

Olavo FREIRE

NOÇÕES

DE

# Geometria Pratica



*1.080 exercicios*

*340 problemas resolvidos*

*665 gravuras*

12.<sup>a</sup> Edição inteiramente refundida

FRANCISCO ALVES & C<sup>ia</sup>

RIO DE JANEIRO — 166, RUA DO OUVIDOR, 166

RUA DA BAHIA  
MINAS

65, RUA DE S. BENTO  
SÃO-PAULO

*Approvada e premiada pelo Conselho de Instrução  
Publica do Districto Federal.*

Gaspar Salino de Souza Seal

Nitong 12-7-1970

CNPq/2010

NOÇÕES

DE

GEOMETRIA PRÁTICA

Olavo FREIRE

NOÇÕES

DE

# Geometria Pratica



*1.080 exercicios*

*340 problemas resolvidos*

*665 gravuras*

12.<sup>a</sup> Edição inteiramente refundida

FRANCISCO ALVES & Cia  
RIO DE JANEIRO — 166, RUA DO OUVIDOR, 166

RUA DA BAHIA  
MINAS

65, RUA DE S. BENTO  
SÃO-PAULO

Ao dilecto Mestre e Amigo,

o |  
Ill.<sup>mo</sup> e Ex.<sup>mo</sup> Snr.

Dr. J. J. de MENEZES VIEIRA,

em testemunho de

gratidão

O. D. C.

o  
Olavo

Outubro — 1894

## OLAVO,

Teu livrinho — *Primeiras noções de Geometria* — é um bom instrumento de ensino e uma prova da conquista que vão fazendo entre nós osãos principios pedagogicos.

Conseguiste libertar-te dos velhos moldes quanto ao methodo, aos exemplos, ao estylo e ao *sestro* de arranjar compendios por empreitada e *à la minute*: acceita meus sinceros parabens!

Sinto, entretanto, que tivesses em um ponto transigido com a rotina (1), preferindo problemas abstractos ás questões práticas, cuja resolução se offerece todos os dias na vida social.

Receiaste por ventura os sarcasmos de que foi *victima* o excellente M. Desargues, o consciencioso propagandista da geometria applicada ás artes?

Que te importaria semelhante affronta?

Aos teus censores responderias com as textuaes palavras do illustre Clairaut em 1741:

« Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que les cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés de cet autre; on ne sera pas surpris.

« La géométrie avait à convaincre des sophistes obstinés

---

(1) Não transigi em absoluto porque pretendo publicar uma série de problemas de caracter essencialmente práctico.

O. FREIRE.

qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes. Il fallait donc alors que la géométrie eût, comme la logique, des raisonnements pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et dégoûter les lecteurs. »

E na verdade, meu amigo, *la géométrie du bon sens*, a geometria realmente descriptiva e intuitiva é a unica que deve ter o direito de entrada nas escolas primarias.

Este é o parecer do teu velho mestre e amigo dedicado.

MENEZES VIEIRA

N. C. — 26 Outubro 1894.

## Algumas opiniões sobre a primeira edição

---

*Jornal do Commercio*, 29 de março de 1895

Os Srs. Alves & Cia acabam de editar um livro muito util, do Sr. Olavo Freire. Intitula-se *Primeiras noções de Geometria Pratica* e dá ao ensino da geometria elementar a facilidade que os estudantes não encontram em outros compendios.

O Sr. Olavo Freire, pela clareza da sua exposição e pela excellencia do methodo que adoptou, soube tornar o seu livro uma obra didactica de merito verdadeiramente excepcional. Por elle a geometria elementar pôde ser ensinada com grande vantagem nas escolas de instrucção primaria, e sabem todos quanto o conhecimento da geometria impõe-se hoje a todas as profissões.

Como em outros compendios d'essa sciencia, o livro é ornado de muitas gravuras, cerca de 260, explicativas e exemplificativas.

---

*O País*, 7 de abril de 1895 :

*Primeiras noções de Geometria Pratica*. — O Sr. Olavo Freire, conhecido e reputado professor de desenho e trabalhos manuaes, soube com pericia compendiar em 159 paginas, in-8°, todas as noções elementares de geometria pratica.

O volume que temos presente constitue trabalho utilissimo para as escolas primarias brasileiras.

Os numerosos exercicios e problemas praticos e as nidas e bem applicadas gravuras que encerra o compendio do Sr. Olavo Freire elucidam cabalmente a materia, cujo ensino, amenisado d'essa fórma, torna-se tarefa agradavel e facil ao professor e ao discipulo.

Prefacia o livro do professor Olavo Freire o emerito educacionista Dr. Menezes Vieira, cujas palavras constituem um brado de animação ao jovem professor e penhor valioso da utilidade de seu trabalho.

O *Democrata Federal* (S. Paulo) 15 de maio 1895 :

**Geometria pratica.** Dos estimados e populares editores srs. Alves & C.<sup>a</sup> recebemos um pequeno compendio escolar com o titulo *Primeiras noções de Geometria Pratica*, destinado, como se vê, aos estabelecimentos de instrucção primaria.

O livro, compilado pelo sr. Olavo Freire, contém 318 exercicios, 71 problemas e 233 gravuras. Desenvolve intuitivamente todos os elementos indispensaveis aos primeiros conhecimentos de mathematica linear, exemplificando os problemas com boas gravuras elucidativas.

Pela sua clareza de exposição e pela distribuição methodica das materias, torna-se o presente opusculo um livro de grande utilidade para os principiantes, principalmente si considerarmos que no genero, raros são os auctores, que se prestam pela precisão e clareza, á aprendizagem dos jovens estudantes.

Recommendo, pois, aos srs. professores, o livro do sr. Olavo Freire, agradecemos aos sympathicos editores a valiosa offerta.

## NOÇÕES

DE

# GEOMETRIA PRATICA

---

## CAPITULO I

### PRIMEIRAS DEFINIÇÕES

SUMMARIO : Espaço. — Corpo. — Extensão. — Volume. — Superfície. — Linha. — Ponto.

Si collocarmos um tinteiro sobre uma mesa, elle fica em uma posição determinada no **espaço**.

**ESPAÇO.** A mesa está no **espaço** limitado pela sala; esta no **espaço** comprehendido pela escola; a escola sobre a Terra; e a Terra, em continuo movimento pelo **espaço**.

D'esta sorte todas as cousas estão no

**espaço** : porém que **espaço?** — Onde principia ou acaba?

*O espaço, sem ter começo nem fim, encerra todas as cousas e estende-se em todas as direcções.*

Todas as cousas que occupam um certo logar no espaço chamam-se **corpos**.

**CORPO.** Assim um tinteiro, uma regua, uma mesa, um livro, uma folha, etc. occupam um certo logar no espaço e são por isso chamados **corpos**. (fig. 1).



Fig. 1. — Gatos, bola, cordel, são corpos

#### EXERCICIOS :

1. — Arnaldo! este livro occupa logar no espaço? — que nome recebe?
2. — Que é um corpo?
3. — Dá alguns exemplos de corpos: na aula, no jardim, no pateo, na sala, na rua, no quarto.
4. — Um lapis será um corpo? — porque?

O espaço occupado por um corpo chama-se **extensão**.

**EXTENSÃO.** Podemos considerar a **extensão** com uma, duas ou tres dimensões, isto é, *comprimento*; *comprimento e largura*; e finalmente *comprimento, largura e espessura*.

#### EXERCICIOS :

1. — Roberto! que nome tem o espaço occupado por um corpo?
2. — Quantas dimensões póde ter uma extensão?
3. — Como se chamam?
4. — Quantas dimensões tem esta regua? (o professor mostra uma regua).
5. — E este livro? — este armario? — esta mesa? — esta caixa?

A extensão com tres dimensões, isto é, *comprimento, largura, e espessura, altura ou profundidade* recebe o nome de **volume**.

**VOLUME.** A porção do espaço comprehendida pelas paredes, o soalho e o tecto de uma sala é um **volume**.

A *altura* ou *profundidade* é em certos casos denominada *espessura*.

Assim dizemos : a *espessura* de uma folha de papel, de uma taboa, etc.

O **volume** de um corpo é o logar que este occupa no espaço.

Uma regua, um relógio, um lapis occupam logares no espaço; estes logares são os **volumes** d'esses objectos.

EXERCICIOS :

1. — Beatriz! qual é o nome que recebe uma extensão com tres dimensões?
2. — Dá exemplos.
3. — Que é o volume de um corpo?
4. — O logar occupado por uma regua no espaço, que nome recebe?
5. — Diremos acertadamente: a altura de uma folha de papel? — como deveremos dizer?
6. — Será certo dizer a espessura de um poço? — como deveremos dizer?
7. — Qual o volume maior, o d'esta regua ou do moringue?
8. — Qual occupa mais espaço, um litro de leite ou um litro d'agua?

Cada corpo é separado do espaço que o cerca por um limite chamado **superficie**.

Uma superficie não tem *espessura*. Quando pegamos n'um livro ou em outro corpo qualquer, é na **superficie** do livro ou d'esse corpo, que tocamos; quando o operario fórta uma parede, é na sua **superficie** que elle colla o papel.

A epiderme do corpo humano, o epicarpo (pellicula externa de um fructo) são **superficies**.

Á extensão com duas dimensões, isto é, *comprimento e largura* dá-se o nome de **superficie**.

Alguns corpos têm uma só **superficie**: uma esphera, uma bola de bilhar, um ovo

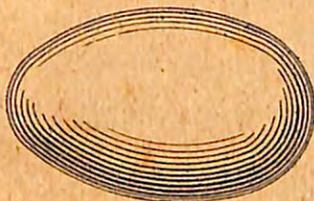


Fig. 2. — Um ovo: corpo com uma unica superficie.



Fig. 3. — Vaso de flores: um corpo limitado por duas superficies.

(fig 2), um limão etc.; outros são limitados por duas: um vaso de flores (fig. 3), uma caixa cylindrica; por tres: uma moeda de nickel, um lapis cylindrico, etc.

O dado de jogar (fig. 4) é formado por seis **superficies**; um esquadro por cinco.

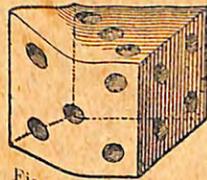


Fig. 4 — Um dado de jogar.

As **superficies** dos corpos podem ser *planas* ou

*curvas*; dividem-se portanto as **superfícies** em *planas* e *curvas*.

A **superfície plana** é também denominada *plano*.

As **superfícies** de uma prancheta, da taboa de uma mesa, de um espelho commum são *planas*, ou *planos*.

O marceneiro utiliza-se de um instrumento chamado *plaina* (fig. 5) para obter uma **superfície plana**.

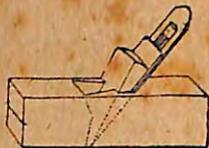


Fig. 5. — Uma plaina.

As **superfícies** do ovo, de uma laranja, de uma bola são *curvas*.

O torneiro é o operario que mais trabalha as **superfícies curvas**; é elle quem nos fabrica os cabos de utensilios, as *maçanetas*, as *columnas*, os *piões*, cujas **superfícies** são *curvas*.

As **superfícies curvas** são *concavas* ou *convexas*.



Fig. 6. — Uma telha : superfície convexa.

Uma telha collocada de modo a servir de calha (fig. 6) mostra uma **superfície concava** e em

sentido inverso (fig. 7) uma **superfície convexa**; a parte interior de um tubo (fig. 8)



Fig. 7. — Uma telha : superfície convexa.



Fig. 8.

é *concava* e a parte exterior é *convexa*.

### Synopse

<b>Superfícies . . .</b>	} <i>planas</i> .	} <i>concavas</i> .

### EXERCICIOS :

1. — Heitor ! onde está a superfície d'esta parede ?
2. — Que idéa fazes da superfície de um corpo ?
3. — A superfície de um corpo é sempre da mesma substancia que o corpo ?
4. — Tem uma superfície tres dimensões ? qual a dimensão que lhe falta ?
5. — Póde um corpo ter uma só superfície ? — exemplos.
6. — Conheces alguns corpos terminados por duas superfícies ?
7. — Por quantas superfícies é formada esta regua ?
8. — Como se chamam estas superfícies ?
9. — Qual o operario que mais trabalha as superfícies curvas ? — e o que mais trabalha as superfícies planas ?
10. — Como póde o marceneiro obter uma superfície plana ?
11. — Quantas superfícies tem um dado de jogar ?
12. — Como se chama a superfície de uma bola ?
13. — Como se dividem as superfícies curvas ?
14. — Como se chama a superfície interior de uma cuia ? — a exterior ?

- 15. — Mostra algumas superficies concavas; — convexas.
- 16. — Conheces alguns objectos que só tenham superficies convexas? — exemplos

A extensão com uma unica dimensão : comprimento, chama-se **linha**.

Um fio muito fino, um traço feito com giz ou lapis sobre uma superficie podem ser considerados como **linhas**, porém pouco perfectas; porque, por melhor que os façamos, sempre haverá uma *largura* ou uma *espessura*, e a **linha** geometrica não tem *largura* nem *espessura*, porém unicamente *comprimento*.

Entretanto para representarmos a **linha** empregamos geralmente o lapis, o giz, a penna, o carvão.

O encontro ou intersecção de duas superficies (fig.9) dá-nos tambem a **linha**.

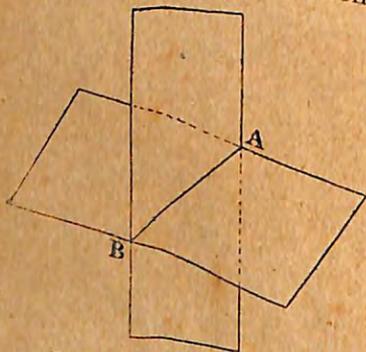


Fig. 9. — Recta A B; intersecção de duas superficies : uma linha.

A aresta de uma regua, os contornos de um corpo, de uma flôr, de um livro são **linhas**.

As **linhas** são *rectas* (fig. 10) ou *curvas* (fig. 11).

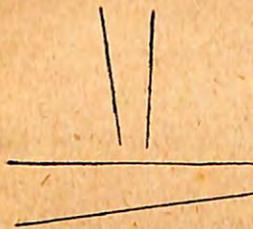


Fig. 10. — Linhas rectas

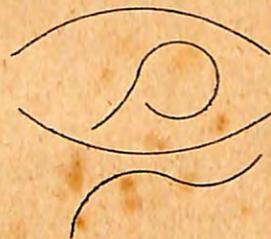


Fig. 11. — Linhas curvas.

Um fio (fig. 12) bem esticado dá-nos idéa de uma **linha recta**.

O instrumento usado para auxiliar

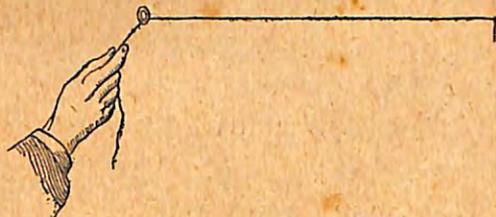


Fig. 12. — Um fio bem esticado : linha recta.

o traçado das **linhas rectas** chama-se regua (fig. 13).

O carpinteiro e o pintor servem-se algumas vezes, para traçar uma **linha recta**, de um cordel coberto de giz fixando-o

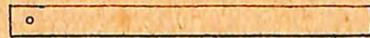


Fig. 13. — Uma regua.

bem esticado pelas extremidades, levantando-o depois pelo meio e largando-o de repente (fig. 14).

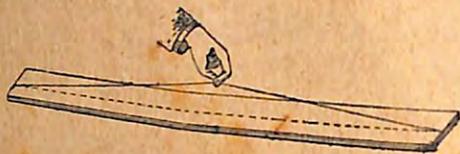


Fig. — 14.

Designa-se geralmente uma **linha recta** por meio de duas letras collocadas, uma em cada extremidade, como por exemplo : a recta AB (fig. 15).



Fig. 15. — Recta A B.

De um ponto a outro só podemos traçar uma **linha recta**.

Uma **recta** póde ser prolongada em ambas as direcções.

Prolongar uma recta é dar-lhe maior extensão em uma ou em ambas as direcções ; conforme o enunciado, assim deve ser o prolongamento de uma **recta**.

Prolongar, por exemplo, AB (fig. 15) é dar-lhe maior extensão na direcção de A para B; e prolongar BA é fazer-lhe o mesmo na direcção de B para A.

A **linha recta**, segundo a direcção que segue, póde estar na posição **vertical**, **horizontal** ou **inclinada**.

A **linha recta** está na posição **vertical** (fig. 16) quando segue a direcção do **fio a prumo** (fig. 17).

O **fio a prumo** compõe-se geralmente de um cordel, na extremidade do qual se acha suspenso um corpo pesado.

O **fio a prumo** é muito usado pelos pedreiros.

Em um relógio de parede, quando não está trabalhando, o pendulo occupa a posição **vertical**.

Fig. 16. — Linha recta em posição vertical.

A **linha recta** está em posição **horizontal** (fig. 18) quando segue a direcção da superficie das aguas quiéτας, tranquillas.

Assim, por exemplo, si conseguirmos collocar sobre a superficie d'agua um phosphoro e si este ahi se conservar, ficará em posição **horizontal**.

Fig. 18. — Linha recta em posição horizontal.



Fig. 17. — Fio a prumo.

O instrumento que serve para se verificar



Fig. 19. — Um nivel.

si uma *recta* ou uma *superficie* está em posição *horizontal* chama-se *nivel* (fig. 19).

A *linha* *recta* está em posição *inclinada* (fig. 20) quando não estiver em posição nem *vertical* nem *horizontal*.

É com o *metro* (\*) (fig. 21) que geralmente se medem as *linhas rectas*.

Fig. 20. — Linha recta em posição inclinada.

(\*) O *metro* é a unidade principal de comprimento; é a decima millionesima parte de um quarto do meridiano terrestre. — O *metro* tem geralmente a fórma de uma regua chata ou quadrada, de madeira, sobre a qual estão marcadas as divisões dos decímetros, centímetros e algumas vezes dos milímetros.

Fabricam-se tambem *metros* dobradiços (fig. 21) em madeira, osso ou metal, e em fitas de panno, aço ou papel.

Divide-se o *metro* em decímetros, centímetros e millímetros. O decimetro é a decima parte do *metro*; o centimetro, a centesima parte e o millimetro a millesima parte. 10 *metros* = 1 decametro; 100 *metros* = 1 hectometro; 1000 *metros* = 1 kilometro; 10000 *metros* = 1 myriametro.

A *linha* que, além de não ser *recta*, não

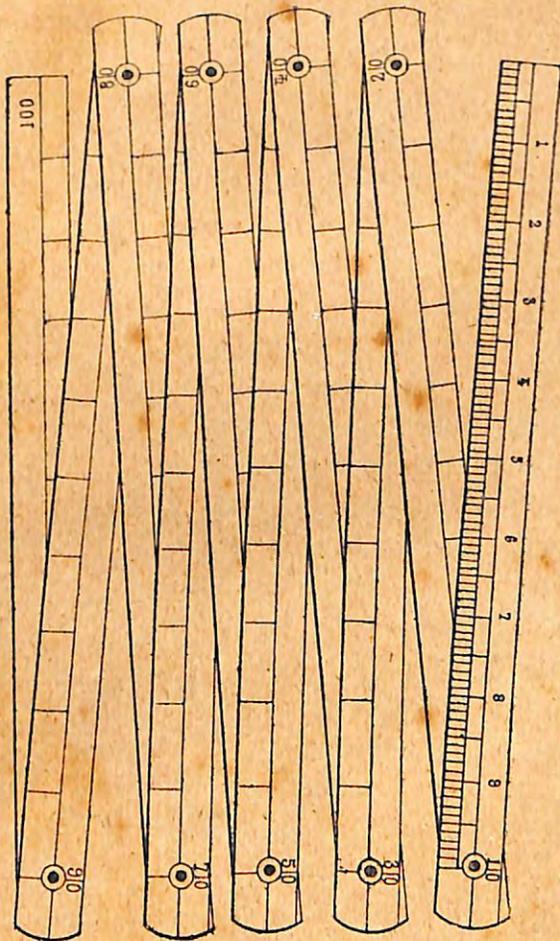


Fig. 21. — Um metro, tamanho natural.

é formada de *rectas*, é uma *linha curva*.

Ha uma infinidade de **linhas curvas** e a mais simples é a **circumferencia** (fig. 22).

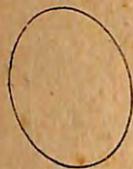


Fig. 22.  
Circumferencia.

Qualquer trecho de uma **circumferencia** chama-se um **arco**; e com um instrumento chamado **compasso** podemos

traçar um arco ou uma circumferencia completa, desde que fixemos uma das pontas d'esse instrumento no papel ou qualquer superficie plana e, com a outra, risquemos esse mesmo papel ou superficie fazendo a ponta movel girar ao redor da ponta fixa.

Chama-se **fazer centro**, ao acto de fixar uma das pontas do compasso em um determinado ponto.

Á distancia em linha recta entre as duas pontas de um compasso dá-se o nome de **raio**.

A **linha** composta de **rectas** é chamada **linha quebrada** (fig. 23).

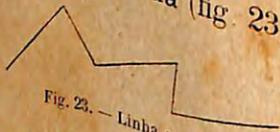


Fig. 23. — Linha quebrada.



Fig. 24. — Linha mixta.

A **linha** composta de **rectas** e **curvas** chama-se **linha mixta** (fig. 24).

### EXERCICIOS :

1. — Gilberto ! que nome recebe a extensão com uma unica dimensão ?
2. — Como se chamam as extremidades de uma superficie ?
3. — Como se chama a intersecção ou encontro de duas superficies ?
4. — Qual a unica dimensão da linha ?
5. — Que linhas conheces ?
6. — Mostra uma linha recta.
7. — Qual d'estes caminhos é e mais curto ? — porque ? (O professor traça no quadro negro duas linhas : uma recta e outra curva).
8. — Como podes traçar uma linha no papel ? — e na ardozia ?
9. — Para que serve a regua ?
10. — Todas as reguas têm a mesma fôrma ?
11. — De que processo se servem algumas vezes os carpinteiros para traçar uma linha recta ?
12. — Como geralmente designamos uma linha recta ?
13. — Quantas linhas rectas podes traçar de um ponto a outro ?
14. — Segundo a direcção que segue, que nomes recebe uma linha recta ?
15. — Quando uma recta é vertical ?
16. — Quando é horizontal ?
17. — Quando inclinada ?
18. — Que é um fio a prumo ?
19. — Para que serve o fio a prumo ?
20. — Traça uma linha recta em posição vertical; — horizontal; — inclinada.
21. — Que é o nível ?
22. — Para que serve ?
23. — Já viste algum nível ? — com quem ?
24. — Descreve esse instrumento.
25. — Nivelas a tua mesa; em que posição está agora o tampo da mesa ?
26. — Que é o metro ?

27. — Para que serve ?
28. — Como se divide o metro ?
29. — Um metro quantos decímetros tem ?
30. — Meio metro quantos centímetros tem ?
31. — Quantos millímetros serão necessários para formar um metro ?
32. — Quando uma linha não é recta, nem formada de linhas rectas, como se chama ?
33. — Qual a mais simples linha curva ?
34. — Que é uma linha quebrada ?
35. — Que é uma linha mixta ?
36. — Traça uma linha recta; uma linha curva: uma linha quebrada; uma linha mixta.
37. — Que quer dizer: FAZER CENTRO ?
38. — Que nome se dá á distancia entre as duas pontas de um compasso ?
39. — Traça uma circumferencia; — um arco.
40. — Faze centro no canto do teu papel e traça um arco.
41. — Dize o nome de alguns objectos em que vês uma circumferencia.
42. — Mostra algumas cousas circulares.

As extremidades de uma linha são **pontos**; e a intersecção de duas linhas é um **ponto**, e o lugar onde duas linhas se encontram é tambem um **ponto**.

O **ponto** geometrico não tem dimensões, isto é, não tem *comprimento*, *largura* nem *espessura*; entretanto determinamol-o por meio de um signal deixado pela ponta do lapis, da penna, do giz em uma superficie.

Designamos os **pontos** por meio de letras; assim, por exemplo : **ponto** A (fig. 25), **ponto** B, **ponto** X.

A **linha recta** póde ser definida como sendo o vestigio, o signal, o rasto deixado por um **ponto** que se move numa direcção constante.

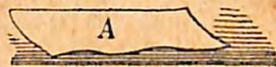


Fig. 25. — Ponto A.

A **linha curva** é o vestigio deixado por um **ponto** que se move numa direcção qualquer.

Um **ponto** em relação a uma **circumferencia** póde ser *exterior*, *interior* ou *estar na circumferencia*; e sua distancia ao centro póde ser *superior*, *inferior*, ou *igual* ao **raio**.

Uma **linha recta** e uma **circumferencia** podem ter um ou dois **pontos** communs, e duas **circumferencias** podem ter tambem um ou dois **pontos** communs entre si.

#### EXERCICIOS :

1. — Dinah! como se chamam as extremidades de uma linha ?
2. — Como se chama a intersecção de duas linhas ?
3. — Quantas dimensões tem o ponto ?
4. — Como designamos um ponto ?
5. — Como determinamos um ponto ?
6. — Como podemos definir a linha recta ?

7. — Como podemos definir a linha curva?
8. — Um ponto em relação a uma circumferencia em quantas posições póde estar?
9. — Uma recta e uma circumferencia, quantos pontos communs podem ter entre si?
10. — Duas circumferencias, quantos pontos communs, entre si, podem ter?
11. — A distancia de um ponto ao centro de uma circumferencia, que póde ser em relação ao raio d'essa curva?

## CAPITULO II

SUMMARIO : **Angulos** — **Divisão dos angulos**  
**Bissectriz.** — **Problemas.**

Si duas linhas se encontram, formam um **angulo.**

**Angulo** é o maior ou menor afastamento de duas linhas que se encontram

Um compasso aberto (fig. 26), as folhas de uma tesoura (fig. 27) dão-nos perfeita idéa do **angulo.**

O ponto de encontro cha-

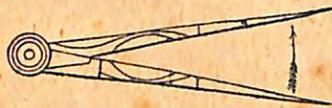


Fig. 26. — Compasso aberto :  
um angulo.

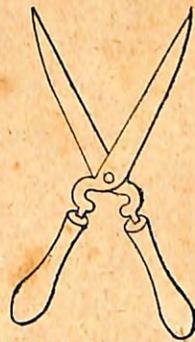


Fig. 27. — As folhas  
de uma tesoura : um  
angulo.

ma-se *vertice*, as linhas to-  
mam o nome de *lados* do

**angulo** e o afastamento dos *lados* chama-se *abertura do angulo* (fig. 28).



Fig. 8. — Un angulo.

Designa-se um **angulo** por tres letras collocadas, uma no *vertice* e as outras duas nas *extremidades* dos *lados* (fig. 29) ou simplesmente por uma letra collocada no *vertice* (fig. 30).



Fig. 29. — Angulo AVB.

Qualquer ponto marcado na *bissectriz* de um **angulo** fica a igual distancia dos *lados* d'esse **angulo**.

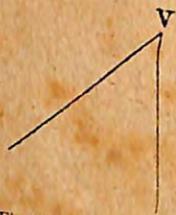


Fig. 30. — Angulo V.



Fig. 31. — Angulo recto.

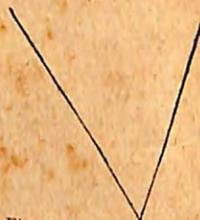


Fig. 32. — Angulo agudo

Um **angulo** é : *recto* (fig. 31), *agudo* (fig. 32), ou *obtusos* (fig. 33).

Si uma linha recta se encontra com outra e não se inclina para um nem para *outro lado*, o **angulo** é *recto*.

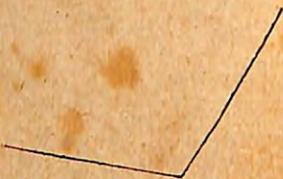


Fig. 33. — Angulo obtuso.

Si a *abertura* de um **angulo** é menor que a do **angulo recto**, elle é *agudo*; si maior, é *obtusos*.

A linha que divide o **angulo** em duas partes eguaes chama-se *bissectriz* (fig. 34).

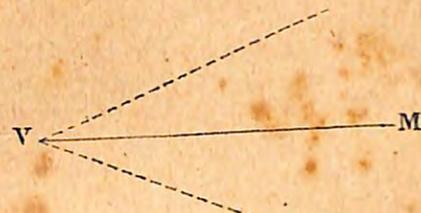


Fig. 34 — Bissectriz VM.

Qualquer ponto marcado na *bissectriz* de um **angulo** fica a igual distancia dos *lados* d'esse **angulo**.

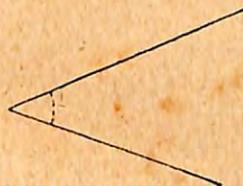


Fig. 35. — Angulo rectilineo.

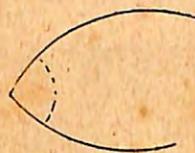


Fig. 36.

Angulo curvilineo.

O **angulo**, conforme as linhas que o formam, é *rectilineo* (fig. 35), *curvilineo* (fig. 36), ou *mixtilineo* (fig. 37).

Si as linhas que o formam são rectas: o **angulo** é *rectilineo*. Exemplos: os angulos de um esquadro, de um cartão de visita, de um envelope.



Fig. 37. — Angulo mixtilineo.

Si as linhas que o formam são curvas: o **angulo** é *curvilineo*.

Exemplos: As pontas de certas folhas, assim como da hera, da roseira, a extremidade da folha de um canivete, a ponta de uma espada, etc.



Fig. 38. — Uma foice: um angulo mixtilineo.

E, finalmente, se as linhas que o formam são uma recta e outra curva, o **angulo** é *mixtilineo*. Exemplo: uma foice (fig. 38), a ponta de uma faca (fig. 39).



Fig. 39. — Um faca; a ponta é um angulo mixtilineo.

O **angulo curvilineo** póde ser *convexo* (fig. 40), *concavo* (fig. 41) ou *convexo-concavo* (fig. 42).

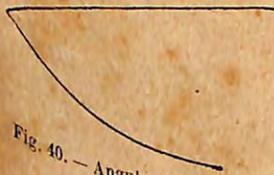


Fig. 40. — Angulo curvilineo convexo.

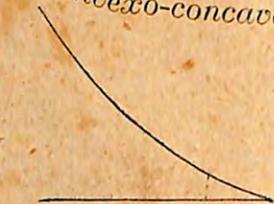


Fig. 41. — Angulo curvilineo concavo.

O **angulo mixtilineo** póde ser *convexo* (fig. 43) ou *concavo* (fig. 44).

Em relação á somma de suas grandezas os

**angulos** são *cómplementares* ou *supplementares*.

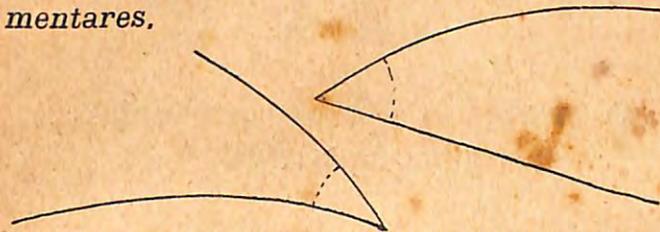


Fig. 42. — Angulo curvilineo convexo-concavo.

Fig. 43. — Angulo mixtilineo convexo.

O **angulo complementar** (fig. 45) é aquelle

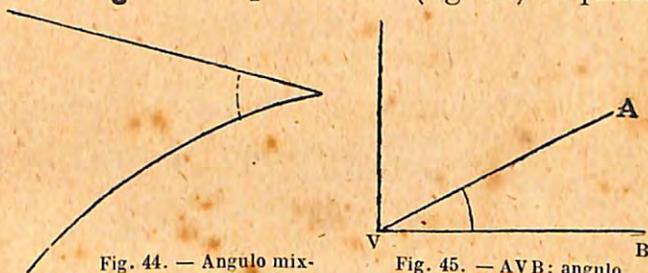


Fig. 44. — Angulo mixtilineo concavo.

Fig. 45. — AVB: angulo complementar.

que, junto a um outro **angulo**, fórma um **angulo recto**.

O **angulo suplementar** (fig. 46) é o que falta a outro **angulo** para formar dois **angulos rectos**.

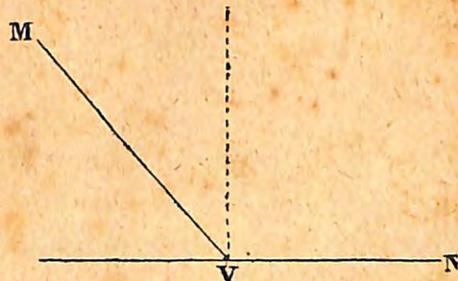


Fig. 46. — MVN: angulo suplementar.

### Synopse

Os **angulos** podem ser considerados :

1.<sup>o</sup> — Conforme a sua grandeza.

Angulos . . . . .	}	obtusos.
		agudos.
		rectos.

2.<sup>o</sup> — Conforme a natureza de seus lados.

Angulos. . . . .	}	rectilíneos . . . . .	convexos.	
			curvilíneos . . . . .	concavos.
				convexo-concavos.
		mixtilíneos . . . . .	convexos.	
concavos.				

3.<sup>o</sup> — Em relação á somma de suas grandezas.

Angulos . . . . .	}	complementares.
		supplementares.

Dois **angulos** formados, um pelo prolongamento dos lados do outro, são *oppositos pelo vertice* (fig. 47)

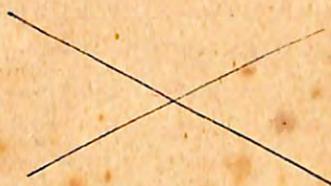


Fig. 47. — Angulos oppositos pelo vertice.

Dois **angulos** *oppositos pelo vertice* são eguaes.

Os **angulos** são *adjacentes* quando têm um lado commum a ambos e são formados do mesmo lado de uma recta (fig. 48).

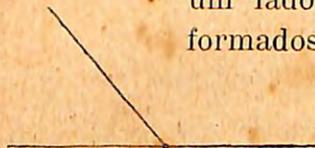


Fig. 48. Angulos adjacentes.

A *grandeza* de um **angulo** depende exclusivamente do afastamento ou aproximação de seus *lados*.

O comprimento dos *lados* de um **angulo** nada influe em sua *grandeza*.

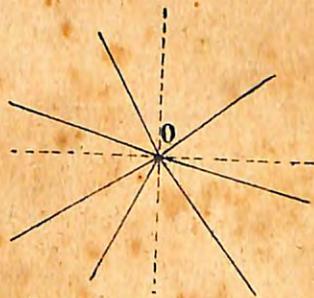


Fig. 49. — Angulos formados ao redor de um ponto equivalem a quatro angulos rectos.

Os **angulos** formados ao redor de um ponto equivalem a quatro **angulos rectos** (fig. 49).

Os **angulos** formados do mesmo lado de

uma recta e ao redor de um ponto tomado sobre esta recta equivalem a dois **angulos rectos** (fig 50).

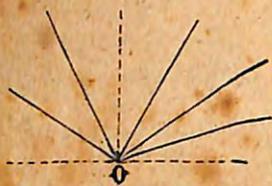


Fig. 50. — Angulos formados ao redor de um ponto e do mesmo lado de uma recta equivalem a dois angulos rectos.

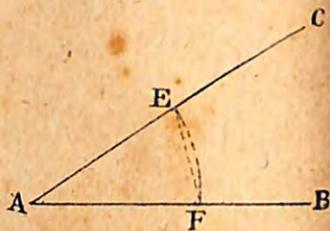


Fig. 51.

**Problema 1.** — Construir um angulo igual a outro angulo dado (\*).

Seja CAB o **angulo** dado (fig. 51). Com um raio qualquer e do ponto A, como centro, descrevamos o arco de

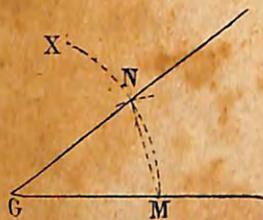


Fig. 52.

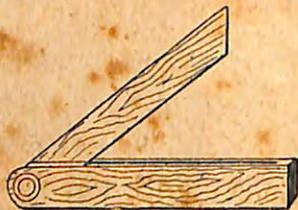


Fig. 53.

circunferencia de circulo EF comprehendido pelos **lados** do **angulo**.

Com o mesmo raio e do ponto G (fig. 52) tracemos a curva MX, meçamos com o compasso a distancia EF e

(\*) Para medir e reproduzir um angulo, alguns operarios servem-se de um utensilio chamado falso esquadro ou suta (fig. 53).

apliquemol-a em MX: acharemos o ponto N que, ligado ao ponto G, resolverá o problema.

**Problema 2.** — Traçar a bissectriz de um angulo ou dividil-o em duas partes eguaes.

Do ponto A, com um raio qualquer, descrevamos o arco MN. Dos pontos M e N, como centros (fig. 54), e com um

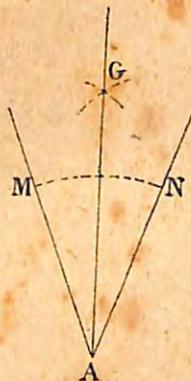


Fig. 54.

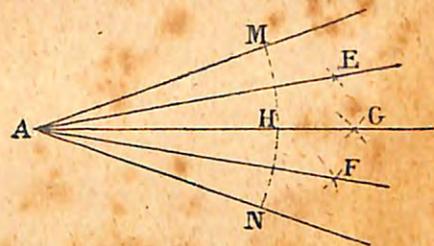


Fig. 55.

mesmo raio, descrevamos os arcos que determinam o ponto G o qual, ligado ao **vertex** do **angulo**, isto é, ao ponto A, nos dará a **bissectriz** pedida.

**Problema 3.** — Dividir um angulo em quatro, oito, dezeseis, trinta e duas partes iguaes.

Para resolver este problema, tire-se a **bissectriz** do **angulo** (fig. 55), depois dividamos cada metade do **angulo** em duas partes eguaes e prosigamos n'esta operação até encontrar a divisão desejada.

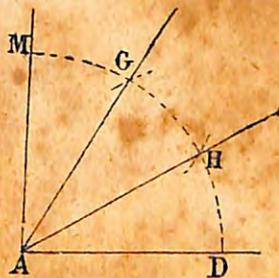


Fig. 56.

**Problema 4.** — Dividir um angulo recto em tres partes eguaes.

Do **vertex** A (fig. 56) como centro, e com um raio qual-

quer, descrevamos o arco MD; dos pontos M e D, como centros, e com o mesmo raio, marquemos os pontos H e G, os quaes unidos ao *vertice* A, resolverão o problema.

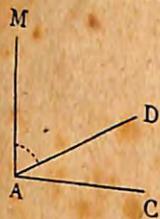


Fig. 57.

**Problema 5.** — Dado um angulo agudo, achar o seu complemento.

Seja DAC o **angulo agudo** (fig. 57). Levantemos com o esquadro e a regua, pelo *vertice*, uma linha perpendicular AM. O **angulo** MAD é o *complemento* do **angulo** DAC.

**Problema 6.** — Dado um angulo obtuso, achar o seu suplemento.

Seja MDA o **angulo obtuso**, (fig. 58). Prolonguemos o lado DA para a esquerda e acharemos o **angulo** MDN *suplemento* de MDA.

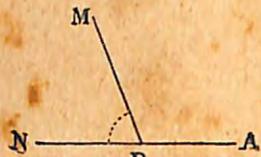


Fig. 58.

**Problema 7.** — Dividir um angulo em duas partes eguaes sem auxilio do compasso. Seja V o angulo (fig. 59).

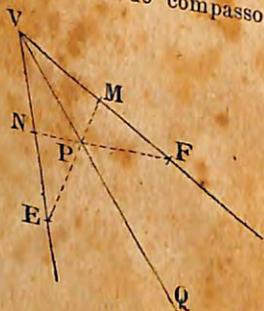


Fig. 59.

Marquemos com uma tira de papel, sobre um lado, as distancias VM e MF e reproduzamos-as no outro lado do angulo em VN e NE. Tracemos as rectas ME e NF. A recta VPQ divide o angulo V em duas partes eguaes.

**Problema 8.** — Construir um angulo igual á somma de dois angulos dados. Sejam M e N os dois angulos dados (fig. 60).

Sobre uma recta marquemos um ponto A (fig. 61) e com um raio arbitrario tracemos os arcos EF, GH e BV.

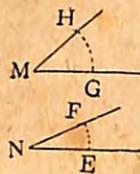


Fig. 60.

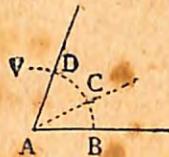


Fig. 61.

Reproduzamos em BC o arco EF e em CD o arco GH. O angulo DAB resolve o problema.

**Problema 9.** — Construir um angulo igual á differença de dois angulos dados.

Sejam A e B os dois angulos dados (fig. 62). Sobre uma recta marquemos um ponto C (fig. 63) e com

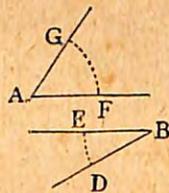


Fig. 62.

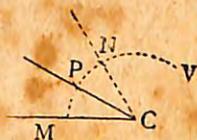


Fig. 63.

um raio arbitrario descrevamos os arcos DE, FG e MV. Reproduzamos em MN o arco FG e em NP o arco ED. O angulo PCM resolve o problema.

EXERCICIOS :

1. — Flóra! traça um angulo.
2. — Como se chama o ponto de encontro d'estas duas linhas? — e que nome recebem estas linhas?
3. — Como designamos um angulo?

4. — Como se dividem os angulos ?
5. — Traça um angulo recto; — um angulo agudo; — um angulo obtuso.
6. — Qual dos tres o maior? — o menor?
7. — Mostra um angulo recto; — um angulo agudo; — um angulo obtuso.
8. — Que é uma bissectriz?
9. — Como se classificam os angulos segundo as linhas que os formam?
10. — Que é um angulo rectilineo; um angulo curvilineo? — um angulo mixtilineo?
11. — Traça um angulo rectilineo; um curvilineo; um mixtilineo.
12. — Como se dividem os angulos curvilineos?
13. — Traça os angulos curvilineos que conheces.
14. — Como se dividem os angulos mixtilineos? — traça-os.
15. — Que é um angulo complementar?
16. — Que é um angulo suplementar?
17. — Que são angulos adjacentes?
18. — De que depende a grandeza de um angulo?
19. — A que é igual a somma dos angulos formados ao redor de um ponto?
20. — A que é igual a somma dos angulos formados do mesmo lado de uma recta e ao redor de um ponto situado na mesma recta?
21. — Traça a bissectriz de um angulo recto; — de um angulo obtuso; — de um angulo agudo.
22. — Divide um angulo agudo em quatro partes eguaes.
23. — Divide um angulo recto em tres partes eguaes.
24. — Divide um angulo obtuso em oito partes eguaes.
25. — Como se chama o utensilio de que se servem alguns operarios para medir e reproduzir um angulo?
26. — Traça a bissectriz de um angulo sem auxilio de compasso.
27. — Si um de dous angulos adjacentes é recto, que é o outro?
28. — Si um de dous angulos adjacentes é agudo, que é o outro?
29. — Si um de dous angulos adjacentes é obtuso, que é o

30. — Dobra uma folha de papel de sorte que tenhas: 1.º um angulo recto; 2.º um angulo obtuso; 3.º um angulo agudo.
31. — Faze com o compasso e a regua um angulo duplo de outro.
32. — Os cantos d'este bilhete postal são agudos? — que são? — porque?
33. — Traça dois angulos rectilineos quaesquer. Qual maior? — porque?
34. — Que angulo formam os ponteiros de um relógio, quando são tres horas? — e tres e cinco minutos?
35. — Que angulo formam os ponteiros de um relógio quando são nove horas e meia?
36. — Traça um angulo agudo. O complemento d'esse angulo é agudo? — porque?
37. — Traça um outro angulo agudo. O suplemento é agudo? — que é? — porque?
38. — Um angulo verticalmente opposto a um agudo, que é? — porque?
39. — Traça um angulo qualquer. Agora o angulo opposto pelo vertice.
40. — Si dois angulos verticalmente oppostos são agudos, que são os outros dois? — si são rectos, que são os outros dois?
41. — Traça dois angulos quaesquer; traça um terceiro igual á somma dos dois.
42. — Traça agora um angulo igual á differença dos dois.

CAPITULO III

SUMMARIO : Perpendiculares e obliquas. — Problemas.

Si uma recta encontra uma outra e fórma com esta um angulo recto : estas rectas são **perpendiculares** entre si; e si fórma um angulo agudo ou obtuso : são **obliquas**.

Synopse

Uma linha recta encontra outra e fórma	} angulo recto : é perpendicular.	} angulo . . .	} agudo	} ou	} obtuso	} é obliqua.

De um ponto fóra de uma linha recta, podemos abaixar (\*) uma **perpendicular** sobre esta recta, e só podemos abaixar uma.

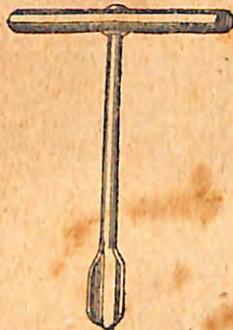


Fig. 64. — Um trado : duas linhas perpendiculares entre si.

O esquadro em fórma de **T** usado pelos desenhistas nos mostra duas linhas **perpendiculares** entre si, um trado (fig. 64).

Si de um ponto situado fóra de uma recta abaixarmos uma **perpendicular** e diversas **obliquas** sobre essa recta, a **perpendicular** será menor que qualquer **obliqua**; as **obliquas** que se afastarem egualmente do pé da **perpendicular** são eguaes, e a que se afastar mais do pé da **perpendicular** será a maior.

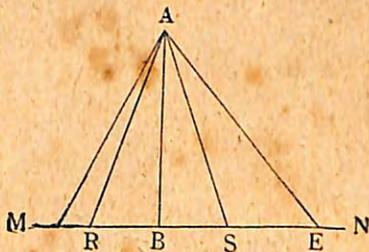


Fig. — 65.

(\*) Abaixar, significa : começar a perpendicular de um ponto situado fóra de uma recta, quer esteja este ponto á direita ou á esquerda de uma linha vertical, acima ou abaixo de uma linha horizontal.

D'essa verdade resulta que a menor distancia do ponto A á recta MN (fig. 65) é a **perpendicular** AB; as distancias AR e AS são eguaes, e a distancia AE é a maior.

**Problema 10.** — De um ponto situado fóra de uma recta, abaixar uma perpendicular á mesma recta.

1.<sup>a</sup> Solução (com a regua e o esquadro):

Façamos coincidir uma aresta da regua com a recta AB (fig. 66), e escorreguemos o lado menor do esquadro pela

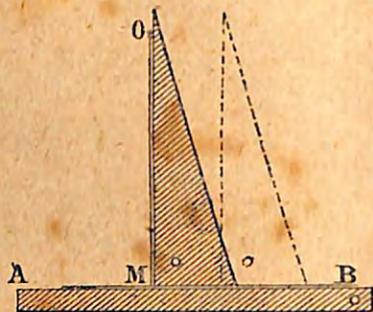


Fig. 66.

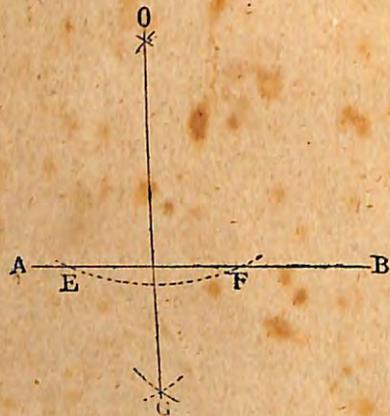


Fig. 67.

côrte essa recta em dois pontos E e F, dos quaes, como

regua até o lado maior encontrar o ponto O. Trace-mos a recta OM e teremos resolvido o problema.

2.<sup>a</sup> Solução (com a regua e o compasso):

Façamos centro no ponto O e com um raio maior que a distancia em linha recta d'este ponto á recta AB (fig. 67) descrevamos um arco que

centros e com um raio maior do que a metade de EF, determinemos o ponto G, o qual ligado ao ponto O nos dá a **perpendicular** pedida.

**Problema 11.** — Por um ponto tomado sobre uma recta, levantar uma perpendicular a esta recta.

1.<sup>a</sup> Solução (com a regua e o compasso):

A partir do ponto O (fig. 68) marquemos duas distancias eguaes OD e OG.

Dos pontos D e G, como centros, e com

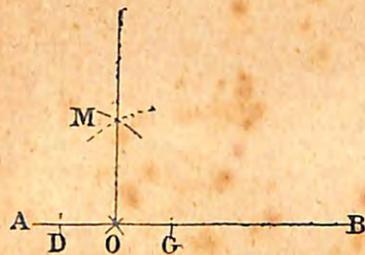


Fig. 68.

um raio maior que OD ou OG, descrevamos dois arcos que determinem o ponto M. A recta OM resolve o problema.

2.<sup>a</sup> Solução (com a regua e o esquadro):

Façamos coincidir uma aresta da regua com a recta AB (fig. 69), applicuemos o vertice do angulo recto do esquadro no ponto O, o lado menor do mesmo esquadro contra a regua, e levantemos a recta OM, que resolve o problema.

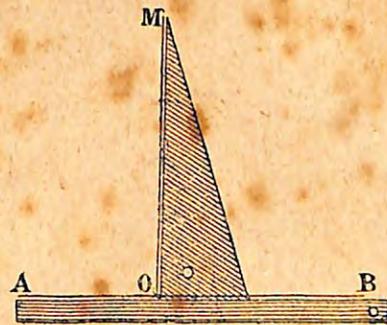


Fig. 69.

**Problema 12.** — Levantar uma perpendicular pela extremidade de uma recta cujo prolongamento não podemos traçar.

1.<sup>a</sup> Solução. — Tiremos, pelo ponto B (fig. 70), uma obliqua BX ; num ponto qualquer C d'esta obliqua façamos centro e tracemos uma circumferencia que passe pelo extremo B e corte a recta AB em um ponto E.

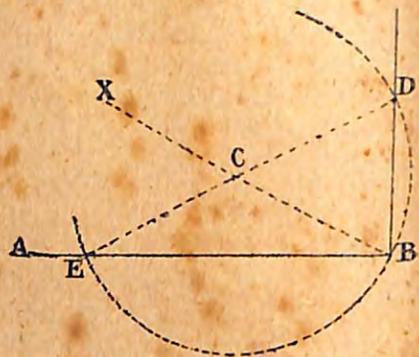


Fig. 70.

Unamos o ponto E ao ponto C por uma recta que, prolongada, determine o ponto D. A recta BD é a perpendicular pedida.

2.<sup>a</sup> Solução. — Seja AV a recta dada (fig. 71). Da extremidade V e com um raio qualquer VM descrevamos o arco MX.

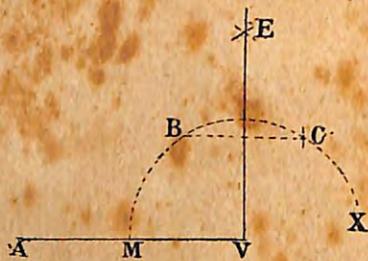


Fig. 71.

A partir do ponto M, com o mesmo raio VM determinemos o ponto B e, a partir d'este ultimo, o ponto C.

Unamos o ponto B ao ponto C e façamos passar pelo meio da recta BC uma perpendicular. A recta VE é a perpendicular pedida.

3.<sup>a</sup> Solução. — Seja M a extremidade de uma recta

Appliquemos de M até N tres medidas eguaes a uma unidade qualquer ( $3 \times 1$  centimetro, por exemplo). Faça-

mos centro em M e com um raio equal a quatro vezes a mesma unidade ( $4 \times 1$  centimetro) descrevamos um arco, e do ponto N, como centro, e com um raio equal a cinco vezes a mesma unidade ( $5 \times 1$  centimetro), determinemos o ponto P.

PM é a perpendicular pedida.

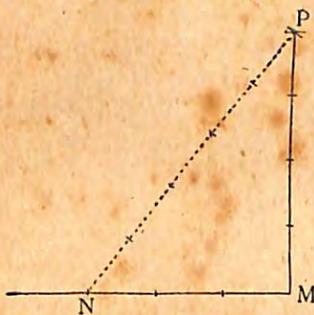


Fig. 72.

**Problema 13.** — Dividir uma recta em duas partes eguaes ou fazer passar uma perpendicular pelo meio de uma recta.

Façamos centro em A e B (fig. 73), e com um raio maior que a metade da recta AB determinemos os pontos C e D pelos quaes passa a recta CD, isto é, a perpendicular que divide a recta AB em duas partes eguaes.

Para dividir uma recta em quatro, oito, dezeseis, trinta e duas partes eguaes, bastará dividirmos cada metade, quarta parte, oitava parte, successivamente ao meio.

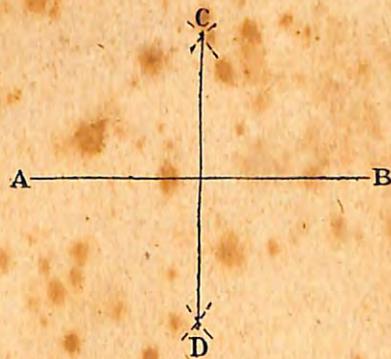


Fig. 73.

**Problema 14.** — Traçar uma perpendicular a uma recta, por um ponto dado fóra d'essa recta e a pouca distancia de uma das extremidades

1.<sup>a</sup> Solução. — Seja A o ponto dado a pouca distancia da extremidade C (fig. 74) da recta CB.

Com um raio CA e com o centro em C descrevamos um arco; e com um raio igual a BA e centro em B tracemos

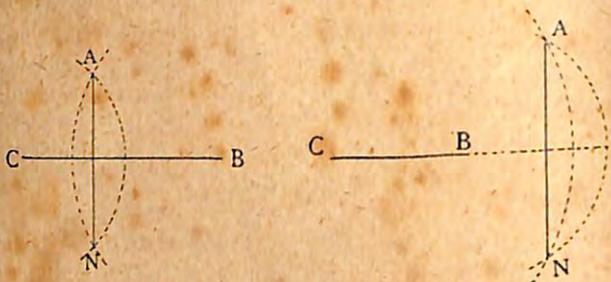


Fig. 74.

Fig. 75.

outro arco que determine o ponto N. Tracemos AN, que é a perpendicular pedida.

2.<sup>a</sup> Solução. — (A perpendicular cairá no prolongamento da recta). Centro em C e com o raio CA, (fig. 75), tracemos um arco, centro em B e com o raio BA descrevamos outro arco que determine o ponto N.

AN é a perpendicular pedida.

2.<sup>o</sup> processo da 1.<sup>a</sup> Solução.

— Tomemos sobre a recta MN (fig. 76) um ponto qualquer B e unamol-o ao ponto A.

Dividamos BA ao meio e fazendo centro em C (meio de BA), com um raio CA, descrevamos o arco APB que corta MN no ponto P.

A recta AP é a perpendicular pedida.

**Problema 15.** — Em uma recta dada. achar um ponto que seja equidistante de dois outros situados fóra d'essa recta.

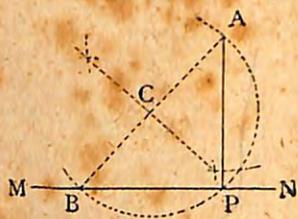


Fig. 76.

Sejam M e N os pontos situados fóra da recta AB (figs. 77 e 78).

Tracemos a recta MN e façamos passar pelo meio uma

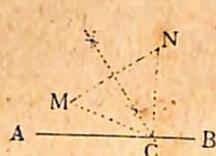


Fig. 77.

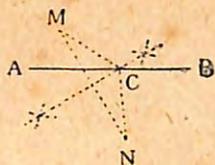


Fig. 78.

perpendicular que, prolongada, determinará na recta AB o ponto C pedido, porquanto  $MC = NC$ .

**Problema 16.** — Os proprietários de duas casas que se acham situadas, cada uma a certa distancia das margens de um rio, querem fazer uma ponte que fique equidistante das duas moradas: pede-se o lugar em que deverá ser construída a referida ponte.

P e R são as duas casas (fig. 79).

Tracemos a recta PR e dividamol-a ao meio por uma

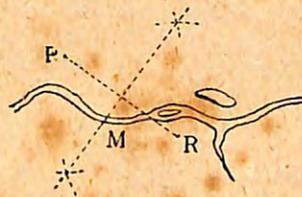


Fig. 79.

perpendicular que determinará o ponto M equidistante de P e de R.

No ponto M é que deverão construir a ponte desejada.

**Problema 17.** — Traçar, de dois pontos dados, linhas rectas que se encontrem em uma outra recta, formando com esta ultima angulos eguaes.

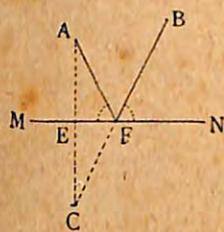


Fig. 80.

Sejam A e B os dois pontos e MN a recta dada, (fig. 80).

Abaixemos do ponto A uma perpendicular á recta MN e façamos  $EC = AE$ .

Liguemos C a B e A a F.

AF e BF formam com MN angulos eguaes.

### EXERCICIOS :

1. — Olavo! Quando uma recta encontra uma outra, quaes são as posições que póde occupar em relação a essa outra?
2. — Mostra uma perpendicular; — uma obliqua.
3. — Uma perpendicular está sempre em posição vertical?
4. — Traça uma perpendicular em posição inclinada.
5. — Que é um esquadro? — para que serve? — e a regua?
6. — Traça uma perpendicular com a regua e o esquadro.
7. — Uma obliqua, que angulo fórma na extremidade de uma recta horizontal?
8. — Exemplos.
9. — E no meio de uma recta vertical?
10. — Exemplos.
11. — Que quer dizer abaixar uma perpendicular?
12. — Faze passar pelo meio de uma recta de  $40^m$  de comprimento uma perpendicular.
13. — Procura um ponto igualmente distante das extremidades de uma recta de 36 millimetros de comprimento.
14. — Por um ponto dado em uma recta e a 20 millimetros de distancia de uma de suas extremidades, levanta uma perpendicular a essa recta.
15. — Levanta uma perpendicular por uma das extremidades de uma recta cujo prolongamento não possas traçar.
16. — Marca sobre uma recta um ponto que seja o mais proximo de um outro ponto dado fóra d'essa recta.

17. — Cita alguns nomes de cousas que tenham rectas perpendiculares.

18. — Cita alguns nomes de cousas que tenham rectas obliquas.

19. — Traça uma recta e dois pontos quaesquer, fóra d'essa recta. Determina agora nessa recta o ponto equidistante dos dois primeiros.

20. — Um poste telephonico que é relativamente ao sólo?

21. — Traça uma recta, marca um ponto fóra, e d'esse ponto tira uma perpendicular á essa recta e diversas obliquas. Qual a distancia menor do ponto á recta? — qual a maior?

22. — Cita os objectos em que vês as rectas verticaes nas tres posições.

23. — Mostra-me a tua regua em posição vertical, horizontal inclinada.

## CAPITULO IV

SUMMARIO . Parallelas. — Linhas convergentes.  
— Linhas divergentes. — Problemas.

Duas ou mais linhas situadas em uma mesma superfície plana, seguindo igual direção e conservando entre si, duas a duas, a mesma distancia, to-

### PARALLELAS.

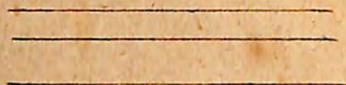


Fig. 81.

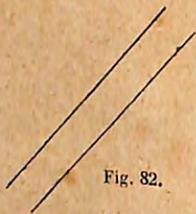


Fig. 82.



Fig. 83.

mam o nome de **parallelas** (figs. 81, 82, 83, 84, 86, 87)

Os trilhos por onde correm as locomotivas ou os bonds nunca se encontram, por serem linhas **parallelas**. As ruas do Ouvidor e do Rosario são **parallelas** entre si.

Na fig. 85 os degraus da escada são parallellos entre si e os banzos o são tambem entre si; o poste é perpendicular ao sólo, a escada está obliqua ao sólo e os degraus são perpendiculares aos banzos.



Fig. 84.

Tracemos duas perpendiculares a uma mesma recta; estas perpendiculares conservam a mesma distancia entre si e, por mais que se prolonguem, nunca se encontram : são **parallelas**, o que nos mostra que duas perpendiculares a uma mesma recta são **parallelas** entre si (fig. 88).



Fig. 85.

Duas linhas **parallelas** são equidistantes em todo o comprimento.

Duas **parallelas** cortadas por uma **obliqua**, formam com esta obliqua oito angulos,

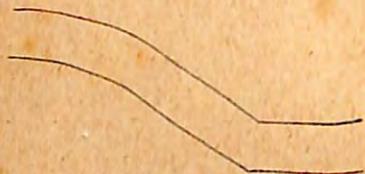


Fig. 86.

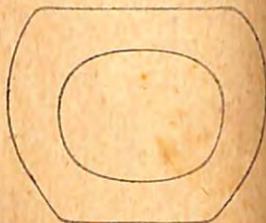


Fig. 87.

sendo quatro agudos eguaes e quatro obtusos tambem eguaes (fig. 89).

Os angulos **m, b, c, n** (fig. 89), chamam-se **internos** porque têm a abertura para dentro da figura, e os angulos

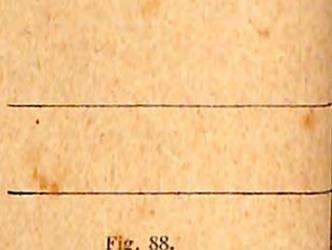


Fig. 88.

**a, e, r, d** **externos** porque têm a abertura para fóra da figura.

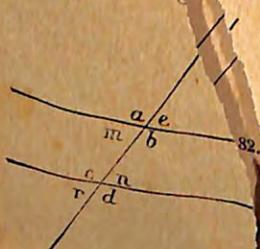


Fig. 89.

Estes angulos comparados dous a dous são classificados do seguinte modo :

Os angulos **m e n, c e b** são **alternos-internos**; **a e d, e e r** **alternos-externos**; **e e n, b e d, a e c, m e r** **correspondentes**; **b e n** ou **m e c** **internos de um lado** da obliqua; **a e r** **externos de um lado**; **e e d** **externos do outro lado**.

*Duas rectas parallelas cortadas por uma obliqua formam angulos :*

- alternos-internos eguaes.*
- alternos-externos eguaes.*
- correspondentes eguaes.*
- internos de um mesmo lado supplementares.*
- externos de um mesmo lado supplementares.*

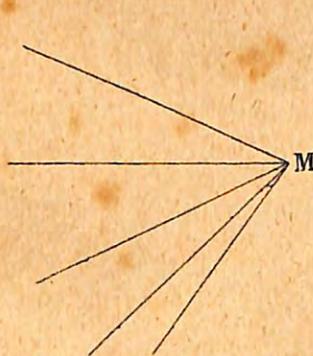


Fig. 90.

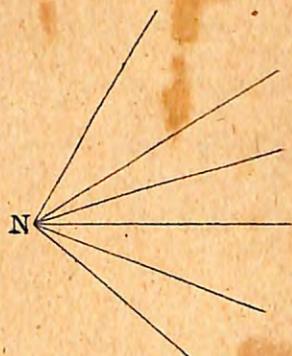


Fig. 91.

Duas ou mais linhas rectas que, não tendo ponto algum de commum e prolongadas, se encontram : são **convergentes** (fig. 90).

O ponto de encontro *M* chama-se *ponto de convergencia* (fig. 90).

Duas ou mais linhas rectas que, partindo de um mesmo *ponto*, tomam diversas direcções, chamam-se *divergentes* (fig. 91).

O ponto *N* d'onde partem as linhas, chama-se *ponto de divergencia* (fig. 91).

O *vertice* de um angulo é um *ponto de divergencia*.

**Problema 18.** — Traçar uma paralela a uma recta dada, por um ponto dado.

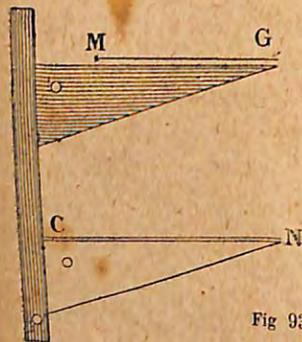


Fig. 92.

*1.ª Solução* (com o compasso e a regua):

Do ponto dado *M* (fig. 92) descrevamos um arco de circumferencia *NG*; do ponto *N*, e com o mesmo raio *MN*, descrevamos o arco *MC*; tomemos *NG* igual a *MC*, unamos o ponto *M* ao ponto *G*.

A recta *MG* é a *paralela* pedida.

*2.ª Solução* (com a regua e o esquadro):  
Appliquemos um dos lados do angulo recto do esquadro

sobre a recta *CN* (fig. 93); façamos escorregar o esquadro pela regua até o ponto *M* pelo qual tracemos a recta *MG* paralela a *CN*.

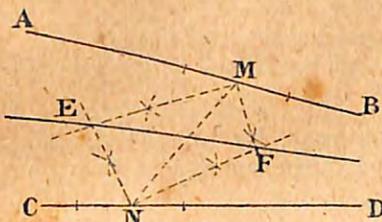


Fig. 94.

**Problema 19.** —

Dadas duas rectas convergentes, traçar a bissectriz sem recorrer ao ponto de convergencia.

*1.ª Solução.* — Sejam *AB* e *CD* (fig. 94) as rectas convergentes. Tracemos uma secante

*MN* e depois a bissectriz de cada um dos angulos *AMN*; *CNM*; *BMN*; *DNM*. Unamos o ponto *E* ao ponto *F* e teremos a *bissectriz* pedida.

*2.ª Solução.* — Sejam *BA* e *DC* as rectas convergentes (fig. 95). Do ponto *B* levantemos uma perpendicular á recta *BA* e do ponto *D* uma perpendicular á recta *DC*. Sobre cada uma d'estas perpendiculares marquemos a partir dos pontos *B* e *D* duas distancias eguaes *BN* e *DM*. Pelo ponto *N* tracemos uma paralela a *BA* e pelo ponto *M* uma outra a *DC*. Dividamos o angulo

Fig. 95.

*MPN* em duas partes eguaes, e a recta *PQ* é a *bissectriz* pedida.

*3.ª Solução.* — *AB* e *CD* são as rectas convergentes (fig. 96). Tomemos sobre a recta *AB* um

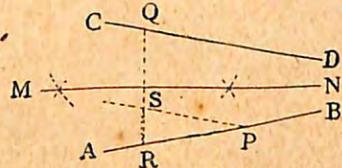


Fig. 96.

ponto P qualquer e d'ahi tracemos uma parallela a C D.

Do ponto P, como centro e com um raio arbitrario, determinemos R e S.

Unamos R a S e prolonguemos essa recta até Q.

A perpendicular MN, pelo meio de Q R, é a bissectriz pedida.

**Problema 20.** — De um ponto dado fóra de uma recta traçar uma outra recta que forme com a primeira um angulo igual a um outro angulo dado.

Seja A B a recta, M o ponto e N o angulo (fig. 97). Tra-

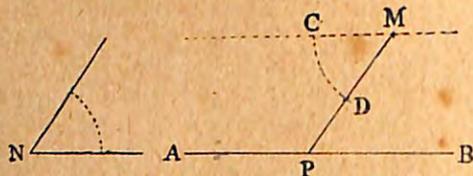


Fig. 97.

çamos do ponto M uma recta parallela a A B e formemos pelo mesmo ponto um angulo C M D igual ao angulo N. A recta M P fórma com A B o angulo M P B = C M D e portanto ao angulo N.

**Problema 21.** — De um ponto dado fóra do espaço comprehendido por duas parallelas, traçar uma recta cujo segmento (\*) entre as mesmas parallelas seja igual a uma distancia dada.

Seja R o ponto dado, A B e C D as parallelas, e M N a distancia dada (fig. 98).

Tomemos sobre A B um ponto qualquer S e, com o centro nesse ponto e raio igual a M N, cortemos a recta C D em T. Do ponto R tiremos a recta R F parallela a S T e cujo segmento E F = M N.

(\*) SEGMENTO de uma recta, isto é, secção, porção, parte da recta.

**Problema 22.** — Por um ponto dado entre duas rectas convergentes, fazer passar uma terceira recta cujas extre-

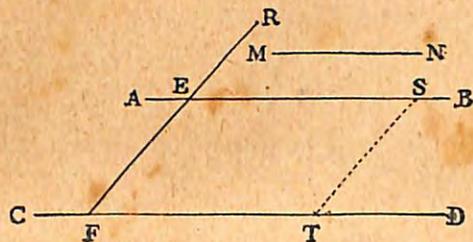


Fig. 98.

midades fiquem situadas nas duas primeiras e de modo que o ponto dado fique no meio d'essa recta.

Seja M o ponto situado entre as rectas E F e G H (fig. 99). Abaixemos do ponto M sobre a recta G H a perpendicular M C e, no seu prolongamento na direcção de C para M, reproduzamos a distancia M C em M D.

Do ponto D tracemos uma parallela a G H e do ponto A

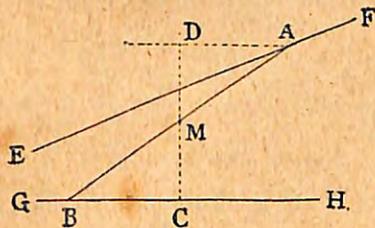


Fig. 99.

(intersecção d'essa parallela com a recta E F) tracemos recta A B cujas extremidades estão sobre as rectas convergentes e cujo meio é o ponto M.

**Problema 23.** — De um ponto dado fóra do angulo formado por duas rectas convergentes, traçar uma terceira recta que forme, com essas duas primeiras, angulos eguaes.

Seja M o ponto dado, A B e C D as rectas convergentes (fig. 100).

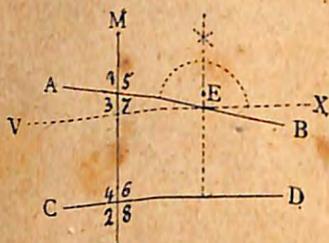


Fig. 100.

Essa ultima recta fórma, com A B e C D, angulos eguaes :  $1 = 7 = 2 = 6$ ;  $3 = 5 = 4 = 8$ .

### EXERCICIOS :

1. — Raul! mostra duas linhas parallelas.
2. — Traça duas linhas parallelas.
3. — Que são rectas parallelas?
4. — Duas perpendiculares a uma mesma recta, que são, uma em relação á outra?
5. — Quantos angulos fórman duas parallelas cortadas por uma obliqua? — Como se chamam?
6. — Quando duas rectas seguem direcções diversas, que nome recebem?
7. — Quando duas ou mais linhas rectas são convergentes? — quando são divergentes?
8. — Traça tres rectas convergentes; — e quatro divergentes.
9. — Mostra o ponto de convergencia; — e o ponto de divergencia.
10. — Traça uma recta parallela a uma outra por um ponto a uma recta dada.
11. — Traça com a regua e o esquadro diversas parallelas a uma recta dada, de modo que a menor distancia de uma á outra seja de 40 millimetros.

13. — Traça duas curvas parallelas, á mão livre.
14. — Traça, á mão livre, duas linhas mixtas parallelas.
15. — Traça dous angulos rectos, um com os lados parallelos aos lados do outro.
16. — Podem duas superficies ser parallelas?
17. — Podem, uma superficie curva e uma superficie plana, ser parallelas?
18. — Uma linha recta e outra curva podem ser parallelas?

## CAPITULO V

SUMMARIO : Triangulos rectilineos. — Casos de igualdade de triangulos. — Problemas.

Uma superficie plana limitada por tres linhas chama-se **triangulo**.  
**TRIANGULOS.** **latero** ou **triangulo**.

Um **triangulo** ou **trilatero** pode ser *rectilineo*, *curvilineo* ou *mixtilineo*.

Um **triangulo** tem tres *angulos*, tres *lados* e tres *vertices*.

A tripeça (fig. 101) tem a fórma triangular; em musica ha um instrumento chamado triangulo, cuja fórma é triangular.

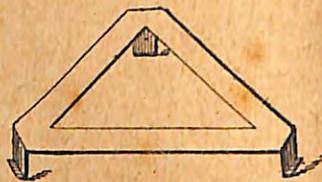


Fig. 101. — Uma tripeça : fórma triangular.

Os *angulos* de um **triangulo** designam-se por tres letras collocadas em seus *vertices*; dizemos por exemplo, *angulo A*, *angulo B*,

*angulo C* (fig. 102), e um **triangulo** designa-se por tres letras collocadas nos vertices de seus *angulos*, assim por exemplo : **triangulo ABC** (fig. 102).

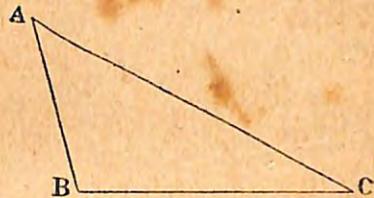


Fig. 102.

A somma dos *lados* de um **triangulo** chama-se *perimetro*.

A somma dos tres *angulos* é igual a dois *angulos rectos*.

Tracemos um **triangulo** qualquer (fig. 103) sobre cartão ou papel, recor-

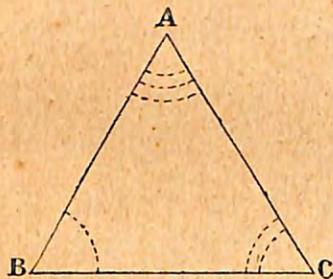


Fig. 103.

remos os *angulos* d'este **triangulo**, ajuntemos como nos mostra a (fig. 104). Os *angulos* ficam do mesmo lado da recta A B (fig. 104) e ao redor

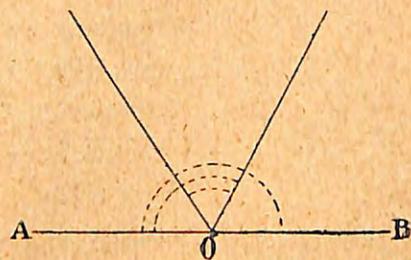


Fig. 104.

do ponto O : equivalem portanto a dois angulos rectos.

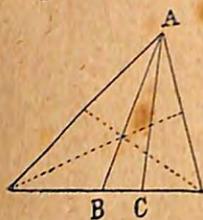


Fig. 105. — A recta AB é uma mediana e AC é uma altura.

Qualquer lado de um **triangulo** póde servir-lhe de *base*. A perpendicular abaixada de um dos *vertices* sobre a *base* ou sobre o prolongamento d'esta chama-se *altura* do **triangulo** (fig. 105).

A recta que une um dos *vertices* do **triangulo** ao meio do lado opposto chama-se *mediana* (fig. 105).



Fig. 106. — Triangulo escaleno.

Todo o **triangulo** tem tres *alturas*, tres *bissectrizes* e tres *medianas*.

Os triangulos em relação á grandeza de seus lados são :

**Escalenos**, si os lados são deseguaes (fig. 106).

**Isosceles** ou **Symetricos**, si dois de seus lados são eguaes (fig. 107).

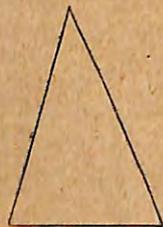


Fig. 107. — Triangulo isosceles.

**Equilateros**, si os lados são eguaes (fig. 108).

Em relação á grandeza de seus angulos são :

**Acutangulos**, si todos os

angulos são agudos (fig. 109);

**Obtusangulos**, si têm um angulo obtuso (fig. 110);

**Rectangulos**, si têm um angulo recto (fig. 111);

**Equiangulos** ou **isogonos**, si todos os angulos são eguaes (fig. 112).

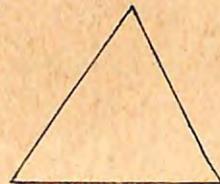


Fig. 108. — Triangulo equilatero.

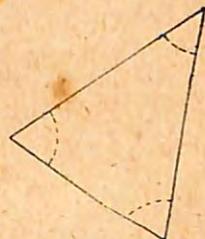


Fig. 109. — Triangulo acutangulo.



Fig. 110. — Triangulo obtusangulo.

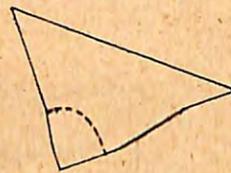


Fig. 111. — Triangulo rectangulo.

Todo o **triangulo equilatero** é **equiangulo**.

No **triangulo rectangulo** o lado opposto ao angulo recto chama-se *hypotenusa* e os lados d'esse angulo chamam-se *catetos*.

Uma circumferencia póde ser *inscrita* ou *circumscripta* a um **triangulo**.

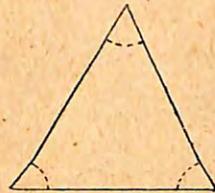


Fig. 112. — Triangulo equiangulo.

### Synopse

Os triangulos dividem-se :

1.º Em relação á grandeza de seus lados.

Triangulos. . . . .

}	<i>Escalenos</i> ou <i>irregulares</i>
	<i>Isosceles</i> ou <i>symetricos</i>
	<i>Equilateros</i>

2.º Em relação á grandeza de seus angulos.

Triangulos. . . . .

}	<i>Acutangulos</i>
	<i>Obtusangulos</i>
	<i>Rectangulos</i>
	<i>Equiangulos</i> ou <i>isogonos</i>

### Casos de igualdade de triangulos

Dois triangulos são eguaes quando têm

}	1.º Um angulo igual comprehendido entre dois lados respectivamente eguaes.
	2.º Um lado igual adjacente a dois angulos respectivamente eguaes.
	3.º Os tres lados respectivamente eguaes.

**Problema 24.** — Determinar o centro de um triangulo qualquer.

Seja ABD o triangulo (fig. 113).

Tiremos as bissectrizes dos angulos A e D.

Essas bissectrizes cortam-se em C que é o centro do triangulo, isto é, o ponto equidistante dos tres lados d'esse triangulo: si abaixarmos de C perpendiculares a AB, BD e AD, verificaremos que ellas são eguaes.

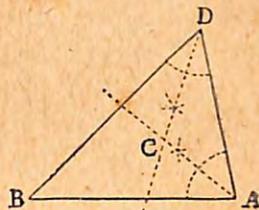


Fig. 113.

NOTA. — A bissectriz do angulo B tambem passa por C.

**Problema 25.** — Traçar a altura de um triangulo qualquer.

Seja MNP o triangulo (figs. 114 e 115).

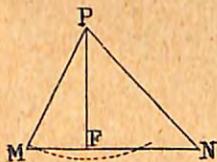


Fig. 114.

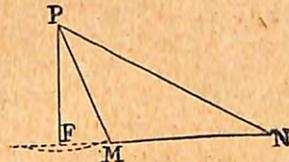


Fig. 115.

Abaixemos do ponto P uma perpendicular PF sobre a base MN (fig. 114) ou sobre o seu prolongamento (fig. 115); essa perpendicular é a altura do triangulo.

**Problema 26.** — Dado um lado, construir um triangulo equilatero. Seja AB (fig. 116) o lado dado.



Tracemos uma recta qualquer

Fig. 116.

MX sobre a qual tomemos MN (fig. 117) igual a AB. Façamos centro em M e N e com um raio igual a AB determinemos o ponto C, que, unido aos pontos M e N, resolverá o problema.

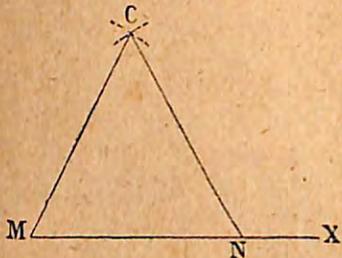


Fig. 117.

C tomado sobre ella (fig. 118) fazamos centro descrevendo com um raio qualquer o arco EF.

Centro em E e com o mesmo raio, determinemos o ponto G; tracemos de C uma recta que passe por G e depois a bissectriz do angulo GCE.

Apliquemos em CM a medida da altura dada e pelo ponto M fazamos passar uma perpendicular a CM.

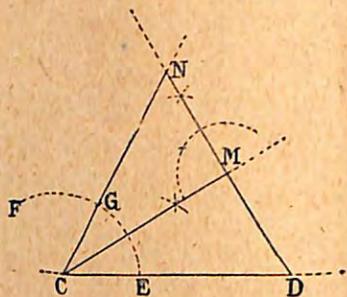


Fig. 118.

O triangulo CDN resolve o problema.

Outro processo. — Seja MN (fig. 119) a altura.

Pelo ponto N fazamos passar uma perpendicular e do ponto M, como centro, e com um raio qualquer descrevamos um arco. Do ponto A e com o mesmo raio, determinemos os pontos B e C. De A

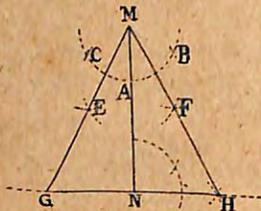


Fig. 119.

e C marquemos E e de A e B, F. Do vertice M tiremos duas rectas, uma que passe por E e outra por F.

GHM é o triangulo pedido.

**Problema 28.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e a altura.

Seja B a base e A a altura (fig. 120).

Sobre uma recta apliquemos MN (fig. 121) igual á base e fazamos passar pelo meio de MN uma perpendicular de cujo pé C, reproduzamos em CD a medida da altura.

Unamos os pontos M e N ao ponto D e teremos resolvido o problema.

**Problema 29.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e um lado adjacente.

Sobre uma recta marquemos AB (fig. 122) igual á base conhecida.

Dos pontos A e B, como centros, e com um raio igual ao lado adjacente, determinemos o ponto C.

Unamos C a A e B e obtemos o triangulo pedido ABC.

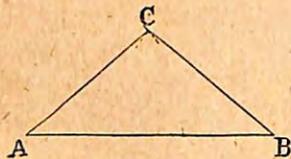


Fig. 122.

**Problema 30.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e um angulo adjacente a esta base.

Seja M a base e E o angulo adjacente (fig. 123).

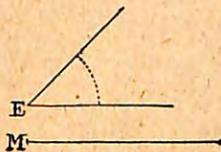


Fig. 123.

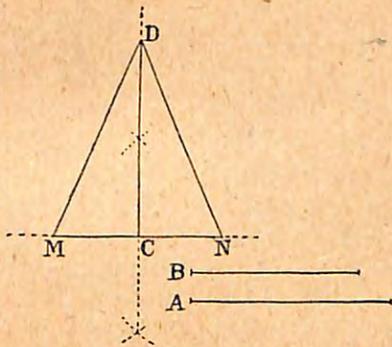


Fig. 121.

Fig. 120.

Tracemos uma recta e a partir de uma extremidade, reproduzamos em AB (fig. 124) a medida M.

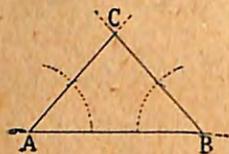


Fig. 124.

Façamos em cada um dos pontos A e B um angulo igual ao angulo E.

Os lados d'esses angulos encontram-se em C e o triangulo ABC resolve o problema.

**Problema 31.** — Construir um triangulo isosceles, conhecendo-se a base e o angulo do vertice, isto é, o angulo opposto á mesma base.

Seja N a base e V o angulo do vertice (fig. 125).

Tracemos uma recta e, a partir de uma extremidade, reproduzamos em AB (fig. 126) a medida N. Façamos passar pelo meio de AB uma perpendicular e por um ponto arbitrario P tomado n'essa perpendicular, tracemos um angulo igual ao angulo dado V, de sorte que a bissectriz se confunda com a perpendicular.

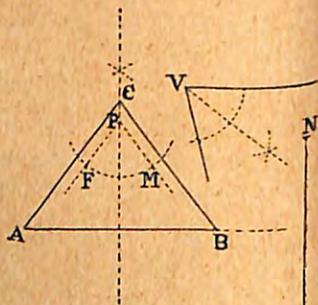


Fig. 125.

Fig. 126.

Do ponto A tracemos uma parallela ao lado PF d'esse angulo e do ponto B, outra parallela ao lado PM do mesmo angulo : essas duas rectas determinam o ponto C e formam o triangulo

Outro processo. — Sobre uma recta applicamos a medida AB igual a N (fig. 127) e no seu prolongamento fazemos um angulo igual a V, (fig. 127) coincidindo o vertice

Tracemos a bissectriz BM do angulo ABE e na extremidade A reproduzamos o angulo ABM.

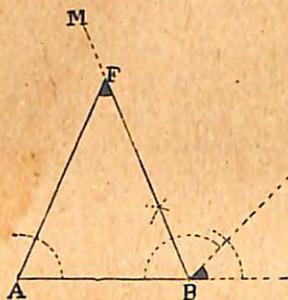


Fig. 127.

Fig. 128.

O lado AF determina o vertice F do triangulo pedido ABF.

**Problema 32.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e o raio do circulo inscripto.

Pelo meio de AB, base conhecida (fig. 129), fazemos passar uma perpendicular e applicamos MN igual ao raio do circulo inscripto. Com esse raio, e centro em N, descrevamos uma circumferencia de circulo.

De cada um dos pontos A e B, e com um mesmo raio AM, marquemos P e Q.

Do ponto A tiremos uma recta que passe por P e do ponto B, outra que passe por Q. O ponto C é o resultado do encontro d'estas duas rectas e ABC é o triangulo isosceles pedido.

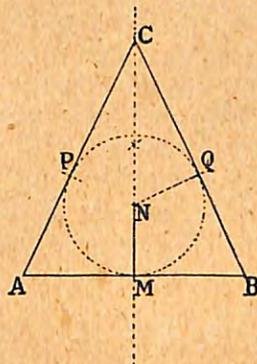


Fig. 129.

**Problema 33.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e o raio do circulo circumscripto.

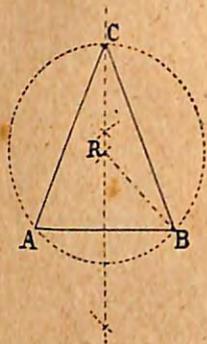


Fig. 130.

Pelo meio da base conhecida AB (fig. 130) façamos passar uma perpendicular.

Do ponto A ou B e com um raio igual ao do circulo circumscripto, determinemos o ponto R, do qual, como centro e com o mesmo raio RB, descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará o ponto C, vertice do triangulo pedido ABC.

**Problema 34.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e um dos angulos da base.

Seja V o angulo (fig. 131) e AB a altura (fig. 132).

Pelo ponto B tracemos uma perpendicular á recta AB. Com um raio qualquer MV descrevamos um arco que determine o ponto N; unamos M a N e tracemos a bissectriz do angulo M.

Façamos centro em A e com um mesmo raio MV descrevamos um arco.

Do ponto C, e com um raio igual a RV, determinemos os pontos E e F.

Tracemos as rectas AEP e AFQ, e resultará o triangulo isosceles PQA.

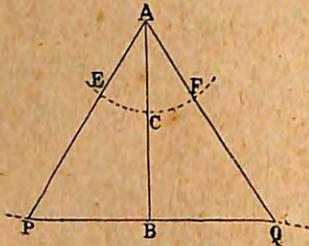


Fig. 132.

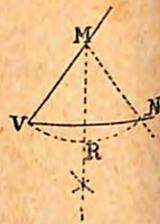


Fig. 131.

**Problema 35.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e o perimetro.

Tracemos pelo meio da recta MN, perimetro conhecido (fig. 133), uma perpendicular e applicuemos em CB a medida da altura dada; unamos M e N a B.

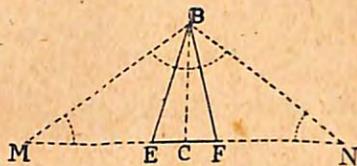


Fig. 133.

Façamos os angulos MBE e NBF eguaes, cada um, ao angulo M ou N.

EFB é o triangulo pedido.

**Problema 36.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e o angulo do vertice.

Tracemos a bissectriz do angulo dado A e sobre ella (fig. 134) applicuemos AN igual á altura conhecida. Façamos passar por N uma perpendicular a AN, a qual determinará nos lados do angulo os pontos B e C e resolverá o problema.

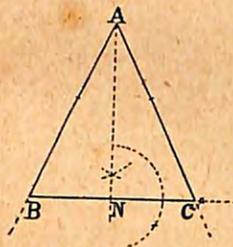


Fig. 134.

**Problema 37.** — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se um dos lados symmetricos e um dos angulos da base.

Seja A um dos angulos da base e BC um dos lados symmetricos (fig. 135).

Formemos em V um angulo igual ao angulo A e applicuemos em um de seus lados, a partir do vertice, a medida  $VD = BC$ .

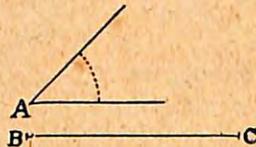


Fig. 135.

Com o centro em D e o raio igual a DV, descrevamos

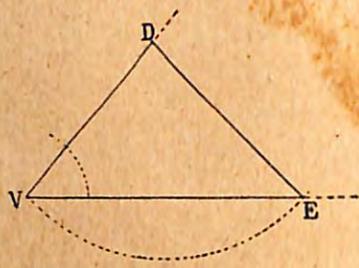


Fig. 136.

um arco que determine o ponto E, o qual, ligado ao ponto D, resolve o problema.

**Problema 38.** — Construir um triangulo conhecendo-se os tres lados. Sejam AB, CD, EF os lados (fig. 137). Sobre

Fig. 137.

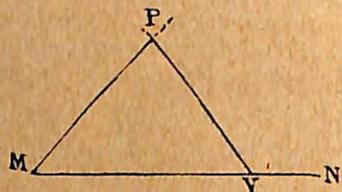
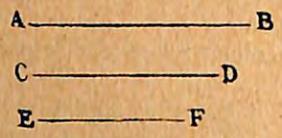


Fig. 138.

**Problema 39.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e o angulo por elles comprehendido.

B (fig. 139) é o angulo; EF e GH (fig. 140) são os lados conhecidos. Sobre uma recta indefi-

a recta MN (fig. 138) marquemos a partir da extremidade M, uma distancia  $MV = AB$ ; do ponto V com um raio igual a CD e do ponto M com um raio igual a EF, determinemos o ponto P. Unamos o ponto P aos pontos M e V, e teremos resolvido o problema.



Fig. 139.

nida, marquemos uma distancia AC (fig. 141), igual a EF.

No ponto A façamos um

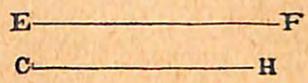


Fig. 140.

angulo MAC igual ao angulo B, sobre AM e a partir do ponto A marquemos a distancia AN igual a GH; unamos o ponto N ao ponto C e teremos

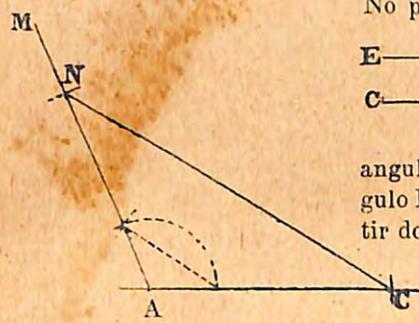


Fig. 141.

construido o triangulo pedido.

**Problema 40.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e o angulo opposto a um d'elles. Sejam Me N os lados e V o angulo dado (fig. 142).

Façamos um angulo A igual ao angulo V e applicuemos em AB (fig. 143) a medida do lado M.

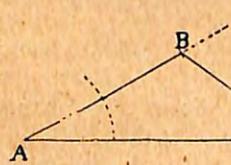


Fig. 143.

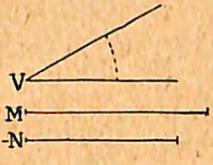


Fig. 142.

Com o centro em B e raio igual a N determinemos o ponto C. Unamos B a C e obteremos o triangulo pedido ACB.

**Problema 41.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e uma mediana.

1.º caso. — A mediana corresponde a um dos lados conhecidos.

Sejam A e R os lados e M a mediana (fig. 144).

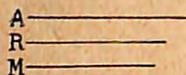


Fig. 144.

Tracemos  $CB = A$  e, do ponto B como centro (fig. 145), com um raio igual a R descrevamos um arco de circulo.

Do ponto N, meio de CB, e com o raio igual a M, determinemos o ponto D. Unamos este ponto a C e B e teremos o triangulo pedido CBD.

2.º caso. — A mediana corresponde ao lado desconhecido.

Tracemos uma recta CD (fig. 146) igual á mediana

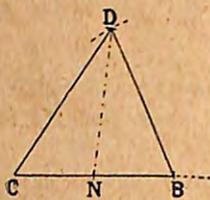


Fig. 145.

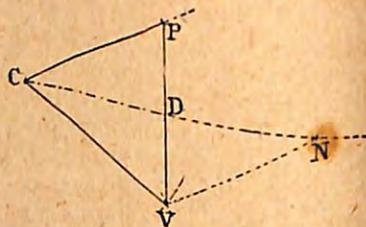


Fig. 146.

na M (fig. 144) e prolonguemol-a de uma quantidade  $DN = CD$ .

Façamos centro em C e com um raio igual a A (fig. 144) descrevamos um arco; de N, e com um raio igual a R (fig. 144) determinemos o ponto V, do qual tracemos as rectas VC e VN. Do ponto C tracemos uma recta paralela a VN e reproduzamos em CP a medida R. Unamos C a P. VPC é o triangulo pedido.

**Problema 42.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e uma altura.

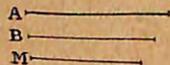


Fig. 147.

1.º caso. — A altura corresponde a um dos lados conhecidos. A e B são os dois lados e M a altura (fig. 147).

Em uma recta marquemos  $EF = A$  e por um ponto R (fig. 148) levantemos-lhe uma perpendicular sobre a qual applicuemol  $RS = M$ .

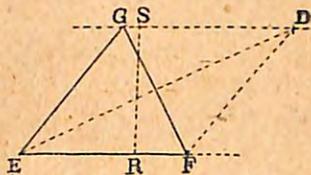


Fig. 148.

Façamos passar por S uma paralela a EF e com o centro em F e raio B determinemos G; d'este ponto, e com o raio EF, determinemos D na recta paralela.

Os triangulos EFG, GDF, EFD ou GDE resolvem o problema.

2.º caso. — A altura corresponde ao lado desconhecido. A e B são os dois lados e M a altura (fig. 147). Marquemos sobre uma recta a medida  $RV = A$  (fig. 149) e do ponto R, com um raio igual a M descrevamos um arco de circulo.

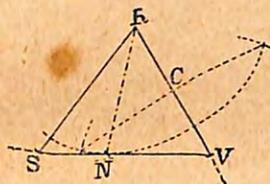


Fig. 149.

Dividamos RV ao meio e do ponto C, com um raio CV ou CR determinemos o ponto N no arco de circulo. Tiremos por VN uma recta.

Centro em R e com um raio igual a B marquemos o ponto S, o qual unido a R resolve o problema. RN é a altura.

**Problema 43.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, a base e a altura.

Seja L o lado, B a base, e A a altura (fig. 150).

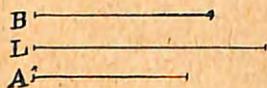


Fig. 150.

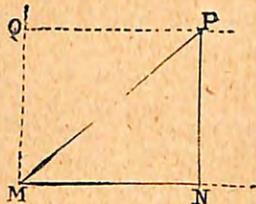


Fig. 151.

Marquemos sobre uma recta a distancia MN (fig. 151)

$= B$ ; levantemos por um ponto qualquer d'essa recta, M por exemplo, uma perpendicular sobre a qual, e a partir de M, applicemos MQ (medida da altura A). Façamos partir de Q uma parallela a MN e fazendo centro em M, com um raio igual a L marquemos o ponto P. Tracemos as rectas PM e PN.  
O triangulo pedido é MNP.

**Problema 44.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado e duas alturas.  
1.º caso. — As duas alturas correspondem aos lados desconhecidos.

Seja AB o lado (fig. 152).  
Com o raio AC, igual a uma das alturas, descrevamos

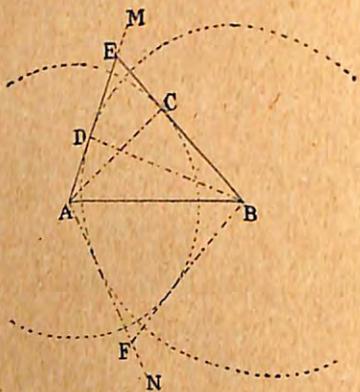


Fig. 152.

uma circumferencia; do ponto B e com o raio BD, igual a outra altura, descrevamos outra circumferencia.  
De A tracemos as rectas AM e AN tangentes á circumferencia de centro B e d'este ponto tiremos as rectas BE e BF tangentes á circumferencia de centro A. Qualquer um dos triangulos ABE ou ABF resolve o problema.

2.º caso. — Uma das alturas corresponde ao lado conhecido.

Tracemos uma recta MN (fig. 153) igual ao lado e com um raio igual á altura que não corresponde a esse mesmo lado descrevamos um arco.

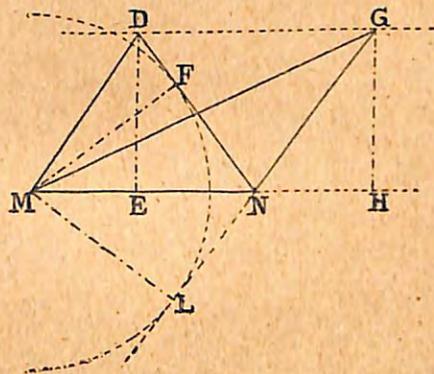


Fig. 153.

Tracemos uma parallela á recta MN de modo que a distancia entre ellas seja igual á altura correspondente ao lado dado.

Da extremidade N tiremos as tangentes do arco. Essas tangentes determinam D e G na recta parallela a MN.

Qualquer um dos triangulos MND ou MNG resolve o problema; as alturas do primeiro são DE e MF e as do segundo GH ou DE e ML ou MF.

**Problema 45.** — Construir um triangulo conhecendo-se os meios dos tres lados.

Unamos entre si os tres pontos A, B e C (meios dos lados do triangulo pedido) e por estes mesmos pontos (fig. 154) tracemos rectas parallelas aos lados oppostos, assim por exemplo, pelo ponto A a recta parallela a CB, etc

Estas tres rectas cortam-se nos pontos E, F e G e formam o triangulo pedido EFG.

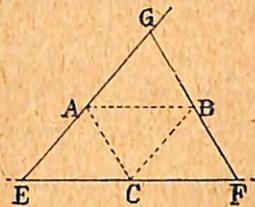


Fig. 154.

**Problema 46.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo e uma altura.

1.<sup>o</sup> caso. — O angulo é adjacente ao lado conhecido e a altura corresponde a esse lado.

V é o angulo, M o lado e H a altura (fig. 155).

Sobre uma recta applicuemos  $AB = M$ , na extremi-

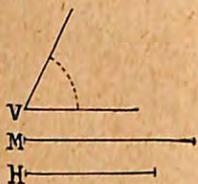


Fig. 155.

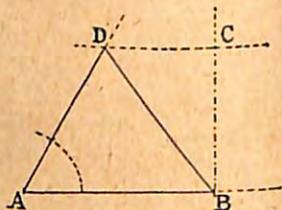


Fig. 156.

dade A (fig. 156) formemos um angulo igual a V e de um ponto qualquer da recta AB levantemos uma perpendicular sobre a qual marquemos  $BC = H$ .

Do ponto C tracemos uma parallela a AB determinando o ponto D, terceiro vertice do triangulo pedido A B D.

2.<sup>o</sup> caso. — O angulo é adjacente ao lado conhecido e a altura corresponde ao lado opposto a esse angulo.

V é o angulo, M o lado e H a altura correspondente do lado opposto ao angulo V (fig. 155).

Façamos um angulo  $A = V$  e marquemos  $AB = M$  (fig. 157).

Do ponto A, com o centro, e com um raio igual a H descrevamos um arco de circulo e do ponto B tracemos a tangente BC a esse arco. A B C é o triangulo pedido.

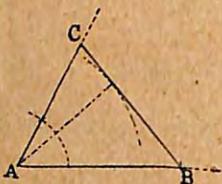


Fig. 157.

**Problema 47.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado e dois angulos que lhe são adjacentes.

A B (fig. 158) é o lado; G e H (fig. 159) os angulos adjacentes. A partir do ponto M e sobre a recta MN (fig. 160)



Fig. 158.

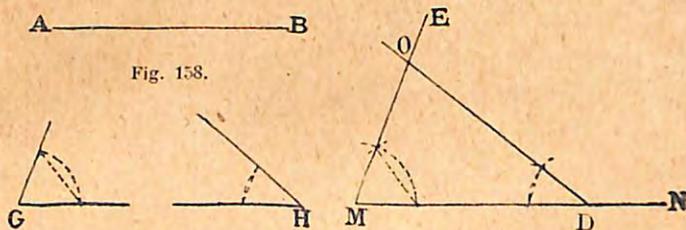


Fig. 159.

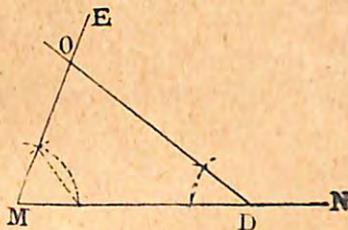


Fig. 160.

marquemos a distancia  $MD = AB$ . Pelo ponto M façamos um angulo igual a G e pelo ponto D, um angulo igual a H. As duas rectas ME e DF cortam-se no ponto O e M D O é o triangulo pedido.

**Problema 48.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e o angulo opposto a esse lado.

R S é o lado (fig. 161); N, (fig. 162) o angulo adjacente

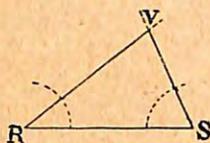


Fig. 161.

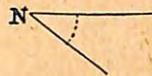


Fig. 162.

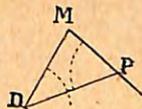


Fig. 163.

a esse lado e M (fig 163) o angulo opposto.

Por um ponto D tomado sobre um dos lados do angulo M formemos um outro igual a N.

Os lados dos angulos D e M determinam o ponto P. Façamos em R um angulo igual a D e, em S outro igual a P. O ponto V é o encontro de RV e SV, e R S V é o triangulo pedido.

**Problema 49.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e a somma dos dois outros lados.

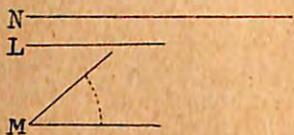


Fig. 164.

L é o lado, M o angulo, e N a somma dos outros dois lados (fig. 164).  
Em uma recta marque-mos uma distancia A B igual ao lado L e pela extremidade A formemos um angulo igual a M (fig. 165). Appliquemos em A C a medida N e juntemos C a B.

Façamos passar pelo meio d'esta ultima recta, uma perpendicular que determinará o ponto D na recta A C.

Unamos D a B e obteremos o triangulo pedido A B D, porque  $DB = DC$ .

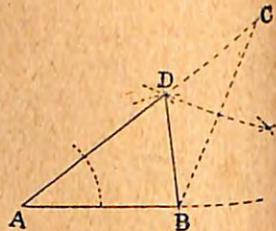


Fig. 165.

**Problema 50.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e a differença dos dois outros lados.

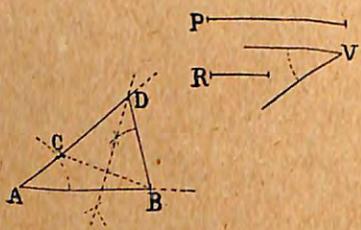


Fig. 166.

Façamos A B igual ao lado conhecido P e pela extremidade A (fig. 166) formemos um angulo igual a V.

Marquemos  $AC = R$  (differença entre os dois lados) e unamos C a B.  
Pelo meio de CB tracemos uma perpendicular que determinará, com o prolongamento de AC, o ponto D, terceiro vertice do triangulo pedido A B D.  $CD = BD$  e  $CA = AD - CD$ .

**Problema 51.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, o angulo opposto e a somma dos dois outros lados

M é o lado, V o angulo opposto e N a somma dos dois outros lados (fig. 167). Na extremidade A de uma recta formemos um angulo igual á metade do angulo V e applicuemos em A B (fig. 168) a medida N.

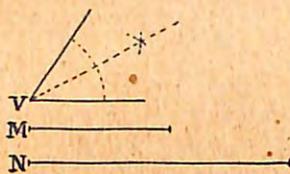


Fig. 167.

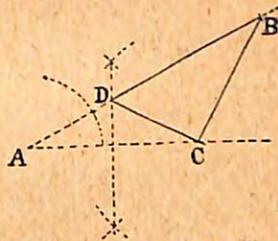


Fig. 168.

Centro em B e com um raio igual a M determinemos o ponto C, ao qual unamos o ponto B.

Pelo meio de AC façamos passar uma perpendicular que determinará na recta AB o terceiro vertice do triangulo pedido CBD porque  $DC = DA$ ; o triangulo ACD é isosceles e portanto o angulo BDC é o dobro de A.

**Problema 52.** — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, o angulo opposto e a differença dos dois outros lados.

A é o lado, M o angulo e N a differença dos dois outros lados (fig. 169).

Façamos um angulo B igual a um angulo recto mais a metade de M (fig. 170).

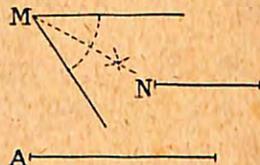


Fig. 169.

Tomemos  $BC = N$  e do ponto C, como centro, com um

raio  $A$  marquemos o ponto  $E$ , ao qual unamos  $C$ . Pelo meio de  $BE$  façamos passar uma perpendicular que determinará o ponto  $F$  no prolongamento de  $CB$ . Tracemos a recta  $EF$  que resolve o problema.

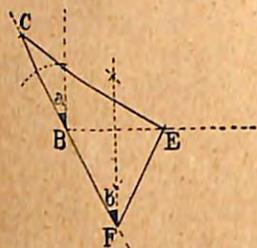


Fig. 170.

O angulo  $a$  é igual á metade de  $M$  e igual a  $b$ ;  $b$  é  $1/2$  de  $F$  porque o triangulo  $BEF$  é isosceles, portanto  $\angle F = \angle M$

**Problema 53.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois angulos da base e a altura.

$R$  e  $V$  são os angulos da base (fig. 171) e  $AB$  é a

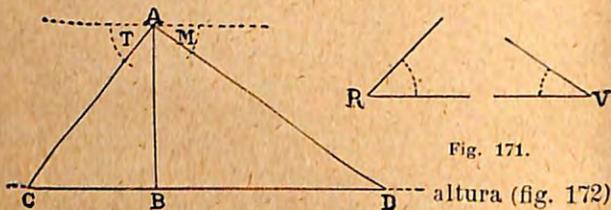


Fig. 171.

Fig. 172.

altura (fig. 172). Façamos passar, pelas extremidades, rectas perpendiculares a  $AB$ .

Formemos ao redor de  $A$  e na recta perpendicular que passa por esse ponto, dois angulos sendo  $M = V$  e  $T = R$ .

Os lados d'esses angulos determinam os pontos  $C$  e  $D$  e portanto o triangulo  $CDA$ .

**Problema 54.** — Construir um triangulo conhecendo-se dois angulos e o raio do circulo circumscripto. Com um raio  $AB$  (fig. 174) igual a  $R$  (fig. 173) descre-

vamos uma circumferencia de circulo e pelo ponto  $B$  tracemos uma perpendicular a  $AB$ .

Façamos no ponto  $D$  um angulo  $CBD = M$  e  $EBF = V$ .

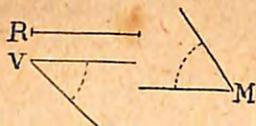


Fig. 173.

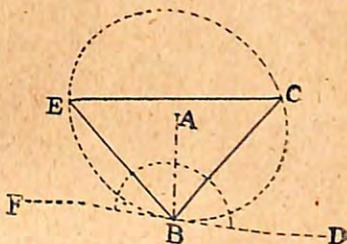


Fig. 174.

Unamos  $E$  a  $C$  e obteremos o triangulo pedido  $ECB$ .

**Problema 55.** — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo, o lado adjacente e a diferença dos outros lados.

Tracemos a recta  $BC$  (fig. 175) igual ao lado conhecido e pela extremidade  $B$  façamos passar uma recta que forme um angulo igual ao angulo dado.

Marquemos  $BE$  igual á diferença dos lados desconhecidos e tracemos  $EC$  em cuja extremidade  $C$  reproduzamos o angulo  $E$ .

Tiremos a recta  $CA$  que é o terceiro lado do triangulo pedido  $BCA$  porque  $AC = AE \therefore AC - AB = BE$ .

**Problema 56.** — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo; a altura e a mediana procedentes do vertice do mesmo angulo dado.

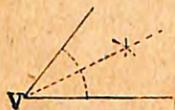


Fig. 176.

$V$  é o angulo (fig. 176). Tracemos uma recta indefinida  $XY$  e por um ponto  $M$  d'essa recta levantemos uma

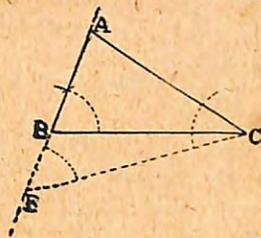


Fig. 175.

perpendicular na qual marquemos MC (fig. 177) igual á altura dada

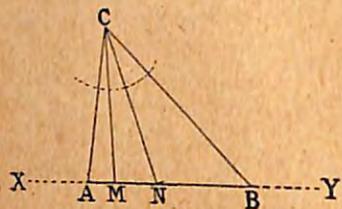


Fig. 177.

Traçadas as rectas CB e CA veremos o triangulo ABC, solução do problema.

**Problema 57.** — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo e duas alturas.

As duas alturas correspondem aos lados do angulo conhecido.

Formemos um angulo A igual ao angulo dado (fig. 178) e do vertice façamos partir duas perpendiculares: uma a cada lado do angulo.

Em uma d'estas perpendiculares marquemos AM igual a uma das alturas, e na outra, AN igual á segunda altura dada.

Por M tracemos uma paralela ao lado AE e por N outra paralela ao lado AF.

As paralelas determinam os pontos B e C e portanto o triangulo ABC. Unamos B a C.

**Problema 58.** — Construir um triangulo conhecendo-se os pés das tres alturas.

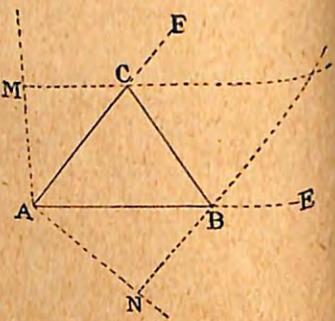


Fig. 178.

Sejam M, N e D os pés das tres alturas (fig. 179). Unamos estes pontos entre si e prolonguemos as rectas em ambas as direcções.

Tracemos as bissectrizes dos angulos externos d'esse triangulo e ellas darão a solução do problema: o triangulo ABC.

**Problema 59.** — Construir um triangulo conhecendo-se o raio do circulo circumscripto, um lado e uma altura.

1.º caso. — A altura corresponde ao lado dado.

Descrevamos uma circumferencia de circulo com o raio conhecido; de um ponto qualquer A (fig. 180) tomado na curva e com um raio igual ao lado dado determinemos o ponto B.

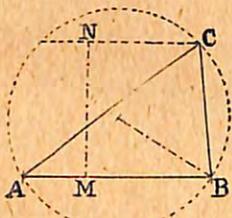


Fig. 180.

Tracemos a recta AB e tiremos-lhe uma paralela a uma distancia MN igual á altura conhecida.

Esta paralela determina o ponto C ao qual unamos A e B formando o triangulo ABC.

2.º caso. — A altura corresponde a um dos lados desconhecidos.

Descrevamos uma circumferencia com o raio dado.

De um ponto A (fig. 181) e com um raio igual ao lado conhecido marquemos B.

Tracemos a recta AB e do ponto A, como centro e com um raio AM igual á altura dada, descrevamos um arco de circulo.

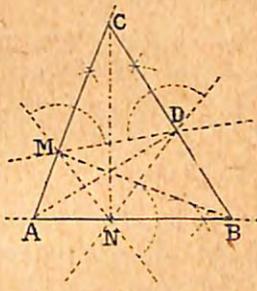


Fig. 179.

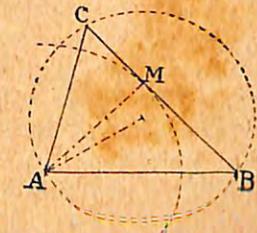


Fig. 181.

De B façamos partir uma recta que toque o arco no ponto M: esta recta determina o ponto C, terceiro vertice do triangulo pedido ABC. Unamos A e B ao ponto C.

**Problema 60.** — Construir um triangulo conhecendo-se as tres medianas.

Formemos um triangulo ABC (fig. 183) cujos lados sejam respectivamente eguaes a dois terços de cada mediana:

$AB = \frac{2}{3}$  de M;  $AC = \frac{2}{3}$  de N e  $BC = \frac{2}{3}$  de P (fig. 182).

Reproduzamos o triangulo ABC em CDB, traçando as paralellas aos lados CA e AB.

Prolonguemos DC, AC e BC; tracemos a recta AD e do ponto E applicuemos  $EF = P$ .

Unamos F a A e D.

ADF é o triangulo pedido.

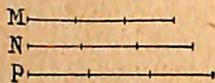


Fig. 182.

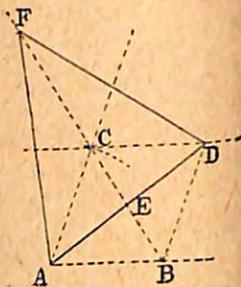


Fig. 183.

**Problema 61.** — Construir um triangulo, conhecendo-se a base, o perimetro e um angulo da base.

Pela extremidade A da recta AB (fig. 184) igual á base dada, formemos um angulo igual ao angulo conhecido.

Marquemos em AC o perimetro diminuido de AB.

Unamos C a B tracemos no ponto B um angulo CBM igual ao angulo C.

ABM é o triangulo pedido.

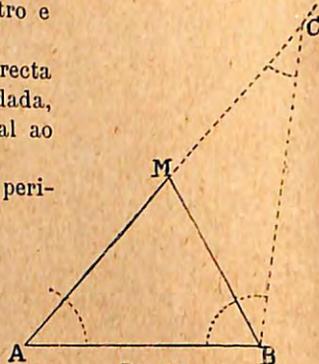


Fig. 184.

**Problema 62.** — Construir um triangulo conhecendo-se o perimetro e dois angulos.

Na extremidade M da recta MN (perimetro do triangulo pedido) formemos um angulo (fig. 186) igual á metade de P (fig. 185); no ponto N formemos um angulo igual á metade de R.

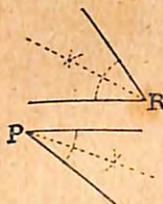


Fig. 185.

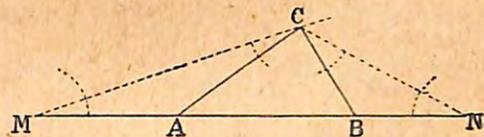


Fig. 186.

Achado o ponto C pelo encontro das rectas que formaram os angulos M e N, façamos o angulo  $ACM = M$  e  $BCN = N$ .

O triangulo ABC resolve o problema.

**Problema 63.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a hypotenusa. Sobre uma recta qualquer marquemos MD (fig. 187) igual á hypotenusa conhecida; pelo ponto M façamos um angulo igual ao angulo dado, e do ponto D abaixemos a perpendicular DE sobre MG.

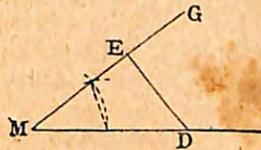


Fig. 187.

MDE é o triangulo pedido.

*Outro processo.* — Dividamos a hypotenusa MD (fig. 188) ao meio e com o centro em P descrevamos a semi-circunferencia que termine nos pontos M e D.

N'este ultimo ponto façamos um angulo igual a V (fig. 189)

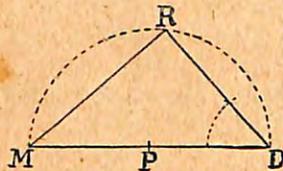


Fig. 188.

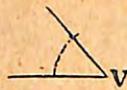


Fig. 189.

prolongando o lado até determinar o ponto R, ao qual unamos M

MDR é o triangulo pedido.

**Problema 64.** — Construir um triangulo rectangulo, conhecendo-se a hypotenusa e um catheto.

AB (fig. 190) é a hypotenusa e CD (fig. 191) é o catheto.

Sobre MN marquemos

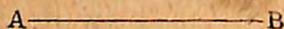


Fig. 190.



Fig. 191.

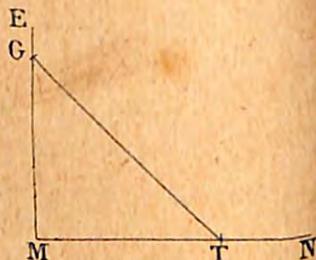


Fig. 192.

MT (fig. 192) = CD; pelo ponto M levantemos uma perpendicular ME, façamos centro em T e com um raio equal a AB, cortemos a perpendicular ME no ponto G ao qual, ligado ao ponto T, resolve o problema.

**Problema 65.** — Construir um triangulo rectangulo, conhecendo-se um catheto e um angulo agudo adjacente a esse catheto.

Sobre uma recta applicuemos AB (fig. 193) equal ao catheto; pela extremidade A levantemos uma perpendicular a essa recta e na outra extremidade reproduzamos o angulo agudo conhecido. O lado d'esse angulo determinará, na perpendicular, o ponto D e portanto o triangulo ABD.

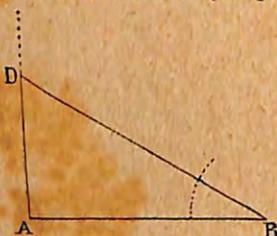


Fig. 193.

**Problema 66.** — Construir um triangulo rectangulo isosceles conhecendo-se a hypotenusa.

Sobre uma recta applicuemos AB (fig. 194) equal á hypotenusa dada; façamos passar pelo meio d'esta recta uma perpendicular.

Com um raio NA (metade de AB) descrevamos a semi-circumferencia ACB.

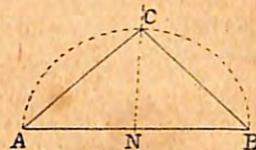


Fig. 194.

Unamos os pontos A e B ao ponto C e obteremos o triangulo pedido.

**Problema 67.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a somma dos cathetos.

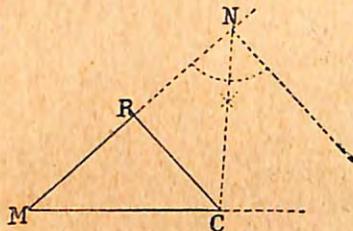


Fig. 195.

Sobre um dos lados do angulo dado M (fig. 195) applicuemos MN equal á somma dos dois cathetos. Formemos pelo ponto N um angulo recto e tiremos-lhe a bissectriz que determinará o ponto C no outro lado do mesmo angulo M.

Abaixemos do ponto C uma perpendicular a MN e o ponto R será o terceiro vertice do triangulo rectangulo pedido MRC.

$MN = MR + RC$  porque  $RC = RN$  como lados symetricos do triangulo isosceles CNR.

**Problema 68.** — Construir um triangulo-rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a differença dos dois cathetos.

Sobre um dos lados do angulo conhecido V (fig. 196) applicuemos VB equal á differença dos dois cathetos.

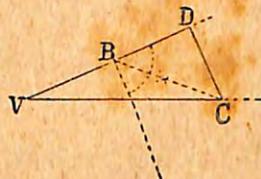


Fig. 196.

Pelo ponto B formemos um angulo recto e tiremos-lhe a

bissectriz que determinará o ponto C no outro lado do angulo V.

Abaixemos do ponto C uma perpendicular sobre o prolongamento de VB.

VDC é o triangulo rectangulo pedido, porque VB é a differença entre VD e DC ou DB.

**Problema 69.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um catheto e o raio do circulo inscripto.

Pela extremidade B da recta AB, catheto conhecido, (fig. 197) levantemos uma perpendicular.

Com o lado BC, equal ao raio do circulo inscripto, construíamos o quadrado CSEF.

Centro em E e raio equal a EC descrevamos uma circumferencia e do ponto A tiremos uma recta que toque a circumferencia e determine o ponto D no prolongamento da perpendicular SF.

ASD é o triangulo rectangulo pedido.

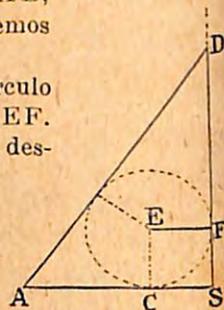


Fig. 197.

**Problema 70.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se o raio do circulo inscripto e um angulo agudo.

Tracemos um angulo agudo MAN (fig. 198) equal ao angulo dado e tiremos-lhe a bissectriz.

Pelo vertice A levantemos uma perpendicular a qualquer dos lados d'esse angulo e façamos AE equal ao raio do circulo inscripto.

Por E tiremos uma parallela a AN; essa parallela determinará o ponto O, centro do circulo inscripto, e situado na bissectriz do angulo A.

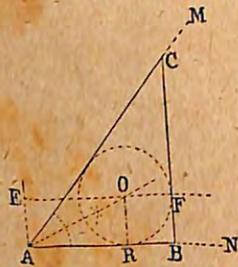


Fig. 198.

Tracemos a circumferencia com o raio OR e centro O. A circumferencia marcará o ponto F na parallela a AN.

Finalmente por esse ultimo ponto F façamos passar uma perpendicular a EF a qual determinará os pontos C e B e portanto o triangulo ABC.

**Problema 71.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a altura correspondente á hypotenusa e a differença dos angulos agudos.

Seja MN a altura (fig. 199) e V a differença entre os angulos agudos (fig. 200).

Formemos um angulo MNP = V e

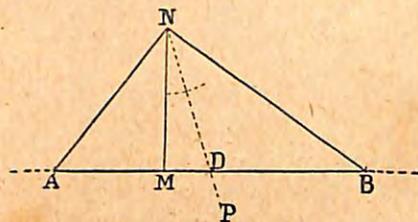


Fig. 199.



fig. 200.

pela extremidade M tracemos uma perpendicular a MN; esta perpendicular determina o ponto D no lado NP.

Reproduzamos em DB e DA a medida DN e unamos N a A e B: obteremos o triangulo pedido ANB.

**Problema 72.** — Inscrever um circulo em um triangulo dado.

Tiremos as bissectrizes dos angulos A e B do triangulo conhecido ABC (fig. 201).

O ponto M, intersecção das duas bissectrizes é o centro do circulo. Com o raio MN, perpendicular sobre AB, descrevamos a circumferencia que tocará os lados do triangulo.

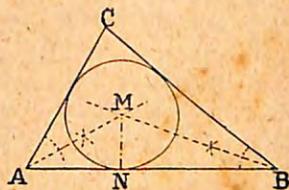


Fig. 201.

**Problema 73.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a hypotenusa e a altura correspondente.

Sobre a hypotenusa conhecida  $AB$ , como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia (fig. 202) e de um ponto qualquer d'essa recta ( $A$  por exemplo) levantemos-lhe uma perpendicular sobre a qual marquemos  $AM$  igual á altura dada.

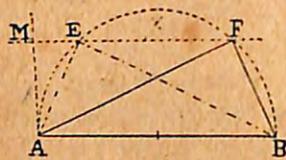


Fig. 202.

De  $M$  tracemos uma parallela a  $AB$ , a qual determinará  $E$  e  $F$  na semi-circumferencia.

Qualquer dos triangulos  $AEB$  ou  $AFB$  resolve o problema.

*Nota.* — Este problema só terá solução quando a altura fór igual, ou menor do que a metade da hypotenusa.

**Problema 74.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um catheto e a altura abaixada do vertice do angulo recto.

Construamos o triangulo rectangulo  $ACB$  (fig. 203) sendo  $AC$  igual á altura dada e  $AB$  ao catheto conhecido.

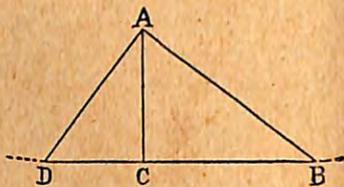


Fig. 203.

Prolonguemos  $BC$  e pelo ponto  $A$  da recta  $AB$  levantemos a perpendicular  $AD$ .

$DAB$  é o triangulo rectangulo pedido.

**Problema 75.** — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a mediana e a altura provenientes do angulo recto.

Tracemos o triangulo rectangulo  $APR$  em que  $AP$  é igual á altura e  $AR$  á mediana (fig. 204).

Prolonguemos  $PR$  para ambos os lados e marquemos  $RB$  e  $RC$  eguaes cada uma a  $RA$ .

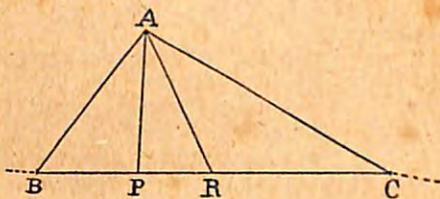


Fig. 204.

Tracemos as rectas  $AB$  e  $AC$ .

$BAC$  é o triangulo que resolve o problema.

**Problema 76.** — Por um ponto dado, traçar uma recta que separe dois outros pontos tambem dados e lhes seja equidistante.

$M$  e  $N$  são os pontos conhecidos e  $R$  o ponto pelo qual deverá passar a recta equidistante de  $M$  e  $N$  (fig. 205).

Unamos estes pontos e dividamos a recta  $MN$  ao meio. De  $R$  tracemos  $RFD$  que será a recta pedida, porque os triangulos rectangulos  $MEF$  e  $NDF$  são eguaes por terem as hypotenusas eguaes e os angulos em  $F$  tambem eguaes  $\therefore ME = ND$ .

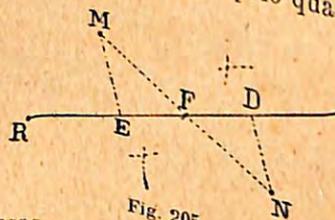


Fig. 205.

### EXERCICIOS :

1. — Hilda! traça um triangulo.
2. — Que nome tem a somma dos lados de um triangulo?
- Exemplo.
3. —  $A$  que é igual a somma dos angulos de um triangulo?
- Mostra praticamente.
4. — Mostra a altura de um triangulo.

5. — Mostra a mediana.
6. — Como se dividem os triangulos em relação á grandeza de seus lados ?
7. — Traça um triangulo escaleno; — um isosceles; — um equilatero.
8. — Como se dividem os triangulos em relação á grandeza de seus angulos ?
9. — Traça um triangulo acutangulo; — um obtusangulo; — um rectangulo; — um equiangulo.
10. — Mostra uma hypothenusa; — um catheto.
11. — Quaes são os tres casos de igualdade dos triangulos ?
12. — Constroe um triangulo equilatero cujo lado seja egual a 30 millimetros.
13. — Idem um triangulo equilatero cujo perimetro seja egual a 120 millimetros.
14. — Idem um triangulo rectangulo cujos cathetos meçam, um 30 millimetros e o outro 37 millimetros.
15. — Idem um triangulo rectangulo em que um dos cathetos meça 25 millimetros e a hypothenusa 40 millimetros.
16. — Idem um triangulo rectangulo isosceles cuja somma dos cathetos seja egual a 50 millimetros.
17. — Idem um esquadro em cartão, medindo o catheto menor 101 millimetros e o maior 203 millimetros.

*Corta em papel ou cartão um triangulo isosceles :*

18. — base = 5 centimetros e a altura = 6 centimetros.
19. — base = 5 centimetros e lado adjacente = 7 centimetros.
20. — base =  $0^m,045$  e angulo do vertice =  $1/2$  de um angulo recto.
21. — base =  $0^m,052$  e raio do circulo inscripto =  $0^m,03$ .
22. — base =  $0^m,034$  e raio do circulo circumscripto =  $0^m,04$ .
23. — altura =  $0^m,048$  e angulo da base =  $1/3$  de um angulo recto.
24. — altura =  $0^m,048$  e perimetro =  $0^m,16$ .
25. — altura =  $0^m,05$  e angulo do vertice =  $1/3$  do angulo recto.

26. — um dos lados symetricos =  $0^m,06$  e um dos angulos da base =  $1/4$  do angulo recto.

*Corta em cartão ou papel um triangulo cujos dados sejam :*

27. — um lado =  $0^m,06$ ; outro =  $0^m,05$  e o terceiro =  $0^m,043$ .
28. — um lado =  $0^m,058$ ; um outro =  $0^m,045$  e o angulo por elles formado =  $3/4$  do angulo recto.
29. — um lado =  $0^m,062$ ; um outro =  $0^m,05$  e o angulo oposto ao primeiro =  $60^\circ$ .
30. — um lado =  $0^m,08$ ; um outro =  $0^m,068$  e a mediana correspondente ao segundo =  $0^m,045$ .
31. — idem e a mediana correspondente ao lado desconhecido =  $0^m,06$ .
32. — um lado =  $0^m,06$ ; um outro =  $0^m,07$  e a altura correspondente ao primeiro =  $0^m,05$ .
33. — idem e a altura correspondente ao lado desconhecido =  $0^m,04$ .
34. — um lado =  $0^m,059$ ; a base =  $0^m,08$  e a altura =  $0^m,03$ .
35. — um lado =  $0^m,075$ ; uma altura =  $0^m,06$  e uma outra =  $0^m,062$  sendo a primeira correspondente ao lado dado.
36. — o raio do circulo circumscripto =  $0^m,05$ ; um lado =  $0^m,06$  e uma altura =  $0^m,055$ , correspondendo ao lado dado.
37. — uma mediana =  $0^m,09$ ; outra =  $0^m,08$  e a terceira =  $0^m,10$ .

*Corta em papel ou cartão um triangulo rectangulo cujos dados sejam*

38. — um angulo agudo =  $1/3$  do angulo recto e a hypothenusa =  $0^m,072$ .
39. — um catheto =  $0^m,05$  e um angulo agudo adjacente =  $2/3$  do angulo recto.
40. — um angulo agudo =  $1/3$  do angulo recto e a somma dos cathetos =  $0^m,12$ .
41. — um angulo agudo =  $1/3$  do angulo recto e a differença dos dois cathetos =  $0,05$ .
42. — um catheto =  $0^m,08$  e o raio do circulo inscripto =  $0^m,025$ .

43. — hypotenusa  $0^{\circ},07 =$  e a altura correspondente  $= 0^{\circ},043$ .

44. — mediana proveniente do angulo recto  $= 0^{\circ},06$  e a altura proveniente do mesmo vertice  $= 0^{\circ},05$ .

Desenha um triangulo equilatero cujos dados sejam :

45. — a altura  $= 0^{\circ},06$ .

46. — o lado  $= 0^{\circ},08$ .



## CAPITULO VI

SUMMARIO : **Quadrilateros.** — **Quadrado.** — **Lo-sango.** — **Rectangulo.** — **Parallelogrammo.** — **Trapezios.** — **Problemas.**

Uma superficie plana terminada por quatro linhas rectas

### QUADRILATEROS.

chama-se um **quadrilatero**

ou **quadrangulo** (fig. 206). O Largo de S. Francisco de Paula é um



Fig. 206. — Um quadrilatero.

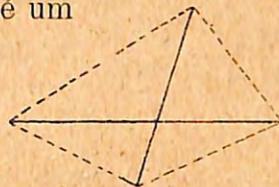


Fig. 207.

**quadrilatero.** Os envelopes, os cartões de visitas, as vidraças, os cadernos, os mappas têm geralmente a fórmula de **quadrilateros.**

Cada **quadrilatero** tem quatro *lados*, quatro *angulos* e quatro *vertices*.

A linha que une dois *vertices* oppostos, isto é. não consecutivos, chama-se **diagonal** (fig. 207).

Cada **quadrilatero** tem duas *diagonaes*.  
A somma dos *lados* de um **quadrilatero** chama-se *perimetro*.

A somma dos *angulos* de um **quadrilatero** vale quatro angulos rectos.

Os **quadrilateros** são :

- |                     |   |                                     |
|---------------------|---|-------------------------------------|
| Quadrilateros . . . | } | 1. — <i>Quadrado.</i>               |
|                     |   | 2. — <i>Losango.</i>                |
|                     |   | 3. — <i>Rectangulo.</i>             |
|                     |   | 4. — <i>Parallelogrammo.</i>        |
|                     |   | 5. — <i>Trapezio.</i>               |
|                     |   | 6. — <i>Quadrilatero irregular.</i> |

Si um **quadrilatero** tem os lados eguaes, paralelos dois a dois e os angulos rectos, toma o nome de **quadrado** (fig. 208). Uma moldura póde ter a fórma de um **quadrado**; o fundo de uma caixa póde ser **quadrado**. As *diagonaes* de um **quadrado** são eguaes, perpendiculares entre si, e dividem-se mutuamente ao meio.

Quando traçamos as *diagonaes* de um **quadrado**, ellas o dividem em quatro triangulos rectangulo-isosceles eguaes (fig. 209).

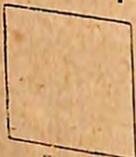


Fig. 208.  
Um quadrado.

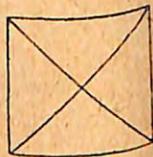


Fig. 209.

Tracemos sobre papel ou cartão um **quadrado** e suas *diagonaes*, em seguida cortemol-o segundo os lados e as diagonaes, e obteremos os quatro triangulos que, superpostos, nos mostrarão pratica e tachymetricamente que são eguaes.

### Synopse

Quadrado . . .	}	<i>lados . . . .</i>	}	<i>eguaes e</i>
				<i>parallelos dois a dois.</i>
Quadrado . . .	}	<i>diagonaes . . .</i>	}	<i>angulos rectos.</i>
				<i>eguaes,</i>
				<i>perpendiculares entre</i>
				<i>si, dividem-se ao meio.</i>

Um **quadrilatero** com os lados eguaes, paralelos dois a dois e com dois angulos agudos e dois obtusos, chama-se **losango**, (fig. 210)  
Si juntarmos as bases de dous triangulos isosceles, obteremos um **losango**.

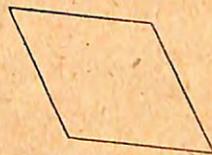


Fig. 210. — Losango.

Em um **losango** os *angulos* oppostos são eguaes, as *diagonaes* são desiguaes, perpen-

diculares entre si e dividem-se ao meio.  
O *losango* com as *diagonaes* fica dividido em quatro triangulos rectangulo-escalenos eguaes (fig. 211).

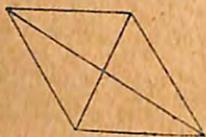


Fig. 211.

A *base* é qualquer um dos lados e a *altura* é a perpendicular abaixada de um ponto da *base* ou do seu prolongamento sobre o lado opposto.

Synopse

Losango . . .	lados . . .	{	eguaes e
			parallelos dois a dois.
	angulos . . .	{	dois agudos eguaes.
dois obtusos eguaes.			
diagonaes .	{	deseguaes	
		perpendiculares entre si, dividem-se ao meio	

Quando um **quadrilatero** tem os lados oppostos eguaes e parallelos e os *angulos* rectos, chama se *rectangulo* ou *quadrilongo* (fig. 212).

Uma moldura, uma



Fig. 212. — Rectangulo.

nota de quinhentos réis, um mappa, um livro, um cartão de visitas, um caderno, uma regua, têm a fórma de um *rectangulo*.

As *diagonaes* de um *rectangulo* são eguaes e dividem-se ao meio; a *base* é geralmente um dos lados maiores e a *altura* é um dos lados adjacentes á *base*.

Synopse

Rectangulo . .	{	lados oppostos .	eguaes e
			parallelos.
	{	angulos rectos.	{
diagonaes .			

O **quadrilatero**, cujos *lados* oppostos são eguaes e parallelos e os *angulos*, dois agudos e dois obtusos, é um *parallelogrammo* (fig. 213).

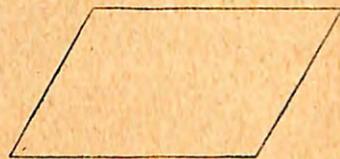


Fig. 213. — Parallelogrammo.

As *diagonaes* d'este **quadrilatero** são deseguaes e dividem-se ao meio.

A *base* é geralmente um dos dois lados maiores e a *altura* é a perpendicular que une

a *base* ou o seu prolongamento ao lado oposto.

**Synopse**

**Parallelogrammo.** .

- lados oppostos { eguaes e paralelos.
- angulos . . { dois agudos eguaes e dois obtusos eguaes
- diagonaes { deseguaes e dividem-se ao meio

Si o **quadrilatero** tem sómente dois de



Fig. 214. — Trapezio.

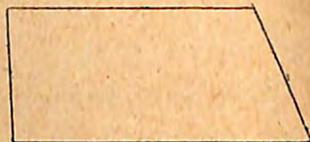


Fig. 215. — Trapezio rectangulo.

eus lados parallelos, recebe o nome de **trapezio** (fig. 214). O **trapezio** é **rectangulo**, (fig. 215) quando tem dois angulos rectos ; é



Fig. 216. — Trapezio isosceles.

**isosceles**, ou **symetrico**, (fig. 216) quando os lados não parallelos

são eguaes, e é **escaleno** ou **irregular** (fig 217) quando os angulos e os lados são deseguaes.



Fig. 217. — Trapezio escaleno.

Os lados parallelos são as *bases* do **trapezio** e a *altura* é a perpendicular que une as duas *bases* ou uma *base* e o prolongamento da outra.

Á recta que une os *meios* das *bases* de um **trapezio symetrico** denomina-se *mediana* ou *eixo de symetria*.

**Synopse**

**Trapezio** .

- rectangulo : dois angulos rectos.
- isosceles ou symetrico { lados não parallelos, eguaes.
- escaleno ou irregular. { lados e angulos deseguaes.

Á recta que une os *meios* dos *lados oppostos* de um **quadrado**, de um **losango**, de um **rectangulo**, de um **parallelogrammo** dá-se o nome de *diametro* ou *mediana*.

O *diametro* divide a figura em partes eguaes.

Em cada um d'esses **quadrilateros** ha duas *medianas*, e a intersecção d'essas *medianas* é o *centro* da figura.

Quando dois ou mais quadrilateros têm *perímetros* eguaes chamam-se *isoperimetros*.

**Problema 77.** — Construir um quadrado, conhecendo-se um lado.

*1.ª Solução.* — Sobre uma recta applicuemos o lado AM (conhecido) e de cada um dos pontos A e M (fig. 218) levantemos, com o auxilio de um esquadro, uma perpendicular.

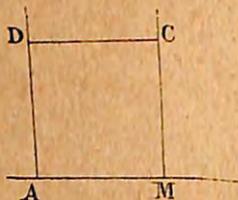


Fig. 218.

Façamos as distancias AD e MC eguaes cada uma a AM; unamos o ponto D ao ponto C e teremos construido o **quadrado**.

*2.ª Solução* — Façamos um angulo recto (fig. 219).

A partir do vertice M e com um raio igual á medida do lado conhecido, determinemos os pontos E e F; centro nesses pontos e com o mesmo raio, determinemos C, o qual, unido aos pontos E e F, resolve o problema.

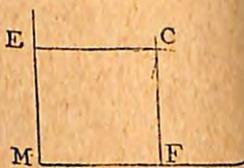


Fig. 219.

*3.ª Solução.* — Das extremidades A e B do lado dado (fig. 220) e com um raio igual a AB descrevamos os arcos que partem d'esses pontos.

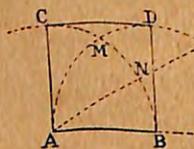


Fig. 220.

Da intersecção M dos dois arcos, e com o mesmo raio, determinemos o ponto E. Tracemos a recta AE e do ponto

M, com um raio igual a MN, marquemos C e D. Unamos entre si A e C; C e D; D e B. ABCD é o quadrado pedido.

**Problema 78.** — Construir um quadrado conhecendo-se um lado e o ponto central d'esse quadrilatero.

Seja M o ponto central (fig. 221). Tracemos uma recta que passe por esse ponto e perpendicular a essa recta, tiremos outra que tambem passe pelo mesmo ponto M.

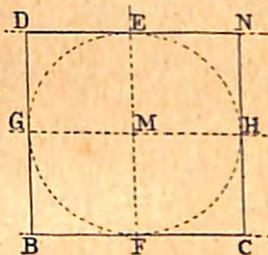


Fig. 221.

Tomemos a metade do lado dado e, fazendo centro em M, descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará E, F, G, H nas perpendiculares.

Por E e F tracemos rectas paralelas a GH e por estes pontos, G e H, tracemos paralelas a EF; obteremos assim o quadrado BCDN.

**Problema 79.** — Construir um quadrado conhecendo-se uma diagonal.

*1.ª Solução.* — Seja MR a diagonal (fig. 222).

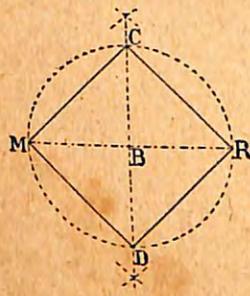


Fig. 222.

Façamos passar pelo meio d'essa recta uma perpendicular e com o centro em B (meio de MR) e raio BM ou BR descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará na perpendicular os pontos C e D.

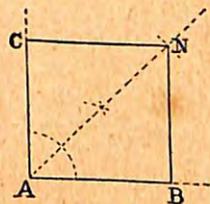


Fig. 223.

Unamol-os a M e R e estará traçado o quadrado MDRC.

*2.ª Solução.* — Tracemos um angulo recto e a sua bissectriz; applicuemos em AN (fig. 223) a medida da diagonal dada.

Do ponto N tracemos  $NC$  paralela a um lado do angulo e  $NB$  ao outro lado.

$ABCN$  é o quadrado pedido.

**Problema 80.** — Construir um quadrado conhecendo-se sómente a diferença entre o lado e a diagonal.

Seja  $R$  (fig. 224) a diferença entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Construamos um quadrado qualquer  $MNOP$ ; tracemos a diagonal  $MP$  prolongando-a em ambas as direcções (fig. 225).

$R$

Fig. 224.

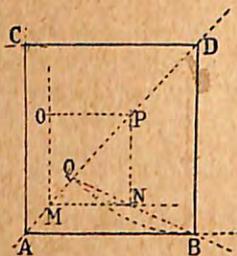


Fig. 225.

Façamos centro em  $P$  e com o raio igual a  $PN$  descrevamos o arco  $NQ$ . A distancia  $QM$  será a diferença entre o lado e a diagonal do quadrado  $MNOP$ .

Apliquemos de  $Q$  até  $A$  a diferença dada  $R$  e do ponto  $A$  façamos partir uma paralela ao lado  $MN$ ; prolonguemos a recta que passa por  $QN$  até determinar n'essa paralela o ponto  $B$ .

$AB$  será o lado do quadrado pedido.

Construamos portanto sobre  $AB$  o quadrado  $ABCD$ .

**Problema 81.** — Construir um rectangulo, conhecendo-se dois lados adjacentes.

Façamos um angulo recto. A partir do vertice, com um raio igual a um dos lados determinemos o ponto  $E$  (fig. 226), e com a distancia igual ao outro lado, marquemos o ponto  $F$ ; façamos partir do ponto  $F$



Fig. 226.

o ponto  $F$ ; façamos partir do ponto  $F$

uma paralela a  $VE$  e, do ponto  $E$ , outra a  $VF$ : estas duas rectas encontram-se no ponto  $G$ . O quadrilatero  $VEFG$  é o rectangulo pedido.

**Problema 82.** — Construir um rectangulo conhecendo-se um lado e uma diagonal.

Façamos centro em  $P$  (meio da diagonal dada  $AB$ ) e com um raio igual a  $PB$  ou  $PA$  descrevamos uma circumferencia de circulo (fig. 227).

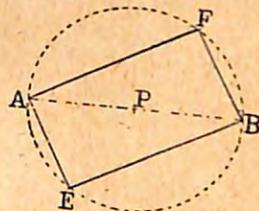


Fig. 227.

De  $A$  e  $B$ , como centros, e com um raio igual ao lado dado, marquemos os pontos  $E$  e  $F$ , aos quaes unamos  $A$  e  $B$  obtendo o rectangulo pedido  $AEFB$ .

**Problema 83.** — Construir um rectangulo conhecendo-se um lado e o angulo formado por esse lado e a diagonal.

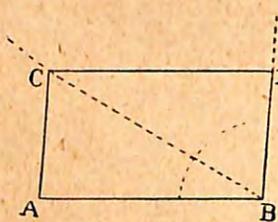


Fig. 228.

$AB$  é o lado dado (fig. 228).

Formemos na extremidade  $B$  um angulo igual ao angulo conhecido e por  $A$  e  $B$  levantemos perpendiculares a  $AB$ .

A perpendicular do ponto  $A$

encontra no ponto  $C$  a recta que fórma o angulo  $B$ . De  $C$  façamos partir uma paralela a  $AB$ , a qual determinará o ponto  $D$ .

$ABCD$  é o rectangulo.

**Problema 84.** — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e o angulo formado por essa diagonal e um dos lados.

Seja  $AB$  a diagonal (fig. 229).

Formemos nas extremidades  $A$  e  $B$  os angulos  $ABM$  e  $BAN$  eguaes, cada um ao angulo dado.

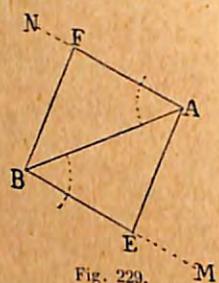


Fig. 229.

Levantemos pela extremidade  $A$  da recta  $AN$  a perpendicular  $AE$  e pela extremidade  $B$  da recta  $BM$  a perpendicular  $BF$ ; resulta o rectangulo  $AFE B$ .

**Problema 85.** — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e um dos angulos formados pelas duas diagonaes.

Seja  $A$  o angulo dado (fig. 230).

Prolonguemos seus lados de modo a formar o angulo verticalmente opposto.

Façamos centro no vertice do angulo e com um raio egual á metade da diagonal conhecida, determinemos os pontos  $B, C, E, D$ .

Unamos entre si  $B$  e  $C$ ;  $C$  e  $E$ ;  $E$  e  $D$ ;  $D$  e  $B$ .

$CEBD$  é o rectangulo.

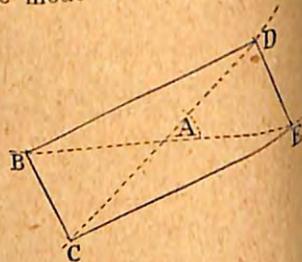


Fig. 230.

**Problema 86.** — Construir um rectangulo conhecendo

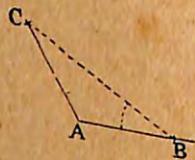


Fig. 231.

se um lado e um dos angulos formados pelas duas diagonaes entre si.

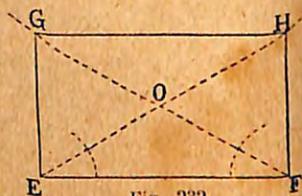


Fig. 232.

Marquemos sobre os lados do angulo dado  $AB = AC$ , e unamos  $C$  a  $B$  (fig. 231).

Sobre uma recta reproduzamos em  $EF$  (fig. 232) a medida do lado conhecido e em cada uma das extremidades  $E$  e  $F$  formemos um angulo igual a  $B$  ou  $C$ .

Dois lados d'estes angulos assignalam o ponto  $O$  que é o centro do rectangulo e do qual, com um raio  $OE$  ou  $OF$ , determinemos  $G$  e  $H$ .

Tracemos as rectas  $EG, GH, HF$  e teremos o rectangulo pedido.

**Problema 87.** — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e o perimetro.

Seja a diagonal egual a  $0^m,038$  e o perimetro  $= 0^m,10$ .

Façamos o angulo  $A$  igual á metade do angulo recto e applicuemos de  $A$  até  $B$  a medida da metade do perimetro.

De  $B$ , como centro, e com um raio egual á diagonal, descrevamos um

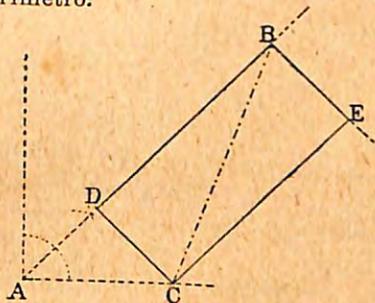


Fig. 233.

arco que córte o outro lado do angulo no ponto  $C$ , do qual abaixemos a perpendicular  $CD$  sobre  $AB$ .

Unamos  $B$  a  $C$ ; pelo ponto  $B$  tiremos uma parallela a  $DC$  e por  $C$  outra a  $DB$ .  $CEDB$  resolve o problema.

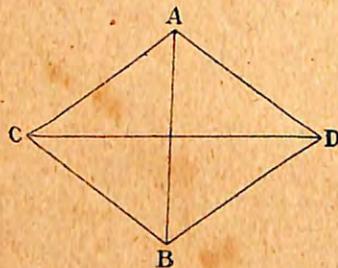


Fig. 234.

**Problema 88.** — Construir um losango conhecendo-se as duas diagonaes. Sejam  $AB$  e  $CD$  (fig. 234) as diagonaes. Tracemos estas

diagonaes perpendicularmente entre si e reciprocamente uma pelo meio da outra, unamos os pontos A e D; A e C; B e C; B e D e teremos resolvido o problema.

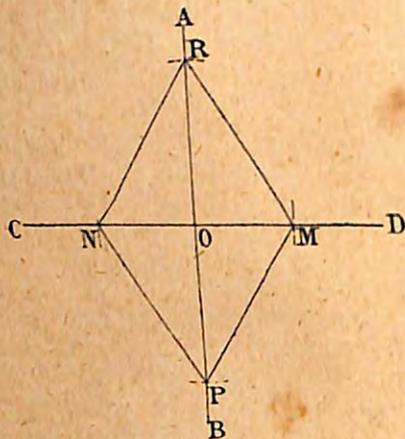


Fig. 235.

ponto O,  $OM = ON$ ;  $OP = OR$ ; tracemos as rectas RM, MP, PN e NR e o quadrilatero RMPN é o losango pedido.

**Problema 90.** — Construir um losango conhecendo-se um lado e uma das diagonaes.

Seja um lado igual a  $0^m,022$  e a diagonal igual a  $0^m,035$ .

Tracemos  $MN = 0^m,035$  e das extremidades M e N, com um raio igual a  $0^m,022$  determinemos os pontos O e P (fig. 236).

Unamos O a M e N, e P aos mesmos pontos. MPON é o losango pedido.

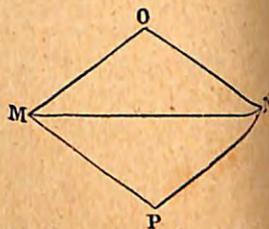


Fig. 236.

**Problema 91.** — Construir um losango conhecendo-se um lado e um angulo.

Seja PR o lado (fig. 238), e M o angulo (fig. 237). Formemos em P um angulo igual a M e reproduzamos em PS o lado PR.

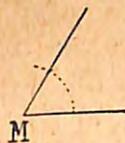


Fig. 237.

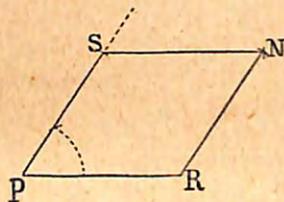


Fig. 238.

Com o centro em S e depois em R e com um mesmo raio PR determinemos o ponto N. O losango é PRSN.

**Problema 92.** — Construir um losango conhecendo-se um angulo e uma diagonal. Tiremos a bissectriz do angulo conhecido A (fig. 239) e

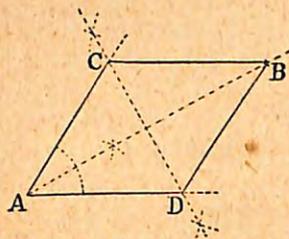


Fig. 239.

marquemos de A até B a medida da diagonal dada. Façamos passar pelo meio d'essa diagonal uma perpendicular que determinará os pontos C e D nos lados do angulo A.

Unamos B a C e D. O losango pedido é ADCB.

**Problema 93.** — Construir um parallelogrammo, conhecendo-se dois lados adjacentes e uma diagonal.

1.<sup>a</sup> Solução. — Sejam  $AB$  e  $CD$  (fig. 240) os lados adjacentes e  $EF$  (fig. 241) a diagonal. Tracemos a linha  $MN$



Fig. 240.



Fig. 241.

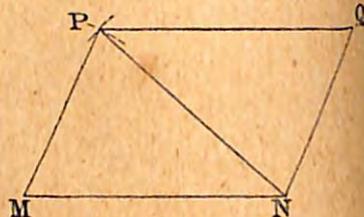


Fig. 242.

igual a  $AB$ ; do ponto  $M$  (fig. 242) com um raio igual a  $CD$  e ponto  $N$  com um raio igual a  $EF$ , determinemos o ponto  $P$ , unamolo aos pontos  $M$  e  $N$ . Do ponto  $P$  tiremos uma paralela a  $MN$  e do ponto  $N$ , outra a  $MP$ .

O quadrilátero  $MNPQ$  é o paralelogramo pedido.

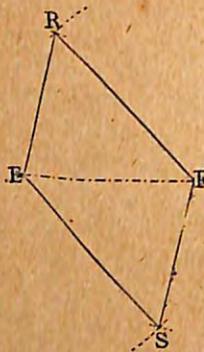


Fig. 243.

2.<sup>a</sup> Solução. —  $EF$  é a diagonal (fig. 243).

Façamos centro em  $E$  e depois em  $F$ , e com um mesmo raio igual a  $AB$  (fig. 240) descrevamos dois arcos, um de um lado e outro do outro lado da recta  $EF$ .

Com um raio igual a  $CD$  (fig. 240) e centro nos mesmos pontos  $E$  e  $F$  cortemos os arcos já traçados nos pontos  $R$  e  $S$ , aos quaes unamos as extremidades  $E$  e  $F$ .

$REFS$  é o paralelogramo pedido.

**Problema 94.** — Construir um paralelogramo conhecendo-se dois lados adjacentes e a altura.



Fig. 244.



Fig. 245.

Sejam  $AB$  e  $CD$  (fig. 244) os lados adjacentes e  $EF$

(fig. 245) a altura. Tracemos a linha  $MN$  igual a  $CD$  e do ponto  $N$  (fig. 246) levantemos uma perpendicular  $NQ$  igual á recta  $EF$ . Pelo ponto  $Q$  tracemos uma linha indefinida  $JK$  paralela a  $MN$ . Façamos centro em  $N$  e com

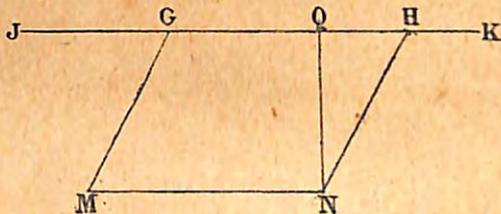


Fig. 246.

um raio igual a  $AB$  cortemos no ponto  $H$  a recta  $JK$ ; unamos  $H$  a  $N$  e pelo ponto  $M$  tracemos uma paralela a  $NH$ .  $MNGH$  é o paralelogramo pedido.

**Problema 95.** — Construir um paralelogramo conhecendo-se dois lados adjacentes, um angulo agudo e um angulo obtuso.

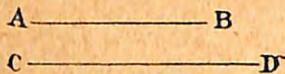


Fig. 247.

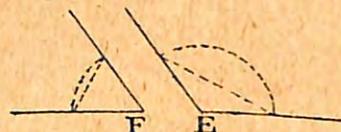


Fig. 248.

Sejam  $AB$  e  $CD$  (fig. 247) os lados adjacentes;  $E$  e  $F$  (fig. 248) os angulos. Façamos  $MN = CD$  e nos pon-

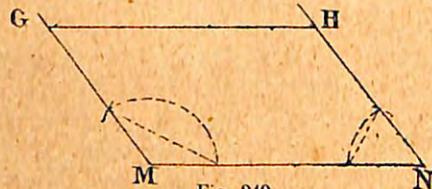


Fig. 249.

tos  $M$  e  $N$  (fig. 249) construamos dois angulos respectivamente eguaes a  $E$  e  $F$ ; do ponto  $M$ , como centro, e com um

raio equal a  $AB$  determinemos o ponto  $G$  do qual façamos partir a recta  $GH$  parallel a  $MN$  e assim resolvemos o problema.

NOTA. — A somma d'esses dois angulos deve ser sempre equal a dois angulos rectos.

**Problema 96.** — Construir um parallelogrammo conhecendo-se dois lados adjacentes e o angulo por elles formado.

Sejam  $AB$  e  $CD$  (fig. 250) os lados adjacentes e  $E$



Fig. 250.

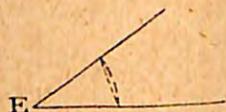


Fig. 251.

(fig. 251) o angulo. Sobre uma recta indefinida marquemos a distancia  $MN$  igual a  $CD$ , no ponto  $M$  (fig. 252) façamos

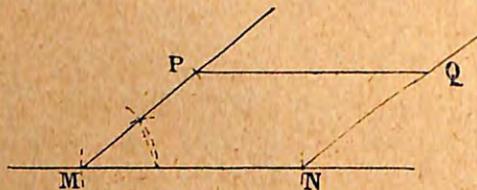


Fig. 252.

um angulo equal a  $E$  e com um raio equal a  $AB$  marquemos o ponto  $P$ , a partir de  $M$ . Do ponto  $N$  tracemos uma parallel a  $MP$  e do ponto  $P$  outra a  $MN$ . —  $MNPQ$  é o parallelogrammo pedido.

**Problema 97.** — Construir um parallelogrammo conhecendo-se as diagonaes e um lado.

Uma das diagonaes mede  $0^m,03$  e a outra  $0^m,04$ ; o lado  $0^m,02$ .

Sobre uma recta marquemos a medida do lado (fig. 253).

Construamos o triangulo  $ABC$  tendo para base esse lado e para os outros lados as metades das diagonaes dadas.

Prolonguemos  $AC$  e  $BC$  e reproduzamos em  $CD$  a medida  $CB$ , e em  $CE$  a medida  $CA$ .

Tracemos os lados  $AD$ ,  $DE$  e  $EB$  e teremos o parallelogrammo desejado  $ABDE$ .

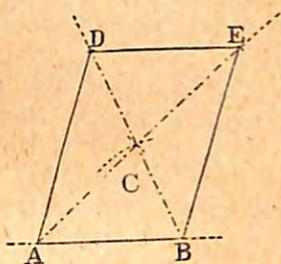


Fig. 253.

**Problema 98.** — Construir um parallelogrammo conhecendo-se um lado, um angulo, e uma diagonal.

Seja  $A$ , o angulo (fig. 254): o lado mede  $0^m,02$  e a diagonal  $0^m,03$ .

Marquemos  $AB = 0^m,02$  e do ponto  $B$ , como centro, e com um raio equal a  $0^m,03$  determinemos o ponto  $C$ , no outro lado do angulo  $A$

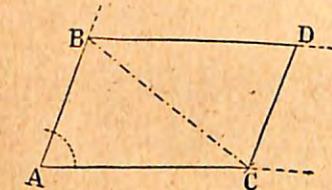


Fig. 254.

De  $B$  tiremos uma parallel a  $AC$ , e de  $C$  outra a  $AB$ . A soluçao do problema é  $ACBD$ .

**Problema 99.** — Construir um parallelogrammo conhecendo-se um lado, uma altura e um angulo. Seja de  $0^m,03$  a medida do lado; de  $0^m,02$  a da altura e  $A$  o angulo (fig. 255).

Marquemos  $AB = 0^m,03$  e do vertice levantemos uma perpendicular a  $BA$ .

Façamos  $AM = 0^m,02$ .

Pelo ponto  $M$  tiremos uma parallel a  $BA$  e por  $B$  uma outra a  $AC$ . O quadrilatero  $BADC$  resolve o problema.

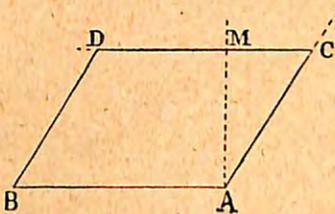


Fig. 255.

**Problema 100.** — Construir um parallelogramo conhecendo-se um angulo, o perimetro e uma diagonal.

Seja de  $0^{\circ},043$  a medida da diagonal; o perimetro igual a  $0^{\circ},10$  e  $N$  o angulo (fig. 256).

Façamos em  $A$  (fig. 257) um angulo igual a  $\frac{1}{2}$  de  $N$ ;

apliquemos em  $AB$  a metade do perimetro. Centro em  $B$ , e com um raio igual á diagonal determinemos o ponto  $C$ .

Tracemos a diagonal  $BC$ , e façamos passar pelo meio de  $CA$

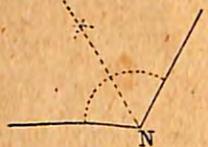


Fig. 256.

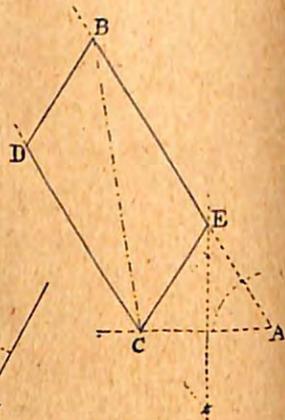


Fig. 257.

uma perpendicular que determine o ponto  $E$  na recta  $AB$ . Unamos  $E$  a  $C$  e por este ultimo ponto tracemos uma parallela a  $EB$ .

De  $B$  tracemos uma parallela a  $EC$  e acharemos o ponto  $D$ , quarto vertice do parallelogramo  $DCBE$ .

**Problema 101.** — Construir um trapezio symetrico. Tracemos uma recta  $AB$  (fig. 258), dividamol-a ao meio e com a distancia  $OA$  descrevamos uma semi-circumferencia tendo como centro o ponto  $O$  (meio da recta  $AB$ ).

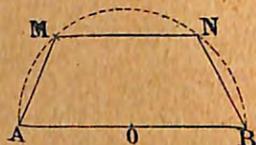


Fig. 258.

Do ponto  $A$  e com uma distancia qualquer determinemos o ponto  $M$  do qual façamos uma parallela a  $AB$ . Unamos os pontos  $M$  e  $A$ ;  $N$  e  $B$ . O quadrilatero  $ABMN$  é o trapezio symetrico pedido.

**Problema 102.** — Construir um trapezio isosceles conhecendo-se as duas bases e a altura.

A base maior =  $0^{\circ},04$ ; a menor =  $0^{\circ},03$  e a altura =  $0^{\circ},02$ .

Marquemos sobre uma recta :  $BC = 0^{\circ},04$  e pelo meio de  $BC$  (fig. 259) levantemos-lhe uma perpendicular.

Apliquemos, a partir de  $E$ ,  $ED = 0^{\circ},02$ .

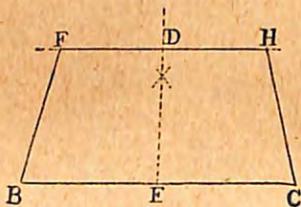


Fig. 259.

Façamos passar por  $D$  uma parallela a  $BC$  e com um raio igual a  $\frac{1}{2}$  de  $0^{\circ},03$  ( $0^{\circ},015$ ) determinemos do ponto  $D$ ,

os pontos  $F$  e  $H$ .

Unamos  $F$  a  $B$  e  $H$  a  $C$ .

$BCFH$  é o trapezio pedido.

**Problema 103.** = Construir um trapezio conhecendo-se as duas bases e os dois lados não parallelos. Seja a base maior =  $0^{\circ},035$ ; a base menor =  $0^{\circ},022$ ; um dos lados =  $0^{\circ},023$  e o outro =  $0^{\circ},03$ .

Marquemos em uma recta  $AD = 0^{\circ},035$  e  $AC = 0^{\circ},022$ .

Façamos centro em  $C$  (fig. 260) e com um raio igual a  $0^{\circ},03$  descrevamos um arco que será cortado no ponto  $E$  por um outro arco, traçado com um raio igual a  $0^{\circ},023$  e do ponto  $D$ , como centro.

De  $E$  tiremos uma parallela a  $AD$  e sobre essa parallela apliquemos  $EF = 0^{\circ},022$ .

Unamos o ponto  $F$  ao ponto  $A$ , e  $E$  ao ponto  $D$  : resolveremos assim o problema.

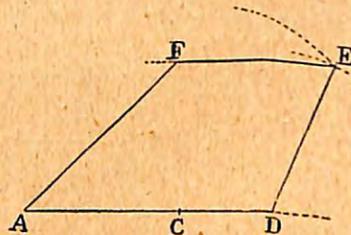


Fig. 260.

**Problema 104.** — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se as bases e um angulo.

Seja uma das bases  $= 0^m,05$ ; a outra  $= 0^m,03$ , e  $M$  o angulo (fig. 261).

Sobre uma recta marquemos  $AB = 0^m,05$  e  $AN = 0^m,03$ .

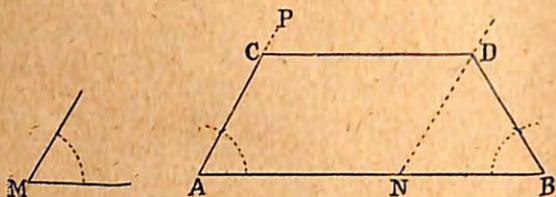


Fig. 261.

Fig. 262.

Formemos em  $A$  e em  $B$  (fig. 262) angulos eguaes a  $M$ . De  $N$  tracemos uma parallela a  $AP$  até determinar o ponto  $D$ , do qual tracemos uma outra parallela a  $AB$ .

$ABCD$  é o trapezio-isosceles pedido.

**Problema 105.** — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se uma base, a altura, e um dos lados eguaes.

Seja a base  $= 0^m,05$ ; a altura  $= 0^m,015$  e um dos lados  $= 0^m,02$ .

Sobre uma recta marquemos  $AB = 0^m,05$  e de um ponto

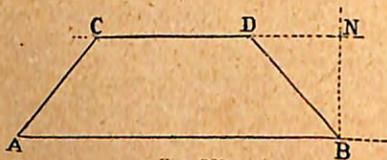


Fig. 263.

qualquer  $B$ , d'essa recta (fig. 263) levantemos-lhe uma perpendicular e façamos  $BN = 0^m,015$ .

Pelo ponto  $N$  tracemos uma parallela a  $AB$ .

Centro em  $A$  e depois em  $B$  e sempre com um raio egual  $0^m,02$  determinemos os pontos  $C$  e  $D$ .

$ABCD$  é a solução do problema.

**Problema 106.** — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se as bases e uma diagonal.

Seja uma das bases  $= 0^m,03$ ; a outra  $= 0^m,02$  e a diagonal  $= 0^m,028$ .

Marquemos em uma recta,  $AB = 0^m,03$  e  $AR = 0^m,02$  (fig. 264).

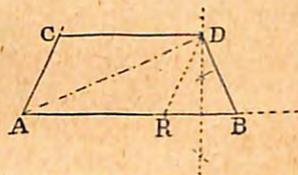


Fig. 264.

Pelo meio de  $RB$  façamos passar uma perpendicular e de  $A$ , como centro, e raio  $= 0^m,028$ , determinemos o ponto  $D$ .

Unamos  $D$  a  $B$  e  $R$ .

Pelo ponto  $A$  tiremos uma parallela a  $RD$ , e por  $D$  outra a  $AB$ .

$ABCD$  resolve o problema.

**Problema 107.** — Construir um trapezio conhecendo-se as bases e as diagonaes.

Seja uma das bases  $= 0^m,04$ ; a outra  $= 0^m,025$ ; uma diagonal  $= 0^m,04$  e a outra  $= 0^m,035$ .

Construamos o triangulo  $ACD$  (fig. 265), em que a base

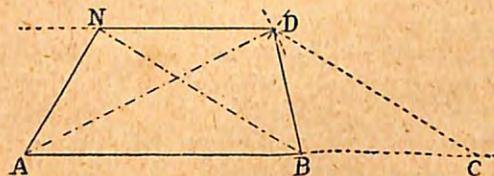


Fig. 265.

$AC$  é igual á somma das bases do trapezio ( $0^m,04 + 0^m,025 = 0^m,065$ ) e  $AD = 0^m,04$  (uma das diagonaes);  $CD = 0^m,035$  (outra diagonal).

Do ponto  $D$  tracemos uma parallela a  $AC$ , e de  $B$  a recta  $BN$  parallela a  $CD$ .

Unamos entre si  $N$  e  $A$ ;  $D$  e  $B$ .

$ABND$  é o trapezio pedido.

EXERCICIOS :

1. — Julinha! mostra um quadrilatero.
  2. — Traça sobre papel ou cartão um quadrilatero e em seguida recorta-o com a tesoura.
  3. — Quantos lados, — angulos, — vertices tem um quadrilatero?
  4. — Quantas diagonaes?
  5. — Que entendes por perimetro de um quadrilatero?
  6. — Quaes os quadrilateros que conheces?
  7. — Traça sobre papel um quadrado, um losango, um rectangulo, um parallelogrammo, um trapezio. Recorta cada um d'elles com uma tesoura.
  8. — Mostra as diagonaes de cada um.
  9. — Dize que sabes a respeito das diagonaes dos quadrilateros.
  10. — Que nome tem a recta que une os meios das bases de um trapezio symetrico?
  11. — Traça uma mediana de um quadrado; — de um losango; — de um rectangulo; — de um parallelogrammo.
  12. — Quantas medianas ha em cada um d'esses quadrilateros?
  13. — Que são quadrilateros isoperimetros?
  14. — A somma dos angulos de um quadrilatero é igual a quantos angulos rectos?
  15. — Exemplo.
  16. — Mostra praticamente que um quadrado com as diagonaes fica dividido em quatro triangulos rectangulo-isoceles iguaes.
- Traça um quadrado cujos dados sejam :*
17. — um lado =  $0^m,020$ .
  18. — a somma das diagonaes igual a uma decima parte do metro.
  19. — uma diagonal =  $0^m,03$ .
  20. — a differença entre o lado e a diagonal =  $0^m,015$ .
  21. — um lado =  $0^m,05$  e esteja em posição vertical.
  22. — idem, em posição horizontal.
  23. — uma diagonal =  $0^m,042$  e esteja em posição inclinada.
  24. — idem, em posição vertical.
  25. — idem, em posição horizontal.

*Traça um rectangulo cujos dados sejam :*

26. — dois lados adjacentes; um, o dobro do outro e a diagonal igual ao maior.
27. — base =  $0^m,040$  e a altura, metade da base.
28. — base = 5 vezes a altura e esta = diagonal de um quadrado de  $0^m,02$  de lado.
29. — um lado =  $0^m,06$  e uma diagonal =  $0^m,08$
30. — um lado =  $0^m,05$  e o angulo formado por elle e a diagonal =  $3/4$  do angulo recto.
31. — uma diagonal =  $0^m,09$  e o angulo formado por ella e um dos lados =  $60^\circ$ .
32. — uma diagonal =  $0,072$  e um dos angulos formados pelas duas diagonaes =  $1/3$  do angulo recto.
33. — um lado =  $0^m,054$  e um dos angulos formados pelas diagonaes =  $2/3$  do angulo recto.
34. — uma diagonal =  $0^m,07$  e o perimetro =  $0^m,20$ .
35. — as medianas eguaes, uma a  $0^m,06$  e outra a  $0^m,04$ .

*Traça um losango com os seguintes dados :*

36. — uma diagonal =  $0^m,040$  e um lado =  $0^m,030$ .
37. — uma diagonal =  $0^m,050$  e a outra =  $0^m,08$ .
38. — um lado =  $0^m,06$  e um angulo =  $135^\circ$ .
39. — um angulo =  $2/3$  do angulo recto e uma diagonal =  $0^m,075$ .

*Traça um parallelogrammo com os dados seguintes :*

40. — a base =  $0^m,04$ , um lado adjacente =  $0^m,025$  e o angulo formado por este lado e pela base =  $1/3$  do angulo recto.
41. — um lado =  $0^m,10$ ; o lado adjacente =  $0^m,06$  e a altura =  $0^m,035$ .
42. — um lado =  $0^m,064$ ; o lado adjacente =  $0^m,08$ , a diagonal =  $0^m,09$ .
43. — uma diagonal =  $0^m,09$ ; a outra =  $0^m,075$ ; um lado =  $0^m,04$ .
44. — um lado =  $0^m,05$ ; um angulo =  $1/2$  do angulo recto e uma diagonal =  $0^m,068$ .
45. — um lado =  $0^m,084$ ; a altura, metade do lado dado e um angulo =  $3/4$  do angulo recto.

46. — um angulo =  $\frac{2}{4}$  do angulo recto ; o perimetro =  $0^{\text{m}},108$ ; uma diagonal =  $0^{\text{m}},03$ .

*Traça um trapezio isosceles com os dados seguintes :*

47. — cada lado symetrico =  $0^{\text{m}},02$ .  
48. — base maior =  $0^{\text{m}},074$ ; base menor =  $0^{\text{m}},052$ ; altura =  $0^{\text{m}},032$ .  
49. — base maior =  $0^{\text{m}},065$ ; base menor =  $0^{\text{m}},04$ ; um angulo =  $\frac{2}{3}$  de dois angulos rectos.  
50. — base maior =  $0^{\text{m}},08$ ; a altura =  $0^{\text{m}},05$ ; um dos lados symetricos =  $0^{\text{m}},06$ .  
51. — base maior =  $0^{\text{m}},09$ ; base menor =  $0^{\text{m}},06$ ; uma diagonal =  $0^{\text{m}},08$ .  
52. — Qual o lado de um quadrado cujo perimetro é igual a 120 centimetros ?  
53. — Qual o lado de um losango cujo perimetro é igual ao de um triangulo equilatero de 12 centimetros de lado ?  
54. — Qual o perimetro de um quadrado de 60 metros de lado ?  
55. — Qual o perimetro de um losango de 32 kilometros de lado ?  
56. — Uma sala rectangular mede 8 metros de comprimento e 5 metros de largura; qual o perimetro d'esta sala ?  
57. — Qual o perimetro de um rectangulo cuja base mede 4 centimetros e um lado adjacente á base, 3 centimetros ?  
58. — Traça um quadrado de 3 centimetros de lado e sobre cada um dos lados, um triangulo equilatero.  
59. — Traça um triangulo equilatero de 2 centimetros de lado e sobre cada um dos lados, um quadrado.  
60. — Traça um quadrado e sobre cada um dos lados um triangulo isosceles cuja base seja =  $0^{\text{m}},02$  e a altura = diagonal do quadrado.  
61. — Traça um losango e sobre cada um dos lados um quadrado.  
62. — Traça um losango cuja metade seja igual a um triangulo equilatero de 40 millimetros de lado.

**Observação.** — Os angulos dados n'este capitulo devem ser traçados sem o transferidor cuja noção deve ser dada mais tarde.

## CAPITULO VII

SUMMARIO : Circumferencia. — Circulo. — Raio. — Diametro. — Arco. — Corda. — Flecha. — Secante. — Tangente. — Segmento. — Sector. — Angulo central. — Angulo inscripto. — Antricas e excentricas. — Circumferencias concenulas. — Circumferencias tangentes. — Traçado da circumferencia. — Problemas.

Uma linha curva fechada situada em um

## CIRCUMFERENCIA. CIRCULO.

mesmo plano e equidistante de um ponto interior, chama-se **circumferencia** (fig. 266).

A esse ponto interior dá-se o nome de **centro da circumferencia** e á porção do plano ou superficie plana limitada pela **circ-**

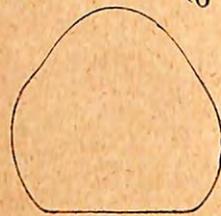


Fig. 266. — Uma circumferencia.

cumferencia, o nome de **circulo** (fig. 267).



Fig. 267. Circulo.



Fig. 268. Moeda de nickel: um circulo.

Um anel, um aro de pipa nos dão idéa de uma **circumferencia**.



Fig. 269. — Roda de um carro: um circulo.

Uma moeda de nickel (fig. 268), uma roda de um carro (fig. 269), um queijo de Minas o mostrador de um relógio, as lentes de um bino-



Fig. 270. — Pandeiro: um circulo.

culo, um pandeiro (fig. 270), têm a fórma circular, isto é, de um **circulo**.

A recta que liga o **centro** a qualquer ponto da **circumferencia**, chama-se **raio** (fig. 271) e toda a recta que liga dois pontos da **circumferencia** e passa

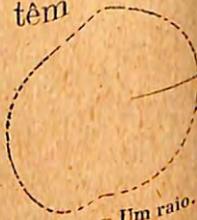


Fig. 271. — Um raio.

pelo **centro** chama-se **diametro** e é a maior

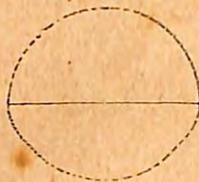


Fig. 272. — Um diametro.

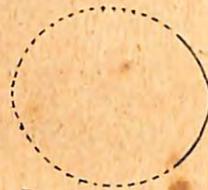


Fig. 273. — Um arco.

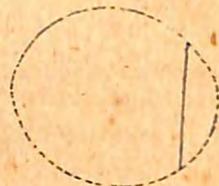


Fig. 274. — Uma corda.

**corda** que se póde traçar em uma **circumferencia** (fig. 272)

Em uma **circumferencia** todos os **raios** e **diametros** são eguaes.

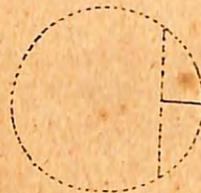


Fig. 275. — Uma flecha.

Uma porção qualquer da **circumferencia** chama-se **arco** (fig. 273) e a linha recta que liga as extremidades de um **arco** chama-se **corda** (fig. 274). Á perpendicular que parte do meio da **corda** e termina no **arco** dá-se o nome de **flecha** (fig. 275).

A recta que corta a **circumferencia** em dois pontos recebe o nome de **secante** (fig. 276).

Á recta que, situada fóra do **circulo**, tem um unico

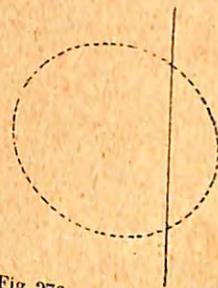


Fig. 276. — Uma secante.

ponto de commum com a **circumferencia** dá-se o nome de **tangente** (fig 277).

Esse ponto commum chama-se **ponto de contacto**.

Toda a **tangente** é perpendicular ao **raio** que termina no **ponto de contacto**.

A porção do **circulo** limitada pelo **arco** e pela **corda** chama-se **segmento** (fig. 278) e a porção comprehendida entre um **arco** e dois

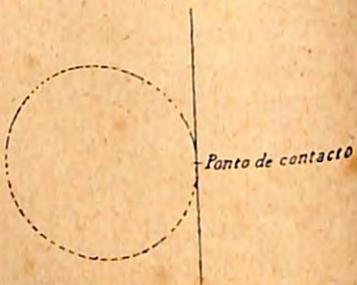


Fig 277. — Uma tangente.

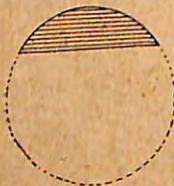


Fig. 278. — Um segmento.

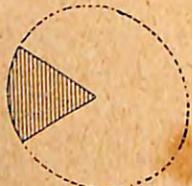


Fig. 279. — Um sector.

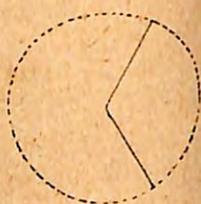


Fig. 280 — Angulo central.

**raios** que terminam nas suas extremidades chama-se **sector** (fig 279). O angulo cujo vertice está situado no **centro** da **circumferencia** e cujos lados são **raios** é **central** (fig. 288) e o que tem o vertice na **circumfe-**

**rencia** e os lados são **cordas** é **inscripto** (fig. 281).

O angulo **circumscripto** (fig. 282) tem o vertice fóra do circulo e os lados são tangentes á **circumferencia**.

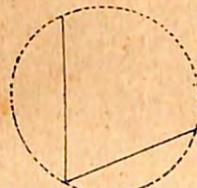


Fig. 281.  
Angulo inscripto.

As **circumferencias** que têm um mesmo centro chamam-se **concentricas** (fig. 283) e as que não têm um mesmo centro são **excentricas** (fig. 284).

A porção de um

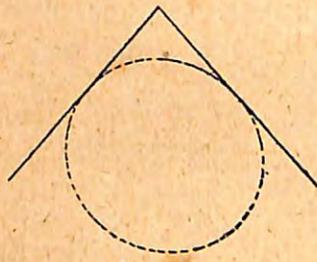


Fig. 282.  
Angulo circumscripto.

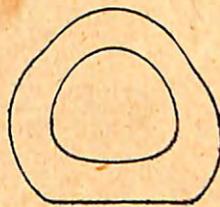


Fig. 283.  
Circumferencias concentricas.

plano comprehendida por duas **circumferencias concentricas** é uma **corôa circular** (fig. 285).

Quando duas ou mais **cir-**

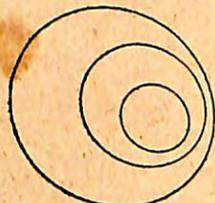


Fig. 284. — Circumferencias excentricas.

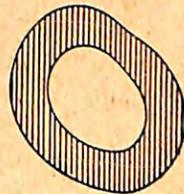


Fig. 285.

**cumferencias** têm entre si um unico ponto de contacto, são *tangentes* (fig. 286).

A porção do plano comprehendida por dois

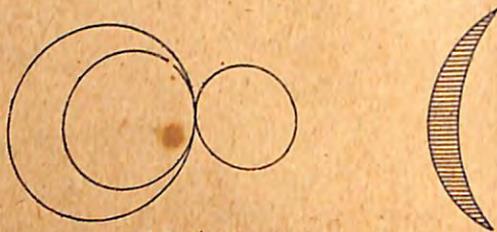


Fig. 286. — Circumferencias tangentes. Fig. 287. — Crescente

**arcos de circumferencias** secantes, tendo a convexidade voltada para um mesmo lado, é um *crescente* ou uma *lunula* (fig. 287).

### TRAÇADO DA CIRCUMFERENCIA

Geralmente sobre o papel, cartão ou madeira traçamos uma **circumferencia** com o auxilio de um instrumento chamado *compasso* (fig. 288).



Fig. 288. — Um compasso.

A distancia em linha recta entre as duas pontas do compasso é o **raio**, uma das pontas determina o **centro** e a outra movendo-se ao redor do centro descreve

a curva que conhecemos pelo nome de **circumferencia** (fig. 289).

Adaptado á ponta movel empregamos geralmente o giz, o lapis, o carvão.



Fig. 289. — Modo de traçar uma circumferencia sobre papel.

Em um terreno plano, fixamos uma estaca na qual prendemos por uma das extremidades um cordel, e na outra extremidade é collocada uma ponteira ou uma vara destinada a traçar a **circumferencia** (fig. 290). A estaca



Fig. 290. — Circumferencia traçada por um jardineiro.

occupa o **centro**, o cordel bem esticado é o **raio** e a ponteira ou a vara risca a **circumferencia**.

**Problema 108.** — Fazer passar uma circumferencia por tres pontos não em linha recta.

Sejam A, B e C os pontos (fig. 291). Unamos os pontos A e B ao ponto C; tracemos uma perpendicular pelo meio de BC e outra pelo meio de AC. Façamos centro em M (ponto de encontro das duas perpendiculares) e com o raio MB descrevamos a **circunferencia** que passará forçosamente pelos pontos A, B e C.

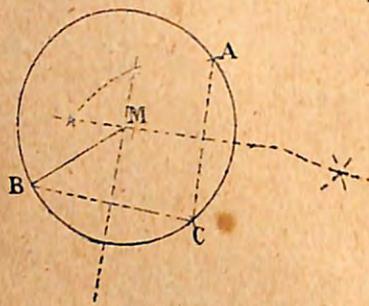


Fig. 291.

**Problema 109.** — Determinar o centro de uma circunferencia ou de um arco.

Seja ABC o arco cujo centro não é conhecido (fig. 292). Unamos o ponto B aos pontos A e C, e tracemos pelos

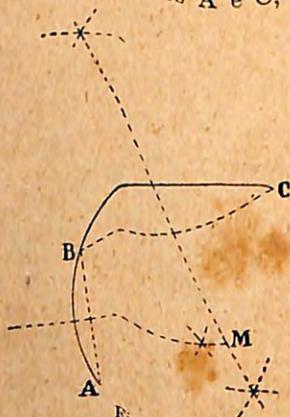


Fig. 292.

meios d'estas cordas duas perpendiculares que determinarão o ponto M, isto é, o *centro* do arco.

**Problema 110.** — Descrever um arco igual a um outro. Tracemos duas cordas quaesquer AB e CD no arco dado (fig. 293) e pelo meio de cada uma d'ellas façamos passar uma perpendicular.

As duas perpendiculares encontram-se no ponto M que é o centro do arco.

Com um raio MA descrevamos um arco (fig. 294) e reproduzamos em NR, a medida PQ, do arco conhecido.

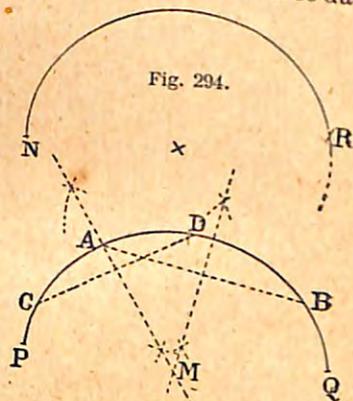


Fig. 293.

**Problema 111.** — Por um ponto dado em uma circunferencia, traçar uma tangente a esta circunferencia.

Unamos o centro O ao ponto dado M (fig. 295). Prolon-

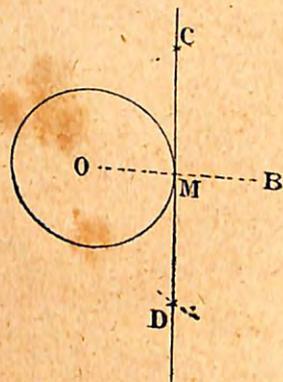


Fig. 295.

guemos OM de uma distancia  $MB = OM$  e depois

façamos passar pelo meio de OB a perpendicular CD que é a **tangente** pedida.

**Problema 112.** — Por um ponto dado fóra de uma cir-

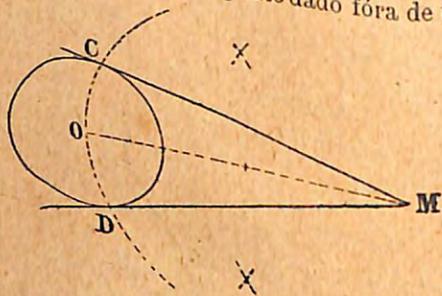


Fig. 296.

cumferencia, traçar uma tangente a esta circumferencia. Unamos o centro O ao ponto M e sobre OM (fig. 296), tracemos um arco que corte a circumferencia em dois pontos C e D. As rectas CM e DM são **tangentes** á circumferencia O.

**Problema 113.** — Traçar uma tangente a um arco por

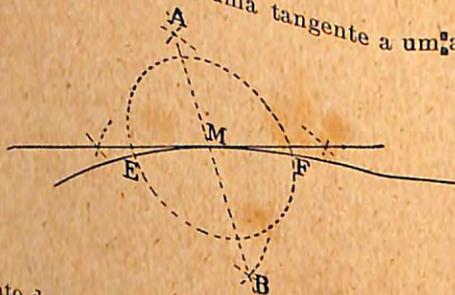


Fig. 297.

um ponto dado n'esse arco do qual não se póde determinar o centro. Seja M o ponto dado no arco (fig. 297).

Façamos centro n'esse ponto e descrevamos uma circumferencia de raio arbitrario; essa circumferencia corta o arco em E e F dos quaes, como centro, determinemos A e B.

Unamos entre si A e B e tracemos pelo ponto M uma perpendicular á recta AB.

Esta perpendicular é a **tangente** pedida.

*Outra solução.* — Tiremos uma corda que parta do

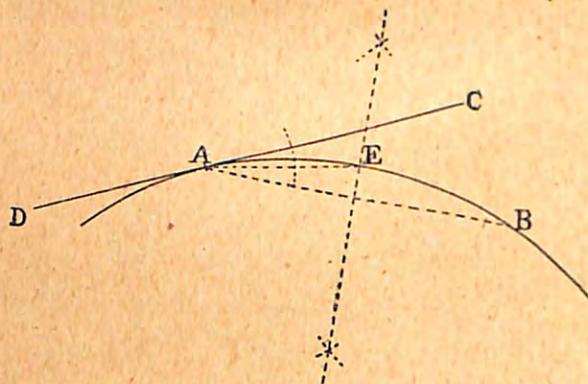


Fig. 298.

ponto dado A e dividamol-a ao meio por uma perpendicular (fig. 298).

Tracemos a recta EA e depois o angulo  $CAE = \text{angulo } EAB$ . CD é a **tangente**.

**Problema 114.** — Dada uma circumferencia e uma recta fóra do circulo, traçar á mesma circumferencia uma ou duas tangentes, parallelas á recta. Seja M a circumferencia cujo centro é C (fig. 299), e AB a recta situada fóra do circulo limitado por essa mesma circumferencia.

Façamos passar por C uma perpendicular á recta AB; esta perpendicular determinará na circumferencia os pontos E e F que serão os de contacto das duas tangentes.

Tracemos com a regua e o esquadro as rectas paralelas a AB e que passem por aquelles dois pontos.

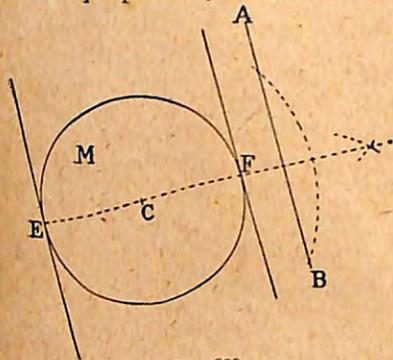


Fig. 299.

Centro em M e raio = MF descrevamos uma circumferecia. De G, (meio de MN) como centro e com um raio GM

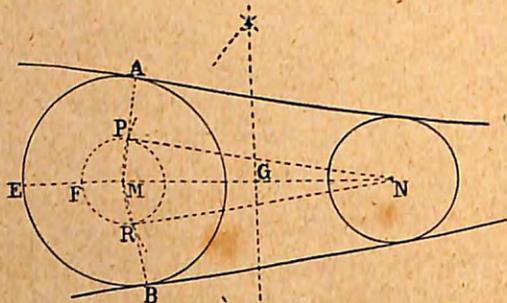


Fig. 300.

descrevamos um arco que determine os pontos P e R. Tracemos de M duas rectas que passem por P e R e terminem respectivamente em A e B. Unamos P e R ao centro N.

**Problema 115.** — Traçar duas rectas tangentes a duas circumferencias.

Façamos passar uma recta pelos centros M e N das duas circumferencias (fig. 300).

Reproduzamos em EF, a medida do raio da circumferencia menor.

De A tiremos uma parallela a PN e de B, outra a RN circumferencias de modo que se cortem e o ponto de intersecção fique entre as mesmas circumferencias.

Unamos os centros A e B (fig 301) e tracemos os dois raios AM e BN parallelos e collocados um em relação ao outro, em sentido opposto.

Unamos M a N por uma recta que cortará AB no ponto C.

Determinemos os pontos E (meio de AC) e F (meio de CB).

Descrevamos as duas circumferencias cujos centros são E e F, e cujos respectivos raios são EA e FC. Essas circumferencias determinam os pontos G e H, L e J. Tracemos as rectas que passam por GJ e HL, as tangentes pedidas.

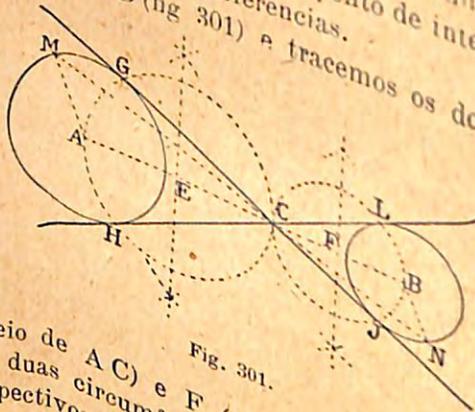


Fig. 301.

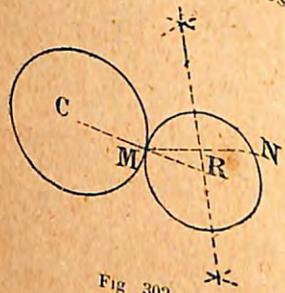


Fig. 302.

**Problema 117.** — Descrever uma circumferencia tangente a uma circumferencia em um ponto dado, e outra por um ponto situado fóra d'essa circumferencia. Sejam M e N (fig. 302) os pontos dados, este fóra e aquelle situado na circumferencia C. Unamos por linhas rectas o ponto M aos pontos C e N, prolonguemos indefinidamente o raio CM. Façamos passar uma perpendicular pelo meio da recta MN; do ponto de intersecção R, com um raio RM des-

crevamos uma circunferencia que será tangente á primeira no ponto M e passará pelo ponto N.

**Problema 118.** — Descrever uma circunferencia tangente a uma outra em um ponto dado, e passando por um ponto situado no interior da circunferencia.

Tracemos o raio CM (fig. 303) e unamos entre si os pontos M e N; façamos passar pelo meio da recta MN uma perpendicular e do ponto de intersecção P, como centro, com um raio igual a PM, descrevamos uma circunferencia que será tangente á primeira no ponto dado M e passará pelo ponto N.

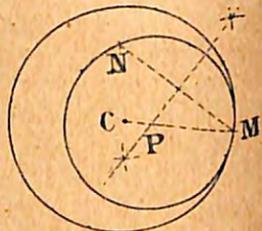


Fig. 303.

**Problema 119.** — Descrever uma circunferencia que seja tangente a uma recta em um ponto dado e passe por um outro ponto fóra d'essa recta.

Seja MN a recta, A o ponto d'essa recta, e B o outro ponto fóra (fig. 304).

Unamos o ponto A ao ponto B e façamos passar pelo meio uma perpendicular.

Tiremos do ponto A uma perpendicular a MN; esta

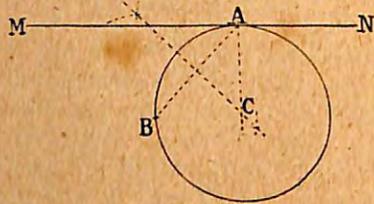


Fig. 304.

ultima cortará a que passa pelo meio de AB determinando o ponto C que será o centro da circunferencia desejada.

**Problema 120.** — Descrever uma circunferencia tan-

ente a uma recta e passando por dois pontos fóra da recta. Sejam A e C os pontos fóra da recta MN (fig. 305). Tiremos por CA uma recta até determinar o ponto E.

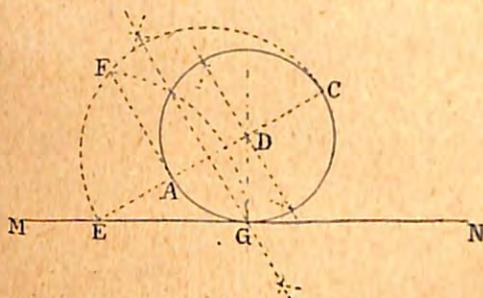


Fig. 305.

Dividamos a recta EC ao meio e descrevamos a semi-circunferencia EC.

Do ponto A levantemos uma perpendicular a EC até determinar o ponto F na semi-circunferencia.

Centro em E e raio igual a EF descrevamos o arco FG. De G levantemos uma perpendicular e pelo meio de AC façamos passar outra perpendicular que se encontrará com a primeira no ponto D, centro da circunferencia tangente.

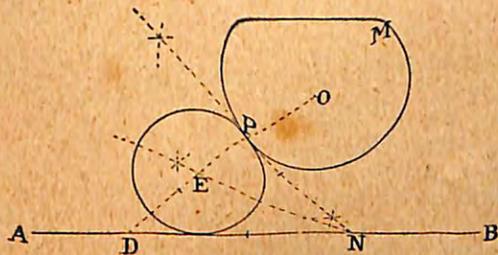


Fig. 306.

**Problema 121.** — Descrever uma circunferencia tangente a uma outra e a uma recta dada.

Seja AB a recta e M a circunferencia (fig. 306).

Do centro O tracemos um raio qualquer de modo que seu prolongamento corte a recta dada, e por P façamos passar uma perpendicular até marcar o ponto N na recta AB.

Tracemos a bissectriz do angulo PNA, a qual cortará a recta OD no ponto E.

Descrevamos com o raio EP e centro em E a circumferencia pedida.

**Problema 122.** — Descrever uma circumferencia tan-

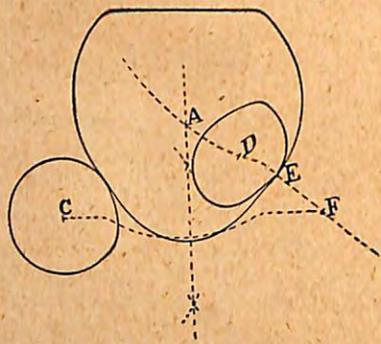


Fig. 307.

gente a duas outras de modo que uma fique no circulo limitado pela circumferencia e a outra fóra.

Pelo centro D, da circumferencia menor, (fig. 307) façamos passar uma recta qualquer e marquemos EF = ao raio da circumferencia maior.

Unamos C a F e pelo meio de CF tracemos uma perpendicular que determinará o ponto A na recta que passa por D.

Centro em A e com um raio AE, descrevamos uma circumferencia que tangenciará as duas circumferencias dadas.

**Problema 123.** — Descrever duas circumferencias tangentes a uma terceira e a uma recta em um ponto dado.

Pelo ponto dado M tracemos uma perpendicular á recta conhecida (fig. 308).

Marquemos as distancias MN e MP eguaes, cada uma, ao raio CD da circumferencia dada.

Unamos C a N e a P.

Pelo meio de CN e CP tracemos perpendiculares que

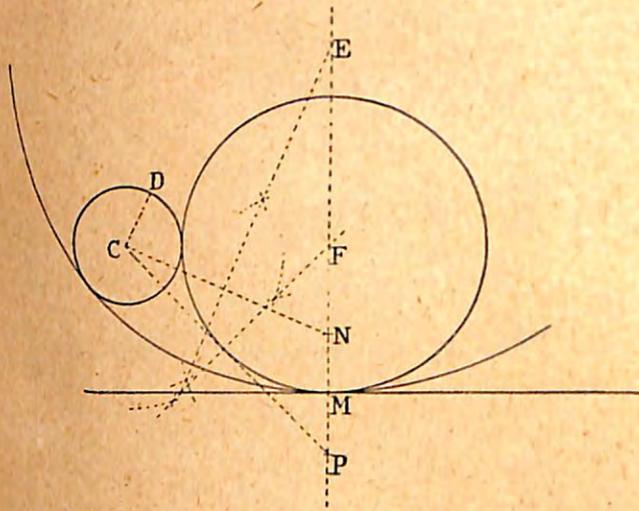


Fig. 308.

determinarão os pontos E e F, centros das duas circumferencias tangentes cujos raios respectivos são EM e FM.

Descrevamol-as e resolveremos o problema.

**Problema 124.** — Descrever quatro circumferencias tangentes a tres rectas que se cortem duas a duas.

As rectas AB, CD e EF se cortam duas a duas formando um triangulo MNO (fig. 309).

Tracemos as bissectrizes dos angulos d'esse triangulo, prolongando-as e tambem as de tres dos angulos externos desse mesmo triangulo, por exemplo, de FMO, NOD e MNA prolongando-as em ambas as direcções.

Essas bissectrizes, o são tambem dos angulos vertical-

mente oppostos e encontram-se com as dos angulos internos nos pontos 1, 2 e 3 que são os centros das circumferencias

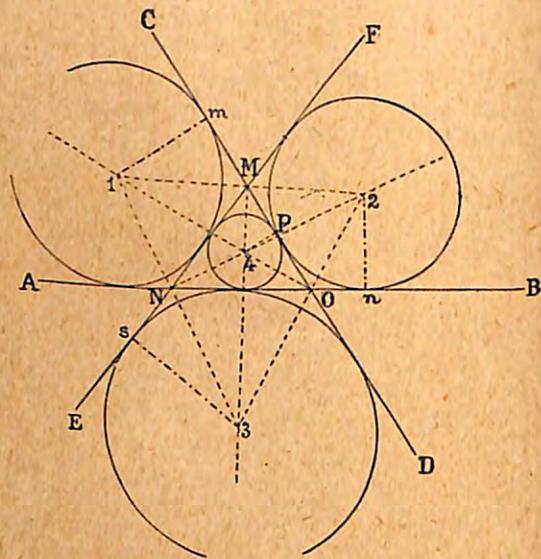


Fig. 309.

tangentes exteriores cujos raios são respectivamente as perpendiculares  $1m$ ,  $2n$  e  $3s$ .

O ponto 4 será o centro e  $4p$  o raio da circumferencia inscripta no triangulo.

**Problema 125.** — Descrever diversas circumferencias tangentes entre si e a duas rectas convergentes. Tracemos a bissectriz do angulo  $MVN$  formado pelas rectas convergentes  $MV$  e  $NV$  (fig. 310).

Tomemos o ponto  $A$  da recta  $MV$  como primeiro ponto de contacto e por elle levantemos uma perpendicular até determinar o ponto  $E$  na bissectriz. Com o raio  $EA$  e centro em  $E$  descrevamos a primeira circumferencia.

Pelo ponto  $F$  façamos passar uma perpendicular á bissectriz e de  $G$ , como centro e raio  $GF$  descrevamos o arco  $FH$ .

D'este ultimo ponto  $H$  levantemos outra perpendicular á recta  $MV$  até determinar o ponto  $J$  na bissectriz.

Centro em  $J$  e raio  $JF$  descrevamos a segunda circum-

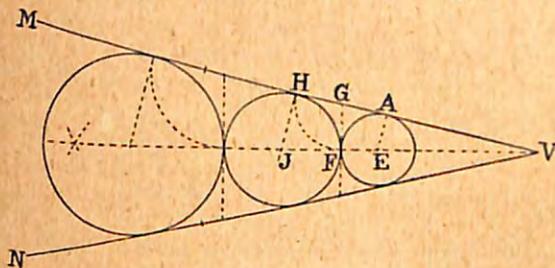


Fig. 310.

ferencia tangente á primeira e ás duas rectas convergentes.

Proseguindo d'esse modo, obteremos tantas circumferencias tangentes, quantas quizermos.

### EXERCICIOS :

1. — Aloysa ! traça uma circumferencia
2. — Que é uma circumferencia ?
3. — Como se chama a porção de superficie plana limitada pela circumferencia ?
4. — Conheces alguns objectos usuaes que têm a fórma de um circulo ? Exemplos.
5. — Que é um raio ?
6. — Traça um raio.
7. — Que é um diametro ?
8. — Traça um diametro.
9. — Que é um arco ? — uma corda ? — uma flecha ?
10. — Traça um arco, uma corda, uma flecha.
11. — Que é uma secante ? — uma tangente ?
12. — Traça uma secante, — uma tangente.

13. — Desenha um segmento, — um sector.
14. — Que é um segmento? — um sector?
15. — Traça um angulo central.
16. — Traça um angulo inscripto.
17. — Os lados de um angulo central, que são em relação á circumferencia?
18. — E ós lados de um angulo inscripto? — de um angulo circumscripto?
19. — Traça um angulo circumscripto.
20. — Que é um angulo central? — um angulo inscripto? — um angulo circumscripto?
21. — Traça tres circumferencias concentricas.
22. — Quantos centros póde ter uma circumferencia?
23. — Quantas circumferencias podem ter o mesmo centro?
24. — Que são circumferencias concentricas?
25. — Traça duas circumferencias excentricas.
26. — Que são circumferencias excentricas?
27. — Traça uma coróa circular.
28. — Que é uma coróa circular?
29. — Traça duas circumferencias tangentes.
30. — Que são circumferencias tangentes?
31. — Traça uma lunula.
32. — Que é uma lunula?
33. — Conheces os diversos modos de traçar uma circumferencia?
34. — Quaes são?
35. — Traça um arco. Apaga o centro e determina-o novamente.
36. — Traça um arco igual ao precedente.
37. — Traça uma tangente a uma circumferencia por um ponto dado. Faze o mesmo a um arco cujo centro não possas determinar.
38. — Traça uma circumferencia de  $0^m,02$  de raio e uma recta de  $0^m,06$  de comprimento e depois traça duas tangentes á circumferencia e parallelas á recta.
39. — Traça duas rectas tangentes a duas circumferencias tendo uma o raio =  $0^m,03$  e a outra =  $0^m,025$ .
40. — Traça uma circumferencia de  $0^m,08$  de dimetração e outra de  $0^m,023$  de raio e depois duas rectas tangentes a ella,

de modo que se cortem e o ponto de intersecção fique entre as mesmas circumferencias.

41. — Traça uma circumferencia de  $0^m,032$  de raio e marca um ponto fóra d'ella. Faze passar por esse ponto e por um outro da curva uma circumferencia tangente.

42. — Descreve uma circumferencia de  $0^m,07$  de diametro, marca-lhe um ponto e um outro no circulo por ella limitado. Faze passar por esses dois pontos uma circumferencia que seja tangente á primeira.

43. — Traça uma recta de  $0^m,08$  e marca fóra d'ella dois pontos. Faze passar por esses dois pontos uma circumferencia que seja tangente á recta.

44. — Traça uma recta de  $0^m,09$  e uma circumferencia de  $0^m,012$  de raio. Faze passar uma circumferencia tangente a ambas.

45. — Traça um triangulo qualquer; prolonga-lhe os lados e descreve quatro circumferencias tangentes a estas rectas que se cortam duas a duas.

46. — Faze um angulo igual a  $1/3$  do angulo recto e traça quatro circumferencias que sejam tangentes interiores aos lados do angulo e tambem o sejam entre si.

47. — Em um angulo de  $60^\circ$  ( $2/3$  do angulo recto) com o centro a 4 centimetros do vertice, sobre a bissectriz, traça uma circumferencia que tangencie os lados d'esse angulo.

48. — Descreve uma circumferencia tangente a duas rectas parallelas distantes  $0^m,04$  uma da outra.

## CAPITULO VIII

SUMMARIO : **Polygonos.** — **Polygonos regulares, irregulares, inscriptos, circumscriptos, estrelados.** — Medida dos angulos. — Divisão da circumferencia. — Problemas.

Uma superficie plana limitada por muitas rectas chama-se **polygono** (fig. 311). Estas rectas são os lados do **polygono**. Á somma dos lados de um **polygono** dá-se o nome de **perimetro**.

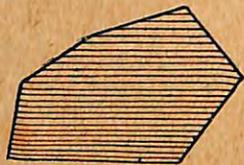


Fig. 311. — Polygono.

Geralmente a denominação de **polygono** é dada ás superficies planas limitadas, por mais de quatro rectas, entretanto algumas ha que

— 145 —

têm nome especial, assim por exemplo :

um **polygono** de

- 5 lados — *pentagono*.
- 6 lados — *hexagono*.
- 7 lados — *heptagono*.
- 8 lados — *octogono*.
- 9 lados — *enneagono*.
- 10 lados — *decagono*.
- 11 lados — *hendecagono*.
- 12 lados — *dodecagono*.
- 15 lados — *pentadecagono*.
- 20 lados — *icosagono*.

Um **polygono** póde ter angulos rectos, agudos, obtusos, salientes, reintrantes, eguaes e deseguaes.

Um **polygono** é *regular* ou *irregular*.

Si os lados e angulos são eguaes, o **polygono** é *regular*; e si são deseguaes, o **polygono** é *irregular*.

A recta que une dois vertices não consecutivos de um **polygono** chama-se *diagonal*.

Já sabemos que a somma dos angulos de um **triangulo** é egual a dois angulos rectos; portanto para conhecermos a somma dos an-

gulos de um **polygono** qualquer, decompol-o em triangulos, pelas diagonaes partindo de um só vertice, (fig. 312).

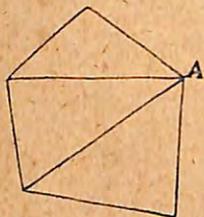


Fig. 312. — Um pentagono decomposto em tres triangulos.

*Tantos triangulos : tantas vezes dois angulos rectos* ; assim, por exemplo, um pentagono (fig. 312) decompõe-se em tres triangulos e a somma de seus angulos é igual a 3 vezes 2 angulos rectos ou

6 angulos rectos.

A somma dos angulos de um **polygono** é igual a tantas vezes dois angulos rectos, quantos são os lados, menos dois.

Entre os triangulos, o equilatero ou equiangulo é regular ; e entre os quadrilateros, é regular o quadrado. Todo o **polygono regular** póde ser sempre inscripto em um circulo.

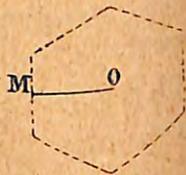


Fig. 313. Apothema O.M.

A recta que une o centro do **polygono** ao meio de um de seus lados chama-se *apothema* (fig. 313).

Um **polygono** é *inscripto* em um circulo quando os vertices de seus angulos se acham

na circumferencia que limita o circulo e seus lados são cordas. O **polygono** ABCDEF é *inscripto* no circulo C (fig. 314).

Um **polygono** é *circumscripto* a um circulo quando os lados são tangentes á circumferencia que limita o circulo. O **polygono** MNPRS

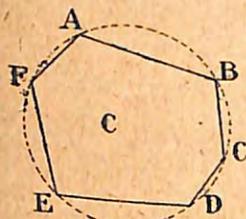


Fig. 314.

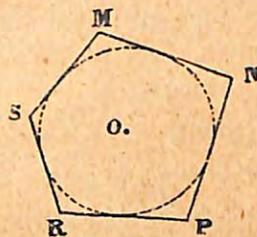


Fig. 315.

(fig. 315) é *circumscripto* ao circulo O.

Um **polygono** que tem angulos alternativamente salientes e reintrantes chama-se **estrellado**.

**Medir um angulo** é comparal-o com um

outro angulo tomado para unidade de medida.

A *unidade* para medir os angulos obtem-se dividindo um

angulo recto em noventa partes eguaes.

## MEDIDA DOS ANGULOS. DIVISÃO DA CIRCUMFERENCIA.

Cada uma d'essas partes eguaes chama-se um **gráo**.

O **gráo** divide-se em **minutos** e **segundos**. **Sessenta minutos** fazem um **gráo** e **sessenta segundos** fazem um **minuto**.

O **gráo** é designado por um **zero** collocado á direita e um pouco acima do numero que o exprime. Exemplo : 6° lê-se *seis grãos*.

O **minuto** é designado por um **accento** e o **segundo** por dois collocados no mesmo logar do zero para designar o gráo. Exemplo : 9' lê-se *nove minutos* ; 14" lê-se *quatorze segundos*.

19° 14' 8" lê-se : *desenove grãos, quatorze minutos e oito segundos*.

*Cada angulo de um polygono regular de*

3 lados mede . . . .	60°
4 — . . . .	90°
5 — . . . .	108°
6 — . . . .	120°
8 — . . . .	135°
9 — . . . .	140°
10 — . . . .	144°
12 — . . . .	150°
15 — . . . .	156°
16 — . . . .	157°, 5
18 — . . . .	160°
20 — . . . .	162°

Observemos qual a relação que existe entre os **angulos** e os **arcos** comprehendidos entre seus lados e descriptos com o mesmo raio a partir de seus vertices.

Comparemos na figura 316 os **angulos** AOB, AOC, AOD, AOE com os **arcos** AB, AC, AD, AE comprehendidos entre

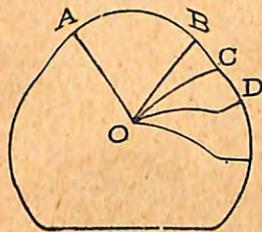


Fig. 316.

seus lados, e veremos que ao maior angulo corresponde maior arco e ao menor angulo, menor arco. D'ahi tiramos a conclusão de que em uma mesma circumferencia, ao **maior angulo central** corresponde **maior arco** e ao **menor angulo, menor arco**.

Em um mesmo circulo ou em circulos eguaes, aos angulos centraes eguaes correspondem arcos tambem eguaes ; o que podemos verificar praticamente, fazendo coincidir por

superposição dois angulos depois de traçados e recortados em cartão.

Para *medir* ou *transferir* um angulo no papel ou no cartão, usamos de um instrumento chamado *transferidor* (fig. 317).

O *transferidor* consiste geralmente em um semi-circulo de madeira, chifre, ou latão, cuja

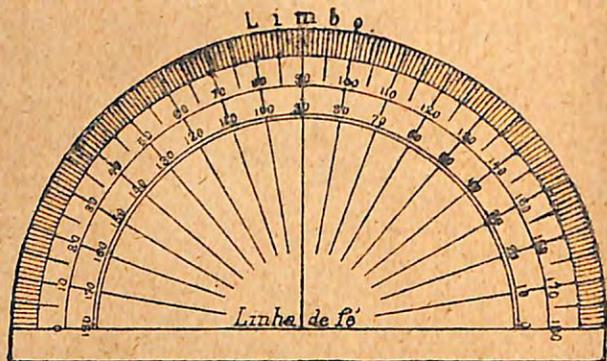


Fig. 317.

semi-circumferencia é dividida em 180 partes eguaes. Cada uma d'essas 180 partes eguaes chama-se um **gráo**. A essa semi-circumferencia dá-se o nome de *limbo*, e ao diametro que liga as extremidades da semi-circumferencia o nome de *linha de fé*.

O **angulo central** tem por medida o arco comprehendido entre seus lados.

O **angulo inscripto** tem por medida a

metade do arco comprehendido entre seus lados.

O **angulo** AVB (fig. 318) tem por medida a metade do arco AB, porque si fizermos passar pelo ponto C a recta MN parallelamente a VB, os angulos AVB e ACN serão eguaes

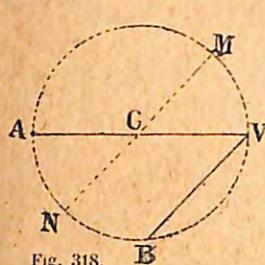


Fig. 318.

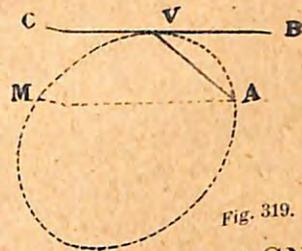


Fig. 319.

como *correspondentes*; ora a **angulo** ACN sendo **central** tem por medida o arco comprehendido entre seus lados; mas AN é igual a MV porque estes dous arcos são a medida de dois angulos eguaes ACN e MCV; de mais, por causa das parallelas MN e VB, NB é igual a MV; portanto NB é egual a AN. O angulo ACN tem por medida a metade do arco ANB e o **angulo** AVB que é igual ao angulo ACN tem a mesma medida.

O **angulo do segmento** tem por medida a metade do arco subtendido pela corda que fórma um de seus lados.

O **angulo** AVB (fig. 319) tem por medida

a metade do arco VA porque, si tirarmos do ponto A uma recta AM paralela a BC, o angulo AVB ficará egual ao angulo VAM como *alternos-internos*, formados pelas parallelas CB e MA e pela obliqua VA. O **angulo inscripto** VAM tem por medida a metade do arco VM, que é egual ao arco VA; portanto o

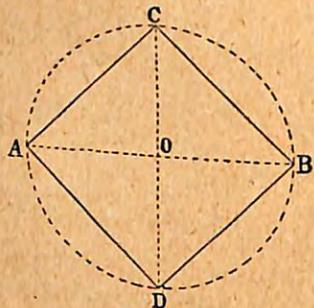


Fig. 320.

**angulo do segmento** AVB tem por medida a metade do arco VA.

**Problema 126.** — Inscrever um quadrado em um circulo.

Tracemos um diametro qualquer AB (fig. 320); tracemos um segundo diametro CD perpendicular ao primeiro; unamos, duas a duas, as extremidades A, C, B, D, e o poligono formado é o **quadrado** inscripto no circulo O. A circumferencia ficou dividida em quatro partes eguaes.

**Problema 127.** — Inscrever um hexagono regular e um triangulo equilatero em um circulo.

A inscripção de um **hexagono regular** em um cir-

culo ou a divisão da circumferencia em seis partes eguaes é simples.

Tracemos uma circumferencia e um diametro AB (fig. 321).

Façamos centro em A e depois em B e com um mesmo raio egual a OA determinemos os pontos C, D, E, F. Tra-

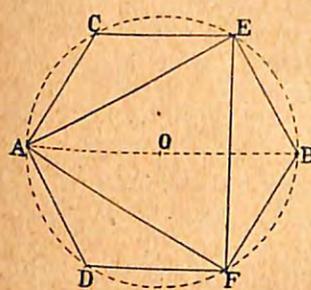


Fig. 321.

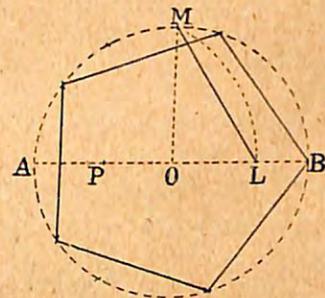


Fig. 322.

çamos a linha polygonal ADFBECA e teremos o hexagono regular inscripto.

Para inscrevermos em um circulo um triangulo equilatero, juntaremos os vertices não consecutivos; assim por exemplo: unamos os pontos A EF da figura 321 e acharemos o triangulo equilatero inscripto no circulo O.

**Problema 128.** — Inscrever em um circulo um pentagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos um diametro AB (fig. 322). Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

Tomemos o meio do raio OA. Do ponto P como centro e com o raio egual a PM determinemos o ponto L, o qual, ligado ao ponto M nos dá o lado do **pentagono** regular inscripto no circulo O.

Appliquemos sobre a circumferencia, a partir de B, duas vezes a medida LM para um e para outro lado:

unamos dois a dois os pontos de divisão da circumferencia e teremos o pentagono:

**Problema 129.** — Inscrever em um circulo um heptagono regular.

Descrevamos uma circumferencia (fig. 323) e tiremos um raio OA. Levantemos pelo meio do raio uma perpendicular BC até encontrar a circumferencia. A distancia do pé da perpendicular ao ponto em que ella encontra a circumferencia será o lado do **heptagono regular** inscripto.

Apliquemos a partir de A, sobre a circumferencia, tres vezes a medida BC, seguidamente, para um e para outro lado. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

**Problema 130.** — Inscrever em um circulo um octogono regular.

Inscrevamos um **quadrado** (fig. 324), tiremos a bisse-

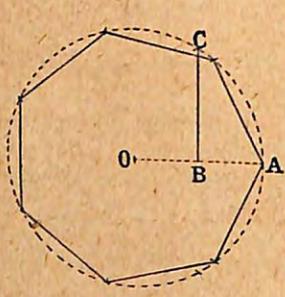


Fig. 323.

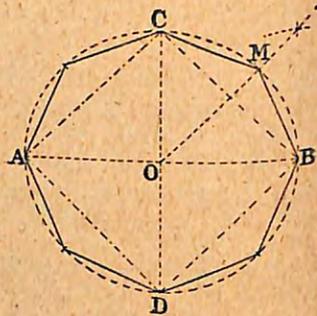


Fig. 324.

triz do angulo COB; unamos o ponto M ao ponto B. A distancia MB é o lado do **octogono regular** inscripto.

Procedamos igualmente quanto aos angulos BOD, AOD, AOC e d'esse modo dividiremos a circumferencia em 8 partes eguaes. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

**Problema 131.** — Inscrever em um circulo um enneagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois diametros perpendiculares entre si (fig. 325). Com o centro em B e com o mesmo raio (OB) descrevamos um arco OG; com o centro em A e com o raio igual á distancia AG, des-

crevamos um arco GC até encontrar o prolongamento do diametro FE. Com o centro no ponto C e com a distancia AC ou BC tracemos o arco BD. A distancia DF será o lado do **enneagono regular** inscripto.

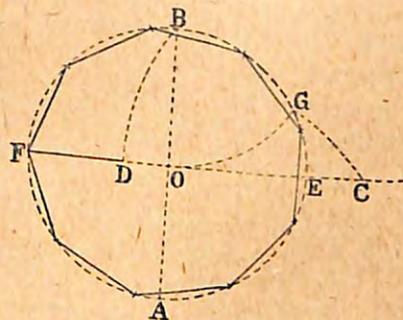


Fig. 325.

Reproduzamos sobre a circumferencia, e a partir do ponto F, a medida DF, quatro vezes seguidamente para cada lado e unamos os pontos obtidos dois a dois.

*Outra solução.* — Tracemos a circumferencia e tiremos

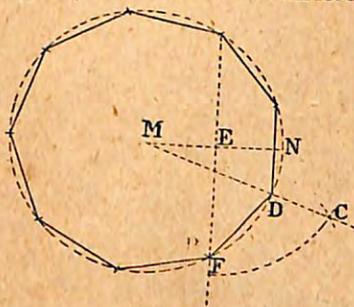


Fig. 326.

o raio MN (fig. 326) pelo meio do qual façamos passar uma perpendicular.

Centro em E e com o mesmo raio da circumferencia des-

crevamos um arco que cortará a perpendicular em F; centro n'esse ponto e com o mesmo raio descrevamos um outro arco que determinará o ponto C. Unamos M a C por uma recta, que cortará a circumferencia no ponto D. DP é o lado do enneagono regular; procedamos como indica a 1.<sup>a</sup> solução.

**Problema 132.** — Inscrever em um circulo um decagono regular.

Descrevamos uma circumferencia, e tracemos um diametro AB (fig. 327).

Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

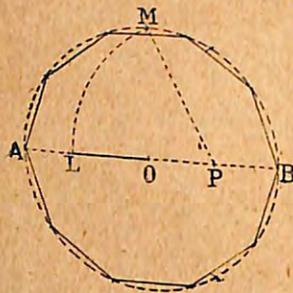


Fig. 327.

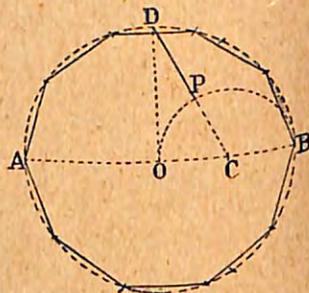


Fig. 328.

Tomemos o meio do raio OB e, a partir do ponto P para o ponto A, marquemos no diametro a distancia PL igual a PM. A distancia OL será o lado do **decagono regular** inscripto.

Appliquemos sobre a circumferencia, e a partir dos pontos A e B, a distancia OL duas vezes seguidamente para cada lado; unamos esses pontos de divisão dois a dois.

*Outra solução.* — Tracemos um diametro AB (fig. 328) e o raio OD perpendicular ao mesmo diametro.

Dividamos OB ao meio e unamos C a D.

Centro em C e raio igual a CB determinemos o ponto P. DP é o lado do decagono regular inscripto.

Procedamos então como na 1.<sup>a</sup> solução.

**Problema 133.** — Inscrever em um circulo um hendecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos o diametro AB (fig. 329).

Tomemos o meio da semi-circumferencia ACB e tambem do raio OB. Unamos o ponto C ao ponto D e dividamos ao meio a recta CD.

Com o compasso appliquemos seguidamente a metade de CD, cinco vezes de cada lado, a partir de B e depois de unidos os pontos de divisão, teremos o hendecagono regular inscripto.

*Outra solução.* — Tracemos um diametro AB (fig. 330).

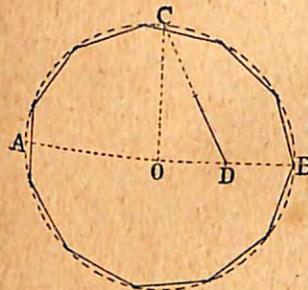


Fig. 329.

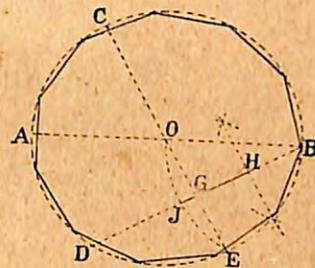


Fig. 330.

Façamos centro em A e, com um raio OA marquemos C e D.

Centro em B e com o mesmo raio, descrevamos OE.

Unamos entre si D e B, C e E. Dividamos GB ao meio e teremos JH, que é o lado do hendecagono. Procedamos como na 1.<sup>a</sup> solução.

**Problema 134.** — Inscrever em um circulo um dodecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois dia-

metros AB e CD perpendiculares entre si (fig. 331).  
 Centro em cada uma das extremidades dos diâmetros e com o mesmo raio da circunferencia determinemos os pontos: 1 e 2 da extremidade A; 3 e 4 de B; 5 e 6 de C e 7 e 8 de D.

Unamos dois a dois esses pontos e teremos o polygono pedido.

**Problema 135.** — Inscrever em um circulo um pentadecagono regular.  
 Descrevamos uma circunferencia e determinemos o

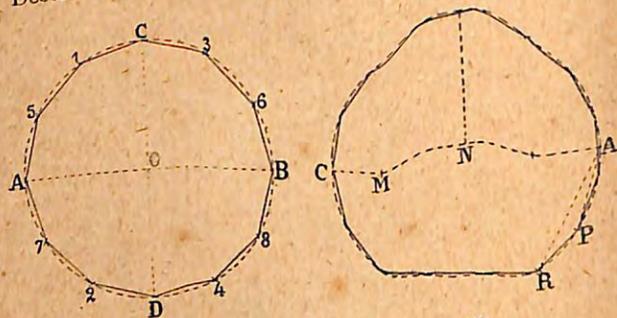


Fig. 331.

Fig. 332.

lado do decagono regular inscripto. MN é o lado do decagono (fig. 332).

A partir de um ponto qualquer A, applicamos a medida AR igual ao lado do hexagono regular inscripto ( $AR = NA$ ) e  $AP = MN$ .

A corda PR é o lado do pentadecagono regular inscripto; applicamol-a pois a partir do ponto C e sobre a circunferencia sete vezes de cada lado. Unamos dois a dois os pontos de divisão.

**Problema 136.** — Medir um angulo ou um arco com o transferidor.

Para medir um angulo (fig. 333) façamos coincidir o centro do transferidor com o vertice do angulo que se quer medir e a linha de fé com um dos lados do angulo.

A divisão do limbo, sob a qual fica o outro lado do angulo, determina seu valor

Para determinar o numero de grãos de um arco, ligamos as extremidades d'esse arco ao seu centro por meio dos raios e medimos o angulo central. A medida do angulo central é a do arco.

**Problema 137.** — Construir um angulo com o transferidor.

Tracemos uma recta, marquemos sobre ella um ponto; façamos coincidir o centro do transferidor com esse ponto e a linha de fé com a recta; procuremos no limbo a medida do angulo e marquemos um ponto defronte do limite d'essa medida. A recta que une esses dous pontos fórma, com a primeira, o angulo pedido.

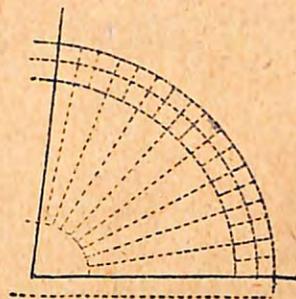


Fig. 333.

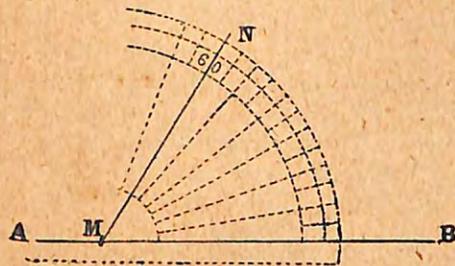


Fig. 334.

**Exemplo:** — Seja de  $60^\circ$  o angulo que desejamos construir.

Tracemos uma recta AB (fig. 334), tomemos sobre ella

o ponto M, façamos coincidir o centro do transferidor com o ponto M e a linha de fé com a recta AB. Marquemos depois um ponto N defronte da divisão 60 a contar da direita para a esquerda; unamos o ponto N ao ponto M. NMB é o angulo pedido.

**Problema 138.** — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 60°

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbi-

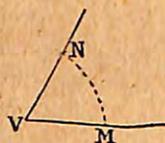


Fig. 335.

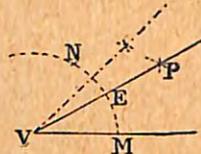


Fig. 336.

trario, descrevamos um arco de modo que determine o ponto M na mesma recta (fig. 335).

Façamos centro n'esse ponto e com o mesmo raio determinemos o ponto N.

Unamos V a N e formaremos o angulo NVM.

**Problema 139.** — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 30°, de 15° e de 45°.

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco de modo que determine o ponto M na recta (fig. 336).

Façamos centro em M e com o mesmo raio marquemos o ponto N. De M e N determinemos o ponto P, o qual unido a V fórma o angulo de 30°.

Procedendo-se de modo igual e por fim traçando-se a bissectriz do angulo de 30° ter-se-á o de 15°

Si dividirmos o arco NE ao meio e unirmos o ponto achado ao vertice V, faremos com a recta VM um angulo de 45°.

**Problema 140.** — Traçar com a regua e o compasso um angulo de 120°.

Façamos centro na extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco que determine o ponto M (fig. 337).

Appliquemos sobre o arco duas vezes, consecutivamente e a partir de M, o mesmo raio.

Unamos o ponto P a V e teremos formado o angulo PVM.

**Problema 141.** — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 135°.

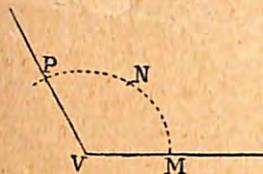


Fig. 337.

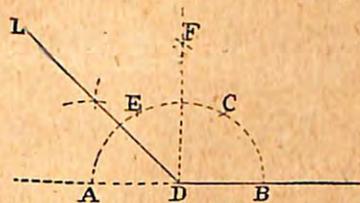


Fig. 338.

De um ponto D em uma recta e com um raio arbitrario descrevamos a semi-circumferencia AB (fig. 338).

Com o mesmo raio, determinemos de B o ponto C; d'este, o ponto E e dos pontos E e C o ponto F.

Unamos este ultimo ponto a D.

Tracemos a bissectriz do angulo ADF e obteremos o angulo pedido LDB.

**Problema 142.** — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 150°.

Por um ponto V de uma recta e com um raio arbitrario trace-

mos a semi-circumferencia AB (fig. 339).

Appliquemos esse mesmo raio de B em C

e de C em D.

A bissectriz VM do angulo DVA fórma com VB o an-

gulo pedido MVB.

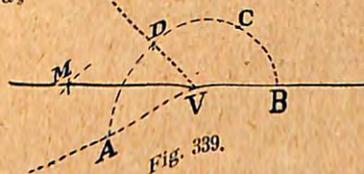


Fig. 339.

**Problema 143.** — Traçar um pentagono rectangular conhecendo-se um lado.

Seja  $AB$  o lado (fig. 340).

Formemos um angulo de  $108^\circ$  na extremidade  $B$  e applicuemos  $BC = AB$ .

Façamos passar perpendiculares pelo meio de  $AB$  e de  $BC$ .

Centro em  $O$  e com um raio igual a  $OA$  marquemos  $D$  e  $E$ .

Unamos entre si  $A$  e  $E$ ,  $E$  e  $D$ ,  $D$  e  $C$ .

$ABCDE$  é o polygono pedido.

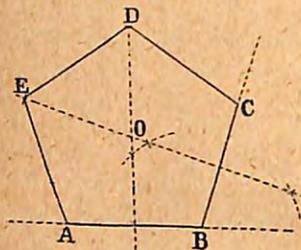


Fig. 340.

**Problema 144.** — Traçar um heptagono regular conhecendo-se um lado.

Seja de 15 millimetros a medida do lado

Tracemos um heptagono inscripto em um circulo qualquer (fig. 341).

Tomemos um vertice como ponto de partida,  $A$  por exemplo, e prolonguemos os lados do angulo.

Façamos  $AB = 0,015$  e  $AG = AB$ .

De  $B$  tiremos uma parallela a  $bc$  e de  $G$ , outra a  $gf$ .

Marquemos em  $BC$  e  $GF$  a medida  $AB$ .

De  $C$  tracemos uma parallela a  $cd$  e de  $F$ , outra a  $fe$ .

Façamos  $CD$  e  $FE$  eguaes, cada uma, a  $0,015$ ,  $(AB)$  e finalmente unamos  $D$  a  $E$ .

$ABCDEFG$  é o heptagono regular

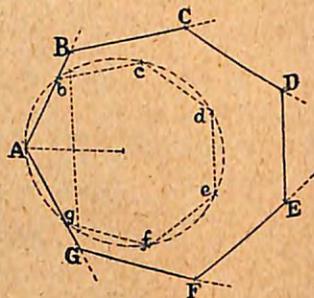


Fig. 341.

*Outra solução.* — Seja  $AB$  o lado (fig. 342).

Prolonguemos esta recta de uma quantidade  $BC = AB$ .

Façamos centro em  $A$  e  $C$  e com um raio igual a  $AC$  determinemos o ponto  $D$ . Unamos este ponto a  $B$  e tracemos a recta  $AE$  que parte de  $A$ , divide o arco  $DC$  ao meio e corta a perpendicular  $BD$  no ponto  $F$ .

Com o centro em  $A$  e depois em  $B$ , e com um mesmo raio  $AF$  determinemos o ponto  $M$ , centro da circunferencia circumscripta ao heptagono; descrevamos-a com um raio  $= MB$ .

Tracemos  $MN$  parallela a  $BD$  e applicuemos em  $NG$ ,  $NH$ ,  $AL$  e  $BP$  a medida  $AB$ .

Unamos estes pontos como nos mostra a fig. 342 e teremos o heptagono.

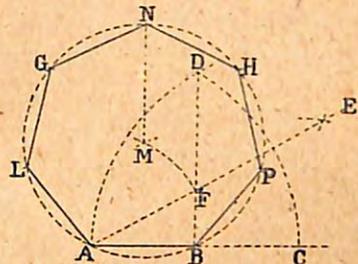


Fig. 342.

**Problema 145.** —

Traçar um octogono regular dado o lado.

Seja  $AB$  o lado (fig. 343).

Prolonguemos-o em ambas as direcções e levantemos perpendiculares por  $A$  e  $B$ .

Centro em cada um d'esses pontos e com o mesmo raio  $AB$ , des-

crevamos as duas semi-circunferencias que determinam os pontos  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Tiremos as bissectrizes dos angulos  $CBD$  e  $FAE$ , as quaes assignalam os pontos  $G$  e  $H$ .

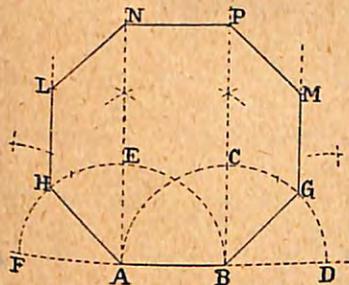


Fig. 343.



Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes menores de um hexagono regular.

Representa a figura resultante da superposiçao de dois triangulos equilateros eguaes, cujos centros coincidem e os lados de um sã, dois a dois, paralelos aos do outro.

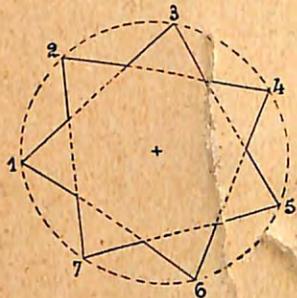


Fig. 351.

**Problema 152.** — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um heptagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 7 partes eguaes e unamos os pontos na ordem

seguinte : 1—3—5—7—2—4—6—1, (fig. 351).

Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um heptagono regular.

2.º caso. — Diagonaes maiores. Unindo-se os pontos de divisao n'esta ordem : 1—4—7—3—6—2—5—1 obtemos outro polygono, formado pelas diagonaes maiores do heptagono regular (fig. 352).

Ambos são polygonos de 14 lados e têm 7 vertices salientes e 7 reintrantes.

**Problema 153.** — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um octogono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores. Dividamos a circumferencia em 8 partes eguaes e unamos os pontos de divisao

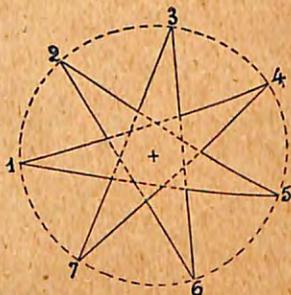


Fig. 352.

do seguinte modo : 1—3—5—7—1 e 2—4—6—8—2 (fig. 353).

O polygono estrellado resultante é formado pelas diagonaes menores do octogono regular, é uma combinaçao

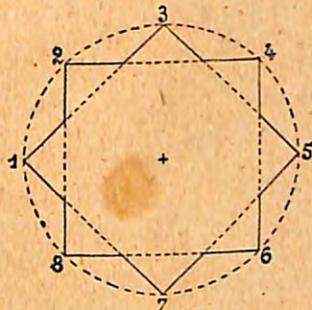


Fig. 353.

de dois quadrados superpostos cujos centros coincidem e cujos lados de um são paralelos ás diagonaes do outro.

2.º caso. — Diagonaes médias.

Unamos agora os pontos de divisao como indica a figura 354, isto é : 1—4—7—2—5—8—3—6—1.

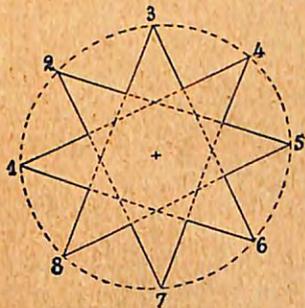


Fig. 354.

Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes médias de um octogono regular.

Ambos são polygonos de 16 lados com 8 vertices salientes e 8 reintrantes.

**Problema 154.** — Traçar os polygonos regulares estrelados.

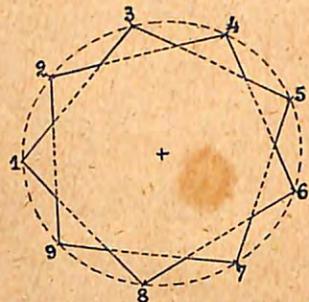


Fig. 355.

lados, formados pelas diagonaes de um enneagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 9 partes eguaes e unamos os pontos de divisão na seguinte ordem : 1—3—5—7—9—2—4—6—8—1 (fig. 355).

Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um enneagono regular.

2.º caso. — Diagonaes médias.

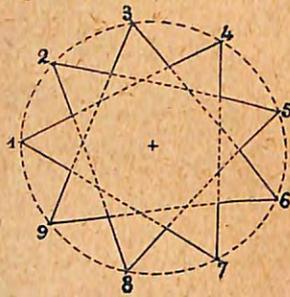


Fig. 356.

Unamos os pontos de divisão como nos mostra a fig. 356,

isto é, 1—4—7—1, 2—5—8—2, 3—6—9—3 e obteremos um outro polygono, formado pelas diagonaes médias de um enneagono regular.

Este polygono estrellado é o resultado da superposição de 3 triangulos equilateros inscriptos n'um mesmo circulo.

3.º caso. — Diagonaes maiores.

Finalmente, unamos os pontos de divisão na ordem seguinte : 1—5—9—4—8—3—7—2—6—1 (fig. 357) e te-

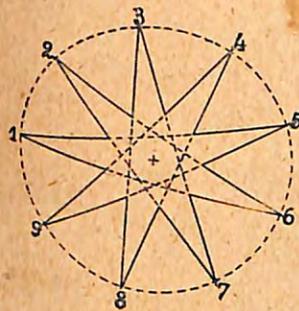


Fig. 357.

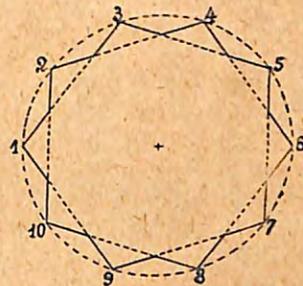


Fig. 358.

remos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes do enneagono regular.

Estes tres polygonos estrellados têm, cada um, 18 lados eguaes, 9 vertices salientes e 9 reintrantes.

**Problema 155.** — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um decagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividida a circumferencia em 10 partes eguaes, unamos os pontos de divisão d'este modo : 1—3—5—7—9—1, 2—4—6—8—10—2 (fig. 358). Resulta um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes de um decagono regular.

É a combinação de dois pentagonos regulares inscriptos em uma mesma circumferencia e collocados de modo que

os lados de um são, dois a dois, paralelos aos do outro.

2.º caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão seguidamente e pelo modo indicado na fig. 359, isto é: 1—4—7—10—3—6—9—

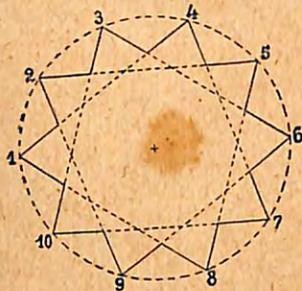


Fig. 359.

2—5—8—1 e resultará o polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um decagono regular.

3.º caso. — Maiores diagonaes médias.

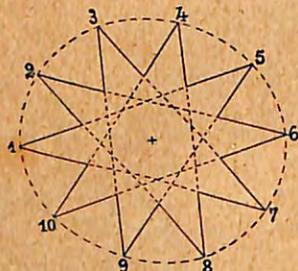


Fig. 360.

Unidos, finalmente, os pontos de divisão do modo seguinte: 1—5—9—3—7—1; 2—6—10—4—8—2 (fig. 360) resultará um polygono estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um decagono regular.

Este ultimo polygono estrellado é o resultado da combinação de dois outros de cinco vertices salientes.

Os tres polygonos estrellados têm, cada um, 20 lados eguaes, 10 vertices salientes e 10 reintrantes.

**Problema 156.** — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um hendecagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 11 partes iguaes,

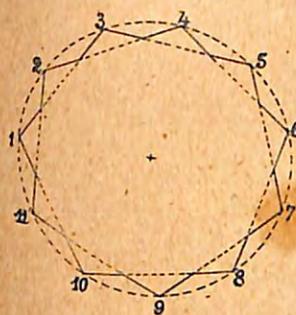


Fig. 361.

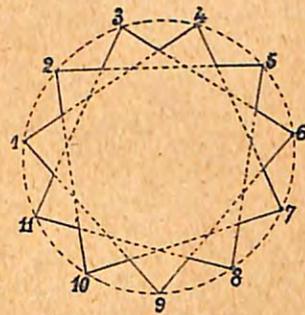


Fig. 6.

unamos seguidamente os pontos de divisão: 1—3—5—7—9—11—2—4—6—8—10—1 (fig. 361).

Resulta um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um hendecagono regular.

2.º caso. — Menores diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão: 1—4—7—10—2—5—8—11—3—6—9—1 e obteremos um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um hendecagono regular.

3.º caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos os pontos de divisão como indica a figura 363: 1—5—9—2—6—10—3—7—11—4—8—1 apparece o polygono estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um hendecagono regular.

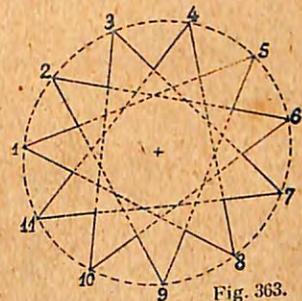


Fig. 363.

4.º caso. — Diagonaes maiores.

Tracemos a linha polygonal 1-6-11-5-10-4-9-3-8-2-7-1 (fig. 364).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes maiores de um hendecagono regular.

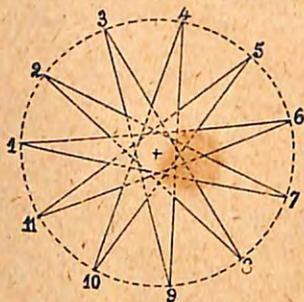


Fig. 364.

Estes quatro polygonos têm, cada um, 22 lados, 11 vertices salientes e 11 reintrantes.

**Problema 157.** — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um dodecagono regular.

1.º caso. — Diagonaes menores.

Dividida a circumferencia em 12 partes eguaes, unamos

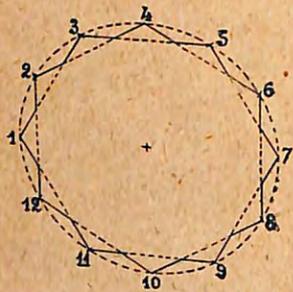


Fig. 365.

os pontos de divisão do seguinte modo, 1-3-5-7-9-11-1; 2-4-6-8-10-12-2 (fig. 365).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um dodecagono regular.

Esse polygono estrellado é tambem o resultado da superposição de dois hexagons regulares inscriptos n'um

mesmo circulo, de modo que os vertices de um fiquem

no meio dos arcos correspondentes aos lados do outro.

2.º caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão pela seguinte fórma :

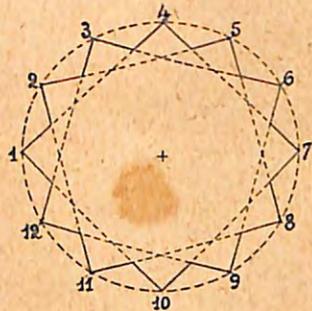


Fig. 366.

1-4-7-10-1, 2-5-8-11-2, 3-6-9-12-3 (fig. 366) e o polygono resultante é formado pelas menores diagonaes médias do dodecagono regular e representa a superposição de tres quadrados eguaes, inscriptos n'um mesmo circulo.

3.º caso. — Diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão da fórma seguinte :

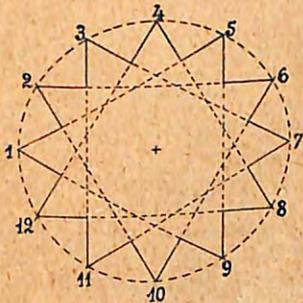


Fig. 367.

1-5-9-1, 2-6-10-2, 3-7-11-3, 4-8-12-4 (fig. 367) e o resultado é um polygono formado pela super-

posição de 4 triangulos equilateros eguaes inscriptos n'um mesmo circulo.

4.º caso. — Maiores diagonaes médias.  
Unidos, finalmente, os pontos de divisão pelo modo indi-

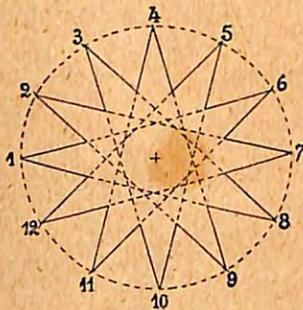


Fig. 368.

modo na fig. 368: 1—6—11—4—9—2—7—12—5—10—3—8—1, obtemos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um dodecagono regular.

EXERCICIOS :

1. — Francisco! traça um polygono qualquer.
2. — Mostra os lados, os angulos, os vertices.
3. — Que é perimetro ?
4. — Como se chama uma superficie plana limitada por mais de quatro lados ?
5. — Dá-me os nomes dos polygonos que conheces.
6. — Que é uma diagonal ?
7. — Traça todas as diagonaes de um hexagono, de um pentagono, etc.
8. — Que é um polygono regular ?
9. — Que é um polygono irregular ?
10. — A quantos angulos rectos é igual a somma dos angulos de um polygono; — de um octogono; — de um hexagono; — de um heptagono; — de um icosagono ?

11. — Qual é o triangulo regular ?
12. — Qual o quadrilatero regular ?
13. — Que quer dizer polygono ?
14. — A que é igual o lado de um hexagono regular ?
15. — Que é um apothema ?
16. — Traça um apothema.
17. — Que é um polygono inscripto ?
18. — Que é um polygono circumscripto ?
19. — Que é um polygono estrellado ?
20. — Que é medir um angulo ?
21. — Qual a unidade de medida dos angulos ?
22. — Quantos minutos tem um gráo ?
23. — Quantos segundos tem um gráo ?
24. — Como se lê 9º 11' 22" ?
25. — Escreve : dezanove grãos, doze minutos e seis segundos.
26. — Quantos grãos mede cada angulo de um quadrado ? — de um octogono regular ? — e de um polygono regular de dezesseis lados ?
27. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um quadrado ? — e de um octogono regular ?
28. — Quantos grãos mede cada angulo de um pentagono regular ? — e de um decagono regular ? — e de um icosagono regular ?
29. — Quantos grãos mede cada angulo de um triangulo equilatero ? — de um hexagono regular ? — e de um dodecagono regular ?
30. — Quantos grãos mede cada angulo de um enneagono regular ? — e de um polygono regular de dezoito lados ?
31. — Quantos grãos mede cada angulo de um pentadecagono regular ?
32. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um pentagono regular ? — de um decagono regular ? — de um triangulo equilatero ? — de um hexagono regular ? — de um enneagono regular ?
33. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um icosagono regular ? — de um dodecagono regular ? — e de um pentadecagono ?
34. — Quantos angulos rectos em 360º ? — em 540º ? — em 720º ? — em 3240º ?

35. — Que é um transferidor ?
36. — Mostra o limbo; — a linha de fé.
37. — Para que serve o transferidor ?
38. — Qual a medida de um angulo central ?
39. — Qual a medida de um angulo inscripto ?
40. — Qual a medida de um angulo de segmento ?
41. — Traça um angulo de  $120^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $62^\circ$ ,  $44^\circ$ ,  $38^\circ$ .
42. — Marca sobre uma circumferencia diversos arcos tendo por medida  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $190^\circ$ ,  $6^\circ$ .
43. — Traça um angulo de segmento e determina o seu valor.
44. — Uma recta encontra outra e fórma dois angulos; um de  $65^\circ$ . Avalia o outro.
45. — Fóрма ao redor de um ponto seis angulos eguaes e dize o valor de cada um.
46. — Si dois angulos de um triangulo valem : um  $70^\circ$  e outro  $25^\circ$ , qual será o valor do terceiro angulo ?
47. — Dize quaes são os valores dos angulos de um triangulo em que um d'elles mede  $75^\circ$  e o segundo é o dobro do terceiro.
48. — Quantos grãos mede cada angulo da base de um triangulo isosceles cujo angulo do vertice é de  $35^\circ$  ?
49. — Quantos grãos mede o angulo do vertice de um triangulo isosceles em que um dos angulos da base é de  $49^\circ$  ?
50. — Em um triangulo rectangulo, um dos angulos agudos mede  $25^\circ$ . Avalia os outros dois.
51. — Em circumferencias de  $0^m,06$  de raio, inscreve um quadrado; — um hexagono regular; — um pentagono regular; — um heptagono regular; — um octogono regular.
52. — Em circulos de  $0^m,08$  de raio, inscreve um enneagono regular; — um hendecagono regular.
53. — Em circulos de  $0^m,13$  de diametro, inscreve um dodecagono regular; — um decagono regular; — um pentadecagono regular.
54. — Sem o auxilio do transferidor, fórma um angulo de  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $120^\circ$ .
55. — Idem um angulo de  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ .
56. — Traça um pentagono regular de  $0^m,06$  de lado.
57. — Idem um heptagono regular de  $0^m,05$  de lado.
58. — Idem um octogono regular de  $0^m,04$  de lado.

59. — Idem um enneagono regular de  $0^m,023$  de lado.
60. — Idem um decagono regular de  $0^m,02$  de lado.
61. — Idem um dodecagono regular de  $0^m,03$  de lado.
62. — Com uma diagonal menor igual a  $0^m,06$  traça um heptagono regular.
63. — Traça os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um pentagono regular de  $0^m,04$  de lado.
64. — Idem de um hexagono regular de  $0^m,03$  de lado.
65. — Idem de um heptagono regular; — de um octogono regular, ambos de  $0^m,025$  de lado.
66. — Idem de um enneagono regular de  $0^m,03$  de lado; — de um decagono regular de  $0^m,05$  de raio.
67. — Idem de um hendecagono e de um dodecagono regulares, ambos de  $0^m,024$  de lado.
68. — Qual o supplemento de um angulo de  $115^\circ 40'$  ?

## CAPITULO IX

SUMMARIO : **Linhas proporcionaes.** —  
**Problemas.**

O *quociente* que obtemos dividindo entre si os numeros que exprimem as grandezas de duas linhas medidas com a mesma unidade, chama-se *razão* ou *relação*.

### LINHAS PROPORCIONAES.

Assim, por exemplo, medindo-se duas rectas encontramos uma igual a 0,08 e a outra = 0<sup>m</sup>,04. Dividindo-se 8 por 4 dá 2 que é a *razão* ou *relação* que existe entre as duas rectas.

A egualdade entre duas *razões* chama-se **proporção**.

Exemplo :

$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$  é uma **proporção** porque estas duas *razões* são eguas, uma e outra a 2.

Em uma **proporção** o primeiro e o ultimo termos chamam-se *extremos*; o segundo e o terceiro chamam-se *meios*

Em toda a **proporção** o producto dos *extremos* é igual ao producto dos *meios*.

Exemplo :

$$\frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

portanto

$$5 \times 12 = 10 \times 6 = 60.$$

Este principio permite o calculo de um dos termos de uma **proporção**, quando os outros tres são conhecidos.

Exemplo :

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{X}$$

Em virtude do principio citado :

$$2 \times X = 4 \times 6 \text{ ou } 2X = 24$$

d'onde,

$$X = \frac{24}{2} = 12$$

logo :

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$$

Quatro linhas, quatro numeros ou quatro

quantidades quaesquer são **proporcionaes** quando a primeira contém a segunda ou está contida na segunda o mesmo numero de vezes que a terceira contém ou está contida na quarta.

Exemplo :

12 contém 4 tres vezes, assim como 15 contém 5 tambem tres vezes, isto é :

12 : 4 :: 15 : 5 (doze está para quatro, assim como quinze está para cinco),

ou

$\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$  (doze dividido por quatro é igual a quinze dividido por cinco).

Cada uma das quatro linhas que entram em uma **proporção** chama-se **quarta proporcional**.

Conhecendo-se tres d'estas linhas podemos sempre achar a **quarta**.

Acontece muitas vezes que em uma **proporção** o segundo e o terceiro termos, isto é, os **meios** são eguaes e então denomina-se qualquer d'estas linhas uma **meia proporcional** ás outras daus, e cada uma d'estas

duas outras chama-se uma **terceira proporcional**

Exemplo :

$$\frac{M}{N} = \frac{N}{P}$$

donde

$$M \times P = N \times N \text{ ou } N^2$$

e

$$N = \sqrt{M \times P}$$

N é a **meia** ou **média proporcional** a M e P; M e P são **extremos**; e M ou P é uma **terceira proporcional** aos meios e ao outro extremo.

Outro exemplo :

$$\frac{16}{8} = \frac{8}{4}$$

donde

$$16 \times 4 = 8 \times 8 \text{ ou } 8^2$$

e

$$8 = \sqrt{16 \times 4} = \sqrt{64}$$

**Problema 158.** — Dividir uma recta em partes eguaes.

Seja AB (fig. 369) a recta que queremos dividir em cinco partes eguaes.

Do ponto A tracemos uma recta AC que forme com AB um angulo qualquer. A partir do ponto A e sobre AC

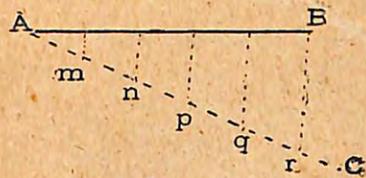


Fig. 369.

A partir do ponto A e sobre AC

marquemos cinco distancias eguaes  $Am, mn, np, etc.$  Unamos o ponto  $r$  ao ponto  $B$  e pelos pontos  $q, p, n, m$  tracemos rectas parallelas á  $rB$ , as quaes dividem  $AB$  em cinco partes eguaes.

*Outra solução.* — Seja  $MN$  a recta que desejamos dividir em 7 partes eguaes (fig. 370).

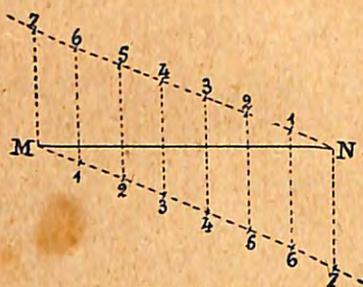


Fig. 370.

$M - 7, 1 - 6, 2 - 5, 3 - 4, 4 - 3, 5 - 2, 6 - 1$  e  $7 - N.$

Essas parallelas dividem  $MN$  em 7 partes eguaes.

**Problema 159.** — Dividir uma recta em partes proporcionaes a distancias dadas.

Seja  $AB$  (fig. 372) a recta

que queremos dividir em partes proporcionaes ás tres rectas  $m, n,$  e  $p$  (fig. 371).

Do ponto  $A$  tracemos uma recta  $AC$  que forme com  $AB$

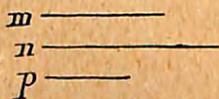


Fig. 371.

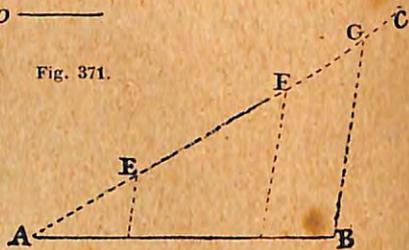


Fig. 372.

Formemos na extremidade  $M$  um angulo qualquer e em  $N$ , outro egual a  $M.$

Appliquemos, a partir de  $M$  e de  $N$ , sobre cada uma das rectas que formam com  $MN$  os angulos, sete distancias eguaes entre si e unamos depois

um angulo qualquer. Sobre  $AC$  e a partir de  $A$  marquemos  $AE = m, EF = n$  e  $FG = p$ ; unamos  $G$  a  $B$  e dos pontos  $E$  e  $F$  tracemos parallelas a  $GB$ . Estas parallelas dividem a recta  $AB$  em partes **proporcionaes** ás distancias  $m, n$  e  $p$ , porque si duas rectas são cortadas por um numero qualquer de parallelas, as secções correspondentes das duas rectas são proporcionaes.

**Problema 160.** — Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas.

(*Solução grafica*):

Sejam  $A, B$  e  $C$  (fig. 373) as rectas dadas.

Tracemos um angulo qualquer  $V$  (fig. 374); sobre um dos lados marquemos a distancia  $VM = A$  e  $VN = B$ , e sobre o outro lado  $VP = C.$

Unamos o ponto  $M$  ao ponto  $P$  e do ponto  $N$  tracemos uma parallela a  $MP$ . A recta  $VD$  é a **quarta proporcional** pedida.

Uma recta traçada de um a outro lado de um triangulo e parallelamente ao terceiro, divide os dois primeiros em partes proporcionaes.

(*Solução numerica*):

Sejam :

$A = 2$  centimetros;

$B = 4$  centimetros;

$C = 3$  centimetros;

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$$

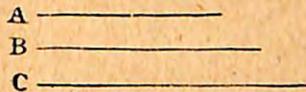


Fig. 373.

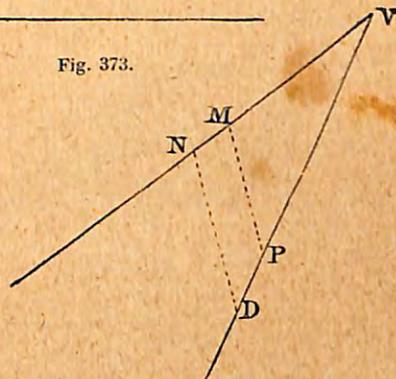


Fig. 374.

substituamos A, B e C pelos seus valores :

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{X}$$

portanto

$$X = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

logo

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

**Problema 161.** — Achar a média proporcional a duas rectas dadas.

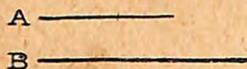


Fig. 375.

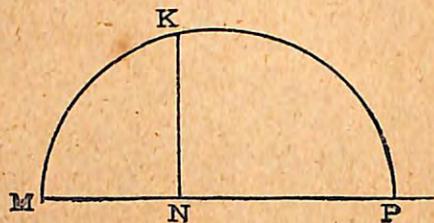


Fig. 376.

cia e pelo ponto N levantemos uma perpendicular. A recta NK é a **média proporcional** pedida.

$$MN : NK :: NK : NP$$

porque, uma perpendicular abaixada de um ponto da circumferencia sobre o seu diametro é a média proporcional entre os segmentos d'esse diametro.

Substituindo-se MN e NP pelas rectas A e B, temos

$$A : NK :: NK : B$$

Si A=2 e B=8; NK será igual a 4; porque

$$NK = \sqrt{A \times B} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4.$$

**Problema 162.** — Dividir uma recta em média e extrema razão (\*).

Seja AB a recta dada (fig. 377).

Construamos um triangulo ABC em que  $BC = \frac{1}{2}$  de AB; prolonguemos AC.

Do ponto C, como centro e raio equal a CB descrevamos a semi-circumferencia EBF e do ponto A e raio AE tracemos o arco ED.

O ponto D divide a recta AB em média e extrema razão.  $AB : AD :: AD : DB$ .

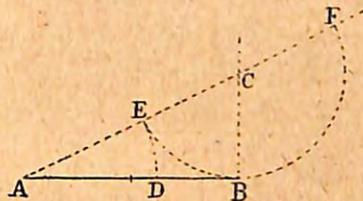


Fig. 377.

**Problema 163.** — Construir um triangulo de perimetro equal a uma recta dada, sendo seus lados proporcionaes a tres medidas dadas.

Seja AB a recta equal ao perimetro (fig. 378) e as tres

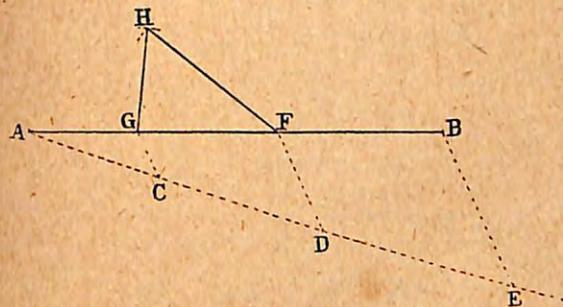


Fig. 378.

medidas, respectivamente eguaes a 0<sup>m</sup>,017; 0<sup>m</sup>,02 e 0<sup>m</sup>,025.

(\*) Uma recta está dividida em média e extrema razão, quando o maior segmento é média proporcional entre a recta inteira e o menor segmento.

Formemos com a recta AB um angulo qualquer A e applicemos  $AC = 0^m,017$ ,  $CD = 0^m,02$  e  $DE = 0^m,025$ .

Unamos o ponto B ao ponto E e de C e D tracemos parallelas a BE.

Sobre GF construamos o triangulo GFH cujos lados  $GH = GA$  e  $FH = FB$ .

O angulo BAE denomina-se *angulo de redução*.

### EXERCICIOS :

1. — Dinah! que é **razão**? — dá exemplos.
2. — Como se chama a egualdade de duas razões?
3. — Exemplo.
4. — Como se chamam o primeiro e o ultimo termos de uma proporção?
5. — O segundo? — e o terceiro?
6. — Em uma proporção a que é egual o producto dos extremos?
7. — Exemplo.
8. — Que é uma quarta proporcional?
9. — Que é uma média proporcional?
10. — Que é uma terceira proporcional?
11. — Exemplo.
12. — Traça quatro rectas taes que formem a proporção  $2:6::3:9$ ; sabendo-se que a primeira é egual a 3 centímetros.
13. — Divide uma recta de  $0^m,045$  em tres partes proporcionaes a tres rectas de  $0^m,012$ ,  $0^m,025$  e  $0^m,034$ .
14. — Divide uma recta de 72 centímetros em cinco partes eguaes.
15. — Divide uma recta de  $0^m,086$  em partes proporcionaes a  $0^m,03$ ,  $0^m,04$  e  $0^m,06$ .
16. — Qual a 4.<sup>a</sup> proporcional a tres rectas de, respectivamente,  $0^m,024$ ,  $0^m,032$  e  $0^m,05$ ?

17. — Qual a média proporcional de duas rectas . uma de  $0^m,05$  e outra de  $0^m,03$ ?

18. — Divide uma recta de  $0^m,10$  em média e extrema razão.

19. — Qual o comprimento da média proporcional entre duas rectas, uma de  $0^m,20$  e outra de  $0^m,45$ ?

20. — Qual o comprimento da quarta proporcional a tres rectas de  $0^m,10$ ,  $0^m,20$ ,  $0^m,50$ ?

## CAPITULO X

SUMMARIO : Polygonos semelhantes. — Escalas.  
— Problemas.

Quando dois **polygonos** têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes, são **semelhantes**, (fig. 379).

São *homologos* os lados adjacentes aos angulos eguaes.

Uma recta, parallela a um dos lados de um triangulo, determina um triangulo semelhante ao primeiro.

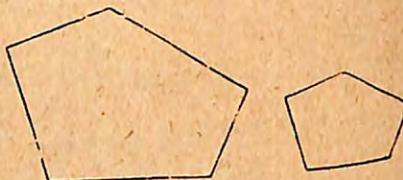


Fig. 379. — Polygonos semelhantes.

Os vertices dos angulos eguaes são *homologos*.

Dous ou mais **polygonos semelhantes** têm, cada um, o mesmo numero de lados e de angulos.

Todos os triangulos que têm seus angulos correspondentes eguaes, são **semelhantes**.

Todos os quadrados são **semelhantes**, e do mesmo modo o são todos os polygonos regulares do mesmo numero de lados.

Os rectangulos só são **semelhantes** quando os lados correspondentes são proporcionaes.

Convém não confundir *semelhante* com *igual*; duas figuras eguaes, superpostas, coincidem em todos os seus pontos; ao passo que semelhantes, não coincidem.

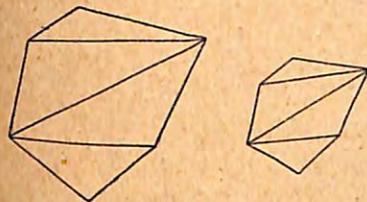


Fig. 380.

Dois **polygonos semelhantes** podem ser decompostos em um mesmo numero de triangulos semelhantes (fig. 380) e semelhantemente dispostos.

*Copiar* um modelo do tamanho natural é reproduzil-o com egual fórma, de modo que o desenho, em todos os seus detalhes, fique exactamente egual ao modelo; *augmentar* ou *diminuir* um modelo é re-

### ESCALAS.

produzil-o maior ou menor de modo que todos os seus detalhes sejam proporcionalmente traçados.

Uma redução ou diminuição póde ser feita proporcionalmente ás linhas ou ás áreas; no primeiro caso diz-se *redução linear* e no ultimo *superficial*.

Para a redução usa-se geralmente da **escala** que é a relação que existe entre o tamanho de um objecto ou de um modelo que se deseja reproduzir e o desenho d'esse objecto ou modelo.

Póde-se tambem dizer que, **escala** é a relação que existe entre as dimensões reaes e as do desenho.

Esta relação exprime-se em fórma de fracção ordinaria em que o numerador é a unidade e o denominador indica de quantas vezes está reduzido o modelo.

Assim diz-se que um desenho está na **escala** de um para vinte ( $1 : 20$ ;  $\frac{1}{20}$ ;  $1/20$ ) quando elle representa a vigesima parte do natural. Geralmente adoptamos o metro como unidade de medida e, si uma linha de um desenho qualquer medir 4 centímetros e a sua correspondente no natural ou no modelo fór 4 metros, a **escala** usada n'esse desenho será de

um para cem. ( $1 : 100$ ;  $\frac{1}{100}$  ou  $1/100$ ) porque 4 centímetros é a centesima parte de 4 metros.

A **escala de redução** é formada por duas rectas parallelas, divididas em partes eguaes por meio de perpendiculares communs.

Cada uma d'essas partes representa a unidade de medida (geralmente o metro) em uma dada relação.

Para desenharmos um modelo na proporção de  $1 : 10$ , por exemplo, teriamos que construir uma **escala** em que cada uma das divisões representasse a decima parte da medida adoptada e, si essa medida fosse o metro as divisões que correspondessem á unidade, na nossa escala, seriam eguaes á decima parte do metro ou o decimetro e cada uma das dez primeiras subdivisões corresponderia a um decimetro.

Na figura 381 (Escala de  $1 : 10$ ) AB que é igual a um decimetro, representa um metro;

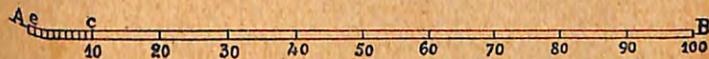


Fig. 381.

AC que é igual a um centimetro, representa um decimetro e Ae que é um millimetro, representa um centimetro.

Na figura 382 (Escala de 1:20) as dez primeiras divisões reunidas que são eguaes a cinco centímetros representam um metro, porque cinco centímetros é a vigésima parte do metro; cada uma das dez divisões que é egual a cinco millímetros representa um decímetro e, finalmente divididos cinco millímetros em dez partes eguaes, cada uma representará n'essa escala, um centímetro.

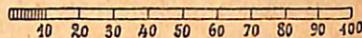


Fig. 382.

As **escalas metricas de proporção**, mais usadas, são :

Escala	Medida real	Medida graphica
1:5	1 metro	0 <sup>m</sup> ,20
1:10		0 <sup>m</sup> ,10
1:20		0 <sup>m</sup> ,05
1:25		0 <sup>m</sup> ,04
1:50		0 <sup>m</sup> ,02
1:100		0 <sup>m</sup> ,01

Isto é, na **escala** de 1:5, um metro é egual a 0<sup>m</sup>,20; na de 1:10, 1<sup>m</sup>,0 = 0<sup>m</sup>,10, etc.

Serve a **escala** para se poder traçar um desenho cujas linhas estejam em uma mesma relação com as correspondentes no modelo re-

presentado e, para julgar por um desenho, das dimensões exactas e reaes do modelo ou objecto representado n'esse desenho

A **escala decimal** ou **transversal** permite divisões muito pequenas as quaes não poderíamos obter na **escala** commum.

Sua construcção é baseada na theoria dos triangulos semelhantes cujos lados homologos são proporcionaes.

**Problema 164.** — Construir uma escala decimal

Tracemos uma recta e marquemos, a partir de um ponto qualquer diversas medidas, AB, B'C, CD, DE, etc., eguaes entre si e cada uma correspondente á unidade de medida (fig. 383).

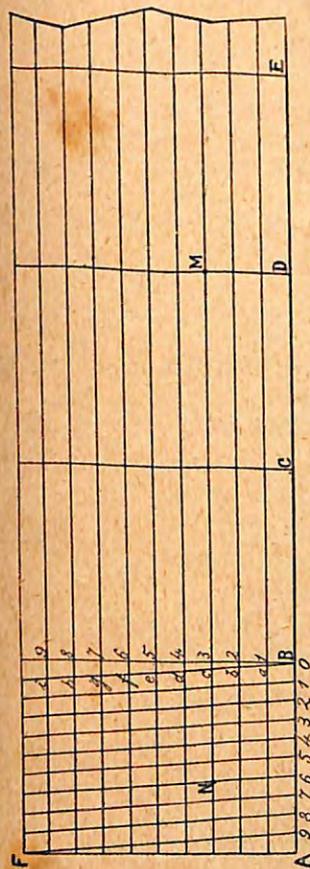


Fig. 383.

Dos pontos A, B, C, D, E levantemos perpendiculares á recta anteriormente traçada.

Sobre a perpendicular A applicuemos dez vezes uma mesma medida arbitraria e pelos pontos de divisão tracemos rectas parallelas a A E. Dividamos A B em dez partes eguaes e tiremos pelos pontos de divisão obliquas parallelas a F G, como indica a fig. 383.

O ponto B é o zero da escala; as distancias crescentes a 1, b2, c3, etc., exprimem 1, 2, 3, etc., centenas; as partes eguaes em que está dividida A B são as dezenas e as distancias A B, B C, C D, etc., são as unidades.

**Aplicações.** — Para marcar 130 unidades, tomemos a distancia C 3 em linha horizontal,

Para ter 263 unidades tomemos a distancia M N, porque  $MN = M 3 + 3c + c N$  ou  $200 + 3 + 60 = 263$ .

**Problema 165.** — Construir sobre uma recta dada um triangulo semelhante a um outro.

Seja A B C o triangulo dado (fig. 384).

Tracemos uma recta D E (fig. 385) proporcional a C B.

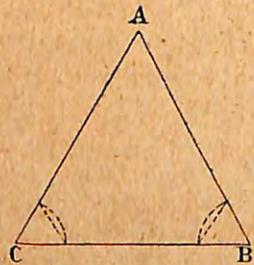


Fig. 384.

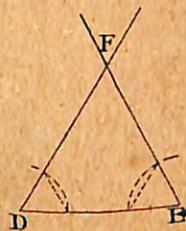


Fig. 385.

Façamos no ponto D um augulo = C e no ponto E um outro = B.

Os triangulos C A B e D F E têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcioneas : são semelhantes.

**Problema 166.** — Construir um polygono semelhante a um outro. Seja A B C D E o polygono dado (fig. 386).

Decomponhamol-o nos triangulos A B E, B D E e B C D. Tracemos uma recta M N (fig. 387) proporcional a E D,

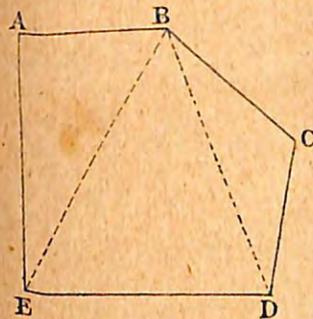


Fig. 386.

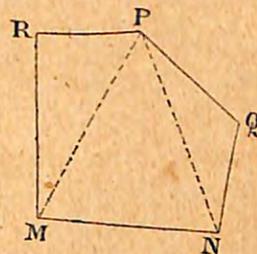


Fig. 387.

sobre a qual façamos um triangulo P N M semelhante a B D E; sobre o lado P N façamos um triangulo P Q N semelhante a B C D, e sobre P M um triangulo P M R semelhante a B E A. Os **polygonos** R P Q N M e A B C D E são semelhantes, porque têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcioneas.

**Problema 167.** — Construir um rectangulo semelhante a um outro, de modo que seus lados sejam menores  $\frac{1}{7}$  dos lados d'esse outro, isto é, que seus lados estejam para os d'esse outro como 6 : 7.

A B C D é o rectangulo conhecido (fig. 388).

Tiremos a diagonal A D e dividamos o lado A B em 7 partes eguaes.

Pelo ponto 6 levantemos uma perpendicular á recta A B até determinar o ponto M na diagonal A D.

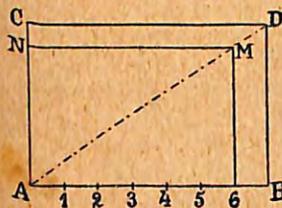


Fig. 388.

Do ponto M tracemos MN paralela a CD. A 6NM é o rectangulo pedido; seus lados estão na seguinte proporção :  $A6 : AB :: 6M : BD$ .

**Problema 168.** — Dado um rectangulo, construir, por meio do angulo de redução, um outro cujos lados estejam para os do primeiro como 3 : 5.

Seja ABCD o rectangulo dado (fig. 389),

Construamos um triangulo isosceles FEV de modo que a base e o lado estejam na proporção de 3 : 5 (fig. 390).

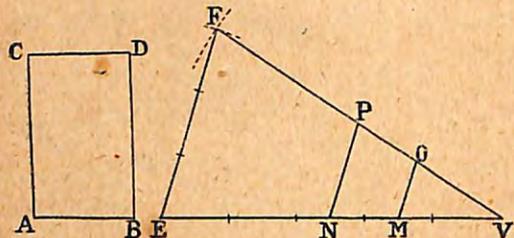


Fig. 389.

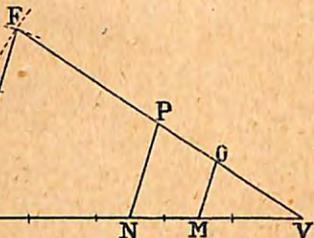


Fig. 390.



Fig. 391.

Transportemos em VN a medida do lado AC e em VM do lado AB.

Pelos pontos N e M tracemos rectas paralelas à base EF e construamos, com as rectas NP e MO, o rectangulo GHJK (fig. 391) cujos lados estarão para os de ABCD como 3 : 5.

**Problema 169.** — Construir um polygono irregular semelhante a um outro, de modo que seus lados estejam para os correspondentes do outro como 6 : 4.

Seja MNOPQR o polygono irregular (fig. 392).

Dividamos MN em 4 partes eguaes e prolonguemos MR e MN.

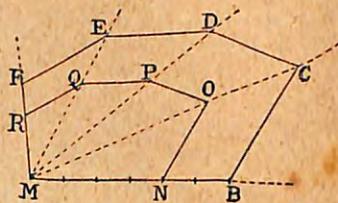


Fig. 392.

Appliquemos em NB duas vezes a medida que dividiu MN, isto é,  $\frac{2}{4}$  de MN, e teremos  $MB : MN :: 6 : 4$ .

Do vertice M tiremos todas as diagonaes do polygono dado, prolongando-as.

Tracemos BC, CD, DE, EF respectivamente paralelas a NO, OP, PQ, QR.

O polygono MBCDEF é semelhante ao polygono dado, e seus lados estão para os do primeiro como 6 : 4.

### EXERCICIOS :

1. — Clarisse ! que são polygonos semelhantes ?
2. — Que nome têm os lados adjacentes aos angulos eguaes ?
3. — Mostra dois lados homologos.
4. — Quando são semelhantes dois triangulos ?
5. — Quaes os quadrilateros que são semelhantes ?
6. — Que é preciso para que dois ou mais polygonos regulares sejam semelhantes ?
7. — Que é preciso para que dois rectangulos sejam semelhantes ?
8. — Semelhança e egualdade é a mesma cousa ?
9. — Não será a egualdade um caso especial de semelhança ?
10. — Dois polygonos semelhantes poderão ser divididos em um mesmo numero de triangulos semelhantes ?
11. — Traça um triangulo semelhante a um outro triangulo dado.
12. — Traça um polygono semelhante a um outro polygono dado.
13. — Sendo  $0^m,60$  e  $0^m,20$  as medidas dos lados de dois quadrados, que são estes quadrados entre si ?
14. — Porque ?
15. — Traça um rectangulo semelhante a um outro e cujos lados estejam na relação de 4 : 7. — Idem, na de 8 : 5.
16. — Faze um triangulo equilatero de  $0^m,05$  de lado e depois um outro, cujo perimetro seja a metade do do primeiro.

17. — Faze um quadrado de  $0^m,03$  de lado e depois um outro cujo perimetro seja o dobro do do primeiro.

18. — Faze um hexagono cujo perimetro seja igual a  $\frac{2}{5}$  do perimetro de um outro de  $0^m,032$  de lado.

19. — Faze um quadrado cujo perimetro seja igual a uma vez mais  $\frac{1}{5}$  do perimetro de um outro de  $0^m,035$  de lado.

20. — Traça um octogono regular e depois um outro que lhe seja semelhante e tenha um perimetro duplo do primeiro.

21. — Idem, idem cujo perimetro seja igual a  $\frac{1}{3}$  do do primeiro.

22. — Faze um rectangulo cujos lados adjacentes sejam  $0^m,025$  e  $0^m,052$  e depois um outro semelhante cujo perimetro seja igual a  $0^m,120$ .

23. — Faze um losango cujas diagonaes meçam, uma  $0^m,03$  e a outra  $0^m,045$  e depois um segundo semelhante ao primeiro e cujo perimetro seja igual a  $\frac{7}{5}$  do perimetro do primeiro.

24. — Faze um losango de  $0^m,04$  de lado, em que um dos angulos agudos seja de  $38^\circ$ ; depois um outro semelhante, cuja diagonal maior seja igual a  $\frac{8}{7}$  da do primeiro.

25. — Traça um triangulo equilatero inscripto em um circulo de raio =  $0^m,028$  e outro em um circulo cuja circumferencia circumscreva um quadrado de  $0^m,04$  de lado.

26. — Qual a relação entre os perimetros de dois triangulos equilateros tendo para lados: o primeiro  $0^m,02$  e o segundo  $0^m,07$ ?

27. — Qual a relação entre os perimetros de dois quadrados tendo para lados  $0^m,04$  e  $0^m,05$ ? — idem  $0^m,08$  e  $0^m,05$ ? — idem  $10^m$  e  $52^m$ ?

28. — Qual a relação entre os perimetros de dois pentagons regulares inscriptos em circulos de: um  $0^m,03$  de raio e outro  $0^m,04$  de raio?

29. — Um rectangulo tem por base  $15\text{Km}$  e por altura  $4\text{Km},5$ ; qual será o perimetro de um outro semelhante cujos lados meçam  $\frac{1}{6}$  dos do primeiro?

30. — Quaes serão a base e a altura de um rectangulo semelhante a um outro de  $0^m,054 \times 0^m,032$ , tendo por perimetro  $\frac{5}{4}$  do perimetro do primeiro?

31. — Um heptagono regular está inscripto em um circulo de  $0^m,02$  de raio; qual será o raio do circulo circumscripto a um outro heptagono semelhante e de duplo perimetro?

32. — Um quadrilatero tem por medida dos lados, successivamente,  $0^m,02$ ,  $0^m,03$ ,  $0^m,05$  e  $0^m,025$  e para medida do angulo formado pelo primeiro e segundo lados  $110^\circ$ ; traça um outro cujo primeiro lado esteja na relação de  $7:4$ .

33. — Que é copiar um modêlo?

34. — Que é augmentar um modêlo? — diminuir?

35. — Quando ha reduçção linear? — superficial?

36. — Que é escala?

37. — Como se lê  $1:10$ ? —  $1:40$ ? —  $1:100$ ? —  $1:10000$ ?

38. — Como é formada a escala de reduçção?

39. — Qual é a medida geralmente empregada?

40. — Na escala de  $1:10$ , mostra-me  $4$  centimetros;  $63$  milimetros;  $6$  decimetros.

41. — Representa-me  $6$  metros na escala de  $1:20$ ; idem na de  $1:10$ ; idem na de  $1:5$ .

42. — Traça uma recta e diz-me que representa na escala de  $1:25$ ; idem na de  $1:50$ .

43. — Para que serve a escala?

44. — Faze uma escala decimal representando o metro por  $0^m,05$ ; idem representando o metro por  $0^m,10$ .

45. — Tanto n'uma como n'outra, mostra os decimetros e os centimetros.

46. — Sobre uma recta de  $0^m,10$  constroe uma escala que represente, por  $6$  centimetros, uma dimensão de  $12$  metros.

47. — Constroe a escala de  $1:20$  e traça n'essa escala um rectangulo cujos lados adjacentes meçam  $0^m,82$  e  $0^m,63$ .

48. — Constroe a escala de  $1:10$  e n'essa escala faze um quadrado cujo lado meça  $0^m,92$ .

49. — Faze um quadrado de  $0^m,90$  de lado na escala de  $1:10$ .

50. — Faze um pentagono regular inscripto em um circulo de raio igual a  $0^m,64$  na escala de  $1:10$ ; — idem na de  $1:20$ .

## CAPITULO XI

SUMMARIO : **Relação entre a circumferencia e o diametro. — Problemas.**

Reduzir uma circumferencia ou um arco a uma linha recta é rectifical-os.

### RELAÇÃO ENTRE A CIRCUMFERENCIA E O DIAMETRO.

Si pudemos applicar sobre uma circumferencia um fio de linha de modo que as suas extremidades se reunissem em um ponto, e depois collocassemos este fio em linha recta, tinhamos materialmente rectificado esta circumferencia; porém como este processo é inexequível, os geometras substituiram-no pelo calculo.

A relação que existe entre a **circumferencia** e o **diametro** é uma quantidade constante.

Convencionou-se designar pela lettra R o raio de uma circumferencia.

Designemos por C e c duas circumferencias e por D e d os respectivos diametros.

*Duas circumferencias são proporcionaes entre si, como seus raios ou seus diametros;* portanto

$$C : c :: D : d$$

mudemos os meios de lugar

$$C : D :: c : d$$

d'onde

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$$

isto é, o quociente da primeira **circumferencia** por seu diametro é igual ao quociente da segunda **circumferencia** por seu diametro.

Este quociente é ordinariamente designado pela lettra grega  $\pi$  (pi).

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Esta relação não se póde exprimir exactamente.

Na prática, e geralmente, empregamos a expressão 3,1416, isto é : a **circumferencia** contém 3 vezes o diametro mais 1416 decimos-millesimos d'este diametro.

Obtem-se o comprimento de uma **circumferencia** cujo raio ou diametro é conhecido, multiplicando-se seu diametro pela relação 3,1416 ( $\pi$ )

$$C = \pi \times D = 3,1416 \times D$$

**Problema 170.** — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é igual a 6 metros?

A circumferencia é igual a  $\pi \times D$ ; porém D é igual a 2 R (porque o diametro = dois raios) logo :

$$\pi \times 2R = 3,1416 \times 12 = 37^m,6992$$

**Problema 171.** — Qual a circumferencia que tem para diametro 16 metros?

A circumferencia é igual a  $\pi \times D$ ; porém  $D = 16^m$  portanto  $3,1416 \times 16 = 50^m,2656$ .

O **diámetro** de um circulo cuja **circumferencia** se conhece é igual ao quociente da divisão d'essa **circumferencia** pela relação 3,1416, isto é :

$$D = \frac{C}{3,1416}$$

**Problema 172.** — Qual o diametro de um circulo cuja circumferencia é igual a  $37^m,6992$  ?

Sendo o diametro =  $\frac{C}{3,1416}$  e substituindo-se C pelo seu valor, temos :

$$\frac{37,6992}{3,1416} = 12^m$$

O comprimento de um **arco** cujo numero de grãos se conhece é igual ao producto da **circumferencia**, de que o **arco** faz parte, pela relação entre o numero de grãos d'esse **arco** e  $360^\circ$ , isto é :

$$\pi \times D \times \frac{\text{numero de grãos do arco}}{360^\circ}$$

ou

$$\frac{\pi \times D \times \text{numero de grãos do arco}}{360^\circ}$$

**Problema 173.** — Qual o comprimento de um arco de  $50^\circ$  n'uma circumferencia de 12 metros de diametro ?

Sendo a circumferencia igual a

$$\pi \times D = \pi \times 12$$

O arco será igual a

$$\frac{\pi \times 12 \times 50^\circ}{360^\circ} = \frac{3,1416 \times 12 \times 50}{360} = 5^m,2360$$

**Problema 174.** — Qual é o numero de grãos de um arco de 6 metros, n'uma circumferencia de 15 metros de raio ?

Sendo a circumferencia igual a

$$3,1416 \times 30 = 94^m,2480$$

o numero de grãos do arco será igual a

$$360 \times \frac{6}{94,2480} = \frac{2160}{94,2480} = 22^\circ 54'$$

EXERCÍCIOS :

1. — Maria! que é rectificar um arco?
2. — Como se poderia rectificar uma curva si fosse exacta esta rectificação?
3. — Qual a relação que existe entre o diametro e a circumferencia?
4. — Como geralmente exprimimos esta relação?
5. — A circumferencia a que é igual?
6. — Qual é a medida do diametro de uma circumferencia conhecida?
7. — A que é igual o raio de uma circumferencia conhecida?
8. — A que é igual o comprimento de um arco cujo numero de grãos é conhecido?
9. — Como se póde determinar o numero de grãos de um arco cujo comprimento é conhecido?
10. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo diametro é igual a 12 centimetros?
11. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é igual a 8 centimetros?
12. — Qual a circumferencia que tem para diametro 40 metros?
13. — Qual a circumferencia que tem 32 metros de raio?
14. — Que comprimento tem a circumferencia de um nickel de 200 réis, sabendo-se que o diametro mede  $0^m,032$ ?
15. — Qual a circumferencia que tem para diametro  $120^m$ ?
16. — Idem como raio  $170^m$ ?
17. — Quaes as circumferencias que têm para diametro  $12^m,5$ ;  $6^m,40$ ;  $16^m$ ; e  $1^m,80$ ?
18. — Quaes as circumferencias que têm como raio  $0^m,085$ ;  $0^m,90$ ;  $30^m$ ; e  $0^m,6$ ?
19. — Em uma circumferencia de 40 centimetros de raio, quaes são os comprimentos dos arcos de  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $150^\circ$ ?

20. — Em uma circumferencia de 50 centimetros de raio, quaes são os numeros de grãos dos arcos de 30 millimetros? — de  $0^m,025$ ? — de  $0^m,080$ ?
21. — Quaes os diametros das circumferencias que medem  $206^m,25$ ;  $100^m$ ;  $60^m$ ;  $0^m,06$ ; e  $1000^m$  de comprimento?
22. — A roda de um carrinho de mão tem  $0^m,60$  de diametro. Qual a distancia percorrida pelo carrinho quando, conduzido, a roda tiver feito 60 voltas?