com a diferença de que agora a curva que aparentemente se ajustou melhor foi a de fluência sob 16MPa. Isso ocorre porque os gráficos estão sendo mostrados em escalas diferentes e a função objetivo não é mais normalizada como a usada nas figuras anteriores. Na Figura 7.16 todas as curvas foram

colocadas em uma mesma escala e pode-se perceber de forma mais clara que a qualidade do ajuste nos três ensaios foi semelhante.

$$r(p) = \left[\sum_{n=1}^k (|\varepsilon_{ajuste\ 16MPa} - \varepsilon_{real\ 16MPa}| + |\varepsilon_{ajuste\ 8MPa} - \varepsilon_{real\ 8MPa}| + |\varepsilon_{ajuste\ 4MPa} - \varepsilon_{real\ 4MPa}|)_n^2 \right]^{1/2} \quad (7.3)$$

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

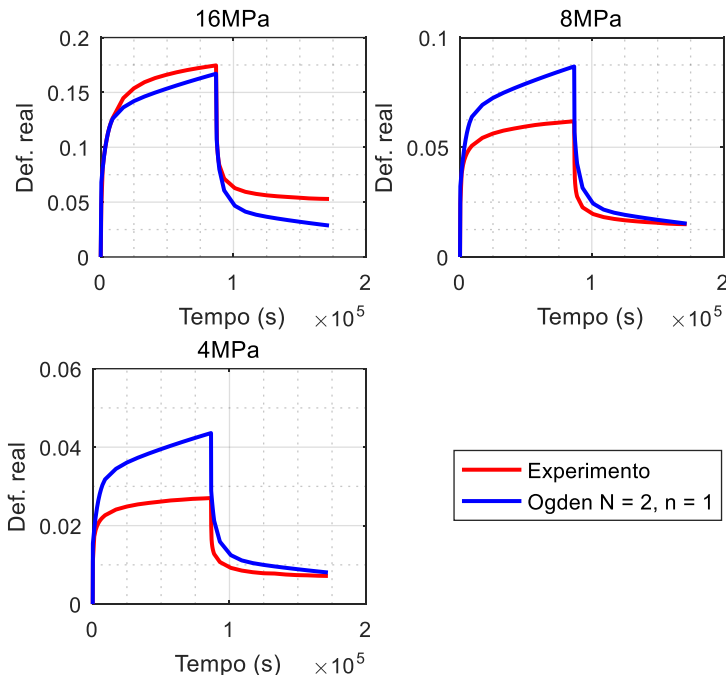


Figura 7.15 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa

Tabela 7.6 – Parâmetros encontrados nos ajustes das Figuras 7.15 e 7.16

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 7,3687 \cdot 10^0;$ $\mu = 5,7288 \cdot 10^0$	$N = 2; n = 1; \alpha = 7,3687 \cdot 10^0;$ $\mu_1 = 1,4334 \cdot 10^1; \mu_2 = 5,5390 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 2,3340 \cdot 10^4; \eta_2 = 5,3828 \cdot 10^5$	0,48

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

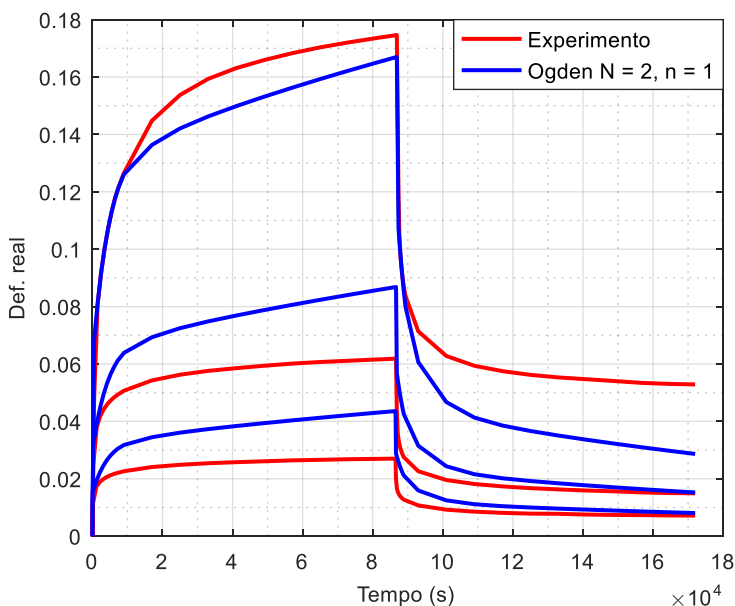


Figura 7.16 – Ajuste do modelo variacional/Ogden para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa

A fim de entender melhor porque os resultados não foram satisfatórios foi feito separadamente o ajuste na curva do ensaio de fluência sob 16 MPa, como mostrado na Figura 7.17. Pode-se perceber a parte da curva relativa à recuperação foi bem representada já a fluência não. Acredita-se que isso se deve a um tempo de relaxação muito alto para conseguir representar a deformação que ainda permanece após 24h de recuperação, como mostrado na Tabela 7.7.

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

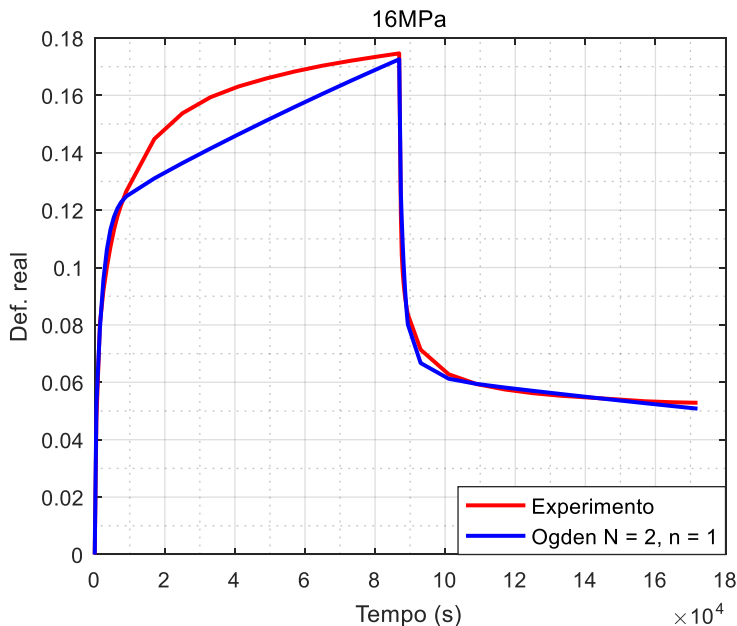


Figura 7.17 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para o ensaio de fluência/recuperação sob 16MPa

Tabela 7.7 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.17

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 8,8893 \cdot 10^0;$ $\mu = 2,7253 \cdot 10^0$	$N = 2; n = 1; \alpha = 8,8893 \cdot 10^0;$ $\mu_1 = 3,3907 \cdot 10^1; \mu_2 = 7,8987 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 1,1830 \cdot 10^4; \eta_2 = 7,4879 \cdot 10^5$	0,92

A Figura 7.18 mostra um ajuste feito somente na parte da curva relativa à fluência e como os parâmetros encontrados descreveriam a recuperação do material. Na Tabela 7.8 são mostrados os parâmetros encontrados e fica claro que os braços de Maxwell realmente são menos viscosos do que no caso anterior, permitindo que o modelo recupere a deformação em um menor tempo.

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

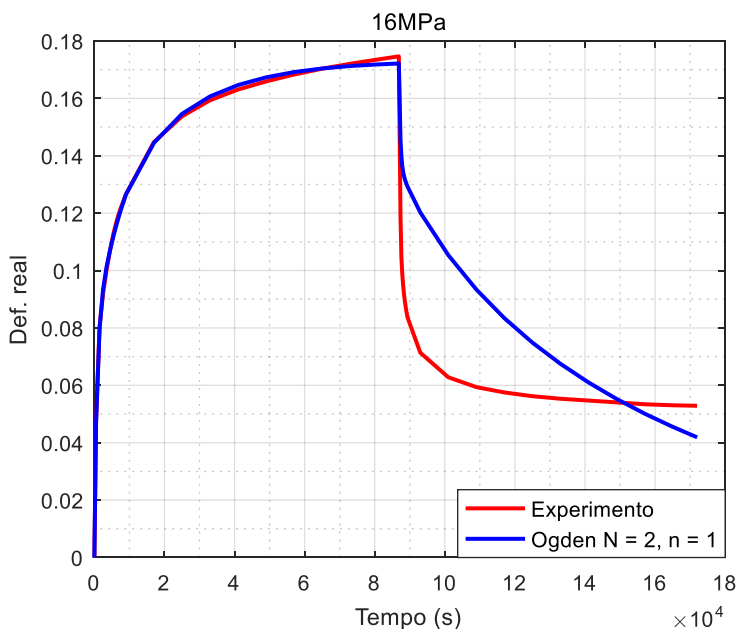


Figura 7.18 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação realizado somente na parte relativa à fluência no ensaio sob 16MPa

Tabela 7.8 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.18

Modelo	Parâmetros		Resíduo $r(p)$
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 3,8256 \cdot 10^1;$ $\mu = 5,3672 \cdot 10^{-1}$	$N = 2; n = 1; \alpha = 3,8256 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = 7,6014 \cdot 10^1; \mu_2 = 2,5138 \cdot 10^0;$ $\eta_1 = 1,9377 \cdot 10^3; \eta_2 = 2,4107 \cdot 10^4$	0.18

Também foram feitas tentativas de ajustes usando apenas duas intensidades de carregamento e apenas na parte do ensaio relativa à fluência. A Figura 7.19 mostra um desses ajustes para as intensidades de 4 e 8 MPa. Foi obtido um resultado razoável, o mesmo não foi possível para o ajuste das curvas de 8 e 16MPa mostrado na Figura 7.20. Isso sugere que na intensidade de 16MPa o material provavelmente já estava apresentando um comportamento com não linearidades maiores do que o modelo é capaz de descrever. Nas Tabela 7.9 e Tabela 7.10 são mostrados os parâmetros encontrados.

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

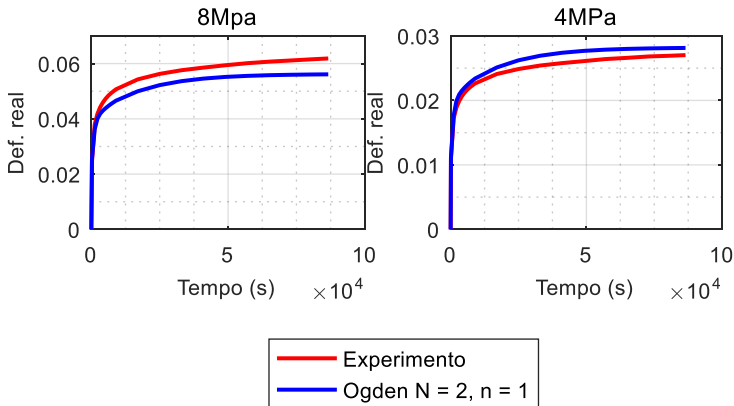


Figura 7.19 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para os ensaios de fluência sob 4 e 8MPa

Tabela 7.9 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.19

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 3,9535 \cdot 10^0;$ $\mu = 2,4087 \cdot 10^1$	$N = 2; n = 1; \alpha = 3,9535 \cdot 10^0;$ $\mu_1 = 4,5340 \cdot 10^1; \mu_2 = 1,0470 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 8,0358 \cdot 10^3; \eta_2 = 1,0205 \cdot 10^5$	2,55

AJUSTE - MODELO VARIACIONAL/OGDEN N = 2, n = 1

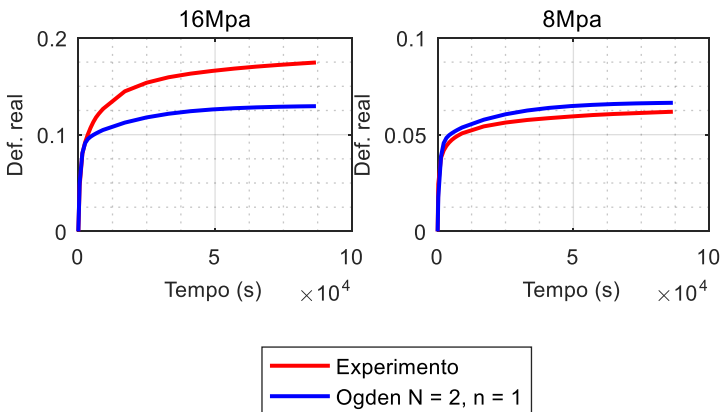


Figura 7.20 – Ajuste do modelo variacional/Ogden com um termo na energia de deformação para os ensaios de fluência sob 8 e 16MPa

Tabela 7.10 – Parâmetros encontrados no ajuste da Figura 7.20

Modelo	Parâmetros		Resíduo r(p)
	Mola principal	Braços de Maxwell	
Variacional - Ogden	$n = 1;$ $\alpha = 3,0553 \cdot 10^0;$ $\mu = 2,5857 \cdot 10^1$	$N = 2; n = 1; \alpha = 3,8256 \cdot 10^1;$ $\mu_1 = 4,7977 \cdot 10^5; \mu_2 = 1,1629 \cdot 10^1;$ $\eta_1 = 1,5393 \cdot 10^4; \eta_2 = 1,3837 \cdot 10^5$	5,94

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas ao longo deste trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

8.1 Conclusões

Foram estudados e implementados modelos clássicos de viscoelasticidade e hiperelasticidade, que são comumente utilizados e disponíveis em pacotes comerciais de elementos finitos. Também foi implementado o modelo de viscoelasticidade variacional proposto por Fancello et al. [2].

Ao longo deste trabalho também foram realizados ensaios cíclicos e de fluência em corpos de prova de Polietileno de Ultra Alto Peso Molecular (UHMWPE). Foram escolhidas três velocidades de deformação para os ensaios cíclicos e três intensidades de carregamento para a fluência. No carregamento mais alto o corpo de prova chegou à uma deformação de quase 20%.

Os ensaios experimentais permitiram conhecer melhor o comportamento mecânico do material e evidenciaram a dependência da deformação com relação à taxa de aplicação da carga (ensaios cíclicos) e ao tempo (ensaios de fluência).

Os resultados dos ensaios foram usados para identificar parâmetros com os modelos implementados. Estes não foram capazes de descrever satisfatoriamente o comportamento do material na faixa de tensão/deformação em que os ensaios foram realizados, mas os resultados sugerem novos passos para que seja obtido êxito na modelagem do UHMWPE.

8.2 Sugestões para trabalhos futuros

A seguir, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Realizar testes cíclicos e de fluência à menores tensões/deformações no UHMWPE e ajustar os parâmetros com os modelos utilizados neste trabalho;
- Usar os resultados experimentais obtidos em modelos mais complexos, que reajam de formas diferentes dependendo da faixa de tensão/deformação que o material está sujeito. Uma sugestão é usar o modelo proposto por Fancello et al. [15] que representa uma extensão do modelo variacional usado longo deste trabalho, incorporando também plasticidade;

- Repetir o procedimento deste trabalho para outros polímeros de uso comum na área médica.

REFERÊNCIAS

- [1] J. C. Simo and T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*, vol. 7. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [2] E. Fancello, J. P. Ponthot, and L. Stainier, “A variational formulation of constitutive models and updates in non-linear finite viscoelasticity,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 65, no. 11, pp. 1831–1864, 2006.
- [3] H. F. Brinson and L. C. Brinson, *Polymer engineering science and viscoelasticity: An introduction, Second edition*. Springer US, 2015.
- [4] M. Ashby, H. Shercliff, and D. Cebon, *Materials: Engineering, Science, Processing and Design*. 2007.
- [5] I. M. Ward and J. Sweeney, *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, vol. 17. 2004.
- [6] M. C. Sobieraj and C. M. Rimnac, “Ultra high molecular weight polyethylene: Mechanics, morphology, and clinical behavior,” *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, vol. 2, no. 5, pp. 433–443, 2009.
- [7] R. W. Ogden, “Nonlinear Elastic Deformations,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52. p. 740, 1997.
- [8] G. Holzapfel, “Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering,” *Work*, vol. First Edit, p. 455, 2000.
- [9] J. Bonet and R. D. Wood, “Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis 2nd edition,” p. 1, 2008.
- [10] M. E. Gurtin and W. J. Drugan, *An Introduction to Continuum Mechanics*, vol. 51, no. 4. 1984.
- [11] G. Holzapfel, “Nonlinear Solid Mechanics.pdf.” 2000.
- [12] E. de Souza Neto, D. Peric, and D. R. J. Owen, *Computational Methods for Plasticity*, vol. 55. 2008.
- [13] P. J. Flory, “Thermodynamic relations for high elastic materials,” *Trans. Faraday Soc.*, vol. 57, p. 829, 1961.
- [14] J. Bergström, *Mechanics of Solid Polymers*. Elsevier, 2015.
- [15] E. Fancello, J. M. Vassoler, and L. Stainier, “A variational constitutive update algorithm for a set of isotropic hyperelastic-viscoplastic material models,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 49–50, pp. 4132–4148, 2008.

- [16] ASTM, “ASTM: D638, Standard test method for tensile properties of plastics,” *ASTM Stand.*, pp. 1–16, 2013.
- [17] Ticona GmbH, “GUR ultra-high molecular weight polyethylene (PE-UHMW),” pp. 1–35, 2001.
- [18] “Emic Website.” [Online]. Available: http://www.emic.com.br/fotos/produtos/files/232S_01_20150526155538.jpg. [Accessed: 16-Dec-2016].
- [19] A. Sonnenhohl, “Desenvolvimento e implementação de procedimentos experimentais para a caracterização mecânica de polímeros termoplásticos , estudo de caso : UHMWPE,” Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

APÊNDICE A – DERIVADAS DA ENERGIA DEFORMAÇÃO

Modelo de Hencky

$$\begin{aligned}\varphi &= \mu \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_j)^2 & \varphi^e &= \mu^e \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_j^e)^2 \\ \psi &= \eta \sum_{j=1}^3 (d_j^v)^2\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_j} = 2\mu \varepsilon_j \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} = 2\mu^e \varepsilon_j^e \quad \frac{\partial \psi}{\partial d_j^v} = 2\eta^v d_j^v \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\varepsilon_j)^2} = 2\mu \quad \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial (\varepsilon_j^e)^2} = 2\mu^e \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial (d_j^v)^2} = 2\eta^v \tag{A.3}$$

Modelo de Ogden

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} ([\exp(\varepsilon_j)]^{\alpha_p} - 1) \\ \varphi^e &= \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} ([\exp(\varepsilon_j^e)]^{\alpha_p} - 1) \\ \psi &= \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} ([\exp(d_j^v)]^{\alpha_p} - 1)\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_j} = \sum_{p=1}^n \mu_p [\exp(\varepsilon_j)]^{\alpha_p}$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} = \sum_{p=1}^n \mu_p^e [\exp(\varepsilon_j^e)]^{\alpha_p} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial d_j^v} = \sum_{p=1}^n \eta_p^e [\exp(d_j^v)]^{\alpha_p}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (\varepsilon_j)^2} = \sum_{p=1}^n \mu_p \alpha_p [\exp(\varepsilon_j)]^{\alpha_p}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial (\varepsilon_j^e)^2} = \sum_{p=1}^n \mu_p^e \alpha_p [\exp(\varepsilon_j^e)]^{\alpha_p} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (d_j^v)^2} = \sum_{p=1}^n \eta_p^e \alpha_p [\exp(d_j^v)]^{\alpha_p}$$

APÊNDICE B – MINIMIZAÇÃO DE W COM RELAÇÃO A Δq_j^v

Nesta seção é apresentado obter o valor de Δq_j^v resultante do processo de otimização. A dedução e maiores informações podem ser encontradas na referência [2].

Modelo de Hencky

$$\Delta q_j^v = \frac{\mu^e}{\frac{\eta^v}{\Delta t} + \mu_e} \varepsilon_j^{pr} \quad (\text{A.7})$$

Modelo de Ogden

Nesse caso é necessário usar um método para encontrar as raízes das equações de otimalidade. Nesse trabalho foi usado o método de newton de forma que

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{K}^{k-1} \mathbf{r}^k \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathbf{x} = \{\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e, \lambda\}$ e

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo

$$K_{ii} = \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial (\varepsilon_j^e)^2} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial (d_j^v)^2} \quad (\text{A.2})$$

e

$$r_i = \frac{\partial \varphi^e}{\partial \varepsilon_j^e} - \frac{\partial \psi}{\partial d_j^v} + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.2})$$

$$r_4 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e = 0$$

As equações acima podem ser manipuladas algebricamente obtendo

$$\Delta\lambda = \left(r_4 - \sum_{j=1}^3 \frac{r_j}{K_{jj}} \right) \left(\sum_{s=1}^3 \frac{1}{K_{ss}} \right)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta\varepsilon_i^j = -(r_i + \Delta\lambda)/K_{ii} \quad (\text{A.2})$$

APÊNDICE C – VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VARIACIONAL

A fim de validar a implementação do modelo variacional usado ao longo deste trabalho foi usado o exemplo 1 do artigo publicado por Fancelli et al. [2]. Nesta seção serão reproduzidas todas as curvas mostradas no exemplo.

O exemplo consiste de um cubo sofrendo cisalhamento simples, como mostrado na Figura C.1. Foram usadas diferentes combinações entre os modelos de Hencky e Ogden para os potenciais φ , φ^e e ψ . Os parâmetros materiais utilizados são mostrados na Tabela A.1, em todos os casos analisados foi usado um braço de Maxwell e três termos na energia de deformação ($n = 3$). Os parâmetros α foram os mesmos para os três potenciais, sendo $\alpha_1 = 1.8$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = 7$. O cubo foi sujeito a um carregamento cíclico de forma que o deslocamento lateral $u_x = U_x \sin(\omega t)$ onde $\omega = 0.3s^{-1}$.

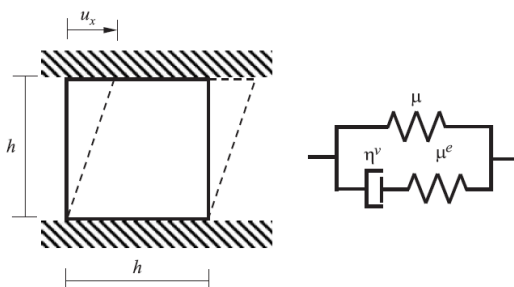


Figura C.1 – Teste de cisalhamento cíclico. Fonte: FANCELLO ET AL. [2]

Tabela C.1 – Parâmetros materiais para o teste de cisalhamento cíclico

Potencial	Ogden			Hencky
φ	20	-7	1.5	$\mu = 30.25 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \mu_i \alpha_i$
φ^e	51.4	-18	3.86	$\mu^e = 30.25 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \mu_i^e \alpha_i$
ψ	899.5	-315	67.55	$\eta^v = 30.25 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \eta_i^v \alpha_i$

Nas Figuras C.2–C.8 são mostrados os resultados obtidos para várias amplitudes de cisalhamento.

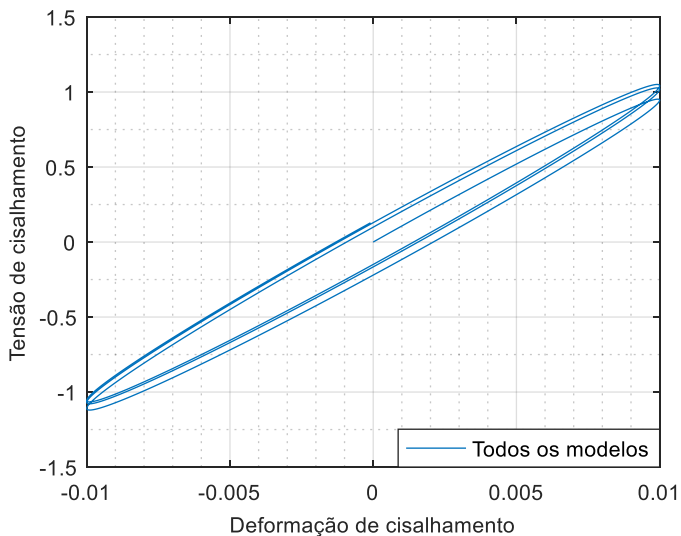


Figura C.2 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 0.01

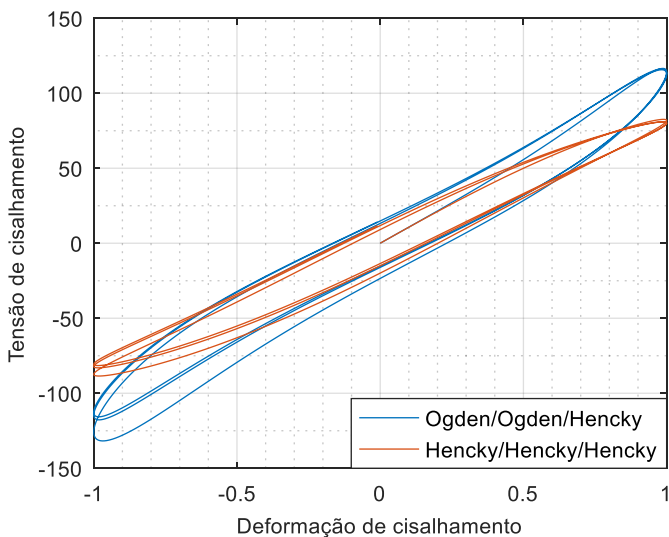


Figura C.3 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 1

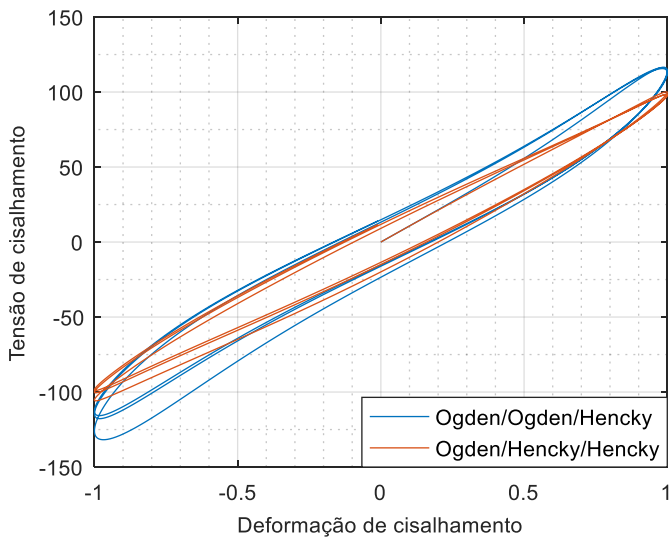


Figura C.4 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 1

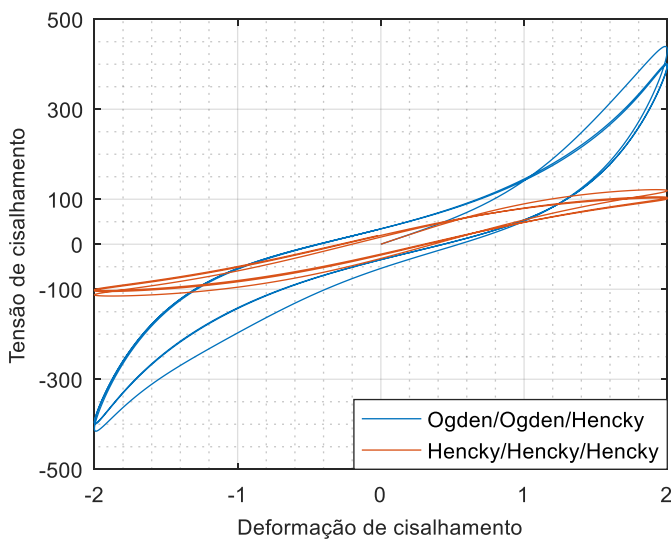


Figura C.5 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 2

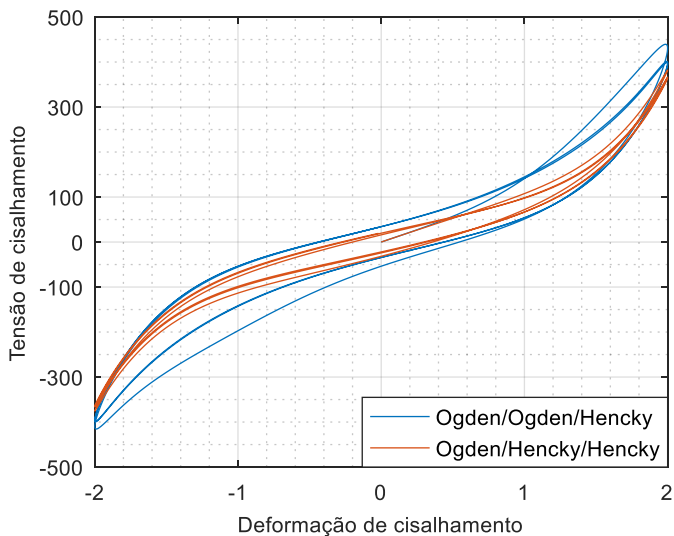


Figura C.6 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 2

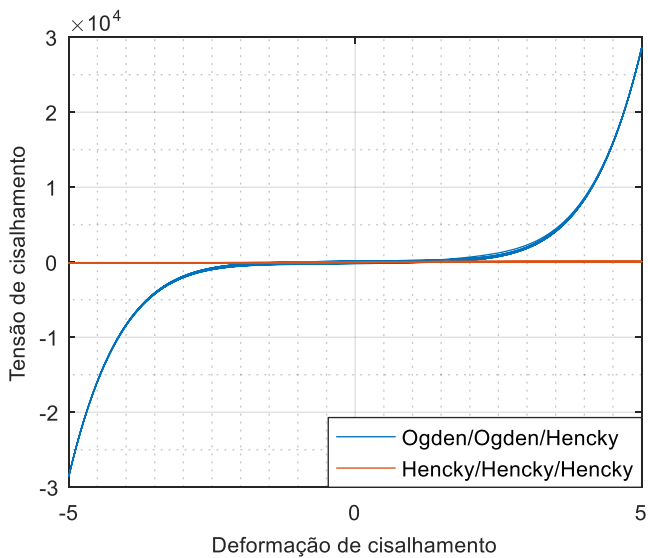


Figura C.7 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 5

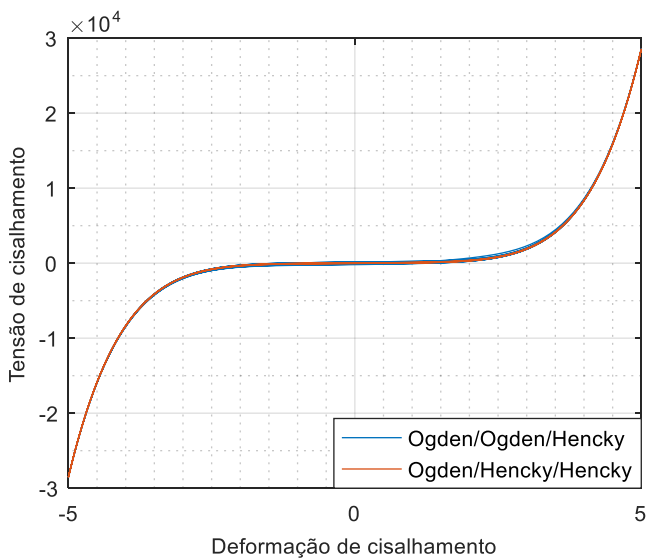


Figura C.3 – Teste de cisalhamento cíclico. Amplitude de cisalhamento: 5