

Joana Carolina Sodré

**ESTUDO DA FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE APLICADA AO  
MODELO SIGMA LINEAR**

Dissertação submetido ao Programa de Pós-  
Graduação em Física para a obtenção do  
Grau de Mestre.

Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina:  
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

Coorientador

Universidade Federal de Santa Catarina:  
Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Sodré, Joana Carolina

Estudo da função de Wigner covariante aplicada ao modelo sigma linear / Joana Carolina Sodré ; orientador, Sidney dos Santos Avancini ; coorientador, Jeferson de Lima Tomazelli. - Florianópolis, SC, 2017.

191 p.

- Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Física, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Física. 2. Função de Wigner. 3. Função de Wigner covariante. 4. Equação de Transporte. 5. Modelo sigma linear. I. Avancini, Sidney dos Santos. II. Tomazelli, Jeferson de Lima. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

Joana Carolina Sodré

**ESTUDO DA FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE APLICADA AO  
MODELO SIGMA LINEAR**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 03 de Março 2017.

---

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli  
Coorientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima  
Universidade do Estado de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Alexandre Magno Silva Santos  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior  
Universidade Federal de Santa Catarina

Cthulhu fhtagn



## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio, aos meus orientadores pela confiança depositada e aos meus amigos por sempre acreditarem em mim.

Agradeço à CAPES pelo financiamento.

Agradeço ao Antônio por sempre tentar resolver todos os problemas, não só meus mas de todos os alunos da Pós.

Também agradeço à Amanda por ter me mostrado que eu sou capaz.

E finalmente, sou grata ao Rafa, que me ajudou a revisar todo o trabalho, e que não me deixou desanimar nunca.





Something weird might just be something familiar viewed from a different angle, and that's not scary, right?

(Adventure Time, 2010)



## RESUMO

Neste trabalho estudamos o formalismo necessário para uma teoria com nucleons interagindo através de campos escalares e pseudoescalares, em que utilizamos o modelo sigma linear. Para este fim, consideramos a representação espinorial da equação de Dirac e da álgebra de Clifford.

De forma paralela, estudamos uma forma de quantizar o espaço de fase. Para isso, utilizamos a função de Wigner, que é uma função de distribuição de quasi-probabilidade, da forma como ela foi proposta. Como tratamos de um modelo relativístico, foi necessário adaptá-la ao formalismo, e para tanto estudamos a função de Wigner covariante. Pudemos então, a partir da função de Wigner covariante na aproximação clássica e semiclássica, encontrar uma equação de transporte análoga à de Vlasov para o modelo sigma linear.

**Palavras-chave:** Função de Wigner. Função de Wigner Covariante. Equação de Transporte. Modelo Sigma Linear.



## ABSTRACT

In this work we study the formalism needed for a theory with nucleons interacting through scalar and pseudoscalar fields, and for this we use the linear sigma model. To this end, we consider the spinor representation of the Dirac equation and the Clifford algebra.

In parallel, we study a way to quantize the phase space. For this, we use the Wigner function, which is a quasi-probability distribution function, in the way that it was proposed. Since we are dealing with a relativistic model, we must adapt it to the formalism, and therefore we study the covariant Wigner function. We can then, from the covariant Wigner function in the classical and semiclassical approximation, find a transport equation analogous to that of Vlasov for the linear sigma model.

**Keywords:** Wigner Function. Covariant Wigner Function. Transport Equation. Linear Sigma Model



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>2</b>	<b>EQUAÇÃO DE DIRAC</b> .....	21
2.1	TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ .....	22
<b>2.1.1</b>	<b>Transformações de Lorentz de espinores</b> .....	23
2.1.1.1	Espinores .....	24
<b>2.1.2</b>	<b>Reflexão Espacial <math>I_s</math></b> .....	25
<b>2.1.3</b>	<b>Construindo a Matriz <math>\Omega_+</math></b> .....	27
2.1.3.1	rotações .....	29
2.1.3.2	Boost .....	30
2.2	GRUPO DE LORENTZ E FÉRMIONS QUIRAIS .....	33
<b>2.2.1</b>	<b>Covariantes bilineares da teoria de Dirac</b> .....	35
<b>2.2.2</b>	<b>Representações</b> .....	37
2.2.2.1	Escalares de Lorentz .....	39
2.2.2.2	Quadrivetores .....	39
2.2.2.3	Representação de Weyl .....	40
<b>2.2.3</b>	<b>Paridade</b> .....	41
2.3	A EQUAÇÃO DE DIRAC DA PARTÍCULA LIVRE .....	42
2.4	DENSIDADE DE CARGA E CORRENTE .....	45
<b>3</b>	<b>MODELO SIGMA LINEAR</b> .....	49
3.1	SIMETRIAS NA MECÂNICA QUÂNTICA .....	49
3.2	SIMETRIA QUIRAL .....	53
<b>3.2.1</b>	<b>Lagrangiana</b> .....	53
<b>3.2.2</b>	$U(1)_R \times U(1)_L$ .....	54
<b>3.2.3</b>	$SU(2)_R \times SU(2)_L$ .....	56
3.3	QUEBRA ESPONTÂNEA DA SIMETRIA QUIRAL .....	61
<b>3.3.1</b>	<b>Teorema de Goldstone</b> .....	63
<b>3.3.2</b>	<b>PCAC</b> .....	63
<b>3.3.3</b>	<b>Relação de Goldberger-Treiman</b> .....	64
3.4	MODELO SIGMA LINEAR .....	65
<b>4</b>	<b>FUNÇÃO DE WIGNER</b> .....	75
4.1	PRELIMINARES ALGÉBRICOS .....	75
<b>4.1.1</b>	<b>Formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase</b> .....	76
<b>4.1.2</b>	<b>Propriedades para <math>\Delta(p, q)</math></b> .....	80
4.2	RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO E ANTICOMUTAÇÃO NO FORMALISMO DE WEYL-WIGNER .....	80
4.3	DINÂMICA QUÂNTICA .....	82

4.3.1	Propriedades de $\rho_w(p, q; t)$ .....	84
4.3.2	A equação de von Neumann-Liouville .....	86
5	<b>FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE</b> .....	91
5.1	FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE PARA PARTÍCULAS DE SPIN $\frac{1}{2}$ .....	91
5.1.1	Equações Básicas .....	92
6	<b>EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA O MODELO SIGMA LINEAR</b> .....	95
6.1	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE .....	95
6.1.1	Histórico .....	96
6.2	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA O MODELO SIGMA LINEAR .....	96
6.3	EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO DE WIGNER ...	97
6.4	DECOMPOSIÇÃO ESPINORIAL .....	98
6.5	MÉDIA NA ENERGIA .....	100
6.6	APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA .....	103
6.7	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE .....	104
	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b> .....	107
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	109
	<b>APÊNDICE A – Definições e Convenções</b> .....	117
	<b>APÊNDICE B – Cálculos do Capítulo 1</b> .....	121
	<b>APÊNDICE C – Cálculos do Capítulo 2</b> .....	131
	<b>APÊNDICE D – Cálculos do Capítulo 3</b> .....	137
	<b>APÊNDICE E – Cálculos do Capítulo 5</b> .....	167
	<b>APÊNDICE F – Helicidade</b> .....	181
	<b>APÊNDICE G – Propriedades das matrizes <math>\gamma</math></b> .....	189



## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de plasmas relativísticos, mais especificamente o plasma de quarks e glúons (SATZ, 2011), tem sido de fundamental importância para a compreensão dos mecanismos envolvidos nas interações hadrônicas. Compreender este tipo de mecanismo nos permite descrever melhor os fenômenos observados nos experimentos em laboratórios do LHC (Large Hadron Collider) (CERN, ), como o ALICE (A Large Ion Collider Experiment), ou laboratórios do BNL (Brookhaven National Laboratory) (BNL, ), como o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider). Tais experimentos têm como objetivo compreender melhor a estrutura fundamental da matéria, desde a sua formação no universo primordial até seu comportamento nos mais variados regimes.

Quarks e glúons são algumas das partículas fundamentais conhecidas, que junto com os léptons e outras partículas de calibre formam o modelo padrão. A forma como os quarks e os glúons interagem, através da força forte, para formar hádrons, como prótons e nêutrons, é estudada pela Cromodinâmica Quântica (QCD) (WALECKA, 2004). Nesta teoria, bárions são formados por tripletos de quarks e mésons por pares de quark-antiquark. Assim, para descrever todos os hádrons observados, necessitamos de seis sabores de quarks: up (u) e down (d), que são os sabores mais leves; e strange, charm, top e bottom. Além disso, cada um desses quarks porta outro número quântico, a carga de cor, que pode assumir três valores, geralmente chamados de vermelho, azul e verde.

A QCD tem duas propriedades notáveis: o confinamento e a liberdade assintótica. Quarks e glúons não podem ser observados livremente, e estão sempre confinados no interior dos hádrons, o que caracteriza a primeira propriedade. Já pela liberdade assintótica, a distâncias muito pequenas, ou a um momento muito grande, a força de interação entre glúons e quarks fica mais fraca. Isso pode ser visto a partir da magnitude da constante de acoplamento da QCD, que fica bem definida em dois regimes, o perturbativo e o não perturbativo. No regime não perturbativo, com energias menores que  $1\text{GeV}$ , as técnicas tradicionais para se obter resultados não funcionam, e outros métodos devem ser explorados. Para este caso, normalmente adota-se a QCD na rede (GAVAI, 2006) (Lattice QCD) ou os modelos efetivos (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a)(NAMBU; JONA-LASINIO, 1961b)(CHODOS et al., 1974)(GASSER; LEUTWYLER, 1984).

A QCD a baixas energias tem variáveis que não são relevantes para este regime, mas que dificultam os cálculos necessários. Para evitarmos estas complicações, utilizamos modelos efetivos, que contêm os principais ingredientes do sistema tratado, o descrevendo de forma mais simples.

O modelo efetivo tratado neste trabalho é o modelo sigma linear, proposto por Murray Gell-Mann e Maurice Lévy em 1960 (GELL-MANN; LÉVY, 1960). Este modelo tinha como objetivo explicar a taxa de decaimento do pión e envolve núcleons interagindo com píons, além de introduzir o méson escalar sigma. As grandes vantagens do modelo sigma linear são o fato deste ser renormalizável e apresentar a quebra espontânea da simetria quiral.

Uma característica notável do modelo sigma linear é a forma como a massa dos núcleons é gerada através da conservação parcial da corrente axial (PCAC) (MIRANSKY, 1994)(CHENG; LI, 1984). A principal característica de modelos efetivos quirais, como o sigma linear, é a presença de correntes axiais e vetoriais. Se estas correntes são conservadas, então a simetria quiral é preservada. Entretanto no caso do modelo sigma linear, enquanto a corrente vetorial é conservada, a axial é conservada só de forma aproximada, devido à massa pequena, mas não nula dos píons. Isto está diretamente relacionado com a quebra espontânea da simetria quiral, que segundo o Teorema de Goldstone, implica na existência de partículas de massa zero, conhecidas como bósons de Goldstone, que associaremos aos píons. A quebra espontânea da simetria quiral acarreta num valor esperado do vácuo diferente de zero para campo associado ao méson sigma, e como veremos neste trabalho, isto fornecerá uma massa efetiva para os núcleons do modelo (HOSAKA; TOKI, 2001).

Uma aplicação importante do modelo sigma linear é o estudo da transição de fase quiral na QCD sob condições de temperatura e densidade finitas (PETROPOULOS, 1999), estudos estes que podem ser relacionados ao plasma de quarks e glúons, um novo estado da matéria alcançado recentemente pelos aceleradores de partículas citados anteriormente. Porém estima-se que o plasma de quarks e glúons encontra-se fora do equilíbrio logo após a colisão de íons pesados, e por isso precisamos de uma teoria que possa tratar de fenômenos dissipativos (ELZE; HEINZ, 1989). Em princípio desejamos obter uma teoria de transporte quântica, e como na teoria clássica de transporte as correntes estão conectadas por uma função de distribuição  $f$ , necessitamos encontrar um análogo quântico à essa função. Entretanto, devido ao princípio da incerteza, o conceito do espaço de fase é problemático, já que neste precisamos ter a posição e o momento das partículas bem definidos. Isto é contornado ao utilizarmos uma função de distribuição de quasi-probabilidade, proposta inicialmente por Eugene Paul Wigner em 1932 (WIGNER, 1932). Embora estas funções não sejam densidades de probabilidade verdadeiras, mas ferramentas matemáticas para tratar de estatísticas quânticas, elas permitem que possamos encontrar conexões entre a mecânica clássica e a quântica. Dentre as funções de distribuição de quasi-probabilidade (HILLERY et al., 1984)(LEE, 1995)(BALLENTINE, 2014), escolhemos utilizar a função de

Wigner.

A função de Wigner, da forma como foi proposta originalmente, não é relativística, ao contrário da nossa teoria. Assim, precisamos adaptá-la ao formalismo covariante para que ela se adeque à teoria. Por isso, recorremos à (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987), (ZHUANG; HEINZ, 1996b), e (ZHUANG; HEINZ, 1996a), que deduzem a função de Wigner a partir de uma matriz de densidade para então encontrar a função de Wigner covariante para tempos iguais. A partir desta função é possível encontrar uma equação de transporte análoga à de Vlasov, depois de aplicarmos o limite clássico e semiclássico.

O objetivo deste trabalho é encontrar uma equação de transporte para os férmions do modelo sigma.

Para isso, no primeiro capítulo introduziremos a equação de Dirac e a sua álgebra (GOTTFRIED; YAN, 2013). Como esta é a responsável por descrever partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , como quarks e núcleons, que fazem parte do nosso estudo, é importante entendermos a teoria por trás delas. Além disso, o grupo de simetria associado à essa equação é muito semelhante ao associado à simetria quiral (HOSAKA; TOKI, 2001), o que nos dará uma boa ferramenta para entendermos o modelo sigma.

No capítulo dois falaremos sobre simetrias quirais e da quebra espontânea desta, e, de uma forma mais aprofundada, sobre o modelo sigma linear. Também faremos uma breve revisão sobre simetrias na Mecânica Quântica, de forma a fundamentar melhor o resto do capítulo.

O terceiro capítulo tratará da função de Wigner não relativística, explorando suas principais propriedades, além de estudar a sua dinâmica (MARCHIOLLI, 2002). Já o quarto capítulo fará a generalização desta função para o caso covariante (HAKIM, 2011).

Finalmente, no capítulo cinco aplicaremos o que foi estudado até aqui para derivarmos uma equação de transporte análoga à de Vlasov para a lagrangiana do modelo sigma linear.



## 2 EQUAÇÃO DE DIRAC

Como a Relatividade Restrita já estava bem estabelecida quando a Mecânica Quântica começou a tomar forma, em 1925, viu-se que para esta ser uma teoria fundamental ela deveria ser covariante. Na época, as únicas partículas fundamentais conhecidas eram o fóton, o elétron e o próton. Para fótons, uma teoria relativística foi construída a partir da quantização canônica das Equações de Maxwell (GOTTFRIED; YAN, 2013).

Dirac propôs uma equação relativística para o elétron em 1928 (DIRAC, 1928) a partir de suposições que mais tarde se mostraram equivocadas. Para Dirac, uma boa equação devia seguir os moldes da equação de Schrödinger, ou seja, devia ser uma equação de onda para uma partícula e suas equações de movimento deveriam ser em primeira ordem no tempo para preservar a densidade de probabilidade, como veremos mais adiante.

Uma primeira candidata à equação vem da relação

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (2.1)$$

Utilizando a primeira quantização

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{1}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.2)$$

temos a equação de Klein-Gordon (MANDL; SHAW, 2010)

$$(\partial^2 + m^2) \psi = 0. \quad (2.3)$$

Como consequência da equação de Klein-Gordon, as funções de onda satisfazem à equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{cases} \rho = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi, \\ \mathbf{j} = \psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi. \end{cases} \quad (2.5)$$

Mas a densidade  $\rho$  não é positiva definida, então  $\psi$  não pode ser interpretada como uma amplitude de probabilidade. Dirac acreditava que a evolução de qualquer sistema deveria ser descrita por uma transformação unitária em uma função de onda no estado inicial, e por isso a equação deveria ser de primeira ordem no tempo. Para ser um invariante de Lorentz,

essa equação também deveria ser de primeira ordem no espaço. A equação proposta por Dirac satisfazia estas condições ao introduzir uma generalização  $4 \times 4$  das matrizes de Pauli. A aproximação não relativística desta equação leva à equação de Schrödinger para uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$ . Por isso, supôs-se que o spin era uma consequência direta ao se introduzir uma Mecânica Quântica relativística.

Entretanto, a equação de Dirac, assim como a equação de Klein-Gordon, possui soluções com energia negativa. Para tentar contornar este problema, Dirac propôs que estas soluções estavam relacionadas à estados de energia positivas de pósitrons, partículas com a mesma massa do elétron, mas com carga oposta. Esta previsão foi confirmada em 1932 por Carl David Anderson (ANDERSON, 1933).

Mais tarde percebeu-se que, apesar das suposições equivocadas de Dirac, sua equação pode ser vista como uma descrição para o elétron, ao se considerar uma teoria para uma partícula. Porém,  $\psi$  não pode ser interpretado como uma função de onda, mas sim como um operador de campo.

## 2.1 TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

As transformações de Lorentz são dadas pelo grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$ , que é o conjunto de todas as transformações lineares que deixam o intervalo do espaço-tempo  $\mathcal{Q}$  invariante, onde

$$\mathcal{Q} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (2.6)$$

O grupo das rotações tridimensionais é dado pelo subgrupo de  $\mathcal{L}$  formado pelas transformações que deixam  $t$  invariante.

Uma transformação de Lorentz tem a forma:

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu, \quad (2.7)$$

em que  $x^\mu$  é o quadrivetor contravariante:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z). \quad (2.8)$$

Por definição, qualquer conjunto de quatro quantidades reais que se transformam como  $x^\mu$  constitui um quadrivetor. Então, se  $V^\mu$  e  $W^\mu$  são dois quadrivetores quaisquer,  $V_\mu W^\mu = V^0 W^0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$  é um invariante.

As matrizes  $\Lambda$   $4 \times 4$  parametrizam os elementos do grupo de Lorentz, que pode ser dividido em dois subgrupos de acordo com o valor do determinante de  $\Lambda$ . O primeiro, quando  $\det \Lambda = 1$ , é chamado de próprio e compreende as rotações. Já o segundo, quando  $\det \Lambda = -1$ , é chamado de impróprio

e inclui a reflexão espacial e a inversão temporal.

### 2.1.1 Transformações de Lorentz de espinores

Podemos atribuir ao quadrivetor  $x^\mu$  a matriz Hermitiana (GOTTFRIED; YAN, 2013):

$$X_+ = \begin{pmatrix} t - z & -x + iy \\ -x - iy & t + z \end{pmatrix} = t - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.9)$$

cujo determinante é

$$\begin{aligned} \det(X_+) &= (t - z)(t + z) - (-x - iy)(-x + iy), \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\det(X_+) = \mathcal{L}. \quad (2.10)$$

Assim, uma transformação de Lorentz do quadrivetor  $x^\mu$  pode ser representada por uma transformação linear homogênea em  $X_+$  que a mantém hermitiana e não altera o seu determinante. Uma transformação linear homogênea mais geral tem a forma:

$$X'_+ = AX_+B, \quad (2.11)$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes arbitrárias que não são funções de  $x^\mu$ . Para a hermiticidade ser preservada, temos que fazer  $(X'_+)^\dagger = X'_+$

$$\begin{aligned} (AX_+B)^\dagger &= AX_+B, \\ B^\dagger X_+ A^\dagger &= AX_+B, \end{aligned}$$

isto é,

$$B = A^\dagger. \quad (2.12)$$

Então a transformação fica:

$$X'_+ = \Omega_+ X_+ \Omega_+^\dagger, \quad (2.13)$$

e considerando as propriedades

$$\det AB = (\det A)(\det B) \quad \text{e} \quad \det A^\dagger = (\det A)^*,$$

podemos fazer

$$\begin{aligned} \det X'_+ &= \det(\Omega_+ X_+ \Omega_+^\dagger), \\ &= \det \Omega_+ \det X_+ \det \Omega_+^\dagger, \\ &= \det X_+ \det \Omega_+^\dagger \det \Omega_+, \end{aligned}$$

e chegaremos na expressão

$$\det X'_+ = \det X_+ |\det \Omega_+|^2. \quad (2.14)$$

Como já mencionamos,  $\Omega_+$  somente será uma transformação de Lorentz se preservar o determinante de  $X_+$ , ou seja,

$$|\det \Omega_+| = 1. \quad (2.15)$$

Para o subgrupo das rotações, a transformação deve se reduzir ao caso em que a componente do tempo não se altera. Mas, utilizando a propriedade cíclica do traço, temos

$$\text{Tr} X_+ = 2t = \text{Tr}(X_+ \Omega_+^\dagger \Omega_+), \quad (2.16)$$

então  $\Omega_+$  realmente é unitário para rotações.

### 2.1.1.1 Espinores

O espinor de Weyl é definido de forma similar aos espinores de Pauli

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

e o espinor transformado é definido por

$$X_+ \chi_+ \rightarrow (X_+ \chi_+)' \equiv \Omega_+ (X_+ \chi_+). \quad (2.18)$$

Então substituindo (2.13) no lado esquerdo da equação, ficamos com



$$\begin{aligned}(\Omega_+ X_+ \Omega_+^\dagger) \chi'_+ &= \Omega_+ X_+ \chi_+, \\ \Omega_+^\dagger \chi'_+ &= \chi_+, \end{aligned}$$

e portanto

$$\chi'_+ = (\Omega_+^\dagger)^{-1} \chi_+. \quad (2.19)$$

Quando  $\Omega_+$  é uma rotação, e por isso unitário,

$$\chi'_+ = (\Omega_+^{-1})^{-1} \chi_+ \rightarrow \chi'_+ = \Omega_+ \chi_+. \quad (2.20)$$

### 2.1.2 Reflexão Espacial $I_s$

A reflexão espacial da matriz  $X_+$  produz a transformação

$$I_s : X_+ \rightarrow \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = t + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv X_-, \quad (2.21)$$

que tem o determinante

$$\begin{aligned} \det(X_-) &= (t-z)(t+z) - (x-iy)(x+iy), \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \end{aligned}$$

que é igual ao determinante de  $X_+$ .

Para que a reflexão possa ser representada por uma transformação como (2.13), é necessário que

$$\Omega_+ \Omega_+^\dagger = 1 \quad \text{e} \quad \Omega_+ \boldsymbol{\sigma} \Omega_+^\dagger = -\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.22)$$

Isso pode ser verificado ao igualarmos a definição de  $X_-$  com a transformação de  $X_+$

$$\begin{aligned} X_- &= \Omega_+ X_+ \Omega_+^\dagger, \\ \mathbb{1}t + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \Omega_+ (\mathbb{1}t - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \Omega_+^\dagger, \\ \mathbb{1}t + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \Omega_+ \Omega_+^\dagger t - \mathbf{r} \cdot \Omega_+ \boldsymbol{\sigma} \Omega_+^\dagger, \end{aligned}$$

para a última expressão ser verdadeira, as igualdades seguintes devem ser satisfeitas

$$\begin{cases} \Omega_+ \Omega_+^\dagger = 1, \\ \Omega_+ \sigma \Omega_+^\dagger = -\sigma. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda expressão por  $\Omega_+$  pela direita:

$$\sigma \Omega_+ = -\Omega_+ \sigma, \quad (2.23)$$

podemos notar que  $\sigma$  e  $\Omega_+$  anticomutam.

Entretanto, não existe uma matriz  $2 \times 2$  que anticomute com todas as matrizes de Pauli. Por isso, duas matrizes,  $X_+$  e  $X_-$ , são necessárias para descrever o quadrivetor  $x^\mu$  se reflexões espaciais representam transformações em espinores.

Uma teoria relativística para partículas de spin  $\frac{1}{2}$  que seja invariante por reflexão não pode ser baseada em espinores de Weyl de duas componentes, e necessita da introdução do espinor de Dirac de quatro componentes.

Se  $I_s$  leva um estado representado por  $\chi_+$  a um outro estado contido na teoria, é necessário introduzir um segundo tipo de espinor de Weyl,  $\chi_-$ , que é a imagem de  $\chi_+$  sob  $I_s$ .

A definição deste segundo espinor é semelhante à definição de  $\chi_+$ :

$$\chi_- = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

e uma transformação de Lorentz numa matriz  $X_-$  que representa  $x^\mu$  é dada por

$$X'_- = \Omega_- X_- \Omega_-^\dagger, \quad (2.25)$$

então o espinor transformado fica

$$\chi'_- = (\Omega_-^\dagger)^{-1} \chi_-. \quad (2.26)$$

Podemos agora introduzir o espinor de Dirac mencionado anteriormente:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Transformações de Lorentz próprias não “misturam”  $\chi_+$  e  $\chi_-$ , então:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_+ & 0 \\ 0 & \Omega_- \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

e sob reflexões, os espinores de Weyl são trocados, então:

$$I_s : \psi \rightarrow \gamma^0 \psi, \quad (2.29)$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

é uma das matrizes de Dirac na representação quiral, ou representação de Weyl, que serão introduzidas apropriadamente mais adiante. Mais detalhes sobre essas matrizes na representação de Weyl são dados no Apêndice G.1.

### 2.1.3 Construindo a Matriz $\Omega_+$

Como qualquer matriz  $2 \times 2$ ,  $\Omega_+$  pode ser escrita como:

$$\Omega_+ = (\mathbb{1}a + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.31)$$

onde  $a$  e  $\mathbf{b}$  são complexos. Para  $\Omega_+$  representar uma transformação de Lorentz, deve satisfazer a condição (2.15). Então,

$$\det \Omega_+ = a^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = e^{2i\phi}, \quad (2.32)$$

onde  $\phi$  é real. Verificamos isso escrevendo explicitamente a matriz  $\Omega_+$

$$\Omega_+ = \begin{pmatrix} a + ib_3 & ib_1 + b_2 \\ ib_1 - b_2 & a - ib_3 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

e calculando o determinante

$$\begin{aligned} \det \Omega_+ &= (a + ib_3)(a - ib_3) - (ib_1 + b_2)(ib_1 - b_2), \\ &= a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\det \Omega_+ = a^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

A fase pode ser eliminada sem nenhuma consequência fazendo

$$a \rightarrow e^{i\phi} a \quad \mathbf{b} \rightarrow e^{i\phi} \mathbf{b},$$

pois ela some quando transformamos um quadri vetor como em (2.13). Então,

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \\ a &= +(1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Portanto, uma transformação de Lorentz própria pode ser parametrizada pelo 3-vetor complexo  $\mathbf{b}$ , que é formado por seis parâmetros reais: três ângulos de rotação e o vetor da sua velocidade relativa.

Para uma transformação de Lorentz arbitrária parametrizada pelo vetor complexo  $\mathbf{b}$  temos

$$\Omega_+ = a + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \Omega_- = a + i\mathbf{b}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.35)$$

Quando  $\mathbf{b}$  é complexo, a transformação inversa é dada por  $\mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}$ . Podemos ver isso fazendo:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a + ib_3 & ib_1 + b_2 \\ ib_1 - b_2 & a - ib_3 \end{pmatrix}.$$

Considerando  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  uma matriz  $2 \times 2$  arbitrária, sua inversa é:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

então a matriz  $\Omega$  fica

$$\Omega = \begin{pmatrix} a - ib_3 & -ib_1 - b_2 \\ -ib_1 + b_2 & a + ib_3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$(\Omega_+^\dagger)^{-1} = (a - i\mathbf{b}^* \cdot \boldsymbol{\sigma})^{-1} = (a + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \Omega_-, \quad (2.36)$$

$$(\Omega_-^\dagger)^{-1} = (a + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})^{-1} = (a - i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \Omega_+. \quad (2.37)$$

As leis de transformação para  $\chi_\pm$  ficam:

$$\chi_+ \rightarrow \chi'_+ = (\Omega_+^\dagger)^{-1} \chi_+ = \Omega_- \chi_+, \quad (2.38)$$

$$\chi_- \rightarrow \chi'_- = (\Omega_-^\dagger)^{-1} \chi_- = \Omega_+ \chi_-. \quad (2.39)$$

A seguir introduziremos duas formas de transformações de Lorentz que serão úteis neste trabalho.

### 2.1.3.1 Rotações

Neste caso, o vetor  $\mathbf{b}$  definido acima é o vetor real

$$\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{n}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.40)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é um versor no eixo de rotação e  $\theta$  é o ângulo de rotação. Assim, podemos calcular  $a$  pela equação (2.34)

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ a^2 &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Aplicando a raiz em ambos os lados

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.41)$$

e então podemos reescrever a matriz  $\Omega_+$

$$\Omega_+ = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.42)$$

Ou, conforme os cálculos do Apêndice B.1.1, podemos reescrever  $\Omega_+$  como

$$\Omega_+ = \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right). \quad (2.43)$$

Já vimos que para relacionar  $\Omega_+$  com  $\Omega_-$ , fazemos  $\mathbf{b}_- = \mathbf{b}_+^*$ . Como para uma rotação  $\mathbf{b}$  é real,

$$\mathbf{b}_{\pm} = -i\hat{\mathbf{n}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.44)$$

e suas matrizes  $\Omega_{\pm}$  são

$$\Omega_{\pm} = \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right). \quad (2.45)$$

## 2.1.3.2 Boost

Para construir  $\Omega_+$  para um boost, ou seja, para uma transformação de coordenadas entre dois referenciais que se movem com uma velocidade relativa constante, é suficiente considerar a transformação na direção  $z$ . Então, o intervalo  $\mathcal{Q}$  fica:

$$\mathcal{Q} = t^2 - z^2 = (t - z)(t + z). \quad (2.46)$$

Apesar da velocidade  $v$  parecer a escolha mais óbvia para a parametrização da transformação, as leis de adição da velocidade para transformações sucessivas são muito complicadas. Uma escolha melhor, mais simples, é aditiva, como os ângulos de rotação sobre o mesmo eixo.  $\mathcal{Q}$  é invariante sob

$$(t - z) \rightarrow (t' - z') = (t - z)e^{-\zeta} \quad ; \quad (t + z) \rightarrow (t' + z') = (t + z)e^{\zeta}, \quad (2.47)$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro chamado rapidez. Duas transformações sucessivas equivalem a uma que é a soma dessas duas transformações, se  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  têm o mesmo eixo, o que torna esse parâmetro uma boa escolha para a parametrização do boost. É necessário encontrar como  $t$  e  $z$  se transformam. Somando as duas expressões em (2.47):

$$\begin{aligned} 2t' &= t(e^{\zeta} + e^{-\zeta}) + z(e^{\zeta} - e^{-\zeta}), \\ t' &= t\left(\frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2}\right) + z\left(\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2}\right), \end{aligned}$$

e, pela definição do seno e do cosseno hiperbólicos,

$$t' = t \cosh \zeta + z \sinh \zeta.$$

Da mesma forma, subtraindo a segunda expressão da primeira em (2.47)

$$\begin{aligned} 2z' &= z(e^{\zeta} + e^{-\zeta}) + t(e^{\zeta} - e^{-\zeta}), \\ z' &= z\left(\frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2}\right) + t\left(\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2}\right), \\ z' &= z \cosh \zeta + t \sinh \zeta. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} t' = t \cosh \zeta + z \sinh \zeta, \\ z' = z \cosh \zeta + t \sinh \zeta. \end{cases} \quad (2.48)$$

Esta é uma Transformação de Lorentz ativa: um ponto em repouso no referencial  $K$  move-se na direção positiva de  $z$  no referencial  $K'$ . Mais adiante precisaremos da relação entre  $\zeta$  e a velocidade relativa  $v$ , que encontramos ao comparar (2.48) com as relações:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t + vz); \\ z' = \gamma(z + vt), \end{cases} \quad (2.49)$$

onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz (UGAROV, 1977)(LANDAU; LIFSHITZ, 1975), definido como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.50)$$

Assim:

$$\gamma = \cosh \zeta \quad v\gamma = \sinh \zeta; \quad (2.51)$$

$$v = \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta} = \tanh \zeta. \quad (2.52)$$

Como queremos construir a matriz de transformação  $\Omega_+$  para um boost, primeiro escrevemos  $X_+$  da seguinte forma

$$X_+ = \mathbb{1}t - z\sigma_z = \begin{pmatrix} t - z & 0 \\ 0 & t + z \end{pmatrix},$$

para vermos que este se transforma como

$$X'_+ = \begin{pmatrix} t' - z' & 0 \\ 0 & t' + z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t - z)e^{-\zeta} & 0 \\ 0 & (t + z)e^{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Esta transformação é feita pela matriz:

$$\Omega_+ = e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}. \quad (2.54)$$

Podemos verificar isso aplicando a transformação em  $X_+$

$$X'_+ = e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}X_+e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z} = e^{-\zeta\sigma_z}(t - z\sigma_z),$$

mas precisamos antes reescrever  $\Omega_+$  da forma

$$e^{-\zeta\sigma_z} = \cosh \zeta - \sigma_z \sinh \zeta, \quad (2.55)$$

cuja prova está no Apêndice B.1.2.

Assim, podemos aplicar a transformação em  $X_+$

$$\begin{aligned} X'_+ &= (\cosh \zeta - \sigma_z)(t - z\sigma_z), \\ &= (t \cosh \zeta + z \sinh \zeta) - \sigma_z(z \cosh \zeta + t \sinh \zeta), \\ X'_+ &= t' + \sigma_z z'. \end{aligned}$$

Para os resultados anteriores se repetirem quando aplicados a  $X_- = t + z\sigma_z$ , encontramos a transformação

$$\Omega_- = e^{\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}. \quad (2.56)$$

Generalizando para um boost em uma direção arbitrária, temos

$$\Omega_+ = \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right), \quad \Omega_- = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right). \quad (2.57)$$

Para essa transformação, o parâmetro  $\mathbf{b}$ , definido em (2.31), é um imaginário puro

$$\mathbf{b}_{\pm} = \pm i\hat{\mathbf{n}} \sinh\left(\frac{1}{2}\zeta\right). \quad (2.58)$$

Isto pode ser mostrado se expandirmos  $\Omega_+$  em uma série de Taylor, como já fizemos em (B.1):

$$\Omega_+ = \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) - \hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right).$$

Comparando com  $(\Omega_+ = a + i\mathbf{b}_+\cdot\boldsymbol{\sigma})$ , os parâmetros  $a$  e  $\mathbf{b}$  ficam

$$a = \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right);$$

$$i\mathbf{b}_+\cdot\boldsymbol{\sigma} = -\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{b}_+ = i\hat{\mathbf{n}} \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right).$$

O mesmo pode ser feito com  $\Omega_-$ .



## 2.2 GRUPO DE LORENTZ E FÉRMIONS QUIRAIS

Como já visto, a transformação de Lorentz é dada por (2.7) e a forma infinitesimal das matrizes de transformação  $\Lambda_\mu{}^\nu$  é dada por

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu + \varepsilon_\mu{}^\nu, \quad (2.59)$$

onde  $\varepsilon_\mu{}^\nu$  são parâmetros reais antissimétricos. A transformação de Lorentz (2.7) pode ser reescrita na representação de grupo:

$$x'_\mu = \left( 1 + \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \right)_\mu{}^\nu x_\nu, \quad (2.60)$$

em que  $M^{\alpha\beta}$  são os seis geradores do grupo de Lorentz, dados pelas matrizes  $4 \times 4$

$$(M^{\alpha\beta})_\mu{}^\nu = i(\delta_\mu^\alpha g^{\beta\mu} - \delta_\mu^\beta g^{\alpha\mu}). \quad (2.61)$$

Podemos ver  $M^{\alpha\beta}$  como uma extensão quadridimensional dos geradores das rotações tridimensionais,

$$\begin{aligned} (M^{ij})_{lm} &\rightarrow i\varepsilon^{ijk}(t_k)_{lm} \\ &= i\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{klm} \\ &= i(\delta_l^i\delta_m^j - \delta_m^i\delta_l^j), \end{aligned}$$

em que  $(t_k)_{lm} = \varepsilon_{klm}$  são as representações adjuntas de spin 1 dos geradores do  $SU(2)$  (HOSAKA; TOKI, 2001). As relações de comutação entre os geradores  $M^{\alpha\beta}$  podem ser encontradas a partir das matrizes (2.61):

$$[M^{\alpha\beta}, M^{\gamma\delta}] = -i(g^{\alpha\gamma}M^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}M^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma}M^{\alpha\delta} + g^{\beta\delta}M^{\alpha\gamma}). \quad (2.62)$$

Definindo os operadores de momento angular  $J_i$  e de boost  $K_i$  como

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}, \quad (2.63)$$

$$K_i = M^{0i}, \quad (2.64)$$

as relações de comutação entre estes é dada por

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Definindo os geradores esquerdo  $L_i$  e direito  $R_i$ ,

$$R_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i); \tag{2.66}$$

$$L_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i), \tag{2.67}$$

e aplicando as relações encontradas em (2.65), as suas relações de comutação ficam:

$$\begin{aligned}
[R_i, R_j] &= i\epsilon_{ijk}R_k \\
[L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk}L_k \\
[L_i, R_j] &= 0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Estes operadores formam a álgebra do grupo de Lorentz, onde os geradores esquerdo e direito satisfazem separadamente a álgebra de momento angular. Ainda, na construção dos operadores  $R_i$  e  $L_i$ , utilizamos combinações do tipo  $J_i \pm iK_i$  onde o fator  $i$  na frente dos geradores de boost transforma eles em geradores de rotação.

Podemos definir uma operação de paridade, que age da seguinte forma nos geradores de boost e de rotação:

$$K_i \xrightarrow{\text{Paridade}} -K_i, \quad J_i \xrightarrow{\text{Paridade}} J_i, \tag{2.69}$$

e então os geradores esquerdo e direito se transformam como

$$J_i + iK_i \xrightarrow{\text{Paridade}} J_i + i(-K_i),$$

ou seja,

$$R_i \xrightarrow{\text{Paridade}} L_i. \tag{2.70}$$

A álgebra do grupo de Lorentz é equivalente à do grupo  $SL(2, C)$ , um grupo de transformações lineares especiais de dois números complexos, cujos elementos são matrizes  $2 \times 2$  complexas

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

onde  $\det\{A\} = 1$ . Devido a esta restrição,  $A$  contém seis parâmetros reais que correspondem aos do grupo de Lorentz.

### 2.2.1 Covariantes bilineares da teoria de Dirac

Como veremos mais adiante, estamos interessados em combinações de espinores do tipo  $\psi_i \Gamma^{\alpha\beta} \psi_i$ , onde  $\Gamma^{\alpha\beta}$  é uma combinação de matrizes  $4 \times 4$  complexas que podem ser decompostas em uma base de 16 componentes.

Definindo as matrizes  $\gamma$  como matrizes  $4 \times 4$  que satisfazem à relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.72)$$

e à condição de hermiticidade

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.73)$$

podemos construir estas 16 matrizes  $\Gamma_{\alpha\beta}^n$   $4 \times 4$ , que são linearmente independentes e são comuns nas aplicações da teoria de Dirac (BJORKEN; DRELL, 1964)(ITZYKSON; ZUBER, 2006). Definimos estas matrizes como

$$\begin{aligned} \Gamma^S &= \mathbb{1} \\ \Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &= \sigma_{\mu\nu} \\ \Gamma^P &= \gamma_5 \\ \Gamma_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.74)$$

Como estas matrizes são linearmente independentes, é possível construir formas bilineares que se dividem em cinco conjuntos que se transformam de maneira característica sob transformações de Lorentz própria. Tais conjuntos são

$\bar{\psi}\psi$		Escalar
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$		Pseudoescalar
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Se transforma como	Vetor
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$		Pseudovetor
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$		Tensor antissimétrico de rank 2

Podemos verificar que os covariantes relevantes para este trabalho realmente se comportam como o esperado sob transformações de boost (2.57), rotação (2.45) e paridade no Apêndice B.3, e a seguir daremos como exemplo o caso dos escalares.

### Escalar

Um escalar é dado por  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$ . Reescrevendo em relação aos espiniores (2.17) e (2.24), ficamos com

$$\bar{\psi}\psi = \chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+. \quad (2.75)$$

A combinação  $\chi_\pm^*\chi_\mp$ , sob rotações, fica

$$(\chi_\pm^*\chi_\mp)' = \chi_\pm^* \exp\left(\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \chi_\mp = \chi_\pm^*\chi_\mp \quad (2.76)$$

e o escalar fica

$$(\chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+)' = \chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+. \quad (2.77)$$

Já sob um boost, a combinação  $\chi_\pm^*\chi_\mp$  fica

$$(\chi_\pm^*\chi_\mp)' = \chi_\pm^* \exp\left(\pm\frac{1}{2}\zeta\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \exp\left(\mp\frac{1}{2}\zeta\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \chi_\mp = \chi_\pm^*\chi_\mp, \quad (2.78)$$

e o escalar

$$(\chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+)' = \chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+. \quad (2.79)$$

Sob paridade, temos  $\chi_+ \rightarrow \chi_-$ , e então

$$(\chi_+^*\chi_- + \chi_-^*\chi_+)' = \chi_-^*\chi_+ + \chi_+^*\chi_-. \quad (2.80)$$

### 2.2.2 Representações

Vamos considerar as representações do grupo de Lorentz ditas pelas relações de comutação (2.68). Como os geradores  $L$  e  $R$  formam duas álgebras  $SU(2)$  independentes, o grupo é denotado por  $SU(2)_R \times SU(2)_L$ , onde  $SU(2)_R$  e  $SU(2)_L$  são grupos de spin rotacionais para os férmions de mão direita e mão esquerda respectivamente. O conceito de quiralidade, ou seja, diferenciar férmions entre mão esquerda e mão direita, é relacionado ao autovalor destes espinores quando sujeitos a uma transformação de paridade, e estas relações serão exploradas mais adiante. As representações são rotuladas com dois valores de spin,  $(s_R, s_L)$ , um para o  $SU(2)_R$  e o outro para o  $SU(2)_L$ . As representações de dimensão mais baixa, ou representações fundamentais, são as representações de spin  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ .

Chamamos a representação espinorial  $(\frac{1}{2}, 0)$  de representação fundamental de mão direita do grupo de Lorentz  $SL(2, C)$ . Esta pode ser representada por um espinor complexo de dois componentes  $\chi_R$

$$\chi_R \sim \left( \frac{1}{2}, 0 \right). \quad (2.81)$$

O gerador  $R_i$  é representado pelas matrizes de Pauli nesta base

$$R_i \sim \frac{\sigma_i}{2}, \quad (2.82)$$

e por isso os geradores de boost e rotação são dados por

$$J_i = R_i + L_i = \frac{\sigma_i}{2} \equiv s_i, \quad (2.83)$$

$$K_i = i(-R_i + L_i) = -\frac{i\sigma_i}{2} \equiv -is_i. \quad (2.84)$$

Assim, os elementos do grupo de Lorentz podem ser representados como

$$U_R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp(i\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.85)$$

onde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  são os parâmetros reais para rotação e boost já vistos anteriormente, porém com uma notação diferente. A conexão entre essas notações é dada no Apêndice B.2. Estas matrizes agem nos espinores de mão direita

$$\chi'_R = U_R(\mathbf{a}, \mathbf{b})\chi_R. \quad (2.86)$$

Da mesma forma, o espinor de mão esquerda é dado por

$$\chi_L \sim \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (2.87)$$

e suas matrizes de transformação são

$$U_L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp(i\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.88)$$

que agem nos espinores de mão esquerda

$$\chi'_L = U_L(\mathbf{a}, \mathbf{b})\chi_L. \quad (2.89)$$

Podemos relacionar as duas representações a partir da conjugação complexa:

$$\begin{aligned} R_i^* &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i)^* \\ R_i^* &= L_i. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Outra forma de ver isso é tomando o complexo conjugado da equação (2.89)

$$\begin{aligned} (\chi'_L)^* &= U_L^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})\chi_L^* \\ &= \exp(-i\mathbf{s}^* \cdot \mathbf{a} - \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{b})\chi_L^*. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Definimos o tensor antissimétrico como

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

com

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^T. \quad (2.93)$$

Multiplicando a equação (2.89) pelo tensor antissimétrico (2.93) pela esquerda, ficamos com

$$\begin{aligned} (\varepsilon\chi'_L)^* &= \exp(-i\mathbf{s}^*\varepsilon^{-1} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{s}^*\varepsilon^{-1} \cdot \mathbf{b})(\varepsilon\chi_L^*) \\ &= \exp(i\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b})(\varepsilon\chi_L^*) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Disto podemos notar as correspondências

$$\varepsilon \chi_L^* \sim \chi_R \quad , \quad \varepsilon \chi_R^* \sim \chi_L. \quad (2.95)$$

Os férmions de mão direita e mão esquerda  $\chi_R \sim (\frac{1}{2}, 0)$  e  $\chi_L \sim (0, \frac{1}{2})$  são conhecidos como férmions quirais.

### 2.2.2.1 Escalares de Lorentz

Nesta teoria, escalares de Lorentz são formados por biespinores com o tensor antissimétrico  $\varepsilon$  inserido, em que  $\phi_R$  é um espinor qualquer, ou seja,

$$\begin{aligned} S &\sim (\varepsilon \chi_R)^T \phi_R \\ &= \chi_R^T \varepsilon^T \phi_R \end{aligned}$$

onde na segunda linha utilizamos a propriedade do traço do produto de duas matrizes  $(AB)^T = B^T A^T$ . Como  $\varepsilon^T = -\varepsilon$ , então,

$$S \sim -\chi_R^T \varepsilon \phi_R. \quad (2.96)$$

E, da mesma forma,

$$S \sim -\chi_L^T \varepsilon \phi_L \quad (2.97)$$

A invariância destas quantidades já foi mostrada anteriormente. Da equação (2.95) podemos obter mais dois escalares de Lorentz

$$(\chi_L)^\dagger \phi_R \quad \text{e} \quad (\chi_R)^\dagger \phi_L. \quad (2.98)$$

Podemos verificar isso fazendo

$$(\chi_L)^\dagger \phi_R = (\chi_L^*)^T \phi_R = (\varepsilon^T \chi_R) \phi_R = \chi_R^T \varepsilon \phi_R. \quad (2.99)$$

### 2.2.2.2 Quadrivetores

A regra para criar um quadrivector a partir de espinores é

$$V^\mu \sim \chi_R^\dagger \sigma^\mu \phi_R, \quad (2.100)$$

onde  $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ .

Transformações do  $SL(2, C)$  em espinores dadas por (2.86) e (2.89) dão transformações de Lorentz familiares para quadrivetores, como já vimos.

Usando a propriedade (2.95), podemos encontrar outros tipos de quadrivetores

$$\chi_L^T \varepsilon^T \sigma^\mu \phi_R, \quad \chi_R^\dagger \sigma^\mu \varepsilon \phi_L^*, \quad \chi_L^T \varepsilon^T \sigma^\mu \varepsilon \phi_L^*. \quad (2.101)$$

A última combinação pode ser escrita como

$$(\chi_L^T \varepsilon^T \sigma^\mu \varepsilon \phi_L^*)^T = (\phi_L^*)^T (\varepsilon^T \sigma^\mu \varepsilon)^T (\chi_L^T)^T = \phi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_L, \quad (2.102)$$

em que

$$\bar{\sigma}^\mu = (\varepsilon^T \sigma^\mu \varepsilon)^T = (1, -\sigma).$$

Podemos relacionar as formas biespinoriais dos escalares de Lorentz e dos quadrivetores para  $\phi = \chi$  como

Escalares	$\chi_R^T \varepsilon^T \chi_R$	$\chi_L^T \varepsilon^T \chi_L$	$\chi_L^\dagger \chi_R$	$\chi_R^\dagger \chi_L$
Vetores	$\chi_R^\dagger \sigma^\mu \chi_R$	$\chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_L$	$\chi_L^T \varepsilon^T \sigma^\mu \chi_R$	$\chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \varepsilon^T \chi_R^*$

Tabela 1 – Escalares e quadrivetores de Lorentz

### 2.2.2.3 Representação de Weyl

Como já vimos, necessitamos de ambos  $\chi_R$  e  $\chi_L$  para descrever um espinor massivo em uma teoria relativística. Assim, podemos combinar estes dois espinores em um de quatro componentes  $\psi$ :

$$\psi = \psi_R + \psi_L = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

onde

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \chi_R \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Também definimos o espinor adjunto  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ . Com isso, podemos escrever

$$\bar{\psi}_R = (0 \quad \chi_R^\dagger) \quad ; \quad \bar{\psi}_L = (\chi_L^\dagger \quad 0). \quad (2.105)$$

Se definirmos a matriz  $\gamma_5$  como



$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

então podemos escrever os férmions de mão direita e esquerda como autoestados de  $\gamma_5$

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R \quad , \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L. \quad (2.107)$$

Estes férmions são projetados pelos operadores de projeção

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.108)$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

que obedecem às relações

$$\begin{aligned} P_R + P_L &= 1 \\ P_R^2 &= P_R \quad , \quad P_L^2 = P_L \quad , \quad P_R P_L = 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

### 2.2.3 Paridade

Se quisermos transformar um espinor de mão esquerda em um de mão direita, usamos a transformação de paridade. Então temos

$$\chi_R(x) \leftrightarrow \eta \chi_L(\bar{x}), \quad (2.111)$$

com  $x = (t, \mathbf{x})$  e  $\bar{x} = (t, -\mathbf{x})$ , onde  $\eta = \pm 1$  é uma fase que determina o autovalor da paridade. Entretanto, na representação de Weyl esta transformação sozinha não é suficiente, pois

$$\psi_R(x) = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \chi_L(\bar{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.112)$$

O componente de mão esquerda deveria estar na parte inferior do espinor de quatro componentes. Para isso, multiplicamos a equação acima por  $\gamma_0$ , ou seja,

$$\psi_R(x) = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \chi_L(\bar{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \chi_L(\bar{x}) \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

Por isso, não é possível formar um autoestado da paridade de  $\psi_R$  ou  $\psi_L$  sozinhos. Na representação de Weyl, este é dado por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_R(x) \\ \chi_L(x) \end{pmatrix} \rightarrow \gamma_0 \begin{pmatrix} \eta \chi_L(\bar{x}) \\ \eta \chi_R(\bar{x}) \end{pmatrix} = \eta \psi(\bar{x}). \quad (2.114)$$

### 2.3 A EQUAÇÃO DE DIRAC DA PARTÍCULA LIVRE

Vamos derivar a equação de Dirac para uma partícula livre de massa  $m$ . Considerando inicialmente um estado puro arbitrário em repouso no referencial  $K$ , que pode ser representado por um espinor de Pauli  $\xi$ . No referencial  $K'$ , definido pelas transformações (2.48), o estado tem momento (GOTTFRIED; YAN, 2013):

$$\frac{p_z}{m} = \gamma v_z = \sinh \zeta. \quad (2.115)$$

A transformação de  $K$  para  $K'$  pode ser feita tanto por  $\Omega_+$  quanto por  $\Omega_-$  para um boost, que definem dois espinores de Weyl distintos, mas com mesmo momento. Estas transformações são:

$$\chi_+(p_z) = e^{\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}\xi \quad \chi_-(p_z) = e^{-\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}\xi \quad (2.116)$$

Eliminando  $\xi$ :

$$\chi_-(p_z) = e^{-\zeta\sigma_z}\chi_+(p_z), \quad (2.117)$$

que é a Equação de Dirac para uma partícula livre. Para escrever a equação em notação padrão, temos que

$$m e^{-\zeta\sigma_z} = m(\cosh \zeta - \sigma_z \sinh \zeta) = E - \sigma_z p_z, \quad (2.118)$$

então

$$\begin{cases} (E - \sigma_z p_z)\chi_+(p_z) = m\chi_-(p_z), \\ (E + \sigma_z p_z)\chi_-(p_z) = m\chi_+(p_z). \end{cases} \quad (2.119)$$

Como a direção  $z$  não é privilegiada, pois a equação deve ser invariante sob rotações, pode-se escrever a equação para um  $\mathbf{p}$  arbitrário:

$$\begin{cases} (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_+(\mathbf{p}) = m\chi_-(\mathbf{p}), \\ (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_-(\mathbf{p}) = m\chi_+(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (2.120)$$

que é a equação de Dirac para uma partícula livre no espaço dos momentos. Para uma partícula de massa nula, não há acoplamento entre os dois espinores de Weyl:

$$\begin{cases} (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_+(\mathbf{p}) = 0, \\ (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_-(\mathbf{p}) = 0. \end{cases} \quad (2.121)$$

Estas são as Equações de Weyl no espaço dos momentos. Quando  $m = 0$  e  $|p| = E$ , estas equações ficam:

$$\begin{cases} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi_+(\mathbf{p}) = 0, \\ (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi_-(\mathbf{p}) = 0. \end{cases} \quad (2.122)$$

Como  $\frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  é o operador de helicidade, que é definido no Apêndice F, a partir dessas expressões é possível ver que os operadores de Weyl são autoestados do operador de helicidade no limite para massas nulas. Por isso, se partículas de spin  $\frac{1}{2}$  com massa zero existissem, elas poderiam ser descritas por um único dos dois espinores de Weyl.

Fazendo a substituição

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\boldsymbol{\nabla} \quad , \quad E \rightarrow i\partial_t, \quad (2.123)$$

é possível encontrar as equações de Dirac no espaço das coordenadas:

$$\begin{cases} (\partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\varphi_+(\mathbf{r}, t) + im\varphi_-(\mathbf{r}, t) = 0, \\ (\partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\varphi_-(\mathbf{r}, t) + im\varphi_+(\mathbf{r}, t) = 0, \end{cases} \quad (2.124)$$

onde  $\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  são as transformadas de Fourier dos espinores do espaço dos momentos dadas por

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int d^3p e^{-iEt} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \chi_{\pm}(\mathbf{p}). \quad (2.125)$$

Estes espinores satisfazem a equação de Klein-Gordon:

$$(\partial^2 + m^2)\chi_{\pm} = 0 \quad (2.126)$$

A equação de Klein-Gordon apenas codifica a relação cinemática  $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ , mas não relaciona o spin e seus problemas com as transformações de Lorentz.

Não é necessário provar que a equação de Dirac é covariante, pois ela já foi construída assim. Podemos reescrever as equações (2.124) de uma forma covariante mais explícita. Para isso, reescrevemos o espinor de Dirac:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_{+1} \\ \varphi_{+2} \\ \varphi_{-1} \\ \varphi_{-2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

Se tomarmos a matriz  $\gamma^0$ , dada por (2.30), e definirmos a matriz  $\Sigma^i$

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.128)$$

então é possível escrever uma única equação para  $\psi$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + im\gamma^0 \right) \psi = 0, \quad (2.129)$$

ou, escrevendo na forma matricial,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = 0.$$

Como  $m$  é invariante, podemos reescrever a equação (2.129) multiplicando por  $\gamma^0$  pela esquerda:

$$\left[ \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^0 \Sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + im(\gamma^0)^2 \right] \psi = 0. \quad (2.130)$$

Como  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ , então

$$\left[ \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^0 \Sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathbb{1}im \right] \psi = 0. \quad (2.131)$$

As outras três matrizes de Dirac podem ser definidas por:

$$\gamma^i = \gamma^0 \Sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \equiv -\gamma_i. \quad (2.132)$$

Algumas propriedades das matrizes de Dirac são dadas no Apêndice G, sem demonstração.

Como  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$ , então é possível reescrever a derivada parcial da equação (2.131) como

$$\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (2.133)$$

e então chegamos na forma mas familiar da Equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.134)$$

A equação de Dirac é invariante sob a transformação

$$\psi \rightarrow \Xi \psi, \quad \gamma^\mu \rightarrow \Xi \gamma^\mu \Xi^{-1}, \quad (2.135)$$

onde  $\Xi$  é uma matriz  $4 \times 4$  qualquer com elementos constantes. Ou seja, qualquer forma de representar a matriz de Dirac é igualmente boa.

Uma notação comum na literatura é dada ao definirmos

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu, \quad (2.136)$$

onde  $A_\mu$  é um quadrivetor qualquer. Chamamos  $\not{A}$  de “A slashed”. Assim, outra forma de escrever a equação de Dirac é

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (2.137)$$

com  $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ .

## 2.4 DENSIDADE DE CARGA E CORRENTE

Ainda é necessário verificar se existe alguma lei de conservação da densidade de probabilidade para a teoria de Dirac análoga à teoria de Schrödinger. Estas envolvem combinações bilineares da função de onda e seu complexo conjugado. Reescrevendo a equação de Dirac, temos

$$i\partial_t \varphi_+ = -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi_+ + m\varphi_-, \quad (2.138)$$

$$i\partial_t \varphi_- = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi_- + m\varphi_+. \quad (2.139)$$

É necessário encontrar os complexos conjugados destas equações. Considerando  $\Phi$  um vetor complexo  $n$ -dimensional com componentes  $\phi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , e  $M$  uma matriz  $n \times n$  qualquer, temos

$$(M\Phi)_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^* \phi_\beta^* = \Phi_\beta^* (M^\dagger)_{\beta\alpha} = (\Phi^* M^\dagger)_\alpha, \quad (2.140)$$

e como no nosso caso  $M = \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\dagger$ , então

$$(\boldsymbol{\sigma}\varphi)_\alpha^* = (\varphi^*\boldsymbol{\sigma})_\alpha. \quad (2.141)$$

Assim, os complexos conjugados das equações (2.138) e (2.139) são

$$-i\partial_t\varphi_{+\alpha}^* = i\nabla \cdot (\varphi_+^*\boldsymbol{\sigma})_\alpha + m\varphi_{-\alpha}^*, \quad (2.142)$$

$$-i\partial_t\varphi_{-\alpha}^* = -i\nabla(\varphi_-^*\boldsymbol{\sigma})_\alpha + m\varphi_{+\alpha}^*. \quad (2.143)$$

Após algumas manipulações algébricas, como podemos ver no Apêndice B.4 ficamos com as equações

$$\begin{cases} \partial_t(\varphi_+^*\varphi_+) = -\nabla(\varphi_+^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_+) + im(\varphi_-^*\varphi_+ - \varphi_+^*\varphi_-), \\ \partial_t(\varphi_-^*\varphi_-) = \nabla(\varphi_-^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_-) - im(\varphi_-^*\varphi_+ - \varphi_+^*\varphi_-). \end{cases} \quad (2.144)$$

Somando elas, temos

$$\partial_t(\varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-) = -\nabla \cdot (\varphi_+^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_+ + \varphi_-^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_-), \quad (2.145)$$

e definindo a densidade  $\rho$  e a corrente  $\mathbf{j}$

$$\rho = \varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-; \quad (2.146)$$

$$\mathbf{j} = \varphi_+^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_+ + \varphi_-^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_-, \quad (2.147)$$

chegamos na equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.148)$$

Então, vemos que a densidade  $\rho$  é positivo-definida, como Dirac estipulou.

A densidade e a corrente têm duas propriedades notáveis. Não existem termos misturando os espinores de Weyl, propriedade importante na interação eletromagnética e na interação fraca; e a corrente não tem termos com derivada espacial. Como queremos uma teoria relativística,  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  devem formar um quadrivetor, o que só é possível se os dois têm uma forma parecida.

Como a equação de Dirac é covariante e as derivadas da equação de continuidade formam um quadrivetor, a quadricorrente deve ser:

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}), \quad (2.149)$$

e a equação de continuidade fica:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.150)$$

Precisamos ainda mostrar como o quadrivetor de corrente  $j^\mu$  é escrito na representação de Weyl. Então, como  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ , o termo  $j^0 = \rho$  é

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi, \\ \rho &= \varphi_+^* \varphi_+ + \varphi_-^* \varphi_-. \end{aligned}$$

O termo  $j^i$  é

$$j^i = \bar{\psi} \gamma^i \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi.$$

Assim,

$$j^i = \varphi_+^* \sigma_i \varphi_+ - \varphi_-^* \sigma_i \varphi_-,$$

e então o quadrivetor de corrente fica:

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.151)$$





### 3 MODELO SIGMA LINEAR

#### 3.1 SIMETRIAS NA MECÂNICA QUÂNTICA

Why should we be concerned with symmetry? In the first place, symmetry is fascinating to the human mind, and everyone likes objects or patterns that are in some way symmetrical. It is an interesting fact that nature often exhibits certain kinds of symmetry in the objects we find in the world around us. Perhaps the most symmetrical object imaginable is a sphere, and nature is full of spheres?stars, planets, water droplets in clouds. The crystals found in rocks exhibit many different kinds of symmetry, the study of which tells us some important things about the structure of solids. Even the animal and vegetable worlds show some degree of symmetry, although the symmetry of a flower or of a bee is not as perfect or as fundamental as is that of a crystal.

(...)

First, what is symmetry? How can a physical law be “symmetrical”? The problem of defining symmetry is an interesting one and we have already noted that Weyl gave a good definition, the substance of which is that a thing is symmetrical if there is something we can do to it so that after we have done it, it looks the same as it did before.

(*The Feynman Lectures on Physics*, Richard P. Feynman (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2006))

A teoria de campos é usualmente escrita na formulação lagrangiana. Para encontrarmos as equações de movimento do sistema, utilizamos o princípio de Hamilton, que diz que a variação da ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

deve ser nula:

$$\delta S = 0, \tag{3.1}$$

o que nos leva à equação de Euler-Lagrange (MANDL; SHAW, 2010)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{3.2}$$

Se queremos uma teoria de campos, então substituímos as coordenadas  $q$  pelos campos  $\phi(x, t)$ :

$$q \rightarrow \phi(x, t); \quad (3.3)$$

$$\dot{q} \rightarrow \partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x^\mu}. \quad (3.4)$$

A lagrangiana agora é dada por:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t), t) \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{L}(\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t), t)$  é a densidade de lagrangiana, que por simplicidade chamaremos de lagrangiana de agora em diante. Então, a ação é

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t), t) \quad (3.6)$$

Pela invariância de Lorentz,  $S$ , e conseqüentemente  $\mathcal{L}$ , se transformam como escalares de Lorentz. As equações de movimento dos campos podem ser obtidas por um princípio variacional análogo ao princípio de Hamilton da mecânica (MANDL; SHAW, 2010), ou seja, a variação de  $S$  deve ser nula. Esta é realizada por uma variação dos campos

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi; \quad (3.7)$$

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), \quad (3.8)$$

onde

$$\delta(\partial_\mu) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu \phi = \partial_\mu(\delta\phi).$$

Além disso,  $\delta\phi$  deve ser nulo na fronteira da região considerada. Então, se  $\Omega$  é a área de integração e  $\Gamma(\Omega)$  a sua fronteira,

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \delta \mathcal{L} = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right]. \quad (3.9)$$

Assim, após algumas manipulações, como podemos ver no Apêndice C.1, a ação fica

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi = 0. \quad (3.10)$$

Como  $\delta\phi$  é arbitrário, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (3.11)$$

que é a equação de Euler-Lagrange. Se estivermos lidando com mais de um campo,  $\phi_i$ , as equações de movimento têm a mesma forma que a equação anterior, mas um índice é adicionado para rotular os campos distintos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Para quantizar os campos, podemos impor relações de comutação canônicas de tempo igual entre estes e seus momentos canônicos conjugados, dados por

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (3.13)$$

Estas relações de comutação são:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= 0; \\ [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] &= 0; \\ [\Pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (3.14)$$

No caso dos férmions, os comutadores são substituídos por anticomutadores devido às suas propriedades de antissimetrização, como podemos ver com mais detalhes em (MANDL; SHAW, 2010)

Pelo teorema de Noether (NOETHER, 1918), a invariância da lagrangiana sob uma transformação contínua resulta numa quantidade conservada, uma corrente. Assim, considerando a transformação do campo:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi. \quad (3.15)$$

A variação da lagrangiana é dada por (GREINER; REINHARDT, 2013)

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right), \quad (3.16)$$

como podemos ver no Apêndice C.2. Se  $\mathcal{L}$  é invariante sob a transformação (3.15),

$$\delta \mathcal{L} = 0, \quad (3.17)$$

então temos a corrente conservada  $J_\mu$

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi, \quad (3.18)$$

com  $\partial^\mu J_\mu = 0$ .

Consideraremos a transformação unitária genérica do campo

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i - i\Theta^a T_{ij}^a \phi_j, \quad (3.19)$$

onde  $\Theta^a$  corresponde ao ângulo de rotação e  $T_{ij}^a$  é uma matriz conhecida como o gerador da transformação. O índice  $a$  indica que existe mais de um gerador associado à transformação de simetria, já que neste trabalho utilizaremos transformações quirais, que são deste tipo. Esta última equação corresponde à expansão para pequenos ângulos da transformação geral

$$\phi \rightarrow \exp(-i\Theta^a \hat{T}) \phi, \quad (3.20)$$

na qual  $\phi$  é um vetor para indicar as várias componentes do campo  $\phi$ . Da equação (3.18) encontramos a expressão para as correntes conservadas

$$J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} T_{jk}^a \phi_k, \quad (3.21)$$

que dividimos pelo ângulo  $\Theta^a$ . Esta é comumente chamada de corrente de Noether. Uma corrente conservada leva a uma carga conservada

$$Q = \int d^3x J_0(x), \quad (3.22)$$

com

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (3.23)$$

Adicionando um termo de quebra de simetria pequeno à lagrangiana, temos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (3.24)$$

onde  $\mathcal{L}_0$  é simétrico em relação à simetria dada e  $\mathcal{L}_1$  é o termo que quebra a simetria. Como consequência disso, a variação da lagrangiana é dada por

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_1. \quad (3.25)$$

Notemos que pela equação (3.16), a variação da corrente pode ser expressa como a divergência da corrente, ou seja,

$$\delta \mathcal{L}_1 = \partial^\mu J_\mu. \quad (3.26)$$

Como  $\delta \mathcal{L}_1 \neq 0$ , então a corrente não é conservada, e com isso podemos ver como a não conservação de uma corrente está relacionada com a quebra de simetria em uma lagrangiana.

## 3.2 SIMETRIA QUIRAL

Como já vimos, existem duas representações do grupo de Lorentz para espiniores que não são equivalentes. Enquanto algumas quantidades, como o termo cinético da lagrangiana, não misturam essas duas representações, outras, mais especificamente o termo de massa, misturam. Assim, na ausência do termo de massa, muitas teorias de campo possuem uma simetria adicional, chamada de simetria quiral (MIRANSKY, 1994). Estudaremos esta simetria nas próximas seções.

### 3.2.1 Lagrangiana

No capítulo 1 estudamos como algumas quantidades de nosso interesse se comportam sob transformações de Lorentz. Podemos construir uma lagrangiana  $\mathcal{L}$  relacionando estas quantidades ao impormos as condições:

1. Ela deve ser hermitiana, ou seja,  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ ;
2. Deve ser invariante de Lorentz;
3. O número de férmions deve ser conservado.

Levando em conta estas condições, podemos construir a lagrangiana termo a termo.

#### *Termo Cinético*

Este termo deve conter a derivada  $\partial_\mu$  do quadrivetor, e pode ser contraído com outro quadrivetor. Assim, o termo cinético da lagrangiana pode ser

$$\mathcal{L}_K = i\chi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \chi_R + \chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L. \quad (3.27)$$

### Termo de Massa

O termo de massa deve ser um escalar. Então um candidato que preserva o número de férmions é dado por

$$\mathcal{L}_M = m(\chi_L^\dagger \chi_R + \chi_R^\dagger \chi_L), \quad (3.28)$$

que é o chamado termo de massa de Dirac.

Assim, a lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = i\chi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \chi_R + i\chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L + m(\chi_L^\dagger \chi_R + \chi_R^\dagger \chi_L). \quad (3.29)$$

Podemos reescrever a lagrangiana (3.29) na representação de Weyl como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\bar{\psi} \psi, \quad (3.30)$$

Note que se aplicarmos as equações de Euler-Lagrange (3.11) para esta lagrangiana, obteremos a equação de Dirac dada por (2.134).

### 3.2.2 $U(1)_R \times U(1)_L$

No limite de massa nula da lagrangiana (3.30), esta tem simetrias sob transformações de fase internas de  $\psi_R$  e  $\psi_L$  separadamente. Ou seja,

$$\psi_R \rightarrow \exp(i\theta_R)\psi_R \quad , \quad \psi_L \rightarrow \exp(i\theta_L)\psi_L. \quad (3.31)$$

Então as correntes são conservadas independentemente:

$$\partial^\mu R_\mu = 0 \quad , \quad \partial^\mu L_\mu = 0, \quad (3.32)$$

onde

$$R_\mu = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R = \chi_R^\dagger \sigma_\mu \chi_R \quad (3.33)$$

$$L_\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L = \chi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \chi_L \quad (3.34)$$

Pela conservação das correntes, as cargas são constantes de movimento:

$$Q_R = \int d^3x R_0 \quad , \quad Q_L = \int d^3x L_0 \quad (3.35)$$

A simetria associada à duas transformações de fase independentes é chamada de simetria quiral, e é representada pelo grupo  $U(1)_R \times U(1)_L$ .

Para férmions massivos, estas simetrias não são exatas, e temos somente uma simetria residual na parte diagonal das transformações, onde os elementos são parametrizados como

$$\theta_R = \theta_L \equiv \theta_V.$$

Assim, os férmions de mão direita e de mão esquerda se transformam da mesma forma:

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta_V) \psi = \begin{pmatrix} \exp(i\theta_V) \psi_R \\ \exp(i\theta_V) \psi_L \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Esta simetria também é conhecida como simetria vetorial. Podemos mostrar que o termo de massa da equação (3.30) é invariante sob essa transformação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_M &= (m\bar{\psi}\psi)' \\ &= m\bar{\psi}\psi \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M$$

Podemos definir outra transformação, que é independente da transformação vetorial, a transformação axial:

$$\theta_L = -\theta_R \equiv \theta_A, \quad (3.37)$$

cuja transformação para  $\psi$  é

$$\psi \rightarrow \exp(i\theta_A \gamma_5) \psi = \begin{pmatrix} \exp(i\theta_A) \psi_R \\ \exp(-i\theta_A) \psi_L \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Sob esta transformação o termo de massa (3.30) não é invariante, mas precisamos antes saber como  $\bar{\psi}$  se transforma:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma_0 \rightarrow \psi^\dagger \exp(-i\theta_A \gamma_5) \gamma_0 \\ &= \psi^\dagger \gamma_0 \exp(i\theta_A \gamma_5) \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp(i\theta_A \gamma_5). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Na segunda linha, utilizamos a propriedade de anticomutação de  $\gamma_5$  e

$\gamma_0, \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_5$ . Assim, o termo de massa fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_M &= (m\bar{\psi}\psi)' \\ \mathcal{L}'_M &= \bar{\psi}\exp(2i\theta_A\gamma_5)\psi \neq \mathcal{L}_M\end{aligned}\quad (3.40)$$

Então, podemos definir a corrente vetorial

$$V_\mu = R_\mu + L_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (3.41)$$

e a corrente axial

$$A_\mu = R_\mu - L_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \quad (3.42)$$

Para o caso massivo, só a corrente vetorial é conservada. Então a carga vetorial, também chamada de número fermiônico, é uma constante de movimento:

$$Q_V = Q_R + Q_L = \int d^3x (\chi_R^\dagger\chi_R + \chi_L^\dagger\chi_L). \quad (3.43)$$

Já a carga axial

$$Q_A = Q_R - Q_L = \int d^3x (\chi_R^\dagger\chi_R - \chi_L^\dagger\chi_L) \quad (3.44)$$

só é uma constante de movimento quando o férmion tem massa nula.

### 3.2.3 $SU(2)_R \times SU(2)_L$

A simetria quirial  $U(1)_R \times U(1)_L$  pode ser estendida para uma simetria  $U(N)_R \times U(N)_L$ , onde  $N \geq 2$  é o número de sabores leves. Agora consideraremos o caso do isospin, ou seja, o caso de dois sabores.

Neste caso, os férmions formam um isoespinor de dois componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

que é a representação fundamental do isospin no  $SU(2)$ . Os componentes  $u$  e  $d$  são espinores de quatro componentes. Na representação de Weyl eles são dados por

$$u = u_R + u_L, \quad (3.46)$$

em que



$$u_R = \begin{pmatrix} \chi_R^u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L^u \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

onde  $\chi_R^u$  e  $\chi_L^u$  são espinores de dois componentes. Para a componente  $d$  as relações são semelhantes. Assim, o isoespinores pode ser escrito como

$$\psi = \psi_R + \psi_L = \begin{pmatrix} u_R + u_L \\ d_R + d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R^u \\ \chi_L^u \\ \chi_R^d \\ \chi_L^d \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

A lagrangiana livre dos férmions é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad (3.49)$$

em que  $m$  é a matriz de massa  $2 \times 2$  no espaço de isospin

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Transformações quirais do  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  são rotações do isospin para

$$\psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

assim,

$$\psi_R = \exp(ir)\psi_R, \quad \psi_L = \exp(il)\psi_L, \quad (3.52)$$

onde

$$\mathbf{r} = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{l}, \quad (3.53)$$

são os parâmetros das transformações e

$$\mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \quad (3.54)$$

são os geradores do  $SU(2)$ , onde  $\boldsymbol{\tau}$  são as matrizes de Pauli. As correntes de isospin são definidas por

$$R_\mu^a = \bar{\psi}_R \gamma_\mu t^a \psi_R = \chi_R^\dagger \sigma_\mu^a \chi_R \quad (3.55)$$

$$L_\mu^a = \bar{\psi}_L \gamma_\mu t^a \psi_L = \chi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu^a \chi_L, \quad (3.56)$$

em que

$$\chi_R = \begin{pmatrix} \chi_R^u \\ \chi_R^d \end{pmatrix}, \quad \chi_L = \begin{pmatrix} \chi_L^u \\ \chi_L^d \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

são os espinores isodoubletos de dois componentes. Então, as correntes de isospin axial e vetorial são

$$V_\mu^a = R_\mu^a + L_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu t^a \psi \quad (3.58)$$

$$A_\mu^a = R_\mu^a - L_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 t^a \psi \quad (3.59)$$

No limite sem massa, as duas correntes são conservadas sob as transformações vetorial e axial:

$$\psi \rightarrow \exp(iv) \psi = \begin{pmatrix} \exp(iv) u_R + \exp(iv) u_L \\ \exp(iv) d_R + \exp(iv) d_L \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\psi \rightarrow \exp(ia \gamma_5) \psi = \begin{pmatrix} \exp(ia) u_R - \exp(ia) u_L \\ \exp(ia) d_R - \exp(ia) d_L \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

onde

$$v = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e} \quad a = \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.62)$$

são os parâmetros vetorial e axial  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  respectivamente. Para massas finitas, as duas correntes não são conservadas. Já quando  $m_u = m_d$ , somente a corrente vetorial é conservada.

### *Propriedades de transformação das correntes*

Sob uma transformação infinitesimal

$$\psi_R \rightarrow \exp(ir) \psi_R = (1 + i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}) \psi_R; \quad (3.63)$$

$$\bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R^\dagger \gamma_0 \exp(-ir) = \bar{\psi}_R (1 - i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}), \quad (3.64)$$

a corrente direita tem a variação

$$\begin{aligned}
R_\mu^a &\rightarrow \bar{\Psi}_R(1 - i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r})\gamma_\mu t^a(1 + \mathbf{t} \cdot \mathbf{r})\Psi_R \\
&\sim (\bar{\Psi}_R\gamma_\mu t^a - i\bar{\Psi}_R\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}\gamma_\mu t^a)(1 + i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r})\Psi_R \\
&= \bar{\Psi}_R\gamma_\mu t^a\Psi_R - i\bar{\Psi}_R\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}\gamma_\mu t^a\Psi_R + i\bar{\Psi}_R\gamma_\mu t^a\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}\Psi_R + \mathcal{O}((\mathbf{t} \cdot \mathbf{r})^2).
\end{aligned}$$

Como a transformação é infinitesimal, termos de ordem maior ou igual a dois são descartados. Usando a relação de comutação (HOSAKA; TOKI, 2001)

$$[t^a, t^b] = i\varepsilon_{abc}t^c, \quad (3.65)$$

temos

$$\begin{aligned}
R_\mu^a &\rightarrow \bar{\Psi}_R\gamma_\mu t^a\Psi_R + i\bar{\Psi}_R\gamma_\mu[t^a, \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}]\Psi_R \\
&= \bar{\Psi}_R\gamma_\mu t^a\Psi_R + i\bar{\Psi}_R\gamma_\mu(i\varepsilon_{abc}t^c r^b)\Psi_R \\
R_\mu^a &\rightarrow R_\mu^a - \varepsilon_{abc}R_\mu^c.
\end{aligned} \quad (3.66)$$

Da mesma forma, considerando as transformações infinitesimais

$$\psi_L \rightarrow \exp(il)\psi_L = (1 + i\mathbf{t} \cdot \mathbf{l})\psi_L; \quad (3.67)$$

$$\bar{\psi}_L \rightarrow \psi_L^\dagger \gamma_0 \exp(-il) = \bar{\psi}_L(1 - i\mathbf{t} \cdot \mathbf{l}), \quad (3.68)$$

a variação da corrente esquerda fica

$$L_\mu^a \rightarrow L_\mu^a - \varepsilon_{abc}l^b L_\mu^c. \quad (3.69)$$

Estas transformações podem ser convertidas na transformação vetorial e na axial. Adicionando (3.66) e (3.69), e definindo  $l = r = v$ , temos a transformação vetorial

$$\begin{aligned}
V_\mu^a &\rightarrow (R_\mu^a - \varepsilon_{abc}v^b R_\mu^c) + (L_\mu^a - \varepsilon_{abc}v^b L_\mu^c) \\
V_\mu^a &\rightarrow V_\mu^a - \varepsilon_{abc}v^b V_\mu^c.
\end{aligned} \quad (3.70)$$

Da mesma forma, subtraindo (3.66) de (3.69),

$$\begin{aligned}
A_\mu^a &\rightarrow (R_\mu^a - \varepsilon_{abc} v^b R_\mu^c) - (L_\mu^a - \varepsilon_{abc} v^b L_\mu^c) \\
A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - \varepsilon_{abc} v^b A_\mu^c.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Agora, para a transformação axial, definimos  $r = -l = a$ . Somando (3.66) e (3.69),

$$\begin{aligned}
V_\mu^a &\rightarrow (R_\mu^a - \varepsilon_{abc} a^b R_\mu^c) + (L_\mu^a + \varepsilon_{abc} a^b L_\mu^c) \\
V_\mu^a &\rightarrow V_\mu^a - \varepsilon_{abc} a^b A_\mu^c,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

e subtraindo (3.66) de (3.69),

$$\begin{aligned}
A_\mu^a &\rightarrow (R_\mu^a - \varepsilon_{abc} a^b R_\mu^c) - (L_\mu^a + \varepsilon_{abc} a^b L_\mu^c) \\
A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - \varepsilon_{abc} a^b V_\mu^c.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Assim, é possível encontrar as relações de comutação das cargas que correspondem às transformações acima. Primeiro é necessário encontrar as relações entre as correntes de isospin direita e esquerda, dadas por (3.55) e (3.56). Por isso, pela definição (3.35) da carga e pela relação de comutação (3.65),

$$\begin{aligned}
[Q_R^a, Q_R^b] &= \int d^3x \bar{\psi}_R \gamma_0 [t^a, t^b] \psi_R \\
&= \int d^3x \bar{\psi}_R \gamma_0 (i\varepsilon_{abc} t^c) \psi_R; \\
[Q_R^a, Q_R^b] &= i\varepsilon_{abc} Q_R^c.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Da mesma forma,

$$[Q_L^a, Q_L^b] = i\varepsilon_{abc} Q_L^c \tag{3.75}$$

$$[Q_L^a, Q_R^b] = 0. \tag{3.76}$$

Pode-se notar que as relações de comutação entre a carga direita e a esquerda são fechadas entre cada setor. Esta álgebra e a simetria associada à ela é conhecida como simetria quiral  $SU(2)_R \times SU(2)_L$ . A partir destas

relações é possível encontrar as relações de comutação entre a carga axial e a vetorial

$$\begin{aligned} \left[ Q_V^a, Q_V^b \right] &= i\varepsilon_{abc} Q_V^c, \\ \left[ Q_A^a, Q_V^b \right] &= i\varepsilon_{abc} Q_A^c, \\ \left[ Q_A^a, Q_A^b \right] &= i\varepsilon_{abc} Q_V^c. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ou seja, transformações axiais e vetoriais se misturam entre si.

### 3.3 QUEBRA ESPONTÂNEA DA SIMETRIA QUIRAL

Se o estado fundamental de um determinado sistema não é invariante sob um determinado grupo de transformação, dizemos que ocorre uma quebra espontânea da simetria deste grupo (ITZYKSON; ZUBER, 2006).

No limite da Cromodinâmica Quântica (QCD) com quarks de massa nula, a simetria quiral é uma simetria exata. Entretanto, no mundo real ela acontece apenas aproximadamente, devido à massa pequena mas não nula dos quarks. Então, essa simetria é boa para o setor de sabor leve  $s$ ,  $e$ , principalmente,  $u$  e  $d$ .

Uma primeira suposição é a de que a simetria da lagrangiana deveria levar à simetria das partículas. Na simetria quiral, como a transformação  $\gamma_5$  relaciona estados de paridade positivos e negativos, estes deveriam aparecer como partículas degeneradas, mas na realidade isso não acontece. Experimentos mostram que bárions e mésons de paridades opostas não têm a mesma massa (PATRIGNANI et al., 2016).

A simetria do sistema implica que a hamiltoniana é invariante sob a transformação de simetria  $U$

$$UHU^\dagger = H. \quad (3.78)$$

Considerando dois estados,  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ , relacionados à transformação  $U$ , que são criados pelos operadores de criação  $a^\dagger$  e  $b^\dagger$ :

$$|A\rangle = a^\dagger |0\rangle \quad , \quad |B\rangle = b^\dagger |0\rangle. \quad (3.79)$$

Assim,  $U$  relaciona  $a$  e  $b$  através da expressão

$$UaU^\dagger = b. \quad (3.80)$$

Conseqüentemente, a transformação do estado  $|A\rangle$  é

$$|A\rangle \rightarrow U|A\rangle = Ua^\dagger U^\dagger U|0\rangle, \quad (3.81)$$

$$= b^\dagger U|0\rangle. \quad (3.82)$$

Intuitivamente, supomos que se o vácuo é invariante

$$U|0\rangle = |0\rangle, \quad (3.83)$$

então

$$E_A = \langle A|H|A\rangle = \langle B|UHU^\dagger|B\rangle = \langle B|H|B\rangle = E_B, \quad (3.84)$$

ou seja,  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$  são degenerados.

Se a simetria da hamiltoniana também é simetria do estado, então esta acontece explicitamente, o que chamamos de modo de Wigner-Weyl. Já se a simetria da hamiltoniana não é realizada nos estados, a simetria é quebrada espontaneamente, o que chamamos de modo de Nambu-Goldstone.

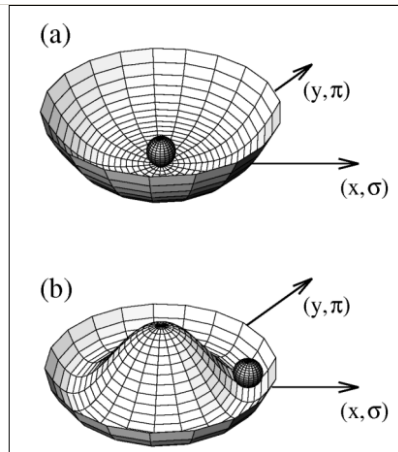


Figura 1 – Potencial Quiral (KOCH, 1997)

Uma forma de entender melhor isso é tomando-se o análogo da mecânica clássica (KOCH, 1997). Considerando a figura (1), onde temos dois potenciais que são rotacionalmente invariantes. O primeiro, da parte de cima da figura, que corresponde ao modo de Wigner-Weyl, tem o estado fundamental no centro, no ponto de mínimo da função. Assim, o potencial somado

ao estado fundamental continua invariante sob rotações. Entretanto, se considerarmos o potencial da parte de baixo da figura, que corresponde ao modo de Nambu-Goldstone, temos o mínimo da função numa distância finita do centro, formando um contínuo de estados fundamentais distintos, enquanto o centro é um ponto de máximo local. Neste potencial, se escolhermos um estado como estado fundamental, selecionamos uma direção preferencial, e a simetria rotacional é espontaneamente quebrada.

### 3.3.1 Teorema de Goldstone

A quebra espontânea de uma simetria contínua implica na existência de partículas de spin e massa zero. Isto foi estudado inicialmente por Nambu em 1960 (NAMBU, 1960) e mais tarde por Goldstone em 1961 (GOLDSTONE, 1961) (GOLDSTONE; SALAM; WEINBERG, 1962). Estas partículas escalares são chamadas de bósons de Nambu-Goldstone, ou simplesmente bósons de Goldstone.

Um estudo mais aprofundado deste teorema pode ser encontrado em (CHENG; LI, 1984), (HOSAKA; TOKI, 2001) e (ITZYKSON; ZUBER, 2006).

### 3.3.2 PCAC

A quebra espontânea da simetria quiral  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  implica que deveriam existir três bósons pseudoescalares de Goldstone (MIRANSKY, 1994). Entretanto, na natureza não existem hádrons de massa nula, e os hádrons mais leves são os píons, com a massa  $m_\pi \simeq 140\text{MeV}$ . Assim, a corrente axial não é conservada. Considerando a equação

$$\langle 0 | A_\mu^a | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iqx}, \quad (3.85)$$

onde os índices  $a$  e  $b$  são os rótulos do isospin e  $\mu$  indica um vetor de Lorentz (CHENG; LI, 1984)(ITZYKSON; ZUBER, 2006). Experimentalmente, o valor de  $f_\pi$ , que é a constante de decaimento do pión, é  $f_\pi \simeq 93\text{MeV}$ (ITZYKSON; ZUBER, 2006)(KOCH, 1997). Tomando a divergência da equação anterior, temos

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu(x) | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iqx} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iqx}, \quad (3.86)$$

Entretanto, como a massa dos píons é muito menor que a massa de ou-

tros hádrons, pode-se dizer que eles são “quase” bósons de Goldstone, ou seja, o fato dos píons terem massa muito pequena é diretamente relacionado com a conservação parcial da corrente axial. Por isso dizemos que a transformação axial é uma simetria aproximada. Isso é conhecido como a conservação parcial das correntes axiais (Partial conservation of the axial current, PCAC). Pelas relações acima, ainda é possível encontrar uma expressão para a corrente axial carregada por um pión

$$A_{\mu, pion}^a = f_\pi \partial_\mu \phi^a(x), \quad (3.87)$$

na qual  $\phi(x)$  é o campo do pión.

### 3.3.3 Relação de Goldberger-Treiman

Existem mais evidências para a conservação parcial da corrente axial (KOCH, 1997). Considerando a corrente axial de um núcleon, dada por

$$A_{\mu, nucleon}^a = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N, \quad (3.88)$$

onde  $\psi_N$  é um isoespino que representa prótons e nêutrons, e  $g_a$  é o fator de renormalização, que é encontrado experimentalmente. Como a massa  $M_N$  do núcleon é grande, não esperamos que a corrente axial seja conservada

Pela equação de Dirac livre para o núcleon

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_N) \psi_N = 0, \quad (3.89)$$

é possível mostrar que

$$\partial^\mu A_{\mu, nucleon}^a = i g_a M_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N \neq 0. \quad (3.90)$$

que só é zero caso a massa do núcleon seja zero. A prova desta última equação está no Apêndice C.3. Sabemos que o núcleon interage fortemente com o pión, então a corrente axial é a soma das contribuições do pión e do núcleon. Assim, utilizando a relação PCAC (3.87) e a corrente do núcleon (3.88), temos

$$A_\mu^a = g_a \psi_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \phi^a. \quad (3.91)$$

Se a corrente total é conservada,

$$\partial^\mu A_\mu^a = \partial^\mu A_{\mu, nucleon}^a + f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \phi^a = 0 \quad (3.92)$$



e por isso,

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi^a = -g_a i \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N \quad (3.93)$$

que é a equação de Klein-Gordon para um bóson de massa nula acoplado à um núcleon. Por isso, o pión não deve ter massa para a corrente axial ser conservada. Se permitirmos que o pión tenha uma massa finita, então teremos a equação de Klein-Gordon para um pión acoplado a um núcleon

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \phi = -g_a i \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N, \quad (3.94)$$

em que a constante de acoplamento pión-núcleon é dada por (KOCH, 1997)

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M_N}{f_\pi} \simeq 12,6. \quad (3.95)$$

Esta última equação é conhecida como relação de Goldberger-Treiman (GOLDBERGER; TREIMAN, 1958). Experimentalmente, esta constante de acoplamento, extraída de experimentos de espalhamento pión-núcleon (KOCH, 1997), é

$$g_{\pi NN}^{exp} = 13,4. \quad (3.96)$$

### 3.4 MODELO SIGMA LINEAR

Construiremos agora um modelo efetivo simples que é um invariante quirral e envolve píons e núcleons, que chamamos de modelo sigma linear. Este modelo foi proposto por Gell-Mann e Levy em 1960 (GELL-MANN; LÉVY, 1960).

Usaremos dimensões para denotar as representações das simetrias de isospin do  $SU(2)$ . Assim, o singlete tem dimensão 1, a representação fundamental tem dimensão 2, a representação adjunta tem dimensão 3, e assim por diante (HOSAKA; TOKI, 2001). Então, representações do grupo quirral  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  são denotadas por um conjunto de dois inteiros  $(m, n)$ , onde  $m$  é a dimensão das representações do  $SU(2)_R$  e  $n$  é a dimensão das representações do  $SU(2)_L$ . Considerando apenas um férmion, a representação fundamental dos férmions de mão direita e de mão esquerda é

$$(2, 1) \sim \chi_R = \begin{pmatrix} \chi_R^u \\ \chi_R^d \end{pmatrix}; \quad (3.97)$$

$$(1, 2) \sim \chi_L = \begin{pmatrix} \chi_L^u \\ \chi_L^d \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

e estas são sujeitas às leis de transformação

$$(2, 1) : \chi_R \rightarrow [\exp(i\mathbf{t} \cdot \mathbf{r})]_{ab} (\chi_R)_b \equiv g_R \chi_R; \quad (3.99)$$

$$(1, 2) : \chi_L \rightarrow [\exp(i\mathbf{t} \cdot \mathbf{l})]_{ab} (\chi_L)_b \equiv g_L \chi_L. \quad (3.100)$$

A transformação de paridade, dada em (2.70), fica

$$\chi_R \leftrightarrow \eta \chi_L \quad \text{ou} \quad (2, 1) \leftrightarrow (1, 2), \quad (3.101)$$

onde  $\eta = \pm 1$ . Assim,  $\chi_R$  ou  $\chi_L$  sozinhos não são autoestados da paridade. Em vez disso, suas combinações lineares são

$$\chi_\eta \equiv \chi_R + \chi_L \quad \rightarrow \quad \eta(\chi_L + \chi_R) = \eta \chi_\eta; \quad (3.102)$$

$$\chi_{-\eta} \equiv \chi_R - \chi_L \quad \rightarrow \quad \eta(\chi_L - \chi_R) = -\eta \chi_\eta, \quad (3.103)$$

que são denotados por  $(2, 1) + (1, 2)$ .

Também é importante vermos a representação do quadrivetor quiral:

$$(2, 2) \sim \chi_L \chi_R^\dagger \equiv U \quad \text{ou} \quad \chi_R \chi_L^\dagger \equiv U^\dagger. \quad (3.104)$$

Como  $SU(2)$  é real, do ponto de vista da teoria de grupos não há distinção entre  $\chi_L \chi_R^\dagger$  e  $\chi_R \chi_L^\dagger$ . As suas leis de transformação são

$$\begin{aligned} U &= \chi_L \chi_R^\dagger \quad \rightarrow \quad (g_L \chi_L) (\chi_R^\dagger g_R^\dagger) = g_L U g_R^\dagger; \\ U^\dagger &= \chi_R \chi_L^\dagger \quad \rightarrow \quad (g_R \chi_R) (\chi_L^\dagger g_L^\dagger) = g_R U^\dagger g_L^\dagger. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Podemos relacionar o bilinear de quarks  $\chi_L \chi_R^\dagger$  com um quadrivetor  $B_\alpha$ :

$$B_\alpha = \text{Tr} \tau_\alpha \chi_L \chi_R^\dagger = \chi_R^\dagger \tau_\alpha \chi_L, \quad (3.106)$$

onde as matrizes de isospin  $\tau$  formam um quadrivetor

$$\tau_\alpha = (1, \tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (3.107)$$

Esta combinação é um quadrivetor no espaço de isospin quiral, mas no espaço-tempo é um escalar de Lorentz.

As regras de transformação básicas de um quadrivetor sob  $SU(2)_R \times$

$SU(2)_L$  são

$$\begin{aligned}
 \text{Vetorial: } B_0 &\rightarrow B_0 \\
 \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\
 \text{Axial: } B_0 &\rightarrow B_0 + i\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \\
 \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{B} + i\mathbf{a}B_0.
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

onde  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  são os parâmetros para transformações vetoriais e axiais definidos em (3.62).

O quadrivetor  $B_\alpha$  não é um autoestado da paridade, o que podemos verificar fazendo

$$B_\alpha = \chi_R^\dagger \tau_\alpha \chi_L \xrightarrow{\text{Paridade}} \chi_L^\dagger \tau_\alpha \chi_R = B_\alpha^\dagger. \tag{3.109}$$

Combinações com uma paridade definida são dadas por

$$\begin{aligned}
 \text{Paridade Positiva: } \sigma_\alpha &= \chi_L^\dagger \tau_\alpha \chi_R + \chi_R^\dagger \tau_\alpha \chi_L = \bar{\psi} \tau_\alpha \psi; \\
 \text{Paridade Negativa: } \pi_\alpha &= \chi_L^\dagger \tau_\alpha \chi_R - \chi_R^\dagger \tau_\alpha \chi_L = i\bar{\psi} \tau_\alpha \gamma_5 \psi
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Então temos dois quadrivetores quirais de escalares e pseudoescalares de Lorentz. Suas leis de transformação são dadas por

$$\text{Vetorial} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \rightarrow \sigma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma} \\ \pi_0 \rightarrow \pi_0 \\ \boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi} \end{array} \right. \tag{3.111}$$

$$\text{Axial} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 \rightarrow \sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}\pi_0 \\ \pi_0 \rightarrow \pi_0 - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} - \mathbf{a}\sigma_0 \end{array} \right. \tag{3.112}$$

Destas transformações, temos dois invariantes na forma quadrática:

$$\sigma_0^2 + \boldsymbol{\pi}^2 \quad \text{e} \quad \pi_0^2 + \boldsymbol{\sigma}^2. \tag{3.113}$$

Podemos verificar que estas expressões são invariantes fazendo, para a primeira,

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\pi})^2 &\rightarrow (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma}) \\
 &= \boldsymbol{\pi}^2 + \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot \boldsymbol{\pi} + \mathcal{O}(\mathbf{v}^2),
 \end{aligned}$$

mas como  $\mathbf{v}$  é infinitesimal, os termos de ordem maior que dois são desprezados. Lembrando da propriedade do produto vetorial

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{a}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{B}),$$

temos

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\pi})^2 &\rightarrow (\boldsymbol{\pi})^2 + \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{v} \\
 \boldsymbol{\pi}^2 &\rightarrow \boldsymbol{\pi}^2.
 \end{aligned}$$

Para  $\sigma_0$ , a relação é direta, e temos que

$$\sigma_0^2 + \boldsymbol{\pi}^2 \rightarrow \sigma_0^2 + \boldsymbol{\pi}^2$$

O outro invariante quadrático pode ser verificado da mesma forma. Estes invariantes podem ser vistos como o comprimento de dois quadrivetores independentes:

$$(\sigma_0, \boldsymbol{\pi}) \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.114)$$

Como experimentalmente já foram observados três píons pseudoescalares, então utilizamos a combinação

$$(\sigma_0^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \rightarrow (\sigma_0, \boldsymbol{\pi}). \quad (3.115)$$

Considerando um número pequeno de potências nas derivadas e nos campos, é possível escrever a lagrangiana do modelo sigma linear com os campos dos píons e do sigma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] - V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2), \quad (3.116)$$

e definindo  $\phi = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi^2). \quad (3.117)$$

Assumimos que o potencial deve ser de quarta ordem em  $\phi$ :

$$V(\phi^2) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (3.118)$$

Podemos notar que o termo quadrático tem a forma familiar do termo de massa do campo escalar, e o coeficiente  $\mu^2$  pode ser positivo ou negativo. Já o coeficiente do termo quártico  $\lambda$  deve ser positivo para garantir a estabilidade da teoria. O potencial deve ser par para garantir que a lagrangiana seja invariante sob transformações de paridade (QUIGG, 2013). Potências mais altas que a quarta são desconsideradas para que a teoria seja renormalizável.

Precisamos agora investigar a estrutura do vácuo e verificar como a simetria quiral acontece no modelo sigma. Podemos encontrar a hamiltoniana do modelo a partir da equação (3.117), realizando uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi_\alpha)^2 + V(\phi^2), \quad (3.119)$$

onde definimos o momento canônico como

$$p_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha} = \dot{\phi}_\alpha. \quad (3.120)$$

Desta forma, o vácuo deve ser estático, pois  $p_\alpha = 0$ , e uniforme, porque  $\partial_i\phi_\alpha = 0$ . Portanto os pontos de mínimo do potencial determinam o vácuo, ou seja,

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0. \quad (3.121)$$

Temos duas possibilidades para o mínimo do vácuo. Quando  $\mu^2 > 0$ , o potencial tem um único mínimo em  $\phi_\alpha = (\sigma, \boldsymbol{\pi}) = 0$ , que corresponde ao estado de vácuo. Este é o potencial de cima da figura (1), que já vimos, e equivale ao modo de Wigner. Este ponto é um invariante quiral, e podemos expandir o campo ao redor dele em pequenas flutuações que determinam a massa das partículas, que têm massas iguais:  $m_\sigma = m_\pi = \mu$ .

Já quando  $\mu^2 < 0$ , temos a quebra da simetria, como já vimos no potencial de baixo da figura (1), e o mínimo do potencial está em

$$|\phi| = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (3.122)$$

Este mínimo é degenerado infinitamente, e por isso o vácuo pode estar em qualquer ponto de mínimo. Se há um componente que não some na direção do pión, então o vácuo não tem paridade definida, o que contradiz a

natureza. Entretanto, podemos transformar esse ponto em

$$\sigma_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad , \quad \pi_i = 0 \quad (3.123)$$

Ao redor deste campo podemos introduzir flutuações do tipo  $\phi_\alpha = (\sigma_0 + \sigma, \boldsymbol{\pi})$ . Então as massas dessas flutuações são

$$m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2} \quad \text{e} \quad m_\pi = 0. \quad (3.124)$$

Assim, neste caso, que corresponde ao modo de Nambu-Goldstone, temos píons sem massa.

Já introduzimos a parte da lagrangiana que descreve os mésons, mas nossa teoria também tem núcleons. Por isso, precisamos introduzir o campo fermiônico na nossa lagrangiana. Isso pode ser feito de forma análoga ao que fizemos para mésons.

Férmions, tanto quarks quanto núcleons, pertencem à representação fundamental linear

$$\psi = \chi_R + \chi_L \sim (2, 1) + (1, 2). \quad (3.125)$$

Queremos construir uma lagrangiana de interação para férmions e mésons. A representação correspondente para férmions da relação (3.115) é dada por:

$$\begin{aligned} s &= \chi_L^\dagger \chi_R + \chi_R^\dagger \chi_L \\ p_i &= i(\chi_L^\dagger \tau_i \chi_R - \chi_R^\dagger \tau_i \chi_L) \end{aligned} \quad (3.126)$$

A combinação de mésons e férmions que é um invariante quiral é

$$s\sigma + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\pi}, \quad (3.127)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} s\sigma + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\pi} &= \chi_L^\dagger \sigma \chi_R + \chi_R^\dagger \sigma \chi_L + i(\chi_L^\dagger \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \chi_R - \chi_R^\dagger \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \chi_L) \\ s\sigma + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\pi} &= \bar{\psi} \sigma \psi + i \bar{\psi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5 \psi. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Este é o termo de interação no modelo sigma linear. Incluindo o termo cinético e o de massa, a lagrangiana do modelo sigma linear é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SL} = & \bar{\psi}(i\partial - m_0)\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi \\ & + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2, \end{aligned} \quad (3.129)$$

onde  $g$  é uma constante de acoplamento.

Já vimos que um termo de massa do tipo  $m_0\bar{\psi}\psi$  não é invariante quiral, o que é uma propriedade desejada para o modelo sigma. Por isso, reescrevemos a lagrangiana (3.129) para  $m_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SL} = & i\bar{\psi}\partial\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi \\ & + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Para deixar este trabalho mais claro, esta lagrangiana será dividida em

$$\mathcal{L}_{SL} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_M, \quad (3.131)$$

onde  $\mathcal{L}_F$  é o termo fermiônico,  $\mathcal{L}_I$  é o termo de interação e  $\mathcal{L}_M$  é o termo mesônico, cujas definições são

$$\mathcal{L}_F = i\bar{\psi}\partial\psi \quad (3.132)$$

$$\mathcal{L}_I = -g\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi \quad (3.133)$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \quad (3.134)$$

A lagrangiana (3.130) é invariante sob as transformações vetoriais do  $SU(2)$  (CHENG; LI, 1984)

$$\begin{cases} \sigma & \rightarrow \sigma \\ \boldsymbol{\pi} & \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi} \\ \psi & \rightarrow \psi - i\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}\psi. \end{cases} \quad (3.135)$$

Já construímos a parte mesônica desta lagrangiana para ser invariante, mas ainda precisamos mostrar que o termo fermiônico e o termo de interação são invariantes, o que será feito a seguir.

Considerando os termos da lagrangiana

$$\mathcal{L}_{F+I} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi = \bar{\psi}[i\not{\partial} - g(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)]\psi. \quad (3.136)$$

Substituindo por (3.135)

$$\mathcal{L}'_{F+I} = \bar{\psi}(1 + i\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})[i\not{\partial} - g(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\pi})\gamma_5)](1 - i\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\psi, \quad (3.137)$$

e fazendo as devidas manipulações algébricas, lembrando que termos com ordem maior ou igual a 2 em  $\mathbf{v}$  são desprezados, já que temos uma transformação infinitesimal, chegamos em

$$\mathcal{L}'_{F+I} = \bar{\psi}[i\not{\partial} - g(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)]\psi = \mathcal{L}_{F+I}. \quad (3.138)$$

As correntes conservadas são dadas por

$$V_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}^a}{2}\psi + (\boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi})^a \quad (3.139)$$

e as cargas são dadas por

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(x). \quad (3.140)$$

A lagrangiana (3.136) também é invariante sob as transformações axiais

$$\begin{cases} \sigma & \rightarrow \sigma + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} & \rightarrow \boldsymbol{\pi} - \mathbf{a}\sigma \\ \psi & \rightarrow \psi + i\mathbf{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5\psi \end{cases} \quad (3.141)$$

Da mesma forma que a transformação vetorial, os termos mesônicos da lagrangiana já foram construídos para serem invariantes sob a transformação axial. Assim, só precisamos verificar a invariância dos termos fermiônicos e de interação. Isso é feito ao substituir (3.141) na expressão (3.136):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{F+I} = \bar{\psi} \left( 1 + i\mathbf{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 \right) \{ i\not{\partial} - g[(\sigma - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\pi}) + i\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{a}\sigma)\gamma_5] \} \\ \times \left( 1 + i\mathbf{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_5 \right) \psi. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Depois de manipular algebricamente, lembrando novamente que a transformação é infinitesimal e por isso devemos desprezar os termos de ordem



maior ou igual a 2 em  $\mathbf{a}$ , chegamos em

$$\mathcal{L}'_{F+I} = \mathcal{L}_{F+I} \quad (3.143)$$

A corrente conservada é dada por

$$A^a_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi + (\partial_\mu \sigma) \pi^a - (\partial_\mu \pi^a) \sigma, \quad (3.144)$$

e a carga associada a essa simetria é

$$Q^{5a} = \int d^3x A^a_0(x). \quad (3.145)$$

Estas cargas geram a álgebra do  $SU(2)_R \times SU(2)_L$ :

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= i\epsilon^{abc} Q^c; \\ [Q^a, Q^{5b}] &= i\epsilon^{abc} Q^{5c}; \\ [Q^{5a}, Q^{5b}] &= i\epsilon^{abc} Q^c. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Como já discutimos, a quebra espontânea da simetria acontece para  $\mu^2 < 0$ , e o mínimo do potencial está em

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2, \quad (3.147)$$

onde

$$f_\pi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (3.148)$$

Se escolhermos  $\langle 0 | \boldsymbol{\pi} | 0 \rangle = 0$ , teremos

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = f_\pi. \quad (3.149)$$

Então se definirmos o campo deslocado como  $\sigma' = \sigma - f_\pi$ , e reescrevermos a lagrangiana (3.129), vemos que os pions ficam não massivos, e apresentam-se como os bósons de Goldstone da teoria.

Com isso, a massa do férmion dada por

$$M_N = m_0 + g f_\pi. \quad (3.150)$$

é inteiramente gerada com a quebra espontânea da simetria quiral, e a equação (3.150) recupera a relação de Goldberger-Treiman. Assim, podemos reescre-

ver a lagrangiana (3.130) fazendo a substituição  $\sigma = \sigma' + f_\pi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SL} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - g\bar{\psi}(\sigma' + f_\pi + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma')^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] \\ - \frac{\mu^2}{2}[(\sigma' + f_\pi)^2 + \boldsymbol{\pi}^2] - \frac{\lambda}{4}[(\sigma' + f_\pi)^2 + \boldsymbol{\pi}^2]^2. \end{aligned} \quad (3.151)$$

As equações de movimento desta lagrangiana, que podemos encontrar através das equações de Euler-Lagrange (3.12), são

$$i\not{\partial}\psi - g(\sigma' + f_\pi + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi = 0, \quad (3.152)$$

$$i\not{\partial}\bar{\psi} + g\bar{\psi}(\sigma' + f_\pi + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5) = 0, \quad (3.153)$$

$$\left\{ \partial_\mu \partial^\mu + \mu^2 + \lambda [(\sigma' + f_\pi)^2 + \boldsymbol{\pi}^2] \right\} \boldsymbol{\pi} + ig\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\psi = 0, \quad (3.154)$$

$$[\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2 + \lambda(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2)]\sigma' + g\bar{\psi}\psi + \frac{\mu^2}{2}f_\pi = 0. \quad (3.155)$$

## 4 FUNÇÃO DE WIGNER

Como a posição e o momento de uma partícula não podem ser simultaneamente medidos, não é possível definir uma distribuição de probabilidade no espaço de fase. Entretanto, funções que têm alguma semelhança com uma distribuição de probabilidade do espaço de fase, conhecidas como funções de quasiprobabilidade, mostram-se úteis no estudo de sistemas quânticos. Elas são úteis não só como ferramentas matemáticas, mas também para ajudar a entender as conexões entre a mecânica clássica e a quântica, e ainda, é possível expressar médias quânticas de forma semelhante à médias clássicas.

Aqui utilizaremos a função de Wigner, a primeira função de distribuição a ser proposta em 1932 por Wigner (WIGNER, 1932). Boa parte dos estudos deste capítulo é baseada em (MARCHIOLLI, 2002).

### 4.1 PRELIMINARES ALGÉBRICOS

Inicialmente, consideraremos um sistema quântico de uma única partícula de massa  $M$  destituída de spin executando um movimento em uma dimensão. Seus operadores de posição e momento são respectivamente  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$ , e estes obedecem às relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}, \mathbf{Q}] &= [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = [\mathbf{Q}, \mathbf{1}] = [\mathbf{P}, \mathbf{1}] = 0, \\ [\mathbf{Q}, \mathbf{P}] &= i\hbar\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{1}$  é o operador identidade. Os autovetores que correspondem a esses operadores são definidos pelas equações de autovalores:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}|p\rangle &= p|p\rangle & , & & \mathbf{Q}|q\rangle &= q|q\rangle, \\ \mathbf{1}|p\rangle &= |p\rangle & , & & \mathbf{1}|q\rangle &= |q\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

As bases dos autovetores  $\{|p\rangle\}$  e  $\{|q\rangle\}$  satisfazem as relações de completudeza

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = \mathbf{1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = \mathbf{1}, \quad (4.3)$$

e ortonormalização

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q-q'). \quad (4.4)$$

A partir da transformação de Fourier

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}pq\right) |q\rangle, \quad (4.5)$$

é possível encontrar o produto escalar:

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}pq\right). \quad (4.6)$$

#### 4.1.1 Formulação de Weyl-Wigner da Mecânica Quântica no espaço de fase

Considerando  $\mathbf{F}$ , um operador arbitrário, é possível escrevê-lo como

$$\mathbf{F} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp' dp'' dq' dq'' |q''\rangle \langle q''|p''\rangle \langle p''|\mathbf{F}|p'\rangle \langle p'|q'\rangle \langle q'|,$$

e, utilizando as relações (4.6) e (4.4),

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp' dp'' dq' dq''}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}p''q''\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p'q'\right) \langle p''|\mathbf{F}|p'\rangle \langle q''|q'\rangle. \quad (4.7)$$

Pela mudança de variáveis dadas no Apêndice D.1, podemos reescrever (4.7)

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq du dv}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(pv + qu)\right] \left\langle p + \frac{u}{2} \left| \mathbf{F} \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right|. \quad (4.8)$$

Definindo a transformada de Weyl como

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \left\langle p + \frac{u}{2} \left| \mathbf{F} \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle, \quad (4.9)$$

e a base de operadores no espaço de fase

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right|, \quad (4.10)$$

o operador  $\mathbf{F}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q). \quad (4.11)$$

Ou seja, o operador  $\mathbf{F}$  foi decomposto numa base de operadores cujos elementos são as componentes  $\mathbf{\Delta}(p, q)$ .

Esta forma de mapear o operador  $\mathbf{F}$  não é única. Também podemos fazer

$$\mathbf{F} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp' dp'' dq' dq'' |p'\rangle \langle p'|q'\rangle \langle q'| \mathbf{F} |q''\rangle \langle q''|p''\rangle \langle p''|,$$

então a transformada de Weyl e a base de operadores  $\mathbf{\Delta}(p, q)$  ficam:

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \left| \mathbf{F} \right| q + \frac{v}{2} \right\rangle; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{\Delta}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \left| p - \frac{u}{2} \right\rangle \left\langle p + \frac{u}{2} \right|. \quad (4.13)$$

A partir destas expressões, juntamente com (4.9) e (4.10), é possível encontrar os projetores de posição e momento

$$|q\rangle\langle q| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}u(q - \mathbf{Q})\right] = \mathbf{\delta}(q - \mathbf{Q}); \quad (4.14)$$

$$|p\rangle\langle p| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}v(p - \mathbf{P})\right] = \mathbf{\delta}(p - \mathbf{P}). \quad (4.15)$$

Precisamos encontrar uma forma simétrica para o operador  $\mathbf{\Delta}(p, q)$ , pois as formas definidas até agora privilegiam uma variável ao escolhermos a ordem dos conjuntos. Partindo de (4.10), e lembrando que como (LEAF, 1968)

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{P}v\right) |q\rangle = |q + v\rangle,$$

então

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{P}v\right) \left| q - \frac{v}{2} \right\rangle = \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle. \quad (4.16)$$

Esta expressão é verificada no Apêndice D.2. Substituindo (4.16) em

$\Delta(p, q)$  temos

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \left| q - \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right|. \quad (4.17)$$

Pela relação (4.14), o projetor pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \left| q - \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right| &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u \left( q - \frac{v}{2} - \mathbf{Q} \right) \right], \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u (q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \frac{uv}{2} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u (q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \frac{uv}{2} \right). \quad (4.18)$$

Pela relação de Baker-Hassdorff simplificada (GREINER; REINHARDT, 2013), se os operadores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , que não comutam, satisfazem

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0,$$

então

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}, \quad (4.19)$$

e finalmente chegamos à forma simétrica de  $\Delta(p, q)$ :

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [u(q - \mathbf{Q}) + v(p - \mathbf{P})] \right\}. \quad (4.20)$$

Podemos verificar que os operadores satisfazem às condições dadas em (4.19) no Apêndice D.3.

A partir do que já foi visto, é possível encontrar a forma compacta da transformada de Weyl

$$f(p, q) = \text{Tr}[\mathbf{F}\Delta(p, q)], \quad (4.21)$$

cuja prova é dada no Apêndice D.4.

É possível encontrar um método alternativo para se encontrar o operador  $\mathbf{F}$  a partir de sua transformada de Weyl. Para tanto, consideremos o operador  $\Delta(p, q)$  escrito da forma

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}u(q - \mathbf{Q})\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}v(p - \mathbf{P})\right] \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{uv}{2}\right), \quad (4.22)$$

onde utilizamos o lado direito da relação de Baker-Hausdorff 4.19 na forma simétrica de  $\Delta(p, q)$ . Após algumas manipulações algébricas, que fazemos no Apêndice D.5, encontramos uma nova expressão para  $\Delta(p, q)$

$$\Delta(p, q) = 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}). \quad (4.23)$$

Agora podemos reescrever a expressão para  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} dp dq f(p, q) \left[ \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}) \right], \quad (4.24)$$

e, pela propriedade do Delta de Dirac

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \left[ \frac{d^m}{dx^m} \delta(x) \right] &= (-1)^m \left. \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right|_{x=0} \\ &= (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right] \delta(x), \end{aligned} \quad (4.25)$$

finalmente temos

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} dp dq \left[ \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) f(p, q) \right] \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}). \quad (4.26)$$

Para encontrarmos o operador  $\mathbf{F}$  a partir de uma transformada de Weyl  $f(p, q)$  arbitrária, primeiro devemos calcular

$$\exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) f(p, q)$$

e depois substituir as variáveis  $q$  e  $p$  pelos operadores  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$ , lembrando de sempre escrever os operadores de posição à esquerda dos operadores de momento.

### 4.1.2 Propriedades para $\Delta(p, q)$

A seguir apresentaremos algumas propriedades para a base de operadores  $\Delta(p, q)$  que serão importantes no restante do trabalho. A dedução destas propriedades está no Apêndice D.6.

$$(i) \quad \langle q' | \Delta(p, q) | q'' \rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(q' - q'')\right] \delta\left(q - \frac{q' + q''}{2}\right);$$

$$(ii) \quad \langle p' | \Delta(p, q) | p'' \rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} q(p' - p'')\right] \delta\left(p - \frac{p' + p''}{2}\right);$$

Nestas duas propriedades, se considerarmos  $q'' = q'$  e  $p' = p''$ , estas se reduzem a

$$\langle q' | \Delta(p, q) | q' \rangle = \delta(q - q') \quad e \quad \langle p' | \Delta(p, q) | p' \rangle = \delta(p - p'). \quad (4.27)$$

$$(iii) \quad \langle q' | \Delta(p, q) | p' \rangle = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p' q'\right) \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(q - q') \delta(p - p');$$

$$(iv) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \Delta(p, q) = |q\rangle\langle q|;$$

$$(v) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \Delta(p, q) = |p\rangle\langle p|;$$

$$(vi) \quad \text{Tr}[\Delta(p, q)] = 1;$$

$$(vii) \quad \text{Tr}[\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2)] = 2\pi\hbar \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2);$$

$$(viii) \quad \text{Tr}[\Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3)] = \\ = 2^2 \exp\left\{\frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q_3)(p_2 - p_3) - (q_2 - q_3)(p_1 - p_3)]\right\};$$

## 4.2 RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO E ANTICOMUTAÇÃO NO FORMALISMO DE WEYL-WIGNER

Antes de ver as relações de comutação e anticomutação, precisamos entender como o traço atua em operadores arbitrários no formalismo de Weyl-Wigner.

Para um operador arbitrário  $\mathbf{A}$ :

$$\text{Tr}[\mathbf{A}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} a(p, q), \quad (4.28)$$

e, para dois operadores arbitrários  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ,



$$\text{Tr}[\mathbf{AB}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dpdq}{2\pi\hbar} a(p,q)b(p,q) = \text{Tr}[\mathbf{BA}]. \quad (4.29)$$

Podemos verificar o cálculo destes traços no Apêndice D.7. Precisamos também saber como é a transformada de Weyl do produto  $\mathbf{AB}$ . A representação integral deste operador é

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) b(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dpdq}{2\pi\hbar} f(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Como a forma compacta da transformação de Weyl é  $f(p, q) = \text{Tr}[\mathbf{AB}\mathbf{\Delta}(p, q)]$ , substituindo  $\mathbf{AB}$ , após os cálculos dados no Apêndice D.8, podemos reescrever  $f(p, q)$  como

$$f(p, q) = \exp \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] a(p, q) b(p, q). \quad (4.31)$$

onde os índices indicam em que função a derivada é tomada. A partir deste resultado, podemos notar que a transformada de Weyl do produto de dois operadores é diferente do produto das transformadas de Weyl destes (GROENEWOLD, 1946). Com isso, agora podemos encontrar a transformada de Weyl das relações de comutação e anticomutação de dois operadores arbitrários (a dedução pode ser encontrada no Apêndice D.9):

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \Leftrightarrow 2i \sin \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right] a(p, q) b(p, q). \quad (4.32)$$

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \Leftrightarrow 2 \cos \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right) a(p, q) b(p, q). \quad (4.33)$$

Devemos lembrar que nestas expressões, o seno e o cosseno devem ser entendidos como a série de Taylor correspondente a cada um deles. Tomando o termo de ordem mais baixa de cada série:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \Leftrightarrow i\hbar \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) a(p, q) b(p, q); \quad (4.34)$$

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \Leftrightarrow 2a(p, q)b(p, q). \quad (4.35)$$

Nota-se que a série de Taylor associada à transformada de Weyl de  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  está relacionada aos parênteses de Poisson das transformadas de Weyl de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , assim como a série associada à transformada de Weyl de  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  está relacionada ao produto das transformadas de Weyl de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

Tomando o limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ), podemos ver como algumas grandezas se comportam:

- $\mathbf{AB} \xrightarrow{\text{Cláss}} a_{cl}(p, q)b_{cl}(p, q)$
- $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \xrightarrow{\text{Cláss}} a_{cl}(p, q)b_{cl}(p, q)$
- $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \xrightarrow{\text{Cláss}} \frac{\partial a_{cl}}{\partial q} \frac{\partial b_{cl}}{\partial p} - \frac{\partial a_{cl}}{\partial p} \frac{\partial b_{cl}}{\partial q}$

A prova destas equações pode ser encontrada no Apêndice D.10. A partir destes resultados, é possível perceber que a transformada de Weyl do produto de dois operadores tende ao produto das transformadas de Weyl no limite clássico, assim como a transformada de Weyl do anticomutador entre dois operadores. Já o limite para a transformada de Weyl do comutador entre dois operadores tende aos parênteses de Poisson. Estes resultados nos estimulam a verificar se existe algum limite para o análogo quântico da equação de Liouville, para que possamos verificar se a dinâmica quântica tende à dinâmica clássica.

### 4.3 DINÂMICA QUÂNTICA

Considerando um sistema descrito pelo operador densidade:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|, \quad (4.36)$$

onde  $|\Psi(t)\rangle$  representa um estado puro do sistema. O valor médio de um operador  $\mathbf{F}$  é obtido usualmente através de

$$\langle\mathbf{F}\rangle = \langle\Psi|\mathbf{F}|\Psi\rangle, \quad (4.37)$$

e, no formalismo de densidade,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}(t)\mathbf{F}]. \quad (4.38)$$

Pelo que já obtivemos na equação (4.21), esta última expressão fica

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp dq f(p, q) \rho_W(p, q; t), \quad (4.39)$$

onde  $\rho_W(p, q; t)$  é a função de Wigner para um  $t$  arbitrário. Apresentaremos algumas formas de expressar essa função, cujas deduções estão no Apêndice D.11.

1. A partir de (4.12)

$$\rho_W(p, q; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \psi\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right). \quad (4.40)$$

2. Ou, a partir de (4.9)

$$\rho_W(p, q; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \phi\left(p + \frac{u}{2}; t\right) \phi^*\left(p - \frac{u}{2}; t\right). \quad (4.41)$$

3. Usando a forma compacta da função de Wigner (4.21) e a equação (4.23)

$$\rho_W(p, q; t) = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[ \phi(p; t) \psi^*(q; t) \exp\left(\frac{i}{\hbar}pq\right) \right]. \quad (4.42)$$

Como  $\boldsymbol{\rho}$  é hermitiano,  $\rho_W(p, q; t)$  é real, então podemos reescrever esta última equação como:

$$\rho_W(p, q; t) = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[ \Phi^*(p; t) \Psi(q; t) \exp\left(\frac{i}{\hbar}pq\right) \right]. \quad (4.43)$$

### 4.3.1 Propriedades de $\rho_W(p, q; t)$

Wigner (YOURGRAU; MERWE; LANDÉ, 1979) propôs um conjunto de propriedades que deviam ser satisfeitas por funções de distribuição, e demonstrou que a distribuição (4.40) era a única a satisfazer estas propriedades. Mais tarde, O'Connell e Wigner (O'CONNELL; WIGNER, 1981) consideraram um outro conjunto de oito propriedades que também levavam à expressão (4.40). Estas serão listadas a seguir como dadas em (HILLERY et al., 1984) e (GALETTI, 1986) e mostradas no Apêndice D.12.

1.  $\rho_W(p, q; t)$  é real e normalizada, mas não é positiva definida, ou seja,  $\rho_W(p, q; t)$  não é uma distribuição genuína.

#### 2. Normalização

Posição

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho_W(p, q; t) = |\psi(q; t)|^2. \quad (4.44)$$

Momento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \rho_W(p, q; t) = |\phi(p; t)|^2. \quad (4.45)$$

Total:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp dq \rho_W(p, q; t) = 1. \quad (4.46)$$

3.  $\rho_W(p, q; t)$  deve ser invariante sob transformações de Galileu, ou seja, se  $\psi(q; t) \rightarrow \psi(q + a; t)$ , então  $\rho'_W(p, q; t) = \rho_W(p, q + a; t)$ .
4.  $\rho_W(p, q; t)$  deve ser invariante sob reflexões espaciais e temporais.
5. No caso sem forças, a equação de movimento é a equação clássica:

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \rho_W}{\partial q}. \quad (4.47)$$

6. Se  $\rho_\psi(p, q; t)$  e  $\rho_\phi(p, q; t)$  são distribuições que correspondem aos estados  $\psi(q; t)$  e  $\phi(q; t)$ , então

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q; t) \phi(q; t) \right|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_\psi(p, q; t) \rho_\phi(p, q; t). \quad (4.48)$$

Esta propriedade tem duas consequências interessantes. Se fizermos  $\varphi(q;t) = \psi(q;t)$ , então

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q;t) \psi(q;t) \right|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp [\rho_W(p, q;t)]^2,$$

e como  $\int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q;t) \psi(q;t) = 1$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp dq [\rho_W(p, q;t)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}. \quad (4.49)$$

Isso implica que  $\rho_W(p, q;t)$  não tem picos muito altos, o que descarta distribuições do tipo  $\rho_W(p, q;t) = \delta(q - \mathbf{Q})\delta(p - \mathbf{p})$ , que não seriam possíveis classicamente.

Também podemos escolher  $\psi$  e  $\varphi$  ortogonais, o que resultaria em

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp dq \rho_\psi(p, q;t) \rho_\varphi(p, q;t) = 0.$$

Isso indica que  $\rho_W(p, q;t)$  não pode ser sempre positiva.

## 7. Simetria $p - q$

A partir da transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \psi(q;t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}pq\right),$$

é possível escrever a equação (4.41) a partir da expressão (4.40).

## 8. $|\rho_W(p, q;t)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$

Com essa desigualdade, podemos notar que a função de Wigner é diferente de zero numa região cujo volume no espaço de fase é menor ou igual a  $\pi\hbar$ . Por isso, a função de Wigner traz embutida a informação básica do princípio da incerteza.

## 9. O operador densidade associado a um estado puro é um operador de projeção. Ou seja,

$$\rho^2 = \rho.$$

Consequentemente,

$$\text{Tr}[\boldsymbol{\rho}] = 1 \Rightarrow \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}^2] = 1.$$

10. A cada função de onda  $\Psi(t)$  corresponde uma única função de Wigner, e a inversa também é verdadeira.

### 4.3.2 A equação de von Neumann-Liouville

A evolução temporal da função de Wigner sai como consequência imediata da equação de von Neumann-Liouville (PATHRIA, 2016):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, \boldsymbol{\rho}(t)], \quad (4.50)$$

onde  $\mathbf{H}$  é hamiltoniana do sistema independente do tempo. Tomando a transformada de Weyl da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_W(p, q; t) = \frac{2i}{\hbar} \sin \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \right) h(p, q) \rho_W(p, q; t), \quad (4.51)$$

sendo  $h(p, q)$  a transformada de Weyl da hamiltoniana. Definindo o operador de Liouville quântico como

$$\mathbf{L}(p, q) = \frac{2i}{\hbar} \sin \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \right) h(p, q), \quad (4.52)$$

a equação (4.51) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_W(p, q; t) = -i\mathbf{L}(p, q) \rho_W(p, q; t), \quad (4.53)$$

e a sua solução formal é

$$\rho_W(p, q; t) = \exp[-i\mathbf{L}(p, q)(t - t_0)] \rho_W(p, q; t_0). \quad (4.54)$$

Se a forma mapeada do operador hamiltoniano é

$$h(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (4.55)$$

a função de Wigner obedece à equação

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right) \rho_W(p, q; t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left( \frac{\hbar}{2} \right)^{2k} \frac{d^{2k+1}}{dq^{2k+1}} V(q) \frac{\partial^{2k+1}}{\partial p^{2k+1}} \rho_W(p, q; t), \end{aligned} \quad (4.56)$$

que é deduzida em (SCHLEICH, 2011). Quando  $\hbar = 0$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right) \rho_W(p, q; t) = 0, \quad (4.57)$$

que é a equação de Liouville da mecânica estatística clássica. Podemos verificar isso no Apêndice D.13.

Agora iremos analisar o limite  $\hbar \rightarrow 0$  de  $\mathbf{L}$ . Definindo o operador  $\overset{\leftrightarrow}{\Lambda}$  como

$$\overset{\leftrightarrow}{\Lambda} \equiv \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}}, \quad (4.58)$$

e introduzindo o parâmetro adimensional  $\alpha$  no operador de Liouville:

$$\mathbf{L}_\alpha(p, q) = \frac{2i}{\hbar\alpha} \sin\left(\frac{\hbar\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda}\right) h(p, q). \quad (4.59)$$

Se  $h(p, q)$  não depende de  $\hbar$ , podemos tomar o limite  $\alpha \rightarrow 0$  na expansão do operador

$$\mathbf{L}_\alpha(p, q) = \left[ \frac{\hbar\alpha}{2} \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} - \frac{1}{3!} \left( \frac{2i}{\hbar\alpha} \right)^3 \overset{\leftrightarrow}{\Lambda}^3 + \dots \right] h(p, q), \quad (4.60)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{L}_\alpha(p, q) = i \overset{\leftrightarrow}{\Lambda} h(p, q) = L_0(p, q), \quad (4.61)$$

onde  $L_0$  é um operador clássico. Assim, a evolução temporal (4.53) fica

$$\rho_{W0}(p, q; t) = \exp[-iL_0(p, q)(t - t_0)] \rho_W(p, q; t_0). \quad (4.62)$$

Esta equação descreve a evolução clássica do objeto quântico  $\rho_W(p, q; t)$ . Finalmente, queremos encontrar a derivada temporal do valor esperado de um observável  $\mathbf{F}$ . Pela equação (4.39),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{F} \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \frac{\partial}{\partial t} \rho_W(p, q; t), \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) [\mathbf{L}(p, q) \rho_W(p, q; t)].\end{aligned}\quad (4.63)$$

Devemos lembrar que o operador  $\mathbf{L}$  está derivando  $\rho_W(p, q; t)$ . Integrando por partes:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{F} \rangle_t &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} [\mathbf{L}(p, q) f(p, q)] \rho_W(p, q; t) + \rho_W(p, q; t) f(p, q) \Big|_{-\infty}^{\infty}, \\ &= -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) F\right) h(p, q) f(p, q) \rho_W(p, q; t).\end{aligned}\quad (4.64)$$

Em particular, considerando os operadores de posição e momento, temos

$$\frac{d\langle \mathbf{P} \rangle_t}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\partial h}{\partial q} \rho_W(p, q; t); \quad (4.65)$$

$$\frac{d\langle \mathbf{Q} \rangle_t}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\partial h}{\partial p} \rho_W(p, q; t), \quad (4.66)$$

que são as transformadas de Weyl das equações de Ehrenfest da formulação usual da Mecânica Quântica. Podemos verificar estas equações a partir de

$$\begin{aligned}\frac{d\langle \mathbf{P} \rangle_t}{dt} &= -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) F\right) h(p, q) p \rho_W(p, q; t), \\ &= -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) \right]^{2k+1} h(p, q) p \rho_W(p, q; t).\end{aligned}$$

O único termo não nulo é quando  $k = 0$ , então

$$\frac{d\langle \mathbf{P} \rangle_t}{dt} = -\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \right) h(p, q) p \rho_W(p, q; t)$$

$$\frac{d\langle \mathbf{P} \rangle_t}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \frac{\partial h}{\partial q} \rho_W(p, q; t),$$



que é a expressão que queríamos chegar. A dedução para a posição é semelhante.

Como o limite clássico de  $\rho_W(p, q; t)$  é dado por (GROOT; SUTTORP, 1972)

$$\rho_{cl}(p, q; t) = \delta(p - p_0)\delta(q - q_0), \quad (4.67)$$

então podemos encontrar o limite clássico da equação (4.64)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{F} \rangle_t &\xrightarrow{Cláss} -(i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp dq [L_0(p, q) f_{cl}(p, q)] \delta(p - p_0) \delta(q - q_0), \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{F} \rangle_t &\xrightarrow{Cláss} L_0(p_0, q_0) f_{cl}(p_0, q_0), \end{aligned}$$

lembrando que  $L$  é dado pela equação (4.61) e pode ser reescrito como

$$L_0(p_0, q_0) = i \left[ \frac{\partial h(p, q)}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial h(p, q)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \right].$$

Assim, o limite clássico para a derivada temporal é

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{F} \rangle_t \xrightarrow{Cláss} \frac{d}{dt} f_{cl}(p_0, q_0), \quad (4.68)$$

e então

$$\frac{d}{dt} f_{cl}(p_0, q_0) = \frac{\partial h_{cl}(p_0, q_0)}{\partial p_0} \frac{\partial f_{cl}(p_0, q_0)}{\partial q_0} - \frac{\partial h_{cl}(p_0, q_0)}{\partial q_0} \frac{\partial f_{cl}(p_0, q_0)}{\partial p_0}, \quad (4.69)$$

que correspondem aos parênteses de Poisson clássicos. Para o caso dos operadores de momento e posição, ficamos com

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_0} h_{cl}(p_0, q_0); \quad \frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_0} h_{cl}(p_0, q_0), \quad (4.70)$$

que são as equações clássicas de Hamilton (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002)(LEMONS, 2007)(JOSÉ; SALETAN, 1998). Assim, conseguimos recuperar a mecânica clássica e as equações fundamentais que governam a evolução temporal de valores médios de observáveis físicos através de um limite formal, o que nos permitiu encontrar uma descrição do espaço de fase clássico a partir de um espaço de fase quântico.



## 5 FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE

### 5.1 FUNÇÃO DE WIGNER COVARIANTE PARA PARTÍCULAS DE SPIN $\frac{1}{2}$

O operador da função de Wigner covariante é dado por (HAKIM, 2011)

$$\mathbf{W}_4(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp(-ipR) \bar{\psi}\left(x + \frac{R}{2}\right) \otimes \psi\left(x - \frac{R}{2}\right), \quad (5.1)$$

e a função de Wigner covariante é a sua média quântica:

$$\begin{aligned} W_4(x, p) &= \langle \mathbf{W}_4(x, p) \rangle = \text{Tr}[\rho \mathbf{W}_4(x, p)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp(-ipR) \left\langle \bar{\psi}\left(x + \frac{R}{2}\right) \otimes \psi\left(x - \frac{R}{2}\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A função de Wigner covariante  $W_4(x, p)$  é uma matriz nos índices espinoriais. Escrevendo isso explicitamente,

$$\mathbf{W}_{4\alpha\beta}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4R \exp(-ipR) \bar{\psi}_\beta\left(x + \frac{R}{2}\right) \psi_\alpha\left(x - \frac{R}{2}\right) \quad (5.3)$$

Note que os índices aparecem em posições invertidas na integral. Também temos a fórmula inversa

$$\bar{\psi}(x) \otimes \psi(y) = \int d^4p \exp[ip(x-y)] \mathbf{W}_4\left(\frac{1}{2}(x+y), ip\right), \quad (5.4)$$

que é útil para muitos cálculos envolvendo a função de Wigner covariante.

Podemos expandir a função de Wigner covariante para uma partícula na base das 16 matrizes de Dirac, dadas por

$$\{\gamma_A\}_{A=1,2,\dots,16} = \left( I, \gamma^\mu, \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma_5, \gamma_5 \gamma^\mu \right), \quad (5.5)$$

como

$$W_4(x, p) = \frac{1}{4} \left[ F(x, p)I + iP(x, p)\gamma_5 + V^\mu(x, p)\gamma_\mu - A^\mu(x, p)\gamma_5\gamma_\mu + \frac{1}{2}S^{\mu\nu}(x, p)\sigma_{\mu\nu} \right], \quad (5.6)$$

com

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)] \\ P(x, p) &= -i\text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^5] \\ V^\mu(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^\mu] \\ A^\mu(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^5\gamma^\mu] \\ S^{\mu\nu}(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\sigma^{\mu\nu}] = -S^{\nu\mu}(x, p) \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.1.1 Equações Básicas

Vamos agora ver as equações obedecidas pela função de Wigner, considerando apenas partículas não interagentes. O campo fermiônico  $\psi$  satisfaz às equações de Dirac

$$\begin{cases} [i\gamma \cdot \partial - m]\psi(x) = 0 \\ \bar{\psi}(x)[i\gamma \cdot \partial + m] = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

e ao manipularmos estas equações, chegamos em

$$\begin{cases} [i\gamma \cdot \vec{\partial} + 2(\gamma \cdot p - m)]W_4(x, p) = 0 \\ W_4(x, p)[i\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} - 2(\gamma \cdot p - m)] = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

A última passagem pode ser verificada em (PASSOS, 2014)

Podemos notar que temos duas equações para  $W_4(x, p)$ , que juntas representam a camada de massa da partícula e a equação de transporte do sistema. Para o caso não quântico, teríamos também duas equações, a equação de Liouville e a equação da camada de massa.

É possível expandir  $W_4(x, p)$  nas matrizes  $\gamma_A$  da álgebra de Dirac. Para isso, manipulamos as equações (5.9), as multiplicamos pelas matrizes  $\gamma_A$  apropriadas e tomamos o traço, para obter 32 equações:

$$mF = p_\mu V^\mu \quad (5.10)$$

$$\partial_\nu S^{\mu\nu} + p^\mu F - mV^\mu = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{2} \partial^\mu V^\nu - 2mS^{\mu\nu} - p_\lambda A_\rho \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} = 0 \quad (5.12)$$

$$\partial_\mu A^m u - 2mP = 0 \quad (5.13)$$

$$\partial^\mu P - 2p_\lambda \varepsilon^{\lambda\rho\nu\mu} S_{\rho\nu} - 2mA^\mu = 0 \quad (5.14)$$

$$\partial_\mu V^\mu = 0 \quad (5.15)$$

$$\partial^\mu F + 4p_\lambda S^{\lambda\mu} = 0 \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2} \partial_\lambda A_\rho \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} + p^\mu V^\nu = 0 \quad (5.17)$$

$$p_\mu A^\mu = 0 \quad (5.18)$$

$$\partial_\lambda S_{\rho\nu} \varepsilon^{\lambda\rho\nu\mu} + 2p^\mu P = 0 \quad (5.19)$$

É possível resolver estas equações para  $P$ ,  $V^\mu$  e  $S_{\mu\nu}$  em primeira ordem em  $\hbar$ , e obtém-se

$$P = \frac{\hbar}{2m} \partial^\mu A_\mu, \quad (5.20)$$

$$V_\mu = \frac{p_\mu}{m} F - \frac{\hbar}{2m^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha \partial^\nu A^\beta, \quad (5.21)$$

$$S_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{2m^2} (p_\nu \partial_\mu - p_\mu \partial_\nu) F - \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{m} p^\alpha A^\beta. \quad (5.22)$$

E essas 16 componentes não são independentes nesta aproximação. Assim, só precisamos de 5 componentes,  $f$  e  $A_\mu$  para construir a função de Wigner. Os cálculos destas equações são resolvidos em (PASSOS, 2014). A partir destes cálculos é possível encontrar uma equação de transporte para uma dada lagrangiana  $\mathcal{L}$ , mas isso também é possível utilizando-se um método parecido, dado em (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987), (ZHUANG; HEINZ, 1996b), (ZHUANG; HEINZ, 1996a), que será delineado a seguir.



## 6 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA O MODELO SIGMA LINEAR

Para elucidarmos a importância de uma teoria de transporte, primeiro daremos alguns argumentos para a construção de uma teoria de transporte clássica, para então partirmos para uma formulação quântica e relativística desta. Tais equações são importantes para a compreensão de fenômenos de transição fora do equilíbrio, como os eventos que ocorrem em colisores de partículas ou no interior de estrelas de nêutrons, além de fenômenos nos estágios iniciais do universo.

### 6.1 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Considerando um sistema clássico de muitos corpos, as interações entre seus constituintes e vínculos externos definem quais as propriedades deste sistema. Por isso, queremos expressar as propriedades macroscópicas do sistema, que são funções das coordenadas do espaço tempo, em função das variáveis macroscópicas de estado, como a densidade de partículas e a temperatura; e dos parâmetros microscópicos do sistema (GROOT; LEEUWEN; WEERT, 1980).

Quando este sistema está fora do equilíbrio, podemos utilizar a teoria cinética dos gases para descrevê-lo. Isso é possível ao utilizarmos uma descrição estatística através de uma função de distribuição, que pode ser interpretada como a média do número de partículas com um determinado momento e em um dado ponto do espaço-tempo. Esta função de distribuição pode ser encontrada a partir de uma equação cinética, que pode ser postulada ou derivada, e que é frequentemente chamada de equação de transporte. Esta equação dá a taxa de variação da função de distribuição no espaço e no tempo devido às interações entre as partículas.

Como esse trabalho aborda sistemas quânticos, precisamos de uma equação de transporte adequada. Sabemos que em teoria de campos, num passado infinito o conjunto de possíveis estados do sistema consiste em estados de nenhuma, uma, duas partículas livres com massa e carga definidas, e assim por diante, que é uma forma do postulado da completeza assintótica. Com isso, é possível especificar o estado inicial em termos de partículas que se movem livremente e não interagem (GROOT; LEEUWEN; WEERT, 1980). Esta formulação é adequada para descrever o espalhamento de poucas partículas, mas para um sistema de muitas partículas não temos informações suficientes para determinar o estado inicial. Isso pode ser contornado ao utilizarmos a

teoria cinética dos gases, onde derivamos uma equação que prediz a evolução temporal do sistema somente a partir do estado presente, e baseada na função de distribuição de uma partícula. Assim, depois de um longo tempo, os detalhes do estado inicial são irrelevantes. Como já mencionamos, uma função de distribuição quântica é problemática devido ao princípio da incerteza. Para tanto, necessitamos encontrar uma ferramenta matemática que contorne este problema, o que é possível quando utilizamos a função de Wigner, que pode ser considerada a mais simples análoga quântica da função de distribuição clássica.

### 6.1.1 Histórico

A primeira tentativa de formular uma versão relativística da teoria cinética dos gases, originalmente desenvolvida por Bernoulli, Clausius, Maxwell e Boltzmann (BRUSH, 2003), foi feita por Jüttner em 1911 (JÜTTNER, 1911), ao derivar uma generalização relativística da distribuição de Maxwell-Boltzmann (GROOT; LEEUWEN; WEERT, 1980). Jüttner também encontrou uma forma relativística para a função de distribuição no equilíbrio para bósons e férmions em 1928 (JÜTTNER, 1928). Uma equação cinética relativística foi proposta por Walker em 1935 para o caso sem colisões (WALKER, 1935), e uma generalização para a equação de Boltzmann completa, ou seja, para o caso com colisões, foi proposto inicialmente por Lichnerowicz e Marrot em 1940 (LICHNEROWICZ; MARROT, 1940).

No fim de 1950, começou a surgir o interesse nesse tipo de formulação para se explicar a fusão nuclear (HAKIM, 2011). Assim, em 1956 Titeica (S., 1956) encontrou uma forma covariante da equação de Vlasov. Visando explicar a produção múltipla de partículas, Carruthers e Zachariasen foram os primeiros a utilizar a função de Wigner covariante em 1976 (CARRUTHERS; ZACHARIASEN, 1976)(CARRUTHERS; ZACHARIASEN, 1983). Este estudo foi estendido para férmions e outras formas invariantes de calibre em 1986 por Elze, Gyulassy e Vasak (ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986b) (ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986a).

## 6.2 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA O MODELO SIGMA LINEAR

Com a utilização da função de Wigner covariante, desejamos derivar equações cinéticas para um sistema composto de prótons e nêutrons interagindo através de campos escalares e pseudoescalares. Para tanto, iremos derivar o cálculo na função de Wigner de tempo igual para posteriormente, num



limite semiclássico, encontrar uma equação de transporte análoga à de Vlasov para plasmas da mesma forma que foi feito em (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987)(ZHUANG; HEINZ, 1996b)(ZHUANG; HEINZ, 1996a), considerando o caso sem campos magnéticos. O modelo Sigma Linear apresentado no Capítulo 2 será o modelo efetivo utilizado, seguindo a lagrangiana (3.151):

$$\mathcal{L}_{SL} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - g\bar{\psi}(\sigma' + f_\pi + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma')^2 + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}((\sigma' + f_\pi)^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}[(\sigma' + f_\pi)^2 + \boldsymbol{\pi}^2]^2, \quad (6.1)$$

que tem como equações de movimento para a parte fermiônica as equações (3.152) e (3.153):

$$i\not{\partial}\psi - M_N\psi - g(\sigma' + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi = 0, \quad (6.2)$$

$$i\not{\partial}\bar{\psi} + M_N\bar{\psi} + g\bar{\psi}(\sigma' + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}\gamma_5) = 0, \quad (6.3)$$

onde  $M_N = gf_\pi$  é a massa efetiva do núcleon.

Como visto em (ZHUANG; HEINZ, 1996b), podemos escrever o operador de Wigner covariante  $\mathbf{W}_4(x, p)$  como uma transformada de Fourier da matriz de densidade covariante  $\Phi_4(x, y)$

$$\mathbf{W}_4(x, p) = \int d^4y e^{ip \cdot y} \Phi_4(x, y), \quad (6.4)$$

onde

$$\Phi_4(x, y) = \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right), \quad (6.5)$$

para então encontrar uma equação cinética para o sistema.

Os cálculos relevantes para este capítulo estão feitos com mais detalhes no Apêndice E.

### 6.3 EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO DE WIGNER

Como queremos descrever a dinâmica de um conjunto de partículas interagindo, devemos encontrar as equações de movimento para a função de Wigner (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987). Para tanto, ao derivarmos a matriz de densidade  $\Phi_4(x, y)$  em relação à  $x$  e  $y$ , substituímos a equação de movimento (6.2) e realizamos uma transformada de Fourier na equação resultante, chegamos na equação de evolução da função de Wigner, como

visto em (ZHUANG; HEINZ, 1996a)

$$\left[ \gamma^\mu K_\mu - \gamma^5 K_5 - M \right] \mathbf{W}_4(x, p) = 0, \quad (6.6)$$

onde definimos que

$$K_\mu = \Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu, \quad (6.7)$$

$$K_5 = \Pi_5 + iD_5, \quad (6.8)$$

$$M = M_1 - M_2, \quad (6.9)$$

e

$$\Pi_\mu = p_\mu, \quad (6.10)$$

$$D_\mu = \partial_\mu, \quad (6.11)$$

$$\Pi_5 = g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \quad (6.12)$$

$$D_5 = g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \quad (6.13)$$

$$M_1 = M_N + g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \quad (6.14)$$

$$M_2 = g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \quad (6.15)$$

$$\Delta = \partial_x \partial_p. \quad (6.16)$$

Para permitir a discussão da expansão semiclássica, escrevemos explicitamente os termos em  $\hbar$  nas equações anteriores e nas próximas equações.

## 6.4 DECOMPOSIÇÃO ESPINORIAL

Como no nosso caso a função de Wigner é uma matriz complexa  $4 \times 4$ , é possível decompô-la num conjunto de equações acopladas para as componentes de  $W_4$ . É conveniente escolher as 16 matrizes  $\Gamma_i$  dadas pelas equações (2.74) como a base da expansão da função de Wigner no espaço de spin devido às propriedades de transformação características destas matrizes sob transformações de Lorentz (VASAK; GYULASSY; ELZE, 1987). Assim, considerando a decomposição espinorial (5.6):

$$W_4(x, p) = \frac{1}{4} \left[ F(x, p)I + iP(x, p)\gamma_5 + V^\mu(x, p)\gamma_\mu - A^\mu(x, p)\gamma_5\gamma_\mu + \frac{1}{2}S^{\mu\nu}(x, p)\sigma_{\mu\nu} \right], \quad (6.17)$$

podemos dividir a equação (6.6) em cinco equações:

$$K_\mu V^\mu - iK_5 P - MF = 0, \quad (6.18)$$

$$K_\mu A^\mu - K_5 F - iMP = 0, \quad (6.19)$$

$$K^\mu F - iK_\nu S^{\mu\nu} + K_5 A^\mu - MV^\mu = 0, \quad (6.20)$$

$$iK^\mu P + \frac{1}{2}K_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + K_5 V^\mu - MA^\mu = 0, \quad (6.21)$$

$$i[K^\nu V^\mu - K^\nu V^\mu] + K_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} A_\beta - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} K_5 S_{\alpha\beta} - MS^{\mu\nu} = 0, \quad (6.22)$$

em que

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)], \\ P(x, p) &= -i\text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^5], \\ V^\mu(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^\mu], \\ A^\mu(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\gamma^5\gamma^\mu], \\ S^{\mu\nu}(x, p) &= \text{Tr}[W_4(x, p)\sigma^{\mu\nu}] = -S^{\nu\mu}(x, p). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Como os momentos da função de Wigner são reais, mas os operadores  $K_\mu$ ,  $K_5$  e  $M$  são complexos, a parte real e a imaginária das equações anteriores devem ser satisfeitas separadamente. Então, separando cada uma das equações, chegamos nas dez equações cinéticas

$$\Pi_\mu V^\mu + D_5 P - M_1 F = 0, \quad (6.24)$$

$$\Pi_\mu A^\mu - \Pi_5 F - M_2 P = 0, \quad (6.25)$$

$$\Pi^\mu F + \frac{\hbar}{2} D_\nu S^{\mu\nu} + \Pi_5 A^\mu - M_1 V^\mu = 0, \quad (6.26)$$

$$\frac{\hbar}{2} D^\mu P - \frac{1}{2} \Pi_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \Pi_5 V^\mu + M_1 A^\mu = 0, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} [D^\mu V^\nu - D^\nu V^\mu] + \Pi_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} A_\beta \\ + \frac{1}{2} D_5 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} - M_1 S^{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\hbar D_\mu V^\mu - 2\Pi_5 P + 2M_2 F = 0, \quad (6.29)$$

$$\hbar D_\mu A^\mu - 2D_5 F - 2M_1 P = 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{\hbar}{2} D^\mu F - \Pi_\nu S^{\mu\nu} + D_5 A^\mu + M_2 V^\mu = 0, \quad (6.31)$$

$$\Pi^\mu P + \frac{\hbar}{4} D_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + D_5 V^\mu + M_2 A^\mu = 0, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} [\Pi^\nu V^\mu - \Pi^\mu V^\nu] + \frac{\hbar}{2} D_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} A_\beta \\ - \frac{1}{2} \Pi_5 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + M_2 S^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

## 6.5 MÉDIA NA ENERGIA

De maneira semelhante ao que foi feito em (ZHUANG; HEINZ, 1996a), é possível encontrar a função de Wigner de tempo igual  $W_3(x, \mathbf{p})$  ao fazermos a média na energia da função de Wigner covariante  $W_4(x, p)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} W_3(x, \mathbf{p}) &= \int d^3 y e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \left\langle \psi\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}, t\right) \psi^\dagger\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2}, t\right) \right\rangle \\ &= \int dp_0 W_4(x, p) \gamma_0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

e, ao substituirmos  $W_4$  por sua decomposição espinorial (6.17), ficamos com a expressão para  $W_3(x, \mathbf{p})$

$$W_3(x, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \{f_0(x, \mathbf{p}) + \gamma_5 f_1(x, \mathbf{p}) - i\gamma_0 \gamma_5 f_2(x, \mathbf{p}) + \gamma_0 f_3(x, \mathbf{p}) \\ + \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_0(x, \mathbf{p}) + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_1(x, \mathbf{p}) - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_2(x, \mathbf{p}) - \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{g}_3(x, \mathbf{p})\}, \quad (6.35)$$

em que definimos

$$f_0(x, \mathbf{p}) = \int dp_0 V^0(x, p), \quad (6.36)$$

$$f_1(x, \mathbf{p}) = - \int dp_0 A^0(x, p), \quad (6.37)$$

$$f_2(x, \mathbf{p}) = \int dp_0 P(x, p), \quad (6.38)$$

$$f_3(x, \mathbf{p}) = \int dp_0 F(x, p), \quad (6.39)$$

$$g_0^i(x, \mathbf{p}) = - \int dp_0 A^i(x, p), \quad (6.40)$$

$$g_1^i(x, \mathbf{p}) = \int dp_0 V^i(x, p), \quad (6.41)$$

$$g_2^i(x, \mathbf{p}) = - \int dp_0 S^{0i}(x, p), \quad (6.42)$$

$$g_3^i(x, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int dp_0 S_{jk}(x, p). \quad (6.43)$$

Da mesma forma, podemos encontrar as médias das equações cinéticas integrando-as em  $p_0$ . Assim, ficamos com as oito equações

$$\hbar[D_t f_0 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_1] = 2g\pi_0 f_2 - 2g\sigma_0 f_3, \quad (6.44)$$

$$\hbar[D_t f_1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_0] = -2g\pi_e f_3 - 2(M_N + g\sigma_e) f_2, \quad (6.45)$$

$$\hbar D_t f_2 + 2\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{g}_3 = 2(M_N + g\sigma_e) f_1 - 2g\pi_0 f_0, \quad (6.46)$$

$$\hbar D_t f_3 - 2\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{g}_2 = 2g\pi_e f_1 - 2g\pi_0 f_0, \quad (6.47)$$

$$\hbar[D_t \mathbf{g}_0 + \mathbf{D} f_1] - 2\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{g}_1 = -2g\sigma_0 \mathbf{g}_3 - 2g\pi_0 \mathbf{g}_2, \quad (6.48)$$

$$\hbar[D_t \mathbf{g}_1 + \mathbf{D} f_0] + 2\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{g}_0 = -2g\pi_e \mathbf{g}_3 - 2(M_N + g\sigma_e) \mathbf{g}_2, \quad (6.49)$$

$$\hbar[D_t \mathbf{g}_2 + \mathbf{D} \times \mathbf{g}_3] + 2\boldsymbol{\Pi} f_3 = 2(M_N + \sigma_e) \mathbf{g}_1 + 2g\pi_0 \mathbf{g}_0, \quad (6.50)$$

$$\hbar[D_t \mathbf{g}_3 - \mathbf{D} \times \mathbf{g}_2] - 2\boldsymbol{\Pi} f_2 = -2g\pi_e \mathbf{g}_1 + 2g\sigma_0 \mathbf{g}_0, \quad (6.51)$$

e com as oito equações de vínculo

$$\int dp_0 p_0 F - \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_2 - g \pi_0 f_1 = (M_N + g \sigma_e) f_0, \quad (6.52)$$

$$\int dp_0 p_0 P + \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_3 + g \pi_e f_0 - g \sigma_0 f_1 = 0, \quad (6.53)$$

$$\int dp_0 p_0 V_0 - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{g}_1 + g \pi_e f_2 = (M_N + g \sigma_e) f_3, \quad (6.54)$$

$$\int dp_0 p_0 \mathbf{V} - \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \times \mathbf{g}_0 - \mathbf{\Pi} f_0 + g \pi_0 \mathbf{g}_3 - g \sigma_0 \mathbf{g}_2 = 0, \quad (6.55)$$

$$\int dp_0 p_0 A_0 + \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{g}_0 - g \pi_0 f_3 - g \sigma_0 f_2 = 0, \quad (6.56)$$

$$\int dp_0 p_0 \mathbf{A} + \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \times \mathbf{g}_1 - \mathbf{\Pi} f_1 - g \pi_e \mathbf{g}_2 = (M_N + g \sigma_e) \mathbf{g}_3, \quad (6.57)$$

$$\int dp_0 p_0 S^{0i} + \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} f_3 + \mathbf{\Pi} \times \mathbf{g}_3 - 2g \pi_e \mathbf{g}_0 + 2g \sigma_0 \mathbf{g}_1 = 0, \quad (6.58)$$

$$\int dp_0 p_0 S_{jk} \varepsilon^{jki} \hat{\mathbf{e}}_i + \hbar \mathbf{D} f_2 + 2\mathbf{\Pi} \times \mathbf{g}_2 + 2g \pi_0 \mathbf{g}_1 = 2(M_N + g \sigma_e) \mathbf{g}_0, \quad (6.59)$$

na qual definimos

$$D_t = \partial_t, \quad (6.60)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{\nabla}, \quad (6.61)$$

$$\Pi_0 = p_0, \quad (6.62)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{p}, \quad (6.63)$$

$$\pi_e = \cos\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \quad (6.64)$$

$$\pi_0 = \sin\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \quad (6.65)$$

$$\sigma_e = \cos\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \quad (6.66)$$

$$\sigma_0 = \sin\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\sigma}'(x). \quad (6.67)$$

## 6.6 APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA

Segundo (ZHUANG; HEINZ, 1996a), no limite clássico, ou seja, quando  $\hbar = 0$ , as equações cinéticas têm soluções da forma

$$W_4^\pm(x, p) = \tilde{W}_4^\pm(x, \mathbf{p}) \delta(p_0 \mp E_p), \quad (6.68)$$

e então podemos fazer

$$W_4^\pm(x, \mathbf{p}) \delta(p_0 \mp E_p) = \frac{1}{4} [F(x, p)I + iP(x, p)\gamma_5 + V^\mu(x, p)\gamma_\mu - A^\mu(x, p)\gamma_5\gamma_\mu + \frac{1}{2}S^{\mu\nu}(x, p)\sigma_{\mu\nu}] \delta(p_0 \mp E_p). \quad (6.69)$$

Levando isso em conta, podemos calcular as integrais das equações de vínculo, e considerando  $\hbar = 0$ , podemos encontrar os vínculos para os componentes espinoriais clássicos e para a energia  $E_p$ :

$$f_1^\pm = \pm \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}_0^\pm}{E_p}, \quad (6.70)$$

$$f_2^\pm = \mp \frac{V_\pi f_0^\pm}{E_p}, \quad (6.71)$$

$$f_3^\pm = \pm \frac{(M_N + V_\sigma)}{E + p} f_0^\pm, \quad (6.72)$$

$$\mathbf{g}_1^\pm = \pm \frac{\mathbf{p} f_0^\pm}{E + p}, \quad (6.73)$$

$$\mathbf{g}_2^\pm = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{g}_0^\pm - V_\pi \mathbf{g}_3^\pm}{M_N + V_\sigma}, \quad (6.74)$$

$$\mathbf{g}_3^\pm = \pm \left[ \frac{E_p^2 (M_N + V_\sigma) \mathbf{g}_0^\pm - (M_N + V_\sigma) \mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}_0^\pm) \mp E_p V_\pi (\mathbf{p} \times \mathbf{g}_0^\pm)}{E_p (m^*)^2} \right] \quad (6.75)$$

$$E_p^2 = \mathbf{p}^2 + (m^*)^2, \quad (6.76)$$

onde definimos

$$V_\pi = g \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \quad , \quad V_\sigma = g \boldsymbol{\sigma}'(x) \quad , \quad (m^*)^2 = (M_N + V_\sigma)^2 + V_\pi^2. \quad (6.77)$$

É interessante notar que como as equações de vínculo (6.52) a (6.59)

não se anulam quando  $\hbar$  vai a zero, o número de componentes espinoriais que conseguimos é apenas cinco: uma da densidade de carga  $f_0$  e quatro da densidade de spin  $\mathbf{g}_0$ . Assim, a relação de dispersão  $E_p$  vem naturalmente dos vínculos, ao contrário do que acontece em outros métodos, como (SHIN; RAFELSKI, 1995).

## 6.7 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

A equação de transporte clássica para a densidade de carga vem da equação (6.44) com  $\hbar$  em primeira ordem (ZHUANG; HEINZ, 1996a):

$$d_t f_0^\pm + \mathbf{d} \cdot \mathbf{g}_1^\pm = (\mathbf{F} + \boldsymbol{\pi} \cdot \nabla_p) f_2^\pm + (\mathbf{F}_\sigma \cdot \nabla_p) f_3^\pm, \quad (6.78)$$

com

$$d_t = \partial_t \quad (6.79)$$

$$\mathbf{d} = \nabla, \quad (6.80)$$

$$\mathbf{F}_\pi = -g \nabla [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)] \quad (6.81)$$

$$\mathbf{F}_\sigma = -g \nabla \sigma'(x). \quad (6.82)$$

Definimos as densidades de carga para partículas e antipartículas como

$$f(x, \mathbf{p}) = f_0^+(x, \mathbf{p}) \quad , \quad \bar{f}(x, \mathbf{p}) = f_0^-(x, -\mathbf{p}), \quad (6.83)$$

e usando os vínculos (6.71), (6.72) e (6.73), podemos chegar em uma equação de transporte do tipo da de Vlasov para  $f$ :

$$\partial_t f + (\nabla \cdot \mathbf{v}) f - \left[ \frac{(M_N + V_\sigma) \mathbf{F}_\sigma - V_\pi \mathbf{F}_\pi}{E_p} \right] \cdot \nabla_p f = 0, \quad (6.84)$$

onde

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E_p} \quad (6.85)$$

é a velocidade do fluxo de transporte clássico.

Assim, conseguimos desenvolver uma teoria cinética quiral a partir das interações escalares e pseudoescalares, o que pode ser de grande ajuda na compreensão da dinâmica das colisões relativísticas de íons pesados. Considerando que o modelo sigma linear pode descrever a física hadrônica de



baixas energias e a transição de fase quiral para altas temperaturas e densidades, o estudo das equações cinéticas desenvolvido aqui pode ser importante na compreensão das consequências dinâmicas das propriedades quirais da QCD.



## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho conseguimos encontrar equações cinéticas para os férmions do modelo sigma linear. Isto nos dá uma ferramenta para entender melhor a dinâmica das colisões de íons pesados, o que pode nos permitir descrever melhor os fenômenos que ocorrem nos grandes colisores de partícula. Isto é possível devido ao fato de que o desenvolvimento de uma teoria cinética quântica pode nos fornecer resultados a respeito de propriedades dinâmicas do sistema.

Para conseguir chegar nesse resultado, primeiro fazemos uma revisão teórica de toda física envolvida, não só para dar embasamento para o trabalho e deixá-lo autoconsistente, mas também com o objetivo de que ele sirva de material de apoio para estudantes ou pesquisadores que queiram se aprofundar nos assuntos aqui abordados. Por isso, tentamos deixar os cálculos bem detalhados e rigorosos, de uma forma não muito comum na literatura que temos até agora.

O primeiro passo foi estudar a Equação de Dirac, tentando construí-la a partir das propriedades da transformação de Lorentz. Assim, pudemos não só estudar as propriedades dos férmions, partículas descritas por essa equação, como também pudemos ter uma ideia de como o grupo de Lorentz e os férmions quirais, que são elementos da simetria quiral, estão relacionados. Outro tópico importante foi o estudo dos bilineares da teoria de Dirac, que estão profundamente ligados às correntes das simetrias.

O passo seguinte foi estudar as simetrias quirais, depois de uma breve revisão sobre as simetrias na Mecânica Quântica. É interessante notar a conexão entre a álgebra da teoria de Dirac e a álgebra da simetria quiral. Após isso, a partir de toda a teoria estudada, montamos a lagrangiana do modelo sigma e discutimos suas propriedades.

Paralelamente a isso, iniciamos o estudo das funções de distribuição, e, mais especificamente, da função de Wigner. Estas funções são importantes para estabelecer a conexão entre a Mecânica Quântica e a Clássica, além de permitir uma teoria estatística quântica. Como o nosso modelo é um modelo efetivo para a QCD, que é relativística, para conseguirmos estudar a função de Wigner aplicada à esse modelo, precisamos de uma versão covariante desta função. Por isso, no capítulo quatro fizemos uma breve introdução da função de Wigner covariante para partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , para finalmente no quinto capítulo conseguir encontrar uma equação cinética e uma equação de transporte para os férmions do modelo sigma linear.

A QCD de baixas energias está num regime não perturbativo, e por

isso não é possível utilizar as técnicas usuais da QCD. Teorias efetivas são uma boa alternativa pois oferecem soluções simples para este problema. Devido a sua simplicidade em relação a outros modelos efetivos, o modelo sigma linear é um bom candidato para descrever a matéria nuclear na escala de energia em que a aproximação semiclássica é válida. Outra vantagem deste modelo é o fato dele ser renormalizável, ao contrário de outros modelos como o Nambu–Jona-Lasinio ou o modelo sigma não linear.

A partir desse estudo, podemos estender os cálculos para um sistema sujeito à condições extremas, como altas temperaturas e densidades, e também para um sistema sujeito a campos magnéticos externos.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, C. D. The positive electron. **Physical Review**, APS, v. 43, n. 6, p. 491, 1933.

BALLENTINE, L. E. **Quantum mechanics: a modern development**. [S.l.]: World Scientific Publishing Co Inc, 2014.

BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. **Relativistic quantum mechanics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1964.

BNL. **Brookhaven National Laboratory**. Disponível em:  
<<https://www.bnl.gov/physics/>>.

BROMLEY, D.; GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations**. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783662042755.  
Disponível em:  
<<https://books.google.com.br/books?id=YCb0CAAQBAJ>>.

BRUSH, S. G. **The kinetic theory of gases: an anthology of classic papers with historical commentary**. [S.l.]: World Scientific, 2003.

CARRUTHERS, P.; ZACHARIASEN, F. Relativistic quantum transport theory approach to multiparticle production. **Physical Review D**, APS, v. 13, n. 4, p. 950, 1976.

CARRUTHERS, P.; ZACHARIASEN, F. Quantum collision theory with phase-space distributions. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 55, n. 1, p. 245, 1983.

CERN. **Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire**. Disponível em:  
<<https://home.cern/>>.

CHENG, T.-P.; LI, L.-F. **Gauge theory of elementary particle physics**. [S.l.]: Clarendon press Oxford, 1984.

CHODOS, A. et al. Baryon structure in the bag theory. **Physical Review D**, APS, v. 10, n. 8, p. 2599, 1974.

DIRAC, P. A. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928.

ELZE, H.-T.; GYULASSY, M.; VASAK, D. Transport equations for the qcd gluon wigner operator. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 177, n. 3-4, p. 402–408, 1986.

ELZE, H.-T.; GYULASSY, M.; VASAK, D. Transport equations for the qcd quark wigner operator. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 276, n. 3, p. 706–728, 1986.

ELZE, H.-T.; HEINZ, U. Quark-gluon transport theory. **Physics Reports**, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 81–135, 1989.

FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. Pearson, 2006. ISBN 9780805390452. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6BJLNgEACAAJ>>.

GALETTI, D. Mecânica quântica no espaço de fase. **Notas de aula da III Escola Mário Schenberg do Departamento de Física da UFPB, João Pessoa**, 1986.

GASSER, J.; LEUTWYLER, H. Chiral perturbation theory to one loop. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 158, n. 1, p. 142–210, 1984.

GAVAL, R. V. Results from lattice qcd. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2006. v. 50, n. 1, p. 87.

GELL-MANN, M.; LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. **II Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 16, n. 4, p. 705–726, 1960.

GOLDBERGER, M.; TREIMAN, S. Conserved currents in the theory of fermi interactions. **Physical Review**, APS, v. 110, n. 6, p. 1478, 1958.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tJCuQgAACAAJ>>.

GOLDSTONE, J. Field theories with «superconductor» solutions. **II Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 19, n. 1, p. 154–164, 1961.

GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. **Physical Review**, APS, v. 127, n. 3, p. 965, 1962.

GOTTFRIED, K.; YAN, T.-M. **Quantum mechanics: fundamentals**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

GROENEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. **Physica**, Elsevier, v. 12, n. 7, p. 405–460, 1946.

GROOT, S.; LEEUWEN, W.; WEERT, C. van. **Relativistic kinetic theory: principles and applications**. North-Holland Pub. Co., 1980. ISBN 9780444854537. Disponível em:  
<<https://books.google.com.br/books?id=wkZ-AAAAIAAJ>>.

GROOT, S. de; SUTTORP, L. **Foundations of electrodynamics**. [S.l.]: North-Holland, 1972.

HAKIM, R. **Introduction to Relativistic Statistical Mechanics: Classical and Quantum**. [S.l.]: World scientific, 2011.

HILLERY, M. et al. Distribution functions in physics: fundamentals. **Physics reports**, Elsevier, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984.

HOSAKA, A.; TOKI, H. **Quarks, baryons and chiral symmetry**. [S.l.]: World Scientific, 2001.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum field theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.

JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. **Classical Dynamics: A Contemporary Approach**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.

JÜTTNER, F. Das maxwellsche gesetz der geschwindigkeitsverteilung in der relativtheorie. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 339, n. 5, p. 856–882, 1911.

JÜTTNER, F. Die relativistische quantentheorie des idealen gases. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 47, n. 7-8, p. 542–566, 1928.

KOCH, V. Aspects of chiral symmetry. **International Journal of Modern Physics E**, World Scientific, v. 6, n. 02, p. 203–249, 1997.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Classical theory of fields**. [S.l.]: Pergamon Press, Oxford, 1975.

LEAF, B. Weyl transformation and the classical limit of quantum mechanics. **J. Math Phys**, v. 9, n. 1, p. 65, 1968.

LEE, H.-W. Theory and application of the quantum phase-space distribution functions. **Physics Reports**, Elsevier, v. 259, n. 3, p. 147–211, 1995.

LEMONS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

LICHNEROWICZ, A.; MARROT, R. Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité restreinte. **CRAS**, v. 210, p. 759–761, 1940.

MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum field theory**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

MARCHIOLLI, M. Mecânica quântica no espaço de fase i. formulação de weyl-wigner. **Rev. Bras. Ens. Fís**, v. 24, n. 4, p. 421, 2002.

MIRANSKY, V. A. **Dynamical symmetry breaking in quantum field theories**. [S.l.]: World Scientific, 1994.

NAMBU, Y. Axial vector current conservation in weak interactions. **Physical Review Letters**, APS, v. 4, n. 7, p. 380, 1960.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Physical Review**, APS, v. 122, n. 1, p. 345, 1961.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. **Physical Review**, APS, v. 124, n. 1, p. 246, 1961.

NOETHER, E. Invariante variationsprobleme. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1918, p. 235–257, 1918.

O'CONNELL, R. F.; WIGNER, E. P. Quantum-mechanical distribution functions: conditions for uniqueness. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 83, n. 4, p. 145–148, 1981.

PASSOS, F. d. **Formalismo de Vlasov covariante aplicado a modelos efetivos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.

PATHRIA, R. **Statistical Mechanics**. Elsevier Science, 2016. ISBN 9781483104973. Disponível em:  
<<https://books.google.com.br/books?id=pR6TDAAAQBAJ>>.

PATRIGNANI, C. et al. Review of Particle Physics. **Chin. Phys.**, C40, n. 10, p. 100001, 2016.

PETROPOULOS, N. Linear sigma model and chiral symmetry at finite temperature. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 25, n. 11, p. 2225, 1999.



QUIGG, C. **Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions**. [S.l.]: Princeton University Press, 2013.

S., T. O complementaritate statistică a teoriei electrodinamice clasice. **Studii și Cercetări de fizică**, v. 7, p. 7, 1956.

SATZ, H. The quark-gluon plasma—a short introduction. **Nuclear Physics A**, North-Holland, v. 862, p. 4–12, 2011.

SCHLEICH, W. P. **Quantum optics in phase space**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

SHIN, G. R.; RAFELSKI, J. Relativistic transport equations for electromagnetic, scalar, and pseudoscalar potentials. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 243, n. 1, p. 65–75, 1995.

UGAROV, V. **Special relativity theory**. [S.l.]: Nauka, Moscow, 1977.

VASAK, D.; GYULASSY, M.; ELZE, H.-T. Quantum transport theory for abelian plasmas. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 173, n. 2, p. 462–492, 1987.

WALECKA, J. **Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics**. [S.l.]: Imperial College Press, 2004.

WALKER, A. Note on relativistic mechanics. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)**, Cambridge Univ Press, v. 4, n. 03, p. 170–174, 1935.

WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. **Physical review**, APS, v. 40, n. 5, p. 749, 1932.

YOURGRAU, W.; MERWE, A. V. D.; LANDÉ, A. **Perspectives in Quantum Theory**. Dover Publ., 1979. (Dover Classics of Science and Mathematics). ISBN 9780486637785. Disponibil em:  
<<https://books.google.com.br/books?id=vW4sAAAAYAAJ>>.

ZHUANG, P.; HEINZ, U. Relativistic kinetic equations for electromagnetic, scalar, and pseudoscalar interactions. **Physical Review D**, APS, v. 53, n. 4, p. 2096, 1996.

ZHUANG, P.; HEINZ, U. Relativistic quantum transport theory for electrodynamics. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 245, n. 2, p. 311–338, 1996.



## **APÊNDICE A – Definições e Convenções**



Neste texto adotamos a notação de unidades naturais

$$\hbar = c = 1, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck e  $c$  é a velocidade da luz, exceto quando é necessário explicitar a dependência das equações em  $\hbar$  para evidenciar a quantização.

Um comutador é denotado por

$$[A, B] = AB - BA, \quad (\text{A.2})$$

enquanto um anticomutador é denotado por

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (\text{A.3})$$

## A.1 MÉTRICA

Utilizamos a métrica de Minkowsky, dada por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

onde índices gregos são definidos como  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e índices latinos como  $i, j = 1, 2, 3$ . Vetores contravariantes são definidos como

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (t, x, y, z), \quad (\text{A.5})$$

enquanto os vetores covariantes são dados por

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -\mathbf{x}) = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.6})$$

O produto escalar entre dois quadrivetores é dado por

$$ab = a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (\text{A.7})$$

onde utilizamos a notação de Einstein, em que índices repetidos indicam uma soma implícita em relação à estes. A generalização quadridimensional da derivada espacial é, para o caso em relação à um quadrivetor contravariante, em que a derivada é covariante,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (\text{A.8})$$

Já a derivada contravariante, que é uma derivada em relação à um quadrvetor covariante, é

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (\text{A.9})$$

Assim, o D'Alambertiano é definido como

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.10})$$

Para denotar uma função em relação a um quadrvetor, utilizamos a seguinte notação:

$$f(x) \equiv f(t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.11})$$

## A.2 MATRIZES DE PAULI E DE DIRAC

As matrizes de Pauli  $\sigma$ , ou indicadas por  $\tau$  quando estão relacionadas à simetrias de isospin, são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

As matrizes de Dirac  $\gamma$  estão na representação quirial, denotada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

e suas propriedades estão dadas no Apêndice G

## **APÊNDICE B – Cálculos do Capítulo 1**





## B.1 EXPANSÃO DAS EXPONENCIAIS (2.43) E (2.55)

### B.1.1 Exponencial (2.43)

Note que se expandirmos uma exponencial do tipo  $e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ , temos

$$\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^k.$$

Mas como  $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 1$ , podemos reescrever os termos pares da expressão acima como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Já os termos ímpares ficam

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)^{2k+1} &= i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k+1} \\ &= -i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

pois

$$(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2k+1} = [(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2]^k (\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Então:

$$\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

### B.1.2 Exponencial (2.55)

Podemos expandir a exponencial numa série de Taylor

$$e^{-\zeta\sigma_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\zeta\sigma_z)^k \quad (\text{B.1})$$

e, separando os termos pares dos ímpares,

$$e^{-\zeta\sigma_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-\zeta\sigma_z)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-\zeta\sigma_z)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]. \quad (\text{B.2})$$

Sabemos que as matrizes de Pauli se comportam como

$$\begin{cases} (\sigma_z)^{2k} = (\sigma_z^2)^k = 1; \\ (\sigma_z)^{2k+1} = (\sigma_z)^{2k}\sigma_z = \sigma_z, \end{cases}$$

então podemos reescrever (B.1)

$$\begin{aligned} e^{-\zeta\sigma_z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(\zeta)^{2k}}{(2k)!} - \frac{(\zeta)^{2k+1}}{(2k+1)!}\sigma_z \right], \\ &= \cosh \zeta - \sigma_z \sinh \zeta. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

## B.2 RELAÇÃO ENTRE AS NOTAÇÕES DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Considerando as transformações (2.45) e (2.57) para rotações e boosts, podemos definir uma transformação que é um boost e uma rotação fazendo

$$\begin{aligned} U_+ &= U_{+rot} \times U_{+boost} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right), \end{aligned}$$

e juntando as exponenciais:

$$U_+ = \exp\left[\frac{1}{2}(-\zeta - i\theta)\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right].$$

Podemos definir

$$\mathbf{a} = -\theta\hat{\mathbf{n}} \quad , \quad \mathbf{b} = -\zeta\hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, podemos reescrever  $U_+$ :

$$U_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp(i\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{B.6})$$

Da mesma forma, para  $U_-$ ,

$$\begin{aligned} U_- &= U_{-rot} \times U_{-boost} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(\zeta - i\theta)\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right], \end{aligned}$$

e substituindo  $\mathbf{a} = -\theta\hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{b} = -\zeta\hat{\mathbf{n}}$ ,

$$U_-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp(i\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{B.7})$$

### B.3 COVARIANTES BILINEARES

#### *Pseudoescalar*

O pseudoescalar  $\bar{\psi}\gamma^5\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi$  pode ser reescrito em termos dos espiniores (2.17) e (2.24) como

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \varphi_+^*\varphi_- - \varphi_-^*\varphi_+, \quad (\text{B.8})$$

Já vimos como a combinação  $\varphi_\pm^*\varphi_\mp$  se transforma sob rotações e boosts. Assim, sabemos que para ambas as transformações, o pseudoescalar se comporta como

$$(\varphi_+^*\varphi_- - \varphi_-^*\varphi_+)' = \varphi_+^*\varphi_- - \varphi_-^*\varphi_+ \quad (\text{B.9})$$

Sob paridade, o pseudoescalar fica

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = \varphi_-^*\varphi_+ - \varphi_+^*\varphi_- = -\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (\text{B.10})$$

#### *Vetor*

Para escrever o vetor  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  em termos dos espiniores (2.17) e (2.24), é necessário dividi-lo entre a parte temporal e a espacial. Por isso, ficamos

com

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\bar{\psi}\gamma^0\psi, \bar{\psi}\gamma^i\psi) \quad (\text{B.11})$$

Então, a parte temporal do vetor pode ser reescrita como

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = \varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-, \quad (\text{B.12})$$

onde utilizamos a propriedade  $(\gamma^0)^2 = 1$ . A parte espacial do vetor fica

$$\bar{\psi}\gamma^i\psi = \varphi_+^*\sigma_i\varphi_+ - \varphi_-^*\sigma_i\varphi_-, \quad (\text{B.13})$$

Para rotações, podemos ver como a combinação  $\varphi_\pm^*\varphi_\pm$  se comporta e teremos a transformação da parte temporal do vetor. Assim,

$$(\varphi_\pm^*\varphi_\pm)' = \varphi_\pm^* \exp\left(\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \varphi_\pm = \varphi_\pm^*\varphi_\pm \quad (\text{B.14})$$

Por isso,

$$(\varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-)' = \varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-. \quad (\text{B.15})$$

Para a parte espacial, o cálculo é um pouco mais extenso. Por simplicidade, calcularemos como o termo  $\varphi_\pm^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_\pm$  se transforma, para então encontrar a transformação do vetor. Substituindo  $\varphi'_\pm$  e  $\varphi_\pm'^*$  pelas suas definições,

$$(\varphi_\pm^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_\pm)' = \varphi_\pm^* \exp\left(i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) (\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \varphi_\pm.$$

Já vimos que é possível escrever a exponencial como

$$\exp\left(\pm i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \pm i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

então podemos substituí-la na equação anterior

$$\begin{aligned} (\varphi_\pm^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_\pm)' &= \varphi_\pm^* \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] (\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \varphi_\pm, \\ &= \varphi_\pm^* \left[ (\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \varphi_\pm. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva, ficamos com a expressão

$$(\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm})' = \varphi_{\pm}^* \left[ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ \left. + i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - i^2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \varphi_{\pm},$$

e cancelando os termos repetidos, finalmente chegamos em

$$(\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm})' = (\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm}) \left[ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ (\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm})' = (\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm}).$$

Por isso, a parte espacial do vetor se transforma como

$$(\varphi_+^* \sigma_i \varphi_+ - \varphi_-^* \sigma_i \varphi_-)' = \varphi_+^* \sigma_i \varphi_+ - \varphi_-^* \sigma_i \varphi_- \quad (\text{B.16})$$

Então, sob rotações o vetor fica

$$(\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^{\mu} \psi)' = \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^{\mu} \psi \quad (\text{B.17})$$

Para um boost, na parte temporal vamos ver como o bilinear  $\varphi_{\pm}^* \varphi_{\pm}$  se transforma:

$$(\varphi_{\pm}^* \varphi_{\pm})' = \varphi_{\pm}^* \exp(\pm \zeta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi_{\pm}, \quad (\text{B.18})$$

e expandindo a exponencial,

$$\exp(\pm \zeta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \cosh \zeta \pm \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh \zeta.$$

Assim, os bilineares se transformam como

$$(\varphi_{\pm}^* \varphi_{\pm})' = \varphi_{\pm}^* \varphi_{\pm} \cosh \zeta \pm \hat{\mathbf{n}} \cdot \varphi_{\pm}^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm} \sinh \zeta, \quad (\text{B.19})$$

e finalmente temos que

$$(\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^0 \psi)' = (\varphi_+^* \varphi_+)' + (\varphi_-^* \varphi_-)', \\ = \varphi_+^* \varphi_+ \cosh \zeta + \hat{\mathbf{n}} \cdot \varphi_+^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_+ \sinh \zeta \\ + \varphi_-^* \varphi_- \cosh \zeta - \hat{\mathbf{n}} \cdot \varphi_-^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_- \sinh \zeta.$$

Colocando as funções hiperbólicas em evidência

$$(\bar{\psi}\gamma^0\psi)' = (\varphi_+^*\varphi_+ + \varphi_-^*\varphi_-) \cosh \zeta + (\varphi_+^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_+ - \varphi_-^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_-) \sinh \zeta,$$

e, substituindo pelas componentes do vetor

$$(\bar{\psi}\gamma^0\psi)' = \bar{\psi}\gamma^0\psi \cosh \zeta + \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}'\psi \sinh \zeta.$$

Já a parte espacial se transforma como

$$(\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}'\psi)' = \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}'\psi \cosh \zeta + \bar{\psi}\gamma^0\psi \sinh \zeta.$$

Isso pode ser verificado se calcularmos  $(\varphi_{\pm}^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_{\pm})'$  sob um boost:

$$(\varphi_{\pm}^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_{\pm})' = \left[ \varphi_{\pm}^* \exp\left(\pm\frac{\zeta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \right] (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \left[ \exp\left(\pm\frac{\zeta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \varphi_{\pm} \right].$$

Substituindo as exponenciais por (2.144),

$$\begin{aligned} (\varphi_{\pm}^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_{\pm})' &= \varphi_{\pm}^* \left[ \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \pm \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j} \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \\ &\quad \times \left[ \exp\left(\pm\frac{\zeta}{2}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \varphi_{\pm} \right], \\ &= \varphi_{\pm}^* \left[ (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \pm (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j})^2 \sinh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \pm \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j} \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \varphi_{\pm}, \end{aligned}$$

e aplicando a propriedade distributiva,

$$\begin{aligned} (\varphi_{\pm}^*\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi_{\pm})' &= \varphi_{\pm}^* \left[ (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \cosh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \pm (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j})^2 \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \pm \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \sinh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \varphi_{\pm}, \\ &= \varphi_{\pm}^* \left\{ (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{j}) \left[ \cosh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right] \pm 2 \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \sinh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \right\} \varphi_{\pm}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades das funções hiperbólicas

$$\begin{aligned}\sinh^2(x) + \cosh^2(x) &= \cosh(2x); \\ 2 \sinh x \cosh x &= \sinh(2x),\end{aligned}$$

finalmente chegamos em

$$(\varphi_{\pm}^* \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi_{\pm})' = \varphi_{\pm}^* (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi_{\pm} \cosh \zeta \pm \varphi_{\pm}^* \varphi_{\pm} \sinh \zeta.$$

Então a parte espacial pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}(\bar{\psi} \gamma^j \psi)' &= [\varphi_+^* (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi_+ \cosh \zeta + \varphi_+^* \varphi_+ \sinh \zeta] \\ &\quad - [\varphi_-^* (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \varphi_- \cosh \zeta - \varphi_-^* \varphi_- \sinh \zeta] \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\varphi_+^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_+ - \varphi_-^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_-) \cosh \zeta + (\varphi_+^* \varphi_+ + \varphi_-^* \varphi_-) \sinh \zeta \\ (\bar{\psi} \gamma^j \psi)' &= \bar{\psi} \gamma^j \psi \cosh \zeta + \bar{\psi} \gamma^0 \psi \sinh \zeta\end{aligned}$$

Ou seja, sob um boost, o vetor se transforma como

$$\begin{cases} (\bar{\psi} \gamma^0 \psi)' = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \cosh \zeta + (\bar{\psi} \gamma^j \psi) \sinh \zeta \\ (\bar{\psi} \gamma^j \psi)' = \bar{\psi} \gamma^j \psi \cosh \zeta + \bar{\psi} \gamma^0 \psi \sinh \zeta \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Sob paridade, o vetor se transforma como, na parte temporal

$$(\bar{\psi} \gamma^0 \psi)' = \varphi_-^* \varphi_- + \varphi_+^* \varphi_+ = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (\text{B.21})$$

e a parte espacial

$$(\bar{\psi} \gamma^j \psi)' = \varphi_-^* \sigma_i \varphi_- - \varphi_+^* \sigma_i \varphi_+ = -\bar{\psi} \gamma^j \psi \quad (\text{B.22})$$

#### B.4 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES (2.144)

Fazendo  $\varphi_{+\alpha}^*$ (2.138)–(2.142) $\varphi_{+\alpha}$ :

$$i[\varphi_+^* \partial_t \varphi_+ + (\partial_t \varphi_+^*)] = -i[\varphi_+^* \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi_+ + \nabla(\varphi_+^* \boldsymbol{\sigma}) \varphi_+ + m(-\varphi_-^* \varphi_+)],$$

e aplicando a regra do produto e multiplicando por  $-i$ :

$$\partial_t(\varphi_+^* \varphi_+) = -\nabla(\varphi_+^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_+) + im(\varphi_-^* \varphi_+ - \varphi_+^* \varphi_-)$$

Da mesma forma, fazendo  $\varphi_{-\alpha}^*$ (2.139)–(2.143) $\varphi_{-\alpha}$ :

$$\partial_t(\varphi_-^* \varphi_-) = \nabla(\varphi_-^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_-) - im(\varphi_-^* \varphi_+ - \varphi_+^* \varphi_-).$$

Assim ficamos com as equações

$$\begin{cases} \partial_t(\varphi_+^* \varphi_+) = -\nabla(\varphi_+^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_+) + im(\varphi_-^* \varphi_+ - \varphi_+^* \varphi_-), \\ \partial_t(\varphi_-^* \varphi_-) = \nabla(\varphi_-^* \boldsymbol{\sigma} \varphi_-) - im(\varphi_-^* \varphi_+ - \varphi_+^* \varphi_-). \end{cases} \quad (\text{B.23})$$



## **APÊNDICE C – Cálculos do Capítulo 2**



### C.1 CÁLCULO DA AÇÃO (3.10)

Como

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\phi,$$

o segundo termo da integral pode ser reescrito como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\phi,$$

e, aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \delta\phi \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right).$$

Substituindo isso em (3.9),

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi + \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right),$$

e usando o teorema da divergência de Gauss no último membro da equação,

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \int_\Gamma dS \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = 0,$$

que é igual a zero devido à condição de  $\delta\phi$  ser nulo na fronteira de  $\Omega$ . Assim, a ação fica

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi = 0.$$

### C.2 CÁLCULO DA VARIAÇÃO DA LAGRANGIANA (3.16)

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta\phi), \quad (\text{C.1})$$

e, pela regra do produto,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta\phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right). \quad (\text{C.2})
\end{aligned}$$

Note que o primeiro termo da equação é a equação de Euler-Lagrange. Por isso,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right). \quad (\text{C.3})$$

### C.3 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (3.90)

A lagrangiana de Dirac é dada por

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_N(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)\psi_N, \quad (\text{C.4})$$

e os isoespinores dos núcleons se transformam como as equações (3.38) e (3.39), e expandindo essas transformações temos

$$\begin{aligned}
\psi_N &\rightarrow \exp(i\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\gamma_5)\psi_N \\
&= (1 + i\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\psi_N \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_N &\rightarrow \bar{\psi}_N \exp(i\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\gamma_5) \\
&= \bar{\psi}_N(1 + i\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}) \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

Aplicando estas transformações na lagrangiana, ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}_N(1 + i\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)(1 + i\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\psi_N \\
&= \bar{\psi}_N(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)\psi_N + \bar{\psi}_Ni\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)\psi_N \\
&\quad + \bar{\psi}_N(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)i\gamma_5\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\psi_N + \mathcal{O}(2) \\
&= \mathcal{L} + i^2\mathbf{t}\cdot\mathbf{a}\bar{\psi}(\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5)\partial^\mu\psi_N \\
&\quad + i\mathbf{a}\cdot\bar{\psi}_N(\gamma_5\mathbf{t}M_N + \gamma_5\mathbf{t}M_N), \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

e utilizando a propriedade  $\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$ , o segundo termo se anula. Como  $\mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ , finalmente chegamos em

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + iM_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N. \quad (\text{C.8})$$

Pelas equações ( $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ ) e ( $\delta\mathcal{L} = \partial^\mu J_\mu$ ), conseguimos

$$\partial^\mu A_{\mu,nucleon}^a = iM_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau^a \psi_N \quad (\text{C.9})$$



## **APÊNDICE D – Cálculos do Capítulo 3**





## D.1 MUDANÇA DE VARIÁVEIS DA EQUAÇÃO (4.7)

Partindo de

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp' dp'' dq' dq''}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p'' q''\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p' q'\right) \langle p'' | \mathbf{F} | p' \rangle \langle q'' | q' \rangle, \quad (\text{D.1})$$

introduzimos as novas variáveis

$$\begin{aligned} 2p &= p' + p'' & 2q &= q' + q'' \\ u &= p'' - p' & v &= q'' - q', \end{aligned}$$

e obtemos as expressões

$$\begin{aligned} p'' &= p + \frac{u}{2} & q'' &= q + \frac{v}{2} \\ p' &= p - \frac{u}{2} & q' &= q - \frac{v}{2}, \end{aligned}$$

O expoente fica

$$p'' q'' - p' q' = pv + qu,$$

com o jacobiano

$$\begin{aligned} dp' dp'' dq' dq'' &= J \left[ \begin{matrix} p' \\ p, u \end{matrix} \right] J \left[ \begin{matrix} q' \\ q, v \end{matrix} \right] dp dq du dv \\ &= dp dq du dv. \end{aligned}$$

## D.2 PROVA DA EQUAÇÃO (4.16)

Partindo de

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}v\right) \left| q - \frac{v}{2} \right\rangle = \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle, \quad (\text{D.2})$$

se multiplicarmos os dois membros da equação por  $\langle p|$ :

$$\begin{aligned}\left\langle p \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle &= \left\langle p \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}v\right) \left| q - \frac{u}{2} \right\rangle \right\rangle, \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} pv\right) \left\langle p \left| q - \frac{v}{2} \right\rangle,\end{aligned}$$

onde atuamos o operador  $\mathbf{P}$  em  $\langle p|$  no lado direito da equação. Utilizando o produto (4.6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} p\left(q + \frac{u}{2}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} pv\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} p\left(q - \frac{u}{2}\right)\right], \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} p\left(q + \frac{u}{2}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} p\left(q + \frac{u}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

### D.3 PROVA DE QUE OS OPERADORES OBEDECEM ÀS CONDIÇÕES (4.19)

Calculando  $\left[\frac{i}{\hbar}v(p - \mathbf{P}), \frac{i}{\hbar}u(q - \mathbf{Q})\right]$

$$\begin{aligned}\left[\frac{i}{\hbar}v(p - \mathbf{P}), \frac{i}{\hbar}u(q - \mathbf{Q})\right] &= \frac{i^2}{\hbar^2} uv[(p - \mathbf{P}), (q - \mathbf{Q})], \\ &= -\frac{uv}{\hbar^2} \{[p, q] - [p, \mathbf{Q}] - [\mathbf{P}, q] + [\mathbf{P}, \mathbf{Q}]\}, \\ &= \frac{iuv}{\hbar} \mathbf{1},\end{aligned}$$

onde utilizamos as relações de comutação (4.1). Assim,

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] &= i^2 \frac{u^2 v}{\hbar^2} [q - \mathbf{Q}, \mathbf{1}] = 0; \\ [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] &= i^2 \frac{uv^2}{\hbar^2} [p - \mathbf{P}, \mathbf{1}] = 0.\end{aligned}$$

### D.4 PROVA DA EQUAÇÃO (4.21)

Considerando

$$f(p, q) = \text{Tr}[\mathbf{F}\mathbf{\Delta}(p, q)]. \quad (\text{D.3})$$

ao se substituir  $\mathbf{\Delta}(p, q)$  na expressão anterior:

$$\text{Tr}[\mathbf{F}\mathbf{\Delta}(p, q)] = \text{Tr} \left[ \mathbf{F} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv \right) \left| q + \frac{v}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{v}{2} \right| \right]. \quad (\text{D.4})$$

Calculando o traço

$$\text{Tr}[\mathbf{F}\mathbf{\Delta}(p, q)] = \int_{-\infty}^{\infty} dv dq' \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv \right) \langle q' | \mathbf{F} | q + \frac{v}{2} \rangle \langle q - \frac{v}{2} | q' \rangle,$$

aplicando a propriedade de ortonormalização (4.4)

$$\text{Tr}[\mathbf{F}\mathbf{\Delta}(p, q)] = \int_{-\infty}^{\infty} dv dq' \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv \right) \langle q' | \mathbf{F} | q + \frac{v}{2} \rangle \delta \left( q' - q + \frac{v}{2} \right),$$

e integrando em  $v$ , chegamos na expressão (4.21)

$$\text{Tr}[\mathbf{F}\mathbf{\Delta}(p, q)] = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv \right) \langle q - \frac{v}{2} | \mathbf{F} | q + \frac{v}{2} \rangle = f(p, q).$$

## D.5 PROVA DA EQUAÇÃO (4.26)

Podemos verificar que a partir da igualdade

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \right\} \\ = \frac{i}{\hbar} \frac{uv}{2} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

podemos encontrar

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right)^k \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\hbar uv}{i} \frac{1}{2} \right)^k \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Lembrando que para  $x < 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp x,$$

a última expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \exp \left( \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right] \\ &= \exp \left( \frac{\hbar uv}{i} \frac{1}{2} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Notemos que o lado direito desta equação é igual ao integrando da equação (4.22). Assim, podemos substituí-la nessa expressão

$$\Delta(p, q) = \exp \left( \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du dv}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} u(q - \mathbf{Q}) \right] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} v(p - \mathbf{P}) \right], \quad (\text{D.8})$$

e, pela definição do delta de Dirac dado por (4.14) e (4.15), encontramos uma nova expressão para  $\Delta(p, q)$

$$\Delta(p, q) = 2\pi\hbar \exp \left( \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \right) \delta(q - \mathbf{Q}) \delta(p - \mathbf{P}). \quad (\text{D.9})$$

## D.6 DEDUÇÃO DAS PROPRIEDADES PARA $\Delta(p, q)$

$$(i) \langle q' | \Delta(p, q) | q'' \rangle = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p(q' - q'') \right] \delta \left( q - \frac{q' + q''}{2} \right);$$

Substituindo  $\Delta(p, q)$  pela definição (4.10) e em seguida aplicando a relação de ortonormalização (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q'' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \langle q' | q + \frac{v}{2} \rangle \langle q - \frac{v}{2} | q'' \rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \delta\left(q' - q - \frac{v}{2}\right) \delta\left(q - \frac{v}{2} - q''\right).\end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $v = 2y$

$$\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q'' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(\frac{i}{\hbar}2py\right) 2\delta(q' - q - y) \delta(q - q'' - y),$$

e resolvendo a integral, temos

$$\begin{aligned}\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q'' \rangle &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}p2(q' - q)\right] 2\delta(q - q'' - q' + q), \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(2q' - 2q)\right] 2\delta(2q - (q'' + q')).\end{aligned}$$

Como  $a\delta(x) = \delta\left(\frac{x}{a}\right)$ , então

$$\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q'' \rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(2q' - 2q)\right] \delta\left(q - \frac{q'' + q'}{2}\right).$$

Finalmente, substituindo  $2q = q' + q''$  na exponencial, chegamos na expressão desejada

$$\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q'' \rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q' - q'')\right] \delta\left(q - \frac{q' + q''}{2}\right). \quad (\text{D.10})$$

$$(ii) \langle p' | \mathbf{\Delta}(p, q) | p'' \rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}q(p' - p'')\right] \delta\left(p - \frac{p' + p''}{2}\right);$$

A prova é semelhante à propriedade anterior.

$$(iii) \langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | p' \rangle = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}p'q'\right) \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \delta(q - q') \delta(p - p');$$

Substituindo  $\mathbf{\Delta}(p, q)$  pela expressão (4.23) e em seguida multiplicando pela relação de completudeza (4.3),

$$\begin{aligned}\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | p' \rangle &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \langle q' | \mathbf{\delta}(q - \mathbf{Q}) \mathbf{\delta}(p - \mathbf{P}) | p' \rangle, \\ &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \langle q' | \mathbf{\delta}(q - \mathbf{Q}) | q'' \rangle \langle q'' | \mathbf{\delta}(p - \mathbf{P}) | p' \rangle.\end{aligned}$$

Mas  $\mathbf{\delta}(q - \mathbf{Q}) | q'' \rangle = \mathbf{\delta}(q - q'') | q'' \rangle$ , então

$$\begin{aligned}\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | p' \rangle &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \mathbf{\delta}(q - q'') \mathbf{\delta}(p - p') \langle q' | q'' \rangle \langle q'' | p' \rangle, \\ &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \mathbf{\delta}(p - p') \int_{-\infty}^{\infty} dq'' \mathbf{\delta}(q - q'') \mathbf{\delta}(q' - q'') \exp\left(\frac{i}{\hbar} q'' p'\right),\end{aligned}$$

onde utilizamos o produto (4.6) e a relação de ortonormalização (4.4) na última linha. Integrando em  $q''$ , chegamos na expressão desejada

$$\begin{aligned}\langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | p' \rangle &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p' q'\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \mathbf{\delta}(q - q') \mathbf{\delta}(p - p').\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

$$\text{(iv)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \mathbf{\Delta}(p, q) = |q\rangle\langle q|;$$

Substituindo  $\mathbf{\Delta}(p, q)$  pela definição (4.10),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \mathbf{\Delta}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \left|q + \frac{v}{2}\right\rangle\left\langle q - \frac{v}{2}\right|.$$

Note que a integral destacada abaixo é a definição do delta de Dirac. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \mathbf{\Delta}(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \right] \left|q + \frac{v}{2}\right\rangle\left\langle q - \frac{v}{2}\right|, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \mathbf{\delta}(v) \left|q + \frac{v}{2}\right\rangle\left\langle q - \frac{v}{2}\right|,\end{aligned}$$

e, integrando em  $v$ , finalmente chegamos em

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \mathbf{\Delta}(p, q) = |q\rangle\langle q|. \quad (\text{D.12})$$

$$(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \mathbf{\Delta}(p, q) = |p\rangle\langle p|$$

A prova é semelhante à prova da propriedade anterior.

$$(vi) \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p, q)] = 1;$$

Aplicando o traço

$$\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p, q)] = \int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle q' | \mathbf{\Delta}(p, q) | q' \rangle,$$

e, pela propriedade (i),

$$\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p, q)] = \int_{-\infty}^{\infty} dq' \delta(q - q') = 1. \quad (\text{D.13})$$

$$(vii) \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] = 2\pi\hbar \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2);$$

Calculando o traço e em seguida multiplicando pela relação de completudeza (4.3),

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle q' | \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) | q' \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' \langle q' | \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) | q'' \rangle \langle q'' | \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) | q' \rangle \end{aligned}$$

e, utilizando o produto (4.6),

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_1 (q' - q'') \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_2 (q'' - q') \right] \delta \left( q_1 - \frac{q' + q''}{2} \right) \delta \left( q_2 - \frac{q' + q''}{2} \right). \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis

$$q' + q'' = 2x_1 \quad q' - q'' = x_2;$$

e calculando o jacobiano desta substituição,

$$dq' dq'' = J \left[ \begin{matrix} q' \\ x_1, x_2 \end{matrix} \right] dx_1 dx_2 = dx_1 dx_2,$$

conseguimos

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} x_2 (p_1 - p_2) \right] \delta(q_1 - x_1) \delta(q_2 - x_1). \end{aligned}$$

Integrando em  $x_1$  e  $x_2$ , finalmente chegamos em

$$\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] = 2\pi\hbar\delta(p_1 - p_2)\delta(q_1 - q_2). \quad (\text{D.14})$$

$$\text{(viii)} \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3)] =$$

$$= 2^2 \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q_3)(p_2 - p_3) - (q_2 - q_3)(p_1 - p_3)] \right\};$$

Calculando o traço e multiplicando pela relação de completudeza,

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle q' | \mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3) | q' \rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' dq''' \langle q' | \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) | q'' \rangle \\ &\quad \times \langle q'' | \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) | q''' \rangle \langle q''' | \mathbf{\Delta}(p_3, q_3) | q' \rangle. \end{aligned}$$

Pela propriedade (i)



$$\begin{aligned}
& \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' dq''' \exp\left[\frac{i}{\hbar}p_1(q' - q'')\right] \delta\left(q_1 - \frac{q' + q''}{2}\right) \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}p_2(q'' - q''')\right] \delta\left(q_2 - \frac{q'' + q'''}{2}\right) \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}p_3(q''' - q')\right] \delta\left(q_3 - \frac{q' + q'''}{2}\right), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq'' dq''' \delta\left(q_1 - \frac{q' + q''}{2}\right) \\
&\times \delta\left(q_2 - \frac{q'' + q'''}{2}\right) \delta\left(q_3 - \frac{q' + q'''}{2}\right) \\
&\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[p_1(q' - q'') + p_2(q'' - q''') + p_3(q''' - q')]\right\}. \quad (\text{D.15})
\end{aligned}$$

Fazendo  $q' + q'' = 2x_1$ ,  $q'' + q''' = 2x_2$ ,  $q''' + q' = 2x_3$ , chegamos às expressões

$$\begin{aligned}
q' &= x_1 - x_2 + x_3; \\
q'' &= x_1 + x_2 - x_3; \\
q''' &= -x_1 + x_2 + x_3;
\end{aligned}$$

e, para os expoentes,

$$\begin{aligned}
q' - q'' &= 2(x_3 - x_2); \\
q'' - q''' &= 2(x_1 - x_3); \\
q''' - q' &= 2(x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

O jacobiano fica

$$\begin{aligned}
 dq' dq'' dq''' &= J \left[ \frac{q', q'', q'''}{x_1, x_2, x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3, \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3, \\
 dq' dq'' dq''' &= 2^2 dx_1 dx_2 dx_3.
 \end{aligned}$$

Voltando à integral (D.15)

$$\begin{aligned}
 &\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3)] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \delta(q_1 - x_1)\delta(q_2 - x_2)\delta(q_3 - x_3) \\
 &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} [p_1(x_3 - x_2) + p_2(x_1 - x_3) + p_3(x_2 - x_1)] \right\},
 \end{aligned}$$

podemos organizar o expoente

$$\begin{aligned}
 p_1 x_3 - p_1 x_2 + p_2 x_1 - p_2 x_3 + p_3 x_2 - p_3 x_1 + (p_3 x_3 - p_3 x_3) = \\
 (x_1 - x_3)(p_2 - p_3) - (x_2 - x_3)(p_1 - p_3).
 \end{aligned}$$

Então, integrando em  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , finalmente temos

$$\begin{aligned}
 &\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1)\mathbf{\Delta}(p_2, q_2)\mathbf{\Delta}(p_3, q_3)] = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \delta(q_1 - x_1)\delta(q_2 - x_2)\delta(q_3 - x_3) \\
 &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} [x_1 - x_3)(p_2 - p_3) - (x_2 - x_3)(p_1 - p_3)] \right\}, \\
 &= 2^2 \exp\left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q_3)(p_2 - p_3) - (q_2 - q_3)(p_1 - p_3)] \right\}. \quad (\text{D.16})
 \end{aligned}$$

## D.7 TRAÇO DE DOIS OPERADORES ARBITRÁRIOS A E B

### D.7.1 Traço de um operador A

$$\text{Tr}[\mathbf{A}] = \text{Tr} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} a(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q) \right], \quad (\text{D.17})$$

onde  $a(p, q)$  é a transformada de Weyl para  $\mathbf{A}$ . Como o traço atua somente em operadores

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbf{A}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} a(p, q) \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p, q)], \\ \text{Tr}[\mathbf{A}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} a(p, q). \end{aligned}$$

Na última expressão, utilizamos a propriedade (vi).

### D.7.2 Traço de dois operadores A e B

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbf{AB}] &= \text{Tr} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq dp' dq'}{(2\pi\hbar)^2} a(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q) b(p', q') \mathbf{\Delta}(p', q') \right], \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq dp' dq'}{(2\pi\hbar)^2} a(p, q) b(p', q') \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p, q) \mathbf{\Delta}(p', q')]. \end{aligned}$$

Pela propriedade (vii),

$$\text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2)] = 2\pi\hbar \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2),$$

então,

$$\text{Tr}[\mathbf{AB}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} a(p, q) b(p, q) = \text{Tr}[\mathbf{BA}] \quad (\text{D.18})$$

## D.8 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (4.31)

Partindo de

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) b(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \mathbf{\Delta}(p, q). \tag{D.19}
\end{aligned}$$

Como a forma compacta da transformação de Weyl é  $f(p, q) = \text{Tr}[\mathbf{AB}\mathbf{\Delta}(p, q)]$ , substituindo  $\mathbf{AB}$  nesta expressão ficamos com:

$$\begin{aligned}
f(p, q) &= \text{Tr} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_1, q_1) b(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p, q) \right], \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) b(p_2, q_2) \text{Tr}[\mathbf{\Delta}(p_1, q_1) \mathbf{\Delta}(p_2, q_2) \mathbf{\Delta}(p, q)],
\end{aligned}$$

e, utilizando a propriedade (viii),

$$\begin{aligned}
f(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 dp_2 dq_2}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) b(p_2, q_2) \\
&\quad \times \left\{ 2^2 \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [(q_1 - q)(p_2 - p) - (q_2 - q)(p_1 - p)] \right\} \right\}. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Realizando a troca de variáveis

$$\bar{p} = p_2 - p \quad \bar{q} = q_2 - q,$$

$f(p, q)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
f(p, q) &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) b(\bar{p} + p, \bar{q} + q) \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)] \right\}. \tag{D.21}
\end{aligned}$$

Expandindo  $b(p_2, q_2)$  em uma série de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned}
b(\bar{p} + p, \bar{q} + q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) b(p, q), \\
&= \exp \left( \bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) b(p, q). \tag{D.22}
\end{aligned}$$

Tomando a parte do integrando

$$\exp\left\{\frac{2i}{\hbar}[\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)]\right\} \exp\left(\bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{q} \frac{\partial}{\partial q}\right) b(p, q), \quad (\text{D.23})$$

se considerarmos que no desenvolvimento de (GALETTI, 1986)

$$\left(1 + \bar{p} \frac{\partial}{\partial p} + \bar{p}^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \dots\right) b(p, q),$$

os termos em  $\bar{p}$  podem ser vistos como se tivessem originado de derivações do tipo

$$-\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}[\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)]\right\} \right\},$$

então pode-se fazer a substituição na segunda exponencial

$$\bar{p} \rightarrow -\frac{\hbar}{2i} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \quad \bar{q} \rightarrow \frac{\hbar}{2i} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}},$$

onde a seta indica que as derivadas atuam à esquerda. Assim, podemos reescrever  $f(p, q)$

$$\begin{aligned} f(p, q) &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dq_1 d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} a(p_1, q_1) \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}[\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)]\right\} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}}\right)\right] b(p, q), \\ &= 2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dq_1 a(p_1, q_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}[\bar{p}(q_1 - q) - \bar{q}(p_1 - p)]\right\} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}}\right)\right] b(p, q). \quad (\text{D.24}) \end{aligned}$$

Resolvendo a segunda integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{p} d\bar{q}}{(2\pi\hbar)^2} \exp\left[\frac{2i}{\hbar} \bar{p}(q_1 - q)\right] \exp\left[-\frac{2i}{\hbar} \bar{q}(p_1 - p)\right],$$

e realizando a mudança de variáveis

$$\frac{2}{\hbar}\bar{p} = p' \rightarrow d\bar{p} = \frac{\hbar}{2} dp' \quad \frac{2}{\hbar}\bar{q} = q' \rightarrow d\bar{q} = \frac{\hbar}{2} dq',$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{2} dp' \exp\left[\frac{2i}{\hbar}q'(q_1 - q)\right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{2} dq' \exp\left[-\frac{2i}{\hbar}q'(p_1 - p)\right], \\ &= \frac{1}{2^2} \delta(q_1 - q) \delta(p_1 - p). \end{aligned}$$

Então, voltando à  $f(p, q)$ , obtemos

$$\begin{aligned} f(p, q) &= \frac{2^2}{2^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dq_1 a(p_1, q_1) \delta(q_1 - q) \delta(p_1 - p) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{\hbar}{2i} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}} \right)\right] b(p, q) \end{aligned}$$

e resolvendo as integrais em  $p_1$  e  $q_1$ ,

$$f(p, q) = a(p, q) \exp\left[\frac{\hbar}{2i} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}} \right)\right] b(p, q). \quad (\text{D.25})$$

Mudando a notação,

$$f(p, q) = \exp\left[\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right)\right] a(p, q) b(p, q). \quad (\text{D.26})$$

## D.9 TRANSFORMADA DE WEYL DAS RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO E ANTICOMUTAÇÃO ENTRE DOIS OPERADORES ARBITRÁRIOS

### D.9.1 Comutação

Como

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA},$$

então

$$\begin{aligned} f([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= f_{AB}(p, q) - f_{BA}(p, q), \\ &= \left\{ \exp \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] \right\} a(p, q) b(p, q). \end{aligned}$$

Expandindo as duas exponenciais em uma série de Taylor

$$\begin{aligned} f([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ -\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^k \right\} a(p, q) b(p, q), \end{aligned}$$

e separando os termos pares e ímpares de cada série

$$\begin{aligned} f([\mathbf{A}, \mathbf{B}]) &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k} \right. \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left[ -\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k} \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left[ -\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k+1} \right\} a(p, q) b(p, q), \end{aligned}$$

os termos pares se cancelam, assim

$$\begin{aligned}
&= 2i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k+1} a(p,q)b(p,q), \\
&= 2i \sin \left( -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right) a(p,q)b(p,q).
\end{aligned}$$

Logo

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rightleftharpoons 2i \sin \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right) a(p,q)b(p,q). \quad (\text{D.27})$$

## D.9.2 Anticomutação

Como

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{AB} + \mathbf{BA},$$

então

$$\begin{aligned}
f(\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}) &= f_{AB}(p,q) + f_{BA}(p,q), \\
&= \left\{ \exp \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[ -\frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] \right\} a(p,q)b(p,q), \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[ -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right]^{2k} a(p,q)b(p,q), \\
&= 2 \cos \left( -\frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right) a(p,q)b(p,q).
\end{aligned}$$

Logo

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \rightleftharpoons 2 \cos \left( \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right) a(p,q)b(p,q). \quad (\text{D.28})$$



## D.10 LIMITE CLÁSSICO

### D.10.1 Produto AB

Utilizando a definição (4.31),

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &\rightarrow \lim_{\hbar \rightarrow 0} f_{\mathbf{AB}}(p, q), \\ &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[ \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} - \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} \right) \right] a(p, q) b(p, q) \right\}, \end{aligned}$$

e aplicando o limite, chegamos na expressão inicial

$$\mathbf{AB} \xrightarrow{\text{Cláss}} a_{cl}(p, q) b_{cl}(p, q). \quad (\text{D.29})$$

### D.10.2 Anticomutação $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$

Pela definição (4.33) da transformada de Weyl do anticomutador,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} &\rightarrow \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f(\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\})}{2}, \\ &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{2}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right]^{2k} a(p, q) b(p, q) \right\}. \end{aligned}$$

Todos os termos da somatória são iguais a zero, exceto  $k = 0$ . Logo o limite fica

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{f(\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\})}{2} = a(p, q) b(p, q).$$

Ou seja;

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \xrightarrow{\text{Cláss}} a_{cl}(p, q) b_{cl}(p, q) \quad (\text{D.30})$$

### D.10.3 Comutação $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$

Utilizando a definição da transformada de Weyl do comutador (4.32),

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] &\rightarrow \lim_{\hbar \rightarrow 0} -\frac{i}{\hbar} f([\mathbf{A}, \mathbf{B}]), \\ &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{2}{\hbar} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial^a}{\partial q} \frac{\partial^b}{\partial p} - \frac{\partial^a}{\partial p} \frac{\partial^b}{\partial q} \right) \right]^{2k+1} a(p, q) b(p, q) \right\}. \end{aligned}$$

Apenas o termo onde  $k = 0$  é não nulo, logo

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \xrightarrow{\text{Cláss}} \frac{\partial a_{cl}}{\partial q} \frac{\partial b_{cl}}{\partial p} - \frac{\partial a_{cl}}{\partial p} \frac{\partial b_{cl}}{\partial q} \quad (\text{D.31})$$

## D.11 CÁLCULO DAS FORMAS DE EXPRESSAR A FUNÇÃO DE WIGNER $\rho_W(P, Q; T)$

1. A partir de (4.12)

$$\begin{aligned} \rho_W(p, q; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \left| \boldsymbol{\rho}(p, q; t) \right| q + \frac{v}{2} \right\rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \left\langle q - \frac{v}{2} \left| \boldsymbol{\Psi}(t) \right\rangle \langle \boldsymbol{\Psi}(t) \left| q + \frac{v}{2} \right. \right\rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right) \boldsymbol{\Psi}\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \boldsymbol{\Psi}^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right) \quad (\text{D.32}) \end{aligned}$$

Na última linha, utilizamos a relação  $\langle q | \boldsymbol{\Psi}(t) \rangle = \boldsymbol{\Psi}(q; t)$ .

2. Ou, a partir de (4.9)

$$\begin{aligned} \rho_W(p, q; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \left\langle p + \frac{u}{2} \left| \boldsymbol{\rho}(p, q; t) \right| p - \frac{u}{2} \right\rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar}qu\right) \left\langle p + \frac{u}{2} \left| \boldsymbol{\Psi}(t) \right\rangle \langle \boldsymbol{\Psi}(t) \left| p - \frac{u}{2} \right. \right\rangle. \end{aligned}$$

Na representação de momentos,  $\langle p | \boldsymbol{\Psi}(t) \rangle = \phi(p; t)$ . Então,

$$\rho_W(p, q; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right) \phi\left(p + \frac{u}{2}; t\right) \phi^*\left(p - \frac{u}{2}; t\right). \quad (\text{D.33})$$

3. Usando a forma compacta da função de Wigner (4.21) e a equação (4.23)

$$\begin{aligned} \rho_W(p, q; t) &= 2\pi\hbar \text{Tr} \left[ \boldsymbol{\rho} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \boldsymbol{\delta}(q - \mathbf{Q}) \boldsymbol{\delta}(p - \mathbf{P}) \right], \\ &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \text{Tr} [\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\delta}(q - \mathbf{Q}) \boldsymbol{\delta}(p - \mathbf{P})]. \end{aligned}$$

Substituindo  $\boldsymbol{\rho}$  por (4.36),

$$\rho_W(p, q; t) = 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \text{Tr} [|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|_q \langle q|p\rangle \langle p|],$$

e aplicando o traço,

$$\begin{aligned} &\rho_W(p, q; t) \\ &= 2\pi\hbar \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dp' \langle p' | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) |_q \langle q|p\rangle \langle p|p'\rangle. \end{aligned}$$

Como já vimos, o produto  $\langle q|p\rangle$  é dado pela equação (4.6), e o produto  $\langle p|p'\rangle$  por (4.4). Assim,

$$\begin{aligned} \rho_W(p, q; t) &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dp' \phi(p'; t) \psi^*(q; t) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \delta(p - p'). \end{aligned}$$

Finalmente, integrando em  $p'$ ,

$$\rho_W(p, q; t) = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[ \phi(p; t) \psi^*(q; t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \right]. \quad (\text{D.34})$$

Como  $\rho$  é hermitiano,  $\rho_W(p, q; t)$  é real, então podemos reescrever esta última equação como:

$$\rho_W(p, q; t) = \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}\right) \left[ \Phi^*(p; t) \Psi(q; t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} pq\right) \right]. \quad (\text{D.35})$$

## D.12 PROPRIEDADES DE $\rho_W(P, Q)$

1.  $\rho_W(p, q; t)$  é real

Como já vimos,  $\rho_W(p, q)$  é dada por

$$\rho_W(p, q) = \langle \psi | \mathbf{F}(p, q) | \psi \rangle$$

onde  $\mathbf{F}$  é um operador auto-adjunto. Então, tomando o complexo conjugado de  $\rho_W(p, q)$ ,

$$\begin{aligned} \rho_W^*(p, q) &= (\langle \psi | \mathbf{F} | \psi \rangle)^*, \\ &= \langle \psi | \mathbf{F}^\dagger | \psi \rangle, \\ &= \langle \psi | \mathbf{F} | \psi \rangle, \\ \rho_W^*(p, q) &= \rho_W(p, q). \end{aligned}$$

Ou seja,  $\rho_W(p, q)$  é real. A normalização e o fato dela não ser positiva definida serão apresentadas em outras propriedades.

2. Normalização

**Posição:**

Utilizando a definição (4.40) de  $\rho_W(p, q; t)$ , temos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho_W(p, q; t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dv}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \psi\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right), \end{aligned}$$

e, integrando em  $p$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho_W(p, q; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi(q - \frac{v}{2}; t) \psi^*(q + \frac{v}{2}; t) \delta(v).$$

Integrando em  $v$ , finalmente chegamos em

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho_W(p, q; t) = \psi(q; t) \psi^*(q; t),$$

e então

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \rho_W(p, q; t) = |\psi(q; t)|^2. \quad (\text{D.36})$$

### Momento:

Agora, utilizando a definição (4.41) para  $\rho_W(p, q; t)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq \rho_W(p, q; t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq du}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right) \phi\left(p + \frac{u}{2}; t\right) \phi^*\left(p - \frac{u}{2}; t\right), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \phi\left(p + \frac{u}{2}; t\right) \phi^*\left(p - \frac{u}{2}; t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right). \end{aligned}$$

Integrando em  $q$  e depois em  $u$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dq \rho_W(p, q; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} du \phi\left(p + \frac{u}{2}; t\right) \phi^*\left(p - \frac{u}{2}; t\right) \delta(u), \\ &= \phi(p; t) \phi^*(p; t), \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \rho_W(p, q; t) = |\phi(p; t)|^2. \quad (\text{D.37})$$

### Total:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \rho_W(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \text{Tr}[\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Delta}(p, q)], \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \text{Tr} \left[ \boldsymbol{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \boldsymbol{\Delta}(p, q) \right], \end{aligned}$$

e utilizando a propriedade (iv) na integral em  $p$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \rho_W(p, q) = \text{Tr} \left[ \boldsymbol{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| \right].$$

Como a integral é a relação de completeza (4.3), então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \rho_W(p, q) = \text{Tr}[\boldsymbol{\rho}] \quad (\text{D.38})$$

Mas, pela condição de normalização do operador densidade,  $\text{Tr}[\boldsymbol{\rho}] = 1$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} \rho_W(p, q) = 1. \quad (\text{D.39})$$

3.  $\rho_W(p, q; t)$  deve ser invariante sob transformações de Galileu. Podemos verificar isso fazendo

$$\rho'_W(p, q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi' \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \psi'^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} p v \right),$$

e, substituindo  $\psi$  e  $\psi^*$ ,

$$\begin{aligned} \rho'_W(p, q; t) \\ = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi \left( q + a - \frac{v}{2}; t \right) \psi^* \left( q + a + \frac{v}{2}; t \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} p v \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\rho'_W(p, q; t) = \rho_W(p, q + a; t). \quad (\text{D.40})$$

Ou então, se  $\psi(q;t) \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar}p'q}\psi(q;t)$ , então  $\rho'_W(p,q;t) = \rho_W(p-p',q;t)$ . Verificamos isso fazendo

$$\rho'_W(p,q;t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi' \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \psi'^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar}pv \right).$$

Substituindo  $\psi'$  e  $\psi'^*$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \rho'_W(p,q;t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}p' \left( q + \frac{v}{2} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar}p' \left( q - \frac{v}{2} \right) \right] \psi \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar}pv \right), \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \psi \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ p' \left( -q - \frac{v}{2} + q - \frac{v}{2} \right) + pv \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \psi \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar}(p-p')v \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho'_W(p,q;t) = \rho_W(p-p',q;t). \quad (\text{D.41})$$

4.  $\rho_W(p,q;t)$  deve ser invariante sob reflexões espaciais e temporais.

#### Reflexão espacial:

Se  $\psi(q;t) \rightarrow \psi(-q;t)$ , então  $\rho_W(p,q;t) \rightarrow \rho_W(-p,-q;t)$ . Verificamos isso através de

$$\begin{aligned} \rho'_W(p,q;t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi' \left( q - \frac{v}{2}; t \right) \psi'^* \left( q + \frac{v}{2}; t \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar}pv \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} (-dv) \psi \left[ - \left( q - \frac{v}{2} \right); t \right] \psi^* \left[ - \left( q + \frac{v}{2} \right); t \right] \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar}(-p)(-v) \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi \left( -q + \frac{v}{2}; t \right) \psi^* \left( -q - \frac{v}{2}; t \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar}(-p)(-v) \right]. \end{aligned}$$

Substituindo  $v$  por  $-v$ , temos

$$\rho'_W(p, q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi\left(-q - \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(-q + \frac{v}{2}; t\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(-p)v\right],$$

ou seja,

$$\rho_W(p, q; t) \rightarrow \rho_W(-p, -q; t). \quad (\text{D.42})$$

### Reflexão temporal:

Se  $\psi(q; t) \rightarrow \psi^*(q; t)$ , então  $\rho_W(p, q; t) \rightarrow \rho_W(-p, q; t)$ . Isso pode ser confirmado se fizermos

$$\begin{aligned} \rho'_W(p, q; t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi'\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \psi'^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}pv\right), \\ &= -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi\left(q + \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(-p)(-v)\right]. \end{aligned}$$

Substituindo  $v$  por  $-v$ , temos

$$\rho'_W(p, q; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi\left(q - \frac{v}{2}; t\right) \psi^*\left(q + \frac{v}{2}; t\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(-p)v\right],$$

ou seja,

$$\rho_W(p, q; t) \rightarrow \rho_W(-p, q; t). \quad (\text{D.43})$$

5. Como essa propriedade é desnecessária para a continuidade do trabalho, ela fica apenas exposta, sem nenhuma prova.

6. Se  $\rho_\psi(p, q; t)$  e  $\rho_\varphi(p, q; t)$  são distribuições que correspondem aos estados  $\psi(q; t)$  e  $\varphi(q; t)$ , então

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q; t) \varphi(q; t) \right|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_\psi(p, q; t) \rho_\varphi(p, q; t). \quad (\text{D.44})$$



Podemos confirmar esta expressão inserindo a definição de  $\rho_W(p, q; t)$  no lado direito desta:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) \\
 = & \frac{2\pi\hbar}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv \psi^* \left( q + \frac{v}{2} \right) \psi \left( q - \frac{v}{2} \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv \right) \right] \\
 & \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv' \phi^* \left( q + \frac{v'}{2} \right) \phi \left( q - \frac{v'}{2} \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} pv' \right) \right], \\
 = & \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq dv dv' \psi^* \left( q + \frac{v}{2} \right) \psi \left( q - \frac{v}{2} \right) \\
 & \times \phi^* \left( q + \frac{v'}{2} \right) \phi \left( q - \frac{v'}{2} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p(v+v') \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Integrando em  $p$ , temos

$$\begin{aligned}
 & 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) \\
 = & \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq dv dv' \psi^* \left( q + \frac{v}{2} \right) \psi \left( q - \frac{v}{2} \right) \\
 \times & \phi^* \left( q + \frac{v'}{2} \right) \phi \left( q - \frac{v'}{2} \right) [(2\pi\hbar)\delta(v+v')],
 \end{aligned}$$

e substituindo  $v \rightarrow 2y$  e  $v' \rightarrow 2y'$ , lembrando que  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ ,

$$\begin{aligned}
 & 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) = \\
 & \frac{4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq dy dy' \psi^*(q+y) \psi(q-y) \phi^*(q+y') \phi(q-y') \delta(y+y').
 \end{aligned}$$

Integrando em  $y'$ ,

$$\begin{aligned}
 & 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) = \\
 & 2 \int_{-\infty}^{\infty} dq dy dy' \psi^*(q+y) \psi(q-y) \phi^*(q-y) \phi(q+y).
 \end{aligned}$$

Fazendo a substituição

$$q + y = x' \quad , \quad q - y = x'',$$

cujo jacobiano é

$$J \left[ \begin{matrix} q, y \\ x', x'' \end{matrix} \right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

a nossa expressão fica

$$2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) = \\ \frac{2}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi^*(x'; t) \phi(x'; t) \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \psi(x''; t) \phi^*(x''; t) \right].$$

Como  $x'$  e  $x''$  são variáveis mudas, podemos substituí-las por  $q$ . Assim,

$$2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t) = \\ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q; t) \phi(q; t) \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi(q; t) \phi^*(q; t) \right].$$

Finalmente chegamos na expressão desejada

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi^*(q; t) \phi(q; t) \right|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \rho_{\psi}(p, q; t) \rho_{\phi}(p, q; t).$$

## 7. Simetria $p - q$

A partir da transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \psi(q; t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} pq\right),$$

é possível escrever a equação (4.41) a partir da expressão (4.40).

## D.13 CÁLCULO DA EQUAÇÃO (4.57)

Queremos mostrar que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right) \rho_W(p, q; t) = 0 \quad (\text{D.45})$$

quando  $\hbar = 0$ . Fazendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_W(p, q; t) = [h(p, q, \rho_W(p, q; t))]_P,$$

em que  $[h(p, q, \rho_W(p, q; t))]_P$  é o parêntese de Poisson. Então, utilizando a sua definição (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002)(LEMOS, 2007) e aplicando as derivadas convenientes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_W(p, q; t) &= \left( \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial \rho_W}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial \rho_W}{\partial q} \right), \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \frac{\partial \rho_W}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \frac{\partial \rho_W}{\partial q} \right], \\ &= \left[ \frac{\partial V(q)}{\partial q} \frac{\partial \rho_W}{\partial p} - \frac{p}{m} \frac{\partial \rho_W}{\partial q} \right], \end{aligned}$$

chegamos em

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right) \rho_W(p, q; t) = 0.$$



## **APÊNDICE E – Cálculos do Capítulo 5**



## E.1 EQUAÇÃO CINÉTICA (6.6)

Partindo da matriz de densidade covariante (6.5)

$$\Phi_4(x, y) = \psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right), \quad (\text{E.1})$$

ao derivarmos esta expressão em relação à  $x$  e  $y$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\partial_x^\mu + \partial_y^\mu\right) \Phi_4(x, y) \\ &= \frac{1}{2}\partial_x^\mu \left[\psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right] + \partial_y^\mu \left[\psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

e, ao aplicarmos a regra do produto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\partial_x^\mu + \partial_y^\mu\right) \Phi_4(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\partial_x^\mu \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \left[\partial_x^\mu \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right] \\ & + \left[\partial_y^\mu \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right) + \psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \left[\partial_y^\mu \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Derivando cada campo, ficamos com

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\partial_x^\mu + \partial_y^\mu\right) \Phi_4(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2} \psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \left[\partial^\mu \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \left[\partial^\mu \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right)\right], \\ &= \left[\partial^\mu \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] \bar{\psi}\left(x - \frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

e substituindo o lado direito pela equação de movimento (6.2)

$$i\partial\psi(x) = [M_N + g(\sigma'(x) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)\gamma_5)]\psi(x), \quad (\text{E.2})$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \partial_x^\mu + \partial_y^\mu \right) \Phi_4(x, y) \\
 = \left[ M_N + g \left( \sigma' \left( x + \frac{y}{2} \right) + i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \left( x + \frac{y}{2} \right) \gamma_5 \right) \right] \Phi_4(x, y). \quad (\text{E.3})
 \end{aligned}$$

Note que se expandirmos  $\sigma' \left( x + \frac{y}{2} \right)$  em torno de  $x$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \sigma' \left( x + \frac{y}{2} \right) &= \sigma'(x) + \frac{\partial \sigma'(x)}{\partial x} \frac{y}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma'(x)}{\partial x^2} \left( \frac{y}{2} \right)^2 + \dots \\
 &= \exp \left( \frac{\hbar}{2} y \partial_x \right) \sigma'(x),
 \end{aligned}$$

e, da mesma forma, para  $\boldsymbol{\pi} \left( x + \frac{y}{2} \right)$ ,

$$\boldsymbol{\pi} \left( x + \frac{y}{2} \right) = \exp \left( \frac{\hbar}{2} y \partial_x \right) \boldsymbol{\pi}(x).$$

Então, se substituirmos as equações anteriores em (E.3), esta fica

$$\begin{aligned}
 &i\gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \partial_x^\mu + \partial_y^\mu \right) \Phi_4(x, y) = \\
 &\left\{ M_N + g \left[ \exp \left( \frac{\hbar}{2} y \partial_x \right) \sigma'(x) + i \exp \left( \frac{\hbar}{2} y \partial_x \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \gamma_5 \right] \right\} \Phi_4(x, y).
 \end{aligned}$$

Realizando uma transformada de Fourier na última equação, temos

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \gamma^\mu \left( \frac{i\hbar}{2} \partial_x^\mu + p^\mu \right) - ig \exp \left( -\frac{i\hbar}{2} \partial_x \partial_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \gamma_5 \right. \\
 &\quad \left. - M_N - g \exp \left( -\frac{i\hbar}{2} \partial_x \partial_p \right) \sigma'(x) \right\} W_4(x, p) = 0
 \end{aligned}$$

Precisamos reescrever os termos de  $\sigma'(x)$  e  $\boldsymbol{\pi}(x)$  para simplificar a equação, mas antes precisamos definir



$$\begin{aligned}
\Pi_\mu &= p_\mu, \\
D_\mu &= \partial_\mu, \\
\Pi_5 &= g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \\
D_5 &= g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \\
M_1 &= M_N + g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \\
M_2 &= g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \\
\Delta &= \partial_x \partial_p.
\end{aligned}$$

Assim, temos, para  $\boldsymbol{\pi}$

$$\begin{aligned}
ig \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\partial_x \partial_p\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) &= ig \left[ \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) - i \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \right] \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \\
&= \left[ g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right] + i \left[ g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \right] \\
&= \Pi_5 + iD_5,
\end{aligned}$$

e para  $\boldsymbol{\sigma}'$ ,

$$\begin{aligned}
M_N + g \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\partial_x \partial_p\right) \boldsymbol{\sigma}'(x) &= M_N + g \left[ \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) - i \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \right], \\
&= \left[ M_N + g \cos\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \boldsymbol{\sigma}'(x) \right] - i \left[ g \sin\left(\frac{\hbar}{2}\Delta\right) \right], \\
&= M_1 - iM_2.
\end{aligned}$$

Então a equação cinética para  $W_4(x, p)$  fica

$$\left\{ \gamma^\mu \left[ \Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right] - \gamma^5 [\Pi_5 + iD_5] - [M_1 - iM_2] \right\} W_4(x, p) = 0. \quad (\text{E.4})$$

E, definindo

$$K_\mu = \Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2}D_\mu, \quad (\text{E.5})$$

$$K_5 = \Pi_5 + iD_5, \quad (\text{E.6})$$

$$M = M_1 - M_2, \quad (\text{E.7})$$

finalmente temos

$$\left[ \gamma^\mu K_\mu - \gamma^5 K_5 - M \right] \mathbf{W}_4(x, p) = 0, \quad (\text{E.8})$$

## E.2 DECOMPOSIÇÃO ESPINORIAL

### E.2.1 Equações complexas

*Equação (6.18)*

Fazendo  $\text{Tr}[(\text{E.8})]$ :

$$\text{Tr} \left[ \left( \gamma^\mu K_\mu - \gamma^5 K_5 - M \right) W_4(x, p) \right] = 0$$

$$\text{Tr} \left[ \gamma^\mu K_\mu W_4(x, p) \right] - \text{Tr} \left[ \gamma^5 K_5 W_4(x, p) \right] - \text{Tr} \left[ M W_4(x, p) \right] = 0.$$

Como o traço não atua nos operadores  $K_\mu$ ,  $K_5$  e  $M$ , então

$$K_\mu \text{Tr} \left[ \gamma^\mu W_4(x, p) \right] - K_5 \text{Tr} \left[ \gamma^5 W_4(x, p) \right] - M \text{Tr} \left[ W_4(x, p) \right] = 0.$$

Considerando as definições (5.7), chegamos em

$$K_\mu V^\mu - iK_5 P - M F = 0 \quad (\text{E.9})$$

*Equação (6.19)*

Fazendo  $\text{Tr}[(\gamma^5 \text{E.8})]$ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}\left[\gamma^5\left(\gamma^\mu K_\mu - \gamma^5 K_5 - M\right)W_4(x, p)\right] &= 0 \\ \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma^\mu K_\mu W_4(x, p)\right] - \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma^5 K_5 W_4(x, p)\right] - \text{Tr}\left[\gamma^5 M W_4(x, p)\right] &= 0.\end{aligned}$$

Lembrando que  $(\gamma^5)^2 = 1$ , então

$$K_\mu \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma^\mu W_4(x, p)\right] - K_5 \text{Tr}[W_4(x, p)] - M \text{Tr}\left[\gamma^5 W_4(x, p)\right] = 0,$$

e, pelas definições (5.7), temos

$$K_\mu A^\mu - K_5 F - iMP = 0 \quad (\text{E.10})$$

*Equação (6.20)*

Fazendo  $\text{Tr}[\gamma^\mu (E.8)]$ :

$$\begin{aligned}\text{Tr}\left[\gamma^\mu\left(\gamma^\nu K_\nu - \gamma^5 K_5 - M\right)W_4(x, p)\right] &= 0 \\ \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu K_\nu W_4(x, p)] - \text{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^5 K_5 W_4(x, p)\right] - \text{Tr}[\gamma^\mu M W_4(x, p)] &= 0\end{aligned}$$

Lembrando das propriedades da matriz  $\gamma$ :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \gamma^\mu\gamma^5 = -(\gamma^5\gamma^\mu),$$

ficamos com

$$\begin{aligned}K_\nu g^{\mu\nu} \text{Tr}[W_4(x, p)] - iK_\nu \text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} W_4(x, p)] \\ + K_5 \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma^\mu W_4(x, p)\right] - M \text{Tr}[\gamma^\mu W_4(x, p)] &= 0\end{aligned}$$

e, pelas definições (5.7),

$$K^\mu F - iK_\nu S^{\mu\nu} + K_5 A^\mu - M V^\mu = 0 \quad (\text{E.11})$$

Equação (6.21)

Fazendo  $\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu (E.8)]$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu \left( \gamma^\nu K_\nu - \gamma^5 K_5 - M \right) W_4(x, p) \right] &= 0 \\ \text{Tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu K_\nu W_4(x, p) \right] - \text{Tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 K_5 W_4(x, p) \right] \\ &\quad - \text{Tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu M W_4(x, p) \right] = 0 \end{aligned}$$

Lembrando das propriedades das matrizes  $\gamma$  citadas anteriormente e de que

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta},$$

temos

$$\begin{aligned} iK_\nu g^{\mu\nu} \text{Tr} \left[ \gamma^5 W_4(x, p) \right] - \frac{i^2}{2} K_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left[ \sigma_{\alpha\beta} W_4(x, p) \right] \\ + K_5 \text{Tr} \left[ \gamma^\mu W_4(x, p) \right] - M \text{Tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu W_4(x, p) \right] = 0 \end{aligned}$$

Aplicando as definições (5.7), finalmente temos

$$iK^\mu P + \frac{1}{2} K_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + K_5 V^\mu - M A^\mu = 0 \quad (E.12)$$

Equação (6.22)

Fazendo  $\text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} (E.8)]$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \sigma^{\mu\nu} \left( \gamma^\alpha K_\alpha - \gamma^5 K_5 - M \right) W_4(x, p) \right] &= 0 \\ \text{Tr} \left[ \sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha K_\alpha W_4(x, p) \right] - \text{Tr} \left[ \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 K_5 W_4(x, p) \right] - \text{Tr} \left[ \sigma^{\mu\nu} W_4(x, p) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Pela propriedade da matriz  $\gamma$

$$\sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha = i[g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\alpha} \gamma^\nu] - \varepsilon^{\beta\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5,$$

temos

$$\begin{aligned}
& iK_\alpha g^{v\alpha} \text{Tr}[\gamma^\mu W_4(x, p)] - iK_\alpha g^{\mu\alpha} \text{Tr}[\gamma^\nu W_4(x, p)] \\
& - K_\alpha \varepsilon^{\beta\mu\nu\alpha} \text{Tr}[\gamma_\beta \gamma_5 W_4(x, p)] - \frac{i}{2} K_5 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[\sigma_{\alpha\beta} W_4(x, p)] \\
& - M \text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} W_4(x, p)] = 0,
\end{aligned}$$

e, pelas definições (5.7), ficamos com

$$i[K^\nu V^\mu - K^\mu V^\nu] + K_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} A_\beta - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} K_5 S_{\alpha\beta} - MS^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{E.13})$$

### E.3 MÉDIA NA ENERGIA

Mostraremos apenas a solução das médias na energia para as equações relevantes para encontrarmos a equação de transporte clássica, lembrando das definições

$$\begin{aligned}
D_t &= \partial_t, \\
\mathbf{D} &= \mathbf{\nabla}, \\
\Pi_0 &= p_0, \\
\mathbf{\Pi} &= \mathbf{p}, \\
\pi_e &= \cos\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \\
\pi_0 &= \sin\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x), \\
\sigma_e &= \cos\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\sigma}'(x), \\
\sigma_0 &= \sin\left(\frac{\hbar}{2} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{\nabla}_p\right) \boldsymbol{\sigma}'(x).
\end{aligned}$$

*Equação (6.44)*

Tomando a média na energia da equação (6.29), temos

$$\hbar \int dp_0 D_\mu V^\mu - 2 \int dp_0 \Pi_5 P + 2 \int dp_0 M_2 F = 0,$$

Dividindo a primeira integral no termo temporal e no espacial ficamos com

$$\begin{aligned} \hbar \left[ D_0 \int dp_0 V^0 + D_i \int dp_0 V^i \right] - 2g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \int dp_0 P \\ + 2g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \sigma'(x) \int dp_0 F = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais em  $p_0$ , lembrando das definições (6.38) e (6.39), temos

$$\hbar [D_t f_0 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_1] = 2g\pi_0 f_3 - 2g\sigma_0 f_2. \quad (\text{E.14})$$

*Equação (6.52)*

Tomando a média na energia da equação (6.26), com  $\mu = 0$ , ficamos com:

$$\int dp_0 \Pi_0 F + \frac{\hbar}{2} \int dp_0 D_v S^{0v} + \int dp_0 \Pi_5 A^0 - \int dp_0 M_1 V^0 = 0.$$

Ao dividirmos a segunda integral entre o termo temporal e o espacial, ficamos apenas com o espacial, pois  $S^{00} = 0$ :

$$\begin{aligned} \int dp_0 p_0 F - \frac{\hbar}{2} D_i \left( - \int dp_0 S^{0i} \right) \\ - g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \left( - \int dp_0 A^0 \right) \\ - \left[ M_N + g \cos \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \sigma'(x) \right] \int dp_0 V^0 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais possíveis em  $p_0$ , chegamos em

$$\int dp_0 p_0 F - \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_2 - g\pi_0 f_1 = (M_N + g\sigma_e) f_0. \quad (\text{E.15})$$

Equação (6.53)

Fazendo a média na energia da equação (6.32) para  $\mu = 0$ , temos

$$\int dp_0 \Pi_0 P + \frac{\hbar}{4} \int dp_0 D_v \varepsilon_0 v \alpha \beta S_{\alpha\beta} + \int dp_0 D_5 v^0 + \int dp_0 M_2 A^0 = 0$$

Fazendo  $v = i$ ,  $\alpha = j$  e  $\beta = k$  no segundo termo, ficamos com

$$\begin{aligned} & \int dp_0 p_0 P + \frac{\hbar}{2} D_i \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int dp_0 S_{jk} \right] \\ & + g \cos \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \int dp_0 V^0 \\ & - g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \sigma'(x) \left( - \int dp_0 A^0 \right) = 0, \end{aligned}$$

e integrando tudo, chegamos em

$$\int dp_0 p_0 P + \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_3 + g \pi_e f_0 - g \sigma_0 f_1 = 0 \quad (\text{E.16})$$

Equação (6.55)

Partindo da equação (6.33), com  $\mu = 0$  e  $v = i$ , temos

$$\begin{aligned} & \int dp_0 \Pi^i V^0 - \int dp_0 \Pi^0 V^i + \frac{\hbar}{2} \int dp_0 D_\alpha \varepsilon^{\alpha 0 i \beta} A_\beta \\ & - \frac{1}{2} \int dp_0 \Pi_5 \varepsilon^{0 i \alpha \beta} S_{\alpha\beta} + \int dp_0 M_2 S^{0i} = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando tudo por  $-1$

$$\begin{aligned}
& \int dp_0 p_0 V^i - \Pi^i \int dp_0 V^0 - \frac{\hbar}{2} D_j \varepsilon^{0ijk} \left( - \int dp_0 A_k \right) \\
& + g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int dp_0 S_{jk} \right] \\
& - g \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\sigma}'(x) \left( - \int dp_0 S^{0i} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Integrando em  $p_0$  chegamos em

$$\int dp_0 p_0 \mathbf{V} - \frac{\hbar}{2} \mathbf{D} \times \mathbf{g}_0 - \mathbf{\Pi} f_0 + g \pi_0 \mathbf{g}_3 - g \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{g}_2 = 0. \quad (\text{E.17})$$

#### E.4 COMPONENTES ESPINORIAIS CLÁSSICOS

Novamente, deduziremos apenas as equações relevantes para o cálculo da equação de vínculo. Precisamos antes expandir  $\sigma_e$ ,  $\sigma_0$ ,  $\pi_e$  e  $\pi_0$  para  $\hbar = 0$ :

$$\sigma_e = \cos \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\sigma}'(x) = \boldsymbol{\sigma}'(x) \quad (\text{E.18})$$

$$\sigma_0 = \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\sigma}'(x) = 0 \quad (\text{E.19})$$

$$\pi_e = \cos \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) \quad (\text{E.20})$$

$$\pi_0 = \sin \left( \frac{\hbar}{2} \nabla \cdot \nabla_p \right) = 0 \quad (\text{E.21})$$

Vínculo  $f_2^\pm$

Partindo da equação de vínculo (6.53), temos, para o limite clássico

$$\int dp_0 P^\pm(x, \mathbf{p}) \delta(p_0 \mp E_p) + g \pi_e f_0^\pm = 0.$$

Integrando em  $p_0$ , ficamos com

$$\pm E_p f_2^\pm = -g \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x) f_0^\pm$$



Definindo  $V_\pi = g\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)$ , temos

$$f_2^\pm = \mp \frac{V_\pi f_0^\pm}{E_p}. \quad (\text{E.22})$$

Vínculo  $f_3^\pm$

A partir da equação de vínculo (6.52), chegamos em

$$\int dp_0 F^\pm(x, \mathbf{p}) \delta(p_0 \mp E_p) = (M_N + g\sigma_e) f_0^\pm.$$

Resolvendo a integral em  $p_0$ , ficamos com

$$\pm f_3^\pm = [M_N + g\sigma'(x)] f_0^\pm$$

Definindo  $V_\sigma = g\sigma'(x)$ , finalmente chegamos em

$$f_3^\pm = \pm \frac{(M_N + V_\sigma)}{E_p}. \quad (\text{E.23})$$

Vínculo  $\mathbf{g}_1^\pm$

Pela equação de vínculo (6.55), temos

$$\int dp_0 \mathbf{V}^\pm(x, \mathbf{p}) \delta(p_0 \mp E_p) - \mathbf{p} f_0^\pm = 0.$$

Integrando e isolando  $\mathbf{g}_1$ , chegamos em

$$\mathbf{g}_1^\pm = \pm \frac{\mathbf{p} f_0^\pm}{E_p}. \quad (\text{E.24})$$

## E.5 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Tomamos a equação (6.44) com  $\hbar$  em primeira ordem

$$\hbar [D_t f_0^\pm + \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_1^\pm] = 2g\pi_0 f_2^\pm - 2g\sigma_0 f_3^\pm.$$

Em primeira ordem em  $\hbar$ ,  $\pi_0$  e  $\sigma_0$  ficam

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \sin\left(\frac{\hbar}{2}\nabla\cdot\nabla_p\right)\sigma'(x) = -\frac{\hbar}{2}\nabla\cdot\nabla_p\sigma'(x), \\ \sigma_0 &= \sin\left(\frac{\hbar}{2}\nabla\cdot\nabla_p\right) = -\frac{\hbar}{2}\nabla\cdot\nabla_p\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x).\end{aligned}$$

Então,

$$\partial_t f_0^\pm + \nabla\cdot\mathbf{g}_1^\pm = -g[\nabla\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)]\cdot\nabla_p f_2^\pm + g[\nabla\sigma'(x)], \quad (\text{E.25})$$

e definindo

$$\begin{aligned}d_t &= \partial_t \\ \mathbf{d} &= \nabla, \\ \mathbf{F}_\pi &= -g\nabla[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)] \\ \mathbf{F}_\sigma &= -g\nabla\sigma'(x),\end{aligned}$$

temos

$$d_t f_0^\pm + \mathbf{d}\cdot\mathbf{g}_1^\pm = (\mathbf{F} + \boldsymbol{\pi}\cdot\nabla_p)f_2^\pm + (\mathbf{F}_\sigma\cdot\nabla_p)f_3^\pm. \quad (\text{E.26})$$

Considerando as densidades de carga para partículas e antipartículas,

$$f(x, \mathbf{p}) = f_0^+(x, \mathbf{p}) \quad , \quad \bar{f}(x, \mathbf{p}) = f_0^-(x, -\mathbf{p}),$$

e usando os vínculos (6.71), (6.72) e (6.73), chegamos na equação de transporte clássica para  $f$

$$\partial_t f + (\nabla\cdot\mathbf{v})f - \left[ \frac{(M_N + V_\sigma)\mathbf{F}_\sigma - V_\pi\mathbf{F}_\pi}{E_p} \right] \cdot \nabla_p f = 0. \quad (\text{E.27})$$

## **APÊNDICE F – Helicidade**



Estudaremos agora as soluções para a equação de Dirac livre escrita da forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{\hbar}{i} \left( \hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m \right] \psi = \hat{\mathbf{H}}_f \psi, \quad (\text{F.1})$$

onde

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

são as matrizes  $\gamma$  que já vimos escritas em outra representação (BROMLEY; GREINER, 2013).

Reescrevemos a equação (F.1) como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}}_f \psi = (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0 \hat{\beta}) \psi, \quad (\text{F.3})$$

e seus estados estacionários são encontrados com o ansatz

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t\right). \quad (\text{F.4})$$

Assim, (F.3) fica

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t\right) \right] &= \hat{\mathbf{H}}_f \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t\right), \\ i\hbar \frac{-i}{\hbar} \varepsilon \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t\right) &= \hat{\mathbf{H}}_f \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t\right), \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

e, simplificando a equação

$$\varepsilon \psi(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{H}}_f \psi(\mathbf{x}), \quad (\text{F.6})$$

onde  $\varepsilon$  descreve a evolução temporal do estado estacionário  $\psi(\mathbf{x})$ . Por conveniência, separaremos este espinor de quatro componentes em dois de duas componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{F.7})$$

com

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

A equação (F.6) fica

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{p}}_i \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{F.9})$$

ou então, multiplicando as matrizes,

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi + m \varphi \\ \varepsilon \chi &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi - m \chi \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Estados com momento definido  $\mathbf{p}$  são

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}\right), \quad (\text{F.11})$$

e podemos reescrever as equações (F.10) como

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m) \mathbb{1} \varphi_0 - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \chi_0 &= 0 \\ -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\varepsilon + m) \chi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Esse sistema linear homogêneo só tem soluções não triviais quando o determinante a seguir é igual a zero

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m) \mathbb{1} & -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \\ -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + m) \mathbb{1} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{F.13})$$

Resolvendo o determinante temos

$$(\varepsilon - m)(\varepsilon + m) \mathbb{1} - (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad (\text{F.14})$$

e pela propriedade das matrizes de Pauli

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

ficamos com

$$\varepsilon^2 = m^2 + \mathbf{p}^2. \quad (\text{F.15})$$

Então

$$\varepsilon = \pm E_p \quad , \quad E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (\text{F.16})$$

Os dois sinais para  $\varepsilon$  correspondem aos dois tipos de solução para a equação de Dirac, chamadas de soluções positivas e soluções negativas.

Para um  $\varepsilon$  fixo, a equação (F.12) fica

$$\chi_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{m = \varepsilon} \varphi_0. \quad (\text{F.17})$$

Se escrevermos  $\varphi_0$  na forma

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.18})$$

com

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1, \quad (\text{F.19})$$

então o conjunto completo de soluções positivas e negativas da equação de Dirac é

$$\Psi_{p\lambda}(\mathbf{x}, t) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{m + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t)\right]}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}, \quad (\text{F.20})$$

onde  $\lambda = \pm$  representa as soluções positivas e negativas, e  $N$  é um fator de normalização, que é encontrado pela condição

$$\int d^3\mathbf{x} \Psi_{p\lambda}^\dagger(\mathbf{x}, t) \Psi_{p'\lambda'}(\mathbf{x}, t) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (\text{F.21})$$

Assim, depois de algumas manipulações algébricas, chegamos em

$$N = \sqrt{\frac{m + \lambda E_p}{2\lambda E_p}}. \quad (\text{F.22})$$

Podemos notar que todos os estados (E.06) são autofunções do momento:

$$\hat{\mathbf{p}}\Psi_{p\lambda} = p\Psi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{F.23})$$

Para cada momento  $\mathbf{p}$  existem dois tipos de soluções, os com  $\lambda = 1$ , ou seja,  $\varepsilon = E_p$ ; e os com  $\lambda = -1$ , ou seja,  $\varepsilon = -E_p$ . Outro número quântico, chamado de helicidade, pode ser utilizado para classificar os estados de uma partícula livre.

Se levarmos em conta o operador

$$\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (\text{F.24})$$

podemos notar que ele comuta com a hamiltoniana livre de Dirac  $\hat{\mathbf{H}}_f$

$$\hat{\mathbf{H}}_f = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\hat{\beta} \quad (\text{F.25})$$

ou seja,

$$[\hat{\mathbf{H}}_f, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0, \quad (\text{F.26})$$

e conseqüentemente

$$[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0. \quad (\text{F.27})$$

Isso quer dizer que  $\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_f$  são compatíveis, ou seja, podem ser diagonalizadas juntas. O operador de helicidade, definido por

$$\hat{\Lambda}_S = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}, \quad (\text{F.28})$$

com

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}, \quad (\text{F.29})$$

também comuta com a hamiltoniana e com  $\hat{\mathbf{p}}$ . Por isso, podemos interpretar a helicidade como a projeção do spin na direção do momento.

## F.1 ESTADOS DE HELICIDADE

Os autoestados da energia, tanto positiva quanto negativa, momento e helicidade satisfazem

$$(\not{\mathbf{p}} - m)u(\mathbf{p}, h) = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$(\not{\mathbf{p}} + m)v(\mathbf{p}, h) = 0 \quad (\text{F.31})$$

onde  $u$  representa as soluções de energia positiva e  $v$  as de energia negativa. As soluções para estas equações são dadas por



$$u(\mathbf{p}, h) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_h; \quad (\text{F.32})$$

$$v(\mathbf{p}, h) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_h, \quad (\text{F.33})$$

onde  $\chi_h$  é o espinor quantizado na direção de  $\mathbf{p}$ . Se escolhermos o momento na direção de  $z$ , temos

$$u(\mathbf{p}, +) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_z}{E+m} \end{pmatrix} \chi_+, \quad (\text{F.34})$$

onde  $\chi_+ = (1, 0)$ . No limite sem massa  $m=0$ ,

$$u(\mathbf{p}, +) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.35})$$

que é um autoestado de  $\gamma_5$  com autovalor  $+1$ . Da mesma forma,  $u(\mathbf{p}, -)$  é um autoestado de  $\gamma_5 = -1$ . Ou seja, no limite de massa nula os estados de helicidade coincidem com os férmions quirais.



## **APÊNDICE G – Propriedades das matrizes $\gamma$**



Consideraremos a equação de Dirac

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad (\text{G.1})$$

onde as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$  obedecem à relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{G.2})$$

e às relações de hermiticidade

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \text{e} \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j. \quad (\text{G.3})$$

Podemos combinar as relações de hermiticidade em uma única relação:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{G.4})$$

Outra propriedade, que é consequência direta da relação de comutação (G.2), é

$$\gamma^0 = \gamma_0 \quad \text{e} \quad \gamma^j = -\gamma_j. \quad (\text{G.5})$$

A matriz  $\gamma^5$  é definida como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{G.6})$$

e tem como propriedades

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0; \quad (\text{G.7})$$

e

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (\text{G.8})$$

As matrizes de spin  $\sigma^{\mu\nu}$  são dadas por

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (\text{G.9})$$

e obedecem à

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0. \quad (\text{G.10})$$

Considerando

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}), \quad (\text{G.11})$$

temos

$$\sigma^{ij} = -i\gamma^0\gamma^5\gamma^k, \quad (\text{G.12})$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$ , em ordem cíclica. Podemos definir as matrizes covariantes correspondentes como

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad (\text{G.13})$$

e a matriz  $\gamma_5$  é

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\pi}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\pi = \gamma^5. \quad (\text{G.14})$$

## G.1 REPRESENTAÇÃO

Neste trabalho, utilizamos as matrizes  $\gamma$  na representação de quiral. Assim, as matrizes  $\gamma^0$  e  $\gamma^i$  são definidas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

e a matriz  $\gamma^5$  como

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.16})$$

## G.2 IDENTIDADES DE CONTRAÇÃO

As matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$  obedecem às seguintes identidades de contração

- (i)  $\gamma_\lambda\gamma^\lambda = 4$
- (ii)  $\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha$
- (iii)  $\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda = 4g^{\alpha\beta}$
- (iv)  $\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha$
- (v)  $\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\lambda = 2(\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma + \gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta)$

Considerando que  $A, B, \dots$  são quadrivetores arbitrários, com  $\not{A} = \gamma^\alpha A_\alpha$ , então

$$(i) \gamma_\lambda \not{A} \gamma^\lambda = -2\not{A}$$

$$(ii) \gamma_\lambda \not{A} \not{B} \gamma^\lambda = 4AB$$

$$(iii) \gamma_\lambda \not{A} \not{B} \not{C} \gamma^\lambda = -2\not{C} \not{B} \not{A}$$

$$(iv) \gamma_\lambda \not{A} \not{B} \not{C} \not{D} \gamma^\lambda = 2(\not{D} \not{A} \not{B} \not{C} + \not{C} \not{B} \not{A} \not{D})$$

### G.3 TRAÇOS

$$(i) \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0, \text{ onde temos um número ímpar de matrizes gama.}$$

$$(ii) \text{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}] = 0$$

$$(iii) \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4g^{\alpha\beta}$$

$$(iv) \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta] = 4[(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}) - (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}) + (g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma})]$$

$$(v) \text{Tr}[\not{A} \not{B}] = 4(AB)$$

$$(vi) \text{Tr}[\not{A} \not{B} \not{C} \not{D}] = 4(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)$$

$$(vii) \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu \dots \gamma^\beta \gamma^\alpha]$$

$$(viii) \text{Tr}[\not{A}_1 \not{A}_2 \dots \not{A}_{2n}] = \text{Tr}[\not{A}_{2n} \dots \not{A}_2 \not{A}_1]$$

$$(ix) \text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma] = 0$$