

Andréia Alves dos Santos Schwaab

**MÉTODO PARA GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES  
DE PERTINÊNCIA PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS**

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção de título de Doutor em Ciência da Computação.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Silvia Modesto Nassar.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo José de Freitas Filho.

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Schwaab, Andréia Alves dos Santos  
Método para geração e otimização de funções de  
pertinência para previsão de séries temporais /  
Andréia Alves dos Santos Schwaab ; orientador,  
Sílvia Modesto Nassar, coorientador, Paulo José de  
Freitas Filho, 2017.  
143 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós  
Graduação em Ciência da Computação, Florianópolis,  
2017.

Inclui referências.

1. Ciência da Computação. 2. Sistemas fuzzy. 3.  
Funções de pertinência. 4. Algoritmo Genético. 5.  
Modelagem de incerteza. I. Nassar, Sílvia Modesto.  
II. Freitas Filho, Paulo José de. III. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação  
em Ciência da Computação. IV. Título.

Andréia Alves dos Santos Schwaab

**MÉTODO PARA GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES  
DE PERTINÊNCIA PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS**

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do título de doutor e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Florianópolis, 30 de março de 2017.

---

Prof<sup>a</sup>. Carina Friedrich Dorneles, Dr<sup>a</sup>.  
Coordenadora do Programa

---

Prof. Paulo José de Freitas Filho, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Coorientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof<sup>a</sup>. Silvia Modesto Nassar, Dr<sup>a</sup>  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Orientadora

---

Prof<sup>a</sup>. Heloisa de Arruda Camargo, Dr<sup>a</sup>  
Universidade Federal de São Carlos

---

Prof<sup>a</sup>. Aurora Trinidad Ramirez Pozo, Dr<sup>a</sup>  
Universidade Federal do Paraná  
(videoconferência)



---

Prof. Fernando Alvaro Ostuni Gauthier, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Rogério Cid Bastos, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Mauro Roisenberg, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



Dedico este trabalho aos meus  
queridos pais e esposo.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, José e Amélia, pelo amor incondicional dedicado a mim. Isso me proporcionou muita força para seguir adiante.

Ao meu esposo, Fernando Schwaab, pela ajuda imprescindível concedida durante esses anos. Agradeço por ter vivenciado comigo todos os momentos e principalmente por ter me encorajado em todas as fases desta pesquisa. Muito obrigada.

Agradeço à professora Silvia Modesto Nassar, que me deu a honra de sua orientação. Esteve disponível em todos os momentos como amiga e orientadora. Foi um privilégio trabalhar com a professora Silvia.

Agradeço ao professor Paulo Freitas, pela amizade e por todas as recomendações dadas. Ao professor Mauro Roisenberg, que embora não tenha sido formalmente meu orientador, foi quem me acolheu como aluna de mestrado e deu importantes contribuições para o andamento do doutorado. Agradeço à professora Heloisa de Arruda Camargo, por todas as sugestões e pela disponibilidade nas ocasiões de qualificação e defesa. Agradeço também aos professores Aurora Pozo, Fernando Gauthier e Rogério Cid Bastos, cujas contribuições foram muito importantes e valorizaram este trabalho.

A minha amiga Beatriz Wilges, grande incentivadora deste projeto, desde o início. Agradeço por sua amizade e ajuda prestada. Agradeço também ao meu amigo Gustavo Mateus, que colaborou com os aspectos técnicos de transmissão da defesa.

A toda minha família, irmãs, cunhados, sobrinhos e afilhados. A todos os meus amigos e colegas de trabalho, agradeço pela amizade e incentivo.

À Universidade Federal de Santa Catarina e à SeTIC, por terem proporcionado apoio e as condições necessárias para a realização desta pesquisa.



## RESUMO

Sistemas *fuzzy* são utilizados para diversos tipos de aplicações cujos domínios são caracterizados por vagueza e imprecisão. Para que um sistema atue de forma apropriada, isto é, para que alcance os resultados almejados, é necessário definir a base de conhecimento adequadamente. Isso significa definir o conjunto de regras e as funções de pertinência condizentes com o problema. Em sua forma tradicional, um sistema *fuzzy* é projetado utilizando funções de pertinência tipo 1, cujo grau de pertinência atribuído a cada elemento do conjunto é um valor numérico. No entanto, uma abordagem alternativa também considerada apropriada emprega funções de pertinência tipo 2, cujo grau de pertinência é também *fuzzy*. A definição dessas funções de pertinência, contudo, é uma etapa complexa, sem metodologia ainda definida e dependente da aplicação, sendo muitas vezes estabelecida com o auxílio de especialistas, heurísticamente, ou por meio de sucessivas simulações ou algoritmos de busca e otimização. Nessa direção, esta pesquisa propõe um método híbrido para a geração de funções de pertinência otimizadas por um Algoritmo Genético (AG) que admite tanto funções tipo 1 quanto funções tipo 2 intervalares. O método permite detalhar o total de conjuntos empregados por variável do problema, assim como o tipo da função de pertinência de cada conjunto *fuzzy*. A avaliação do método proposto foi realizada em previsão de séries temporais e por meio da análise estatística dos resultados. Para fins de comparação, implementou-se também a otimização de funções de pertinência tipo 1 e tipo 2, exclusivamente. Os resultados do método proposto mostraram-se promissores, pois os erros médios obtidos são semelhantes aos dos melhores resultados obtidos por abordagens que empregam exclusivamente funções tipo 1 ou funções tipo 2. Além disso, a diminuição do total de conjuntos contribui para a interpretabilidade do modelo em termos de complexidade.

**Palavras-chave:** Sistemas *fuzzy*. Funções de pertinência tipo 1. Funções de pertinência tipo 2 intervalares. Algoritmo Genético. Modelagem de incerteza.



## ABSTRACT

Fuzzy systems are used for various types of applications whose domains are characterized by vagueness and imprecision. For a system to act suitably, that is, to achieve the desired results, it is necessary to adequately define the knowledge base. This means defining the set of rules and the membership functions that are suitable to the problem. A fuzzy system is traditionally designed by using type-1 membership functions, for which the degree of membership attributed to each element of the set is a numeric value. Nevertheless, an optional approach also considered appropriate uses type-2 membership functions whose degree of membership is also fuzzy. The definition of these membership functions, however, is a complex step, for which there is still no defined methodology and which is dependent on the application. It is often established with the assistance of specialists, either heuristically or through a series of simulations or by using search and optimization algorithms. In this context, this study proposes a hybrid method for the generation of membership functions that are optimized for a Genetic Algorithm that admits both type-1 and interval type-2 membership functions. The method allows detailing the number of sets used per variable of the problem, as well as the type of membership function of each fuzzy set. The evaluation of the method proposed was conducted by predicting time series data and by conducting a statistical analysis of the results. For comparative purposes, the type-1 and type-2 membership functions were optimized, exclusively. The results of the proposed method revealed themselves to be promising, because the mean errors obtained are similar to the best results obtained through approaches that exclusively use type-1 or type-2 membership functions. Moreover, the decrease in the total number of sets contributes to the interpretability of the model in terms of complexity.

**Keywords:** Fuzzy systems. Type-1 membership functions. Interval type-2 membership functions. Genetic Algorithm. Modeling of uncertainty.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Método convencional de definição de sistemas <i>fuzzy</i> .....	27
Figura 2 – Variação da incerteza e utilização de tipos de função de pertinência .....	29
Figura 3 – Fontes de incerteza analisadas nesta pesquisa .....	29
Figura 4 – Procedimentos metodológicos da pesquisa.....	33
Figura 5 – Série temporal Mackey-Glass .....	35
Figura 6 – Série temporal Box-Jenkins .....	35
Figura 7 – Série temporal Dow Jones – período 13/11/2000 a 16/10/2012.....	36
Figura 8 – Elementos de uma função de um conjunto <i>fuzzy</i> A.....	40
Figura 9 – Função de pertinência tipo 2 intervalar em um universo discreto .....	43
Figura 10 – Três diferentes formas de mancha de incerteza .....	44
Figura 11 – Função de pertinência tipo 2 intervalar .....	46
Figura 12 – Nível de incerteza e precisão da modelagem .....	46
Figura 13 – Tipos básicos de incerteza .....	47
Figura 14 – Sistema <i>fuzzy</i> tipo 1.....	48
Figura 15 – Passos executados por um sistema <i>fuzzy</i> .....	49
Figura 16 – Processo de inferência em um sistema <i>fuzzy</i> tipo 1.....	50
Figura 17 – Sistema <i>fuzzy</i> tipo 2 Mamdani .....	51
Figura 18 – Inferência em um sistema <i>fuzzy</i> tipo 2 Mamdani .....	52
Figura 19 – Estrutura do cromossomo de um Algoritmo Genético para a otimização de funções de pertinência .....	61
Figura 20 – Passos na execução do método <i>FuzzyDBD</i> .....	65
Figura 21 – Método para a identificação do tipo de função de pertinência .....	73
Figura 22 – Dados médios de previsão obtidos dos experimentos com os sistemas tipo 1 e tipo 2 .....	81
Figura 23 – Erros na previsão da série temporal Mackey-Glass com ruído (SNR=10 dB) para a média das simulações.....	81
Figura 24 – Exemplos de funções de pertinência tipo 1 otimizadas pelo Algoritmo Genético .....	82
Figura 25 – Exemplos de funções de pertinência tipo 2 otimizadas pelo Algoritmo Genético .....	83
Figura 26 – Proposta para a geração de funções de pertinência.....	89
Figura 27 – Organização do processo de otimização das funções de pertinência .....	90
Figura 28 – Algoritmo Genético para a geração automática de funções de pertinência .....	92

Figura 29 – Exemplo de <i>crossover</i> .....	93
Figura 30 – Funções de pertinência tipo 1 com similaridade $S_D = 0,91$ ..	94
Figura 31 – Funções de pertinência tipo 1 com similaridade $S_D = 0,75$ ..	95
Figura 32 – Conjunto de algoritmos do módulo de evolução de funções de pertinência .....	96
Figura 33 – MG sem ruído – Intervalo de confiança para as médias ...	103
Figura 34 – MG sem ruído – Efeitos principais .....	104
Figura 35 – MG sem ruído – Interação entre os fatores.....	104
Figura 36 – MG sem ruído – Convergência média dos algoritmos.....	105
Figura 37 – MG sem ruído – Funções de pertinência tipo 1, quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	106
Figura 38 – MG sem ruído – Funções de pertinência tipo 2, quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	107
Figura 39 – MG sem ruído – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável.....	108
Figura 40 – MG com ruído (SNR=20dB) – Efeitos principais dos fatores.....	109
Figura 41 – MG com ruído (SNR=20dB) – Interação entre os fatores	110
Figura 42 – MG com ruído (SNR=20dB) – Convergência média dos algoritmos.....	110
Figura 43 – BJ – Efeitos principais dos fatores.....	112
Figura 44 – BJ – Convergência média dos algoritmos.....	113
Figura 45 – BJ – Funções de pertinência tipo 1, cinco conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	114
Figura 46 – BJ – Funções de pertinência tipo 2, quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	115
Figura 47 – BJ – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável.....	116
Figura 49 – DJI – Convergência média dos algoritmos .....	119
Figura 50 – DJI – Funções de pertinência tipo 1, cinco conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	120
Figura 51 – DJI – Funções de pertinência tipo2, quatro conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	121
Figura 52 – DJI – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo cinco conjuntos <i>fuzzy</i> por variável .....	122

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados das simulações (RMSE médio) para a série temporal Mackey-Glass sem ruído e com SNR 20 dB .....	77
Tabela 2 – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio .....	78
Tabela 3 – Teste estatístico (ANOVA) para avaliação da interação entre os fatores .....	79
Tabela 4 – Resultados das simulações (RMSE médio) para o Algoritmo Genético, considerando a série com SNR 10dB .....	80
Tabela 5 – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE obtido nas simulações do AG (SNR=10 dB) .....	80
Tabela 6 – Principais características do AG empregado no método proposto .....	91
Tabela 7 – Níveis de similaridade adotados no algoritmo de mutação .	94
Tabela 8 – Erro médio para a série temporal Mackey-Glass .....	102
Tabela 9 – MG sem ruído – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio .....	103
Tabela 10 – MG sem ruído – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos .....	105
Tabela 11 – MG com ruído (SNR=20 dB) – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio .....	109
Tabela 12 – MG com ruído (SNR=20dB) – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos .....	111
Tabela 13 – RMSE médio para a série BJ .....	111
Tabela 14 – BJ – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio	112
Tabela 15 – BJ – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos .....	116
Tabela 16 – DJI – Erro médio para a série temporal Dow Jones .....	117
Tabela 17 – DJI – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio	117
Tabela 18 – DJI – Tempo médio de simulação, em segundos .....	119
Tabela 19 – Série MG – Resultados obtidos (RMSE médio) pelo método proposto e por Almaraashi (2012) .....	124
Tabela 20 – Série BJ – Resultados obtidos pelo método híbrido proposto e pelo método heurístico de Riid e Rüstern (2010) .....	125



## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Justificativas para a utilização de funções de pertinência tipo 2 .....	28
Quadro 2 – Taxonomia para analisar a interpretabilidade de sistemas <i>fuzzy</i> .....	55
Quadro 3 – Pseudocódigo de um Algoritmo Genético .....	56
Quadro 4 – Pseudocódigo de um <i>Simulated Annealing</i> .....	57
Quadro 5 – Características observadas nos métodos para geração de funções de pertinência tipo 1 .....	66
Quadro 6 – Características observadas nos métodos para a geração de funções de pertinência tipo 2 .....	71
Quadro 7 – Conjuntos de regras utilizadas nos experimentos .....	74
Quadro 8 – Algoritmo de evolução de funções de pertinência .....	96
Quadro 9 – Algoritmo de remoção de funções de pertinência tipo 1 ....	97
Quadro 10 – Algoritmo de conversão/agrupamento de funções de pertinência .....	98
Quadro 11 – Algoritmo de reorganização da base de regras .....	99



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACO	<i>Ant Colony Optimization</i>
AG	Algoritmo Genético
ANOVA	<i>Analysis of Variance</i> (Análise de variância)
BJ	Série temporal Box-Jenkins
DJI	Série temporal Dow Jones
FOU	<i>Footprint of Uncertainty</i> (Mancha de incerteza)
FP	Função de pertinência
IT2	<i>Interval Type-2</i> (Tipo 2 intervalar)
LMF	<i>Lower Membership Function</i> (Função de pertinência inferior)
MF	<i>Membership Function</i> (Função de pertinência)
MG	Série temporal Mackey-Glass
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
SA	<i>Simulated Annealing</i>
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>
$T_e$	Taxa de evolução
T1	Tipo 1
UMF	<i>Upper Membership Function</i> (Função de pertinência superior)



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>25</b>
1.1	OBJETIVO GERAL.....	30
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	30
1.3	CONTRIBUIÇÕES.....	30
1.4	JUSTIFICATIVA E ESCOPO.....	31
1.5	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	32
1.6	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO.....	37
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>39</b>
2.1	CONJUNTOS <i>FUZZY</i> TIPO 1 .....	39
2.1.1	Medidas de similaridade <i>fuzzy</i> .....	41
2.2	CONJUNTOS <i>FUZZY</i> TIPO 2 .....	42
2.3	SISTEMAS <i>FUZZY</i> .....	46
2.3.1	Sistemas <i>fuzzy</i> tipo 1 .....	48
2.3.2	Sistema <i>fuzzy</i> tipo 2.....	50
2.4	Interpretabilidade de Sistemas <i>Fuzzy</i> .....	54
2.5	Algoritmos de otimização.....	56
2.5.1	Algoritmo Genético.....	56
2.5.2	<i>Simulated Annealing</i> .....	57
<b>3</b>	<b>GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA</b>	<b>59</b>
3.1	MÉTODOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA <i>FUZZY</i> TIPO 1.....	59
3.1.1	Redes neurais.....	59
3.1.2	Histograma.....	60
3.1.3	Algoritmos Genéticos.....	60
3.1.4	<i>Ant Colony Optimization</i> .....	62
3.1.5	Enxame de partículas.....	63
3.1.6	Métodos heurísticos.....	64
3.1.7	Comparação entre os métodos para a geração de funções de pertinência <i>fuzzy</i> tipo 1.....	65
3.2	MÉTODOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA <i>FUZZY</i> TIPO 2.....	67
3.2.1	Comparação entre os métodos para geração de funções de pertinência tipo 2.....	69
3.3	IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS AUTOMÁTICOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA.....	71
3.3.1	Procedimentos.....	72
3.3.2	Resultados.....	76
3.4	DISCUSSÕES.....	84
<b>4</b>	<b>PROPOSTA PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA.....</b>	<b>87</b>

4.1	MÉTODO PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA	87
4.2	CONSIDERAÇÕES .....	99
<b>5</b>	<b>AVALIAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO .....</b>	<b>101</b>
5.1	SÉRIE TEMPORAL MACKEY-GLASS .....	101
5.1.1	Mackey-Glass sem ruído .....	102
5.1.2	Mackey-Glass com ruído .....	109
5.2	SÉRIE TEMPORAL BOX-JENKINS .....	111
5.3	SÉRIE TEMPORAL DOW JONES .....	117
5.4	SÍNTESE DOS RESULTADOS.....	122
5.5	COMPARAÇÕES COM ABORDAGENS DA LITERATURA.....	124
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>127</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>131</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi criada por Zadeh em 1965 (ZADEH, 1965) e representa o início de um importante avanço no âmbito da modelagem de incerteza. Exemplo disso são os sistemas *fuzzy*, úteis a diversos domínios de aplicação (ABD; ABHARY; MARIAN, 2013; AMINDOUST et al., 2012; CHRYSAFIADI; VIRVOU, 2012; FRANTTI; MAJANEN, 2014; LAASRI et al., 2015; ONIEVA et al., 2012).

A base de conhecimento de um sistema *fuzzy* é composta por variáveis e regras. As variáveis são representadas por conjuntos *fuzzy* que caracterizam o conhecimento. De acordo com Ross (2010), as funções de pertinência descrevem graficamente a imprecisão que se tem sobre um conjunto *fuzzy*. A base de regras é formada por sentenças do tipo Se/Então, formalizando os relacionamentos entre os conjuntos *fuzzy* caracterizados pelas funções de pertinência.

As funções de pertinência frequentemente empregadas em sistemas *fuzzy* são denominadas funções tipo 1. Funções tipo 1 representam o conhecimento na forma de valores linguísticos sobre uma variável do problema de maneira que cada elemento do domínio tenha um grau de pertinência definido no intervalo  $[0,1]$ . Tal característica, no entanto, é mencionada como insuficiente para a representação da incerteza, uma vez que modela com precisão o entendimento sobre uma variável *fuzzy* (KLIR, 1995; MENDEL, 2003). Conjuntos *fuzzy* tipo 1 são adequados quando se tem informação suficiente para determinar a pertinência dos elementos ao conjunto *fuzzy* (ROSS, 2010).

A proposta para tratamento da incerteza quanto ao grau de pertinência foi apresentada por Zadeh (1975), que notou a necessidade de uma representação mais abrangente para os graus de pertinência. O autor entendeu que era necessária uma representação para os casos em que não se conhecia com certeza o grau de pertinência de determinado elemento a um conjunto *fuzzy*. Dessa forma, ele introduziu o conceito de conjuntos *fuzzy* tipo 2, que são conjuntos cujo grau de pertinência de sua função é também *fuzzy*. Os conjuntos tipo 2, atualmente, podem ser classificados em gerais e intervalares (MENDEL, 2014).

Conjuntos *fuzzy* tipo 2 possuem maior poder de representação de incerteza, uma vez que possuem mais graus de liberdade, são representados por funções tridimensionais. São adequados na modelagem de palavras ou em situações em que não se conhece, ou não é possível modelar com certeza, as funções de pertinência (MENDEL;

JOHN, 2002). De acordo com Liang e Mendel (2000), a ocorrência de incerteza na modelagem de sistemas *fuzzy* pode acontecer: a) na definição de conceitos linguísticos, cujos significados podem ser diferentes para pessoas diferentes; b) na definição dos consequentes das regras, que, da mesma forma, podem não ser uma escolha comum em um grupo de indivíduos; c) na presença de ruídos nos dados. Devido ao poder de representação que possuem, cada vez mais os conjuntos *fuzzy* tipo 2 são utilizados em aplicações (BERNARDO; HAGRAS; TSANG, 2013; CHAOUI et al., 2013; DERELI et al., 2011; HAMZA; YAP; CHOUDHURY, 2015; JOHN; COUPLAND, 2007; MELIN, 2012; MENDEL, 2007a; SEPÚLVEDA et al., 2012; STARKEY et al., 2016; TURKSEN; CELIKYILMAZ, 2010).

A definição de funções de pertinência, que são a representação dos conjuntos *fuzzy*, é um passo fundamental no projeto de sistemas *fuzzy*, pois faz parte da base de conhecimento necessária para realizar a inferência e, conseqüentemente, alcançar os resultados esperados. É por meio da função de pertinência que o conhecimento sobre os atributos de um problema são caracterizados, em grande parte das vezes, por funções gaussianas, triangulares, trapezoidais, G. Bell, etc. Essa definição pode ser amparada por especialistas da área, pode ser realizada heurísticamente, ou ainda, com o auxílio de métodos automáticos.

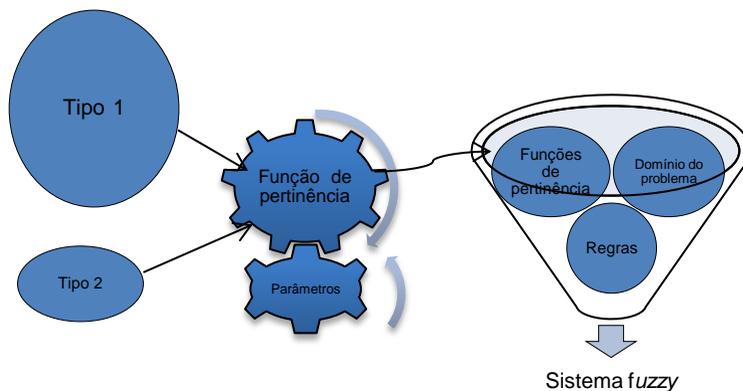
Os métodos automáticos facilitam a extração do conhecimento das bases de dados e podem auxiliar na descoberta dos parâmetros ideais, evitando assim exaustivas simulações para alcançar a melhor parametrização do modelo. Cintra (2012) ressalta a necessidade de métodos para a descoberta de conhecimento em grandes bases de dados para a modelagem de sistemas *fuzzy*. Em um trabalho de revisão sobre técnicas de identificação de modelos *fuzzy*, Sala, Guerra e Babuška (2005) também reforçam a necessidade de técnicas para a extração do conhecimento em base de dados. Um método automático é vantajoso em situações:

- quando não se tem acesso a um especialista da área;
- como suporte ao especialista na definição das funções de pertinência. Mesmo tendo o conhecimento necessário, o especialista pode ter dúvidas no processo de modelagem.

Em relação aos conjuntos *fuzzy* tipo 1, existem na literatura diversas propostas para a descoberta de funções de pertinência a partir de dados. No entanto, em uma revisão de métodos de geração de

funções de pertinência, Cintra, Camargo e Monard (2008) já observavam que os métodos existentes são complexos e não se sabe qual o melhor para uma determinada aplicação. Para conjuntos *fuzzy* tipo 2, não há metodologia definida para a geração das funções de pertinência (MELIN; CASTILLO, 2014) e as abordagens também são relacionadas fortemente com o problema abordado. Os algoritmos de otimização, que frequentemente são utilizados para ajustes das funções de pertinência, exploram poucos parâmetros (LINDA; MANIC, 2011), no entanto, apresentam resultados superiores em relação ao resultado obtido por um sistema *fuzzy* não otimizado (CERVANTES; CASTILLO, 2013). A Figura 1 apresenta um modo convencional de definição de sistemas *fuzzy*.

Figura 1 – Método convencional de definição de sistemas *fuzzy*



Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 1 observa-se que o tipo da função de pertinência (tipo 1 ou tipo 2) é determinado *a priori*. Nas aplicações, a prevalência ainda é maior de conjuntos tipo 1. As demais definições, como parâmetros e regras, estão relacionadas ao domínio da aplicação. No caso dos algoritmos de otimização, eles atuam no ajuste dos parâmetros e também das regras. Observa-se que a otimização, no entanto, pode gerar como efeito colateral uma diminuição da interpretabilidade do sistema *fuzzy* (GACTO, ALCALÁ, HERRERA, 2011).

Com a necessidade uma metodologia para o desenvolvimento das funções de pertinência a partir de dados e, em virtude da ascensão do

uso de sistemas *fuzzy* tipo 2 para a modelagem de problemas caracterizados por incerteza, é desejável obter um mecanismo que facilite a geração das funções de pertinência. Além disso, embora existam vários trabalhos que mostrem o quão promissora é a utilização de funções de pertinência tipo 2 (ALADI; WAGNER; GARIBALDI, 2014; ALMARAASHI, 2012; LINDA; MANIC, 2010), a utilização de um ou outro tipo de função de pertinência é uma questão não formalizada (ALADI; WAGNER; GARIBALDI, 2014; MELIN; CASTILLO, 2014; MENDEL, 2010). As aplicações que fazem uso de funções de pertinência tipo 2 o justificam pela presença de incerteza. No entanto, de acordo com Klir (2006), até há pouco tempo, o tratamento de incerteza era realizado majoritariamente por funções de pertinência tipo 1. Castillo e Melin (2012) e Melin e Castillo (2014) realizaram revisões de pesquisas que aplicam funções tipo 2 e coletaram algumas justificativas para o emprego de tais funções. O Quadro 1 apresenta algumas dessas justificativas.

Quadro 1 – Justificativas para a utilização de funções de pertinência tipo 2

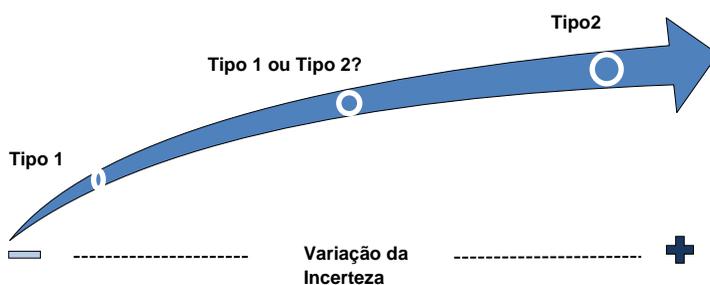
Tipo 2	Incerteza na informação
	Testes com funções tipo 2
	Incerteza na classificação
	Incerteza e imperfeição dos dados
	Incerteza em problemas de controle
	Incerteza no controle de robôs
	Imprecisão no processamento de imagens
	Incerteza em <i>clustering</i>

Fonte: Adaptado de Castillo e Melin (2012) e Melin e Castillo (2014)

Nota-se pelo Quadro 1 que os autores utilizam argumentos específicos para um dado domínio de aplicação, sempre com a inclusão da palavra “incerteza”. De acordo com Mendel (2010), intuitivamente, na presença de incerteza, o sistema tipo 2 produziria resultados melhores; porém, essa incerteza não é quantitativa. É necessário, portanto, explorar as condições de incerteza para que se possa avaliar a utilização de um ou outro tipo de função de pertinência. Além disso, é necessário avaliar os resultados para que se possa realizar uma indicação formal do tipo mais adequado. Mendel (2010) apresenta os primeiros resultados na tentativa de comparar as saídas de sistemas *fuzzy* tipo 1 e tipo 2; no entanto, são necessárias aplicações desses resultados.

Neste contexto, esta pesquisa se concentra em investigar a seguinte questão: como escolher os tipos de funções de pertinência a serem utilizadas na modelagem de um sistema *fuzzy*? A Figura 2 ilustra a pergunta de pesquisa considerando a incerteza presente em um problema real. Dessa forma, aborda-se a investigação e a proposição de um método para a construção de sistemas *fuzzy* cujo resultado principal seja a estimação das funções de pertinência e seu tipo.

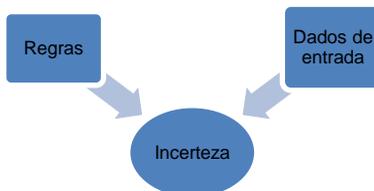
Figura 2 – Variação da incerteza e utilização de tipos de função de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

Observa-se pela Figura 2 que à medida que a incerteza aumenta, é indicado utilizar conjuntos tipo 2; porém, essa passa a ser uma decisão de projeto, pois não existe um meio formal pelo qual se possa fazer essa indicação. Sendo a incerteza a justificativa para a utilização de funções de pertinência, é necessário entender quais as fontes de incerteza que poderiam ser consideradas para a escolha do tipo. Nesta pesquisa, são exploradas as incertezas provenientes da base de regras e dos dados de entrada do sistema, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Fontes de incerteza analisadas nesta pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora

A incerteza presente nas regras é uma característica observada por Liang e Mendel (2000); no entanto, não se notaram trabalhos que explorassem esse tipo de incerteza na geração de funções de pertinência tipo 2. Dessa forma, adotou-se uma estratégia de emprego de diferentes conjuntos de regras, os quais serão definidos empiricamente ou automaticamente, por meio de aprendizagem. Já a incerteza nos dados de entrada é representada pela adição de ruído.

### 1.1 OBJETIVO GERAL

Propor um método de geração e otimização de funções de pertinência para previsão de séries temporais.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Compreender os diferentes tipos de funções de pertinência e seu impacto nos resultados obtidos por um sistema de inferência *fuzzy*.
- Analisar o uso de algoritmos de otimização para determinar as funções de pertinência.
- Investigar diferentes fontes de incerteza, nas regras e nos dados, para compreender o impacto que causam no sistema.
- Avaliar o tipo de função de pertinência mais adequada, bem como seus parâmetros e o total de conjuntos por variável.
- Desenvolver uma abordagem híbrida utilizando funções tipo 1 e tipo 2.
- Atender a requisitos de interpretabilidade referentes à diminuição da complexidade do modelo.
- Avaliar o método para a previsão em séries temporais.

### 1.3 CONTRIBUIÇÕES

Esta pesquisa contribui com um método de geração de funções de pertinência para previsão em séries temporais. As principais contribuições encontram-se nos seguintes aspectos:

- Na investigação do método de otimização mais favorável para o processo de descoberta de funções de pertinência do sistema *fuzzy*.
- Na exploração de uma abordagem híbrida, tipo 1 e tipo 2.
- No desenvolvimento de um método com alguns aspectos de interpretabilidade relacionada à complexidade do modelo, uma vez que se trabalha com um reduzido número de conjuntos e regras.
- O método estabelece quais os parâmetros e o tipo de função de pertinência adequados para a modelagem do problema por meio de um processo evolutivo.

#### 1.4 JUSTIFICATIVA E ESCOPO

A incerteza presente nas aplicações leva ao desenvolvimento de modelos que possam lidar com tal característica. Nesse campo, a modelagem *fuzzy* merece especial destaque. Para Ross (2010), a modelagem *fuzzy* é adequada para situações em que há maior incerteza no contexto; em casos mais precisos, a modelagem matemática poderia ser satisfatória. Para Wang (1997), embora um sistema *fuzzy* esteja numa conjuntura de incerteza, a sua modelagem é precisa. Isso significa que o sistema deve estar adequadamente ajustado para refletir o esperado. É neste ponto que atuam os métodos automáticos que extraem informações necessárias do conhecimento disponível em dados.

A modelagem de sistemas *fuzzy* envolve uma série de parâmetros, entre os quais, a definição do tipo da função de pertinência. Existe atualmente um esforço significativo na utilização de funções de pertinência tipo 2 (MELIN; CASTILLO, 2014) (CASTILLO; MELIN, 2012), que têm mostrado bons resultados para as aplicações testadas. Mas, cabe ressaltar que as funções tipo 1 continuam sendo aplicadas com sucesso na modelagem de incerteza. Zhou et al. (2016), por exemplo, utilizaram a modelagem *fuzzy* com funções de pertinência tipo 1 para simular o comportamento dinâmico de pedestres. Os autores exaltaram os resultados em relação aos de outras abordagens justamente pela capacidade do sistema *fuzzy* em modelar as informações que são imprecisas e incertas por natureza.

Devido à importância observada tanto em funções de pertinência tipo 1 quanto em funções tipo 2, esta pesquisa examina as duas abordagens e se delimitará a utilizar funções de pertinência tipo 2 intervalares. As funções de pertinência intervalares são mais simples do

que as funções tipo 2 gerais, por serem completamente caracterizadas por sua região de incerteza, *Footprint of Uncertainty* (FOU), ou mancha de incerteza, o que diminui o custo da inferência (LIANG; MENDEL, 2000). Além disso, as funções de pertinência intervalares são as mais utilizadas em aplicações (MELIN; CASTILLO, 2014). Utilizam-se as funções de pertinência gaussianas por causa do número reduzido de parâmetros que necessitam ser definidos, e também por ser uma das funções mais utilizadas em aplicações (WU; MENDEL, 2014).

Por se tratar de um método baseado em aprendizagem, os dados do problema serão necessários para que se aplique o método de otimização proposto. Essa metodologia está no escopo de aplicações que necessitam de respostas desfuzzificadas, pois a avaliação é realizada na previsão de valores. Mais precisamente, os testes são executados na previsão em séries temporais. A previsão em séries temporais é de importância considerável devido à sua aplicabilidade a diversas áreas, como por exemplo, aos setores de vendas, financeiro e controle de estoque (LIU et al., 1994).

## 1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção descrevem-se os procedimentos metodológicos que norteiam esta pesquisa que, de maneira sucinta, são: a revisão bibliográfica, a implementação de métodos para a geração de funções de pertinência, o desenvolvimento e a avaliação da proposta. A Figura 4 apresenta a estruturação dessas etapas.

A revisão bibliográfica objetiva proporcionar uma visão sobre a fundamentação teórica deste trabalho bem como sobre os trabalhos correlatos. A fundamentação teórica explora os principais conceitos pertinentes ao tema da pesquisa. A revisão bibliográfica também destaca os métodos existentes para a geração automática de funções de pertinência tipo 1 e tipo 2. Tais métodos são, principalmente, desenvolvidos por intermédio de algoritmos de otimização.

Figura 4 – Procedimentos metodológicos da pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora

Realiza-se a implementação de métodos automáticos para a geração de funções de pertinência para analisar potencialidades de cada técnica de otimização, mais especificamente do *Simulated Annealing* (SA) e do Algoritmo Genético. Nessa etapa de implementação avaliam-se também as variações de incerteza nas regras dos sistemas *fuzzy* (por meio de diferentes conjuntos de regras) e nos dados do problema, considerando dois tipos de sistemas *fuzzy*: tipo 1 e tipo 2 intervalar. Realiza-se a implementação em linguagem Java®, utilizando o *framework* Juzzy (WAGNER, 2013). Realizar-se-á, nesta ocasião, a avaliação dos métodos mediante previsão da série temporal Mackey-Glass (MACKEY; GLASS, 1977).

A geração da base de regras é parte da etapa de implementação dos métodos automáticos. A base de regras foi construída de diferentes maneiras para configurar a incerteza inerente a este estágio da modelagem. Dessa forma, ocorre de dois diferentes modos: empiricamente e automaticamente. Para gerar as regras automaticamente, realiza-se um procedimento inspirado no método de Wang e Mendel (WANG, 2003; WANG; MENDEL, 1992). Nesse sentido, dividiu-se a região de dados da série temporal em tantas regiões quanto forem os conjuntos por variável; classificaram-se os dados da série temporal em cada uma dessas regiões. A partir da classificação dos dados, construíram-se as regras. Dentre as regras conflitantes, eliminaram-se as menos frequentes. A partir do conjunto de regras resultante, definiram-se dois grupos de seis regras: as mais frequentes (que denotam menos incerteza) e as menos frequentes (que expressam mais incerteza). Além da extração automática, em outro caso de experimentação, utilizaram-se seis regras definidas empiricamente, a

partir da observação dos dados. O número reduzido de regras se justifica pela redução de complexidade do problema, que se confirmou por experimentação.

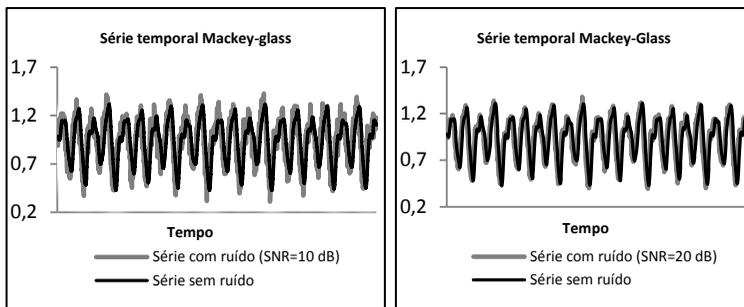
Com a finalização da etapa de implementação dos métodos automáticos, fez-se a seleção do método que se utilizará na implementação da proposta. Os resultados previamente obtidos (da etapa de implementação dos métodos de geração de funções de pertinência) apoiaram a concepção e o desenvolvimento da proposta. Realizar-se-á a avaliação da proposta na previsão das seguintes séries temporais: Mackey-Glass (MACKEY; GLASS, 1977), Box-Jenkins (BOX; JENKINS, 1976) e Dow Jones (DOW JONES AVERAGES, 2016).

Geram-se os dados da série temporal Mackey-Glass por meio da equação não linear apresentada na equação (1). A previsão dessa série é uma aplicação de referência para outros trabalhos na área (ALMARAASHI, 2012; CASTELLANO; FANELLI; MENCAR, 2003; LIANG; MENDEL, 2000).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a*x(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)} - b * x(t) \quad (1)$$

Em (1),  $t$  refere-se ao tempo atual;  $a=0,2$  e  $b=0,1$  e  $n=10$  são constantes representadas por valores reais. Aplica-se o parâmetro  $\tau=17$ , pois, a partir desse valor, a série apresenta comportamento caótico. Utilizam-se esses parâmetros também em Almaraashi (2012). Realizam-se as experimentações para os dados da série com e sem ruído. Adicionou-se o ruído, de distribuição normal, em dois níveis, de tal forma que o *Signal-to-noise ratio* (SNR) obtivesse valores de 10dB e 20dB. Na Figura 5 apresentam-se mil pontos da série temporal, de  $t=117$  a  $t=1118$ , com  $x(0)=1,2$ .

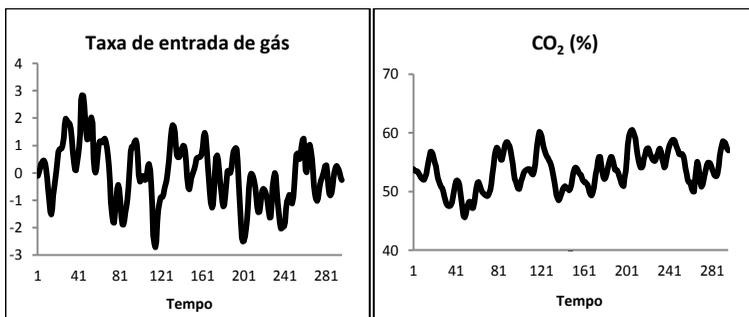
Figura 5 – Série temporal Mackey-Glass



Fonte: Elaborada pela autora

Os dados da série temporal Box-Jenkins (BOX; JENKINS, 1976) são provenientes de um processo de queima do gás metano (Figura 6). Coletaram-se os dados em intervalos de nove segundos de combustão que totalizam 296 observações. Observam-se duas variáveis durante o processo: a taxa de entrada de gás metano ( $x$ ) e o percentual de emissão de dióxido de carbono ( $y$ ). O problema se caracteriza por realizar a previsão de emissão de dióxido de carbono baseando-se tanto na taxa de entrada de gás metano, quanto na emissão de dióxido de carbono. Mais precisamente, realiza-se a previsão de  $y(t)$  (emissão de dióxido de carbono no tempo  $t$ ) pela observação de  $y(t-1)$  e  $x(t-4)$ . Entende-se essa configuração na literatura como adequada para esse problema (RIID; RÜSTERN, 2010).

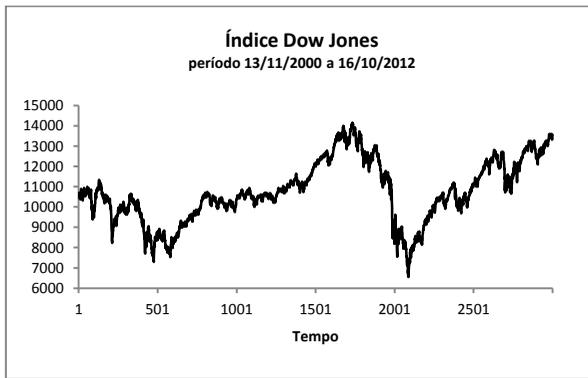
Figura 6 – Série temporal Box-Jenkins



Fonte: Elaborada pela autora

O Dow Jones (The Dow Jones Industrial Average ®) é um índice que caracteriza o desempenho de um grupo importante de ações do mercado norte americano, que são ações conhecidas como *blue-chip*. Foi criado em 1896 e é conhecido e acompanhado mundialmente (DOW JONES AVERAGES, 2016; S&P DOW JONES INDICES, 2016). Realiza-se, nesta pesquisa, a previsão da série temporal Dow Jones para o período entre os anos de 2000 e 2012, totalizando três mil observações (GOOGLE FINANCE, 2016). Apresenta-se a série temporal do período na Figura 7.

Figura 7 – Série temporal Dow Jones – período 13/11/2000 a 16/10/2012



Fonte: Google Finance (2016)

Para avaliar o desempenho de previsão, calcula-se o *Root Mean Square Error* (RMSE), que é baseado na diferença entre a resposta real e a resposta obtida pelo sistema otimizado. Representa-se o cálculo do RMSE pela equação (2).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (2)$$

Na equação (2),  $n$  é o total de pontos analisados,  $y_i$  é o valor real observado na série temporal e  $\hat{y}_i$  é o valor previsto pelo sistema. A comparação dos resultados apoiar-se-á por análise estatística. Aplicar-se-á a análise de variância, *analysis of variance* (ANOVA), nas médias de erros encontradas nas simulações. O teste indicará se as médias são estatisticamente semelhantes ou não. Além disso, será possível apontar interação entre os fatores observados. Os fatores observados são: os

tipos de algoritmos, os tipos de sistemas *fuzzy* e os tipos de regras. Com a realização da análise de variância, será possível analisar estatisticamente as diferenças entre funções tipo 1 e funções tipo 2.

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Estabelece-se a organização deste documento da seguinte maneira: o segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho. O terceiro capítulo explora os métodos de geração de funções de pertinência: apresenta a revisão de trabalhos correlatos e resultados de algoritmos de otimização implementados nesta pesquisa. O quarto capítulo apresenta a proposta de um método automático para a geração de funções de pertinência no âmbito de previsão de séries temporais. O quinto capítulo apresenta os resultados da avaliação do método proposto. Por fim, apresentam-se as considerações finais.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentam-se as definições sobre conjuntos *fuzzy* tipo 1 e tipo 2, assim como sistemas de inferência *fuzzy* tipo 1 e tipo 2. Também se trata da similaridade entre funções de pertinência tipo 1 e de recomendações sobre interpretabilidade de sistemas neste capítulo. Além disso, mostram-se brevemente os métodos de otimização que são aplicados nesta pesquisa.

### 2.1 CONJUNTOS FUZZY TIPO 1

Os conjuntos *fuzzy* tipo 1 são definidos por meio de funções de pertinência tipo 1. Encontram-se aplicações da modelagem *fuzzy* nas áreas de classificação e reconhecimento de padrões (AL-SAKKA et al., 2013; BOMBARDIER; SCHMITT, 2010; DAS, 2013), controle (KARTHIKEYAN et al., 2013; LI, TONG, LI, 2015), simulação (ABD; ABHARY; MARIAN, 2013), processamento de imagens (KAUR; SETHI, 2013) etc.

Ao construir tais aplicações utilizando a teoria de conjuntos *fuzzy*, obtém-se um mecanismo capaz de representar o raciocínio aproximado que é realizado pelos seres humanos diante de incerteza e, além disso, tem-se uma ferramenta capaz de representar os termos utilizados na linguagem natural (ROSS, 2010). Isso porque, ao contrário da teoria clássica de conjuntos, em que os elementos estão ou não contidos em um conjunto, um conjunto *fuzzy* possui a aptidão de representar graus de pertinência dos elementos de um universo de discurso. Isso torna o conjunto *fuzzy* uma expressiva forma de representação da incerteza e da vagueza dos termos linguísticos (KLIR, 1995).

O mapeamento dos graus de pertinência dos elementos  $x$  de um universo  $X$  em um conjunto *fuzzy*  $A$  é expresso em (3) (KLIR, 1995). Essa representação indica que cada elemento  $x$  possui um grau de pertinência que está no intervalo que varia de zero a um ao conjunto *fuzzy*  $A$ .

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1] \quad (3)$$

A equação (3) representa a função de pertinência do conjunto *fuzzy*  $A$ . A caracterização de um conjunto *fuzzy* é dada por uma função de pertinência, que associa graus de pertinência aos elementos do conjunto *fuzzy* (ROSS, 2010). Ainda se pode escrever a representação

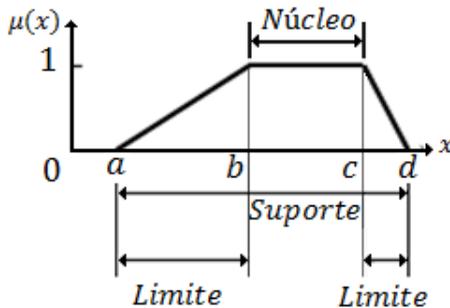
do conjunto *fuzzy*  $A$  pela equação (4) (ZADEH, 1965), caso esteja em um domínio contínuo.

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (4)$$

Para construir um conjunto *fuzzy* para um domínio de um problema, é necessário que os conceitos tratados no problema sejam projetados de modo a refletirem adequadamente o conhecimento, seja este adquirido de dados ou de especialistas. Relativo a isso, é necessário, além do mapeamento dos graus de pertinência, determinar a forma da função de pertinência do conjunto *fuzzy*. Entre as formas comumente utilizadas, estão: triangular, trapezoidal, gaussiana, *s-shaped*, *z-shaped*. O modelo da função de pertinência confere também impacto nos resultados; portanto, deve-se escolher a que melhor se adequa para a representação.

Há que observar os atributos de uma função de pertinência (Figura 8). Um conjunto *fuzzy* normal possui ao menos um elemento  $x$  com grau de pertinência total ao conjunto, sendo representado na parte central, ou núcleo. Há ainda elementos que possuem graus de pertinência entre zero e um, que estão na área denominada limite. Os elementos do universo  $X$  que fazem parte do conjunto *fuzzy*  $A$  estão distribuídos em uma região denominada suporte (ROSS, 2010). Uma vez definida a forma da função, é necessário especificar os parâmetros. No caso da forma trapezoidal apresentada na Figura 8, esses parâmetros são  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

Figura 8 – Elementos de uma função de um conjunto *fuzzy*  $A$



Fonte: Ross (2010)

O modelo matemático da função de pertinência trapezoidal (Figura 8) é dado pela equação (5).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases} \quad (5)$$

Dessa forma, para realizar a modelagem de uma variável de um problema, há que se levar em conta: a) quantos conjuntos *fuzzy* serão definidos para a variável; b) qual a forma das funções de pertinência; e c) quais serão os parâmetros adotados para cada função de pertinência.

### 2.1.1 Medidas de similaridade *fuzzy*

As medidas de similaridade representam métricas para a comparação entre funções de pertinência. Nessa perspectiva, empregam propostas de extensões de operações clássicas. Em Zwick, Carlstein e Budescu (1987), os autores apresentam abordagens baseadas em medidas geométricas e em operações de conjuntos clássicos. A abordagem de distância geométrica é uma generalização de medidas de distância, como a euclidiana, por exemplo. No contexto da teoria de conjuntos *fuzzy*, a similaridade é medida pelas características em comum entre elementos dos conjuntos.

Embora distância e similaridade sejam por vezes utilizadas no mesmo contexto, é importante ressaltar que são conceitos diferentes. De acordo com Mcculloch, Wagner e Aickelin (2014), a similaridade mede a semelhança dos conjuntos em relação aos graus de pertinência. A distância, por sua vez, calcula o distanciamento entre os conjuntos *fuzzy* no universo de discurso.

No âmbito de medidas de similaridade entre conjuntos *fuzzy*, pode-se exemplificar a medida apresentada por Wang, Meng e Li (2008), representada pela equação (6).

$$S_D(A, B) = \sum_{i=1}^n \frac{2 * \min(\mu_A^i, \mu_B^i)}{\mu_A^i + \mu_B^i} \quad (6)$$

Em (6),  $A$  e  $B$  são conjuntos *fuzzy* definidos no universo  $X$ ;  $\mu_A^i$  e  $\mu_B^i$  representam o grau de pertinência de um elemento  $i$  aos conjuntos  $A$  e  $B$ ;  $n$  representa o total de elementos considerados. O resultado varia entre zero e um, o que indica similaridade inexistente ou integral entre os conjuntos, respectivamente. Essa medida foi analisada por Baccour, Alimi e John (2014) e considerada adequada para os casos investigados (classificação de formatos, reconhecimento de sentenças). Além disso, essa medida atende às propriedades básicas de medidas de similaridade.

Outro exemplo de medida de similaridade é expresso pela equação (7) (PAPPIS; KARACAPILIDIS, 1993).

$$S_J(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A^i, \mu_B^i)}{\sum_{i=1}^n \max(\mu_A^i, \mu_B^i)} \quad (7)$$

Denomina-se *Jaccard* a equação (7) em outras pesquisas (WAGNER et al. 2016; WU; MENDEL, 2009), por representar uma extensão da operação clássica de mesmo nome.

Baccour, Alimi e John (2014) apresentam as propriedades comuns para medidas de similaridade *fuzzy* encontradas na literatura. Considerando  $FS(X)$  a coleção de todos os conjuntos *fuzzy* ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ) definidos no Universo  $X$ , as propriedades das medidas de similaridade *fuzzy* são:

- 1)  $S(A, B) = S(B, A) \forall A, B \in FS(X)$
- 2)  $0 \leq S(A, B) \leq 1, \forall A \in FS(X)$
- 3)  $\forall A, B \in FS(X), S(A, B) = 1 \Leftrightarrow A = B$
- 4)  $\forall A, B, C \in FS(X), \text{ se } A \subseteq B \subseteq C \text{ então } S(A, B) \geq S(A, C) \text{ e } S(B, C) \geq S(A, C)$

## 2.2 CONJUNTOS FUZZY TIPO 2

Zadeh (1975) introduziu conjuntos *fuzzy* tipo 2 para retratar a incerteza relativa à construção da própria função de pertinência, permitindo que os graus de pertinência pudessem não ser representados por um número *crisp*, mas sim por outro conjunto *fuzzy*.

O volume de pesquisas em aplicações práticas em tal área, no entanto, até a década de 1990 era pequeno, havendo um aumento desde então (MENDEL, 2007a). Com o avanço dos estudos, concretizaram-se duas classificações para os conjuntos tipo 2:

- Gerais: são conjuntos em que o grau de pertinência é *fuzzy*. Além de um grau de pertinência primário, possuem grau de pertinência secundário. É recomendado que a definição matemática de um conjunto *fuzzy* tipo 2 seja expressa pela equação (8) (MENDEL, 2015):

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid x \in X, u \in [0,1]\} \quad (8)$$

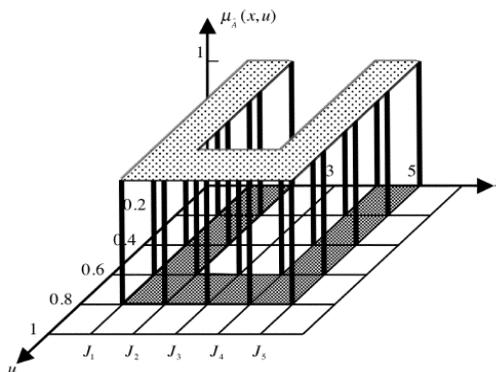
Onde,  $u$ =grau de pertinência do elemento  $x$  na  $X$  = domínio primário;  $\mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ .

- Intervalares: são conjuntos em que o grau de pertinência secundário tem sempre o valor 1 (LIANG; MENDEL, 2000). A definição de um conjunto *fuzzy* intervalar é dada pela equação (9) (MENDEL, 2015):

$$\tilde{A} = \{((x, u), 1) \mid x \in X, u \in [0,1]\} \quad (9)$$

A Figura 9 apresenta a visão tridimensional de uma função de pertinência tipo 2. Nessa imagem pode-se notar os graus de pertinência primários e secundários. Trata-se de uma função tipo 2 intervalar, pois os graus de pertinência secundários são iguais a 1.

Figura 9 – Função de pertinência tipo 2 intervalar em um universo discreto



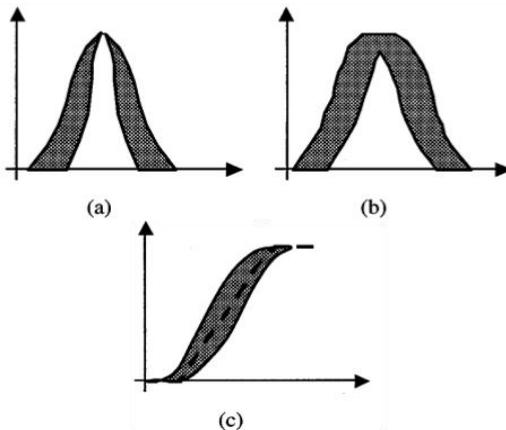
Fonte: Mendel, John e Liu (2006)

Observa-se na Figura 9 que a área marcada entre os eixos  $x$  e  $u$  é o que representa a *Footprint of Uncertainty* (FOU), ou mancha de

incerteza (MENDEL; JOHN; LIU, 2006). A imagem da FOU é refletida no eixo do grau secundário de pertinência, pois todos os seus elementos possuem grau de pertinência igual a 1. Observa-se que a função de pertinência primária não é normal, pois não há qualquer elemento do domínio que tenha grau de pertinência 1.

Considerando conjuntos tipo 2 intervalares, a FOU descreve completamente a incerteza existente em tais conjuntos *fuzzy*; quanto maior a região, maior a incerteza (MENDEL, 2003). De outro modo, a Figura 10 apresenta exemplos de FOU considerando somente duas dimensões.

Figura 10 – Três diferentes formas de mancha de incerteza



Fonte: Mendel e John (2002)

A Figura 10 apresenta três diferentes formas de manchas de incerteza. Os dois primeiros exemplos (a e b) são de funções gaussianas, com incerteza no desvio padrão (a) e incerteza tanto no desvio padrão quanto na média (b). No exemplo (c) da Figura 10 a função é sigmoideal com incerteza na inflexão. A FOU é expressa pela equação (10):

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (10)$$

Na equação (10),  $X$  representa o universo de discurso e  $J_x$  representa os graus de pertinência primários de  $\tilde{A}$ , podendo ser definido pela equação (11) (MENDEL, 2015).

$$J_x = \{(x, u): u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]\} \quad (11)$$

Na equação (11),  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  e  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  representam o grau de pertinência do elemento  $x$  às funções de pertinência inferior e superior, respectivamente. A região de incerteza de um conjunto *fuzzy*, portanto, é a união de todos os graus de pertinência primários. A FOU é delimitada por duas funções de pertinência, estas denominadas função de pertinência superior, *Upper Membership Function* (UMF) e função de pertinência inferior, *Lower Membership Function* (LMF) (MENDEL; JOHN; LIU, 2006), representadas pelas equações (12) e (13), respectivamente.

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \overline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X \quad (12)$$

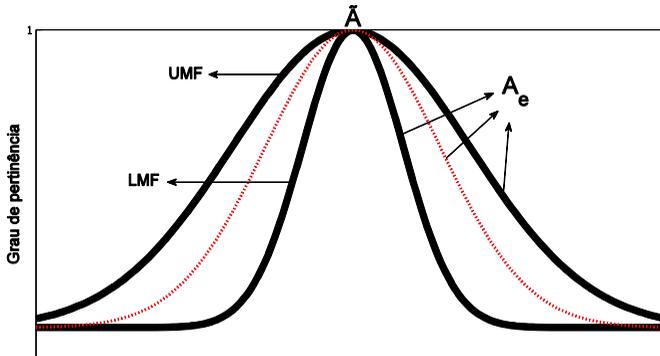
$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \underline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X \quad (13)$$

Nas equações (12) e (13), as barras superiores e inferiores à FOU denotam as funções de pertinência inferior e superior. No âmbito de mancha de incerteza, formaliza-se o conceito de conjunto tipo 1 embutido (*embedded*). Tal conjunto pode ser delineado na região demarcada pela FOU, incluindo-se como exemplo as funções superior e inferior (MENDEL; JOHN; LIU, 2006). Formalmente, um conjunto tipo 1 embutido ( $A_e$ ), considerando um universo discreto, pode ser definido pela equação (14), semelhante à representação de um conjunto *fuzzy* tipo 1 (grau de pertinência/elemento).

$$A_e = \sum_{i=1}^N u_i / x_i \quad u_i \in J_x \subseteq [0,1] \quad (14)$$

Na equação (14),  $u_i$  é o grau de pertinência primário de  $x_i$ ;  $N$  corresponde ao total de elementos avaliados. A Figura 11 apresenta uma função de pertinência para um conjunto tipo 2 intervalar  $\tilde{A}$ . Exemplificam-se conjuntos tipo 1 embutidos ( $A_e$ ), assim como as funções de pertinência inferior (LMF) e superior (UMF) da FOU, também representadas como conjuntos *fuzzy* embutidos.

Figura 11 – Função de pertinência tipo 2 intervalar

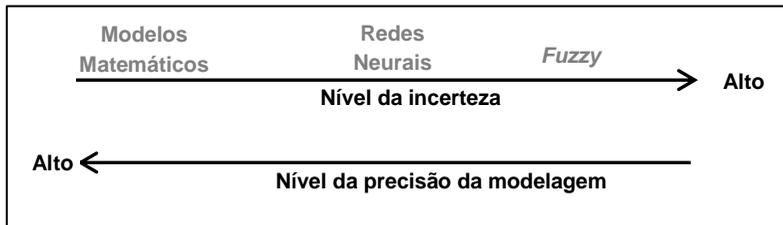


Fonte: Elaborada pela autora

## 2.3 SISTEMAS FUZZY

A complexidade e a incerteza muitas vezes presentes nos problemas do mundo real fazem com que abordagens ajustadas, como a modelagem por meio de modelos matemáticos, não sejam a forma mais adequada de tratamento, pois, nesses casos, os parâmetros devem ser conhecidos (ROSS, 2010). A Figura 12 apresenta o entendimento que se tem sobre o tipo de modelagem e o nível de incerteza no domínio, bem como o nível de precisão do modelo.

Figura 12 – Nível de incerteza e precisão da modelagem



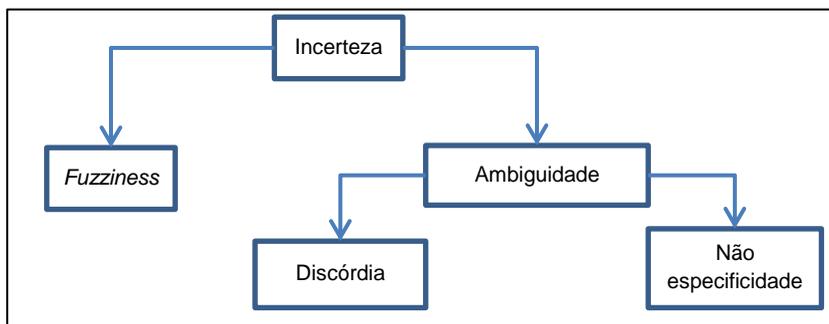
Fonte: Adaptada de Ross (2010)

De acordo com Ross (2010), em níveis médios de incerteza, métodos como redes neurais, por exemplo, podem ser uma abordagem

apropriada, pois a quantidade de dados disponíveis pode ser suficiente para esse tipo de tratamento. À medida que essa incerteza aumenta, a modelagem *fuzzy* é uma escolha interessante, pois é eficiente na representação do raciocínio. Sobre o nível de precisão da modelagem, quanto maior o nível de incerteza, maior a imprecisão do modelo.

No contexto de incerteza, cabe definir que esta é resultado de deficiência na informação (KLIR, 1995) e que, em se tratando de modelagem *fuzzy*, existem alguns tipos formalizados que podem ser tratados. Apresentam-se na Figura 13 os tipos de incerteza, no contexto da modelagem *fuzzy*.

Figura 13 – Tipos básicos de incerteza



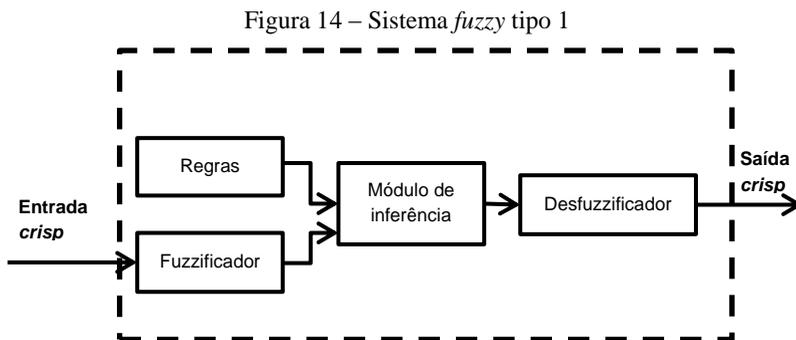
Fonte: Adaptado de Klir (1995)

O conceito de *fuzziness* está relacionado à vagueza e à nebulosidade, que por sua vez indicam falta de nitidez, de clareza. O conceito de ambiguidade, considerado um nível mais alto de incerteza, representa os conceitos de discórdia e não especificidade. A discórdia é incerteza quanto à escolha de um objeto mediante diversas alternativas. Já a não especificidade se refere à imprecisão quanto à definição de um objeto (KLIR, 1995).

Os sistemas *fuzzy* que utilizam funções tipo 1 são empregados na modelagem de incerteza desde a sua concepção; no entanto, estudos mais recentes apontam que as funções tipo 2 representam uma alternativa apropriada para a representação da incerteza, pois possuem mais graus de liberdade. Apesar disso, não há uma limitação clara quanto ao uso de um ou outro tipo de função de pertinência na modelagem de sistemas *fuzzy*. Por isso, esta questão é investigada nesta pesquisa.

### 2.3.1 Sistemas *fuzzy* tipo 1

Um sistema *fuzzy* baseado em regras é um modelo que faz uso de construções linguísticas para realizar inferência. As pesquisas iniciais desta área são de Mamdani e Assilian (1975), Mamdani (1977) e Zadeh (1973). Tais sistemas podem ter a denominação de sistemas tipo 1, pois fazem emprego de funções de pertinência tipo 1. A estrutura de um sistema *fuzzy* tipo 1 é representada pela Figura 14.



Fonte: Adaptada de Mendel, John e Liu (2006)

Os componentes de um sistema *fuzzy* são:

- a) Fuzzificador: neste módulo as entradas numéricas são inseridas no sistema e são obtidos os seus graus de pertinência respectivos aos conjuntos *fuzzy*. Isso significa dizer que as entradas são fuzzificadas.
- b) Regras: a base de regras reúne o conhecimento relacionado aos conjuntos *fuzzy* do problema. São sentenças do formato Se/Então.
- c) Módulo de inferência: é no módulo de inferência que ocorre o processo de ativação das regras do sistema, baseado nas informações das entradas. Como resultado deste processo, obtém-se um conjunto *fuzzy* de saída para cada uma das regras. Esses conjuntos são então agregados para formar um conjunto resultante.
- d) Desfuzzificador: o conjunto *fuzzy* resultante da agregação é transformado novamente em um número *crisp*, que é a saída do sistema *fuzzy*. O desfuzzificador é, portanto, o meio pelo

qual o sistema transforma valores *fuzzy* (resultantes da agregação dos resultados das regras) em números reais.

Os passos executados por um sistema *fuzzy* são apresentados na Figura 15 que, em síntese, compreende as seguintes etapas:

1. Fuzzificar as entradas: atribuir graus de pertinência para as entradas em relação aos conjuntos *fuzzy* de uma determinada variável.
2. Aplicar o operador *fuzzy*: a t-norma pode ser aplicada caso a regra realize ‘AND’ entre os termos linguísticos. A t-conorma pode ser aplicada caso a regra utilize o operador ‘OU’ entre os termos.
3. Realizar a implicação: consiste em aplicar no conjunto *fuzzy* consequente da regra o resultado obtido pela aplicação do operador *fuzzy* (t-norma ou t-conorma).
4. Agregar as saídas: equivale a reunir os resultados obtidos por todas as regras (após a implicação). Exemplos de métodos para a realização da agregação são soma (sum), máximo (max) ou probabilístico (probor).
5. Desfuzzificar: obter um valor numérico da saída agregada. Tal etapa pode ser realizada aplicando-se o método do centroide e a média dos máximos, por exemplo.

Figura 15 – Passos executados por um sistema *fuzzy*

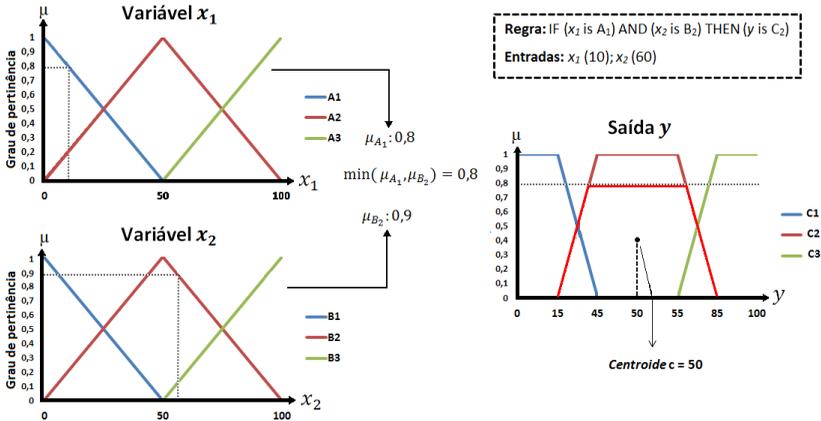


Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 16 ilustra um exemplo de inferência em um sistema *fuzzy* tipo 1. De acordo com Mendel, John e Liu (2006), um sistema *fuzzy* tipo 1 é usualmente composto por  $M$  regras da forma Se/Então (If/Then). Cada regra possui  $p$  entradas ( $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ ) e uma saída  $y \in Y$ . A  $i$ -ésima regra possui o formato da expressão (15), em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conjuntos *fuzzy* e  $i = 1, \dots, M$ .

$$R_i: \text{if } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and ... and } x_p \text{ is } B_p^i, \text{ then } y \text{ is } C^i \quad (15)$$

Figura 16 – Processo de inferência em um sistema *fuzzy* tipo 1



Fonte: Elaborada pela autora

O processo consiste em fuzzificar as entradas numéricas e ativar a base de regras para a realização da inferência. Como resultado da inferência, tem-se um conjunto tipo 1 que, por sua vez, por meio da desfuzzificação é convertido em um valor numérico. Na Figura 16, a desfuzzificação é realizada pelo cálculo do centroide.

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu_C(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_C(y_i)} \quad (16)$$

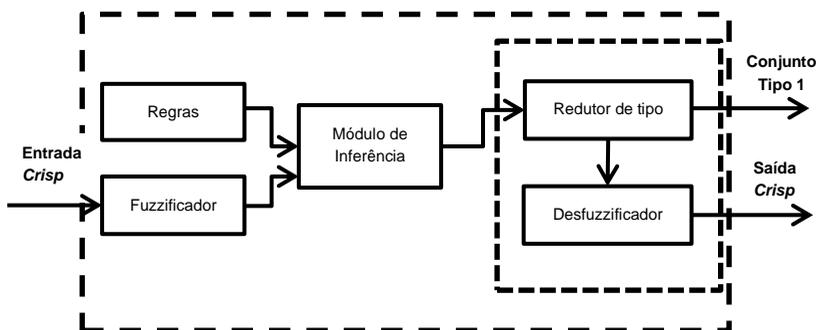
Na equação (16), o cálculo do centroide considera os  $N$  elementos do conjunto *fuzzy* resultante da inferência. O centroide é o método mais utilizado para a desfuzzificação. Métodos como a altura e a média ponderada são exemplos de alternativas para a desfuzzificação (SIVANANDAM; SUMATHI; DEEPA, 2007).

### 2.3.2 Sistema *fuzzy* tipo 2

Um sistema *fuzzy* tipo 2 possui estrutura semelhante à de um sistema *fuzzy* tipo 1, porém, faz uso de funções de pertinência tipo 2 (KARNIK; MENDEL; LIANG, 1999). A Figura 17 apresenta os componentes de um sistema *fuzzy* tipo 2, que são: o fuzzificador, a

inferência, a base de regras, o redutor de tipo e o desfuzzificador. O que muda em relação a um sistema *fuzzy* tipo 1 é a existência de um elemento complementar, o redutor de tipo. O redutor de tipo é necessário para transformar os conjuntos resultantes da inferência em um conjunto *fuzzy* tipo 1. A saída do sistema, portanto, pode ser um conjunto *fuzzy* tipo 1 ou um valor *crisp*, que é obtido por meio da desfuzzificação do conjunto tipo 1 resultante. Para realizar a redução de tipo, um algoritmo muito conhecido é o Karnik-Mendel (KARNIK; MENDEL, 2001).

Figura 17 – Sistema *fuzzy* tipo 2 Mamdani

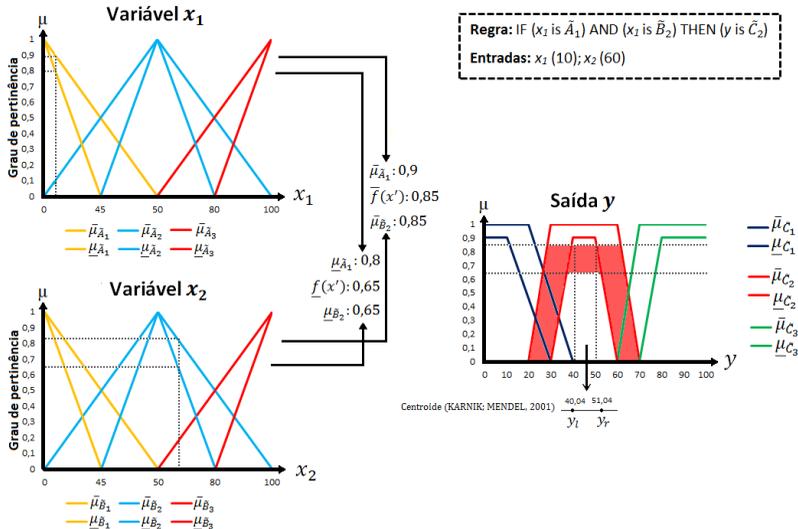


Fonte: Mendel (2007a)

Da mesma maneira que um sistema tipo 1, um sistema baseado em regras tipo 2 possui  $M$  regras, sendo  $p$  entradas mapeadas na saída  $y$ . No entanto, um ou mais dos conjuntos *fuzzy* relacionados nas regras são tipo 2. Portanto, o formato da  $i$ -ésima regra possui a seguinte forma da expressão (17). Cada regra possui  $p$  entradas ( $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ ) e uma saída  $y \in Y$ .

$$R^i: \text{If } x_1 \text{ is } \tilde{A}_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \tilde{B}_p^i, \text{ then } y \text{ is } \tilde{C}^i \quad (17)$$

Na expressão (17),  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  são conjuntos *fuzzy* tipo 2;  $i = 1, \dots, M$ . O processo de inferência utilizando uma regra é exemplificado na Figura 18.

Figura 18 – Inferência em um sistema *fuzzy* tipo 2 Mamdani

Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 18 apresenta ao término da inferência o resultado encontrado pela aplicação do algoritmo Karnik-Mendel (KARNIK; MENDEL, 2001), que realiza o cálculo do centroide. No exemplo dado pela Figura 18,  $\bar{f}(x') = \min(\bar{\mu}_{\bar{A}_1}, \bar{\mu}_{\bar{B}_2})$  e  $\underline{f}(x') = \min(\mu_{\bar{A}_1}, \mu_{\bar{B}_2})$ . O centroide de um conjunto *fuzzy* tipo 2 intervalar pode ser entendido como a união dos centroides de todos os conjuntos tipo 1 embutidos na FOU. Dessa forma, o resultado é definido por um intervalo  $[c_l, c_r]$ , encontrado através de procedimento iterativo de Karnik-Mendel (KARNIK; MENDEL, 2001). A equação (18) apresenta a definição do centroide para um conjunto tipo 2 intervalar (WU; MENDEL, 2007).

$$C_{\bar{A}} \equiv \cup_{\forall A_e} c(A_e) = [c_l(\bar{A}), c_r(\bar{A})] \quad (18)$$

A equação (18) indica que o centroide é resultado da união dos centroides dos conjuntos tipo 1 embutidos, sendo  $c_l(\bar{A}) = \min_{\forall A_e} c(A_e)$  e  $c_r(\bar{A}) = \max_{\forall A_e} c(A_e)$ . As equações (19) e (20) apresentam as fórmulas para os cálculos de  $c_r(\bar{A})$  e  $c_l(\bar{A})$ , respectivamente.

$$c_r(\tilde{A}) = \frac{\sum_{i=1}^R x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N x_i \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^R \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)} \quad (19)$$

$$c_l(\tilde{A}) = \frac{\sum_{i=1}^L x_i \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^L \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)} \quad (20)$$

Em (19) e (20),  $\overline{\mu}_{\tilde{A}}$  é a função de pertinência superior e  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$  a função de pertinência inferior de  $\tilde{A}$ ;  $R$  e  $L$  representam *switch points* que satisfazem a condição:  $x_L \leq c_l \leq x_{L+1}$  e  $x_R \leq c_r \leq x_{R+1}$ . Os valores de  $L$  e  $R$  são calculados pelo algoritmo de Karnik-Mendel (LIU, 2013).

A utilização de sistemas *fuzzy* tipo 2 ainda é reduzida, quando se leva em consideração a época em que foram propostos os conjuntos tipo 2 (MENDEL, 2007a). No entanto, esses sistemas são empregados com êxito em muitas aplicações, tais como: controladores (CHAOUI et al., 2013; SEPÚLVEDA et al., 2012), aplicações industriais (DERELI et al., 2011), *data mining* (TURKSEN; CELIKYILMAZ, 2010), processamento de imagens e reconhecimento de padrões (MELIN, 2012; MITCHELL, 2005), modelo preditivo para aplicações financeiras (BERNARDO; HAGRAS; TSANG, 2013) etc. Em relação à definição das funções de pertinência, na maioria dos trabalhos, cada autor realiza a construção destas utilizando o conhecimento disponível (dependente do domínio da aplicação), heurísticamente ou com o auxílio de especialistas.

Utilizar funções de pertinência *fuzzy* tipo 2 mostra-se apropriado em aplicações que possuem dados que variam com o tempo, dados que possuem ruído ou quando as informações necessitam ser extraídas do especialista (MENDEL, 2004). Funções de pertinência tipo 2, embora revelem resultados satisfatórios para domínios com incerteza, apresentam também maior complexidade computacional devido à etapa de redução de tipo. Por essa razão, a maioria das aplicações faz uso do conjunto tipo 2 intervalar (MENDEL, 2004). Os conjuntos tipo 2 intervalares exigem cálculos menos complexos e aplicam os mesmos tipos de cálculos empregados para os conjuntos tipo 1 (MENDEL; JOHN; LIU, 2006).

Existem atualmente algumas ferramentas que permitem desenvolver sistemas *fuzzy* tipo 2, porém, ainda em número limitado. Duas das soluções conhecidas foram desenvolvidas para serem utilizadas por meio do *software* Matlab® (CASTRO; CASTILLO; MARTÍNEZ, 2007; KARNIK et al., 2008). Karnik et al. (2008) proporcionam um conjunto de algoritmos para operações em conjuntos

*fuzzy* tipo 2, que pode ser adquirida livremente e disponibiliza operações em conjuntos tanto tipo 1 quanto tipo 2. Outra implementação para Matlab (CASTRO; CASTILLO; MARTÍNEZ, 2007) apresenta algoritmos para a execução de operações em conjuntos tipo 2 intervalares e possui interface semelhante ao *Fuzzy Logic Toolbox* do Matlab®. Este recurso, no entanto, é licenciado. Uma solução mais recente apresenta um *framework* desenvolvido em Java (WAGNER, 2013), cujo objetivo é o de facilitar o acesso e ampliar a utilização de sistemas *fuzzy* tipo 2. A ferramenta implementa sistemas de inferência *fuzzy* tipo 1 e tipo 2 e pode ser obtida livremente.

## 2.4 Interpretabilidade de Sistemas *Fuzzy*

Existem na literatura dois conceitos principais que tratam sobre a compreensão de sistemas *fuzzy*: transparência e interpretabilidade. De acordo com Riid (2002), os pesquisadores muitas vezes confundem esses conceitos. Para o autor, a interpretabilidade é uma característica de sistemas que modelam conceitos linguísticos e que, por sua vez, a transparência se refere ao quão adequado é a interpretabilidade do sistema.

A interpretabilidade de sistemas *fuzzy* é um conceito relacionado à compreensão do funcionamento do sistema, o que é proporcionado pelo resultado da modelagem. Não existe, contudo, a definição de medidas apropriadas para a avaliação da interpretabilidade (GACTO, ALCALÁ, HERRERA, 2011). De fato, ao notar que o conceito de interpretabilidade é de interesse de muitos pesquisadores, Gacto, Alcalá e Herrera (2011) revisaram as medidas existentes na literatura e fizeram a proposta de uma taxonomia baseada em complexidade e na semântica. A taxonomia proposta é apresentada no Quadro 2.

A taxonomia apresentada no Quadro 2 propõe a separação dos quesitos de interpretabilidade em quatro quadrantes. O quadrante Q1 avalia a complexidade ao nível de base de regras. A recomendação é que seja utilizado o menor número de regras possível e que também sejam reduzidas as condições das regras. O mesmo tipo de orientação é dado no quadrante Q2, porém com referência ao número de funções de pertinência e de variáveis do problema. Quanto menor o número de conjuntos *fuzzy*, maior a capacidade de entendimento do problema. Já em relação à semântica, no quadrante Q3 há que se observar a consistência das regras (para que não haja regras conflitantes na base), assim como a redução do número de regras ativadas ao mesmo tempo.

O quadrante Q4 diz respeito à cobertura dos conjuntos *fuzzy* aos elementos do domínio, indicando que esta deve ser realizada sempre que possível. Ademais, os conjuntos *fuzzy* devem ser normais; portanto, ao menos um elemento do universo de discurso deve ter grau de pertinência 1 ao conjunto. A distinção, também relacionada no quadrante Q4, diz respeito à diferenciação (que se julga necessária) entre conjuntos *fuzzy* que representam conceitos distintos. O conceito de complementaridade refere-se à soma dos graus de pertinência de cada elemento do universo de discurso considerado: nesse conceito a soma deve ser próxima a um. As medidas relativas as quais os autores relacionam em Q4 se referem às formas de quantificar a interpretabilidade das partições *fuzzy* propostas em um dado modelo.

Quadro 2 – Taxonomia para analisar a interpretabilidade de sistemas *fuzzy*

Aspectos observados	Base de regras	Partição <i>fuzzy</i>
<b>Complexidade</b>	<p><b>Q1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Número de regras</li> <li>-Número de condições</li> </ul>	<p><b>Q2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Número de funções de pertinência</li> <li>-Número de características</li> </ul>
<b>Semântica</b>	<p><b>Q3</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Consistência das regras</li> <li>-Regras ativadas ao mesmo tempo</li> </ul>	<p><b>Q4</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Cobertura</li> <li>-Normalidade</li> <li>-Distinção</li> <li>-Complementaridade</li> <li>-Medidas relativas</li> </ul>

Fonte: Gacto, Alcalá e Herrera (2011)

Diante das orientações dadas, cabe ao engenheiro do conhecimento avaliar a necessidade de atender a todos os itens constantes no Quadro 2. Para Riid (2002), a transparência não é um requisito universal quando a interpretação não é uma preocupação do usuário final.

Nesta pesquisa consideram-se aspectos de interpretabilidade relacionados principalmente à complexidade. Em relação à semântica, busca-se manter a consistência da base de regras. Já a normalidade dos conjuntos é obrigatória.

## 2.5 Algoritmos de otimização

Esta seção apresenta duas categorias de algoritmos de otimização que podem ser empregados para a geração de funções de pertinência.

### 2.5.1 Algoritmo Genético

Um Algoritmo Genético (HOLLAND, 1975) é uma meta-heurística que realiza otimização populacional e é baseado nos processos evolutivos dos seres vivos. O algoritmo é executado em uma população formada por indivíduos que representam soluções para um dado problema. À medida que é executado, são realizadas operações de cruzamento e mutações dessas soluções. Dessa maneira, formam-se novas gerações de indivíduos, as quais podem ser compostas por indivíduos mais aptos das gerações anteriores. A aptidão (*fitness*) é baseada no cálculo de uma função que é objeto de otimização. Para um problema em que se deseja minimizar o erro, um indivíduo é considerado mais apto que outro sempre que tiver um *fitness* menor.

Nesse tipo de abordagem, trabalha-se com um número suficientemente grande de soluções que passam por várias etapas até que atinjam  $N$  gerações a partir da população inicial. No Quadro 3 apresenta-se o pseudocódigo de um Algoritmo Genético .

Quadro 3 – Pseudocódigo de um Algoritmo Genético

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Gere uma população aleatoriamente com <math>N</math> soluções.</li> <li>2) Calcule o <i>fitness</i> de cada indivíduo da população.</li> <li>3) Para <math>L = 1</math> até <math>Max_{gerações}</math> faça:             <ol style="list-style-type: none"> <li>a) realize a recombinação genética (seleção dos pais e cruzamento) gerando dois filhos;</li> <li>b) realize mutação com probabilidade <math>\alpha</math>;</li> <li>c) se o indivíduo gerado possuir <i>fitness</i> menor que a média populacional, insira na população substituindo o pior indivíduo.</li> </ol> </li> </ol> |
|--|

**FIM**

Fonte: Elaborado pela autora

Para o caso do problema de geração e otimização de funções de pertinência, gera-se aleatoriamente a população inicial e cada indivíduo representa uma configuração de funções de pertinência (de entrada e de saída) para o sistema *fuzzy*. Considerando como aplicação prática um

problema de previsão, o cálculo do *fitness* de cada indivíduo pode, por exemplo, ser realizado por meio da raiz do erro quadrático médio (RMSE) de previsão.

### 2.5.2 *Simulated Annealing*

O *Simulated Annealing* (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983) representa uma maneira alternativa para otimização. O método é realizado partindo-se de uma solução do espaço de busca e explorando as soluções vizinhas. Essa estratégia é conhecida por otimização de um ponto. A ideia principal desse método é reproduzir a movimentação das moléculas durante o processo de resfriamento de metais (até que o resfriamento seja total e as moléculas não consigam mais se movimentar). No Quadro 4 apresenta-se um exemplo de algoritmo do *Simulated Annealing*.

Quadro 4 – Pseudocódigo de um *Simulated Annealing*

```

1) Selecione um estado inicial  $i$  pertencente ao espaço de busca  $S$ 
2) Selecione uma temperatura  $T > 0$ 
3) Repita
  a) Calcule o número de iterações a ser realizada a cada temperatura  $N(T)$ 
  b) Repita
    Gere o estado  $j$  vizinho de  $i$ 
    Se o custo de  $j$  for menor que o custo de  $i$ 
       $i \leftarrow j$ 
    Senão se  $randon(0,1) < \exp((-f(j) - f(i))/T)$  /* distribuição de Boltzmann */
       $i \leftarrow j$ 
       $n \leftarrow n + 1$ 
    Até  $n = N(T)$  /* até alcançar o número de iterações por temperatura */
  c)  $t \leftarrow t + 1$ 
  d)  $T \leftarrow f(T)$  /* Função de resfriamento */
Até critério de parada /* temperatura mínima alcançada */

```

Fonte: Elaborado pela autora

Gera-se aleatoriamente a solução inicial e então se exploram as soluções vizinhas no espaço de busca  $S$ . O algoritmo escolhe aleatoriamente a solução vizinha e esta é alcançada por meio de um *step size*. Caso a solução vizinha tenha um custo menor que a solução anterior, esta já é aceita pelo algoritmo. Caso contrário, é aceita com

uma probabilidade que é maior nas primeiras iterações, quando a temperatura ainda está alta. A distribuição de probabilidade utilizada é conhecida como distribuição de Boltzmann (RUTEMBAR, 1989). A aceitação de uma solução pior é um diferencial do método para permitir que a busca não fique aprisionada em mínimos locais.

### 3 GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

Este capítulo apresenta a revisão de métodos automáticos para a geração de funções de pertinência. Apresentam-se métodos pesquisados para geração de funções tipo 1 e tipo 2. Ademais, apresenta-se a implementação e o resultado de dois métodos automáticos baseados em otimização: Algoritmo Genético e *Simulated Annealing*.

#### 3.1 MÉTODOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA FUZZY TIPO 1

A modelagem de sistemas *fuzzy* para uma aplicação prática necessita de uma série de definições: base de conhecimento (regras, termos linguísticos, funções de pertinência), método de inferência, método de desfuzzificação, método de agregação etc. A base de conhecimento é a principal destas definições, pois permitirá que o sistema seja capaz de processar adequadamente as entradas para obter os resultados. Muitas vezes, no entanto, devido à complexidade do problema tratado e do número de variáveis envolvidas, esta tarefa se torna difícil. Nesse sentido, observa-se que métodos automáticos de descoberta de conhecimento são meios utilizados para gerar as funções de pertinência. De acordo com Cintra, Camargo e Monard (2008), a definição das funções de pertinência não possui uma sequência de passos definidos. Além disso, os métodos existentes na literatura ficam restritos a domínios específicos de aplicação.

A seguir apresentam-se métodos baseados em redes neurais, histogramas, algoritmos genéticos, *Ant Colony*, enxame de partículas, *clustering* e heurísticos.

##### 3.1.1 Redes neurais

Redes neurais representam uma maneira de obtenção de graus de pertinência. Para isso, são necessários dados de treinamento (para que a rede possa aprender com exemplos), bem como dados para a geração das funções de pertinência. Em uma rede neural para classificação, a arquitetura convencional é ter como neurônios de entrada as características do problema e como neurônios de saída as classes do problema (ROSS, 2010). A saída da rede será o grau de pertinência do elemento de entrada à classe de um problema, por exemplo.

Yang e Bose (2006) realizaram o levantamento de funções de pertinência *fuzzy* por meio de mapas auto-organizáveis e aplicaram esse método a um problema de classificação. De acordo com os autores, dois passos são necessários para que a tarefa seja concluída: geração de um *cluster* e obtenção da informação do *cluster*. Para alcançar os resultados, o vetor de entrada foi ampliado com a adição do conjunto de classes do problema. Esse trabalho apontou também vantagens em relação a outros métodos quando há desequilíbrio nas amostras.

### 3.1.2 Histograma

Um histograma representa a distribuição da frequência de uma variável. Em Estatística, os histogramas são utilizados para compreensão do cenário do qual tal variável faz parte. Devido a esta propriedade, pesquisadores exploram maneiras de utilizar um histograma para caracterizar as funções de pertinência.

Medasani, Kim e Krishnapuram (1998) propuseram um método em que fosse gerada uma função de pertinência para cada classe ou região de um problema por meio de histogramas de características. Para tanto, deve-se obter os histogramas de cada característica da classe ou região e então deve ser encontrado o modelo de mistura de distribuição gaussiana, que será utilizado então como função de pertinência. Os autores consideram ser uma técnica simples para implementação.

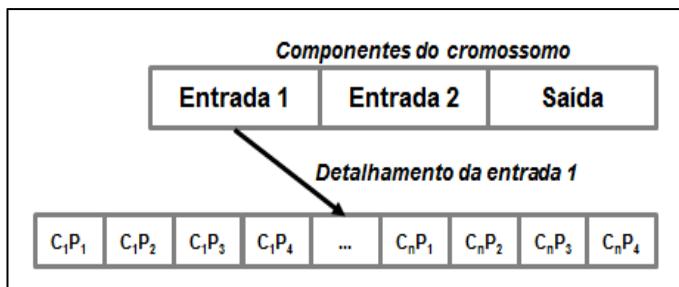
No trabalho de Choi e Rhee (2009), desenvolvido no âmbito de reconhecimento de padrões, propõe-se uma estratégia de obtenção das funções de pertinência em que suavizam-se os histogramas das classes do problema por meio de um método chamado *3 point triangular window*. Além disso, normaliza-se o histograma para que então se ajuste uma função polinomial (de menor grau possível). No caso da pesquisa de Choi e Rhee (2009), ajustou-se uma função gaussiana. O número total de funções gaussianas depende dos picos que se obtêm do histograma; além disso, localizar-se-á a média das funções nos pontos de picos.

### 3.1.3 Algoritmos Genéticos

Algoritmo Genético é um método evolucionário amplamente difundido e utilizado em problemas de otimização (HOLLAND, 1975). O algoritmo desenvolve a estratégia de geração de populações sempre baseada nos melhores indivíduos de gerações anteriores. Ao final, espera-se obter um indivíduo que atinja o objetivo definido no

problema. Utilizam-se amplamente métodos baseados em algoritmos genéticos para a otimização de funções de pertinência. Herman, Yusuf e Shamsuddin (2009) desenvolveram um Algoritmo Genético para encontrar as funções de pertinência para um controlador *fuzzy*. O algoritmo avalia as funções de pertinência da população baseado no *overshoot* (percentual que ultrapassa o valor final da variável) da resposta. Um indivíduo da população é composto por todas as funções de pertinência, tanto de entrada quanto de saída. E cada gene do cromossomo é uma variável linguística do problema. Cada variável possui cinco conjuntos *fuzzy*, sendo três triangulares e dois trapezoidais. Além disso, os parâmetros são números reais.

Figura 19 – Estrutura do cromossomo de um Algoritmo Genético para a otimização de funções de pertinência



Fonte: Herman, Yusuf e Shamsuddin (2009)

A Figura 19 apresenta a estrutura usualmente empregada por algoritmos genéticos na otimização de funções de pertinência *fuzzy*. Cada cromossomo da solução apresenta a codificação dos parâmetros de todas as funções de pertinência, de entrada e saída. No caso da Figura 19, o detalhamento da Entrada 1 apresenta  $n$  funções de pertinência, trapezoidais e triangulares.

No trabalho de Huynh, Nguyen e Le (2012) apresenta-se uma proposta que objetiva utilizar diferentes formatos de funções de pertinência cujos parâmetros são ajustados individualmente. Além disso, as funções podem assumir formatos assimétricos. Como resultados desse trabalho, foi possível obter interpretabilidade da base de regras, por meio da diminuição do tamanho e da quantidade de regras do sistema *fuzzy* para o qual o método foi testado.

Na pesquisa de Sun, Wang e Bi (2015), os autores apresentam um método de otimização chamado Algoritmo Genético RNA, que é

aplicado tanto em funções tipo 1 quanto em funções tipo 2. O algoritmo genético RNA codifica os indivíduos da população como quatro nucleotídeos: adenina (A), uracila(U), guanina(G) e citosina(C). Cada variável do problema possui os quatro nucleotídeos citados. Abordou-se o problema do pêndulo invertido duplo.

Realizou-se uma abordagem alternativa no trabalho de Gorzalczany e Rudziński (2017), em que os autores apresentam um algoritmo genético multiobjetivo para o desenvolvimento automático de um sistema *fuzzy* de classificação para dados médicos. Um dos objetivos é obter a transparência e a interpretabilidade (consideradas importantes para o domínio de aplicação). O outro objetivo é a acurácia. Os autores focam a semântica do modelo gerado, especificamente em nível de partições *fuzzy*. O método gera algumas soluções com diferentes níveis de acurácia e interpretabilidade. O resultado é superior em relação a outros trabalhos do mesmo domínio de aplicação, tanto em interpretabilidade quanto em acurácia. Podem ser observadas pesquisas sobre sistemas *fuzzy* multiobjetivos também nos trabalhos de Fazzolari et al. (2013) e Fernández et al. (2015).

### 3.1.4 *Ant Colony Optimization*

*Ant Colony Optimization* (ACO) é um método inspirado no comportamento de colônia de formigas. É um algoritmo de busca e otimização por meio de uma função objetivo, que pode ser de minimização ou maximização (COLORNI; DORIGO; MANIEZZO, 1991; DORIGO; MANIEZZO; COLORNI, 1996).

Hong et al. (2009) aplicaram o algoritmo *Ant Colony System* (que é uma variação do ACO) em um problema de mineração de dados *fuzzy* (*fuzzy data mining*) para extrair as funções de pertinência. Cada função de pertinência, cujos parâmetros são discretos, é representada por uma *string* de *bits*, e representa uma possível solução no espaço de busca. Ao final da execução do algoritmo, escolher-se-á a função de pertinência com maior valor de *fitness*, ou seja, a mais próxima da função objetivo (cuja rota percorrida pela formiga tenha a maior quantidade de feromônio). As funções de pertinência desse trabalho são triangulares, sendo formadas por dois parâmetros que indicam o centro e a abertura do triângulo. Configuram-se inicialmente os parâmetros das funções de pertinência para valores que compreendem o intervalo de quantidade dos itens da base de dados. Um grafo é projetado para que se encontre o caminho do melhor conjunto de funções de pertinência. No grafo, cada

ponto percorrido será utilizado para formar a largura e o centro de uma função de pertinência triangular (HONG et al., 2009).

No trabalho de Wu, Hong e Lee (2012) os autores aprimoraram a descoberta das funções de pertinência no domínio de *fuzzy data mining*, permitindo que os parâmetros fossem contínuos. Além disso, o grafo de busca pela solução é gerado dinamicamente. De acordo com os autores, os resultados alcançados tiveram qualidade superior aos encontrados em seu trabalho anterior (HONG et al., 2009), em que os parâmetros eram definidos em um espaço discreto.

Castillo et al. 2015 desenvolveram um método de otimização baseado no algoritmo *Ant Colony* para a geração de funções de pertinência. O problema abordado é o controle em um sistema barra-bola (que consiste em equilibrar a bola em uma barra apoiada). Os autores propõem um ACO modificado, que emprega uma estratégia chamada partição do *ant set* (o conjunto de formigas é dividido em cinco tipos de sistemas ACO que realizam otimização a cada iteração). Consideram-se os resultados superiores aos obtidos pelo algoritmo tradicional. Nessa abordagem, os autores permitem otimizar a escolha entre o formato da função de pertinência (triangular, trapezoidal, gaussiana, G. Bell), os parâmetros e as regras empregadas.

### 3.1.5 Enxame de partículas

Um algoritmo de otimização por enxame de partículas, *Particle Swarm Optimization* (PSO), baseia-se no comportamento de grupos de indivíduos, como aves e peixes, por exemplo. No algoritmo, os indivíduos de uma população aprendem com suas próprias experiências e com as experiências dos indivíduos que possuem o melhor desempenho no grupo. Essa condição pode levar ao sucesso do grupo na busca pelo objetivo (KENNEDY; EBERHART, 1995).

Pode-se observar em alguns trabalhos a otimização de funções de pertinência baseado no algoritmo de enxame de partículas (FANG; KWOK; HA, 2008; NIERADKA; BUTKIEWICZ, 2007; PERMANA; HASHIM, 2010).

Na pesquisa de Nieradka e Butkiewicz (2007), os pesquisadores utilizaram o PSO para otimizar os parâmetros das funções de pertinência. Esse trabalho foi aplicado no contexto de processamento de imagens, a fim de modelar conceitos linguísticos utilizados em tal área. Para otimizar os parâmetros das funções de pertinência, utilizaram-se os conceitos de entropia e índice *fuzzy*.

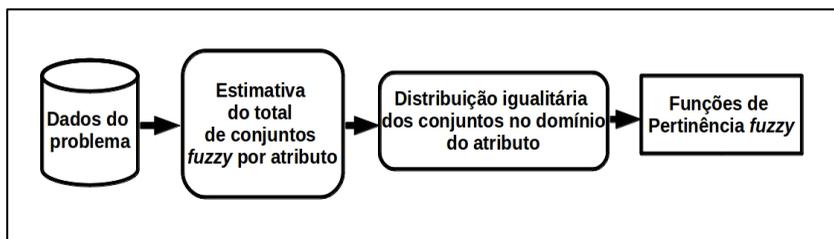
Fang, Kwok e Ha (2008) desenvolveram um controlador *fuzzy* para um reservatório de água, com o propósito de controlar os níveis de água. Utilizou-se o método do enxame de partículas para encontrar os parâmetros de uma função de pertinência cujo formato é preestabelecido. Dessa forma, a partícula representa os parâmetros da função, de entrada e saída. O objetivo é minimizar o erro do controlador, ajustando as funções de pertinência quando necessário. O método mostrou-se adequado quando comparado ao uso de um controlador convencional. Observa-se, no entanto, que as funções de pertinência resultantes não são normais (conjuntos sem elementos com grau de pertinência igual a 1).

Na pesquisa de Permana e Hashim (2010), utilizou-se o algoritmo de enxame de partículas para otimizar a resposta de um controlador para o problema *truck backer-upper*, que consiste em conduzir um veículo a partir de um ponto de modo que chegue perpendicularmente a uma plataforma. O formato das funções de pertinência, tanto de entrada quanto de saída, é definido como triangular. O algoritmo PSO é utilizado para otimizar três parâmetros dessas funções: o centro, a direita e a esquerda. Ajustam-se as funções de pertinência por meio do algoritmo até que o desempenho do sistema *fuzzy* tenha sido considerado adequado. O número de conjuntos *fuzzy* para as funções de pertinência foi determinado por meio de conhecimento que se tem do problema *truck backer-upper*, que já possui termos linguísticos conhecidos. Os resultados alcançados com a proposta se mostraram superiores em termos de resposta e convergência quando comparados ao sistema *fuzzy* definido inicialmente, por meio de conhecimento.

### 3.1.6 Métodos heurísticos

Existem ainda na literatura outras estratégias que fazem uso de heurística para a investigação da construção de funções de pertinência: *FuzzyDBD* (CINTRA; CAMARGO; MARTIN, 2009) e *FuzzyDBDII* (CINTRA et al., 2011). No método *FuzzyDBD*, a partir de uma base de dados, obtêm-se as funções de pertinência para o problema. Para alcançar esse objetivo, define-se a função de pertinência como triangular, avalia-se o total de conjuntos *fuzzy* para cada variável por meio do método de Wang-Mendel (WANG, 2003) e realiza-se a distribuição dos conjuntos *fuzzy* no domínio do problema por meio do critério de distribuição igualitária. Sumarizam-se as etapas dessa pesquisa na Figura 20.

Figura 20 – Passos na execução do método *FuzzyDBD*



Fonte: Adaptada de Cintra, Camargo e Martin (2009)

Cintra et al. (2011) aprimoraram o *FuzzyDBD* para *FuzzyDBDII* com o intuito de suprir uma característica que é a de gerar sempre o mesmo número de conjuntos *fuzzy* para todos os atributos. Na pesquisa desenvolvida, avaliou-se individualmente cada atributo para que fosse identificados o total de conjuntos necessários. Avaliaram-se três técnicas para essa finalidade: *gain information*, *ReliefF ranking filter* e o método Wang-Mendel. Analisaram-se as técnicas por intermédio de uma *FuzzyDT*, que é uma árvore de decisão *fuzzy*. Por meio dos experimentos realizados em uma base de dados para problemas de classificação, observou-se que o método proposto mostrou resultados promissores. Os autores acreditam que o intervalo avaliado (que foi de dois a nove conjuntos *fuzzy* por atributo do problema) deveria ser mais restrito, isso para não gerar grandes bases de regras.

### 3.1.7 Comparação entre os métodos para a geração de funções de pertinência *fuzzy* tipo 1

O Quadro 5 apresenta o resumo das características dos métodos pesquisados para a geração de funções de pertinência tipo 1. Todas as abordagens partiram de conjuntos de dados sobre domínio explorado. Entre os problemas explorados por cada método, estão: classificação e reconhecimento de padrões, controladores, *Data Mining* e processamento de imagem.

A forma das funções de pertinência é predeterminada para todos os métodos, exceto para o que utiliza redes neurais. A função mais utilizada é a triangular. Além disso, somente no método do histograma o número de conjuntos *fuzzy* definido para cada função de pertinência não é fixado.

Quadro 5 – Características observadas nos métodos para geração de funções de pertinência tipo 1

Métodos	Características			
	Domínios	Função	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>	Distribuição dos conjuntos no domínio da função
Redes Neurais	Classificação	Variável	Fixado	Variável
Histograma	Classificação, reconhecimento de padrões	Gaussiana	Variável	Variável
Algoritmos Genéticos	Controladores, classificação	Triangular, Trapezoidal, Gaussiana	Fixado	Variável
ACO	<i>Data Mining</i> , controladores	Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, G.Bell	Fixado e variável	Variável
Enxame de partículas	Controladores, Processamento de Imagem	Gaussiana, Triangular, <i>S-shaped</i>	Fixado	Variável
<i>FuzzyDBD</i> e <i>FuzzyDBDII</i>	Classificação	Triangular	De 2 a 9 conjuntos	Divididos igualmente

Fonte: Elaborado pela autora

Em relação à distribuição dos conjuntos *fuzzy* no domínio do problema, adotou-se a abordagem de divisão igualitária entre os conjuntos *fuzzy* somente nos métodos heurísticos. Os demais métodos realizaram divisões diferenciadas entre os conjuntos, uma vez que os parâmetros das funções eram alvo de transformações.

Cabe ressaltar que as características apresentadas no Quadro 5 são restritas aos trabalhos pesquisados nesta tese. Entre os métodos pesquisados é necessário observar que se aplicaram a domínios específicos, não sendo, portanto, abordagens generalizadas. Além disso, cada método possui dificuldades próprias e é dependente do domínio da aplicação. No caso das redes neurais, elas necessitam de dados de treinamento e podem apresentar complexidade de implementação, embora sejam uma boa alternativa para problemas não lineares. A técnica do histograma é implementável para problemas que possuem dados. Algoritmos genéticos, *Ant Colony Optimization* e o enxame de partículas necessitam de uma função objetivo para que encontrem a solução e ainda podem cair em máximos (mínimos) locais, assim como demorar a convergir. Os métodos heurísticos (*FuzzyDBD* e

*FuzzyDBDII*) apresentaram boas soluções com baixa complexidade computacional, com a restrição do domínio da aplicação. Além disso, apresentaram uma solução mais ampla para o projeto de sistemas *fuzzy*, considerando, inclusive, a base de regras.

### 3.2 MÉTODOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA FUZZY TIPO 2

Por causa dos resultados promissores e do conseqüente aumento da utilização de sistemas *fuzzy* tipo 2 em aplicações, as técnicas para a definição de tais sistemas vêm sendo cada vez mais exploradas. Dessa forma, esta seção apresenta alguns métodos para a geração de funções de pertinência tipo 2 intervalares, entre os quais, alguns são metodologia e outros, aplicações práticas.

Quando as funções de pertinência das entradas são adequadamente projetadas e condizem com a representação da incerteza presente, a saída do sistema também representará a incerteza adequadamente (LINDA; MANIC, 2011). Nesse sentido, o trabalho de Linda e Manic (2011) foca o desenvolvimento de funções tipo 2 intervalares, em que a FOU é caracterizada pelo desvio padrão dos dados.

No trabalho de Mendel (2007b), propõe-se uma metodologia de desenvolvimento de funções tipo 2 intervalares em que o conhecimento é extraído de especialistas; e também uma metodologia para a aquisição de conhecimento de pessoas que não são especialistas no domínio do problema. Realiza-se uma agregação igualmente ponderada entre os dados encontrados dos vários indivíduos. Por isso, o autor menciona que a técnica pode ser denominada *fuzzistic* tipo 2.

Com foco nos problemas de reconhecimento de padrões, o trabalho de Choi e Rhee (2009) apresenta três métodos para a obtenção da FOU, considerando conjuntos *fuzzy* intervalares tipo 2: heurística, histograma e *C-means*. Na abordagem heurística realiza-se a escolha de um formato de função de pertinência tipo 1, a que melhor se adequa ao problema abordado, e então se encontra a função de pertinência inferior da FOU, por meio da multiplicação da primeira por alguma constante entre 0 e 1. Realiza-se esse primeiro método proposto com o auxílio de especialistas da área. Os autores propõem então uma solução baseada em histogramas. Nesse caso, são necessários os histogramas das características do problema, que então se suavizam e se normalizam para a obtenção de uma função polinomial ajustada de menor grau

possível. O total de conjuntos *fuzzy*, bem como a altura deles, é determinado por meio dessa função polinomial. Em relação ao algoritmo *C-means*, utilizam-se duas equações para a definição da função de pertinência inferior e superior, em vez de uma equação utilizada pelo método padrão. Contudo, embora os três métodos tenham se mostrado satisfatórios, os próprios autores ponderam que as funções de pertinência alcançadas podem não representar adequadamente a incerteza presente nos dados e este é considerado um estudo introdutório para métodos aprimorados.

Na abordagem de Hidalgo, Melin e Mendoza (2012), os autores partem da existência de um sistema tipo 1 e, com o auxílio de um Algoritmo Genético, realizam a otimização dos parâmetros, a qual se realizou de três maneiras diferentes, aplicando três níveis diferentes de incerteza. No primeiro deles, a mancha de incerteza possui o mesmo tamanho para todas as entradas; no segundo tratamento, cada entrada pôde ter diferentes FOU's e, no terceiro, cada entrada foi testada com diferentes FOU's para os seus próprios conjuntos. Ao final da execução do método, escolhe-se o sistema que melhor se adequar ao problema.

No trabalho de Almarashi (2012), o autor propõe um método de otimização para o levantamento de funções de pertinência tipo 2, o *Simulated Annealing*. Os conjuntos iniciais são gerados randomicamente. Embora o autor tenha encontrado resultados promissores em relação ao uso de sistemas tipo 2, a complexidade e o tempo necessários para a execução do algoritmo foram importantes.

Soto, Melin e Castillo (2014) elaboraram um método para a previsão da série temporal Dow Jones, que é um índice da bolsa de valores americana. Os autores implementaram um comitê de aprendizado de redes neurais *fuzzy*, cujas saídas foram processadas por um sistema *fuzzy* tipo 2 intervalar. As funções de pertinência foram otimizadas por um algoritmo genético. Eles utilizaram uma base de dados composta por oitocentas observações, entre as quais metade foi utilizada para teste e metade para treino.

Considerada uma metodologia para a geração de funções tipo 2, a proposta de Tahayori et al. (2015) desenvolve as funções de pertinência tipo 2 a partir de um conjunto de funções tipo 1 preexistentes. Agrupam-se as funções tipo 1 em *clusters* e identifica-se seu elemento representativo. Realiza-se a identificação pela soma da distância entre os elementos de um mesmo grupo, que deve ser mínima uma vez que representam o mesmo conceito. Em seguida, a vizinhança representativa é identificada, mantendo-se a mais importante. Dessa forma, delinea-se a função tipo 2 a partir do elemento representativo e da vizinhança.

Na pesquisa de Cervantes e Castillo (2015), empregam-se algoritmos genéticos para a otimização das funções de pertinência para um problema de controle de voo de um avião. A proposta consiste em modelar um sistema *fuzzy* tipo 1 para cada controle envolvido nesse problema (controle longitudinal, lateral e direcional). Agregam-se as saídas desses sistemas por um sistema tipo 2 (que apresentou desempenho superior a um agregador tipo 1).

Na pesquisa de Martínez-Soto et al. (2015), os autores utilizam Algoritmos Genéticos e o método de enxame de partículas para a otimização de funções de pertinência de controladores. Otimizam-se tanto funções tipo 1 quanto funções tipo 2. Avaliam-se os algoritmos individualmente e trabalhando juntos, em uma proposta híbrida. Na proposta híbrida, os algoritmos se comunicam e compartilham o melhor indivíduo/partícula com o método que estiver com pior desempenho naquele momento. Os resultados mostraram que a aplicação conjunta dos dois algoritmos proporciona resultados melhores para um problema mais difícil. Porém, aplicados separadamente em um problema mais fácil, o Algoritmo Genético apresentou resultados melhores. Observa-se nesse trabalho que, para o problema considerado mais difícil para os autores, a proposta híbrida que otimizou funções tipo 1 apresentou resultado melhor que o da otimização de funções tipo 2.

Na pesquisa de Aladi, Wagner e Garibaldi (2015), os autores propõem a otimização da FOU por meio do *Simulated Annealing* para a previsão da série temporal Mackey-Glass. Realiza-se a modelagem em funções trapezoidais. Os resultados mostram que, na presença de ruído, a FOU apresenta uma área maior. Os autores consideram a abordagem vantajosa por otimizar somente o tamanho da FOU; no entanto, não apresentam comparações com outros trabalhos.

### **3.2.1 Comparação entre os métodos para geração de funções de pertinência tipo 2**

O Quadro 6 apresenta o resumo dos métodos para a geração de funções de pertinência tipo 2. Observou-se que não se descobre o formato das funções nesse processo, pois é determinado *a priori*, e que grande parte usa funções gaussianas. Além disso, geralmente desenvolvem-se as propostas para um determinado domínio, como por exemplo, o reconhecimento de padrões.

Grande parte dos métodos pesquisados não considera o fato de a função estar ou não refletindo a incerteza do problema abordado. Isso

não significa que eles não representem a incerteza; porém, não fazem uso de medidas obtidas dos dados (como o desvio padrão, por exemplo), para gerar a FOU.

No Quadro 6, nos trabalhos em que se indica que se pode utilizar todos os tipos de funções, a função deve ser escolhida *a priori*, antes da execução do método. Da mesma forma, antes da aplicação do procedimento proposto, fixa-se o total de conjuntos empregados para cada variável.

Quadro 6 – Características observadas nos métodos para a geração de funções de pertinência tipo 2

Métodos	Características				
	Extração do conhecimento	Domínios	Função	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>	Medidas dos dados para a representação da incerteza?
Linda e Manic (2011)	Dados e especialistas	Sensores	Gaussiana	Fixo	Sim
Mendel (2007b)	Especialistas e não especialistas	Qualquer	Todos os tipos	Variável	Sim
Choi e Rhee (2009)	Especialistas e dados	Reconhecimento de padrões	Todos os tipos	Fixo e variável	Não
Almaraashi (2012)	Dados	Previsão de séries temporais	Gaussiana	Fixo	Não
Hidalgo, Melin e Mendoza (2012)	Dados	Biometria	Gaussiana	Fixo	Não
Soto, Melin e Castillo (2014)	Dados	Previsão de séries temporais	Gaussiana, Triangular e G. Bell	Fixo	Não
Tahayori et al. 2015	Dados	Palavra /conceito	Triangular e trapezoidal	Variável	Sim
Cervantes e Castillo (2015)	Dados	Controlador	Triangulares	Fixo	Não
Martínez-Soto et al. (2015)	Dados	Controlador	Triangular e gaussiana	Fixo	Não
Aladi, Wagner e Garibaldi (2015)	Dados	Previsão de séries temporais	Trapezoidal	Fixo	Não

Fonte: Elaborado pela autora

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS AUTOMÁTICOS PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

Nesta seção descrevem-se os procedimentos de implementação de um Algoritmo Genético e um algoritmo *Simulated Annealing*. O propósito é a obtenção de funções de pertinência *fuzzy* (tipo 1 e tipo 2)

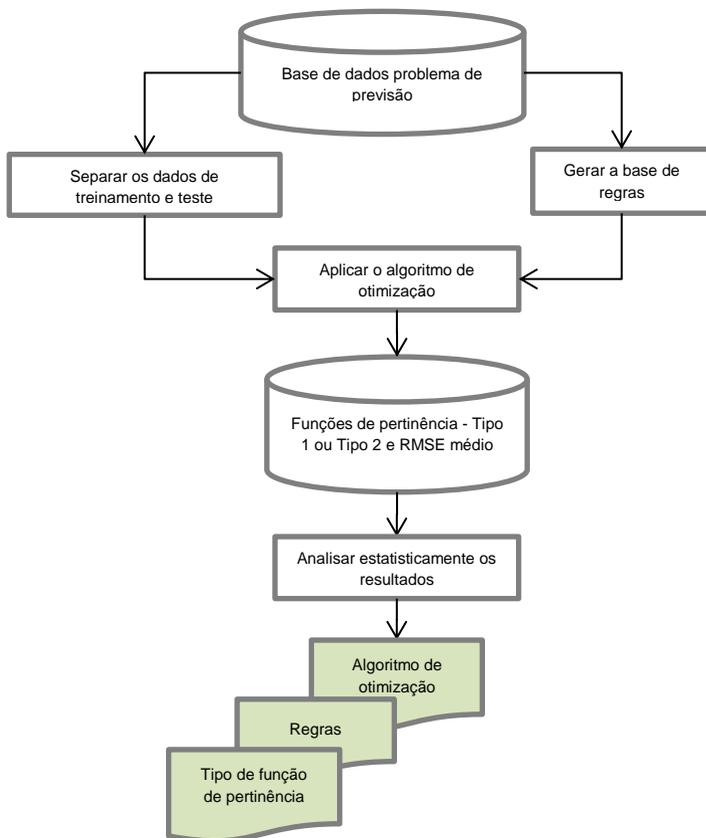
baseada em otimização e amparada por análise estatística dos dados. A análise estatística permitirá indicar o tipo de função de pertinência mais adequado ao problema. Os Algoritmos Genéticos são mais difundidos e utilizados na otimização dos parâmetros de funções de pertinência. Por sua vez, o *Simulated Annealing* é uma técnica aplicada mais recentemente para a otimização de funções de pertinência tipo 2. Dessa maneira, realizou-se uma análise dos resultados obtidos considerando os diferentes algoritmos e diferentes bases de regras. Nesta etapa, foram testadas variações de incerteza nas regras e nos dados do problema.

### 3.3.1 Procedimentos

A Figura 21 apresenta os passos que são executados nesta fase da pesquisa. Os dados utilizados são provenientes da série temporal Mackey-Glass (MACKEY; GLASS, 1977). Escolheu-se esta aplicação por ela possuir características adequadas para a utilização de funções de pertinência tipo 2 (MENDEL, 2004). Além disso, é uma aplicação de referência para outros trabalhos na área (ALMARAASHI, 2012; CASTELLANO; FANELLI; MENCAR, 2003; LIANG; MENDEL, 2000). Realizou-se a análise estatística baseada nas médias de erros encontradas nas simulações com a aplicação do teste ANOVA. O teste indica se as médias são estatisticamente semelhantes ou não. Além disso, é possível apontar interação entre os fatores observados.

O primeiro elemento da Figura 21 representa a base de dados do problema de previsão abordado. Geram-se os dados da série temporal Mackey-Glass (Figura 5) por meio da equação não linear apresentada na equação (1).

Figura 21 – Método para a identificação do tipo de função de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

Para projetar os sistemas *fuzzy* dos dois tipos, adotaram-se funções de pertinência gaussianas. O sistema é composto por quatro variáveis de entrada e uma de saída, que representa a previsão realizada por ele. As variáveis de entrada são os pontos  $x_{t-18}$ ,  $x_{t-12}$ ,  $x_{t-6}$  e  $x_t$  da série. A saída do sistema de inferência é o ponto  $x_{t+6}$ . Esta estratégia de previsão com diferença de seis pontos entre cada variável é também adotada por outros autores, como Almaraashi (2012) e Castellano, Fanelli e Mencar (2003). Três conjuntos *fuzzy* descrevem cada variável: baixo, médio e alto.

Uma vez que se definam os dados do problema, executam-se as etapas de separação dos dados de treinamento e teste e a geração da base de regras. A separação dos dados consiste em dividir a base em quinhentos (500) pontos para treinamento e quinhentos (500) pontos para teste. A geração da base de regras ocorreu de duas formas: empiricamente e automaticamente.

Para gerar as regras automaticamente, realizou-se um procedimento inspirado no método de Wang e Mendel (WANG, 2003; WANG; MENDEL, 1992). Nesse sentido, dividiu-se a região de dados da série temporal em três regiões (baixo, médio e alto) e classificaram-se os dados da série temporal em cada uma dessas regiões. A partir da classificação dos dados, construíram-se as regras. Entre as regras conflitantes, eliminaram-se as menos frequentes. A partir do conjunto de regras resultante, definiram-se dois grupos de seis regras: as mais frequentes (expressando menor incerteza) e as menos frequentes (caracterizando maior incerteza). Além da extração automática, em outro caso de experimentação, utilizaram-se seis definidas a partir da observação do comportamento da série temporal. Em comparação com o método de extração automático, observou-se que, dessas regras, uma não apareceu nos resultados, duas apareceram com muita frequência (72 e 45 vezes), e outras duas apareceram poucas vezes (14 e 7 vezes). Apresentam-se no Quadro 7 os três conjuntos de regras utilizados nos experimentos. Por ser uma metodologia baseada em otimização, é importante limitar a base de regras para que o desempenho não seja comprometido.

Quadro 7 – Conjuntos de regras utilizadas nos experimentos

a) Regras mais frequentes					b) Regras menos frequentes					c) Regras empíricas				
x(t-18)	x(t-12)	x(t-6)	x(t)	x(t+6)	x(t-18)	x(t-12)	x(t-6)	x(t)	x(t+6)	x(t-18)	x(t-12)	x(t-6)	x(t)	x(t+6)
Alto	Alto	Alto	MÉDIO	Baixo	Alto	Alto	Alto	Alto	Baixo	Médio	Médio	Alto	Alto	Médio
Médio	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Baixo	Baixo	Alto	Alto	Médio	Baixo	Baixo
Alto	Alto	Alto	Alto	Médio	Alto	Alto	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Médio
Baixo	Médio	Alto	Alto	Alto	Alto	Baixo	Baixo	Baixo	Médio	Alto	Alto	Médio	Médio	Baixo
Alto	Alto	Médio	Baixo	Baixo	Alto	Médio	Médio	Médio	Alto	Baixo	Baixo	Médio	Médio	Alto
Médio	Médio	Alto	Alto	Alto	Alto	Médio	Baixo	Médio	Alto	Baixo	Baixo	Médio	Alto	Alto

Fonte: Elaborado pela autora

Na etapa de aplicação do algoritmo de otimização realizam-se as simulações com os algoritmos desenvolvidos: o Algoritmo Genético e o *Simulated Annealing*. Dão-se a seguir os detalhes de implementação de cada algoritmo:

- **Detalhes de implementação do Algoritmo Genético:** para representar funções tipo 1 gaussianas são necessárias duas informações: média e desvio padrão. O cromossomo é composto por valores reais e possui tamanho 30, pois são necessários dois genes para representar cada conjunto das variáveis de entrada e de saída (cinco variáveis compostas por três conjuntos representados por dois genes, cada). Para a representação de conjuntos tipo 2, a complexidade é um pouco maior, pois deve-se definir duas médias e dois desvios padrão, ou uma média e dois desvios padrão. Para fins de limitação dessa complexidade, optou-se pela adoção de uma média e dois desvios padrão por conjunto tipo 2 intervalar. Dessa maneira, o tamanho do cromossomo é 45, pois é necessário um gene a mais para a representação de cada conjunto. A população inicial é gerada aleatoriamente. O número de indivíduos na população é  $N=100$  e o número de gerações é de  $Max_{gerações}=10.000$ .

- **Detalhes de implementação do *Simulated Annealing*:** gera-se aleatoriamente a solução inicial. O algoritmo escolhe aleatoriamente a solução vizinha e esta é alcançada por meio de um *step size* (0,003). Da mesma forma que ocorre no Algoritmo Genético, cada solução possui tamanho 30 para as funções de pertinência tipo 1 e tamanho 45 para as funções de pertinência tipo 2. Tanto o Algoritmo Genético quanto o *Simulated Annealing* geram as funções de pertinência tipo 2 independentes das funções de pertinência tipo 1. A temperatura inicial é  $T=500$ ; o número de iterações por temperatura é  $N(T)=10$ ; a função de resfriamento é  $f(T) = \alpha T$ , onde  $\alpha = 0,999$ .

Implementaram-se em Java<sup>®</sup> os algoritmos desenvolvidos, os quais fazem uso do *framework* Juzzy (WAGNER, 2013). Esse *framework* apresenta algumas características importantes, como a criação de base de regras, pode ser utilizado para fins acadêmicos livremente e poderá ser ampliado (como por exemplo, com a incorporação de um algoritmo de geração de funções de pertinência). Além disso, possui documentação e modularização, o que facilita o entendimento.

Como resultado das simulações realizadas com os algoritmos de otimização, obtém-se a base de conhecimento dos sistemas *fuzzy* – tipo 1 e tipo 2 e o RMSE médio. Após a aplicação dos algoritmos de otimização, os resultados são dois conjuntos de sistemas *fuzzy*: um tipo 1 e outro tipo 2, para cada grupo de regras. Cada conjunto de sistema é formado por dez sistemas *fuzzy*, que representam a replicação dos experimentos de otimização. Além disso, têm-se os valores de RMSE

obtidos por cada sistema com os dados de teste. Utilizam-se na próxima etapa, que é a aplicação do teste estatístico, os valores de RMSE obtidos no teste. As demais configurações dos sistemas *fuzzy* são: método de implicação (produto), método de agregação (máximo), método de desfuzzificação (centroide) e método de redução de tipo (KARNIK; MENDEL, 2001).

Por fim, a aplicação do teste estatístico ocorre nos dados de RMSE médio resultante dos experimentos e consiste em realizar o teste ANOVA para as médias de cada tratamento. As hipóteses do teste são:  $H_0$  (as médias encontradas são semelhantes) e  $H_1$  (as médias são diferentes). Utiliza-se um grau de significância de 5%, ou seja, esta é a probabilidade de o teste rejeitar  $H_0$  quando este é verdadeiro. Com base na análise estatística, faz-se a indicação de um ou outro tipo de função de pertinência. Quando se aceita a hipótese de que as médias são semelhantes, a indicação é que se utilizem funções de pertinência tipo 1. Isso porque o custo de aplicar as funções tipo 1 é menor. Quando as médias são diferentes, deve-se observar para qual dos tratamentos a média é maior: se for maior para os sistemas tipo 2, indicam-se funções tipo 1; se for maior para os sistemas tipo 1, indicam-se as funções de pertinência tipo 2. Além do tipo de função de pertinência, a análise estatística permite destacar os resultados obtidos por cada algoritmo de otimização, assim como a base de regras.

### 3.3.2 Resultados

Estabeleceram-se duas estratégias de análise:

- a) Testar tanto o Algoritmo Genético quanto o *Simulated Annealing* para a geração de funções de pertinência tipo 1 e tipo 2, considerando diferentes fontes de incerteza: dados sem ruídos e com ruídos (SNR=20 dB), regras empíricas, regras menos frequentes e regras mais frequentes. Nesta etapa o objetivo é o de avaliar as diferenças entre os métodos de otimização empregados.
- b) Testar o Algoritmo Genético para a geração de funções de pertinência tipo 1 e tipo 2 considerando os seguintes aspectos: série com ruídos (SNR = 10 dB), regras empíricas, regras mais frequentes e regras menos frequentes. O objetivo desta etapa é o de verificar as diferenças entre os resultados obtidos pelos sistemas *fuzzy* tipo 1 e tipo 2.

- c) Para avaliar o desempenho de cada algoritmo, calcula-se o *Root Mean Square Error* (RMSE), que é um cálculo baseado na diferença entre a resposta real e a resposta obtida pelo sistema otimizado. Apresenta-se na equação (2) o cálculo do RMSE.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos (RMSE médio) nas simulações realizadas com cada um dos algoritmos implementados, para cada um dos tipos de funções de pertinência e também para três conjuntos de regras diferentes (empíricas, mais frequentes e menos frequentes). Nesta etapa, realizaram-se as simulações com os dados sem ruído e com SNR de 20 dB. Replicou-se cada experimento dez vezes, e os dados apresentados representam a média das replicações.

Observando-se os dados da Tabela 1 e considerando os testes realizados com os dados sem ruídos, nota-se que o *Simulated Annealing* encontrou os melhores resultados (0,031 e 0,036). Em comparação com o Algoritmo Genético, o *Simulated Annealing* apresentou resultados melhores quando utilizou a base de regras mais frequentes. Porém, diante do emprego das regras empíricas e das regras menos frequentes, o algoritmo genético apresentou resultados superiores. No caso das regras menos frequentes, os resultados alcançados pelo *Simulated Annealing* foram significativamente inferiores (RMSE médio maior).

Tabela 1 – Resultados das simulações (RMSE médio) para a série temporal Mackey-Glass sem ruído e com SNR 20 dB

Método	Tipo de regras	Sem ruído		Com ruído (SNR 20dB)	
		Tipo 1	Tipo 2	Tipo 1	Tipo 2
Algoritmos Genéticos	Empíricas	0,048800314	0,055545104	0,05705261	0,060428583
	Mais frequentes	0,037887808	0,038500712	0,04336728	<b>0,045981731</b>
	Menos frequentes	0,0376378935	0,044811253	0,04551057	0,052381157
<i>Simulated Annealing</i>	Empíricas	0,050910698	0,057295096	0,05696872	0,063707643
	Mais frequentes	<b>0,031396481</b>	<b>0,036970253</b>	<b>0,04036634</b>	0,048595565
	Menos frequentes	0,086289294	0,079791083	0,08851653	0,078223188

Fonte: Elaborada pela autora

Analisando os resultados para os dados com ruídos, obteve-se o melhor resultado para funções tipo 1 por meio do Método *Simulated Annealing*. Já para funções tipo 2, obteve-se o melhor resultado pelo Algoritmo Genético. Realizando a comparação entre funções de pertinência tipo 1 e tipo 2, nota-se que, de modo geral, os resultados da aplicação de funções de pertinência tipo 1 foram superiores.

Para entender a influência de cada fator testado (método, tipo de função de pertinência e tipos de regras) e assim verificar se as diferenças encontradas nos resultados são significativas, realizou-se o teste estatístico ANOVA. O objetivo do teste é verificar se as médias dos resultados são semelhantes ou não e, ainda, averiguar se há interação entre os fatores testados. Para um nível de significância de 5%, a Tabela 2 apresenta o resultado da análise estatística.

Tabela 2 – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio

Nível dos fatores	RMSE						Decisão estatística ( $\alpha = 0,05$ ) <sup>a</sup>
	Sem ruído			Com ruído (SNR = 20 dB)			
	Média	Desvio padrão	Pvalor	Média	Desvio padrão	Pvalor	
<b>Algoritmo Genético</b>	0,04383	0,00873	0,001	0,05079	0,00835	0,001	Médias diferentes ( $H_1$ )
<i>Simulated Annealing</i>	0,05711	0,02739		0,06273	0,01998		
<b>Função de pertinência tipo 1</b>	0,04879	0,02247	0,389	0,0553	0,01985	0,331	Médias semelhantes ( $H_0$ )
<b>Função de pertinência tipo 2</b>	0,05215	0,02014		0,05822	0,01197		
<b>Regras empíricas</b>	0,05314	0,00534	0,001	0,05954	0,0042	0,001	Médias diferentes ( $H_1$ )
<b>Regras menos frequentes</b>	0,06213	0,03143		0,06616	0,0231		
<b>Regras mais frequentes</b>	0,03614	0,00349		0,04458	0,00413		

Legenda: <sup>a</sup> Conclusões para os dois testes.

Fonte: Elaborada pela autora

A análise estatística sugere que há diferença significativa nos resultados considerando o método empregado (pois de acordo com o  $p_{valor}$ , o teste rejeita a hipótese nula). Isso ocorreu pela influência dos

resultados encontrados para o grupo de regras menos frequentes. Da mesma forma, o teste aponta que as médias são diferentes considerando o grupo de regras testado ( $p_{\text{valor}}$  igual a 0,001). Já em relação aos tipos de funções de pertinência, os resultados são estatisticamente semelhantes. Apresenta-se na Tabela 3 o resultado do teste de interação entre os fatores.

Tabela 3 – Teste estatístico (ANOVA) para avaliação da interação entre os fatores

<b>Interação</b>	<b>Pvalor (sem ruído)</b>	<b>Teste a 5% de significância<sup>a</sup></b>	<b>Pvalor (SNR 20 dB)</b>	<b>Teste a 5% de significância<sup>b</sup></b>
<b>Método e tipo de função de pertinência</b>	0,679	Interação não significativa ( $H_0$ )	0,627	Interação não significativa ( $H_0$ )
<b>Método e regras</b>	0,001	<b>Interação significativa (<math>H_1</math>)</b>	0,001	<b>Interação significativa (<math>H_1</math>)</b>
<b>Tipo de função de pertinência e regras</b>	0,756	Interação não significativa ( $H_0$ )	0,429	Interação não significativa ( $H_0$ )

Legenda: <sup>a</sup> Resultado para os testes com dados sem ruídos. <sup>b</sup> Resultado para os testes realizados nos dados com ruídos.

Fonte: Elaborada pela autora

Observa-se na Tabela 3 que tanto para os dados sem ruídos quanto para os dados com ruídos, o teste estatístico indica que há interação entre o método de otimização e as regras utilizadas. Já se havia relatado isso anteriormente quando se observou que o SA foi melhor em relação ao AG ao utilizar as regras mais frequentes; e pior ao utilizar as regras empíricas e as regras menos frequentes. As demais combinações de fatores não apresentaram interação significativa.

Em relação ao tempo de simulação, o *Simulated Annealing* apresenta desempenho inferior, pois é maior o tempo de simulação necessário para obter as funções de pertinência de um sistema *fuzzy*. O tempo de simulação para otimizar o sistema tipo 1 é semelhante, sendo para o *Simulated Annealing* cerca de 1,05 vezes maior. Já para otimizar o sistema tipo 2, essa diferença aumenta e o SA leva cerca de 2,88 vezes mais tempo.

Em uma nova etapa de testes, conduziram-se os experimentos utilizando somente o Algoritmo Genético. Nessa etapa adicionaram-se mais ruído aos dados da série temporal. Apresentam-se na Tabela 4 os resultados das simulações.

Tabela 4 – Resultados das simulações (RMSE médio) para o Algoritmo Genético, considerando a série com SNR 10dB

Tipo de regra	SNR=10dB	
	Tipo 1	Tipo 2
Regras empíricas	0,070622578	0,071183647
Regras mais frequentes	0,063050118	0,063079639
Regras menos frequentes	0,073096869	0,072745525

Fonte: Elaborada pela autora

Pelos dados da Tabela 4 é possível notar que as médias dos resultados encontrados são muito próximas, comparando um tipo de função de pertinência com o outro. Da mesma forma, o teste estatístico ANOVA, considerando 5% de significância, indicou que não há diferenças nas médias para o tipo de função de pertinência. Apresentam-se na Tabela 5 os resultados do teste estatístico.

Tabela 5 – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE obtido nas simulações do AG (SNR=10 dB)

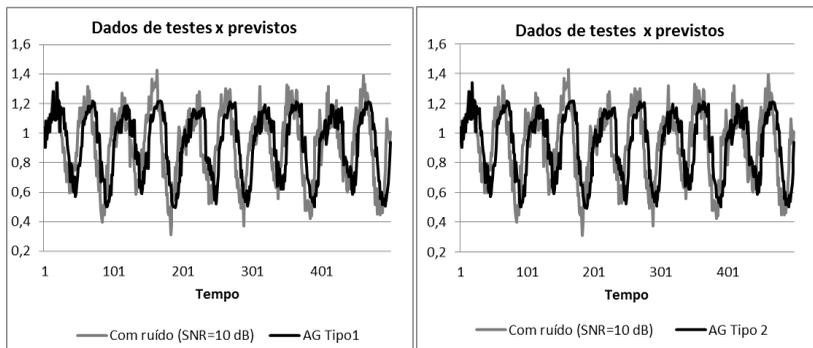
Nível dos fatores	Média	Desvio padrão	Pvalor	Decisão estatística ( $\alpha = 0,05$ )
Função de pertinência Tipo 1	0,06892	0,00658	0,946	Médias semelhantes ( $H_0$ )
Função de pertinência tipo 2	0,06900	0,00567		
Regras empíricas	0,07090	0,00470	0,001	Médias diferentes ( $H_1$ )
Regras menos frequentes	0,07292	0,00569		
Regras mais frequentes	0,06306	0,00191		
Interação entre função de pertinência e regras	0,06896	0,00609	0,95	Interação não significativa ( $H_0$ )

Fonte: Elaborada pela autora

Na Tabela 5, observa-se que, para o tipo de regra, o teste indicou que as médias são diferentes, com as regras mais frequentes apresentando resultado superior e as regras menos frequentes apresentando resultado inferior. O teste estatístico mostrou também que não há interação significativa entre o tipo de regra e o tipo de função de pertinência empregados.

A Figura 22 mostra os dados de previsão médios obtidos pelos sistemas tipo 1 e tipo 2 (extraídos dos dez experimentos) para as regras mais frequentes em comparação com a série com ruídos (SNR=10 dB).

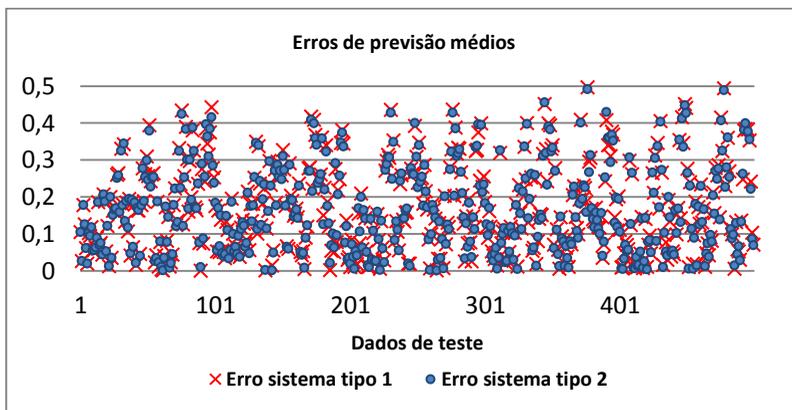
Figura 22 – Dados médios de previsão obtidos dos experimentos com os sistemas tipo 1 e tipo 2



Fonte: Elaborada pela autora

Observa-se na Figura 22 que os resultados de previsão do sistema tipo 1 e do sistema tipo 2 são semelhantes, o que já era esperado devido aos valores médios de RMSE demonstrados na Tabela 5. Para detalhar mais, a Figura 23 apresenta os erros puros (a diferença entre o valor médio previsto e o valor real), tanto para o sistema *fuzzy* tipo 1 quanto para o sistema *fuzzy* tipo 2.

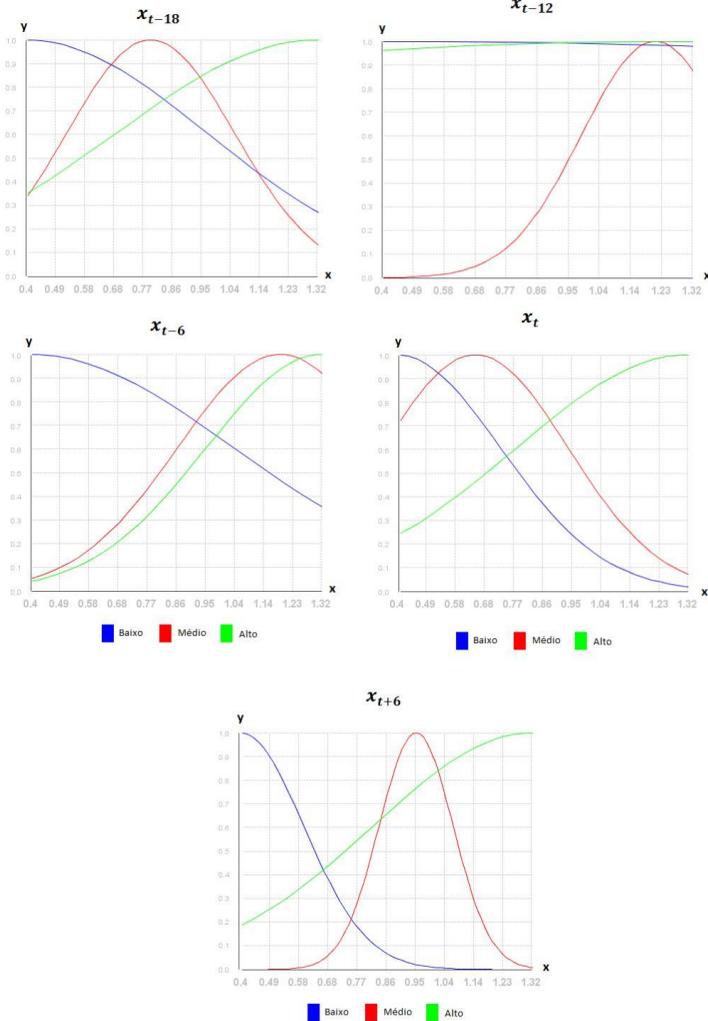
Figura 23 – Erros na previsão da série temporal Mackey-Glass com ruído (SNR=10 dB) para a média das simulações



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 24 apresenta funções de pertinência tipo 1 otimizadas pelo Algoritmo Genético em um dos experimentos. O exemplo apresentado considera as regras frequentes e dados de entrada com ruídos (SNR=10 dB).

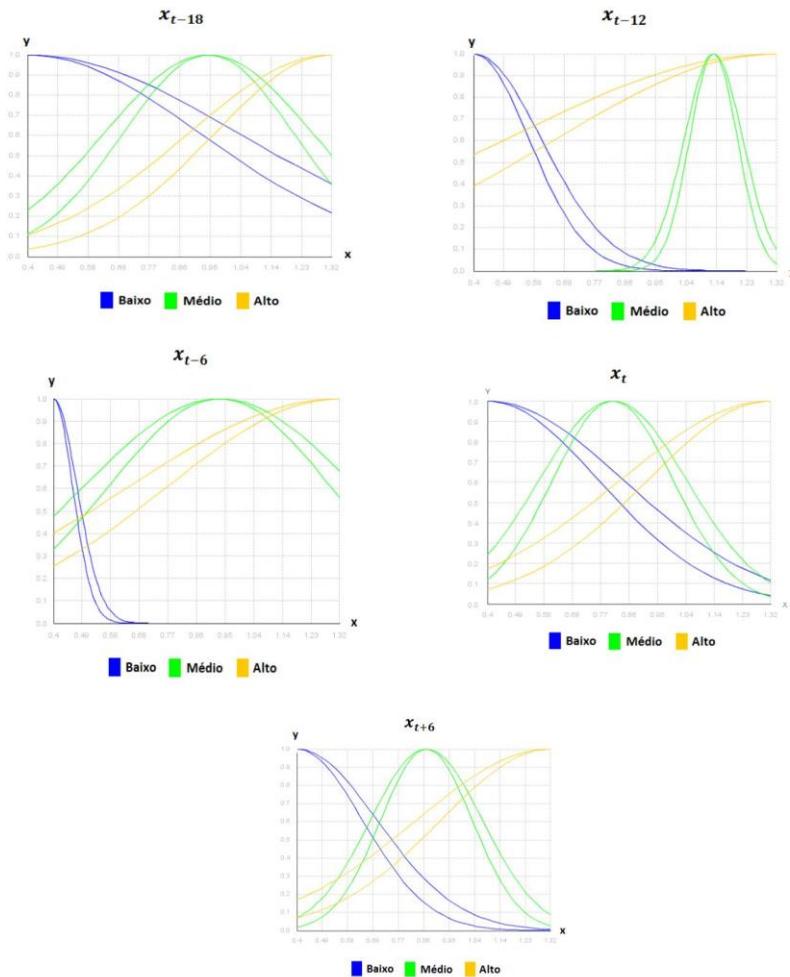
Figura 24 – Exemplos de funções de pertinência tipo 1 otimizadas pelo Algoritmo Genético



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 25 apresenta funções de pertinência tipo 2 otimizadas pelo Algoritmo Genético em um dos experimentos, novamente para as regras frequentes e dados de entrada com ruídos.

Figura 25 – Exemplos de funções de pertinência tipo 2 otimizadas pelo Algoritmo Genético



Fonte: Elaborada pela autora

### 3.4 DISCUSSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia para a descoberta de tipo de funções de pertinência. Como parte desta pesquisa empregaram-se algoritmos para otimização de funções de pertinência, sendo estes o Algoritmo Genético e o *Simulated Annealing*. Testaram-se níveis de incerteza diferentes nos dados de entrada e nas regras utilizadas. Para variar o nível de incerteza inerente aos dados, realizou-se a previsão da série temporal Mackey-Glass considerando diferentes níveis de ruído. Para testar diferentes níveis de incerteza nas regras (variadas pela subjetividade e pela frequência destas regras), testaram-se regras definidas empiricamente e definidas automaticamente (formadas por dois conjuntos: mais frequentes e menos frequentes).

Avaliando o tipo de método empregado, observou-se que o SA apresentou bons resultados para situações de menor incerteza nas regras adotadas; contudo, apesar de apresentar erro médio menor para as regras mais frequentes, a análise estatística mostrou que as diferenças entre o SA e o AG foram significativas quando se consideram todos os experimentos. Para realizar a aplicação do SA na otimização de sistemas *fuzzy*, deve-se analisar também se o custo de sua utilização é compensado pelos resultados obtidos, uma vez que o tempo computacional é maior.

O tipo de regras aplicado influenciou significativamente nos resultados, sendo o conjunto formado pelas regras mais frequentes o que apresentou os resultados mais próximos dos esperados. Isso demonstra que a definição da base de regras é uma etapa muito importante na obtenção de resultados satisfatórios e que os resultados dependem de funções e regras. Em relação à incerteza presente nas regras, não houve superioridade significativa do sistema tipo 2 em relação ao sistema tipo 1.

Observou-se que, com o processo de otimização, é possível obter funções tipo 1 com resultados superiores aos obtidos por funções tipo 2, o que é confirmado pela análise estatística dos erros médios observados nos experimentos. Porém, ao adicionar o ruído aos dados, o sistema com funções tipo 2 melhorou o desempenho a ponto de, com os testes realizados com SNR 10dB, os resultados ficarem aproximadamente iguais. Isso corrobora a alegação de que um sistema tipo 2 responde bem em situações de maior incerteza e, mais especificamente, quando a incerteza está presente nos dados de entrada. No entanto, como o teste estatístico aponta que as médias são semelhantes, é indicado utilizar as funções tipo 1 para a aplicação avaliada, uma vez que são menos

complexas. Cabe ressaltar, no entanto, que ainda não se sabe até que ponto é possível otimizar as funções de pertinência tipo 1 para que se obtenham resultados superiores aos alcançados por funções tipo 2 intervalares.

A utilização de três conjuntos por variável do problema, assim como de número reduzido de regras, contribui para a interpretabilidade do sistema *fuzzy* em nível de complexidade. A semântica, no entanto, é prejudicada principalmente na recomendação quanto à distinção entre os conjuntos *fuzzy*. A característica de complementaridade também não é atendida.

Até o momento, explorou-se a construção independente de funções de pertinência tipo 2, isto é, sem informações prévias de funções tipo 1. Considerando os resultados aqui encontrados, resolveu-se investigar a geração de funções de pertinência tipo 2 a partir de funções tipo 1.



## 4 PROPOSTA PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

Este capítulo apresenta a proposta de um método automático para a geração de funções de pertinência. O domínio de aplicação é a previsão de séries temporais. O mecanismo envolve a otimização, por um Algoritmo Genético, tanto de funções tipo 1 quanto de funções tipo 2. A opção pelo Algoritmo Genético se deu pelos resultados favoráveis alcançados nas experimentações realizadas, como se relatou no terceiro capítulo, em relação ao *Simulated Annealing*. O AG se mostrou mais adequado quando a incerteza nos dados foi mais acentuada, pois os erros de previsão alcançados foram menores em comparação ao *Simulated Annealing*.

Nesta proposta, busca-se a identificação do tipo de função de pertinência adequado aos conjuntos *fuzzy* das variáveis (que podem ser tanto tipo 1 quanto tipo 2). Além disso, ajustam-se as funções de modo que o total de conjuntos por variável pode ser alterado durante o processo de otimização. Alteram-se dinamicamente as regras do sistema para atender às transformações realizadas nos conjuntos *fuzzy*. Em relação à interpretabilidade, o objetivo é controlar a complexidade, mais especificamente, dedicando-se à redução de conjuntos *fuzzy* e das regras.

### 4.1 MÉTODO PARA A GERAÇÃO DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

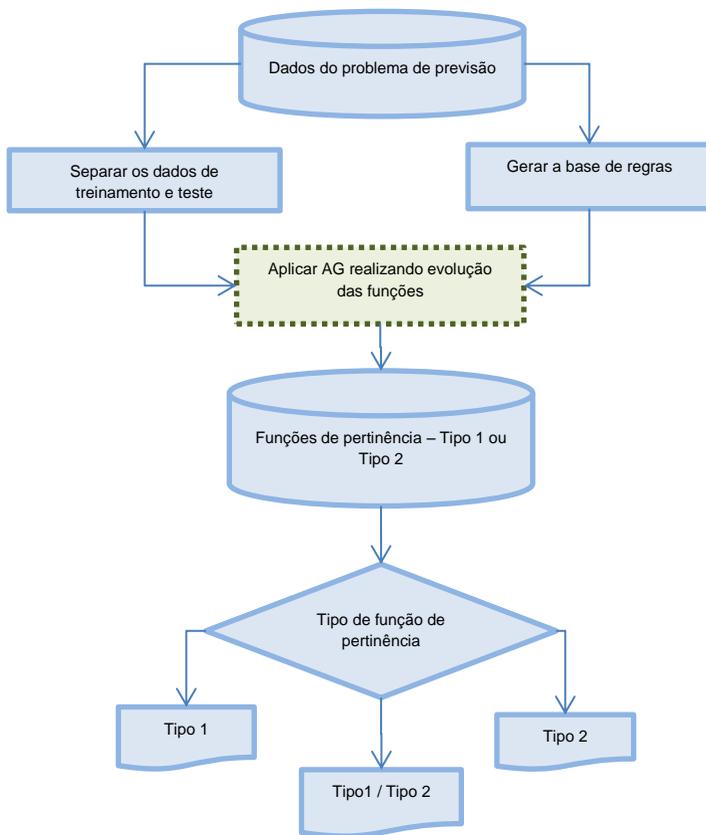
A disposição das funções de pertinência tipo 1 observada nos resultados obtidos, conforme se relatou no terceiro capítulo (implementação de métodos automáticos de otimização), fez com que se levantasse um questionamento: seria possível unir duas funções de pertinência tipo 1 para formar uma função de pertinência tipo 2? Embora se saiba que os resultados ocasionados por tal mudança poderiam resultar em dois sistemas com saídas diferentes, o que chamou a atenção foram os padrões de funções tipo 1 observadas, que eram visualmente semelhantes aos de uma função tipo 2. Além disso, observou-se que algumas funções tipo 1 eram tão semelhantes entre si ao ponto de serem indistinguíveis. Com base nessas observações, levantaram-se duas questões suscetíveis à investigação: a) O agrupamento de funções tipo 1 semelhantes para formar uma função tipo 2 e; b) A remoção de funções de pertinência muito semelhantes.

Dessa forma, apresenta-se a proposta de um método que realiza a geração de funções de pertinência tipo 2 (pelo agrupamento de funções tipo 1), bem como a eliminação de funções tipo 1 muito similares. A eliminação de uma das funções muito semelhantes acrescenta interpretabilidade ao modelo, pois é recomendado que as funções sejam distinguíveis (GACTO, ALCALÁ, HERRERA, 2011). Nesse contexto, para medir a semelhança entre as funções de pertinência, aplica-se uma medida de similaridade. Nessa proposta, adotou-se a medida descrita pela equação (7). A escolha se deu pelo fato de esta não ser uma medida tão habitual para funções tipo 1; todavia, por já ter sido avaliada para outras aplicações (BACCOUR; ALIMÍ; JOHN, 2014).

O método que se desenvolveu tem a finalidade de direcionar a utilização do tipo de função de pertinência. Divide-se nos passos especificados na Figura 26, que apresenta uma visão geral. O núcleo da proposta está no Algoritmo Genético, que evolui as funções de pertinência tipo 1 para funções de pertinência tipo 2. A evolução das funções se baseia na similaridade entre as funções de pertinência.

A proposta apresentada na Figura 26 se restringe à previsão de séries temporais. Os dados das séries devem ser separados em treino (para que o Algoritmo Genético se aproprie do conhecimento necessário para a construção das funções) e teste (para fins de avaliação do modelo). A construção da base de regras se dá pelo método de Wang-Mendel (WANG, 2003; WANG; MENDEL, 1992), pois este se mostrou adequado pelos resultados obtidos, conforme relatado no terceiro capítulo. Nesta proposta, realiza-se a extração de  $M$  regras mais frequentes obtidas por intermédio desse método. O Algoritmo Genético produz, ao término de sucessivas simulações, uma base de conhecimento formada por funções de pertinência tipo 1 e/ou tipo 2. O resultado mais adequado, isto é, o que tiver menores valores de erro na resolução de um problema, poderá ser uma solução cujas variáveis sejam representadas tanto por funções tipo 1 quanto tipo 2.

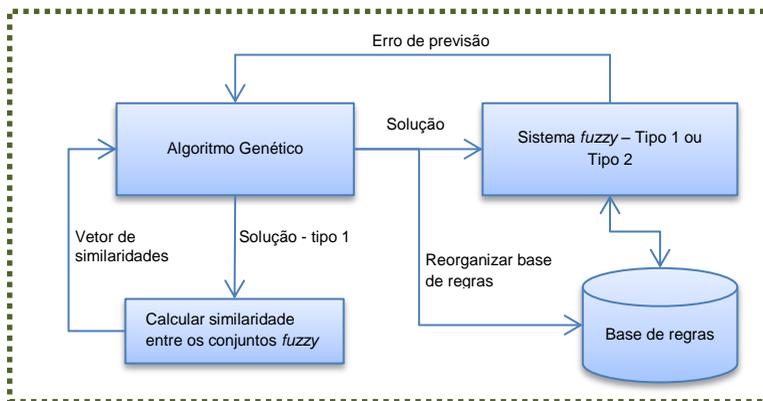
Figura 26 – Proposta para a geração de funções de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 27 apresenta os módulos que compõem o processo de aplicação do Algoritmo Genético desenvolvido para modelar o método proposto. O AG manipula o conjunto de possíveis soluções para o problema. A solução se refere à codificação de todas as variáveis do problema. Cada variável possui um grupo de  $n$  conjuntos *fuzzy*. Durante a execução do Algoritmo Genético, especificamente no processo de mutação, é necessário calcular a similaridade entre os conjuntos *fuzzy*.

Figura 27 – Organização do processo de otimização das funções de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

O sistema *fuzzy*, por sua vez, recebe a solução do Algoritmo Genético para que, a partir desta, construam-se as funções de pertinência das variáveis de entrada e de saída. Realiza-se então a inferência considerando os dados de treinamento. Retorna-se o erro desse processo ao AG, para que avalie o quão adaptada é a solução para a resolução do problema. Devido às transformações ocorridas nos conjuntos *fuzzy*, é necessário reorganizar dinamicamente a base de regras, o que será detalhado posteriormente neste capítulo.

Ao final da otimização, avalia-se a melhor solução obtida pelo AG (a que tiver o menor erro quadrático) para os dados de teste. Por isso, o sistema *fuzzy* realiza novamente o processo de inferência. Os métodos de inferência utilizados no sistema *fuzzy* tipo 1 são: produto (t-norma), e centroide (desfuzzificação). No sistema *fuzzy* tipo 2, utiliza-se o algoritmo de Karnik e Mendel (KARNIK; MENDEL, 2001) para o cálculo do centroide, e a desfuzzificação é a média do intervalo.

A Figura 28 apresenta detalhes do Algoritmo Genético da proposta. Inicialmente geram-se aleatoriamente todas as soluções do problema, que são funções de pertinência tipo 1. Cada solução, ou indivíduo, representa  $n$  funções de pertinência gaussianas, que configuram todos os conjuntos de todas as variáveis do problema analisado. Para representar funções tipo 1 gaussianas são necessárias duas informações: média e desvio padrão. No entanto, devido à evolução que a solução poderá sofrer, pode ser necessária a alocação de um espaço adicional. Esse espaço é necessário para a representação de um função de pertinência tipo 2 intervalar cuja definição é realizada por

uma média e dois desvios padrão, que formam a função de pertinência superior (UMF) e a função de pertinência inferior (LMF). O cromossomo é composto por valores reais e possui, portanto, tamanho máximo  $3n$ . O número de indivíduos na população é  $N = 100$  e o número de gerações é de  $Max_{gerações} = 10.000$ .

Posteriormente à criação da população de soluções candidatas, executam-se passos tradicionais: o cálculo do *fitness* (aptidão) dos indivíduos da população e o *crossover* (recombinação genética). Calcula-se o *fitness* com base no erro quadrático médio, o RMSE (equação 2). O objetivo do algoritmo é minimizar o erro, o que se traduz em soluções mais adequadas para a realização da previsão. A Tabela 6 apresenta as principais características do AG empregado no método.

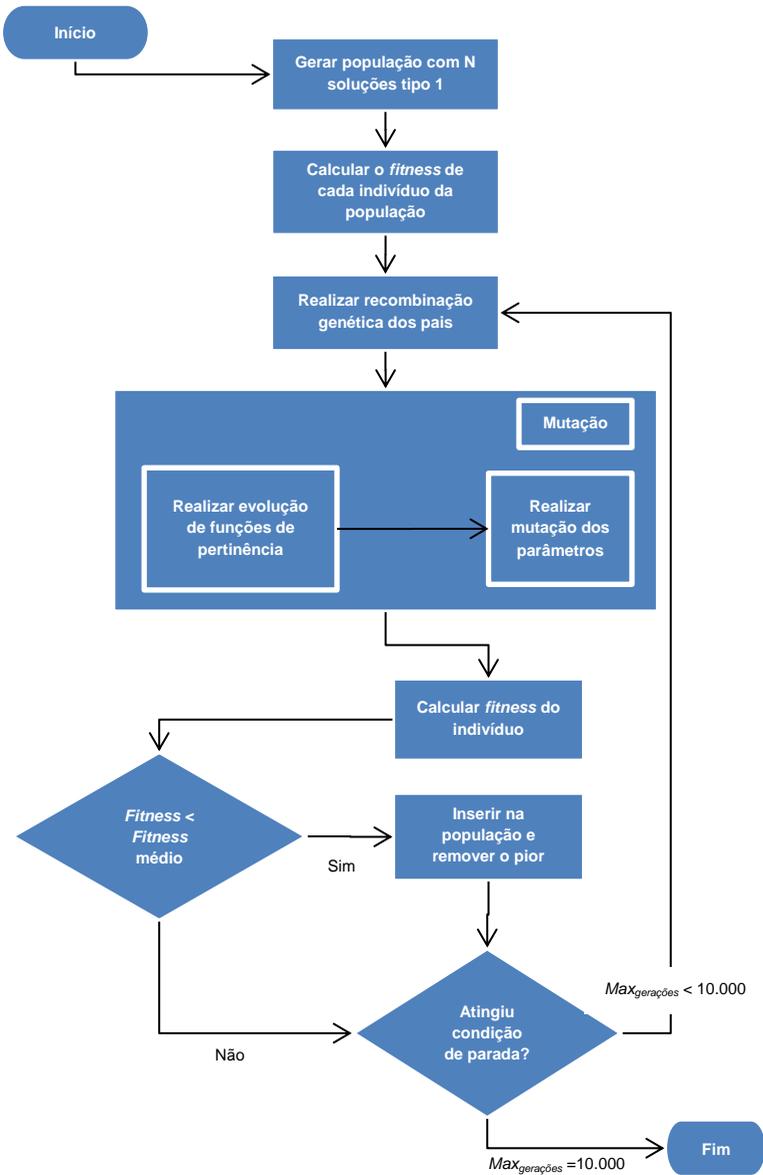
Tabela 6 – Principais características do AG empregado no método proposto

Característica	Descrição
Tamanho da população	100
Total de gerações	10.000
Geração da população inicial	Aleatoriamente
Método de seleção dos pais	Torneio
Taxa de mutação dos parâmetros	20%
Operador de crossover	$(n-1)$ pontos

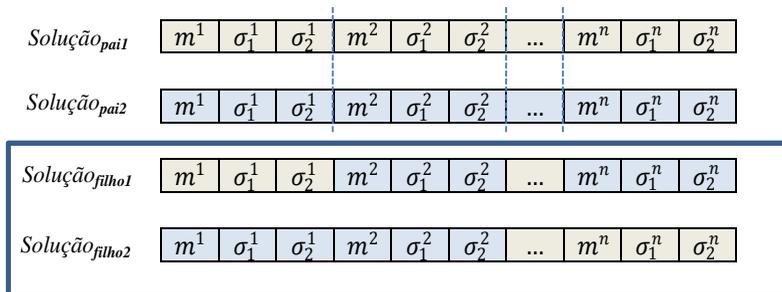
Fonte: Elaborada pela autora

Conforme apresentado na Tabela 6, o cruzamento dos indivíduos emprega o método do torneio. Dessa maneira, formam-se aleatoriamente dois grupos de indivíduos. Os melhores indivíduos dos dois grupos são então selecionados para realizar o *crossover*. Desse processo geram-se duas soluções filhas. A Figura 29 exemplifica a realização do *crossover*, em que são adotados  $(n-1)$  pontos possíveis de realização de cruzamento entre as soluções pais.

Figura 28 – Algoritmo Genético para a geração automática de funções de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 29 – Exemplo de *crossover*

Fonte: Elaborada pela autora

Conforme a Figura 29, cada solução possui  $n$  funções de pertinência. As linhas azuis pontilhadas indicam os pontos de *crossover* empregados, que são as delimitações entre os conjuntos *fuzzy* no indivíduo. Cada solução filho pode herdar o conjunto *fuzzy* de um ou outro pai. No exemplo apresentado na Figura 29, a solução *Solução<sub>filho2</sub>* herdou os dois primeiros conjuntos *fuzzy* da solução *Solução<sub>pai2</sub>*.

A mutação é o passo que se transformou com a adição de uma nova etapa, que é a evolução de funções de pertinência. Tal procedimento pode significar a alteração de funções tipo 1 para funções tipo 2 ou a remoção de funções de pertinência muito semelhantes. A transformação de funções tipo 1 para funções tipo 2 possui o conceito de adaptação das funções de pertinência para que tenham maior poder de representação diante de incerteza. Por sua vez, a remoção de funções quase idênticas é norteadas pelo entendimento de que a solução necessita se adaptar para não representar dois conceitos distintos da mesma maneira. O processo de evolução pode ocorrer com taxa  $T_e$  (que reduz gradualmente com o avanço das iterações) em uma avaliação que é realizada por variável do problema. Delimitaram-se as iterações realizadas pelo algoritmo de otimização para a aplicação da taxa de evolução. Adotou-se a seguinte organização: fase 1 (20% de iterações), fase 2 (20% de iterações), fase 3 (20% de iterações) e fase 4 (40% de iterações). A execução do método segue a ordem das fases, iniciando pela fase 1 e terminando na fase 4. Com o progresso do Algoritmo Genético, indivíduos que já evoluíram para tipo 2 podem realizar normalmente o *crossover* com os indivíduos tipo 1. Após o processo evolutivo das funções de pertinência, executa-se a mutação convencional de parâmetros das funções, esta com probabilidade de

20%. A mutação de parâmetros, uma vez determinada, altera o valor do parâmetro em, no máximo, 10% de seu atual valor. Determinou-se por experimentação as taxas de mutação.

Para executar a evolução proposta no período de mutação, o algoritmo verifica as similaridades entre os conjuntos tipo 1. Para tanto, definiram-se níveis de similaridade para que as decisões fossem efetuadas. A Tabela 7 apresenta os níveis de similaridade adotados empiricamente bem como as respectivas ações geradas.

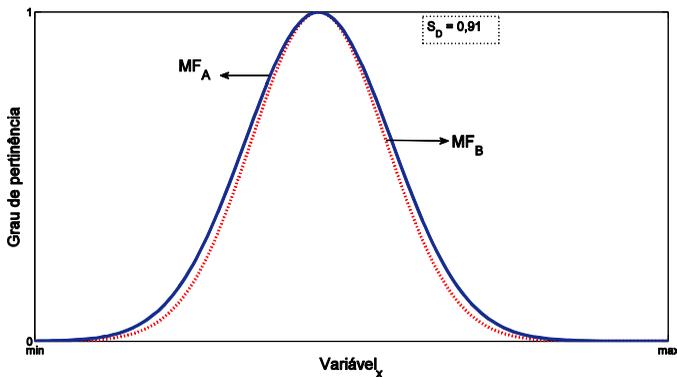
Tabela 7 – Níveis de similaridade adotados no algoritmo de mutação

Nível de similaridade ( $S_D$ )		Ação
Baixo	$S_D < 0,75$	Manter
Moderado	$0,75 \leq S_D < 0,90$	Converter
Alto	$S_D \geq 0,90$	Remover

Fonte: Elaborada pela autora

Definiram-se empiricamente os níveis de similaridade descritos na Tabela 7 durante o desenvolvimento do método. A Figura 30 apresenta um exemplo de duas funções de pertinência tipo 1, cuja similaridade  $S_D$  (equação 6) é 0,91, o que denota um nível alto. Pelo algoritmo proposto, remove-se a função de pertinência com menor desvio padrão.

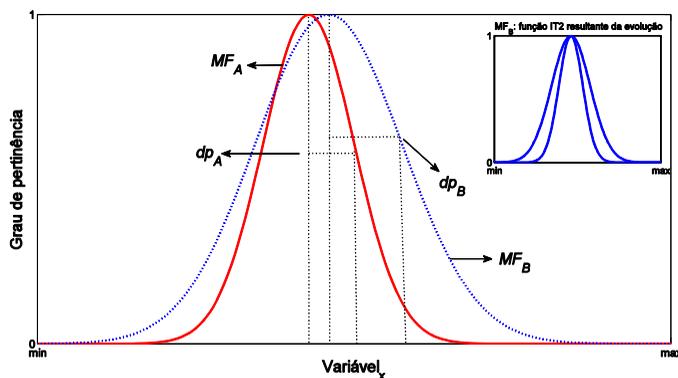
Figura 30 – Funções de pertinência tipo 1 com similaridade  $S_D = 0,91$



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 31 apresenta duas funções de pertinência com similaridade  $S_D=0,7572$ , classificada como moderada. De acordo com os níveis de similaridade adotados na Tabela 7, tal valor é suficiente para efetuar a evolução das duas funções, formando uma função tipo 2.

Figura 31 – Funções de pertinência tipo 1 com similaridade  $S_D=0,75$



Fonte: Elaborada pela autora

No canto superior direito da Figura 31 apresenta-se a função tipo 2 intervalar (IT2) resultante da junção das funções tipo 1,  $MF_A$  e  $MF_B$ . A função resultante IT2 tem as seguintes características: utiliza o termo linguístico  $MF_B$  (com a média de tal conjunto), tem uma função superior com desvio padrão  $dp_b$  (que é o maior desvio padrão entre as duas funções de pertinência  $MF_A$  e  $MF_B$ ) e a função inferior possui desvio padrão  $dp_a$  (o menor desvio padrão).

A Figura 32 apresenta o grupo de algoritmos que se utiliza na evolução das funções de pertinência, inserido no módulo de mutação. Dentro do módulo de evolução das funções de pertinência estão os procedimentos de remoção de função de pertinência tipo 1, a conversão de funções de pertinência tipo 1 para tipo 2 e a reorganização da base de regras.

Figura 32 – Conjunto de algoritmos do módulo de evolução de funções de pertinência



Fonte: Elaborada pela autora

O Quadro 8 apresenta o algoritmo principal do estágio de evolução das funções de pertinência (Figura 32 – Evoluir MF), incorporado à mutação. De modo geral, o Quadro 8 apresenta o pseudocódigo para a remoção e a conversão de funções tipo 1 para tipo 2.

Quadro 8 – Algoritmo de evolução de funções de pertinência

Evoluir funções de pertinência	
1	$n \leftarrow$ total de conjuntos <i>fuzzy</i> de uma variável do problema
2	$i \leftarrow 2$
3	Enquanto $i \leq n$ faça
4	Calcule o nível de similaridade $s_D$ entre os conjuntos $i$ e $i-1$
5	Se $s_D \geq 0,90$ , remova um conjunto $(i, i-1)$
6	Senão se $0,75 \leq s_D < 0,90$ , converta para tipo 2 $(i, i-1)$
7	Fim
8	Fim

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 9 apresenta o algoritmo que realiza a remoção das funções de alto nível de similaridade. Na comparação de duas funções de pertinência, remove-se a que possuir o menor desvio padrão, pois é a função que proporciona a menor cobertura dos elementos do domínio. Caso sejam duas funções das extremidades, mantém-se a mais extrema. Se a função mais extrema possuir o menor desvio padrão, dever-se-á alterá-lo para o valor de desvio padrão da função excluída.

Quadro 9 – Algoritmo de remoção de funções de pertinência tipo 1

---

Remover função de pertinência tipo 1	
Variáveis de entrada: $MF_{T_1}^i$ ; $MF_{T_1}^{i-1}$ ; $n$	
1	Se $i-1 = 1$
2	Remover $MF_{T_1}^i$
3	$\sigma_{MF_{T_1}^{i-1}} = \max(\sigma_{MF_{T_1}^i}, \sigma_{MF_{T_1}^{i-1}})$
4	Reorganizar regras ( $MF_{T_1}^i, MF_{T_1}^{i-1}$ )
5	Senão Se $i = n$
6	Remover $MF_{T_1}^{i-1}$
7	$\sigma_{MF_{T_1}^i} = \max(\sigma_{MF_{T_1}^i}, \sigma_{MF_{T_1}^{i-1}})$
8	Reorganizar regras ( $MF_{T_1}^{i-1}, MF_{T_1}^i$ )
9	Senão
10	Remover a função com menor desvio padrão
11	Reorganizar regras ( $MF_{T_1}^{\min(\sigma)}, MF_{T_1}^{\max(\sigma)}$ )
12	Fim

---

Fonte: Elaborado pela autora

No Quadro 9,  $MF_{T_1}^i$  e  $MF_{T_1}^{i-1}$  são funções tipo 1 cujo posicionamento na variável do problema é  $i$  e  $i-1$ , respectivamente, entre os  $n$  conjuntos existentes por variável. Além disso,  $MF_{T_1}^{\min(\sigma)}$  e  $MF_{T_1}^{\max(\sigma)}$  representam a função cujo desvio padrão é o menor e o maior entre as duas funções tipo 1 comparadas, respectivamente. A função de pertinência removida é desativada no cromossomo, o que significa que passa a ser uma característica inexistente na solução.

O Quadro 10 apresenta o algoritmo que agrupa duas funções de pertinência tipo 1, mais precisamente, que converte duas funções tipo 1 em uma função de pertinência tipo 2 intervalar.

Quadro 10 – Algoritmo de conversão/agrupamento de funções de pertinência

---

Converter funções tipo 1 para função de pertinência tipo 2	
Variáveis de entrada: $MF_{T1}^i; MF_{T1}^{i-1}; n$	
Variáveis de saída: $MF_{IT2}$	
/* Calcule a média da função de pertinência */	
1	Se $i-1 = 1$
2	$média_{MF_{IT2}} \leftarrow média_{MF_{T1}^{i-1}}$
3	Reorganizar regras ( $MF_{T1}^i, MF_{T1}^{i-1}$ )
4	Senão Se $i = n$
5	$média_{MF_{IT2}} \leftarrow média_{MF_{T1}^i}$
6	Reorganizar regras ( $MF_{T1}^{i-1}, MF_{T1}^i$ )
7	Senão
8	$média_{MF_{IT2}} \leftarrow MF_{T1}^{\max(\sigma)}$
9	Reorganizar regras ( $MF_{T1}^{\min(\sigma)}, MF_{T1}^{\max(\sigma)}$ )
10	Fim Se
/* Calcule o desvio padrão da nova função de pertinência */	
12	$\sigma_{upper} = \max(\sigma_{MF_{T1}^i}, \sigma_{MF_{T1}^{i-1}})$
13	$\sigma_{lower} = \min(\sigma_{MF_{T1}^i}, \sigma_{MF_{T1}^{i-1}})$
14	Retorne a nova função $MF_{IT2}(média_{MF_{IT2}}, \sigma_{upper}, \sigma_{lower})$
15	Fim

---

Fonte: Elaborado pela autora

No Quadro 10,  $MF_{IT2}$  representa a função resultante do algoritmo, que compara  $MF_{T1}^i$  e  $MF_{T1}^{i-1}$ . Nesse procedimento é necessário calcular a média e o desvio padrão das funções inferior e superior que compõem a FOU. Quando se trata dos dois conjuntos das extremidades da variável, a média do conjunto resultante terá a média de tais conjuntos. Caso não sejam os conjuntos das extremidades, a média no novo conjunto será igual à do conjunto tipo 1 com o maior desvio padrão entre as duas funções avaliadas. O desvio padrão, por sua vez, é igual ao desvio padrão máximo para a função de pertinência superior e igual ao desvio padrão mínimo para a função de pertinência inferior. Cabe ressaltar que o método desenvolvido deve ser aplicado para variáveis que possuem mais de dois conjuntos.

Por fim, no Quadro 11 apresenta-se o algoritmo que reorganiza a base de regras. A cada evolução das funções de pertinência (ou a cada cruzamento que promove a inserção de um novo conjunto na solução), é necessário realizar a reorganização da base de regras substituindo os termos de funções tipo 1 excluídas ou agrupadas. Somente se realiza a substituição de termos, pois não há a possibilidade de aumentar o total

de conjuntos por variável durante a mutação. Essa substituição busca contribuir para a redução da complexidade do sistema *fuzzy*, objetivando maior interpretabilidade.

Quadro 11 – Algoritmo de reorganização da base de regras

Reorganizar base de regras	
	Variáveis de entrada: $MF_{excluir}, MF_{incluir}$
1	Para cada regra $r \in$ Base de Regras
2	Se $r$ possuir $MF_{excluir}$
3	Substituir o termo da regra por $MF_{incluir}$
4	Fim se
5	Fim Para
6	Fim

Fonte: Elaborado pela autora

No Quadro 11, a função de pertinência  $MF_{excluir}$  representa a função de pertinência tipo 1 cuja variável linguística será substituída na base de regras pelo termo  $MF_{incluir}$ . A alteração da base de regras pode gerar regras ambíguas. O tratamento desse efeito colateral é realizado efetuando a remoção da regra menos frequente.

## 4.2 CONSIDERAÇÕES

O método proposto favorece a criação de indivíduos híbridos (cujas funções de pertinência possam ser tipo 1 e tipo 2) desde o início das simulações. No entanto, a taxa desse tipo de acontecimento é regressiva para permitir que o algoritmo tenha tempo para executar as otimizações nos parâmetros das funções tipo 2 geradas. Observou-se durante a concepção do método que resultados melhores seriam alcançados caso a taxa de evolução adotasse essa estratégia.

Uma vez que funções de pertinência forem evoluídas para tipo 2, então se propaga essa característica normalmente aos demais elementos por meio do *crossover*; porém, tanto o indivíduo evoluído quanto o gerado pelo *crossover* devem ter o valor de *fitness* maior o médio populacional para não serem descartados.

O resultado desse processo é um conjunto de funções de pertinência cujo total de conjuntos pode ter sido alterado (por variável), quer por remoção, quer por agrupamento das funções. Além disso, poderão resultar variáveis cujas funções possam ser tipo 1 ou tipo 2, ou ambas. Isso contribui para a redução da complexidade do modelo, com reflexos na base de regras. Além disso, o método proposto busca fazer

bom uso das vantagens de cada função de pertinência: a função tipo 1 por ser menos complexa para otimizar, e a função tipo 2 por ter maior poder de representação de incerteza.

O método, contudo, possui dois parâmetros: a taxa de evolução das funções de pertinência e o total de conjuntos por variável (que é uma indicação do número máximo de conjuntos *fuzzy* por variável do problema).

## 5 AVALIAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

A avaliação do método proposto se baseia na previsão de três séries temporais: Mackey-Glass (com e sem ruído), Box-Jenkins e Dow Jones. Nesta etapa da pesquisa, analisou-se também o total de conjuntos *fuzzy* por variável do problema, além do tipo de função de pertinência. Para cada uma das séries temporais, executaram-se simulações considerando três tipos de estratégia:

- otimização de funções de pertinência tipo 1, utilizando um algoritmo genético, considerando o emprego de 3, 4 e 5 conjuntos por variável;
- otimização de funções de pertinência tipo 2, utilizando um algoritmo genético, considerando o emprego de 3, 4 e 5 conjuntos por variável;
- otimização de funções de pertinência, aplicando o modelo proposto, considerando o emprego de 3, 4 e 5 conjuntos por variável.

Cabe observar que o algoritmo genético empregado na otimização das funções tipo 1 e tipo 2 não possui a etapa de evolução de funções de pertinência. Além disso, para cada uma das estratégias de simulação descritas acima, executaram-se 20 simulações. Apresentam-se dados de execução do algoritmo bem como a análise estatística dos resultados.

### 5.1 SÉRIE TEMPORAL MACKEY-GLASS

Apresentam-se os resultados dos experimentos realizados para a série temporal Mackey-Glass. Utilizaram-se as seguintes variáveis de entrada:  $x_{t-18}$ ,  $x_{t-12}$ ,  $x_{t-6}$ ,  $x_t$ . A variável de saída é  $x_{t+6}$ . Realizaram-se os testes para a série sem ruído e para a série com ruído (SNR = 20dB). A base de regras é composta por seis regras, as seis mais frequentes obtidas pelo método Wang-Mendel. A taxa de evolução  $T_e$  das funções de pertinência é regressiva e alterada de acordo com as fases definidas para o método (detalhadas no quarto capítulo). Para a série temporal Mackey-Glass, adotaram-se os seguintes valores para  $T_e$ : 20% (fase 1), 10% (fase 2), 5% (fase 3), 1% (fase 4). A Tabela 8 mostra o erro quadrático médio dos experimentos realizados para a série de Mackey-Glass obtidos na fase de teste.

Observando a Tabela 8, nota-se que se obtêm os melhores resultados (menor erro quadrático médio) nas situações em que se

utilizam quatro conjuntos *fuzzy* por variável (tanto para série com ruído quanto para a série sem ruído). Para a série sem ruído, as funções tipo 2, bem como as funções resultantes do método proposto, são as que apresentaram melhores resultados. Para série com ruído, considerando três conjuntos, obtêm-se também os melhores resultados por funções tipo 2 e pelo método proposto. Fazendo uso de cinco conjuntos, no entanto, o resultado para o tipo 2 piorou consideravelmente.

Tabela 8 – Erro médio para a série temporal Mackey-Glass

Fatores		Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
Função	SNR	3	4	5
Tipo 1	Sem ruído	0,03864386	0,02344332	0,03360977
	20 dB	0,05515707	0,04050498	0,05414795
Tipo 2	Sem ruído	0,02967407	<b>0,02021979</b>	0,04716545
	20 dB	0,04763182	0,04027489	0,0762169
Método proposto	Sem ruído	0,03184407	<b>0,02073845</b>	0,02582883
	20 dB	0,04739657	0,04065451	0,05223737

Fonte: Elaborada pela autora

Nas seções 5.1.1 e 5.1.2 apresenta-se a análise estatística para as duas avaliações realizadas na série temporal Mackey-Glass sem ruído e com ruído.

### 5.1.1 Mackey-Glass sem ruído

A Tabela 9 apresenta a análise de variância para as médias (ANOVA), considerando o tipo da função de pertinência e o total de conjuntos. O teste estatístico considera também se há interação entre estes fatores.

Tabela 9 – MG sem ruído – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio

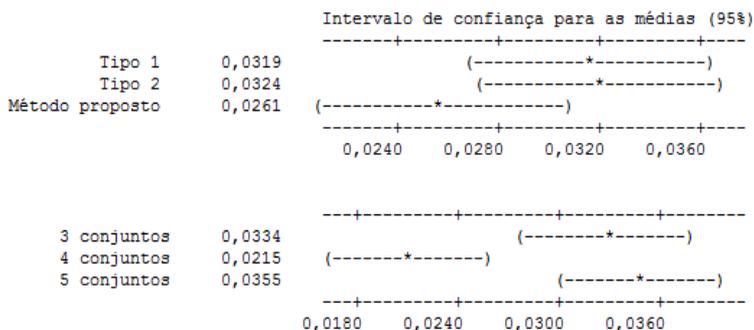
Fatores	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	P-valor	Decisão estatística ( $\alpha=0,05$ )
Tipo 1	0,0319	0,01779	0,01703	0,14048	0,145	$H_0$ (médias semelhantes)
Tipo 2	0,0324	0,03027	0,01582	0,14406		
Método proposto	0,0261	0,005	0,01694	0,03329		
3 conjuntos	0,0334	0,00877	0,02596	0,07102	0,0001	$H_1$ (médias diferentes)
4 conjuntos	0,0215	0,00464	0,01582	0,04704		
5 conjuntos	0,0355	0,03267	0,01605	0,14406		
Interação entre funções e total de conjuntos	0,03013	0,02056	0,01582	0,14406	0,025	$H_1$ (médias diferentes)

Fonte: Elaborada pela autora

A análise estatística apresentada na Tabela 9 mostra que os erros médios obtidos considerando o tipo da função de pertinência foram semelhantes ( $p_{\text{valor}} 0,145$ ). Por outro lado, observaram-se diferenças em relação ao número de conjuntos empregados, assim como interação entre o tipo da função e o total de conjuntos.

A Figura 33 apresenta o intervalo de confiança para o RMSE médio resultante das simulações para o tipo de função e para o total de conjuntos *fuzzy*. Nota-se que, com 95% de confiança, o intervalo da média obtida pelo método proposto está entre 0,022 e 0,031, aproximadamente.

Figura 33 – MG sem ruído – Intervalo de confiança para as médias

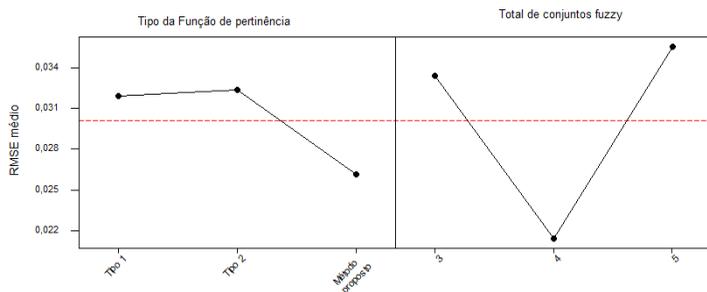


Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 34 apresenta o gráfico dos efeitos principais, isto é, mostra o quanto cada fator impacta no erro quadrático médio. Nota-se que, em média, a proposta apresenta resultados melhores. Em relação ao total de conjuntos, a utilização de quatro conjuntos por variável é a que apresenta o menor erro.

Figura 34 – MG sem ruído – Efeitos principais

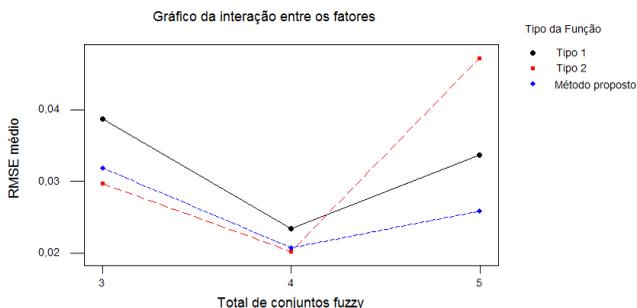
Gráfico dos efeitos principais - RMSE médio



Fonte: Elaborada pela autora

A interação que se constatou pelo teste estatístico pode ser visualizada na Figura 35. Nota-se uma discrepância nos resultados para as funções tipo 2 quando são utilizados cinco conjuntos por variável.

Figura 35 – MG sem ruído – Interação entre os fatores

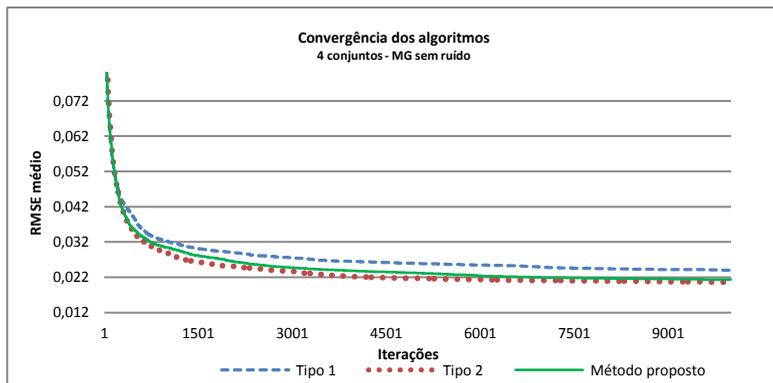


Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 36 apresenta a convergência dos algoritmos para cada uma das abordagens testada (tipo 1, tipo 2 e a proposta), considerando a utilização de quatro conjuntos *fuzzy*. Nota-se pela Figura 36 que o

algoritmo que otimizou funções tipo 2 convergiu mais rápido, seguido pelo método proposto e pelo algoritmo que otimizou funções tipo 1.

Figura 36 – MG sem ruído – Convergência média dos algoritmos



Fonte: Elaborada pela autora

Em relação ao tempo de execução dos algoritmos (apresentado na Tabela 10), conforme já esperado, o algoritmo que otimizou somente funções tipo 1 realizou a tarefa mais rapidamente. Por sua vez, a otimização de funções tipo 2 é que dura mais tempo.

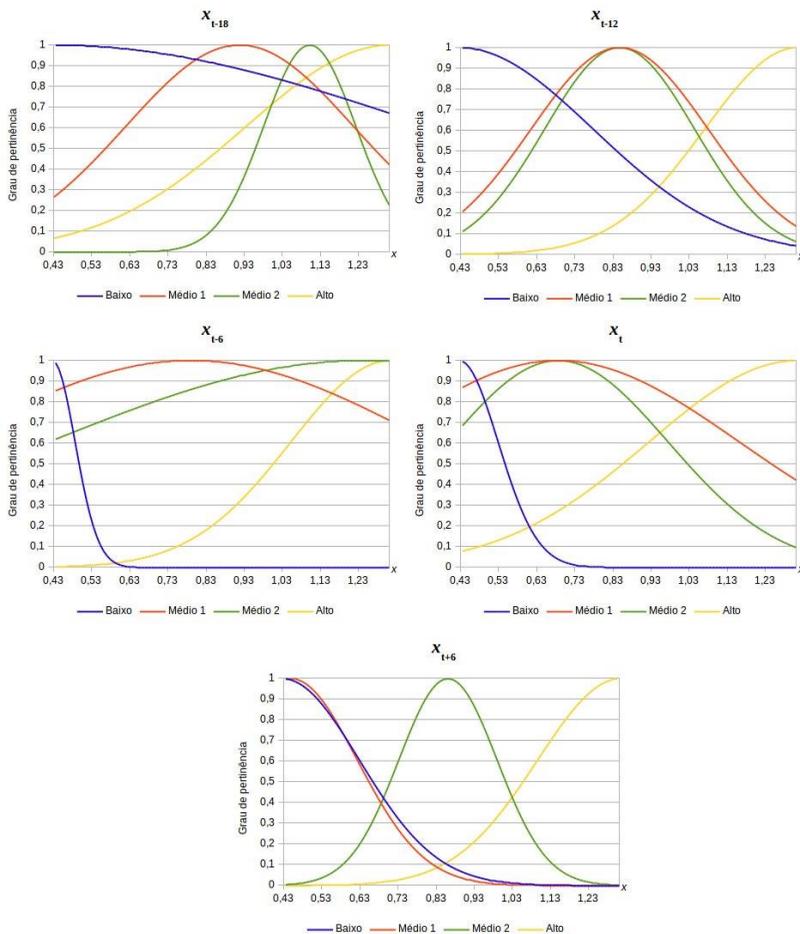
Tabela 10 – MG sem ruído – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos

Fatores	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
	3	4	5
Tipo de função			
Tipo 1	342	382	387
Tipo 2	1972	1815	1658
Método proposto	1490	1654	1355

Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 37 apresenta funções de pertinência obtidas pela execução da otimização de funções tipo 1 considerando quatro conjuntos por variável. Essas funções referem-se à solução que apresentou menor erro de previsão na otimização de funções tipo 1.

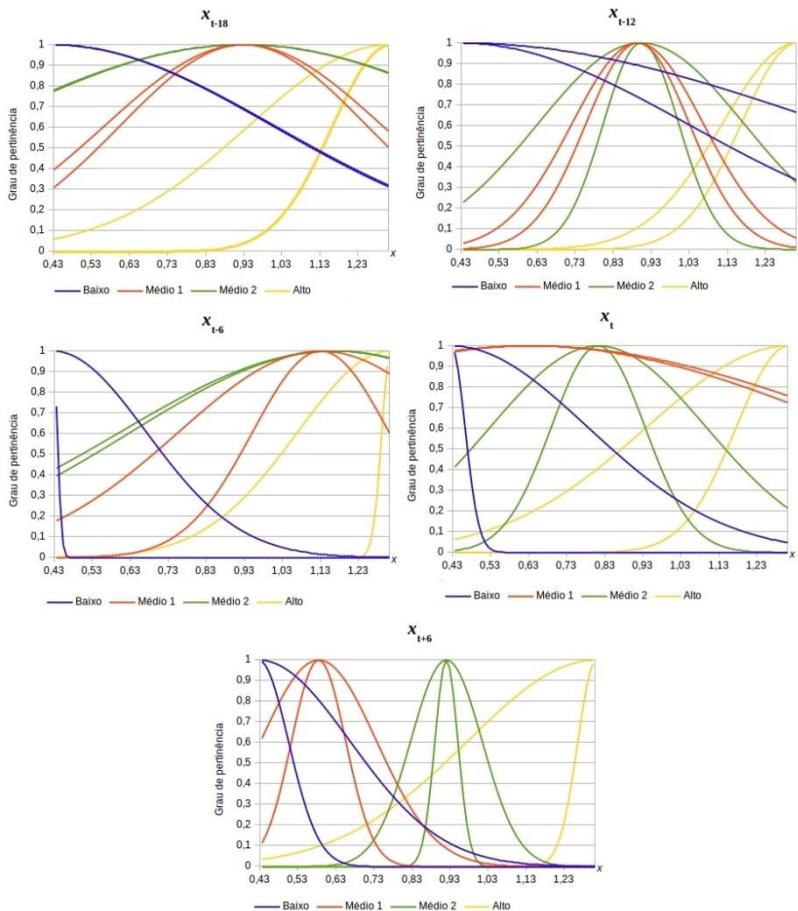
Figura 37 – MG sem ruído – Funções de pertinência tipo 1, quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 38 mostra as funções de pertinência obtidas na otimização de funções tipo 2, considerando o emprego de quatro conjuntos por variável. Estas funções representam a solução com o menor erro de previsão dentre as experimentações realizadas para as funções tipo 2.

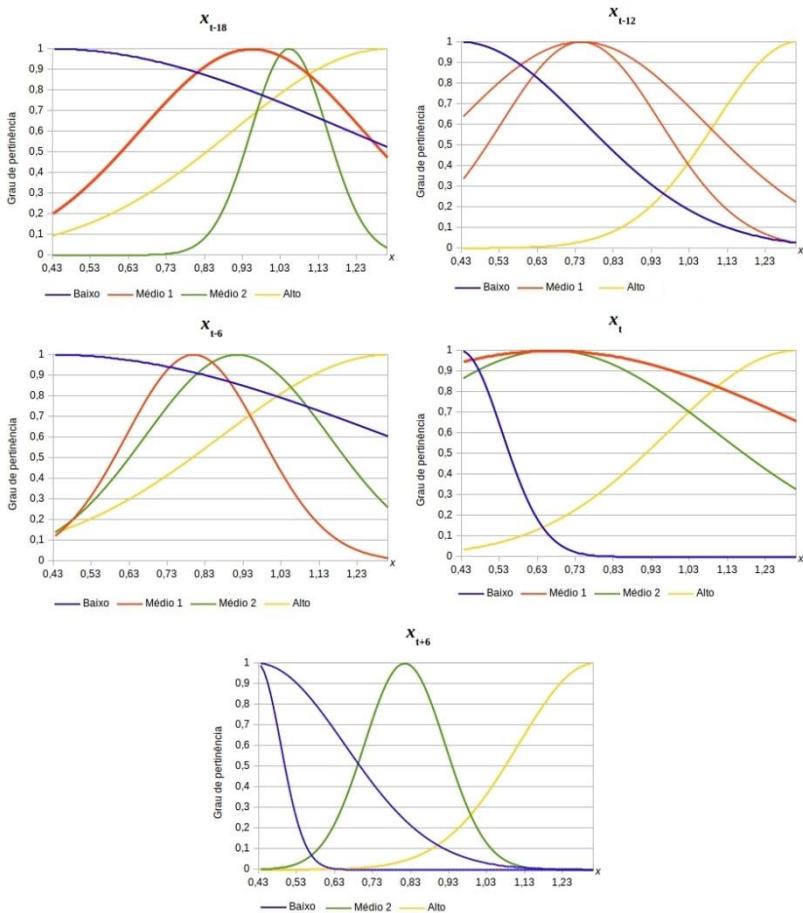
Figura 38 – MG sem ruído – Funções de pertinência tipo 2, quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 39 apresenta exemplos de funções de pertinência resultantes do método proposto. As funções mostradas são resultantes da aplicação do método considerando inicialmente quatro conjuntos por variável.

Figura 39 – MG sem ruído – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

Nota-se na Figura 39 que o método transformou as variáveis  $x_{t-12}$  e  $x_{t+6}$ . Cada uma dessas variáveis resultou em três conjuntos *fuzzy*, sendo um deles um conjunto tipo 2.

### 5.1.2 Mackey-Glass com ruído

Apresentam-se na Tabela 11 os resultados do teste estatístico aplicado nos erros de previsão para a série temporal Mackey-Glass com ruído (SNR=20dB).

Tabela 11 – MG com ruído (SNR=20 dB) – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio

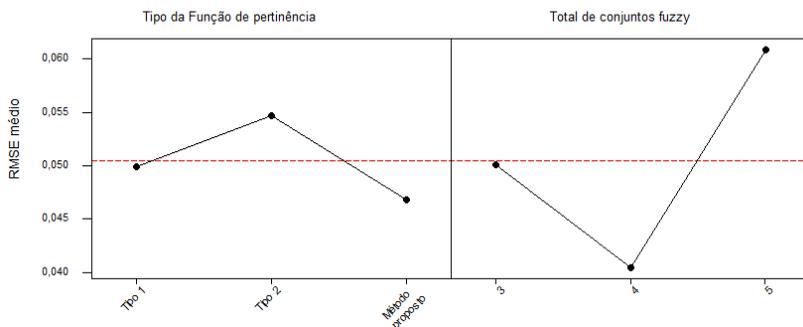
Fatores	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Pvalor	Decisão estatística ( $\alpha=0,05$ )
Tipo 1	0,0499	0,02004	0,03877	0,1447	0,136	$H_0$ (médias semelhantes)
Tipo 2	0,0547	0,03187	0,03698	0,14573		
Método proposto	0,468	0,01651	0,03768	0,15474		
3 conjuntos	0,0501	0,00838	0,0408	0,08221	0,0001	$H_1$ (médias diferentes)
4 conjuntos	0,0405	0,00296	0,03698	0,05322		
5 conjuntos	0,0609	0,03784	0,03788	0,15474		
Interação entre funções e total de conjuntos	0,05047	0,02383	0,03698	0,15474	0,016	$H_1$ (médias diferentes)

Fonte: Elaborada pela autora

As conclusões para o teste estatístico da Tabela 11 são semelhantes às conclusões para os resultados da série sem ruído. Observa-se, no entanto, que a diferença entre as médias é menor quando se considera o tipo de função de pertinência. Isso pode ser notado na Figura 40, que apresenta os efeitos principais (nota-se que a diferença entre a média para funções tipo 1 e as funções da proposta é menor).

Figura 40 – MG com ruído (SNR=20dB) – Efeitos principais dos fatores

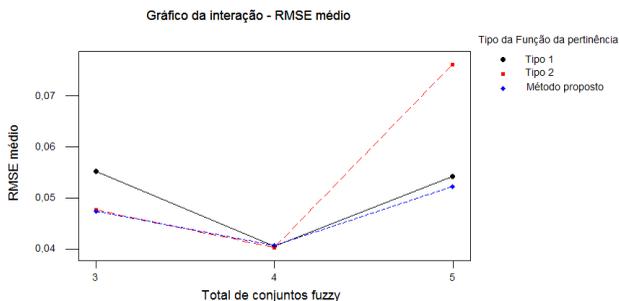
Gráfico dos efeitos principais - RMSE médio



Fonte: Elaborada pela autora

O gráfico de interação entre os fatores novamente apresenta a degradação dos resultados quando o total de conjuntos é cinco e se utilizam funções de pertinência tipo 2 (Figura 41).

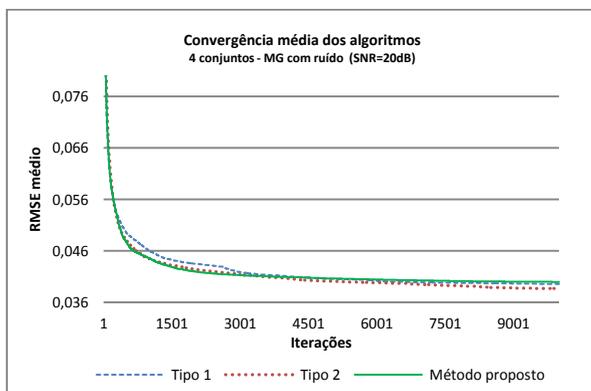
Figura 41 – MG com ruído (SNR=20dB) – Interação entre os fatores



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 42 apresenta o gráfico de convergência dos algoritmos para a série temporal Mackey-Glass com ruído (SNR=20dB), considerando a utilização de quatro conjuntos. Nota-se na Figura 42 que o método proposto convergiu mais rapidamente que os demais no início das simulações; no entanto, os demais algoritmos apresentaram suave melhora nas iterações finais.

Figura 42 – MG com ruído (SNR=20dB) – Convergência média dos algoritmos



Fonte: Elaborada pela autora

Em relação ao tempo de simulação para a série temporal Mackey-Glass com ruído (Tabela 12), segue o mesmo padrão apresentado para a série sem ruído: realiza-se a otimização de funções tipo 1 em menor tempo, seguida pelo método proposto e pela otimização de funções de pertinência tipo 2.

Tabela 12 – MG com ruído (SNR=20dB) – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos

Fatores	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
	3	4	5
Tipo 1	341	380	397
Tipo 2	2001	1936	1655
Método proposto	1218	1557	1581

Fonte: Elaborada pela autora

## 5.2 SÉRIE TEMPORAL BOX-JENKINS

Analisou-se a série temporal Box-Jenkins considerando como variáveis de entrada  $x_{t-4}$  e  $y_{t-1}$ . A variável de saída é  $y_t$ . A base de regras utilizada empregou quatro regras dentre as mais frequentes obtidas pelo método de Wang e Mendel. A Tabela 13 apresenta o RMSE médio encontrado no teste para as 20 simulações realizadas para cada tratamento.

Tabela 13 – RMSE médio para a série BJ

Fatores	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
	3	4	5
Tipo 1	0,55121055	<b>0,545015217</b>	0,566162212
Tipo 2	0,667574999	0,660903773	0,660531142
Método proposto	0,554826158	0,553124682	0,596892397

Fonte: Elaborada pela autora

A Tabela 13 mostra que se obtêm as melhores médias por funções tipo 1 e pelas funções obtidas pelo método proposto. Especificamente, obteve-se a melhor média por funções tipo 1 com quatro conjuntos por variável.

A Tabela 14 apresenta a análise estatística para o RMSE médio. Observa-se que, considerando o método empregado, as médias são

significativamente diferentes ( $p_{\text{valor}}=0,0001$ ). Ao variar o total de conjuntos *fuzzy* empregados, dado que o nível de significância é de 5%, as médias também são consideradas diferentes, com o melhor desempenho alcançado na utilização de quatro conjuntos. Por outro lado, não houve interação significativa entre o tipo de função de pertinência e o total de conjuntos *fuzzy*.

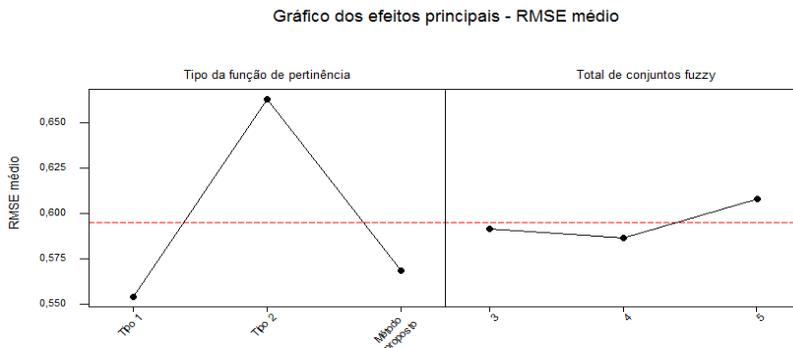
Tabela 14 – BJ – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio

Fatores	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Pvalor	Decisão estatística ( $\alpha=0,05$ )
Tipo 1	0,5541	0,04433	0,50056	0,79906	0,0001	$H_1$ (médias diferentes)
Tipo 2	0,663	0,0617	0,50659	0,81597		
Método proposto	0,5683	0,039	0,49639	0,65435		
3 conjuntos	0,5912	0,06816	0,50633	0,7774	0,041	$H_1$ (médias diferentes)
4 conjuntos	0,5863	0,07069	0,49639	0,76088		
5 conjuntos	0,6079	0,06722	0,50056	0,81597		
Interação entre funções e total de conjuntos	0,59514	0,06894	0,49639	0,81597	0,186	$H_0$ (não há interação)

Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 43 apresenta os efeitos principais dos fatores no RMSE médio das simulações. Observa-se que o método proposto e a abordagem tipo 1 obtêm os melhores resultados, assim como a utilização de quatro conjuntos *fuzzy*.

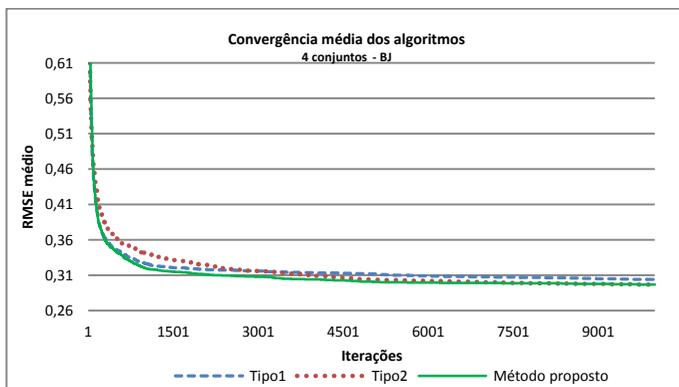
Figura 43 – BJ – Efeitos principais dos fatores



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 44 mostra a convergência dos algoritmos no treinamento para a série temporal Box-Jenkins. Observa-se que no treino a proposta e o AG que otimizam funções tipo 2 conseguem obter resultados mais ajustados. No entanto, no teste os melhores resultados médios foram obtidos por funções tipo 1.

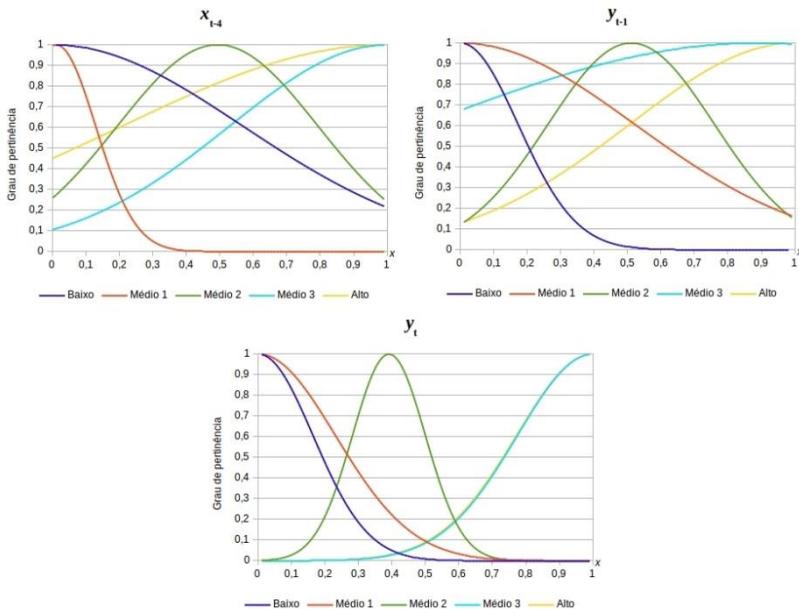
Figura 44 – BJ – Convergência média dos algoritmos



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 45 mostra as funções de pertinência obtidas na otimização de funções tipo 1, considerando cinco conjuntos por variável. Estas funções referem-se à melhor solução encontrada no conjunto de soluções para este arranjo. Observa-se que a variável  $y_t$  possui dois conjuntos muito similares (médio3 e alto) que se sobrepõem.

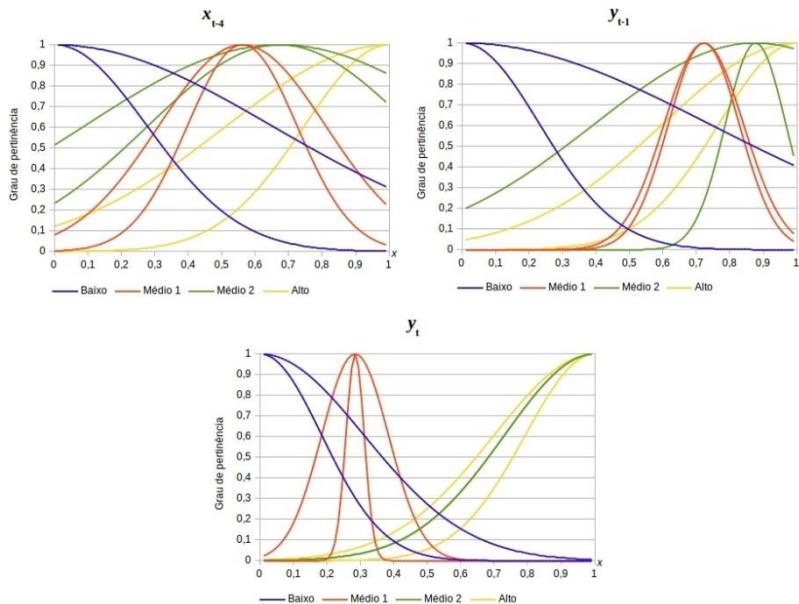
Figura 45 – BJ – Funções de pertinência tipo 1, cinco conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 46 mostra exemplos de funções tipo 2 resultantes para a previsão da série temporal Box-Jenkins. No exemplo apresentado, as variáveis são formadas por quatro conjuntos.

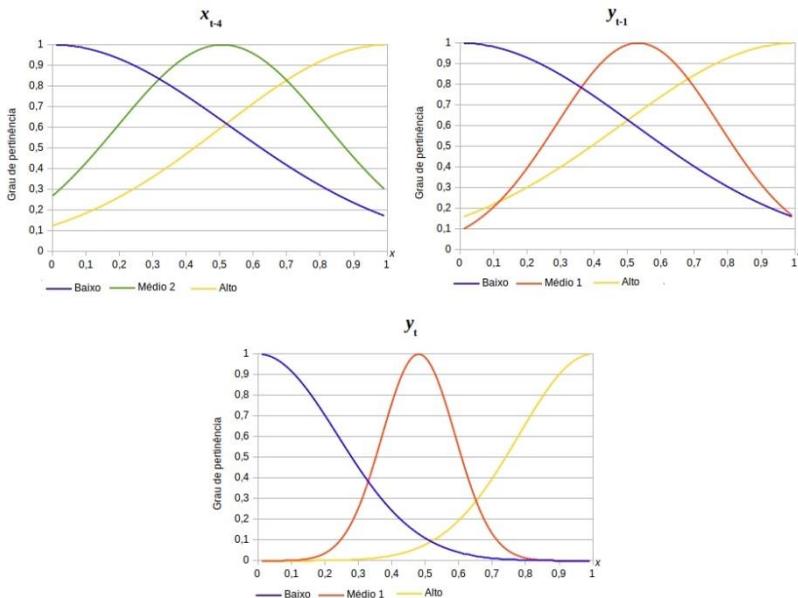
Figura 46 – BJ – Funções de pertinência tipo 2, quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 47 mostra funções de pertinência obtidas pelo método proposto. Nesse exemplo, o total máximo de conjuntos é quatro. Observa-se, no entanto, que todas as variáveis resultaram em três conjuntos *fuzzy* por variável. Além disso, todos os conjuntos são tipo 1.

Figura 47 – BJ – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

Apresentam-se os tempos de simulação dos algoritmos para a série temporal Box-Jenkins na Tabela 15. Por ser uma série com um conjunto de dados reduzidos, os tempos de simulação são menores em relação às demais séries temporais analisadas.

Tabela 15 – BJ – Tempo médio de execução dos algoritmos, em segundos

Fatores	Total de conjuntos		
	3	4	5
<b>Tipo da Função</b>			
<b>Tipo 1</b>	81	84	86
<b>Tipo 2</b>	471	493	484
<b>Método proposto</b>	113	184	314

Fonte: Elaborada pela autora

### 5.3 SÉRIE TEMPORAL DOW JONES

A previsão da série temporal Dow Jones (DJI) também considerou as seguintes variáveis de entrada:  $x_{t-18}$ ,  $x_{t-12}$ ,  $x_{t-6}$ ,  $x_t$ . A variável de saída é  $x_{t+6}$ . Compôs-se a base de regras por seis regras mais frequentes. Utilizaram-se 1.500 dados para treino e 1.500 para teste. A Tabela 16 apresenta os erros médios encontrados no teste para cada tratamento (combinação dos fatores) na previsão da série temporal.

Tabela 16 – DJI – Erro médio para a série temporal Dow Jones

Fatores	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
Função	3	4	5
Tipo 1	0,027726969	0,026790715	0,027194923
Tipo 2	0,026661508	<b>0,02636366</b>	0,026970092
Método proposto	<b>0,02631035</b>	0,026419176	<b>0,026449815</b>

Fonte: Elaborada pela autora

Observando exclusivamente o erro resultante das simulações, nota-se que as funções da proposta e as tipo 2 apresentaram menor erro médio, assim como a utilização de quatro conjuntos apresentou melhores resultados. Em uma análise mais detalhada, a Tabela 17 apresenta o resultado do teste estatístico para o RMSE médio de previsão da série temporal Dow Jones, considerando os fatores separadamente, assim como a existência de interação.

Tabela 17 – DJI – Análise estatística (ANOVA) para o RMSE médio

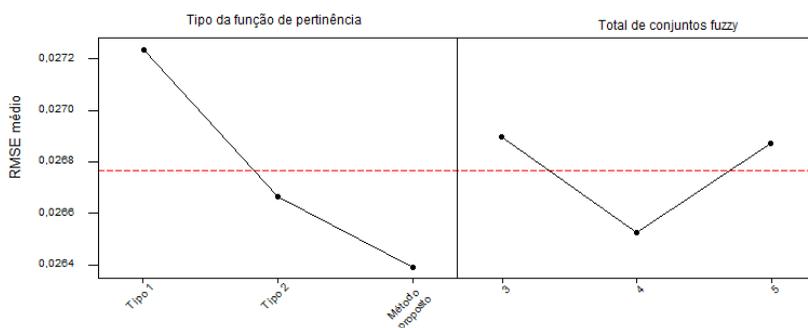
Fatores	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Pvalor	Decisão estatística ( $\alpha=0,05$ )
Tipo 1	0,02724	0,00242	0,02541	0,04078	0,013	H <sub>1</sub> (médias diferentes)
Tipo 2	0,02667	0,00075	0,02553	0,02996		
Método proposto	0,02639	0,00104	0,02518	0,03114		
3 conjuntos	0,0269	0,00218	0,0254	0,04078	0,355	H <sub>0</sub> (médias semelhantes)
4 conjuntos	0,02652	0,00076	0,02543	0,02925		
5 conjuntos	0,02687	0,00157	0,02518	0,03412		
Interação entre funções e total de conjuntos	0,02677	0,00161	0,02518	0,04078	0,564	H <sub>0</sub> (não há interação)

Fonte: Elaborada pela autora

A análise estatística mostra que o número de conjuntos não influencia significativamente nos erros médios obtidos, embora a utilização de quatro conjuntos tenha apresentado os melhores resultados. Por sua vez, o tipo de função de pertinência apresenta diferença significativa. Os resultados médios obtidos por funções tipo 2 e por funções da proposta são melhores que os obtidos por funções tipo 1. Pode-se visualizar essas constatações na Figura 48, que apresenta o gráfico de efeitos principais no RMSE médio.

Figura 48 – DJI – Efeitos principais dos fatores

Gráfico dos efeitos principais - RMSE médio



Fonte: Elaborada pela autora

Observando a Figura 48 é possível notar que, considerando a média de todas as simulações realizadas, o método proposto apresentou o melhor resultado médio.

Em relação ao tempo de simulação, apresentado na Tabela 18, este foi maior que o despendido para as outras séries, por ter mais pontos de treinamento e teste. A proposta mostrou tempo menor de execução em relação às funções tipo 2. Considerando o uso de três conjuntos, o método proposto e a abordagem de funções tipo 2 apresentaram resultado similar.

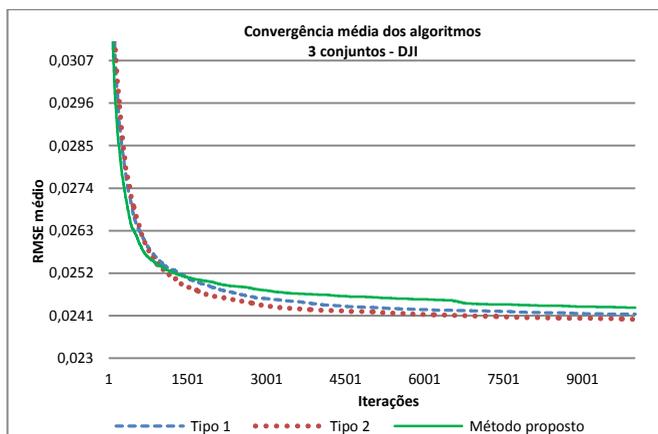
Tabela 18 – DJI – Tempo médio de simulação, em segundos

Fatores	Total de conjuntos <i>fuzzy</i>		
	3	4	5
Tipo da Função			
Tipo 1	1746	1797	1752
Tipo 2	7285	7284	7285
Método proposto	7265	6112	5708

Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 49 apresenta a convergência média dos algoritmos quando da utilização de três conjuntos por variável. Observa-se que a convergência dos algoritmos das funções tipo 2 foi melhor no treino.

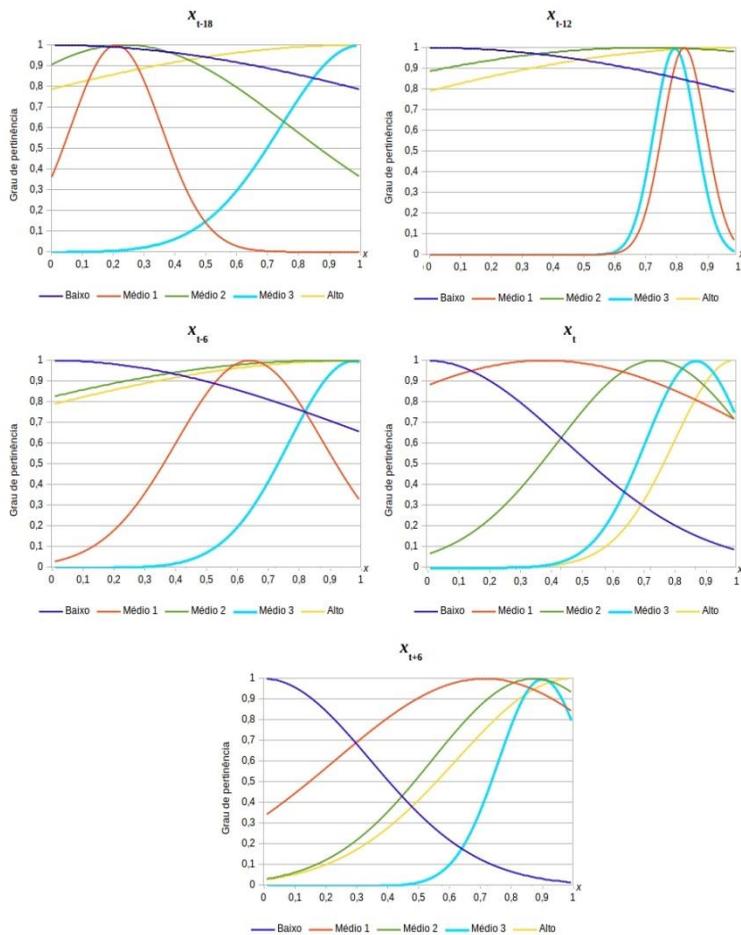
Figura 49 – DJI – Convergência média dos algoritmos



Fonte: Elaborada pela autora

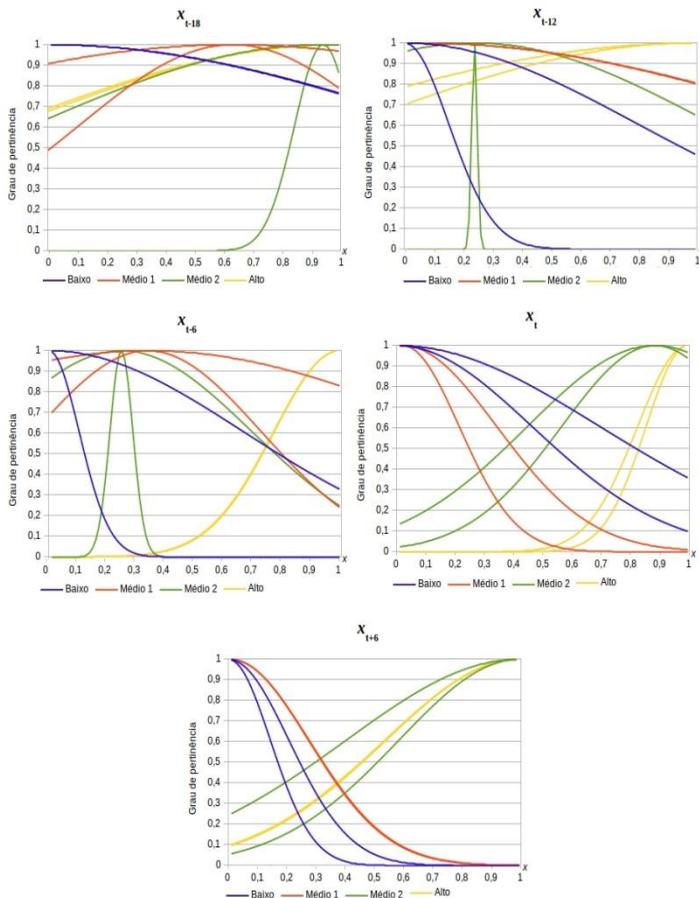
A Figura 50 mostra funções de pertinência tipo 1 obtidas para a série Dow Jones, para um caso em que se utilizaram cinco conjuntos por variável. A Figura 51 apresenta as funções tipo 2 utilizando quatro conjuntos por variável. Em ambos os casos, são apresentadas funções das melhores soluções obtidas nas combinações mencionadas (de tipo de função e total de conjuntos).

Figura 50 – DJI – Funções de pertinência tipo 1, cinco conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

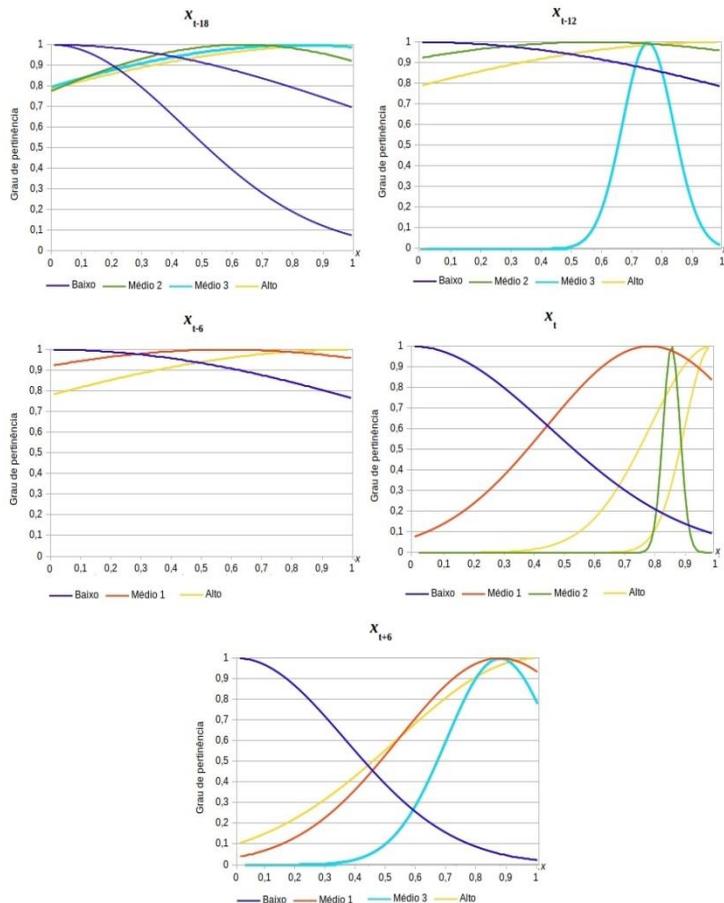
Figura 51 – DJI – Funções de pertinência tipo2, quatro conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 52 exibe exemplos de funções de pertinência obtidas pelo método proposto com, no máximo, cinco conjuntos por variável. As variáveis  $x_{t-18}$  e  $x_t$  resultaram com quatro conjuntos *fuzzy*, sendo um deles tipo 2. A variável  $x_{t-6}$  resultou com três conjuntos tipo 1 e as demais variáveis com quatro conjuntos tipo 1.

Figura 52 – DJI – Funções de pertinência obtidas pelo método proposto, máximo cinco conjuntos *fuzzy* por variável



Fonte: Elaborada pela autora

## 5.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Observando-se os resultados obtidos para a série temporal Mackey-Glass e o emprego de quatro conjuntos por variável, nota-se que as funções tipo 2 e as funções obtidas pela proposta alcançaram os melhores resultados. Em relação ao emprego de três conjuntos, embora o método proposto tenha sido estatisticamente semelhante, o desempenho levemente inferior pode ser explicado pela possibilidade de

redução de conjuntos, que pode levar a um número insuficiente de conjuntos *fuzzy* para a representação da variável. Considerando a utilização de cinco conjuntos *fuzzy* por variável, o desempenho ruim do sistema tipo 2 pode ser justificado pelo número reduzido da base de regras. É importante ressaltar que a análise estatística sugere que, considerando o tipo de função empregada, as médias são semelhantes. Contudo, o erro quadrático médio obtido pelo método proposto é o menor, considerando todos os experimentos realizados. O tempo de simulação do método proposto é maior que a otimização de funções tipo 1, porque à medida que aumenta o número de conjuntos 2, é necessário aplicar a redução de tipo na inferência.

A série temporal Box-Jenkins se mostrou um problema adequado à aplicação de funções tipo 1. Isto inclusive foi refletido pelo método proposto, cuja melhor solução obtida é composta por funções de tipo 1, exclusivamente. Pelo fato de o método proposto promover as funções tipo 2, o resultado no teste foi levemente maior que a abordagem tipo 1. No entanto, mesmo com esse fato, os resultados não são significativamente diferentes entre a abordagem puramente tipo 1 e o método proposto. Cabe ressaltar que a série BJ possui menos dados de treinamento e teste em relação às outras séries avaliadas. Tal fato também contribui para um aprendizado mais difícil quando se tem muitos parâmetros para ajustar.

Em relação à série Dow Jones, a análise estatística sugere que as médias são diferentes para o tipo de função empregada. Nesse caso, houve uma indicação mais clara de funções tipo 2 ou funções obtidas pelo método proposto. Ou seja, mesmo nesse caso em que a indicação seria de funções tipo 2 utilizando quatro conjuntos (0,02636), os resultados obtidos pela proposta são muito semelhantes (0,02641). Embora se notasse que o valor obtido no treino foi melhor para as funções tipo 1 e tipo 2, a proposta foi mais adequada no teste. Nesse caso, a proposta mostrou capacidade de lidar com incerteza no longo prazo (uma vez que os dados de teste representam 1.500 dias).

Para todos os casos que se analisaram, os resultados obtidos pelo modelo proposto se assemelham ou apresentam os melhores resultados. Considera-se esse fato animador, pois ao modelar um sistema *fuzzy*, não seria necessário se preocupar com o tipo de função de pertinência. Isso é alcançado pela característica da proposta, que é de evoluir as funções tipo 1 para funções tipo 2 (promovendo a utilização de funções tipo 2) ou removendo funções tipo 1 muito similares (o que mantém a representação por funções tipo 1). Ou seja, para cada ponto das séries

temporais o método encontra funções de pertinência dinamicamente e estas podem ser somente do tipo 1, somente do tipo 2 ou híbrido (tipo 1 e tipo 2).

Em relação ao custo, embora a utilização da proposta revele tempo computacional maior que o da utilização de funções tipo 1, o custo da proposta ainda é menor do que o emprego de funções tipo 2. Dessa forma, apresenta um resultado intermediário dentre as duas abordagens.

Em relação à interpretabilidade, cabe salientar que não houve propósito, neste momento, de melhorar a semântica das funções, além da questão da normalidade e da consistência das regras. Já em relação à complexidade, considerando todos os experimentos realizados, em aproximadamente 95% dos casos ao menos uma variável da solução sofreu redução do total de conjuntos. Isto significa que a proposta representa também uma alternativa apropriada para o ajuste do total de conjuntos por variável.

## 5.5 COMPARAÇÕES COM ABORDAGENS DA LITERATURA

Embora sem acesso aos algoritmos e dados tratados por outros autores, apresentam-se considerações em relação a trabalhos que abordam as séries temporais avaliadas nesta tese.

Para a série Mackey-Glass, utilizou-se as mesmas variáveis e estratégias de treinamento e teste que as utilizadas por Almaraashi(2012). Desta forma, a Tabela 19 mostra os resultados obtidos pela abordagem híbrida proposta usando AG, bem como por Almaraashi (2012), que faz uso do *Simulated Annealing* para otimizar as funções de pertinência.

Tabela 19 – Série MG – Resultados obtidos (RMSE médio) pelo método proposto e por Almaraashi (2012)

Método	Sem ruído	SNR=20dB
SA - Almaraashi(2012) - Funções Tipo 1	0,0070	0,1590
SA - Almaraashi(2012) – Funções Tipo 2	<b>0,0039</b>	0,1558
<b>AG – Método híbrido proposto</b>	0,0207	<b>0,0406</b>

Fonte: Elaborada pela autora

Na Tabela 19, os resultados apresentados para o método proposto são os obtidos pelo emprego de quatro conjuntos *fuzzy* por variável.

Observa-se que para a série ruidosa (SNR=20dB) os resultados são melhores quando comparados aos de Almarashi(2012). Por sua vez, o SA obteve melhores resultados para a série sem ruídos.

Em relação à série BJ, a Tabela 20 mostra comparações com os trabalhos de Riid e Rüstern (2010), que apresentam um método heurístico para a identificação do modelo *fuzzy*. Embora o erro médio seja menor, o método heurístico emprega um maior número de regras. O método proposto apresenta maior interpretabilidade devido ao número reduzido de regras.

Tabela 20 – Série BJ – Resultados obtidos pelo método híbrido proposto e pelo método heurístico de Riid e Rüstern (2010)

<b>Método</b>	<b>RMSE médio</b>	<b>Total de regras</b>
Riid e Rüstern (2010) – Funções Tipo1	0,4098	14
Método híbrido proposto	0,5531	4

Fonte: Elaborada pela autora

A série Dow Jones foi abordada na pesquisa de Soto, Melin e Castillo (2014). Nessa pesquisa foi empregado um comitê de aprendizado de redes neurais *fuzzy*. As saídas do comitê foram processadas por um sistema *fuzzy* tipo 2 intervalar. Os autores utilizaram 800 pontos para treino e teste, diferentemente desta tese, em que foram utilizados 3000 pontos. Além disso, não ficou compreensível, pelo artigo dos autores, se os pontos utilizados por eles foram manipulados na ordem cronológica (uma vez que ao gerar o gráfico da série temporal, o resultado obtido foi inverso ao apresentado no artigo). De qualquer modo, o RMSE médio obtido pelos autores foi 0,024403, enquanto o RMSE médio do método híbrido proposto foi 0,02631.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese apresenta a proposta de um método para geração de funções de pertinência estabelecido por otimização. Estudaram-se inicialmente duas abordagens de otimização: Algoritmos Genéticos e *Simulated Annealing*. Além dessas abordagens, analisaram-se os impactos de duas fontes de incerteza: nas regras e nos dados. Notou-se que a incerteza nas regras impactou nos resultados dos sistemas; porém, em relação ao tipo de função de pertinência, não houve diferenças significativas nos resultados. A incerteza nos dados (testada para dados de entrada com e sem ruído) também não apresentou diferenças estatisticamente significativas em relação às funções de pertinência. Entre os algoritmos de otimização analisados, notou-se que diante de maior incerteza o AG apresentou melhores resultados em relação ao SA. Essa característica foi importante para que os esforços fossem direcionados para a utilização do Algoritmo Genético na proposta de um método para geração de funções de pertinência.

A proposta elaborada apresenta um Algoritmo Genético modificado para incorporar em seu processo de mutação a ideia de evolução de funções de pertinência tipo 1. Essa evolução leva em consideração a medida de similaridade entre conjuntos tipo 1 e pode ocorrer de duas formas: pela transformação de duas funções tipo 1 para uma tipo 2 ou pela eliminação de funções tipo 1 muito semelhantes. A proposta apresentada permite que cada variável do problema tenha funções tipo 1 e funções tipo 2 simultaneamente. Além disso, permite que o total de conjuntos *fuzzy* de cada variável seja alterado. A diminuição do total de conjuntos contribui para a interpretabilidade do sistema, pois diminui a complexidade do modelo. No entanto, em termos semânticos, não foram implementados controles por se considerar que, nesse momento, seria adequado minimizar o erro médio quadrático.

Realizou-se a avaliação dessa proposta em previsão de séries temporais. Para fins de comparação, implementou-se a otimização de funções tipo 1, tipo 2 e das funções resultantes do método proposto (que podem ser tipo 1 e tipo 2). As séries temporais empregadas foram a Mackey-Glass, Box-Jenkins e Dow Jones. Realizou-se uma diversos experimentos para que então se elaborasse a análise estatística dos resultados.

A avaliação realizada considerou promissor o método proposto, pois os resultados alcançados são semelhantes aos melhores resultados

das abordagens puramente tipo 1 ou puramente tipo 2. Isso significa que o método atendeu às expectativas nos testes realizados, pois poderia substituir as abordagens comparadas. Dessa forma, relacionam-se as vantagens do método proposto:

- Melhora a característica de interpretabilidade em termos de complexidade, pois permite diminuir o total de conjuntos e, conseqüentemente, o total de regras.
- O tempo computacional é menor em comparação à abordagem puramente tipo 2.
- Permite a diversidade do total de conjuntos por variável, característica pouco comum em outros métodos (que fixam o total de conjuntos).
- O fato de não ser necessário determinar o tipo de função de pertinência *a priori* pode ser considerado uma vantagem importante. O método fornece o tipo de função de pertinência mais ajustado, por variável, podendo ser somente tipo 1, somente tipo 2 ou híbrido. Esta característica é importante, pois, em face de um determinado problema, não seria necessário julgar o nível de incerteza (que é subjetivo) e conseqüentemente o tipo de função de pertinência adequado para a modelagem.
- A complexidade é menor quando se realiza a geração de funções de pertinência tipo 2 por funções tipo 1, pois são necessários menos parâmetros.

Por outro lado, as limitações atuais do método são:

- a necessidade de determinar a taxa de evolução das funções de pertinência;
- a indicação do máximo de funções de pertinência por variável do problema;
- a utilização de funções de pertinência gaussianas;
- o domínio de aplicação, que atualmente se restringe à previsão de séries temporais.

Como trabalhos futuros, sugere-se explorar outros domínios de aplicação como, por exemplo, problemas de classificação. Além disso, a seleção das regras poderia ser realizada por um processo genético. Isso porque a utilização de regras diferentes das empregadas neste trabalho poderia contribuir com um conhecimento importante para alcançar

resultados fora da média. Ademais, poder-se-á explorar a análise de outras medidas de similaridade e de outros modos de executar a junção das funções de pertinência.



## REFERÊNCIAS

ABD, K.; ABHARY, K.; MARIAN, R. Development of a fuzzy-simulation model of scheduling robotic flexible assembly cells. **Journal of Computer Science**, n. 9, p. 1761-1768, 2013.

ALADI, J. H.; WAGNER, C.; GARIBALDI, J. M. Type-1 or interval type-2 fuzzy logic systems: on the relationship of the amount of uncertainty and FOU size. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2014, Beijing. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p. 2360-2367.

ALADI, J. H.; WAGNER, C.; GARIBALDI, J. M. A simplified method of FOU design utilizing Simulated Annealing. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS (SMC), 2015, Kowloon. **Proceedings...** New York: IEEE, 2015. p. 2255-2261. 2015

ALMARAASHI, M. **Learning of type-2 fuzzy logic systems using Simulated Annealing**. 2012. Thesis (Doctor of Philosophy in Artificial Intelligence) – De Montfort University, Leicester, 2012.

AL-SAKKA, H.; BOUMAHMOUD, A.-A.; FRADON, B.; FRASIER, S. J.; TABARY, P. A new fuzzy logic hydrometeor classification scheme applied to the french X-, C-, and S-band polarimetric radars. **Journal of Applied Meteorology and Climatology**, v. 52, p. 2328-2344, 2013.

AMINDOUST, A.; AHMED, S.; SAGHAFINIA, A.; BAHREININEJAD, A. Sustainable supplier selection: a ranking model based on fuzzy inference system. **Applied Soft Computing**, v. 12, n. 6, p. 1668-1677, 2012.

BACCOUR, L.; ALIM, A. M.; JOHN, R. I. Some notes on fuzzy similarity measures and application to classification of shapes, recognition of arabic sentences and mosaic. **IAENG International Journal of Computer Science**, v. 41, n. 2, p. 81-90, 2014.

BERNARDO, D.; HAGRAS, H.; TSANG, E. A genetic type-2 fuzzy logic based system for the generation of summarised linguistic

predictive models for financial applications. **Soft Computing**, v. 17, n. 12, p. 2185-2201, 2013.

BOMBARDIER, V.; SCHMITT, E. Fuzzy rule classifier: capability for generalization in wood color recognition. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 23, n. 6, p. 978-988, set. 2010.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time series analysis**: forecasting and control. 2. ed. San Francisco: Holden-Day, 1976.

CASTELLANO, G.; FANELLI, A. M.; MENCAR, C. Design of transparent Mamdani fuzzy inference systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON HYBRID INTELLIGENT SYSTEMS (HIS), 3., 2003, Melbourne. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013, p. 468-477.

CASTILLO, O.; MELIN, P. A review on the design and optimization of interval type-2 fuzzy controllers. **Applied Soft Computing**, v. 12, n. 4, p. 1267-1278, 2012.

CASTILLO, O.; LIZÁRRAGA, E.; SORIA, J.; MELIN, P.; VALDEZ, F. New approach using ant colony optimization with ant set partition for fuzzy control design applied to the ball and beam system. **Information Sciences**, v. 294, p. 203-215, 2015.

CASTRO, J. R.; CASTILLO, O.; MARTÍNEZ, L. G. Interval type-2 fuzzy logic toolbox. **Engineering Letters**, v. 15, n. 1, p. 89-98, 2007.

CERVANTES, L.; CASTILLO, O. Statistical comparison of type-1 and type-2 fuzzy systems design with genetic algorithms in the case of three tank water control. In: JOINT IFSA WORLD CONGRESS AND NAFIPS ANNUAL MEETING (IFSA/NAFIPS), 2013, Edmonton. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013. p. 1056-1061.

CERVANTES, L.; CASTILLO, O. Type-2 fuzzy logic aggregation of multiple fuzzy controllers for airplane flight control. **Information Sciences**, v. 324, p. 247-256, dez. 2015. ISSN 0020-0255.

CHAOU, H.; GUEAIEB, W.; BIGLARBEKIAN, M.; YAGOUB, M. C. E. Computationally efficient adaptive type-2 fuzzy control of flexible-joint manipulators. **Robotics**, v. 2, n. 2, p. 66-91, 2013.

CHEN, L.; CHEN, C. L. P. Pre-shaped fuzzy c-means algorithm (PFCM) for transparent membership function generation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS, 2007, Montreal. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p. 789-794.

CHOI, B.; RHEE, F. C-H. Interval type-2 fuzzy membership function generation methods for pattern recognition. **Information Sciences**, v. 179, n. 13, p. 2102-2122, jun. 2009. ISSN 0020-0255.

CHRYSAFIADI, K.; VIRVOU, M. Evaluating the integration of fuzzy logic into the student model of a web-based learning environment. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 18, p. 13127-13134, 2012.

CINTRA, M. E.; CAMARGO, H. A.; MONARD, M. C. A study on techniques for the automatic generation of membership functions for pattern recognition. In: C3N - CONGRESS OF THE TRINATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, 2008, Foz do Iguacu. **Proceedings...** Foz do Iguacu: C3N, 2008. p. 1-10, v. 1.

CINTRA, M. E.; CAMARGO, H. A.; MARTIN, T. P. Optimising the fuzzy granulation of attribute domains. In: INTERNATIONAL FUZZY SYSTEMS ASSOCIATION WORLD CONFERENCE - IFSA, 2009, Lisbon. **Proceedings...** IFSA, 2009. p. 742-747.

CINTRA, M. E.; MONARD, M. C.; CHERMAN, E. A.; CAMARGO, H. A. On the estimation of the number of fuzzy sets for fuzzy rule-based classification systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON HYBRID INTELLIGENT SYSTEMS (HIS), 11., 2011, Melacca. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011, p. 211-216.

CINTRA, M. E. **Genetic generation of fuzzy knowledge bases: new perspectives.** 2012. Tese (Doutorado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) – ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies. In: EUROPEAN CONFERENCE ON ARTIFICIAL LIFE, 1., 1991, Paris. **Proceedings...** Amsterdam: Elsevier, 1991. p. 134-142, 199.

DAS, S. Pattern recognition using the fuzzy c-means technique. **International Journal of Energy, Information and Communications**, v. 4, n. 1, p. 1-14, 2013.

DERELI, T.; BAYKASOGLU, A.; ALTUN, K.; DURMUSOGLU, A.; TÜRKSEN, I. B. Industrial applications of type-2 fuzzy sets and systems: a concise review. **Computers in Industry**, v. 62, n. 2, p. 125-137, fev. 2011. ISSN 0166-3615.

DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B**, v. 26, n. 1, p. 29-41, 1996.

DOW JONES AVERAGES. S&P Dow Jones Indices. Disponível em: <<https://www.djindexes.com/averages/>>. Acesso em: 1 ago. 2016.

FANG, G.; KWOK, N. M.; HA, Q. Automatic fuzzy membership function tuning using the particle swarm optimization. In: IEEE PACIFIC-ASIA WORKSHOP ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE AND INDUSTRIAL APPLICATION, 2008, Wuhan. **Proceedings...** New York: IEEE, 2008. p. 324-328.

FAZZOLARI, M.; ALCALA, R.; NOJIMA, Y.; ISHIBUCHI, H.; HERRERA, F. A Review of the application of multiobjective evolutionary fuzzy systems: current status and further directions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 21, n. 1, p. 45-65, 2013.

FERNÁNDEZ, A.; LÓPEZ, V.; JESUS, M. J.; HERRERA, F. Revisiting evolutionary fuzzy systems: taxonomy, applications, new trends and challenges. **Knowledge-Based Systems**, v. 80, p. 109-121, maio 2015. ISSN 0950-7051.

FRANTTI, T.; MAJANEN, M. An expert system for real-time traffic management in wireless local area networks. **Expert Systems with Applications**, v. 41, n. 10, p. 4996-5008, 2014.

GACTO, M. J.; ALCALÁ, R.; HERRERA, F. Interpretability of linguistic fuzzy rule-based systems: an overview of interpretability measures. **Information Sciences**, v. 181, n. 20, p. 4340-4360, out. 2011. ISSN 0020-0255.

GOOGLE FINANCE. **Historical Prices**. Disponível em: < <https://www.google.com/finance> >. Acesso em: 1 ago. 2016.

GORZALCZANY, M. B.; RUDZIŃSKI, F. Interpretable and accurate medical data classification: a multi-objective genetic-fuzzy optimization approach. **Expert Systems with Applications**, v. 71, p. 26-39, abr. 2017. ISSN 0957-4174.

HAMZA, M. F.; YAP, H. J.; CHOUDHURY, I. A. Recent advances on the use of meta-heuristic optimization algorithms to optimize the type-2 fuzzy logic systems in intelligent control. **Neural Computing and Applications**, p. 1-21, 2015.

HERMAN, N. S.; YUSUF, I.; SHAMSUDDIN, S. M. B. H. Genetic algorithms and designing membership function in fuzzy logic controllers. In: WORLD CONGRESS ON NATURE & BIOLOGICALLY INSPIRED COMPUTING, 2009, Coimbatore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p. 1753-1758.

HIDALGO, D.; MELIN, P.; MENDOZA, O. Optimization method for membership functions of type-2 fuzzy systems based on the level of uncertainty applied to the response integration of modular neural network for multimodal biometrics. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN FUZZY INFORMATION PROCESSING SOCIETY (NAFIPS), 2012, Berkeley. **Proceedings...** New York: IEEE, 2012. p. 1-6.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

HONG, T.-P.; TUNG, Y.-F.; WANG, S.-L.; WU, M.-T.; WU, Y.-L. An ACS-based framework for fuzzy data mining. **Expert Systems with Applications**, v. 36, n. 9, p. 11844-11852, nov. 2009. ISSN 0957-4174.

HUYNH, T.; NGUYEN, H.; LE, B. A unified design for the membership functions in genetic fuzzy systems. **International Journal of Computer Science Issues**, v. 9, n. 3, 2012. ISSN 1694-0814.

JOHN, R.; COUPLAND, S. Type-2 fuzzy logic: a historical view. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, v. 2, n. 1, p. 57-62, fev. 2007.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M.; LIANG, Q. Type-2 fuzzy logic systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 7, p. 643-658, 1999.

KARNIK, N. N.; MENDEL, J. M. Centroid of a type-2 fuzzy set. **Information Sciences**, v. 132, p. 195-220, 2001.

KARNIK N. N.; LIANG, Q.; LIU, F.; WU, D.; JOO, J.; MENDEL, J. M. **Type-2 fuzzy logic software**. 2008. Disponível em: <<http://sipi.usc.edu/~mendel/software>>. Acesso em: 30 out. 2013.  
KARTHIKEYAN, R.; MANICKAVASAGAM, K.; TRIPATHI, S.; MURTHY, K. V. V. Neuro-fuzzy-based control for parallel cascade control. **Chemical Product and Process Modeling**, v. 8, n. 1, p. 1-75, 2013.

KAUR, A; SETHI, P. Evaluation of fuzzy inference system in image processing. **International Journal of Computer Applications**, New York, v. 68, n. 22, p. 1-4, abr. 2013.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, 1995, Perth. **Proceedings...** New York: IEEE, 1995. p. 1942-1948. v. 4.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.; VECCHI, M. Optimization by Simulated Annealing. **Science**, v. 220, p. 671-680, 1983.

KLIR, G.; YUAN, B. **Fuzzy sets and fuzzy logic**: theory and applications. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.

KLIR, G. J. **Uncertainty and information**: foundations of generalized information theory. Hoboken: Wiley, 2006. 499 p. ISBN: 0-471-74867-6.

LAASRI, E. H. A.; AKHOUAYRI, E.-S.; AGLIZ, D.; ZONTA, D.; ATMANI, A. A fuzzy expert system for automatic seismic signal classification. **Expert Systems with Applications**, v. 42, n. 3, p. 1013-1027, 2015.

LEITE, D.; GOMIDE, F.; BALLINI, R.; COSTA, P. Fuzzy granular evolving modeling for time series prediction. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-

IEEE 2011), 2011, Taipei. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p. 2794-2801.

LI Y.; TONG, S.; LI, T. Composite Adaptive Fuzzy Output Feedback Control Design for Uncertain Nonlinear Strict-Feedback Systems With Input Saturation. **IEEE Transactions on Cybernetics**, v. 45, n. 10, p. 2299-2308, 2015.

LIANG, Q.; MENDEL, J. M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 8, n. 5, p. 535-550, out. 2000.

LINDA, O.; MANIC, M. Comparative analysis of type-1 and type-2 fuzzy control in context of learning behaviors for mobile robotics. In: ANNUAL CONFERENCE ON IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 2010, Glendale. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p. 1092-1098.

LINDA, O.; MANIC, M. Uncertainty modeling for interval type-2 fuzzy logic systems based on sensor characteristics. In: IEEE SYMPOSIUM ON ADVANCES IN TYPE-2 FUZZY LOGIC SYSTEMS (T2FUZZ), 2011, Paris. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011. p. 31-37.

LIU, L.-M.; HUDAK, G. B.; BOX, G. E. P.; MULLER, M. E.; TIAO, G. C. **Forecasting and time series analysis using the SCA Statistical System**. Villa Park: Scientific Computing Associates Corp, 1994. 494 p. v. 1.

LIU, X. A survey of continuous Karnik-Mendel algorithms and their generalizations. In: SADEGHIAN, A.; MENDEL, J. M.; TAHAYORI, H. **Advances in Type-2 fuzzy sets and systems: theory and applications**. New York: Springer, 2013. p. 19-31.

MACKEY, M. C.; GLASS, L. Oscillation and chaos in physiological control systems. **Science**, v. 197, p. 287-289, 1977.

MALDONADO, Y.; CASTILLO, O. Genetic design of an interval type-2 fuzzy controller for velocity regulation in a DC motor. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 9, n. 5, nov. 2012.

MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. **International Journal of Man-Machine Studies**, v. 7, n. 1, p. 1-13, 1975.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. **IEEE Transactions on Computers**, v. 26, n. 12, p. 1182-1191, dez. 1977.

MARTÍNEZ-SOTO, R.; CASTILLO, O.; AGUILAR, L. T. Type-1 and Type-2 fuzzy logic controller design using a Hybrid PSO–GA optimization method. **Information Sciences**, v. 285, p. 35-49, nov. 2014. ISSN 0020-0255.

MARTÍNEZ-SOTO, R.; CASTILLO, O.; AGUILAR, L. T.; DÍAZ, A. R. A hybrid optimization method with PSO and GA to automatically design Type-1 and Type-2 fuzzy logic controllers. **International Journal of Machine Learning and Cybernetics**, v. 6, n. 2, p. 175-196, 2015.

MCCULLOCH, J.; WAGNER, C.; AICKELIN, U. Analysing fuzzy sets through combining measures of similarity and distance. In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014, Beijing. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p. 155-162.

MEDASANI, S.; KIM, J.; KRISHNAPURAM, R. An overview of membership function generation techniques for pattern recognition. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 19, n. 3-4, p. 391-417, out./nov. 1998. ISSN 0888-613X.

MELIN, P. Image processing and pattern recognition with Mamdani interval type-2 fuzzy inference systems. In: TRILLAS, E.; BONISSONE, P. P.; MAGDALENA, L.; KACPRZYK, J. **Combining experimentation and theory: a homage to Abe Mamdani**. Berlin: Springer-Verlag, 2012. p. 179-190. v. 271.

MELIN, P.; CASTILLO, O. A review on type-2 fuzzy logic applications in clustering, classification and pattern recognition. **Applied Soft Computing**, v. 21, p. 568-577, 2014.

MENDEL, J. M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems. **Information Sciences**, v. 177, p. 84-110, 2007a.

MENDEL, J. M. A quantitative comparison of interval type-2 and type-1 fuzzy logic systems: first results. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2010, Barcelona. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p. 1-8.

MENDEL, J. M. Computing with words and its relationships with fuzzistics. **Information Sciences**, v. 177, n. 4, p. 988-1006, fev. 2007b. ISSN 0020-0255.

MENDEL, J. M. **Fuzzy sets for words**: why type-2 fuzzy sets should be used and how they can be used. IEEE-FUZZ. Tutorial. 2004. Disponível em: <<http://ewh.ieee.org/cmtc/cis/mtsc/ieeecis/Mendel.pdf>>. Acesso em: 10 set. 2013.

MENDEL, J. M. General Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple: a tutorial. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 22, n. 5, p. 1162-1182, out. 2014.

MENDEL, J. M. On answering the question ‘Where do I start in order to solve a new problem involving type-2 fuzzy sets?’. **Information Sciences**, v. 179, n. 19, p. 3418-3431, 2009.

MENDEL, J. M. Type-2 fuzzy sets: some questions and answers. **IEEE coNNectionS**: newsletter of the IEEE Neural Networks Society, v. 1, p. 10-13, 2003.

MENDEL, J. M. Type-2 Fuzzy Sets and Systems: a retrospective. **Informatik-Spektrum**, v. 38, n. 6, p. 523-532, 2015.

MENDEL, J. M.; JOHN, R. I. B. Type-2 fuzzy sets made simple. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 10, n. 2, p. 117-127, abr. 2002.

MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 14, n. 6, p. 808-821, dez. 2006.

MITCHELL, H. B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets. **Information Sciences**, v. 170, n. 2-4, p. 409-418, 2005.

- NIERADKA, G.; BUTKIEWICZ, B. A method for automatic membership function estimation based on fuzzy measures. In: INTERNATIONAL FUZZY SYSTEMS ASSOCIATION WORLD CONGRESS (IFSA), 2007, Cancun. **Proceedings... IFSA, 2007**. p. 451-460. v. 4529.
- ONIEVA, E.; MILANÉS, V.; VILLAGRÁ, J.; PÉREZ, J.; GODOY, J. Genetic optimization of a vehicle fuzzy decision system for intersections. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 18, p. 13148-13157, 2012.
- PAPPIS, C. P.; KARACAPILIDIS, N. I. A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 56, n. 2, p. 171-174, 1993. ISSN 0165-0114.
- PERMANA, K. E.; HASHIM, S. Z. M. Fuzzy membership function generation using particle swarm optimization. **International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics**, v. 3, n. 1, p. 27-41, 2010.
- RIID, A. **Transparent fuzzy systems: modelling and control**. 2002. Tese (Ph.D. em Engenharia) – Tallinn Technical University, Estonia, 2002.
- RIID, A.; RÜSTERN, E. A method for heuristic fuzzy modeling in noisy environment. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE INTELLIGENT SYSTEMS, 5., 2010, London. **Proceedings...** New York: IEEE, 2010. p. 468-473.
- ROSS, T. J. **Fuzzy logic with engineering applications**. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
- RUTENBAR, R.A. Simulated Annealing algorithms: an overview. **IEEE Circuits and Devices Magazine**, v. 5, n. 1, p.19-26, jan. 1989.
- SALA, A.; GUERRA, T. M.; BABUŠKA, R. Perspectives of fuzzy systems and control. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 156, n. 3, p. 432-444, dez. 2005. ISSN 0165-0114.

S&P DOW JONES INDICES. Disponível em:  
 <<http://us.spindices.com/index-family/us-equity/dj-averages>>. Acesso em: 1 ago. 2016.

SEPÚLVEDA, R.; MONTIEL, O.; CASTILLO, O.; MELIN, P. Embedding a high speed interval type-2 fuzzy controller for a real plant into an FPGA. **Applied Soft Computing**, v. 12, n. 3, p. 988-998, mar. 2012. ISSN 1568-4946.

SIVANANDAM, S. N.; SUMATHI, S.; DEEPA, S. N. **Introduction to fuzzy logic using MATLAB**. New York: Springer, 2007.

SÖRENSEN, K.; GLOVER, F. Metaheuristics. In: GASS, S.; FU, M. **Encyclopedia of operations research and management science**. 3. ed. London: Springer, 2013.

SOTO, J.; MELIN, P.; CASTILLO, O. Optimization of the type-1 and interval type-2 fuzzy integrators in Ensembles of ANFIS models for prediction of the Dow Jones time series. In: IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE AND DATA MINING (CIDM), 2014, Orlando. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p. 186-193.

STARKEY, A.; HAGRAS, H.; SHAKYA, S.; OWUSU, G. A multi-objective genetic type-2 fuzzy logic based system for mobile field workforce area optimization. **Information Sciences**, v. 329, p. 390-411, fev. 2016. ISSN 0020-0255.

SUN, Z.; WANG, N.; BI, Y. Type-1/type-2 fuzzy logic systems optimization with RNA genetic algorithm for double inverted pendulum. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, n. 1, p. 70-85, jan. 2015. ISSN 0307-904X.

TAHAYORI, H.; LIVI, L.; SADEGHIAN, A.; RIZZI, A. Interval Type-2 fuzzy set reconstruction based on fuzzy information-theoretic Kernels. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 23, n. 4, p. 1014-1029, ago. 2015.

TURKSEN, I. B.; CELIKYILMAZ, A. Information extraction from text -dealing with imprecise data. In: AZAR, A. T. **Fuzzy systems**. Rijeka: InTech, 2010. ISBN: 978-953-7619-92-3.

WAGNER, C. Juzzy: a Java based toolkit for type-2 fuzzy logic. In: IEEE SYMPOSIUM ON ADVANCES IN TYPE-2 FUZZY LOGIC SYSTEMS (T2FUZZ), 2013, Singapore. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013. p. 45-52.

WAGNER, C.; POURABDOLLAH, A.; MCCULLOCH, J.; JOHN, R.; GARIBALDI, J. M. A similarity-based inference engine for non-singleton fuzzy logic systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2016, Vancouver. **Proceedings...** New York: IEEE, 2016. p. 316-323.

WANG, D.-G.; MENG, Y.-P.; LI, H.-X. A fuzzy similarity inference method for fuzzy reasoning. **Computers and mathematics with applications**, v. 56, p. 2445-2454, 2008.

WANG, L.-X.; MENDEL, J. M. Generating fuzzy rules by learning from examples. **IEEE Transactions on systems, man and cybernetics**, v. 22, n. 6, p. 1414-1427, 1992.

WANG, L.-X. **A course in fuzzy systems and control**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.

WANG, L.-X. The WM method completed: a flexible fuzzy system approach to data mining. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 11, p. 768-782, 2003.

WU, D.; MENDEL, J. M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets. **Information Sciences**, v. 177, n. 23, p. 5378-5393, 2007.

WU, D.; MENDEL, J. M. A comparative study of ranking methods, similarity measures and uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets. **Information Sciences**, v. 179, n. 8, p. 1169-1192, mar. 2009. ISSN 0020-0255.

WU, D.; MENDEL, J. M. Designing practical interval type-2 fuzzy logic systems made simple. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2014, Beijing. **Proceedings...** New York: IEEE, 2014. p. 800-807.

WU, M.-T.; HONG, T.-P.; LEE, C.-N. A continuous ant colony system framework for fuzzy data mining. **Soft Computing**, v. 16, p. 2071-2082, 2012.

YANG, C. C.; BOSE, N. K. Generating fuzzy membership function with self-organizing feature map. **Pattern Recognition Letters**, v. 27, n. 5, p. 356-365, 2006.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338-353, 1965.

ZADEH, L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. **IEEE Transactions on systems, man and cybernetics**, v. SMC-3, n. 1, p. 28-44, 1973.

ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. **Information Sciences**, v. 8, p. 199-249, 1975.

ZHOU, M.; DONG, H.; WANG, F.-Y.; WANG Q.; YANG, X. Modeling and simulation of pedestrian dynamical behavior based on a fuzzy logic approach. **Information Sciences**, v. 360, p. 112-130, set. 2016. ISSN 0020-0255.

ZWICK, R.; CARLSTEIN, E.; BUDESCU, D. V. Measures of similarity among fuzzy concepts: a comparative analysis. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 1, n. 2, p. 221-242, 1987. ISSN 0888-613X.