

Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA IDENTIFICAÇÃO DOS  
PARÂMETROS DO MODELO ESCALAR DE HISTERESE DE  
JILES-ATHERTON**

Tese submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica da  
Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Doutora em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Dr. Jean Viane Leite  
Coorientador: Prof. Dr. Nelson Jhoe  
Batistela

Florianópolis  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mendes, Filomena Barbosa Rodrigues

Uma Contribuição para Identificação dos Parâmetros do Modelo Escalar de Histerese de Jiles-Atherton / Filomena Barbosa Rodrigues Mendes ; orientador, Jean Vianeí Leite ; coorientador, Nelson Jhoe Batistela. - Florianópolis, SC, 2017.

236 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Histerese Magnética. 3. Materiais Magnéticos. 4. Modelo de Histerese de Jiles Atherton. 5. Determinação de Parâmetros. I. Leite, Jean Vianeí. II. Batistela, Nelson Jhoe. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA IDENTIFICAÇÃO DOS  
PARÂMETROS DO MODELO ESCALAR DE HISTERESE DE  
JILES-ATHERTON**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutora em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 3 de março de 2017.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Jean Viane Leite, Dr.  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



---

Prof. Maurício Valencia Ferreira da Luz , Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Laurent Didier Bernard, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Renato Cardoso Mesquita, Dr.  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Pedro Armando da Silva Júnior, Dr.  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina



Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais: Leontina dos Ramos R. M. Barbosa e Jesuíno Barbosa (*in memoriam*).



## AGRADECIMENTOS

A Deus pela formosura da vida.

À Universidade Federal de Santa Catarina, ao GRUCAD, ao corpo docente, à coordenação, à administração, à secretaria, aos colegas de classe, à Celly Melo, ao Wilson, ao Marcelo, pela oportunidade concedida para realizar o doutorado, pelo incentivo, apoio e pronto atendimento.

Aos professores Dr. Jean Viane Leite e Dr. Nelson Jhoe Batistela, pela orientação para o bom desenvolvimento da pesquisa.

Ao professor Dr. João Pedro Assumpção Bastos, pelos esclarecimentos.

Aos professores membros da banca pelas contribuições.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, aos colegas do Departamento de Engenharia Elétrica e do Departamento de Matemática, pela solicitação deferida para realizar o doutorado, pela compreensão e suporte oferecido para a realização da pesquisa.

À Fundação Araucária e à CAPES, pelo apoio financeiro viabilizado.

Aos meus Pais Jesuíno (*in memoriam*) e Leontina, pelo amor e carinho.

Ao meu esposo Fredy, e minhas filhas, Lesly e Ketty, pelo apoio, pelas sábias sugestões e alegria contagiante.

Aos meus irmãos e irmãs, por saberem superar a distância e apoiar este desafio.

Às amigas e amigos, aos colegas de trabalho e de laboratório, e à turma da cantoria, por fazerem parte desta história.

De forma geral, agradeço enormemente àqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para execução desta pesquisa.



Sucesso é ir de fracasso em fracasso, sem perder entusiasmo.

(Winston Churchill, 1874-1965)



## RESUMO

A modelagem do fenômeno de histerese, desenvolvida por Jiles-Atherton, tem sido amplamente utilizada na caracterização de materiais. Neste trabalho foram desenvolvidas três metodologias originais que podem ser utilizadas para determinar os parâmetros do modelo. Na primeira metodologia, as equações do modelo são manipuladas algebricamente para encontrar uma equação diferencial ordinária não linear, em função da indução magnética e do campo magnético, onde aparecem os cinco parâmetros. Transforma-se esta equação diferencial ordinária em uma equação algébrica, em função da indução magnética e do campo magnético. A equação algébrica encontrada é utilizada na construção de um sistema de cinco equações e cinco incógnitas. A solução de tal sistema é obtida utilizando o método de mínimos quadrados não linear. Desenvolve-se a segunda metodologia com o propósito de melhorar a primeira, no que tange ao laço contendo ruídos experimentais. Na segunda metodologia evita-se o cálculo aproximado da derivada, utilizando-se integrais, reduzindo a quantidade de pontos chaves experimentais utilizados no processo de caracterização. Para simplificar a modelagem matemática, a terceira metodologia evita o cálculo aproximado de derivada e o cálculo de integrais. Com a intenção de validar as três metodologias propostas, dados experimentais são comparados com dados calculados. As simulações mostram que todas elas podem obter um conjunto de parâmetros precisos, a partir de alguns pontos do laço experimental, com relativamente baixo esforço computacional. Para finalizar, um parâmetro é adicionado ao modelo de Jiles-Atherton, e seu impacto na modelagem do comportamento do material é analisado.

**Palavras-chave:** Histerese magnética. Materiais magnéticos. Modelo de histerese de Jiles-Atherton. Determinação de parâmetros. Série de MacLaurin. Problema de Cauchy. EDO linear. EDO não linear.



## ABSTRACT

For hysteresis modeling the Jiles-Atherton approach has been broadly employed. In this work three original methodologies are being developed to obtain the model parameters. In the first methodology a non-linear ordinary differential equation in terms of the magnetic flux density and the magnetic field strength, where the five parameters appear, is found by manipulating model equations. This non-linear ordinary differential equation is transformed into an algebraic equation, as a function of magnetic flux density and magnetic field. This algebraic equation is used to build a system with five equations and five unknowns. The system solution is found by using nonlinear least squares method. In order to improve the first methodology regarding noisy hysteresis loop, a second methodology is developed. In the second methodology the calculation of the derivative is avoided by using integral, and the number of experimental points to be used was reduced. The third methodology is developed to simplify the mathematical modeling: the approximate calculation of the derivative, and calculation of the integrals are avoided. In order to validate the methodologies, experimental data are compared to calculated ones. Simulations demonstrate that the proposed methodologies obtain an accurate parameters set from few points of experimental hysteresis loop with relative low computation effort. Finally, a parameter is added to the Jiles-Atherton model and its impact on material behavior modeling is analyzed.

**Keywords:** Magnetic hysteresis. Magnetic materials. Jiles-Atherton hysteresis model. Parameters determination. MacLaurin Series. Cauchy problem. Linear ODE. Nonlinear ODE.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circuito magnético. ....	34
Figura 2 – Curva $B-H$ típica para materiais ferromagnéticos. ....	35
Figura 3 – Domínios magnéticos desordenados. ....	36
Figura 4 – Domínios magnéticos orientados. ....	37
Figura 5 – Aniquilamento dos domínios magnéticos individuais. ....	38
Figura 6 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia. ....	51
Figura 7 – Cálculo da derivada. Primeira metodologia. ....	52
Figura 8.a – Diagrama de blocos. Primeira metodologia. ....	56
Figura 9 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Segunda metodologia. ....	62
Figura 10.a – Diagrama de blocos. Segunda metodologia. ....	65
Figura 11 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia. ....	68
Figura 12 – Ramo descendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia. ....	69
Figura 13 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Segunda metodologia. ....	70
Figura 14 – Soluções particulares. ....	71
Figura 15 – Plano de fase. ....	72
Figura 16 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 1. Laço suave. ....	74
Figura 17 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 2. Laço suave. ....	74
Figura 18 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 3. Laço suave. ....	75
Figura 19 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 1: situação a). ...	78
Figura 20 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 1: situação b). ...	79
Figura 21 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 1: situação c). ...	80
Figura 22 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 2: situação d). ...	81
Figura 23 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 2: situação e). ...	82
Figura 24 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 2: situação f). ...	83
Figura 25 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 3: situação g). ...	84
Figura 26 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 3: situação h). ...	85
Figura 27 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 3: situação i). ...	86
Figura 28 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 1. Laço com conteúdo ruidoso. ....	88
Figura 29 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 2. Laço com conteúdo ruidoso. ....	88
Figura 30 – Curva $B-H$ experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 3. Laço com conteúdo ruidoso. ....	89
Figura 31 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 1: situação a). ...	91
Figura 32 – Curva $B-H$ calculada e laço medido. Alternativa 1: situação b). ...	92

Figura 33 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 1: situação c)...	93
Figura 34 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 2: situação d)...	94
Figura 35 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 2: situação e)...	95
Figura 36 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 2: situação f)....	96
Figura 37 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 3: situação g)....	97
Figura 38 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 3: situação h)....	98
Figura 39 – Curva <i>B-H</i> calculada e laço medido. Alternativa 3: situação i)....	99
Figura 40 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Terceira metodologia.....	117
Figura 41.a – Diagrama de blocos. Terceira metodologia.....	120
Figura 42 – Pontos principais recomendados. Sexto parâmetro.....	125
Figura 43 – Cálculo da derivada. Sexto parâmetro.....	126
Figura 44.a – Diagrama de blocos. Sexto parâmetro.....	129
Figura 45 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: primeiro caso.....	133
Figura 46 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: primeiro caso.....	133
Figura 47 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: primeiro caso.....	134
Figura 48 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Primeiro caso: TRD.....	134
Figura 49 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Primeiro caso: TRD.....	135
Figura 50 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: segundo caso.....	137
Figura 51 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: segundo caso.....	137
Figura 52 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: segundo caso.....	138
Figura 53 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Segundo caso: TRD.....	138
Figura 54 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Segundo caso: TRD.....	139
Figura 55 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Terceiro caso: TRR.....	141
Figura 56 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: terceiro caso.....	141
Figura 57 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: terceiro caso.....	142
Figura 58 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Terceiro caso: TRR.....	143
Figura 59 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Terceiro caso: LM.....	144
Figura 60 – Curva <i>B-H</i> calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: quarto caso.....	146

Figura 61 – Curva $B-H$ calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: quarto caso.....	147
Figura 62 – Curva $B-H$ calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: quarto caso.....	148
Figura 63 – Curva $B-H$ calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Quarto caso: TRD. ....	148
Figura 64 – Curva $B-H$ calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Quarto caso: TRD. ....	149
Figura 65 – Curva $B-H$ calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: quinto caso.....	151
Figura 66 – Curva $B-H$ calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: quinto caso.....	152
Figura 67 – Curva $B-H$ calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: quinto caso.....	152
Figura 68 – Curva $B-H$ calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Quinto caso: TRD. ....	153
Figura 69 – Curva $B-H$ calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Quinto caso: LM. ....	153
Figura 70– Curva $B-H$ calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Sexto caso. ....	162
Figura 71– Curva $B-H$ calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Sétimo caso.....	162
Figura 72– Curva $B-H$ calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Oitavo caso. ....	163
Figura 73– Curva $B-H$ calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Sexto caso. ....	164
Figura 74– Curva $B-H$ calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Sétimo caso.....	164
Figura 75– Curva $B-H$ calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Nono caso. ....	165
Figura 76– Curva $B-H$ calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Sétimo caso.....	165
Figura 77– Curva $B-H$ calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Nono caso. ....	166
Figura 78 – Curva $B-H$ . ....	178
Figura 79 – Ajuste de um polinômio ao ramo ascendente da curva suave: primeiro caso. ....	216
Figura 80 – Ajuste de um polinômio ao ramo descendente da curva suave: primeiro caso. ....	217
Figura 81 – Curva $B-H$ calculada, utilizando a primeira metodologia e sistema sobredeterminado, e laço medido: primeiro caso.....	221
Figura 82 – Curva $B-H$ calculada, utilizando a primeira metodologia e algoritmo genético, e laço medido: primeiro caso.....	223
Figura 83 – Curva $B-H$ suavizada, utilizando o método Lowess, e laço medido: quinto caso.....	224

Figura 84 – Curva $B-H$ suavizada utilizando o método Lowess: quinto caso.	225
Figura 85 – Curva $B-H$ medida: quinto caso. ....	225
Figura 86 – Curva $B-H$ calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: LM. ....	226
Figura 87 – Curva $B-H$ calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: TRR. ....	227
Figura 88 – Curva $B-H$ calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: TRD. ....	228
Figura 89 – Curva $B-H$ prevista e laço medido.....	231

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativas 1 e 2: laço suave.....	76
Tabela 2 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativa 3: laço suave.....	77
Tabela 3 – Comparações numéricas. Situações d) e f).....	83
Tabela 4 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativas 1 e 2: laço com conteúdo ruidoso.....	90
Tabela 5 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. . Alternativa 3: laço com conteúdo ruidoso.....	90
Tabela 6 – Comparações numéricas. Situações b) e c).....	93
Tabela 7 – Resultado de caracterização: primeiro caso.....	132
Tabela 8 – Resultado de caracterização: segundo caso.....	136
Tabela 9 – Resultado de caracterização: terceiro caso.....	140
Tabela 10 – Resultado de caracterização: quarto caso.....	145
Tabela 11 – Resultado de caracterização: quinto caso.....	150
Tabela 12 – Indicadores da qualidade da solução.....	155
Tabela 13 – Comparações numéricas.....	158
Tabela 14 – Comparações numéricas. Sexto parâmetro. ....	158
Tabela 15 – Parâmetros que melhor representam o material.....	159
Tabela 16 – Outras comparações.....	160
Tabela 17 – Resultado de caracterização.....	161
Tabela 18 – Dados experimentais e dados suavizados: quinto caso.....	229
Tabela 19 – Dados experimentais: primeiro caso.....	230



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL – Agência Nacional de Energia Elétrica  
Asc – Ascendente  
calc - calculado  
CEFC – IEEE Conference on Eletromagnetic Field Computation  
COMPUMAG – Conference on the Computation of Eletromagnetic Fields  
cte – Constante  
Desc – Descendente  
Dist – Distância  
EDO – Equação Diferencial Ordinária  
exp - experimental  
experim – experimental  
GRUCAD – Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos  
Inconc – inconclusivo  
LM – Método de Levenberg-Marquardt  
MAPLE – Soft matemático de computação simbólica ou algébrica  
Matlab – *Software* interativo *matrix laboratory*  
Metd – Metodologia  
Mín – Mínimo  
MOMAG – Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo  
MSE – Erro Quadrático Médio  
Obs – Observação  
ODE – *Ordinary Differential Equation*  
Parâm – Parâmetro  
PGEEL – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
proxim – proximidade  
PVI – Problema de Valor Inicial  
Situac – Situação  
Suaviz – Suavizado  
tot – total  
TRD – Método da região de confiança dogleg  
TRR – Método da região de confiança reflexiva  
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina  
UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
VarMetd – Variante da metodologia



## LISTA DE SÍMBOLOS

$M$	Magnetização
$M_{irr}$	Magnetização irreversível
$M_{rev}$	Magnetização reversível
$M_{an}$	Magnetização anisterética
$m_s; \alpha; a; k; c$	Parâmetros do material no modelo de Jiles-Atherton
$H_e$	Campo magnético efetivo
$H$	Campo magnético
$B$	Indução magnética
$\mu$	Permeabilidade magnética
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo
$\phi$	Fluxo magnético
$\phi_{res}$	Fluxo magnético residual
$S$	área da seção transversal
$l_m$	Caminho magnético médio
$N$	Número de espiras
$I$	Corrente elétrica
$F_{mm}$	Força magnetomotriz
$F_{mmc}$	Força magnetomotriz coercitiva
$t$	Tempo
$\delta$	Vale 1 para o ramo ascendente e -1 para o ramo descendente da curva
$B-H$	
$x$	Distância linear
$P(H,B)$	Ponto de coordenadas $H$ e $B$
$v(t)$	tensão elétrica
$y$	Admitância
$e$	Tensão induzida
$r$	Resistência elétrica
$\lambda$	Fluxo concatenado
$w$	Frequência angular elétrica
$f$	Frequência
$E_{max}$	Valor máximo da tensão induzida
$E_{ef}$	Valor eficaz da tensão induzida
$A$	Área da seção transversal
$i_{exc}$	Corrente de excitação
$i_{mag}$	Corrente magnetizante
$i_r$	Corrente de perdas
$g$	Entreferro
$F_c$	Força de campo
$f_a$	Fator de empilhamento

$A_g$  Área da seção transversal do entreferro

$\mathfrak{R}$  Relutância

$Z$  Impedância

$FP$  Fator de potência

$secm$  Seção magnética

$I_{2nomrms}$  Corrente secundária nominal eficaz

$reltransf$  Relação de transformação

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>25</b>
<b>SUMÁRIO</b> .....	<b>27</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>27</b>
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....	27
1.2 PROBLEMA DE PESQUISA .....	29
1.3 OBJETIVOS .....	30
1.3.1 Objetivo Geral.....	30
1.3.2 Objetivos Específicos .....	31
1.4 JUSTIFICATIVA .....	31
1.5 METODOLOGIA UTILIZADA .....	31
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	32
<b>2 HISTERESE FERROMAGNÉTICA</b> .....	<b>33</b>
2.1 CONCEITOS .....	33
2.2 MODELO DE JILES-ATHERTON.....	38
2.3 MODELO INVERSO .....	41
2.3.1 Modelagem Matemática .....	42
<b>3 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE HISTERESE DE JILES-ATHERTON: PRIMEIRA METODOLOGIA</b> .....	<b>49</b>
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	49
3.1.1 Modelagem do Ramo Ascendente.....	50
3.1.2 Modelagem do Ramo Descendente .....	52
3.2 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	53
3.3 DIAGRAMA DE BLOCOS .....	55
<b>4 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE HISTERESE DE JILES-ATHERTON: SEGUNDA METODOLOGIA</b> .....	<b>59</b>
4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	59
4.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	61
4.3 DIAGRAMA DE BLOCOS .....	63
<b>5 NOÇÕES COMPLEMENTARES</b> .....	<b>67</b>
5.1 PRIMEIRA METODOLOGIA .....	67
5.2 SEGUNDA METODOLOGIA .....	69
<b>6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE</b> .....	<b>73</b>
6.1 PRIMEIRA METODOLOGIA .....	73
6.1.1 Laço de Histerese Suave .....	73
6.2 SEGUNDA METODOLOGIA .....	87
6.2.1 Laço de Histerese Contendo Ruídos.....	87
<b>7 VARIANTE DO MODELO INVERSO E VARIANTE DA PRIMEIRA METODOLOGIA</b> .....	<b>101</b>

7.1 VARIANTE DO MODELO INVERSO .....	101
7.2 VARIANTE DA PRIMEIRA METODOLOGIA .....	101
7.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	109
<b>8 LEVANTAMENTO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL: TERCEIRA METODOLOGIA PROPOSTA .....</b>	<b>111</b>
8.1 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	111
8.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	117
8.3 DIAGRAMA DE BLOCOS.....	118
<b>9 INCLUSÃO DE UM SEXTO PARÂMETRO NO MODELO DE JILES-ATHERTON .....</b>	<b>123</b>
9.1 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	123
9.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	124
9.2.1 Ramo Ascendente .....	124
9.2.2 Ramo Descendente.....	126
9.3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	126
9.4 DIAGRAMA DE BLOCOS.....	128
<b>10 RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO .....</b>	<b>131</b>
10.1 PRIMEIRO CASO .....	131
10.2 SEGUNDO CASO .....	135
10.3 TERCEIRO CASO .....	139
10.4 QUARTO CASO .....	144
10.5 QUINTO CASO.....	149
10.6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	154
10.7 RESULTADOS ADICIONAIS .....	160
<b>11 CONCLUSÃO .....</b>	<b>167</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>171</b>
<b>APÊNDICE A – Primeira Metodologia .....</b>	<b>177</b>
A.1 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	177
A.2 MODELAGEM DO RAMO ASCENDENTE .....	178
<b>APÊNDICE B – Segunda Metodologia .....</b>	<b>187</b>
B.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	187
B.1.1 Construção do Problema de Cauchy Associado .....	187
B.1.2 Resolução do Problema de Cauchy .....	189
B.1.3 Relação Proposta: Indução Magnética com o Campo Magnético	192
B.1.4 Resolução Numérica das Integrais .....	193
<b>APÊNDICE C – Variante do Modelo Inverso .....</b>	<b>207</b>
<b>APÊNDICE D – Tópicos Adicionais.....</b>	<b>215</b>
D.1 REGRESSÃO LINEAR.....	215
D.1.1 Primeiro Caso .....	215
D.1.2 Quinto Caso.....	217
D.2 REGRESSÃO NÃO LINEAR .....	218

D.3 MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS NÃO LINEAR.....	218
D.4 FSOLVE.....	219
D.4.1 Método da Região de Confiança Reflexiva .....	220
D.4.2 Método da Região de Confiança Dogleg .....	220
D.4.3 Método de Levenberg-Marquardt.....	220
D.5 SISTEMA SOBREDETERMINADO.....	221
D.6 OTIMIZAÇÃO RESTRITA UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICO.....	222
D.7 FILTRAGEM E SUAVIZAÇÃO DE DADOS.....	223
D.8 PREVISÃO DE LAÇO DE INDUÇÃO MENOR .....	231
<b>APÊNDICE E – Demonstrações Matemáticas.....</b>	<b>233</b>
E.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO .....	233
E.2 SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO .....	235



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O sistema elétrico brasileiro registrou, no mês de fevereiro de 2015, a menor afluência nos reservatórios das usinas de um longo histórico de 83 anos [1]. Através dos resultados de uma audiência pública, a Agência Nacional de Energia Elétrica ANEEL aprovou o acréscimo das bandeiras tarifárias. Neste contexto, o custo da energia elétrica e implicações no meio ambiente levam os fabricantes de máquinas elétricas a buscar dispositivos com rendimento cada vez mais elevado. Diferenças da ordem de 1 % no rendimento de um motor podem fazer com que um fabricante ganhe ou perca um mercado inteiro. Além disso, o rendimento dos dispositivos podem afetar políticas energéticas e econômicas, como pode ser destacado na recente abolição de lâmpadas incandescentes e na política de subsídios incentivando a troca de eletrodomésticos antigos no Brasil.

No projeto de máquinas elétricas são consideradas muitas variáveis, especificações técnicas e diferentes materiais. Normalmente, as máquinas elétricas apresentam um núcleo feito de material ferromagnético, o qual é responsável por concentrar o fluxo magnético no interior da mesma. Parte da energia fornecida aos dispositivos é naturalmente perdida em processos bem conhecidos. Assim, para um projeto eficiente e para uma análise precisa do desempenho de dispositivos eletromagnéticos, é necessário conhecer e modelar as características dos materiais usados na confecção dos mesmos.

Especificamente nas máquinas elétricas, as perdas energéticas se darão, majoritariamente, nos enrolamentos, no núcleo ferromagnético e por atrito e ventilação, caso haja partes móveis. Enquanto as perdas nos enrolamentos e de origem mecânicas são bem conhecidas e modeladas, as perdas no ferro são ainda objeto de estudo em diferentes centros de pesquisa na academia e em setores industriais. Modelos de perdas em materiais magnéticos continuam sendo desenvolvidos e aprimorados em diferentes abordagens, para os mais variados regimes de operação.

Modelos são representações matemático-físicas de fenômenos ou sistemas e almejam representar a realidade dentro das suas limitações. Parte importante da modelagem é a obtenção de parâmetros que permitam ao modelo caracterizar dado fenômeno ou sistema. Este trabalho é focado em um aspecto da modelagem de materiais eletromagnéticos: a obtenção de parâmetros para um modelo de histerese magnética escalar. A modelagem dos materiais envolve uma

etapa crítica: a caracterização dos mesmos. Neste processo, as características elétricas e magnéticas do material submetido a teste devem ser obtidas com precisão, para que os modelos matemáticos os representem adequadamente. A eficácia do modelo utilizado é totalmente dependente deste levantamento dos parâmetros obtidos de uma dada amostra.

Procedimentos de ensaio e medição das perdas apresentados em diversas normas são comparados em [2] e [3]. Além disto, uma estratégia de separação das perdas magnéticas é desenvolvida. O assunto da perda magnética também é abordado em [4]-[7]. Já [8]-[10] tratam da caracterização dos materiais. Dentre estas perdas, a histerese consome uma parcela significativa de toda energia injetada no dispositivo que utiliza materiais de grão não orientado. Dentre os modelos utilizados atualmente para representar a histerese magnética, o modelo escalar de Jiles-Atherton [11] tem se destacado, envolvendo a busca dos cinco parâmetros para representar o material submetido a teste. Uma determinação numérica dos parâmetros da histerese e o modelo vetorial inverso de Jiles-Atherton são apresentados em [12]-[14].

Recentemente vários métodos foram sugeridos para identificar os parâmetros do modelo de Jiles-Atherton. As abordagens mais utilizadas são: algoritmos numéricos de otimização estocásticos [15]-[16]; buscas determinísticas e randômicas [17]; métodos baseados em algoritmos de mínimos quadrados não linear [18]; algoritmos genéticos [19]-[24]; método de avaliação diferencial [25]; otimização nuvem de partículas [26]; e método de otimização *branch and bound* [27].

As referências [16] e [21] mostram duas práticas de obtenção dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. A metodologia apresentada em [16] baseia-se em procedimentos de otimização. Os valores dos parâmetros são variados e a influência sobre o erro médio quadrático é controlada. Este erro é calculado considerando os dados experimentais e os dados simulados. No procedimento apresentado em [21], estes parâmetros são identificados utilizando-se algoritmo genético, e minimiza-se o erro quadrático médio considerando-se curvas *B-H* experimentais e calculadas.

Nesta tese de doutorado são propostas técnicas para identificação dos parâmetros, que têm como origem a manipulação das equações do modelo e são finalizadas implementando-se o modelo matemático resultante. A implementação é realizada utilizando-se algoritmos de mínimos quadrados não linear. O tempo de simulação reduzido é uma vantagem dos métodos propostos, comparando-os, por exemplo, com os algoritmos genéticos.

Ainda que a comparação dos métodos de identificação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton não seja o foco deste trabalho, ressalta-se que tal comparação só poderá ser apropriada quando os métodos em estudo forem submetidos às mesmas condições: material submetido a teste, hardware utilizado, e dados experimentais. Os algoritmos dos diversos métodos deverão ser disponibilizados para possibilitar a realização dos estudos comparativos. Para cada método é medido o tempo de atividades pré-processamento transcorrido, e o tempo de simulação propriamente dito. Para o mesmo conjunto inicial de parâmetros, e mesmo número máximo de iterações, é necessário verificar a qualidade da solução encontrada pela aplicação de cada método. Como indicadores da qualidade da solução encontrada poderão ser utilizados: a distância total acumulada considerando pontos calculados e pontos experimentais; o valor do erro quadrático médio; e o valor do erro percentual considerando as perdas calculadas e as perdas medidas. Por outro lado, para cada método são utilizados diferentes conjuntos iniciais de parâmetros, e diferentes valores para o número máximo de iterações. Então, observam-se a qualidade da solução encontrada e o tempo de simulação transcorrido.

Para determinar os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton pode ser utilizado o método de algoritmos genéticos que aplica técnicas de otimização ou podem ser utilizados métodos baseados na lógica fuzzy que busca quantificar as incertezas do problema. As técnicas propostas neste trabalho não se limitam a aplicar técnicas de otimização. Nas técnicas propostas analisa-se o fenômeno e as equações são manipuladas permitindo implementar uma única equação que envolve apenas as variáveis de interesse. Isso permite uma rápida identificação dos parâmetros.

## 1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Este trabalho contribui para a identificação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. Os objetivos desta pesquisa são: realizar um apanhado das técnicas de caracterização dos materiais magnéticos; analisar suas características positivas; e identificar seus pontos fracos obtendo subsídios para propor técnicas originais de caracterização.

Para identificar os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, manipulam-se as equações do modelo. Esta manipulação permite organizar os dados e descobrir os maiores obstáculos na identificação dos parâmetros. Uma vez identificadas as dificuldades, é

possível escolher, entre as possíveis soluções existentes, a melhor ferramenta a ser utilizada em sua resolução, o que conseqüentemente traz vantagens para o processo de identificação dos parâmetros.

Tendo em mente as equações do modelo de Jiles-Atherton e uma relação constitutiva, obtêm-se com rigor matemático três metodologias para identificar os parâmetros do modelo: na primeira metodologia é desenvolvida uma equação que permite caracterizar os materiais ferromagnéticos utilizando-se cálculo das derivadas inerentes ao modelo de Jiles-Atherton; na segunda abordagem obtém-se uma única equação que, utilizando integrais, permite caracterizar os materiais evitando o uso de derivadas; e na terceira metodologia, uma única equação algébrica é formulada para permitir caracterizar os materiais evitando ambas: derivadas e integrais. Então, as propostas de pesquisa neste trabalho são três, e estas hipóteses são verificadas posteriormente ao longo deste texto.

As três metodologias não são desenvolvidas para eliminarem-se entre si, e tampouco uma é a negação da outra. A tripla consideração enriquece a caracterização dos materiais ferromagnéticos, na medida em que os resultados podem ser comparados propiciando a tomada de decisão consciente.

Adicionalmente, nesta tese, o modelo escalar de Jiles-Atherton é modificado para a inserção de um sexto parâmetro. O modelo apresenta originalmente cinco parâmetros para representar o material submetido a teste. Esta modificação pode melhorar a caracterização de materiais cujos laços de histerese apresentam ruídos.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo da pesquisa é contribuir para a identificação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. A caracterização de materiais é fundamental para uma modelagem precisa e eficiente. Um conjunto de parâmetros que represente adequadamente o material possibilita ao projetista ou analista um projeto otimizado e uma análise mais confiável da máquina em estudo. O conjunto de parâmetros também terá influência na convergência de sistemas numéricos como, por exemplo, no cálculo de campos por elementos finitos levando em conta a histerese magnética.

#### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral da pesquisa é aprimorar a modelagem e desenvolver metodologias para determinar os parâmetros do modelo escalar da histerese magnética.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

Para que o objetivo desta pesquisa seja alcançado são necessários: levantar o estado da arte da modelagem dos materiais ferromagnéticos; estudar os modelos de histerese escalar magnética; estudar as técnicas de caracterização dos materiais ferromagnéticos; estudar as técnicas numéricas não lineares, com vistas à solução de problemas de caracterização dos materiais; propor novas técnicas para caracterização; desenvolver tratamento estatístico dos resultados; validar as técnicas propostas; e melhorar o desempenho da metodologia desenvolvida para tratar as curvas com ruído de origem experimental.

### **1.4 JUSTIFICATIVA**

O presente trabalho de pesquisa pode trazer contribuições significativas: em primeiro lugar para a sociedade, na medida em que os resultados deste estudo poderão servir, por exemplo, para modelar com maior precisão o comportamento dos materiais ferromagnéticos e para selecionar melhor os materiais, conseqüentemente permitindo projetar máquinas elétricas mais eficientes, reduzindo o consumo de energia e os impactos ambientais. Em segundo lugar, o trabalho servirá à comunidade científica, mostrando, com rigor científico, a relação do campo magnético com a indução magnética e com os parâmetros do material, permitindo compreender as equações do modelo e o comportamento do material ferromagnético, fornecendo informações para elaborar relatórios de caracterização dos materiais, permitindo comparar materiais entre si e avaliar informações dos catálogos dos fabricantes de materiais. Enfim, o trabalho poderá servir para a comunidade acadêmica, mostrando a aplicação do problema de Cauchy e a aplicação das séries de potência na caracterização dos materiais.

### **1.5 METODOLOGIA UTILIZADA**

Os trabalhos que referenciam esta pesquisa encontram-se listados na parte final deste texto. Os dois trabalhos principais que a embasam são [11] e [28]. A orientação gramatical que norteia este texto é [29]. De

forma geral, o tema de pesquisa utiliza conceitos das reconhecidas áreas da engenharia elétrica, da computação e da matemática. Os dados experimentais utilizados foram obtidos através de um quadro de Epstein, um sistema de aquisição de dados, e amostras do material, tal como apresentado em [30].

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho de pesquisa está organizado em 11 capítulos. No primeiro capítulo, o tema é introduzido, discorrendo-se sobre a problematização, as hipóteses consideradas, a contextualização do que será abordado, os objetivos, a justificativa, a metodologia e a organização do texto. No segundo capítulo, são apresentados os conceitos principais da teoria da histerese ferromagnética e o modelo inverso de Jiles-Atherton. No terceiro capítulo é desenvolvida e apresentada a modelagem matemática da primeira metodologia proposta para identificar os parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton. No quarto capítulo é apresentada a segunda formulação matemática proposta para determinar os parâmetros do modelo de Jiles-Atherton. O quinto capítulo fornece informações complementares sobre as duas metodologias anteriores. No sexto capítulo analisa-se a sensibilidade da solução encontrada, aplicando-se as metodologias anteriores, em função dos pontos escolhidos entre os dados experimentais. O sétimo capítulo apresenta duas formulações: uma variante do modelo inverso e outra variante da primeira metodologia. No oitavo capítulo é desenvolvida a modelagem matemática da terceira metodologia proposta para identificar os parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton. O nono capítulo traz a inclusão do sexto parâmetro. No décimo capítulo são apresentados os resultados obtidos por meio da aplicação das metodologias desenvolvidas, bem como os critérios que orientam a decisão sobre a escolha dos parâmetros que melhor representam o material. No 11º capítulo, uma conclusão geral do tema pesquisado é exposta, e recomendações ao usuário das metodologias são apresentadas.

## 2 HISTERESE FERROMAGNÉTICA

### 2.1 CONCEITOS

Os materiais ferromagnéticos são amplamente utilizados em aplicações da engenharia elétrica: fornecem uma estrutura robusta às máquinas elétricas; conduzem o fluxo magnético  $\phi$ ; e, principalmente, amplificam as induções magnéticas até um valor limite imposto pela saturação do material.

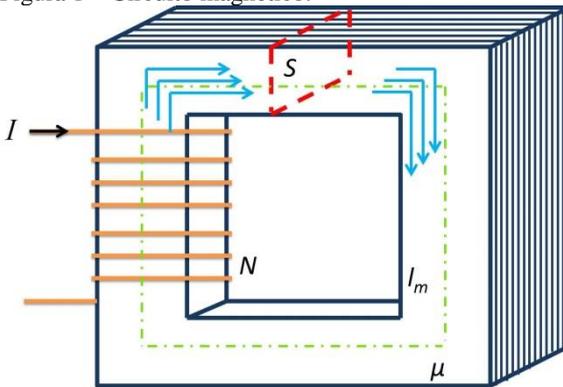
As máquinas elétricas são dispositivos que, por meio da ação de um campo magnético variável no tempo, convertem energia mecânica em energia elétrica, energia elétrica em energia mecânica, ou ainda transformam energia elétrica em energia elétrica com níveis de tensão distintos.

Os ímãs permanentes e as correntes elétricas são fontes de campos magnéticos. Os resultados produzidos pelo campo magnético, para os diferentes tipos de máquinas elétricas, podem ser descritos através de três princípios elementares: ação transformadora, ação motora e ação geradora. No primeiro princípio, um campo magnético variável no tempo, no interior de uma bobina, dá origem a uma tensão induzida na bobina. No segundo princípio, um condutor percorrido por uma corrente elétrica é colocado no interior de um campo magnético, experimentando, assim, a ação de uma força. Já no terceiro e último princípio, o movimento relativo entre um condutor e um campo magnético induz tensão no condutor.

De acordo com o que já foi exposto, grandezas elétricas e magnéticas interagem. Considere o circuito magnético da Fig. 1, onde uma bobina de  $N$  espiras de material condutor é enrolada em um núcleo ferromagnético fechado, de comprimento magnético  $l_m$ . Quando a bobina for alimentada com uma fonte de tensão de corrente alternada, então uma corrente elétrica alternada  $I$  percorrerá o condutor. A corrente elétrica gera um campo magnético, regido por  $H = NI/l_m$ , no núcleo ferromagnético. Este campo, ao ser multiplicado pela permeabilidade magnética do material ferromagnético presente no núcleo, provoca então uma indução magnética que corresponde a  $B = \mu H$ . Por sua vez, a indução magnética atravessa a área da seção transversal  $S$  do núcleo, originando um fluxo magnético que pode ser aproximado por  $\phi = BS$ . Tal como o condutor serve de caminho para a corrente elétrica, por analogia, o núcleo ferromagnético serve de caminho para o fluxo magnético. Desde que seja atingida a saturação do núcleo, o fluxo

magnético não estará completamente confinado no núcleo, mas na verdade haverá dispersão de fluxo no ar ao redor da bobina.

Figura 1 – Circuito magnético.



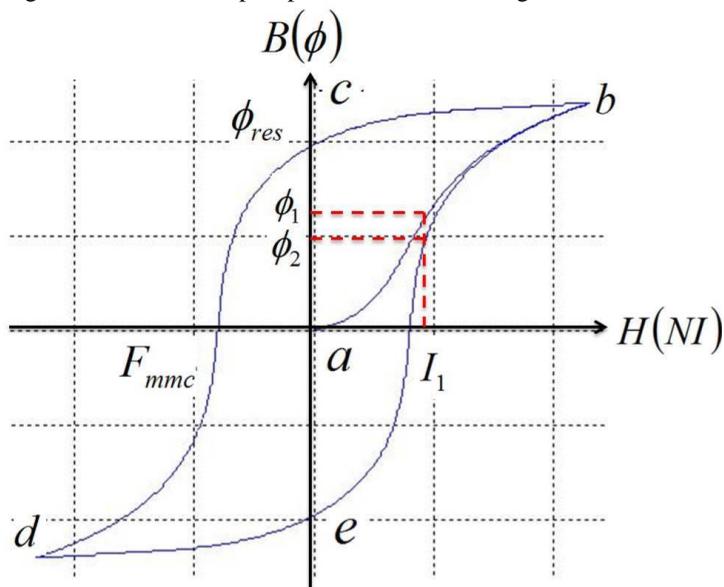
Fonte: Autoria própria (2016).

O fenômeno da histerese em materiais ferromagnéticos é explicado considerando-se quatro abordagens: na primeira, o fenômeno é explicado como uma incapacidade para percorrer os mesmos trajetos de fluxo no material [31], [32]; na segunda, o fenômeno é entendido do ponto de vista da necessidade de energia para reorientar os domínios magnéticos do material; na terceira, a histerese é interpretada como um atraso considerando a indução magnética e o campo magnético; por último, os pontos de grampeamento, que dificultam o movimento das paredes de domínio, são apontados como causa principal do fenômeno.

As propriedades magnéticas dos materiais podem ser medidas pela curva característica, denominada curva  $B-H$ , que mostra a relação instantânea da indução magnética  $B$  com o campo magnético  $H$  em um ciclo completo de operação. No sentido de levantar a curva  $B-H$ , um núcleo é submetido a um campo magnético. A quantidade do fluxo magnético estabelecido em um material ferromagnético depende não só do campo aplicado ao material, como também da história prévia do fluxo no material. Um campo magnético uniforme pode ser obtido no interior de uma bobina de  $N$  espiras, suficientemente longa, percorrida por uma corrente elétrica  $I$ . Assumindo que inicialmente não existe fluxo no material em análise, o fluxo na amostra varia segundo a trajetória  $a-b$ , mostrada na Fig. 2, quando o campo externo aumenta. Porém, o fluxo decresce seguindo a curva  $b-c-d$ , que é uma trajetória diferente da anterior, quando a corrente diminui. Posteriormente, a

curva  $d-e-b$  é então descrita quando a corrente volta a aumentar. Note que esta última curva gera fluxos menores  $\phi_2 < \phi_1$  para correntes iguais. Esta dependência da história do fluxo anterior e a incapacidade resultante para percorrer os trajetetos do fluxo anterior chama-se histerese, se a frequência da corrente for suficientemente baixa, o que corresponde a fenômenos quase-estáticos. A trajetória fechada  $b-c-d-e-b$ , resultante das variações da corrente aplicada, chama-se, de maneira geral, curva  $B-H$ . Como é possível observar na trajetória  $a-b-c$ , o valor do fluxo no núcleo não é anulado quando se retira a força magnetomotriz. Isto acontece porque permanece um campo magnético na amostra cujo fluxo é o segmento  $a-c$ , e este é chamado fluxo residual  $\phi_{res}$ . Para o fluxo ser anulado é necessário aplicar, em sentido contrário, certa quantidade de força magnetomotriz, denominada força magnetomotriz coercitiva  $F_{mmc}$ .

Figura 2– Curva  $B-H$  típica para materiais ferromagnéticos.

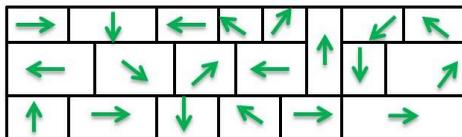


Fonte: Salvador Gonzales (2001).

Para entender o comportamento dos materiais ferromagnéticos é necessário conhecer sua estrutura. Dentro dos metais existem regiões denominadas domínios. Em cada domínio todos os dipolos magnéticos atômicos estão alinhados: seus campos magnéticos apontam para a mesma direção. Assim, cada domínio dentro do material atua de maneira idêntica a um ímã de dimensões atômicas. Contudo, um bloco de ferro

pode apresentar fluxo magnético nulo quando a grande maioria dos domínios estiver orientada ao acaso dentro do material como mostrado na Fig. 3, situação que acontece espontaneamente em temperatura ambiente.

Figura 3 – Domínios magnéticos desordenados.

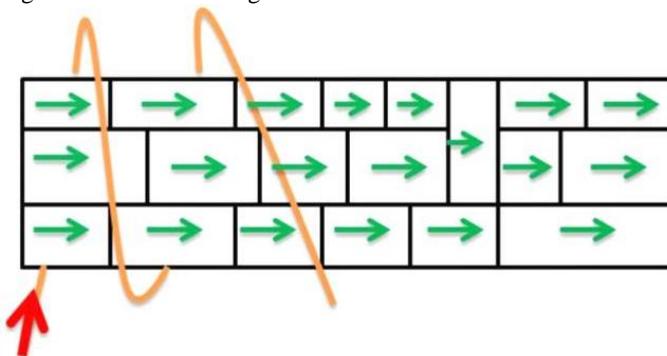


Fonte: Salvador Gonzales (2001).

Quando um campo magnético exterior é aplicado ao núcleo mostrado na Fig. 3, os domínios tendem a se orientar na direção de tal campo, estabelecendo um fluxo magnético no ferro que faz com que os dipolos se orientem no sentido do campo externo, aumentando assim a intensidade do campo magnético. Este processo de realimentação positiva do campo faz o ferro atingir um valor da permeabilidade magnética maior do que o valor da permeabilidade magnética do ar.

À medida que a intensidade do campo magnético é incrementada, outros domínios, que antes estavam orientados em direções diversas, se reorientam, alinhando-se ao campo externo. Quando quase todos os domínios se alinham ao campo exterior (Fig. 4), um novo aumento da força magnetomotriz causa, somente, um incremento do fluxo similar ao conseguido no ar – visto que, se idealmente todos os domínios estiverem alinhados pelo campo como mostrado na Fig. 5, então por este motivo deixa de existir o efeito de realimentação que reforça o fluxo. Neste ponto, diz-se que o ferro está saturado com o fluxo e isto corresponde à região da saturação da curva de magnetização.

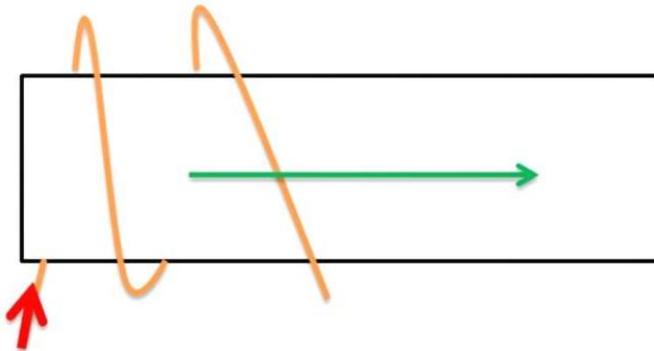
Figura 4 – Domínios magnéticos orientados.



Fonte: Salvador Gonzales (2001).

Dito de outra maneira, quando o campo magnético exterior for anulado, nem todos os domínios reorientam-se aleatoriamente novamente: esta é a causa da histerese. E isso ocorre porque energia é necessária à mudança de orientação. Inicialmente, os domínios se alinham ao campo porque o próprio campo magnético exterior proporciona esta energia. Não há nenhuma fonte de energia que faça esta reorientação dos domínios, quando tal campo é anulado. Neste caso, a amostra retém uma indução remanente até seu estado ser alterado por uma fonte de energia externa. Entre as fontes exteriores de energia que podem conseguir isto estão: força magnetomotriz de sentido contrário, esforço mecânico forte, e aumento da temperatura. Um destes eventos pode fornecer energia aos domínios e permitir que eles voltem à orientação original. O fato de que é necessária energia para reorientar os domínios no ferro constitui um tipo de perda de energia em todas as máquinas elétricas. Esta perda é chamada de perda por histerese no núcleo de ferro.

Figura 5 – Aniquilamento dos domínios magnéticos individuais.



Fonte: Salvador Gonzales (2001).

## 2.2 MODELO DE JILES-ATHERTON

Os domínios magnéticos podem ser orientados, de forma permanente ou temporária, aplicando-se forças externas. No entanto, ainda não se apresentou o conceito de parede de domínio. A parede de domínio é a interface entre dois domínios, e esta pode movimentar-se sob a ação de um campo magnético externo. Este movimento permite a ampliação ou a redução do volume do domínio magnético. Durante a movimentação são encontradas barreiras que impedem o movimento, e para vencê-las é necessário energia. Assim, um material magnético apresenta o fenômeno da histerese, que significa atraso considerando a indução magnética e o campo magnético.

Um modelo matemático para o fenômeno da histerese magnética é apresentado em [11]. Este modelo tem base na flexão experimentada pela parede de domínio magnético e no movimento de translação da mesma. O fenômeno da histerese magnética é causado pelo grampeamento (do inglês *pinning*) das paredes de domínios magnéticos, em defeitos presentes na estrutura cristalina do material ferromagnético ou em inclusões, não magnéticas, no material.

Esta modelagem matemática foi desenvolvida para descrever a curva  $B-H$  sigmoide, aquela em formato de  $S$ . A curva sigmoide é típica dos materiais ferromagnéticos moles utilizados pelos dispositivos eletromagnéticos. Esta curva mostra uma mudança muito suave na magnetização devida ao campo magnético. A mudança é suave por causa da força de atrito contrária às mudanças na magnetização. Esta força, que resiste às alterações na magnetização, existe devido ao

grampeamento das paredes de domínio devido às não idealidades do material.

Seja uma parede de domínio magnético presa a um defeito do material. Quando um campo magnético  $H$  é aplicado, a parede de domínio experimenta dois movimentos: inicialmente, esta sofre uma flexão que a coloca em movimento reversível; e posteriormente, a parede liberta-se dos pontos de grampeamento e desloca-se para a nova posição de grampeamento, em movimento irreversível. Além disso, as paredes de domínio magnético podem ficar presas nas não homogeneidades dentro de um grão como, por exemplo: discordâncias, imperfeições, regiões de tensões mecânicas não homogêneas e inclusões não magnéticas no grão.

O modelo de histerese desenvolvido não só considera que quando as paredes de domínio se movimentam, elas encontram impedimentos causados pelos pontos de grampeamento existentes no interior do material, como também não faz distinção dos tipos de pontos de grampeamento. O modelo utiliza uma energia de grampeamento média na formulação, considerando uma distribuição uniforme dos pontos de grampeamento existentes no material. Neste modelo, a dificuldade de movimentar as paredes de domínio, devida às não idealidades, é representada pelo parâmetro  $k$ .

Estas hipóteses permitiram que uma equação simples fosse obtida para a histerese magnética.

No modelo de histerese de Jiles-Atherton é considerada a existência de um acoplamento inter domínios que afeta o campo magnético efetivo  $H_e$  segundo  $H_e = H + \alpha M$ . O parâmetro  $\alpha$  representa este acoplamento. O campo magnético efetivo é resultado da ação conjunta do campo magnético externo aplicado ao material, da magnetização total no material multiplicada pelo parâmetro de acoplamento.

A equação de Langevin [33] modificada foi escolhida para modelar a magnetização anisterética  $M_{an} = m_s (\coth(H_e/a) - (a/H_e))$  onde o parâmetro  $a$  caracteriza a forma da magnetização anisterética, e o parâmetro  $m_s$  representa a magnetização de saturação.

Sobre o movimento das paredes de domínio, um deslocamento reversível da parede é aquele que ocorreria ao material ideal: sem pontos de grampeamento. Se o campo magnético fosse removido do material, a parede de domínio retornaria à posição original. Na ausência de pontos de grampeamento, as paredes de domínio são colocadas em ação por algo similar a uma pressão que as faz deslocarem-se.

Os pontos de grampeamento diminuem a permeabilidade inicial do material ferromagnético e aumentam a sua força coercitiva. Para um

ponto de grampeamento situado na parede entre dois domínios, a energia necessária para a superação do ponto de grampeamento depende da natureza do próprio ponto de grampeamento e da orientação relativa dos momentos dos domínios situados em cada lado da parede. Como se supõe uma distribuição uniforme dos pontos de grampeamento, e considerando uma energia de grampeamento média, o trabalho total contra o grampeamento é proporcional à mudança na magnetização.

Quando a parede de domínio experimenta uma flexão, por estar presa a dois pontos de grampeamento, inicialmente o resultado é uma mudança reversível da magnetização. Este processo reversível continua até a parede encontrar-se, precocemente, com outro ponto de grampeamento, ficando presa a ele, ou até a parede se expandir o suficiente para se libertar dos atuais pontos de grampeamento. Uma vez livre, a parede agora se desloca irreversivelmente até ser presa novamente. Consequentemente, a magnetização é composta de duas parcelas: a magnetização reversível  $M_{rev}$  (devida à flexão das paredes), e a magnetização irreversível  $M_{irr}$  (devida ao deslocamento das paredes).

A quantidade de paredes de domínio que são flexionadas depende da energia da parede de domínio, da força dos pontos de grampeamento e do campo magnético aplicado ao material. Se a energia da parede de domínio for alta, e se a força dos pontos de grampeamento for pequena, então a parede flexionará menos antes de se libertar dos pontos de grampeamento. Por outro lado, no estado desmagnetizado, as paredes de domínio são planas, já que não existe nenhuma força que tende a movimentá-las; neste caso, não há motivos para existirem paredes flexionadas.

O movimento da parede de domínio pode ser visto juntamente com a magnetização anisterética. A magnetização anisterética  $M_{an}$  é o estado ideal de configuração dos domínios: condição que requer menor energia. Logo, para qualquer campo magnético dado, se o valor da magnetização  $M$  for maior do que o valor da magnetização anisterética, então a parede de domínio experimentará uma força que tende a diminuir a magnetização. Caso contrário, se o valor da magnetização for menor do que o valor da magnetização anisterética, então a parede de domínio experimentará uma força que tende a aumentar a magnetização. Uma parede de domínio localizada na região entre dois domínios, cujos momentos estão alinhados em paralelo e antiparalelo em relação à direção do campo magnético aplicado ao material, flexiona de uma maneira quando  $M > M_{an}$ , e de outra maneira quando  $M < M_{an}$ . Quando  $M = M_{an}$  a parede é planar (sem flexão). A quantidade de flexão da parede de domínio, antes que seja liberta dos pontos de grampeamento

que a prendem, é linearmente dependente da diferença entre magnetização anisterética e magnetização. E o coeficiente de proporcionalidade é representado pelo parâmetro  $c$  no modelo de Jiles-Atherton.

Diante do exposto, a ideia fundamental do modelo baseia-se na existência de uma força que atua nas paredes de domínio. Esta força existe não simplesmente devido à aplicação do campo magnético externo ao material, mas por causa do campo magnético aplicado menos uma contribuição, que corresponde à tendência do material ferromagnético apresentar configuração de domínio orientada aleatoriamente. A força que atua nas paredes de domínio é dada pelo resultado da diferença entre a magnetização anisterética e a magnetização total resultante do material.

Para finalizar, existe um número infinito de possíveis configurações para descrever a interação das paredes de domínio e dos defeitos presentes no material. Estes defeitos podem ser pontuais ou não. Na modelagem não é realizável considerar todas as possíveis situações e geometrias de paredes e de defeitos. Sendo assim, para modelar a flexão das paredes de domínio, que tem origem na diferença entre a magnetização e a magnetização anisterética, os autores consideraram que quando uma parede de domínio corta um grão esférico, esta fica presa ao contorno do grão. Sob a ação de um campo magnético, a parede de domínio é flexionada, sendo deformada reversivelmente e gradativamente até a uma distância linear  $x$ . O volume varrido pela parede de domínio e a alteração na magnetização reversível são calculados, para dois domínios com momentos paralelo e antiparalelo ao campo magnético aplicado.

Em síntese, os pontos de grampeamento se opõem ao movimento das paredes de domínio, e são a causa fundamental do fenômeno da histerese nos materiais ferromagnéticos.

## 2.3 MODELO INVERSO

No modelo original de Jiles-Atherton, o campo magnético é a variável independente e a indução magnética é a variável dependente. Uma modificação do modelo de Jiles-Atherton é apresentada em [28]: nesta, a indução magnética se torna a variável independente. Através desta modificação, o modelo se torna naturalmente adaptado ao cálculo de campos por Elementos Finitos com formulação em potencial vetor magnético.

A partir das equações originais do modelo de Jiles-Atherton foi desenvolvida uma nova formulação que relaciona três taxas de variação: a taxa de variação da magnetização total com a indução magnética; a taxa de variação da magnetização irreversível com a indução magnética efetiva; e a taxa de variação da magnetização anisterética com o campo magnético efetivo. No modelo inverso, quando os valores dos parâmetros que representam o material são conhecidos, a magnetização e o campo magnético são calculados com base na indução magnética, em um procedimento passo a passo no tempo. O modelo inverso e o modelo original têm os mesmos parâmetros.

### 2.3.1 Modelagem Matemática

Para o modelo inverso são válidas as seguintes equações:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (2.1)$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (2.2)$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (2.4)$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (2.5)$$

$$B = \mu_0(H + M) \quad (2.6)$$

Onde:  $M$  é a magnetização;  $M_{irr}$  é a magnetização irreversível;  $M_{rev}$  é a magnetização reversível;  $M_{an}$  é a magnetização anisterética;  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$  e  $c$  são os parâmetros do material no modelo de Jiles-Atherton;  $H_e$  é o campo magnético efetivo;  $\delta$  assume os valores  $\pm 1$ ;  $H$  é o campo magnético;  $B$  é a indução magnética; e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo.

Substituindo (2.2) em (2.1) tem-se:  $M = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr}$ . Ou seja:

$$M = (1-c)M_{irr} + cM_{an} . \quad (2.7)$$

Derivando (2.7) em relação à indução magnética efetiva ( $B_e = \mu_0 H_e$ ) tem-se:

$$\frac{dM}{dB_e} = (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c \frac{dM_{an}}{dB_e} . \quad (2.8)$$

Mas,

$$\frac{dM}{dB_e} = \frac{dM}{dB} \frac{dB}{dB_e} . \quad (2.9)$$

De (2.5) e (2.6) e como  $B_e = \mu_0 H_e$  tem-se:  $H_e = H + \alpha M$  ou  $H = H_e - \alpha M$ . Como  $B = \mu_0(H + M)$  então  $B = \mu_0(H_e - \alpha M + M)$  ou  $B = \mu_0 H_e - \alpha \mu_0 M + \mu_0 M$ .

$$B = B_e - \mu_0 \alpha M + \mu_0 M . \quad (2.10)$$

Derivando (2.10) em relação à indução magnética efetiva decorre:

$$\frac{dB}{dB_e} = 1 - \mu_0 \alpha \frac{dM}{dB_e} + \mu_0 \frac{dM}{dB_e} .$$

Que substituindo em (2.9) permite escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{dM}{dB} \left[ 1 - \mu_0 \alpha \frac{dM}{dB_e} + \mu_0 \frac{dM}{dB_e} \right] \\
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{dM}{dB} \left[ 1 - \mu_0 \left( \alpha \frac{dM}{dB_e} - \frac{dM}{dB_e} \right) \right] \\
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{dM}{dB} \left[ 1 - \mu_0 (\alpha - 1) \frac{dM}{dB_e} \right] \\
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{dM}{dB} - \mu_0 (\alpha - 1) \frac{dM}{dB_e} \frac{dM}{dB} \\
\frac{dM}{dB_e} + \mu_0 (\alpha - 1) \frac{dM}{dB_e} \frac{dM}{dB} &= \frac{dM}{dB} \\
\frac{dM}{dB_e} \left[ 1 + \mu_0 (\alpha - 1) \frac{dM}{dB} \right] &= \frac{dM}{dB} \\
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{\frac{dM}{dB}}{1 + \mu_0 (\alpha - 1) \frac{dM}{dB}} \\
\frac{dM}{dB_e} &= \frac{\frac{dM}{dB}}{1 - \mu_0 (1 - \alpha) \frac{dM}{dB}} \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\frac{dM_{an}}{dB_e} = \frac{dM_{an}}{dH_e} \frac{dH_e}{dB_e} \tag{2.12}$$

Mas, como  $B_e = \mu_0 H_e$  então  $H_e = B_e / \mu_0$ . Consequentemente:

$$\frac{dH_e}{dB_e} = \frac{1}{\mu_0} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12) vem:

$$\frac{dM_{an}}{dB_e} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} \quad (2.14)$$

Derivando (2.3) em relação ao campo magnético efetivo, tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = m_s \left[ \frac{d}{dH_e} \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) - \frac{d}{dH_e} \left( \frac{a}{H_e} \right) \right]$$

Esta derivada é calculada no Apêndice A, assim, de (A.19) tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \frac{a^2}{H_e^2} \right] \quad (2.15)$$

Para finalizar:

$$\frac{dM_{irr}}{dB_e} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{dH_e}{dB_e}$$

De (2.13) tem-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dB_e} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{irr}}{dH_e} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.4) em (2.17), encontra-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dB_e} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right) \quad (2.18)$$

Aplicando (2.2) na equação (2.1):

$$M = M_{irr} + M_{rev} = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr} = M_{irr}(1-c) + cM_{an}.$$

A magnetização irreversível é isolada das demais variáveis nesta última expressão:

$$M_{irr} = \frac{M - cM_{an}}{(1-c)}.$$

Assim, (2.8) é escrita utilizando (2.14), (2.11) e (2.18):

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dB_e} &= (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c \frac{dM_{an}}{dB_e} \\
\frac{dM}{dB_e} &= (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} \\
\frac{\frac{dM}{dB}}{1-\mu_0(1-\alpha) \frac{dM}{dB}} &= (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} \\
\frac{dM}{dB} &= \left[ (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} \right] \left[ 1 - \mu_0(1-\alpha) \frac{dM}{dB} \right] \\
\frac{dM}{dB} &= (1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} - (1-c)\mu_0(1-\alpha) \frac{dM_{irr}}{dB_e} \frac{dM}{dB} + c \frac{1}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} - \\
& c \frac{1}{\mu_0} \mu_0(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} \frac{dM}{dB} \\
\frac{dM}{dB} + (1-c)\mu_0(1-\alpha) \frac{dM_{irr}}{dB_e} \frac{dM}{dB} + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} \frac{dM}{dB} &= \\
(1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} & \\
\frac{dM}{dB} \left[ 1 + (1-c)\mu_0(1-\alpha) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} \right] &= \\
(1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} & \\
\frac{dM}{dB} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 + (1-c)\mu_0(1-\alpha) \frac{dM_{irr}}{dB_e} + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e}} & \\
\frac{dM}{dB} = \frac{(1-c) \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right) + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 + \left[ (1-c)(1-\alpha) \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right) \right] + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e}} & \quad (2.20)
\end{aligned}$$

A relação (2.20) é a equação principal do modelo escalar inverso de Jiles-Atherton.

A magnetização total e o campo magnético são calculados pelo algoritmo numérico mostrado na sequência.

$B(t)$  e  $H(t)$  são calculados no passo anterior.

$$\Delta B = B(t + \Delta t) - B(t)$$

$$M(t) = \frac{B(t)}{\mu_0} - H(t)$$

$$H_e(t) = H(t) + \alpha M(t)$$

$$M_{an}(t) = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e(t)}{a}\right) - \frac{a}{H_e(t)} \right]$$

$$M_{irr}(t) = \frac{M(t) - cM_{an}(t)}{(1-c)}$$

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2\left(\frac{H_e(t)}{a}\right) + \left(\frac{a}{H_e(t)}\right)^2 \right]$$

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\left( (1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{\mu_0 k \delta} \right] \right) + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{\left[ 1 + \left( (1-\alpha)(1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{k \delta} \right] \right) \right] + c(1-\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e}} \quad (2.21)$$

$$M(t + \Delta t) = M(t) + \frac{dM}{dB} \Delta B \quad (2.22)$$

$$H(t + \Delta t) = \frac{B(t + \Delta t)}{\mu_0} - M(t + \Delta t) \quad (2.23)$$

Este algoritmo numérico é implementado na tese usando o *software* MATLAB.



### 3 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE HISTERESE DE JILES-ATHERTON: PRIMEIRA METODOLOGIA

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O problema da caracterização de materiais consiste em: para uma dada amostra de aço, obtém-se curvas  $B-H$  em baixa frequência, o que garante que as perdas dinâmicas possam ser desconsideradas. Para este conjunto de dados experimentais deve-se encontrar um conjunto de cinco parâmetros para que o modelo de histerese possa representar o comportamento desta amostra, ou seja, dados os pontos  $P(H, B)$  do laço de histerese experimental calcular os parâmetros que representam o material:  $m_s$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ .

Para resolver o problema anterior, as equações do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton são utilizadas. Estas envolvem outras variáveis além daquelas cujos valores são conhecidos ( $H$ ,  $B$ ), e além daquelas cujos valores são pretendidos (os parâmetros do modelo). Consequentemente, existe a necessidade de manipular as equações do modelo de forma a obter uma equação única, que envolva apenas as variáveis de interesse  $H$ ,  $B$ , e os parâmetros do modelo. Esta manipulação, além de organizar melhor os dados, auxilia também na identificação do problema por trás da determinação dos parâmetros.

Assim, as equações do modelo foram manipuladas e foi obtida uma equação diferencial ordinária (EDO) não linear, em função de  $B$  e  $H$ , onde aparecem os parâmetros pretendidos. Esta EDO é o problema por trás da determinação dos parâmetros e é representada de forma compacta por  $dB/dH = f(H, B)$ .

A metodologia proposta para determinar os parâmetros do modelo consiste em transformar a EDO não linear obtida em uma equação algébrica em função de  $B$  e  $H$ . Para isso são necessários escolher cinco pontos  $P_i(H, B)$  do laço de histerese experimental,  $i = 1, \dots, 5$ ; e calcular numericamente as derivadas nestes pontos  $\frac{dB}{dH}(P_i)$ . A

EDO é avaliada no primeiro ponto escolhido, resultando em uma equação algébrica. Quando a EDO for avaliada em todos os pontos escolhidos entre os dados experimentais, obtém-se cinco equações algébricas, e constrói-se um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. As incógnitas são os parâmetros procurados. Para calcular os parâmetros é suficiente resolver este sistema de equações.

Nesta metodologia as equações são tratadas nos ramos ascendente e descendente do laço de histerese. Entende-se por ramo ascendente a parte da curva para qual tem-se  $dH > 0$ . Por outro lado o ramo descendente é aquele onde tem-se  $dH < 0$ . Na obtenção dos parâmetros não são considerados laços menores.

### 3.1.1 Modelagem do Ramo Ascendente

No Apêndice A, apresenta-se a construção de uma equação principal, com base nas cinco equações de Jiles-Atherton e em uma relação constitutiva. A equação principal é utilizada na determinação dos parâmetros do modelo. Os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton são determinados para representar o material ensaiado em laboratório.

Esta equação principal é dada por:

$$\begin{aligned}
 & m_s \left[ \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) - \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right] \\
 & \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\
 & \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} = \\
 & \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \\
 & \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) + \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 \right] \\
 & \left[ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

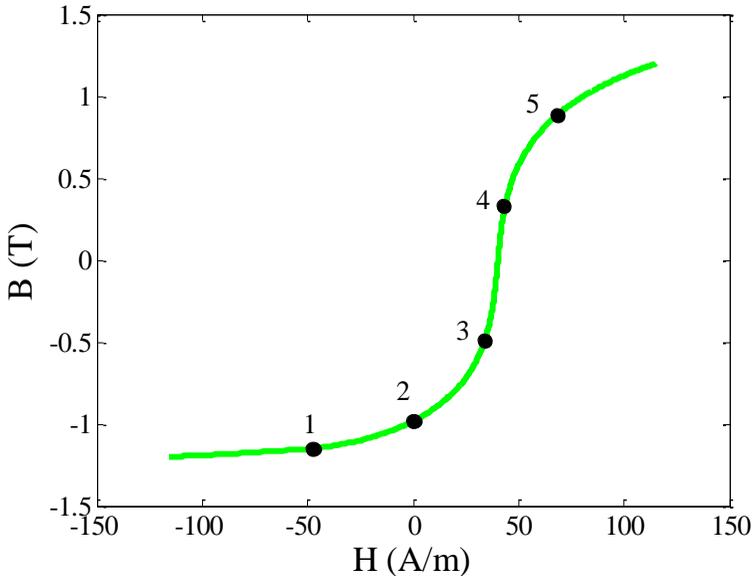
Observa-se que a equação (3.1) está escrita em termos de  $H$ ,  $B$ ,  $dB/dH$ , e dos cinco parâmetros procurados:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ . De forma simplificada, esta EDO não linear pode ser representada por:

$$\frac{dB}{dH} = f(H, B) \quad (3.2)$$

Para calcular os parâmetros do modelo por meio de (3.2), a seguinte metodologia é proposta:

- Primeiro, deve ser obtido um laço de histerese experimental do material a ser representado;
- Seleciona-se cinco pontos principais  $P(H, B)$  estrategicamente posicionados no ramo experimental ascendente, localizados onde ocorrer uma mudança de tendência, como mostrado na Fig. 6:

Figura 6 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia.



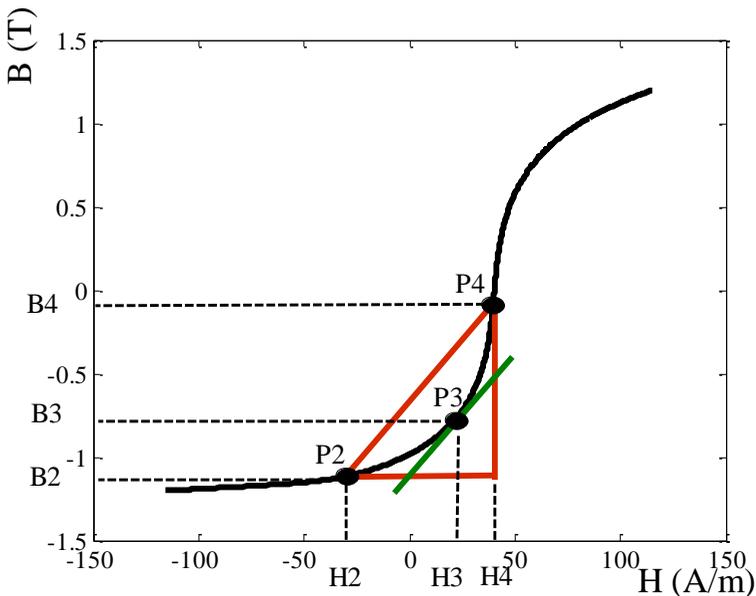
Fonte: Autoria própria (2015).

- Em seguida, a derivada da indução magnética, em relação ao campo magnético, avaliada em cada ponto selecionado (ou seja,  $\frac{dB}{dH}(P)$  como mostrado na Fig. 7) deve ser determinada em cada ponto principal  $P(H, B)$ . Na verdade, com a finalidade de calcular esta

derivada, para cada ponto principal são necessários dois pontos auxiliares situados na vizinhança do ponto principal. Observar na Fig. 7 que se  $P_2$  e  $P_4$ , situados muito próximos do ponto principal  $P_3$ , forem selecionados para pontos auxiliares, então, a hipotenusa se aproxima da reta tangente. Para  $P_3(H_3, B_3)$  tem-se:  $\frac{dB}{dH}(P_3) = \frac{B_4 - B_2}{H_4 - H_2}$  ;

- Por fim, os cinco pontos experimentais principais e suas respectivas derivadas são inseridos em (3.2). Isso origina um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. As cinco incógnitas são os parâmetros do modelo:  $m_s, a, k, e c$ .

Figura 7 – Cálculo da derivada. Primeira metodologia.



Fonte: Autoria própria (2011).

### 3.1.2 Modelagem do Ramo Descendente

Analisa-se agora o ramo descendente da curva  $B-H$ .

Os passos anteriores, válidos para a modelagem matemática do ramo ascendente, são igualmente seguidos para modelar o ramo descendente. Neste último caso do ramo descendente, do mesmo modo somos levados à equação (3.1), sendo que o termo  $k$  é agora substituído pelo termo  $-k$ , devido ao produto  $k\delta$ . A resolução da nova equação segue também a metodologia anterior, que foi gerada para o ramo ascendente. Agora, simplesmente, os pontos chave experimentais são alterados, escolhendo-os entre os pontos pertencentes ao ramo experimental descendente.

### 3.2 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Existem duas EDO's não lineares (uma para cada ramo da curva  $B-H$ ), onde aparecem os cinco parâmetros procurados. Partindo disso são construídos dois sistemas não lineares: o primeiro para o ramo descendente e o segundo para o ramo ascendente. Cada sistema possui cinco equações e cinco incógnitas. Para cada ramo é necessário utilizar um total de 15 dados experimentais (estrategicamente posicionados no laço experimental conforme descritos nas seções 3.1.1 e 3.1.2 deste trabalho) para escrever o sistema. São necessários 15 pontos (5 principais mais 2 pontos auxiliares para cada ponto principal), uma vez que dados experimentais de  $dB/dH$  não estão disponíveis.

Dado um sistema algébrico de cinco equações não lineares

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = (dB_1 / dH_1) - f(H_1, B_1) \\ \vdots \\ F_5(x) = (dB_5 / dH_5) - f(H_5, B_5) \end{cases}$$

Onde  $x = [m_s \ a \ a \ k \ c]$  são as cinco incógnitas. Cada componente do sistema  $F$  é obtida igualando (3.2) à zero e considerando (3.1). O objetivo é encontrar um vetor  $x$  tal que  $F_i(x) = 0$  para  $1 \leq i \leq 5$ . Para resolver este sistema de equações a soma dos quadrados é minimizada. Se a soma dos quadrados é nula, então o sistema de equações está resolvido. Para resolver o sistema utilizou-se o método de mínimos quadrados não linear.

O sistema apresenta infinitas soluções e para resolvê-lo utilizou-se o seguinte método:

- Para começar, um valor inicial é atribuído ao conjunto de parâmetros  $x_0 = [m_{s0} \ a_0 \ a_0 \ k_0 \ c_0]$ . Para cada valor inicial  $x_0$  é construída uma sequência de valores  $x_n$ , e no caso de convergência, limite de  $x_n$  quando  $n$  tende ao infinito é igual a uma das soluções do sistema;

- Logo depois, o sistema  $F$  para o ramo descendente é resolvido. Assim uma candidata à solução é obtida. Avalia-se o sistema  $F$  na candidata à solução;
- Em seguida, o erro é avaliado na norma infinito, isto é, observar se a componente de maior valor absoluto do sistema  $F$  apresenta valor inferior a um erro dado (de valor positivo). Para  $v$ , vetor cujas componentes são os valores absolutos do sistema  $F$ , a norma infinito [34] é dada por:  $\|v\|_{\infty} = \max |v_i|$  ;
- Posteriormente, caso não seja uma solução plausível por desobedecer o critério do erro, esta candidata à solução é utilizada como dado inicial para resolver o sistema  $F$  para o ramo ascendente;
- Após isso, o novo sistema  $F$  é resolvido obtendo-se assim uma nova candidata à solução. Avalia-se o sistema  $F$  na nova candidata à solução;
- No próximo passo, o erro é avaliado na norma infinito;
- Antes de terminar, este procedimento é repetido, quantas vezes forem necessárias, até atingir o erro desejado ou o número máximo de iterações estabelecido;
- Para terminar, os parâmetros encontrados são inseridos no algoritmo do modelo inverso, apresentado em [28], para comparar o laço medido com o laço calculado.

Para iniciar o conjunto de parâmetros  $x_0 = [m_{s0} \ a_0 \ a_0 \ k_0 \ c_0]$  é necessário considerar as seguintes orientações: os parâmetros do modelo assumem valores positivos. Como  $B = \mu_0(H+M)$  então  $B_s = \mu_0(H_s+M_s)$ . Assim o primeiro parâmetro  $M_s \approx B_s/\mu_0$ . O segundo parâmetro varia na faixa  $10^{-6} < \alpha < 10^{-4}$ . O terceiro parâmetro  $a$  é aproximadamente igual ao campo coercitivo. O quinto parâmetro varia na faixa  $0 < c < 1$ .

Para verificar se a solução encontrada depende dos pontos escolhidos entre os dados experimentais (para escrever o sistema de equações), na seção 6.1 é feita uma análise da sensibilidade da solução aos pontos escolhidos.

Considerando uma solução do tipo mínimos quadrados, para verificar a possibilidade da utilização de todos os pontos pertencentes ao ramo (para escrever o sistema de equações), a regressão não linear é apresentada na seção D.2.

Para obter a solução, as raízes do sistema são calculadas aplicando-se o método de mínimos quadrados não linear apresentado na seção D.3.

### 3.3 DIAGRAMA DE BLOCOS

O algoritmo escrito, tendo como base a primeira metodologia desenvolvida para identificar os parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton, é constituído de sete partes, como é possível observar nas Fig. 8.a e 8.b.

A primeira parte, nomeada “curva experimental”, contém os dados experimentais da indução magnética e do campo magnético. Um único período de regime permanente é necessário. Esta parte permite observar o gráfico da curva  $B-H$  experimental, identificar a posição do início e do término do ramo descendente, bem como a quantidade de pontos experimentais existentes.

A segunda parte, designada “separa curvas”, separa os pontos do ramo ascendente dos pontos do ramo descendente. Além disso, organiza estes pontos em ordem crescente para o ramo ascendente, e em ordem decrescente para o ramo descendente.

A terceira parte, chamada “escolha pontos principais”, permite uma entrada interativa de dados em figura. O usuário seleciona cinco pontos principais pertencentes ao ramo descendente, e cinco pontos principais pertencentes ao ramo ascendente. O algoritmo seleciona automaticamente pontos auxiliares, que são necessários ao cálculo da derivada da indução magnética em relação ao campo magnético.

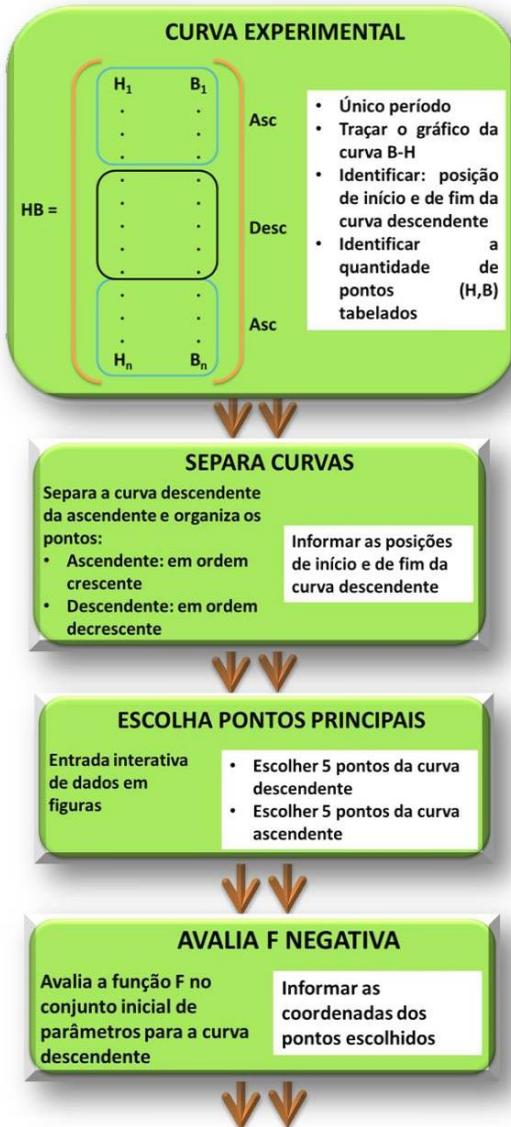
A quarta parte, intitulada “avalia  $f$  negativa”, avalia a função  $F$  no conjunto inicial de parâmetros: considerando o ramo descendente.

A quinta parte, representada por “ $f$  negativa”, resolve o sistema construído para o ramo descendente.

A sexta parte, chamada “ $f$  positiva”, resolve o sistema construído para o ramo ascendente.

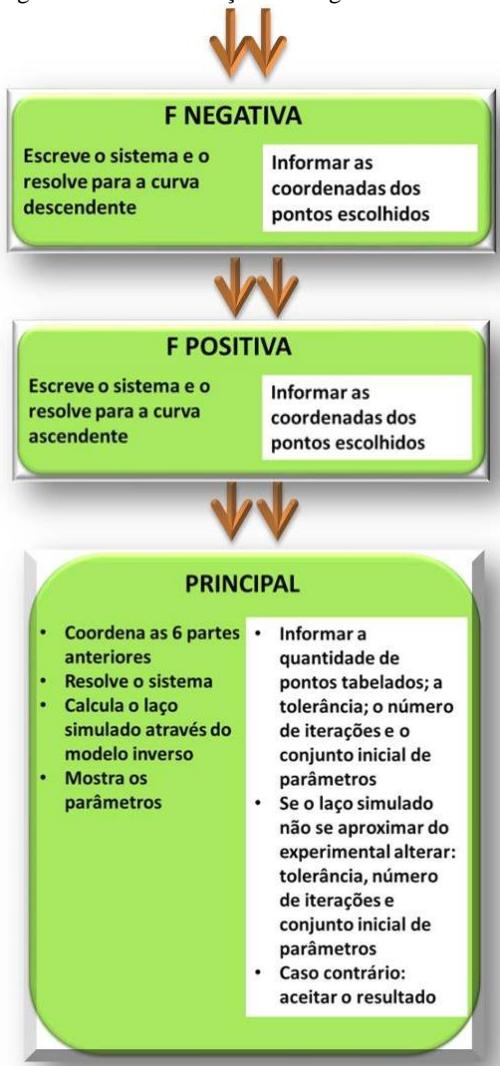
A sétima e também última parte, intitulada “principal”, tem a função de coordenar as seis partes anteriores; calcular a curva  $B-H$  utilizando o modelo inverso; e exibir na tela os parâmetros encontrados, o tempo de simulação, as distâncias (máxima, mínima e acumulada) calculadas, considerando os pontos experimentais e os pontos simulados, o erro médio quadrático  $MSE$ , e o erro calculado considerando a perda medida e a perda calculada.

Figura 8.a – Diagrama de blocos. Primeira metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 8. b – Continuação do diagrama de blocos.



Fonte: Autoria própria (2015).



## 4 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE HISTERESE DE JILES-ATHERTON: SEGUNDA METODOLOGIA

### 4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Uma nova metodologia de identificação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton foi apresentada no capítulo precedente. Esta identificação foi feita através de uma EDO não linear:  $dB/dH = f(H, B)$ . Cálculos da derivada  $dB/dH$  avaliada em cada ponto de interesse eram necessários à identificação. Esta nova metodologia foi utilizada na caracterização de vários materiais em conformidade com [35], e com [36]. Em síntese, no caso de materiais cujo laço de histerese descreve uma curva sigmoide suave, foram obtidas excelentes aproximações de laços (calculado e medido). Por outro lado, esta metodologia não apresentou boa concordância dos dados calculados com os dados medidos para a curva experimental com conteúdo ruidoso.

Na tentativa de obter melhores resultados, correspondentes à curva experimental com conteúdo ruidoso, pretende-se determinar os parâmetros do modelo utilizando uma técnica original, que evita cálculo de derivadas [37]. Nesse sentido, construir-se-á o problema de Cauchy associado, aplicar-se-á o método do fator integrante, e será desenvolvida e proposta uma equação que relaciona a indução magnética com o campo magnético, levando em conta a histerese. Especialmente, para resolver as integrais envolvidas aplicar-se-ão séries de potência [38].

Para melhorar a primeira metodologia, intuitivamente, deve-se evitar o cálculo de derivadas. Para impedir este cálculo é necessário obter, diretamente, uma equação algébrica em função de  $B$  e  $H$ ; e utilizar 5 pontos (e não 15) por ramo do laço de histerese, para escrever o sistema de equações.

Entretanto, uma análise prévia do problema revelou que manipulando as equações do modelo, ter-se-ia que obter, inicialmente, uma equação algébrica em função de  $M$  e de  $H_c$ .

Quando de fato a manipulação das equações foi feita, uma EDO linear em função de  $M$  e de  $H_c$  foi obtida. Como o valor inicial é conhecido, o problema de Cauchy associado à EDO foi construído, garantindo a solução da EDO. O valor inicial do problema de Cauchy é  $(H_0, B_0)$  proveniente da tabela de dados experimentais. Para obter a solução da EDO, o problema de Cauchy foi resolvido utilizando o método do fator integrante.

A solução do problema de Cauchy é a equação algébrica pretendida, em função de  $M$  e de  $H_e$ , e revelada pela análise prévia já citada nesta seção. Com esta equação, retornando às equações do modelo, é possível obter a equação algébrica esperada, em função de  $B$  e de  $H$ , e necessária ao impedimento do cálculo de derivadas também já mencionado nesta seção.

O desenvolvimento da equação principal, utilizada na determinação dos parâmetros do modelo, é apresentado no Apêndice B. Esta equação que evita cálculo de derivadas é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{B}{\mu_0} - H &= \left[ \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 \right] e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} + \\
 (1-c) \frac{m_s}{k\delta} e^{\frac{-\frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} & \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_n}{n+1} \left[ \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{\mu_0} \right)^{n+1} - \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{\mu_0} \right)^{n+1} \right] \right\} &+ \\
 cm_s \left[ \coth \left( \frac{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{\mu_0}}{a} \right) - \frac{a}{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{\mu_0}} \right] & \quad \cdot \quad (4.1) \\
 cm_s \left[ \coth \left( \frac{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{\mu_0}}{a} \right) - \frac{a}{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{\mu_0}} \right] & \\
 e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} &
 \end{aligned}$$

Em (4.1), os coeficientes  $c_n$  dependem do valor de  $\delta$  e do valor dos parâmetros do material:  $a$  e  $k$ .

Observa-se que a equação (4.1) está escrita em termos de  $H$ ,  $B$ , e dos cinco parâmetros procurados:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ . De forma simplificada esta equação pode ser representada por:

$$\frac{B}{\mu_0} - H = f(H, B) \quad (4.2)$$

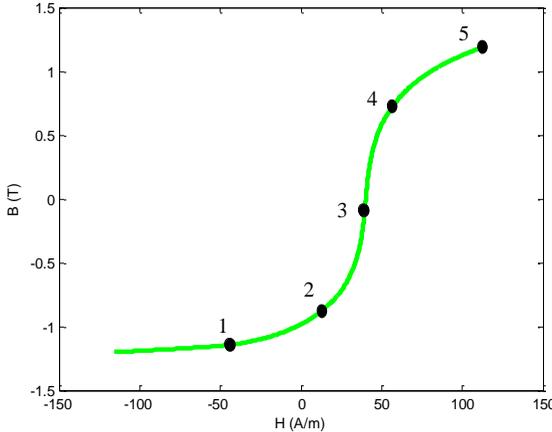
Conhecendo-se as coordenadas dos pontos  $P(H, B)$ , do laço de histerese experimental do material, pretende-se calcular os cinco parâmetros do modelo utilizando (4.1). Como (4.1) está escrita em função de  $B$  e de  $H$ , e também aparecem nela os cinco parâmetros do modelo, então é necessário avaliá-la em cinco pontos  $P_i(H, B)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , para determinar os parâmetros, o que leva à cinco equações algébricas. Estas equações geram um sistema de cinco equações e cinco incógnitas (as incógnitas são os cinco parâmetros do modelo). Para determinar os parâmetros do modelo é suficiente resolver este sistema de equações.

## 4.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Esta seção é apresentada com o propósito de descrever como a equação (4.1) é utilizada na identificação dos parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton.

Como a equação (4.1) depende do valor de  $\delta$ , esta é adequada tanto ao ramo descendente como ao ramo ascendente da curva  $B-H$ . Assim, existem duas equações não lineares (uma para delta negativo e outra para delta positivo) em que aparecem os cinco parâmetros procurados. Utilizando dados experimentais, são construídos dois sistemas não lineares, cada um apresentando cinco equações com cinco incógnitas. Para escrever o sistema são necessários, para cada delta, apenas cinco pontos experimentais, escolhidos entre os pontos pertencentes ao laço experimental como mostrado na Fig. 9.

Figura 9 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados.  
Segunda metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Igualando (4.2) à zero e considerando (4.1), o sistema de equações não lineares é dado por:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = f(H_1, B_1) - \frac{B_1}{\mu_0} + H_1 \\ \vdots \\ F_5(x) = f(H_5, B_5) - \frac{B_5}{\mu_0} + H_5 \end{cases}$$

Onde  $x = [m_s, \alpha, a, k, c]$ . Este sistema apresenta infinitas soluções e para resolvê-lo são seguidas as etapas:

- Atribuir valor inicial ao conjunto de parâmetros:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ ;
- Para o ramo descendente da curva  $B-H$ : selecionar cinco pontos experimentais  $P(H, B)$  estrategicamente posicionados neste ramo; selecionar valores para  $(H_0, B_0)$  na tabela de dados experimentais; avaliar  $F$  no valor inicial do conjunto de parâmetros; resolver o sistema de equações  $F$  utilizando o método dos mínimos quadrados não linear;
- Para o ramo ascendente da curva  $B-H$ : selecionar cinco pontos experimentais  $P(H, B)$  estrategicamente

posicionados neste ramo; selecionar valores para  $(H_0, B_0)$  na tabela de dados experimentais; resolver o sistema de equações  $F$  utilizando a solução do passo anterior como dado inicial do conjunto de parâmetros;

- Variar o valor inicial do conjunto de parâmetros;
- Se necessário, alterar o valor selecionado para  $(H_0, B_0)$ ;
- Comparar o laço experimental com o laço calculado utilizando o conjunto de parâmetros obtido.

Para verificar se a solução encontrada depende dos pontos escolhidos entre os dados experimentais (para escrever o sistema de equações), na seção 6.2 é feita uma análise da sensibilidade da solução aos pontos escolhidos.

Considerando uma solução do tipo mínimos quadrados para verificar a possibilidade da utilização de todos os pontos pertencentes ao ramo (para escrever o sistema de equações), a regressão não linear é apresentada na seção D.2.

Para se obter a solução, as raízes do sistema são calculadas aplicando-se o método de mínimos quadrados não linear apresentado na seção D.3.

### 4.3 DIAGRAMA DE BLOCOS

O algoritmo desenvolvido para identificar os parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton é constituído em sete partes, como é possível observar nas Fig. 10.a e 10.b.

A primeira parte, intitulada “curva experimental”, contém os dados experimentais da indução magnética e do campo magnético. Um único período em regime permanente é necessário à identificação dos parâmetros do modelo. Esta parte permite observar o gráfico da curva  $B-H$  experimental; identificar a posição do início e do término do ramo descendente; bem como permite ter conhecimento da quantidade de pontos experimentais existentes.

A segunda parte, denominada “separa curvas”, separa os pontos pertencentes ao ramo ascendente dos pontos pertencentes ao ramo descendente. Além disso, organiza estes pontos em ordem crescente para o ramo ascendente, e em ordem decrescente para o ramo descendente.

A terceira parte, denominada “escolha pontos principais”, permite entrada interativa de dados em figura. O usuário seleciona cinco pontos pertencentes ao ramo descendente e cinco pontos pertencentes ao ramo ascendente (pontos estrategicamente posicionados em cada ramo como mostrado na Fig. 9). Pontos auxiliares não são necessários, já que a segunda metodologia evita estimar a derivada da indução magnética em relação ao campo magnético.

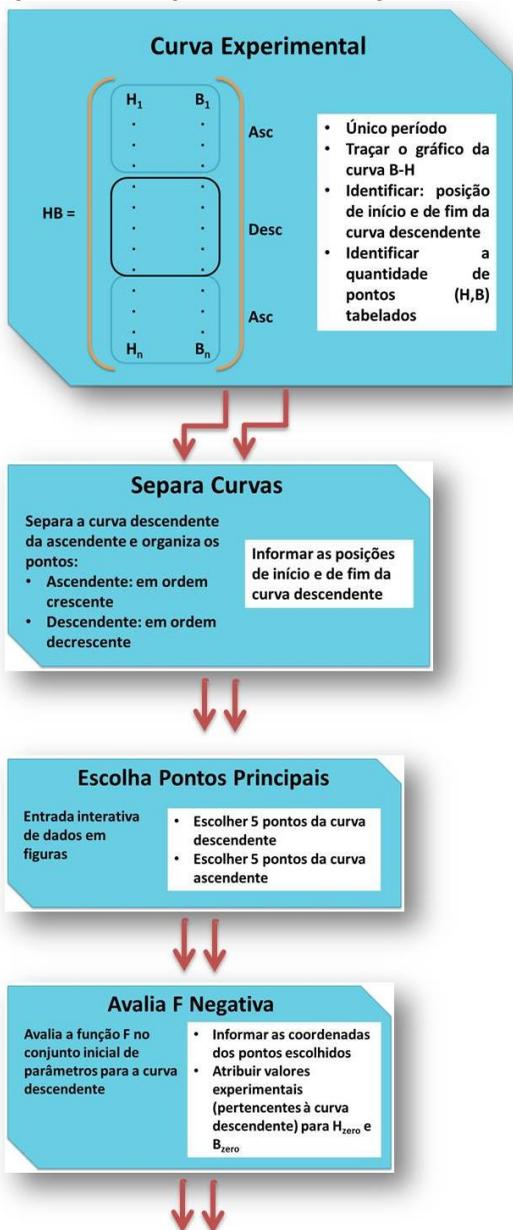
A quarta parte, com o título de “avalia f negativa”, é dedicada ao ramo descendente. Quanto a isso, o sistema  $F = f(H, B) - \frac{B}{\mu_0} + H$  é avaliado no conjunto inicial de parâmetros dado, e ao  $(H_0, B_0)$  são atribuídos valores experimentais pertencentes a este ramo.

Na quinta parte, chamada de “f negativa”, o sistema relacionado com o ramo descendente é resolvido.

Na sexta parte, com a denominação de “f positiva”, o sistema relacionado com o ramo ascendente é resolvido. Ao  $(H_0, B_0)$  são atribuídos valores experimentais pertencentes a este ramo.

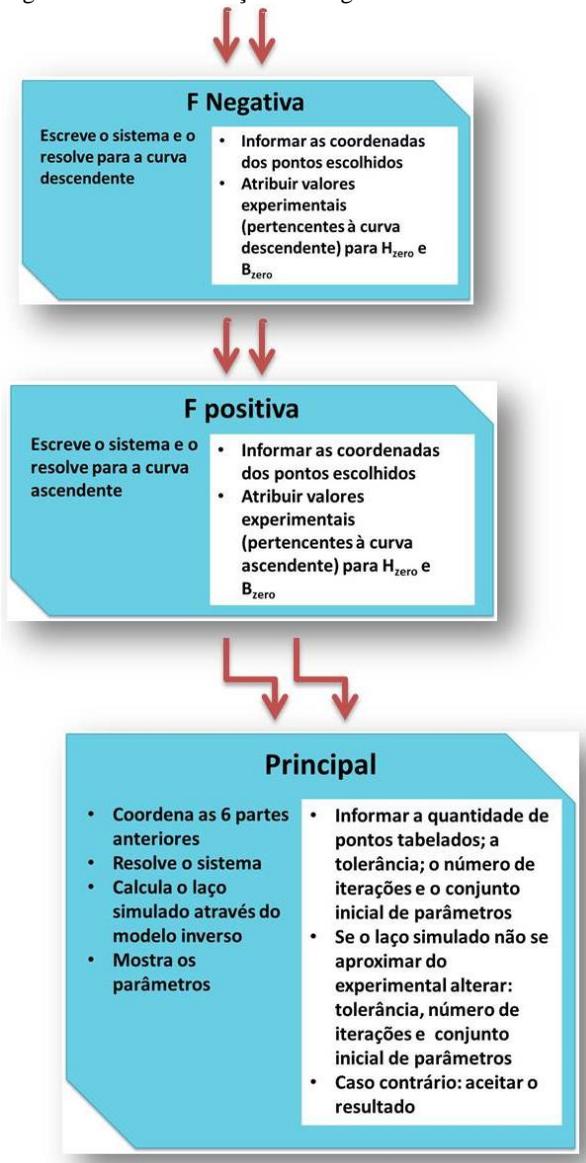
Na sétima e última parte, nomeada “principal”, são desenvolvidas as seguintes atividades: coordenação das seis partes anteriores; cálculo da curva  $B-H$  através do modelo inverso; e exibição na tela dos parâmetros encontrados, do tempo de simulação, das distâncias (máxima, mínima e acumulada) calculadas considerando pontos experimentais e pontos simulados, do erro médio quadrático  $MSE$ , e do erro considerando a perda medida e a perda calculada.

Figura 10.a – Diagrama de blocos. Segunda metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 10.b – Continuação do diagrama de blocos.



Fonte: Autoria própria (2015).

## 5 NOÇÕES COMPLEMENTARES

Neste capítulo são apresentadas informações adicionais sobre a primeira e a segunda metodologias propostas. Com estas informações pretende-se orientar o usuário sobre a escolha dos pontos experimentais necessários à construção do sistema e dar as direções para a seleção dos valores iniciais ( $H_0$ ,  $B_0$ ).

### 5.1 PRIMEIRA METODOLOGIA

Considerando o ramo ascendente do laço experimental, para se construir o sistema de equações resolvido conforme a abordagem da primeira metodologia, apenas cinco pontos principais experimentais pertencentes ao ramo são necessários. O posicionamento dos pontos escolhidos entre os dados experimentais está mostrado na Fig. 11. É importante ressaltar que para construir o sistema utiliza-se a equação  $dB/dH = f(H,B)$ , e conseqüentemente, serão necessárias as coordenadas do ponto  $P(H,B)$  e a inclinação da curva neste ponto  $\frac{dB}{dH}(P)$ .

Observando o ramo ascendente do laço de histerese na Fig. 11 é possível identificar quatro inclinações relevantes: dois trechos de reta e dois trechos curvos. Como se pretende modelar o ramo completo, faz-se necessário selecionar pontos pertencentes a cada uma das inclinações relevantes existentes no ramo, isto é, os pontos devem estar sempre localizados onde ocorrerem mudanças significativas de inclinação.

Assim, o primeiro ponto deve estar localizado no fim do primeiro trecho de reta. O terceiro e o quarto pontos devem estar localizados nos extremos do segundo trecho de reta. O segundo e o quinto pontos devem estar localizados na posição intermediária de cada um dos trechos curvos.

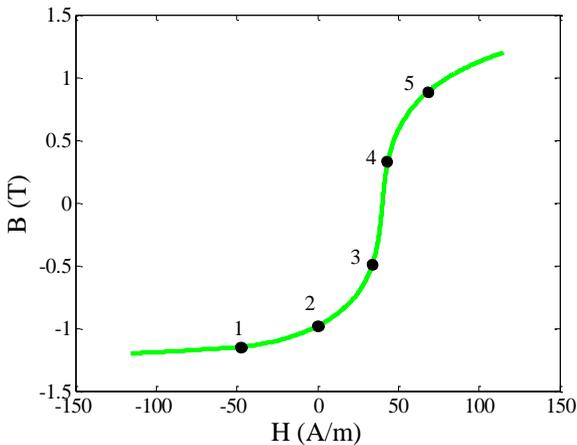
Ao se escrever um algoritmo para a automatização da seleção dos pontos principais, depara-se com a dificuldade da escolha, dentre muitos, do valor da tolerância necessária ao monitoramento da mudança da inclinação. A escolha do valor da tolerância pelo usuário se torna mais crítica quando se tratar de laço de histerese com conteúdo ruidoso. Assim, ao invés da tolerância, neste trabalho foram utilizadas entrada interativa de dados em figuras, e leitura em arquivo de imagem contendo modelo de seleção dos pontos principais.

Uma tela é aberta na área de trabalho para que o usuário possa indicar os pontos principais, tendo como base o modelo mostrado na

tela. Após indicação dos pontos principais pelo usuário, utiliza-se a função de entrada interativa de dados em figura, que aceita os pontos indicados pelo usuário. Independente da forma de escolha dos pontos de interesse, é necessário ressaltar que pode ser necessário reavaliar esses pontos de forma a melhorar os resultados.

Para calcular a derivada avaliada em cada ponto principal indicado pelo usuário, o algoritmo seleciona automaticamente dois pontos auxiliares, situados na vizinhança de cada ponto principal.

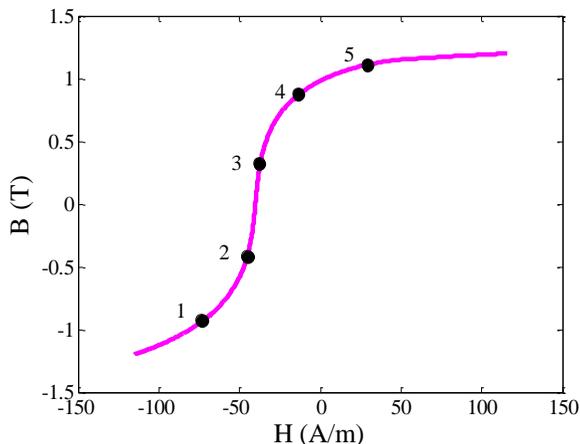
Figura 11 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Tendo em conta o ramo descendente do laço experimental, para construir o sistema de equações, resolvido de acordo com a primeira metodologia, aplica-se um procedimento análogo ao descrito para o ramo ascendente. O posicionamento dos pontos escolhidos entre os dados experimentais está exibido na Fig. 12.

Figura 12 – Ramo descendente: pontos principais recomendados. Primeira metodologia.



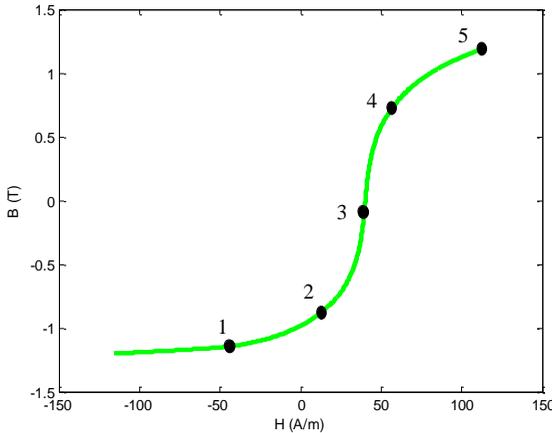
Fonte: Autoria própria (2015).

Um total de 30 pontos experimentais é necessário à construção do sistema de equações, sendo 15 pertencentes ao ramo ascendente (dentre os quais, 5 são pontos principais e 10 são pontos auxiliares); e 15 pertencentes ao ramo descendente (dentre os quais, 5 são pontos principais e 10 são pontos auxiliares).

## 5.2 SEGUNDA METODOLOGIA

Acerca do ramo ascendente do laço experimental, para se construir o sistema de equações, resolvido do ponto de vista da segunda metodologia, são necessários somente cinco pontos principais experimentais pertencentes ao ramo. O posicionamento dos pontos escolhidos entre os dados experimentais está destacado na Fig. 13. É importante ressaltar que estes pontos devem estar localizados estrategicamente no ramo. Os pontos de interesse podem ser localizados como descrito na primeira metodologia, embora o cálculo de derivadas seja desnecessário à determinação dos parâmetros do modelo. Os resultados apresentados no décimo capítulo seguem a escolha de pontos recomendada para cada metodologia.

Figura 13 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Segunda metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Em relação ao ramo descendente do laço experimental, para se construir o sistema de equações, resolvido de acordo com a segunda metodologia, aplica-se procedimento análogo ao apresentado quando se tratou do ramo ascendente.

Um total de dez pontos experimentais é necessário à construção do sistema de equações, sendo cinco pontos pertencentes ao ramo ascendente e cinco pontos pertencentes ao ramo descendente. Pontos auxiliares são desnecessários à determinação dos parâmetros do modelo.

Além disto, para a segunda metodologia, selecionar valores experimentais de  $(H_0, B_0)$  é necessário à determinação dos parâmetros do modelo. Para exemplificar, seja o problema de valor inicial (PVI) dado por:  $dy/dx = 6x^2 - 5$ . Para encontrar a solução geral  $y$  que satisfaz esta equação, é possível separar a variável  $y$  da variável  $x$  e integrar, isto é:  $\int dy = \int (6x^2 - 5) dx$  que conduz ao resultado  $y = 2x^3 - 5x + cte$ . Para buscar soluções particulares sejam:

$$cte = 0 \rightarrow y = 2x^3 - 5x, \text{ ou}$$

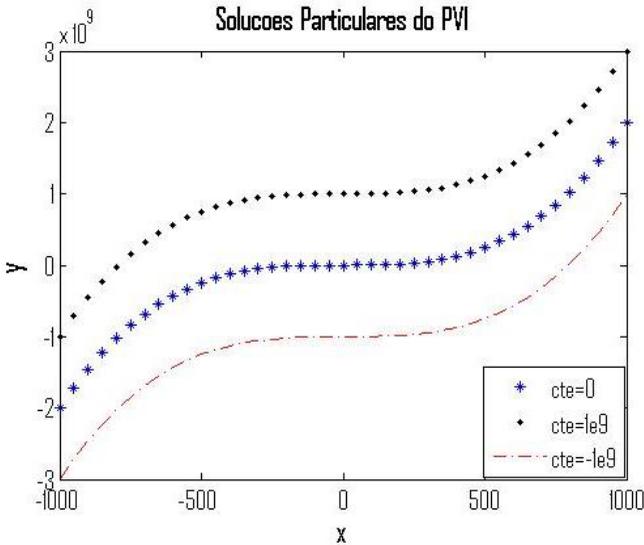
$$cte = 1 \times 10^9 \rightarrow y = 2x^3 - 5x + 1 \times 10^9, \text{ ,}$$

por outra forma

$$cte = -1 \times 10^9 \rightarrow y = 2x^3 - 5x - 1 \times 10^9.$$

O gráfico destas soluções particulares é apresentado na Fig. 14.

Figura 14 – Soluções particulares.



Fonte: Autoria própria (2015).

Sob outra perspectiva, uma equação principal da forma  $dB/dH = f(H,B)$ , onde aparecem os cinco parâmetros do modelo, foi encontrada na primeira metodologia. Esta é uma EDO com uma excessiva quantidade de termos, fazendo com que sua manipulação seja extremamente penosa, principalmente, quando a intenção é encontrar sua solução, isto é, encontrar a expressão  $B(H)$  que satisfaça esta EDO.

Mas, uma vez conhecidos os cinco parâmetros do modelo, o seguinte problema de valor inicial de primeira ordem é estudado:

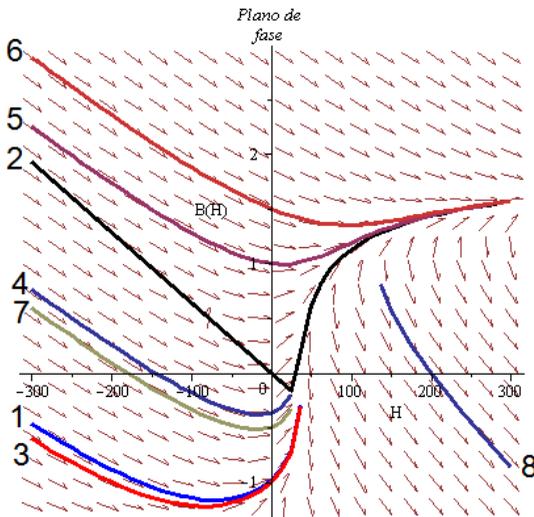
$$\begin{cases} \frac{dB}{dH} = f(H,B) \\ B(H_0) = B_0 \end{cases}$$

O estudo tem como base o conceito de campos de direção [39], [40] que na verdade não é um método numérico, mas um conceito que permite esboçar uma solução de uma equação diferencial de primeira ordem, sem resolvê-la efetivamente. Os campos de direção mostram o padrão do fluxo para a família de curvas soluções da equação diferencial. Para uma equação diferencial de primeira ordem, que não pode ser resolvida pelas técnicas usuais, como é o caso em estudo, o campo de direção é um conceito utilizado no estabelecimento da

existência de uma curva solução [39], [40], e se possível na sua localização.

Para levantar o campo de direção, e indicar alguns membros possíveis da família de curvas soluções da equação  $dB/dH = f(H,B)$ , utilizou-se o MAPLE (*software* matemático de computação simbólica ou algébrica). Para a família de curvas soluções da equação, alguns membros possíveis da família para o ramo ascendente estão apresentados na Fig. 15, e o padrão do fluxo desta família é mostrado também nesta figura. Visualmente é possível notar a existência de uma curva solução do tipo sigmoide, que são as curvas típicas de histerese de materiais ferromagnéticos.

Figura 15 – Plano de fase.



Fonte: Autoria própria (2012).

Levando-se isto em consideração para a segunda metodologia, admite-se que  $(H_0, B_0)$  conduz a uma das curvas soluções. Existe interesse em obter a curva calculada que melhor se aproxima do comportamento experimental do material em estudo. O valor de  $(H_0, B_0)$  é escolhido entre os dados experimentais de indução magnética e de campo magnético.

## 6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Para analisar a sensibilidade da solução aos pontos escolhidos entre os dados experimentais são apresentados resultados obtidos variando a posição dos cinco pontos principais, e variando o valor do conjunto inicial de parâmetros. Neste estudo são considerados: a primeira metodologia; a segunda metodologia; o laço de histerese suave; o laço de histerese com conteúdo ruidoso; três posições, diferentes entre si, dos cinco pontos principais; e três valores, diferentes entre si, do conjunto inicial de parâmetros.

### 6.1 PRIMEIRA METODOLOGIA

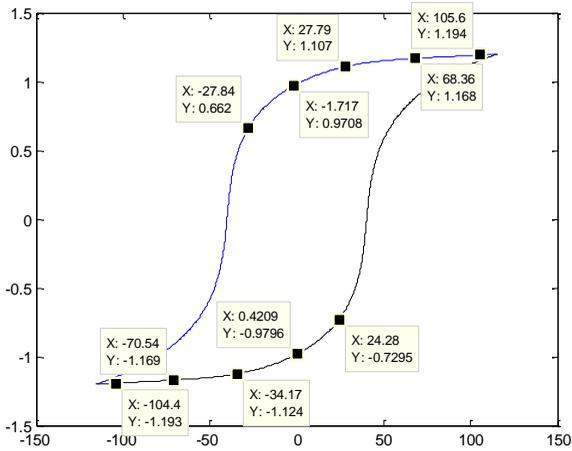
Para a primeira metodologia, para cada ramo da curva  $B-H$ , considera-se um sistema de cinco equações e cinco incógnitas. O sistema é construído utilizando a equação obtida nesta metodologia e cinco pontos principais. Estes últimos são localizados na curva  $B-H$  onde ocorrem mudanças de inclinação mais relevantes, visto que a equação obtida contém o termo  $dB/dH$ . Isto é feito para que sejam consideradas na modelagem as diferentes e mais relevantes inclinações existentes na curva  $B-H$ .

Um sistema que utiliza cinco pontos principais, localizados na curva  $B-H$  de forma diferente da citada no parágrafo anterior, é construído para analisar a sensibilidade da solução aos pontos escolhidos entre os dados experimentais.

#### 6.1.1 Laço de Histerese Suave

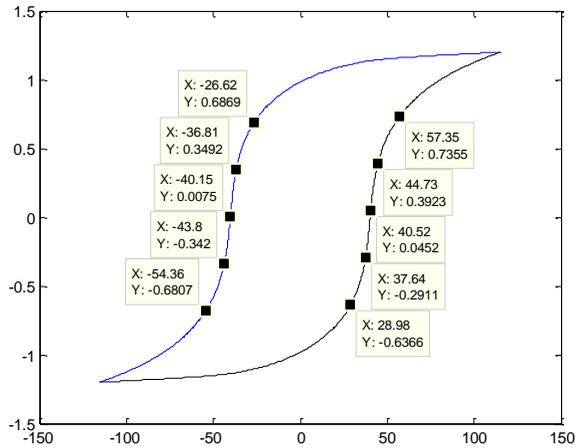
Três alternativas que representam as diferentes posições dos cinco pontos principais são analisadas: na primeira alternativa, os cinco pontos principais são selecionados na parte inicial do ramo, como está mostrado na Fig. 16; na segunda alternativa, estes pontos são selecionados na região intermediária do ramo, conforme mostrado na Fig. 17; e para finalizar, na terceira alternativa, os pontos são selecionados na região terminal do ramo, como pode ser observado na Fig. 18.

Figura 16 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 1. Laço suave.



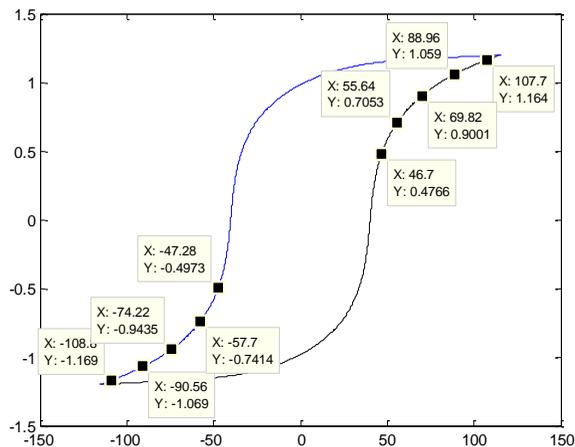
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 17 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 2. Laço suave.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 18 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 3. Laço suave.



Fonte: Autoria própria (2015).

Para cada alternativa de seleção dos pontos principais, estão apresentados na Tabela 1 e na Tabela 2 os conjuntos iniciais de parâmetros utilizados na simulação e o conjunto de parâmetros solução obtido. Para os casos em que a curva  $B-H$  calculada se aproxima da curva  $B-H$  experimental, são apresentadas: a distância total calculada considerando os pontos pertencentes ao laço experimental e os pontos pertencentes ao laço simulado; o MSE; o erro percentual calculado considerando a perda magnética medida e a perda magnética calculada; e o tempo de simulação. Para os casos em que a curva  $B-H$  calculada está distante da curva  $B-H$  experimental, estes valores são representados por x.

Tabela 1 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativas 1 e 2: laço suave

	Alternativa 1			Alternativa 2		
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$m_{s0}$	1,72 $\times 10^6$	1,5 $\times 10^6$	1,8 $\times 10^6$	1,72 $\times 10^6$	1,5 $\times 10^6$	1,8 $\times 10^6$
$\alpha_0$	$2 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
$a_0$	172	175	162	172	175	162
$k_0$	100	80	120	100	80	120
$c_0$	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6
$m_s$	3,05 $\times 10^6$	3,44 $\times 10^6$	5,41 $\times 10^7$	1,57 $\times 10^6$	1,5 $\times 10^6$	1,59 $\times 10^6$
$\alpha$	1,71 $\times 10^{-3}$	2,76 $\times 10^{-3}$	3,99 $\times 10^{-4}$	2 $\times 10^{-4}$	4,15 $\times 10^{-4}$	2,03 $\times 10^{-4}$
$a$	1701,1	3086,96	4650,18	104,92	175,00	107,33
$k$	141,4	253,2	356,4	54,62	80,00	56,62
$c$	0,82	0,95	0,71	0,24	0,3	0,26
<b>Dist. tot</b>	x	x	x	559	x	230,6
<b>MSE</b>	x	x	x	0,40	x	1,36
<b>Erro% perdas</b>	x	x	x	0,46	x	0,04
<b>t(s)</b>	x	x	x	4,94	x	7,92

Fonte: Autoria própria (2015)

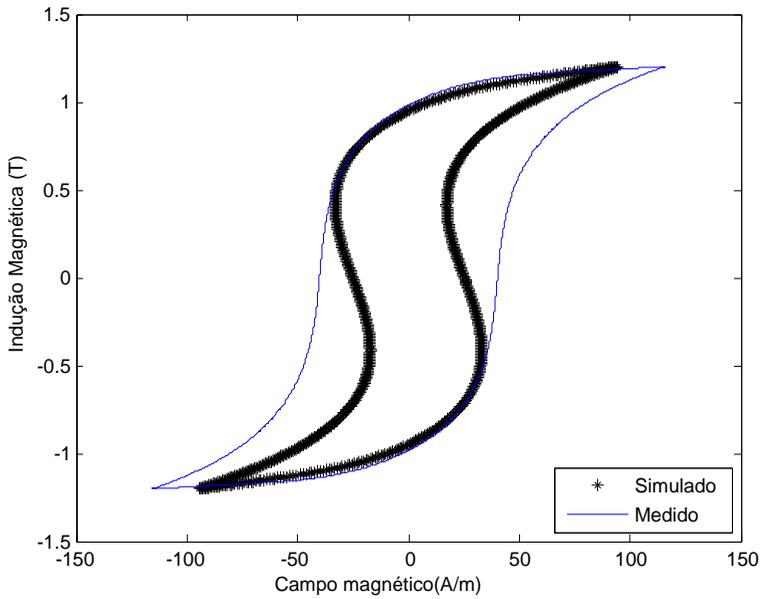
Tabela 2 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativa 3: laço suave

	<b>Alternativa 3</b>		
	g)	h)	i)
$m_{s0}$	$1,72 \times 10^6$	$1,5 \times 10^6$	$1,8 \times 10^6$
$\alpha_0$	$2 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
$a_0$	172	175	162
$k_0$	100	80	120
$c_0$	0,5	0,3	0,6
$m_s$	$1,71 \times 10^6$	$1,65 \times 10^6$	$1,66 \times 10^6$
$\alpha$	$2,96 \times 10^{-4}$	$2,38 \times 10^{-4}$	$2,15 \times 10^{-4}$
$a$	164,7	137,87	124,41
$k$	75,0	19,8	26,9
$c$	0,40	-0,91	-0,45
<b>Dist tot</b>	3901,4	x	x
<b>MSE</b>	6,63	x	x
<b>Erro% perdas</b>	4,38	x	x
<b>t(s)</b>	5,69	x	x

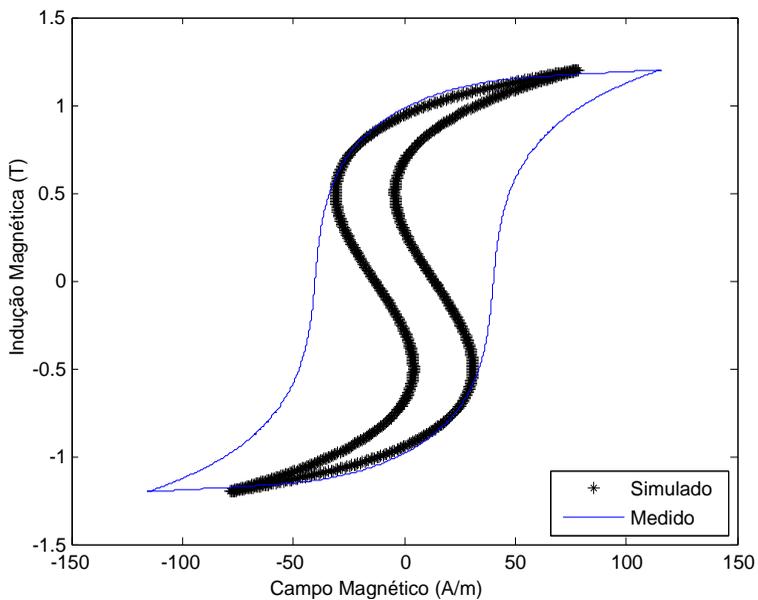
Fonte: Autoria própria (2015)

As Fig. 19-27 apresentam o laço de histerese experimental e o laço de histerese calculado, para cada alternativa de seleção de pontos principais e para cada conjunto inicial de parâmetros utilizado na simulação.

Figura 19 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação a).

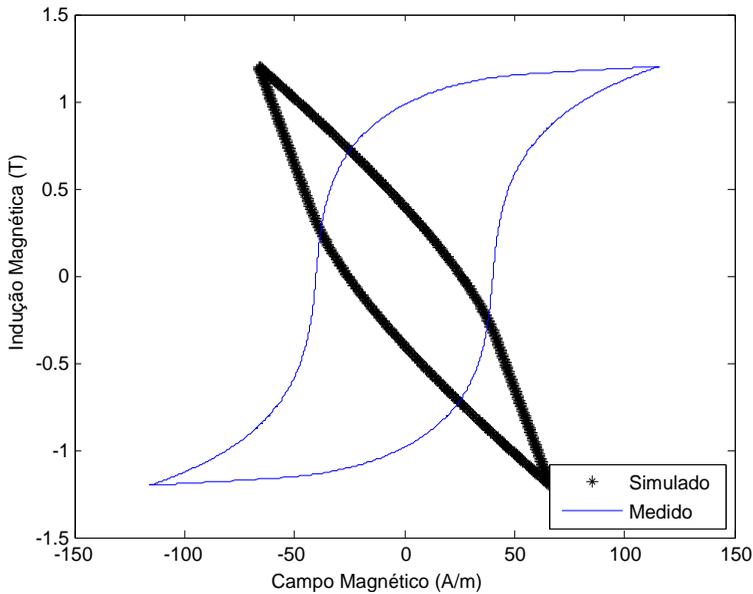


Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 20 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação b).

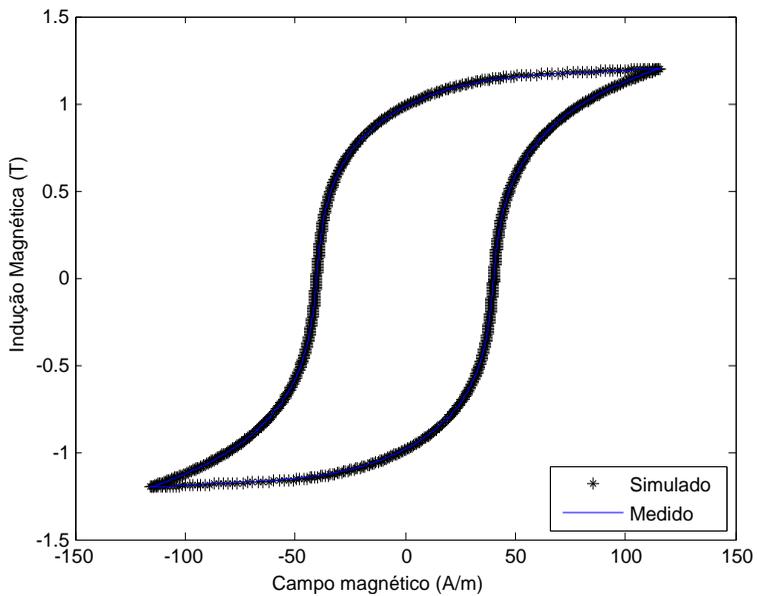
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 21 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação c).

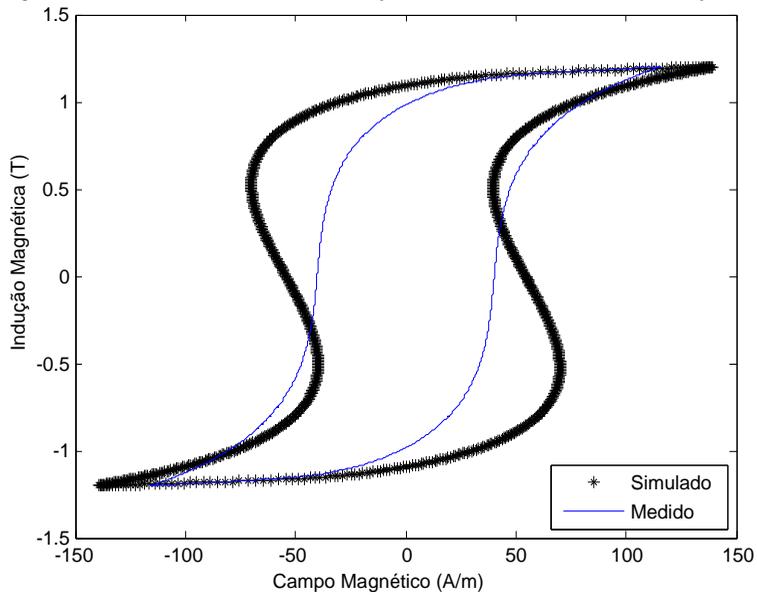


Fonte: Autoria própria (2015).

Para um sistema de equações utilizando cinco pontos principais, localizados na região inicial do ramo, o laço calculado não está próximo do laço experimental, como pode ser observado nas Fig. 19-21, e conseqüentemente, a solução apresentada é inútil na representação do material cujo laço de histerese experimental foi disponibilizado.

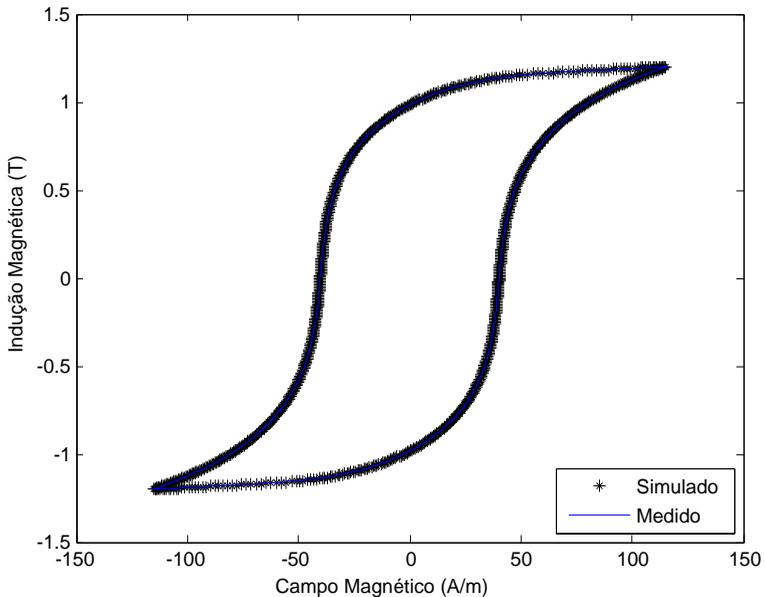
Figura 22 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação d).

Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 23 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação e).

Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 24 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação f).



Fonte: Autoria própria (2015).

Para um sistema de equações composto com cinco pontos principais, localizados na região central do ramo, existe concordância do laço calculado com o laço experimental, como pode ser observado nas Fig. 22 e 24. Para selecionar o conjunto de parâmetros que representa melhor o material correspondente ao laço experimental, na primeira fase, os resultados correspondentes à situação d) são comparados com os resultados correspondentes à situação f); posteriormente, na segunda fase, os resultados correspondentes à situação f) são comparados com os resultados apresentados na Tabela 14 (seção 10.6, primeiro caso, primeira metodologia). Com referência à Tabela 14, os cinco pontos principais foram localizados na curva  $B-H$ , onde ocorrem mudanças de inclinação mais relevantes.

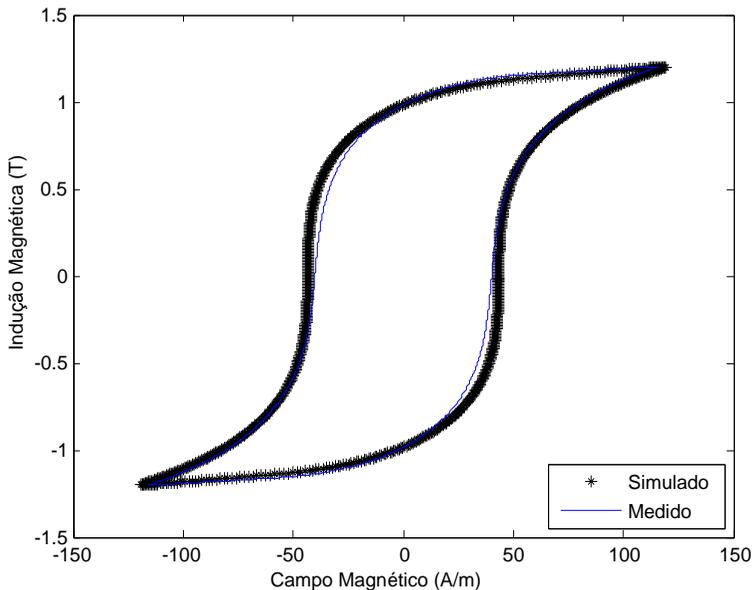
Tabela 3 – Comparações numéricas. Situações d) e f)

	Dist Total	MSE	Erro% Perdas	Razão			Seleção Parcial	Razão			Decisão Final
				Dist. Total	MSE	Erro% Perdas		Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	
Metd 1	174	1,71	0,04					1,26			Metd 1
Situac d)	559	0,4	0,46	2,42		11,50					
Situac f)	230,6	1,36	0,04		3,40		Situac f)	1,33			

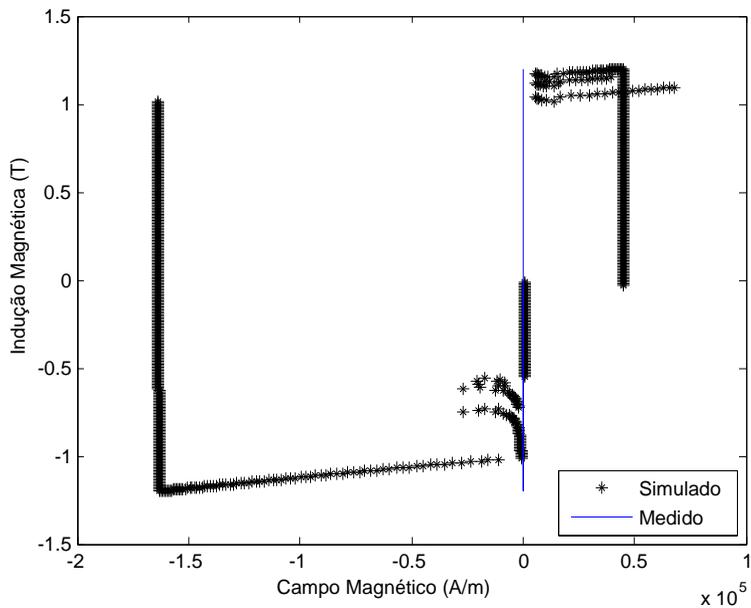
Fonte: Autoria própria (2015)

As comparações numéricas são apresentadas na Tabela 3. É possível conferir que o conjunto de parâmetros, calculado utilizando pontos principais localizados na região central do ramo, não é o melhor candidato a representar o material correspondente ao laço experimental. Na primeira fase, o maior ganho é de 11,50: significa que o erro%, calculado considerando perdas medidas e perdas simuladas, correspondente à situação d) é 11,50 vezes o erro% correspondente à situação f), e conseqüentemente, os melhores resultados são os correspondentes à situação f). Na segunda fase, uma análise similar a anterior é feita, e conseqüentemente, o conjunto de parâmetros obtido com a aplicação da primeira metodologia, utilizando cinco pontos principais localizados na curva  $B-H$ , onde ocorrem mudanças de inclinação mais relevantes, representa melhor o material que foi submetido a teste.

Figura 25 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação g).

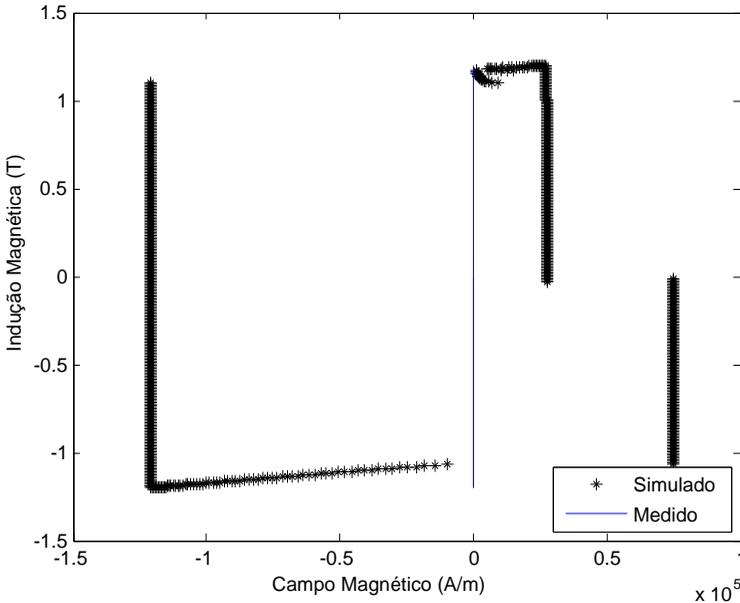


Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 26 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação h).

Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 27 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação i).



Fonte: Autoria própria (2015).

Para um sistema de equações utilizando cinco pontos principais localizados na região terminal do ramo, existe concordância do laço de histerese calculado com o laço de histerese experimental, como pode ser observado na Fig. 25. Nas Fig. 26 e 27 esta concordância não é verificada. Como mencionado na seção 3.2, para cada valor inicial  $x_0$  é construída uma sequência de valores  $x_n$ , e no caso de convergência, limite de  $x_n$  quando  $n$  tende ao infinito é igual a uma das soluções do sistema. Assim, considerando as Fig. 26 e 27, os valores iniciais utilizados não levam a uma situação de convergência.

Para selecionar o conjunto de parâmetros que representa melhor o material que foi submetido a teste, os resultados correspondentes à situação g) serão comparados com os resultados apresentados na Tabela 14 (seção 10.6, primeiro caso, primeira metodologia). Com referência à Tabela 14, os cinco pontos principais foram localizados na curva  $B-H$  onde ocorrem mudanças de inclinação mais relevantes. Sobre a situação g), os valores da distância total, do MSE, e do erro% de perdas são todos superiores aos apresentados na Tabela 14, e conseqüentemente, o conjunto de parâmetros, calculado utilizando pontos principais

localizados na região terminal do ramo, não é o melhor candidato a representar o material que foi submetido a teste.

## 6.2 SEGUNDA METODOLOGIA

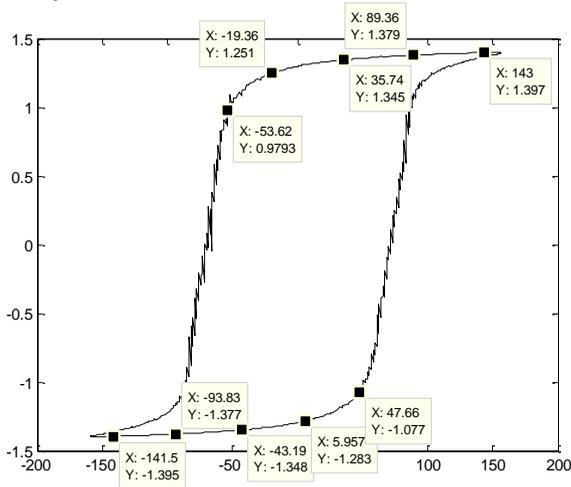
Para a segunda metodologia, para cada ramo da curva  $B-H$ , considera-se um sistema de cinco equações e cinco incógnitas. O sistema é escrito utilizando a equação obtida nesta metodologia e cinco pontos principais. Estes últimos são localizados na curva  $B-H$  com a pretensão de considerar, na medida do possível, o ramo completamente. Os pontos não são necessariamente localizados na curva  $B-H$  onde ocorrem mudanças significativas de inclinação, visto que a equação obtida não contém o termo  $dB/dH$ .

Um sistema que utiliza cinco pontos principais, localizados na curva  $B-H$  de forma diferente da citada no parágrafo anterior, é escrito para analisar a sensibilidade da solução aos pontos escolhidos entre os dados experimentais.

### 6.2.1 Laço de Histerese Contendo Ruídos

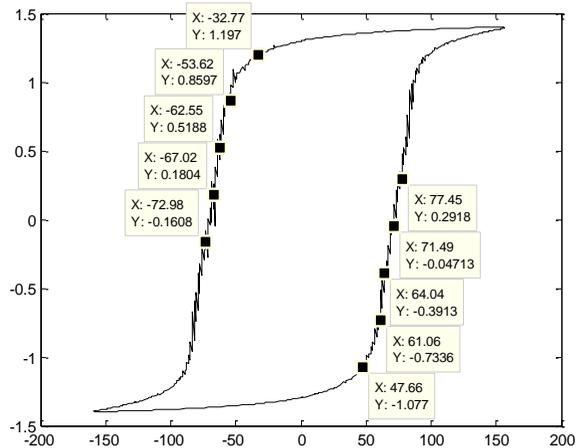
Três alternativas, que representam as diferentes posições dos cinco pontos principais, são analisadas: na primeira alternativa, os cinco pontos principais são selecionados na parte inicial do ramo, como está mostrado na Fig. 28; na segunda alternativa, estes pontos são selecionados na região intermediária do ramo, conforme mostrado na Fig. 29; e para finalizar, na terceira alternativa, os pontos são selecionados na região terminal do ramo, como pode ser observado na Fig. 30.

Figura 28 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 1. Laço com conteúdo ruidoso.



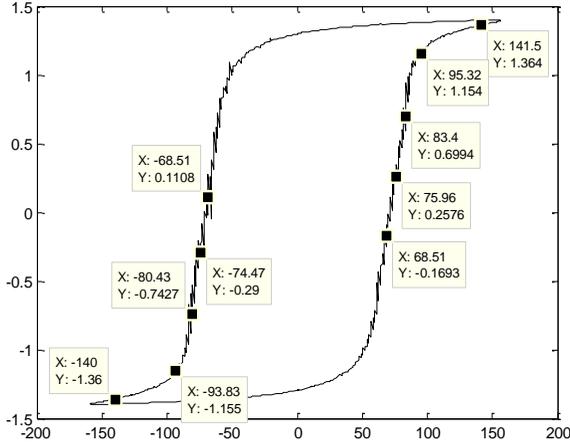
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 29 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 2. Laço com conteúdo ruidoso.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 30 – Curva  $B-H$  experimental. Seleção dos pontos principais: alternativa 3. Laço com conteúdo ruidoso.



Fonte: Autoria própria (2015).

Para cada alternativa de seleção dos pontos principais, estão apresentados na Tabela 4 e na Tabela 5 os conjuntos iniciais de parâmetros utilizados na simulação e o conjunto de parâmetros solução obtido. Para os casos que a curva  $B-H$  calculada se aproxima da curva  $B-H$  experimental são apresentadas: a distância total calculada considerando os pontos pertencentes ao laço experimental e os pontos pertencentes ao laço simulado; o MSE; o erro percentual calculado considerando a perda magnética medida e a perda magnética calculada; e o tempo de simulação. Para os casos em que a curva  $B-H$  calculada está distante da curva  $B-H$  experimental, estes valores são representados por x.

Tabela 4 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. Alternativas 1 e 2: laço com conteúdo ruidoso

	Alternativa 1			Alternativa 2		
	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$m_{s0}$	2,00 $\times 10^6$	1,8 $\times 10^6$	2,1 $\times 10^6$	2,00 $\times 10^6$	1,8 $\times 10^6$	2,1 $\times 10^6$
$\alpha_0$	$4 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$
$a_0$	71	74	61	71	74	61
$k_0$	76	56	96	76	56	96
$c_0$	0,01	0,04	0,02	0,01	0,04	0,02
$m_s$	5,79 $\times 10^6$	1,96 $\times 10^6$	2,08 $\times 10^6$	2,96 $\times 10^6$	4,93 $\times 10^6$	1,16 $\times 10^6$
$a$	1,43 $\times 10^{-4}$	2,15 $\times 10^{-4}$	2,26 $\times 10^{-4}$	1,58 $\times 10^{-4}$	8,80 $\times 10^{-4}$	1,21 $\times 10^{-3}$
$a$	67,33	127,94	143,26	116,31	1509,04	333,36
$k$	5628,1	92,25	103,50	328,11	367,74	542,49
$c$	0,24	0,14	0,22	0,53	0,87	0,87
<b>Dist tot</b>	x	8090,0	7203,6	x	x	x
<b>MSE</b>	x	9,44	9,61	x	x	x
<b>Erro% perdas</b>	x	7,31	3,84	x	x	x
<b>t(s)</b>	x	1,90	2,54	x	x	x

Fonte: Autoria própria (2015)

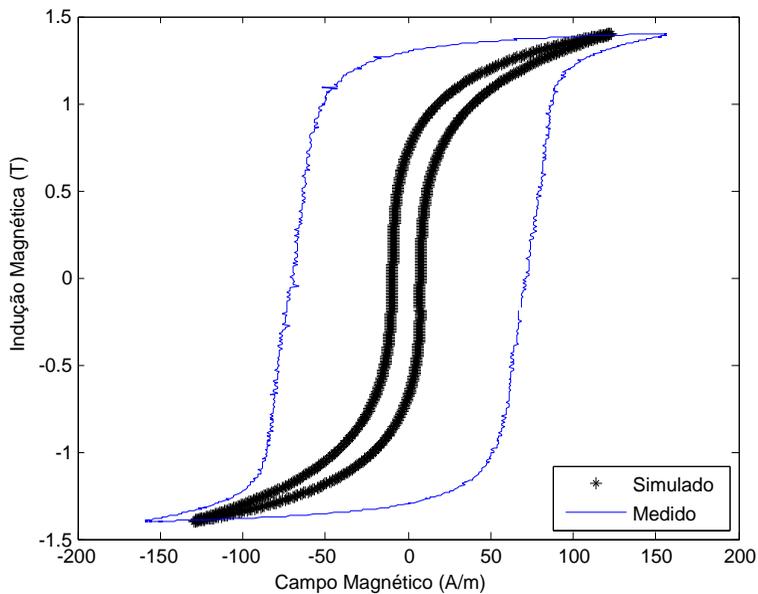
Tabela 5 – Entradas utilizadas e resultados encontrados. . Alternativa 3: laço com conteúdo ruidoso

	Alternativa 3		
	g)	h)	i)
$m_{s0}$	$2,00 \times 10^6$	$1,8 \times 10^6$	$2,1 \times 10^6$
$\alpha_0$	$4 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$
$a_0$	71	74	61
$k_0$	76	56	96
$c_0$	0,01	0,04	0,02
$m_s$	$2,32 \times 10^6$	$9,88 \times 10^6$	$2,58 \times 10^6$
$a$	$1,36 \times 10^{-4}$	$1,18 \times 10^{-4}$	$1,31 \times 10^{-4}$
$a$	78,90	438,61	67,41
$k$	170,67	41,79	163,12
$c$	0,37	-0,76	0,13
<b>Dist tot</b>	x	x	x
<b>MSE</b>	x	x	x
<b>Erro% perdas</b>	x	x	x
<b>t(s)</b>	x	x	x

Fonte: Autoria própria (2015)

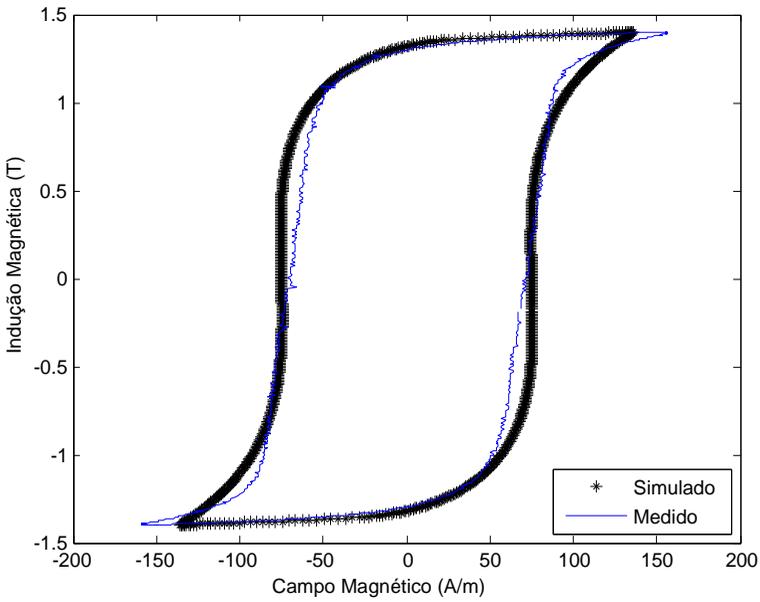
As Fig. 31-39 apresentam o laço de histerese experimental e o laço de histerese calculado, para cada alternativa de seleção de pontos principais e para cada conjunto inicial de parâmetros utilizado na simulação.

Figura 31 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação a).



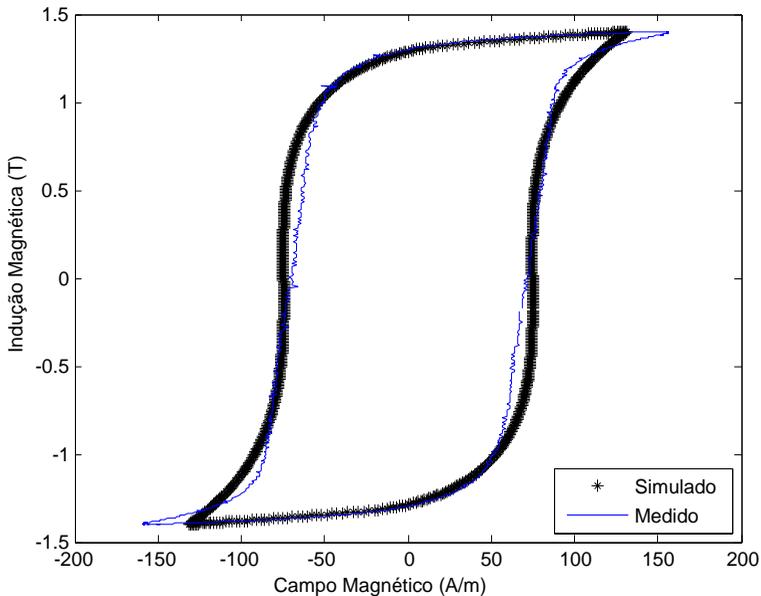
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 32 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação b).



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 33 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 1: situação c).



Fonte: Autoria própria (2015).

Para um sistema de equações utilizando cinco pontos principais, localizados na região inicial do ramo, o laço calculado está próximo do laço experimental, como pode ser observado nas Fig. 32 e 33. Para selecionar o conjunto de parâmetros que representa melhor o material correspondente ao laço experimental: na primeira fase, os resultados correspondentes à situação b) são comparados com os resultados correspondentes à situação c); posteriormente, na segunda fase, os resultados correspondentes à situação c) são comparados com os resultados apresentados na Tabela 14 (seção 10.6, quinto caso, segunda metodologia). Com referência à Tabela 14, os cinco pontos principais foram localizados na curva  $B-H$  com a pretensão de considerar, na medida do possível, o ramo completamente.

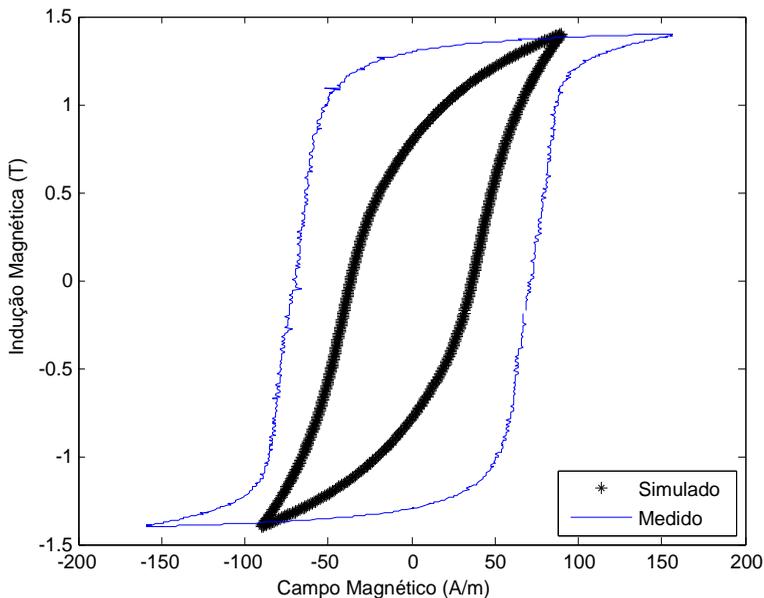
Tabela 6 – Comparações numéricas. Situações b) e c)

	Dist	MSE	Erro% Perdas	Razão			Seleção	Razão			Decisão
	Total			Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	Parcial	Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	
Metd 2	9550	16,4	0,39					1,33	1,70		Metd 2
Situac b)	8090	9,44	7,31	1,12		1,90					
Situac c)	7203,6	9,61	3,84		1,02		Situac c)			9,85	

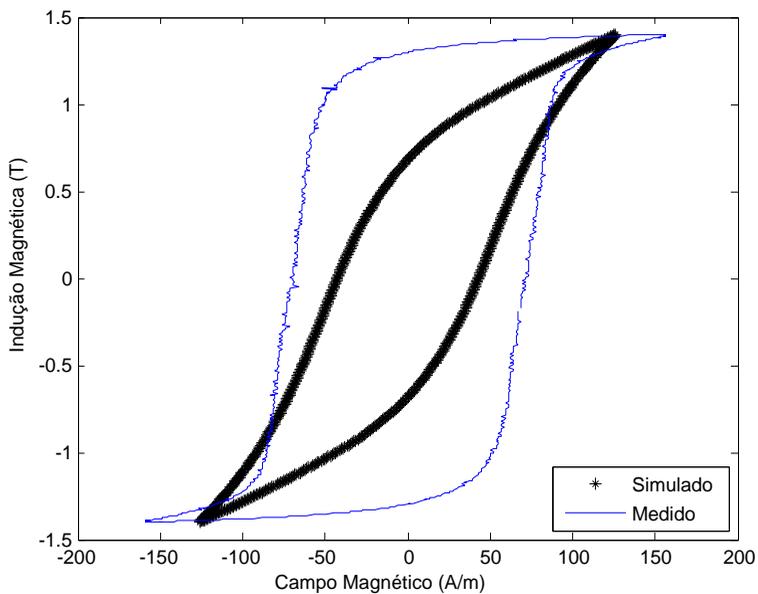
Fonte: Autoria própria (2015)

As comparações numéricas são apresentadas na Tabela 6. É possível conferir que o conjunto de parâmetros, calculado utilizando pontos principais localizados na região inicial do ramo, não é o melhor candidato a representar o material correspondente ao laço experimental. Na primeira fase, o maior ganho é de 1,90: significa que o erro% calculado considerando perdas medidas e perdas simuladas correspondente à situação b) é 1,90 vezes o erro correspondente à situação c), e conseqüentemente, os melhores resultados são os correspondentes à situação c). Na segunda fase, uma análise similar a anterior é feita, e conseqüentemente, o conjunto de parâmetros obtido com a aplicação da segunda metodologia (utilizando cinco pontos principais localizados na curva  $B-H$  com a pretensão de considerar, na medida do possível, o ramo completamente) representa melhor o material que foi submetido a teste.

Figura 34 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação d).

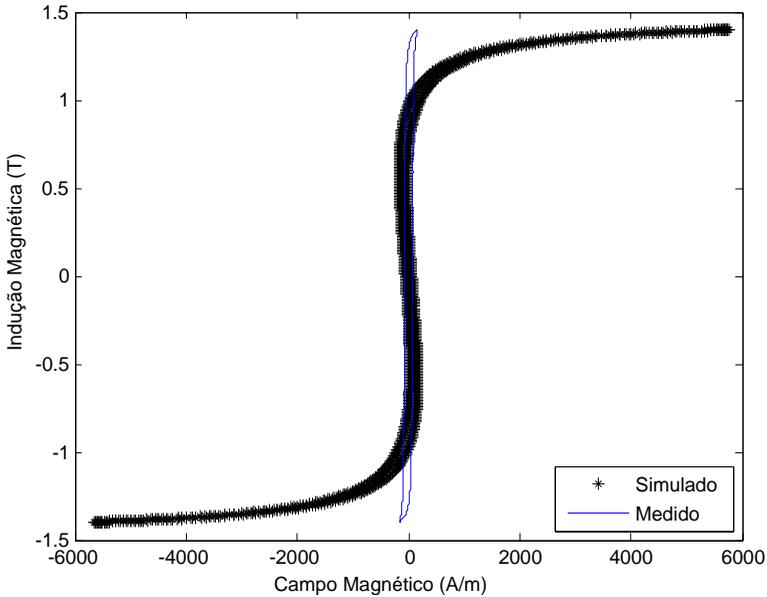


Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 35 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação e).

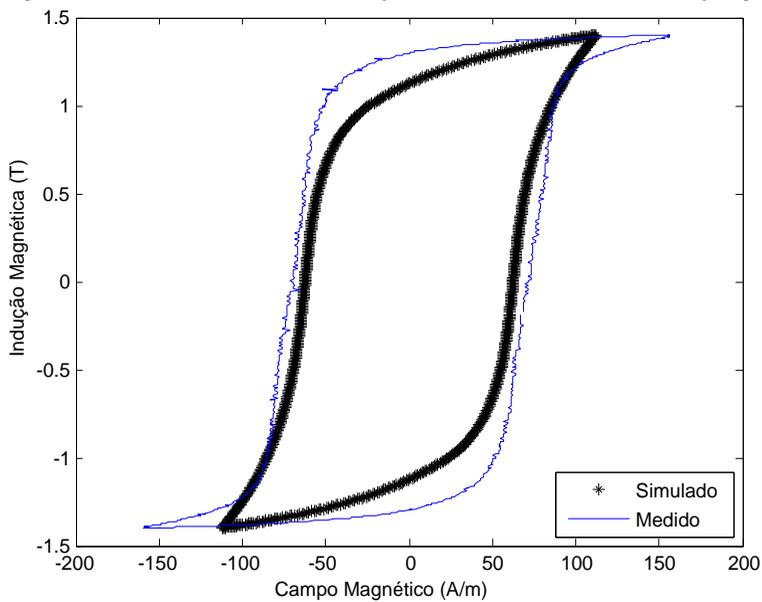
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 36 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 2: situação f).

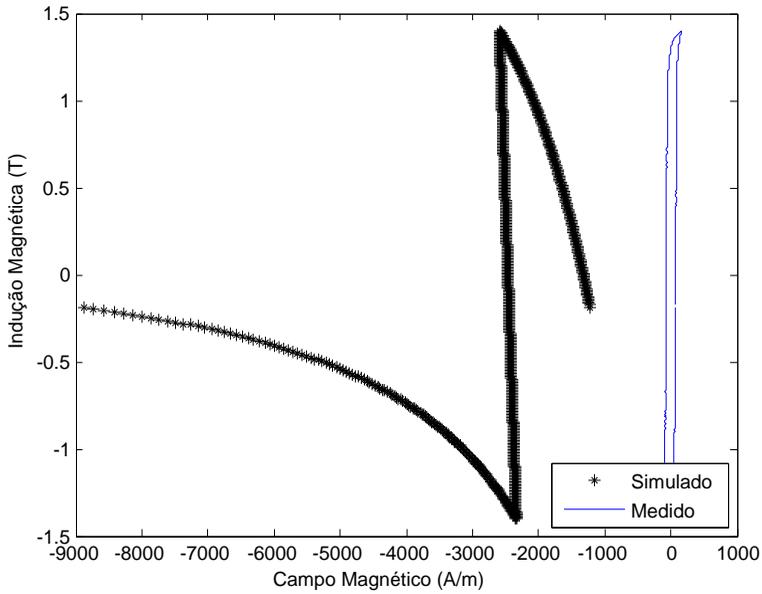


Fonte: Autoria própria (2015).

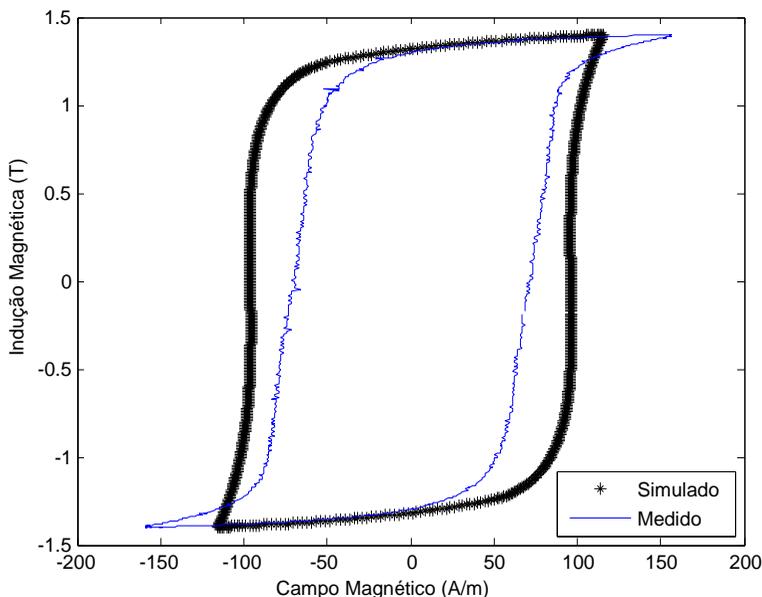
Para um sistema de equações utilizando cinco pontos principais, localizados na região central do ramo, o laço calculado não está próximo do laço experimental, como pode ser observado nas Fig. 34-36, e conseqüentemente, a solução apresentada é inútil na representação do material cujo laço de histerese experimental foi disponibilizado.

Figura 37 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação g).

Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 38 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação h).

Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 39 – Curva  $B-H$  calculada e laço medido. Alternativa 3: situação i).

Fonte: Autoria própria (2015).

Para um sistema de equações utilizando cinco pontos principais, localizados na região terminal do ramo, o laço calculado não está próximo do laço experimental, como pode ser observado nas Fig. 37-39, e conseqüentemente, a solução apresentada é inútil na representação do material cujo laço de histerese experimental foi disponibilizado.

Com base nos resultados apresentados conclui-se que, para um mesmo conjunto inicial de parâmetros, o conjunto de parâmetros solução obtido depende da localização dos cinco pontos principais no ramo. Entretanto, é importante salientar que nenhuma solução obtida utilizando cinco pontos principais localizados de forma diferente da recomendada no ramo, superou a solução obtida utilizando cinco pontos principais localizados no ramo tal como indica a recomendação. Assim, reiteramos a importância de seguir a recomendação dada para cada metodologia de identificação dos parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton. Por outro lado, na seção D.2 é apresentada a dificuldade existente na identificação dos parâmetros utilizando todos os pontos pertencentes ao ramo.



## 7 VARIANTE DO MODELO INVERSO E VARIANTE DA PRIMEIRA METODOLOGIA

### 7.1 VARIANTE DO MODELO INVERSO

O modelo inverso de Jiles-Atherton é apresentado em [28]. A modelagem utilizada no desenvolvimento do modelo inverso envolve três taxas de variação nas variáveis: indução magnética efetiva; indução magnética; e campo magnético efetivo. As alterações apresentadas nesta seção são necessárias à inclusão da taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético  $\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH}$  na modelagem.

No Apêndice C é apresentado o equacionamento da variante do modelo inverso.

### 7.2 VARIANTE DA PRIMEIRA METODOLOGIA

A modelagem matemática da primeira metodologia, utilizada na obtenção dos parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton, foi apresentada no terceiro capítulo deste trabalho. Para incluir a taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético  $\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH}$  nesta formulação é necessário efetuar as alterações apresentadas nesta seção.

As demonstrações matemáticas das derivadas utilizadas neste capítulo estão apresentadas no Apêndice E.

O modelo de Jiles-Atherton é baseado nas seguintes equações:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (7.1)$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (7.2)$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (7.3)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (7.4)$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (7.5)$$

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (7.6)$$

Isolando a magnetização total das demais variáveis em (7.6) decorre imediatamente:  $M = (B/\mu_0) - H$ . Levando esta expressão para (7.5), o campo magnético efetivo pode ser escrito da seguinte forma:  $H_e = H + \alpha((B/\mu_0) - H)$ . Colocando em evidência o campo magnético, segue:

$$H_e = H(1 - \alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \quad (7.7)$$

Para o ramo ascendente tem-se  $\delta = 1$ .

A equação (7.4) estabelece a taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético efetivo  $dM_{irr}/dH_e = (M_{an} - M_{irr})/k$  e permite formalizar a primeira afirmação: a magnetização irreversível é dependente do campo magnético efetivo, isto é,  $M_{irr} = M_{irr}(H_e)$ . Por outro lado, observando a equação (7.7) é possível formalizar a segunda afirmação: o campo magnético efetivo é dependente do campo magnético e da indução magnética, isto é,  $H_e = H_e(H, B(H))$ . Levando em consideração estas duas afirmações, evidentemente, segue que  $M_{irr} = M_{irr}(H_e(H, B(H)))$ , em consequência, se pode derivar em cadeia a magnetização irreversível conforme as equações (7.8) e (7.9).

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dH} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right] \quad (7.8)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right]$$

$$\frac{dM_{irr}}{dB} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dB} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dB} \right]$$

$$\frac{dM_{irr}}{dB} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} 0 + \frac{\partial H_e}{\partial B} \right] \quad (7.9)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dB} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B}$$

A equação (7.8) contém o termo  $\partial H_e / \partial H$ , logo, a derivada do campo magnético efetivo em relação ao campo magnético é determinada com base em (7.7), como segue:

$$\frac{\partial H_e}{\partial H} = 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right). \quad (7.10)$$

Por outro lado, da equação (7.6) tem-se que  $B/\mu_0 = H+M$ , onde a magnetização total pode ser isolada das demais variáveis, tal como segue:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (7.11)$$

Como  $M = M(H,B)$  e como a magnetização total é a soma de suas componentes, reversível e irreversível, então:  $M_{irr} = M_{irr}(H,B)$ ; e  $M_{rev} = M_{rev}(H,B)$ .

Levando (7.2) para (7.1) tem-se:  $M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr})$ , isto é,  $M = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr}$ , ou seja,  $M = M_{irr}(1-c) + cM_{an}$ . Isolando a componente irreversível da magnetização das demais variáveis na equação anterior também é verdade que:

$$M_{irr} = \frac{M - cM_{an}}{1 - c}. \quad (7.12)$$

Combinando (7.11) com (7.12) obtém-se:

$$M_{irr} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) - \frac{c}{1-c} M_{an}. \quad (7.13)$$

A equação (7.13) permite obter a expressão da derivada da magnetização irreversível em relação ao campo magnético, e como resultado tem-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH} \quad (7.14)$$

Por outro lado, levando (7.4) para (7.8) com  $\delta = 1$  tem-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k} \right) \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right], \text{ que juntamente com a equação}$$

$$(7.10) \text{ geram } \frac{dM_{irr}}{dH} = \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k} \right) \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right) + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right].$$

Mas de (7.7) tem-se:  $\frac{\partial H_e}{\partial B} = \frac{\alpha}{\mu_0}$ , que levada para a equação

anterior permite obter o seguinte resultado:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k} \right) \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left( \frac{M_{an} - M_{irr}}{k} \right) \left[ 1 - \alpha + 2 \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{1 - \alpha}{k} + 2 \frac{\alpha}{k \mu_0} \frac{dB}{dH} \right] - M_{irr} \left[ \frac{1 - \alpha}{k} + 2 \frac{\alpha}{k \mu_0} \frac{dB}{dH} \right]$$

que em conjunto com a equação (7.13) permitem escrever:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{1 - \alpha}{k} + 2 \frac{\alpha}{k \mu_0} \frac{dB}{dH} \right] - \left\{ \left[ \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) - \frac{c}{1 - c} M_{an} \right] \times \right.$$

$$\left. \left[ \frac{1 - \alpha}{k} + 2 \frac{\alpha}{k \mu_0} \frac{dB}{dH} \right] \right\}$$

A equação anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \left[ \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right] +$$

$$\left[ \frac{c}{1 - c} M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right]$$

Colocando em evidência a magnetização anisterética também é verdade que:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left\{ \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] + \left[ \frac{c}{1 - c} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right] \right\} -$$

$$\left[ \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} & \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\ & \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \end{aligned} \quad (7.15)$$

A equação (7.14) contém o termo  $dM_{an}/dH$ , e conseqüentemente, esta taxa de variação da magnetização anisterética com o campo magnético pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dH} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right] \\ \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right] \\ \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right] \\ \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right] \end{aligned}$$

Substituindo a equação anterior em (7.14), o seguinte resultado é obtido:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]. \quad (7.16)$$

Ambas equações, (7.15) e (7.16), mostram a expressão da derivada da magnetização irreversível em relação ao campo magnético, e igualando-as tem-se:

$$\begin{aligned} M_{an} & \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\ & \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} = \\ & \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right] \end{aligned} \quad (7.17)$$

No entanto, substituindo (7.7) em (7.3) o resultado é:

$$M_{an} = m_s \left[ \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) - \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right]. \quad (7.18)$$

Ainda mais, a expressão da derivada da magnetização anisterética em relação ao campo magnético efetivo é obtida da equação (7.3), e é dada por:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = m_s \left[ \frac{d}{dH_e} \left( \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) \right) - \frac{d}{dH_e} \left( \frac{a}{H_e} \right) \right]$$

Esta derivada é calculada no Apêndice A, assim, de (A.19) tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \frac{a^2}{H_e^2} \right] \quad (7.19)$$

Para finalizar, substituindo as equações (7.18), (7.19), e (7.7) em (7.17), tem-se:

$$\begin{aligned}
& m_s \left[ \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) - \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right] \times \\
& \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\
& \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} = \\
& \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \\
& \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) + \left[ \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right]^2 \right] \times \\
& \left[ 1 - \alpha + \frac{2\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]
\end{aligned} \tag{7.20}$$

A equação (7.20) está escrita em termos de  $H$ ,  $B$ ,  $dB/dH$  e dos cinco parâmetros procurados:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ . O termo  $dB/dH$  pode ser isolado das demais variáveis em (7.20), e após alguma álgebra, e para facilitar a escrita, o resultado é organizado da seguinte forma:

$$\frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \tag{7.21}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
T_1 &= -m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) \\
T_2 &= -m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{c}{1-c} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) \\
T_3 &= \frac{m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)
\end{aligned}$$

$$T_4 = \frac{m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{c}{1-c} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)$$

$$T_5 = \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)$$

$$T_6 = -\frac{1}{1-c}$$

$$T_7 = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} (1-\alpha)$$

$$T_8 = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) (1-\alpha)$$

$$T_9 = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 (1-\alpha)$$

$$T_{10} = m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{2\alpha}{\mu_0 k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \right)$$

$$T_{11} = \frac{-m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{2\alpha}{\mu_0 k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{2\alpha}{\mu_0 k} \right)$$

$$T_{12} = -\frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{2\alpha}{\mu_0 k}$$

$$T_{13} = -\frac{1}{(1-c)} \frac{1}{\mu_0}$$

$$T_{14} = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \frac{2\alpha}{\mu_0}$$

$$T_{15} = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \frac{2\alpha}{\mu_0}$$

$$T_{16} = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 \frac{2\alpha}{\mu_0}$$

Para que a equação (7.21) apresentada no desenvolvimento da variante da primeira metodologia seja comparada com sua equação correspondente (A.21) apresentada no desenvolvimento da primeira metodologia, é necessário compatibilizar os termos de (7.21) com os termos de (A.21).

A equação (A.21) válida para a primeira metodologia é dada por:

$$\frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \quad (7.22)$$

Após compatibilização dos termos  $T_i$  da variante da primeira metodologia com os termos  $T_i$  da primeira metodologia,  $i=1, \dots, 16$ , a equação (7.21) válida para a variante da primeira metodologia pode ser escrita da seguinte forma:

$$2 \frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + \frac{T_{13}}{2} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \quad (7.23)$$

Para as equações (7.22) e (7.23) os termos  $T_i$  são iguais aos termos apresentados na equação (A.21).

A equação (7.23) válida para a variante da primeira metodologia é comparada com sua equação correspondente (7.22) válida para a primeira metodologia. Disto se conclui que as duas equações não são semelhantes devido ao fator dois.

A equação (7.23) pode ser escrita como:  $2 \frac{dB}{dH} = f(H, B)$

### 7.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Seguem as instruções apresentadas na seção 3.2 deste trabalho. Neste caso o sistema algébrico de cinco equações não lineares é dado por:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = 2 \frac{dB_1}{dH_1} - f(H_1, B_1) \\ \vdots \\ F_5(x) = 2 \frac{dB_5}{dH_5} - f(H_5, B_5) \end{cases} \quad \text{onde } x = [m_s \ a \ a \ k \ c] \text{ são as}$$

cinco incógnitas.

O algoritmo do modelo inverso utilizado está mostrado no Apêndice C.

## 8 LEVANTAMENTO DOS PARÂMETROS DO MATERIAL: TERCEIRA METODOLOGIA PROPOSTA

### 8.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento de uma única equação simplificada, com base nas cinco equações de Jiles-Atherton e em uma relação constitutiva. Esta equação, diferentemente da equação principal da primeira metodologia e da equação principal da segunda metodologia, não envolve derivada nem integral. A equação simplificada é utilizada na determinação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. Estes parâmetros são determinados para representar o material cujo laço de histerese experimental é disponibilizado. As equações do modelo de Jiles-Atherton são as seguintes:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (8.1)$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (8.2)$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (8.3)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (8.4)$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (8.5)$$

$$B = \mu_0(H + M) \quad (8.6)$$

As equações (8.1)-(8.6) permitem obter uma equação não linear, mais simples, em função de  $H$ , e  $B$  onde os cinco parâmetros do modelo,  $m_s$ ;  $\alpha$ ;  $a$ ;  $k$ ; e  $c$ , também aparecem.

Isolando a magnetização total das demais variáveis em (8.5) tem-se:

$$M = \frac{H_e - H}{\alpha} \quad (8.7)$$

A identidade (8.7) é inserida em (8.6) e obtém-se o seguinte resultado:  $B = \mu_0 \left( H + \frac{H_e - H}{\alpha} \right) = \mu_0 H + \frac{\mu_0 H_e}{\alpha} - \frac{\mu_0 H}{\alpha}$

$$B = \mu_0 \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) H + \frac{\mu_0 H_e}{\alpha} \quad (8.8)$$

A equação (8.8) mostra que  $B = B(H_e, H)$ , portanto,  $\frac{dB}{dH_e} = \frac{\partial B}{\partial H_e} \frac{dH_e}{dH_e} + \frac{\partial B}{\partial H} \frac{dH}{dH_e} = \frac{\partial B}{\partial H_e} + \frac{\partial B}{\partial H} 0 = \frac{\partial B}{\partial H_e}$ . A demonstração matemática da igualdade anterior é apresentada no Apêndice E. O termo  $dH / dH_e$  é nulo porque na formulação de Jiles-Atherton é considerado o modelo direto onde o campo magnético é a variável independente. Isto significa que a derivada total da indução magnética em relação ao campo magnético efetivo é igual à derivada parcial da indução magnética em relação ao campo magnético efetivo, e conseqüentemente, derivando parcialmente ou totalmente (8.8) em relação ao campo magnético efetivo, tem-se:

$$\frac{dB}{dH_e} = \frac{\mu_0}{\alpha} \quad (8.9)$$

Por outro lado, a magnetização total pode ser isolada das demais variáveis em (8.6), como segue:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (8.10)$$

Derivando (8.10) em relação ao campo magnético efetivo e utilizando (8.9) obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{dM}{dH_e} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH_e} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad (8.11)$$

Derivando (8.3) em relação ao campo magnético efetivo, tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = m_s \left[ \frac{d}{dH_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{d}{dH_e} \left(\frac{a}{H_e}\right) \right]$$

Esta derivada é calculada no Apêndice A, assim, de (A.19) tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) + \frac{a^2}{H_e^2} \right].$$

Agora se considera o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} & \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} + \frac{2a}{H_e} \right] = \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \times \\ & \left\{ \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) + \frac{2a}{H_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) + \left(\frac{a}{H_e}\right)^2 - \frac{2a^2}{H_e^2} \right\} = \\ & \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \times \\ & \left\{ \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{2a}{H_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) + \frac{2a}{H_e} \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) + \left(\frac{a}{H_e}\right)^2 - \frac{2a^2}{H_e^2} \right\} = \\ & \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \left\{ \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) + \left(\frac{a}{H_e}\right)^2 - \frac{2a^2}{H_e^2} \right\} = \\ & \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \left\{ \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a^2}{H_e^2} \right\} = \frac{m_s}{a} + \frac{m_s}{a} \left\{ \frac{a^2}{H_e^2} - \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) \right\} = \\ & \frac{m_s}{a} \left[ 1 + 1 \left\{ \frac{a^2}{H_e^2} - \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) \right\} \right] = \frac{m_s}{a} \left[ 1 + \frac{a^2}{H_e^2} - \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

Logo, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{an}}{dH_e} &= \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2\left(\frac{H_e}{a}\right) + \frac{a^2}{H_e^2} \right] = \\ & \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} + \frac{2a}{H_e} \right] \end{aligned}$$

Mas de (8.3), obtém-se:

$$\left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] = \frac{M_{an}}{m_s}. \text{ Então segue:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_{an}}{dH_e} &= \frac{m_s}{a} - \frac{m_s}{a} \left[ \frac{M_{an}}{m_s} \right] \left[ \frac{M_{an}}{m_s} + \frac{2a}{H_e} \right] \\ &= \frac{m_s}{a} - \frac{M_{an}}{a} \left[ \frac{M_{an}}{m_s} + \frac{2a}{H_e} \right] \\ \frac{dM_{an}}{dH_e} &= -\frac{M_{an}^2}{am_s} - \frac{2M_{an}}{H_e} + \frac{m_s}{a} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Depois disto, substituindo (8.2) em (8.1) obtém-se o seguinte resultado:

$$M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr}) = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr} = (1-c)M_{irr} + cM_{an} \text{ ou}$$

$$M_{irr} = \frac{M - cM_{an}}{1-c} = \frac{M}{1-c} - \frac{cM_{an}}{1-c} \quad (8.13)$$

Derivando (8.13) em relação ao campo magnético efetivo e utilizando (8.11) e (8.12), o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{irr}}{dH_e} &= \frac{1}{1-c} \frac{dM}{dH_e} - \frac{c}{1-c} \frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{1}{1-c} \frac{1}{\alpha} - \frac{c}{1-c} \left[ -\frac{M_{an}^2}{am_s} - \frac{2M_{an}}{H_e} + \frac{m_s}{a} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(1-c)} + \frac{c}{1-c} \frac{M_{an}^2}{am_s} + \frac{c}{1-c} \frac{2M_{an}}{H_e} - \frac{c}{1-c} \frac{m_s}{a} \end{aligned}$$

O que implica em:

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{c}{am_s(1-c)} M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e} M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} \quad (8.14)$$

Ambas equações, (8.14) e (8.4), mostram a expressão da derivada da magnetização irreversível em relação ao campo magnético efetivo, e igualando-as vem:

$$\frac{c}{am_s(1-c)} M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e} M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta}$$

Utilizando (8.13) no resultado anterior segue:

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \frac{M_{an}}{k\delta} - \frac{1}{k\delta} \left( \frac{M}{1-c} - \frac{cM_{an}}{1-c} \right)$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \frac{M_{an}}{k\delta} - \frac{M}{k\delta(1-c)} + \frac{cM_{an}}{k\delta(1-c)}$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \left[ \frac{1}{k\delta} + \frac{c}{k\delta(1-c)} \right] M_{an} - \frac{M}{k\delta(1-c)}$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \left[ \frac{1-c+c}{k\delta(1-c)} \right] M_{an} - \frac{M}{k\delta(1-c)}$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} = \left[ \frac{1}{k\delta(1-c)} \right] M_{an} - \frac{M}{k\delta(1-c)}$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \frac{2c}{(1-c)H_e}M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} - \left[ \frac{1}{k\delta(1-c)} \right] M_{an} + \frac{M}{k\delta(1-c)} = 0$$

$$\frac{c}{am_s(1-c)}M_{an}^2 + \left[ \frac{2c}{(1-c)H_e} - \frac{1}{k\delta(1-c)} \right] M_{an} + \frac{1}{\alpha(1-c)} - \frac{cm_s}{a(1-c)} + \frac{M}{k\delta(1-c)} = 0$$

$$\frac{1}{1-c} \left\{ \frac{c}{am_s} M_{an}^2 + \left[ \frac{2c}{H_e} - \frac{1}{k\delta} \right] M_{an} + \frac{1}{\alpha} - \frac{cm_s}{a} + \frac{M}{k\delta} \right\} = 0$$

$$\frac{c}{am_s} M_{an}^2 + \left[ \frac{2c}{H_e} - \frac{1}{k\delta} \right] M_{an} + \frac{1}{\alpha} - \frac{cm_s}{a} + \frac{M}{k\delta} = 0 \quad (8.15)$$

Isolando  $H_e$  das demais variáveis em (8.8), segue:

$$H_e = \frac{\alpha}{\mu_0} B + (1-\alpha)H \quad (8.16)$$

Substituindo (8.16) em (8.3) obtém-se o seguinte resultado:

$$M_{an} = m_s \left[ \coth \left( \frac{\alpha}{a\mu_0} B + \frac{(1-\alpha)}{a} H \right) - \frac{a}{\frac{\alpha}{\mu_0} B + (1-\alpha)H} \right]$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth \left( \frac{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H}{a\mu_0} \right) - \frac{a\mu_0}{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H} \right] \quad (8.17)$$

Substituindo (8.17), (8.16), e (8.10) em (8.15), tem-se:

$$\frac{c}{a} m_s \left[ \coth \left( \frac{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H}{a\mu_0} \right) - \frac{a\mu_0}{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H} \right]^2 +$$

$$\left[ \frac{2c}{\frac{\alpha}{\mu_0} B + (1-\alpha)H} - \frac{1}{k\delta} \right] m_s \times$$

$$\left[ \coth \left( \frac{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H}{a\mu_0} \right) - \frac{a\mu_0}{\alpha B + (1-\alpha)\mu_0 H} \right] + \frac{1}{\alpha} - \frac{cm_s}{a} +$$

$$\frac{1}{k\delta} \left[ \frac{B}{\mu_0} - H \right] = 0 \quad (8.18)$$

A equação (8.18) relaciona matematicamente  $H$ ,  $B$ , aos cinco parâmetros procurados:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ . Esta equação apresenta as seguintes características: modela ambos os ramos, ascendente e descendente, do laço de histerese; evita derivadas, integrais e a seleção do valor inicial do campo magnético e da indução magnética, e

consequentemente, é mais simples se for comparada com a equação principal utilizada na primeira metodologia, e com a equação principal utilizada na segunda metodologia.

De forma compacta (8.18) pode ser representada na seguinte forma:

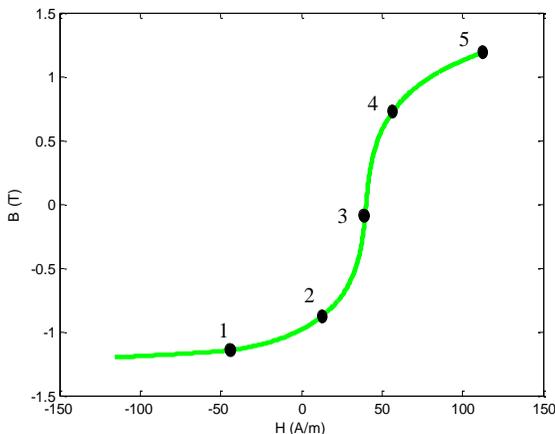
$$f(H, B) = 0. \quad (8.19)$$

## 8.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Esta seção é apresentada com o propósito de descrever como a equação (8.18) é utilizada na identificação dos parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton.

Como a equação (8.18) depende do valor de  $\delta$ , esta é adequada tanto ao ramo descendente como ao ramo ascendente da curva  $B-H$ . Assim, existem duas equações não lineares (uma para delta negativo e outra para delta positivo) em que aparecem os cinco parâmetros procurados. Utilizando dados experimentais são construídos dois sistemas não lineares: cada sistema apresenta cinco equações e cinco incógnitas. Para escrever o sistema são necessários, para cada delta, apenas cinco pontos experimentais, escolhidos entre os pontos pertencentes ao laço experimental, como mostrado na Fig. 40.

Figura 40 – Ramo ascendente: pontos principais recomendados. Terceira metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

De (8.19) e considerando (8.18), o sistema algébrico de cinco equações não lineares é dado por:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = f(H_1, B_1) \\ \vdots \\ F_5(x) = f(H_5, B_5) \end{cases} \quad \text{onde } x = [m_s, \alpha, a, k, c] \text{ são as cinco}$$

incógnitas.

O sistema apresenta infinitas soluções e para resolvê-lo foram seguidas as etapas principais abaixo mencionadas:

- Atribuir valor inicial ao conjunto de parâmetros:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ ;
- Para o ramo descendente da curva  $B-H$ , selecionar cinco pontos experimentais  $P(H, B)$  estrategicamente posicionados neste ramo. Levar os cinco pontos experimentais para (8.18). Isso origina o sistema  $F$  de cinco equações com cinco incógnitas. As cinco incógnitas são os parâmetros do modelo. Substituir no sistema o valor inicial do conjunto de parâmetros, e resolver o sistema de equações;
- Para o ramo ascendente da curva  $B-H$ : selecionar cinco pontos experimentais  $P(H, B)$  estrategicamente posicionados neste ramo. Levar os cinco pontos experimentais para (8.18). Isso origina o sistema  $F$  de cinco equações com cinco incógnitas. As cinco incógnitas são os parâmetros do modelo. Resolver o sistema de equações utilizando a solução do passo anterior (ramo descendente) como dado inicial do conjunto de parâmetros;
- Variar o valor inicial do conjunto de parâmetros;
- Comparar curvas experimental e simulada, utilizando o modelo inverso em conformidade com [28].

### 8.3 DIAGRAMA DE BLOCOS

O algoritmo desenvolvido para identificar os parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton é constituído em sete etapas, como é possível observar nas Fig. 41.a e 41.b.

A primeira etapa, intitulada “curva experimental”, contém os dados experimentais da indução magnética e do campo magnético. Um único período em regime permanente é necessário à identificação dos parâmetros do modelo. Esta parte permite: observar o gráfico da curva  $B-H$  experimental; identificar a posição do início e do término do ramo descendente; ter conhecimento da quantidade de pontos experimentais existentes.

A segunda etapa, denominada “separa curvas”, separa os pontos pertencentes ao ramo ascendente dos pontos pertencentes ao ramo descendente. Além disso, organiza estes pontos em ordem crescente para o ramo ascendente, e em ordem decrescente para o ramo descendente.

A terceira etapa, denominada “escolha pontos principais”, permite entrada interativa de dados em figura. O usuário seleciona cinco pontos pertencentes ao ramo descendente e cinco pontos pertencentes ao ramo ascendente (pontos estrategicamente posicionados em cada ramo). Pontos auxiliares não são necessários, já que a terceira metodologia evita estimar a derivada da indução magnética em relação ao campo magnético.

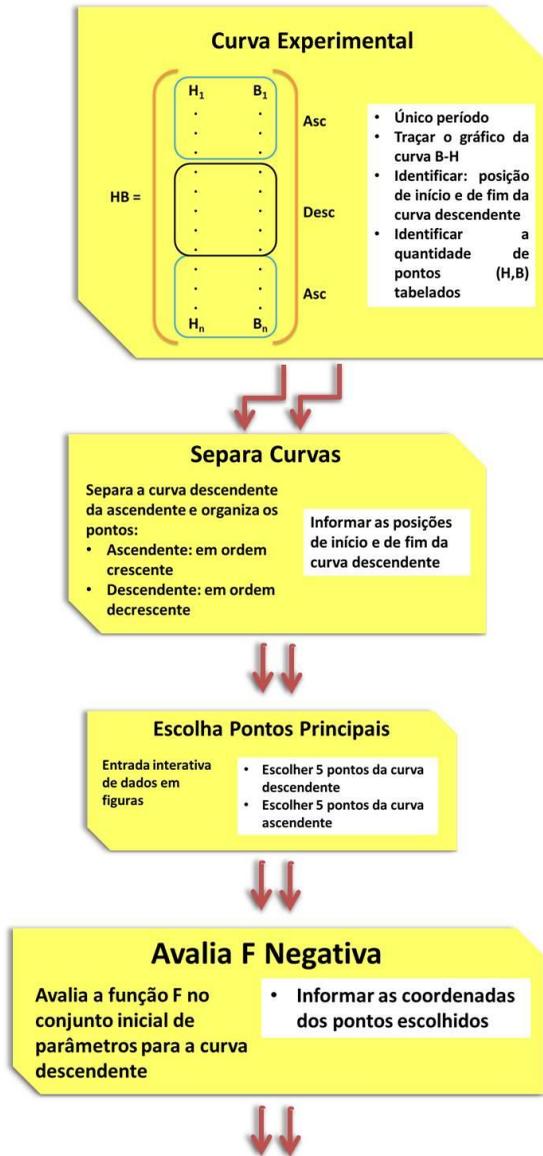
A quarta etapa, com o título de “avalia  $f$  negativa”, é dedicada ao ramo descendente. Quanto a isso, o sistema  $F = f(H, B)$  é avaliado no conjunto inicial de parâmetros dado.

Na quinta etapa, chamada de “ $f$  negativa”, o sistema relacionado com o ramo descendente é resolvido.

Na sexta etapa, com a denominação de “ $f$  positiva”, o sistema relacionado com o ramo ascendente é resolvido.

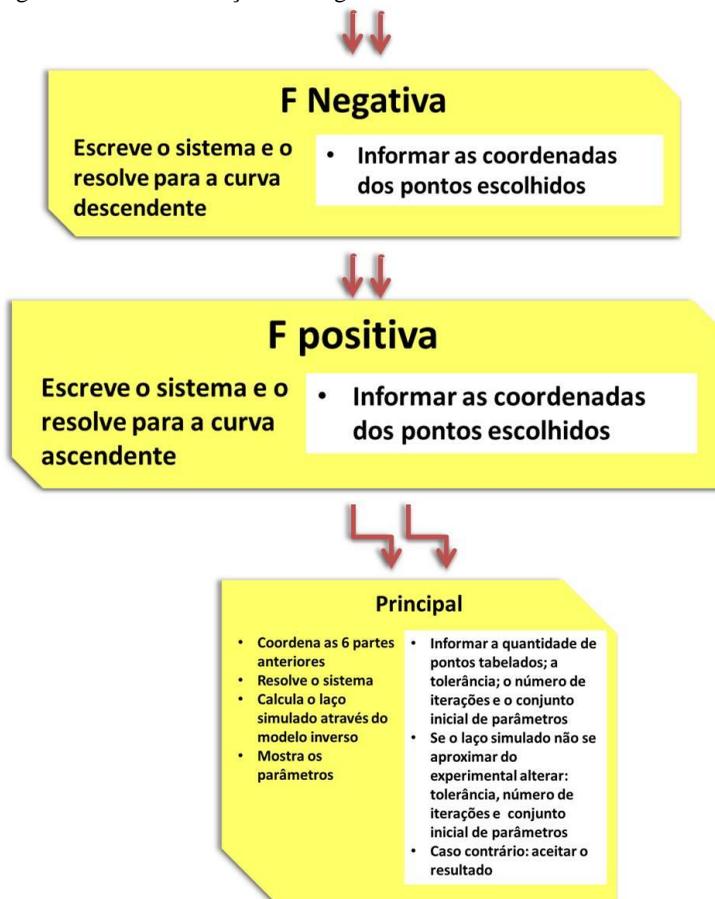
Na sétima e última etapa, nomeada “principal”, são desenvolvidas as seguintes atividades: coordenação das seis partes anteriores; cálculo da curva  $B-H$  através do modelo inverso; e exibição na tela dos parâmetros encontrados, do tempo de simulação, das distâncias (máxima, mínima e acumulada) calculadas considerando pontos experimentais e pontos simulados, do erro médio quadrático  $MSE$ , e do erro considerando a perda medida e a perda calculada (áreas dos laços  $B-H$ ).

Figura 41.a – Diagrama de blocos. Terceira metodologia.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 41.b – Continuação do diagrama de blocos.



Fonte: Autoria própria (2015).



## 9 INCLUSÃO DE UM SEXTO PARÂMETRO NO MODELO DE JILES-ATHERTON

### 9.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton apresenta cinco parâmetros utilizados na representação de dado material. Neste capítulo propõe-se a inclusão de um sexto parâmetro ao modelo. No sétimo capítulo foram apresentadas a variante do modelo inverso, e a variante da primeira metodologia para incluir a taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético  $\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH}$  na formulação. A equação principal do modelo inverso e a equação principal da primeira metodologia foram atualizadas respetivamente como segue:

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\left( (1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{\mu_0 k \delta} \right] \right) + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{\left[ 1 + \left( (1-2\alpha)(1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{k \delta} \right] \right) \right] + c(1-2\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e}} \quad (9.1)$$

$$2 \frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + \frac{T_{13}}{2} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \quad (9.2)$$

Para a equação (9.2), os termos  $T_i$  são tais como apresentados na equação (A.21).

Quando as equações (9.1) e (9.2), da variante do modelo inverso e da variante da primeira metodologia, são comparadas com as equações principais correspondentes (2.20) e (A.21), do modelo inverso e da primeira metodologia respetivamente, observa-se que a única diferença entre estas é a constante de valor dois.

Dito isto propõe-se utilizar um sexto parâmetro ( $s$ ), substituindo a constante de valor dois. Assim, para o modelo inverso e para a primeira metodologia, tem-se:

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\left( (1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{\mu_0 k \delta} \right] \right) + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{\left[ 1 + \left( (1-s\alpha)(1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{k \delta} \right] \right) \right] + c(1-s\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e}} \quad (9.3)$$

$$s \frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + \frac{T_{13}}{s} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \quad (9.4)$$

Para a equação (9.4) os termos  $T_i$  são iguais aos termos apresentados na equação (A.21).

Após a inclusão de  $s$  na modelagem, os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, que representam o material cujo laço de histerese experimental é conhecido, são os seguintes:  $m_s$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $c$ , e  $s$ .

## 9.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, a finalidade é expor a maneira como as equações propostas são utilizadas na identificação dos seis parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton.

O algoritmo do modelo inverso está apresentado na seção 2.3.1, onde a equação (2.21) é substituída por (9.3) para considerar o sexto parâmetro do modelo.

### 9.2.1 Ramo Ascendente

Para a primeira metodologia, considerando o sexto parâmetro e  $\delta = 1$ , a equação (9.4) é escrita de forma compacta como segue:

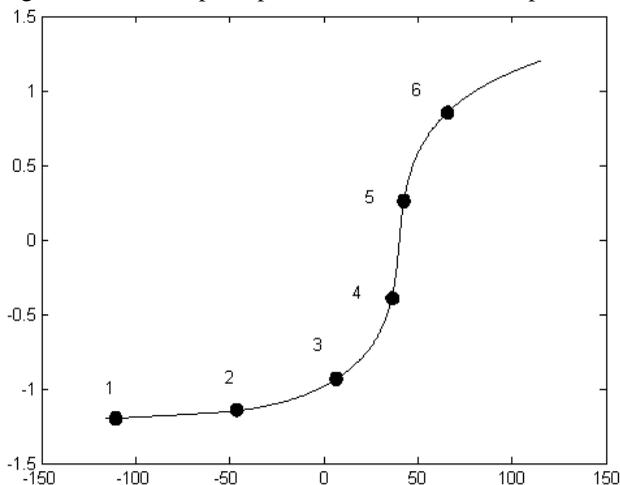
$$s \frac{dB}{dH} = f(H, B) \quad (9.5)$$

Com maior relevância e importância, para calcular os seis parâmetros do modelo por meio de (9.5), a seguinte metodologia é proposta:

- Primeiro, deve ser obtido um laço de histerese experimental, do material a ser representado;

- Logo após, devem ser selecionados seis pontos principais  $P(H,B)$  estrategicamente posicionados no ramo experimental ascendente, isto é, localizados onde ocorrer uma mudança de tendência, como mostrado na Fig. 42;

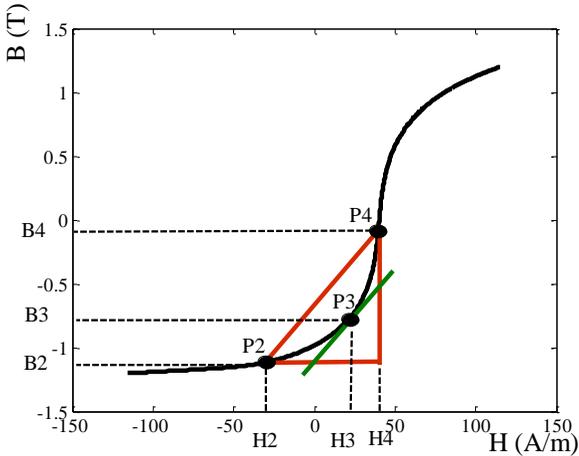
Figura 42 – Pontos principais recomendados. Sexto parâmetro.



Fonte: Autoria própria (2011).

- Em seguida, a derivada da indução magnética em relação ao campo magnético avaliada no ponto (ou seja,  $\frac{dB}{dH}(P)$  como mostrado na Fig. 43) deve ser determinada a cada ponto principal  $P(H,B)$ . Na verdade, com a finalidade de calcular esta derivada, para cada ponto principal são necessários dois pontos auxiliares, situados na vizinhança do ponto principal. Observar na Fig. 43 que se  $P_2$  e  $P_4$ , situados muito próximos do ponto principal  $P_3$ , são selecionados para pontos auxiliares, então, a hipotenusa se aproxima da reta tangente. Para  $P_3(H_3, B_3)$  tem-se:
 
$$\frac{dB}{dH}(P_3) = \frac{B_4 - B_2}{H_4 - H_2} ;$$

Figura 43 – Cálculo da derivada. Sexto parâmetro.



Fonte: Autoria própria (2015).

- Por fim, os seis pontos experimentais principais e suas respectivas derivadas são levados para (9.5). Isso origina um sistema de seis equações e seis incógnitas. Note que as seis incógnitas são os parâmetros do modelo:  $m_s$ ,  $a$ ,  $k$ ,  $c$ , e  $s$ .

## 9.2.2 Ramo Descendente

Suponha agora que  $\delta = -1$ , ou seja, o ramo descendente da curva  $B-H$ . Os passos anteriores, válidos para a modelagem matemática do ramo ascendente, são igualmente seguidos para modelar o ramo descendente. Neste último caso, do mesmo modo se aplica a equação (9.4), sendo que o termo  $k$  é agora substituído pelo termo  $-k$ , devido ao produto  $k\delta$ . A resolução da nova equação segue também a metodologia anterior, gerada para o ramo ascendente. Agora, simplesmente, os pontos chaves experimentais são alterados, sendo escolhidos entre os pontos pertencentes ao ramo experimental descendente.

## 9.3 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Existem duas EDO's não lineares (uma para delta negativo e outra para delta positivo) em que aparecem os seis parâmetros procurados. Partindo disso são construídos dois sistemas não lineares: o

primeiro para o ramo descendente e o segundo para o ramo ascendente. Cada sistema possui seis equações e seis incógnitas. Para cada delta é necessário utilizar um total de 18 dados experimentais (estrategicamente posicionados no laço experimental conforme descritos nas seções 9.2.1 e 9.2.2 deste trabalho) para escrever o sistema. São necessários 18 pontos (6 principais mais 2 pontos auxiliares para cada ponto principal), uma vez que os dados experimentais de  $dB/dH$  não estão disponíveis.

Dado um sistema algébrico de seis equações não lineares

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = s(dB_1 / dH_1) - f(H_1, B_1) \\ \vdots \\ F_6(x) = s(dB_6 / dH_6) - f(H_6, B_6) \end{cases} \quad \text{onde } x = [m_s \ \alpha \ a \ k \ c \ s]$$

são as seis incógnitas. Cada componente do sistema  $F$  é obtida igualando (9.5) à zero e considerando (9.4).

O sistema apresenta infinitas soluções, e para resolvê-lo utilizou-se o seguinte método:

- Um valor inicial é atribuído ao conjunto de seis parâmetros  $x_0 = [m_{s0} \ \alpha_0 \ a_0 \ k_0 \ c_0 \ s_0]$ . Para cada valor inicial  $x_0$  é construída uma sequência de valores  $x_n$ , e no caso de convergência, limite de  $x_n$  quando  $n$  tende ao infinito é igual a uma das soluções do sistema;
- O sistema  $F$  para delta negativo é resolvido, obtendo-se assim uma candidata à solução. Avalia-se o sistema  $F$  na candidata à solução;
- Em seguida, o erro é avaliado na norma infinito, isto é, observar se a componente de maior valor absoluto do sistema  $F$  apresenta valor inferior a um erro dado (de valor positivo). Para  $v$ , vetor cujas componentes são os valores absolutos de  $F$ , a norma infinito [34] é dada por:  $\|v\|_\infty = \max |v_i|$  para  $1 \leq i \leq 6$ ;
- Posteriormente, caso não seja uma solução plausível por desobedecer o critério do erro, esta candidata à solução é utilizada como dado inicial para resolver o sistema  $F$  para delta positivo;
- Após isso, o novo sistema  $F$  é resolvido obtendo-se assim uma nova candidata à solução. Avalia-se o sistema  $F$  na nova candidata à solução;
- No próximo passo, o erro é avaliado na norma infinito;
- Antes de terminar, este procedimento é repetido, quantas vezes forem necessárias, até atingir o erro

desejado ou o número máximo de iterações estabelecido;

- Para terminar, os parâmetros encontrados são inseridos no algoritmo do modelo inverso, apresentado na seção 2.3.1, onde (2.21) é substituída por (9.3), para comparar o laço medido com o laço calculado na simulação.

#### 9.4 DIAGRAMA DE BLOCOS

O algoritmo escrito, tendo como base a primeira metodologia desenvolvida para identificar os seis parâmetros do modelo de histerese de Jiles-Atherton, é constituído em sete etapas, como é possível observar nas Fig. 44.a e 44.b.

A primeira etapa, nomeada “curva experimental”, contém os dados experimentais da indução magnética e do campo magnético. Um único período de regime permanente é necessário. Esta parte permite observar o gráfico da curva  $B-H$  experimental; identificar a posição do início e do término do ramo descendente; bem como a quantidade de pontos experimentais existentes.

A segunda etapa, designada “separa curvas”, separa os pontos do ramo ascendente dos pontos do ramo descendente. Além disso, organiza estes pontos em ordem crescente, para o ramo ascendente, e em ordem decrescente, para o ramo descendente.

A terceira etapa, chamada “escolha pontos principais”, permite uma entrada interativa de dados em figura. O usuário seleciona seis pontos principais pertencentes ao ramo descendente, e seis pontos principais pertencentes ao ramo ascendente. O algoritmo seleciona automaticamente pontos auxiliares: que são necessários ao cálculo da derivada da indução magnética em relação ao campo magnético.

A quarta etapa, intitulada “avalia  $f$  negativa”, avalia o sistema  $F$  no conjunto inicial de parâmetros, considerando o ramo descendente.

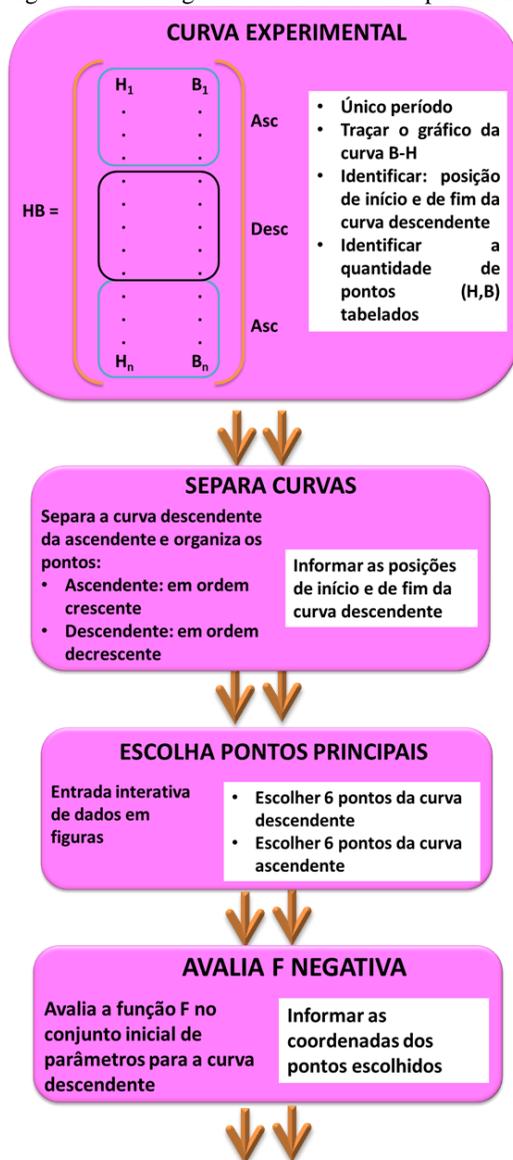
A quinta etapa, representada por “ $f$  negativa”, resolve o sistema construído para o ramo descendente.

A sexta etapa, chamada “ $f$  positiva”, resolve o sistema construído para o ramo ascendente.

A sétima e também última etapa, intitulada “principal”, tem a função de coordenar as seis partes anteriores; calcular a curva  $B-H$  utilizando o modelo inverso; e exibir na tela: os parâmetros encontrados, o tempo de simulação, as distâncias (máxima, mínima e acumulada) calculadas considerando os pontos experimentais e os pontos simulados,

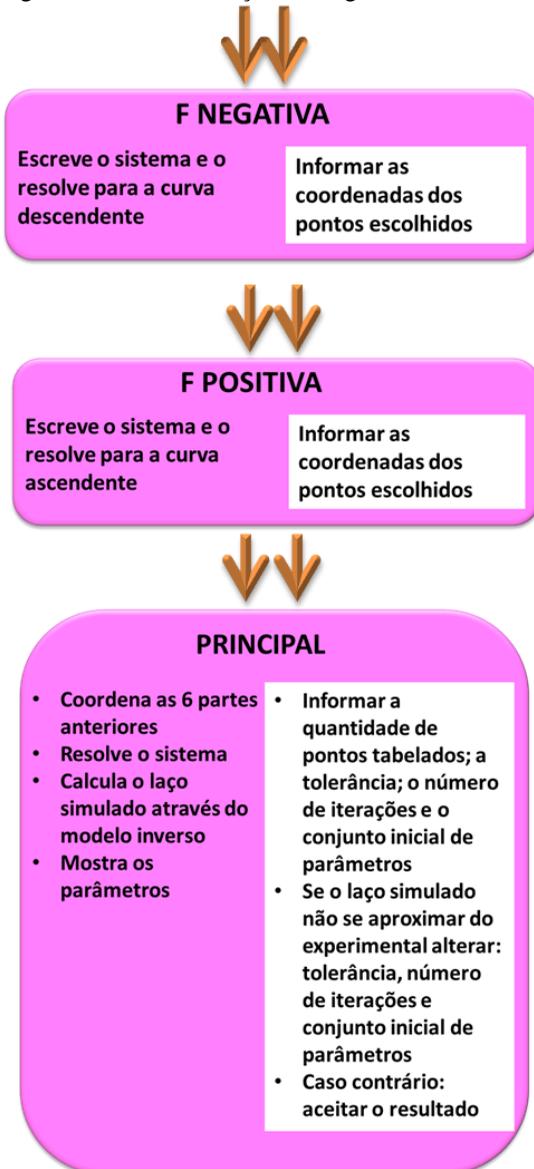
o erro médio quadrático  $MSE$ , e o erro calculado considerando a perda medida e a perda calculada.

Figura 44.a – Diagrama de blocos. Sexto parâmetro.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 44. b – Continuação do diagrama de blocos.



Fonte: Autoria própria (2015).

## 10 RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO

Para validar as metodologias propostas neste trabalho e para evidenciar os resultados desta pesquisa [35]-[37], [41]-[47], as metodologias desenvolvidas foram utilizadas na caracterização de cinco materiais. Cada caso estudado, e mostrado nas Tabelas 7-11, representa um material diferente. Os cinco materiais apresentam laços de histerese completamente diferentes entre si. Considerando-se os extremos, no primeiro caso, o material apresenta uma curva  $B-H$  suave sigmoide; e no quinto e último caso, o material apresenta um laço contendo ruído. Para cada caso e para cada metodologia foram utilizados conjuntos iniciais de parâmetros diferentes. Quando não indicado, foi utilizado o algoritmo TRD para resolver o sistema de equações.

As amostras, do primeiro ao quinto caso, são feitas de aço ao silício de grão orientado. Foram cortadas no sentido da laminação e foram ensaiadas no quadro de Epstein. A indução magnética foi mantida senoidal numa frequência de 1Hz.

As referências [45]-[47] mostram a aplicação das metodologias propostas na caracterização de materiais de aço ao silício de grão não orientado e grão orientado; cortados na direção da laminação, transversal e 45 graus; e ensaiadas no quadro de Epstein. A indução magnética foi mantida senoidal numa frequência de 1Hz.

### 10.1 PRIMEIRO CASO

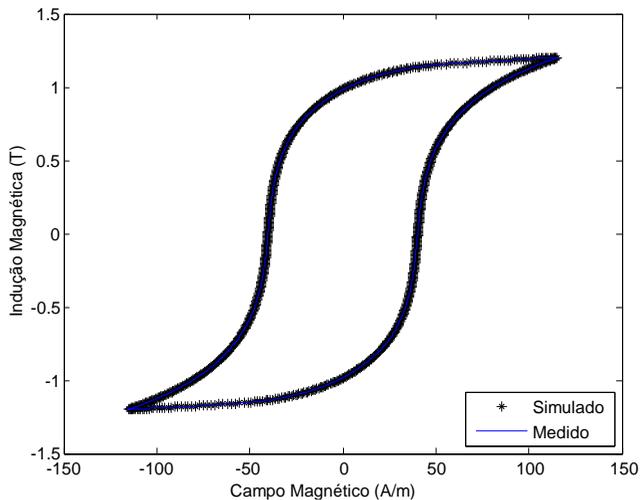
O material, cujo laço de histerese experimental pode ser observado nas Fig. 45-49, apresenta os resultados de caracterização mostrados na Tabela 7 para cada metodologia desenvolvida.

Tabela 7 – Resultado de caracterização: primeiro caso

1º caso	$m_s$ (A/m)	$a$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	$t(s)$
<b>Metd 1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						22
	$1,72 \times 10^6$	$2 \times 10^{-4}$	172	100	0,5	-	
	Parâmetros Calculados						
	$1,57 \times 10^6$	$1,96 \times 10^{-4}$	102,2	57,83	0,27	-	
<b>Metd 2</b>	Conjunto Inicial Utilizado						1,2
	$1,72 \times 10^6$	$1,7 \times 10^{-4}$	129,8	195	0,47	-	
	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Asc	-19; -1	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Desc	19; 1			
	Parâmetros Calculados						
	$1,67 \times 10^6$	$2,38 \times 10^{-4}$	129,5	89,13	0,51	-	
<b>VarMetd1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						9,6
	$1,7 \times 10^6$	$2 \times 10^{-4}$	171,9	98,7	0,09	-	
	Parâmetros Calculados						
	$2,56 \times 10^6$	$6,73 \times 10^{-4}$	577,6	152,5	0,24	-	
<b>Metd 3</b>	Conjunto Inicial Utilizado						1,1
	3.000.009	$0,5 \times 10^{-4}$	1399	68	0,28	-	
	Parâmetros Calculados						
	$2,37 \times 10^7$	$8,87 \times 10^{-2}$	701691,9	4399,3	1,00	-	
<b>6º Parâm</b>	Conjunto Inicial Utilizado						8,1
	1.735.091	$1,9 \times 10^{-4}$	171	101,4	0,5	1,1	
	Parâmetros Calculados						
	$1,55 \times 10^6$	$2,38 \times 10^{-4}$	119,44	82,86	0,51	0,97	

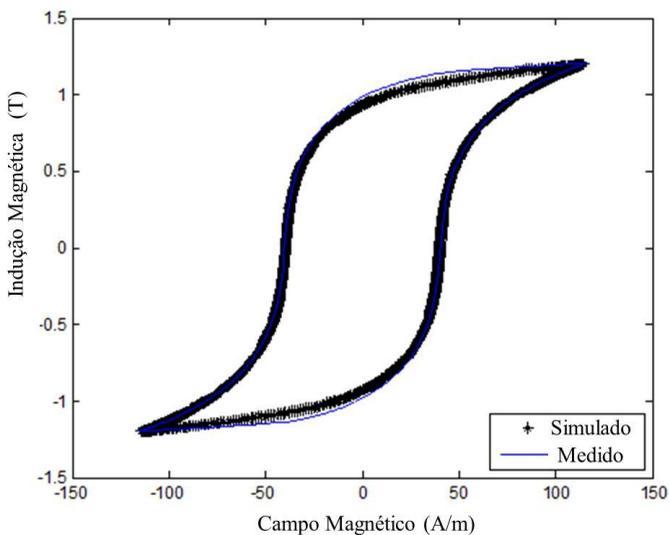
Fonte: Autoria própria (2015)

Figura 45 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: primeiro caso.



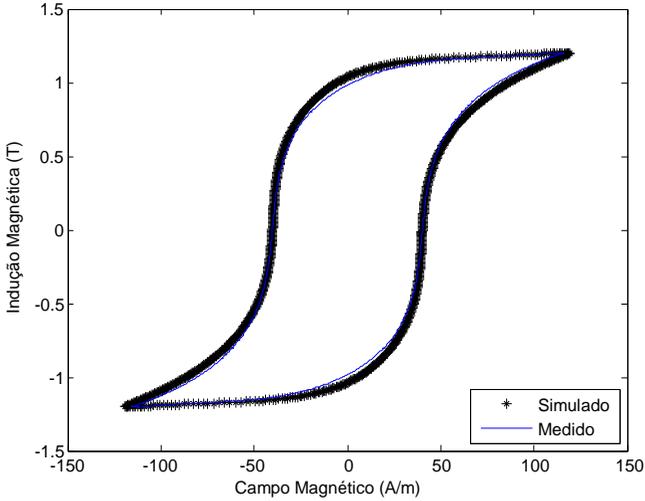
Fonte: Autoria própria (2011).

Figura 46 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: primeiro caso.



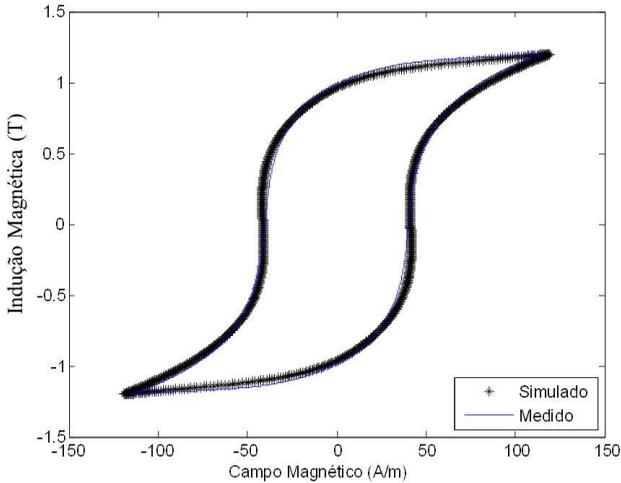
Fonte: Autoria própria (2014).

Figura 47 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: primeiro caso.



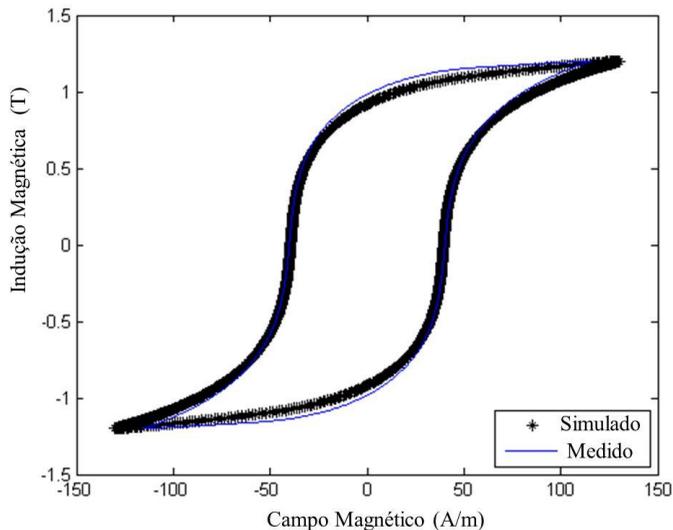
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 48 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Primeiro caso: TRD



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 49 – Curva  $B-H$  calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Primeiro caso: TRD



Fonte: Autoria própria (2015).

Como pode ser observado nas Fig. 45-49, o laço simulado apresenta boa concordância com o laço experimental (validando todas as metodologias desenvolvidas). Os resultados apresentados na Tabela 7 sugerem que existem diferentes conjuntos de parâmetros que podem representar o material. A primeira metodologia apresentou o maior tempo de simulação, enquanto a terceira o menor. O tempo de simulação é afetado pelas instruções executadas e também pelo conjunto inicial de parâmetros utilizado: quando o conjunto estiver próximo de um minimizador do sistema, o tempo de simulação diminui.

## 10.2 SEGUNDO CASO

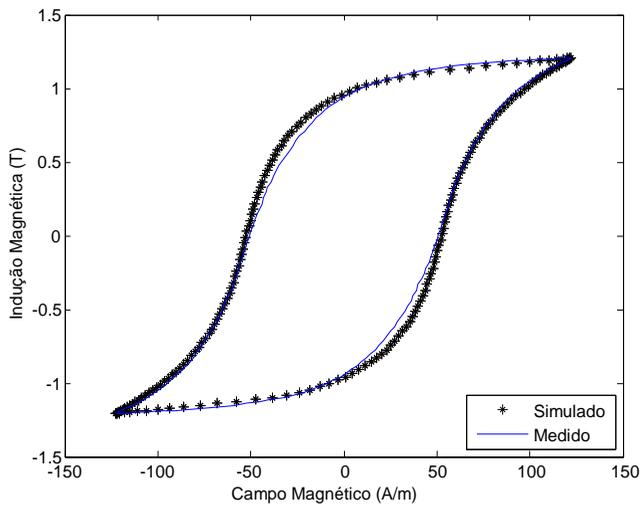
O material, cujo laço de histerese experimental pode ser observado nas Fig. 50-54, apresenta os resultados de caracterização mostrados na Tabela 8 para cada metodologia desenvolvida.

Tabela 8 – Resultado de caracterização: segundo caso

2º caso	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	$t$ (s)
<b>Metd 1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						49
	$1,5 \times 10^6$	$3 \times 10^{-4}$	186,5	120	0,3	-	
	Parâmetros Calculados						
	$2,95 \times 10^6$	$6,57 \times 10^{-4}$	668,87	105,64	0,50	-	
<b>Metd 2</b>	Conjunto Inicial Utilizado						3
	$1,5 \times 10^6$	$4 \times 10^{-4}$	200	200	3,12	-	
	$H_0; B_0$ Asc	14; -0,8	$H_0; B_0$ Desc	-15; 0,8			
	Parâmetros Calculados						
	$1,78 \times 10^6$	$1,54 \times 10^{-4}$	101,46	81,22	0,34	-	
<b>VarMet1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						10
	$1,8 \times 10^6$	$3 \times 10^{-4}$	186,5	120	0,1	-	
	Parâmetros Calculados						
	$3,73 \times 10^6$	$1,16 \times 10^{-3}$	1474,56	299,30	0,34	-	
<b>Metd 3</b>	Conjunto Inicial Utilizado						1
	$2,9 \times 10^6$	$26 \times 10^{-4}$	903	62	0,09	-	
	Parâmetros Calculados						
	$2,38 \times 10^7$	$6,09 \times 10^{-2}$	483424,83	4835,05	0,99	-	
<b>6ºParâm</b>	Conjunto Inicial Utilizado						7
	$1,5 \times 10^6$	$3 \times 10^{-4}$	186,5	120	0,3	1,2	
	Parâmetros Calculados						
	$6,23 \times 10^6$	$2,95 \times 10^{-3}$	6182,67	178,23	0,96	0,80	

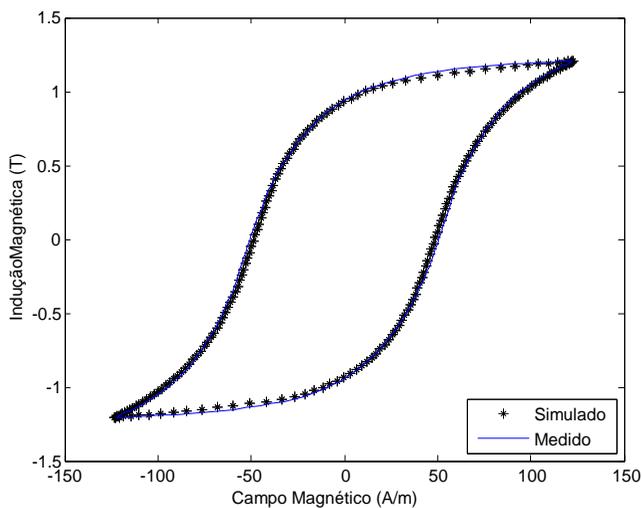
Fonte: Autoria própria (2015)

Figura 50 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: segundo caso.



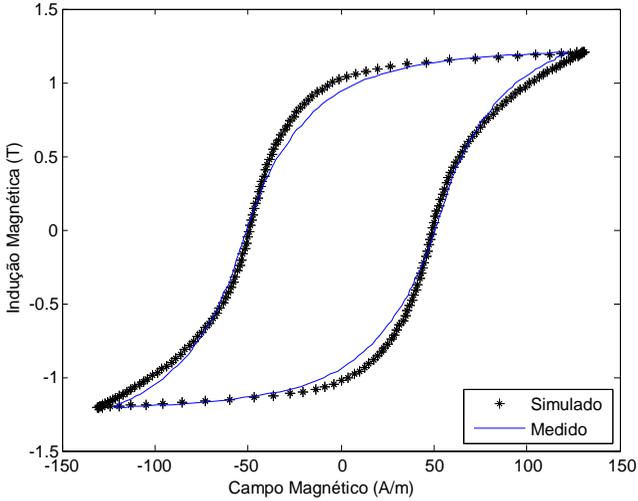
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 51 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: segundo caso.



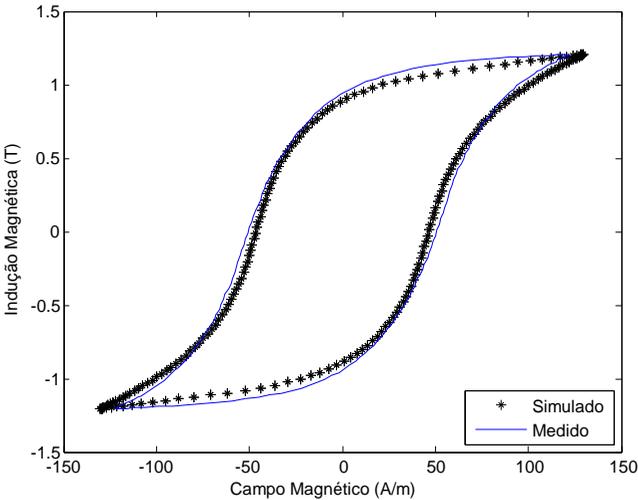
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 52 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: segundo caso.



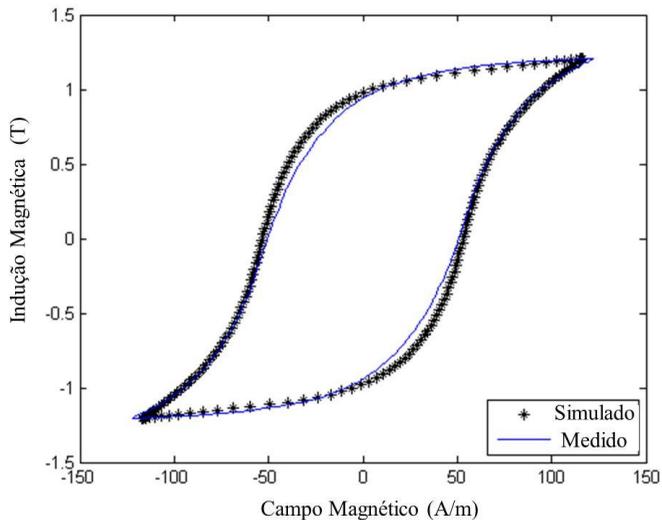
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 53 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Segundo caso: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 54 – Curva  $B-H$  calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Segundo caso: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

### 10.3 TERCEIRO CASO

O material, cujo laço de histerese experimental pode ser observado nas Fig. 55-59, apresenta os resultados de caracterização mostrados na Tabela 9 para cada metodologia desenvolvida.

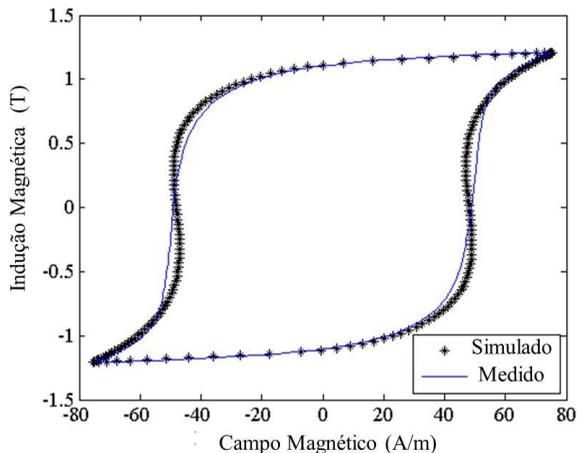
Tabela 9 – Resultado de caracterização: terceiro caso

3º caso	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	$t$ (s)
Metd1-TRR	Conjunto Inicial Utilizado						3,4
	1,88 x 10 <sup>6</sup>	3,5 x 10 <sup>-4</sup>	190,1	139,1	0,6	-	
	Parâmetros Calculados						
	2,33 x 10 <sup>6</sup>	2,9 x 10 <sup>-4</sup>	220,26	70,55	0,31	-	
Metd 2	Conjunto Inicial Utilizado						3
	1,5 x 10 <sup>6</sup>	3 x 10 <sup>-4</sup>	186,5	120	2	-	
	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Asc	37; -0,8	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Desc	-37; 0,8			
	Parâmetros Calculados						
	1,80 x 10 <sup>6</sup>	1,2 x 10 <sup>-4</sup>	66,36	55,68	0,10	-	
VarMetd1	Conjunto Inicial Utilizado						4
	1,69 x 10 <sup>6</sup>	3,5 x 10 <sup>-4</sup>	187	99	0	-	
	Parâmetros Calculados						
	3,95 x 10 <sup>6</sup>	8,9 x 10 <sup>-4</sup>	1163,03	288,69	0,34	-	
Metd 3	Conjunto Inicial Utilizado						1,1
	3 x 10 <sup>6</sup>	3,6 x 10 <sup>-3</sup>	1000	65	0	-	
	Parâmetros Calculados						
	1,26 x 10 <sup>7</sup>	1,7 x 10 <sup>-2</sup>	69532,27	1142,22	0,96	-	
6º Parâm	Conjunto Inicial Utilizado						0,7
	1,9 x 10 <sup>6</sup>	3,5 x 10 <sup>-4</sup>	192	12,1	0,1	1	
	Parâmetros Calculados						
	1,88	3,3	192,00	12,10	0,11	0,20	

	$\times 10^6$	$\times 10^{-4}$					
--	---------------	------------------	--	--	--	--	--

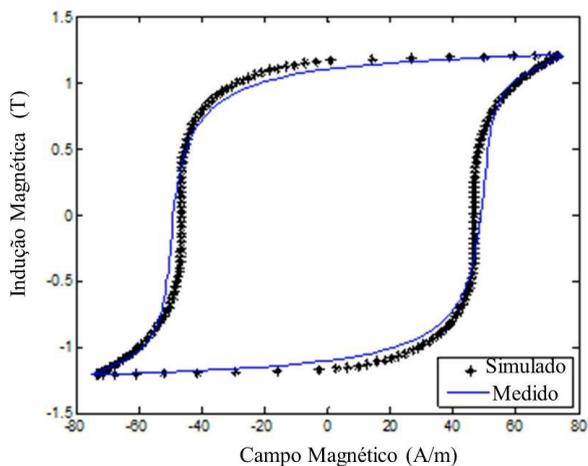
Fonte: Autoria própria (2015)

Figura 55 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Terceiro caso: TRR.



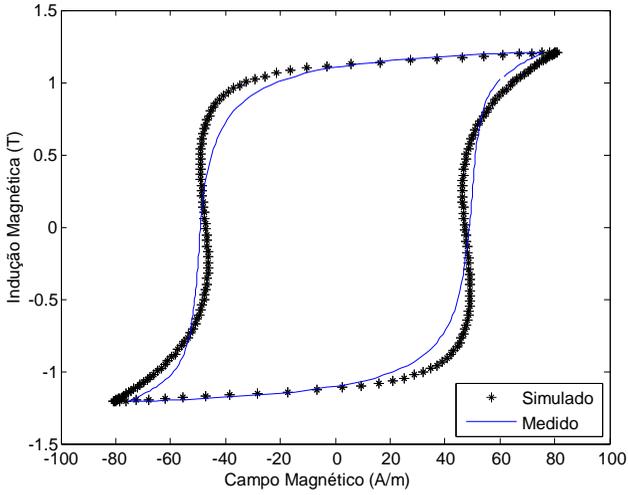
Fonte: Autoria própria (2012).

Figura 56 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: terceiro caso.



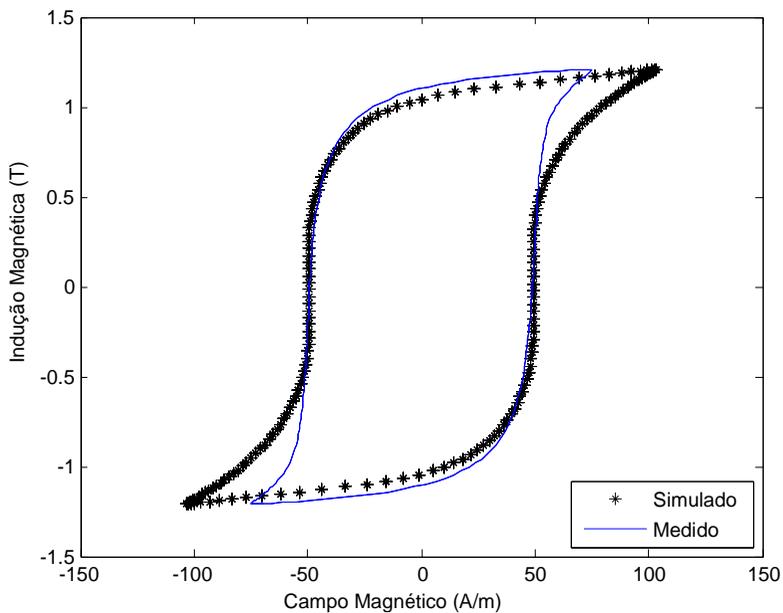
Fonte: Autoria própria (2014).

Figura 57 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: terceiro caso.



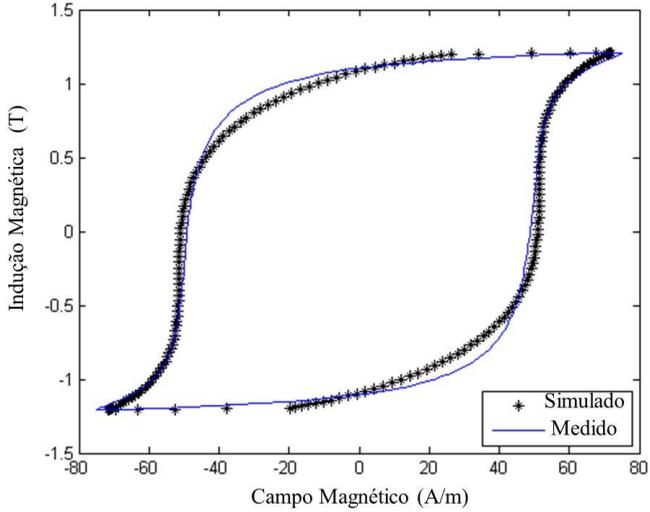
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 58 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Terceiro caso: TRR.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 59 – Curva  $B-H$  calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Terceiro caso: LM.



Fonte: Autoria própria (2015).

#### 10.4 QUARTO CASO

O material, cujo laço de histerese experimental pode ser observado nas Fig. 60-64, apresenta os resultados de caracterização mostrados na Tabela 10 para cada metodologia desenvolvida.

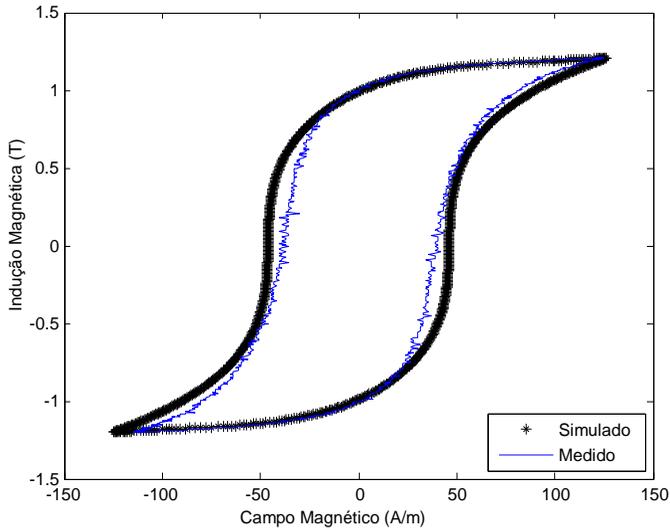
Tabela 10 – Resultado de caracterização: quarto caso

4º caso	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	$t(s)$
<b>Metd 1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						167
	1,55 x 10 <sup>6</sup>	2 x 10 <sup>-4</sup>	100	74	0,45	-	
	Parâmetros Calculados						
	2,49 x 10 <sup>6</sup>	7,79 x 10 <sup>-4</sup>	646,28	75,30	0,39	-	
<b>Metd 2</b>	Conjunto Inicial Utilizado						2,52
	1 x 10 <sup>6</sup>	5 x 10 <sup>-4</sup>	500	300	0	-	
	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Asc	15; -0,9	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Desc	-13; 0,9			
	Parâmetros Calculados						
1,47 x 10 <sup>6</sup>	1,36 x 10 <sup>-4</sup>	69,69	48,06	0,16	-		
<b>VarMetd1</b>	Conjunto Inicial Utilizado						15
	1,6 x 10 <sup>6</sup>	1,68 x 10 <sup>-4</sup>	96	74	0,01	-	
	Parâmetros Calculados						
	1,93 x 10 <sup>6</sup>	2,39 x 10 <sup>-4</sup>	159,52	173,14	0,29	-	
<b>Metd 3</b>	Conjunto Inicial Utilizado						1,5
	2,76 x 10 <sup>6</sup>	25 x 10 <sup>-4</sup>	903	61	0,2	-	
	Parâmetros Calculados						
	1,93 x 10 <sup>7</sup>	5,04 x 10 <sup>-2</sup>	323643,24	2703,72	0,99	-	
<b>6º Parâm</b>	Conjunto Inicial Utilizado						6,6
	1,55 x 10 <sup>6</sup>	2 x 10 <sup>-4</sup>	100	74	0,45	1	
	Parâmetros Calculados						
	2,62	5,67	505,41	191,55	0,38	1,70	

	$\times 10^6$	$\times 10^{-4}$					
--	---------------	------------------	--	--	--	--	--

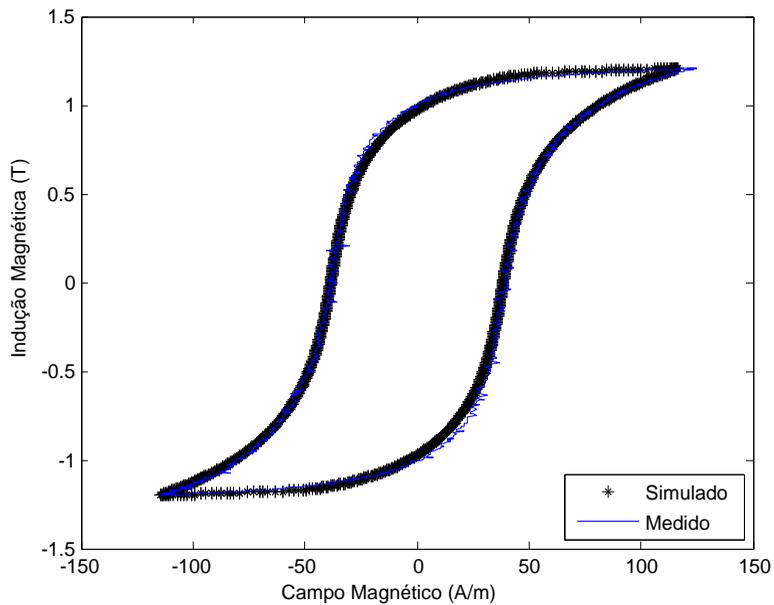
Fonte: Autoria própria (2015)

Figura 60 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: quarto caso.



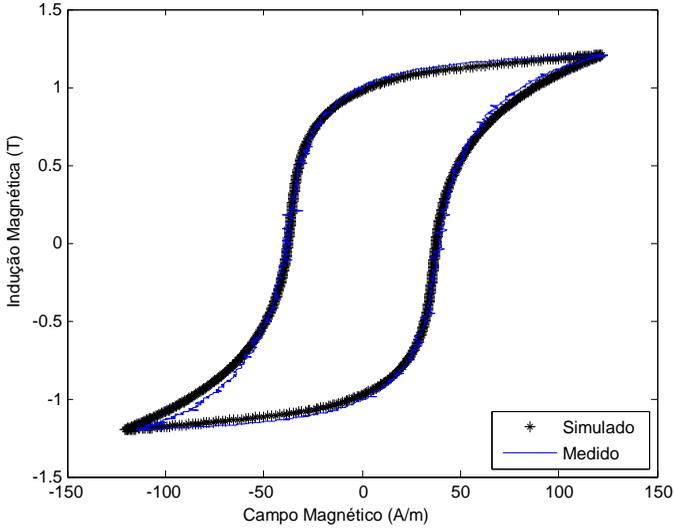
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 61 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: quarto caso.



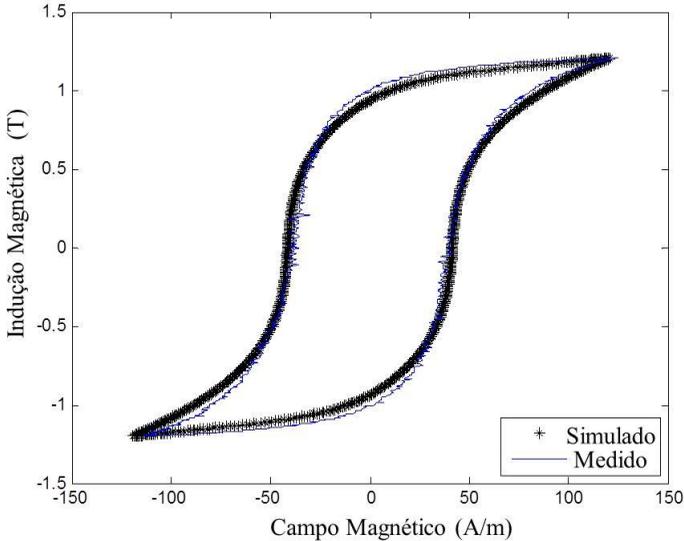
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 62 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: quarto caso.



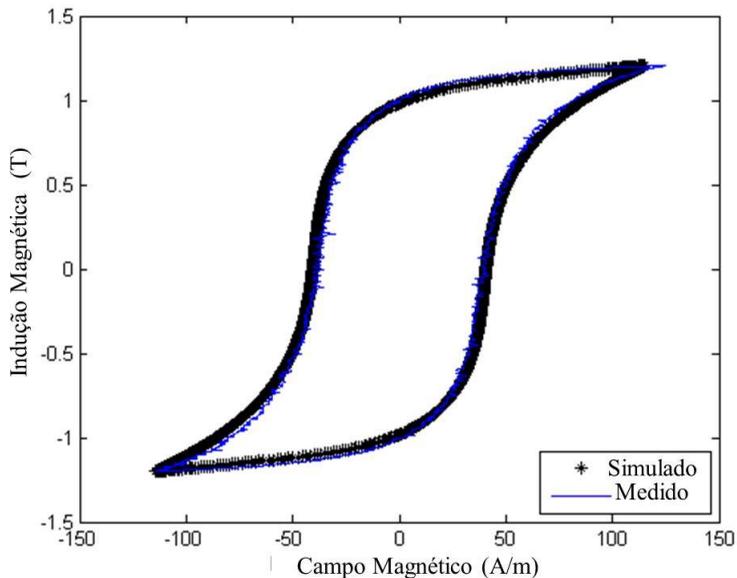
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 63 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Quarto caso: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 64 – Curva  $B-H$  calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Quarto caso: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

### 10.5 QUINTO CASO

O material, cujo laço de histerese experimental pode ser observado nas Fig. 65-69, apresenta os resultados de caracterização mostrados na Tabela 11 para cada metodologia desenvolvida.

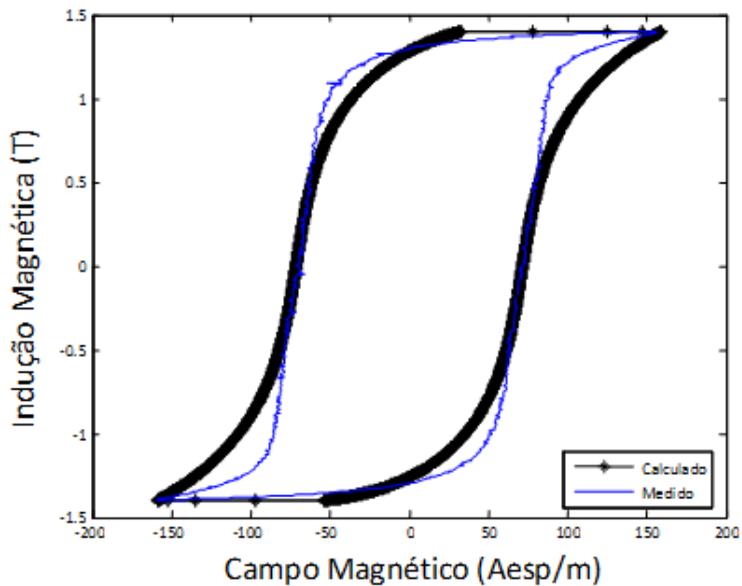
Tabela 11 – Resultado de caracterização: quinto caso

5º caso	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	$t$ (s)	
<b>Metd 1</b>	Conjunto Inicial Utilizado							
	1,95 x 10 <sup>6</sup>	2,1 x 10 <sup>-4</sup>	125,9	74	0,001	-	0,69	
	Parâmetros Calculados							
	1,95 x 10 <sup>6</sup>	1,84 x 10 <sup>-4</sup>	125,9	73,98	0,001	-		
Conjunto Inicial Utilizado								
<b>Metd 2-TRR</b>	2 x 10 <sup>6</sup>	4 x 10 <sup>-4</sup>	71	75,99	0,01	-	3,29	
	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Asc	86; 0,9	H <sub>0</sub> ; B <sub>0</sub> Desc	-83; -0,9				
	Parâmetros Calculados							
	2,24 x 10 <sup>6</sup>	1,01 x 10 <sup>-4</sup>	65,59	94,81	0,1	-		
<b>Var Metd 1</b>	Conjunto Inicial Utilizado							
	2,1 x 10 <sup>6</sup>	1,68 x 10 <sup>-4</sup>	139	142	0,02	-	2,85	
	Parâmetros Calculados							
	2,06 x 10 <sup>6</sup>	3,06 x 10 <sup>-4</sup>	195,96	195,55	0,19	-		
Conjunto Inicial Utilizado								
<b>Metd 3</b>	3,1 x 10 <sup>6</sup>	8	947,6	60	0,4	-	0,93	
	Parâmetros Calculados							
	2,52 x 10 <sup>7</sup>	8,14 x 10 <sup>-2</sup>	684400,246	9652,25	0,99	-		
	Conjunto Inicial Utilizado							
<b>6º Parâm</b>	1,9 x 10 <sup>6</sup>	2,2 x 10 <sup>-4</sup>	150	81,6	0,2	0,85	0,53	
	Parâmetros Calculados							
	1,98	2,46	150,00	81,60	0,22	0,85		
	Conjunto Inicial Utilizado							

	$\times 10^6$	$\times 10^{-4}$					
--	---------------	------------------	--	--	--	--	--

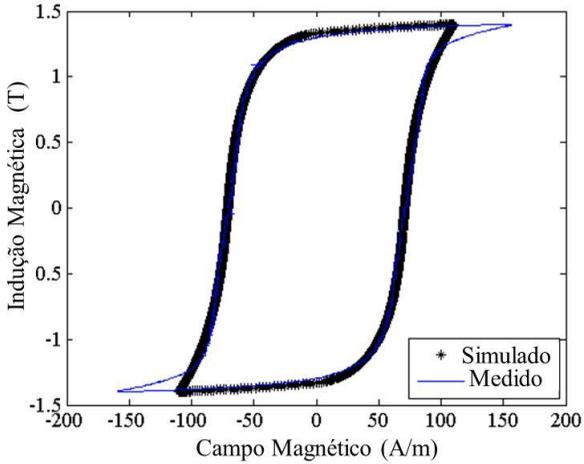
Fonte: Autoria própria (2015)

Figura 65 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido: quinto caso.



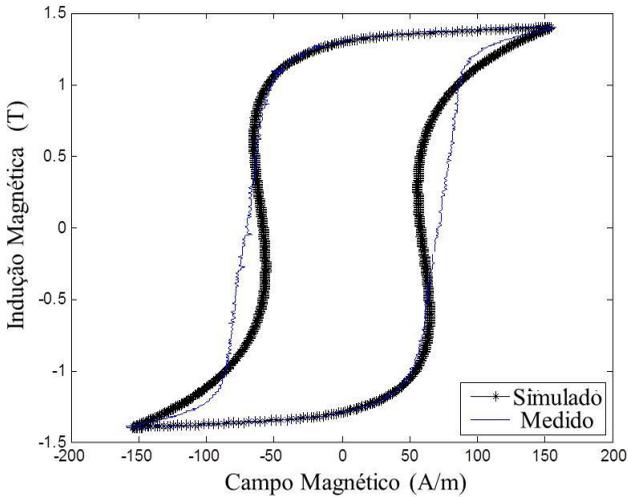
Fonte: Autoria própria (2012).

Figura 66 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido: quinto caso.



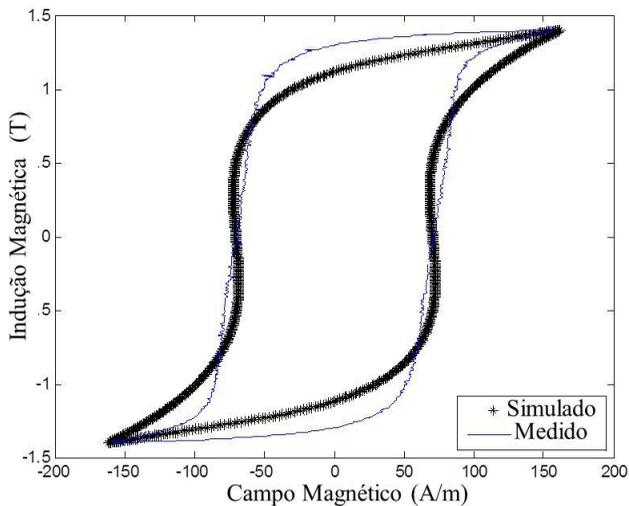
Fonte: Autoria própria (2014).

Figura 67 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a variante da primeira metodologia e laço medido: quinto caso.



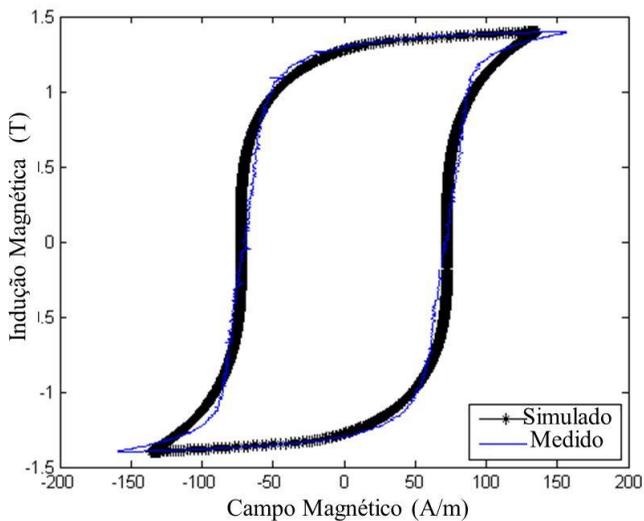
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 68 – Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Quinto caso: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 69 – Curva  $B-H$  calculada utilizando o sexto parâmetro e laço medido. Quinto caso: LM.



Fonte: Autoria própria (2015).

Os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, resultantes da aplicação das cinco metodologias desenvolvidas, e o tempo de simulação decorrido estão apresentados nas Tabelas 7 - 11. Com base nos resultados obtidos afirma-se que os algoritmos desenvolvidos apresentam rapidez de resposta (inferior a 168 segundos).

Como pode ser observado nas Fig. 45-69, existem laços calculados muito próximos dos laços medidos, e conseqüentemente, os parâmetros calculados descrevem muito bem o comportamento experimental do material, validando as metodologias utilizadas.

## 10.6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para auxiliar a decisão de escolher o conjunto de parâmetros que representa melhor o comportamento experimental do material, estão apresentadas na Tabela 12: as distâncias (máxima, mínima e acumulada) calculadas considerando pontos experimentais e pontos simulados [48]; o erro médio quadrático *MSE*; e o erro percentual considerando a perda magnética medida e a perda calculada.

Tabela 12 – Indicadores da qualidade da solução

		Distância pontos experimentais e calculados			MSE	Erro% perdas
		Total	Menor	Maior		
1º caso	Metd 1	174	3,66x10 <sup>-4</sup>	0,65	1,71	0,04
	Metd 2	4.155	1,89x10 <sup>-3</sup>	31,23	10,43	7,11
	VarMetd1	3.893	7,95x10 <sup>-3</sup>	11,94	3,53	7,33
	Metd 3	4.739	1,22x10 <sup>-2</sup>	27,56	8,79	0,20
	6º Parâm	8.357	1,79x10 <sup>-3</sup>	37,96	14,08	5,43
2º caso	Metd 1	1.482	1,8x10 <sup>-2</sup>	19,21	7,56	2,87
	Metd 2	1.112	5x10 <sup>-3</sup>	17,87	7,68	3,86
	VarMetd1	2.557	1,23x10 <sup>-1</sup>	14,75	7,60	6,06
	Metd 3	3.343	6,84x10 <sup>-3</sup>	36,29	14,78	9,49
	6º Parâm	1.724	3,19x10 <sup>-2</sup>	18,37	7,55	3,44
3º caso	Metd 1- TRR	989	2,23x10 <sup>-2</sup>	9,44	4,45	0,15
	Metd 2	5.547	1,46x10 <sup>-2</sup>	33,45	6,23	2,4
	VarMetd1	2.190	1,22x10 <sup>-2</sup>	13,47	6,92	4,54
	Metd 3	16.265	4,62x10 <sup>-2</sup>	42,24	20,5	3,19
	6º Parâm	1.637	1,05x10 <sup>-5</sup>	35,45	6,3	1,27
4º caso	Metd 1	6.372	2,29x10 <sup>-2</sup>	17,13	7,25	13,75
	Metd 2	6.343	3,13x10 <sup>-3</sup>	22,29	4,59	1,53
	VarMetd1	5.044	9,69x10 <sup>-3</sup>	26,12	8,02	0,44
	Metd 3	13.414	4,95x10 <sup>-3</sup>	30,8	9,95	0,38
	6º Parâm	4.637	1,24x10 <sup>-2</sup>	24,24	6,96	2,95
5º caso	Metd 1	30.576	4,17x10 <sup>-3</sup>	115,1	24,07	5,2
	Metd 2	9.550	6,18x10 <sup>-3</sup>	49,53	16,37	0,39
	VarMetd1	16.684	2,52x10 <sup>-2</sup>	23,12	10,88	7,33
	Metd 3	21.601	2,46x10 <sup>-2</sup>	96,96	34,05	9,24
	6º Parâm	13.154	3,59x10 <sup>-2</sup>	24,53	8,40	0,64

Fonte: Autoria própria (2015)

$$\text{Onde [48]: distância} = \sqrt{(B_{calc} - B_{exp})^2 + (H_{calc} - H_{exp})^2}$$

Considerando o mesmo material, as diferentes metodologias não dão como resultados conjuntos de parâmetros iguais. É verdade que as metodologias propostas têm a mesma origem (as equações de Jiles-Atherton e a relação constitutiva), mas as metodologias identificam o conjunto de parâmetros, resolvendo sistemas de equações completamente diferentes: a primeira metodologia busca os parâmetros tendo como base cálculo aproximado de derivadas, considerando apenas a primeira parcela da regra da cadeia; a segunda metodologia busca os

parâmetros tendo como base aplicação de séries de potência para resolver a integral; a terceira metodologia é mais simples e não utiliza derivada e nem integral para identificar os parâmetros; para continuar, a variante da primeira metodologia busca os parâmetros tendo como base cálculo aproximado de derivadas, considerando a primeira e também a segunda parcela da regra da cadeia; para finalizar inclui-se o sexto parâmetro na representação do material.

Cada um dos sistemas de equações, estudado nas metodologias, apresenta infinitas soluções embora apenas algumas poderão ser calculadas: as equações principais, de cada uma das metodologias, apresentam um quociente (que foi herdado das equações de Jiles-Atherton), e conseqüentemente, indeterminações podem acontecer impossibilitando o cálculo de todas as soluções existentes.

Além de tudo, existem cinco (ou seis conforme o caso) parâmetros que também podem ser vistos como cinco (ou seis conforme o caso) graus de liberdade: dependendo do valor assumido por um dos parâmetros, os demais podem ser ajustados conforme o valor já assumido.

As equações de Jiles-Atherton e a relação constitutiva deram origem a cinco metodologias, isto é fato, e não pode ser visto como um inconveniente: as cinco metodologias oportunizam o cálculo de diversos conjuntos de parâmetros, que posteriormente são analisados com base em critérios que facilitam a seleção daquele conjunto que representa melhor o comportamento experimental do material. Para esta seleção, recomenda-se analisar três indicadores: a distância acumulada calculada considerando pontos experimentais e pontos simulados; o erro médio quadrático *MSE*; e o erro percentual considerando a perda magnética medida e a perda magnética calculada.

Para selecionar o conjunto de parâmetros que representa melhor o comportamento experimental do material, particularmente para o primeiro caso, os seguintes passos devem ser seguidos:

- Inicialmente, os indicadores da primeira metodologia e da segunda metodologia são mostrados e comparados na Tabela 13. Para o indicador distância total, o indicador da segunda metodologia é 23,88 vezes o indicador da primeira metodologia. Para o indicador *MSE*, o indicador da segunda metodologia é 6,10 vezes o indicador da primeira metodologia. Para o indicador erro percentual de perdas, o indicador da segunda metodologia é 177,75 vezes o indicador da primeira metodologia. Como 177,75 é maior que os demais valores, o conjunto de parâmetros que melhor representa o

comportamento experimental do material é aquele obtido através da primeira metodologia, isto é, como o indicador da segunda metodologia é 177,75 vezes o indicador da primeira metodologia, selecionar o resultado dado pela primeira metodologia;

- Em seguida, os indicadores da variante da primeira metodologia e da terceira metodologia são mostrados e comparados na Tabela 13. Procedendo tal como o indicado no primeiro passo, conclui-se que o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material é aquele obtido através da terceira metodologia;
- Continuando, os indicadores da primeira metodologia e da terceira metodologia são mostrados e comparados na Tabela 13. Procedendo tal como o indicado no primeiro passo, conclui-se que o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material é aquele obtido através da primeira metodologia;
- Para finalizar, os indicadores da primeira metodologia e do sexto parâmetro são mostrados e comparados na Tabela 14. Procedendo tal como o indicado no primeiro passo, conclui-se que o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material é aquele obtido através da primeira metodologia.

Terminada esta comparação dos pares, seleciona-se o conjunto de parâmetros, obtido através da primeira metodologia e mostrado na Tabela 15, para representar o material correspondente ao primeiro caso.

O procedimento anterior é repetido para todos os casos estudados, e a metodologia que forneceu o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material, está mostrada na Tabela 14; os parâmetros correspondentes podem ser observados na Tabela 15.

Tabela 13 – Comparações numéricas

		Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	Razão			Seleção Parcial	Razão			Seleção Parcial
					Dist. Total	MSE	Erro% Perdas		Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	
1 <sup>o</sup> caso	Metd 1	174	1,71	0,04				Metd 1				Metd 1
	Metd 2	4155	10,43	7,11	23,88	6,10	177,75					
	Var Metdl	3893	3,53	7,33			36,65					
	Metd 3	4739	8,79	0,20	1,22	2,49		Metd 3	27,24	5,14	5,00	
2 <sup>o</sup> caso	Metd 1	1482,1	7,56	2,87	1,33			Metd 1				Metd 1
	Metd 2	1111,7	7,68	3,86		1,02	1,34					
	Var Metdl	2556,8	7,60	6,06				Var	1,73	1,01	2,11	
	Metd 3	3343	14,78	9,49	1,31	1,94	1,57	Metd 1				
3 <sup>o</sup> caso	Metd 1	989	4,45	0,15				Metd 1				Metd 1
	Metd 2	5547	6,23	2,40	5,61	1,40	16,00					
	Var Metdl	2189,9	6,92	4,54			1,42	Var				
	Metd 3	16265	20,50	3,19	7,43	2,96		Metdl	2,21	1,55	30,26	
4 <sup>o</sup> caso	Metd 1	6371,6	7,25	13,75	1,00	1,58	8,99	Metd 2				Var Metdl
	Metd 2	6342,5	4,59	1,53					1,26		3,46	
	Var Metdl	5044	8,02	0,44			1,16	Var		1,75		
	Metd 3	13414	9,95	0,38	2,66	1,24		Metdl				
5 <sup>o</sup> caso	Metd 1	30576	24,07	5,20	3,20	1,47	13,33	Metd 2				Metd 2
	Metd 2	9550	16,37	0,39						1,50		
	Var Metdl	16684	10,88	7,33				Var	1,75		18,79	
	Metd 3	21601	34,05	9,24	1,29	3,13	1,26	Metdl				

Fonte: Autoria própria (2015)

Tabela 14 – Comparações numéricas. Sexto parâmetro.

		Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	Razão			Decisão Final
					Dist. Total	MSE	Erro% Perdas	
1 <sup>o</sup> caso	Metd 1	174	1,71	0,04				Metd 1
	6 <sup>o</sup> Param	8357	14,08	5,43	48,03	8,23	135,75	
2 <sup>o</sup> caso	6 <sup>o</sup> Param	1724	7,55	3,44	1,16		1,20	Metd 1
	Metd 1	1482,1	7,56	2,87		1,00		
3 <sup>o</sup> caso	Metd 1	989	4,45	0,15				Metd 1
	6 <sup>o</sup> Param	1637	6,3	1,27	1,66	1,42	8,47	
4 <sup>o</sup> caso	Var Metdl	5044	8,02	0,44	1,09	1,15		Var Metdl
	6 <sup>o</sup> Param	4637	6,96	2,95			6,67	
5 <sup>o</sup> caso	6 <sup>o</sup> Param	13154	8,4	0,64	1,38		1,64	6 <sup>o</sup> Param
	Metd 2	9550	16,37	0,39		1,95		

Fonte: Autoria própria (2015)

Tabela 15 – Parâmetros que melhor representam o material

<b>Caso</b>	<b>Método</b>	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$
1º	<b>Metd 1</b>	1,57 $\times 10^6$	1,96 $\times 10^{-4}$	102,2	57,83	0,27	-
2º	<b>Metd 1</b>	2,95 $\times 10^6$	6,57 $\times 10^{-4}$	668,87	105,64	0,5	-
3º	<b>Metd 1</b>	2,33 $\times 10^6$	2,95 $\times 10^{-4}$	220,26	70,55	0,31	-
4º	<b>VarMetd1</b>	1,93 $\times 10^6$	2,39 $\times 10^{-4}$	159,52	173,14	0,29	-
5º	<b>6º Param</b>	1,98 $\times 10^6$	2,46 $\times 10^{-4}$	150,00	81,60	0,22	0,85

Fonte: Autoria própria (2015)

Para o laço de histerese contendo ruído (quinto caso), de fato a metodologia proposta, que utiliza seis parâmetros, forneceu um conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material, como mostrado na Tabela 15.

Para selecionar o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material, recomendou-se analisar três indicadores. Entretanto na Tabela 16 são mostradas outras comparações, que consideram apenas um único indicador.

Tabela 16 – Outras comparações

<b>Caso</b>	<b>Obs à olho nu proxim laços Fig. 45-69</b>	<b>Mín k Tabela 7-11</b>	<b>Mín dist. total Tabela 12</b>	<b>Mín MSE Tabela 12</b>	<b>Mín perda Tabela 12</b>	<b>Dist. total, MSE e perdas Tabela 15</b>
<b>1º</b>	Metd1	Metd1	Metd1	Metd1	Metd1	Metd1
<b>2º</b>	Metd2	Metd2	Metd2	6º parâm	Metd1	Metd1
<b>3º</b>	Inconc	6º parâm	Metd1	Metd1	Metd1	Metd1
<b>4º</b>	Metd2	Metd2	6º parâm	Metd2	Metd3	Var Metd1
<b>5º</b>	Inconc	Metd1	Metd2	6º parâm	Metd2	6º parâm
<b>Obs</b>	Escala: laços próximos podem parecer distantes	5º caso: os laços não estão próximos Fig. 65		2º caso: os laços não estão próximos Fig. 54	Laços distintos podem ter mesma área interna	

Fonte: Autoria própria (2015)

Como é possível observar na Tabela 16, considerando apenas o indicador mínimo valor da distância total, a metodologia proposta, que evita o cálculo de derivada e utiliza integral, fornece o conjunto de parâmetros que melhor representa o comportamento experimental do material correspondente ao quinto caso.

## 10.7 RESULTADOS ADICIONAIS

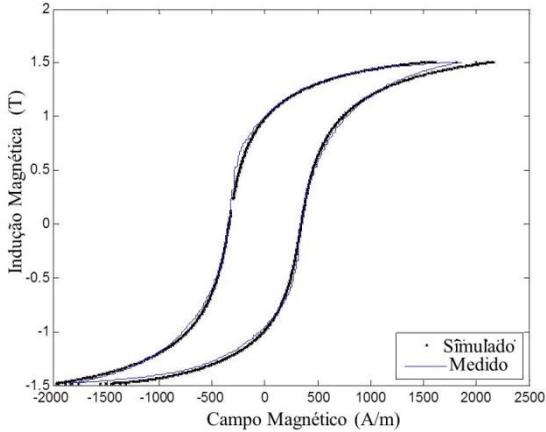
As metodologias desenvolvidas foram aplicadas para caracterizar diversas amostras de material cortadas nas direções longitudinal, transversal e 45 graus. Os parâmetros calculados podem ser observados na Tabela 17.

Tabela 17 – Resultado de caracterização

Amostra de aço ao silício de grão não orientado.							
B senoidal, f = 1Hz.							
Teste de Epstein							
<b>Caso Metd</b>	$m_s$ (A/m)	$\alpha$	$a$ (A/m)	$k$	$c$	$s$	<b>Corte Algoritmo</b>
<b>6° Metd 1</b>	1,46 x 10 <sup>6</sup>	9,09 x 10 <sup>-4</sup>	509,15	358,07	0,005	-	Longitudinal TRD
<b>7° Metd 1</b>	5,20 x 10 <sup>6</sup>	1,32 x 10 <sup>-2</sup>	23.018	1.293	0,76	-	Transversal TRD
<b>8° Metd 1</b>	1,41 x 10 <sup>6</sup>	1,22 x 10 <sup>-3</sup>	527,86	631,66	0,61	-	45 graus TRD
<b>6° Metd 2</b>	1,80 x 10 <sup>6</sup>	1,64 x 10 <sup>-3</sup>	1.020	1.284	0,64	-	Longitudinal TRD
<b>7° Metd 2</b>	1,55 x 10 <sup>6</sup>	1,07 x 10 <sup>-3</sup>	518,41	459,91	0,3	-	Transversal TRD
<b>9° Metd 2</b>	1,33 x 10 <sup>6</sup>	7,88 x 10 <sup>-4</sup>	363,71	330,27	0,45	-	45 graus TRR
<b>7° Metd 3</b>	2,32 x 10 <sup>7</sup>	2,96 x 10 <sup>-1</sup>	2.293.121	16.400	0,98	-	Transversal TRD
<b>9° Metd 3</b>	2,20 x 10 <sup>7</sup>	3,26 x 10 <sup>-1</sup>	2.386.871	17209	0,99	-	45 graus TRD

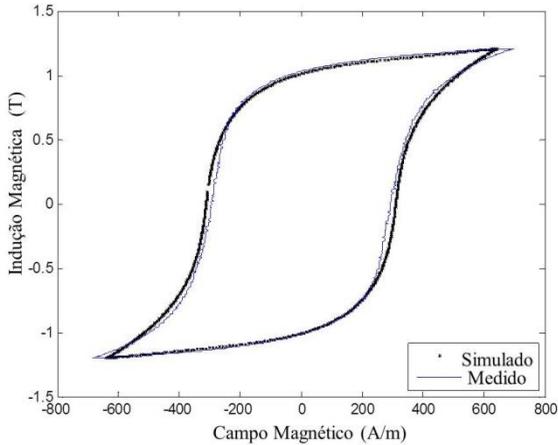
Fonte: Autoria própria (2016)

Figura 70– Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Sexto caso.



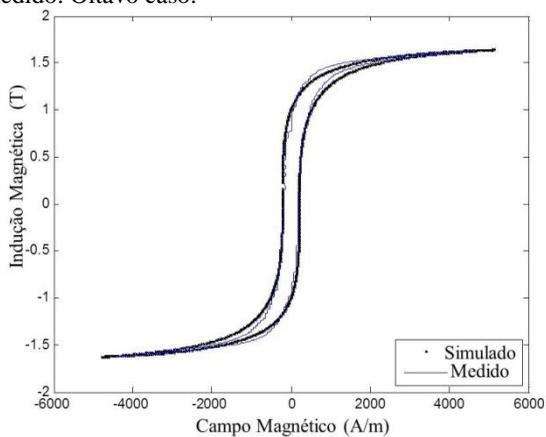
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 71– Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Sétimo caso.



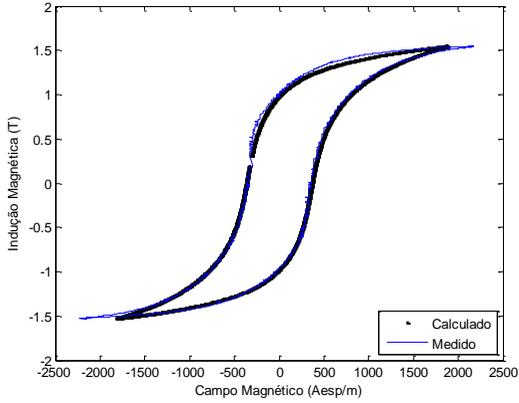
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 72– Curva  $B-H$  calculada utilizando a primeira metodologia e laço medido. Oitavo caso.



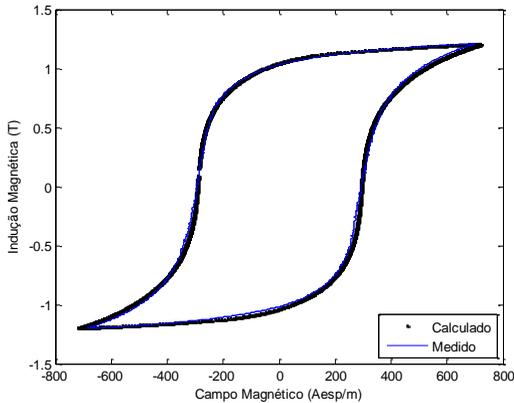
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 73– Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Sexto caso.



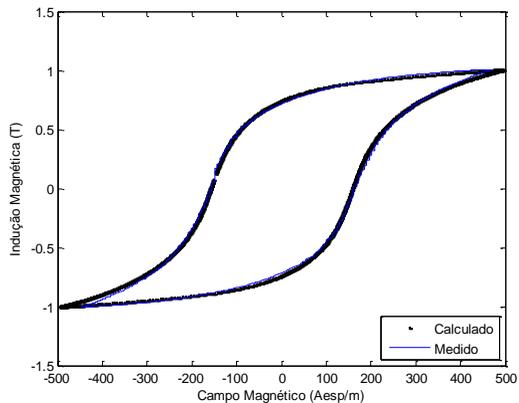
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 74– Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Sétimo caso.



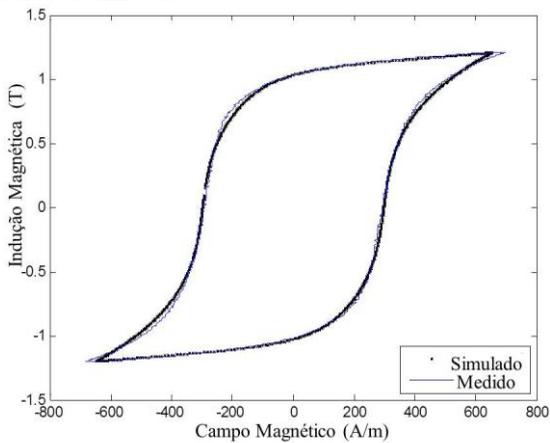
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 75– Curva  $B-H$  calculada utilizando a segunda metodologia e laço medido. Nono caso.



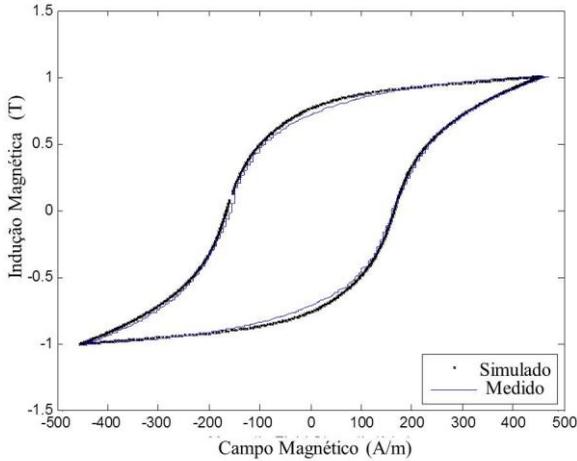
Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 76– Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Sétimo caso.



Fonte: Autoria própria (2016).

Figura 77– Curva  $B-H$  calculada utilizando a terceira metodologia e laço medido. Nono caso.



Fonte: Autoria própria (2016).

Como pode ser observado nas Fig. 70–77, os laços calculados estão muito próximos dos laços medidos, e conseqüentemente, os parâmetros calculados descrevem muito bem o comportamento experimental do material, validando as metodologias utilizadas.

## 11 CONCLUSÃO

Neste trabalho de pesquisa foi abordado o assunto identificação dos parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. Para esta identificação foram desenvolvidas cinco metodologias: a primeira metodologia utiliza o cálculo de derivadas; a segunda metodologia evita o cálculo de derivadas utilizando integrais; a variante da primeira metodologia acrescenta o segundo termo relacionado à derivada; a terceira metodologia evita o cálculo de derivadas e também o de integrais; e a última metodologia utiliza seis parâmetros para representar o material. Deste estudo concluiu-se que as metodologias propostas podem reproduzir adequadamente o comportamento experimental do material. Os objetivos que haviam sido propostos foram cumpridos. Este trabalho contribuiu para o aprofundamento do tema, permitiu compreender melhor o fenômeno da histerese magnética, além de ter permitido aperfeiçoar competências de investigação.

O trabalho de pesquisa permitiu descobrir a possibilidade de congregiar todas as equações do modelo de Jiles-Atherton e uma relação constitutiva em uma única equação, em função somente das variáveis de interesse: campo magnético; indução magnética; e parâmetros do modelo. Esta última equação permite organização dos dados; evidencia o problema por trás da identificação dos parâmetros; e permite ainda a construção do sistema de equações cuja solução é o conjunto de parâmetros procurado. Uma vez identificado este problema, inicialmente oculto, foi possível selecionar a ferramenta mais adequada para solucioná-lo: sistema de equações algébrico, equilibrado, resolvido pelo método de mínimos quadrados não linear. Esta ferramenta permitiu uma rápida identificação dos parâmetros do modelo.

Na primeira metodologia é possível caracterizar o material utilizando uma única equação que relaciona campo magnético; indução magnética; derivada da indução magnética em relação ao campo magnético; com os parâmetros do modelo. A equação é válida para os ramos ascendente e descendente do laço de histerese. Com um total de trinta pontos, estrategicamente posicionados no laço experimental, é possível caracterizar o material. A derivada, avaliada no ponto experimental, pode ser estimada utilizando pontos na vizinhança.

A segunda metodologia pode melhorar o desempenho da primeira metodologia evitando o cálculo de derivadas, e consequentemente, reduzindo a quantidade de pontos experimentais utilizados. A partir das equações do modelo é possível levantar uma EDO linear de primeira ordem. O problema de Cauchy associado foi construído e foi possível

resolvê-lo aplicando-se o método do fator integrante. Uma única equação, que relaciona campo magnético e indução magnética com os parâmetros do modelo, foi obtida. As integrais da equação proposta podem ser resolvidas utilizando série de MacLaurin. A fórmula proposta permite calcular os parâmetros do modelo; mostra também uma relação implícita, do campo magnético com a indução magnética, considerando-se o fenômeno da histerese; e vale para os ramos, ascendente e descendente, do laço de histerese. Com dez pontos, estrategicamente posicionados no laço experimental, e mais dois pontos experimentais para os valores iniciais de campo magnético e de indução magnética, é factível caracterizar o material.

A variante da primeira metodologia é análoga à primeira metodologia: houve a inclusão de uma parcela da derivada na modelagem.

Na terceira metodologia é possível caracterizar o material utilizando uma única equação que relaciona campo magnético e indução magnética com os parâmetros do modelo. A equação é válida para os ramos ascendente e descendente do laço de histerese. Com um total de dez pontos, estrategicamente posicionados no laço experimental, é possível caracterizar o material. Esta metodologia evita o cálculo aproximado de derivadas, ao contrário do que acontece na primeira metodologia; e também evita o cálculo aproximado de integrais, ao contrário do que acontece na segunda metodologia.

Na última metodologia é incluído mais um parâmetro no modelo, totalizando seis para representar o material. Nesta metodologia também é possível caracterizar o material utilizando-se uma única equação que relaciona campo magnético; indução magnética; derivada da indução magnética em relação ao campo magnético; com os parâmetros do modelo. A equação é válida para os ramos ascendente e descendente do laço de histerese. Com um total de trinta e seis pontos, estrategicamente posicionados no laço experimental, é possível caracterizar o material. A derivada, avaliada no ponto experimental, pode ser estimada utilizando pontos na vizinhança.

Resolvendo os sistemas não lineares de infinitas soluções, foi possível encontrar os parâmetros do modelo. Os parâmetros encontrados foram incluídos no modelo inverso para comparar o laço experimental com o laço simulado. Quando o laço de histerese simulado está próximo do laço de histerese experimental, o conjunto de parâmetros é válido para representar o material. Os algoritmos são rápidos e o tempo de caracterização do material transcorrido é reduzido.

Quanto ao conceito físico dos parâmetros,  $m_s$  é a magnetização de saturação,  $\alpha$  representa o acoplamento inter domínios,  $a$  caracteriza a forma da magnetização anisterética,  $k$  representa a dificuldade de movimentar as paredes de domínio. A flexão sofrida pela parede de domínio é linearmente dependente da diferença entre a magnetização anisterética e a magnetização e  $c$  é o coeficiente de proporcionalidade. Os parâmetros do modelo assumem valores positivos:  $M_s \approx B_s/\mu_0$ ,  $10^{-6} < \alpha < 10^{-4}$ ,  $a$  é aproximadamente igual ao campo coercitivo e  $0 < c < 1$ .

As metodologias para determinar parâmetros de materiais foram desenvolvidas e validadas em conformidade com o propósito deste trabalho. Quanto à relevância, este trabalho pode permitir: modelar com maior precisão o comportamento de materiais magnéticos; fornecer informações para elaborar relatórios de caracterização de materiais; projetar máquinas elétricas de maneira mais eficiente; comparar materiais; e avaliar informações de catálogo de fabricantes.

Quanto aos ganhos do estudo além dos já citados, os sistemas de equações desenvolvidos poderão ser estendidos a outras metodologias de caracterização existentes. As vantagens dos métodos são a rapidez de cálculo dos parâmetros e a representação adequada do comportamento experimental do material, que garante resultados confiáveis para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos.

Quanto à multidisciplinaridade, este trabalho mostrou a aplicação de EDOs; problema de Cauchy; método do fator integrante; e séries na caracterização de materiais.

Quanto à originalidade do trabalho, foram desenvolvidas cinco metodologias inéditas para determinar os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton.

A primeira metodologia é mais recomendável para a caracterização de materiais que apresentam laços de histerese suaves, mas nada impede que as cinco metodologias sejam utilizadas para caracterizar um dado material. E neste caso, o tomador de decisão deve analisar qual dos conjuntos de parâmetros obtidos melhor representa o comportamento experimental do material. Esta análise pode ser feita com base em três critérios: distância acumulada calculada considerando pontos experimentais e pontos simulados; erro médio quadrático *MSE*; e erro percentual considerando a perda magnética medida e a perda magnética calculada.

Para continuidade desta pesquisa, os seguintes temas são sugeridos: comparar as metodologias propostas com aquelas apresentadas na literatura; variar a amplitude máxima da indução magnética e identificar o conjunto ótimo de parâmetros; aplicar as

metodologias desenvolvidas em problemas envolvendo elementos finitos; desenvolver o equacionamento da terceira metodologia considerando a indução magnética como variável independente; analisar a ordem de grandeza do erro de truncamento da série da segunda metodologia proposta e se necessário incluir mais termos da série para representar a integral; automatizar a seleção dos pontos principais utilizados para construir o sistema de equações de cada uma das metodologias propostas, desenvolver método de previsão de laços menores utilizando os parâmetros calculados em nível de indução magnética maior, utilizar as metodologias para determinar os parâmetros do modelo vetorial de Jiles-Atherton, analisar a sensibilidade da solução ao sexto parâmetro quando os demais são mantidos constantes, identificar os parâmetros utilizando um único ramo do laço de histerese experimental, identificar os parâmetros excluindo-se a rotina de cálculo da norma infinito.

## REFERÊNCIAS

- [1] MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA. Secretaria de energia elétrica. **Boletim Mensal de Monitoramento do Sistema Elétrico Brasileiro**: fevereiro 2015. Brasília, 2015. Disponível em: <  
[http://www.mme.gov.br/ documents /10584/2027273/  
Boletim+de+Monitoramento+do+Sistema+El%C3%A9trico+-  
+Fevereiro-2015.pdf](http://www.mme.gov.br/documents/10584/2027273/Boletim+de+Monitoramento+do+Sistema+El%C3%A9trico+-+Fevereiro-2015.pdf)>. Acesso em: 10 abr. 2015.
- [2] MENDES, F. Barbosa Rodrigues. **Análise de Medidas de Perdas Magnéticas em Lâminas de Aço ao Silício**. 2004. 115f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- [3] MENDES, F. B. R., BATISTELA, N. J., LEITE, J. V., KUO-PENG, P., SADOWSKI, N., BASTOS, J. P. A, GAVILON, I. Estratégia de Separação de Perdas Magnéticas em Aços para Fins Elétricos. MOMAG 2012, Décimo CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, João Pessoa/Brasil.
- [4] MEURER, E. J. et al. Análise e Comparação de Aparelhos para Medidas de Perdas Magnéticas em Lâminas de Aço ao Silício. **MOMAG**, v. 2004, p. 1-5, 2004.
- [5] SOARES, Ronaldo Alves. Estudo comparativo de ensaios de chapa única para medidas de perdas em aços elétricos. 2001.
- [6] BORGES DA SILVA, Carlos Leandro, BATISTA, Adalberto José. Comparison of Two Different Models for the Prediction of Magnetic Losses in Silicon Steel Sheets. MOMAG 2012, Décimo CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo.
- [7] SILVA, C. L. B.; BATISTA, A. J.; TEIXEIRA, W. C. E. A genetic algorithm for parameters identification in a model of losses in magnetic steels. In: **Proc. of the Brazilian Power Electronics Conference**. 2009. p. 116-123.
- [8] LIMA, J. P. F.; BATISTA, A. J.; MACHADO, P. C. M. Automated Measurement System for Soft Magnetic Materials Characterization- Application to Silicon Steel. In: **proceedings of the XVII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais**. 2006. p. 5112-5123.
- [9] BATISTA, A. J.; LIMA, J. P. F. Numerical Analysis of the Field Distribution in a Single Sheet Tester. **Anais do MOMAG 2008**, p. 320-325, 2008.
- [10] LIMA, J. P. F.; BATISTA, A. J.; MARRA, E. G. Magnetic- Induction Waveform Control Method Applied to Silicon Steel

- Characterization. In: **proceedings of the VII International Conference on Industrial Applications**. 2006. p. 1-8.
- [11] JILES, D. C., ATHERTON, D. L. Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 61, p. 48-60, 1986.
- [12] JILES, D. C., THOELKE, J. B., DEVINE, M. K. Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis. *IEEE Trans. Magn.*, v. 28, p. 27-35, Jan. 1992.
- [13] LEITE, J. V., SADOWSKI, N., KUO-PENG, P., BATISTELA, N. J., BASTOS, J. P. A., ESPÍNDOLA, A. A. de. Inverse Jiles-Atherton vector hysteresis model. *IEEE Trans. Magn.*, v. 40, n. 4, p. 1769-1775, Jul. 2004.
- [14] LEITE, J. V. **Contribuição à Modelagem Vetorial da Histerese Magnética**. 2006. 119f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- [15] D. Lederer, H. Igarashit, A. Kost, T. Honma, "On the Parameter Identification and Application of the Jiles-Atherton Hysteresis Model for Numerical Modelling of Measured Characteristic", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no.3, pp. 1211-1214, May 1999.
- [16] LEITE, J. V., SADOWSKI, N., KUO-PENG, P., BATISTELA, N. J., BASTOS, J. P. A. The inverse Jiles-Atherton model parameters identification. *IEEE Trans. Magn.*, v. 39, p. 1397-1400, May 2003
- [17] E. D. M. Hernandez, C. S. Muranaka, J. R. Cardoso, "Identification of the Jiles-Atherton model parameters using random and deterministic searches", *Physica B*, 275, pp. 212-215, 2000.
- [18] P. Kis, A. Iványi, "Parameter identification of Jiles-Atherton model with nonlinear least-square method", *Physica B*, 343, pp. 59-64, 2004.
- [19] P. R. Wilson, J. N. Ross, A. D. Brown, "Optimizing the Jiles-Atherton Model of Hysteresis by a Genetic Algorithm", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 37, no.2, pp. 989-993, Mar. 2001.
- [20] A. Salvini, F. R. Fulginei, "Genetic Algorithms and Neural Networks Generalizing the Jiles-Atherton Model of Static Hysteresis for Dynamic Loops", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no.2, pp. 873-876, Mar. 2002.
- [21] J. V. Leite, S. L. Avila, N. J. Batistela, W. P. Carpes, Jr., N. Sadowski, P. Kuo-Peng, J. P. A. Bastos, "Real Coded Genetic Algorithm for Jiles-Atherton Model Parameters Identification", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no.2, pp. 888-891, Mar. 2004.

- [22] S. Cao, B. Wang, R. Yan, W. Huang, Q. Yang, “Optimization of Hysteresis Parameters for the Jiles-Atherton Model Using a Genetic Algorithm”, *IEEE Trans. App. Supercond.*, vol. 14, no.2, pp. 1157-1160, Jun. 2004.
- [23] F. R. Fulginei, A. Salvini “Softcomputing for the Identification of the Jiles–Atherton Model Parameters”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no.3, pp. 1100-1108, Mar. 2005.
- [24] K. Chwastek, J. Szczyglowski, “Identification of a hysteresis model parameters with genetic algorithms”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 71, pp. 206–211, 2006.
- [25] M. Toman, G. Stumberger, D. Dolinar, “Parameter Identification of the Jiles–Atherton Hysteresis Model Using Differential Evolution”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no.6, pp. 1098-1101, Jun. 2008.
- [26] R. Marion, R. Scorretti, N. Siauve, M. Raulet, L. Krähenbühl, “Identification of Jiles–Atherton Model Parameters Using Particle Swarm Optimization”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no.46, pp. 894-897, Jun. 2008.
- [27] K. Chwastek, J. Szczygowski, “An alternative method to estimate the parameters of Jiles–Atherton model”, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 314, pp. 47–51, 2007.
- [28] SADOWSKI, N., BATISTELA, N. J., BASTOS, J. P. A., LAJOIE-MAZENC, M. An inverse Jiles-Atherton model to take into account hysteresis in time stepping finite element calculations. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 38, n.2, p. 797-800, 2002.
- [29] BECHARA, Evanildo. **Moderna Gramática Portuguesa**. 38ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015.
- [30] BATISTELA, N. J. **Caracterização e Modelagem Eletromagnética de Lâminas de Aço ao Silício**. 2001. 227f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- [31] SALVADOR GONZALES, M. L., **Máquinas Elétricas Estáticas**. Lima: Ed. Salvador, 2001, v. 1.
- [32] SALVADOR GONZALES, M.L., **Máquinas Elétricas Estáticas**. Lima: Ed. Salvador, 2001, v. 2.
- [33] LEITE, Jean Vianei. **Análise de Modelos Diferenciais de Histerese Magnética Considerando Laços Menores de Indução**. 2002. 106f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

- [34] RUGGIERO, Márcia A. Gomes, LOPES, Vera Lúcia da Rocha, **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª edição. Makron Books, 1997-1998. p. 197.
- [35] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N.J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. A New Methodology to Obtain the Parameters of the Scalar Jiles-Atherton Hysteresis Model, 15th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC 2012 Proceedings, 2012, Oita/Japão.
- [36] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N. J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Uma Nova Metodologia para Obtenção de Parâmetros do Modelo de Histerese de Jiles-Atherton. MOMAG 2012, Décimo CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, João Pessoa/Brasil.
- [37] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N.J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. An Improved Methodology for Obtaining Jiles-Atherton Hysteresis Model Parameters , Conference on the Computation of Eletromagnetic Fields - COMPUMAG 2015 Proceedings, 2015, Montréal/Canada.
- [38] HAASER, Norman B., LASALLE, Joseph P., SULLIVAN, Joseph A. Análisis Matemático 2. Curso Intermedio. México. Editorial Trillas, 1970, v.2. p. 517.
- [39] ZILL, Dennis. G., CULLEN, Michael R.. **Euações Diferenciais**. S. Paulo: Makron Books, 2006.
- [40] ZILL, Dennis. G., CULLEN, Michael R.. **Euações Diferenciais**. 3ª edição. S. Paulo: Makron Books, 2001. v. 1, p. 69.
- [41] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N. J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Uma Nova Metodologia para Obtenção dos Parâmetros do Modelo Escalar de Histerese de Jiles-Atherton. MOMAG 2016, Décimo segundo CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Porto Alegre/Brasil.
- [42] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N. J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Uma Metodologia Aprimorada para Obtenção dos Parâmetros do Modelo Escalar de Histerese de Jiles-Atherton. MOMAG 2016, Décimo segundo CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Porto Alegre/Brasil.
- [43] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N. J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Uma Metodologia Simplificada para a Obtenção dos Parâmetros do Modelo Escalar de Histerese de Jiles-Atherton. MOMAG 2016, Décimo segundo

- CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Porto Alegre/Brasil.
- [44] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N. J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Inserção do Sexto Parâmetro no Modelo Escalar de Histerese de Jiles-Atherton e Metodologia para Identificação dos Parâmetros. MOMAG 2016, Décimo segundo CBBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, Porto Alegre/Brasil.
- [45] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N.J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. A New Method for Parameters Obtaining of Jiles-Atherton Hysteresis Scalar Model, 17th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC 2016 Proceedings, 2016, Miami, FL/USA.
- [46] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N.J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. A Simplified Method for Acquisition of the Parameters of Jiles-Atherton Hysteresis Scalar Model Without Use of Derivatives, 17th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC 2016 Proceedings, 2016, Miami, FL/USA.
- [47] MENDES, F. B. R., LEITE, J. V., BATISTELA, N.J., SADOWSKI, N., SUÁREZ, F. M. S. Insertion of a Sixth Parameter in Jiles-Atherton Hysteresis Scalar Model and the Method for Parameters Identification, 17th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC 2016 Proceedings, 2016, Miami, FL/USA.
- [48] LEHMANN, Charles H., **Geometria Analítica**. 6ª edição. Rio de Janeiro: Globo, 1987. p. 286.
- [49] **Ajuste de Curvas, Regressão Não Linear**. Computação. 08 de maio de 2012. Disponível em:  
<http://ssdi.di.fct.unl.pt/comp/1112/aulas/teoricas/aulaT10.pdf>.  
Acesso em: 24 de set. 2015.
- [50] MATSUMOTO, ÉliaYathie, **Matlab7 Fundamentos**. São Paulo: Érica, 2008. p. 314-317.
- [51] WEBER MENDONÇA, Melissa. **Matlab Avançado**. Universidade Federal de Santa Catarina.
- [52] QUEIROZ LIMA, Roberta de, SAMPAIO, Rubens. **Identificação de Parâmetros pelo Método dos Mínimos Quadrados Não Linear**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. DEM Departamento de Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro, agosto de 2009. Disponível em: <http://www.puc->

- [rio.br/pibic/relatorio\\_resumo2009/relatorio/mec/roberta.pdf](http://rio.br/pibic/relatorio_resumo2009/relatorio/mec/roberta.pdf). Acesso em: 24 de set de 2015.
- [53] **Equation Solving Algorithms**. Mathworks. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/equation-solving-algorithms.html>. Acesso em 30 de setembro de 2015.
- [54] MACIEL ROSA, Rodrigo. **Estudo e Implementação do Método Dogleg para Programação Não-Linear**. 2005. 51f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- [55] Mathworks. Disponível em: <http://www.mathworks.com>. Acesso em 30 de setembro de 2015.
- [56] FLEMMING, Diva Marília, GONÇALVES, Mírian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 5ª edição. SP: Makron, 1992.
- [57] TELLO, J. Manuel Sotomayor. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1979.p. 5-7.
- [58] RIVERA, Jaime E. Muñoz. **Cálculo Diferencial II & Equações Diferenciais**. Textos de graduação. Petrópolis: Editora Gráfica Rondon Ltda, 2007. p. 35-36.
- [59] MENDES, Filomena B. R., LEITE, Jean V., BATISTELA, Nelson J., SADOWSKI, Nelson, SUÁREZ, Fredy M. S., “An Improved Method for Acquisition of the Parameters of Jiles-Atherton Hysteresis Scalar Model Using Integral Calculus”, *JMOe*, vol. 16, no.1, pp. 165-179, March. 2017.
- [60] HOFFMANN, Kleyton, BASTOS, João P. A., LEITE, Jean V., SADOWSKI, Nelson, BARBOSA, Filomena, “A Vector Jiles-Atherton Model for Improving the FEM Convergence”, *IEEE Trans. Magn.*, to be published.
- [61] SPIEGEL, Murray R. **Cálculo Avançado**. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1971. p.135-136.

## APÊNDICE A – Primeira Metodologia

### A.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

As equações do modelo de Jiles-Atherton são as seguintes:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (\text{A.1})$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (\text{A.2})$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (\text{A.4})$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (\text{A.5})$$

$$B = \mu_0(H + M) \quad (\text{A.6})$$

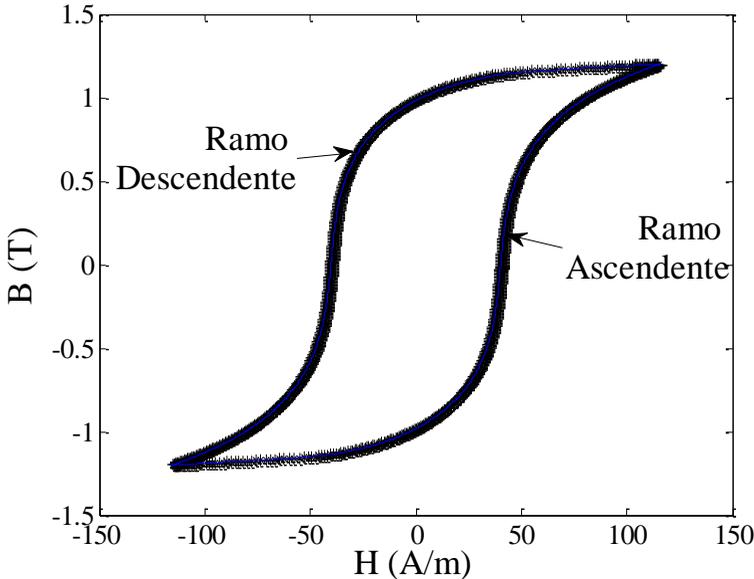
Onde:  $M$  é a magnetização;  $M_{irr}$  é a magnetização irreversível;  $M_{rev}$  é a magnetização reversível;  $M_{an}$  é a magnetização anisterética;  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$  são os parâmetros do material;  $H_e$  é o campo magnético efetivo;  $\delta$  assume os valores  $\pm 1$ ;  $H$  é o campo magnético;  $B$  é a indução magnética e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo.

As equações (A.1)-(A.6) permitem obter uma EDO, equação diferencial ordinária, não linear em função de  $H$ , e de  $B$ : onde os cinco parâmetros do modelo,  $m_s$ ;  $\alpha$ ;  $a$ ;  $k$ ; e  $c$ , também aparecem. A metodologia é mostrada a seguir. Isolando a magnetização total das demais variáveis em (A.6) decorre imediatamente:  $M = (B/\mu_0) - H$ . Levando esta expressão para (A.5), o campo magnético efetivo pode ser escrito da seguinte forma:  $H_e = H + \alpha((B/\mu_0) - H)$ . Colocando o campo magnético em evidência, segue:

$$H_e = H(1 - \alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \quad (\text{A.7})$$

Para conduzir a modelagem matemática, a Fig. 78 mostra uma curva  $B-H$  de um material ferromagnético. Existe interesse em modelar este laço segundo a abordagem de Jiles-Atherton, e matematicamente o laço poderia ser representado por duas funções: a primeira função para modelar o ramo ascendente, pertencente ao primeiro, terceiro, e quarto quadrantes; e a última função para modelar o ramo descendente, pertencente ao primeiro, segundo, e terceiro quadrantes.

Figura 78 – Curva  $B-H$ .



Fonte: Autoria própria (2011).

Considerando (A.4), para  $\delta = 1$  tem-se o ramo ascendente, e para  $\delta = -1$  tem-se o ramo descendente. Posto isto, organiza-se a análise em duas etapas: observando no primeiro momento o ramo ascendente da curva  $B-H$ .

## A.2 MODELAGEM DO RAMO ASCENDENTE

Para o ramo ascendente tem-se  $\delta = 1$ .

Observa-se que a equação (A.4) estabelece a taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético efetivo  $dM_{irr}/dH_e = (M_{an} - M_{irr})/k$ , e isto permite formalizar a primeira afirmação: a magnetização irreversível é dependente do campo magnético efetivo,

isto é,  $M_{irr} = M_{irr}(H_e)$ . Por outro lado, observando (A.7) é possível formalizar a segunda afirmação: o campo magnético efetivo é dependente do campo magnético e da indução magnética, de outro modo,  $H_e = H_e(H, B)$ . Levando estas duas afirmações em consideração, evidentemente segue:  $M_{irr} = M_{irr}(H_e(H, B))$ , em consequência, pode-se derivar a magnetização irreversível em cadeia e considerar a primeira parcela, como segue:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{dH_e}{dH} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{dM_{irr}}{dB} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{dH_e}{dB} \quad (\text{A.9})$$

Nas seções C, e 7.2 são apresentados os impactos de se considerarem as duas parcelas da derivada da magnetização irreversível, provenientes da regra da cadeia. Para denotar derivadas está sendo utilizada a notação empregada no modelo inverso, apresentado na seção 2.3.

Considerando o termo  $dH_e/dH$  de (A.8), e com base em (A.7) é possível determinar a expressão da derivada do campo magnético efetivo com respeito ao campo magnético, como segue:

$$\frac{dH_e}{dH} = 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right). \quad (\text{A.10})$$

Por sua vez, a equação (A.6) permite escrever:  $B/\mu_0 = H + M$ . Isolando a magnetização total das demais variáveis nesta última equação tem-se:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (\text{A.11})$$

Como  $M = M(H, B)$ , e como a magnetização total é a soma de suas componentes reversível e irreversível, então:  $M_{irr} = M_{irr}(H, B)$  e  $M_{rev} = M_{rev}(H, B)$ .

Substituindo (A.2) em (A.1) tem-se:  $M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr})$ , isto é,  $M = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr}$ , ou seja,  $M = M_{irr}(1 - c) + cM_{an}$ . Isolando a

componente irreversível da magnetização, das demais variáveis nesta última equação, é também verdade que:

$$M_{irr} = \frac{M - cM_{an}}{1 - c} . \quad (A.12)$$

Substituindo (A.11) em (A.12) obtém-se:

$$M_{irr} = \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) - \frac{c}{1 - c} M_{an} . \quad (A.13)$$

A equação (A.13) permite obter a expressão da derivada da magnetização irreversível em relação ao campo magnético como segue:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{1 - c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1 - c)} \frac{dM_{an}}{dH} \quad (A.14)$$

Por outro lado, substituindo (A.4) em (A.8), e considerando  $\delta = 1$  tem-se:  $dM_{irr}/dH = [(M_{an} - M_{irr})/k]dH_e/dH$  que com a equação (A.10) geram:  $dM_{irr}/dH = [(M_{an} - M_{irr})/k]\{1 - \alpha + [(\alpha/\mu_0)(dB/dH)]\}$ , isto é,

$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - M_{irr} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right]$  que com a equação (A.13) permitem escrever:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \left\{ \left[ \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) - \frac{c}{(1 - c)} M_{an} \right] \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right\}$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \left[ \frac{1}{1 - c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right] + \left[ \frac{c}{1 - c} M_{an} \left[ \frac{(1 - \alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right]$$

Colocando  $M_{an}$  em evidência é também verdade que:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left\{ \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] + \left[ \frac{c}{(1-c)} \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right] \right\} - \left[ \frac{1}{1-c} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] \right]$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{dM_{irr}}{dH} = M_{an} \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\ \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \end{aligned} \quad (A.15)$$

A equação (A.14) pode ser alterada, sem prejudicar a igualdade, e escrita em uma nova forma como:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH_e} \frac{dH_e}{dH}.$$

Substituindo (A.10) nesta nova forma de (A.14) tem-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right) \right]. \quad (A.16)$$

As equações (A.15), e (A.16) mostram a expressão da derivada da magnetização irreversível em relação ao campo magnético, e conseqüentemente, (A.15) é igual a (A.16), e segue:

$$\begin{aligned} M_{an} \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\ \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} = \\ \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \frac{c}{(1-c)} \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right] \end{aligned} \quad (A.17)$$

No entanto, substituindo (A.7) em (A.3) obtém-se o seguinte resultado:

$$M_{an} = m_s \left[ \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) - \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right]. \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.3) permite a obtenção da expressão da derivada da magnetização anisterética em relação ao campo magnético efetivo, como segue:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = m_s \left[ \frac{d}{dH_e} \left( \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) \right) - \frac{d}{dH_e} \left( \frac{a}{H_e} \right) \right]$$

$$\text{Sendo } \frac{d}{dH_e} \left( \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) \right) = -\text{csc}h^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) \frac{d}{dH_e} \left( \frac{H_e}{a} \right).$$

$$\text{O que implica em } \frac{d}{dH_e} \left( \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) \right) = -\frac{1}{a} \text{csc}h^2 \left( \frac{H_e}{a} \right).$$

Como  $\coth^2(H_e/a) = 1 + \text{csc}h^2(H_e/a)$ , segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dH_e} \left( \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) \right) &= -\frac{1}{a} \text{csc}h^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) = -\frac{1}{a} \left[ \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) - 1 \right] = \\ &-\frac{1}{a} \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Por outro lado,  $\frac{d}{dH_e} \left( \frac{a}{H_e} \right) = -\frac{a}{H_e^2}$ , e consequentemente,

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \frac{a^2}{H_e^2} \right] \quad (\text{A.19})$$

Para finalizar, substituindo as equações (A.18), (A.19), e (A.7) na equação (A.17), tem-se:

$$\begin{aligned}
& m_s \left[ \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) - \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right] \\
& \left[ \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} + \frac{c}{(1-c)} \frac{(1-\alpha)}{k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} \right] - \\
& \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) - \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{\alpha}{\mu_0 k} \frac{dB}{dH} = \\
& \frac{1}{1-c} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) - \\
& \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) + \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 \right] \\
& \left[ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \right]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

A equação (A.20) está escrita em termos de  $H$ ,  $B$ ,  $dB/dH$ , e dos cinco parâmetros procurados:  $m_s$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $k$ , e  $c$ . O termo  $dB/dH$  pode ser isolado das demais variáveis em (A.20), como segue:

$$\frac{dB}{dH} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9}{T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16}} \tag{A.21}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
T_1 &= -m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) \\
T_2 &= -m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{c}{1-c} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right) \\
T_3 &= \frac{m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)
\end{aligned}$$

$$T_4 = \frac{m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{c}{1-c} \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)$$

$$T_5 = \frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \left( \frac{1-\alpha}{k} \right)$$

$$T_6 = -\frac{1}{1-c}$$

$$T_7 = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} (1-\alpha)$$

$$T_8 = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) (1-\alpha)$$

$$T_9 = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 (1-\alpha)$$

$$T_{10} = m_s \coth \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \left( \frac{\alpha}{\mu_0 k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \right)$$

$$T_{11} = \frac{-m_s a}{\left( H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0} \right)} \left( \frac{\alpha}{\mu_0 k} + \frac{c}{(1-c)} \frac{\alpha}{\mu_0 k} \right)$$

$$T_{12} = -\frac{1}{(1-c)} \left( \frac{B}{\mu_0} - H \right) \frac{\alpha}{\mu_0 k}$$

$$T_{13} = -\frac{1}{(1-c)} \frac{1}{\mu_0}$$

$$T_{14} = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \frac{\alpha}{\mu_0}$$

$$T_{15} = -\frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \coth^2 \left( \frac{H(1-\alpha)}{a} + \frac{\alpha B}{a\mu_0} \right) \frac{\alpha}{\mu_0}$$

$$T_{16} = \frac{c}{(1-c)} \frac{m_s}{a} \left( \frac{a}{H(1-\alpha) + \frac{\alpha B}{\mu_0}} \right)^2 \frac{\alpha}{\mu_0}$$

A equação precedente tem importância especial: (A.21) é a equação principal utilizada na identificação dos parâmetros do modelo. Esta EDO não linear pode ser representada, de forma simplificada, por:

$$\frac{dB}{dH} = f(H, B) \quad (\text{A.22})$$



## APÊNDICE B – Segunda Metodologia

### B.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

As fórmulas que permitem identificar os parâmetros do modelo são as próprias equações do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, e uma relação constitutiva. Conforme [28] são consideradas as seguintes equações:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (\text{B.1})$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (\text{B.2})$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (\text{B.4})$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (\text{B.5})$$

$$B = \mu_0(H + M) . \quad (\text{B.6})$$

#### B.1.1 Construção do Problema de Cauchy Associado

Tendo em mente que o propósito nesta seção é encontrar os cinco parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, sem recorrer ao cálculo de derivadas, a modelagem matemática é iniciada substituindo (B.2) em (B.1):  $M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr})$ , isto é,

$$M = (1-c)M_{irr} + cM_{an} . \quad (\text{B.7})$$

Além disso, considerando (B.5) tem-se  $\alpha M = H_e - H$ , ou seja,  $M = \frac{H_e - H}{\alpha}$  que por sua vez, substituída em (B.6) permite escrever  $B = \mu_0 \left( H + \frac{H_e - H}{\alpha} \right)$ . Desta última equação tem-se:

$$B = \mu_0 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) H + \frac{\mu_0}{\alpha} H_e . \quad (\text{B.8})$$

De (B.8) procede  $\frac{\mu_0}{\alpha} H_e = B - \mu_0 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) H$  que também significa:

$$H_e = \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1) H . \quad (\text{B.9})$$

Por outro lado, a equação (B.7) permite calcular a derivada da magnetização em relação ao campo magnético efetivo:

$$\frac{dM}{dH_e} = (1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_e} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} . \quad (\text{B.10})$$

Desta forma, substituindo (B.4) em (B.10) decorre:

$$\frac{dM}{dH_e} = \frac{(1-c)}{k\delta} M_{an} - \frac{(1-c)}{k\delta} M_{irr} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} . \quad (\text{B.11})$$

Ao multiplicar (B.7) por  $1/(k\delta)$  é verdade que:

$$\frac{M}{k\delta} = \frac{(1-c)}{k\delta} M_{irr} + \frac{c}{k\delta} M_{an} \quad (\text{B.12})$$

Depois disto, (B.11) somada a (B.12) permite escrever:

$$\frac{dM}{dH_e} + \frac{M}{k\delta} = \frac{(1-c)}{k\delta} M_{an} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} + \frac{c}{k\delta} M_{an} , \quad \text{ou} \quad \text{por} \quad \text{outra,}$$

$$\frac{dM}{dH_e} + \frac{M}{k\delta} = \frac{M_{an}}{k\delta} - \frac{cM_{an}}{k\delta} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} + \frac{c}{k\delta} M_{an} , \text{ isto é,}$$

$$\frac{dM}{dH_e} + \frac{M}{k\delta} = \frac{M_{an}}{k\delta} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} \quad (\text{B.13})$$

Considerando (B.3) certamente é possível observar que  $M_{an} = M_{an}(H_e)$ , e  $dM_{an}/dH_e = f(H_e)$ , isto é,  $M_{an}$  e  $dM_{an}/dH_e$  ambas dependem de  $H_e$ , e conseqüentemente, afirma-se que (B.13) é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, com variável dependente  $M$ , e variável independente  $H_e$ .

Constrói-se o problema de Cauchy [57] associado a (B.13). Um problema de Cauchy é definido por uma equação, ou sistemas de equações de primeira ordem, e uma condição inicial. Da equação (B.6)  $B/\mu_0 = H+M$ , ou por outra,  $M = (B/\mu_0)-H$ , e conseqüentemente, a condição inicial é:  $M(H_{e0}) = M_0 = (B/\mu_0)-H_0$ .

Considerando (B.9),  $H_{e0} = (\alpha/\mu_0)B_0 - (\alpha-1)H_0$ , e por conseqüência,

$$M(H_{e0}) = M\left(\frac{\alpha}{\mu_0}B_0 - (\alpha-1)H_0\right) = M_0 = \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 \quad (\text{B.14})$$

O seguinte problema de Cauchy é estabelecido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dH_e} + \frac{M}{k\delta} = \frac{M_{an}}{k\delta} + c \frac{dM_{an}}{dH_e} \\ M(H_{e0}) = M\left(\frac{\alpha}{\mu_0}B_0 - (\alpha-1)H_0\right) = M_0 = \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 \end{array} \right.$$

### B.1.2 Resolução do Problema de Cauchy

O método do fator integrante [58] é utilizado na resolução do problema de Cauchy. Determina-se o fator integrante supondo que existe uma função  $u(H_e)$  tal que:

$$u(H_e) \frac{dM}{dH_e} + u(H_e) \frac{M}{k\delta} = u(H_e) \frac{M_{an}}{k\delta} + u(H_e) c \frac{dM_{an}}{dH_e} \text{ e}$$

$$u(H_e) \frac{dM}{dH_e} + u(H_e) \frac{M}{k\delta} = \frac{d}{dH_e} (u(H_e)M)$$

Dado que  $u(H_e) \neq 0$  e  $M(H_e) \neq 0$  então

$$u(H_e) \frac{dM}{dH_e} + u(H_e) \frac{M}{k\delta} = M \frac{du}{dH_e} + \frac{dM}{dH_e} u(H_e)$$

Na equação anterior são comparados os termos do lado direito com aqueles termos do lado esquerdo. Diante disso conclui-se que:

$$\frac{du}{dH_e} = \frac{u(H_e)}{k\delta}, \text{ ou seja, } \frac{u'(H_e)}{u(H_e)} = \frac{1}{k\delta}$$

Como  $d(\ln[u(H_e)])/dH_e = u'(H_e)/u(H_e)$ , segue  $d(\ln[u(H_e)])/dH_e = 1/(k\delta)$ . Separando as variáveis existentes na equação anterior, e integrando vem  $\int d(\ln(u(H_e))) = \int [1/(k\delta)] dH_e$ , e conseqüentemente,  $\ln(u(H_e)) = [H_e/(k\delta)] + cte$ . Em particular para  $cte = 0$  tem-se  $\ln(u(H_e)) = H_e/(k\delta)$ , o que então implica em  $u(H_e) = e^{H_e/(k\delta)}$ . O fator integrante é  $e^{H_e/(k\delta)}$ .

A equação (B.13) é multiplicada pelo fator integrante e como resultado, tem-se:

$$e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{dM}{dH_e} + e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{M}{k\delta} = e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{M_{an}}{k\delta} + c e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{dM_{an}}{dH_e} \quad (\text{B.15})$$

Como  $e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{dM}{dH_e} + e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{M}{k\delta} = \frac{d}{dH_e} \left( e^{\frac{H_e}{k\delta}} M \right)$ , decorre imediatamente:

$$(B.15) \text{ pode ser escrita sob a forma } \frac{d}{dH_e} \left( e^{\frac{H_e}{k\delta}} M \right) = e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{M_{an}}{k\delta} + c e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{dM_{an}}{dH_e}.$$

Integrando a equação anterior tem-se:

$$\int d \left( e^{\frac{H_e}{k\delta}} M \right) = \int e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{M_{an}}{k\delta} dH_e + c \int e^{\frac{H_e}{k\delta}} \frac{dM_{an}}{dH_e} dH_e, \text{ que também significa,}$$

$$M e^{\frac{H_e}{k\delta}} - M_0 e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}} = \frac{1}{k\delta} \int_{H_{e0}}^{H_e} M_{an} e^{\frac{x}{k\delta}} dx + c \int_{H_{e0}}^{H_e} e^{\frac{x}{k\delta}} \frac{dM_{an}}{dx} dx \quad (\text{B.16})$$

Aplica-se o método de integração por partes [56], dada por  $\int U dV = UV - \int V dU$ , no segundo termo do lado direito de (B.16).

Dessa maneira, para  $U = e^{x/(k\delta)}$  tem-se  $dU = (1/(k\delta)) e^{x/(k\delta)} dx$ . Para  $dV = (dM_{an}/dx) dx$  segue  $\int dV = \int (dM_{an}/dx) dx$ , isto é,  $V = M_{an}$ . É também verdade que:

$$(B.17) \quad c \int_{H_{e0}}^{H_e} e^{\frac{x}{k\delta}} \frac{dM_{an}}{dx} dx = c \left\{ \left( M_{an} e^{\frac{x}{k\delta}} \right)_{H_{e0}}^{H_e} - \frac{1}{k\delta} \int_{H_{e0}}^{H_e} e^{\frac{x}{k\delta}} M_{an}(x) dx \right\}$$

Substituindo (B.17) em (B.16) obtém-se:

$$M e^{\frac{H_e}{k\delta}} - M_0 e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}} = \frac{1}{k\delta} \int_{H_{e0}}^{H_e} M_{an} e^{\frac{x}{k\delta}} dx + c \left( M_{an} e^{\frac{x}{k\delta}} \right)_{H_{e0}}^{H_e} -$$

$$\frac{c}{k\delta} \int_{H_{e0}}^{H_e} e^{\frac{x}{k\delta}} M_{an}(x) dx$$

, ou ainda,

$$M e^{\frac{H_e}{k\delta}} - M_0 e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}} = \left( \frac{1}{k\delta} - \frac{c}{k\delta} \right) \int_{H_{e0}}^{H_e} e^{\frac{x}{k\delta}} M_{an}(x) dx + c M_{an}(H_e) e^{\frac{H_e}{k\delta}} - c M_{an}(H_{e0}) e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}}$$

$$M e^{\frac{H_e}{k\delta}} - M_0 e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}} = (1-c) \frac{1}{k\delta} \int_{H_{e0}}^{H_e} M_{an}(x) e^{\frac{x}{k\delta}} dx +$$

(B.18)

$$c M_{an}(H_e) e^{\frac{H_e}{k\delta}} - c M_{an}(H_{e0}) e^{\frac{H_{e0}}{k\delta}}$$

Multiplicam-se ambos membros da igualdade (B.18) por  $e^{-H_e/(k\delta)}$ , e se obtém:

$$M - M_0 e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}} = (1-c) \frac{1}{k\delta} e^{\frac{-H_e}{k\delta}} \int_{H_{e0}}^{H_e} M_{an}(x) e^{\frac{x}{k\delta}} dx +$$

$$c M_{an}(H_e) - c M_{an}(H_{e0}) e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}}$$

Isolando a magnetização total das demais variáveis na equação anterior, vem:

$$M = M_0 e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}} + (1-c) \frac{1}{k\delta} e^{\frac{-H_e}{k\delta}} \int_{H_{e0}}^{H_e} M_{an}(x) e^{\frac{x}{k\delta}} dx +$$

$$c M_{an}(H_e) - c M_{an}(H_{e0}) e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}}$$

Considerando a equação anterior e (B.3) é possível escrever:

$$\begin{aligned}
M &= M_0 e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}} + \\
(1-c) \frac{1}{k\delta} e^{\frac{-H_e}{k\delta}} &\int_{H_{e0}}^{H_e} m_s \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} dx + \\
cm_s &\left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] - \\
cm_s &\left[ \coth\left(\frac{H_{e0}}{a}\right) - \frac{a}{H_{e0}} \right] e^{\frac{H_{e0}-H_e}{k\delta}}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

### B.1.3 Relação Proposta: Indução Magnética com o Campo Magnético

Uma vez resolvido o problema de Cauchy associado, é extremamente relevante observar que: é possível retornar as equações originais do modelo para escrever uma equação que relaciona a indução magnética com o campo magnético, onde aparecem também os parâmetros do material. Levando isto em consideração, da igualdade (B.6) tem-se:  $M = (B/\mu_0) - H$  que juntamente com (B.9) são substituídas em (B.19) possibilitando escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\mu_0} - H &= \left[ \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 \right] e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} + \\
(1-c) \frac{m_s}{k\delta} e^{\frac{-\frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} &\int_{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}^{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H} \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} dx + \\
cm_s &\left[ \coth\left(\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{a}\right) - \frac{a}{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H} \right] - \\
cm_s &\left[ \coth\left(\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{a}\right) - \frac{a}{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0} \right] \\
e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} &
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Observa-se que a equação (B.20) envolve apenas: a indução magnética; o campo magnético; e os cinco parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton [59], [60]. Entretanto (B.20) relaciona o campo magnético e a indução magnética de forma implícita. Através de (B.20) é possível descobrir os cinco parâmetros do modelo quando a indução magnética, e o campo magnético são ambos conhecidos. Além disso, outro ponto atraente em (B.20) é a ausência da derivada. Quando o cálculo de derivadas for necessário, isto pode conduzir a instabilidade numérica, especialmente se existirem ruídos nos dados experimentais. É importante lembrar que [56] a derivada de uma função  $B(H)$  no ponto  $H_1$  é definida pelo limite

$$B'(H_1) = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{B(H_1 + \Delta H) - B(H_1)}{\Delta H}$$
 quando este limite existe. Este limite fornece a inclinação da reta tangente à curva  $B(H)$  no ponto  $(H_1, B(H_1))$ .

#### B.1.4 Resolução Numérica das Integrais

A igualdade (B.20) envolve duas integrais dadas por:  $\int e^{x/(k\delta)} \coth(x/a) dx$  e  $\int (a/x) e^{x/(k\delta)} dx$ . Demasiado tempo de pesquisa foi dedicado à tentativa de resolver estas integrais de forma exata, utilizando os bem conhecidos métodos de integração (integrais por partes, método de substituição, entre outros). Desafortunadamente, este desafio ainda não foi superado.

Para contornar o problema, as duas integrais são resolvidas de forma aproximada, utilizando séries de potência. Não utilizaremos um pacote de matemática simbólica, por exemplo, o Maple, uma vez que estes pacotes além de resolverem a integral de forma aproximada são também um bloco fechado. Isto geralmente impossibilita o usuário fazer a seleção do termo de truncamento.

Por esta razão, atenção especial é dada ao termo

$$\int_{H_{e0}}^{H_e} \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{x/(k\delta)} dx$$
 pertencente à igualdade (B.20). Esta integral será

calculada utilizando a série de MacLaurin dada por:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \text{ válida para todo e qualquer } y \in \mathfrak{R}. \quad (\text{B.21})$$

Em primeiro lugar é realizado um pequeno progresso no termo do integrando que multiplica a exponencial; e posteriormente o integrando completo é preparado. Consideram-se os seguintes desdobramentos:

$$\coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} = \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\frac{x}{a}}$$

desta igualdade pela exponencial segue que:

$$\begin{aligned} \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} &= \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\frac{x}{a}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \\ \left[ \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}} - \frac{1}{\frac{x}{a}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} &= \left[ \frac{\frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} + \frac{-x}{a} e^{\frac{-x}{a}} - e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{\frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} - \frac{-x}{a} e^{\frac{-x}{a}}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \\ \left[ \frac{\frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} + \frac{-x}{a} e^{\frac{-x}{a}} - a e^{\frac{x}{a}} + a e^{\frac{-x}{a}}}{\frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} - \frac{-x}{a} e^{\frac{-x}{a}}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} &= \left[ \frac{x e^{\frac{x}{a}} + x e^{\frac{-x}{a}} - a e^{\frac{x}{a}} + a e^{\frac{-x}{a}}}{x e^{\frac{x}{a}} - x e^{\frac{-x}{a}}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \\ \left[ \frac{(x-a) e^{\frac{x}{a}} + (x+a) e^{\frac{-x}{a}}}{x e^{\frac{x}{a}} - x e^{\frac{-x}{a}}} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} &= \frac{(x-a) e^{\frac{x}{a} + \frac{x}{k\delta}} + (x+a) e^{\frac{-x}{a} + \frac{x}{k\delta}}}{x \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}} \right)} = \\ \frac{(x-a) e^{\frac{k\delta x + ax}{ak\delta}} + (x+a) e^{\frac{-k\delta x + ax}{ak\delta}}}{x \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}} \right)} &= \\ \left\{ \frac{(x-a) e^{\frac{k\delta x + ax}{ak\delta}} + (x+a) e^{\frac{-k\delta x + ax}{ak\delta}}}{x \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}} \right)} \right\} e^{\frac{x}{a}} &= \frac{x}{e^{\frac{x}{a}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x-a)e^{\frac{k\delta x+ax}{ak\delta} + \frac{x}{a}} + (x+a)e^{\frac{-k\delta x+ax}{ak\delta} + \frac{x}{a}}}{x \left( e^{\frac{x}{a} + \frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a} + \frac{x}{a}} \right)} = \\
& \frac{(x-a)e^{\frac{k\delta x+ax+k\delta x}{ak\delta}} + (x+a)e^{\frac{-k\delta x+ax+k\delta x}{ak\delta}}}{x \left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right)} = \\
& \frac{(x-a)e^{\frac{2k\delta x+ax}{ak\delta}} + (x+a)e^{\frac{ax}{ak\delta}}}{x \left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right)} = \\
& \frac{(x-a)e^{\left(\frac{2k\delta+a}{ak\delta}\right)x} + (x+a)e^{\frac{x}{k\delta}}}{x \left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right)}
\end{aligned}$$

O integrando pode ser imediatamente posto na forma:

$$\left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \frac{(x-a)e^{\left(\frac{2k\delta+a}{ak\delta}\right)x} + (x+a)e^{\frac{x}{k\delta}}}{x \left( e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right)} \quad (\text{B.22})$$

Em segundo lugar, os três termos exponenciais do lado direito de (B.22) podem ser escritos na forma apresentada em (B.21). Assim tem-se:

$$\begin{aligned}
e^{\left(\frac{2k\delta+a}{ak\delta}\right)x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \left( \frac{2k\delta+a}{ak\delta} \right) x \right]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{2k\delta+a}{ak\delta} \right)^n x^n}{n!} = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k\delta+a)^n x^n}{a^n k^n \delta^n n!}
\end{aligned}$$

E depois disto considera-se:

$$e^{\frac{2x}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{2x}{a} \right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!}$$

Por fim, observa-se que:

$$e^{\frac{x}{k\delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{k\delta}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n \delta^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n \delta^n n!}$$

Os termos envolvendo exponenciais são agora levados para (B.22) e permitem escrever:

$$\begin{aligned} & \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \\ & \frac{(x-a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k\delta+a)^n x^n}{a^n k^n \delta^n n!} + (x+a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{k^n \delta^n n!}}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} = \\ & \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)(2k\delta+a)^n x^n}{a^n k^n \delta^n n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)x^n}{k^n \delta^n n!}}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} = \\ & \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)(2k\delta+a)^n x^n}{a^n k^n \delta^n n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)x^n a^n}{a^n k^n \delta^n n!}}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} = \\ & \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)(2k\delta+a)^n x^n + (x+a)x^n a^n}{a^n k^n \delta^n n!}}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} = \\ & \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (x-a)(2k\delta+a)^n + (x+a)a^n \right] x^n}{a^n k^n \delta^n n!}}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} = \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x(2k\delta + a)^n - a(2k\delta + a)^n + xa^n + a^{n+1}}{a^n k^n \delta^n n!} \right] x^n}{x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} =$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x \left[ (2k\delta + a)^n + a^n \right] + a \left[ -(2k\delta + a)^n + a^n \right] \right\} x^n}{a^n k^n \delta^n n! x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)}$$

Após executar estas operações envolvendo séries é também verdade que o integrando pode ser colocado na forma:

$$\left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ x \left[ (2k\delta + a)^n + a^n \right] + a \left[ a^n - (2k\delta + a)^n \right] \right\} x^n}{a^n k^n \delta^n n! x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right)} \quad (\text{B.23})$$

B.1.4.1 Para a igualdade (B.23) são calculados os dez primeiros termos do numerador

Para prosseguir,  $t_n$  denota os termos do numerador de (B.23), isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{ x \left[ (2k\delta + a)^n + a^n \right] + a \left[ a^n - (2k\delta + a)^n \right] \right\} x^n}{a^n k^n \delta^n n!} \cong t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_9 .$$

Onde, para  $n = 0$ :

$$t_0 = \frac{\left\{ x \left[ (2k\delta + a)^0 + a^0 \right] + a \left[ a^0 - (2k\delta + a)^0 \right] \right\} x^0}{a^0 k^0 \delta^0 0!} =$$

$$\frac{\left\{ x[1+1] + a[1-1] \right\} 1}{1} = 2x$$

Para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{\left\{x\left[(2k\delta+a)^1+a^1\right]+a\left[a^1-(2k\delta+a)^1\right]\right\}x^1}{a^1k^1\delta^1!} = \\
 &= \frac{\left\{x\left[2k\delta+2a\right]+a\left[a-2k\delta-a\right]\right\}x}{ak\delta} = \\
 &= \frac{\left\{x\left[2k\delta+2a\right]-2k\delta a\right\}x}{ak\delta} = \frac{x^2\left[2k\delta+2a\right]}{ak\delta} - 2x
 \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{\left\{x\left[(2k\delta+a)^2+a^2\right]+a\left[a^2-(2k\delta+a)^2\right]\right\}x^2}{a^2k^2\delta^22!} = \\
 &= \frac{x^3\left[(2k\delta+a)^2+a^2\right]}{a^2k^2\delta^22!} + \frac{a\left[a^2-(2k\delta+a)^2\right]x^2}{a^2k^2\delta^22!}
 \end{aligned}$$

Para  $n = 3$ :

$$\begin{aligned}
 t_3 &= \frac{\left\{x\left[(2k\delta+a)^3+a^3\right]+a\left[a^3-(2k\delta+a)^3\right]\right\}x^3}{a^3k^3\delta^33!} = \\
 &= \frac{x^4\left[(2k\delta+a)^3+a^3\right]}{a^3k^3\delta^33!} + \frac{a\left[a^3-(2k\delta+a)^3\right]x^3}{a^3k^3\delta^33!}
 \end{aligned}$$

⋮

Para  $n = 9$ :

$$\begin{aligned}
 t_9 &= \frac{\left\{x\left[(2k\delta+a)^9+a^9\right]+a\left[a^9-(2k\delta+a)^9\right]\right\}x^9}{a^9k^9\delta^99!} = \\
 &= \frac{x^{10}\left[(2k\delta+a)^9+a^9\right]}{a^9k^9\delta^99!} + \frac{a\left[a^9-(2k\delta+a)^9\right]x^9}{a^9k^9\delta^99!}
 \end{aligned}$$

A etapa seguinte consiste em ordenar os termos  $t_n$  em potências de  $x$ .  $T_n$  denota estes termos ordenados. Isso implica em:

$$T_0 = 0x^0 = a_0x^0$$

$$T_1 = 2x - 2x = 0x^1 = a_1x^1$$

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{x^2[2k\delta + 2a]}{ak\delta} + \frac{a[a^2 - (2k\delta + a)^2]x^2}{a^2k^2\delta^2 2!} = \\
 &= \frac{x^2[2k\delta + 2a]}{ak\delta} + \frac{[a^2 - (2k\delta + a)^2]x^2}{ak^2\delta^2 2!} = \\
 &= \left\{ \frac{2k\delta(2k\delta + 2a) + a^2 - (2k\delta + a)^2}{ak^2\delta^2 2!} \right\} x^2 = a_2 x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \frac{x^3[(2k\delta + a)^2 + a^2]}{a^2k^2\delta^2 2!} + \frac{a[a^3 - (2k\delta + a)^3]x^3}{a^3k^3\delta^3 3!} = \\
 &= \frac{3x^3[(2k\delta + a)^2 + a^2]}{a^2k^2\delta^2 2! 3} + \frac{[a^3 - (2k\delta + a)^3]x^3}{a^2k^3\delta^3 3!} = \\
 &= \frac{3x^3[(2k\delta + a)^2 + a^2]}{a^2k^2\delta^2 3!} + \frac{[a^3 - (2k\delta + a)^3]x^3}{a^2k^3\delta^3 3!} = \\
 &= \left\{ \frac{3k\delta[(2k\delta + a)^2 + a^2] + a^3 - (2k\delta + a)^3}{a^2k^3\delta^3 3!} \right\} x^3 = a_3 x^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \frac{x^4[(2k\delta + a)^3 + a^3]}{a^3k^3\delta^3 3!} + \frac{a[a^4 - (2k\delta + a)^4]x^4}{a^4k^4\delta^4 4!} = \\
 &= \frac{4x^4[(2k\delta + a)^3 + a^3]}{a^3k^3\delta^3 3! 4} + \frac{[a^4 - (2k\delta + a)^4]x^4}{a^3k^4\delta^4 4!} = \\
 &= \frac{4x^4[(2k\delta + a)^3 + a^3]}{a^3k^3\delta^3 4!} + \frac{[a^4 - (2k\delta + a)^4]x^4}{a^3k^4\delta^4 4!} = \\
 &= \left\{ \frac{4k\delta[(2k\delta + a)^3 + a^3] + a^4 - (2k\delta + a)^4}{a^3k^4\delta^4 4!} \right\} x^4 = a_4 x^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
T_9 &= \left\{ \frac{9k\delta \left[ (2k\delta + a)^8 + a^8 \right] + a^9 - (2k\delta + a)^9}{a^8 k^9 \delta^9 9!} \right\} x^9 = a_9 x^9 \\
& \vdots \\
T_n &= \left\{ \frac{nk\delta \left[ (2k\delta + a)^{n-1} + a^{n-1} \right] + a^n - (2k\delta + a)^n}{a^{n-1} k^n \delta^n n!} \right\} x^n = a_n x^n \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Após este desenvolvimento, o conseqüente numerador de (B.23) é:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{x \left[ (2k\delta + a)^n + a^n \right] + a \left[ a^n - (2k\delta + a)^n \right]}{a^n k^n \delta^n n!} \right\} x^n \\
& T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_9 + \cdots + T_n + \cdots = \\
& a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum a_n x^n
\end{aligned} \tag{B.24}$$

B.1.4.2 Para a equação (B.23) são calculados os dez primeiros termos do denominador

Antes de calcular os dez primeiros termos do denominador de (B.23) é possível fazer uma pequena evolução deste denominador, como segue:

$$x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{a^n n!} - x$$

A princípio,  $d_n$  denota os termos de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{a^n n!}$ . De forma equivalente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{a^n n!} \cong d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_9$$

Onde para  $n = 0$ :

$$d_0 = \frac{2^0 x^{0+1}}{a^0 0!} = x$$

Para  $n = 1$ :

$$d_1 = \frac{2^1 x^{1+1}}{a^1 1!} = \frac{2x^2}{a}$$

Para  $n = 2$ :

$$d_2 = \frac{2^2 x^{2+1}}{a^2 2!} = \frac{2^2 x^3}{a^2 2!}$$

Para  $n = 3$ :

$$d_3 = \frac{2^3 x^{3+1}}{a^3 3!} = \frac{2^3 x^4}{a^3 3!}$$

⋮

Para  $n = 9$ :

$$d_9 = \frac{2^9 x^{9+1}}{a^9 9!} = \frac{2^9 x^{10}}{a^9 9!}$$

A seguinte expansão, do denominador de (B.23), é verdadeira:

$$\begin{aligned} x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{a^n n!} - 1 \right) &= d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_9 + \cdots - x = \\ x + \frac{2x^2}{a} + \frac{2^2 x^3}{a^2 2!} + \frac{2^3 x^4}{a^3 3!} + \cdots + \frac{2^9 x^{10}}{a^9 9!} + \cdots + \frac{2^n x^{n+1}}{a^n n!} + \cdots - x &= \\ \frac{2x^2}{a} + \frac{2^2 x^3}{a^2 2!} + \frac{2^3 x^4}{a^3 3!} + \cdots + \frac{2^9 x^{10}}{a^9 9!} + \cdots + \frac{2^n x^{n+1}}{a^n n!} + \cdots = \\ b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots + b_{10} x^{10} + \cdots + b_n x^n + \cdots &= \sum b_n x^n \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

A igualdade (B.23) leva para  $[\coth(x/a) - (a/x)]e^{x/(k\delta)} = \sum a_n x^n / \sum b_n x^n$ . Onde as séries  $\sum a_n x^n$ , e  $\sum b_n x^n$  são aquelas mostradas em (B.24) e (B.25). Para conhecer  $[\coth(x/a) - (a/x)]e^{x/(k\delta)}$  é suficiente efetuar a divisão das séries  $\sum a_n x^n / \sum b_n x^n$ . Nesse caso, suponha que:

$$\frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \sum c_n x^n \rightarrow \sum a_n x^n = \sum c_n x^n \sum b_n x^n, \text{ ou de forma equivalente:}$$

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots =$$

$$\{c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots\} \times$$

$$\{b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots + b_{10} x^{10} + \cdots + b_n x^n + \cdots\}$$

$$\begin{aligned}
& a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \\
& c_0b_2x^2 + c_0b_3x^3 + c_0b_4x^4 + \cdots + c_0b_{10}x^{10} + \cdots + c_0b_nx^n + \cdots + \\
& c_1b_2x^3 + c_1b_3x^4 + c_1b_4x^5 + \cdots + c_1b_{10}x^{11} + \cdots + c_1b_nx^{n+1} + \cdots + \\
& c_2b_2x^4 + c_2b_3x^5 + c_2b_4x^6 + \cdots + c_2b_{10}x^{12} + \cdots + c_2b_nx^{n+2} + \cdots + \\
& c_3b_2x^5 + c_3b_3x^6 + c_3b_4x^7 + \cdots + c_3b_{10}x^{13} + \cdots + c_3b_nx^{n+3} + \cdots + \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Cada termo do lado esquerdo da equação anterior é igualado aos termos correspondentes do lado direito. Isto significa que:

$$\begin{cases}
a_2x^2 = c_0b_2x^2 \\
a_3x^3 = c_0b_3x^3 + c_1b_2x^3 \\
a_4x^4 = c_0b_4x^4 + c_1b_3x^4 + c_2b_2x^4 \\
a_5x^5 = c_0b_5x^5 + c_1b_4x^5 + c_2b_3x^5 + c_3b_2x^5
\end{cases}$$

Desta maneira são conhecidos os coeficientes da série  $\sum c_n x^n$ , ou seja, isolando-se os coeficientes das demais variáveis na equação anterior segue:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_2}{b_2} \\
c_1 &= \frac{a_3 - c_0b_3}{b_2} \\
c_2 &= \frac{a_4 - c_0b_4 - c_1b_3}{b_2} \\
c_3 &= \frac{a_5 - c_0b_5 - c_1b_4 - c_2b_3}{b_2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Depois de levar as expressões dos coeficientes  $a_n$ , e  $b_n$ , dados em (B.24) e em (B.25), para a equação anterior decorre:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left\{ \frac{2k\delta[(2k\delta+a)+a] + a^2 - (2k\delta+a)^2}{ak^2\delta^2 2!} \right\} \frac{a}{2} \\
c_1 &= \left\{ \frac{3k\delta[(2k\delta+a)^2 + a^2] + a^3 - (2k\delta+a)^3}{a^2 k^3 \delta^3 3!} \right\} - c_0 \frac{2^2}{a^2 2!} \left\} \frac{a}{2} \\
c_2 &= \left\{ \frac{4k\delta[(2k\delta+a)^3 + a^3] + a^4 - (2k\delta+a)^4}{a^3 k^4 \delta^4 4!} \right\} - c_0 \frac{2^3}{a^3 3!} - c_1 \frac{2^2}{a^2 2!} \left\} \frac{a}{2} \\
c_3 &= \left\{ \frac{5k\delta[(2k\delta+a)^4 + a^4] + a^5 - (2k\delta+a)^5}{a^4 k^5 \delta^5 5!} \right\} - c_0 \frac{2^4}{a^4 4!} - c_1 \frac{2^3}{a^3 3!} - c_2 \frac{2^2}{a^2 2!} \left\} \frac{a}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Com maior relevância e importância, os coeficientes  $c_n$  (com índice) não devem ser confundidos com o parâmetro do material  $c$  (sem índice).

Por consequência, o integrando é o mesmo que:

$$\begin{aligned}
\left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} &= \frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} \\
&= \frac{a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots}{b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_n x^n + \dots} \\
&= c_0 x^0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n + \dots
\end{aligned}$$

Uma vez que o integrando foi escrito na forma de uma soma de potências de  $x$  segue que a resolução da integral é simplesmente imediata. Por este motivo, integrando a fórmula anterior obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \int_{H_{e0}}^{H_e} \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} dx = \int_{H_{e0}}^{H_e} [c_0 x^0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n + \dots] dx = \\
& c_0 \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1)H \right] - \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha - 1)H_0 \right] \right\} + \\
& \frac{c_1}{2} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1)H \right]^2 - \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha - 1)H_0 \right]^2 \right\} + \\
& \frac{c_2}{3} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1)H \right]^3 - \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha - 1)H_0 \right]^3 \right\} + \dots + \\
& \frac{c_9}{10} \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1)H \right]^{10} - \left[ \frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha - 1)H_0 \right]^{10} \right\} + \dots \\
& \int_{H_{e0}}^{H_e} \left[ \coth\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} \right] e^{\frac{x}{k\delta}} dx = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_n}{n+1} \left[ \left( \frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha - 1)H \right)^{n+1} - \left( \frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha - 1)H_0 \right)^{n+1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Para finalizar, a equação principal (B.20) proposta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\mu_0} - H &= \left[ \frac{B_0}{\mu_0} - H_0 \right] e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} + \\
(1-c) \frac{m_s}{k\delta} e^{\frac{-\frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} & \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_n}{n+1} \left[ \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{\mu_0} \right)^{n+1} - \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{\mu_0} \right)^{n+1} \right] \right\} + & \\
cm_s \left[ \coth \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H}{a} \right) - \frac{a}{\frac{\alpha}{\mu_0} B - (\alpha-1)H} \right] - & \quad (B.26) \\
cm_s \left[ \coth \left( \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0}{a} \right) - \frac{a}{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0} \right] & \\
e^{\frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B_0 - (\alpha-1)H_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} B + (\alpha-1)H}{k\delta}} &
\end{aligned}$$

Onde os coeficientes  $c_n$  dependem dos parâmetros do material  $a$ ,  $k$ , e do valor de  $\delta$ .



### APÊNDICE C – Variante do Modelo Inverso

Para o modelo inverso são válidas as seguintes equações:

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (C.1)$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (C.2)$$

$$M_{an} = m_s \left[ \coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \frac{a}{H_e} \right] \quad (C.3)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \quad (C.4)$$

$$H_e = H + \alpha M \quad (C.5)$$

$$B = \mu_0(H + M) . \quad (C.6)$$

Levando (C.2) para (C.1) tem-se  $M = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr}$ , ou seja,

$$M = (1-c)M_{irr} + cM_{an} . \quad (C.7)$$

Derivando (C.7) com respeito ao campo magnético segue que:

$$\frac{dM}{dH} = (1-c)\frac{dM_{irr}}{dH} + c\frac{dM_{an}}{dH} . \quad (C.8)$$

Mas,

$$\frac{dM}{dH} = \frac{dM}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dH} + \frac{dM}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} . \quad (C.9)$$

Isolando a magnetização total das variáveis restantes em (C.6) obtém-se:  $M = (B/\mu_0)-H$ . Isolando o campo magnético das demais variáveis em (C.5) tem-se:  $H = H_e - \alpha M$ . Portanto,  $M = (B/\mu_0) - H_e + \alpha M$  em consequência destas manipulações, isto é,

$$M = \frac{B}{\mu_0(1-\alpha)} - \frac{H_e}{(1-\alpha)}.$$

Derivando a magnetização total com relação ao campo magnético efetivo:

$$\frac{dM}{dH_e} = \frac{1}{\mu_0(1-\alpha)} \frac{dB}{dH_e} - \frac{1}{(1-\alpha)} = \frac{1}{\mu_0(1-\alpha)} 0 - \frac{1}{(1-\alpha)} = -\frac{1}{(1-\alpha)}$$

De (C.5) é possível obter as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial H_e}{\partial H} = 1 + \alpha \frac{\partial M}{\partial H} \text{ e } \frac{\partial H_e}{\partial B} = \frac{\partial H}{\partial B} + \alpha \frac{\partial M}{\partial B} = \alpha \frac{\partial M}{\partial B}$$

De (C.6):  $M = (B/\mu_0) - H$

$$\frac{\partial H_e}{\partial H} = 1 + \alpha \frac{\partial M}{\partial H} = 1 + \alpha \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial H} - \frac{\partial H}{\partial H} \right) = 1 + \alpha \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) \text{ e}$$

$$\frac{\partial H_e}{\partial B} = \frac{\partial H}{\partial B} + \alpha \frac{\partial M}{\partial B} = \alpha \frac{\partial M}{\partial B} = \alpha \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial B} - \frac{\partial H}{\partial B} \right) = \frac{\alpha}{\mu_0}$$

De (C.6) é possível obter a derivada da indução magnética com respeito ao campo magnético dada por:  $\frac{dB}{dH} = \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right)$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_e}{\partial H} &= 1 + \alpha \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} - 1 \right) = 1 + \alpha \left( \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right) - 1 \right) = 1 + \alpha + \alpha \frac{dM}{dH} - \alpha \\ &= 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \end{aligned}$$

Em (C.6) afirma-se que:

$$B = \mu_0(H + M). \quad (\text{C.10})$$

A consequência das derivadas acima calculadas é que (C.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dH} &= -\frac{1}{(1-\alpha)} \left( 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) - \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{\alpha}{\mu_0} \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right) \\ \frac{dM}{dH} &= -\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha \frac{dM}{dH} - \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha - \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha \frac{dM}{dH} \\ \frac{dM}{dH} + \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha \frac{dM}{dH} + \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha \frac{dM}{dH} &= -\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{dM}{dH} \left[ 1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \right] = -\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{-\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}}{1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{-\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{-\frac{1}{(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)}}{\frac{1}{(1-\alpha)} [1-\alpha+2\alpha]}$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{-1-\alpha}{[1+\alpha]} = \frac{-[1+\alpha]}{[1+\alpha]}$$

$$\frac{dM}{dH} = -1. \quad (\text{C.11})$$

Considerando (C.8) é necessário escrever a expressão de  $\frac{dM_{an}}{dH}$ :

$$\frac{dM_{an}}{dH} = \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dH} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right]. \quad (\text{C.12})$$

De (C.5) e de (C.6) obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_e}{\partial H} &= 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \\ \frac{\partial H_e}{\partial B} &= \frac{\alpha}{\mu_0} \\ \frac{dB}{dH} &= \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right)\end{aligned}\quad (C.13)$$

Levando (C.13) para (C.12) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 + \alpha \frac{dM}{dH} + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right) \right) \right] = \\ \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 + \alpha \frac{dM}{dH} + \alpha + \alpha \frac{dM}{dH} \right] &= \\ \frac{dM_{an}}{dH_e} \left[ 1 + \alpha + (\alpha + \alpha) \frac{dM}{dH} \right]\end{aligned}$$

Considerando (C.11) segue:

$$\begin{aligned}\frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} [1 + \alpha - (\alpha + \alpha)] \\ \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} [1 + \alpha - \alpha - \alpha] = \frac{dM_{an}}{dH_e} [1 - \alpha]\end{aligned}\quad (C.14)$$

Deriva-se (C.3) com respeito ao campo magnético efetivo, isto é,

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = m_s \frac{d}{dH_e} \left[ \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) - \frac{a}{H_e} \right].$$

Esta derivada é calculada no Apêndice A, assim, de (A.19) tem-se:

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e} \right)^2 \right]. \quad (C.15)$$

A equação (C.8) contém o termo  $dM_{irr}/dH$ , e conseqüentemente, esta taxa de variação da magnetização irreversível com o campo magnético é calculada como segue:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ \frac{\partial H_e}{\partial H} \frac{dH}{dH} + \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right].$$

Levando (C.13) para esta última expressão implica em:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left[ 1 + \alpha \frac{dM}{dH} + \left( \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right) \right]. \quad (C.17)$$

Levando (C.4) para (C.17) segue:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] \left[ 1 + \alpha \frac{dM}{dH} + \left( \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right) \right].$$

Levando (C.11) para esta última expressão segue:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH} \right) \right].$$

Levando (C.13) e (C.11) para a expressão anterior tem-se:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right) \right) \right]$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] \left[ 1 - \alpha + \left( \frac{\alpha}{\mu_0} \mu_0 (1-1) \right) \right].$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] [1 - \alpha] \quad (C.18)$$

Aplicando (C.2) em (C.1) tem-se:

$$M = M_{irr} + M_{rev} = M_{irr} + cM_{an} - cM_{irr} = M_{irr}(1-c) + cM_{an}.$$

Isolando a magnetização irreversível das demais variáveis nesta última expressão obtém-se:

$$M_{irr} = \frac{M - cM_{an}}{(1-c)}.$$

Escrevendo (C.8) utilizando (C.18), (C.14), e (C.11) tem-se:

$$\frac{dM}{dH} = (1-c) \frac{dM_{irr}}{dH} + c \frac{dM_{an}}{dH}$$

$$\frac{dM}{dH} = \left[ \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] [1 - \alpha] (1-c) \right] + \left[ c \frac{dM_{an}}{dH_e} [1 - \alpha] \right].$$

$$-1 = \left[ \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] [1 - \alpha](1 - c) \right] + \left[ c[1 - \alpha] \frac{dM_{an}}{dH_e} \right] \quad (C.20)$$

É muito importante observar que o termo  $dM/dB$  foi eliminado de (C.20) em consequência de  $dM/dH = -1$ . Na seção 2.3.1 deste trabalho foram apresentadas: a equação (2.22) que mostra que  $dM/dB$  é necessária ao cálculo de  $M$ ; e a equação (2.23) que mostra que  $M$  é necessária ao cálculo de  $H$ . Em decorrência disto, o algoritmo do modelo inverso não poderá ser utilizado considerando (C.20), isto é, o modelo inverso não lida com a taxa  $\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial H} + \frac{dM_{irr}}{dH_e} \frac{\partial H_e}{\partial B} \frac{dB}{dH}$ .

Propõe-se utilizar a seguinte taxa:

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\left( (1 - c) \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{\mu_0 k \delta} \right] + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e} \right)}{\left[ 1 + \left( (1 - 2\alpha)(1 - c) \left[ \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta} \right] + c(1 - 2\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \right]} \quad (C.40)$$

A equação principal do modelo inverso de Jiles-Atherton proposta é (C.40).

O algoritmo numérico, para obter a magnetização total e o campo magnético partindo da indução magnética em um procedimento passo a passo no tempo, é mostrado na sequência.

$B(t)$  e  $H(t)$  são calculados no passo anterior.

$$\Delta B = B(t + \Delta t) - B(t)$$

$$M(t) = \frac{B(t)}{\mu_0} - H(t)$$

$$H_e(t) = H(t) + \alpha M(t)$$

$$M_{an}(t) = m_s \left[ \coth \left( \frac{H_e(t)}{a} \right) - \frac{a}{H_e(t)} \right]$$

$$M_{irr}(t) = \frac{M(t) - cM_{an}(t)}{(1 - c)}$$

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{m_s}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e(t)}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e(t)} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\left( (1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{\mu_0 k \delta} \right] \right) + \frac{c}{\mu_0} \frac{dM_{an}}{dH_e}}{\left[ 1 + \left( (1-2\alpha)(1-c) \left[ \frac{M_{an}(t) - M_{irr}(t)}{k \delta} \right] \right) + c(1-2\alpha) \frac{dM_{an}}{dH_e} \right]}$$

$$M(t + \Delta t) = M(t) + \frac{dM}{dB} \Delta B$$

$$H(t + \Delta t) = \frac{B(t + \Delta t)}{\mu_0} - M(t + \Delta t)$$

A equação (C.40) apresentada no desenvolvimento da variante do modelo inverso é comparada com sua equação correspondente (2.20) apresentada no desenvolvimento do modelo inverso. Disto se conclui que as duas equações não são semelhantes devido ao fator multiplicador dois: que aparece nos termos  $(1-\alpha)$ .



## APÊNDICE D – Tópicos Adicionais

Os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton foram identificados utilizando-se as metodologias desenvolvidas neste trabalho de pesquisa. Uma explicação adicional, de tópicos relacionados com o problema pesquisado, é apresentada nesta seção. Estes tópicos são os seguintes: regressão linear; regressão não linear; método de mínimos quadrados não linear; função Fsolve; sistema sobredeterminado; otimização restrita utilizando algoritmo genético; e filtragem e suavização de dados.

### D.1 REGRESSÃO LINEAR

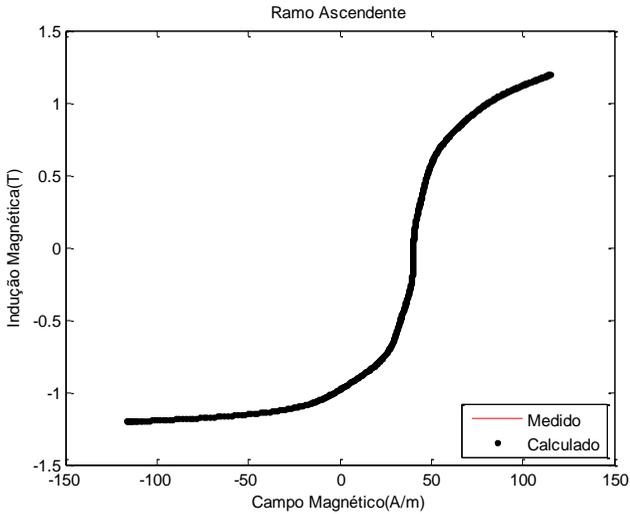
O método de mínimos quadrados é uma técnica que minimiza a soma dos quadrados dos erros residuais. Este método, apresentado em [49], é utilizado no ajuste de um polinômio ao conjunto de dados, e o problema é escrito na forma de um sistema linear.

A relação da indução magnética com o campo magnético é não linear, como pode ser observado no comportamento do laço de histerese. Mesmo sendo não linear, aplica-se regressão linear no problema para ajustar um polinômio ao conjunto de pontos experimentais ( $H$ ,  $B$ ). Foram considerados os pontos experimentais da curva suave (primeiro caso) e da curva contendo ruído (quinto caso).

#### D.1.1 Primeiro Caso

Um polinômio de grau  $n$  é ajustado ao conjunto de pontos experimentais ( $H$ ,  $B$ ) correspondentes ao primeiro caso. Observou-se que polinômios de graus  $n < 12$  não descrevem satisfatoriamente o comportamento experimental do material. Para um polinômio de grau  $n = 12$  os resultados podem ser observados nas Fig. 79-80 e nas equações (D.1) e (D.2).

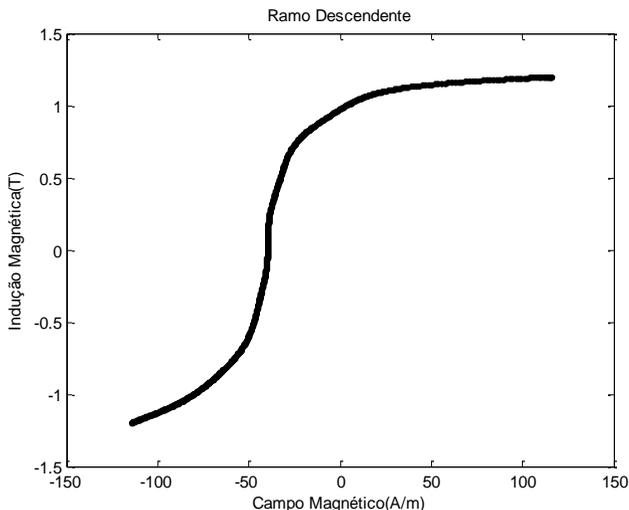
Figura 79 – Ajuste de um polinômio ao ramo ascendente da curva suave: primeiro caso.



Fonte: Autoria própria (2015).

$$\begin{aligned}
 H = 1 \times 10^3 & \left[ -0,2480B^{12} + 0,2131B^{11} + 0,8928B^{10} - 0,7007B^9 - \right. \\
 & 1,2042B^8 + 0,8408B^7 + 0,7419B^6 - 0,4290B^5 - 0,2055B^4 + \\
 & \left. 0,1158B^3 + 0,0218B^2 + 0,0018B^1 + 0,0399 \right] \quad (D.1) \\
 R^2 & = 0,9998
 \end{aligned}$$

Figura 80 – Ajuste de um polinômio ao ramo descendente da curva suave: primeiro caso.



Fonte: Autoria própria (2015).

$$\begin{aligned}
 H = 1 \times 10^3 & \left[ 0,2464B^{12} + 0,2075B^{11} - 0,8867B^{10} - 0,6808B^9 + \right. \\
 & 1,1957B^8 + 0,8152B^7 - 0,7368B^6 - 0,4147B^5 + 0,2042B^4 + \\
 & \left. 0,1126B^3 - 0,0217B^2 + 0,0020B^1 - 0,0399 \right] \quad (D.2) \\
 R^2 & = 0,9998
 \end{aligned}$$

Como o valor do coeficiente de determinação  $R^2$  é aproximadamente unitário, o polinômio de grau 12 descreve muito bem os dados medidos (para ambos os ramos do laço de histerese). Entretanto, treze parâmetros seriam necessários para representar o ramo do laço de histerese. Esses parâmetros assumem valores positivos e negativos como mostram as equações (D.1) e (D.2).

### D.1.2 Quinto Caso

De maneira similar, um polinômio de grau 12 é ajustado aos dados experimentais ( $H$ ,  $B$ ) de cada ramo do laço de histerese para o laço contendo ruídos (quinto caso). Também obteve-se um excelente ajuste.

Este modelo polinomial empírico apresenta uma quantidade excessiva de parâmetros, quando comparado com o modelo de histerese de Jiles-Atherton.

Neste trabalho de pesquisa não se tem interesse em identificar os parâmetros do modelo polinomial, mas em se identificar os parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton. O modelo de Jiles-Atherton apresenta vantagens quando comparado ao modelo polinomial: utiliza uma quantidade menor de parâmetros na representação do material; os parâmetros assumem somente valores positivos; e não é um modelo empírico.

## D.2 REGRESSÃO NÃO LINEAR

O método de mínimos quadrados, apresentado em [49], é utilizado no ajuste de um polinômio ao conjunto de dados. Entretanto, como nem todos os modelos são lineares, e como nem todas as equações não lineares podem ser transformadas em equações lineares, utilizou-se a regressão não linear.

O problema  $y = a_0 x^{a_1}$  é apresentado em [49] onde: os valores experimentais de  $x$  e de  $y$  são conhecidos; os valores dos parâmetros  $a_0$  e  $a_1$ , que minimizam a função, são determinados utilizando a função `fminsearch` disponível no Matlab [50], [51].

Na segunda metodologia é encontrada a equação (4.1), que contém  $H$ ,  $B$ , e os cinco parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton: os valores experimentais de  $H$  e de  $B$  são conhecidos; os valores dos cinco parâmetros que minimizam a função, não podem ser determinados utilizando a função `fminsearch` porque (4.1) é uma equação implícita, isto é, não é possível isolar  $B$  da variável  $H$  tal como  $y$  é isolada da variável  $x$  em  $y = a_0 x^{a_1}$ . Vale lembrar também que os cinco parâmetros do modelo assumem somente valores positivos.

O mesmo ocorre à primeira metodologia, isto é, a equação (3.1) é implícita.

As equações utilizadas na identificação dos parâmetros e desenvolvidas neste trabalho de pesquisa são implícitas, e conseqüentemente, não é possível a utilização de todos os pontos ( $H$ ,  $B$ ) pertencentes ao ramo, considerando-se uma solução do tipo mínimos quadrados.

## D.3 MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS NÃO LINEAR

O método dos mínimos quadrados não linear, utilizado no ajuste de curvas não lineares, é apresentado em [52]. Neste caso, o problema não pode ser representado por um sistema linear.

Utilizando as equações do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton e uma relação constitutiva, constrói-se um sistema de equações não lineares em todas as metodologias propostas neste trabalho de pesquisa. Pretende-se calcular os parâmetros (do modelo) da curva que melhor se ajusta aos dados experimentais (de indução magnética e de campo magnético) para um determinado material. Estes parâmetros, que ajustam (através da técnica dos mínimos quadrados) a função não linear (obtida em cada uma das metodologias) ao conjunto de pontos experimentais (de indução magnética e de campo magnético), podem ser identificados, por exemplo, pelo método de Levenberg-Marquardt. Entre outros, este método está implementado na função `fsolve`, disponível no Matlab. Considerando todas as metodologias propostas, os algoritmos desenvolvidos para determinar os parâmetros do modelo utilizam a função `fsolve` e, portanto, aplicam o método dos mínimos quadrados não linear.

#### D.4 FSOLVE

Dado um conjunto de  $n=5$  funções não lineares  $F_i(x=[m_s, \alpha, a, k, c])$  ou um conjunto de  $n=6$  funções não lineares  $F_i(x=[m_s, \alpha, a, k, c, s])$ , onde  $n$  é o número de componentes do vetor  $x$ , o objetivo é encontrar um vetor  $x$  que satisfaz todas as  $F_i(x) = 0$  [53],  $i=1, \dots, n$ .

A função `fsolve`, disponível no Matlab, resolve o sistema de equações  $F_i(x)=0$ , minimizando a soma dos quadrados das componentes. Se a soma dos quadrados for nula, então o sistema de equações  $F_i(x)=0$  está resolvido. O `fsolve` resolve o sistema utilizando um dos três algoritmos: região de confiança reflexiva (TRR); região de confiança dogleg (TRD) [54]; e Levenberg-Marquardt (LM). Quando nada é especificado, o `fsolve` seleciona automaticamente o algoritmo região de confiança dogleg.

O tempo de execução do programa está apresentado nas Tabelas 7-11. Cada uma das metodologias propostas neste trabalho implementa uma equação diferente. Assim, para cada metodologia, as instruções executadas diferem, e conseqüentemente, o tempo de simulação também difere. Além disso, o tempo de simulação depende do conjunto inicial de parâmetros utilizado: quando o conjunto estiver distante de um minimizador do sistema, o tempo de simulação é maior.

### D.4.1 Método da Região de Confiança Reflexiva

Seja o problema de minimização: minimizar  $f(x)$ , onde a função tem como argumento um vetor e retorna um escalar. Seja um ponto  $x$  no espaço  $n$ . Pretende-se movimentar da posição atual para um ponto onde o valor da função é mínimo, logo a função  $f$  é representada por uma função mais simples  $q$ , que reflete razoavelmente o comportamento da função  $f$  numa vizinhança  $N$  ao redor do ponto  $x$ . Esta vizinhança é chamada região de confiança. Um passo de teste  $s_1$  é calculado com base na minimização em  $N$ : o ponto atual é alterado para  $x + s_1$  se  $f(x + s_1) < f(x)$ , do contrário o ponto atual permanece inalterado;  $N$  (a região de confiança) é reduzido; e o cálculo do passo de teste é repetido.

Na busca de minimizadores locais para o problema, o método de Cauchy tem convergência global (independe do ponto inicial), mas é muito lento; já o método de Newton é muito rápido (quando se parte de um ponto perto de um minimizador de  $f$ ), mas diverge facilmente; o método da região de confiança une o que há de melhor nos dois métodos anteriores.

### D.4.2 Método da Região de Confiança Dogleg

O método da região de confiança dogleg é um subproblema do método da região de confiança. Um sistema linear de equações é resolvido para encontrar a direção de busca.

O método de Newton tem dificuldades: quando a matriz jacobiana é singular (sem inversa); e quando o ponto inicial está distante da solução (o método pode não convergir). Introduzindo técnicas de região de confiança é possível melhorar a robustez quando o ponto inicial está distante da solução, e para lidar com o caso em que a matriz jacobiana é singular. Uma função de mérito é utilizada para decidir se  $x_{k+1}$  é melhor ou pior que  $x_k$ .

No método da região de confiança dogleg, o passo  $d$  é construído a partir de uma combinação convexa do passo de Cauchy e do passo de Gauss-Newton. O algoritmo dogleg é eficiente porque requer somente uma resolução linear por iteração (para o cálculo do passo de Gauss-Newton), e pode ser mais robusto do que o método de Gauss-Newton com busca linear.

### D.4.3 Método de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt utiliza uma direção de busca, que é uma solução de um conjunto linear de equações: um escalar  $\lambda_k$  controla magnitude e direção da direção  $d_k$ . O escalar pode ser controlado para garantir descida, o que restringe a eficiência do método Gauss-Newton.

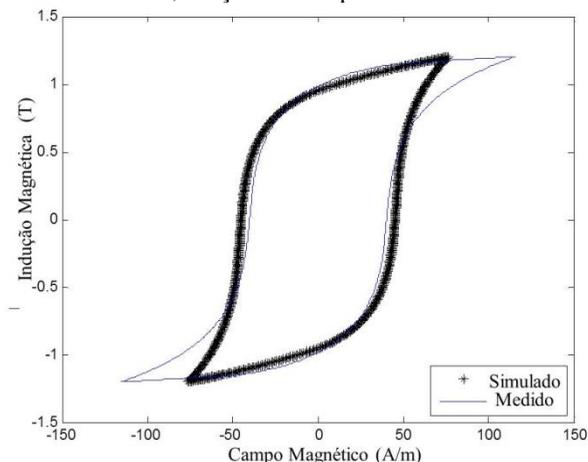
## D.5 SISTEMA SOBREDETERMINADO

Considerando a primeira metodologia para determinar os cinco parâmetros do modelo escalar de histerese de Jiles-Atherton, são utilizados dois sistemas de cinco equações e cinco incógnitas: um sistema para cada ramo que compõe o laço de histerese.

Um sistema sobredeterminado é aquele em que o número de equações é maior do que o número de incógnitas. Para a curva suave (primeiro caso) é construído um único sistema sobredeterminado de dez equações e cinco incógnitas. Entre as dez equações, cinco são provenientes do ramo ascendente e as outras cinco são provenientes do ramo descendente. As cinco incógnitas são os cinco parâmetros do modelo.

Para o sistema sobredeterminado assim constituído, o resultado pode ser observado na Fig. 81 e na equação (D.3).

Figura 81 – Curva  $B-H$  calculada, utilizando a primeira metodologia e sistema sobredeterminado, e laço medido: primeiro caso.



Fonte: Autoria própria (2015).

$$[m_s \ \alpha \ a \ k \ c] = [2,23 \times 10^6 \ 2,1 \times 10^{-4} \ 147 \ 105 \ 0,49] \quad (D.3)$$

O laço de histerese simulado não está próximo do laço de histerese experimental, como pode ser observado na Fig. 81, e consequentemente, o conjunto de parâmetros mostrado na equação (D.3) não pode ser utilizado na representação do material correspondente ao laço de histerese experimental.

## D.6 OTIMIZAÇÃO RESTRITA UTILIZANDO ALGORITMO GENÉTICO

O algoritmo genético resolve o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \min F(x) \text{ sujeito à } C_{eq}(x) &= 0 \\ 0 &\leq x \end{aligned}$$

Onde:  $C_{eq}$  são as restrições não lineares de igualdade;  $x$  possui limite inferior igual à zero porque os parâmetros do modelo são todos positivos;  $x = [m_s \ \alpha \ a \ k \ c]$ .

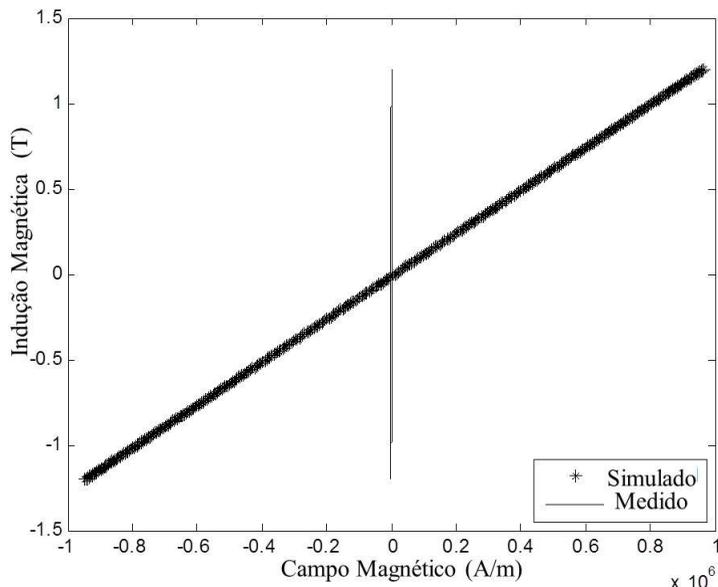
Para a primeira metodologia proposta neste trabalho de pesquisa tem-se:

$$F(x) = f(H_1, B_1) - \frac{dB}{dH}(P_1)$$

$$C_{eq}(x) = \begin{cases} f(H_2, B_2) - \frac{dB}{dH}(P_2) \\ \vdots \\ f(H_5, B_5) - \frac{dB}{dH}(P_5) \end{cases}$$

Para o laço de histerese suave (primeiro caso), o resultado pode ser observado na Fig. 82 e na equação (D.4). O resultado foi obtido após 1h46min de simulação.

Figura 82 – Curva  $B-H$  calculada, utilizando a primeira metodologia e algoritmo genético, e laço medido: primeiro caso.



Fonte: Autoria própria (2015).

$$[m_s \quad \alpha \quad a \quad k \quad c] = [5,75 \times 10^2 \quad 2,42 \times 10^3 \quad 507,79 \quad 683,68 \quad 552,47] \quad (D.4)$$

O laço de histerese simulado não está próximo do laço de histerese experimental, como pode ser observado na Fig. 82, e conseqüentemente, o conjunto de parâmetros mostrado na equação (D.4) não pode ser utilizado na representação do material correspondente ao laço de histerese experimental.

## D.7 FILTRAGEM E SUAVIZAÇÃO DE DADOS

Seis métodos para filtragem e suavização de dados são apresentados em [55], sendo estes: filtragem média móvel; filtragem Savitzky-Golay; e suavização com regressão local (Lowess, Loess, método de regressão local, regressão local robusta).

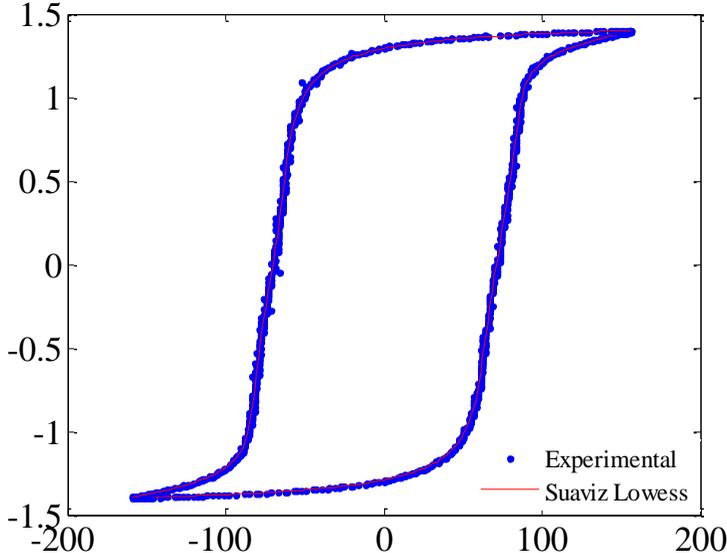
A função `smooth`, disponível no `matlab`, suaviza dados utilizando um dos seguintes métodos: média móvel; Lowess; Loess; Savitzky-Golay; Lowess robusto; e Loess robusto.

Nesta seção são considerados o laço de histerese com conteúdo ruidoso (quinto caso) e a primeira metodologia, que utiliza cálculo de derivada no processo de caracterização do material.

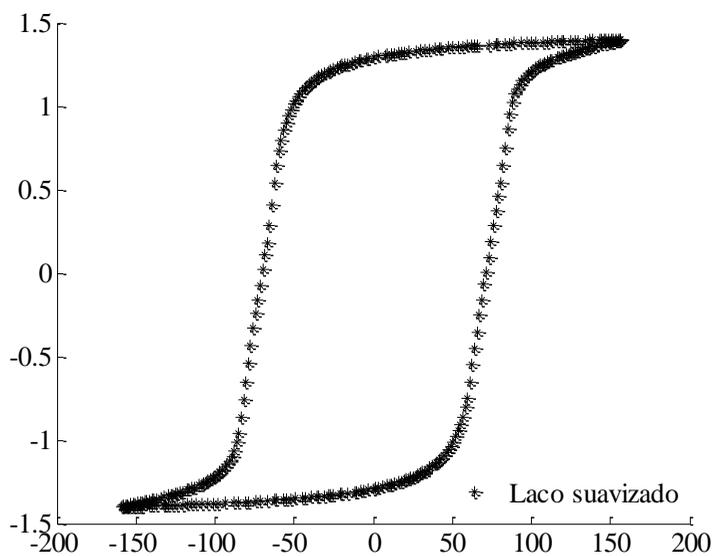
Para suavizar os dados de indução magnética correspondentes ao laço de histerese com conteúdo ruidoso, utilizou-se o método Lowess, com base na regressão ponderada. Cada valor de indução magnética suavizado é determinado por pontos na vizinhança definidos dentro de uma distância. Para nosso caso utilizou-se 10 % de distância dos dados totais experimentais, porque este valor permite uma curva mais suave e mais próxima da curva experimental. Nenhum ponto de indução magnética é descartado: os pontos de indução magnética são corrigidos, isto é, suavizados.

O laço de histerese experimental, e o laço de histerese suavizado podem ser observados nas Fig. 83-85.

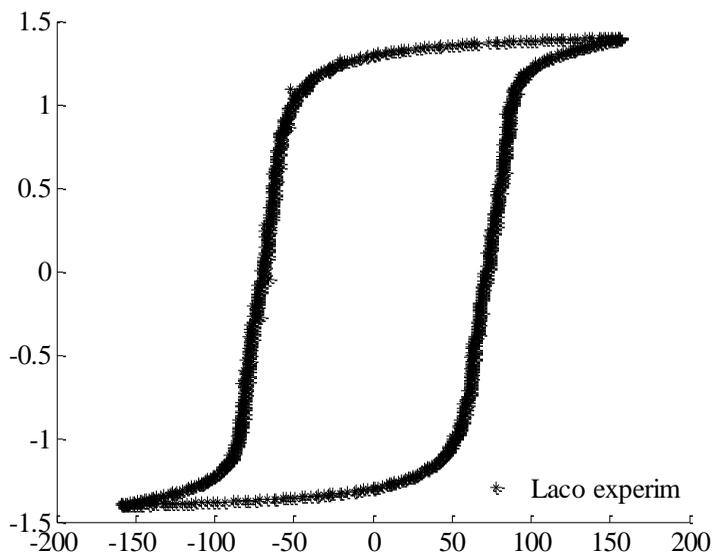
Figura 83 – Curva  $B-H$  suavizada, utilizando o método Lowess, e laço medido: quinto caso.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 84 – Curva  $B-H$  suavizada utilizando o método Lowess: quinto caso.

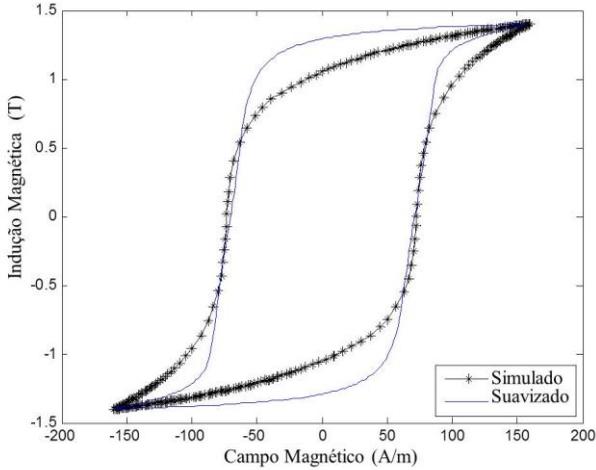
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 85 – Curva  $B-H$  medida: quinto caso.

Fonte: Autoria própria (2015).

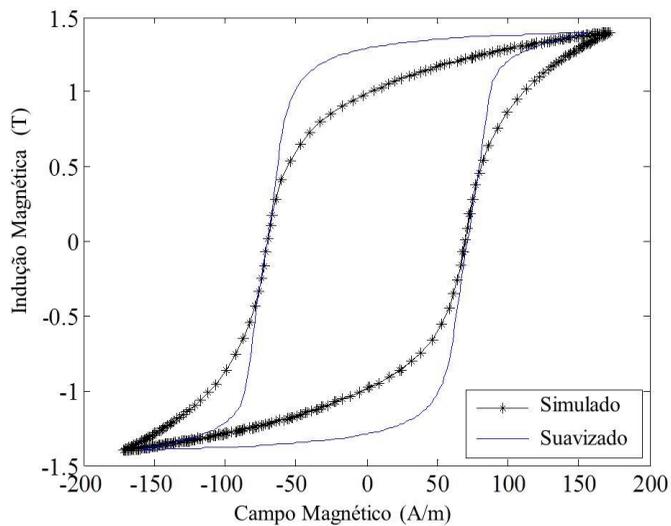
Para o laço de histerese com conteúdo ruidoso, os dados ( $H_{exp}$ ,  $B_{exp}$ ) são substituídos por ( $H_{exp}$ ,  $B_{suavizado}$ ). Em cada ramo do laço suavizado são selecionados cinco pontos principais. A primeira metodologia é aplicada para caracterizar o material, e os resultados podem ser observados nas Fig. 86-88.

Figura 86 – Curva  $B-H$  calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: LM.



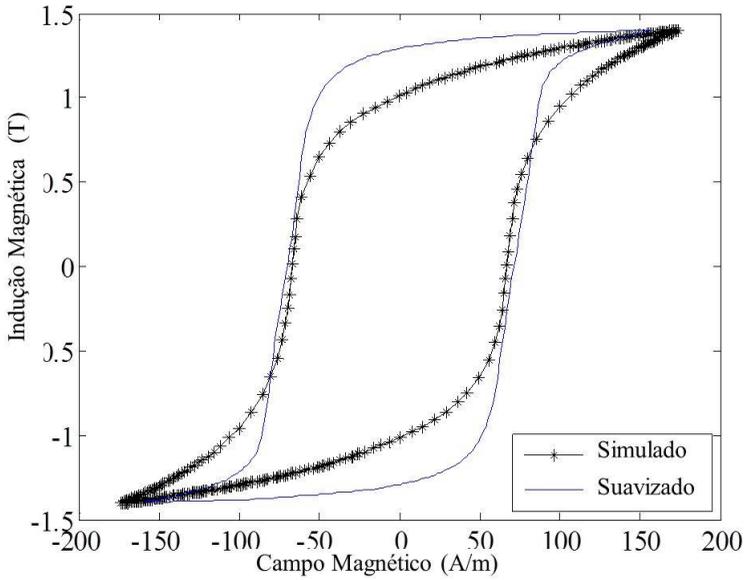
Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 87 – Curva  $B-H$  calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: TRR.



Fonte: Autoria própria (2015).

Figura 88 – Curva  $B-H$  calculada, utilizando a primeira metodologia, e laço medido suavizado: TRD.



Fonte: Autoria própria (2015).

O laço de histerese simulado não está próximo do laço de histerese medido suavizado, como pode ser observado nas Fig. 86-88, e conseqüentemente, o conjunto de parâmetros não pode ser utilizado na representação do material correspondente ao laço de histerese experimental.

Para o ramo ascendente do laço de histerese com conteúdo ruidoso, pontos pertencentes ao segundo trecho de reta são mostrados na Tabela 18.

Tabela 18 – Dados experimentais e dados suavizados: quinto caso

$H_{exp}$ (A/m) $\times 10^1$	$B_{exp}$ (T) $\times 10^{-1}$	$H_{exp}$ (A/m) $\times 10^1$	$B_{suave}$ (T) $\times 10^{-1}$
5,51063843	-9,502634	5,51063843	-9,067692
5,51063843	-9,438502	5,51063843	-9,067692
5,51063843	-9,307273	5,51063843	-9,067692
5,51063843	-9,175409	5,51063843	-9,067692
5,51063843	-9,108737	5,51063843	-9,067692
5,51063843	-8,906814	5,51063843	-9,067692
5,65957451	-9,041429	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,974544	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,838025	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,769024	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,700024	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,630812	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,491752	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,42254	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,352481	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-8,21067	5,65957451	-8,615233
5,65957451	-7,923027	5,65957451	-8,615233
5,80851059	-8,560964	5,80851059	-8,028998
5,80851059	-8,281999	5,80851059	-8,028998
5,80851059	-8,13913	5,80851059	-8,028998
5,80851059	-7,777619	5,80851059	-8,028998
5,80851059	-7,704808	5,80851059	-8,028998

Fonte: Autoria própria (2015)

Para o ramo ascendente do laço de histerese suave, pontos pertencentes ao segundo trecho de reta são mostrados na Tabela 19.

Tabela 19 – Dados experimentais: primeiro caso

$H_{exp}$ (A/m)	$B_{exp}$ (T)
35,5322	-0,4206
35,6740	-0,4136
35,8125	-0,4065
35,9479	-0,3994
36,0802	-0,3923
36,2094	-0,3851
36,3357	-0,3780
36,4590	-0,3708
36,5794	-0,3636
36,6971	-0,3564
36,8119	-0,3492
36,9241	-0,3420
37,0336	-0,3348
37,1405	-0,3275
37,2449	-0,3203
37,3468	-0,3130
37,4463	-0,3057
37,5435	-0,2984
37,6384	-0,2911
37,7310	-0,2838
37,8215	-0,2765
37,9098	-0,2691
37,9961	-0,2618

Fonte: Autoria própria (2015)

Como pode ser observado nas Tabelas 18 e 19, para a curva suave existe variação de  $H$  e de  $B$ , para cada passo de tempo; e isto não acontece na curva, experimental ou suavizada, com conteúdo ruidoso.

A derivada  $dB/dH = \Delta B/\Delta H$  é calculada utilizando pontos auxiliares situados na vizinhança do ponto principal. Três requisitos são necessários para que a inclinação da curva no ponto,  $dB/dH$ , seja computada com sucesso: variação em  $B$ ; variação em  $H$ ; e pontos auxiliares muito próximos do ponto principal.

Além disso, a derivada de uma função  $B(H)$  no ponto  $H_1$  é definida pelo limite [56]  $B'(H_1) = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{B(H_1 + \Delta H) - B(H_1)}{\Delta H}$  quando este limite existe. Poderia a suavização de dados garantir a existência deste limite? Os resultados encontrados após suavização de dados sugerem

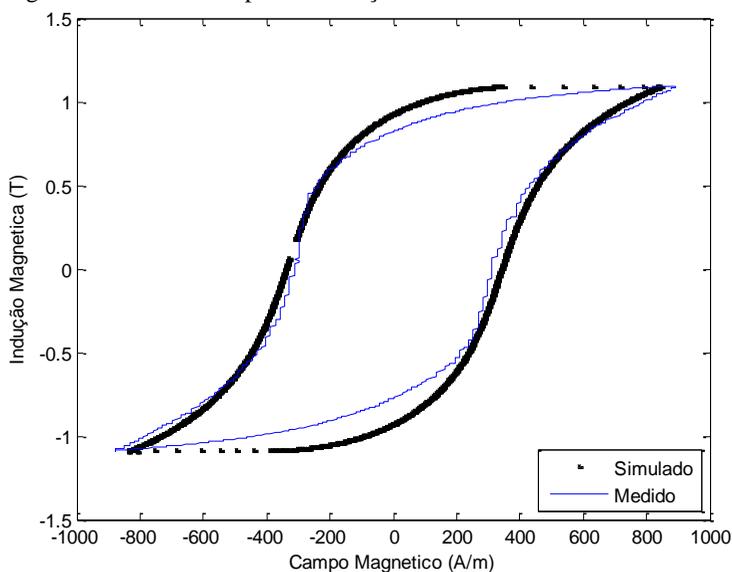
que a utilização de filtro pode não eliminar a segunda metodologia (que evita cálculo de derivadas utilizando integrais).

## D.8 PREVISÃO DE LAÇO DE INDUÇÃO MENOR

Para uma amostra de material testada em diferentes níveis de indução magnética máxima pretende-se prever o comportamento do material num nível de indução magnética menor utilizando-se os parâmetros obtidos num nível de indução magnética maior.

A amostra correspondente ao 6º caso (Tabela 17) foi ensaiada no nível de indução magnética máxima 1,495 T e caracterizada segundo a primeira metodologia proposta. Os parâmetros obtidos serão utilizados para prever o comportamento experimental do material no nível de indução magnética máxima 1,091 T. Como pode ser observado na Fig. 89, o laço previsto não está próximo do laço experimental, e consequentemente, os parâmetros obtidos em 1,495 T não descrevem o comportamento experimental do material em 1,091 T.

Figura 89 – Curva  $B-H$  prevista e laço medido.



Fonte: Autoria própria (2017).



## APÊNDICE E – Demonstrações Matemáticas

### E.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

Seja a função de duas variáveis  $H_e = H_e(H, B)$ , onde além disso,  $B = B(H)$ . Tem-se:

$$H_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(H, B) \rightarrow H_e(H, B) = (1 - \alpha)H + \frac{\alpha}{\mu_0}B$$

$$B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H \rightarrow B(H)$$

Para a função de duas variáveis  $H_e$  é possível determinar as derivadas parciais com relação às variáveis  $H$  e  $B=B(H)$ . Observa-se que:

$$H_e(H + \Delta H, B) = (1 - \alpha)(H + \Delta H) + \frac{\alpha}{\mu_0}B(H + \Delta H)$$

$$H_e(H, B + \Delta B) = (1 - \alpha)H + \frac{\alpha}{\mu_0}(B(H) + \Delta B(H))$$

(E.1)

Utilizando a definição de derivadas parciais [61] calcula-se a derivada parcial do campo magnético efetivo em relação ao campo magnético. Isto é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial H} [H_e(H, B(H))] &= \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{H_e(H + \Delta H, B(H)) - H_e(H, B(H))}{\Delta H} \\
&= \lim_{(E.5) \Delta H \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)(H + \Delta H) + \frac{\alpha}{\mu_0} B(H + \Delta H) - (1-\alpha)H - \frac{\alpha}{\mu_0} B(H)}{\Delta H} \\
&= \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)H + (1-\alpha)\Delta H + \frac{\alpha}{\mu_0} B(H + \Delta H) - (1-\alpha)H - \frac{\alpha}{\mu_0} B(H)}{\Delta H} \\
&= \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \left[ (1-\alpha) + \frac{\frac{\alpha}{\mu_0} B(H + \Delta H) - \frac{\alpha}{\mu_0} B(H)}{\Delta H} \right] \\
&= (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{B(H + \Delta H) - B(H)}{\Delta H} \\
&= (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial H} [H_e(H, B(H))] = (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \quad (E.2)$$

Utilizando a definição de derivadas parciais [61] calcula-se a derivada parcial do campo magnético efetivo em relação à indução magnética. Isto é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial B} [H_e(H, B(H))] &= \lim_{\Delta B(H) \rightarrow 0} \frac{H_e(H, B(H) + \Delta B(H)) - H_e(H, B(H))}{\Delta B(H)} \\
&= \lim_{(E.5) \Delta B(H) \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)H + \frac{\alpha}{\mu_0}(B(H) + \Delta B(H)) - (1-\alpha)H - \frac{\alpha}{\mu_0}B(H)}{\Delta B(H)} \\
&= \lim_{\Delta B(H) \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{\mu_0}B(H) + \frac{\alpha}{\mu_0}\Delta B(H) - \frac{\alpha}{\mu_0}B(H)}{\Delta B(H)} \\
&= \lim_{\Delta B(H) \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{\mu_0}\Delta B(H)}{\Delta B(H)} \\
&= \lim_{\Delta B(H) \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\mu_0} \\
&= \frac{\alpha}{\mu_0}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial B} [H_e(H, B(H))] = \frac{\alpha}{\mu_0} \quad (E.3)$$

De (E.2) e (E.3) tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_e}{\partial H} &= (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \\
\frac{\partial H_e}{\partial B} &= \frac{\alpha}{\mu_0}
\end{aligned}$$

## E.2 SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

Seja  $B = B(H, H_e) = \mu_0 \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) H + \frac{\mu_0}{\alpha} H_e$ . Isto é:

$$B: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(H, H_e) \rightarrow B(H, H_e) = \mu_0 \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) H + \frac{\mu_0}{\alpha} H_e$$

O diferencial total da função de duas variáveis  $B = B(H, H_e)$  é dado por [61]:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial H} dH + \frac{\partial B}{\partial H_e} dH_e \quad (\text{E.4})$$

Dividindo (E.4) por  $dH_e$  tem-se:

$$\frac{dB}{dH_e} = \frac{\partial B}{\partial H} \frac{dH}{dH_e} + \frac{\partial B}{\partial H_e} \frac{dH_e}{dH_e}$$

Como  $H$  é imposto e portanto não depende de  $H_e$ , tem-se:

$$\frac{dB}{dH_e} = \frac{\partial B}{\partial H} 0 + \frac{\partial B}{\partial H_e} \frac{dH_e}{dH_e}$$

Portanto,

$$\frac{dB}{dH_e} = \frac{\partial B}{\partial H_e}$$