

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT**

Eliane Aparecida Carlos Silva França

GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS NO ENSINO MÉDIO

Florianópolis

2016

Eliane Aparecida Carlos Silva França

GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor

Maiores informações em:
<http://portalbu.ufsc.br/ficha>

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

França, Eliane Aparecida Carlos Silva
Geometria de Distâncias no Ensino Médio / Eliane
Aparecida Carlos Silva França ; orientador, Douglas Soares
Gonçalves - Florianópolis, SC, 2016.
76 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Geometria de Distâncias. 3.
Trilateração. I. Gonçalves, Douglas Soares. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

Eliane Aparecida Carlos Silva França

GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS NO ENSINO MÉDIO

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial.

Florianópolis, 07 de novembro 2016.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC Blumenau

Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Encerrar este trabalho é uma vitória que comemoro com todas as minhas forças. Foram dois anos de muito estudo, de poucas horas de sono, de abstenção de passeios com a família e amigos, de muito esforço e dedicação. Ao findar esta etapa vejo que tudo valeu a pena, só tive forças e sabedoria para ir até o fim, pela permissão de Deus. Então é a ELE, que com todo o meu coração e fé, a quem dedico este trabalho.

“... porque todo o que é nascido de Deus vence o mundo; e esta é a vitória que vence o mundo: a nossa fé.”

(I João 5: 4)

AGRADECIMENTOS

A caminhada foi longa e desafiadora, mas as motivações e a fé que permearam durante todo o percurso tornaram possível esta realização. Chegou então o momento de expressar os meus sinceros agradecimentos.

Aos meus pais Avelino e Etelvina que sempre me apoiaram, se preocuparam e oraram por mim durante cada dia destes mais de dois anos de estudo, o meu eterno obrigado, amo vocês.

Ao meu marido Vanderlei, pela paciência com meu nervosismo quando as coisas não estavam fáceis, pela minha ausência nos finais de semana e viagens, por compreender os muitos “não posso, tenho que estudar”, o meu agradecimento e sincero amor.

À toda minha família que orou e acreditou em mim, em especial ao meu filho Jonathan e ao meu neto Felipe... obrigada pelo simples fato de vocês existirem.

Às minhas amigas Ana e Ranúzy pela cumplicidade, ensinamentos, companheirismo e amizade, um agradecimento especial. Nossas intermináveis horas de estudo acompanhadas por um bom chimarrão com pipoca e algumas risadas, jamais se apagarão da minha memória. Além da minha memória, guardarei vocês em meu coração.

Aos demais colegas do curso PROFMAT pelo convívio e aprendizado, pelo chimarrão e festas de aniversário compartilhados. Em particular, agradeço ao meu colega Jeremias pela paciência, carinho e didática ao nos ensinar, um excelente mestre.

À minha grande amiga Fabiana Yukie Sasaki por sua amizade incondicional, pelos momentos que estudamos juntas, pelos materiais que me emprestou, pelo apoio e estímulo a cada dificuldade que surgia, o meu agradecimento de coração.

A todos os professores do programa PROFMAT- UFSC, por se dedicaram intensamente e contribuírem para minha formação, em especial ao professor Eliezer, pelo seu sorriso e amizade e à professora Alda pela sua competência, exigência e perfeccionismo e bom gosto até mesmo com a coleção de lápis, o meu muito obrigada.

Ao meu professor orientador Dr. Douglas por ter aceitado o meu pedido de orientação, por me mostrar o caminho da ciência, pela disponibilidade, pela paciência, exigência, dedicação e profissionalismo, o meu muito obrigada.

Aos professores que compõem a banca examinadora: Raphael Falcão da Hora, Felipe Delfini Caetano Fidalgo e Maria Inez Cardoso Gonçalves pela sua disposição em avaliar este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

RESUMO

A Geometria de Distâncias é uma área da matemática que estuda a caracterização de lugares geométricos e suas propriedades em termos de distâncias. O problema fundamental da Geometria de Distâncias consiste em determinar a posição de um conjunto de objetos usando apenas algumas distâncias entre pares de objetos. Neste trabalho estudamos alguns problemas básicos de Geometria de Distâncias que podem ser trabalhados no Ensino Médio, como intersecção entre circunferências e esferas e condições que um conjunto de distâncias deve satisfazer para admitir realização no plano e no espaço. Como aplicação da Geometria de Distâncias apresentamos a Localização de Sensores em Redes sem Fio através da técnica de Trilateração. Propomos também algumas questões sobre Geometria de Distâncias que podem ser trabalhadas com alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria de Distâncias. Trilateração. Intersecção entre circunferências e esferas. Redes de Sensores Sem Fio.

ABSTRACT

Distance Geometry is a field of mathematics that studies the characterization of geometric properties relative to distance. The fundamental problem of Distance Geometry is to determine the position of a set of objects using only the distance between some pairs of objects. In this work we study some basic problems of Distance Geometry that can be used in the high school classes, such as the intersection between circumferences and spheres and the conditions that a set of distances must satisfy to admit a realization in the plane and the space. As an application of Distance Geometry we present the Sensor Network Localization problem and its solution through the trilateration technique. We also propose some problems about Distance Geometry that can be studied with high school students.

Keywords: Distance geometry. Trilateration. Intersection between circumferences and spheres. Wireless Sensor Network Localization.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	NOTAÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS	19
3	PROBLEMAS BÁSICOS DE GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^2 E EM \mathbb{R}^3	25
3.1	CÁLCULO DA INTERSECÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS E ESFERAS	25
3.1.1	Circunferências	25
3.1.2	Esferas	32
3.2	CONDIÇÕES PARA REALIZAÇÃO DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^2	41
3.2.1	Realização de três distâncias em \mathbb{R}^2	41
3.2.2	Realização de seis distâncias em \mathbb{R}^2	47
3.3	CONDIÇÕES PARA REALIZAÇÃO DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^3	49
3.3.1	Realização de seis distâncias em \mathbb{R}^3	50
3.3.2	Ângulos de diedros e triedros	50
3.3.3	Lei dos cossenos para os ângulos de um triedro	52
3.3.4	Seis distâncias iguais em \mathbb{R}^3	54
3.3.5	Seis distâncias quaisquer em \mathbb{R}^3	57
4	UMA APLICAÇÃO PARA GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS	61
4.1	TRILATERAÇÃO	62
4.2	TRIANGULAÇÃO	62
4.3	LOCALIZAÇÃO EM REDES DE SENSORES SEM FIO .	62
5	EXERCÍCIOS PARA O ENSINO MÉDIO	65
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

A história da geometria de distâncias remete à Grécia antiga, mais especificamente com Heron de Alexandria que mostrou como calcular a área de um triângulo qualquer conhecendo apenas a medida dos seus lados. Depois de quase dois mil anos, aparece na história Arthur Cayley, como um dos precursores no estudo da Geometria de Distâncias (GD). Mais tarde, por volta de 1930, Karl Menger em seus estudos, generalizou o teorema de Heron para calcular o volume do tetraedro, usando comprimentos de suas arestas. Condições necessárias e suficientes para a existência de soluções de um problema de GD podem ser estabelecidas em termos de determinantes de Cayley - Menger (??). Depois, aparece Gödel contribuindo com a Geometria de Distâncias no estudo da esfera. Por fim acerca de 1935, Isaac Schoenberg fez a relação com Álgebra Linear Matricial (LIBERTI; LAVOR, 2016).

Este foi o grupo principal de matemáticos que iniciou o estudo da GD há pouco mais de 1 século. Hoje em dia esta é uma área de pesquisa consolidada, cujos alicerces são a Matemática e a Computação (LIBERTI; LAVOR, 2016).

Informalmente falando, o Problema da Geometria de Distâncias (PGD) consiste em determinar as coordenadas de um conjunto de pontos em um espaço Euclidiano usando apenas uma lista arbitrária de distâncias entre alguns pares de pontos deste conjunto (LIBERTI; LAVOR, 2014).

O interesse pelo PGD reside na riqueza de suas aplicações. Em astronomia, o PGD está relacionado à determinação da posição de estrelas. Em bioquímica e biologia molecular ele é conhecido como Problema Molecular de Geometria de Distâncias que consiste em encontrar todas as estruturas tridimensionais possíveis para uma molécula, quando conhecemos algumas distâncias entre pares de átomos. Conhecer tais estruturas é de fundamental importância pois estão associadas a propriedades físico-químicas da molécula (FIDALGO, 2011).

Em robótica, o PGD aparece na Cinemática, ramo da mecânica relacionada à análise geométrica do movimento. Mais especificamente no posicionamento e movimento dos braços de um robô. Em telecomunicações, o PGD está relacionado com a localização de sensores em redes sem fio, como nos smartphones, onde é possível estimar a distância entre os sensores através da quantidade de bateria que usam para se comunicar e com essas distâncias pode-se localizar cada sensor. Ainda neste ramo ele se relaciona com o Sistema de Posicionamento Global

(GPS) e com a localização e controle de frotas de veículos autônomos subaquáticos (LIBERTI et al., 2014). Essas aplicações são apenas algumas que, em diferentes áreas, continuam sendo estudadas e aperfeiçoadas.

Neste trabalho, com intuito de motivar os estudantes, abordaremos problemas fundamentais em Geometria de Distâncias que possam ser trabalhados no Ensino Médio, utilizando conteúdos como: sistemas lineares, matrizes, desigualdades triangulares, quadriláteros, tetraedros, cálculo de distância entre dois pontos (norma Euclidiana), representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal, círculos, esferas, lei dos cossenos, entre outros. Posteriormente, vamos apresentar uma aplicação do estudo da Geometria de Distâncias na área da Telecomunicação: Localização de Nós Sensores em Redes Sem Fio, que acreditamos ser do interesse dos alunos, ou por simples curiosidade ou, até mesmo por representar uma área de estudos que pode ser uma opção para a escolha da futura profissão.

O conteúdo deste trabalho está dividido em 6 capítulos. No Capítulo 2 apresentamos as notações e conceitos utilizados no decorrer de todo o trabalho. No Capítulo 3 apresentamos alguns problemas básicos de Geometria de Distâncias: intersecção de circunferências no plano e a intersecção de esferas no espaço, ambos através da resolução de sistemas de equações quadráticas. Além disso estabelecemos condições necessárias a serem satisfeitas por um conjunto de distâncias para a existência de soluções para o PGD. O Capítulo 4 traz uma aplicação do Problema fundamental da Geometria de Distâncias nas Redes de Sensores Sem Fio, utilizando o método de trilateração para determinar a posição dos sensores. Já no Capítulo 5, apresentamos alguns exercícios de Geometria de Distâncias que podem ser aplicadas no Ensino Médio. Por fim, conclusões e trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 6.

2 NOTAÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

Para facilitar a leitura deste trabalho apresentaremos neste capítulo algumas notações que foram utilizadas no decorrer de todo o texto e também alguns conceitos que são necessários para a sua compreensão. Considere A e B pontos em \mathbb{R}^n . Assim, representaremos:

- x_A : vetor coluna de coordenadas de A , dado por:

$$x_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix};$$

Quando conveniente também poderemos denotar o vetor x_A por $x_A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

- $\|x_A\|$: norma Euclidiana do vetor x_A , dada por:

$$\|x_A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2};$$

- \overrightarrow{AB} : segmento orientado obtido pela diferença entre as coordenadas de A e B , dado por:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{bmatrix};$$

- d_{AB} : distância entre A e B , dada por:

$$d_{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2};$$

- ΔABC para nos referir ao triângulo de vértices A , B e C .

Podemos formalmente definir o Problema de Geometria de Distâncias (PGD) da seguinte maneira:

Definição 1. (LIBERTI et al., 2014) Sejam $V = \{1, 2, \dots, N\}$ uma enumeração de N objetos e E um conjunto de pares não ordenados $\{i, j\}$ de

V , representando os pares de objetos para os quais a distância d_{ij} é conhecida. Dado um inteiro positivo k , é possível encontrar coordenadas de pontos x_i em \mathbb{R}^k , tais que:

$$\|x_i - x_j\| = d_{ij}, \quad \forall \{i, j\} \in E? \quad (2.1)$$

Em outras palavras, o Problema de Geometria de Distâncias consiste em determinar as posições dos objetos (coordenadas no espaço Euclidiano) que satisfaçam todas as restrições em (2.1), referentes às distâncias conhecidas. Uma solução para o PGD pode ser representada por um conjunto de vetores x_1, x_2, \dots, x_N , organizados como colunas de uma matriz X .

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}.$$

Observe o seguinte exemplo que mostra um Problema de Geometria de Distâncias:

Exemplo 1. *Sejam A, B e C pontos em \mathbb{R}^2 . Dada a lista de distâncias conhecidas: $\{d_{AB} = 1, d_{BC} = \sqrt{2}$ e $d_{AC} = 1\}$, determine coordenadas para os pontos A, B e C que satisfaçam estas distâncias.*

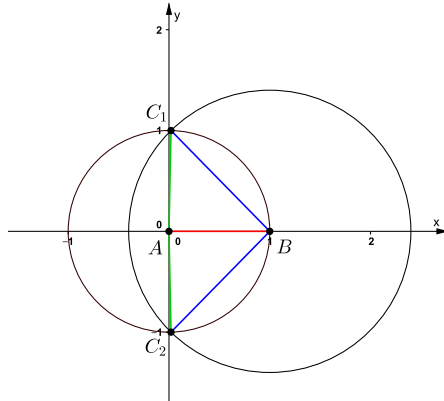
Resolução: Vamos considerar que o ponto A esteja na origem do sistema cartesiano e que o ponto B esteja sobre o eixo OX positivo. Dessa forma $d_{AB} = 1$ é satisfeita, logo $x_A = (0, 0)$ e $x_B = (1, 0)$. Vamos determinar onde deverá estar localizado o ponto C , de tal forma que as demais distâncias sejam satisfeitas. Observe a representação geométrica deste problema:

Com centro em A , traçamos uma circunferência com raio $d_{AC} = 1$ então C deve ser um ponto dessa circunferência. Com centro em B traçamos uma nova circunferência com raio $d_{BC} = \sqrt{2}$, ou seja, C deverá ser um ponto sobre esta nova circunferência. Portanto como C deve pertencer à intersecção entre elas. Logo há duas possíveis soluções para a determinação deste ponto: C_1 e C_2 .

Uma solução para o PGD é chamada *realização* ou *configuração*. É importante observar que, ao encontrarmos uma solução para o PGD, é possível sempre obter uma quantidade infinita de realizações distintas, se considerarmos as congruências, como definido a seguir..

Definição 2. *Congruência é uma transformação linear que preserva todas as distâncias entre quaisquer pares de pontos de uma realização (DOLCE; POMPEO, 2013a).*

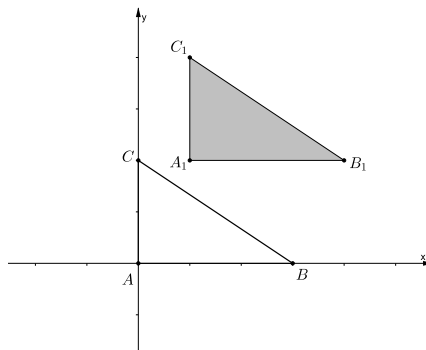
Figura 1 – PGD



São exemplos de congruências: translação, rotação e reflexão.

No movimento de translação todos os pontos da figura original deslocam-se segundo a mesma direção, mesmo sentido e percorrendo a mesma distância, conforme mostra a Figura 2.

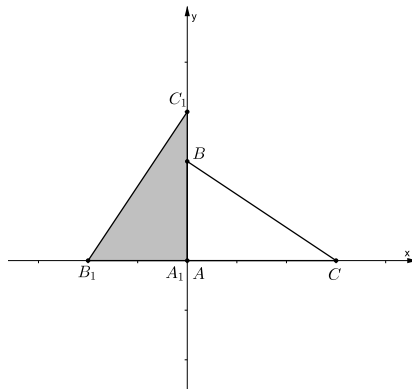
Figura 2 – Movimento de translação



No movimento de rotação todos os pontos de uma realização giram por um ângulo α , em relação a um centro de rotação (\mathbb{R}^2) ou eixo de rotação (\mathbb{R}^3), fixado. Na rotação é preservada a amplitude e a orientação (sentido) dos ângulos e também são preservadas as distâncias,

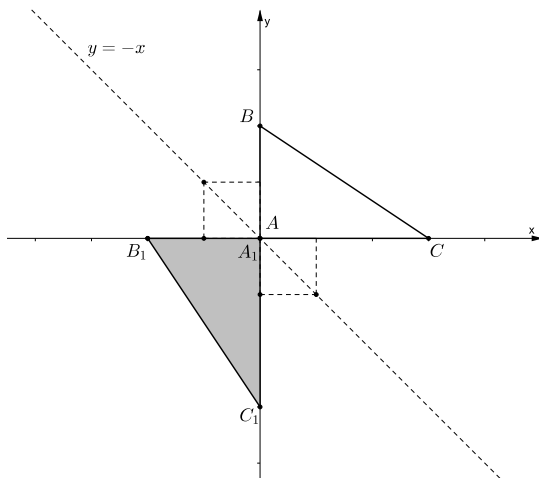
ou seja, conserva-se o comprimento dos segmentos de reta. Na Figura 3 apresentamos um exemplo de um triângulo que foi rotacionado 90° no sentido anti-horário, a partir do eixo OX . Assim a imagem transformada de cada segmento de reta que forma os lados do triângulo é um segmento de reta geometricamente igual e, da mesma forma, o ângulo entre os segmentos também é igual. Note que o movimento de rotação pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Figura 3 – Movimento de rotação



Já a reflexão consiste no espelhamento de uma figura, onde cada ponto da figura original e o correspondente da figura refletida estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e a igual distância desse eixo. Observe na Figura 4 um exemplo de reflexão.

Figura 4 – Reflexão em relação à reta $y = -x$



É importante ressaltar que (2.1) representa um sistema de equações não lineares que, em geral, pode ser extremamente complicado de se resolver tanto de forma analítica como numérica. Neste trabalho iremos considerar casos particulares. Resolveremos alguns problemas básicos de Geometria de Distâncias, como por exemplo a intersecção entre circunferências e esferas e também analisaremos as condições que as distâncias entre pontos devem satisfazer para que exista realização no plano e no espaço.

Assim, desconsiderando as soluções obtidas por congruências: rotação, translação e reflexão (COSTA; RODRIGUES, 2010), no Capítulo 3 vamos resolver estes problemas e determinar o número de realizações para cada situação proposta. Todos os problemas também serão resolvidos geometricamente com ilustrações, para facilitar o entendimento.

3 PROBLEMAS BÁSICOS DE GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^2 E EM \mathbb{R}^3

Abordaremos nesse capítulo questões do tipo: “Conhecidas algumas distâncias entre pares de objetos é possível encontrar uma realização em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 ?”. Note que no estudo da Geometria de Distâncias, o caminho é o inverso do costumeiro: dadas as distâncias entre os pontos busca-se posições para eles que satisfaçam tais distâncias.

Vamos, inicialmente, apresentar uma seção sobre o cálculo da intersecção entre circunferências e esferas e nas próximas seções, discutiremos as condições necessárias para que um conjunto de distâncias admita realização no plano e no espaço.

3.1 CÁLCULO DA INTERSECÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS E ESFERAS

Nesta seção, encontraremos a solução, quando existir, para o problema da intersecção de circunferências em \mathbb{R}^2 e de esferas em \mathbb{R}^3 . Esses problemas, em geral, são essenciais para a resolução do PGD e importantes em aplicações, como veremos no Capítulo 4.

3.1.1 Circunferências

Definição 3. *Uma circunferência de centro O e raio $d > 0$, é o conjunto de todos os pontos P do plano, tais que $\|x_P - x_O\| = d$, onde x_P , x_O denotam as coordenadas dos pontos P e O , respectivamente.*

Vamos iniciar calculando a intersecção entre circunferências no plano.

Proposição 1. *A intersecção de duas circunferências com centros distintos pode ser vazia, um ponto ou dois pontos.*

Demonstração. Considere duas circunferências, φ_1 de centro $x_A = (a_1, a_2)$ e raio d_{AP} e φ_2 de centro $x_B = (b_1, b_2)$ e raio d_{BP} e um ponto P de coordenadas $x_P = (p_1, p_2)$.

As equações dessas circunferências são:

$$\varphi_1 : (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 = d_{AP}^2 \quad (3.1)$$

$$\varphi_2 : (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 = d_{BP}^2. \quad (3.2)$$

Analisando a distância entre os centros de φ_1 e φ_2 e seus respectivos raios, vamos mostrar que:

1. Se $d_{AB} > d_{AP} + d_{BP}$ ou $d_{AB} < |d_{AP} - d_{BP}|$ então não há ponto de intersecção;
2. Se $d_{AB} = d_{AP} + d_{BP}$ ou $d_{AB} = |d_{AP} - d_{BP}|$ então as circunferências são tangentes num único ponto;
3. E por último, se $|d_{AP} - d_{BP}| < d_{AB} < d_{AP} + d_{BP}$ então há dois pontos de intersecção.

Para que a intersecção dessas duas circunferências seja não vazia, é necessário que exista o ponto P e que este, satisfaça simultaneamente as equações das duas circunferências, (3.1) e (3.2).

Se existir este ponto P , podemos encontrar suas coordenadas através da resolução do sistema de equações quadráticas:

$$\begin{cases} (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 = d_{AP}^2, & (3.3) \\ (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 = d_{BP}^2. & (3.4) \end{cases}$$

Sem perda de generalidade fixemos o ponto A na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o ponto B no eixo OX , ou seja, $x_A = (0, 0)$ e $x_B = (d_{AB}, 0)$. Reescrevendo o sistema de equações (3.3) e (3.4), teremos:

$$\begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = d_{AP}^2 & (3.5) \\ (p_1 - d_{AB})^2 + p_2^2 = d_{BP}^2. & (3.6) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (3.6) e subtraindo (3.5) de (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} 2p_1 d_{AB} - d_{AB}^2 &= d_{AP}^2 - d_{BP}^2 \\ p_1 &= \frac{d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}. \end{aligned}$$

Esta é a reta que contém a intersecção entre as duas circunferências. Vamos agora substituir o valor encontrado para p_1 na equação (3.5):

$$\begin{aligned}
p_2^2 &= d_{AP}^2 - p_1^2 \\
p_2^2 &= d_{AP}^2 - \left(\frac{d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}} \right)^2 \\
p_2^2 &= \frac{4d_{AB}^2 d_{AP}^2 - (d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)^2}{4d_{AB}^2} \\
p_2^2 &= \frac{(2d_{AB}d_{AP})^2 - (d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)^2}{(2d_{AB})^2} \\
p_2^2 &= \frac{(2d_{AB}d_{AP} + d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)(2d_{AB}d_{AP} - d_{AP}^2 + d_{BP}^2 - d_{AB}^2)}{(2d_{AB})^2} \\
p_2^2 &= \frac{((d_{AP} + d_{AB})^2 - d_{BP}^2)(d_{BP}^2 - (d_{AP} - d_{AB})^2)}{(2d_{AB})^2} \\
p_2^2 &= \frac{(d_{AP} + d_{AB} + d_{BP})(d_{AP} + d_{AB} - d_{BP})(d_{BP} + d_{AP} - d_{AB})(d_{BP} - d_{AP} + d_{AB})}{(2d_{AB})^2}
\end{aligned}$$

Uma vez que os centros são distintos e as distâncias estritamente positivas, teremos três possibilidades:

1. Se $d_{AP} + d_{AB} < d_{BP}$ ou $|d_{AP} - d_{AB}| > d_{BP}$ então t será um número negativo e portanto a equação $p_2^2 = t$ não terá solução real. Logo a intersecção entre as duas circunferências será vazia.
2. Se $d_{AB} = d_{BP} + d_{AP}$ então $p_2^2 = 0$ e portanto há apenas um ponto de intersecção entre as circunferências, a saber o ponto é $\left(\frac{d_{AP}^2 + d_{BP}d_{AP}}{d_{AB}}, 0 \right)$, e neste caso as circunferências são tangentes externamente. E se $|d_{AP} - d_{BP}| = d_{AB}$ então as duas circunferências serão tangentes internamente e $P = \left(\frac{d_{AP}^2 - d_{AP}d_{BP}}{d_{AB}}, 0 \right)$;
3. Se $d_{AP} + d_{AB} > d_{BP}$, $d_{BP} + d_{AP} > d_{AB}$ e $d_{BP} + d_{AB} > d_{AP}$, então $p_2^2 = t > 0$ e portanto a intersecção entre as duas circunferências será dois pontos: $P_1 = (p_1, \sqrt{t})$ e $P_2 = (p_1, -\sqrt{t})$;

Note que as desigualdades:

$$\begin{cases} d_{AP} + d_{AB} > d_{BP} \\ d_{BP} + d_{AP} > d_{AB} \\ d_{BP} + d_{AB} > d_{AP} \end{cases} \quad (3.7)$$

são conhecidas como *Desigualdades Triangulares* e garantem a existência de três pontos, satisfazendo as distâncias. Na Seção 3.2.1 faremos

esta discussão, analisando as condições necessárias que as distâncias entre três pontos devem satisfazer para formar um triângulo. Podemos perceber também que quando as desigualdades (3.7) são satisfeitas há intersecção entre as circunferências e no caso contrário, a intersecção é vazia, como no ítem 1.

Note que, embora tenhamos fixado $x_A = (0, 0)$ e $x_B = (d_{AB}, 0)$ essa análise continua sendo geral pois é possível através de translação e rotação, com centros arbitrários, levá-los a tal sistema de coordenadas. \square

Vamos agora resolver o segundo problema de geometria de distâncias: “Como é a intersecção entre três circunferências no plano?”

Proposição 2. *A intersecção de três circunferências com centros não colineares pode ser vazia ou um ponto.*

Demonstração. Considere três circunferências φ_1 de centro $x_A = (a_1, a_2)$ e raio d_{AP} , φ_2 de centro $x_B = (b_1, b_2)$ e raio d_{BP} e φ_3 de centro $x_C = (c_1, c_2)$ e raio d_{CP} e um ponto P tal que $x_P = (p_1, p_2)$.

As equações dessas circunferências são:

$$\varphi_1 : (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 = d_{AP}^2 \quad (3.8)$$

$$\varphi_2 : (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 = d_{BP}^2 \quad (3.9)$$

$$\varphi_3 : (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 = d_{CP}^2 \quad (3.10)$$

Para que a intersecção dessas três circunferências seja não vazia, é necessário que exista o ponto P e que este, satisfaça simultaneamente as equações (3.8), (3.9) e (3.10). Se existir este ponto P , vamos encontrar suas coordenadas através da resolução do sistema formado por estas equações, que pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} p_1^2 - 2p_1a_1 + a_1^2 + p_2^2 - 2p_2a_2 + a_2^2 = d_{AP}^2 \\ p_1^2 - 2p_1b_1 + b_1^2 + p_2^2 - 2p_2b_2 + b_2^2 = d_{BP}^2 \\ p_1^2 - 2p_1c_1 + c_1^2 + p_2^2 - 2p_2c_2 + c_2^2 = d_{CP}^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Subtraindo a primeira equação das outras duas:

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)p_1 + (b_2 - a_2)p_2 = \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{BP}^2 - a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 + b_2^2) \\ (c_1 - a_1)p_1 + (c_2 - a_2)p_2 = \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{CP}^2 - a_1^2 + c_1^2 - a_2^2 + c_2^2). \end{cases}$$

Denotando

$$\alpha = \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{BP}^2 - a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 + b_2^2)$$

e

$$\beta = \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{CP}^2 - a_1^2 + c_1^2 - a_2^2 + c_2^2),$$

o sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)p_1 + (b_2 - a_2)p_2 = \alpha \\ (c_1 - a_1)p_1 + (c_2 - a_2)p_2 = \beta. \end{cases} \quad (3.12)$$

Este é um sistema de equações lineares nas incógnitas p_1 e p_2 . Na forma matricial temos $Mx = n$, onde:

$$M = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \text{ e } n = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Este sistema linear tem solução única se a matriz M for invertível, ou seja, se o determinante da matriz M for diferente de zero.

Se $\det M = 0$ então há duas possibilidades, ou não há solução ou há infinitas soluções. Vamos analisar as propriedades dos determinantes e verificar em que condições $\det M = 0$.

Propriedade 1. *Se todos os elementos de uma linha ou coluna forem iguais a zero, então o determinante dessa matriz será igual a zero.*

Na 1ª linha, por exemplo, temos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Por hipótese temos que A, B e C são não colineares, dessa forma A, B e C também serão distintos, logo $b_1 \neq a_1$ ou $b_2 \neq a_2$. Na 1ª coluna temos as primeiras coordenadas dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , respectivamente. Note que não é possível que tenhamos ambas as coordenadas iguais a zero, pois assim os pontos A, B e C estariam alinhados numa reta vertical e por hipótese temos que eles são não colineares.

O mesmo ocorre para as outras entradas da matriz M . Portanto não é possível que M tenha uma linha ou coluna de zeros.

Propriedade 2. *Se os elementos de duas linhas ou colunas forem proporcionais então o determinante dessa matriz é igual a zero.*

Suponha que as duas linhas da matriz M sejam proporcionais, então existe $\theta \in \mathbb{R}^*$ tal que:

$$b_1 - a_1 = \theta(c_1 - a_1) \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = \theta(c_2 - a_2).$$

Note que neste caso teríamos proporcionalidade entre os vetores \vec{AB} e \vec{AC} acarretando novamente que os pontos A , B e C estivessem sobre uma mesma reta, o que não pode ocorrer, por hipótese.

Feitas estas análises, concluímos que, para centros não colineares, $\det M \neq 0$, logo a matriz M é invertível e a solução da equação matricial $Mx = n$ é única.

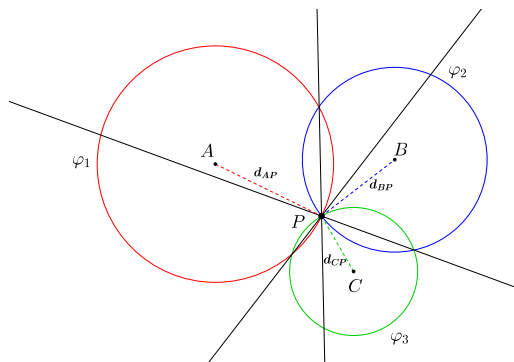
Para encontrarmos a solução desse sistema de equações podemos, por exemplo, utilizar o método do escalonamento (HEFEZ; FERNANDES, 2016).

Logo $x = (p_1, p_2)$ é solução única do sistema linear (3.12). Mas isso não implica, necessariamente, que a intersecção das três circunferências seja não vazia. Deve-se ainda verificar se o ponto P pertence a cada uma das três circunferências (3.8), (3.9) e (3.10). Em caso afirmativo, P é o único ponto de intersecção de φ_1 , φ_2 e φ_3 .

□

Na Figura 5 ilustramos quando a intersecção de três circunferências é um ponto.

Figura 5 – Intersecção de três circunferências: um ponto



A seguir resolveremos um exemplo de intersecção de três circunferências onde a equação matricial $Mx = n$ tem solução única, mas esta solução não satisfaz às equações das três circunferências.

Exemplo 1. Considere $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -2)$, $d_{AP} = 1$, $d_{BP} = 1$ e $d_{CP} = 1$. Qual a intersecção das três circunferências com centro em A e raio d_{AP} , centro em B e raio d_{BP} e centro em C e raio d_{CP} ?

Resolução: A equação das três circunferências são:

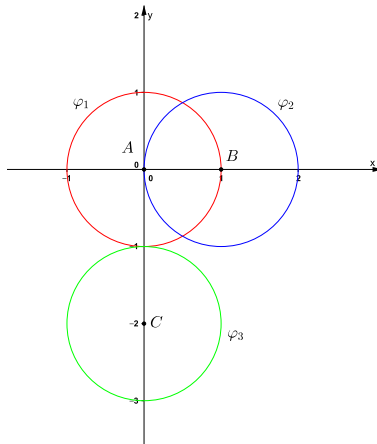
$$\begin{cases} \varphi_1 : p_1^2 + p_2^2 = 1 \\ \varphi_2 : (p_1 - 1)^2 + p_2^2 = 1 \\ \varphi_3 : p_1^2 + (p_2 + 2)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Resolvendo a equação matricial $Mx = n$, teremos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} e \quad n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = -1$ é solução única do sistema 3.13. Mas note que o valor encontrado para P não satisfaz as equações das circunferências φ_1 , φ_2 e φ_3 . Logo a intersecção dessas três circunferências é vazia, conforme podemos observar na Figura 6.

Figura 6 – Sistema Linear com solução mas a intersecção é vazia



3.1.2 Esferas

Definição 4. *Uma superfície esférica de centro O e raio $d > 0$, é o conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que $\|x_P - x_O\| = d$, onde x_P, x_O denotam as coordenadas dos pontos P e O , respectivamente (LIMA et al., 2006).*

A esfera é o análogo tridimensional do círculo, inclusive na ambiguidade da terminologia: a palavra esfera tanto pode ser usada para se referir à superfície esférica quanto ao sólido por ela determinado. Sendo assim, ao longo deste, utilizaremos a palavra “esfera” para nos referir à superfície esférica.

A seguir vamos calcular a intersecção de esferas no espaço.

Proposição 3. *A intersecção de duas esferas com centros distintos pode ser vazia, um ponto ou um círculo.*

Demonstração. Considere duas esferas, δ_1 de centro $x_A = (a_1, a_2, a_3)$ e raio d_{AP} e δ_2 de centro $x_B = (b_1, b_2, b_3)$ e raio d_{BP} e um ponto P , tal que $x_P = (p_1, p_2, p_3)$.

As equações dessas esferas são:

$$\delta_1 : (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2 = d_{AP}^2, \quad (3.14)$$

$$\delta_2 : (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 + (p_3 - b_3)^2 = d_{BP}^2. \quad (3.15)$$

Analisando a distância entre os centros de δ_1 e δ_2 e seus respectivos raios, vamos mostrar que:

1. Se $d_{AB} > d_{AP} + d_{BP}$ ou $d_{AB} < |d_{AP} - d_{BP}|$ então não há ponto de intersecção entre as esferas;
2. Se $d_{AB} = d_{AP} + d_{BP}$ ou $d_{AB} = |d_{AP} - d_{BP}|$ então as esferas são tangentes num único ponto;
3. E por último, se $|d_{AP} - d_{BP}| < d_{AB} < d_{AP} + d_{BP}$ então a intersecção é um círculo.

Para que a intersecção dessas duas esferas seja não vazia, é necessário que exista o ponto P e que este, satisfaça simultaneamente as equações das duas esferas (3.14) e (3.15).

Vamos considerar o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXYZ. Sem perda de generalidade vamos fixar o centro A na origem do espaço cartesiano, logo $x_A = (0, 0, 0)$ e fixar o centro B sobre o eixo

OZ positivo, com $x_B = (0, 0, d_{AB})$. Em relação a este sistema de coordenadas as equações das esferas são:

$$\begin{cases} \delta_1 : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = d_{AP}^2 & (3.16) \\ \delta_2 : p_1^2 + p_2^2 + (p_3 - d_{AB})^2 = d_{BP}^2 & (3.17) \end{cases}$$

Assim se existir este ponto P , vamos encontrar suas coordenadas através da resolução desse sistema.

Subtraindo a primeira da segunda equação, temos:

$$\begin{aligned} p_3^2 - (p_3 - d_{AB})^2 &= d_{AP}^2 - d_{BP}^2 \\ 2p_3d_{AB} - d_{AB}^2 &= d_{AP}^2 - d_{BP}^2 \\ p_3 &= \frac{d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}. \end{aligned}$$

Esse é o plano que contém a intersecção das duas esferas. Basta agora intersecar este plano com uma das esferas. Escolhemos a esfera δ_1 e vamos substituir p_3 :

$$\begin{cases} p_3 = \frac{d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2}{2d_{AB}}, \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = d_{AP}^2. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 &= d_{AP}^2 - \frac{(d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)^2}{4d_{AB}^2} \\ &= \frac{4d_{AP}^2d_{AB}^2 - (d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)^2}{4d_{AB}^2} \\ &= \frac{(2d_{AP}d_{AB} + d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + d_{AB}^2)(2d_{AP}d_{AB} - d_{AP}^2 + d_{BP}^2 - d_{AB}^2)}{4d_{AB}^2} \\ &= \frac{((d_{AP} + d_{AB})^2 - d_{BP}^2)(d_{BP}^2 - (d_{AP} - d_{AB})^2)}{4d_{AB}^2} \\ &= \frac{(d_{AP} + d_{AB} + d_{BP})(d_{AP} + d_{AB} - d_{BP})(d_{BP} + d_{AP} - d_{AB})(d_{BP} - d_{AP} + d_{AB})}{4d_{AB}^2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Uma vez que os centros são distintos e as distâncias estritamente positivas, então teremos três possibilidades:

- Se $d_{AP} + d_{BP} < d_{AB}$ ou $d_{AB} < |d_{AP} - d_{BP}|$ então $p_1^2 + p_2^2 = t < 0$ o que é um absurdo, já que é uma soma de números positivos, logo não existe a intersecção entre as esferas. Note que as distâncias

d_{AP} , d_{BP} e d_{AB} não satisfazem a desigualdade triangular.

- Se $d_{AB} = d_{AP} + d_{BP}$ então $p_1^2 + p_2^2 = 0$, e a intersecção consiste em um único ponto, a saber o ponto $(0, 0, p_3) = \left(0, 0, \frac{d_{AP}^2 + d_{BP}d_{AP}}{d_{AB}}\right)$. Neste caso as duas esferas são tangentes externamente. Mas se $d_{AB} = |d_{AP} - d_{BP}|$ então as duas esferas serão tangentes internamente e o ponto de tangência será $P = \left(0, 0, \frac{d_{AP}^2 - d_{BP}d_{AP}}{d_{AB}}\right)$.
- Se $d_{AP} + d_{AB} > d_{BP}$ e $d_{BP} + d_{AP} > d_{AB}$ e $d_{BP} + d_{AB} > d_{AP}$ então $p_1^2 + p_2^2 = t > 0$, e a intersecção será um círculo, ou seja, as duas esferas se interseccionam formando um círculo comum às duas.

Embora tenhamos fixado $x_A = (0, 0, 0)$ e $x_B = (0, 0, d_{AB})$ essa análise continua sendo geral pois é possível através de translação e rotação, com centros arbitrários, levá-los ao sistema de coordenadas utilizado. \square

Observe a ilustração da intersecção de duas esferas representada nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Intersecção de duas esferas

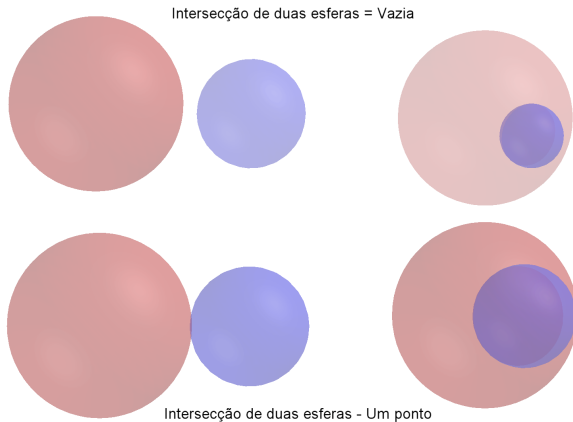
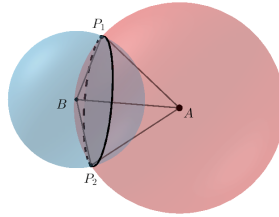


Figura 8 – Intersecção de duas esferas: um círculo



Proposição 4. *A intersecção de três esferas com centros não colineares pode ser vazia, um ponto ou dois pontos.*

Demonstração. Considere três esferas, δ_1 de centro $x_A = (a_1, a_2, a_3)$ e raio d_{AP} , δ_2 de centro $x_B = (b_1, b_2, b_3)$ e raio d_{BP} e δ_3 de centro $x_C = (c_1, c_2, c_3)$ e raio d_{CP} e um ponto P de coordenadas $x_P = (p_1, p_2, p_3)$.

As equações dessas esferas são:

$$\delta_1 : (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2 = d_{AP}^2 \quad (3.19)$$

$$\delta_2 : (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 + (p_3 - b_3)^2 = d_{BP}^2 \quad (3.20)$$

$$\delta_3 : (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 + (p_3 - c_3)^2 = d_{CP}^2. \quad (3.21)$$

Para que a intersecção dessas três esferas seja não vazia, é necessário que exista o ponto P e que este, satisfaça simultaneamente as equações das três esferas (3.19), (3.20) e (3.21).

Vamos considerar o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas OXYZ. Sem perda de generalidade vamos supor que o centro A esteja fixo na origem do plano cartesiano, logo $x_A = (0, 0, 0)$, o centro B esteja sobre o eixo OX positivo, com $x_B = (b_1, 0, 0)$ e o centro C sobre o plano XY, assim $x_C = (c_1, c_2, 0)$. Logo, em relação a este sistema de coordenadas as equações das esferas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = d_{AP}^2 \quad (3.22) \\ \delta_2 : (p_1 - b_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 = d_{BP}^2 \quad (3.23) \\ \delta_3 : (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 + p_3^2 = d_{CP}^2. \quad (3.24) \end{array} \right.$$

Se existir este ponto P , vamos encontrar suas coordenadas através da resolução desse sistema de equações quadráticas. Vamos inicialmente subtrair (3.22) de (3.23) e (3.24):

$$\begin{cases} -2p_1b_1 + b_1^2 = d_{BP}^2 - d_{AP}^2 & (3.25) \\ -2p_1c_1 + c_1^2 - 2p_2c_2 + c_2^2 = d_{CP}^2 - d_{AP}^2. & (3.26) \end{cases}$$

Reescrevendo (3.25) temos: $b_1p_1 = \frac{d_{AP}^2 - d_{BP}^2 + b_1^2}{2}$. Chamando o 2º termo de α , temos que: $p_1 = \frac{\alpha}{b_1}$, para $b_1 \neq 0$, pois se $b_1 = 0$ então os centros A e B seriam coincidentes, o que não pode acontecer, por hipótese.

Vamos agora substituir p_1 na equação (3.26):

$$\begin{aligned} -2c_1 \left(\frac{\alpha}{b_1} \right) + c_1^2 - 2p_2c_2 + c_2^2 &= d_{CP}^2 - d_{AP}^2 \\ c_2p_2 &= \frac{1}{2} \left(d_{AP}^2 - d_{CP}^2 - \frac{2c_1\alpha}{b_1} + c_1^2 + c_2^2 \right). \end{aligned}$$

Chamando o 2º termo de β , temos que: $p_2 = \frac{\beta}{c_2}$, para $c_2 \neq 0$, pois se $c_2 = 0$ então os centros A , B e C seriam colineares, o que não pode acontecer, por hipótese.

Assim, encontramos uma solução para as coordenadas p_1 e p_2 do ponto P . Resta agora encontrar a 3ª coordenada p_3 de P . Para isso vamos substituir os valores encontrados na equação (3.22):

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= d_{AP}^2 \\ \left(\frac{\alpha}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{c_2} \right)^2 + p_3^2 &= d_{AP}^2 \\ p_3^2 &= d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Se $d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2} \right)^2 > 0$ então,

$$p_3 = \pm \sqrt{d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2}, \quad (3.27)$$

e portanto podemos ter até duas soluções para este ponto:

$$P = \left(\frac{\alpha}{b_1}, \frac{\beta}{c_2}, \sqrt{d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2} \right)$$

ou

$$P' = \left(\frac{\alpha}{b_1}, \frac{\beta}{c_2}, -\sqrt{d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2} \right).$$

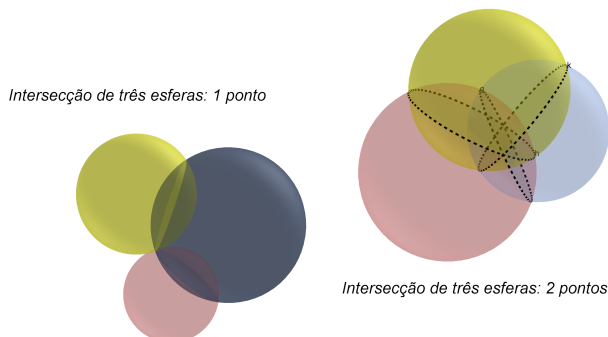
Neste caso a intersecção das três esferas consiste em dois pontos.

Note que se $d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2 = 0$ então P e P' correspondem ao mesmo ponto, ou seja a intersecção entre as três esferas consiste num único ponto.

E ainda, se $d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2 < 0$ então não há solução e portanto a intersecção entre as três esferas é vazia. □

Observe a Figura 9 que apresenta a intersecção de três esferas.

Figura 9 – Intersecção de três esferas



Observe agora um exemplo em que a intersecção de três esferas é vazia.

Exemplo 1. Considere três esferas de raio unitário, δ_1 de centro em A , localizado na origem, δ_2 de centro em B de coordenadas $x_B = (1, 0, 0)$ e δ_3 de centro em C e coordenadas $x_C = (-3, 2, 0)$. Encontre a intersecção dessas três esferas.

Resolução: A equação das três esferas são:

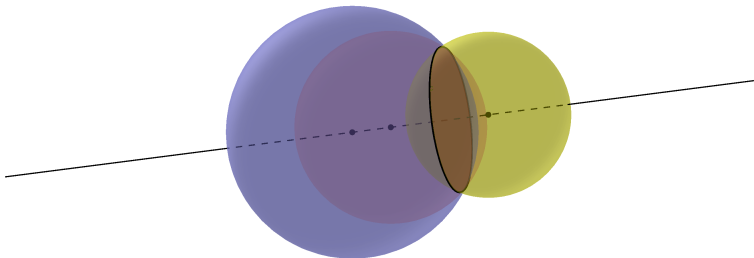
$$\begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \\ (p_1 - 1)^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \\ (p_1 + 3)^2 + (p_2 - 2)^2 + p_3^2 = 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

Pela demonstração anterior, se $d_{AP}^2 - \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c_2}\right)^2 < 0$, então a intersecção é vazia.

Fazendo os cálculos obtemos: $1 - \left(\frac{1}{1}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = \frac{-61}{4} < 0$, logo a intersecção entre as três esferas δ_1 , δ_2 e δ_3 é vazia.

Note ainda que se os centros das três esferas forem colineares, então pode acontecer que a intersecção seja um círculo, conforme pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Intersecção de três esferas com centros colineares: um círculo



Proposição 5. *A intersecção de quatro esferas de centros não coplanares ou é vazia ou é um único ponto.*

Demonstração. Considere quatro esferas, δ_1 de centro $x_A = (a_1, a_2, a_3)$ e raio d_{AP} , δ_2 de centro $x_B = (b_1, b_2, b_3)$ e raio d_{BP} , δ_3 de centro $x_C = (c_1, c_2, c_3)$ e raio d_{CP} e δ_4 de centro $x_D = (d_1, d_2, d_3)$ e raio d_{DP} e também um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$.

As equações dessas esferas são:

$$\begin{cases} \delta_1 : (p_1 - a_1)^2 + (p_2 - a_2)^2 + (p_3 - a_3)^2 = d_{AP}^2 \\ \delta_2 : (p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 + (p_3 - b_3)^2 = d_{BP}^2 \\ \delta_3 : (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 + (p_3 - c_3)^2 = d_{CP}^2 \\ \delta_4 : (p_1 - d_1)^2 + (p_2 - d_2)^2 + (p_3 - d_3)^2 = d_{DP}^2. \end{cases}$$

Para que a intersecção dessas quatro esferas seja não vazia, é necessário que exista um ponto P , tal que $x_P = (p_1, p_2, p_3)$ que satisfaça simultaneamente as equações das quatro esferas δ_1 , δ_2 , δ_3 e δ_4 . Se existir este ponto P , vamos encontrar suas coordenadas através da resolução desse sistema.

Desenvolvendo suas equações, temos:

$$\begin{cases} p_1^2 - 2p_1a_1 + a_1^2 + p_2^2 - 2p_2a_2 + a_2^2 + p_3^2 - 2p_3a_3 + a_3^2 = d_{AP}^2 & (3.29) \\ p_1^2 - 2p_1b_1 + b_1^2 + p_2^2 - 2p_2b_2 + b_2^2 + p_3^2 - 2p_3b_3 + b_3^2 = d_{BP}^2 & (3.30) \\ p_1^2 - 2p_1c_1 + c_1^2 + p_2^2 - 2p_2c_2 + c_2^2 + p_3^2 - 2p_3c_3 + c_3^2 = d_{CP}^2 & (3.31) \\ p_1^2 - 2p_1d_1 + d_1^2 + p_2^2 - 2p_2d_2 + d_2^2 + p_3^2 - 2p_3d_3 + d_3^2 = d_{DP}^2. & (3.32) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (3.29) das equações (3.30), (3.31) e (3.32), obtemos:

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1)p_1 + (b_2 - a_2)p_2 + (b_3 - a_3)p_3 &= \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{BP}^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ (c_1 - a_1)p_1 + (c_2 - a_2)p_2 + (c_3 - a_3)p_3 &= \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{CP}^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \\ (d_1 - a_1)p_1 + (d_2 - a_2)p_2 + (d_3 - a_3)p_3 &= \frac{1}{2}(d_{AP}^2 - d_{DP}^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2). \end{aligned}$$

Reescrevendo, temos:

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)p_1 + (b_2 - a_2)p_2 + (b_3 - a_3)p_3 = \alpha \\ (c_1 - a_1)p_1 + (c_2 - a_2)p_2 + (c_3 - a_3)p_3 = \beta \\ (d_1 - a_1)p_1 + (d_2 - a_2)p_2 + (d_3 - a_3)p_3 = \gamma \end{cases} \quad (3.33)$$

um sistema linear com três equações e três incógnitas: p_1 , p_2 e p_3 .

Resolver este sistema é equivalente a resolver a equação matricial $Mx = n$, onde:

$$M = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \text{e } n = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

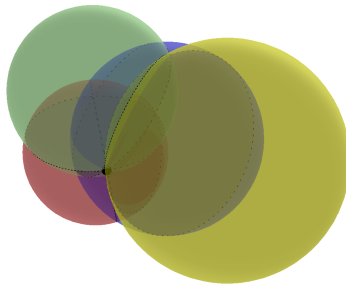
Essa equação tem solução única se a matriz M for invertível, ou seja, se o determinante da matriz M for diferente de zero. Se $\det M = 0$ então há duas possibilidades, ou não há solução ou há infinitas soluções. Vamos analisar as propriedades dos determinantes e verificar em que condições $\det M = 0$.

A análise do determinante de M é análoga à análise feita na Seção 3.1 na Proposição 2 que tratou da intersecção de três circunferências. Ou seja, com a hipótese dos centros não coplanares garantimos que as linhas/colunas de M são linearmente independentes. Portanto concluímos que $\det M \neq 0$, a matriz M é invertível e a solução da equação matricial $Mx = n$ existe e é única.

Encontrando a solução para este sistema (3.33) não significa que x represente o ponto de intersecção das quatro esferas, pois para isso deve-se ainda, verificar se o ponto P encontrado pertence a cada uma das quatro esferas. Em caso afirmativo, P é o único ponto de intersecção de δ_1 , δ_2 , δ_3 e δ_4 . \square

Observe na Figura 11 quando a intersecção de quatro esferas é um único ponto.

Figura 11 – Intersecção de quatro esferas: um ponto



3.2 CONDIÇÕES PARA REALIZAÇÃO DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^2

Nesta seção analisaremos as condições que um conjunto de distâncias deve satisfazer para que exista realização no plano. Diferentemente da seção anterior, aqui não indicaremos a solução, apenas mostraremos se ela existe e se for finita, o número de realizações.

Estudaremos as condições de realização de três distâncias entre 3 pontos em \mathbb{R}^2 e seis distâncias entre 4 pontos em \mathbb{R}^2 .

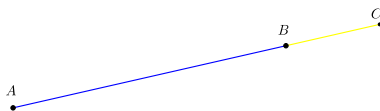
3.2.1 Realização de três distâncias em \mathbb{R}^2

Dadas todas as distâncias entre três pontos: A , B e C quando é possível encontrar uma realização em \mathbb{R}^2 ?

Inicialmente vamos analisar, através de alguns exemplos e construções geométricas, quais as condições necessárias para que três distâncias sejam medidas dos lados de um triângulo. Considere d_{AB} , d_{BC} e $d_{AC} \in \mathbb{R}_+$.

- i) Se $d_{AC} = d_{AB} + d_{BC}$ então estes três pontos estão alinhados, ou seja, formam um triângulo *degenerado*, conforme pode ser observado na Figura 12.

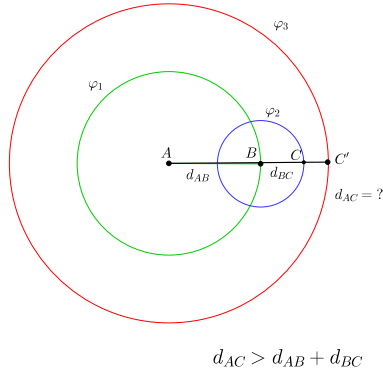
Figura 12 – Três pontos alinhados ou triângulo degenerado



- ii) Se $d_{AC} > d_{AB} + d_{BC}$ então não é possível formar um triângulo. Com efeito, primeiro trace uma circunferência φ_1 de com centro em A e raio d_{AB} . Em seguida escolha um ponto dessa circunferência e denote por B . Agora com centro em B trace uma nova circunferência

φ_2 de raio d_{BC} , onde C deve ser um ponto de φ_2 . Mas, como $d_{AC} > d_{AB} + d_{BC}$, então C não pode pertencer a φ_2 . Logo não é possível formar o triângulo ABC . Observe esta construção na Figura 13.

Figura 13 – Não é possível formar o ΔABC



iii) Se estas três desigualdades forem satisfeitas:

$$\begin{cases} d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC} & \text{(a)} \\ d_{AB} \leq d_{AC} + d_{BC} & \text{(b)} \\ d_{BC} \leq d_{AC} + d_{AB} & \text{(c)} \end{cases} \quad (3.34)$$

então é possível representar o triângulo ABC . Elas são denominadas: *Desigualdades Triangulares*.

Reescrevendo as desigualdades (b) e (c):

- de (b) temos: $d_{AB} \leq d_{AC} + d_{BC} \Rightarrow d_{AC} \geq d_{AB} - d_{BC}$;
- de (c) temos: $d_{BC} \leq d_{AC} + d_{AB} \Rightarrow d_{AC} \geq d_{BC} - d_{AB} \Rightarrow -d_{AC} \leq d_{AB} - d_{BC}$;

Portanto, $-d_{AC} \leq d_{AB} - d_{BC} \leq d_{AC} \Rightarrow |d_{AB} - d_{BC}| \leq d_{AC}$.

Essa desigualdade é chamada de Desigualdade Triangular Reversa.

Logo podemos garantir a existência de um triângulo se as desigualdades (a), (b) e (c) forem satisfeitas ou resumidamente, se:

$$|d_{AB} - d_{BC}| \leq d_{AC} \leq d_{AB} + d_{BC}. \quad (3.35)$$

Conhecendo as condições de existência de um triângulo, vamos agora, através de alguns problemas, responder à questão feita no início desta seção.

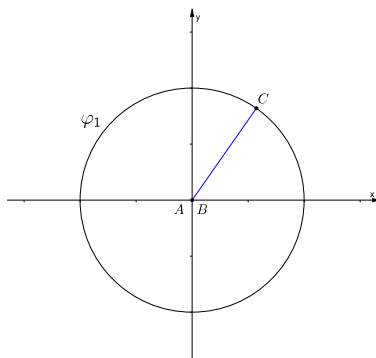
Começemos, sem perda de generalidade, fixando o ponto A na origem do sistema de coordenadas cartesianas e vamos desconsiderar soluções congruentes obtidas por rotações, reflexões e translações.

Exemplo 1. $d_{AB} = 0$, $d_{AC}, d_{BC} > 0$

Considere φ_1 : circunferência de centro em A , tal que $x_A = (0,0) = x_B$ e raio $d_{AC} > 0$ e φ_2 : circunferência de centro em B e raio $d_{BC} > 0$. Como $d_{AB} = 0$ então podemos também fixar o ponto B na origem. Há duas possibilidades neste caso. Se $d_{AC} = d_{BC}$ então há infinitas soluções para a determinação do ponto C , ou seja, C é qualquer ponto da circunferência φ_1 , conforme pode ser observado na Figura 14.

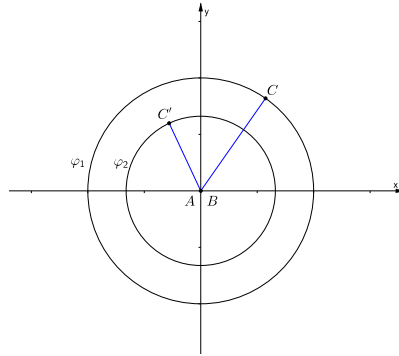
Assim uma realização para o problema é: $X = [x_A \ x_A \ x_C]$; onde x_C é qualquer ponto sobre φ_1 .

Figura 14 – Exemplo 1, com realização



Entretanto, se $d_{AC} \neq d_{BC}$ então $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \emptyset$, conforme podemos observar na Figura 15 e portanto, não há realização.

Figura 15 – Exemplo 1, sem realização



Exemplo 2. $d_{AB} = d_{BC} = d_{AC} > 0$

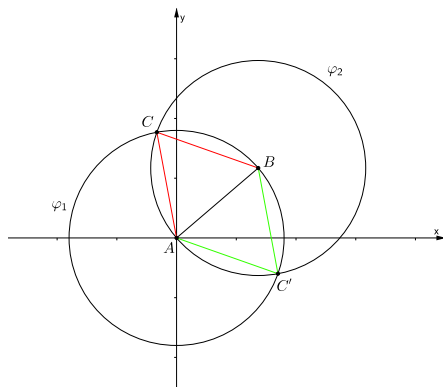
Neste caso temos:

$$\begin{aligned} |d_{AC} - d_{BC}| &< d_{AB} < d_{AC} + d_{BC} \\ |d_{AB} - d_{AB}| &< d_{AB} < d_{AB} + d_{AB} \\ 0 &< d_{AB} < 2d_{AB}, \end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $d_{AB} > 0$ sempre é possível formar o ΔABC , que neste caso é um triângulo equilátero. Para fazer a representação deste triângulo, vamos construir a circunferência φ_1 de raio d_{AB} e centro em A , tal que $x_A = (0, 0)$. Escolhemos um, dentre os infinitos pontos desta circunferência e fixamos o ponto B . Agora com centro em B e mesmo raio, construímos φ_2 . Pelo estudo feito na Seção 3.1, sabemos que neste caso, teremos dois pontos de intersecção: C e C' . Observe na Figura 16 a representação destas distâncias.

Assim, nestas condições, é possível obter duas realizações: $X_1 = [x_A \ x_B \ x_C]$ e $X_2 = [x_A \ x_B \ x_{C'}]$.

Figura 16 – Exemplo 2



Exemplo 3. $d_{AB} < d_{BC} + d_{AC}$

Podemos observar que esta desigualdade refere-se apenas a uma desigualdade triangular, o que não garante a existência do triângulo. Mas se além desta desigualdade, estiver satisfeita a desigualdade triangular reversa, então é possível garantir a existência de um triângulo e consequentemente de uma realização em \mathbb{R}^2 . Observe as duas situações, ilustradas nas Figuras 17 e 18.

Na Figura 17, temos que:

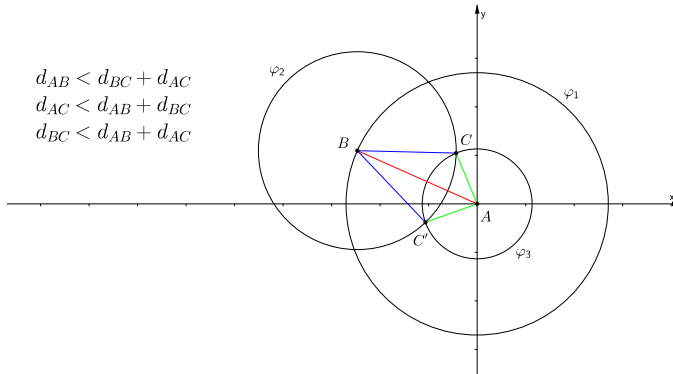
$$\begin{cases} d_{AB} + d_{AC} > d_{BC} \\ d_{BC} + d_{AC} > d_{AB} \\ d_{AB} + d_{BC} > d_{AC}. \end{cases}$$

Considere a seguinte construção: definimos uma circunferência φ_1 de raio d_{AB} e centro em A , tal que $x_A = (0, 0)$. Escolhemos um, dentre os infinitos pontos desta circunferência e fixamos o ponto B . Construímos duas novas circunferências, φ_2 com raio d_{BC} e centro em B e φ_3 com raio d_{AC} e centro em A . Como já vimos, a intersecção de φ_2 e φ_3 são dois pontos, os quais denotaremos por: C e C' .

Assim, nessas condições, há duas realizações:

$$X_1 = [x_A \quad x_B \quad x_C] \text{ e } X_2 = [x_A \quad x_B \quad x_{C'}].$$

Figura 17 – Com realização



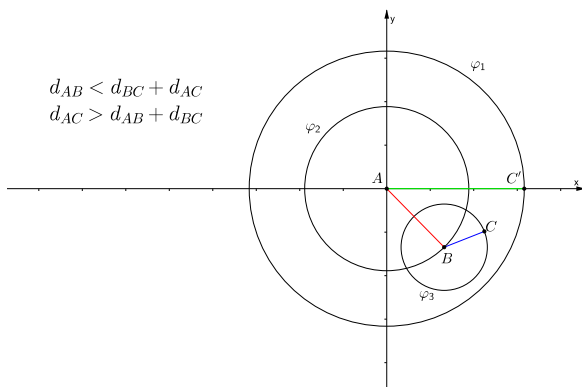
Por outro lado, na Figura 18, note que:

$$\begin{cases} d_{AB} + d_{AC} > d_{BC} \\ d_{BC} + d_{AC} > d_{AB} \\ d_{AB} + d_{BC} < d_{AC}, \end{cases}$$

na tentativa de repetir a construção anterior, definimos um círculo φ_1 de raio d_{AC} e centro em A . Escolhemos um, dentre os infinitos pontos deste círculo e fixamos o ponto C . Construimos dois novos círculos, φ_2 com raio d_{AB} e centro em A e φ_3 com raio d_{BC} e centro em B . Note que os círculos φ_1 e φ_3 não se interceptam, assim, nessas condições, não há possibilidade de realização.

Sendo assim, após as verificações efetuadas, sendo conhecidas todas as distâncias entre três pontos, concluímos que é possível encontrar realização, desde que, as distâncias dadas satisfaçam as desigualdades triangulares, inclusive a desigualdade triangular reversa.

Figura 18 – Sem realização



3.2.2 Realização de seis distâncias em \mathbb{R}^2

Vamos agora analisar mais alguns exemplos considerando distâncias entre quatro pontos em \mathbb{R}^2 . Começemos observando que para formar um quadrilátero, conhecidas as distâncias entre os vértices, algumas condições devem ser satisfeitas. Inicialmente note que um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, unindo-se dois vértices opostos. Para cada triângulo já sabemos que todas as desigualdades triangulares devem ser satisfeitas, então para o quadrilátero, como há uma aresta em comum, esta deve satisfazer, ao mesmo tempo, a desigualdade triangular em ambos os triângulos. Ainda resta analisar a distância entre os outros dois vértices opostos. Vamos analisar cada caso através de exemplos.

Exemplo 1. $d_{AB} = d_{BC} = d_{CD} = d_{DA} = d_{AC} = d_{BD} > 0$

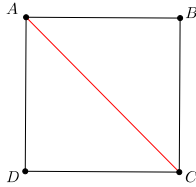
Neste caso queremos construir um quadrilátero de modo que suas arestas e suas diagonais tenham a mesma medida. Sabemos da Geometria que o quadrado e o losango são os quadriláteros que possuem arestas iguais. Considere o quadrado $ABCD$. Sabemos que cada ângulo interno mede 90° e suas arestas possuem medidas iguais. Ao dividi-lo pela diagonal, obtemos dois triângulos retângulos congruentes onde a sua diagonal é a hipotenusa do triângulo retângulo, ou seja, será sempre maior que qualquer lado do triângulo. Mais precisamente, através do Teorema de Pitágoras, teremos $d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2$. Mas

como temos todas as distâncias iguais, então reescrevemos esta igualdade $d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{AB}^2 = 2d_{AB}^2$, logo:

$$d_{AC} = \sqrt{2}d_{AB},$$

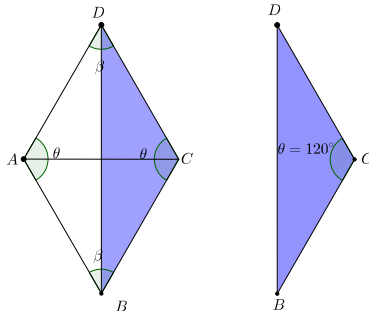
o que é um absurdo. Sendo assim não é possível obter um quadrado nestas condições, não havendo realização em \mathbb{R}^2 .

Figura 19 – Quadrado



Agora considere o losango $ABCD$. Sabemos que é um quadrilátero que possui as quatro arestas e ângulos opostos iguais. Dividindo-o por uma de suas diagonais, obtemos dois triângulos congruentes, conforme pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 – Losango



Queremos distâncias iguais entre os vértices, então cada um desses triângulos deve ser equilátero, logo cada ângulo interno deve medir 60° . Note que $d_{AB} = d_{BC} = d_{AC}$ e $d_{AC} = d_{CD} = d_{DA}$ mas e quanto à distância entre os vértices B e D ? É possível que tenham a mesma medida que as outras arestas?

Facilmente observamos que não é possível, já que traçando a diagonal BD do losango, um dos triângulos formado é o $\triangle BCD$ cujo ângulo $\widehat{BCD} = 120^\circ$. Ou seja este novo triângulo não é equilátero e sim isósceles. Sendo assim, sob estas condições, não é possível uma realização em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 2. $d_{AB} = d_{BC} = d_{CD} = d_{DA} = d_{AC} = \gamma \neq d_{BD}$

Já que não é possível obter realização em \mathbb{R}^2 para todas as distâncias iguais, vamos então supor cinco distâncias iguais e determinar quanto deve medir a distância entre os vértices opostos B e D para que haja realização em \mathbb{R}^2 .

Seja γ um número real positivo. Considere o triângulo isósceles $\triangle BCD$ da Figura 20 cujo ângulo $\theta = 120^\circ$. Assim, utilizando a Lei dos Cossenos, temos:

$$\begin{aligned}
 d_{BD}^2 &= d_{BC}^2 + d_{CD}^2 - 2d_{BC}d_{CD}\cos\theta \\
 &= d_{BC}^2 + d_{BC}^2 - 2d_{BC}d_{BC}\cos 120^\circ \\
 &= 2d_{BC}^2 - 2d_{BC}^2\left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= 3d_{BC}^2, \\
 \text{Logo, } d_{BD} &= \sqrt{3}d_{BC}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Desse modo, para qualquer distância $\gamma > 0$ se tivermos $d_{BD} = \sqrt{3}\gamma$ ou $d_{BD} = 0$, então há realização em \mathbb{R}^2 .

O caso genérico de seis distâncias em \mathbb{R}^2 será tratado na Seção 3.3.5.

3.3 CONDIÇÕES PARA REALIZAÇÃO DE DISTÂNCIAS EM \mathbb{R}^3

Nesta seção o estudo será em \mathbb{R}^3 , analisaremos as condições que as distâncias entre quatro pontos devem satisfazer para que exista realização no espaço.

3.3.1 Realização de seis distâncias em \mathbb{R}^3

Dadas todas as distâncias entre quatro pontos: A , B , C e D , quando é possível encontrar uma realização em \mathbb{R}^3 ?

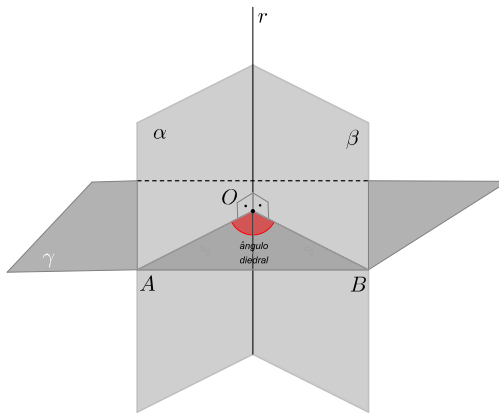
Para estudarmos este problema vamos inicialmente definir ângulos de diedros e triedros, enunciar o Teorema da Lei dos Cossenos para os ângulos de um triedro e demonstrá-lo e, posteriormente, vamos verificar se é possível encontrar uma realização.

3.3.2 Ângulos de diedros e triedros

Definição 5. (DOLCE; POMPEO, 2013a) *Diedro é a reunião de dois semiplanos, α e β de mesma origem, não contidos num mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta r do diedro e os semiplanos são suas faces. O ângulo diedral é o ângulo formado pelas duas faces do diedro. Pode ser indicado por $\widehat{\alpha r \beta}$ ou simplesmente por $di(r)$.*

Observe a representação do ângulo diedral \widehat{AOB} na Figura 21, onde γ é um plano perpendicular à aresta r .

Figura 21 – Ângulo diedral: \widehat{AOB}



Definição 6. (DOLCE; POMPEO, 2013a) Considere três semirretas Oa , Ob e Oc de mesma origem e três semiespaços: ε_1 , ε_2 e ε_3 , como segue:

ε_1 , com origem no plano bc e contendo Oa ;

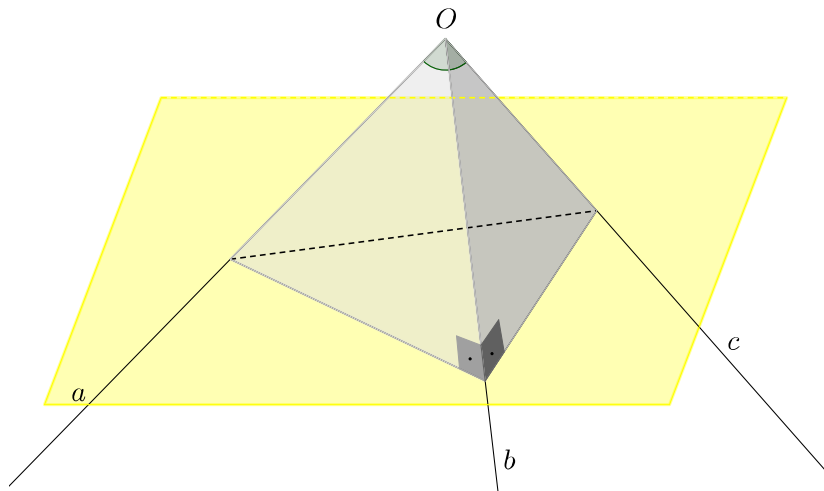
ε_2 , com origem no plano ac e contendo Ob ;

ε_3 , com origem no plano ab e contendo Oc .

Triedro é a intersecção dos três semiespaços ε_1 , ε_2 e ε_3 . O é o vértice do triedro, Oa , Ob e Oc são suas arestas. \widehat{aOb} , \widehat{aOc} e \widehat{bOc} são os ângulos das faces e $di(a)$, $di(b)$ e $di(c)$ são os três ângulos diedrais que formam o triedro.

Na Figura 22 a medida dos ângulos que formam o triedro com vértice O é dada pela medida dos três ângulos diedrais $di(a)$, $di(b)$ e $di(c)$.

Figura 22 – Triedro



3.3.3 Lei dos cossenos para os ângulos de um triedro

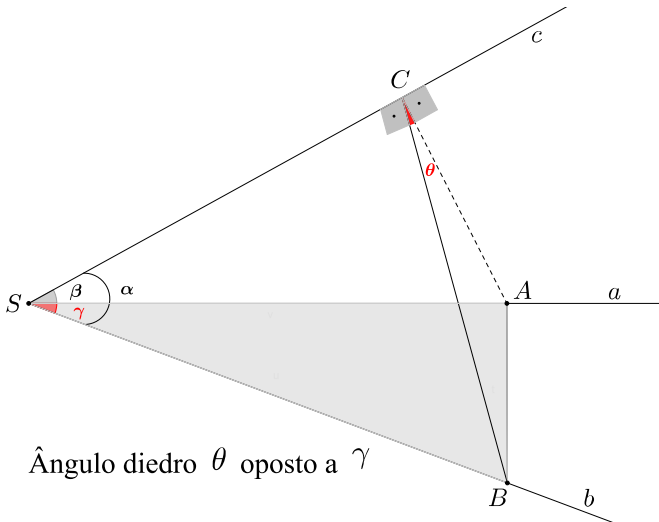
O triedro e seus respectivos ângulos mencionados no Teorema abaixo estão representados na Figura 23. Note que $\alpha = \widehat{CSB}$, $\beta = \widehat{CSA}$ e $\gamma = \widehat{ASB}$.

Teorema 1. (POGORELOV, 1987) *Sejam α , β e γ os ângulos de um triedro e θ o ângulo diedral oposto a γ , então:*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\theta.$$

Demonstração. Seja S o vértice do triedro, a , b e c suas arestas, α , β e γ os ângulos entre as arestas e θ o ângulo diedral oposto a γ . Primeiro vamos marcar o ponto C na aresta c , distante 1 unidade de comprimento do vértice S . Em C vamos cortar duas perpendiculares, uma em direção à aresta a , sendo A o ponto de intersecção e outra em direção à aresta b , sendo B o ponto de intersecção, conforme podemos observar na Figura 23.

Figura 23 – Ângulo diedral θ oposto a γ .



Queremos encontrar uma relação entre o ângulo γ e o ângulo θ , para isso vamos inicialmente aplicar a lei dos cossenos no ΔSAB e

ΔABC , nessa ordem:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2(SA)(SB)\cos\gamma \quad (3.37)$$

e

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2(BC)(AC)\cos\theta. \quad (3.38)$$

Note que o ΔSAC é retângulo em C e que $SC = 1$, então podemos escrever algumas relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} SA^2 = SC^2 + AC^2 \Rightarrow SA^2 = 1 + AC^2, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

$$\begin{array}{l} \text{sen}\beta = \frac{AC}{SA}, \end{array} \quad (3.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\beta = \frac{SC}{SA} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{SA}. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Da mesma forma o ΔSBC também é retângulo em C , assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} SB^2 = SC^2 + BC^2 \Rightarrow SB^2 = 1 + BC^2, \end{array} \right. \quad (3.42)$$

$$\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \frac{BC}{SB}, \end{array} \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{SC}{SB} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{SB}. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Igualando as equações (3.37) e (3.38) e substituindo (3.39), (3.42), (3.41) e (3.44) no primeiro membro desta igualdade e, substituindo (3.40) e (3.43) no segundo membro, teremos:

$$\begin{aligned} SA^2 + SB^2 - 2(SA)(SB)\cos\gamma &= BC^2 + AC^2 - 2(BC)(AC)\cos\theta \\ 1 + AC^2 + 1 + BC^2 - 2\frac{1}{\cos\beta}\frac{1}{\cos\alpha}\cos\gamma &= BC^2 + AC^2 - 2(SB)\text{sen}\alpha(SA)\text{sen}\beta\cos\theta \\ 2 - \frac{2}{\cos\beta\cos\alpha}\cos\gamma &= -2\frac{1}{\cos\alpha}\text{sen}\alpha\frac{1}{\cos\beta}\text{sen}\beta\cos\theta \\ 2\left(1 - \frac{1}{\cos\beta\cos\alpha}\right)\cos\gamma &= 2\left(-\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}\cos\theta\right) \\ \cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma &= -\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\theta \\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\cos\theta. \end{aligned}$$

□

3.3.4 Seis distâncias iguais em \mathbb{R}^3

Dadas todas as distâncias entre quatro pontos: A , B , C e D quando é possível encontrar uma realização desses pontos em \mathbb{R}^3 ?

Temos que:

$$d_{AB} = d_{BC} = d_{CD} = d_{DA} = d_{AC} = d_{BD} > 0.$$

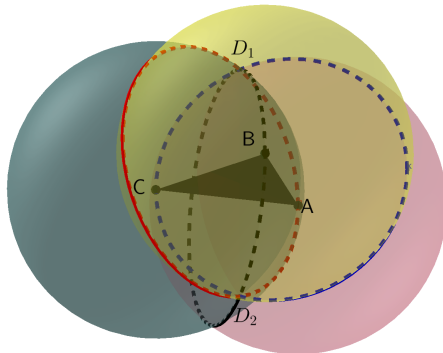
Começemos representando o ΔABC equilátero, no plano.

Da Geometria Espacial sabemos que o sólido que apresenta medidas iguais entre todos os seus vértices é o tetraedro regular, cujas quatro faces são triângulos equiláteros. Com centro em cada um dos vértices do ΔABC traçamos três esferas de mesmo raio. A intersecção dessas três esferas será dois pontos distintos, D_1 e D_2 , conforme discutimos na Seção 3.1.2. Observe na Figura 24 a intersecção dessas esferas.

Portanto, para o problema de seis distâncias iguais em \mathbb{R}^3 , temos duas possíveis realizações:

$$X_1 = [x_A \ x_B \ x_C \ x_{D_1}] \text{ e } X_2 = [x_A \ x_B \ x_C \ x_{D_2}].$$

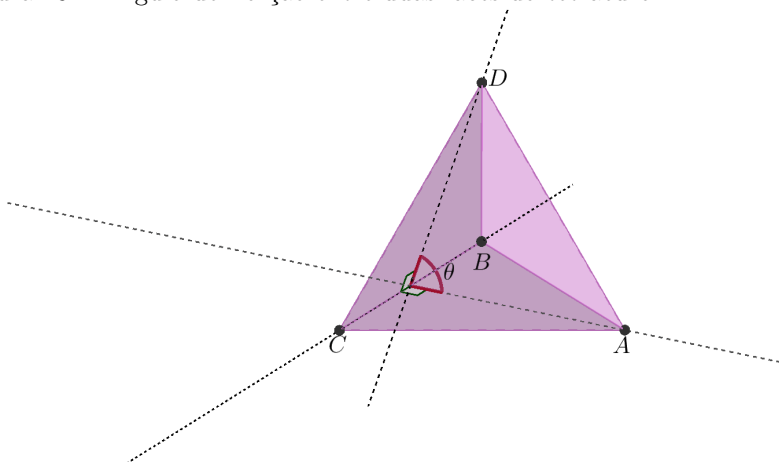
Figura 24 – Intersecção das três esferas, dando origem a duas posições possíveis para o vértice D : D_1 e D_2



Vamos agora considerar o tetraedro $ABCD$ escolhendo como vértice D o ponto de intersecção D_1 (note que seria equivalente se escolhêssemos D_2 , já que podemos considerar como uma reflexão de D_1 em relação ao plano que passa pelos centros das três esferas, A , B

e C) e determinar o ângulo diedral entre as faces ABC e DBC desse tetraedro regular. Observe a Figura 25 que mostra o ângulo θ , também chamado de ângulo de torção entre os planos que contêm cada face do sólido geométrico em \mathbb{R}^3 . Considere a medida do ângulo θ em radianos.

Figura 25 – Ângulo de Torção entre duas faces do tetraedro



Suponha h_A a altura do $\triangle ABC$ em relação ao vértice A e h_D a altura do $\triangle BCD$ em relação ao vértice D .

Assim, $h_A = h_D$ já que são alturas de triângulos equiláteros congruentes. Considerando o $\triangle ABC$, vamos determinar esta altura em função do lado AB , lembrando que $d_{AB} = d_{BC}$. Dessa forma, temos que:

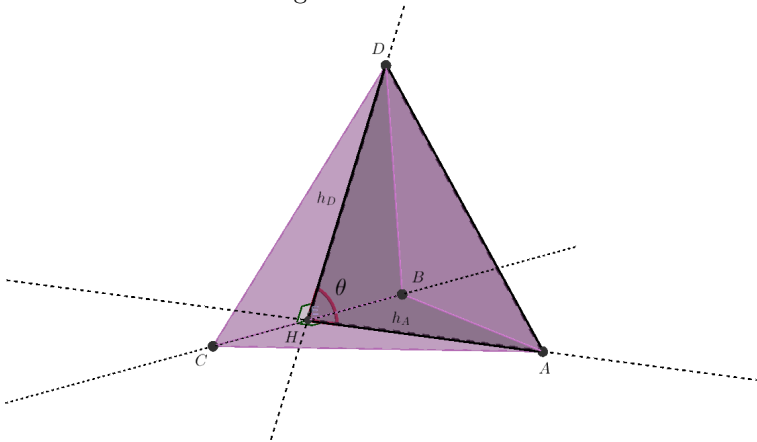
$$d_{AB}^2 = h_A^2 + \left(\frac{d_{AB}}{2}\right)^2$$

$$h_A^2 = d_{AB}^2 - \frac{d_{AB}^2}{4}$$

$$h_A = \frac{\sqrt{3}}{2}d_{AB}$$

$$h_A = \frac{\sqrt{3}}{2}d_{AD}.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no $\triangle ADH$ onde H é o ponto de intersecção dessas alturas, conforme Figura 26, obtemos:

Figura 26 – ΔABC 

$$\begin{aligned}
 d_{AD}^2 &= h_A^2 + h_D^2 - 2h_A h_D \cos\theta & (3.45) \\
 d_{AD}^2 &= h_A^2 + h_A^2 - 2h_A h_A \cos\theta \\
 d_{AD}^2 &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d_{AD} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d_{AD} \right)^2 \cos\theta \\
 \frac{3}{2} d_{AD}^2 \cos\theta &= \frac{3}{2} d_{AD}^2 - d_{AD}^2 \\
 \cos\theta &= \frac{1}{3} \\
 \theta &= \arccos \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

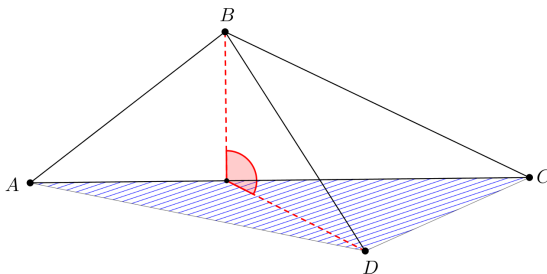
Desse modo, dadas todas as distâncias iguais entre quatro pontos no \mathbb{R}^3 , concluímos que o ângulo de torção θ entre duas faces quaisquer do tetraedro deve ser igual a $\theta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ$.

De (3.45) percebemos que há uma relação direta entre o ângulo θ e a distância d_{AD} entre os vértices opostos A e D . Tal relação será explorada de maneira mais geral na próxima seção.

3.3.5 Seis distâncias quaisquer em \mathbb{R}^3

Vamos agora considerar o caso genérico e supor que a realização existe. Desse modo encontraremos uma relação entre os lados e ângulos do tetraedro, só que agora, não regular (conforme podemos observar na Figura 27).

Figura 27 – Tetraedro $ABCD$



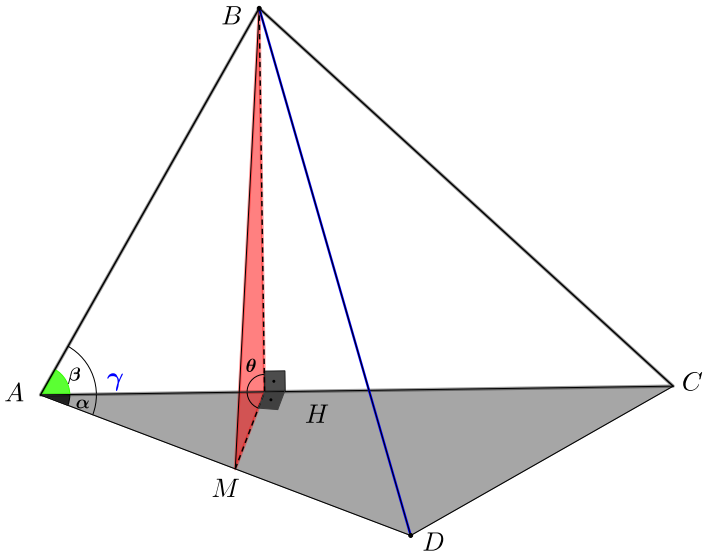
Considere A o vértice do ângulo do triedro, d_{AD} , d_{AC} e d_{AB} suas arestas e α , β e γ os ângulos entre as arestas. Suponha conhecidas as distâncias d_{AB} , d_{AC} , d_{AD} , d_{BC} e d_{CD} e também conhecidos os ângulos α , β e γ de tal forma que possa ser representado o tetraedro $ABCD$ em \mathbb{R}^3 , conforme Figura 28. Seja θ o ângulo diedral oposto a γ . Queremos determinar a d_{BD} em função das distâncias, ângulos conhecidos e do ângulo diedral θ .

Vamos inicialmente determinar geometricamente o ângulo diedral θ . A partir de B traçamos uma perpendicular em relação a AC , originando o ponto H , ponto de interseção. A partir de H traçamos uma nova perpendicular a AD , sendo M o novo ponto de interseção. Assim o ângulo \widehat{MHB} é θ : ângulo diedral oposto a γ , conforme podemos observar na Figura 28.

Aplicando a lei dos cossenos no ΔABD , temos:

$$d_{BD}^2 = d_{AB}^2 + d_{AD}^2 - 2d_{AB}d_{AD}\cos\gamma. \quad (3.46)$$

Usando o Teorema 1 e substituindo na equação (3.46), onde $\alpha = \widehat{DAC}$, $\beta = \widehat{CAB}$ e $\gamma = \widehat{DAB}$ são os ângulos entre as arestas do triedro e θ é o ângulo entre as faces ABC e DAC do tetraedro $ABCD$, obtemos uma relação entre os vértices B e D do tetraedro:

Figura 28 – Tetraedro $ABCD$ 

$$\begin{aligned}
 d_{BD}^2 &= d_{AB}^2 + d_{AD}^2 - 2d_{AB}d_{AD}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta) \\
 d_{BD}^2 &= d_{AB}^2 + d_{AD}^2 - 2d_{AB}d_{AD}\cos\alpha\cos\beta - 2d_{AB}d_{AD}\sin\alpha\sin\beta\cos\theta. \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Portanto, para um tetraedro $ABCD$ de distâncias arbitrárias entre os seus vértices, se as distâncias entre os vértices da face ABC e da face ACD satisfizerem todas as desigualdades triangulares, então existirá a realização em \mathbb{R}^3 se a distância entre os vértices opostos B e D satisfizer a condição dada na equação (3.47).

Note que o ângulo de torção θ pode variar de 0 a π rad. Quando $\theta = 0$, teremos uma realização em \mathbb{R}^2 e a distância entre os vértices B e D será mínima, dada por:

$$\underline{d_{BD}^2} = d_{AB}^2 + d_{AD}^2 - 2d_{AB}d_{AD}\cos\alpha\cos\beta - 2d_{AB}d_{AD}\sin\alpha\sin\beta.$$

Já quando $\theta = \pi$ rad também a realização será em \mathbb{R}^2 , e a distância entre os vértices B e D será máxima, dada por:

$$\overline{d_{BD}^2} = d_{AB}^2 + d_{AD}^2 - 2d_{AB}d_{AD}\cos\alpha\cos\beta + 2d_{AB}d_{AD}\sin\alpha\sin\beta.$$

Assim, a distância entre os vértices B e D está no intervalo:

$$\underline{d_{BD}} \leq d_{BD} \leq \overline{d_{BD}}.$$

Tal desigualdade é conhecida como *Desigualdade Tetragonal*. (LIBERTI; LAVOR, 2016). Note que para garantir a realização de 6 distâncias (entre 4 pontos) em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , além das desigualdades triangulares, as desigualdades tetragonares devem ser satisfeitas.

É importante ressaltar que através dessa análise verificamos, antes de encontrar as coordenadas dos vértices e resolver o sistema de equações quadráticas, se é possível representar o tetraedro com as distâncias dadas.

4 UMA APLICAÇÃO PARA GEOMETRIA DE DISTÂNCIAS

Uma importante aplicação para o problema de GD é a “Localização de Sensores em Redes Sem Fio”. As redes locais sem fios, WLAN (Wireless Lan) são uma alternativa às redes locais Ethernet, fornecendo as mesmas funcionalidades porém de forma mais flexível, de fácil configuração, além do seu baixo custo e tolerância a falhas (BISATTO; PERES, 2009), (TREVISAN, 2008).

As Redes de Sensores Sem Fio (RSSF) podem ser usadas em diversos cenários que necessitem de monitoramento e controle de grandezas que possam ser medidas por sensores, como em aplicações (PAOLI, 2009):

- militares: através de funções de monitoramento, rastreamento, segurança, controle e manutenção. Por exemplo detectar movimentos inimigos, explosões, presença de material perigoso como gás venenoso ou radioativo, etc;
- industriais: nas funções de monitoramento;
- de ambiente: através do monitoramento e controle de condições ambientais numa floresta, oceano ou num planeta;
- de serviços públicos: como monitoramento de serviços de saúde, rastreamento ativos, serviços de emergência, detecção de intrusos, rastreamento de força de trabalho, localização de amigos ou pontos de referência, etc (ALVES, 2011);
- entre outras.

RSSF é uma composição de nós sensores (dispositivos de medição) que têm a capacidade de se comunicar, transmitindo de maneira otimizada informações coletadas em um dado meio a fim de monitorar algum fenômeno. As posições de cada nó são aleatórias podendo ser implantadas em locais de difícil acesso, como por exemplo com auxílio de helicópteros, soltando os nós sob a região a ser analisada. Estes nós podem ser colocados dentro do fenômeno ou próximo a ele. A comunicação entre esses nós é feita através de uma rede sem fio onde um nó transmite a outro nó próximo, valores de sensoriamento esperando que este nó se encarregue de passar os dados para o próximo nó (LOUREIRO et al., 2003).

Sabendo superficialmente o que é uma RSSF, onde se aplica o problema da Geometria de Distâncias?

Para responder a esta pergunta vamos primeiramente definir duas técnicas de localização: Trilateração e Triangulação.

4.1 TRILATERAÇÃO

É um princípio matemático simples que tem como premissa conhecer três posições fixas e a distância que cada uma está com relação a um mesmo ponto, cuja posição é desconhecida. O cálculo da trilateração indicará a posição de um ou mais pontos desconhecidos, utilizando apenas as distâncias dadas.

A técnica da trilateração pode ser aplicada para descobrir a localização de objetos no plano através do cálculo de intersecção de circunferências e se for no espaço o cálculo será através da intersecção de esferas. Aplicando esta técnica repetidas vezes, é possível descobrir a posição de diversos objetos.

4.2 TRIANGULAÇÃO

Esta técnica de localização utiliza informações de ângulos, podendo também utilizar informações de distâncias. Geralmente o ponto desconhecido estima os ângulos para três pontos de referência com posições conhecidas (que formam um triângulo), ou então a estimativa de ângulos para dois pontos de referência e de distância para outro. Com essas informações calcula-se a posição do ponto desconhecido aplicando relações trigonométricas fundamentais de seno e cosseno (ALVES, 2011).

Nas Seções 3.3.4 e 3.3.5 utilizamos técnicas de triangulação para resolver o problema de seis distâncias quaisquer em \mathbb{R}^3 .

4.3 LOCALIZAÇÃO EM REDES DE SENSORES SEM FIO

Respondendo a pergunta feita anteriormente, vamos utilizar a técnica da trilateração para encontrar a posição para alguns nós sensores numa rede sem fio. Localizar um nó significa identificar o endereço de um objeto móvel ou fixo num sistemas de coordenadas. Pode-se utilizar diferentes sistemas de coordenadas mas qualquer que seja este sistema, o método de localização requer o conhecimento prévio do posicionamento de pelo menos três nós não colineares que servirão de

referência (TREVISAN, 2008).

Neste problema de localização, as posições fixas são de três âncoras não colineares e o objetivo é localizar os sensores. Para isso é necessário que sejam conhecidas as distâncias que cada sensor está de cada uma das três âncoras. Através da intersecção de três circunferências (cada uma centrada em uma âncora e com raios iguais às distâncias do sensor às âncoras) determinamos a posição do sensor.

Podemos ainda, após conhecida a posição de um sensor, ele atuar como uma âncora, substituindo-a, desde que sejam conhecidas as distâncias que um novo sensor está de duas âncoras e deste sensor de posição já determinada.

Considere o seguinte exemplo que simula esta situação.

Exemplo 1. *Conhecidas as posições de três âncoras: A, B e C não colineares e as distâncias: $\{d_{AD}, d_{BD}, d_{CD}, d_{AE}, d_{BE}, d_{CE}, d_{AF}, d_{DF}, d_{EF}\}$, determine a posição dos sensores D, E e F .*

Resolução: Vamos determinar a posição dos três nós sensores D, E e F utilizando o método da trilateração, já que as âncoras são fixas e são conhecidas as distâncias entre os sensores e as âncoras, ou de um sensor ao outro.

Iniciemos traçando uma circunferência com centro na âncora A e raio d_{AD} . Em seguida com centro na âncora B traçamos uma nova circunferência com raio d_{BD} e por último com centro na âncora C traçamos a 3ª circunferência com raio d_{CD} . Pelo que vimos na Seção 3.1.1, sabemos que se existir a intersecção entre as circunferências, ela é única, determinando assim a localização do sensor D .

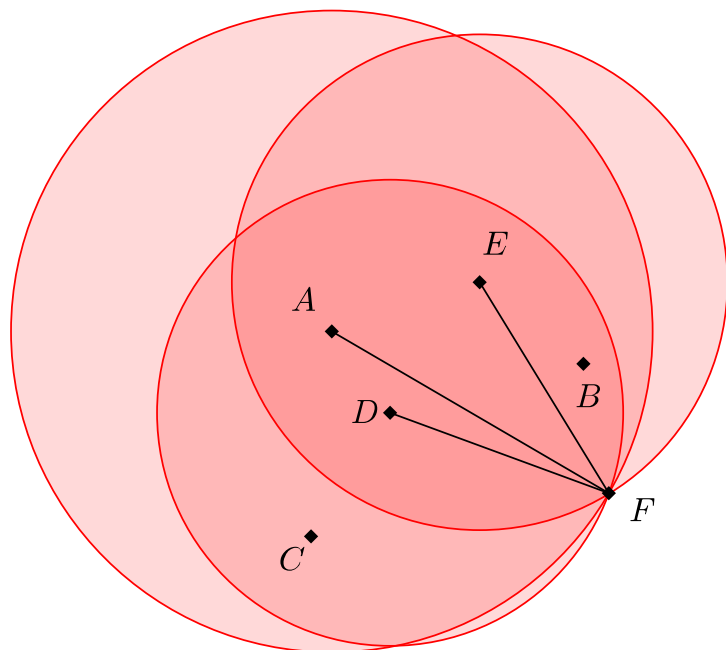
Repetindo este mesmo procedimento, construímos três novas circunferências com centros nas âncoras A, B e C e raios d_{AE}, d_{BE} e d_{CE} respectivamente e determinamos a localização do sensor E .

E por último com centro na âncora A e nos sensores D e E , traçamos três novas circunferências com raios d_{AF}, d_{DF} e d_{EF} respectivamente e determinamos a localização do sensor F , conforme podemos observar na Figura 29.

Note que as coordenadas de cada sensor podem ser calculadas através da resolução de um sistema quadrático, como descrito na Seção 3.1.1. Por exemplo para encontrar as coordenadas do sensor D , é necessário resolver o seguinte sistema quadrático:

$$\begin{cases} (d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2 = d_{AD}^2 \\ (d_1 - b_1)^2 + (d_2 - b_2)^2 = d_{BD}^2 \\ (d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 = d_{CD}^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Figura 29 – Trilateração



5 EXERCÍCIOS PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas que podem ser trabalhados no ensino médio e que podem ser resolvidos usando as técnicas vistas no Capítulo 3.

Problema 1. (*Questão 88 - ENEM 2015*): Para obter a posição de um telefone celular, a polícia baseia-se em informações do tempo de resposta do aparelho em relação às torres de celular da região de onde se originou a ligação. Em uma região, um aparelho está na área de cobertura de cinco torres, conforme o esquema.

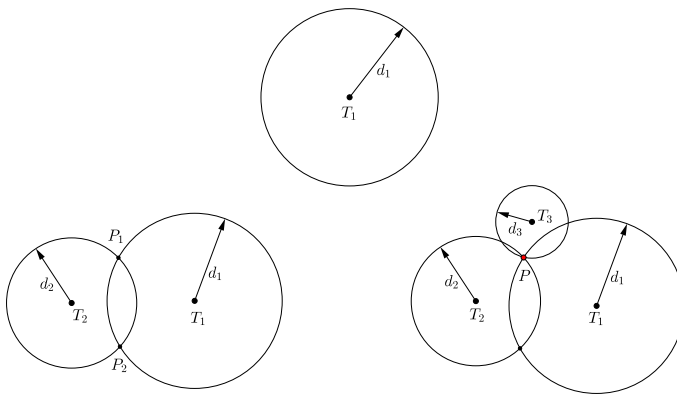


Considerando que as torres e o celular são puntiformes e que estão sobre um mesmo plano, qual o número mínimo de torres necessárias para se localizar a posição de telefone celular que originou a ligação?

1. Uma
2. Duas
3. Três
4. Quatro
5. Cinco

Resolução: Conhecendo pelo menos as distâncias a três torres não colineares é possível localizar de forma única a posição do celular, por meio do processo de Trilateração, discutido na Seção 4.1.

Seja d_1 a distância do celular à primeira torre. O celular pode estar em qualquer ponto da circunferência de centro na primeira torre T_1 e raio d_1 . Seja d_2 a distância do celular à segunda torre T_2 . O celular pode estar num dos dois pontos P_1 ou P_2 em que as circunferências se interceptam. Seja d_3 a distância do celular à terceira torre T_3 . A intersecção das três circunferências ocorre num ponto P onde se localiza o celular. Observe esta representação na Figura 5.



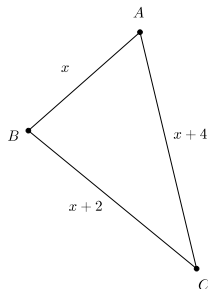
Alternativa Correta: C

É importante ressaltar que o enunciado desta questão está incompleto. Apesar de ter o esquema representando as torres e o celular, deveria estar claro que as torres são não colineares, pois se não tivesse esta restrição, a intersecção das três circunferências poderia ser dois pontos, não obtendo assim a localização exata do celular. E ainda, ficou faltando que a busca pela localização do celular deveria ser de forma única.

Problema 2. *É possível formar um triângulo se as medidas das suas arestas estiverem em progressão aritmética de razão 2 ?*

Resolução: Vamos denotar o triângulo por ABC e considerar que

$d_{AB} = x$, $d_{BC} = x + 2$ e $d_{CA} = x + 4$. Assim os lados formam uma PA de razão 2, basta verificar as condições para a medida x .



Na Subseção 3.2.1 vimos as condições para a existência de um triângulo. Assim, vamos utilizar a desigualdade triangular e determinar as condições para x .

Primeira condição:

$$d_{AB} < d_{BC} + d_{CA} \Rightarrow x < x + 2 + x + 4 \Rightarrow x < 2x + 6 \Rightarrow x > -6.$$

Segunda condição:

$$d_{BC} < d_{AB} + d_{CA} \Rightarrow x + 2 < x + x + 4 \Rightarrow x > -2.$$

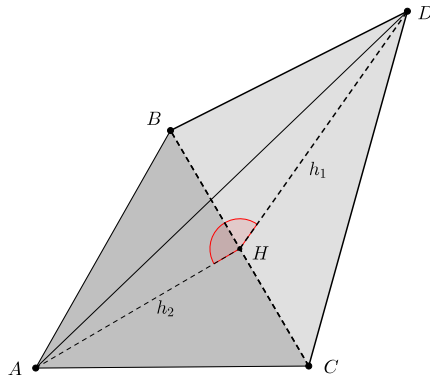
Terceira condição:

$$d_{CA} < d_{AB} + d_{BC} \Rightarrow x + 4 < x + x + 2 \Rightarrow x > 2.$$

Portanto como as três condições devem ser satisfeitas, faremos a intersecção dos intervalos obtidos e obtemos a solução para o problema:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}.$$

Problema 3. Considere um tetraedro $ABCD$. A face ABC é um triângulo equilátero de lado 2cm . A face BCD é um triângulo isósceles e $d_{BD} = d_{CD} = 3\text{cm}$. Sabe-se ainda que o ângulo entre as faces ABC e BCD é $\frac{\pi}{3}\text{rad}$. Encontre a distância entre os vértices A e D .



Resolução: Seja H o ponto de intersecção entre as alturas dos triângulos BCD dada por h_1 e do triângulo ABC dada por h_2 . Vamos determinar h_1 e h_2 utilizando o teorema de Pitágoras:

$$BD^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + h_1^2$$

$$3^2 = 1^2 + h_1^2$$

$$h_1 = 2\sqrt{2}.$$

$$AB^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + h_2^2$$

$$2^2 = 1^2 + h_2^2$$

$$h_2 = \sqrt{3}.$$

Considerando o triângulo ADH , vamos utilizar a lei dos cossenos e determinar a medida AD :

$$\begin{aligned}
 AD^2 &= h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2 \cos \frac{\pi}{3} \\
 AD^2 &= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2.2\sqrt{2}\sqrt{3}\frac{1}{2} \\
 AD^2 &= 11 - 2\sqrt{6} \\
 AD &= \sqrt{11 - 2\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Este exemplo é um caso particular da discussão apresentada na Seção 3.3.5, no qual não é preciso utilizar o Teorema 3.3.3 que relaciona os ângulos diedrais de um triedro.

Problema 4. *Uma pessoa está no Brasil à 1750Km de Teresina, no Piauí, à 1133Km de Cuiabá, no Mato Grosso e à 1020Km da cidade de São Paulo. Onde está essa pessoa? (GASPAROTO; PAIM; MENTA, 2009)*

Resolução: Para facilitar os cálculos vamos resolver este problema em \mathbb{R}^2 . Em um mapa, para a 1ª informação, teríamos Teresina no centro do círculo. A informação da localização da pessoa está sobre o círculo vermelho, assim pode ser algum lugar do Amapá, Pará, Mato Grosso, Goiás, Distrito Federal, Minas Gerais ou Bahia.

Figura 30 – Círculo com a 1ª distância informada



Com a 2ª informação fazemos um círculo menor, com centro na cidade de Cuiabá. Agora temos duas possíveis localizações para a certa

Figura 31 – Círculo com a 1ª e a 2ª distâncias informadas



peessoa, que é a intersecção dos círculos, ou no Distrito Federal ou no Pará. Utilizaremos a 3ª informação para determinar a posição correta da pessoa.

Figura 32 – Círculo com as três distâncias informadas



Com a 3ª informação construímos um novo círculo com centro na cidade de São Paulo e obtivemos apenas um ponto de intersecção entre os três círculos: Brasília no Distrito Federal.

Ao encerrar este capítulo mostramos que é possível trabalhar problemas básicos de geometria de distâncias no ensino médio utilizando apenas conteúdos deste nível de escolaridade. Para resolver estes problemas utilizamos diversos conteúdos como: sistemas lineares, desigualdade triangular, lei dos cossenos, equação da circunferência e da esfera, norma euclidiana, localização de pontos no sistema cartesiano, congruências, determinantes, entre outros. Algumas demonstrações seriam mais simples se utilizássemos conteúdos da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, como encontrar o ângulo entre dois planos por exemplo, mas como não foram utilizados pois não são estudados no Ensino Médio.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos grandes problemas na aprendizagem matemática dos alunos do Ensino Médio é o distanciamento das aplicações dos conteúdos abordados. A dificuldade de aprendizagem que estes alunos apresentam é notável. Alunos do Ensino Fundamental Inicial utilizam o lúdico para melhor compreensão, mas na continuidade do Ensino Fundamental e Médio isto é deixado para trás e dá-se conteúdo atrás de conteúdo. Adolescentes desta faixa etária sentem-se desinteressados em aprender. Professores deste nível de ensino também sentem-se desestimulados já que há dificuldade em associar os conteúdos com suas aplicações. Em virtude dessas dificuldades apresentadas, procuramos desenvolver esta pesquisa para enriquecer as aulas do Ensino Médio. A expectativa é que este material possa servir como referência ou apoio aos professores que venham a trabalhar em suas aulas essa sub área da Geometria, que é um caminho inverso do habitual, apresentando a Geometria de Distâncias e suas diversas aplicações, adaptando a cada realidade.

Dentre as diversas aplicações da Geometria de Distâncias escolhemos a localização de sensores móveis em redes sem fio, visto que a área da tecnologia é de grande interesse dos estudantes. Na tentativa de encontrar as soluções, quando existiam, para os problemas apresentados no Capítulo 3, buscamos resoluções mais simples procurando utilizar apenas os conteúdos abordados no Ensino Fundamental e Médio. À medida que estes conteúdos se inter-relacionam a aprendizagem se torna mais significativa.

Inúmeros trabalhos nesta área vêm sendo desenvolvidos devido à sua extensa área de aplicação. Esta foi apenas uma pesquisa introdutória sobre o assunto que, como vimos nesta dissertação, pode ser trabalhado no Ensino Médio. Concluimos que o estudo da Geometria de Distâncias no Ensino Médio é viável e ainda mais, acreditamos que esse conteúdo possa despertar o interesse dos alunos e enriquecer a sua bagagem de conhecimentos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, J. **Algoritmo para localização em redes de sensores sem fio**. Dissertação de Mestrado, UFMG - Belo Horizonte, MG, 2011.
- BISATTO, A.; PERES, A. Localização de estação sem fio utilizando Trilateração. **XII Seminário Intermunicipal de Pesquisa**, ULBRA- Universidade Luterana do Brasil, Departamento de Sistemas e Computação - Canoas, RS, p. 1–19, 2009.
- COSTA, B.; RODRIGUES, E. **Novo Espaço Matemática**. Porto Editora, 8º Ano, 2010.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Atual Editora, Geometria Espacial: Posição e métrica, v.10, 2013.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. **Geometria Espacial**. Atual Editora, 7º edição, v.10, 2013.
- FIDALGO, F. **Algoritmos para problemas de geometria molecular**. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Campinas, São Paulo, 2011.
- GASPAROTO, L.; PAIM, M.; MENTA, E. **Matemática na Prática: GPS**. Artigo Portal do Professor - MEC, Curitiba - PR, 2009.
- HEFEZ, A.; FERNANDES, C. **Introdução à Álgebra Linear**. SBM, v.2, 2016.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C. **Um convite à Geometria de Distâncias**. Notas em Matemática Aplicada. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - v.71, São Carlos, São Paulo, 2014.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C. Six mathematical gems from the history of distance geometry. **International Transactions in Operational Research**, v. 23, p. 897–920, 2016.
- LIBERTI, L. et al. Euclidean distance geometry and applications. **SIAM Review**, v. 56, p. 1–69, 2014.

LIMA, E. et al. **A matemática do Ensino Médio**. SBM, 6° edição, v.3, 2006.

LOUREIRO, A. et al. Redes de Sensores Sem Fio. **XXI Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores**, UFMG - Belo Horizonte, Minas Gerais, p. 179–226, 2003.

PAOLI, O. **Localização em Redes GSM II: Uso da técnica de Trilateração de Potência**. 1–23 p. Tutorial, Centro Universitário de Belo Horizonte - Belo Horizonte, MG, 2009.

POGORELOV, A. **Geometry**. Mir Publishers, Moscow, 1987.

SANTOS, M. **Geometria Espacial**. X ao Cubo, 6° edição, v.1, 2014.

SILVA, W.; LAVOR, C.; OCHI, L. Cálculo de Estruturas de Proteínas. **XL SBPO**, João Pessoa, PA, 2008.

TAVARES, P. **Redes de Sensores Sem-fio**. Artigo do Grupo de Teleinformática e Automação, Programa de Engenharia Elétrica - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.

TREVISAN, L. **Um algoritmo de Localização de Nós em Redes Sem Fio usando nível de potência do sinal**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná - Curitiba, PR, 2008.