

Giovanni Bratti

**Proposta de Metodologia para a
Caracterização do Módulo Complexo de
Materiais Viscoelásticos Aplicados em Vigas**

Florianópolis

05 de outubro de 2016

Giovanni Bratti

**Proposta de Metodologia para a Caracterização do
Módulo Complexo de Materiais Viscoelásticos
Aplicados em Vigas**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Departamento de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Arcanjo Lenzi

Florianópolis

05 de outubro de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bratti, Giovanni

Proposta de Metodologia para a Caracterização do Módulo
Complexo de Materiais Viscoelásticos Aplicados em Vigas /
Giovanni Bratti ; orientador, Arcanjo Lenzi -
Florianópolis, SC, 2016.
234 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Módulo complexo. 3. Materiais
viscoelásticos. 4. Derivadas fracionárias. 5. Método
modal. I. Lenzi, Arcanjo. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. III. Título.

Giovanni Bratti

**Proposta de Metodologia para a Caracterização do
Módulo Complexo de Materiais Viscoelásticos
Aplicados em Vigas**

Florianópolis, 05 de outubro de 2016.

Arcanjo Lenzi Ph.D. (UFSC)
Orientador

Jonny Carlos da Silva, Dr.Eng. (UFSC)
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Domingos Alves Rade, Dr.Sc. (ITA)
Relator

Roberto Jordan, Dr.Eng. (UFSC)

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D. (UFSC)

Eduardo Fancello, Dr.Sc. (UFSC)

Marcus Antonio V. Duarte, Dr.Eng. (UFU)

*A Deus,
que nos criou e foi criativo nesta obra.
Seu fôlego de vida em mim me sustentou e me deu coragem
para questionar a realidade e propor algo melhor para a humanidade.*

Agradecimentos

A Deus.

Profundamente à minha esposa, Morgana, pela ajuda, amor, paciência e compreensão da minha ausência em momentos importantes para nós neste período.

Aos meus pais, Luzia e Valderéz, à minha madrasta Ivone e aos meus irmãos: José Paulo, Sérgio, Vitor, Marcos, Grazzianno e Bruno, pelo encorajamento e apoio.

Ao meu orientador, professor e amigo Arcanjo Lenzi, pelo suporte, ajuda e paciência.

À CAPES, pela oportunidade e apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade e qualidade de ensino.

À todo aquele que, de certa forma, contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado a tudo o que conhecemos e entendemos agora, enquanto a imaginação abraça o mundo inteiro e tudo o que há para conhecer e entender.” (Albert Einstein)

Resumo

O controle de vibrações utilizando materiais viscoelásticos, com camada simples ou restrita, para tratamentos de amortecimento em superfícies, é muito utilizado nas diversas áreas da engenharia. As propriedades dinâmicas desses materiais, representadas pelo módulo complexo, são dependentes da frequência e da temperatura. Uma das técnicas mais empregadas para a caracterização desta propriedade é o método da viga vibrante, padronizado pela ASTM E756. No emprego desta norma é necessário muitas vezes que o material seja avaliado em duas configurações de vigas, sendo que para materiais com camada restrita é necessário que a camada restritora seja retirada. Neste caso, o efeito do comportamento dinâmico exercido pelo adesivo (que une as camadas) na estrutura é anulado e, dependendo do material, tal efeito pode ser relevante. Técnicas de ajustes de modelos são promissoras para realizar a caracterização de tais materiais, porém, aquelas baseadas no método direto de resposta em frequência possuem custos computacionais altos. O método modal é uma alternativa eficiente, mas é ainda desafiador considerar a variação do módulo complexo com a frequência nas respostas dos modelos. Este trabalho tem por objetivo apresentar um procedimento de caracterização do módulo complexo de materiais de amortecimento, com camada simples ou restrita, através de técnicas de ajustes de modelos que utilizam o método modal para a simulação dos parâmetros modais de vigas. Para isto, o material será avaliado numa só configuração de viga e a análise será realizada num domínio que agrupa a frequência e temperatura numa só escala, chamada frequência reduzida, onde as propriedades viscoelásticas se tornam constantes para cada frequência reduzida. Este recurso se torna eficiente por aplicar o método modal e considerar as variações do módulo complexo nas simulações. O método experimental adotado foi o da viga vibrante, porém, com a amostra fixa na viga em sua configuração de aplicação.

O modelo de derivadas fracionárias foi adotado para a descrição dos parâmetros modais no domínio da frequência reduzida e também do módulo complexo numa ampla faixa de frequência e temperatura. Para as simulações dos parâmetros modais foi desenvolvido um elemento finito de viga sanduíche com 8 graus de liberdade. Ao final da caracterização os parâmetros modais numéricos foram comparados com os experimentais e os resultados apresentaram boas concordâncias.

Palavras-chaves: módulo complexo. materiais viscoelásticos. método modal. derivadas fracionárias.

Abstract

The vibration control using constrained viscoelastic material is a technique commonly used in some areas of engineering . The dynamic properties of this material are represented by the complex modulus which is frequency- and temperature-dependent. Usually, the characterization of these properties are done by the vibrating beam method, standardized by the ASTM E756. In some cases, this standard requires two beam setups to test the specimen and the removal of the constraining layer for materials that use it. In this case, the dynamic effect performed by the adhesive (which bonds the layers) on the structure is nullified and, depending on the material, this effect might become relevant. Numerical methods are a good alternative to be used in the characterization process, but those methods based on direct frequency response have high computational cost. The Modal Analysis is an efficient way to solve this problem but it is difficult to consider the frequency dependence on the model response. The objective of this research is to present a complex modulus characterization procedure of constrained viscoelastic materials through model updating techniques using the modal frequency response analysis to predict the beam sandwich modal parameters. The material will be evaluated using only one beam configuration and the analysis will be done in a domain that merges the frequency and temperature in only one scale, called reduced frequency. This strategy is efficient due to the use of modal frequency response analysis and to consider the complex modulus frequency- and temperature- dependent. The experimental method was the same as the vibrating beam method but with the sample glued on the beam in its original configuration. The fractional derivative model was used to describe the beam modal parameters in the reduced frequency domain and also the complex modulus in a large range of temperature and frequency. A finite element was formulated with eight degrees of freedom to be used on the simulations. At the end, the modal

parameters obtained numerically showed a good agreement with the experimental ones.

Key-words: complex modulus. viscoelastic material. modal frequency response analysis. fractional derivative.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Quantidade de aparições dos termos “fractional calculus” + “viscoelastic” nos últimos anos.	31
Figura 2 – Elemento cúbico em cisalhamento simples.	37
Figura 3 – Representação do Módulo Complexo e de Fluência.	41
Figura 4 – Ilustração dos módulos $G(t)$, $K(t)$ e $E(t)$	42
Figura 5 – Representação dos modelos de mola e de amortecedor.	46
Figura 6 – Unidade de Maxwell.	48
Figura 7 – Unidade de Voigt.	49
Figura 8 – Modelo Linear Padrão Sólido, de Voigt e de Maxwell.	50
Figura 9 – Funções de Creep para os modelos viscoelásticos.	52
Figura 10 – Funções de relaxação para os modelos viscoelásticos.	52
Figura 11 – Modelo Generalizado de Voigt	53
Figura 12 – Modelo Generalizado de Maxwell.	53
Figura 13 – Razão de Poisson para o modelo linear padrão sólido.	62
Figura 14 – Nomograma de tempo reduzido do Poisson.	63
Figura 15 – Espectro da resposta de uma viga em função de T	66
Figura 16 – Variação de E' e η com a temperatura.	67
Figura 17 – Variação de E' e η com a frequência.	69
Figura 18 – Variação de E' e η com a temperatura e da frequência.	70
Figura 19 – Variação de E' e η em função de T	72
Figura 20 – Construção do nomograma de frequência reduzida.	73
Figura 21 – Nomograma de frequência reduzida padrão.	74
Figura 22 – Configuração de teste de extensão e cisalhamento.	77
Figura 23 – Configurações de testes do método da viga vibrante.	79
Figura 24 – Aparato de medição pelo método da viga vibrante.	84
Figura 25 – Wicket Plot idealizado mostrando os erros típicos.	86
Figura 26 – Cinamática da viga de Euler-Bernoulli.	90

Figura 27 – Cinamática da viga de Timoshenko.	92
Figura 28 – Ilustração da deformação de uma viga de acordo com as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e TSDT.	94
Figura 29 – Tratamento de amortecimento com camada restrita.	99
Figura 30 – Tratamento de amortecimento com camada restrita.	100
Figura 31 – Modelo de viga sanduíche.	110
Figura 32 – Aparato experimental.	121
Figura 33 – Câmara térmica: vista exterior.	122
Figura 34 – Sistema de engaste da viga no interior da câmara.	122
Figura 35 – FRF das repetições no ensaio Oberst.	124
Figura 36 – Sistema massa-mola de 3 graus de liberdade.	126
Figura 37 – FRFs do sistema de 3 graus de liberdade.	128
Figura 38 – Ilustração do Wicket Plot dos parâmetros modais.	129
Figura 39 – Nomogram dos parâmetros modais de um sistema de 3 graus de liberdade.	135
Figura 40 – Nomograma de frequência reduzida do módulo com- plexo do Paracril-BJ com 0 PHR.	136
Figura 41 – Ilustração do elemento de viga sanduíche.	138
Figura 42 – Ilustração do elemento <i>Sandwich08</i>	145
Figura 43 – Convergência das frequências de ressonância na ex- tremidade de uma viga sanduíche engastada-livre.	153
Figura 44 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 1 na condição de livre-livre.	155
Figura 45 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 1 na condição engastada-livre.	155
Figura 46 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 2 na condição livre-livre.	157
Figura 47 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN08.	159
Figura 48 – Wicket plot dos parâmetros modais experimentais e teóricos da viga com o material 1229SN08.	160
Figura 49 – Fator de deslocamento para o material 1229SN08.	161

Figura 50 – Nomograma de frequência reduzida dos parâmetros modais experimentais e teóricos da viga com o material 1229SN08.	162
Figura 51 – Módulo complexo do material 1229SN08.	165
Figura 52 – Wicket Plot do módulo complexo do material 1229SN08.	165
Figura 53 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN08.	166
Figura 54 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material 1229SN08.	169
Figura 55 – Contribuição da energia de deformação de cada camada da viga com o material ADC006.	172
Figura 56 – Contribuição da energia de dissipação de cada camada da viga com o material ADC006.	173
Figura 57 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a -25°C	174
Figura 58 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a 15°C	174
Figura 59 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a 60°C	175
Figura 60 – Efeito do Coeficiente de Poisson na FRF da viga com o ADC006 a -25°C	177
Figura 61 – Efeito do Coeficiente de Poisson na FRF da viga com o ADC006 a 60°C	177
Figura 62 – Nomograma do módulo complexo do material ADC006, caracterizado via ASTM E756.	178
Figura 63 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material ADC006.	179
Figura 64 – Ilustração da interface gráfica para estimativa de $\alpha(T)$.	205
Figura 65 – Ilustração da interface gráfica para estimativa inicial das constantes dos modelos fracionários de f_n^{Teo} e η_n^{Teo} .	206
Figura 66 – Fator de deslocamento para o material 1229SN08.	215

Figura 67 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN08.	216
Figura 68 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material 1229SN08.	217
Figura 69 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN08.	218
Figura 70 – Fator de deslocamento para o material 1229SN09.	219
Figura 71 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN09.	220
Figura 72 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material 1229SN09.	221
Figura 73 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN09.	222
Figura 74 – Fator de deslocamento para o material ADC006.	223
Figura 75 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material ADC006.	224
Figura 76 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material ADC006.	225
Figura 77 – FRFs experimentais da viga com o material ADC006.	226
Figura 78 – Fator de deslocamento para o material DA350 LIGHT.	227
Figura 79 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material DA350 LIGHT.	228
Figura 80 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o DA350 LIGHT.	229
Figura 81 – FRFs experimentais da viga com o material DA350 LIGHT.	230
Figura 82 – Fator de deslocamento para o material DA350 PERF.	231
Figura 83 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material DA350 PERF.	232
Figura 84 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material DA350 PERF.	233
Figura 85 – FRFs experimentais da viga com o material DA350 PERF.	234

Lista de tabelas

Tabela 1	– Restrições termodinâmicas aos parâmetros do modelo fracionário unidimensional.	58
Tabela 2	– Número característico de cada modo da viga para condições de contorno diferentes.	80
Tabela 3	– Propriedades modais da viga base.	119
Tabela 4	– Materiais de amortecimento avaliados (amostras). . .	119
Tabela 5	– Módulo de elasticidade calculado de acordo com a norma ASTM E756 para o material SD 40 a 20 ⁰ C. . .	124
Tabela 6	– Fatores de perda calculados de acordo com a norma ASTM E756 para o material SD 40 a 20 ⁰ C.	125
Tabela 7	– Ilustração da construção do vetor frequência reduzida, f_R , para um sistema de três graus de liberdade. . .	131
Tabela 8	– Constantes do modelo de derivadas fracionárias para descrição do módulo complexo dos materiais analisados.	167
Tabela 9	– Constantes da função de deslocamento para cada material analisado.	167
Tabela 10	– Designação dos termos de energia de deformação das camadas.	171

Nomenclatura

A lista a seguir se refere aos principais símbolos utilizados neste documento. Os símbolos que possuem significados locais e podem ter significados diferentes em diferentes contextos serão definidos quando usados.

Letras Gregas

$\alpha(T)$	Fator de deslocamento para a temperatura T
$\delta(\omega)$	Ângulo de perda (ou de fase entre a tensão e a deformação)
δ_{ij}	Delta de Kroenecker
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação
η	Fator de perda
κ	Fator de forma, ou constante de cisalhamento de Timoshenko
ν	Coefficiente de Poisson
ω	Frequência angular [rad/s]
σ	Tensão
σ^0	Amplitude máxima de tensão
$\Theta(\omega)$	Ângulo de armazenamento
γ^0	Amplitude máxima de deformação
ϵ	Deformação

Letras Latinas

E	Módulo de elasticidade
$E(t)$	Módulo de relaxação de tração (ou compressão)
f_R	Frequência reduzida
G	Módulo de cisalhamento
$G''(\omega)$	Módulo de perda cisalhante
$G'(\omega)$	Módulo de armazenamento cisalhante
$G(t)$	Módulo de relaxação cisalhante
g^*	Parâmetro de cisalhamento complexo
$G^*(\omega)$	Módulo complexo cisalhante
$I_{mn}(x)$	Segundo momento de inércia de área, normal ao eixo m , com relação ao giro em torno do eixo n
$J''(\omega)$	Módulo de perda a fluência por cisalhamento
$J'(\omega)$	Módulo de armazenamento a fluência por cisalhamento
$J(t)$	Módulo de fluência
$J^*(\omega)$	Módulo de fluência complexo
$K(t)$	Módulo de relaxação volumétrica
$K^*(\omega)$	Módulo complexo volumétrico
$k_{A,n}(x)$	Raio de giro da área em torno do eixo n
$w(x, t)$	Deflexão (ou deslocamento) transversal da viga
Y	Parâmetro geométrico
FRF	Função Resposta em Frequência

MLPS Modelo Linear Padrão Sólido

RKU Ross-Kerwin-Ungar

TSDT Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem

Subscritos

e Módulo de equilíbrio (ou borrachoso)

g Módulo vítreo (instantâneo)

Sobrescritos

*

Função (ou valor) complexa

'

Parte real de uma função complexa, ou uma derivada espacial

''

Parte imaginária de uma função complexa, ou uma dupla derivação espacial

Operadores

[.] Ao redor de uma quantidade indexada denota matriz

$\Gamma(\alpha)$ Função fatorial Gamma sobre α

$D_C^\alpha [.]$ Derivativa fracional α de Caputo sobre [.]

$D_{RL}^\alpha [.]$ Derivativa fracional α de Riemann-Liouville sobre [.]

{.} Ao redor de uma quantidade indexada denota vetor

$[.]^T, \{.\}^T$ Matriz transposta ou vetor transposto

Sumário

	Introdução	29
1	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS LINEARES	35
1.1	Cisalhamento Simples	36
1.2	Outros tipos de Deformação	40
1.3	Princípio da Superposição de Boltzmann	44
1.4	Analogia com Elementos de Mola e Amortecedor .	46
1.4.1	Modelo de Maxwell	47
1.4.2	Modelo de Voigt	48
1.4.3	Modelo Linear Padrão Sólido	49
1.5	Abordagem Utilizando o Cálculo Fracionário	54
1.6	Contração Lateral (Razão de Poisson)	59
1.7	Síntese	63
2	ABORDAGEM PELO MÓDULO COMPLEXO	65
2.1	Efeitos da Temperatura e Frequência	65
2.1.1	Efeitos da Temperatura	67
2.1.2	Efeitos da Frequência	68
2.1.3	Equivalência Frequência-Temperatura	69
2.2	Método das Variáveis Reduzidas	71
2.2.1	Relações de Função de Deslocamento	74
2.2.1.1	Equação de Willians-Landel-Ferry	74
2.2.1.2	Equação de Arrhenius	75
2.3	Medição do Módulo Complexo	76
2.3.1	Método da Viga Vibrante	78
2.3.2	Viga Homogênea	79
2.3.3	Viga Oberst	81

2.3.4	Viga Oberst Modificada	81
2.3.5	Viga Sanduíche	82
2.4	Identificação de Erros de Medição via Wicket Plot	85
2.5	Síntese	86
3	VIBRAÇÃO DE VIGAS	89
3.1	Teorias Clássicas	89
3.2	Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem	92
3.3	Vigas com Camadas Restritoras	95
3.3.1	Modelos Analíticos	97
3.3.1.1	Equações de Ross-Kerwin-Ungar – RKU	97
3.3.1.2	Equações de Mead e Markus	99
3.3.1.3	Outras Equações	105
3.3.2	Análise Numérica	107
3.4	Síntese	112
4	CARACTERIZAÇÃO DO MÓDULO COMPLEXO .	115
4.1	Descrição do Método	115
4.2	Experimentos e Tratamento dos Dados	117
4.2.1	Descrição da Viga Base e das Amostras	118
4.2.2	Aparato Experimental e Descrição dos Equipamentos .	120
4.2.3	Procedimento Experimental	120
4.2.4	Análise e Tratamento dos Dados	125
4.3	Procedimentos Numéricos	129
4.3.1	Descrição dos Parâmetros Modais Experimentais através de Modelos de Derivadas Fracionárias	130
4.3.2	Determinação do Módulo Complexo	134
4.3.2.1	Formulação do Elemento Finito de Viga Sanduíche	137
4.3.2.2	Ajuste do Modelo	147
4.4	Síntese	150
5	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	151

5.1	Validação do Elemento de Viga Sanduíche	151
5.1.1	Análise de convergência	151
5.1.2	Validação Analítica, Experimental e Numérica	153
5.2	Caracterização das Amostras	157
5.2.1	Parâmetros Modais Experimentais	158
5.2.2	Módulo Complexo	163
5.3	Comparação dos Parâmetros Modais	168
5.4	Efeito da Energia de Deformação Axial	170
5.5	Avaliação do Coeficiente de Poisson na Resposta da Viga	175
5.6	Comparação com dados obtidos via ASTM E756 .	176
5.7	Síntese	180
6	CONCLUSÕES	183
	REFERÊNCIAS	193
	APÊNDICES	203
	APÊNDICE A – INTERFACE GRÁFICA	205
	APÊNDICE B – MATRIZES DO ELEMENTO FINITO DE VIGA SANDUÍCHE . .	207
	APÊNDICE C – RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO	215
C.1	Material 1229SN08	215
C.2	Material 1229SN09	219
C.3	Material ADC006	223
C.4	Material DA350 LIGHT	227
C.5	Material DA350 PERF	231

Introdução

O aumento do amortecimento de estruturas tem como objetivo principal controlar a resposta dos componentes, nas frequências de ressonância e antirressonância, para que falhas catastróficas devida às deformações excessivas possam ser evitadas. Outro objetivo diz respeito ao conforto, como por exemplo a vibração e o ruído transmitidos para o interior de cabines de aeronaves e automóveis. Assim, para que o controle de vibrações em sistemas mecânicos possa ser realizado com eficiência, é indispensável o entendimento detalhado do comportamento dinâmico do sistema, bem como das propriedades mecânicas dos materiais envolvidos.

É prática comum em diversas áreas da engenharia, tais como aeroespacial, automotiva e naval, realizar este controle através da adição de materiais de amortecimento, isolando ou mesmo amortecendo as vibrações do sistema. O emprego de materiais viscoelásticos com camadas simples ou restritas para tratamento de amortecimento de superfícies vibrantes, como fuselagem ou painéis automotivos, tem atraído o interesse dessas áreas pelo fato de apresentar uma boa relação custo-benefício.

Um dos métodos mais empregados para a caracterização de materiais de amortecimento é o da viga vibrante, padronizado pela norma ASTM E756 (2005). O emprego desta norma a materiais com camada de restrição requer que esta camada seja retirada. Neste processo, a influência exercida pelo adesivo (que une as camadas) no comportamento dinâmico do material composto (camada de material viscoelástico+adesivo+camada restritora) é automaticamente descartada, sendo que o adesivo geralmente possui propriedades viscoelásticas e estas podem ser relevantes na resposta da estrutura. Além do mais, a aplicação desta norma limita-se à faixa de 50 a 5000 Hz e, para a

caracterização dos módulos E ou G , nas regiões vítrea, de transição e borrachosa de materiais que apresentam estas regiões bem distintas, é necessário que o material seja avaliado em duas configurações (viga Oberst e sanduíche). Neste caso, no cômputo de E não são consideradas as deformações cisalhantes e a inércia rotatória do material e no cálculo de G as deformações normais longitudinais são desprezadas.

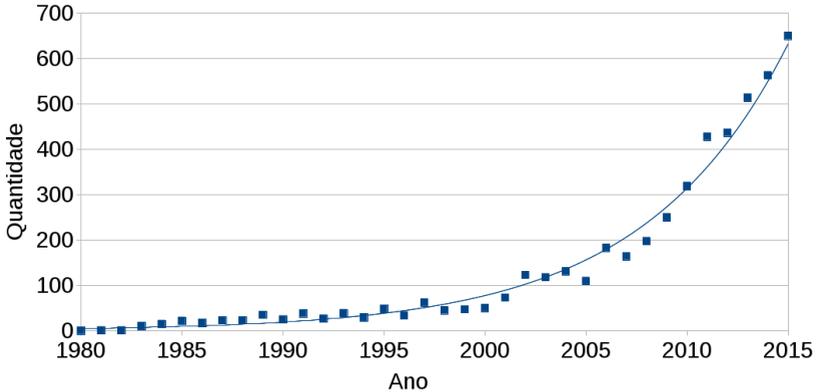
Técnicas numéricas de ajustes de modelos de elementos finitos são bastante promissoras para a caracterização destes materiais. Aquelas baseadas na inversão matricial, como o *Método Direto de Resposta em Frequência*, apresentam robustez e custos computacionais relativamente altos. Os métodos baseados na solução do problema de autovalores, representado pelo *Método Modal*, apresentam custos computacionais relativamente baixos, porém, são limitados à materiais com propriedades constantes na frequência¹, diferentemente dos materiais viscoelásticos.

As propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos são dependentes tanto da frequência como da temperatura, e amplamente representadas pelo módulo complexo. O modelo constitutivo baseado no conceito de derivadas fracionárias tem se destacado para a modelagem desses materiais no domínio da frequência e, também, várias técnicas empregando este modelo têm sido propostas na literatura para a caracterização desses materiais. Numa pesquisa realizada pelas palavras-chave “fractional calculus” + “viscoelastic” no site *Google Acadêmico*², verificou-se que a citação destes termos nas publicações científicas no período de 1980 a 2015 cresceu de maneira exponencial, conforme apresentado na Figura 1. Este resultado revela, de certa forma, a tendência científica por este assunto neste período.

¹ De maneira iterativa, e de certa forma ineficiente, o método modal pode ser utilizado para calcular a resposta da estrutura considerando as propriedades dependentes da frequência. Maiores detalhes são apresentados na subseção 3.3.2.

² Google Acadêmico é um sítio do tipo: banco de dados de registros bibliográficos. Acessível em <http://scholar.google.com.br>

Figura 1 – Quantidade de aparições dos termos “fractional calculus” + “viscoelastic” nas publicações científicas dos últimos anos.



Fonte: Produzido pelo autor.

Propósito do Estudo

Tendo em vista os fatos apresentados, tem-se por objetivo neste trabalho apresentar soluções que supram as dificuldades e os problemas envolvidos na caracterização e modelagem dinâmica de materiais para tratamento de amortecimento de superfícies vibrantes. Para tal, será proposto um procedimento de caracterização do módulo complexo de aplicações de amortecimento com camada simples ou restrita, utilizando apenas uma configuração de viga e com o material aplicado na sua própria configuração de trabalho (original). As propriedades dinâmicas serão determinadas para várias temperaturas através de técnicas de ajustes de modelos. Um elemento finito de viga sanduíche será formulado considerando as hipóteses da *Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem* para a camada viscoelástica e as de *Euler-Bernoulli* para as elásticas. O modelo de derivadas fracionárias será empregado para a descrição do módulo complexo do material viscoelástico e, com auxílio do método das variáveis reduzidas, o emprego do método modal será

proposto para as simulações das respostas da viga, levando em conta a variação das propriedades com relação à frequência e à temperatura.

Significância do Estudo

Talvez a maior relevância deste estudo esteja na proposta de aplicação do método modal, em conjunto com o método das variáveis reduzidas, para a predição da resposta dinâmica de uma estrutura com material viscoelástico, considerando as variações das propriedades com a frequência e a temperatura. Com esta abordagem, os parâmetros modais, frequências naturais e fatores de perda poderão ser determinados de maneira precisa e mais rápida, quando comparada aos métodos convencionais. Com isto, espera-se que os projetos de amortecimento de estruturas possam ser realizados com maior rapidez e precisão.

Considera-se também que o elemento finito de viga sanduíche formulado possui destaque por apresentar apenas oito graus de liberdade e considerar a energia de deformação axial do material viscoelástico, esta desprezada pela maioria das propostas. Tal energia se torna influente na resposta da viga à medida que o grau de assimetria (da geometria e propriedades da seção transversal) aumenta. Portanto, este fator pode ser determinante na predição da resposta de estruturas sanduíches.

Organização do Estudo

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. A revisão da literatura está apresentada nos três primeiros capítulos. No primeiro são apresentados os fundamentos teóricos sobre viscoelasticidade linear, as principais propriedades que definem um material viscoelástico e os principais modelos constitutivos que representam o comportamento físico destes materiais. No Capítulo 2, através da abordagem pelo módulo complexo, as principais características dinâmicas dos materiais viscoe-

lásticos são elucidadas e no capítulo subsequente são estabelecidas as bases teóricas para a modelagem do comportamento dinâmico de vigas. O Capítulo 4 descreve a metodologia usada neste trabalho, que inclui a descrição do método proposto, experimentos e tratamento dos dados experimentais e os procedimentos numéricos adotados. No Capítulo 5 os resultados são apresentados e analisados. Inicia-se com a validação do elemento de viga sanduíche e, na sequência, a caracterização das amostras, confrontação dos dados experimentais com os numéricos, análise da energia de deformação longitudinal do viscoelástico na resposta da viga, uma avaliação do coeficiente de Poisson na resposta da viga e uma comparação dos parâmetros modais da viga simulados com os resultados obtidos por esta metodologia com dados obtidos via ASTM E756. O último capítulo do trabalho fornece um resumo completo deste estudo, discussão dos resultados, implicações práticas, sugestões para trabalhos futuros e as conclusões.

1 Relações Constitutivas Lineares

A teoria clássica da elasticidade diz que, de acordo com a *Lei de Hooke*, quando um sólido elástico sofre pequenas deformações, a tensão σ neste sólido sempre será diretamente proporcional à deformação ε e independente da taxa de deformação $\dot{\varepsilon}$, ou seja:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (1.1)$$

sendo E denominado *módulo de elasticidade*. Por outro lado, a teoria clássica da hidrodinâmica diz que, de acordo com a *Lei de Newton*, quando um fluido viscoso experimenta pequenas taxas de deformação, a tensão cisalhante sempre será diretamente proporcional à taxa de deformação cisalhante e independente da deformação em si. Neste caso, a magnitude desta tensão cisalhante pode ser expressa por:

$$\sigma(t) = C\dot{\varepsilon}(t), \quad (1.2)$$

sendo C a propriedade material denominada *coeficiente de viscosidade*. Num material puramente elástico a energia de deformação é armazenada e pode ser recuperada totalmente após a liberação do carregamento. Já para um material puramente viscoso, toda a energia requerida para produzir a deformação é dissipada na forma de calor (FERRY, 1980).

Quando ambas as condições de deformação e taxa de deformação são infinitesimais, um sistema pode exibir comportamento que combine características de líquido e de sólido. Por exemplo, se em um corpo que contenha essas características combinadas for mantida uma tensão constante, este irá deformar-se lentamente com o tempo, fenômeno este chamado de *fluência*, ou ainda, se em tal corpo for mantida uma deformação constante, a tensão variará lentamente com o tempo, fenômeno este chamado de *relaxação de tensão*. Quando tal corpo for

submetido a uma variação de tensão harmônica, a deformação não estará exatamente em fase com a tensão, como aconteceria para um sólido perfeitamente elástico, nem defasada de 90° , como aconteceria para um líquido perfeitamente viscoso, mas sim em uma região intermediária entre esses dois limites. Segue, portanto, que *Materiais Viscoelásticos* são definidos como materiais que exibem comportamento intermediário aos ideais elástico e viscoso e que, em princípio, todos os materiais reais exibem comportamento viscoelástico (FERRY, 1980).

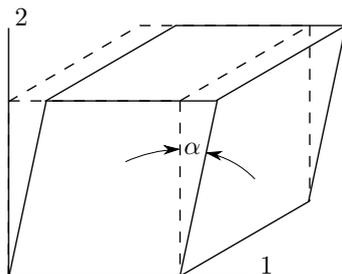
A modelagem do fenômeno viscoelástico é comumente realizada com auxílio da Reologia. Quando o material exibe deformação e taxa de deformação infinitesimais tem-se o chamado *comportamento viscoelástico linear*, onde as relações temporais tensão-deformação podem ser descritas por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Estas relações são em geral chamadas de *equações constitutivas*, ou *equações reológicas de estado*, e especificam as propriedades do material de maneira que independe do tamanho ou forma do corpo, mas em função sim da natureza do material somente (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985).

Muitas pesquisas têm sido conduzidas com o intuito de desenvolver modelos apropriados para descrever o comportamento viscoelástico e, como consequência, uma variedade de relações matemáticas foram propostas. Nas seções a seguir, são apresentados alguns conceitos fenomenológicos básicos com definições de tensão e deformação e suas inter-relações em meios considerados contínuos.

1.1 Cisalhamento Simples

A determinação das propriedades mecânicas são geralmente feitas pela observação das forças externas e das mudanças nas dimensões da geometria de um corpo. A conexão entre forças e deformações num experimento específico depende não só das relações tensão-deformação mas também da equação da continuidade e de movimento.

Figura 2 – Ilustração de um elemento cúbico em cisalhamento simples.



Fonte: Modificado de Ferry (1980, p. 7).

Se a deformação é uniforme, as componentes de tensão e deformação não variam com a posição e independem de x_i . Um tipo específico de deformação uniforme é aquele utilizado em experimentos de cisalhamento simples, onde duas faces opostas de um elemento cúbico sofrem deslocamento relativo paralelo, em sentidos opostos e em função do tempo, conforme ilustrado na Figura 2. Por convenção, a face plana 1-3 desloca-se na direção 1 e as deformações e tensões são dadas por:

$$[\gamma_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{21}(t) & 0 \\ \gamma_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

sendo $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \partial u_1 / \partial x_2 = \tan \alpha \cong \alpha$, e

$$[\sigma_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12}(t) & 0 \\ \sigma_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Neste caso, a *forma* do corpo é mudada sem alteração de volume.

O comportamento reológico dos materiais viscoelásticos é caracterizado geralmente por *funções materiais* dependentes do tempo (ou frequência). Com isto, a tensão pode ser expressa por um *funcional* dependente do histórico da deformação e a deformação por um funcional

dependente do histórico da tensão. Para pequenas deformações, estes funcionais podem ser representados por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, ou, equivalentemente, por integrais de convolução. No caso de cisalhamento simples, a equação constitutiva linear pode ser expressa pela seguinte integral de convolução:

$$\sigma_{21}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{21}(t') dt', \quad (1.5)$$

sendo $\dot{\gamma}_{21} = \partial \gamma_{21} / \partial t$ a taxa de deformação cisalhante e $G(t)$ a função material *módulo de relaxação cisalhante* (FERRY, 1980, p. 07).

A equação constitutiva que expressa a deformação em termos do histórico da taxa de tensão, $\dot{\sigma}_{21} = \partial \sigma_{21} / \partial t$, pode ser escrita como:

$$\gamma_{21}(t) = \int_{-\infty}^t J(t-t') \dot{\sigma}_{21}(t') dt', \quad (1.6)$$

sendo $J(t)$ chamado de *módulo de fluência*¹, o qual está relacionado com a mudança de forma. A partir do conhecimento de $G(t)$ ou $J(t)$ de um material particular, é possível determinar as relações tensão-deformação para experimentos em cisalhamento.

Os módulos de relaxação e de fluência são ambos funções causais, ou seja, apresentam valor nulo para $t < 0$, e monotônicas, onde $\frac{dJ(t)}{dt} > 0$ e $\frac{dG(t)}{dt} < 0$. Seus valores limites para $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$ estão relacionados aos seus respectivos comportamentos instantâneo (vítreo) e de equilíbrio (borrachoso). Assim, denomina-se² $J_g = J(0^+)$ como o *módulo vítreo de fluência*, $J_e = J(+\infty)$ o *módulo de equilíbrio de fluência*, e $G_g = G(0^+)$ o *módulo vítreo de relaxação*, $G_e = G(+\infty)$ o *módulo de equilíbrio de relaxação* (MAINARDI, 2012a).

No caso de experimentos dinâmicos, a tensão no material pode ser variada senoidalmente numa dada frequência ω e, para comporta-

¹ Traduzido da expressão em inglês: *creep compliance*.

² O subscrito g vem da palavra *glassy* (vítreo) pois polímeros amorfos se comportam como vítreo quando são carregados instantaneamente (TSCHOEGL, 1989).

mento viscoelástico linear, a deformação irá oscilar senoidalmente com uma amplitude máxima γ^0 , fora de fase com a tensão, ou seja:

$$\gamma_{21}(t) = \gamma^0 \text{sen } \omega t. \quad (1.7)$$

Substituindo esta equação na 1.5, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(t) = \gamma^0 \left[\omega \int_0^\infty G(s) \text{sen } \omega s \, ds \right] \text{sen } \omega t \\ + \gamma^0 \left[\omega \int_0^\infty G(s) \cos \omega s \, ds \right] \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $t - t'$ foi substituído por s . Esta integral converge somente se $G(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. Percebe-se que o termo em $\text{sen } \omega t$ na Equação 1.8 está em fase com $\gamma_{21}(t)$ e o termo em $\cos \omega t$ está 90° fora de fase. Assim, esta equação é convenientemente escrita como:

$$\sigma_{21}(t) = \gamma^0 (G'(\omega) \text{sen } \omega t + G''(\omega) \cos \omega t), \quad (1.9)$$

onde $G'(\omega)$ é definido como o *módulo de armazenamento cisalhante* e $G''(\omega)$ o *módulo de perda cisalhante*. A variação da tensão pode ainda ser escrita em função da amplitude σ^0 e do *ângulo de fase* $\delta(\omega)$ como:

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(t) &= \sigma^0 \text{sen } (\omega t + \delta(\omega)) \\ &= \sigma^0 \cos \delta(\omega) \text{sen } \omega t + \sigma^0 \text{sen } \delta(\omega) \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

a qual, quando comparada à Equação 1.9, resulta nas seguintes relações:

$$G'(\omega) = (\sigma^0/\gamma^0) \cos \delta(\omega), \quad (1.11)$$

$$G''(\omega) = (\sigma^0/\gamma^0) \text{sen } \delta(\omega), \quad (1.12)$$

$$G''(\omega)/G'(\omega) = \tan \delta(\omega), \quad (1.13)$$

$$G'(\omega)/G''(\omega) = \tan \Theta(\omega) = \cot \delta(\omega), \quad (1.14)$$

onde $\Theta(\omega)$ é chamado de *ângulo de armazenamento* (FERRY, 1980).

Convenientemente, pode-se expressar a variação de tensão e de deformação como quantidades complexas na seguinte forma:

$$\gamma^* = \gamma^0 e^{i\omega t}, \quad (1.15)$$

$$\sigma^* = \sigma^0 e^{i[\omega t + \delta(\omega)]}, \quad (1.16)$$

e estas podem ser usadas para obter a seguinte relação:

$$\sigma^*/\gamma^* = G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = |G^*| e^{i\delta(\omega)}, \quad (1.17)$$

onde $G^*(\omega)$ é definido como o *módulo complexo de cisalhamento*, sendo:

$$|G^*| = \sigma^0/\gamma^0 = \sqrt{G'^2 + G''^2}, \quad (1.18)$$

ou, ainda, definir o *módulo complexo de fluência* como:

$$J^*(\omega) = \gamma^*/\sigma^* = 1/G^*(\omega) = J'(\omega) - iJ''(\omega), \quad (1.19)$$

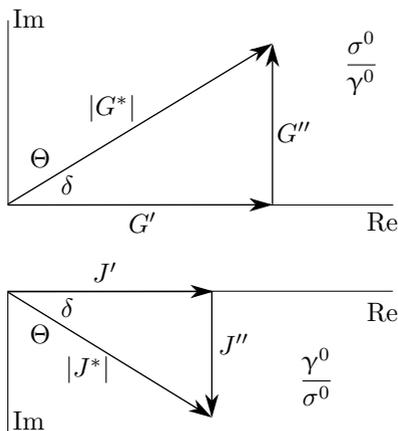
sendo $J'(\omega)$ e $J''(\omega)$ os respectivos módulos de armazenamento e de perda à fluência por cisalhamento.

Na Figura 3 os módulos G^* e J^* são representados vetorialmente no plano complexo, onde nota-se que $J''/J' = G''/G' = \tan \delta = \eta$, sendo η definido como fator de perda. É evidente que $G'(\omega)$ é a razão de tensão em fase com a deformação sobre a deformação, enquanto que $G''(\omega)$ é a razão de tensão 90° fora de fase com a deformação sobre a deformação. Portanto, a tensão sempre antecederá a deformação.

1.2 Outros tipos de Deformação

Em cisalhamento puro, a mudança de forma não está relacionada à mudança de volume. Existem outras deformações geométricas, como tração e compressão, que são caracterizadas por uma mudança combinada de volume e de forma. Para tais condições, a tensão pode

Figura 3 – Representação Vetorial do Módulo Complexo e de Fluência em deformações senoidais cisalhantes.



Fonte: Modificado de Ferry (1980, p. 13).

ser expressa pela seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \dot{\gamma}_{kk}(t') \delta_{ij} \left[\frac{3}{2} K(t-t') - G(t-t') \right] dt' + \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{ij}(t') dt', \quad (1.20)$$

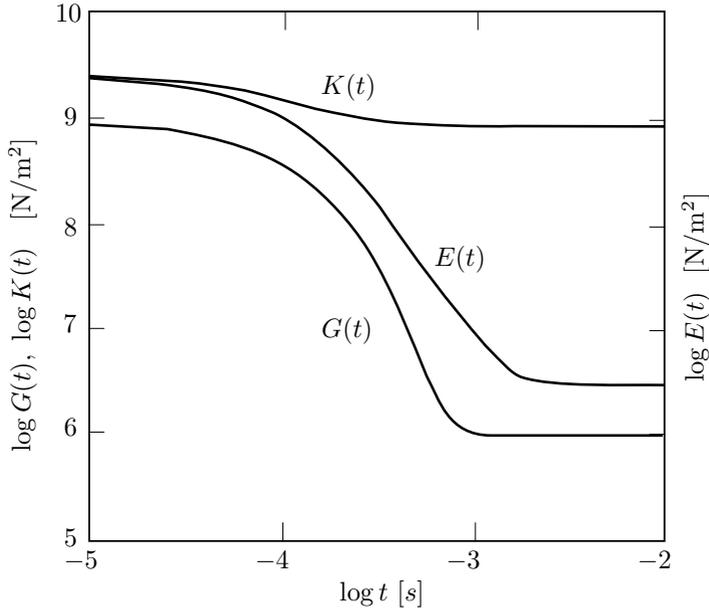
sendo δ_{ij} o delta de Kroenecker e $K(t)$ o *módulo de relaxação volumétrica*³, ou no domínio da frequência por:

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \gamma_{kk}(\omega) \delta_{ij} \left[\frac{2}{3} K^*(\omega) - G^*(\omega) \right] + G^*(\omega) \gamma_{ij}(\omega), \quad (1.21)$$

as quais representam a *Lei de Hooke generalizada* para materiais viscoelásticos lineares (TSCHOEGL, 1989, p. 513).

Os módulos K e G são os módulos fundamentais para a descrição do comportamento mecânico dos materiais. O primeiro governa

³ Módulo de relaxação volumétrica, traduzido da expressão em inglês: *bulk relaxation modulus*.

Figura 4 – Ilustração da variação dos módulos $G(t)$, $K(t)$ e $E(t)$.

Fonte: Adaptado de Tschoegl (1989, p. 521).

a mudança de volume e o segundo a mudança de forma. Em muitos polímeros o módulo $K(t)$ muda da região vítrea à região borrachosa⁴ por um fator de 2 a 3 vezes, enquanto o módulo $G(t)$ muda de 3 a 4 décadas logarítmicas, conforme é ilustrado na Figura 4. Como consequência desta diferença, que caracteriza o comportamento dos dois tipos fundamentais de deformação, o módulo característico dos demais tipos de deformação também serão diferentes (TSCHOEGL, 1989, p. 520).

No caso de tração simples (onde σ_{22} e σ_{33} são nulos), após uma certa manipulação matemática, a expressão da Lei de Hooke

⁴ Região borrachosa, traduzido da expressão em inglês: *rubbery plateau*.

Generalizada, Equação 1.20, pode ser escrita por (FERRY, 1980, p. 22):

$$\sigma_{11}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{11}(t') dt' - \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{22}(t') dt', \quad (1.22)$$

análoga à Equação 1.5 para cisalhamento simples.

Se a deformação na direção transversal é conhecida, além da longitudinal, o módulo de cisalhamento pode ser obtido a partir de ensaios de tração simples. Para isto, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$E(t) = 2(1 + \nu_g)G(t) - 2 \int_0^t G(t') \frac{d\nu(t-t')}{dt'} dt', \quad (1.23)$$

na qual $E(t)$ é o *módulo de relaxação de tração*, ou módulo de elasticidade, que pode ser obtido através da Equação 1.1, $\nu(t)$ é o *coeficiente de Poisson*, que será apresentado na seção 1.6, e $\nu_g = \nu(0)$ é o seu valor vítreo. Infelizmente não é possível explicitar $G(t)$ nesta equação⁵.

No domínio da frequência, a relação entre estas propriedades pode ser expressa por:

$$E^*(\omega) = 2[1 + \nu^*(\omega)]G^*(\omega), \quad (1.24)$$

ou:

$$G^*(\omega) = \frac{E^*(\omega)}{2[1 + \nu^*(\omega)]}, \quad (1.25)$$

sendo E^* o módulo complexo de elasticidade e $\nu^* = \nu' + i\nu''$.

O módulo E pode ser relacionado também com os módulos fundamentais G e K , no domínio de Laplace (s), por:

$$\bar{E}(s) = \frac{9\bar{G}(s)\bar{K}(s)}{3\bar{K}(s) + \bar{G}(s)}, \quad (1.26)$$

na qual $[\bar{\cdot}]$ representa a *Transformada de Laplace* sobre a função $[\cdot]$. Infelizmente não é possível expressar $E(t)$ explicitamente em termos dos

⁵ Um método para calcular numericamente a integral da Equação 1.23 é apresentado por Tschoegl (1989, p. 539)

dois módulos fundamentais $K(t)$ e $G(t)$. Todavia, para um viscoelástico sólido, nas condições de equilíbrio, tem-se:

$$E_e = \frac{9G_e K_e}{G_e + 3K_e}, \quad (1.27)$$

na qual o subscrito “e” se refere às situações de equilíbrio. Assim, como E é função de K e G , o material possuirá, no ensaio de tração simples, comportamento de relaxação de tensão ou fluência diferente de quando em cisalhamento puro.

Materiais que possuem o módulo de cisalhamento muito menor que o volumétrico, como borrachas por exemplo, aparentam ser incompressíveis comparado à facilidade com que são cisalhados. Para um material incompressível, para o qual $K(t) \gg G(t)$, a Equação 1.27 se reduz a (FERRY, 1980, p. 24):

$$E = 3G, \quad (1.28)$$

e a Equação 1.24 se reduz a $\nu = 1/2$. Neste caso, um ensaio de tração simples fornece a mesma informação que o de cisalhamento puro, e os resultados dos dois experimentos são convertíveis. Fisicamente, este fato surge porque a mudança de volume causada pela extensão é desprezível em comparação à mudança de forma. Para todos os materiais viscoelásticos, haverá em geral algumas condições (especialmente tempos curtos ou frequências altas) em que G irá se aproximar de K em magnitude, ou seja, $\nu < 1/2$, e a Equação 1.28 não será aplicável.

1.3 Princípio da Superposição de Boltzmann

O *princípio da superposição de Boltzmann*, enunciado por Ludwig Boltzmann em 1874, é uma alternativa de formular as relações tensão-deformação através do uso de equações integrais (equivalentes) ao invés de equações diferenciais, desde que a resposta seja linear. As

Equações 1.5 e 1.6 são duas das muitas expressões possíveis deste princípio. onde os efeitos do histórico mecânico são linearmente aditivos, e a tensão é descrita como uma função do histórico da taxa de deformação ou, alternativamente, a deformação é descrita como uma função do histórico da taxa de mudança da tensão.

Para ilustrar o princípio da superposição de Boltzmann, considere primeiro um exemplo trivial de dois eventos históricos de tensão (para cisalhamento simples). Se uma tensão σ_A é aplicada no tempo $t = 0$ e uma tensão adicional σ_B no tempo $t = t_1$, a deformação total no tempo t pode ser obtida pela aplicação da Equação 1.6 como:

$$\gamma(t) = \sigma_A J(t) + \sigma_B J(t - t_1), \quad (1.29)$$

chamada de superposição linear de duas deformações especificadas. Este processo pode ser generalizado para uma sequência finita de mudanças de tensão σ_i , cada uma no tempo t_i na seguinte forma:

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \sigma^{(i)} J(t - t_i). \quad (1.30)$$

Similarmente, para incrementos de deformações $\gamma^{(i)}$, tem-se:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \gamma^{(i)} G(t - t_i). \quad (1.31)$$

Para um carregamento continuamente variado, estas duas superposições resultam na Equação 1.5 e 1.6, e estas, por sua vez, correspondem às equações diferenciais com coeficientes constantes. As integrais nas Equações 1.5 e 1.6 são conhecidas como *integrais hereditárias lineares do tipo Stieltjes*, ou simplesmente *convoluções de Stieltjes*, e as funções $J(t)$ e $G(t)$ (núcleo da transformada integral) desempenham um papel de *função ponderação*, que são chamadas também de funções *hereditárias* ou *memórias* pelo fato de ligarem o estado presente do material ao seu histórico anterior (MAINARDI, 2012a).

1.4 Analogia com Elementos de Mola e Amortecedor

Devido ao fato dos materiais viscoelásticos possuírem comportamento intermediário aos ideais elástico (Lei de Hooke) e viscoso (Lei de Newton), uma maneira conveniente de modelar o comportamento viscoelástico linear é utilizar a analogia de combinação de elementos de mola e de amortecedor. Pode-se afirmar que a forma das funções materiais J ou G no domínio do tempo ou da frequência, podem ser “imitadas” pelo comportamento de um modelo mecânico com um número suficiente de elementos elásticos (molas) e viscosos (amortecedores) (LAZAN, 1968).

A teoria de modelos mecânicos é a analogia mecânica da teoria de circuitos elétricos. Os elementos passivos de um sistema elétrico linear são *indutores*, *capacitores* e *resistores*. A energia é armazenada cineticamente no primeiro elemento, potencialmente no segundo e é dissipada no terceiro. Os exemplos familiares de elementos mecânicos passivos são *mola* (ideal elástico), Figura 5(a), em que a energia é armazenada potencialmente, e *amortecedor* (ideal viscoso), Figura 5(b), em que a energia é dissipada na forma de calor, ambos com massa desprezível (TSCHOEGL, 1989, p. 72).

Figura 5 – Convenções simbólicas para os modelos mecânicos de mola (a) e amortecedor (b).



Fonte: Produzido pelo autor.

Por causa da facilidade com que redes elétricas podem ser construídas e analisadas, outros sistemas físicos, como mecânicos, acústicos, hidráulicos ou outros, são frequentemente representados e analisados em termos de seus equivalentes elétricos. Com isto, as diversas possibilidades de representação do comportamento viscoelástico linear, por

meio de combinações de elementos de mola e de amortecedor, é dada pela seguinte equação diferencial linear:

$$\begin{aligned} & \left(a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) \sigma \\ & = \left(b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots + b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.32)$$

sendo σ a tensão, ε a deformação, t o tempo e a_n e b_n constantes materiais. Em geral, as derivadas de todas as ordens são requeridas para materiais reais, embora, em muitos casos, um número finito de termos fornece uma boa aproximação (LAZAN, 1968; SNOWDON, 1968).

Utilizando portanto estas analogias, a relação constitutiva da elasticidade linear (Lei de Hooke) é representada por um elemento de mola com rigidez K , Figura 5(a), e expressa por:

$$\sigma(t) = [\kappa K] \varepsilon(t), \quad (1.33)$$

onde κ possui unidade de (comprimento)⁻¹, e a relação para viscosidade linear (Lei de Newton) é representada por um elemento de amortecedor com viscosidade C , ilustrado na Figura 5(b), e expressa por:

$$\sigma(t) = \left[\kappa C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon(t). \quad (1.34)$$

Desta maneira, através da combinação de elementos de mola e de amortecedor, muitos modelos foram propostos na literatura, com destacam aos modelos apresentados a seguir.

1.4.1 Modelo de Maxwell

Se uma mola e um amortecedor são combinados em série, ilustrado na Figura 6, tem-se o *Modelo de Maxwell*, proposto por J. C. Maxwell em 1876. Este modelo é comumente referido como *Unidade de Maxwell* pelo fato de não representar satisfatoriamente o comportamento viscoelástico.

Figura 6 – Unidade de Maxwell.



Fonte: Produzido pelo autor.

A equação constitutiva que define as propriedades reológicas da unidade de Maxwell é dada por:

$$\left[K + C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \sigma(t) = \left[\kappa K C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon(t). \quad (1.35)$$

A resolução desta equação aponta que a resposta a um teste de fluência ($\sigma(t) = \sigma_0$) é dada por uma função linear no tempo, ou seja:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{\kappa C} t = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon} t, \quad (1.36)$$

a qual está em desacordo com as curvas observadas experimentalmente. Já a resposta a um ensaio de relaxação de tensão ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0$), tem-se:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{\kappa}{C} t} = \varepsilon_0 \kappa K e^{-\frac{\kappa}{C} t}, \quad (1.37)$$

ou seja, a tensão induzida em uma unidade de Maxwell sob a aplicação de uma deformação constante no tempo relaxa até alcançar o valor nulo, quando $t = \infty$ (SNOWDON, 1968, p. 3).

1.4.2 Modelo de Voigt

O próximo modelo, também simples, é dado pela combinação de uma mola e um amortecedor conectados em paralelo, Figura 7, o qual supera algumas limitações da unidade de Maxwell. Semelhantemente à unidade de Maxwell, esta proposta não representa satisfatoriamente o comportamento viscoelástico, portanto, é comumente referida como *Unidade de Voigt*. A equação constitutiva que define as propriedades reológicas desta unidade é dada por (SNOWDON, 1968, p. 3):

$$\sigma(t) = \left[\kappa K + \kappa C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon(t), \quad (1.38)$$

cuja resposta para um ensaio de relaxação de tensão é dada por:

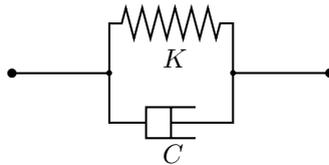
$$\sigma(t) = [\kappa C \delta(t) + \kappa K] \varepsilon_0 = \hat{\sigma}_0 \delta(t) + \sigma_0, \quad (1.39)$$

e para um ensaio de fluência por:

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1 - e^{-\frac{\kappa}{C}t}}{\kappa K} \right] \sigma_0 = \varepsilon_\infty \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{C}t} \right), \quad (1.40)$$

sendo $\delta(t)$ a função *Delta de Dirac* e $\hat{\sigma}_0$ um impulso de tensão, necessário para superar a resistência instantânea do amortecedor.

Figura 7 – Unidade de Voigt.



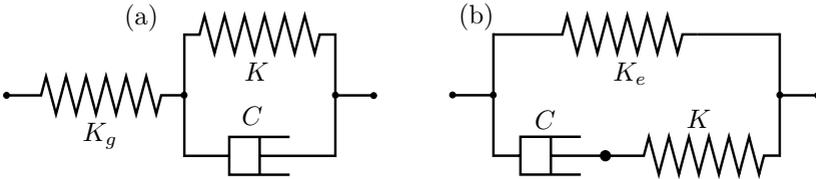
Fonte: Produzido pelo autor.

Percebe-se na Equação 1.39 que a unidade de Voigt não é capaz de descrever o fenômeno de relaxação de tensão de materiais viscoelástico, pois o descreve como um impulso de tensão mais uma constante, e, através da Equação 1.40, que a deformação nesta unidade alcança seu valor final em $t = \infty$ sob a aplicação de uma tensão constante. Como materiais viscoelásticos típicos apresentam resposta aos fenômenos de *relaxação de tensão* e de *fluência* dependentes da excitação, estas duas a unidades não representam o comportamento viscoelástico por completo (TSCHOEGL, 1989, p. 84).

1.4.3 Modelo Linear Padrão Sólido

Uma outra proposta, chamada de *Modelo Linear Padrão Sólido* (MLPS), dada pela adição de uma mola em série com uma unidade de Voigt, Figura 8(a), ou em paralelo com uma unidade de Maxwell,

Figura 8 – Modelo Linear Padrão Sólido (a) de Voigt e (b) de Maxwell.



Fonte: Adaptado de Tschoegl (1989, p. 89 e p. 91).

Figura 8(b), é capaz de modelar de maneira mais realista a ambas excitações de tensão e deformação. A equação diferencial que define o MLPS de Voigt, ilustrado na Figura 8(a), é dada por:

$$\left[\underbrace{\hat{K}_e}_{K + K_g} + C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \sigma(t) = \kappa \left[K K_g + K_g C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon(t), \quad (1.41)$$

e a que define o MLPS de Maxwell, Figura 8(b), é dada por:

$$\left[K + C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \sigma(t) = \kappa \left[K K_e + \underbrace{(K + K_e)}_{\hat{K}_g} C \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \varepsilon(t). \quad (1.42)$$

A resposta destes dois modelos a um ensaio de fluência é dada por:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{K_g} + \frac{1}{K} [1 - e^{-t/\tau}] \right\} \sigma_0 & \text{(Voigt),} \\ \left\{ \frac{1}{\hat{K}_g} + \frac{1}{\hat{K}_M} [1 - e^{-t/\tau_M}] \right\} \sigma_0 & \text{(Maxwell),} \end{cases} \quad (1.43)$$

sendo $\tau = C/K$; $\hat{K}_g = (K_e + K)$; $\hat{K}_M = \frac{\hat{K}_g K_e}{\hat{K}_g - K_e}$; $\tau_M = \tau \hat{K}_g / K_e$, e para um ensaio de relaxação de tensão é dada por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \left\{ \hat{K}_e + \hat{K}_V e^{-t/\tau_V} \right\} \varepsilon_0 & \text{(Voigt),} \\ \left\{ K_e + K e^{-t/\tau} \right\} \varepsilon_0 & \text{(Maxwell),} \end{cases} \quad (1.44)$$

na qual $\hat{K}_e = (K_g + K)$; $\hat{K}_V = \frac{\hat{K}_e K_g}{\hat{K}_e - K_g}$; e $\tau_V = \tau \hat{K}_e / K_g$. No ensaio de fluência ambas as propostas resultam numa equação do tipo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon \left[1 - e^{-t/\tau} \right], \quad (1.45)$$

ou seja, a resposta a uma tensão constante é dada por uma deformação súbita seguida por um retardo de deformação que cresce gradualmente para uma deformação de equilíbrio em $t = \infty$. Já para um ensaio de relaxação de tensão, as soluções resultam numa equação do tipo:

$$\sigma(t) = \sigma_e + \sigma e^{-t/\tau}. \quad (1.46)$$

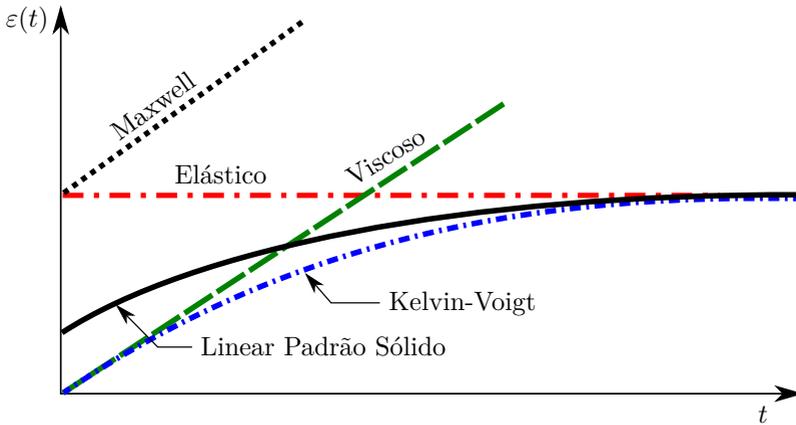
Para uma excitação de deformação constante, o MLPS responde com uma tensão repentina e então relaxa gradativamente para um valor de equilíbrio em $t = \infty$. Nota-se que, com uma escolha apropriada dos parâmetros, o comportamento dos dois modelos são tanto qualitativa quanto quantitativamente idênticos. As relações de respostas destes três modelos estão são ilustradas na Figura 9 para um teste de fluência, e na Figura 10 para um teste de relaxação de tensão.

As unidades de Maxwell, Voigt e o MLPS são propostas básicas que descrevem o comportamento de muitos materiais viscoelásticos. No entanto, como a resposta destes modelos em testes de fluência e/ou relaxação de tensão é dada por uma única função exponencial (com um único tempo de relaxação ou de retardo de fluência), essas propostas são inadequadas para ajustar respostas de materiais cuja relaxação e/ou fluência se estende(m) por várias décadas de unidade de tempo. Assim, é possível incluir derivadas de ordens maiores na equação diferencial (Equação 1.32) de maneira que tais fenômenos possam ser melhores representados (LAZAN, 1968; MALVERN, 1969; SUN; LU, 1995).

Uma forma mais compacta de representar a Equação 1.32 é dada por:

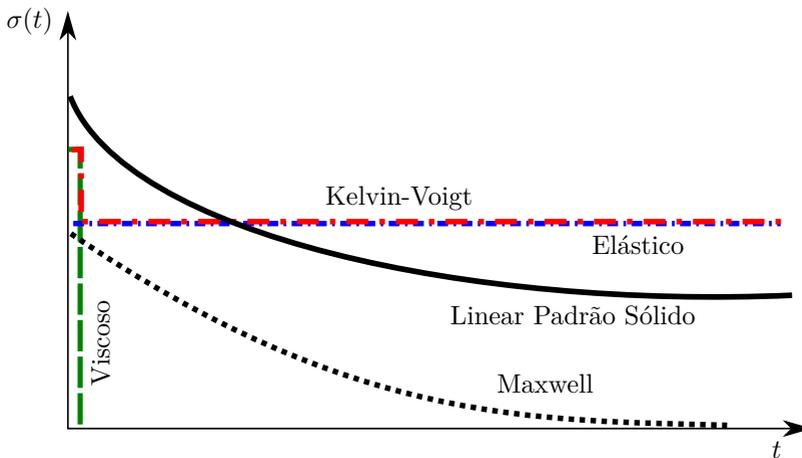
$$\sum_{r=0}^n a_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \sigma(t) = \sum_{r=0}^n b_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \varepsilon(t), \quad (1.47)$$

Figura 9 – Funções de fluência para os modelos básicos de materiais viscoelásticos.



Fonte: Modificado de Sun e Lu (1995, p. 16).

Figura 10 – Funções de relaxação de tensão para os modelos básicos de materiais viscoelásticos.

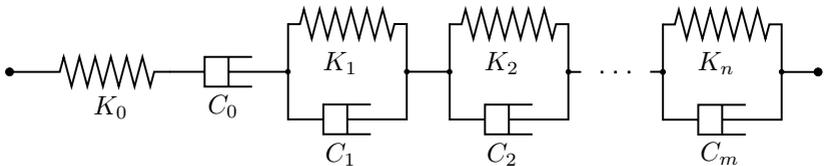


Fonte: Modificado de Sun e Lu (1995, p. 16).

que representa o *Modelo Linear Padrão Generalizado*, onde inúmeros modelos podem ser desenvolvidos. Dentre estes, ganha destaque o *Modelo Generalizado de Voigt*, ilustrado na Figura 11, o qual pode ser utilizado para ajustar dados de teste de fluência com alto nível de precisão, e o *Modelo Generalizado de Maxwell*, ilustrado na Figura 12, que pode ser usado para ajustar dados de relaxação com precisão relativamente alta (MALVERN, 1969, p. 317).

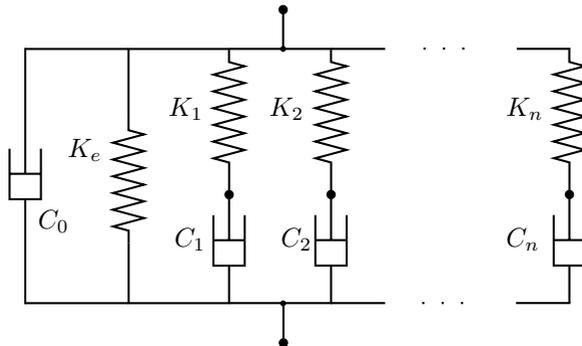
Apesar destes dois modelos representarem respectivamente os fenômenos de fluência e relaxação de tensão com precisão, a grande desvantagem está no fato de requererem uma quantidade de termos relativamente grande para modelar um material real para uma faixa ampla de tempo ou frequência.

Figura 11 – Modelo Generalizado de Voigt.



Fonte: Modificado de Sun e Lu (1995, p. 17).

Figura 12 – Modelo Generalizado de Maxwell.



Fonte: Modificado de Sun e Lu (1995, p. 17).

1.5 Abordagem Utilizando o Cálculo Fracionário

Uma grande simplificação na modelagem do comportamento dos materiais viscoelásticos tem sido desenvolvida nas últimas décadas, particularmente com relação ao domínio da frequência, pelo uso de *Modelos Fracionais Derivativos*⁶. Este modelo, que utiliza o conceito de diferenciação/integração de ordem arbitrária (inteira ou não), chamado de *Cálculo Fracionário*, possibilita uma variação mais realista do módulo complexo com uma quantidade de termos muito menor nas equações constitutivas em relação aos modelos generalizados.

Uma grande influência para o desenvolvimento destes modelos se deve às observações feitas por Nutting (1921), o qual identificou que as curvas de fluência, para materiais viscoelásticos lineares, poderiam ser descritas por parábolas, e que as deformações $\gamma(t)$ eram proporcionais à n -ésima potência do tempo t . Assim, Nutting estabeleceu a seguinte Lei geral para deformação:

$$\gamma(t) = at^n \sigma^m, \quad (1.48)$$

também chamada de *Lei da potência*, sendo n e m independentes de γ , σ e t , mas dependentes da temperatura. Para uma grande quantidade de materiais, valores não inteiro de n e m foram obtidos. Esta equação generaliza o modelo elástico de Hooke e viscoso de Newton.

Num trabalho similar, Gemant (1936, 1938) sugeriu a utilização do cálculo fracionário para a modelagem do comportamento dos materiais viscoelásticos por ter associado as curvas de respostas experimentais de materiais viscoelásticos com funções polinomiais de grau arbitrário. Em outro trabalho, Blair (1947, 1974) aplicou com sucesso o cálculo fracionário para modelar o comportamento viscoelástico de acordo com as observações realizadas por Nutting e por Gemant.

⁶ Uma perspectiva histórica sobre o cálculo fracionário aplicado à viscoelasticidade linear é apresentado por Mainardi (2012b). O período examinado cobre quatro décadas, desde 1930 até 1970.

Anos após, Bagley (1979) apresentou um modelo fracional tridimensional, que relaciona a tensão com a deformação de um material viscoelástico nas regiões: vítrea (ou instantânea), de transição (ou intermediária) e borrachosa (ou de equilíbrio), o qual é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \sum_{r=1}^R a_r D_{\text{RL}}^{\hat{\beta}_r} \right) \left(1 + \sum_{p=1}^P b_p D_{\text{RL}}^{\beta_p} \right) \sigma_{mn}(t) \\
 &= \delta_{mn} \left(1 + \sum_{p=1}^P b_p D_{\text{RL}}^{\beta_p} \right) \left(\lambda_0 + \sum_{j=1}^J \lambda_j D_{\text{RL}}^{\hat{\alpha}_j} \right) \varepsilon_{kk}(t) \\
 &+ 2 \left(1 + \sum_{r=1}^R a_r D_{\text{RL}}^{\beta_r} \right) \left(\mu_0 + \sum_{l=1}^L \mu_l D_{\text{RL}}^{\alpha_l} \right) \varepsilon_{mn}(t)
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

sendo D_{RL}^{α} chamado de operador *derivativa fracional* de Riemann-Liouville e α é a ordem da derivada. Este modelo pode ser visto como uma extensão do Modelo Linear Padrão Generalizado, Equação 1.47, onde as derivadas não estão limitadas à ordem inteira (BAGLEY, 1979). Quando a ordem dos operadores se aproxima da unidade, esta definição se reduz à primeira derivada no tempo, mas quando é menor que a unidade, a definição envolve valores de $\sigma(t)$, e/ou $\varepsilon(t)$ em todos os intervalos de tempo até o limite superior de integração, característico das funções hereditárias Jones (2001, p. 52) .

Dentre as diversas propostas para se calcular integrais e derivadas de ordem não inteira estão as definições de Riemann-Liouville e de Caputo, dadas respectivamente por (GORENFLO; MAINARDI, 2008):

$$D_{\text{RL}}^{\alpha} [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \tag{1.50}$$

e

$$D_{\text{C}}^{\alpha} [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \tag{1.51}$$

sendo $0 < \alpha < 1$ e $\Gamma(\alpha)$ a generalização da função fatorial, chamada de função Gamma. Yang e Zhu (2011) apontam que se o limite inferior

da integral de ambas as definições forem substituídos por $-\infty$, as imperfeições reológicas provocadas por estas definições são corrigidas.

Segundo Podlubny (1998), a derivada fracional de Caputo possui vantagem por permitir uma interpretação mais fácil para as condições iniciais da equação de movimento, tais como $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, etc. Já para as derivadas de Riemann-Liouville as condições iniciais devem ser expressas em termos dos valores de derivadas fracionais de funções desconhecidas. No entanto, estes valores podem ser obtidos através de experimentos (HEYMANS; PODLUBNY, 2006).

Com auxílio da transformada de Fourier, a Equação 1.49 pode ser reduzida a (BAGLEY, 1979):

$$\sigma_{mn}^*(\omega) = \delta_{mn} K^*(\omega) \varepsilon_{kk}^*(\omega) + 2G^*(\omega) \varepsilon_{mn}^*(\omega), \quad (1.52)$$

na qual:

$$K^*(\omega) = \frac{\lambda_0 + \sum_{j=1}^J \lambda_j (i\omega)^{\hat{\alpha}_j}}{1 + \sum_{r=1}^R a_r (i\omega)^{\hat{\beta}_r}}, \quad (1.53)$$

e

$$G^*(\omega) = \frac{\mu_0 + \sum_{l=1}^L \mu_l (i\omega)^{\alpha_l}}{1 + \sum_{p=1}^P b_p (i\omega)^{\beta_p}}, \quad (1.54)$$

sendo K^* e G^* os módulos complexos volumétrico e de cisalhamento.

Um outro modelo, chamado de *modelo fracionário de Maxwell Generalizado* foi apresentado por Rogers (1983) para a modelagem do comportamento de polímeros. A diferença deste modelo para o generalizado de Maxwell é que os elementos viscosos são substituídos por elementos fracionários do tipo:

$$\sigma = \kappa D_{RL}^{\beta} [\varepsilon], \quad (1.55)$$

os quais são capazes dissipar e armazenar energia. Num trabalho semelhante, Koeller (1984) substituiu também os elementos viscosos de diversos modelos por elementos fracionários e obtém os módulos de fluência e de relaxação de tensão para estes modelos.

Utilizando a propriedade da convolução de duas funções, Bagley e Torvik (1986) mostraram que a Equação 1.52 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\sigma_{mn}(t) = \delta_{mn} \int_{-\infty}^t K(t-t') \dot{\varepsilon}_{kk}(t') dt' + 2 \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\varepsilon}_{mn}(t') dt', \quad (1.56)$$

resultando numa das expressões do princípio de Boltzman. Os autores mencionam que as funções relaxação de tensão implicadas pela Equação 1.49 podem ser obtidas mais facilmente pela seguinte relação:

$$\sigma(t) = G_1 D_{RL}^\alpha [\varepsilon(t)] = \frac{G_1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon(t-t')}{t'^\alpha} dt', \quad (1.57)$$

ou, aplicando a regra de Leibnitz, por:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t') \dot{\varepsilon}(t-t') dt' + G(t)\varepsilon(0), \quad (1.58)$$

para $t > 0$, sendo:

$$G(t) = \frac{G_1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}. \quad (1.59)$$

Observando as Equações 1.56 e 1.57 verifica-se que estas propostas implicam módulos de relaxação de tensão na forma de potências fracionárias inversas, ao invés de funções exponenciais provenientes dos resultados da viscoelasticidade baseada em derivadas inteiras. Os autores enfatizam que a Equação 1.58 é análoga à Equação 1.5, onde $G(t)$ agora é dado pela Equação 1.59.

Segundo Bagley e Torvik (1986), observações experimentais apontam que muitos materiais viscoelásticos, com apenas uma região de transição, podem ser modelados usando somente o primeiro termo da série na Equação 1.49 e isto resulta num modelo de cinco parâmetros, o qual é expresso por:

$$\sigma^*(i\omega) + b(i\omega)^\beta \sigma^*(i\omega) = E_e \varepsilon^*(i\omega) + E_1 (i\omega)^\alpha \varepsilon^*(i\omega), \quad (1.60)$$

ou ainda por:

$$\sigma^*(i\omega) = E^*(\omega)\varepsilon^*(i\omega), \quad (1.61)$$

onde o módulo complexo de elasticidade agora é dado por:

$$E^*(\omega) = E'(1 + i\eta) = \frac{E_e + E_1(i\omega)^\alpha}{1 + b(i\omega)^\beta}, \quad (1.62)$$

cujas restrições que devem ser impostas a este modelo, para que respeite as leis da termodinâmica, são apresentados na Tabela 1. Nota-se que a restrição 4 faz com que o módulo vítreo seja maior ou igual ao módulo borrachoso. Se $\alpha = \beta$, para frequências elevadas, a assíntota superior do módulo complexo é exatamente igual ao módulo vítreo, $E_g = E_1/b$. Segundo os autores, este modelo de quatro parâmetros (considerando $\alpha = \beta$) apresenta boa precisão para ajuste de propriedades sobre várias décadas de tempo ou frequência.

Tabela 1 – Restrições termodinâmicas aos parâmetros do modelo fracionário unidimensional.

1	2	3	4	5	6
$E_e \geq 0$	$E_1 > 0$	$b > 0$	$E_g = E_1/b \geq E_e$	$\alpha = \beta$	$0 \leq \alpha \leq 1$

Fonte – Bagley e Torvik (1986)

Numa avaliação teórica de um modelo fracionário de quatro parâmetros, Pritz (1996) ressalta que existe uma relação estrita entre a dispersão dos módulos dinâmicos, o pico e a largura das curvas de fator de perda e as inclinações dos módulos no domínio da frequência. Pritz menciona que, se a curva do fator de perda for assimétrica com relação ao seu pico, o modelo de quatro parâmetros não pode ser utilizado para ajustar as propriedades dinâmicas do material viscoelástico. Para contornar esta restrição, é proposta uma versão modificada de cinco parâmetros que, além de permitir um controle melhor para o ajuste do fator de perda, apresenta uma precisão melhor, em comparação ao de quatro parâmetros, para descrever o comportamento viscoelástico em

alta frequência. Pritz apresenta também as restrições que devem ser impostas aos parâmetros deste modelo.

Adolfsson, Enelund e Olsson (2005) propõem uma formulação utilizando integrais fracionárias (de ordem $\alpha \in (0, 1)$) ao invés de derivadas fracionárias, facilitando a manipulação numérica das equações, já que o núcleo da integral possui menos tendência à singularidade que o da derivada fracionária, e, também, favorece a implementação das equações no método de elementos finitos. Eles demonstram, ainda, que este modelo satisfaz as desigualdades de Clausius-Duhem.

Outro tópico que é de grande interesse nas áreas de física e engenharia é voltado à implementação das equações constitutivas nas formulações de elementos finitos. Neste contexto, diversos trabalhos utilizando modelos fracionários têm recebido muita atenção nos últimos anos (PADOVAN, 1987; SCHMIDT; GAUL, 2002; GALUCIO; DEÛ; OHAYON, 2004; SORRENTINO; FASANA, 2007; CATANIA; SORRENTINO; FASANA, 2008; ALVELID; ENELUND, 2007; KIM; LEE, 2009; MARTINEZ-AGIRRE; ELEJABARRIETA, 2011), com destaque à modelagem de estruturas sanduíche. Neste campo de conhecimento, uma propriedade material fundamental para a modelagem do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos é a *Razão de Poisson*, que em princípio tem sido considerada como uma constante, mas a sua variação na frequência e na temperatura pode ser significativa nesta modelagem. Este assunto é apresentado na seção a seguir.

1.6 Contração Lateral (*Razão de Poisson*)

O *coeficiente de Poisson* de um material viscoelástico é definido como a razão entre a deformação transversal, que é desenvolvida em resposta a uma deformação uniaxial imposta, e a deformação imposta. Em tração uniaxial esta razão representa a *contração lateral* relativa e em compressão uniaxial a *dilatação lateral* relativa. Para materiais

puramente elásticos o coeficiente de Poisson é uma constante material e para viscoelásticos se torna uma função dependente do tempo (ou frequência). Para materiais puramente elásticos ou viscoelásticos, e isotrópicos no estado não deformado, as contrações laterais nas duas direções transversais são idênticas (TSCHOEGL, 1989, p. 528).

Tschoegl, Knauss e Emri (2002) revisaram e discutiram uma série de trabalhos sobre a determinação do coeficiente de Poisson, onde identificaram que, em princípio, se duas funções materiais forem obtidas precisamente num só experimento, com a mesma amostra, ao mesmo tempo e nas mesmas condições, qualquer outra função material poderá ser obtida a partir destas duas. Segundo Pritz (2000), a determinação do Poisson será mais precisa se obtida a partir dos módulos K e G do que com os módulos E e G .

O coeficiente de Poisson, em termos dos módulos E^* e G^* , pode ser expresso por (TSCHOEGL; KNAUSS; EMRI, 2002):

$$\nu^*(\omega) = \frac{E^*(\omega)}{2G^*(\omega)} - 1, \quad (1.63)$$

onde a razão entre as partes imaginária e real é definida por Pritz (2007) como *fator de perda de Poisson*, η_ν . Pritz (2007) demonstra também que η_ν é aproximadamente proporcional à diferença entre os fatores de perda cisalhante (η_G) e volumétrico (η_K), e que normalmente não excede o valor de 0,1 para a maioria dos materiais viscoelásticos, sendo menor que η_G em ao menos uma ordem de grandeza.

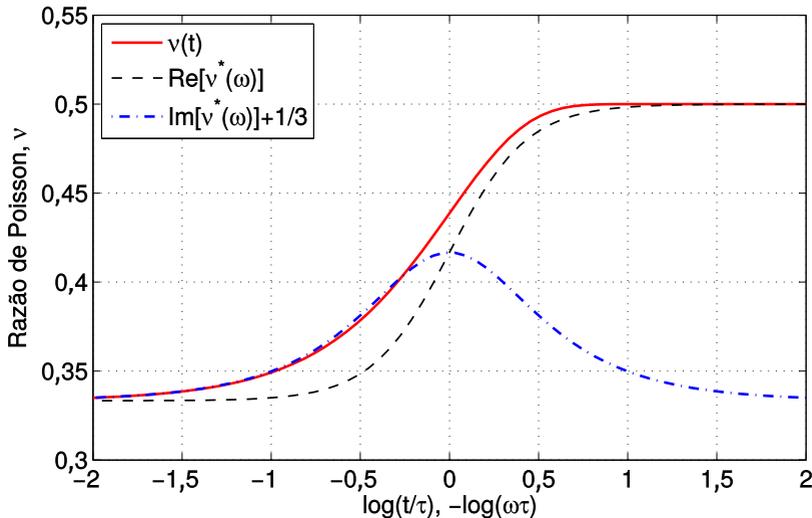
Segundo Tschoegl (1989, p. 530 e 728), o coeficiente de Poisson pode ser obtido diretamente num ensaio de relaxação de tensão ou de fluência. Em um ensaio de tração unidirecional, apesar do material experimentar relaxação de tensão, a contração lateral sofre um atraso com relação à longitudinal, atingindo o estado final somente após um longo tempo, e este efeito possui caráter de um fenômeno de retardação (a deformação transversal é retardada), formalmente análogo à fluência.

Conforme ilustrado na Figura 4, no estado vítreo (na região instantânea), os módulos volumétrico e de cisalhamento são em geral de magnitude grosseiramente comparável. Já na região de equilíbrio (para tempos longos), o volumétrico pode exceder o de cisalhamento em algumas ordens de grandeza. Assim, o maior valor teórico que a razão de Poisson pode alcançar em deformação infinitesimal é $\nu = 1/2$, que corresponde a um material *incompressível* (hipotético) em equilíbrio mecânico. O coeficiente de Poisson vítreo (na região instantânea) é sempre menor que $1/2$ e geralmente possui valor próximo de $1/3$, o que resulta em $K_g = 2,67G_g$. Mott e Roland (2009) mostram que para materiais isotrópicos em geral, a faixa de ν está entre $1/5$ e $1/2$, e que são raros os materiais que apresentam valores fora desta faixa, os quais tendem a ser muito duros ou porosos.

A parte real de $\nu^*(\omega)$ representa a constante de proporcionalidade entre a deformação harmônica aplicada e a componente em fase da contração lateral (ou dilatação). Similarmente, a parte imaginária representa constante de proporcionalidade entre a deformação aplicada e a componente fora de fase da contração lateral (ou dilatação). Na Figura 13 é ilustrada a variação de $\nu(t)$, $\nu'(\omega)$ e $\nu''(\omega)$ para o modelo linear padrão sólido (subseção 1.4.3) (TSCHOEGL, 1989, p. 530).

Lu, Zhang e Knauss (1997) determinaram algumas propriedades viscoelásticas para o material *polimetil-metacrilato* utilizando uma técnica de processamento de imagens (Moiré) para monitorar as deformações do material num ensaio de tração. Os resultados obtidos para o coeficiente de Poisson foram apresentados em função do tempo e da temperatura e dispostos na forma de nomograma de tempo reduzido (Figura 14). Foi observado também que o erro relativo no módulo $K(t)$ é extremamente sensível aos erros nas outras funções [$E(t)$, $G(t)$ e $\nu(t)$]. Por exemplo, na região elástica, para computar K com um erro esperado de 5% utilizando o módulo E também com um erro relativo de 5%, ν deve ser determinado com quatro algarismos significativos.

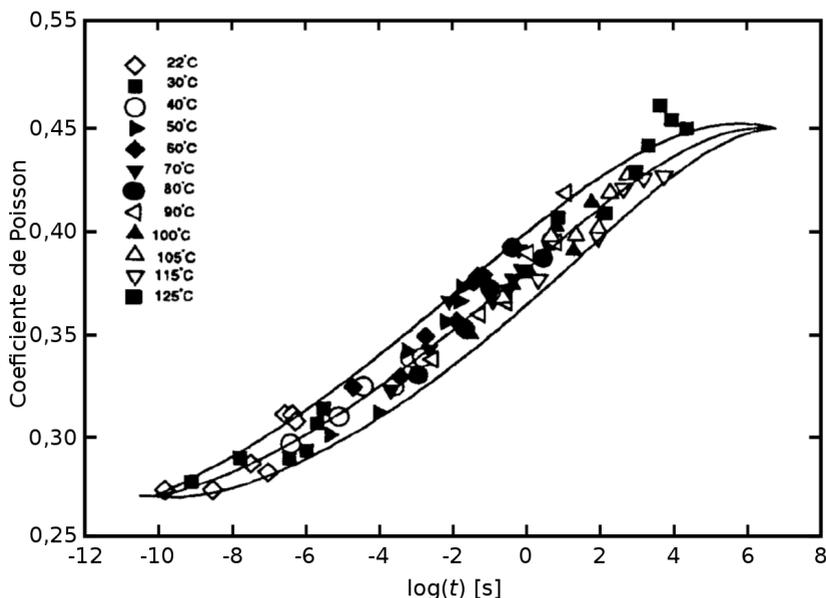
Figura 13 – Razão de Poisson $\nu(t)$, $\nu'(\omega)$ e $\nu''(\omega)$ para o modelo linear padrão sólido.



Fonte: Adaptado de Tschoegl (1989, p. 531).

Uma proposta mais recente, apresentada por Yin, Duan e Zhou (2013), faz uso do cálculo fracionário para representar o coeficiente de Poisson no domínio do tempo. Utilizando analogias com os modelos fracionários convencionais (de Maxwell, de Voigt e o linear padrão sólido), modelos para $\nu(t)$ são desenvolvidos e ajustados satisfatoriamente para dados experimentais obtidos por outros autores. No entanto, até o momento, são poucas as referências que fazem uso do cálculo fracional para a modelagem de $\nu(t)$ ou $\nu(\omega)$. São escassas também as publicações que consideram a variação do Poisson na modelagem dinâmica de vigas ou placas com materiais viscoelásticos.

Figura 14 – Nomograma de tempo reduzido para o coeficiente de Poisson ($T_{ref} = 110^\circ\text{C}$).



Fonte: Modificado de Lu, Zhang e Knauss (1997).

1.7 Síntese

Neste capítulo, as principais propriedades que definem um material viscoelástico foram discutidas. Partindo-se das definições reológicas lineares clássicas de *Hooke* (ideal elástico) e de *Newton* (ideal viscoso), i.e., os extremos clássicos, foi definido que um material viscoelástico possui comportamento intermediário a esses dois ideais.

Algumas relações constitutivas, tensão-deformação, de materiais viscoelásticos foram apresentados na forma de integrais de convolução, também chamadas de convoluções de Stieltjes — que são algumas das representações da superposição de Boltzmann —, onde o núcleo da integral é definido pela função material — módulo de relaxação de

tensão ou de fluência — chamadas também de funções hereditárias ou de memória. Estes módulos, com valores extremos vítreos (instantâneo) e borrachoso (de equilíbrio), definem o comportamento do material com relação ao tempo, seja de tensão ou de deformação. No caso de tensões e deformações dinâmicas, o material é comumente definido pelo módulo complexo, também com valores instantâneo e de equilíbrio, cuja parte real é chamada de módulo de armazenamento e a imaginária de módulo de perda. A razão entre a parte imaginária pela real define o fator de amortecimento do material. O módulo complexo, que se relaciona com os módulos de relaxação e de fluência, define o comportamento do material no domínio da frequência.

Através da analogia com elementos de mola (ideal elástico) e amortecedor (ideal viscoso), vários modelos viscoelásticos clássicos foram apresentados juntamente com suas equações constitutivas. O modelo fracionário derivativo possibilita uma variação mais realista do módulo complexo com uma quantidade de termos muito menor nas equações constitutivas em relação aos modelos generalizados mola-amortecedor. Portanto, este modelo será utilizado neste trabalho para a modelagem do comportamento viscoelástico, o qual tem se destacado muito nos últimos anos. Por fim, a Razão de Poisson dependente do tempo ou da frequência foi apresentada e verificou-se que são raras as publicações que consideram esta dependência na modelagem dinâmica de estruturas com materiais viscoelástico. Assim, será realizada ao final deste trabalho uma breve avaliação do efeito do Poisson, com relação aos valores extremos de $\nu = 0, 2$ e $0, 499$, na resposta dinâmica de uma viga sanduíche.

2 Abordagem pelo Módulo Complexo

Conforme apresentado no Capítulo 1, a descrição do comportamento dos materiais viscoelásticos pode ser facilitada se analisada em termos das relações tensão-deformação. No entanto, esta abordagem pode apresentar dificuldades quando aplicada a problemas complexos. A representação do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos por meio do módulo complexo é uma ferramenta matemática que possui muitas vantagens, pois representa a relação tensão-deformação não em termos de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, mas em termos de funções exponenciais complexas. A maneira como o módulo complexo varia com a temperatura e frequência distingue um material viscoelástico de outro, sendo isto fundamental para a compreensão e modelagem do comportamento desses materiais (JONES, 2001). Neste capítulo são apresentadas as características do módulo complexo com relação à temperatura e frequência, bem como a sua modelagem matemática através do método das variáveis reduzidas e funções de deslocamento. São apresentados, também, os métodos usuais para a determinação experimental do módulo complexo de materiais viscoelásticos, com destaque ao método da viga vibrante, e uma ferramenta de análise de erros dos dados obtidos.

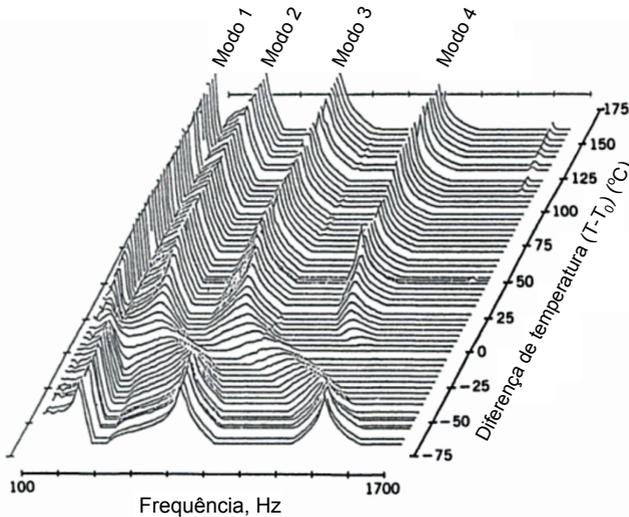
2.1 Efeitos da Temperatura e Frequência

No capítulo anterior foi verificado que os módulos de elasticidade, cisalhamento e de compressibilidade variam com a frequência e com o tempo. Adicionalmente, estas propriedades (com o amortecimento implícito) variam também com a temperatura. Uma ilustração do efeito

da temperatura na resposta em frequência de uma viga com material viscoelástico aplicado é apresentada na Figura 15.

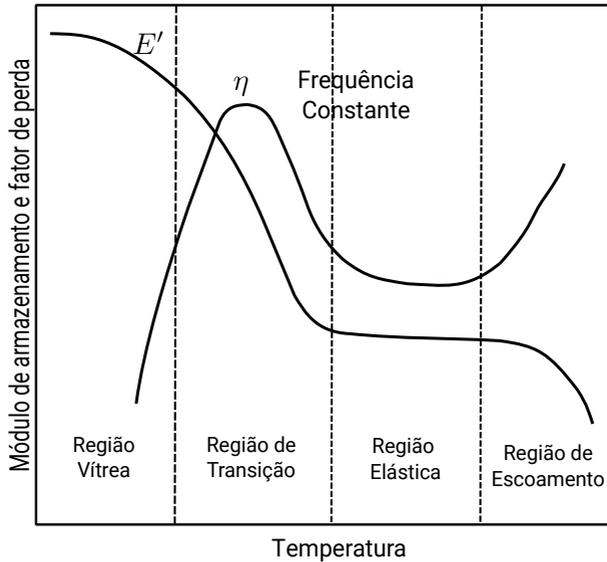
A faixa de temperatura mostrada nesta figura cobre a região onde o material possui boa capacidade de amortecimento nos quatro primeiros modos ressonantes da estrutura. Pode-se perceber que o comportamento modal da estrutura é fortemente afetado pela temperatura e frequência. Portanto, um bom entendimento das variações das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos é necessário antes que um tratamento específico possa ser projetado. A seguir, é apresentado como a frequência e a temperatura afetam as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, representadas pelo módulo complexo, e, subsequentemente, a modelagem matemática de tais efeitos.

Figura 15 – Espectro típico da resposta de uma viga composta em função da temperatura.



Fonte: Modificado de Nashif, Jones e Henderson (1985, p. 88).

Figura 16 – Ilustração da variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura.



Fonte: Modificado de Nashif, Jones e Henderson (1985, p. 90).

2.1.1 Efeitos da Temperatura

A temperatura é geralmente considerada como o fator mais importante que afeta as propriedades de amortecimento de materiais do tipo borracha. Este efeito, ilustrado na Figura 16, é caracterizado por quatro regiões distintas: vítrea, de transição¹, borrachosa e de escoamento (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985, p. 89).

As três primeiras regiões da Figura 16 são as regiões mais utilizadas em projetos de sistemas de amortecimento empregando materiais poliméricos. Na região vítrea o material atinge valores máximos para o

¹ Região de transição, não deve ser confundida com transição vítrea, pois esta se refere à temperatura onde o coeficiente de expansão térmica sofre uma descontinuidade (FERRY, 1980).

módulo de armazenamento e mínimos para o fator de perda. A região de transição é caracterizada por ter um módulo que decresce rapidamente com o aumento da temperatura, enquanto o fator de perda atinge valores máximos. Na região borrachosa ambos o módulo e o fator de perda atingem valores baixos e variam lentamente com a temperatura (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985; JONES, 2001).

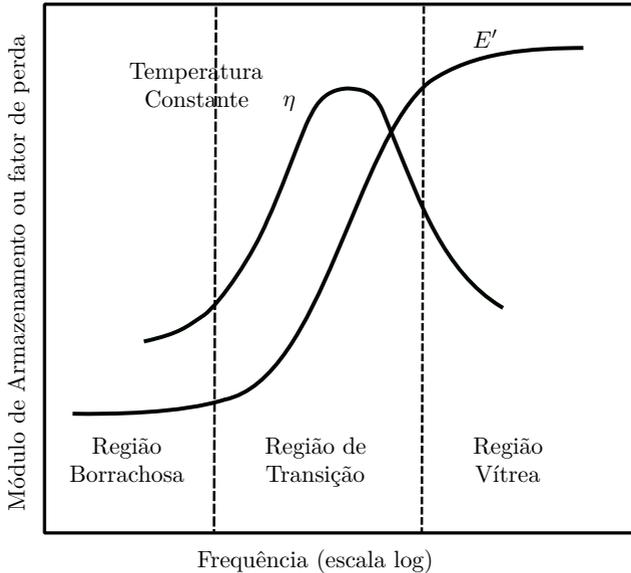
Os parâmetros temperatura de transição vítrea T_g ², temperatura do pico do fator de perda T_0 , módulo vítreo $E_g = E_{max}$, módulo borrachoso $E_e = E_{min}$ (também chamado de equilíbrio), pico de fator de perda η_{max} e a largura da região de transição ΔT caracterizam o módulo complexo de um polímero e também influenciam nas aplicações desses materiais em controle de vibrações. Na região vítrea o módulo de armazenamento de materiais típicos pode atingir valores da ordem de até 10^8 kPa e o fator de perda da ordem de 10^{-3} . Por outro lado, o fator de perda na região de transição pode atingir valores da ordem de 1 ou 2 (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985; JONES, 2001).

2.1.2 Efeitos da Frequência

O efeito da frequência nas propriedades de amortecimento de um material viscoelástico típico, para uma dada temperatura, é ilustrado na Figura 17. O efeito mais importante da frequência no comportamento do módulo de armazenamento é que seus valores são monotonicamente crescentes com a frequência. A taxa de variação instantânea (dE/df) é máxima na região de transição do material e mínima nas regiões vítrea e borrachosa. Por sua vez, o fator de perda cresce com o aumento da frequência desde a região borrachosa até a região de transição, onde alcança valores máximos, e, após, decresce com o aumento da frequência até a região vítrea (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985).

² Transição vítrea, ponto ou região (estreita) na escala de temperatura onde o coeficiente de expansão térmica sofre uma descontinuidade (FERRY, 1980).

Figura 17 – Ilustração da variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência.



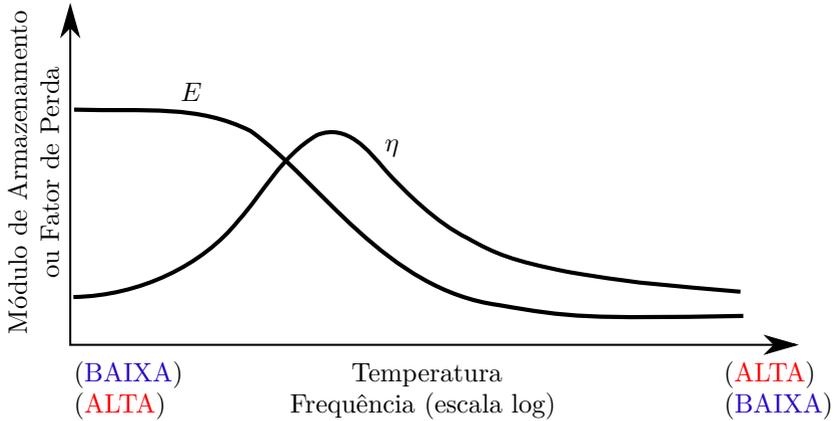
Fonte: Adaptado de Jones (2001, p. 65).

2.1.3 Equivalência Frequência-Temperatura

Conforme pode ser observado nas Figuras 16 e 17, a variação de E' e η são qualitativamente inversas. Materiais viscoelásticos típicos apresentam da região vítrea até a borrachosa uma variação de poucos graus de temperatura, enquanto que a correspondente mudança de frequência envolve várias décadas. Esta equivalência, ilustrada na Figura 18, é um dos aspectos mais importantes da teoria da viscoelasticidade, principalmente à caracterização de materiais, pois fornece a base para o princípio da *superposição frequência-temperatura*³ (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985; JONES, 2001).

³ O princípio da superposição frequência-temperatura, que faz uso das variáveis reduzidas, é conhecido também como simplicidade termoreológica ou redutibilidade frequência-temperatura (FERRY, 1980).

Figura 18 – Ilustração da variação do módulo de armazenamento e do fator de perda em função da temperatura e da frequência.



Fonte: Adaptado de Jones (2001, p. 64-65).

Segundo Istvan e Beranek (2006) este comportamento (ilustrado na Figura 18) pode ser explicado com base nas interações de longas cadeias moleculares que constituem o material polimérico. Em baixas temperaturas as moléculas são relativamente inativas, ou seja, se mantêm rigidamente conectadas, resultando numa rigidez alta e, devido ao baixo movimento relativo entre elas, existe pouca fricção intermolecular para produzir amortecimento. Em altas temperaturas as moléculas se tornam ativas; movem-se facilmente em relação às outras, resultando assim numa rigidez baixa e, devido à baixa interação entre elas, existe pouca dissipação de energia através da fricção intermolecular. Nas médias temperaturas, onde as moléculas possuem movimento relativo/interação intermediário, a rigidez também possui valores intermediários e o fator de perda alcança valores máximos. A mesma discussão se aplica para o efeito da frequência nas propriedades dos materiais, com a inércia molecular retardando a movimentação e interação das moléculas devido ao aumento da frequência. A seguir, é apresentado como esses efeitos inversos, na frequência e na temperatura, se relacionam matematicamente.

2.2 Método das Variáveis Reduzidas

Através do método das variáveis reduzidas medições do módulo complexo, como função da frequência, feitas em diferentes temperaturas, podem ser agrupadas em um único gráfico, chamado de *nomograma de frequência reduzida* ou *curvas mestras*⁴, se for utilizado um fator de deslocamento ($\alpha(T)$) apropriado para cada temperatura. Este recurso permite aumentar a faixa efetiva da escala de frequência obtida nas medições experimentais (FERRY, 1980, p. 266).

Para ilustrar este método, considera-se inicialmente um conjunto hipotético de dados de medição do módulo complexo, obtido com um número limitado de temperaturas e numa faixa limitada de frequência, ilustrado na Figura 19. A hipótese principal do princípio da equivalência frequência-temperatura baseia-se em considerar que o valor do módulo complexo em uma dada frequência f_0 numa dada temperatura de referência T_0 (arbitrária) é idêntico àquele em uma outra frequência f_1 e temperatura T_1 , tal que (JONES, 2001, p. 68):

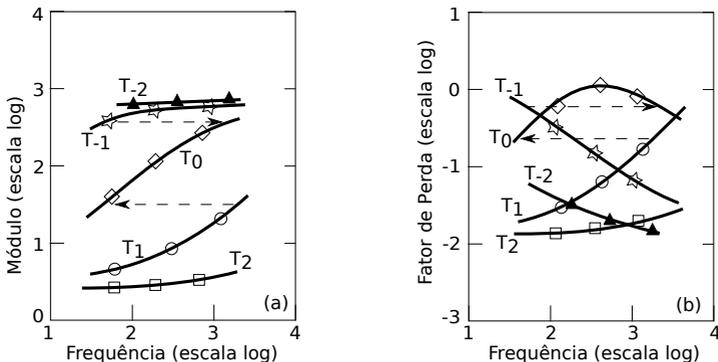
$$E^*(f_0, T_0) = E^*(f_1 \alpha(T_1)), \quad (2.1)$$

sendo $\alpha(T_1)$, que será apresentado em maiores detalhes na subseção 2.2.1, definido como o deslocamento horizontal que deve ser aplicado nos dados medidos na temperatura T_1 para deslocá-los para as curvas medidas na temperatura T_0 , conforme indicado pelas flechas na Figura 19. Ferry (1980, p. 273) menciona que os valores de $\log \alpha(T_i)$ devem ser obtidos separadamente para cada par de funções (módulo de armazenamento e o módulo de perda) e um valor médio deve representar o fator de deslocamento de ambas para cada temperatura T_i .

Uma ilustração da curva de fator de deslocamento, para os dados da Figura 19, são apresentado na Fig. 20(a). Na prática, os valores de $\alpha(T)$ são inicialmente estimados pelas proporções (fatores)

⁴ Curvas mestras, traduzido literalmente da expressão em inglês: *master curves*.

Figura 19 – Ilustração de dados do (a) módulo de armazenamento e (b) fator de perda em função da temperatura e frequência.



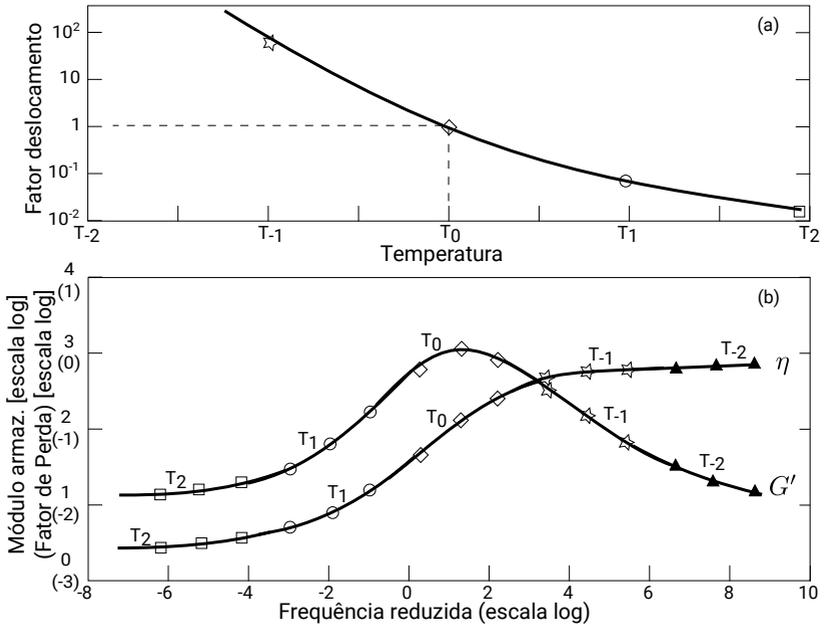
Fonte: Adaptado de Jones (2001, p. 68).

de deslocamentos horizontais dos dados de módulo e do fator de perda à direita ou à esquerda (para “levá-los” à temperatura de referência T_0) na escala logarítmica, garantindo que o deslocamento represente $\alpha(T)$ como um fator aplicado na frequência para qualquer temperatura T . Como resultado deste processo, as curvas se agrupam em duas curvas suaves (uma para o módulo e outra para o fator de perda) sendo possível então representá-las graficamente, em função da frequência reduzida ($f_R = f\alpha(T)$), no diagrama de frequência reduzida, ilustrado na Fig. 20(b) (NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985; JONES, 2001).

Para realizar uma construção mais precisa do nomograma de frequência reduzida, deve ser aplicado um fator de correção⁵ $\rho_0 T_0 / \rho T$ sobre a amplitude $G'(\omega)$ ou $E'(\omega)$, embora este fator se desvie da unidade por uma pequena quantidade associada à expansão térmica do material. A influência deste fator é mais aparente nas regiões onde as curvas representando os módulos são mais planas. Maiores detalhes a respeito deste método são apresentados por Ferry (1980, p. 270).

⁵ O fator de correção $\rho_0 T_0 / \rho T$ pode ser aproximado por T_0 / T , o que resulta numa diferença de aproximadamente 20% (FERRY, 1980, p. 270).

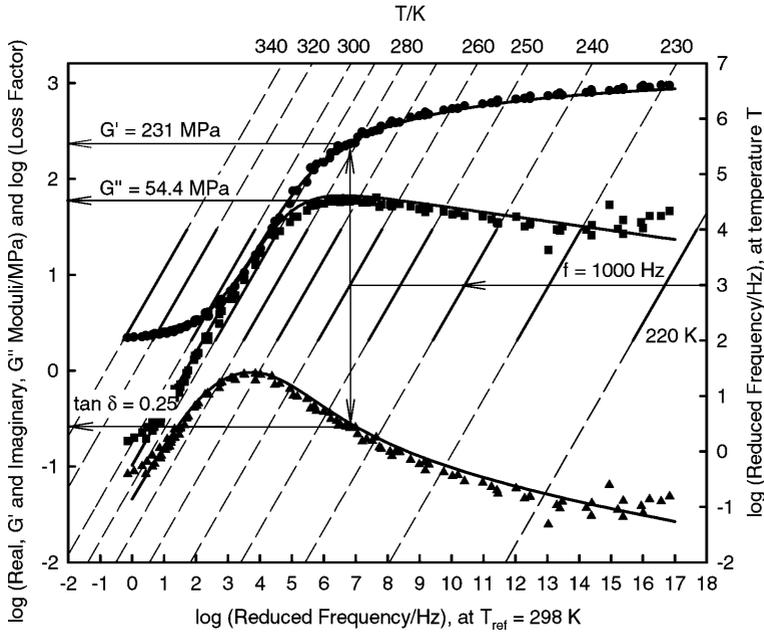
Figura 20 – Ilustração do (a) fator de deslocamento e (b) do nomograma de frequência reduzida dos dados do módulo complexo.



Fonte: Adaptado de Nashif, Jones e Henderson (1985, p. 99).

Esta representação foi padronizada pelas normas ISO 10112 (1991) e ANSI S2.24 (2001) e, na sua forma padrão, deve ser apresentada como na Figura 21. Esta forma dispensa o uso da curva de fator de deslocamento (como na Figura 20(a)) para a leitura dos dados, pois os valores de $\alpha(T)$ estão implícitos nas linhas diagonais de isoterma. Para usar os resultados dos nomogramas, para cada frequência f e temperatura T_i , traça-se uma linha horizontal referente à frequência f até a interseção com a linha oblíqua referente à temperatura T_i . Na interseção, traça-se uma linha vertical de encontro à curva da propriedade desejada. Esta última interseção guiará à leitura do valor da propriedade na escala vertical à esquerda. Este processo é indicado pelas flechas da Figura 21.

Figura 21 – Forma padrão de representação do nomograma de frequência reduzida.



Fonte: ANSI S2.24 (2001).

2.2.1 Relações de Função de Deslocamento

Os valores discretos de fator de deslocamento para cada temperatura, obtidos empiricamente no processo de construção do nomograma de frequência reduzida, podem ser representados por diversas funções contínuas. As relações $\alpha(T)$ mais utilizadas são apresentadas a seguir.

2.2.1.1 Equação de Willians-Landel-Ferry

A relação de Willians-Landel-Ferry (WLF) aproxima os valores de fator de deslocamento em função da temperatura por:

$$\log [\alpha(T)] = \frac{-c_1(T - T_0)}{c_2 + T - T_0}, \quad (2.2)$$

na qual c_1 e c_2 são constantes materiais e T_0 a temperatura de referência (arbitrária). Através do coeficiente angular s e do coeficiente linear i do gráfico com os valores empíricos de $(T - T_0)/\log[\alpha(T)]$ em função de $(T - T_0)$, os valores destas constantes materiais podem ser obtidos por:

$$c_1 = -1/s \quad \text{e} \quad c_2 = i/s. \quad (2.3)$$

Outra forma de se representar a relação WLF é através de:

$$\log[\alpha(T)] = -c_1 \frac{T - T_0}{T - T_\infty}, \quad (2.4)$$

onde T_∞ , chamada de temperatura de Vogel, controla a curvatura de $\alpha(T)$ e seu valor se encontra próximo de 50° abaixo da temperatura de transição vítrea T_g . A forma da curva de $\alpha(T)$, dada pela Equação 2.2 (ou Equação 2.4) independente da escolha de T_0 , pois para cada T_0 têm-se associado os valores de c_1 , c_2 e T_∞ . No entanto, valores de T_0 geralmente se encontram dentro da faixa de temperatura medida.

2.2.1.2 Equação de Arrhenius

Em muitos casos os valores de $\log[\alpha(T)]$ plotados em função de $1/T$, em graus Kelvin, se aproximam de uma reta. Nestes casos, pode ser utilizada a equação linear de Arrhenius, a qual é dada por:

$$\log[\alpha(T)] = c_2 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (2.5)$$

sendo c_2 a inclinação da reta representada no gráfico de $\log[\alpha(T)]$ versus $1/T$ e está relacionada à energia de ativação. Na prática, a diferença entre o “melhor ajuste” da equação de WLF e o “melhor ajuste” da equação de Arrhenius não é tão grande. No entanto, a relação linear de Arrhenius é mais simples de usar (JONES, 2001, p. 71). Outras propostas que visam suprir algumas limitações das relações de WLF e de Arrhenius são apresentadas por Jones (2001, p. 72).

Com posse da função de deslocamento ajustada aos dados discretos, juntamente com o modelo de derivadas fracionárias, o módulo complexo do material viscoelástico pode ser modelado em função da temperatura e da frequência, tal como:

$$E^*(\omega, T) = \frac{E_0 + E_1(i\omega\alpha(T))^\beta}{1 + b(i\omega\alpha(T))^\beta}, \quad (2.6)$$

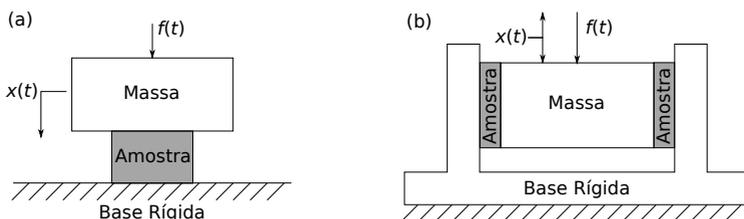
e utilizado, por exemplo, nos cálculos por elementos finitos da resposta de sistemas dinâmicos amortecidos, desde que a obtenção de $\alpha(T)$ seja realizada com um grau de precisão aceitável (JONES, 2001, p. 72).

2.3 Métodos de Medição do Módulo Complexo

Em estruturas com materiais viscoelásticos aplicados, é essencial a caracterização dinâmica dos materiais envolvidos para que a aplicação possa ser projetada para atuar com máximo desempenho. O processo de medição das propriedades dinâmicas (módulos de armazenamento e fator de perda) é, em princípio, uma tarefa relativamente simples. Em geral, deforma-se uma amostra do material em uma maneira definida, tal como cilhamento ou extensão, e medem-se as forças e os deslocamentos resultantes como função do tempo ou da frequência (JONES, 2001).

Existem várias técnicas para determinação das propriedades dinâmicas de materiais de amortecimento, onde cada uma possui as suas próprias limitações. No geral, as medições são divididas em duas classes, a “técnica de medição direta”, e a “indireta”, embora na realidade a maioria das técnicas são de certo modo indiretas, pois tensões são aplicadas e deformações são observadas ao longo do tempo. Essas duas grandezas não são medidas diretamente mas sim obtidas a partir de outras observações. Geralmente, as técnicas de medição direta cobrem uma faixa de frequência entre 0,001 Hz e 1000 Hz e módulos entre 70 kPa e 70 MPa (JONES, 1992).

Figura 22 – Configuração de teste de (a) extensão e (b) cisalhamento.



Fonte: Adaptado de Jones (2001, p. 76-77).

A princípio, um dos métodos mais simples para a medição do módulo complexo é através de um sistema de um grau de liberdade. Neste método, o módulo complexo de um determinado material pode ser medido na configuração de extensão, Figura 22(a), ou na de cisalhamento, Figura 22(b). Para isto, uma força f é aplicada e medida (com um sensor de força) na extremidade livre e outro sensor mede sua resposta x . Se os sinais de força e deslocamento puderem ser medidos precisamente como função da frequência, então o módulo complexo do material pode ser calculado para cada temperatura ensaiada (por exemplo: dentro de uma câmara climatizada) por uma expressão do tipo:

$$F = \vartheta E^* X e^{-i\psi}, \quad (2.7)$$

sendo ϑ uma constante relacionada à geometria da amostra e ψ o ângulo de fase entre a excitação e a resposta (JONES, 2001).

Uma das grandes fontes de incertezas deste método está na fixação da amostra na base — tratada como rígida ideal —, especialmente em baixas temperaturas, quando a amostra se torna bastante rígida, e em altas frequências, quando ressonâncias do sistema de fixação são excitadas (JONES, 2001). Uma alternativa para contornar esta situação é realizar a excitação pela base, fixando por exemplo o sistema sobre um excitador de vibração. Desta forma, as análises podem ser conduzidas em termos da transmissibilidade de movimento. Baseado nesta abordagem,

Espíndola, Neto e Lopes (2005) propõem um método de identificação do módulo complexo utilizando o modelo de derivadas fracionárias.

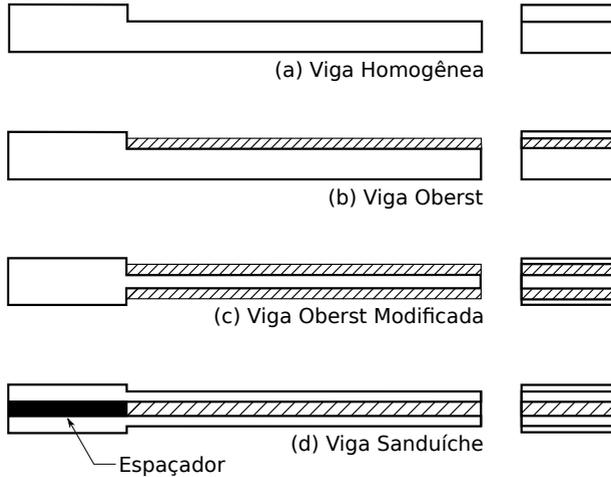
Um método de medição do módulo complexo que tem ganhado destaque nos últimos anos é chamado de análise dinâmica-mecânica, ou simplesmente DMA. Esta técnica tem demonstrado ser relativamente precisa para caracterização de materiais. No entanto, a faixa de frequência é geralmente limitada entre 0,01 e 100 Hz e os custos para a aquisição dos equipamentos e instrumentos são consideravelmente altos. Outro método que ganha destaque também, devido a sua simplicidade e precisão, é o método da viga vibrante, o qual é apresentado a seguir.

2.3.1 Método da Viga Vibrante

O método da viga vibrante é uma técnica que tem sido vastamente aplicada para a caracterização das propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos em configurações de extensão ou cisalhamento. Tipicamente, esta técnica é aplicável para uma faixa de frequência entre 10 e 10000 Hz e módulos entre 70 kPa e 700 MPa (JONES, 1992).

As vantagens deste método inclui a simplicidade dos equipamentos necessários para a condução dos testes com razoável precisão, onde os dados são coletados somente nas frequências de ressonância de uma viga amortecida, sem a necessidade de medição da fase. Várias configurações de vigas podem ser utilizadas, no entanto, as mais empregadas são na condição engastada-livre conhecidas como (a) viga homogênea feita do próprio material a ser caracterizado, para casos de materiais rígidos, (b) viga Oberst, que consiste de uma viga de metal com o material viscoelástico revestido em um dos lados da viga, (c) viga Oberst modificada, também chamada de viga de Van Oort, que consiste de uma viga de metal com material viscoelástico revestido em ambas as faces e (d) a viga sanduíche, onde o material de amortecimento é fixado entre duas vigas idênticas de metal. Tais configurações são ilustradas

Figura 23 – Configurações de testes do método da viga vibrante.



Fonte: Adaptado de Nashif, Jones e Henderson (1985, p. 304).

na Figura 23 e descritas a seguir com base nos textos de Nashif, Jones e Henderson (1985) e Jones (2001).

2.3.2 Viga Homogênea

Este tipo de configuração é utilizada para a medição de propriedades de amortecimento de ligas de metal e compósitos. Tais materiais são geralmente rígidos, capazes de se autossustentar sob flexão e não requerem a combinação com uma viga de metal. O fator de perda η e o módulo E do material de amortecimento podem ser calculados por:

$$\eta_n = \delta\Omega_n, \quad (2.8)$$

e

$$E_n = \frac{\rho b H L^4 \omega_n^2}{a_n^4 I}, \quad (2.9)$$

sendo $\delta\Omega_n = (\Delta\omega_n/\omega_n)$ o fator largura de banda ($\Delta\omega_n$) da resposta na região de ressonância (obtido pelo *Método da banda de Meia Potência*),

$\omega_n = 2\pi f_n$ a frequência de ressonância do modo n , ρ a densidade de massa do material, L o comprimento da viga, I o segundo momento de área e a_n é o número característico do modo n , cujos valores são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Número característico de cada modo da viga para condições de contorno diferentes.

Modo	Engastada-livre	Bi-Engastada	Livre-Livre
1	3,516	22,373	0
2	22,035	61,673	0
3	61,697	120,90	22,373
4	120,90	199,86	61,673
5	199,86	298,56	120,90
6	298,56	-	199,86
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	$(2n-1)^2\pi^2/4$	$(2n+1)^2\pi^2/4$	$(2n-3)^2\pi^2/4$

Fonte – Nashif, Jones e Henderson (1985, p. 308).

Uma forma mais precisa de calcular o amortecimento é dada pela seguinte expressão (MEAD, 1999, p. 62):

$$\delta\Omega_n = \left(1 + \eta_n \sqrt{R^{-1} - 1}\right)^{1/2} - \left(1 - \eta_n \sqrt{R^{-1} - 1}\right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

na qual R é a razão de amplitude. Para baixos valores de amortecimento ($\eta_n^2 \ll 1$) esta equação se reduz a:

$$\eta_n = \frac{\delta\Omega_n}{\sqrt{R^{-2} - 1}}. \quad (2.11)$$

Quando $R = 1/\sqrt{2}$ (que equivale a uma diferença de 3 dB na amplitude do pico de ressonância, ou metade da potência), esta equação se reduz à Equação 2.8. Na prática, é difícil fazer medições precisas da largura de banda para sistemas com baixo amortecimento, o que pode gerar erros na predição do fator de perda. Mead demonstra que para valores altos de amortecimento, ou baixos de R , os erros são também intrínsecos. Martinez-Agirre e Elejabarrieta (2010, 2011) demonstram que no método

da banda de meia potência o erro aumenta exponencialmente com o aumento do nível de amortecimento. Outras alternativas para o cálculo do fator de perda podem ser encontradas em Sun e Lu (1995, p. 24).

2.3.3 Viga Oberst

Esta configuração foi desenvolvida em 1959 para medições de propriedades de amortecimento de materiais de amortecimento relativamente rígidos sob deformação de extensão. Considerando nas equações a seguir o subscrito 1 para se referir à viga de metal e 2 ao material de amortecimento, as propriedades do material de amortecimento podem ser calculadas por:

$$E_2^* = \frac{E_1}{2h_2} \left(\sqrt{(A_2^*)^2 + 4h_2^2(Z^* - 1)} - A_2^* \right), \quad (2.12)$$

na qual h_2 é a razão de espessura entre as camadas da viga (H_2/H_1), E_1 o módulo de elasticidade da viga de metal e os parâmetros Z^* e A_2^* são dados por:

$$Z^* = \left(\frac{\rho_1 b L H_1 + \rho_2 b L H_2}{\rho_1 b L H_1} \right) \left(\frac{f_n}{f_{0n}} \right)^2 (1 + i\eta_n), \quad (2.13)$$

$$A_2^* = 5 + 6h_2 + 3(h_2)^2 - Z^*, \quad (2.14)$$

sendo f_n e η_n , respectivamente, a frequência natural e o fator de perda da viga composta e f_{0n} , a frequência natural da viga de metal (base).

2.3.4 Viga Oberst Modificada

Igualmente à anterior, as propriedades nesta configuração são determinadas com o material sob deformação de extensão. Esta configuração possui grandes vantagens pelo fato de fornecer uma grande simplificação nas equações para os cálculos das propriedades (já que a superfície neutra de flexão se mantém fixa ao longo da linha de centro

da viga de metal) e também supera algumas dificuldades experimentais, como por exemplo as flexões resultantes das diferentes dilatações térmicas na viga Oberst em temperaturas extremas. Assim, as propriedades de amortecimento do material podem ser obtidas através de:

$$E_2 = \frac{E_1(Z_1 - 1)}{(1 + 2h_2)^3 - 1}, \quad (2.15)$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_n Z_1}{Z_1 - 1}, \quad (2.16)$$

$$Z_1 = \frac{\rho_1 b L H_1 + 2\rho_2 b L H_2}{\rho_1 b L H_1} \left(\frac{f_n}{f_{0n}} \right)^2. \quad (2.17)$$

2.3.5 Viga Sanduíche

Esta técnica é utilizada para determinar as propriedades de amortecimento do material sob deformação cisalhante e é geralmente empregada para materiais macios. As equações de RKU, que serão discutidas na subseção 3.3.1.1, são utilizadas de maneira reversa para calcular o parâmetro cisalhante g^* a partir das frequências e fatores de perdas modais. O efeito da flexão na camada viscoelástica intermediária é negligenciado, ou seja, o módulo complexo E_2^* é considerado nulo, para que as equações sejam também simplificadas. De acordo com as equações de RKU com E_2^* negligenciado, a rigidez de flexão da viga composta, engastada-livre, é dada por:

$$(EI)^* = \frac{E_1 H_1^3}{6} + \frac{E_1 H_1 (H_1 + H_2)^2 g^*}{1 + g^*}, \quad (2.18)$$

sendo:

$$g^* = \frac{G_2^* \lambda_n^2}{E_3 H_2 H_3 \pi^2}, \quad (2.19)$$

e

$$\lambda_n = \frac{\pi L}{\xi_n}, \quad (2.20)$$

o semicomprimento de onda efetivo do modo n (ver Capítulo 8 de Jones (2001)). A partir das medições de resposta das duas vigas de metal idênticas ($H_1 = H_3$ e $E_1 = E_3$), realizadas separadamente, e da resposta da viga composta, a rigidez de flexão é dada por:

$$\frac{(EI)^*}{E_1 I_1} = \left(1 + \frac{2\rho_2 H_2}{\rho_1 H_1}\right) \left(\frac{f_n}{f_{0n}}\right)^2 (1 + i\eta_n) = Z_n^*. \quad (2.21)$$

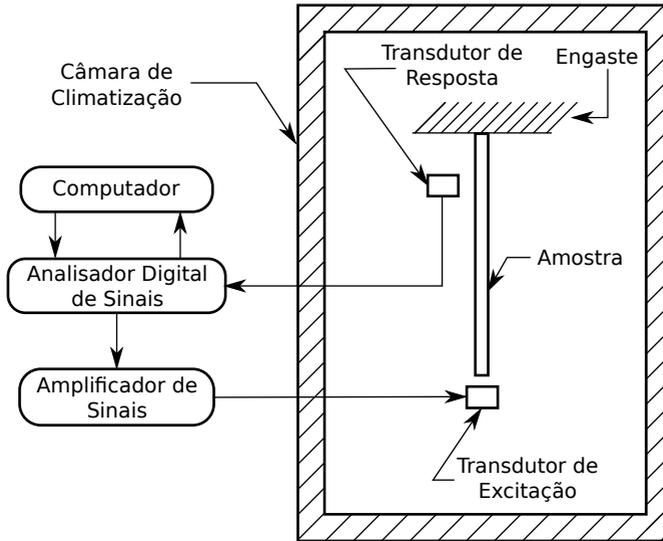
O fator de perda η_n é geralmente medido pelo método da banda de meia potência, ou pelo método de ajuste de curva de sistemas de um ou mais graus de liberdade. A partir das Equações 2.18 e 2.21 pode-se obter a seguinte expressão para o módulo complexo cisalhante:

$$G_2^* = \left(\frac{Z_n^* - 2}{12(1 + h_2)^2 - 2Z_n^* + 4}\right) \left(\frac{E_1 H_2 H_3 \pi^2}{\lambda_n^2}\right). \quad (2.22)$$

Para realizar as medições das propriedades de amortecimento dos materiais utilizando algumas das configurações de viga da Figura 23, geralmente é necessária a utilização de dois tipos de transdutores, um para aplicar a força de excitação e outro para medir a resposta da viga. Por muitos anos, a viga tem sido excitada por um transdutor eletromagnético atuando (sem contato) em um pequeno disco magnético (ímã permanente) colado na extremidade livre da viga, e a resposta medida por outro transdutor (sem contato) próximo ao engaste. Mais recentemente, outros meios de excitação e medição de resposta se tornaram mais acessíveis. Por exemplo, a resposta pode ser medida por acelerômetros leves que são mais sensíveis em altas frequências que os eletromagnéticos. Já a excitação pode ser provida por um pequeno excitador eletrodinâmico ou eletromagnético ou ainda por um pequeno martelo com um transdutor de força anexado. No caso do uso do disco magnético e de acelerômetro fixado à viga, a massa efetiva desses elementos deve ser considerada nos cálculos (ver Jones (2001, pag. 93-98))

A viga deve ser montada em base de grande impedância mecânica a fim de proporcionar uma condição confiável de engaste. Ge-

Figura 24 – Aparato de medição pelo método da viga vibrante.



Fonte: Modificado de Jones (2001, p. 91).

ralmente, emprega-se um sinal de excitação do tipo senoidal ou ruído branco no excitador. Para avaliar as propriedades de amortecimento em função da temperatura, monta-se o aparato experimental dentro de uma câmara com temperatura controlada, conforme ilustrado na Figura 24.

Para todos os tipos de vigas, a resposta das amostras deve ser medida em função da frequência. A partir do espectro de resposta, as frequências e os valores de amortecimento dos vários modos de vibração da amostra são determinados para cada temperatura. Variando a temperatura na câmara, estes testes podem ser repetidos para investigar o efeito da temperatura nas propriedades do material.

As configurações Oberst e Oberst modificada são geralmente usadas para a medição de materiais rígidos, com módulo $E \geq 100$ MPa e a configuração sanduíche para materiais com módulo $G \leq 100$ MPa,

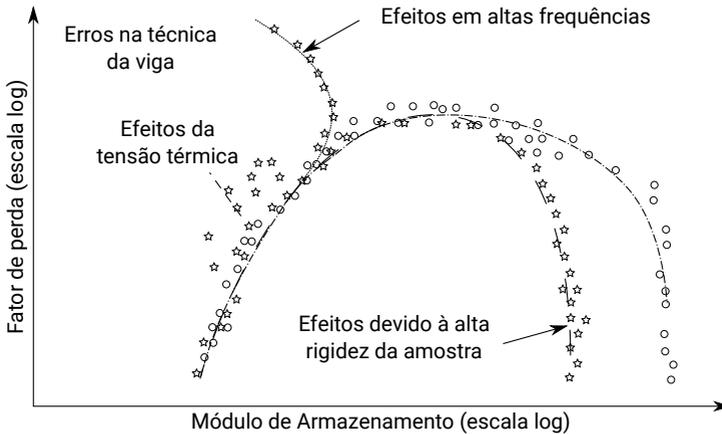
na faixa de frequência de 50 a 5000 Hz. O método da viga vibrante foi padronizado pela norma ASTM E756 (2005) e tem sido amplamente utilizado por empresas fabricantes de materiais de amortecimento.

2.4 Identificação de Erros de Medição via Wicket Plot

Quando um conjunto de dados de módulo complexo são obtidos para um material específico em uma faixa de temperatura e frequência, frequentemente não se tem a oportunidade de examinar todas as fontes de erros possíveis. O gráfico de $\log(\eta)$ ou $\log(E'')$ em função do $\log(E')$, conhecido como “wicket plot”, tem se tornado uma ferramenta para análise de erros dos dados medidos, uma vez que dados errôneos podem ser identificados. Neste gráfico, as variáveis temperatura e frequência são eliminadas, ao menos por um instante (JONES, 1992).

Na Figura 25 é ilustrado um gráfico de wicket plot idealizado. Para que uma sequência de dados seja considerada “boa”, esta deverá contornar uma única tendência, independente da temperatura ou da frequência com que foram medidos. Pontos, ou conjuntos de pontos, que se afastam da tendência principal são questionáveis. Por exemplo, dados de testes obtidos pela técnica de rigidez direta, tal como sistemas de um grau de liberdade, frequentemente têm uma tendência de “descer” da sequência principal para valores altos do módulo de armazenamento pelo fato da rigidez da amostra se aproximar ou exceder a rigidez do sistema de medição. Este tipo de erro é considerado como sistemático. Dados obtidos por técnicas indiretas, como o método da viga vibrante, frequentemente tenderão a se desviar da sequência principal para baixos valores do módulo por causa das amplificações dos erros. Esses erros são classificados como aleatórios (JONES, 1992, 2001). Em princípio não existe nenhum método de medição capaz de cobrir toda a faixa de frequência de interesse. Um método e conjunto de aparato experimental pode ser excelente para a medição em baixas frequência e inadequado

Figura 25 – Wicket Plot idealizado mostrando os erros típicos.



Fonte: Modificado de Jones (1992).

para altas (MEAD, 1999, p. 362).

Análises de pontos “suspeitos” dos dados de medição do módulo complexo frequentemente fornecem justificativa suficiente para rejeitar tais pontos. Às vezes pontos individuais se desviam da sequência principal por nenhuma razão aparente, mas devem ser rejeitados mesmo sem documentar a causa. Se os dados medidos para um material particular não estiverem com erros mas mesmo assim se localizarem fora da sequência principal, pode-se concluir que tais dados não podem ser utilizados no princípio da superposição frequência-temperatura. Esta informação pode ser útil e evitar que esforços desnecessários sejam aplicados à análise (JONES,1992, 2001).

2.5 Síntese

Neste capítulo foram expressos os principais fatores que influenciam o módulo complexo de um material viscoelástico. Verificou-se que

a maneira como o módulo complexo varia em função da temperatura e em função da frequência é qualitativamente inversa. Este fato permite que o princípio da superposição temperatura-frequência seja aplicado com o auxílio do método das variáveis reduzidas. Com isto, os valores do módulo complexo em função da frequência, para temperaturas diferentes, podem ser agrupados num único gráfico, chamado de nomograma de frequência reduzida. Este artifício, que permite aumentar a faixa efetiva da escala de frequência, será utilizado neste trabalho tanto para a modelagem e caracterização do módulo complexo dos materiais que serão analisados, bem como para a descrição dos parâmetros modais das vigas (Capítulo 3) com os respectivos materiais. Este recurso matemático é talvez um dos itens mais importante para o desenvolvimento deste trabalho, no qual o método modal (Capítulo 3) é proposto para a modelagem dos parâmetros modais de estruturas com materiais viscoelásticos, considerando as variações da frequência e da temperatura. Na sequência, foram apresentados alguns métodos de medição do módulo complexo, com ênfase maior para o método da viga vibrante, que será utilizado neste trabalho para a caracterização das propriedades da viga base e também para a caracterização de uma amostra, na configuração Oberst, para fins de comparação com os resultados obtidos com este estudo. O aparato experimental e procedimentos experimentais indicado por este método será utilizado para as medições das respostas das vigas, porém, a caracterização dos materiais nas várias temperaturas será realizada de acordo com o procedimento proposto neste trabalho. Por fim, foi discutido como gerar e interpretar o diagrama “Wicket Plot”, ferramenta que será utilizada neste trabalho para identificar possíveis erros de medição.

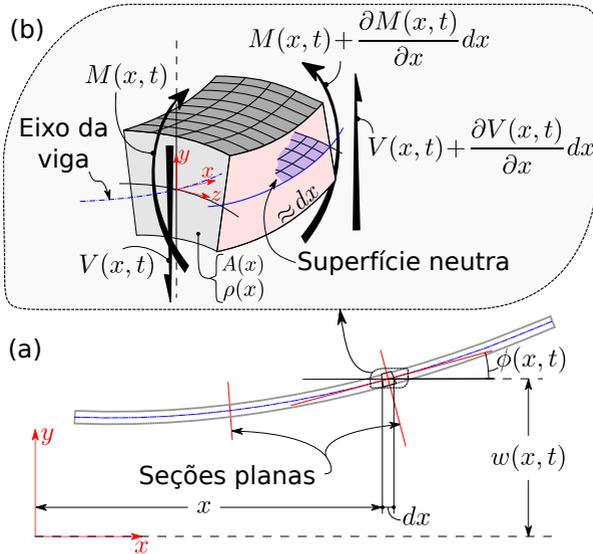
3 Vibração de Vigas

Este capítulo tem por objetivo abordar algumas considerações sobre vibração de vigas. Inicialmente, é apresentada brevemente a *Teoria de Euler-Bernoulli* para vigas uniformes. As hipóteses implícitas nesta teoria são: comprimento de onda de flexão muito maior que a espessura da seção transversal e inércia de rotação e deformações cisalhantes desprezíveis. Se a razão entre espessura e comprimento for relativamente grande, ou se a viga for excitada em frequências altas, mesmo quando esta razão é mantida, a teoria de Euler-Bernoulli se torna inadequada. Assim, teorias mais elaboradas devem ser empregadas, como a de Timoshenko, apresentada na sequência, e a de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem, apresentada na seção 3.2. Na seção 3.3 são apresentadas algumas soluções de engenharia para dissipação de energia vibratória de superfícies vibrantes pelo uso de materiais viscoelásticos na forma de laminados (multicamadas), bem como a modelagem dessas aplicações.

3.1 Teorias Clássicas

A teoria de Euler-Bernoulli, é uma das teorias de viga (ou modelo) mais utilizadas devido a sua simplicidade e precisão para muitos problemas de engenharia. Este modelo, que inclui a energia de deformação devida à flexão e a energia cinética devida ao deslocamento transversal, tende a superestimar as frequências naturais, principalmente para os modos mais elevados (ou pequenos comprimentos de onda) mas, apresenta resultados precisos para vigas delgadas. As hipóteses envolvidas nesta teoria, ilustrada na Figura 26, considera que os deslocamentos transversais $w(x, t)$ da viga sejam pequenos, a seção transversal se mantém plana quando em flexão e normal às fibras longitudinais e o ângulo

Figura 26 – (a) Viga vibrando sob flexão (b) Forças cortantes e momentos fletores atuando num elemento diferencial da viga.



Fonte: Criado pelo autor.

de rotação $\phi(x,t)$ de cada elemento (devido ao momento fletor $M(x,t)$) é pequeno e coincidente com a inclinação da linha neutra. Com isto, a equação de movimento (ou da onda) da viga de Euler-Bernoulli pode ser expressa por (MEIROVITCH, 1996, p. 371):

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x,t)I_{xz}(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (3.1)$$

na qual $\rho(x)$ é a densidade do material e $I_{xz}(x)$ o segundo momento de inércia da área $A(x)$, normal ao eixo x . Weaver Jr., Timoshenko e Young (1990, p. 422-432) e Snowdon (1968, p. 200-230) apresentam soluções para esta equação para algumas condições de contorno.

A teoria de viga de Timoshenko apresenta uma solução à predição da resposta em altas frequências, ou para vigas espessas (ou curtas),

adicionando os efeitos das deformações cisalhantes e da inércia rotatória à teoria de Euler-Bernoulli. Conforme ilustrado na Figura 27, esta teoria considera que a inclinação da linha neutra da viga não mais será igual ao ângulo de rotação $\phi(x, t)$ de cada elemento, mas sim a soma deste com o ângulo de distorção cisalhante $\gamma(x, t)$ — relacionado à tensão cisalhante média. Assim, a equação de movimento proposta por esta teoria pode ser escrita por (TIMOSHENKO, 1921):

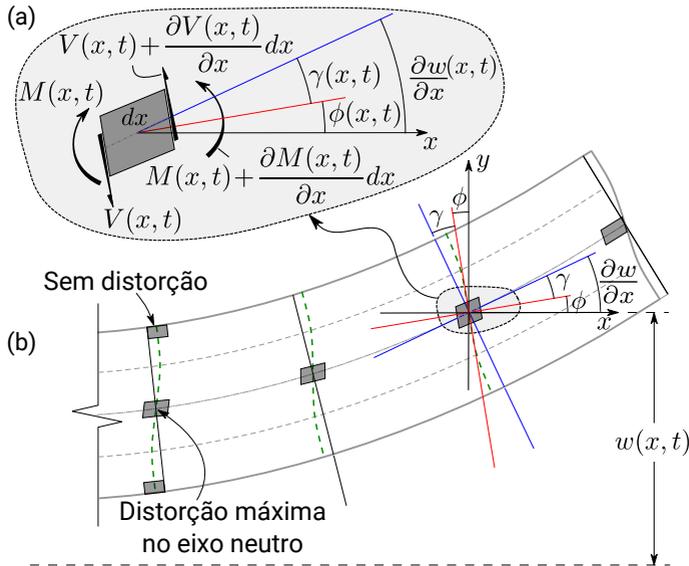
$$E(x, t) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\rho(x)}{k_{A,z}^2(x)} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \rho(x) \left[\frac{E(x, t)}{\kappa G(x, t)} + 1 \right] \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2(x)}{\kappa G(x, t)} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} = 0. \quad (3.2)$$

sendo $k_{A,z}(x)$ o raio de giro da área em torno do eixo z e κ a constante de cisalhamento de Timoshenko. (Para uma seção retangular Timoshenko (1922) aponta $\kappa = 8/9$ e outras propostas (COWPER, 1966; KANEKO, 1975; STEPHEN, 1978; HUTCHINSON, 2001) sugerem que κ pode possuir dependência não só da seção transversal mas também do coeficiente de Poisson ν e da frequência). Algumas propostas de solução desta equação são apresentadas por Snowdon (1968, p. 337-363) e Weaver Jr., Timoshenko e Young (1990, p. 435).

Apesar da teoria de Timoshenko considerar uma deformação cisalhante média ao longo da seção da viga, sabe-se da teoria elementar de vigas (POPOV, 2005, p. 223) que a tensão cisalhante transversal varia parabolicamente através da espessura, apresentando valores nulos nas faces externas, conforme ilustrado na Figura 27(b). Além do mais, é apresentado em Heyliger e Reddy (1988) que κ depende ainda das condições de contorno, do carregamento e também que sua dependência com relação à frequência aumenta levemente¹ à medida que a razão L/h diminui. Portanto, assim como outras teorias, a teoria de vigas de

¹ Por exemplo, em comparação à teoria de ordem superior, a diferença na frequência natural do quinto modo de uma viga bi-apoiada com razão $L/h = 4$ é de somente 1,2% se κ é mantido constante e igual a 5/6 (HEYLIGER; REDDY, 1988).

Figura 27 – Esforços num elemento diferencial da viga de Timoshenko.



Fonte: Adaptado de Popov (2005, p. 223).

Timoshenko possui limitações. Uma outra teoria capaz de prever a resposta da viga com um pouco mais de precisão e mais consistente que essas duas anteriores é apresentada a seguir.

3.2 Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem

As teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko descrevem de maneira adequada o comportamento cinemático da maioria das vigas. Já a *Teoria de Deformação Cisalhante de Terceira Ordem* (TSDT), ou de ordem superior, descrita por Heyliger e Reddy (1988), é empregada com maior frequência na análise de materiais compostos e pode representar melhor o comportamento cinemático das vigas, a distribuição do campo de tensão ao longo da espessura e não requer fator de correção cisalhante — sendo isto uma deficiência da teoria de Timoshenko na

análise dinâmica, pois este fator possui dependência tanto da frequência como de outros fatores como carregamento e condições de contorno. Por outro lado, essa teoria envolve tensões resultantes de ordem superior que são de difícil interpretação física e requer um esforço consideravelmente maior para a resolução das Equações (REDDY, 2003, p. 671).

A TSDT é baseada nas mesmas hipóteses das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, exceto que a seção transversal da viga quando deformada não mais se mantém plana e/ou normal à superfície neutra, mas sim distorcida com uma variação cúbica ao longo da espessura, conforme última ilustração na Figura 28.

O campo de deslocamento axial da viga proposto nesta teoria é dado por:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) + z \left[\phi(x, t) - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \left(\phi(x, t) + \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right) \right], \quad (3.3)$$

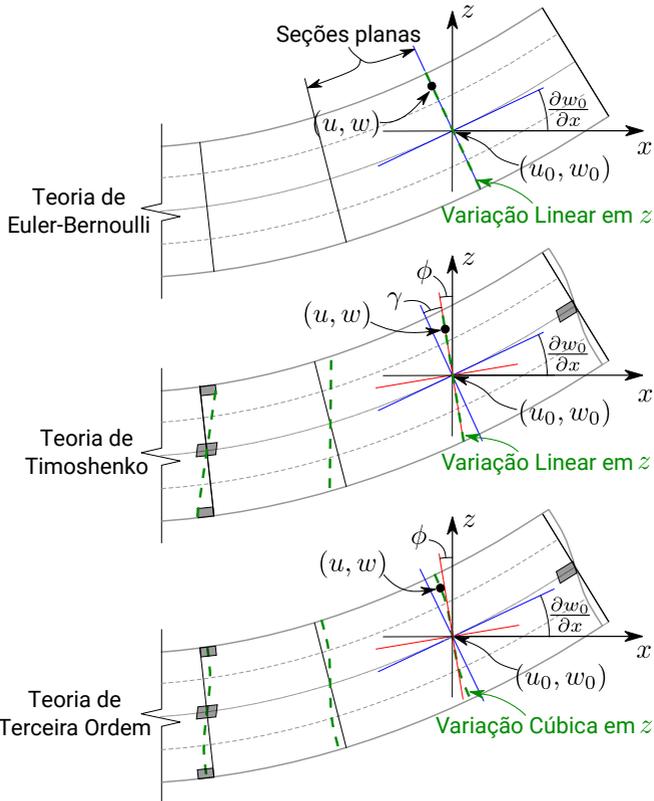
na qual u_0 e w_0 são os deslocamentos axial e transversal na linha de centro da viga, ϕ representa a rotação de uma seção normal ao eixo da viga e h a sua espessura. Com isto, os campos de deformação podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right], \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para considerar os efeitos de grandes deflexões e rotações, devem ser incluídas nesta equação as componentes de deformação não-linear de von Kármán. Utilizando a Equação 3.4 em conjunto com as relações tensão-deformação de Hooke para tensão normal e cisalhante no *Princípio de Hamilton*², são obtidas as equações de movimento da viga, também

² No estudo da mecânica de partículas, a extremização da diferença entre as energias cinética e potencial, i.e., o Lagrangeano, integrada entre dois pontos sobre uma família admissível de caminhos resulta no caminho correto como determinado pela Lei de Newton. Este é o *Princípio de Hamilton* (DYM; SHAMES, 1973, p. 70).

Figura 28 – Ilustração da deformação de uma viga de acordo com as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko e TSDT.



Fonte: Adaptado de Reddy (2003, p. 672) e Popov (2005, p. 223).

chamadas de equações de Euler-Lagrange, dadas por:

$$\begin{aligned}
 AEu'' + f &= A\rho\ddot{u}, \\
 [AEw'u' + \frac{8}{15}GA(\phi + w')] &' - EI(\frac{1}{21}w^{iv} - \frac{16}{105}\phi''') + q \\
 &= \rho A\ddot{w} - \rho I(\frac{1}{21}\ddot{w}''' - \frac{16}{105}\ddot{\phi}'), \\
 16w'''' - 68\phi'' + 56\frac{GA}{EI}(\phi + w') &= 16\frac{\rho}{E}\ddot{w}' - 68\ddot{\phi},
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

no domínio $0 < x < L$, e as respectivas condições de contorno

$$\begin{array}{ll}
 \text{naturais :} & \text{essenciais :} \\
 AEu' & u_0, \\
 AEw'u' + \frac{8}{15}GA(\phi + w') & w_0, \\
 -EI\left(\frac{1}{21}w'' - \frac{16}{105}\phi'\right) - \rho I\left(\frac{1}{21}\ddot{w}' - \frac{16}{105}\ddot{\phi}\right) & \\
 \frac{1}{21}EIw'' - \frac{16}{105}EI\phi' & w'_0, \\
 \frac{68}{105}EI\phi' + \frac{16}{105}EIw'' & \phi,
 \end{array} \tag{3.6}$$

sendo E , G , ρ , o momento de inércia I da viga e a área A da seção transversal considerados como constantes (em relação à coordenada x).

O campo de deslocamento dado pela Equação 3.3 resulta numa distribuição parabólica para a deformação cisalhante transversal e condições de tensões nula nas superfícies inferior e superior. Portanto, não há a necessidade de corrigir a tensão cisalhante. Uma desvantagem de utilizar um campo de deslocamento com grau elevado, em comparação à teoria de Timoshenko, é a presença da derivada de ordem superior na deflexão transversal, o que requer na área de elementos finitos o desenvolvimento de elementos com continuidade C^1 . Segundo Heyliger e Reddy (1988), a distribuição parabólica de tensão cisalhante deve ser considerada somente para baixas frequências, pois em altas frequências esta distribuição sofre alterações.

3.3 Vigas com Camadas Restritoras

Uma forma efetiva de reduzir os níveis vibração de estruturas com superfícies vibrantes, como placas e vigas é através do tratamento destas superfícies com materiais viscoelásticos. Quando uma camada de material de amortecimento é adicionada a uma superfície vibrante, a energia vibratória é dissipada em virtude das flutuações cíclicas da deformação normal e cisalhante (MEAD, 1999, p. 367).

Quando uma camada de material de amortecimento é adicionada à superfície vibrante livre, tem-se o tratamento de amortecimento com *camada não-restrita*, ou livre. Por outro lado, quando a placa ou viga é formada por duas camadas finas com uma intermediária de amortecimento, tal como um sanduíche, tem-se o tratamento de amortecimento com *camada restrita* ou *sanduíche*. Na primeira configuração a energia é dissipada basicamente pelas deformações normais — por isso a necessidade de localizar o material o mais afastado possível da superfície neutra —, e na segunda, caso as camadas externas sejam idênticas, é dissipada principalmente pelo cisalhamento — daí a necessidade de localizar o material o mais próximo possível da superfície neutra neste tipo de aplicação. Caso as camadas externas sejam assimétricas, a dissipação ocorre pelas duas formas de deformação, normal e cisalhante (MEAD, 1999, p. 367). Embora hajam muitas publicações a respeito deste assunto, o livro de Nashif, Jones e Henderson (1985) e o de Jones (2001) apresentam detalhes relevantes sobre estas duas técnicas.

As configurações de camada restrita e não-restrita são os dois tipos básicos de tratamento de amortecimento, sendo muito empregadas nas indústrias aeroespaciais para a redução do ruído interno de aeronaves. Assim, grandes fabricantes como 3M, Hutchinson Aerospace e SMAC têm se empenhado na fabricação e no desenvolvimento de materiais cada vez mais eficientes e viáveis. Para isto, é fundamental a utilização de modelos matemáticos e/ou numéricos para analisar os fenômenos envolvidos, gerar novas soluções e, em muitos casos, realizar a caracterização do material através de técnicas de ajuste de modelos.

A seguir são apresentados alguns modelos analíticos para descrição do comportamento dinâmico de vigas com tratamento de amortecimento em três camadas, simétricas ou não-simétricas. Na sequência, são apresentadas alternativas numéricas para a representação de tal comportamento para vigas com geometria, carregamento e condições de contorno mais complexas.

3.3.1 Modelos Analíticos

3.3.1.1 Equações de Ross-Kerwin-Ungar – RKU

Uma das teorias pioneiras, mais simples e mais utilizada para análise de vigas com tratamento de amortecimento por camada restrita, foi desenvolvida por Ross, Ungar e Kerwin (1959 apud NASHIF; JONES; HENDERSON, 1985, p. 259) e é comumente chamada de análise RKU ou equações de RKU. Embora esta análise tenha sido desenvolvida para prever a resposta de sistemas com três camadas, tem sido amplamente utilizada de maneira reversa para a determinação das propriedades do material de amortecimento, conforme discutido na subseção 2.3.1. As principais hipóteses envolvidas no desenvolvimento desta teoria são (KERWIN, 1959; SUN; LU, 1995):

- a maior parte da energia dissipada é devida ao cisalhamento da camada intermediária, cujo módulo cisalhante é complexo;
- a localização do eixo neutro da viga composta varia com a frequência;
- o módulo de elasticidade do material viscoelástico é pequeno em comparação aos módulos das camadas elásticas (externas);
- as camadas se mantêm perfeitamente unidas e a mudança na espessura do material viscoelástico é desprezível;
- a viga é bi-apoiada e vibra na frequência natural, ou é infinitamente longa tal que os efeitos das extremidades sejam desprezíveis.

A rigidez de flexão $(EI)^*$, do sistema de três camadas da Figura 29, é dada por:

$$\begin{aligned} (EI)^* &= E_1 H_1 D^2 + E_2^* H_2 (H_{21} - D)^2 + E_3 H_3 (H_{31} - D)^2 \\ &- \left[\frac{E_2^* H_2}{2} (H_{21} - D) + E_3 H_3 (H_{31} - D) \right] \left(\frac{H_{31} - D}{1 + g^*} \right) \\ &- \frac{E_2^* H_2^2}{12} \left(\frac{H_{31} - D}{1 + g^*} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{E_i H_i^3}{12}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

na qual a distância D , que define a posição da superfície neutra, é dada por:

$$D = \frac{E_2^* H_2 (H_{21} - H_{31}/2) + g^* (E_2^* H_2 H_{21} + E_3 H_3 H_{31})}{E_1 H_1 + E_2^* H_2/2 + g^* (E_1 H_1 + E_2^* H_2 + E_3 H_3)}, \quad (3.8)$$

e os demais parâmetros por:

$$H_{31} = \frac{H_1 + H_3}{2} + H_2, \quad (3.9)$$

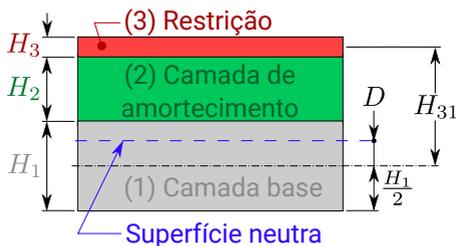
$$H_{21} = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad (3.10)$$

$$g^* = \frac{G_2^* \lambda_n^2}{E_3 H_3 H_2 \pi^2}, \quad (3.11)$$

sendo g^* o parâmetro de cisalhamento e λ_n o semi-comprimento de onda da viga (L/n , i.e., comprimento/número do modo). Para outras condições de contorno, algumas modificações devem ser feitas nas equações, principalmente com relação aos primeiros modos, conforme é apresentado por (JONES, 2001, p. 287) e em maiores detalhes por Rao (1978).

Com posse da rigidez de flexão $(EI)^*$ pode-se, então, determinar as frequências naturais e fatores de perda da viga composta, usando as equações da teoria de Euler-Bernoulli, ou, de maneira inversa, obter as propriedades do material de amortecimento. Esta teoria é bastante útil para avaliar a influência dos seus parâmetros (material e/ou geométrico) no comportamento da viga composta.

Figura 29 – Tratamento de amortecimento com camada restrita.



Fonte: Adaptado de Kerwin (1959).

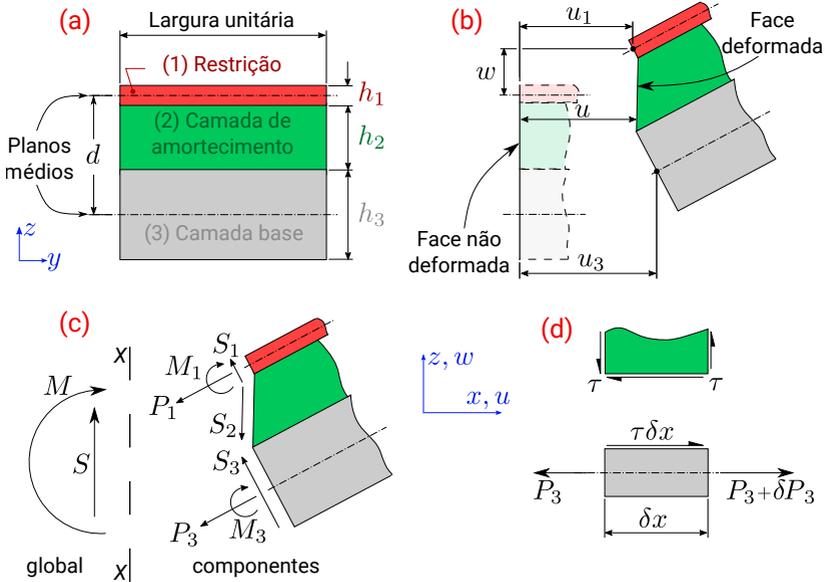
3.3.1.2 Equações de Mead e Markus

Numa extensão ao trabalho de Ross, Ungar e Kerwin (1959), considerando praticamente as mesmas hipóteses destes, exceto a de que a viga é bi-apoiada, DiTaranto (1965) desenvolveu um método para análise de vigas com camada restrita para diversas condições de contorno. Nesta análise, a equação de movimento — uma equação diferencial de sexta ordem — é derivada em termos dos deslocamentos longitudinais, considerando vibrações livres, e resolvida para a determinação das frequências naturais e fatores de perda, sendo demonstrado que a relação entre estes dois parâmetros modais independe das condições de contorno.

Numa análise similar a esta, Mead e Markus (1969) demonstraram que as frequências naturais e modos discutidos por DiTaranto constituem uma classe especial de frequências de *ressonância* e modos *forçados* de vibração da viga composta, e que a utilidade destes modos está no fato de estarem completamente desacoplados, o que simplifica grandemente as equações de movimento da viga. Assim, com base neste trabalho, é apresentada a seguir a derivação da equação diferencial do movimento de vigas com camada restrita e as expressões das condições de contorno em termos do deslocamento transversal w , o que permite uma compreensão física mais clara do problema. Nesta derivação, são consideradas as mesmas hipóteses utilizadas por DiTaranto (1965).

Figura 30 – Tratamento de amortecimento com camada restrita.

- (a) Dimensões da seção transversal; (b) Deslocamentos do sistema; (c) Forças e momentos atuando numa seção; (d) Forças longitudinais na camada base.



Fonte: Adaptado de Mead e Markus (1969).

Considere-se uma viga sanduíche com largura unitária e dimensões apresentadas na Figura 30(a). As camadas externas, elásticas, possuem módulos de elasticidade E_1 e E_2 , e a intermediária, viscoelástica, módulo cisalhante $G^* = G(1 + i\eta) = G' + iG''$. O deslocamento transversal é representado por w e os longitudinais de cada camada por u_1 , u e u_3 , sendo u a componente de deslocamento em qualquer ponto do material viscoelástico, conforme ilustrado na Figura 30(b). A hipótese de tensão longitudinal nula no núcleo, i.e., no material viscoelástico, resulta numa deformação cisalhante constante, que é dada por:

$$\tau = G^* \gamma = G^* \left(\frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right), \quad (3.12)$$

sendo $d = h_2 + (h_1 + h_2)/2$. A força cortante total S numa seção XX (ver Figura 30(c)) consiste na soma das três componentes, dada por:

$$\begin{aligned} S &= \overbrace{\frac{E_1 h_1^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}}^{S_1} - \overbrace{\tau d}^{S_2} + \overbrace{\frac{E_3 h_3^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}}^{S_3} \\ &= D_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - G^* d \left(\frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

na qual $D_t = (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3)/12$. Considera-se que a tensão cisalhante do núcleo atua entre os planos médios das camadas externas e não somente na espessura do viscoelástico.

Fazendo um balanço das forças longitudinais que atuam no eixo das camadas externas, numa dada seção da viga, tem-se:

$$\overbrace{E_1 h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}}^{P_1} = - \overbrace{E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}}^{P_3}, \quad (3.14)$$

ou ainda:

$$E_1 h_1 u_1 = -E_3 h_3 u_3. \quad (3.15)$$

Com auxílio das Equações 3.13 e 3.14, o carregamento transversal, p , pode ser descrito por:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = D_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{G^* d^2}{h_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{G^* d}{h_2} \left(\frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_1 h_1} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad (3.16)$$

ou na seguinte forma reduzida:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - g^* Y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g^* \frac{E_3 h_3 d}{D_t} \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{p}{D_t}, \quad (3.17)$$

sendo g^* , chamado de *parâmetro de cisalhamento complexo*, dado por:

$$g^* = \frac{G^*}{h_2} \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right), \quad (3.18)$$

e Y , chamado de *parâmetro geométrico*, por:

$$Y = \frac{d^2}{D_t} \left(\frac{E_1 h_1 E_3 h_3}{E_1 h_1 + E_3 h_3} \right). \quad (3.19)$$

Fazendo agora um balanço de forças num elemento da camada base, com comprimento δx , representado na Figura 30(d), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta P_3 &= -\tau \delta x \\ \tau &= -\frac{\partial P_3}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Com auxílio das Equações 3.12 e 3.15 para eliminar u_1 , a Equação 3.20 por ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - g^* u_3 = -g^* Y \frac{D_t}{E_3 h_3 d} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Esta equação e a 3.17 são as equações diferenciais que relacionam os deslocamentos w e u_3 a um carregamento p . Eliminando u_3 destas equações, a seguinte equação diferencial de sexta ordem é obtida:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g^* (1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - g^* p \right). \quad (3.22)$$

Quando a viga vibra transversalmente sob a ação de um carregamento externo $q(x, t)$, o carregamento total transversal que inclui os termos de inércia é dado por:

$$p = -m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(x, t), \quad (3.23)$$

sendo m a massa total da viga por unidade de comprimento. Substituindo este carregamento na Equação 3.22 tem-se a equação diferencial do movimento de vibração forçada da viga:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g^* (1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - g^* q \right), \quad (3.24)$$

sendo que esta equação não considera os efeitos da inércia rotatória.

Considerando que a viga seja excitada por um *carregamento normal amortecido*³, e usando o método da separação de variáveis,

³ Carregamento normal amortecido: é o termo utilizado para expressar um carregamento proporcional ao termo de inércia e às formas modais amortecidas. Detalhes são apresentados em Mead e Markus (1969).

pode-se encontrar a equação diferencial das autofunções, i.e., dos modos normais amortecidos, $W_n(x)$, a qual é dada por:

$$W_n^{vi} - g^*(1 + Y)W_n^{iv} - \frac{\omega_n^{*2}m}{D_t}(W_n'' - g^*W_n) = 0, \quad (3.25)$$

na qual $\omega_n^{*2} = \omega_n^2(1 + i\eta_n)$, e ω_n e η_n são, respectivamente, a frequência natural e o fator de perda modal da viga composta. Esta equação para W_n , ω_n e η_n é semelhante à encontrada por DiTaranto (1965), esta, porém, em termos do deslocamento transversal e relacionada a uma forma particular de vibração forçada, com um “carregamento normal amortecido”, ao invés da vibração livre atribuída por DiTaranto.

A equação diferencial homogênea (Equação 3.25), em conjunto com as condições de contorno de uma viga sanduíche finita é somente satisfeita por um conjunto particular de autofunções $W_n(x)$ nos valores particulares ω_n e η_n . Sendo de sexta ordem, as autofunções desta equação podem ser expressas por:

$$W_n(x) = \sum_{s=1}^6 A_{ns} e^{\lambda_{ns}x}, \quad (3.26)$$

na qual λ_{ns} são as raízes complexas da equação característica complexa:

$$\lambda_n^6 - g^*(1 + Y)\lambda_n^4 - \frac{\omega_n^{*2}m}{D_t}(\lambda_n^2 - g^*) = 0, \quad (3.27)$$

de cada modo n , cuja solução foi discutida por DiTaranto (1965).

Para encontrar o conjunto de A_n e ω_n^* para um modo particular n de uma viga, a Equação 3.26 deve satisfazer seis condições de contorno homogêneas, que são em geral complexas, as quais são dadas as seguir:

- (a) deslocamento transversal nulo em $x = 0$ ou $x = L$:

$$W_n \Big|_x = 0; \quad (3.28)$$

(b) rotação nula em $x = 0$ ou $x = L$:

$$\partial W_n / \partial x \Big|_x = 0; \quad (3.29)$$

(c) momento fletor nulo ($M = 0$) em $x = 0$ ou $x = L$:

$$\left[W_n^{iv} - g^* (1 + Y) W_n'' - \frac{\omega_n^{*2} m}{D_t} W_n \right]_x = 0; \quad (3.30)$$

(d) força cisalhante nula ($S = 0$) em $x = 0$ ou $x = L$:

$$\left[W_n^v - g^* (1 + Y) W_n''' - \frac{\omega_n^{*2} m}{D_t} W_n' \right]_x = 0; \quad (3.31)$$

(e) deslocamentos u_1 e u_3 livres em $x = 0$ ou $x = L$, i.e., $P_1 = P_3 = 0$:

$$\left[W_n^{iv} - g^* Y W_n'' - \frac{\omega_n^{*2} m}{D_t} W_n \right]_x = 0; \quad (3.32)$$

(f) deslocamentos u_1 e u_3 restritos em $x = 0$ ou $x = L$ por um apoio:

$$\left[W_n^v - g^* Y W_n''' - \frac{\omega_n^{*2} m}{D_t} W_n' \right]_x = 0. \quad (3.33)$$

Utilizando um método iterativo, Mead e Markus (1970) determinaram as frequências de ressonância e os fatores de perda dos modos normais amortecidos de uma viga sanduíche *bi-engastada*. Lu e Douglas (1974) utilizaram o modelo de viga de Mead e Markus para obter uma expressão para a função resposta em frequência de uma viga sanduíche simétrica, na condição de contorno *livre-livre*, a qual foi validada experimentalmente para duas vigas sanduíche.

A solução da equação de movimento de vigas sanduíche para condições de contorno simétricas (como aquelas apresentadas por Mead e Markus (1970)) é, a princípio, um problema sem grandes dificuldades de resolver pelo fato da simetria dos modos permitir uma simplificação do problema. Por outro lado, a solução para condições de contorno

assimétricas é um problema computacional tedioso, já que a solução do determinante característico (formado pelo conjunto de equações das condições de contorno apropriadas) deve também ser a solução do polinômio característico da equação de movimento (onde existe seis raízes características para cada modo, pois a equação é de sexta ordem).

Com isto, alguns autores usaram métodos iterativos para a resolução da equação diferencial de vigas sanduíche para várias condições de contorno. Markuš, Oravský e Šimková (1974) usaram um *Método de Perturbação* para resolver as equações e analisar o efeito dos contornos no amortecimento da viga. Rao (1978) solucionou as equações com o *Método de Muller* e apresentou graficamente os resultados de frequências de ressonância e fatores de perda para várias condições de contorno.

3.3.1.3 Outras Equações

Além dos trabalhos anteriormente apresentados, outros também relevantes na literatura, sobre modelagem analítica de vigas sanduíche, são brevemente descritos a seguir. Yan e Dowell (1972) desenvolveram uma equação simplificada de quarta ordem para descrever os mecanismos físicos, tal como as equações de Euler-Bernoulli, de uma viga sanduíche sem restrição de simetria das camadas. As principais hipóteses consideradas que diferem daquelas supracitadas, são:

- estado plano de tensão;
- as inclinações das seções transversais das camadas externas não se mantêm necessariamente iguais e perpendiculares ao eixo neutro, para uma dada seção;
- a espessura total da viga é pequena em relação às demais dimensões e ao comprimento de onda de flexão;
- o módulo de elasticidade da camada intermediária é pequeno em relação aos demais.

Com isto, através do princípio dos trabalhos virtuais aplicado à teoria da elasticidade, foi obtida uma equação diferencial de movimento similar àquela de Mead e Markus (1969), porém sem o termo de sexta ordem. As condições de contorno foram obtidas com auxílio do cálculo variacional. Resultados numéricos foram apresentados por Yan e Dowell (1972) e posteriormente contestados por Mead (1973).

Uma proposta mais elaborada foi apresentada por Rao e Nakra (1974). Neste trabalho, a equação de movimento foi desenvolvida considerando, além das hipóteses de Mead e Markus (1969), os efeitos da inércia e deformação longitudinal na camada intermediária da viga sanduíche. Assim, foram obtidas três famílias de modos de vibração: em *flexão* (predominante para vigas longas), *extensão* e *cisalhamento*. É demonstrado também que a inclusão dos efeitos de inércia afeta significativamente a resposta longitudinal da viga, sendo a transversal pouco afetada (NAKRA, 1966 apud RAO; NAKRA, 1974).

Rao (1977) apresentou uma teoria que, adicionalmente às hipóteses de Rao e Nakra (1974), inclui as deformações cisalhantes das camadas externas para análise de vigas sanduíche curtas sem restrição de geometria e propriedades materiais das camadas, sendo aplicável tanto para análise de vigas curtas bem como longas, com viscoelásticos macios ou rígidos. Resultados numéricos para vigas sanduíche curtas indicam que a teoria de Yan e Dowell (1972) é a que apresenta maiores erros e que ao ignorar a deformação longitudinal no viscoelástico pode resultar numa predição bastante errônea do fator de perda da viga nos modos de maior ordem.

Apesar dos avanços analíticos para a modelagem de vigas com camadas restritas terem sido expressivos, os modelos são ainda limitados a formas geométricas e condições de contorno simples. Além disso, à medida que se aprimora o modelo, a complexidade das equações diferenciais e o grau de dificuldade para a solução das mesmas se tornam

maiores. Consequentemente, novas ferramentas têm sido desenvolvidas, com destaque à modelagem via elementos finitos, conforme discutido na próxima seção.

3.3.2 Análise Numérica

Na seção anterior foram apresentadas algumas propostas analíticas de modelagem de viga sanduíche e as suas principais limitações. Uma alternativa para superar estas limitações é através do método de elementos finitos. A seguir serão apresentadas algumas técnicas para a modelagem numérica de vigas sanduíche, através do método de elementos finitos, e também os três métodos de resolução das equações matriciais de movimento: o método modal, o direto e o método da energia de deformação modal, os quais serão expostos de maneira breve.

O método de elementos finitos é uma ferramenta numérica que tem se popularizado devido ao aumento expressivo da capacidade computacional nos últimos anos. O objetivo principal a ser alcançado com esta ferramenta é a resolução da equação diferencial de movimento através de uma técnica de discretização, onde as estruturas são aproximadas por matrizes de massa $[M]$, rigidez $[K]$ (ou $[K^*]$, no caso de amortecimento histerético), amortecimento $[C]$ (no caso de amortecimento viscoso) e carregamento, e resolvida por meio de computadores digitais.

Com o método de elementos finitos as análises de vibrações de estruturas mecânicas podem ser facilmente realizadas no domínio da frequência. Para isto, um conceito muito importante que geralmente é empregado são as *funções resposta em frequência* (FRF), que fornecem informações valiosas a respeito da natureza da resposta do sistema, como magnitude e ângulos de fase em função de ω . As técnicas mais utilizadas para calcular as FRFs utilizando o método de elementos finitos são o *Método Modal* e o *Método Direto de Resposta em Frequência*. Outro método que tem se destacado nos últimos anos é o *Método da Energia*

de *Deformação Modal*, que é utilizado para o cálculo dos parâmetros modais de uma viga sanduíche e/ou da FRF. Estes três métodos são brevemente descritos a seguir.

No método modal, através da expressão algébrica da equação de movimento são extraídos os auto-pares complexos do sistema e a FRF de receptância (deslocamento/força) pode ser calculada pela seguinte expressão (PETYT, 1990, p. 386):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_{jn}^* \phi_{kn}^*}{\omega_n^{*2} - \omega^2}, \quad (3.34)$$

sendo α_{jk} a resposta no ponto j devido a uma força harmônica de magnitude unitária e frequência ω aplicada em k . Neste caso, N é o número total de modos ressonantes, ϕ_{jn}^* e ω_n^{2*} são os autovetores e autovalores complexos. Uma grande vantagem deste método reside no fato de independe da quantidade de passos de frequência, onde o tempo de processamento para a solução do problema é diretamente proporcional à dimensão das matrizes, i.e., à quantidade de modos ressonantes da estrutura. Já a desvantagem está na extração dos auto-pares, onde as propriedades de rigidez da estrutura devem ser consideradas como constantes, sendo isto uma limitação para análise de estruturas com propriedades dependentes da frequência. Algumas propostas (ARAÚJO et al., 2010; BARKANOV; SKUKIS; PETITJEAN, 2009; KIM; LEE, 2009) que consideram esta variação na frequência utilizam o método modal iterativamente, onde a extração de cada auto-par é feita separadamente, atualizando as matrizes de rigidez e/ou amortecimento para cada passo, até atingir a convergência desejada.

No método direto de resposta em frequência, a FRF pode ser obtida diretamente através da seguinte inversão matricial:

$$\{\mathbf{u}\} = ([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{M}])^{-1} \{\mathbf{f}\}, \quad (3.35)$$

obtida do sistema de equações algébricas da equação de movimento,

sendo $\{u\}$ o vetor resposta estacionária ao carregamento $\{f\}$. Esta inversão deve ser realizada para cada passo de frequência ω e, devido a isto, o custo computacional é diretamente proporcional às dimensões das matrizes envolvidas. Por outro lado, este método independe da quantidade de modos — sendo isto uma grande vantagem para análise de estruturas com alta densidade modal — e é o mais apropriado quando se trata de materiais com propriedades dependentes da frequência, já que as propriedades de rigidez e amortecimento podem ser impostas para cada passo de frequência. Maiores detalhes deste método e do modal podem ser obtidos em Petyt (1990, p. 386).

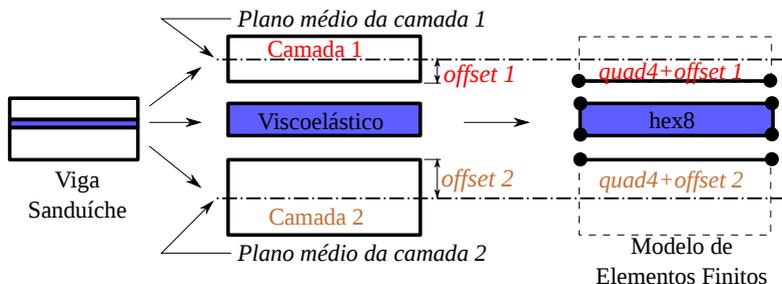
O método da energia de deformação modal, em conjunto com o método de elementos finitos, consiste basicamente em estimar o fator de perda da estrutura utilizando o fator de perda do material viscoelástico e os autovetores reais da estrutura sanduíche (suprimindo-se a parte imaginária da matriz de rigidez), onde o fator de perda modal da estrutura é dado por:

$$\eta^{(r)} = \eta_v \frac{U_v^{(r)}}{U^{(r)}}, \quad (3.36)$$

sendo η_v o fator de perda do material obtido na frequência de ressonância do modo r e $U_v^{(r)}/U^{(r)}$ a razão entre a energia de deformação elástica da camada viscoelástica e a energia de deformação elástica total no modo r . As frequências naturais são obtidas para cada modo através de um processo iterativo de solução dos autovalores e da variação do módulo de armazenamento do viscoelástico. Apesar de ser mencionada como uma ferramenta de projeto, por ser computacionalmente eficiente, este método tende a superestimar os fatores de perda de estruturas altamente amortecidas. Maiores detalhes são apresentados por Johnson e Kienholz (1982) e Bateman, Kim e Shin (1990).

Com o desenvolvimento do método de elementos finitos, muitas propostas foram elaboradas para a modelagem de vigas sanduíche. Uma técnica bastante promissora, que faz uso do programa computacional

Figura 31 – Modelo de vigas/placas sanduíche usando elementos de placa 2D e sólido 3D.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Nastran (2004), representa o material viscoelástico por elementos sólidos isoparamétrico com oito nós (Hex8) e as camadas elásticas (externas) por elementos de placa (Quad4), conforme ilustrado na Figura 31. Neste modelo os elementos de placa são acoplados aos sólidos através de um recurso, chamado *offset*, que permite deslocar os nós do plano médio da placa para a superfície da placa, adjacente aos elementos sólidos, mantendo seu efeito original. Quanto à discretização dos elementos sólidos, Johnson e Kienholz (1982) apontam que uma razão de aspecto⁴ de até 5000/1 pode ser utilizada com sucesso. No entanto, o custo computacional deste modelo cresce à medida que a espessura da camada de amortecimento diminui, tornando-se praticamente inviável sua aplicação para camadas relativamente finas. Kosmatka e Liguore (1993) demonstram que esta técnica apresenta resultados mais precisos que a modelagem utilizando a teoria de materiais compostos — que utiliza a teoria de deformação cisalhante, descrita na seção 3.2.

Bai e Sun (1995) formularam um modelo de viga sanduíche para analisar o efeito da camada de adesivo, que une a camada interna às externas, no amortecimento da viga. Nesta formulação, as camadas externas foram modeladas considerando as hipóteses de Eu-

⁴ Razão de aspecto é a razão entre a maior pela menor dimensão do elemento.

ler-Bernoulli, a interna considerado um campo de deslocamento axial e transversal não lineares com relação à espessura e a interface considerando uma descontinuidade de deslocamento longitudinal proporcional à tensão cisalhante. Com isto, os autores verificaram que a deformação cisalhante no adesivo contribui significativamente para o amortecimento estrutural da viga. Baber, Maddox e Orozco (1998) simplificaram esta formulação considerando uma rigidez infinita entre as camadas elásticas e viscoelásticas e apresentaram um elemento de 12 graus de liberdade. Outras propostas promissoras consideram as hipóteses de Euler-Bernoulli para as camadas elásticas e as de Timoshenko para a viscoelástica (TRINDADE; BENJEDDOU; OHAYON, 2001; GALUCIO; DEÛ; OHAYON, 2004; AMICHI; ATALLA, 2009).

Na literatura são poucas as formulações desenvolvidas que abrangem a modelagem de viga sanduíche com seção assimétrica. Sainsbury e Zhang (1999) e Amichi e Atalla (2009) apresentaram propostas que a princípio são aplicáveis a vigas com seção assimétrica. No entanto, os autores destacam que, por terem sido desprezadas as rigidezes de flexão e de extensão do material viscoelástico nestas duas propostas, o erro na predição da resposta de vigas sanduíche cresce à medida que o grau de assimetria da seção transversal aumenta.

Os modelos de vigas sanduíche são utilizados numa grande maioria não só como ferramenta de análise de aplicações de amortecimento, mas também de maneira inversa para a caracterização de materiais. Barkanov, Skukis e Petitjean (2009) apresentaram uma proposta de caracterização de materiais viscoelásticos através do ajuste das frequências naturais de uma viga sanduíche. Nesta técnica, o método modal é empregado iterativamente para ajustar as propriedades viscoelásticas para cada modo separado, porém, com pouca eficiência computacional, pois, para uma caracterização completa (numa ampla faixa de frequência e de temperatura), a quantidade de etapas iterativas é proporcional ao número de modos multiplicado pela quantidade de temperaturas.

Semelhantemente, Kim e Lee (2009) propuseram um procedimento de identificação das constantes de um modelo viscoelástico fracionário utilizando um modelo de elementos finitos de viga com camada não restrita. Nesta técnica o método gradiente é empregado para determinar as constantes em duas etapas, a primeira para ajuste das frequências naturais e a segunda para ajuste da amplitude das FRFs. Martinez-Agirre e Elejabarrieta (2011) propõem também o uso direto das FRFs para ajuste de modelos, com a justificativa de que o ajuste utilizando somente as frequências naturais, extraídas do problema de autovalores, pode afetar a precisão dos resultados devido ao acoplamento modal presente em sistemas altamente amortecidos.

A princípio estes dois procedimentos demonstram ser bastante promissores, porém, o emprego direto de FRFs para ajuste de modelos pode ser um problema devido às dificuldades de medição em baixas temperaturas, pois os instrumentos convencionais de excitação são limitados à temperaturas não tão baixas. A norma ASTM E756 (2005) propõe a utilização de um aparato experimental que emprega sensores sem contato. Neste caso, as FRFs medidas são de deslocamento/tensão e tanto as frequências de ressonância quanto os amortecimentos podem ser medidos com precisão, porém, as amplitudes nos espectros das FRFs são de certa forma alteradas em virtude da não linearidade inerente ao transdutor. Assim, para medições realizadas com transdutores deste tipo, a utilização dos parâmetros modais no processo de ajuste de modelos torna-se mais apropriada do que o uso direto de FRFs.

3.4 Síntese

Este capítulo estabelece as bases teóricas para a modelagem do comportamento dinâmico de vigas. Inicialmente, foram apresentadas as teorias clássicas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e, na sequência, uma teoria um pouco mais elaborada, a teoria de deformação cisalhante

de terceira ordem. As hipóteses envolvidas nas teorias de Euler-Bernoulli e de terceira ordem serão utilizadas para formular o elemento de viga sanduíche (subseção 4.3.2.1) que será utilizado neste trabalho.

Alguns fundamentos que envolvem o tratamento de amortecimento por camada restrita foram apresentados e uma breve revisão dos principais modelos analíticos para modelagem de vigas sanduíche foi exposta, com foco maior às equações de Mead e Markus, que serão utilizadas neste trabalho somente para a validação do elemento finito de viga sanduíche que será apresentado na subseção 5.1.2. Alguns modelos de elementos finitos e técnicas de modelagem, que visam superar as dificuldades envolvidas na modelagem analítica de vigas sanduíche, foram expostos na sequência, juntamente à breve exposição dos métodos de solução das equações matriciais: o método direto, o modal e o da energia de deformação.

Foi identificado que a maioria dos modelos de vigas sanduíche desprezam a energia de deformação axial do viscoelástico e, como será visto na seção 5.4, este fator pode ser determinante para a modelagem dinâmica de vigas sanduíche. Algumas das técnicas e definições aqui apresentadas serão utilizadas para formular o elemento de viga sanduíche que será utilizado neste trabalho.

4 Caracterização do Módulo Complexo

Neste capítulo são apresentados os detalhes da metodologia proposta neste trabalho para a caracterização de materiais viscoelásticos de camada simples ou restrita. Inicialmente é apresentada uma descrição geral do método e em seguida os detalhes dos experimentos e tratamento dos dados. Ao final, são apresentados os procedimentos numéricos adotados para obtenção dos resultados.

4.1 Descrição do Método

O procedimento proposto nesta pesquisa consiste basicamente em duas etapas principais: a primeira se baseia no método da viga vibrante para a *medição de FRFs experimentais* de vigas com o material viscoelástico aplicado, e a segunda em *técnicas de ajuste de modelos*.

Na primeira etapa, que será apresentada em detalhes na seção 4.2, as FRFs do movimento transversal de uma viga de metal com o material viscoelástico aplicado em sua face devem ser medidas na faixa de temperatura de interesse. Para uma caracterização completa do material viscoelástico, i.e., obtenção do módulo complexo para uma ampla faixa de frequência e de temperatura, é necessário realizar a medição de FRFs nas temperaturas que contemplem as regiões vítrea, de transição e borrachosa do material, conforme apresentado na subseção 2.1.1. A priori estas regiões não são conhecidas; no entanto, podem ser identificadas facilmente através do comportamento modal da estrutura nos espectros de respostam em frequência, tal como ilustrado na Figura 15.

Conforme apresentado na seção 2.1, o módulo de armazena-

mento dos materiais viscoelásticos apresentam valores extremos e praticamente estáveis (com pouca variação) nas regiões vítrea e borrachosa. Na região de transição o fator de perda do material alcança valores máximos. Portanto, é de se esperar que os parâmetros modais da viga com o material viscoelástico aplicado apresentem variações semelhantes ao módulo complexo, já que a viga base e a camada de restrição (se houver) possuem propriedades praticamente constantes¹ nessas regiões.

Sendo assim, a hipótese principal neste trabalho considera que os parâmetros modais da viga, frequências naturais e fatores de perda, apresentem variações semelhantes ao módulo complexo do material viscoelástico. Com isto, o princípio da superposição temperatura-frequência (subseção 2.1.3), com auxílio do método das variáveis reduzidas (seção 2.2), é aplicado para descrever os parâmetros modais da viga no *domínio da frequência reduzida*. Desta maneira os parâmetros modais obtidos em temperaturas diferentes são agrupados num único gráfico, no nomograma de frequência reduzida, e, além do mais, é proposta a utilização do modelo de derivadas fracionárias para descrever estes parâmetros em função da frequência reduzida, análogo à Equação 1.62.

Considerando uma função de deslocamento (subseção 2.2.1) que seja comum à descrição tanto do módulo complexo do material viscoelástico quanto dos parâmetros modais da viga composta, considera-se que o valor do módulo complexo numa dada frequência reduzida está associado aos parâmetros modais da viga nesta mesma frequência reduzida. Assim, como as propriedades dinâmicas das camadas elásticas são consideradas constantes, tanto na frequência como na temperatura, a análise do problema é realizada no domínio da frequência reduzida, onde todas as propriedades dinâmicas são constantes para cada frequência reduzida, e a utilização do método modal é proposta para a simulação dos parâmetros modais da viga.

¹ Segundo Lopes (1989, p. 63), o módulo de elasticidade obtido de uma viga de aço entre -30°C e 60°C é da ordem de 200 GPa, com uma variação de 2,5%.

Ressalta-se que, em estruturas com baixa densidade modal, o custo computacional envolvido nas simulações com o método modal é extremamente inferior aos custos com o método direto de resposta em frequência, sendo isto um fator relevante em processos de otimização que utilizam algoritmos do tipo evolutivo. Destaca-se também que, em virtude dos transdutores comumente utilizados nestes experimentos serem do tipo sem contato, é adotada a utilização dos parâmetros modais no processo de ajuste de modelos, pois, de acordo com os fatos apresentados no final da subseção 3.3.2, estes transdutores são adequados quando se deseja obter as frequências de ressonância e fatores de perda em diversas temperaturas.

A segunda etapa deste método consiste em algumas subetapas de ajustes de modelos utilizando rotinas de otimização. Estas se dividem basicamente em três: (a) *extração dos parâmetros modais experimentais da viga composta*, (b) *ajuste de uma função matemática para a descrição dos parâmetros modais experimentais*, e (c) *determinação numérica do módulo complexo*. A descrição das etapas (a) e (b) serão apresentados na subseção 4.2.4 a da etapa (c) na seção 4.3.

4.2 Experimentos e Tratamento dos Dados

Conforme mencionado anteriormente, os procedimentos experimentais adotados neste trabalho se baseiam no método da viga vibrante, padronizado pela norma ASTM E756 (2005). A preparação do aparato experimental e as medições das FRFs seguem as recomendações desta norma, porém, para a preparação das amostras não é necessário retirar a camada de restrição do material viscoelástico (caso haja). A escolha por estes procedimentos e aparatos se deu por conta de serem promissores e bastante difundidos para caracterização de materiais viscoelásticos. Maiores detalhes, além destes aqui expostos, podem ser obtidos na íntegra da ASTM E756 (2005).

4.2.1 Descrição da Viga Base e das Amostras

Para a realização dos experimentos foi utilizada uma viga homogênea de aço 1020, chamada de *viga base*, com $250,00 \times 10,11 \times 3,24$ mm, considerando a densidade padrão de 7850 kg/m^3 e razão de Poisson 0,29. O fator de perda e o módulo de elasticidade da viga foram considerados constantes para as temperaturas avaliadas, e os seus valores foram determinados experimentalmente com auxílio das Equações 2.8 e 2.9 na temperatura de 20°C . Para tanto, foram realizadas três medições de FRF, de um mesmo ponto de excitação e de resposta, com transdutores sem contato e de acordo com o aparato experimental ilustrado na seção seguinte. Os parâmetros modais de cada FRF foram então extraídos e os seus valores médios foram utilizados para o cálculo do módulo de elasticidade e do fator de perda, cujos resultados estão apresentados na Tabela 3. Para cada medição a viga e os transdutores foram desmontados e montados novamente. Desprezando os valores do primeiro modo, o valor médio obtido para o módulo de elasticidade foi de 194,8 GPa e o do fator de perda de 0,005. Estes valores foram considerados em todas as simulações do comportamento dinâmico da viga (para todos os materiais avaliados).

Os materiais de amortecimento avaliados, i.e. as amostras, foram adquiridos num projeto de pesquisa² desenvolvido no Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) em parceria com a empresa EMBRAER. Estes materiais, listados na Tabela 4, possuíam uma camada de material viscoelástico e outra de restrição fabricada em alumínio. Conforme apresentado na seção 1.6, na maioria dos casos, o valor da razão de Poisson considerado para os viscoelásticos é de 0,499. No entanto, esta grandeza apresenta valores complexos e varia em função da frequência e da temperatura. Na maior parte deste trabalho será considerado nas simulações o valor

² Conforto e Design de Cabine - Vibroacústica Fase II.

Tabela 3 – Propriedades modais da viga base.

Modo (n)	f_n [Hz]	Módulo de Elasticidade [GPa] ^a	Fator de Perda ^b
1	34,7	135,0	0,060
2	261,67	195,6	0,009
3	734,00	196,3	0,006
4	1433,30	195,0	0,005
5	2354,32	192,5	0,006
6	3544,65	195,5	0,002
7	4926,36	193,6	0,003
	<i>Média</i> ^c \Rightarrow	194,8	0,005

^a Módulo de elasticidade da viga base calculado segundo a Equação 2.9.

^b Fator de perda da viga base calculado segundo a Equação 2.8.

^c Os valores do primeiro modo ($n = 1$) são desprezados.

Fonte – Elaborado pelo autor.

Nota – Os parâmetros modais, segunda e última coluna, são os valores médios obtidos de três FRFs.

Tabela 4 – Materiais de amortecimento avaliados (amostras).

Material/Fabricante	Espessura do viscoelástico ^a	Densidade do viscoelástico ^b	Espessura da restrição ^{a,c}
ADC006/EAR	1,24	1683,33	0,127
1229SN08/SMAC	1,03	1150	0,5
1229SN09/SMAC	1,1	1160	0,5
DA350 PERF/Paulstra	1,0	1560	0,5
DA350 LIGHT/Paulstra	0,5	1500	0,3

^a Unidade em mm.

^b Unidade em kg/m³.

^c Todas as camadas restritoras são de alumínio, com densidade 2700 kg/m³, Poisson 0,33, módulo de elasticidade 70 GPa e fator de perda 0,005.

Fonte – Elaborado pelo autor.

de $\nu = 0,499$ para toda a faixa de frequência e de temperatura, porém, na seção 5.5 será realizada uma breve avaliação do efeito dos valores extremos de $\nu = 0,2$ e $0,499$ na resposta dinâmica de uma viga sanduíche.

4.2.2 Aparato Experimental e Descrição dos Equipamentos

O aparato experimental utilizado está ilustrado na Figura 32 e os instrumentos e equipamentos utilizados foram os seguintes:

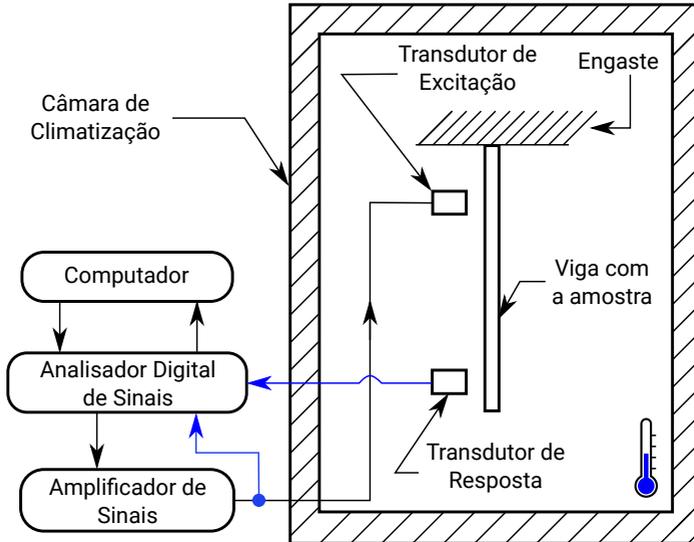
- transdutor magnético (sem contato) da Brüel & Kjær, modelo MM0002 para medição da *resposta*;
- transdutor magnético (sem contato) da Motion Sensors, modelo PC55-18E para *excitação* da viga;
- 1 analisador e condicionador digital de sinais da Brüel & Kjær, Pulse modelo 3560-C;
- 1 amplificador de potência da Brüel & Kjær, modelo 2718;
- câmara com temperatura controlada, fabricada pela Clemar Ar Condicionados LTDA, com faixa de temperatura de -30°C a 50°C , com volume interno de $0,68\text{ m}^3$, mostrada na Figura 33;
- suporte para engaste das vigas, apresentado na Figura 34;
- 1 microcomputador com o programa Pulse LabShop, versão 10, para processar e armazenar os dados de medição.

Conforme ilustrado na Figura 32, a leitura do sinal de excitação, para medição da FRF, foi tomada do sinal emitido para o transdutor de excitação, com uma conexão do tipo-T no cabo entre o amplificador de potência e o transdutor de excitação. Assim, a grandeza das FRFs medidas fornece a razão Velocidade/Tensão $[(\text{m/s})/\text{V}]$.

4.2.3 Procedimento Experimental

Na avaliação de cada material (todos com camada restritora), a amostra foi recortada na forma geométrica da superfície da viga e colada nesta superfície com o próprio adesivo existente no material. Após isto,

Figura 32 – Aparato experimental.



Fonte: Elaborado pelo autor.

a viga foi fixada (rigidamente) no suporte de engaste (Figura 34) dentro da câmara com temperatura controlada para então serem medidas das FRFs nas várias temperaturas.

O sinal de excitação foi do tipo *sweep* e a faixa de frequência ensaiada foi de 0,7 Hz a 5000 Hz, com uma resolução na frequência de 6400 linhas e uma média sobre 60 amostras para o cálculo da transformada rápida de Fourier (FFT³). A faixa de temperatura avaliada nos ensaios foi de -25°C a 50°C , com passos de 5°C , e com tempo de estabilização da temperatura de no mínimo 30 minutos.

Conforme ilustrado no aparato experimental (Figura 32), a excitação foi realizada próxima ao engaste, com 30 mm de afastamento,

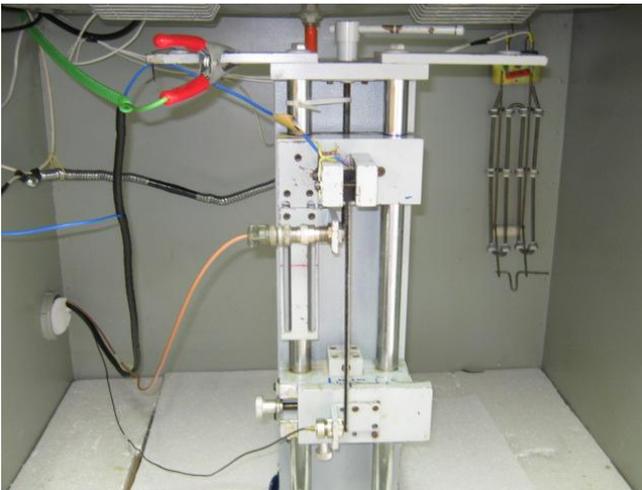
³ FFT é a sigla da expressão em inglês: *Fast Fourier Transform*, que representa o algoritmo que computa a transformada discreta de Fourier de uma sequência de dados (geralmente temporal ou espacial), ou a sua inversa.

Figura 33 – Câmara térmica: vista exterior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Sistema de engaste da viga no interior da câmara térmica.



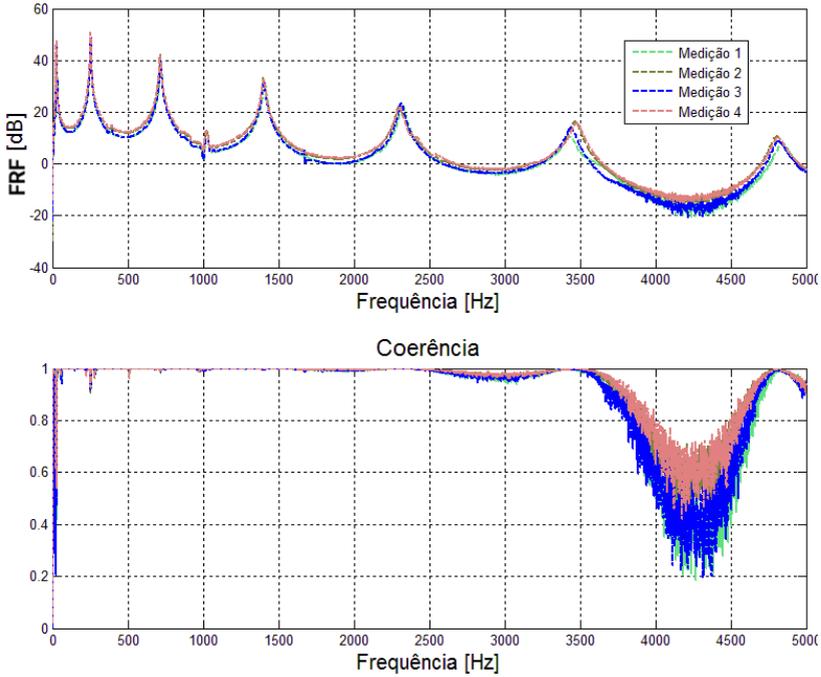
Fonte: Elaborado pelo autor.

e a medição da resposta foi próxima à extremidade da viga, distante 7,5 mm. Esta escolha foi tomada pelo fato de apresentar melhor relação sinal/ruído. A distância de ambos os transdutores à superfície da viga (em repouso) foi 1 mm, conforme as recomendações do fabricante.

Antes de iniciar as medições, foi realizada uma avaliação de repetibilidade para verificar as incertezas relacionadas à reprodução dos procedimentos experimentais. Como estes procedimentos foram adotados da norma ASTM E756, decidiu-se realizar a caracterização da camada viscoelástica do material ADC006, chamada de SD 40, quatro vezes na temperatura de 20°C, utilizando as equações da norma na configuração Oberst (ver subseção 2.3.3). Em cada repetição, a viga e os transdutores foram desmontados e montados novamente, porém, com uma nova amostra de material. As FRFs medidas e as funções coerência (função que mede o grau de linearidade entre dois sinais, como a entrada e saída (SHIN, 2008, p. 297)) estão mostradas na Figura 35. Conforme pode ser observado nesta figura, nas regiões de ressonância a coerência é próxima do valor unitário e isso indica que existe uma relação linear entre os sinais de excitação e de resposta, isto é, não existe distorção ou ruído entre esses sinais nestas regiões. Maiores detalhes a respeito desta avaliação estão apresentados em Bratti et al. (2012).

Através dos parâmetros modais obtidos destas quatro FRFs, o módulo de elasticidade e o fator de perda do material viscoelástico puderam ser calculados com auxílio das equações da norma, os quais estão apresentados nas Tabelas 5 e 6. Percebe-se nestes resultados que a reprodução destes procedimentos experimentais gerou uma incerteza aproximada de 14% para o módulo de elasticidade e de 19% para o fator de perda. Portanto, espera-se também que os resultados obtidos neste trabalho estejam sujeitos a incertezas de magnitudes semelhantes, já que o procedimento experimental adotado é mesmo que o da ASTM E756.

Figura 35 – FRF das repetições no ensaio Oberst.



Fonte: Bratti et al. (2012, p. 69)

Tabela 5 – Módulo de elasticidade calculado de acordo com a norma ASTM E756 para o material SD 40 a 20°C.

Modo (n)	Frequência [Hz]	Módulo médio [MPa]	Desvio padrão [%]
2	257,0	3,36	13,26
3	724,2	3,60	5,43
4	1416,0	3,65	6,55
5	2339,0	4,14	10,88
6	3501,0	3,47	13,32
7	4834,0	3,32	12,42

Fonte – Bratti et al. (2012, p. 68).

Nota – O resultado para $n = 1$ foi descartado por apresentar maior desvio; fato também observado no cálculo de E e η da viga base (Tabela 4).

Tabela 6 – Fatores de perda calculados de acordo com a norma ASTM E756 para o material SD 40 a 20^oC.

Modo (n)	Frequência [Hz]	Fator de perda médio	Desvio padrão [%]
2	257,0	0,443	10,73
3	724,2	0,393	5,84
4	1416,0	0,450	5,80
5	2339,0	0,574	17,63
6	3501,0	0,535	15,61
7	4834,0	0,503	18,30

Fonte – Bratti et al. (2012, p. 68).

Nota – O resultado para $n = 1$ foi descartado por apresentar maior desvio; fato também observado no cálculo de E e η da viga base (Tabela 4).

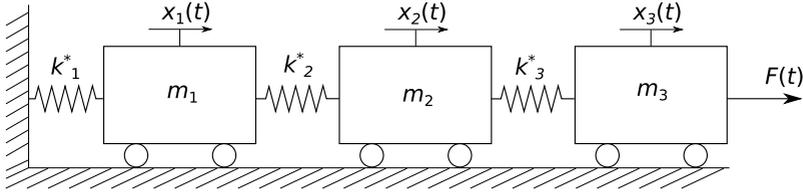
4.2.4 Análise e Tratamento dos Dados

Realizadas as medições das FRFs de todas as amostras, os dados foram exportados do programa de medição e armazenados em arquivos ASCII. Antes de dar continuidade ao processamento dos dados é necessário realizar uma análise da distribuição dos parâmetros modais no diagrama de Wicket Plot, neste caso, diagrama de $\eta_n \times f_n$. Caso esta distribuição não obedeça à sequência esperada (conforme apresentado na seção 2.4), estes dados não poderão ser utilizados no princípio da superposição frequência-temperatura, e a metodologia aqui proposta não poderá ser aplicada. Esta pré-análise é importante também para identificar possíveis erros aleatórios e/ou sistemáticos nos dados medidos.

Para ilustrar esta etapa, e também as que serão descritas a seguir, considera-se um sistema com três corpos rígidos, mostrado na Figura 36, com massas m_i , constantes de rigidez complexas k_i^* (considerando amortecimento histerético⁴), e graus de liberdade representados pelas variáveis $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$. A equação de movimento deste

⁴ Detalhes sobre amortecimento histerético são apresentados em Petyt (1990, p. 387)

Figura 36 – Sistema massa-mola de 3 graus de liberdade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sistema pode ser expressa por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}}_{\{\ddot{x}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1^* + k_2^* & -k_2^* & 0 \\ -k_2^* & k_2^* + k_3^* & -k_3^* \\ 0 & -k_3^* & k_3^* \end{bmatrix}}_{[K^*]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}_{\{x\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}}_{\{F\}}, \quad (4.1)$$

ou na seguinte forma resumida:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K^*] \{x\} = \{F\}. \quad (4.2)$$

Excitando o sistema por uma força harmônica $f(t) = Qe^{i\omega t}$, tem-se que a resposta deste sistema no regime estacionário será também harmônica, tal que $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$, e a Equação 4.2 se transforma em:

$$([K^*] - \omega^2 [M]) \{X\} = \{Q\}. \quad (4.3)$$

Para simular um conjunto de dados experimentais, para diversas temperaturas, considera-se uma excitação unitária $\{Q\} = \{0, 0, 1\}^T$ N, massas $m_1 = m_2 = 2m_3 = 2000$ Kg e constantes de rigidez dadas por:

$$k_1^* = k_2^* = 2k_3^* = \frac{4}{5} [E^*(f\alpha(T)) + 1, 0 \times 10^{10}] \quad \text{N/m}, \quad (4.4)$$

sendo $f = \omega/(2\pi)$, E^* o módulo complexo do material viscoelástico

Paracril-BJ, dado por (JONES, 2001, p. 145):

$$E^*(f\alpha(T)) = \frac{5,18(1 + 0,15i) + 0,718(1 + 0,027i) [if\alpha(T)]^{0,7}}{1 + 0,00035 [if\alpha(T)]^{0,7}}, \quad (4.5)$$

em MPa, e $\alpha(T)$ é a função de deslocamento, que é dada por:

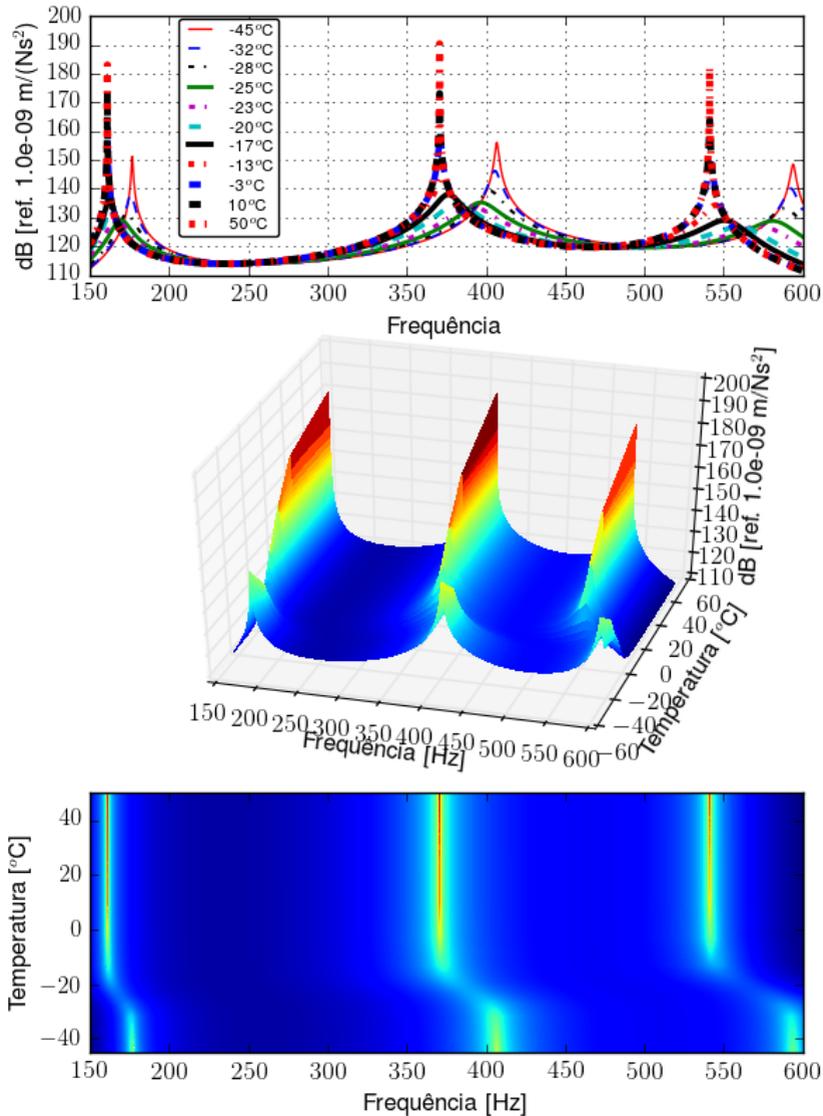
$$\log_{10} [\alpha(T)] = \frac{-10,86(T^{\circ}\text{C} + 3,9^{\circ}\text{C})}{T^{\circ}\text{C} + 108,7^{\circ}\text{C}}. \quad (4.6)$$

Utilizando o método direto de resposta em frequência para a resolução da Equação 4.3, através da inversão da matriz entre parênteses, foi calculada a resposta no grau de liberdade x_1 para as seguintes temperaturas (em $^{\circ}\text{C}$): $-45, -32, -28, -25, -23, -20, -17, -13, -3, 10, 50$. Os resultados obtidos, i.e., as FRFs experimentais simuladas, estão apresentados na Figura 37 em três versões. Pode-se perceber nesta figura, principalmente na inferior, que na região próxima de -23°C , o comportamento modal (frequências de ressonâncias e fatores de perda) sofre maiores variações e, também, que as temperaturas avaliadas são suficientes para uma caracterização completa, pois contemplam as regiões vítrea, de transição e borrachosa do material viscoelástico.

Assim, dando continuidade à descrição dos procedimentos, foram elaboradas rotinas (algoritmos) de identificação das frequências de ressonância e de cálculo dos fatores de perda das FRFs, utilizando a Equação 2.11. Com isto, o diagrama de Wicket Plot dos parâmetros modais (f_n^{Exp} e η_n^{Exp}) deve ser construído e analisado, buscando encontrar uma distribuição dos dados semelhante às distribuições dos módulos complexos de materiais viscoelásticos típicos (Figura 25).

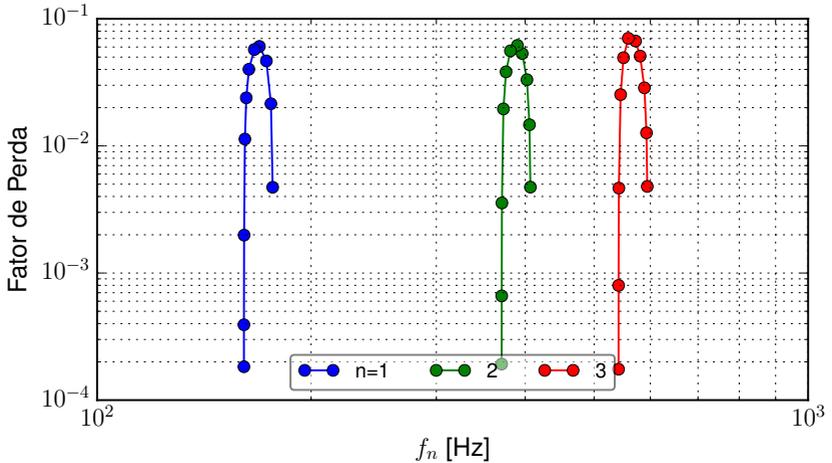
Aplicando-se estas rotinas ao conjunto de FRFs (apresentado na Figura 37) do sistema massa-mola da Figura 36, pôde-se construir o diagrama de Wicket Plot dos parâmetros modais, conforme apresentado na Figura 38. Verifica-se que a distribuição dos parâmetros modais deste sistema apresenta a sequência esperada, semelhante ao módulo complexo

Figura 37 – FRFs de um sistema massa-mola de 3 graus de liberdade. (Simulação de dados experimentais).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Ilustração do Wicket Plot dos parâmetros modais de um sistema massa-mola de 3 graus de liberdade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de materiais viscoelásticos típicos. Assim, os procedimentos numéricos a seguir podem ser aplicados. Caso esta distribuição difira do padrão esperado, as medições das FRFs devem ser repetidas para verificar possíveis erros. Se mesmo assim não seja encontrada tal distribuição esta metodologia não poderá ser aplicada a tal material.

4.3 Procedimentos Numéricos

Realizado o tratamento e a análise inicial com os dados experimentais no diagrama Wicket Plot, procede-se com a aplicação dos procedimentos numéricos, dados pelas duas etapas a seguir. Cabe lembrar que a escolha pela utilização dos parâmetros modais no processo de ajuste de modelos foi devida os transdutores comumente utilizados nestes experimentos serem do tipo sem contato, onde as frequências de ressonâncias e fatores de perda podem ser medidas com precisão, conforme apresentado no final da subseção 3.3.2.

4.3.1 Descrição dos Parâmetros Modais Experimentais através de Modelos de Derivadas Fracionárias

Esta etapa consiste basicamente em determinar os fatores de deslocamento, $\alpha(T)$, e as constantes do seguinte modelo fracionário:

$$f_n^{\text{Teo}}(f_R) = \text{Re} \left[\frac{a_{f_n} + b_{f_n} (i f_R)^{\beta_{f_n}}}{1 + c_{f_n} (i f_R)^{\beta_{f_n}}} \right], \quad (4.7)$$

para a descrição teórica das frequências naturais experimentais (f_n^{Teo}), para cada modo n , e também de:

$$\eta_n^{\text{Teo}}(f_R) = \frac{\text{Im}[\chi_n^*(f_R)]}{\text{Re}[\chi_n^*(f_R)]}, \quad (4.8)$$

sendo:

$$\chi_n^*(f_R) = \frac{a_{\eta_n} + b_{\eta_n} (i f_R)^{\beta_{\eta_n}}}{1 + c_{\eta_n} (i f_R)^{\beta_{\eta_n}}}, \quad (4.9)$$

para a descrição teórica dos fatores de perda experimentais (η_n^{Teo}), ambos no domínio da frequência reduzida, $f_R = f \alpha(T)$. As constantes a_n e b_n são números complexos (resultando em seis constantes tanto para a Equação 4.7 quanto para a Equação 4.8) e $\alpha(T)$ é um vetor com o número de elementos igual à quantidade de temperaturas medidas, e deve ser determinado de acordo com as orientações dadas na seção 2.2.

Primeiramente, deve ser arbitrado um vetor $\alpha(T)$, monotonicamente não-crescente com o aumento da temperatura, para a construção do nomograma dos parâmetros modais experimentais (f_n^{Exp} e η_n^{Exp}). Multiplicando cada elemento deste vetor pelo respectivo conjunto de f_n^{Exp} , para cada temperatura, obtém-se os valores da frequência reduzida (f_R) inicial. Na Tabela 7 este processo é ilustrado com os dados do sistema massa-mola de 3 graus de liberdade simulados anteriormente. Plotando cada conjunto f_n^{Exp} e η_n^{Exp} em função de f_R (última coluna da Tabela 7), tem-se a estimativa inicial do nomograma dos parâmetros modais experimentais. Este processo deve ser repetido, alterando-se os

Tabela 7 – Ilustração da construção do vetor frequência reduzida, f_R , para um sistema de três graus de liberdade.

T [°C]	Modo “n”	f_n^{Exp} [Hz]	$\alpha(T)$	$f_R(n, T) = \alpha(T)f_n^{\text{Exp}}$ [Hz]
-45	0	176,58	$4,87 \times 10^6$	$8,59 \times 10^8$
	1	406,81		$1,98 \times 10^9$
	2	593,94		$2,89 \times 10^9$
-32	0	175,59	$5,03 \times 10^2$	$8,83 \times 10^4$
	1	405,58		$2,04 \times 10^5$
	2	592,47		$2,98 \times 10^5$
-28	0	173,04	$9,03 \times 10^1$	$1,56 \times 10^4$
	1	402,31		$3,63 \times 10^4$
	2	588,45		$5,31 \times 10^4$
-25	0	169,14	$2,65 \times 10^1$	$4,47 \times 10^3$
	1	396,16		$1,05 \times 10^4$
	2	580,41		$1,54 \times 10^4$
-23	0	166,38	$1,01 \times 10^1$	$1,68 \times 10^3$
	1	390,13		$3,93 \times 10^3$
	2	571,87		$5,76 \times 10^3$
-20	0	163,50	3,84	$6,28 \times 10^2$
	1	381,34		$1,46 \times 10^3$
	2	558,46		$2,14 \times 10^3$
-17	0	162,12	1,46	237
	1	375,95		549
	2	549,94		803
-13	0	161,40	$4,34 \times 10^{-1}$	70,1
	1	372,80		162
	2	544,87		237
-3	0	160,98	$3,05 \times 10^{-2}$	4,91
	1	371,00		11,3
	2	541,78		16,5
10	0	160,89	$1,81 \times 10^{-3}$	$2,92 \times 10^{-1}$
	1	370,73		$6,73 \times 10^{-1}$
	2	541,27		$9,82 \times 10^{-1}$
50	0	160,89	$1,62 \times 10^{-5}$	$2,60 \times 10^{-3}$
	1	370,67		$5,99 \times 10^{-3}$
	2	541,21		$8,75 \times 10^{-3}$

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota – Os valores de $\alpha(T)$, são os valores iniciais estimados manualmente para descrever os parâmetros modais numa sequência suave no domínio f_R .

valores de $\alpha(T)$ manualmente, até que os parâmetros modais, para cada modo n , se agrupem numa sequência suave.

Determinada a estimativa inicial de $\alpha(T)$, conseqüentemente os valores de f_R , as constantes das Equações 4.7 e 4.8 devem ser determinadas para a descrição teórica dos valores experimentais de f_n e η_n . Para tanto, devem-se também arbitrar inicialmente estas constantes. Esta estimativa é facilitada plotando-se f_n^{Teo} e η_n^{Teo} em função de f_R no nomograma anteriormente determinado. Ressalta-se que a escolha inicial destas constantes não deve resultar em curvas muito afastadas dos dados experimentais, pois isto pode afetar tanto a estabilidade do cálculo da minimização do erro, quanto o resultado final. Para facilitar a estimativa de $\alpha(T)$ e das constantes dos modelos fracionários de f_n^{Teo} e de η_n^{Teo} , foram desenvolvidas rotinas neste trabalho com interface gráfica, a qual está ilustrada nas Figuras 64 e 65 do Apêndice A.

A parte final desta primeira etapa consiste em ajustar, através de técnicas de otimização, os valores de $\alpha(T)$ e das constantes dos modelos fracionários, partindo-se dos valores iniciais estimados, para então reduzir as incertezas envolvidas na descrição dos valores teóricos de f_n^{Exp} e η_n^{Exp} . Para isto foram definidos neste trabalho os seguintes erros quadráticos médios entre os valores teóricos e experimentais dos parâmetros modais:

$$E^f[n, T] = \left\{ \log_{10} [f_n^{\text{Teo}}(f_R(n, T))] - \log_{10} [f_n^{\text{Exp}}(T)] \right\}^2, \quad (4.10)$$

e:

$$E^\eta[n, T] = \left\{ \log_{10} [\eta_n^{\text{Teo}}(f_R(n, T))] - \log_{10} [\eta_n^{\text{Exp}}(T)] \right\}^2, \quad (4.11)$$

onde f_n^{Teo} e η_n^{Teo} foram descritos com auxílio das constantes estimadas anteriormente, n é o número do modo em análise, T a temperatura ensaiada e $f_R(n, T) = f_n^{\text{Exp}}\alpha(T)$. A escolha do cálculo do erro baseado em logaritmo foi devida a grande diferença da ordem de grandeza entre f_n e η_n . Desta maneira f_n e η_n podem ser ponderados igualmente.

Para realizar o ajuste de $\alpha(T)$ propõe-se a utilização do algoritmo de otimização *Evolução Diferencial* (STORN; PRICE, 1995), implementado na linguagem de programação *Python*⁵, versão 2.7.9, sob o comando `<scipy.optimize.differential_evolution>`⁶, para minimizar a soma destes dois erros quadráticos para todos os modos e para cada temperatura, ou seja, que minimize a seguinte equação:

$$E[\alpha(T)] = \sum_{n=0}^{\text{modos}} [E^f(n, T) + E^\eta(n, T)]. \quad (4.12)$$

Realizado o ajuste de $\alpha(T)$, as constantes do modelo fracionário de f_n^{Teo} , Equação 4.7, devem ser variadas uma a uma, utilizando o mesmo algoritmo supracitado, para minimizar o seguinte erro:

$$E^{f_n} [a_{f_n}, b_{f_n}, c_{f_n}, \beta_{f_n}] = \sum_{T=T_{\min}}^{T=T_{\max}} E^f [n, T], \quad (4.13)$$

para cada modo n e para todas as temperaturas, sendo T_{\min} e T_{\max} as temperaturas mínima e máxima experimentadas, $E^f [n, T]$ é dado pela Equação 4.10 e a_{f_n} e b_{f_n} devem ser substituídos por suas partes reais e imaginárias (como $z = p + iq$).

O próximo passo consiste em determinar as constantes da Equação 4.8 para a descrição de η_n^{Teo} . Similarmente, utilizando o mesmo algoritmo, as constantes desta equação devem ser variadas uma a uma para minimizar o seguinte erro:

$$E^{\eta_n} [a_{\eta_n}, b_{\eta_n}, c_{\eta_n}, \beta_{\eta_n}] = \sum_{T=T_{\min}}^{T=T_{\max}} E^\eta [n, T], \quad (4.14)$$

para cada modo n e para todas as temperaturas, sendo $E^\eta [n, T]$ dado pela Equação 4.11. Assim, são encontradas as constantes dos modelos

⁵ <<https://www.python.org/>>

⁶ Maiores informações sobre este comando são apresentadas em: <http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.optimize.differential_evolution.html>

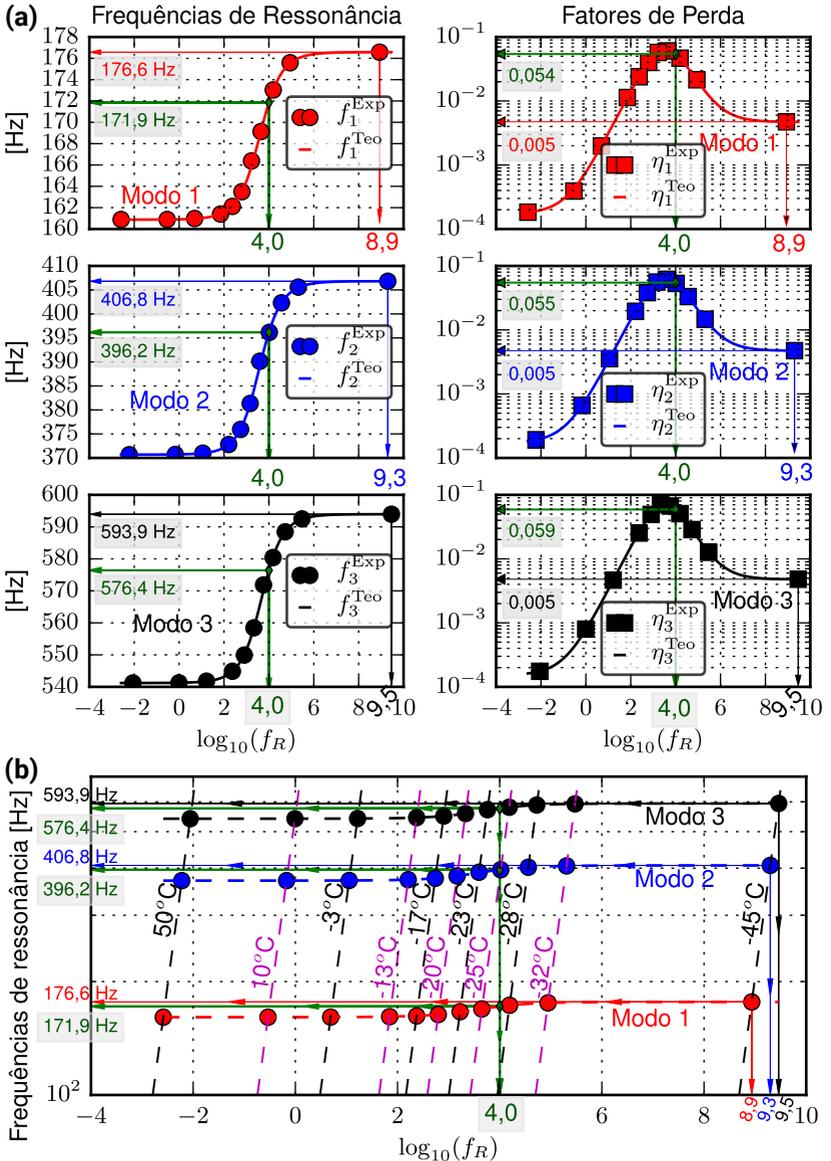
fracionários e os fatores de deslocamento para a descrição dos parâmetros modais do sistema dinâmico. Este processo, ajuste de $\alpha(T)$ e das constantes de f_n^{Teo} e η_n^{Teo} , deve ser repetido mais duas vezes para um ajuste fino dos valores, onde, geralmente, poucas mudanças acontecem. Na Figura 39 são apresentados os resultados obtidos da aplicação destes procedimentos ao sistema massa-mola da Figura 36. Percebe-se que as descrições teóricas dos parâmetros modais, dadas pelos modelos fracionários, representam apropriadamente os valores experimentais (simulados) para todos os modos e todas as temperaturas avaliadas.

Observa-se na Figura 39(b) que para cada temperatura, como por exemplo em $T = -45^\circ\text{C}$, existe associada uma frequência reduzida para cada frequência de ressonância (e para cada fator de perda, não plotado nesta figura). Assim, pode-se dizer que, para cada temperatura, existem n frequências reduzidas associadas aos n parâmetros modais e estes, por sua vez, estão associados a n valores do módulo complexo do material viscoelástico, conforme ilustrado na Figura 40 para estas mesmas frequências reduzidas. Por outro lado, para cada frequência reduzida existem também n parâmetros modais, estes, porém, para temperaturas diferentes e relacionados a um só valor do módulo complexo, conforme ilustrado nas Figuras 39 e 40 para $f_R = 10^{4,0}$. Portanto, abordando-se o problema no domínio da frequência reduzida, pode-se então aplicar o método modal para calcular os parâmetros modais do sistema neste domínio, onde o módulo complexo do material é constante para cada frequência reduzida. Desta forma, o material viscoelástico pode ser caracterizado de forma eficiente e com precisão.

4.3.2 Determinação do Módulo Complexo

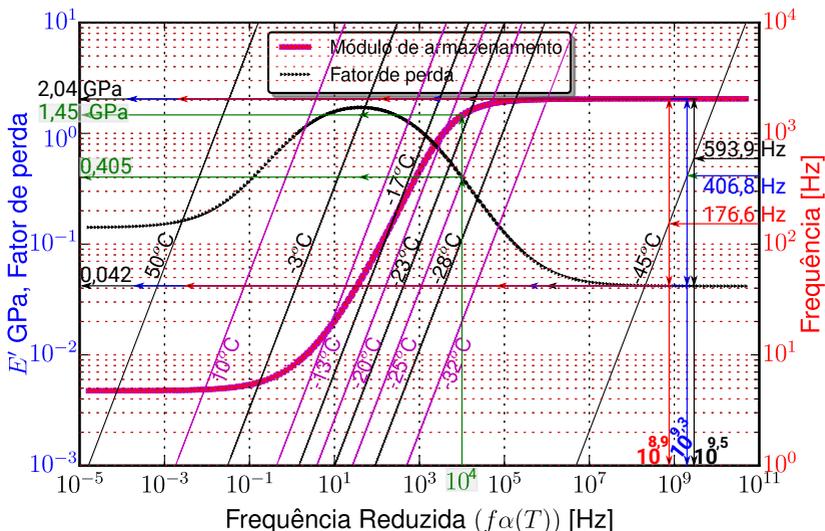
A parte final desta metodologia consiste em determinar o módulo complexo do material viscoelástico. Para isto, é proposto neste trabalho realizar o ajuste de um modelo numérico que simule os parâmetros modais do sistema dinâmico experimentado, neste caso, de uma

Figura 39 – Nomograma dos parâmetros modais experimentais (simulados) e teóricos do sistema massa-mola da Figura 36.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do Paracril-BJ com 0 PHR.



Fonte: Elaborado pelo autor.

viga com o material viscoelástico aplicado em sua face na configuração de trabalho (original, com camada restrita).

Conforme apontado anteriormente, a análise do problema será realizada no domínio da frequência reduzida e o método modal será empregado para simular os parâmetros modais da viga. O modelo numérico utilizado neste trabalho foi um elemento finito de viga sanduíche, formulado considerando as hipóteses de Euler-Bernoulli para as camadas elásticas e as de Terceira Ordem para a camada viscoelástica. Com posse deste modelo, técnicas numéricas foram empregadas para determinar o módulo complexo dos materiais avaliados, os quais foram representados pelo modelo derivadas fracionárias. A seguir é apresentada formulação do elemento finito utilizado e, na subseção 4.3.2.2, as técnicas numéricas adotadas para a determinação dos módulos complexos dos materiais.

4.3.2.1 Formulação do Elemento Finito de Viga Sanduíche

Neste trabalho foi desenvolvido um elemento finito de viga para representar o comportamento dinâmico de vigas com materiais viscoelásticos aplicados em sua superfície, com ou sem camada de restrição. O objetivo principal deste desenvolvimento é devido às técnicas comumente utilizadas em programas comerciais de elementos finitos para a modelagem de vigas com materiais delgados requererem uma discretização alta do modelo. Isto se deve à razão de aspecto necessária à resolução apropriada do problema, resultando em modelos com quantidade elevada de graus de liberdade e tempos computacionais altos nas simulações. Este modelo foi desenvolvido também pelo fato da maioria das propostas na literatura desprezarem a energia de deformação axial do material viscoelástico, sendo isto relevante para vigas com seção transversal assimétrica, conforme apresentado na subseção 3.3.2.

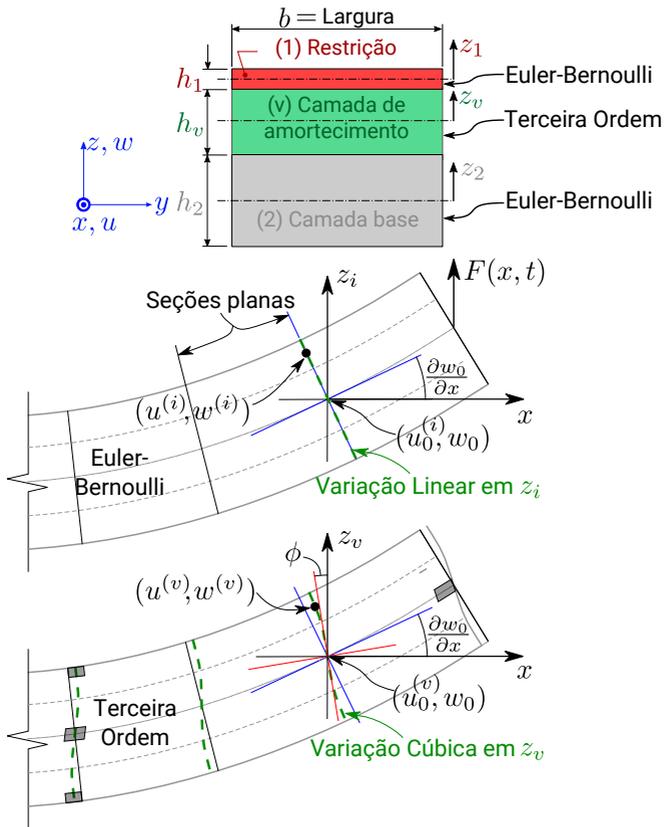
O modelo apresentado a seguir é uma proposta relativamente simples e de baixo custo computacional, porém, limitado a vigas com camada de material viscoelástico simples ou restrita. Nesta formulação a equação de movimento é obtida através do *Princípio de Hamilton*, que caracteriza o sistema pela seguinte equação (PETYT, 1990, p. 53):

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta (T - U) + \delta W] dt = 0, \quad (4.15)$$

sendo δ o operador variacional, T a energia cinética, U energia de deformação elástica e W o trabalho das forças externas. Para determinar T , U e W da viga sanduíche, foram feitas as seguintes considerações:

- o comportamento cinemático das camadas elásticas 1 e 2 da Figura 41 é descrito de acordo com as hipóteses de Euler-Bernoulli;
- o comportamento cinemático da camada de amortecimento, camada “v” da Figura 41, é descrito de acordo com a teoria de deformação cisalhante de terceira ordem (seção 3.2);

Figura 41 – Ilustração do elemento de viga sanduíche.



Fonte:Elaborado pelo autor.

- as camadas se mantêm perfeitamente unidas e a mudança na espessura do viscoelástico é desprezível;
- todas as camadas possuem o mesmo deslocamento transversal.

Com referência à cinemática ilustrada na Figura 41 e as considerações anteriores, os campos de deslocamento axiais (u) e transversais

(w) de cada camada elástica i (1 e 2) podem ser descritos por:

$$u^{(i)}(x, z_i, t) = u_0^{(i)}(x, t) - z_i w_0'(x, t), \quad (4.16)$$

$$w^{(i)}(x, z_i, t) = w_0(x, t), \quad (4.17)$$

sendo z_i o domínio z de cada camada elástica, $u_0^{(i)}$ o deslocamento axial na linha de centro de cada camada e w_0 o deslocamento transversal de uma seção da viga. Para a camada de amortecimento “ v ”, camada viscoelástica, os campos de deslocamento são dados por (ver seção 3.2):

$$u^{(v)}(x, z_v, t) = u_0^{(v)}(x, t) + z_v \left\{ \phi(x, t) - \frac{4}{3} \frac{z_v^2 [\phi(x, t) + w_0'(x, t)]}{(h_1 + h_2 + h_v)^2} \right\}, \quad (4.18)$$

$$w^{(v)}(x, z_v, t) = w_0(x, t). \quad (4.19)$$

As deformações normais elásticas ($\frac{\partial u}{\partial x}$) de cada camada são:

$$\varepsilon_x^{(i)}(x, z_i, t) = u_0^{(i)'}(x, t) - z_i w_0''(x, t), \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_x^{(v)}(x, z_v, t) = u_0^{(v)'}(x, t) + z_v \phi'(x, t) - \frac{4z_v^3 [\phi'(x, t) + w_0''(x, t)]}{3(h_1 + h_2 + h_v)^2}, \quad (4.21)$$

e a cisalhante ($\gamma_v = \frac{\partial u^{(v)}}{\partial z_v} + \frac{\partial w^{(v)}}{\partial x}$) da camada viscoelástica é dada por:

$$\gamma_{xz}^{(v)}(x, z_v, t) = w_0'(x, t) + \phi(x, t) - \frac{4z_v^2 [\phi(x, t) + w_0'(x, t)]}{(h_1 + h_2 + h_v)^2}. \quad (4.22)$$

Na interface de cada camada, as condições de continuidade de deslocamento devem ser obedecidas, ou seja:

$$\begin{aligned} u^{(2)}\left(x, \frac{h_2}{2}, t\right) &= u^{(v)}\left(x, -\frac{h_v}{2}, t\right), \\ w^{(2)}\left(x, \frac{h_2}{2}, t\right) &= w^{(v)}\left(x, -\frac{h_v}{2}, t\right), \\ u^{(1)}\left(x, -\frac{h_1}{2}, t\right) &= u^{(v)}\left(x, \frac{h_v}{2}, t\right), \\ w^{(1)}\left(x, -\frac{h_1}{2}, t\right) &= w^{(v)}\left(x, \frac{h_v}{2}, t\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substituindo os campos de deslocamento (Equações 4.16 a 4.19) nestas relações, obtém-se:

$$u_0^{(v)}(x, t) = \frac{u_0^{(1)}(x, t) + u_0^{(2)}(x, t)}{2} + \frac{(h_1 - h_2)w_0'(x, t)}{4}. \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \frac{w_0'(x, t) [3(h_1 + h_2)^3 + 6h_v(h_1 + h_2)^2 + 3h_v^2(h_1 + h_2) + 2h_v^3]}{6h_v(h_1 + h_2)^2 + 12h_v^2(h_1 + h_2) + 4h_v^3} \\ & + \frac{6(h_1 + h_2 + h_v)^2 [u_0^{(1)}(x, t) - u_0^{(2)}(x, t)]}{6h_v(h_1 + h_2)^2 + 12h_v^2(h_1 + h_2) + 4h_v^3}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Com estas duas equações os campos de deformação normal e cisalhante (Equações 4.20, 4.21 e 4.22) podem agora ser expressos em termos dos deslocamentos longitudinais $u_0^{(i)}$ das camadas elásticas e do deslocamento transversal w_0 .

Considerando que as tensões σ_y , σ_z , τ_{xy} e τ_{zy} sejam nulas, e a tensão normal na direção x em cada camada seja dada por:

$$\sigma_x^{(i)} = E^{(i)}\varepsilon_x^{(i)}, \quad (4.26)$$

$$\sigma_x^{*(v)} = E^{*(v)}\varepsilon_x^{*(v)}, \quad (4.27)$$

e a tensão cisalhante no material viscoelástico dada por:

$$\tau_{xz}^{*(v)} = G^{*(v)}\gamma_{xz}^{*(v)}, \quad (4.28)$$

sendo $E^{(i)}$ os módulos de elasticidade das camadas elásticas i e $E^{*(v)}$ e $G^{*(v)}$ os módulos complexos de elasticidade e cisalhante do material viscoelástico (dependentes da frequência e da temperatura). A energia de deformação elástica total da viga sanduíche é dada por:

$$U_{\text{total}}^* = U_x^{(1)} + U_x^{(2)} + U_x^{*(v)} + U_{xz}^{*(v)}, \quad (4.29)$$

sendo $U_x^{(\cdot)}$ a energia de deformação elástica devida aos esforços normais nas camadas (\cdot) na direção x e $U_{xz}^{*(v)}$ a energia de deformação elástica devida aos esforços cisalhantes no material viscoelástico. Com as relações constitutivas de cada material, tem-se que (PETYT, 1990, p. 29):

$$U_x^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} E^{(i)} \varepsilon_x^{(i)2} dVol, \quad (4.30)$$

$$U_x^{*(v)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} E^{*(v)} \varepsilon_x^{*(v)2} dVol, \quad (4.31)$$

$$U_{xz}^{*(v)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} G^{*(v)} \gamma_{xz}^{*(v)2} dVol, \quad (4.32)$$

na qual $dVol$ representa um elemento de volume da viga e Vol o volume total. Substituindo as Equações 4.20 a 4.22 nestas expressões, tem-se:

$$U_x^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b E^{(i)} \left[u_0^{(i)'}(x, t) - z_i w_0''(x, t) \right]^2 dz_i dx, \quad (4.33)$$

$$U_x^{*(v)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} b E^{*(v)} \left[u_0^{(v)'}(x, t) + z_v \phi'(x, t) - \frac{4z_v^3 [\phi'(x, t) + w_0''(x, t)]}{3(h_1 + h_2 + h_v)^2} \right]^2 dz_v dx, \quad (4.34)$$

$$U_{xz}^{*(v)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} b G^{*(v)} \left[w_0'(x, t) + \phi(x, t) - \frac{4z_v^2 [\phi(x, t) + w_0'(x, t)]}{(h_1 + h_2 + h_v)^2} \right]^2 dz_v dx, \quad (4.35)$$

sendo b a largura da viga, L o comprimento e $u_0^{(v)'}(x, t)$ e $\phi(x, t)$ são dados pelas Equações 4.24 e 4.25.

A energia cinética total da viga sanduíche pode ser descrita em termos dos deslocamentos axial e transversal, ou seja:

$$T_{\text{total}} = T_x^{(1)} + T_x^{(2)} + T_x^{(v)} + T_z^{(1,2,v)}, \quad (4.36)$$

na qual $T_x^{(\cdot)}$ e $T_z^{(\cdot)}$ se referem, respectivamente, às parcelas do movimento da camada “(.)” na direção x e z . Cada uma destas parcelas é dada por:

$$T_x^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho^{(i)} \left[\dot{u}^{(i)}(x, z_i, t) \right]^2 dVol, \quad (4.37)$$

$$T_x^{(v)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho^{(v)} \left[\dot{u}^{(v)}(x, z_i, t) \right]^2 dVol, \quad (4.38)$$

$$T_z^{(1,2,v)} = \frac{1}{2} \int_{Vol} \dot{w}_0(x, t)^2 \left(\rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \rho^{(v)} \right) dVol, \quad (4.39)$$

sendo $\rho^{(\cdot)}$ a densidade do material da camada (.). Semelhantemente, substituindo os campos de deslocamento $u^{(i)}(x, z_i, t)$ e $u^{(v)}(x, z_v, t)$ nas Equações 4.37 e 4.38, tem-se:

$$T_x^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} b\rho^{(i)} \left[\dot{u}_0^{(i)}(x, t) - z_i \dot{w}'_0(x, t) \right]^2 dz_v dx, \quad (4.40)$$

$$T_x^{(v)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_v}{2}}^{\frac{h_v}{2}} b\rho^{(v)} \left[\dot{u}_0^{(v)}(x, t) + z_v \left\{ \dot{\phi}(x, t) - \frac{4z_v^2 [\dot{\phi}(x, t) + \dot{w}'_0(x, t)]}{3(h_1 + h_2 + h_v)^2} \right\} \right]^2 dz_v dx. \quad (4.41)$$

Considerando um carregamento transversal $F(t)$ aplicado na extremidade $x = L$ da viga, isto é, $F(L, t) = F(t)$, ilustrado na Figura 41, tem-se que o trabalho virtual realizado por este carregamento é dado por:

$$\delta W = \int_0^L F(x, t) \delta w_0(x, t) dx = F(t) \delta w_0(L, t), \quad (4.42)$$

sendo $\delta w_0(L, t)$ o deslocamento transversal virtual da viga em $x = L$.

Substituindo as funções energéticas na Equação 4.15, tem-se que a equação de movimento da viga sanduíche é expressa em termos de $u_0^{(1)}(x, t)$, $u_0^{(2)}(x, t)$ e $w_0(x, t)$. A solução destas variáveis deve satisfazer tanto o princípio de Hamilton quanto as condições de contorno geométricas, que no caso de uma viga engasta-livre são dadas por:

$$u_0^{(i)}(0, t) = 0, \quad w_0(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w_0(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (4.43)$$

A solução do problema pode ser aproximada por uma expansão finita na forma (PETYT, 1990, p. 53):

$$\begin{aligned} u_0^{(i)}(x, t) &\cong \tilde{u}_0^{(i)}(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j^u(x) q_j^n(t), \\ w_0(x, t) &\cong \tilde{w}_0(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j^w(x) q_j^n(t), \end{aligned} \quad (4.44)$$

sendo $q_j^n(t)$ funções temporais desconhecidas e $\varphi_j^{(\cdot)}(x)$ funções prescritas de x , as quais devem satisfazer as condições de contorno geométricas.

Realizando integrações por partes na equação de movimento e substituindo a Equação 4.44 nesta, o sistema passa a possuir um número finito de graus de liberdade, e pode ser expresso por:

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}^n\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}^n\} = \{\mathbf{f}^n\}. \quad (4.45)$$

As matrizes de massa $[\mathbf{M}]$ e de rigidez $[\mathbf{K}]$ podem ser obtidas através das expressões das energias totais (Equações 4.36 e 4.29) pela substituição da Equação 4.44 nestas, obtendo-se portanto:

$$\begin{aligned} T_{\text{total}} &= \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}^n\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}^n\}, \\ U_{\text{total}} &= \frac{1}{2} \{\mathbf{q}^n\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}^n\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O vetor $\{f^n\}$, que contém as forças generalizadas f_j^n , é obtido através do trabalho virtual realizado pela força $F(t)$, ou seja:

$$\begin{aligned}\delta W = F(t)\delta w_0(L) &= F(t) \sum_{j=1}^n \varphi_j^w(L)\delta q_j^n(t), \\ &= \sum_{j=1}^n f_j^n \delta q_j^n(t),\end{aligned}\quad (4.47)$$

sendo:

$$f_j^n = \varphi_j^w(L)F(t). \quad (4.48)$$

No método de elementos finitos as expressões energéticas são avaliadas para cada elemento, e isto resulta nas matrizes elementares de massa e de rigidez. Neste caso, as funções prescritas $\varphi_j^{(\cdot)}(x)$ que envolvem todo o domínio espacial do sistema são substituídas por funções elementares (locais), e a Equação 4.44 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0^{(i)}(x, t) &= \bigcup_e u_e^{(i)}(\xi)q(t), \\ \tilde{w}_0(x, t) &= \bigcup_e w_e(\xi)q(t),\end{aligned}\quad (4.49)$$

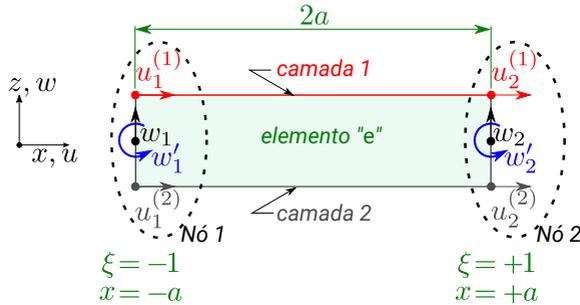
na qual o símbolo \bigcup_e representa a união (contribuição) de cada elemento “e”, e $u_e^{(i)}(\xi)$ e $w_e(\xi)$ são os campos de deslocamento elementar axial e transversal, dados por:

$$\begin{aligned}u_e^{(i)}(\xi) &= \{h^u(\xi)\} \{u_e^{(i)}\}^T, \\ w_e(\xi) &= \{h^w(\xi)\} \{w_e\}^T.\end{aligned}\quad (4.50)$$

Os vetores $\{h^u(\xi)\}$ e $\{h^w(\xi)\}$ contêm as funções de forma para o deslocamento axial e transversal, e $\{u_e^{(i)}\}$ e $\{w_e\}$ são os deslocamentos nodais axial e transversal do elemento “e”.

Pelo fato das expressões energéticas envolverem derivada primeira de u_0 com relação a x e segunda de w_0 , então a função de forma

Figura 42 – Geometria do elemento finito de viga sanduíche (*Sandwich08*).



Fonte:Elaborado pelo autor.

$\{h^u(\xi)\}$ deve ter pelo menos continuidade C^0 e a função $\{h^w(\xi)\}$ ter continuidade C^1 (PETYTT, 1990, p. 56). Além do mais, como os campos de deslocamento são dependentes das variáveis $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, w_0 e w'_0 , cada nó do elemento finito de viga sanduíche deve conter quatro graus de liberdade, totalizando oito graus de liberdade por elemento, nomeado neste trabalho de *Sandwich08* e ilustrado na Figura 42.

Para descrever os campos de deslocamento axial de cada elemento de viga, foram adotadas as seguintes funções de forma lineares:

$$\{h^u(\xi)\}^T = \begin{Bmatrix} h_1^u(\xi) \\ h_2^u(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi) \end{Bmatrix}, \quad (4.51)$$

e para o campo transversal foram adotados os polinômio de Hermite, dados por (PETYTT, 1990, p. 88):

$$\{h^w(\xi)\}^T = \begin{Bmatrix} h_1^w(\xi) \\ h_2^w(\xi) \\ h_3^w(\xi) \\ h_4^w(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{Bmatrix}, \quad (4.52)$$

sendo “ ξ ” a coordenada espacial de cada elemento e “ $2a$ ” o comprimento do elemento. Com estas duas equações, a Equação 4.50 pode também

ser reescrita na seguinte forma:

$$\{\Delta_e(\xi)\} = \left\{ u_e^{(1)}(\xi) \quad w_e(\xi) \quad u_e^{(2)}(\xi) \right\}^T = [\mathbf{H}(\xi)] \{d_e\}^T, \quad (4.53)$$

na qual $\{\Delta_e(\xi)\}$ representa os campos de deslocamento elementar,

$$\{d_e\}^T = \left\{ \overbrace{u_1^{(1)} \quad w_1 \quad w_1' \quad u_1^{(2)}}^{\text{Nó 1}} \quad \overbrace{u_2^{(1)} \quad w_2 \quad w_2' \quad u_2^{(2)}}^{\text{Nó 2}} \right\}, \quad (4.54)$$

o vetor com os deslocamentos/rotações nodais e:

$$[\mathbf{H}(\xi)] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\xi) & \mathbf{H}_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

a matriz com as funções de forma do elemento finito, sendo:

$$[\mathbf{H}_1(\xi)] = \begin{bmatrix} h_1^u(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^w(\xi) & h_2^w(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1^u(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

e

$$[\mathbf{H}_2(\xi)] = \begin{bmatrix} h_2^u(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3^w(\xi) & h_4^w(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2^u(\xi) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Por fim, com auxílio da Equação 4.53, a solução aproximada do problema, Equação 4.49, pode agora ser descrita em termos dos deslocamentos/rotações nodais e das funções de forma. Substituindo esta solução aproximada nas expressões energéticas, e sabendo que os módulos complexos $G^{*(v)}$ e $E^{*(v)}$ do material viscoelástico variam na frequência e na temperatura, as matrizes elementares de massa $[\mathbf{M}_e]$ e de rigidez $[\mathbf{K}_e^*(f, T)]$ podem ser determinadas através das expressões:

$$\begin{aligned} T_{\text{total}} &= \bigcup_e \frac{1}{2} \{d_e\}^T [\mathbf{M}_e] \{d_e\} \dot{q}(t)^2, \\ U_{\text{total}} &= \bigcup_e \frac{1}{2} \{d_e\}^T [\mathbf{K}_e^*(f, T)] \{d_e\} q(t)^2, \end{aligned} \quad (4.58)$$

que, quando unidas para toda a viga, fornecem as matrizes globais de todo o sistema. Assim, a equação de movimento pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K^*(f, T)] \{d\} = \{f\}, \quad (4.59)$$

sendo:

$$[M] = \bigcup_e [M_e], \quad [K^*(f, T)] = \bigcup_e [K_e^*(f, T)] \quad \text{e} \quad \{d\} = \bigcup_e [H(\xi)] \{d_e\}^T q_e(t) \quad (4.60)$$

Desta forma, o problema se resume em determinar os deslocamentos nodais $\{d_e\}$ de toda a viga sanduíche através da solução da Equação 4.59. Neste trabalho as matrizes $[M_e]$ e $[K_e^*(f, T)]$ foram desenvolvidas analiticamente no programa computacional Mathematica (2014), e estas foram implementadas na linguagem de programação *Python*⁷, apresentadas no Apêndice B, para então obter a solução numérica da Equação 4.59, conforme apresentado a seguir.

4.3.2.2 Ajuste do Modelo

Conforme apresentado previamente na subseção 4.3.1, os parâmetros modais de uma estrutura elástica, como uma viga de aço a temperatura ambiente, possuem valores que estão diretamente relacionados ao módulo de elasticidade e fator de perda do material. No caso de uma estrutura composta por materiais elásticos e um viscoelástico, com o módulo complexo dependente da frequência e da temperatura, como uma viga sanduíche, cada conjunto de n parâmetros modais desta estrutura pode, de certa forma, ser relacionado aos valores dos módulos (constantes) das partes elásticas e também com um só valor do módulo complexo do viscoelástico. Neste caso, estes parâmetros modais não são os mesmos que aqueles para uma temperatura constante, mas sim para

⁷ <<https://www.python.org/>>

uma frequência reduzida constante, conforme ilustrado anteriormente na Figuras 39 e 40 para $f_R = 10^4$, para o sistema massa-mola da Figura 36. Abordando então o problema em cada frequência reduzida, tem-se que todos os módulos de elasticidade, de cisalhamento e fatores de perda da estrutura são constantes, e isto permite que o método modal seja aplicado para calcular eficientemente os parâmetros modais para cada frequência reduzida.

A proposta de ajuste aqui apresentada consiste basicamente em realizar o procedimento inverso a este, ou seja, com base nos parâmetros modais experimentais da estrutura, expressos para cada frequência reduzida (Equações 4.7 e 4.8), determinar, através de técnicas de ajuste de modelos, o valor do módulo complexo do material viscoelástico também para cada frequência reduzida. Este módulo complexo estará “ajustado” para a dada frequência reduzida quando o modelo numérico simular razoavelmente bem os parâmetros modais experimentais da estrutura. Realizando este procedimento para toda a faixa de frequência reduzida (vetor f_R determinado de acordo com a subseção 4.3.1) o módulo complexo do material viscoelástico estará então caracterizado para a faixa de temperatura avaliada.

O modelo numérico utilizado para simular os parâmetros modais da viga sanduíche foi aquele apresentado na subseção 4.3.2.1. O ajuste do módulo complexo foi realizado de maneira tal que o seguinte erro quadrático médio:

$$E[E^*(f_R)] = \sum_{n=1}^N \lambda_1 \left\{ \log_{10} [f_n^{\text{Num}}(E^*(f_R))] - \log_{10} [f_n^{\text{Teo}}(f_R)] \right\}^2 + \lambda_2 \left\{ \log_{10} [\eta_n^{\text{Num}}(E^*(f_R))] - \log_{10} [\eta_n^{\text{Teo}}(f_R)] \right\}^2, \quad (4.61)$$

fosse minimizado para cada frequência reduzida f_R , na qual λ_1 e λ_2 são as ponderações dadas aos erros dos N parâmetros modais, f_n^{Teo} e η_n^{Teo} são os parâmetros modais experimentais de cada modo n , descritos pelas Equações 4.7 e 4.8, e f_n^{Num} e η_n^{Num} os parâmetros modais numéricos.

Estes parâmetros numéricos foram extraídos das FRFs numéricas, as quais foram calculadas de acordo com a Equação 3.34 com auxílio do método modal. Para o cálculo dos fatores de perda a Equação 2.11 foi utilizada. Assim, o módulo $E^*(f_R)$ foi calculado um a um para toda a faixa de frequência reduzida. Esta função objetivo, Equação 4.61, foi assim definida pelo fato dos transdutores de medição das FRFs serem do tipo sem contato, onde as frequências de ressonâncias e fatores de perda podem ser medidas com precisão, conforme apresentado no final da subseção 3.3.2.

Todo este procedimento foi realizado através de um algoritmo implementado na linguagem de programação *python*. Para minimizar o erro quadrático médio foi utilizado também o algoritmo de otimização *Evolução Diferencial* (STORN; PRICE, 1995), acessível no *Python* pelo comando `<scipy.optimize.differential_evolution>`⁸. Após determinados os valores (discretos) do módulo complexo do material viscoelástico para cada frequência reduzida, foram determinadas também as constantes do seguinte modelo fracionário:

$$E^*(f_R) = \frac{E_0 + E_1(i f_R)^\beta}{1 + b(i f_R)^\beta}, \quad (4.62)$$

sendo $f_R = f\alpha(T)$ a frequência reduzida determinada de acordo com a subseção 4.3.1. Os parâmetros da função de deslocamento (subseção 2.2.1.1) foram determinados também para cada material, porém, por mínimos quadrados⁹. Assim, o resultado de caracterização do módulo complexo de cada material será expresso pelo nomograma de frequência reduzida e também pelas constantes do modelo fracionário e da função $\alpha(T)$. Para verificar os possíveis erros envolvidos nos resultados, os

⁸ Maiores informações sobre este comando são apresentadas em: http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.optimize.differential_evolution.html

⁹ Este ajuste por mínimos quadrados foi realizado com auxílio de um algoritmo de ajuste de curvas implementado no Python sob o comando `<scipy.optimize.curve_fit>`.

parâmetros modais experimentais e numéricos serão comparados para cada modo em função das temperaturas avaliadas.

4.4 Síntese

Neste capítulo foram apresentados os detalhes da metodologia proposta neste trabalho. Inicialmente, foi apresentada uma visão geral do método com destaque à semelhança entre a variação dos parâmetros modais da viga sanduíche com a variação do módulo complexo do material viscoelástico, ambos no domínio da frequência reduzida. Em seguida apresentaram-se os detalhes das amostras e dos equipamentos utilizados, bem como da execução dos experimentos e tratamentos dos dados. Após isto, apresentou-se o procedimento para que os parâmetros modais experimentais sejam descritos pelos modelos de derivadas fracionárias no domínio da frequência reduzida. Para caracterizar o módulo complexo dos materiais viscoelásticos foi formulado um elemento finito de viga sanduíche, chamado de *Sandwich08*, para realizar as simulações dos parâmetros modais da viga. Assim, através de técnicas de ajuste de modelos, utilizando o método modal para o cálculo dos parâmetros modais da viga, o módulo complexo do material foi determinado para toda a faixa de frequência e de temperatura experimentada. Para analisar os possíveis erros envolvidos nos resultados, os parâmetros modais experimentais e numéricos serão confrontados. Os detalhes expostos neste capítulo definiram como a pesquisa foi conduzida para que os resultados apresentados e analisados no capítulo a seguir fossem alcançados.

5 Apresentação e Análise dos Resultados

O propósito deste capítulo é fazer a apresentação e análise dos resultados de caracterização obtidos neste trabalho. Primeiramente, será realizada uma validação do elemento finito de viga sanduíche (Sandwich08), iniciando com uma análise de convergência e seguindo com a validação da resposta com dados analítico, experimental e numérico (obtido com o programa comercial Nastran). Na sequência, serão apresentadas as etapas e os resultados de caracterização das amostras, a comparação dos parâmetros modais experimentais com os numéricos e, por fim, uma análise adicional sobre o efeito da energia de deformação longitudinal do viscoelástico na resposta da viga e também devido aos valores extremos do coeficiente de Poisson. Será apresentada também, ao final, uma avaliação dos resultados de caracterização de um material viscoelástico obtidos com esta proposta e através da norma ASTM E756.

5.1 Validação do Elemento de Viga Sanduíche

Antes de realizar as simulações das vigas sanduíches, foi realizada uma análise da validade dos resultados obtidos com o elemento Sandwich08, conforme é apresentada a seguir.

5.1.1 Análise de convergência

Esta análise foi realizada através de uma investigação da convergência das frequências de ressonâncias na extremidade de uma viga engastada-livre, sendo que estas frequências foram obtidas a partir das FRFs simuladas por elementos finitos utilizando o método direto de

resposta em frequência. Assim, a análise foi realizada através de um refinamento gradual e uniforme da malha (aumentando-se o número de elementos), comparando-se a solução obtida em cada refinamento com aquela de um refinamento mais elevado (com 64 elementos).

O modelo considerado foi uma viga sanduíche com 614,4 mm de comprimento, 25,4 mm de largura, composta por duas camadas elásticas de aço (externas), com espessura de 6,35 mm e uma camada intermediária delgada, 0,1016 mm, de material viscoelástico. A densidade das camadas elástica e viscoelástica considerada foi de 7800 kg/m³ e 1102,64 kg/m³, respectivamente, o módulo de elasticidade das camadas elástica de 210 GPa e o cisalhante do viscoelástico dado por:

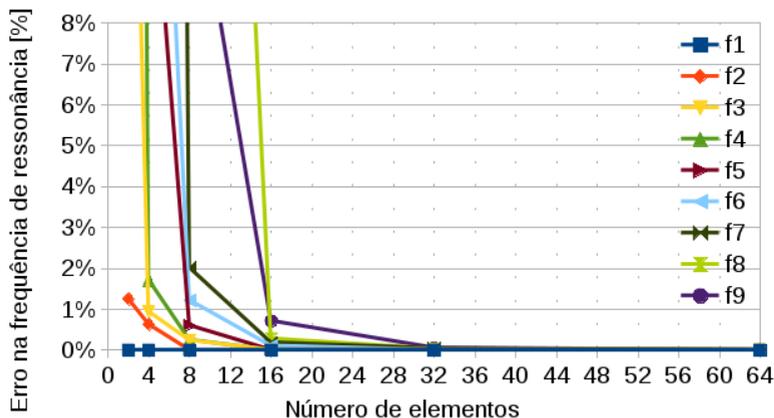
$$G(f) = 6895 e^{0,579 \ln(f)+1,136+i[0,601 \ln(f)+1,144]}. \quad (5.1)$$

As dimensões e propriedades desta viga são as mesmas que aquelas apresenta por Lu e Douglas (1974), chamada de amostra 1 por estes autores, exceto a condição de contorno que neste é engastada-livre. A excitação foi realizada por uma força unitária aplicada na extremidade livre da viga e o cálculo da resposta de deslocamento transversal foi realizado também neste ponto. A análise foi realizada com auxílio do *Método Direto de Resposta em Frequência* na faixa de 10 Hz a 5000 Hz, com uma discretização logarítmica de 2000 pontos nesta faixa.

Esta análise foi iniciada com a solução (cálculo das frequências de ressonância) para uma discretização com dois elementos e, então, dobrada a cada análise subsequente, tal que cada malha (exceto a inicial) contivesse a malha anterior. Na Figura 43 é apresentado o resultado da convergência das soluções para cada refinamento. Pode-se perceber nestes resultados a evidência da convergência das soluções (de todas as frequências de ressonâncias) por elementos finitos das malhas refinadas.

Esta avaliação foi repetida para as demais vigas aqui analisadas (considerando as propriedade do material viscoelástico acima) e foram

Figura 43 – Convergência das frequências de ressonância na extremidade de uma viga sanduíche engastada-livre.



Fonte:Elaborado pelo autor.

encontrados resultados semelhantes, com o erro se estabilizando a partir de 32 elementos. Assim, nas soluções por elementos finitos dos modelos aqui avaliados foi considerada uma discretização de 40 elementos.

Uma avaliação adicional verificou o tempo de processamento deste modelo com esta discretização, processado num microcomputador com processador i7 Quad-Core de 3,60 GHz e 16 GB de memória RAM. Considerando a mesma faixa de frequência, foram realizadas 10 simulações de FRFs para cada um dos métodos de solução, o modal e o método direto de resposta em frequência. Como resultado, o método modal apresentou um tempo médio de 0,16 s e o direto de 8,46 s, ou seja, o método modal foi cerca de 53 vezes mais rápido.

5.1.2 Validação Analítica, Experimental e Numérica

Para verificar a validade das soluções obtidas com o elemento Sandwich08, foi realizada a comparação de impedâncias mecânicas (FRFs) pontuais de três casos de vigas, apresentada a seguir.

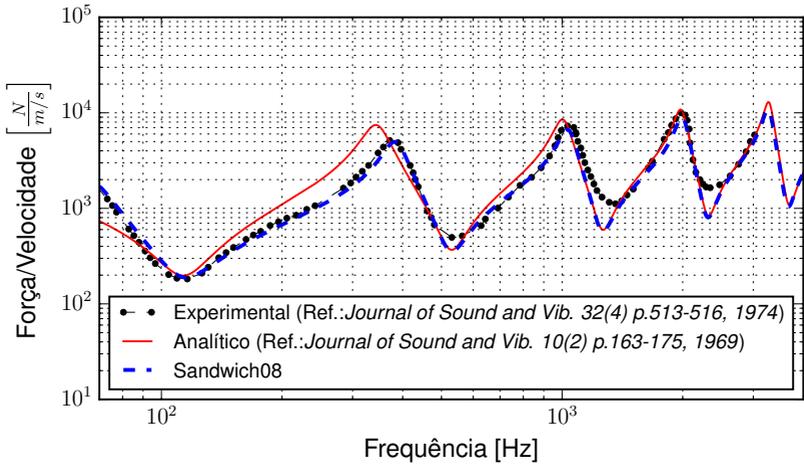
No primeiro caso, a viga analisada foi aquela apresentada na seção anterior (amostra 1), com uma camada de viscoelástico relativamente fina e com alto amortecimento, porém, na condição *livre-livre* e com os pontos de excitação e de resposta no centro da viga. A discretização adotada foi de 40 elementos e o método direto de resposta em frequência foi aplicado para simular a FRF na mesma faixa de frequência. Assim, a FRF numérica foi comparada com a experimental apresentada por Lu e Douglas (1974) e também com a FRF analítica, calculada de acordo com a teoria de Mead e Markus (subseção 3.3.1.2). Neste caso, a FRF analítica foi obtida com auxílio do programa computacional Mathematica (2014). Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 44. Analisando estes resultados percebe-se que ocorreu uma certa discrepância para os dados analíticos na faixa inicial de frequência. Ademais, os resultados apresentaram-se razoavelmente coincidentes.

A segunda avaliação teve por objetivo fazer uma validação para uma condição de contorno assimétrica. Para isto, a análise anterior foi repetida com o mesmo modelo, porém, na condição *engastada-livre*. Neste caso a FRF numérica foi comparada apenas com a analítica. Os resultados estão apresentados na Figura 45, onde pode-se perceber que as FRFs apresentaram valores praticamente idênticos para toda faixa de frequência analisada.

Por fim, a última validação foi realizada para o caso da amostra 2 apresentada por Lu e Douglas (1974), uma viga sanduíche *livre-livre* com 460,38 mm de comprimento, 50,8 mm de largura, e as três camadas com espessura de 6,35 mm. As densidades consideradas para as camadas elástica (externas) e viscoelástica (interna) foram de 7800 kg/m³ e 1000,62 kg/m³, respectivamente, o módulo de elasticidade das camadas elástica foi de 210 GPa e o módulo complexo de cisalhamento da camada viscoelástica é dado por (LU; DOUGLAS, 1974):

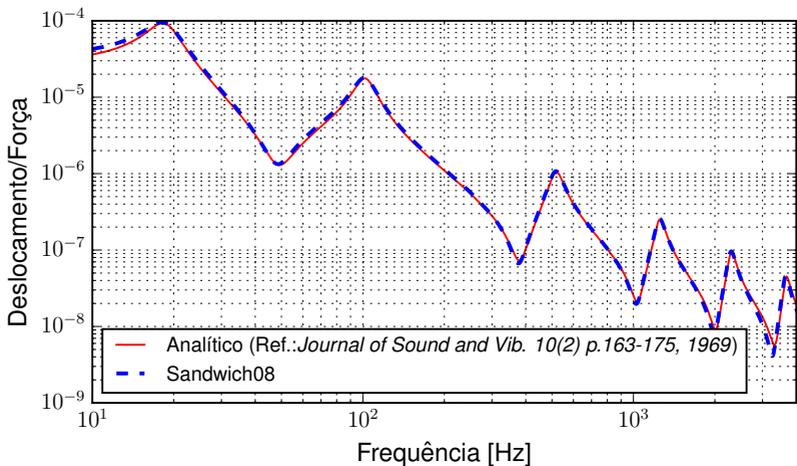
$$G(f) = 6895 e^{0,26 \ln(f)+4,754+i[0,17 \ln(f)+2,705]}. \quad (5.2)$$

Figura 44 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 1 na condição de livre-livre.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 1 na condição engastada-livre.



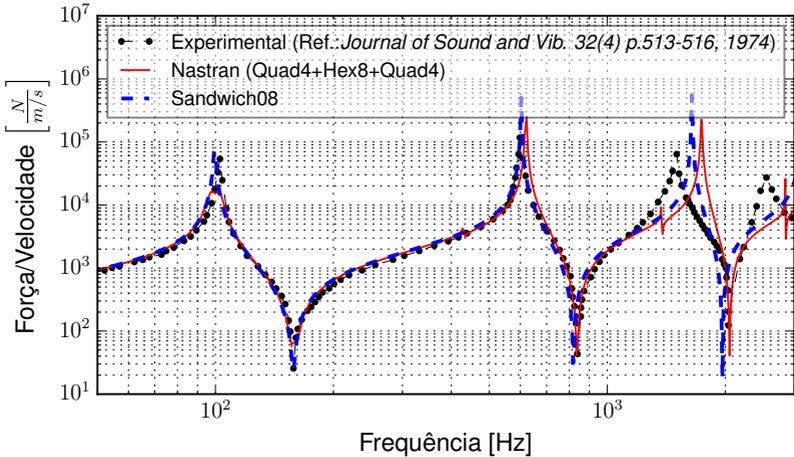
Fonte:Elaborado pelo autor.

Comparando-se a camada viscoelástica desta amostra com a anterior, verifica-se que esta é relativamente espessa e com baixo amortecimento. A faixa de frequência analisada foi de 50 a 3000 Hz, a excitação considerada foi uma força unitária aplicada no centro da viga. O cálculo da resposta também foi realizado para este ponto. Para validar a FRF numérica obtida com o elemento Sandwich08, foi realizada a comparação desta com os dados experimentais apresentados por Lu e Douglas (1974) e também com a FRF numérica calculada através do programa comercial Nastran (2004). Neste, a estratégia adotada para modelar a viga foi a mesma que aquela apresentada na Figura 31, com uma discretização de 72 elementos no comprimento, 8 na largura e 1 na espessura. A solução foi obtida através da *Análise Direta de Resposta em Frequência* (Solution 108) e o módulo cisalhante do viscoelástico foi disposto na forma de tabela num arquivo com extensão `.dat`.

Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 46, onde verifica-se que para baixas frequências as FRFs apresentaram valores relativamente próximos e que as frequências de ressonância nas altas frequências dos modelos numéricos apresentam valores mais elevados e menos amortecidos que os experimentais. Numa comparação realizada por Lu e Douglas (1974) de um modelo analítico com estes mesmos dados experimentais foi verificada uma discrepância semelhante a esta. Como estes dados experimentais foram medidos com sensores de contato, atribui-se que o surgimento destas discrepâncias em altas frequências possa estar relacionado ao efeito da massa sísmica dos sensores utilizados. Para toda a faixa de frequência os modelos numéricos apresentam frequências de ressonância e amortecimento razoavelmente semelhantes, com pequenas diferenças na altas frequências.

Assim, verifica-se que o modelo de viga sanduíche formulado neste trabalho descreve razoavelmente bem as frequências de ressonância das vigas analisadas bem como a amplitude (ou o amortecimento) nas respostas em frequência.

Figura 46 – Impedância mecânica pontual para a viga sanduíche com a amostra 2 na condição livre-livre.



Fonte:Elaborado pelo autor.

5.2 Caracterização das Amostras

As amostras apresentadas na Tabela 4 (subseção 4.2.2) foram caracterizadas de acordo com a metodologia proposta no Capítulo 4. Foram realizadas primeiramente medições de FRFs das amostras (na sua própria configuração de aplicação) coladas à viga base dentro da câmara com temperatura controlada. Para cada temperatura foi realizada uma medição. Para a amostra do material ADC006 a faixa de temperatura avaliada foi de -25 a 60°C e para os demais materiais de -30 a 50°C . Realizadas as medições, os dados de FRFs foram armazenados em arquivos ASCII para que as análises fossem realizadas.

Nesta seção são apresentados apenas os resultados de caracterização obtidos para o material 1229SN08. Os resultados dos demais estão apresentados no Apêndice C. Primeiramente, são expostos os resultados da análise inicial e preparação dos dados experimentais e, na sequência, a função de deslocamento e o módulo complexo deste material.

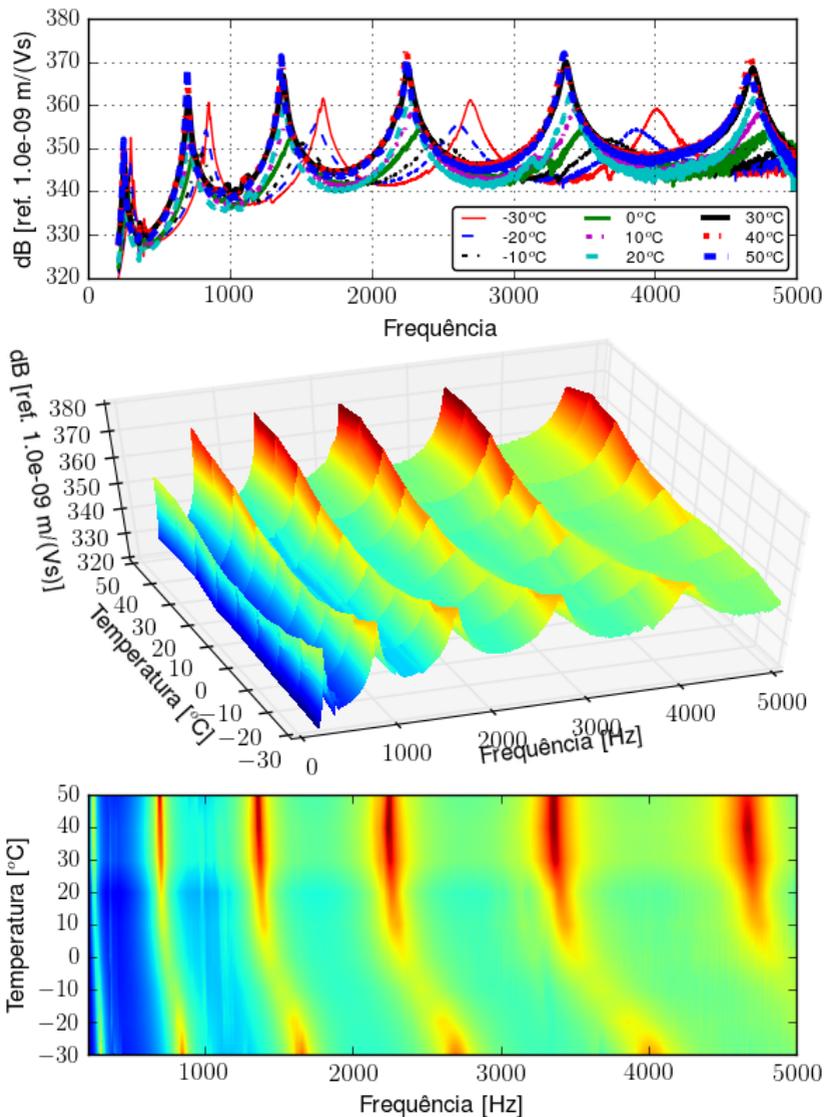
5.2.1 Parâmetros Modais Experimentais

Na Figura 47 são apresentadas as FRFs experimentais, de velocidade/tensão, da viga com o material 1229SN09. Para os demais materiais, as FRFs estão apresentadas no Apêndice C. Pode-se perceber que na região próxima a -10°C o comportamento modal (frequências de ressonâncias e fatores de perda) sofre maiores variações e, também, que as temperaturas avaliadas cobrem a região borrachosa, de transição e uma pequena parte da região vítrea do material. Como a câmara climatizada era limitada à temperatura de -30°C , não foi possível realizar medições em temperaturas inferiores a esta. Os parâmetros modais do primeiro modo ($n = 1$) foram descartados pelo fato de serem poucos sensíveis às variações do módulo complexo do material viscoelástico e, também, por serem mais sensíveis ao sistema de engaste. Os parâmetros modais do sétimo modo ($n = 7$) também foram descartados pelo fato da frequência de ressonância deste modo ultrapassar a faixa de frequência avaliada nas temperaturas inferiores a -10°C .

Para verificar a possibilidade de aplicação desta metodologia, foi realizada primeiramente uma análise dos parâmetros modais experimentais da viga plotados em diagramas de $\eta_n^{\text{Exp}} \times f_n^{\text{Exp}}$, ou seja diagramas *Wicket Plot*, apresentados na Figura 48. Observa-se que a distribuição dos parâmetros modais se encontra dentro de uma única tendência, com poucos pontos dispersos, independente da temperatura em que foram medidos. Conforme apresentado na subseção 4.2.4 esta é a sequência esperada para que o princípio da superposição frequência-temperatura possa ser aplicado e, conseqüentemente, esta metodologia. Assim, pôde-se então dar sequência aos procedimentos numéricos.

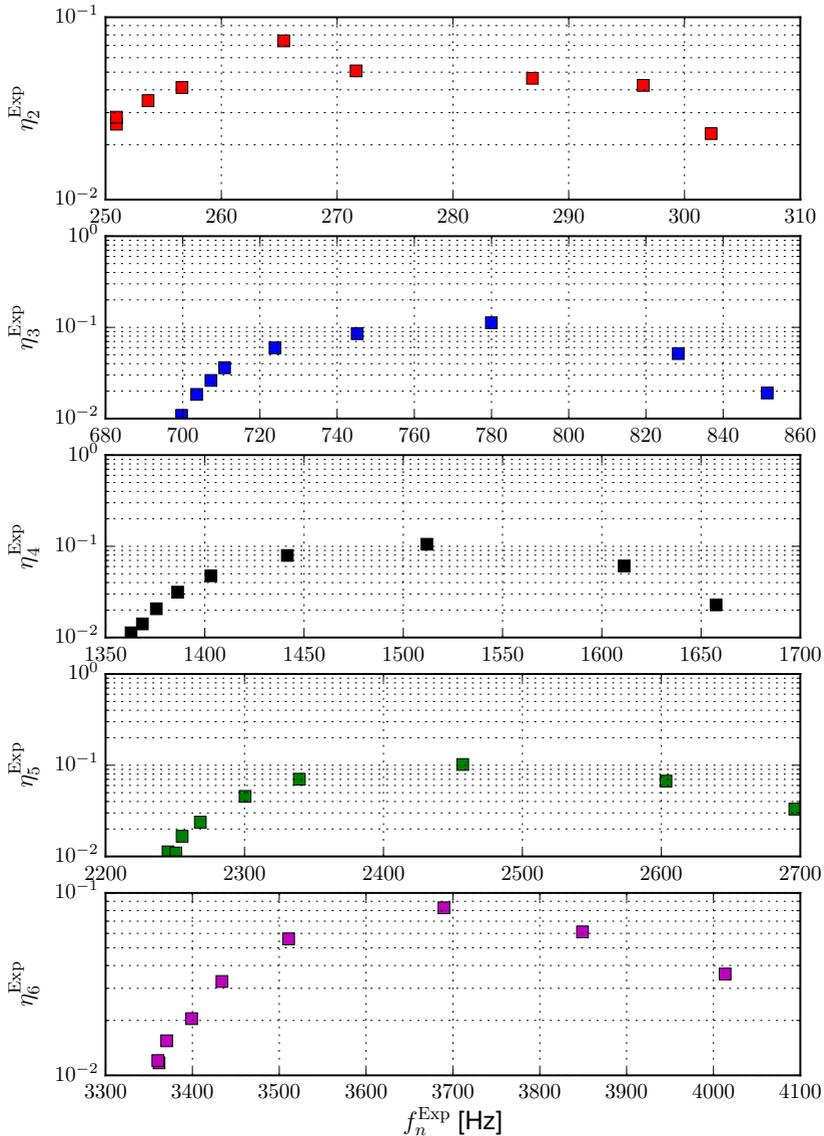
Para a execução dos procedimentos numéricos foram estimados inicialmente os fatores de deslocamento ($\alpha(T)$) necessários para agrupar os parâmetros modais experimentais (f_n^{Exp} e η_n^{Exp}) numa sequência suave no domínio da frequência reduzida (f_R). Com posse destes valores, foram

Figura 47 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN08.



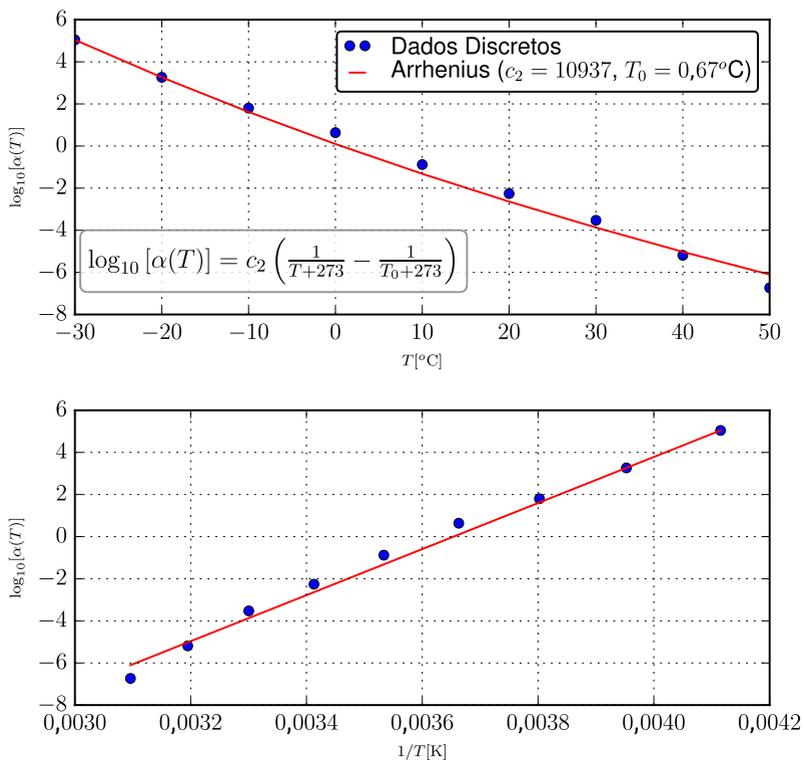
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Wicket plot dos parâmetros modais experimentais e teóricos da viga com o material 1229SN08.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Fator de deslocamento para o material 1229SN08.

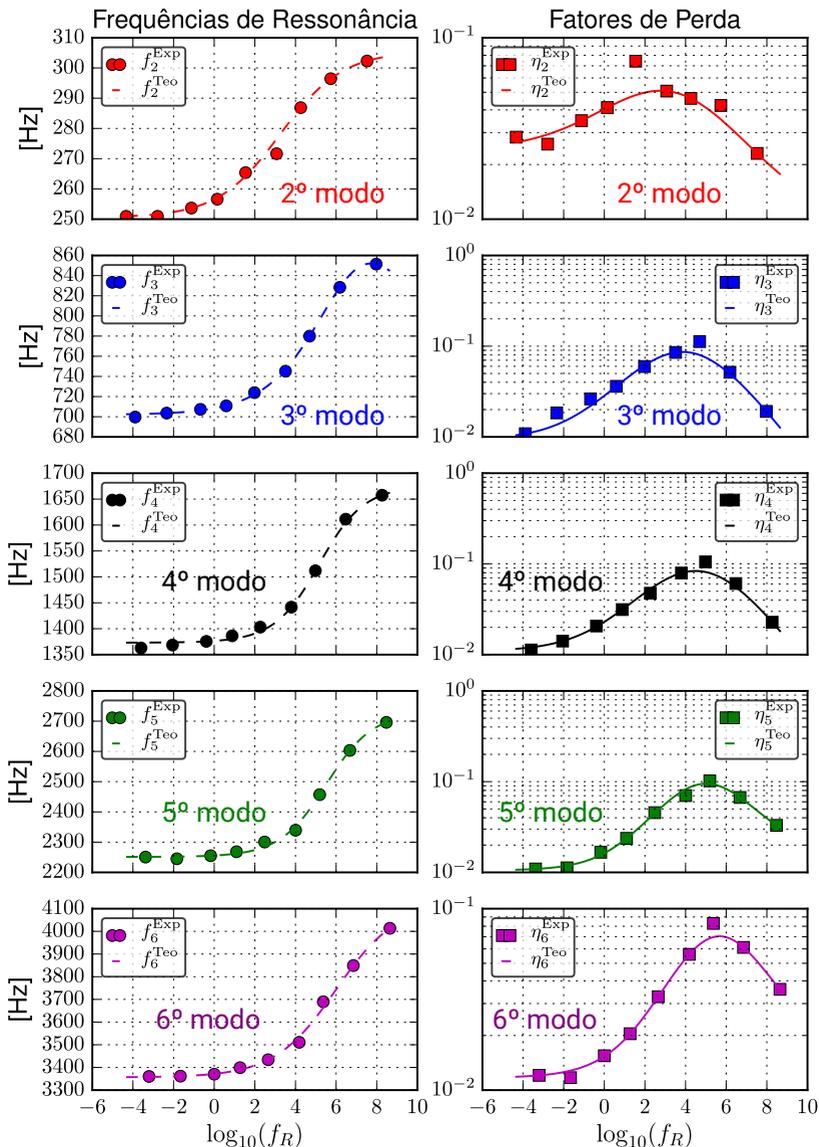


Fonte:Elaborado pelo autor.

realizadas também estimativas das constantes dos modelos fracionários f_n^{Teo} e η_n^{Teo} , dados pelas Equações 4.7 e 4.8, para descrever teoricamente os valores de f_n^{Exp} e η_n^{Exp} no domínio f_R . Após isto, estas estimativas foram ajustadas seguindo os procedimentos numéricos apresentados na subseção 4.3.1. O resultado obtido para $\alpha(T)$ está representado na Figura 49 e para f_n^{Teo} e η_n^{Teo} na Figura 50, plotados juntamente com os parâmetros modais experimentais (f_n^{Exp} e η_n^{Exp}) para cada modo n .

Verifica-se na Figura 49 que os dados discretos de $\log_{10}[\alpha(T)]$

Figura 50 – Nomograma de frequência reduzida dos parâmetros modais experimentais e teóricos da viga com o material 1229SN08.



Fonte:Elaborado pelo autor.

apresentam comportamento linear na escala $1/T$, o que permite a utilização do modelo de Arrhenius (Equação 2.5) para a descrição de tais valores. Portanto, as constantes deste modelo foram ajustadas, e expostas também nesta figura, para que este modelo descreva os dados discretos com uma incerteza relativamente baixa para todas as temperaturas.

De maneira semelhante, os resultados apresentados na Figura 50 evidenciam que os modelos teóricos f_n^{Teo} e η_n^{Teo} descrevem razoavelmente bem os parâmetros modais experimentais para toda a faixa de frequência reduzida, ou seja, para todas as temperaturas avaliadas. Observa-se ainda que estes parâmetros modais, para todos os modos n , apresentam comportamento semelhante ao módulo de armazenamento e fator de perda de um material viscoelástico típico no domínio f_R , conforme ilustrado na Figura 20.

Com posse da função $\alpha(T)$ e dos modelos fracionários ajustados para descrever cada parâmetro modal experimental no domínio f_R , pode-se então dar sequência ao cálculo do módulo complexo do material viscoelástico, apresentado a seguir.

5.2.2 Módulo Complexo

A determinação numérica do módulo complexo dos materiais analisados foi realizada de acordo com os procedimentos apresentados na subseção 4.3.2. Conforme estabelecido nesta subseção, o módulo complexo do material viscoelástico foi determinado através de técnicas de ajuste de modelos para cada frequência reduzida. A quantidade de pontos (frequência reduzida) para realizar a caracterização é arbitrária, mas deve contemplar a faixa de temperatura ensaiada. No entanto, quanto mais pontos, mais preciso poderá ser o resultado. Assim, a frequência reduzida adotada nestes cálculos foi obtida pela multiplicação da terceira frequência de ressonância, de cada temperatura T medida,

pelo respectivo fator de deslocamento, ou seja:

$$\{f_R\} = \bigcup_T f_3^{\text{Exp}}(T)\alpha(T). \quad (5.3)$$

Para cada frequência reduzida, o valor do módulo complexo do material foi variado e os parâmetros modais numéricos foram calculados, utilizando o método modal, e comparados aos experimentais (descritos pelos modelos teóricos f_n^{Teo} e η_n^{Teo}). Quando a diferença entre os parâmetros modais experimentais e numéricos fosse notavelmente pequena, considerava-se caracterizado o módulo complexo para esta dada frequência reduzida e, então, repetia-se este processo para a próxima f_R até contemplar todas as frequências reduzidas. O resultado obtido está apresentado na Figura 51 através do módulo de armazenamento (E') e do fator de perda (η). Estes dados estão representados também na Figura 52 no diagrama Wicket Plot. Nestas simulações a relação entre os módulos E^* e G^* foi expressa pela Equação 1.24, considerando um fator de Poisson de 0,499, conforme apresentado na subseção 4.2.1.

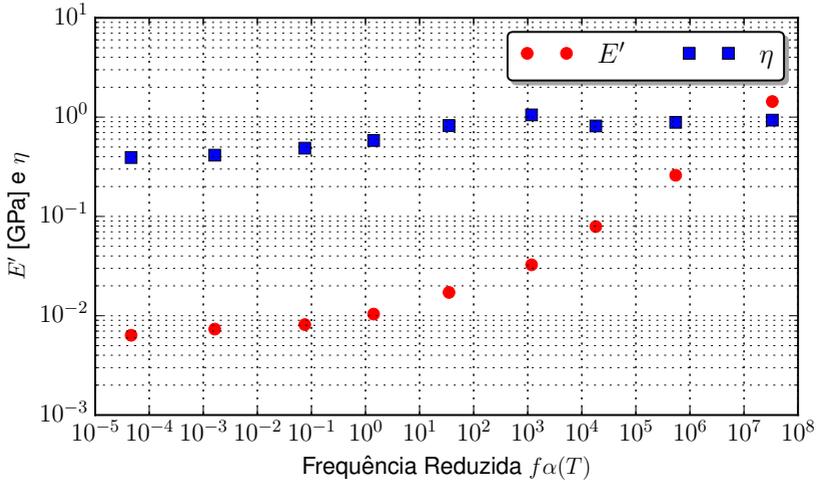
Analisando as Figuras 51 e 52 verifica-se que o módulo complexo, calculado para as temperaturas medidas, contempla uma quantidade de dados maior nas regiões borrachosa e de transição do que na vítrea. Para obter mais dados (ou alguns) na região vítrea seria necessário realizar medições de FRFs em temperaturas inferiores a -30°C .

Conforme apresentado na subseção 4.3.2.2, o modelo de derivadas fracionárias, dado por:

$$E^*(f\alpha(T)) = \frac{E_0^* + E_1^*(if\alpha(T))^\beta}{1 + b(if\alpha(T))^\beta}, \quad (5.4)$$

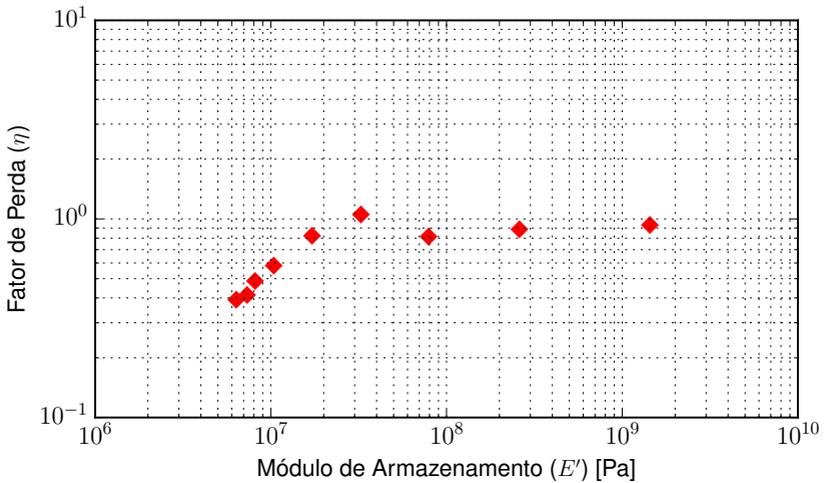
foi proposto para descrever o módulo complexo dos materiais caracterizados. Assim, as constantes deste modelo foram ajustadas numericamente e o módulo complexo de cada material pôde ser representado no nomograma de frequência reduzida, conforme apresentado na Figura 53,

Figura 51 – Módulo complexo do material 1229SN08 ao longo de f_R .



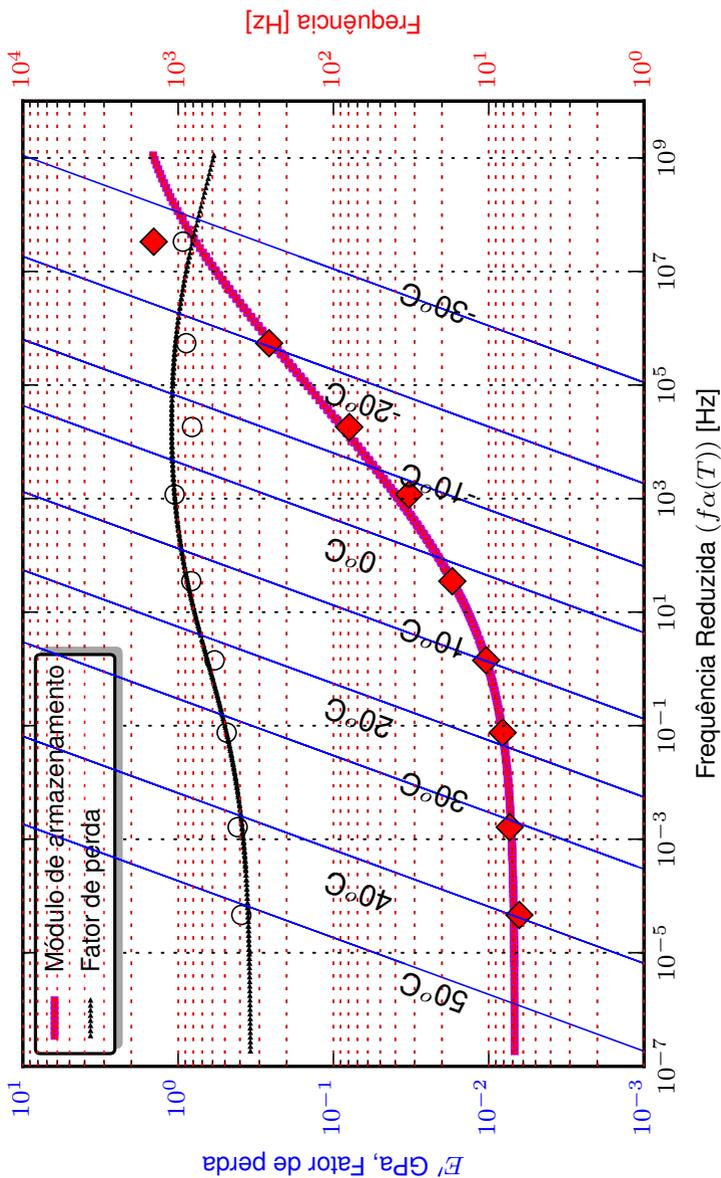
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 52 – Wicket Plot do módulo complexo do material 1229SN08.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 53 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN08.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Tabela 8 – Constantes do modelo de derivadas fracionárias para descrição do módulo complexo dos materiais analisados.

	1229SN08	1229SN09	ADC006	DA350-PERF	DA350-LIGHT
E'_0	$6,79 \times 10^6$	$8,29 \times 10^5$	$2,47 \times 10^7$	$6,24 \times 10^6$	$4,86 \times 10^6$
E''_0	$3,40 \times 10^{-1}$	$1,50 \times 10^{-1}$	$3,57 \times 10^{-1}$	$3,09 \times 10^{-1}$	$1,46 \times 10^{-1}$
E'_1	$4,75 \times 10^6$	$1,56 \times 10^7$	$1,28 \times 10^8$	$2,36 \times 10^7$	$3,25 \times 10^7$
E''_1	$3,83 \times 10^{-1}$	$4,39 \times 10^{-2}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$4,14 \times 10^{-1}$	$6,55 \times 10^{-1}$
b	$2,11 \times 10^{-3}$	$1,50 \times 10^{-1}$	$1,02 \times 10^{-2}$	$4,74 \times 10^{-3}$	$1,76 \times 10^{-2}$
β	$3,31 \times 10^{-1}$	$2,23 \times 10^{-1}$	$3,18 \times 10^{-1}$	$2,85 \times 10^{-1}$	$3,35 \times 10^{-1}$

Fonte – Elaborado pelo autor.

Nota – Estas constantes se referem à Equação 5.4.

Tabela 9 – Constantes da função de deslocamento para cada material analisado.

Material	Modelo ^a	c_1 (ou c_2)	T_0 [°C]	T_∞ [°C]	Gráficos
1229SN08	Arrhenius	10937	0,67	-	Apêndice C.1
1229SN09	Arrhenius	7907	-29,70	-	Apêndice C.2
ADC006	WLF	$1,7 \times 10^7$	25,3	$-7,1 \times 10^7$	Apêndice C.3
DA350-LIGHT	Arrhenius	10750	-12,02	-	Apêndice C.4
DA350-PERF	Arrhenius	10532	-4,64	-	Apêndice C.5

^a O modelo de Arrhenius é dado pela Equação 2.5 e o modelo WLF é dado pela Equação 2.4.

Fonte – Elaborado pelo autor.

juntamente com os valores discretos. Com auxílio do vetor $\alpha(T)$ as linhas isotérmicas foram plotadas para que as informações de $\alpha(T)$ sejam dispensadas nesta representação.

Nas Tabelas 8 e 9 são apresentados os valores obtidos para as constantes dos modelos fracionários e das funções de deslocamento de cada material. O nomograma de frequência reduzida e as curvas de $\alpha(T)$ destes materiais estão apresentadas no Apêndice C.

Observa-se que os valores apresentados na Tabela 8 obedecem as restrições termodinâmicas apresentadas na Tabela 1. Dos materiais avaliados, apenas o ADC006 apresentou valores bem definidos do módulo

complexos nas regiões vítrea, de transição e borrachosa. Na seção a seguir é apresentada a comparação dos parâmetros modais experimentais com os simulados (Sandwich08) com o módulo complexo caracterizado.

5.3 Comparação dos Parâmetros Modais

Para verificar a validade dos resultados de caracterização dos materiais avaliados, as seguintes análises foram realizadas. Na faixa de frequência ensaiada, todas as vigas apresentaram uma quantidade mínima de seis ressonâncias para cada temperatura. Devido à quantidade de dados ser relativamente alta, a comparação direta de FRFs experimentais e numéricas seria muito extensa para ser exposta neste espaço. Assim, optou-se em realizar a comparação direta dos parâmetros modais experimentais e numéricos de modo n em função da temperatura.

Para a obtenção dos dados numéricos foi utilizado o método direto de resposta em frequência para simular (com o módulo caracterizado imposto ao modelo) uma FRF para cada temperatura. Assim, foram calculadas diversas FRFs, das quais foram extraídos os parâmetros modais e comparados com os experimentais. Os fatores de perda modais foram calculados com auxílio da Equação 2.11. Os resultados obtidos para o material 1229SN08 estão apresentados na Figura 54, e para os demais materiais no Apêndice C.

Observa-se nesta figura que os parâmetros modais numéricos representam relativamente bem os experimentais praticamente para todas as temperaturas e todos os modos. No segundo modo de vibração foi onde ocorreram os maiores desvios para este material. Na temperatura de 0°C o erro foi de 4,9% para a frequência ($f_2^{\text{Exp}} = 272 \text{ Hz}$ e $f_2^{\text{Num}} = 285 \text{ Hz}$) e de 54% para o amortecimento ($\eta_2^{\text{Exp}} = 0,051$ e $\eta_2^{\text{Num}} = 0,079$). Nos demais modos e temperaturas os erros foram na grande maioria bem inferiores. Para os demais materiais os erros foram variados, uns maiores em algumas regiões e outros menores em outras mas, de maneira

geral, os parâmetros modais experimentais foram representados com razoável precisão, conforme apresentado no Apêndice C.

5.4 Efeito da Energia de Deformação Axial do Viscoelástico

Na subseção 3.3.2 foi apresentado que a maioria dos elementos finitos de viga sanduíche propostos na literatura não abrangem a modelagem de viga com seção assimétrica e, além do mais, desprezam a energia de deformação axial do material viscoelástico. No entanto, dependendo do grau de assimetria (da geometria da seção transversal da viga e das propriedades das camadas), o efeito desta energia pode ser relevante na modelagem dinâmica de vigas sanduíche.

Para analisar a influência deste efeito, foram realizadas algumas simulações de *resposta em frequência* da viga com material viscoelástico ADC006, material este escolhido por apresentar as regiões vítrea e borrachosa do módulo complexo bem definidas e distintas e, também, por ser uma material consideravelmente rígido na região vítrea.

Primeiramente, foram realizadas simulações das energias de deformação e de dissipação de cada camada a fim de verificar a contribuição energética destas camadas. Conforme apresentado na Equação 4.29, a energia de deformação total da viga é dada pela soma das energias das camadas. Os termos $U_x^{(\cdot)}$ desta equação, que estão relacionados aos esforços normais de cada camada na direção x , foram particionados em energia de deformação por extensão (deslocamentos longitudinais), relacionada ao primeiro termo nas integrais das Equações 4.33 e 4.34, e energia de deformação por flexão (deslocamentos transversais), relacionada ao segundo termo nas integrais das Equações 4.33 e 4.34. Adicionalmente, para a camada viscoelástica, o último termo da Equação 4.34 foi relacionado à energia de deformação de ordem superior. A nomenclatura adotada para a designação destes termos está resumida na Tabela 10, a qual representa também as matrizes elementares de rigidez

Tabela 10 – Designação dos termos de energia de deformação das camadas.

Energia	Camada 1	Camada 2	Camada V	Termo na Integral ^a
Extensão (e)	K1e	K2e	KVe	Primeiro
Flexão (b)	K1b	K2b	KVb	Segundo
Ordem Sup. (Hi)	–	–	KVHi	Último

^a Estes termos se referem à Equação 4.33 para as camadas 1 e 2 e à Equação 4.34 para a camada v .

Fonte – Elaborado pelo autor.

Nota – A energia de deformação cisalhante, relacionada com a Equação 4.35, foi designado o termo KVs. Esta nomenclatura representa também os termos usados na descrição das matrizes elementares de rigidezas apresentada no Apêndice B.

apresentadas no Apêndice B. O termo $U_{xz}^{(v)}$ na Equação 4.35, relacionado aos esforços cisalhantes no material viscoelástico, foi designado por KVs.

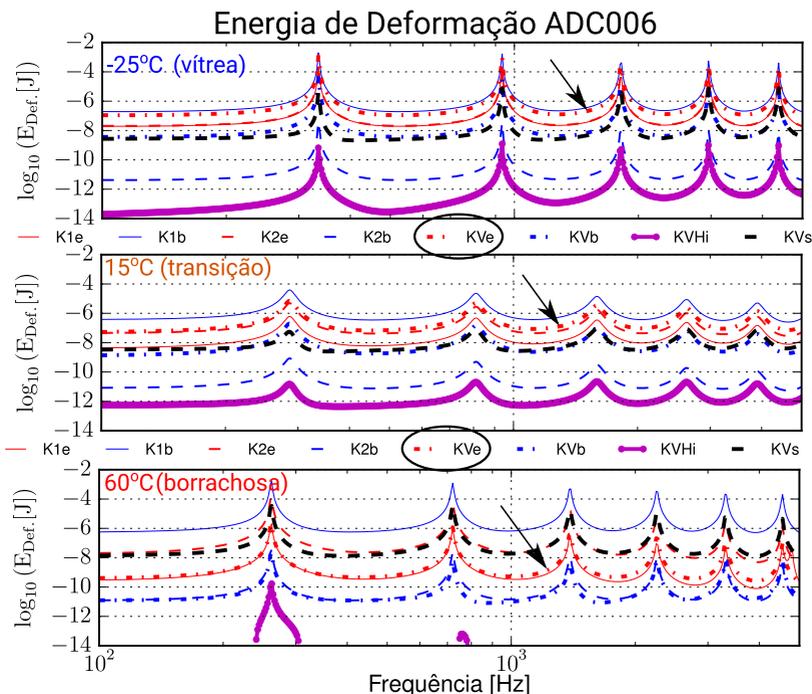
A energia simulada para cada camada foi calculada de acordo com a expressão:

$$U^{\text{Parc}} = \frac{1}{2} \{d\}^T [K^{\text{Parc}}] \{d\}, \quad (5.5)$$

sendo a parte real chamada de energia de deformação ($E_{\text{Def.}}$), a imaginária de energia dissipada ($E_{\text{Dis.}}$), $[K^{\text{Parc}}]$ a matriz de rigidez global referente à parcela da referida camada e energia (Tabela 10) e $\{d\}$ o vetor com todos os graus de liberdade da viga, determinado previamente para o modelo completo (com todas as contribuições energéticas) usando o método direto de resposta em frequência. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 55 e 56 para as temperaturas de -25°C , 15°C e 60°C , que são respectivamente as temperaturas que contemplam as regiões vítrea, de transição e borrachosa do material.

Observando estas figuras, verifica-se que a parcela da energia de deformação por extensão (KVe) deste material viscoelástico, indicada pelas flechas, diminui com o aumento da temperatura, principalmente nos picos de resposta, e que a razão entre as energias $E_{\text{Dis.}}$ e $E_{\text{Def.}}$

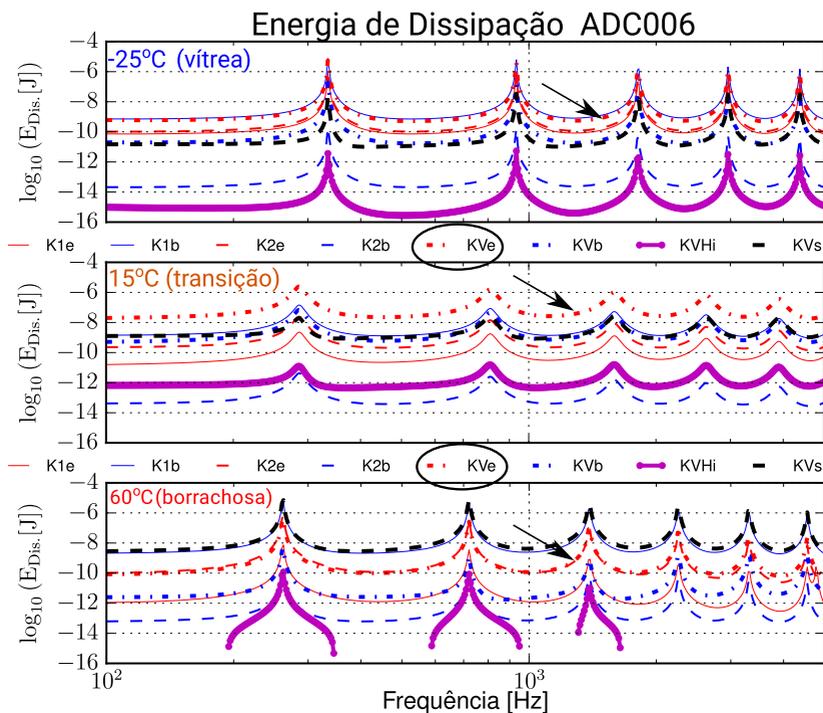
Figura 55 – Contribuição da energia de deformação de cada camada da viga com o material ADC006.



(comparando nas figuras) alcança valores máximos na região de transição. Verifica-se ainda que a $E_{Def.}$ de KVe na região vítrea possui ordem de grandeza muito próxima à energia de flexão da viga base, representada por K1b, e que a $E_{Dis.}$ de KVe na região de transição é dominante.

Para verificar a influência da energia de deformação por extensão (KVe), foram então simuladas FRFs para estas temperaturas desconsiderando esta parcela de energia e comparando com FRFs obtidas com o modelo completo, conforme apresentado nas Figuras 57, 58 e 59.

Figura 56 – Contribuição da energia de dissipação de cada camada da viga com o material ADC006.

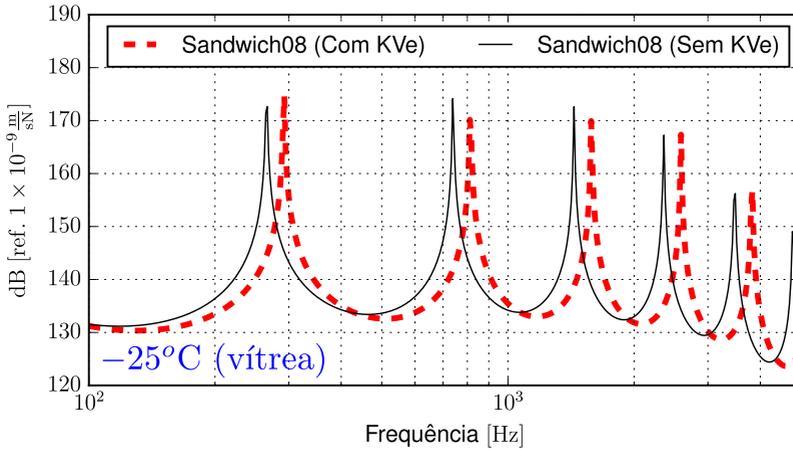


Fonte:Elaborado pelo autor.

Percebe-se nestas figuras que, na região borrachosa, onde o módulo de armazenamento possui valores menores, a contribuição de KVe na resposta da viga é pouco significativa. Por outro lado, na região vítrea, onde o módulo de armazenamento possui valores elevados, esta contribuição demonstra importância para a predição das frequências de ressonância. Na região de transição (15°C), esta contribuição apresenta maior expressividade para predição do amortecimento da estrutura, já que o material apresenta valores máximos de amortecimento.

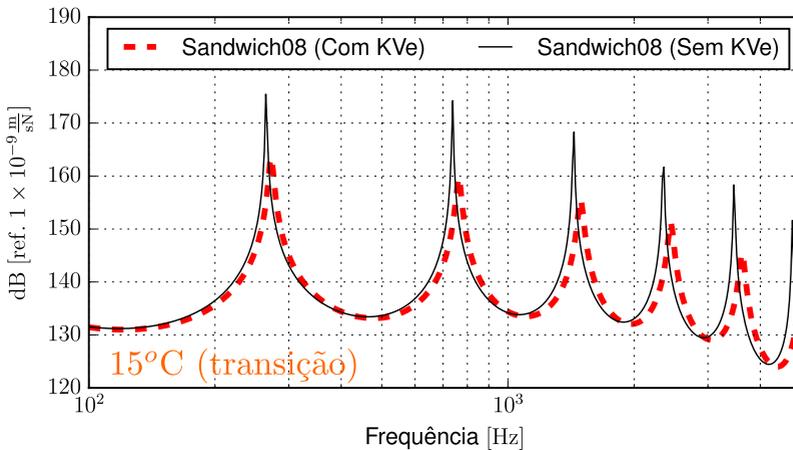
Comparando as FRFs para as temperaturas de -25°C e 60°C ,

Figura 57 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a -25°C .



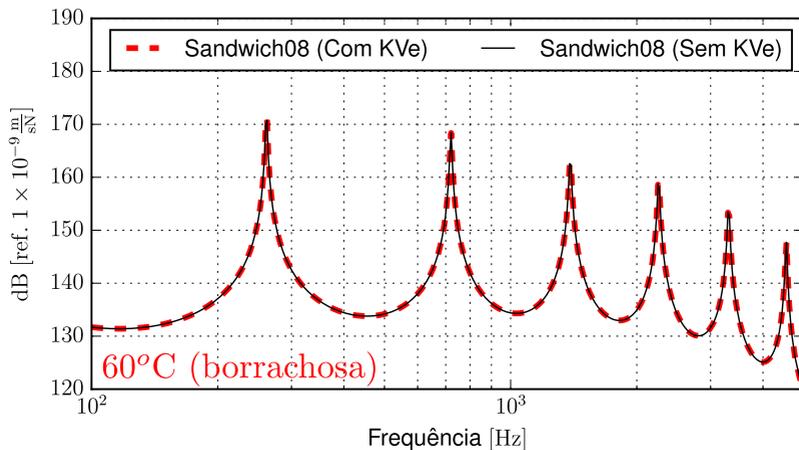
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 58 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a 15°C .



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 59 – FRF da viga com e sem energia de deformação axial do material ADC006 a 60°C.



Fonte:Elaborado pelo autor.

observa-se que o fato do módulo de armazenamento apresentar valores mais elevados na região vítrea faz com que a superfície neutra da viga se desloque para mais longe da viga base, enquanto que na região borrachosa se aproxime para mais próximo da viga base. Conforme apresentado na seção 3.3, este comportamento é característico de aplicações com tratamento de amortecimento com camadas assimétricas, onde a dissipação ocorre pelas deformações normais e cisalhantes.

5.5 Avaliação do Coeficiente de Poisson na Resposta da Viga

Conforme apresentado na subseção 4.2.1, será apresentada a seguir uma breve avaliação do efeito dos valores extremos da razão de Poisson na resposta dinâmica da viga sanduíche. Para isto, o modelo de viga (Sandwich08) com o material ADC006 foi utilizado para simular FRFs da viga nas temperaturas extremas de -25°C (região vítrea) e 60°C (região borrachosa), ou seja, para valores extremos do módulo

complexo, utilizando o método direto de resposta em frequência. Para cada temperatura a FRF foi simulada com o valor de $\nu = 0,2$ aplicado ao módulo complexo de cisalhamento, dado pela Equação 1.25, considerando o módulo de elasticidade apresentado no Apêndice C.3, e depois esta simulação foi repetida para o valor de $\nu = 0,499$. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 60 e 61.

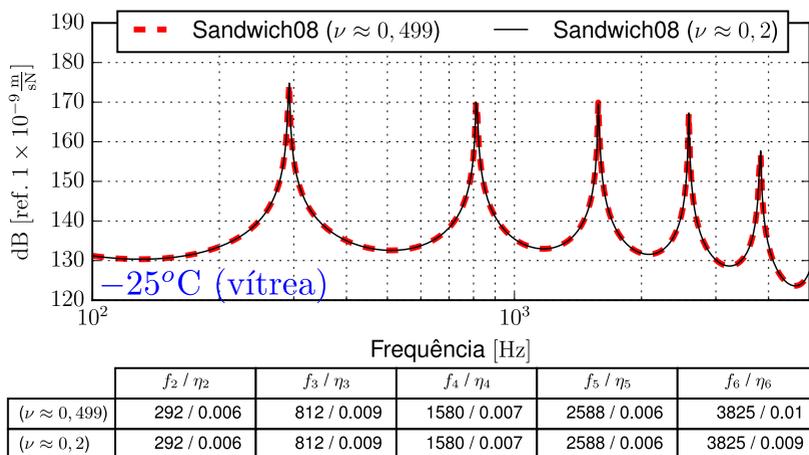
Verifica-se nestas figuras que quase não ocorreram variações na resposta da viga com este material, sendo que a variação maior (muito pequena) ocorreu na região borrachosa, onde o módulo complexo apresenta valores menores. Estes fatos corroboram os detalhes apresentados nas Figuras 55 e 56, onde a energia de deformação cisalhante (KVs) na região vítrea é bem inferior à energia por extensão KVe, sendo esta e a energia de deformação por flexão da camada base (K1b) as contribuições dominantes. Na região borrachosa KVs alcança valores elevados, porém, cerca de duas ordens de grandeza inferior à dominante K1b.

Considerando os dois valores extremos de ν no cálculo dos módulos cisalhantes vítreo (G_g) e borrachoso (G_e), utilizando a Equação 1.25, tem-se que $7,67 \text{ GPa} \lesssim G_g \lesssim 9,58 \text{ GPa}$ e $15,0 \text{ MPa} \lesssim G_e \lesssim 18,8 \text{ MPa}$ para o material ADC006, ou seja, a variação do módulo cisalhante é relativamente baixa para esses dois extremos de ν .

5.6 Comparação com dados obtidos via ASTM E756

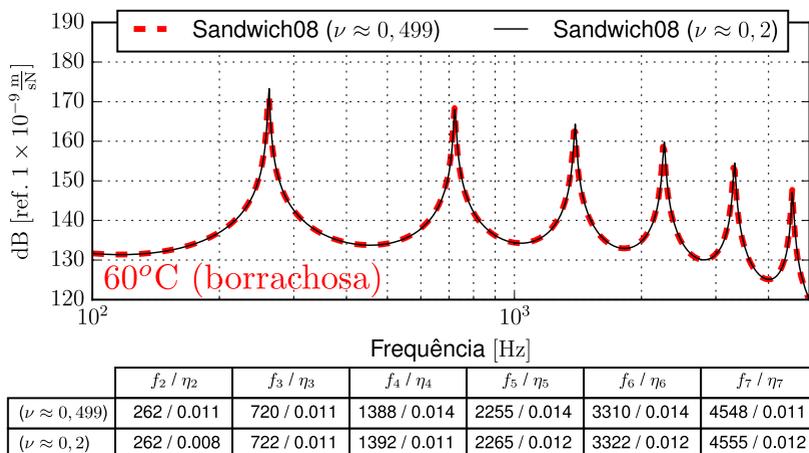
Uma avaliação adicional foi realizada com o material ADC006, descrito na Tabela 4, para verificar os resultados de caracterização obtidos através desta proposta com os resultados obtidos via norma ASTM E756. Este material foi caracterizado durante a execução do projeto de pesquisa citado na subseção 4.2.1, de acordo com as orientações da norma ASTM E756, na faixa de temperatura de -25°C a 60°C , sem a camada de restrição, na configuração Oberst, utilizando a mesma viga base apresentada na subseção 4.2.1. Os resultados obtidos (da aplicação

Figura 60 – Efeito do Coeficiente de Poisson na FRF da viga com o ADC006 a -25°C .



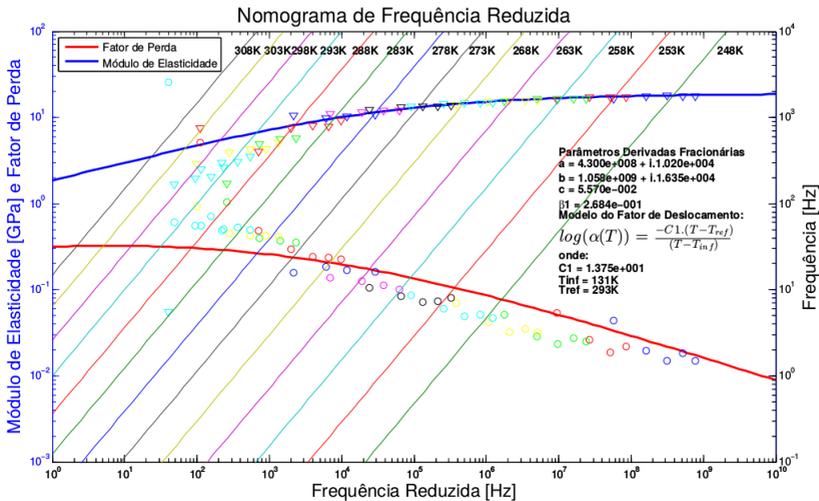
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 61 – Efeito do Coeficiente de Poisson na FRF da viga com o ADC006 a 60°C .



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 62 – Nomograma do módulo complexo do material ADC006, caracterizado via ASTM E756.



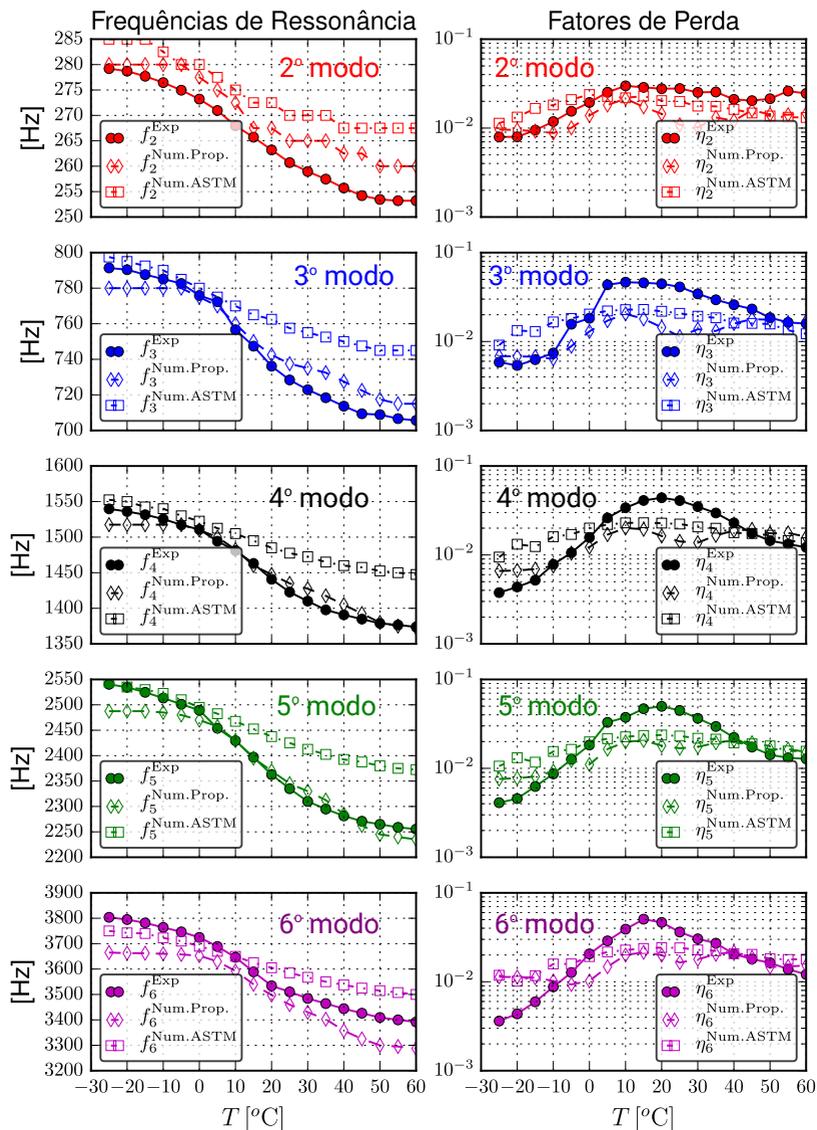
Fonte: Adaptado de Santos et al. (2012).

desta norma) estão apresentados na Figura 62, onde o modelo de derivadas fracionárias foi ajustado para descrever de maneira contínua os dados experimentais, cujas constantes ajustadas para este modelo estão apresentadas nesta figura. Maiores detalhes sobre a caracterização deste material são apresentados em Santos et al. (2012) e Bratti et al. (2012).

Utilizando este módulo complexo e aquele obtido através desta proposta (Apêndice C.3), FRFs foram simuladas para o material aplicado à viga em sua configuração de trabalho (com camada restrita) e para a mesma faixa de temperatura anterior. Com isto, os parâmetros modais numéricos (obtidos por esta proposta e pela ASTM E756) foram calculados e plotados em função da temperatura, os quais estão apresentados na Figura 63 juntamente com os experimentais.

Conforme pode ser observado nesta figura, nas temperaturas mais elevadas as frequências de ressonância simuladas com os dados da

Figura 63 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material ADC006.



Fonte:Elaborado pelo autor.

ASTM E756 apresentaram valores acima dos experimentais, ou seja, a viga apresentou um comportamento mais rígido. Já as frequências de ressonância simuladas com os dados caracterizados com esta proposta apresentaram no geral valores bem mais próximos dos experimentais. Nas curvas de fatores de perda, os resultados desta proposta e da ASTM E756 apresentaram variações semelhantes. Ressalta-se que na caracterização via ASTM E756 a camada restritora foi removida. No caso desta proposta, a caracterização é realizada com o material em sua configuração original (de trabalho), ou seja, com todas as camadas, onde o efeito da cola, que une a camada restritora ao material, é adicionado ao comportamento do material viscoelástico.

5.7 Síntese

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos através da metodologia proposta neste trabalho. Foi realizada inicialmente uma análise da validade dos resultados obtidos com o elemento finito de viga proposto, onde determinou-se através de uma análise de convergência uma quantidade de 40 elementos para as simulações das respostas da viga e, na sequência, a resposta dinâmica simulada com o elemento Sandwich08 foi confrontada com dados experimental, analítico e numérico (com o programa Nastran), as quais apresentaram poucas diferenças.

Os parâmetros modais experimentais foram inicialmente analisados em diagramas Wicket Plot, onde os dados apresentaram o padrão esperado para a aplicação desta metodologia e, então, estes parâmetros foram descritos por modelos fracionários, os quais foram ajustados através de técnicas numéricas no domínio da frequência reduzida. Estes modelos fracionários descreveram os parâmetros modais experimentais com poucos desvios. Com isto, os módulos complexos das amostras foram caracterizados através de técnicas de ajuste de modelos, que

utilizaram o elemento finito de viga sanduíche proposto neste trabalho juntamente com o método modal para as simulações das respostas, o qual apresentou ser cerca de 53 vezes mais rápido que o método direto de resposta em frequência. Os resultados de caracterização das amostras foram apresentados na forma de tabelas e também no Apêndice C, em nomogramas de frequência reduzida e funções de deslocamentos, juntamente com a comparação dos parâmetros modais numéricos e experimentais e dos gráficos de FRFs experimentais.

Uma análise adicional verificou a contribuição da energia de deformação elástica por extensão do material viscoelástico na resposta dinâmica da viga sanduíche. Foi verificado que, para o material avaliado (ADC006), esta contribuição possui relevância para prever as frequências de ressonâncias da viga na região vítrea (onde o módulo complexo apresenta maiores valores) e também para prever o amortecimento na região de transição (região de maiores amortecimentos).

Por fim, foi realizada uma avaliação do efeito dos valores extremos da razão de Poisson na resposta dinâmica da viga sanduíche com o material ADC006 aplicado, onde constatou-se que os valores de $\nu = 0,2$ e $0,499$ influenciam muito pouco a resposta da viga, já que diferença do módulo complexo cisalhante, computado com estes dois valores, é relativamente baixa. Foi realizada também, na parte final, uma avaliação dos resultados de caracterização do material AD006 comparando-se os parâmetros modais experimentais e numéricos, calculados com o módulo complexo caracterizado por esta proposta e pela ASTM E756. Verificou-se que os parâmetros modais calculados com os dados obtidos com esta proposta apresentaram valores bem mais próximos dos experimentais que os calculados com os dados obtidos via ASTM E756.

No capítulo a seguir são apresentadas as conclusões a respeito dos resultados apresentados neste capítulo e sugestões para trabalhos futuros.

6 Conclusões

No capítulo precedente os resultados foram apresentados e analisados. Neste, é apresentado um resumo geral da tese, discussão dos resultados, implicações práticas, recomendações para trabalhos futuros e as conclusões desta pesquisa. O propósito deste capítulo é expandir os conceitos que foram estudados num esforço de proporcionar uma melhor compreensão da sua possível influência prática nas técnicas de caracterização e modelagem de estruturas com materiais viscoelásticos, e apresentar sugestões para pesquisas futuras. Ao final, uma síntese é apresentada para evidenciar os principais assuntos abordados e os resultados alcançados.

Resumo do Estudo

A caracterização das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelástico é comumente realizada pelo método da viga vibrante, padronizado pela ASTM E756 (2005). O emprego desta norma à caracterização de materiais com camada restrita exige que esta camada seja retirada do material. Neste processo, o efeito dinâmico exercido pelo adesivo na interseção das camadas é anulado. Além do mais, esta norma apresenta limitações quanto à faixa de frequência e para a caracterização dos módulos E ou G , nas regiões vítrea, de transição e borrachosa de materiais que apresentam estas regiões bem distintas; é necessário que o material seja avaliado em duas configurações. Neste caso, no cômputo de E não são consideradas as deformações cisalhantes e a inércia rotatória do material, e no cálculo de G as deformações normais longitudinais são desprezadas. Para contornar isto, técnicas numéricas demonstram ser promissoras, muitas das quais utilizam o método direto de resposta

em frequência, o qual apresenta um tempo de solução das equações relativamente grande em comparação ao método modal.

O propósito deste estudo foi apresentar soluções que supram as dificuldades e problemas envolvidos na caracterização e modelagem dinâmica de materiais para tratamento de amortecimento de superfície. Primeiramente, uma revisão bibliográfica apresentou os fundamentos teóricos sobre viscoelasticidade linear, as principais propriedades que definem um material viscoelástico e os principais modelos constitutivos que representam o comportamento físico destes materiais. Uma ênfase maior foi dada aos modelos que utilizam derivadas fracionárias, pois possuem uma grande vantagem por representar o comportamento dinâmico dos materiais numa ampla faixa de frequência utilizando uma quantidade relativamente pequena de constantes (em relação aos demais modelos) e, também, a quantidade de pesquisas realizadas neste assunto têm crescido de forma exponencial nos últimos anos (Figura 1).

Verificou-se no Capítulo 2 que a descrição do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos pode ser facilitada se representada através do módulo complexo, cuja variação dos seus valores em função da temperatura e frequência é qualitativamente inversa. Este comportamento permite que o princípio da superposição temperatura-frequência seja aplicado a esta propriedade. Assim, com auxílio do método das variáveis reduzidas, os módulos complexos dos materiais viscoelástico podem ser representados em nomogramas de frequência reduzida, que contemplam a variação do módulo com relação a frequência e temperatura. Este recurso, representação das propriedades no domínio da frequência reduzida, foi talvez um dos itens mais importantes deste trabalho, pois, a partir dele e com auxílio dos modelos derivadas fracionárias, o método modal foi proposto para as simulações dos parâmetros modais da viga, considerando a variação das propriedades na frequência e na temperatura. Foram apresentados também neste capítulo alguns métodos experimentais para caracterização do módulo complexo de ma-

teriais de amortecimento, com ênfase maior ao método da viga vibrante, cujo aparato e procedimentos experimentais foram adotados para medição dos dados experimentais deste trabalho. Ao final, apresentou-se a ferramenta de análise de erros por meio de diagramas Wicket Plot, que foi utilizada neste trabalho para analisar os parâmetros modais experimentais da viga.

O capítulo subsequente estabeleceu as bases teóricas para a modelagem do comportamento dinâmico de vigas. Foram apresentadas as teorias de Euler-Bernoulli, de Timoshenko e a teoria de deformação cisalhante de terceira ordem, cujas hipóteses desta e da de Euler-Bernoulli foram utilizadas na formulação do elemento finito de viga desenvolvido neste trabalho, o Sandwich08. Os principais modelos analíticos de vigas sanduíche foram apresentados também, dentre os quais, aquele apresentado por Mead e Markus (subseção 3.3.1.2) foi utilizado na validação do elemento Sandwich08. Algumas técnicas numéricas de modelagem por elementos finitos foram apresentadas, juntamente com método modal e o direto de resposta em frequência, este utilizado no final deste trabalho para as simulações dos parâmetros modais e comparação com os experimentais, e modal para a caracterização das amostras avaliadas. Identificou-se nesta revisão que a maioria dos modelos numéricos de vigas sanduíches desprezam a energia de deformação axial do viscoelástico. Considerando que este fator pode ser determinante para a modelagem dinâmica de vigas sanduíche, este item foi também analisado neste trabalho.

Com isto, foi proposto no Capítulo 4 um procedimento de caracterização do módulo complexo de aplicações de amortecimento com ou sem camada restrita, que corresponda à propriedade da aplicação final, ou seja, que leve em consideração o amortecimento e as rigidezas de deformação normal e cisalhante (do viscoelástico) da aplicação final, e utilize apenas uma configuração de viga nos ensaios. Primeiramente foi dada uma visão geral do método e, em seguida, os detalhes das cinco

amostras avaliadas, dos instrumentos de medição e procedimentos e aparatos experimentais utilizados. Todos os materiais foram caracterizados na sua configuração de aplicação, ou seja, com camada restrita, e na temperatura de -30°C a 60°C dentro de uma câmara com temperatura controlada. Apresentou-se um procedimento para descrição dos parâmetros modais experimentais no domínio da frequência reduzida, com auxílio de modelos fracionários, e, em seguida, apresentou-se uma proposta de elemento finito de viga sanduíche com 8 graus de liberdade e que considera as deformações normais e cisalhantes do material viscoelástico. Por fim, foi proposto o procedimento de caracterização baseado em técnicas de ajuste de modelos que utilizam o método modal nas simulações.

No Capítulo 5 foram apresentados os resultados obtidos neste trabalho, iniciando com uma validação do elemento de viga sanduíche, a apresentação dos resultados de caracterização das amostras, corroboração dos parâmetros modais, análise da energia de deformação longitudinal do viscoelástico, avaliação do efeito dos valores extremos do Poisson ($\nu = 0, 2$ e $0, 499$) na resposta dinâmica da viga e, por fim, uma avaliação dos resultados de caracterização do material AD006 obtidos por esta proposta com resultados obtidos via norma ASTM E756. Estes resultados são discutidos na seção a seguir.

Discussão dos Resultados

A hipótese principal neste trabalho considera que os parâmetros modais da estrutura com material viscoelástico, neste caso uma viga sanduíche, apresentam variações semelhantes ao módulo complexo do viscoelástico. Conforme apresentado na Figura 48, os parâmetros modais experimentais da viga com o material 1229SN09 apresentam no diagrama Wicket Plot uma distribuição semelhante ao padrão apresentado pelos módulos complexos dos viscoelásticos, conforme apresentado na seção 2.4.

Até este ponto esta hipótese é confirmada e o princípio da superposição temperatura-frequência, apresentado na subseção 2.1.3, com auxílio do método das variáveis reduzidas, apresentado na seção 2.2, pode ser aplicado para descrever os parâmetros modais da viga no domínio da frequência reduzida.

Com isto, conforme é apresentado na Figura 50, os parâmetros modais experimentais obtidos em temperaturas diferentes foram agrupados num único gráfico, no nomograma de frequência reduzida, e, além do mais, o modelo de derivadas fracionárias pôde descrever relativamente bem estes parâmetros em função da frequência reduzida, conforme proposto na subseção 4.3.1.

Este artifício matemático permite então que o problema seja analisado no domínio da frequência reduzida, onde supõe-se que as propriedades de todas as camadas sejam constantes para cada frequência reduzida, e admite-se também que as propriedades numa dada frequência reduzida estão relacionadas aos parâmetros modais da viga nesta mesma frequência reduzida (lembrando que uma dada frequência reduzida está associada a várias temperaturas). Com isto, o método modal (que se apresentou 53 vezes mais rápido que método direto de resposta em frequência, conforme apresentado na subseção 5.1.1) foi empregado para realizar as simulações dos parâmetros modais da viga sanduíche no processo de caracterização das amostras, por técnicas de ajuste de modelos. Os resultados obtidos foram apresentados na forma de nomogramas de frequência reduzida e apresentados no Apêndice C para cada material avaliado.

Na seção 5.3 os parâmetros modais experimentais do material 1229SN08 foram confrontados com os numéricos, os quais foram simulados com o método direto de resposta em frequência utilizando as propriedades caracterizadas. Conforme pode-se perceber na seção 5.3, os resultados apontam que o modelo numérico pode representar muito

bem os dados experimentais para todos os modos e temperaturas avaliados. Os demais materiais apresentaram resultados que se desviam (um pouco) em alguns pontos dos experimentais. Estes resultados confirmaram as hipóteses levantadas nesta tese e dão subsídios para que esta metodologia seja aplicada para a caracterização de diversos materiais de amortecimento, em sua configuração final de aplicação, num nível razoável de precisão e com tempo de processamento relativamente baixo.

Na seção 5.4 foram apresentados os resultados da análise da energia de deformação longitudinal do viscoelástico na resposta dinâmica da viga sanduíche. Verificou-se que esta energia se torna influente à medida que os valores do módulo complexo aumentam, ou seja, quando as temperaturas diminuem. Este argumento foi comprovado nas Figuras 57, 58 e 59, onde as respostas da viga sem a contribuição da energia de deformação longitudinal apresentaram maiores desvios na frequência (menos rígida) na região vítrea e menos amortecimento na região de transição. Portanto, conforme apresentado na subseção 3.3.2, esta energia se torna influente na proporção em que o grau de assimetria da seção transversal viga aumenta. Assim, as propostas que desprezam a deformação longitudinal do viscoelástico devem ser usadas com cautela, principalmente para materiais que apresentam regiões elevadas do módulo complexo. O elemento finito de viga sanduíche formulado neste trabalho, que foi validado com dados analíticos, experimental e numérico na seção 5.1, é uma alternativa para contornar estes problemas.

A questão levantada na seção 1.6 sobre a variação da razão de Poisson na frequência foi avaliada na seção 5.5, onde verificou-se que a resposta da viga sanduíche é muito pouco influenciada pelos valores extremos do Poisson ($\nu = 0, 2$ e $0,499$), impostos ao módulo cisalhante do material viscoelástico. No entanto, verificou-se que, devido ao fato das deformações cisalhantes não serem dominantes na resposta da viga, este fator não se torna expressivo. Em aplicações que apresentem maiores deformações cisalhantes, como materiais com camadas mais espessas, é

possível que este efeito se torne mais aparente.

Por fim, os resultados de caracterização obtidos por esta metodologia, para o material ADC006, foram confrontados com resultados obtidos através da norma ASTM E756. Para isto, os parâmetros modais numéricos da viga sanduíche, calculados com as propriedades obtidas via ASTM E756 e por esta proposta, foram comparados com os experimentais. Conforme pôde ser observado na seção 5.6, os parâmetros modais calculados com os dados obtidos por esta proposta apresentaram valores bem mais próximos dos experimentais que os calculados com os dados obtidos via ASTM E756. Como a caracterização via norma requer que seja retirada a camada de restrição da camada de material viscoelástico, o efeito da cola, que une estas duas camadas, não é contabilizado na caracterização do módulo complexo do material. No entanto, os procedimentos propostos nesta metodologia permite que o material seja caracterizado na sua própria configuração de trabalho (original), e isto resulta, ao final, um só módulo complexo que inclui todos o efeitos viscoelásticos envolvidos.

Implicações Práticas e Sugestões para Pesquisas Futuras

Os problemas apontados na introdução, no que diz respeito à caracterização de materiais viscoelásticos, podem ser superados com a utilização desta metodologia. Os procedimentos apresentados neste trabalho demonstram ser mais eficientes, mantendo-se um nível razoável de precisão, que as técnicas de caracterização que utilizam o método direto de resposta em frequência. Assim, os procedimentos desta metodologia podem ser utilizados tanto para a caracterização de materiais de amortecimento como também para análise de projetos de engenharia que utilizem materiais de tratamento de amortecimento de superfícies vibrantes.

O elemento finito de viga sanduíche proposto neste trabalho

oferece maior precisão na predição da resposta de vigas sanduíche, em comparação àqueles que não consideram a energia de deformação longitudinal do viscoelástico, principalmente para materiais relativamente rígidos, e pode ser utilizado pelos diversos setores de engenharia, como aeronáutico, naval, automobilístico, etc. , que envolvem aplicações com tratamento de amortecimento de superfícies.

Sugere-se que em pesquisas futuras as variações da razão de Poisson na frequência e na temperatura sejam investigadas em estruturas que apresentem maiores deformações cisalhantes, como vigas ou placas com materiais viscoelásticos mais espessos, pois as vigas avaliadas neste trabalho apresentaram deformações cisalhantes relativamente baixas.

Sugere-se também o emprego de algum método do tipo gradiente (que obtém a solução da função objetivo de maneira muito mais rápida que os métodos evolutivos) para a minimização do erro entre as FRFs numérica e experimental, descritas no domínio da frequência reduzida. Para isto a FRF experimental pode ser reconstruída neste domínio, utilizando os parâmetros modais experimentais (autovalores) descritos no domínio f_R , os autovetores de expressões analíticas já desenvolvidas, como as formas modais da viga de Euler-Bernoulli. Sugere-se ainda que materiais que apresentem mais de uma zona de transição sejam investigados com modelos de derivadas fracionárias que fazem tais considerações.

Finalmente, sugere-se que o módulo de elasticidade e o fator de perda da viga base sejam caracterizados também em função da temperatura e frequência para que sejam considerados nas simulações dos parâmetros modais da viga composta, já que neste trabalho foram considerados como constantes e sabe-se (seção 4.1 e Tabela 3) que variam com a temperatura e frequência.

Conclusões

Os resultados deste estudo expande os conhecimentos alcançados pelas pesquisas anteriores na área de modelagem e caracterização de materiais viscoelásticos. Esta investigação se baseou na hipótese de que os parâmetros modais da estrutura, neste caso de uma viga sanduíche com material viscoelástico, apresentassem comportamento semelhante ao módulo complexo no domínio da frequência reduzida. Esta hipótese foi suportada primeiramente com os resultados da avaliação dos parâmetros modais nos diagramas Wicket Plot e depois reforçada com a corroboração dos parâmetros modais simulados com o módulo complexo caracterizado. Os procedimentos de caracterização apresentados neste trabalho demonstram ser relativamente eficiente por utilizar o método modal nas etapas de ajustes de modelos, sanando portanto as dificuldades encontradas em propostas que utilizam o método direto de resposta em frequência.

O elemento finito de viga sanduíche proposto neste trabalho representou adequadamente o comportamento dinâmico das vigas analisadas, conforme apresentado na validação com dados analíticos, experimentais e numéricos. Este elemento possui uma quantidade de oito graus de liberdade e considera as deformações normais axiais no material viscoelástico, o que é desprezado em muitas propostas, e pode ser um fator determinante para a predição da resposta da viga.

Uma avaliação do efeito dos valores extremos do Poisson na resposta dinâmica da viga foi efetuada e não foi encontrada qualquer relação. Porém, analisando as distribuições de energia de cada camada, atribuiu-se que este efeito não se tornou evidente pelo fato da energia de deformação cisalhante do material viscoelástico não ser significativa para a resposta da viga analisada.

Na comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos, com o módulo complexo caracterizado através desta proposta e

com dados obtidos via ASTM E756, foi verificado que a contabilização do efeito dinâmico da cola, que une a camada viscoelástica à camada restritora, no módulo complexo do material viscoelástico fez com que a resposta dinâmica da estrutura fosse calculada com maior precisão, evidenciando assim a importância de tal efeito.

Referências

- ADOLFSSON, K.; ENELUND, M.; OLSSON, P. On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Kluwer Academic Publishers, v. 9, n. 1, p. 15–34, 2005. ISSN 1385-2000.
- ALVELID, M.; ENELUND, M. Modelling of constrained thin rubber layer with emphasis on damping. *Journal of Sound and Vibration*, v. 300, n. 3-5, p. 662 – 675, 2007. ISSN 0022-460X.
- AMICHI, K.; ATALLA, N. A new 3d finite element for sandwich beams with a viscoelastic core. *Journal of Vibration and Acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 131, n. 2, p. 021010:1–9, 2009.
- ANSI S2.24. *Graphical Presentation of the Complex Modulus of Viscoelastic Materials*. New York, 2001.
- ARAÚJO, A. L. et al. Optimal design and parameter estimation of frequency dependent viscoelastic laminated sandwich composite plates. *Composite Structures*, v. 92, n. 9, p. 2321 – 2327, 2010. ISSN 0263-8223. Fifteenth International Conference on Composite Structures.
- ASTM E756. *Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials*. West Conshohocken, 2005.
- BABER, T. T.; MADDOX, R. A.; OROZCO, C. E. A finite element model for harmonically excited viscoelastic sandwich beams. *Computers & Structures*, v. 66, n. 1, p. 105 – 113, 1998. ISSN 0045-7949.
- BAGLEY, R. L. *Applications of Generalized Derivatives to Viscoelasticity*. Tese (Doutorado) — Air Force Institute of Technology, 1979.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, v. 30, n. 1, p. 133–155, 1986. ISSN 01486055.
- BAI, J. M.; SUN, C. T. The effect of viscoelastic adhesive layers on structural damping of sandwich beams. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 23, n. 1, p. 1–16, 1995.

BARKANOV, E.; SKUKIS, E.; PETITJEAN, B. Characterisation of viscoelastic layers in sandwich panels via an inverse technique. *Journal of Sound and Vibration*, v. 327, n. 3–5, p. 402 – 412, 2009. ISSN 0022-460X.

BATEMAN, M. J.; KIM, K. S.; SHIN, Y. S. *Constrained viscoelastic layer damping of thick aluminum plates: Design, analysis and testing*. [S.l.], 1990.

BLAIR, G. S. The role of psychophysics in rheology. *Journal of Colloid Science*, v. 2, n. 1, p. 21–32, 1947. ISSN 00958522.

_____. Psychorheology: Links between the past and the present. *Journal of Texture Studies*, v. 5, n. 1, p. 3–12, 1974. ISSN 0022-4901.

BRATTI, G. et al. *Caracterização de Material Viscoelástico*. Florianópolis, 2012. Universidade Federal de Santa Catarina / EMBRAER, n. Relatório Técnico: DT1DCY041-rev.4.

CATANIA, G.; SORRENTINO, S.; FASANA, A. A condensation technique for finite element dynamic analysis using fractional derivative viscoelastic models. *Journal of Vibration and Control*, v. 14, n. 9-10, p. 1573–1586, 2008. ISSN 1077-5463.

COWPER, G. R. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of applied mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 33, n. 2, p. 335–340, 1966. ISSN 0021-8936.

DITARANTO, R. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 32, n. 4, p. 881–886, 1965.

DYM, C. L.; SHAMES, I. H. *Solid Mechanics: A Variational Approach (Advanced engineering series)*. New York: McGraw-Hill Inc.,US, 1973. ISBN 0070185565.

ESPÍNDOLA, J. de; NETO, J. a. M. da S.; LOPES, E. M. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. *Applied Mathematics and Computation*, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005. ISSN 00963003.

- FERRY, J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1980. 672 p. ISBN 0471048941.
- GALUCIO, A. C.; DEÜ, J.-F.; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, v. 33, n. 4, p. 282–291, 2004.
- GEMANT, A. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics*, v. 7, n. 8, p. 311, 1936. ISSN 01486349.
- _____. XLV. On fractional differentials. *Philosophical Magazine Series 7*, v. 25, n. 168, p. 540–549, 1938. ISSN 1941-5982.
- GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order. *ArXiv e-prints*, 2008.
- HEYLIGER, P.; REDDY, J. A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 126, n. 2, p. 309 – 326, 1988. ISSN 0022-460X.
- HEYMANS, N.; PODLUBNY, I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, Springer-Verlag, v. 45, n. 5, p. 765–771, 2006. ISSN 0035-4511.
- HUTCHINSON, J. Shear coefficients for timoshenko beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 68, n. 1, p. 87–92, 2001.
- ISO 10112. *Damping Materials – Graphical Presentation of the Complex Modulus*. Switzerland, 1991.
- ISTVAN, L.; BERANEK, L. *Noise and Vibration Control Engineering. Principles and Applications*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., ISBN-13, 2006.
- JOHNSON, C.; KIENHOLZ, D. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal*, 1982.
- JONES, D. I. G. *Results of a Round Robin test program: complex modulus properties of a polymeric damping material*. Wright

Laboratories Report, WL-TR-92-3104, Flight Dynamics Directorate, Wright-Patterson Air Force Base, 1992. Technical Report.

_____. *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*. Chichester New York: John Wiley & Sons, 2001. 410 p. ISBN 0471492485.

KANEKO, T. On timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 8, n. 16, p. 1927, 1975.

KERWIN, E. M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 31, n. 7, p. 952–962, 1959.

KIM, S.-Y.; LEE, D.-H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs. *Journal of Sound and Vibration*, v. 324, n. 3-5, p. 570–586, 2009. ISSN 0022460X.

KOELLER, R. C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of applied mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 51, n. 2, p. 299–307, 1984. ISSN 0021-8936.

KOSMATKA, J. B.; LIGUORE, S. L. Review of methods for analyzing constrained-layer damped structures. *Journal of Aerospace Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 6, n. 3, p. 268–283, 1993.

LAZAN, B. J. *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*. Oxford, New York: Pergamon Press, 1968. 317 p. ISBN 0080029345.

LOPES, E. M. O. *Um Estudo da Precisão do Método da Viga Vibrante Aplicado à Determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, Mar. 1989.

LU, H.; ZHANG, X.; KNAUSS, W. G. Uniaxial, shear, and poisson relaxation and their conversion to bulk relaxation: Studies on poly(methyl methacrylate). *Polymer Engineering & Science*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 37, n. 6, p. 1053–1064, 1997. ISSN 1548-2634.

LU, Y.; DOUGLAS, B. On the forced vibrations of three-layer damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 32, n. 4, p. 513 – 516, 1974. ISSN 0022-460X.

MAINARDI, F. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics. *ArXiv e-prints*, p. 291–348, 2012.

_____. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, SP Versita, v. 15, n. 4, p. 712–717, 2012. ISSN 1311-0454.

MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1969. 713 p. ISBN 0134876032.

MARKUŠ, Š.; ORAVSKÝ, V.; ŠIMKOVÁ, O. Damping properties of sandwich beams with local shearing prevention. *Acta Acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 31, n. 3, p. 132–138, 1974.

MARTINEZ-AGIRRE, M.; ELEJABARRIETA, M. J. Characterisation and modelling of viscoelastically damped sandwich structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 52, n. 9, p. 1225–1233, 2010. ISSN 00207403.

_____. Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 16, p. 3930–3943, 2011. ISSN 0022460X.

MATHEMATICA. *Wolfram Research, Inc.* [S.l.]: Version 10, 2014.

MEAD, D. J. Discussion:“governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams”(yan, m.-j., and dowell, eh, 1972, asme j. appl. mech., 39, pp. 1041–1047). *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 40, n. 2, p. 639–640, 1973.

_____. *Passive Vibration Control*. [S.l.]: Wiley, 1999. ISBN 0471942030.

MEAD, D. J.; MARKUS, S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 10, n. 2, p. 163 – 175, 1969. ISSN 0022-460X.

_____. Loss factors and resonant frequencies of encastré damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 12, n. 1, p. 99 – 112, 1970. ISSN 0022-460X.

MEIROVITCH, L. *Principles and Techniques of Vibrations*. 1. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. ISBN 9780023801419.

- MOTT, P. H.; ROLAND, C. M. Limits to poisson's ratio in isotropic materials. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 80, p. 132104, Oct 2009.
- NAKRA, B. C. *Vibrations of viscoelastically damped laminated structures*. Tese (Doutorado) — University of London, 1966.
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. *Vibration Damping*. New York: John Wiley & Sons, 1985. 480 p. ISBN 0471867721.
- NASTRAN, M. *Advanced Dynamic Analysis User's Guide*. [S.l.]: Version 70, 2004.
- NUTTING, P. A new general law of deformation. *Journal of the Franklin Institute*, v. 191, n. 5, p. 679–685, 1921. ISSN 00160032.
- PADOVAN, J. Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, v. 2, n. 4, p. 271–287, 1987. ISSN 0178-7675.
- PETYT, M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. ISBN 0521266076.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*. [S.l.]: Academic Press, 1998. 340 p. ISBN 0125588402.
- POPOV, E. P. *Introdução à mecânica dos sólidos*. [S.l.]: Edgard Blücher, 2005.
- PRITZ, T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, v. 195, n. 1, p. 103–115, 1996. ISSN 0022460X.
- _____. Measurement methods of complex poisson's ratio of viscoelastic materials. *Applied Acoustics*, v. 60, n. 3, p. 279 – 292, 2000. ISSN 0003-682X.
- _____. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*, v. 265, n. 5, p. 935–952, 2003. ISSN 0022460X.

- _____. The poisson's loss factor of solid viscoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*, v. 306, n. 3-5, p. 790 – 802, 2007. ISSN 0022-460X.
- RAO, D. K. Vibration of short sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 52, n. 2, p. 253-263, 1977.
- _____. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 20, n. 5, p. 271-282, 1978.
- RAO, Y. V. K. S.; NAKRA, B. C. Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 309-326, 1974.
- REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd. ed. Boca Raton: CRC Press, 2003. ISBN 0849315921.
- ROGERS, L. Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *Journal of Rheology*, v. 27, n. 4, p. 351, 1983. ISSN 01486055.
- ROSS, D.; UNGAR, E. E.; KERWIN, E. M. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. *Structural damping*, ASME, New York, v. 3, p. 44-87, 1959.
- SAINSBURY, M.; ZHANG, Q. The galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers & Structures*, v. 71, n. 3, p. 239 – 256, 1999. ISSN 0045-7949.
- SANTOS, M. F. et al. *Banco de Dados*. Florianópolis, 2012. Universidade Federal de Santa Catarina / EMBRAER, n. Relatório Técnico: DT1DCY043.
- SCHMIDT, A.; GAUL, L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Nonlinear Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, v. 29, n. 1-4, p. 37-55, 2002. ISSN 0924-090X.
- SHIN, K. *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. Chichester, England Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 0470511885.

SNOWDON, J. *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1968. 502 p. ISBN 0471810002.

SORRENTINO, S.; FASANA, A. Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models. *Journal of Sound and Vibration*, v. 299, n. 4-5, p. 839–853, 2007. ISSN 0022460X.

STEPHEN, N. On the variation of timoshenko's shear coefficient with frequency. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 45, n. 3, p. 695–697, 1978.

STORN, R.; PRICE, K. *Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*. [S.l.]: ICSI Berkeley, 1995. v. 3.

SUN, C.; LU, Y. *Vibration Damping for Structural Elements*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall PTR, 1995. 384 p. ISBN 0130792292.

TIMOSHENKO, S. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine Series 6*, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

_____. X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine Series 6*, v. 43, n. 253, p. 125–131, 1922.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R. Finite element modelling of hybrid active–passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams—part i: Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 51, n. 7, p. 835–854, 2001. ISSN 1097-0207.

TSCHOEGL, N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 769 p. ISBN 3540191739.

TSCHOEGL, N. W.; KNAUSS, W.; EMRI, I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, v. 6, n. 1, p. 3–51, 2002. ISSN 1385-2000.

WEAVER JR., W.; TIMOSHENKO, S. P.; YOUNG, D. H. *Vibration Problems in Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1990. ISBN 9780471632283.

YAN, M.-J.; DOWELL, E. H. Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 4, p. 1041–1046, 1972.

YANG, F.; ZHU, K.-Q. A note on the definition of fractional derivatives applied in rheology. *Acta Mechanica Sinica*, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics; Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, v. 27, n. 6, p. 866–876, 2011. ISSN 0567-7718.

YIN, D.; DUAN, X.; ZHOU, X. Fractional time-dependent deformation component models for characterizing viscoelastic poisson's ratio. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v. 42, n. 0, p. 422 – 429, 2013. ISSN 0997-7538.

Apêndices

APÊNDICE A – Interface Gráfica

Figura 64 – Ilustração da interface gráfica para estimativa de $\alpha(T)$.

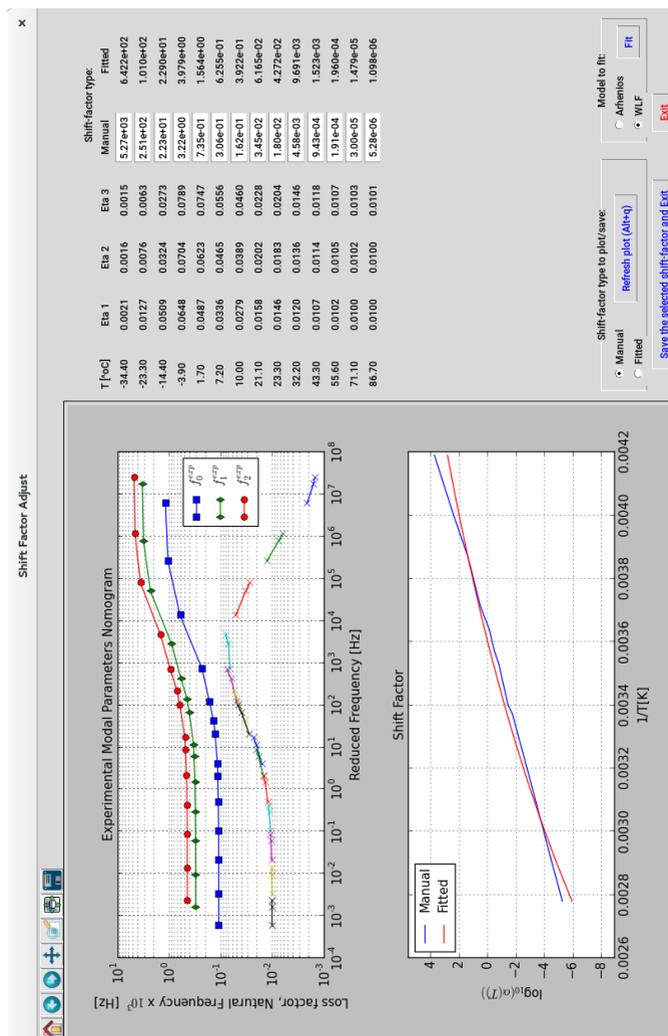
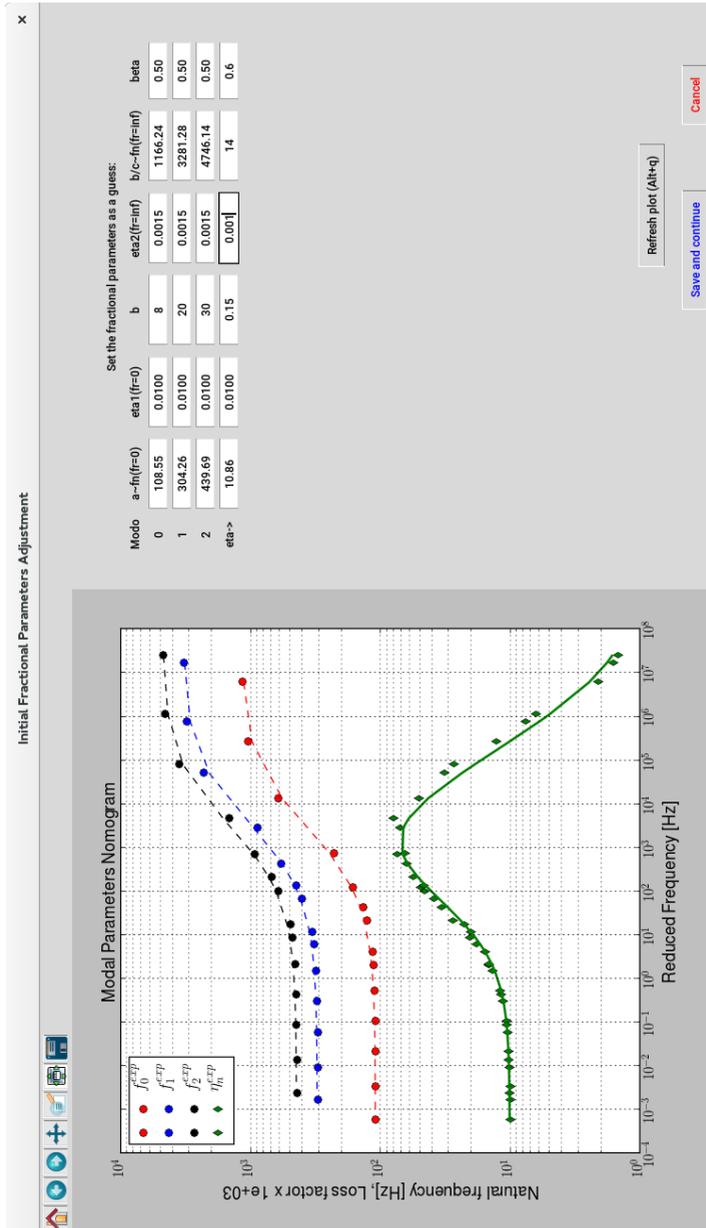


Figura 65 – Ilustração da interface gráfica para estimativa inicial das constantes dos modelos fracionários de f_n^{Teo} e η_n^{Teo} .



APÊNDICE B – Matrizes do Elemento Finito de Viga Sanduíche

A seguir é apresentado o script com as matrizes de massa e rigidez do elemento finito de viga sanduíche implementado em *Python*, de acordo com a formulação apresentada na subsecção 4.3.2.1.

```

# -*- coding: utf-8 -*-
#%=====
# Sandwich Beam Element: 4 dofs/node => {u1, w1, w'1, u2}
#=====
5 def Sandwich08(xe,b,h1,E1,Gv,rho1):
    from numpy import array
    h1,hv,h2 = h1 #Thickness of each layer
    E1,Ev,E2 = E1 #Young modulus of each layer (Ev=>complex)
    Gv = Gv[1] #Shear modulus of viscoelastic layer (complex)
10 rho1,rhov,rho2 = rho1 #Mass density of each layer
    a=1.*(xe[-1]-xe[0])/2. # 2.*J=2.*Jacobian=element length (a=Le/2)
    %%#####
    ##### Stiffness Matrix element #####
    #####
15 H11V1=h1+hv
    H12=h1+h2
    %%##### Layer 1 #####
    ### Extension: (Declaracao das constantes)
    k1e1=(b*E1*h1)/(2.*a)
20 #####
    # |____Node1____| |____Node2____|
    #####| u1 , w1, w'1,u2| |u1 , w1, w'1,u2|
    K1e= array([[k1e1, 0., 0., 0., -k1e1, 0., 0., 0.],
                [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
25 [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
                [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
                [-k1e1, 0., 0., 0., k1e1, 0., 0., 0.],
                [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
                [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
30 [0. , 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=complex)
    ### Bending: (Declaracao das constantes)
    k1b1=(b*E1*h1**3.)/(8.*a**3.)

```

```

k1b2=(b*E1*h1**3.)/(8.*a**2.)
k1b3=(b*E1*h1**3.)/(6.*a)
35 k1b4=(b*E1*h1**3.)/(12.*a)
#####
K1b= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., k1b1, k1b2, 0., 0., -k1b1, k1b2, 0.],
            [0., k1b2, k1b3, 0., 0., -k1b2, k1b4, 0.],
40 [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., -k1b1, -k1b2, 0., 0., k1b1, -k1b2, 0.],
            [0., k1b2, k1b4, 0., 0., -k1b2, k1b3, 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=complex)
45 %/##### Layer 2 #####
### Extension: (Declaracao das constantes)
k2e1=(b*E2*h2)/(2.*a)
#####
K2e= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
50 [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., k2e1, 0., 0., 0., -k2e1],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
55 [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., -k2e1, 0., 0., 0., k2e1]],dtype=complex)
### Bending: (Declaracao das constantes)
k2b1=(b*E2*h2**3.)/(8.*a**3.)
k2b2=(b*E2*h2**3.)/(8.*a**2.)
60 k2b3=(b*E2*h2**3.)/(6.*a)
k2b4=(b*E2*h2**3.)/(12.*a)
#####
K2b= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., k2b1, k2b2, 0., 0., -k2b1, k2b2, 0.],
65 [0., k2b2, k2b3, 0., 0., -k2b2, k2b4, 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0., -k2b1, -k2b2, 0., 0., k2b1, -k2b2, 0.],
            [0., k2b2, k2b4, 0., 0., -k2b2, k2b3, 0.],
70 [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=complex)
%/##### Layer V #####
### Extension-X: (Declaracao das constantes)
kVeX1=(b*Ev*hv)/(8.*a)
kVeX2=(b*Ev*(h1-h2)*hv)/(16.*a)
75 kVeX3=(b*Ev*(-h1+h2)*hv)/(16.*a)
kVeX4=(3.*b*Ev*(h1-h2)**2.*hv)/(32.*a**3.)
kVeX5=(3.*b*Ev*(h1-h2)**2.*hv)/(32.*a**2.)
kVeX7=(b*Ev*(h1-h2)**2.*hv)/(16.*a)
#####

```

```

80   KVe=array([[ kVeX1,    0., kVeX2, kVeX1,-kVeX1,    0., kVeX3,-kVeX1],
              [ 0., kVeX4, kVeX5, 0., 0.,-kVeX4, kVeX5, 0.],
              [ kVeX2, kVeX5,(h1-h2)**2.*kVeX1, kVeX2, kVeX3,-kVeX5, kVeX7, kVeX3],
              [ kVeX1,    0., kVeX2, kVeX1,-kVeX1,    0., kVeX3,-kVeX1],
              [-kVeX1,    0., kVeX3,-kVeX1, kVeX1,    0., kVeX2, kVeX1],
85   [ 0.,-kVeX4,-kVeX5, 0., 0., kVeX4,-kVeX5, 0.],
              [ kVeX3, kVeX5, kVeX7, kVeX3, kVeX2,-kVeX5,(h1-h2)**2.*kVeX1, kVeX2],
              [-kVeX1,    0., kVeX3,-kVeX1, kVeX1,    0., kVeX2, kVeX1]],dtype=complex)

#### Bending-X: (Declaracao das constantes)
kVbX1=(3.*b*Ev*(H11V1+h2)**2.*hv*(5.*H12**2.+10.*H12*hv+4.*hv**2.))/(40.*a*(3.*H12**2.+
90   6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX2=(b*Ev*hv*(15.*H12**5.+60.*H12**4.*hv+87.*H12**3.*hv**2.+58.*H12**2.*hv**3.+
20.*H12*hv**4.+4.*hv**5.))/(80.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX3=(b*Ev*hv*(-15.*H12**5.-60.*H12**4.*hv-87.*H12**3.*hv**2.-58.*H12**2.*hv**3.+
-20.*H12*hv**4.-4.*hv**5.))/(80.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
95   kVbX4=(b*Ev*hv*(45.*H12**6.+180.*H12**5.*hv+261.*H12**4.*hv**2.+204.*H12**3.*hv**3.+
120.*H12**2.*hv**4.+36.*H12*hv**5.+8.*hv**6.))/(160.*a**3.*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX5=(b*Ev*hv*(45.*H12**6.+180.*H12**5.*hv+261.*H12**4.*hv**2.+204.*H12**3.*hv**3.+
120.*H12**2.*hv**4.+36.*H12*hv**5.+8.*hv**6.))/(160.*a**2.*(3.*H12**2.+
100  6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX6=(b*Ev*hv*(-45.*H12**6.-180.*H12**5.*hv-261.*H12**4.*hv**2.-204.*H12**3.*hv**3.+
-120.*H12**2.*hv**4.-36.*H12*hv**5.-8.*hv**6.))/(160.*a**3.*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX7=(b*Ev*hv*(15.*H12**5.+60.*H12**4.*hv+87.*H12**3.*hv**2.+64.*H12**2.*hv**3.+
32.*H12*hv**4.+8.*hv**5.))/(80.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
105  kVbX8=(b*Ev*hv*(45.*H12**6.+180.*H12**5.*hv+261.*H12**4.*hv**2.+204.*H12**3.*hv**3.+
120.*H12**2.*hv**4.+36.*H12*hv**5.+8.*hv**6.))/(120.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+
2.*hv**2.))**2.)
kVbX9=(b*Ev*hv*(-15.*H12**5.-60.*H12**4.*hv-87.*H12**3.*hv**2.-64.*H12**2.*hv**3.+
-32.*H12*hv**4.-8.*hv**5.))/(80.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
110  kVbX10=(b*Ev*hv*(-45.*H12**6.-180.*H12**5.*hv-261.*H12**4.*hv**2.-204.*H12**3.*hv**3.+
-120.*H12**2.*hv**4.-36.*H12*hv**5.-8.*hv**6.))/(160.*a**2.*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVbX11=(b*Ev*hv*(45.*H12**6.+180.*H12**5.*hv+261.*H12**4.*hv**2.+204.*H12**3.*hv**3.+
115  120.*H12**2.*hv**4.+36.*H12*hv**5.+8.*hv**6.))/(240.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+
2.*hv**2.))**2.)

#####
Kvb=array([[ kVbX1,    0., kVbX2,-kVbX1,-kVbX1,    0., kVbX3, kVbX1],
           [ 0.,kVbX4, kVbX5, 0., 0., kVbX6, kVbX5, 0.],
120  [ kVbX7,kVbX5, kVbX8, kVbX9, kVbX9,kVbX10,kVbX11, kVbX7],
           [-kVbX1,    0., kVbX3, kVbX1, kVbX1,    0., kVbX2,-kVbX1],
           [-kVbX1,    0., kVbX3, kVbX1, kVbX1,    0., kVbX2,-kVbX1],
           [ 0.,kVbX6,kVbX10, 0., 0., kVbX4,kVbX10, 0.],
           [ kVbX9,kVbX5,kVbX11, kVbX7, kVbX7,kVbX10, kVbX8, kVbX9],
125  [ kVbX1,    0., kVbX2,-kVbX1,-kVbX1,    0., kVbX3, kVbX11]],dtype=complex)

#### Hi-X (termos de ordem superior): (Declaracao das constantes)

```

```

kVHi1=(b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**2.-42.*H12*hv-16.*hv**2.))/(280.*a*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi2=(b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**3.-42.*H12**2.*hv-16.*H12*hv**2.+
130 -4.*hv**3.))/(560.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi3=(b*Ev*hv**3.*(21.*H12**2.+42.*H12*hv+16.*hv**2.))/(280.*a*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi4=(b*Ev*hv**3.*(21.*H12**3.+42.*H12**2.*hv+16.*H12*hv**2.+
4.*hv**3.))/(560.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
135 kVHi5=(3.*b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**4.-84.*H12**3.*hv-100.*H12**2.*hv**2.+
-36.*H12*hv**3.-8.*hv**4.))/(1120.*a**3.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi6=(3.*b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**4.-84.*H12**3.*hv-100.*H12**2.*hv**2.-36.*H12*hv**3.+
-8.*hv**4.))/(1120.*a**2.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi7=(3.*b*Ev*hv**3.*(21.*H12**4.+84.*H12**3.*hv+100.*H12**2.*hv**2.+36.*H12*hv**3.+
140 8.*hv**4.))/(1120.*a**3.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi8=(b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**3.-84.*H12**2.*hv-100.*H12*hv**2.+
-32.*hv**3.))/(560.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi9=(b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**4.-84.*H12**3.*hv-100.*H12**2.*hv**2.-36.*H12*hv**3.+
-8.*hv**4.))/(280.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
145 kVHi10=(b*Ev*hv**3.*(21.*H12**3.+84.*H12**2.*hv+100.*H12*hv**2.+
32.*hv**3.))/(560.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi11=(3.*b*Ev*hv**3.*(21.*H12**4.+84.*H12**3.*hv+100.*H12**2.*hv**2.+36.*H12*hv**3.+
8.*hv**4.))/(1120.*a**2.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVHi12=(b*Ev*hv**3.*(-21.*H12**4.-84.*H12**3.*hv-100.*H12**2.*hv**2.-36.*H12*hv**3.+
150 -8.*hv**4.))/(560.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
#####
KVHi=array([[ kVHi1,    0., kVHi2, kVHi3, kVHiX3,    0., kVHi4, kVHiX1],
[    0.,kVHi5, kVHi6,    0.,    0., kVHi7, kVHiX6,    0.],
[ kVHiX8,kVHiX6, kVHiX9,kVHiX10,kVHiX10,kVHiX11,kVHiX12, kVHiX8],
155 [ kVHiX3,    0., kVHi4, kVHiX1, kVHiX1,    0., kVHi2, kVHiX3],
[ kVHiX3,    0., kVHiX4, kVHiX1, kVHiX1,    0., kVHiX2, kVHiX3],
[    0.,kVHiX7,kVHiX11,    0.,    0., kVHi5,kVHiX11,    0.],
[ kVHiX10,kVHiX6,kVHiX12, kVHiX8, kVHiX8,kVHiX11, kVHiX9,kVHiX10],
[ kVHiX1,    0., kVHi2, kVHiX3, kVHiX3,    0., kVHi4, kVHiX1]],dtype=complex)
160
### Cisalhamento: (Declaracao das constantes)
kVs1=(2.*a*b*Gv*(15.*H12**4.+60.*H12**3.*hv+80.*H12**2.*hv**2.+40.*H12*hv**3.+
8.*hv**4.))/(5.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs2=(3.*b*Gv*(-15.*H12**5.-90.*H12**4.*hv-200.*H12**3.*hv**2.-200.*H12**2.*hv**3.+
-88.*H12*hv**4.-16.*hv**5.))/(20.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
165 kVs3=(a*b*Gv*(15.*H12**5.+90.*H12**4.*hv+200.*H12**3.*hv**2.+200.*H12**2.*hv**3.+
88.*H12*hv**4.+16.*hv**5.))/(20.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs4=(2.*a*b*Gv*(-15.*H12**4.-60.*H12**3.*hv-80.*H12**2.*hv**2.-40.*H12*hv**3.+
-8.*hv**4.))/(5.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs5=(a*b*Gv*(15.*H12**4.+60.*H12**3.*hv+80.*H12**2.*hv**2.+40.*H12*hv**3.+
170 8.*hv**4.))/(5.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs6=(3.*b*Gv*(15.*H12**5.+90.*H12**4.*hv+200.*H12**3.*hv**2.+200.*H12**2.*hv**3.+
88.*H12*hv**4.+16.*hv**5.))/(20.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs7=(a*b*Gv*(-15.*H12**5.-90.*H12**4.*hv-200.*H12**3.*hv**2.-200.*H12**2.*hv**3.+

```

```

-88.*H12*hv**4.-16.*hv**5.)/(20.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
175 kVs8=(a*b*Gv*(-15.*H12**4.-60.*H12**3.*hv-80.*H12**2.*hv**2.-40.*H12*hv**3.+
-8.*hv**4.))/(5.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs9=(9*b*Gv*(15.*H12**6.+120.*H12**5.*hv+380.*H12**4.*hv**2.+600.*H12**3.*hv**3.+
488.*H12**2.*hv**4.+192.*H12*hv**5.+32.*hv**6.))/(100.*a*hv*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
180 kVs10=(3.*b*Gv*(15.*H12**6.+120.*H12**5.*hv+380.*H12**4.*hv**2.+600.*H12**3.*hv**3.+
488.*H12**2.*hv**4.+192.*H12*hv**5.+32.*hv**6.))/(200.*hv*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs11=(9*b*Gv*(-15.*H12**6.-120.*H12**5.*hv-380.*H12**4.*hv**2.-600.*H12**3.*hv**3.+
-488.*H12**2.*hv**4.-192.*H12*hv**5.-32.*hv**6.))/(100.*a*hv*(3.*H12**2.+
185 6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs12=(a*b*Gv*(15.*H12**6.+120.*H12**5.*hv+380.*H12**4.*hv**2.+600.*H12**3.*hv**3.+
488.*H12**2.*hv**4.+192.*H12*hv**5.+32.*hv**6.))/(25.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+
2.*hv**2.))**2.)
kVs13=(3.*b*Gv*(-15.*H12**6.-120.*H12**5.*hv-380.*H12**4.*hv**2.-600.*H12**3.*hv**3.+
190 -488.*H12**2.*hv**4.-192.*H12*hv**5.-32.*hv**6.))/(200.*hv*(3.*H12**2.+
6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
kVs14=(a*b*Gv*(-15.*H12**6.-120.*H12**5.*hv-380.*H12**4.*hv**2.-600.*H12**3.*hv**3.+
-488.*H12**2.*hv**4.-192.*H12*hv**5.-32.*hv**6.))/(100.*hv*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+
2.*hv**2.))**2.)
195 #####
KV= array([[kVs1, kVs2, kVs3,kVs4,kVs5, kVs6, kVs7,kVs8],
[kVs2, kVs9,kVs10,kVs6,kVs2,kVs11,kVs10,kVs6],
[kVs3,kVs10,kVs12,kVs7,kVs7,kVs13,kVs14,kVs3],
[kVs4, kVs6, kVs7,kVs1,kVs8, kVs2, kVs3,kVs5],
200 [kVs5, kVs2, kVs7,kVs8,kVs1, kVs6, kVs3,kVs4],
[kVs6,kVs11,kVs13,kVs2,kVs6, kVs9,kVs13,kVs2],
[kVs7,kVs10,kVs14,kVs3,kVs3,kVs13,kVs12,kVs7],
[kVs8, kVs6, kVs3,kVs5,kVs4, kVs2, kVs7,kVs11]],dtype=complex)
##### Total:
205 Ke=K1e+K1b+K2e+K2b+KVe+KVb+KVHi+KVb
#####
##### Mass Matrix element #####
#####
m1=b*h1*rho1
210 mv=b*hv*rhov
m2=b*h2*rho2
##### Layer 1 #####
### Inertia Axial-x: (Declaracao das constantes)
m1x1=(2.*a*m1)/3.
215 m1x2=(a*m1)/3.
m1x3=(h1**2.*m1)/(20.*a)
m1x4=(h1**2.*m1)/120.
m1x5=(a*h1**2.*m1)/45.
m1x6=-(a*h1**2.*m1)/180.
220 #####

```

```

M1x= array([[m1x1,  0.,  0., 0.,m1x2,  0.,  0., 0.],
            [ 0., m1x3, m1x4, 0., 0.,-m1x3, m1x4, 0.],
            [ 0., m1x4, m1x5, 0., 0.,-m1x4, m1x6, 0.],
            [ 0., 0., 0.,0., 0., 0., 0., 0.],
            [m1x2, 0., 0.,0.,m1x1, 0., 0., 0.],
            [ 0.,-m1x3,-m1x4, 0., 0., m1x3,-m1x4, 0.],
            [ 0., m1x4, m1x6, 0., 0.,-m1x4, m1x5, 0.],
            [ 0., 0., 0.,0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=float)
225
### Transversal-z: (Declaracao das constantes)
230 m1z1=(26.*a*m1)/35.
m1z2=(22.*a**2.*m1)/105.
m1z3=(9*a*m1)/35.
m1z4=(-13.*a**2.*m1)/105.
m1z5=(8.*a**3.*m1)/105.
235 m1z6=(-2.*a**3.*m1)/35.
#####
M1z= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
            [0.,m1z1, m1z2, 0., 0., m1z3, m1z4, 0.],
            [0.,m1z2, m1z5, 0., 0.,-m1z4, m1z6, 0.],
            [0., 0., 0.,0.,0., 0., 0., 0.],
            [0., 0., 0.,0.,0., 0., 0., 0.],
            [0.,m1z3,-m1z4, 0., 0., m1z1,-m1z2, 0.],
            [0.,m1z4, m1z6, 0., 0.,-m1z2, m1z5, 0.],
            [0., 0., 0.,0.,0., 0., 0., 0.]],dtype=float)
240
245 %/##### Layer 2 #####
### Inertia Axial-x: (Declaracao das constantes)
m2x1=(h2**2.*m2)/(20.*a)
m2x2=(h2**2.*m2)/120.
m2x3=(a*h2**2.*m2)/45.
250 m2x4=-(a*h2**2.*m2)/180.
m2x5=(2.*a*m2)/3.
m2x6=(a*m2)/3.
#####
255 M2x= array([[0., 0., 0., 0.,0., 0., 0., 0.],
            [0., m2x1, m2x2, 0., 0.,-m2x1, m2x2, 0.],
            [0., m2x2, m2x3, 0., 0.,-m2x2, m2x4, 0.],
            [0., 0., 0.,m2x5, 0., 0., 0.,m2x6],
            [0., 0., 0., 0.,0., 0., 0., 0.],
            [0.,-m2x1,-m2x2, 0., 0., m2x1,-m2x2, 0.],
            [0., m2x2, m2x4, 0., 0.,-m2x2, m2x3, 0.],
            [0., 0., 0.,m2x6, 0., 0., 0.,m2x5]]],dtype=float)
260
### Transversal-z: (Declaracao das constantes)
m2z1=(26.*a*m2)/35.
m2z2=(22.*a**2.*m2)/105.
265 m2z3=(9*a*m2)/35.
m2z4=(-13.*a**2.*m2)/105.
m2z5=(8.*a**3.*m2)/105.

```

```

m2z6=(-2.*a**3.*m2)/35.
#####
270 M2z= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
              [0.,m2z1, m2z2, 0., 0., m2z3, m2z4, 0.],
              [0.,m2z2, m2z5, 0., 0.,-m2z4, m2z6, 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
275 [0.,m2z3,-m2z4, 0., 0., m2z1,-m2z2, 0.],
              [0.,m2z4, m2z6, 0., 0.,-m2z2, m2z5, 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=float)

##### Layer V #####
mm=H12**4.*(h1**2.-h1*h2+h2**2.)+1260.*H12**3.*(h1**2.-h1*h2+h2**2.)*hv\
280 63.*H12**2.*(27.*h1**2.-26.*h1*h2+27.*h2**2.)*hv**2.+84.*H12*(11.*h1**2.+
-8.*h1*h2+11.*h2**2.)*hv**3.+60.*(4.*h1**2.+h1*h2+4.*h2**2.)*hv**4.+
36.*H12*hv**5.+8.*hv**6.

### Inertia Axial-x: (Declaracao das constantes)
mVx1=(2.*a*(105.*H12**4.+420.*H12**3.*hv+567.*H12**2.*hv**2.+294.*H12*hv**3.+
285 52.*hv**4.)*mv)/(105.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx2=-((105.*H12**4.*(2.*h1-h2)+420.*H12**3.*(2.*h1-h2)*hv+42.*H12**2.*(27.*h1+
-13.*h2)*hv**2.+14.*H12*(43.*h1-17.*h2)*hv**3.+4.*(33.*h1-2.*h2)*hv**4.+
12.*hv**5.)*mv)/(280.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx3=(a*(105.*H12**4.*(2.*h1-h2)+420.*H12**3.*(2.*h1-h2)*hv+42.*H12**2.*(27.*h1+
290 -13.*h2)*hv**2.+14.*H12*(43.*h1-17.*h2)*hv**3.+4.*(33.*h1-2.*h2)*hv**4.+
12.*hv**5.)*mv)/(840.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx4=(a*(35.*H12**4.+140.*H12**3.*hv+182*H12**2.*hv**2.+84.*H12*hv**3.+
12.*hv**4.)*mv)/(35.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx5=(a*(105.*H12**4.+420.*H12**3.*hv+567.*H12**2.*hv**2.+294.*H12*hv**3.+
295 52.*hv**4.)*mv)/(105.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx6=(a*(35.*H12**4.+140.*H12**3.*hv+182*H12**2.*hv**2.+84.*H12*hv**3.+
12.*hv**4.)*mv)/(70.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx7=((315.*mm)*mv)/(700.*a*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx8=((315.*mm)*mv)/(4200.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
300 mVx9=((-105.*H12**4.*(h1-2.*h2)-420.*H12**3.*(h1-2.*h2)*hv-42.*H12**2.*(13.*h1+
-27.*h2)*hv**2.-14.*H12*(17.*h1-43.*h2)*hv**3.+4.*(-2.*h1+33.*h2)*hv**4.+
12.*hv**5.)*mv)/(280.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx10=(a*(315.*mm)*mv)/(1575.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx11=(a*(105.*H12**4.*(h1-2.*h2)+420.*H12**3.*(h1-2.*h2)*hv+42.*H12**2.*(13.*h1+
305 -27.*h2)*hv**2.+14.*H12*(17.*h1-43.*h2)*hv**3.+4.*(2.*h1-33.*h2)*hv**4.+
-12.*hv**5.)*mv)/(840.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx12=-((a*(315.*mm)*mv)/(6300.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx13=(a*(-105.*H12**4.*(h1-2.*h2)-420.*H12**3.*(h1-2.*h2)*hv-42.*H12**2.*(13.*h1+
-27.*h2)*hv**2.-14.*H12*(17.*h1-43.*h2)*hv**3.+4.*(-2.*h1+33.*h2)*hv**4.+
310 12.*hv**5.)*mv)/(840.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)
mVx14=((105.*H12**4.*(h1-2.*h2)+420.*H12**3.*(h1-2.*h2)*hv+42.*H12**2.*(13.*h1+
-27.*h2)*hv**2.+14.*H12*(17.*h1-43.*h2)*hv**3.+4.*(2.*h1-33.*h2)*hv**4.+
-12.*hv**5.)*mv)/(280.*(3.*H12**2.+6.*H12*hv+2.*hv**2.))**2.)

#####

```

```

315     MVx= array([[ mVx1, mVx2, mVx3, mVx4, mVx5,-mVx2,-mVx3, mVx6],
                [ mVx2, mVx7, mVx8, mVx9, mVx2,-mVx7, mVx8, mVx9],
                [ mVx3, mVx8,mVx10,mVx11,-mVx3,-mVx8,mVx12,mVx13],
                [ mVx4, mVx9,mVx11, mVx1, mVx6,mVx14,mVx13, mVx5],
320     [ mVx5, mVx2,-mVx3, mVx6, mVx1,-mVx2, mVx3, mVx4],
                [-mVx2,-mVx7,-mVx8,mVx14,-mVx2, mVx7,-mVx8,mVx14],
                [-mVx3, mVx8,mVx12,mVx13, mVx3,-mVx8,mVx10,mVx11],
                [ mVx6, mVx9,mVx13, mVx5, mVx4,mVx14,mVx11, mVx1]],dtype=float)
    #### Transversal-z: (Declaracao das constantes)
    mVz1=(26.*a*mv)/35.
325     mVz2=(22.*a**2.*mv)/105.
    mVz3=(9*a*mv)/35.
    mVz4=(-13.*a**2.*mv)/105.
    mVz5=(8.*a**3.*mv)/105.
    mVz6=(-2.*a**3.*mv)/35.
330     #####
    MVz= array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
                [0.,mVz1,mVz2 , 0., 0., mVz3,mVz4 , 0.],
                [0.,mVz2,mVz5 , 0., 0.,-mVz4,mVz6 , 0.],
                [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
335     [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
                [0.,mVz3,-mVz4, 0., 0., mVz1,-mVz2, 0.],
                [0.,mVz4,mVz6 , 0., 0.,-mVz2, mVz5, 0.],
                [0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]],dtype=float)
    %#### Total:
340     Me=M1x+M1z+M2x+M2z+MVx+MVz
    #Me=M1z+M2z+MVx+MVz
    fe=Me[:,1]*0.0
    return Ke,Me,fe

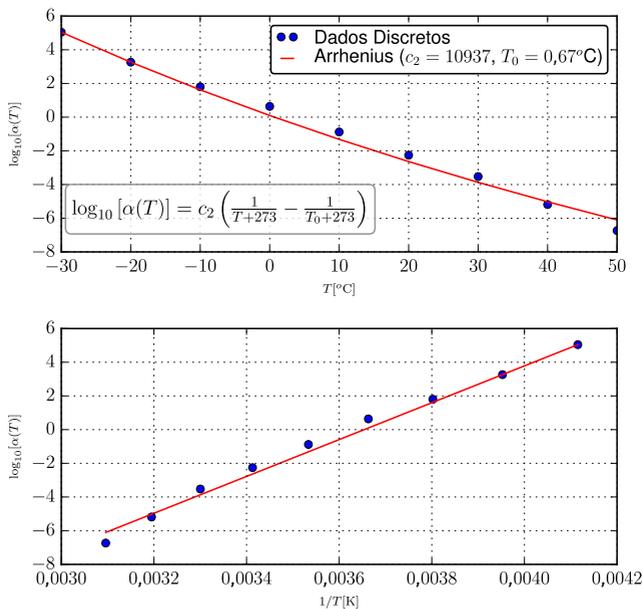
```

APÊNDICE C – Resultados de Caracterização

A seguir são apresentados os resultados de caracterização do módulo complexo dos materiais avaliados.

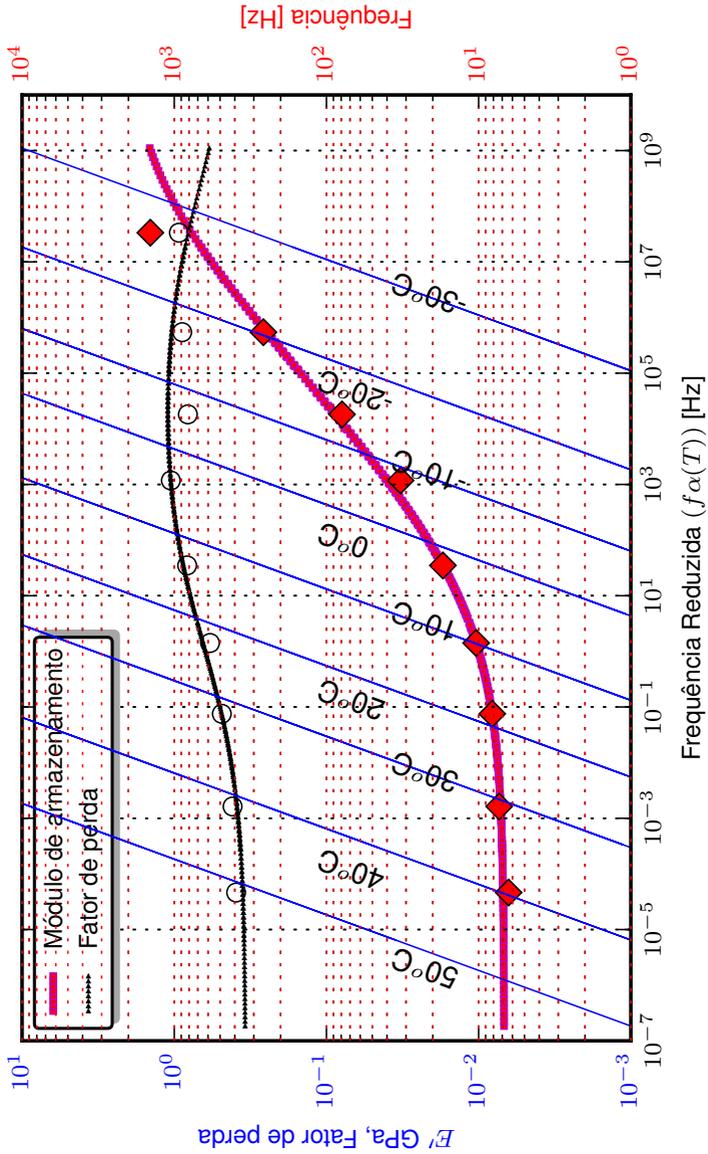
C.1 Material 1229SN08

Figura 66 – Fator de deslocamento para o material 1229SN08.



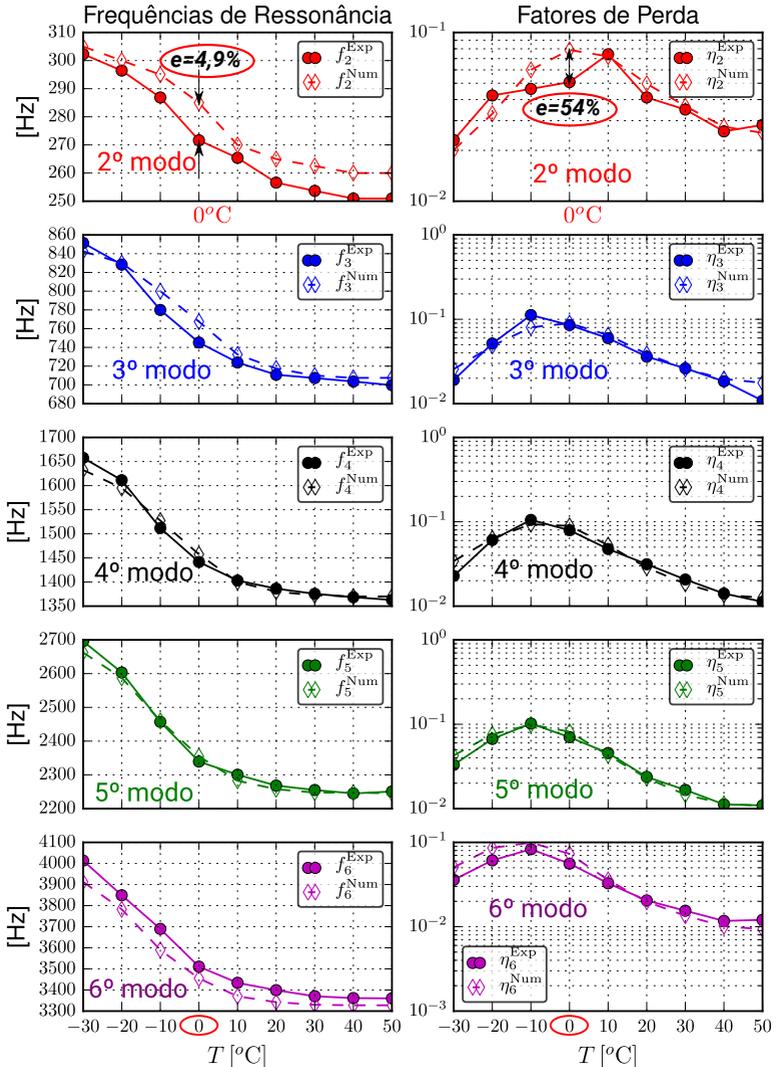
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 67 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN08.



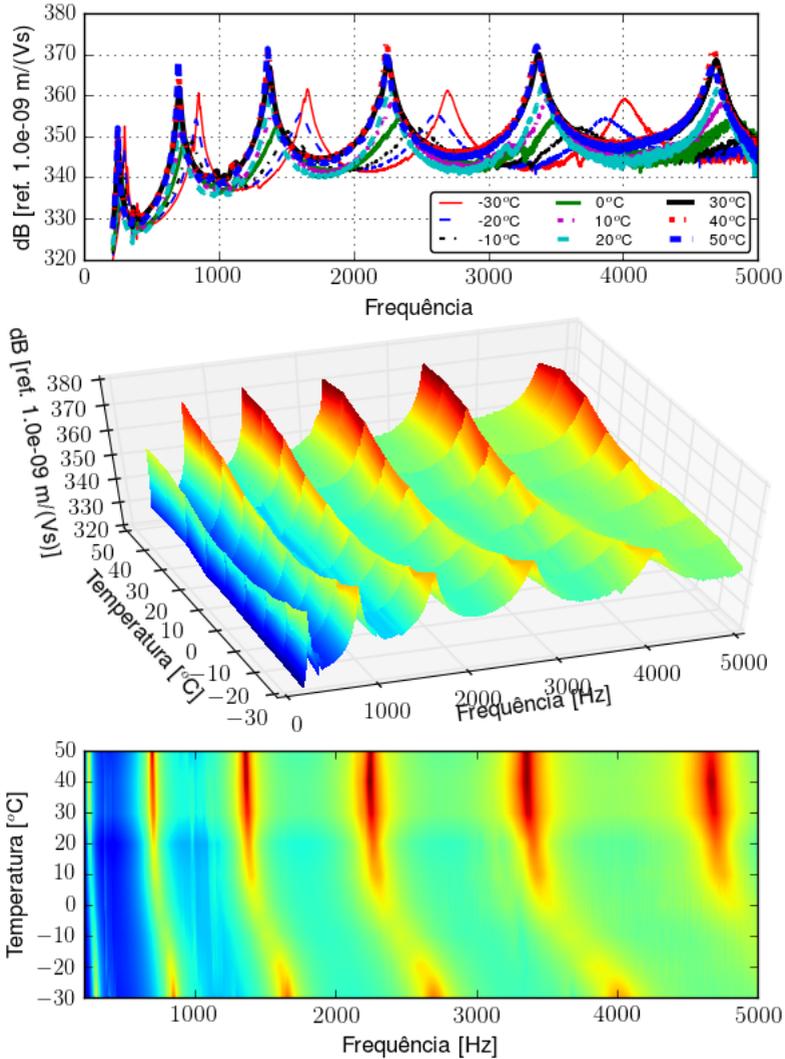
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 68 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material 1229SN08.



Fonte:Elaborado pelo autor.

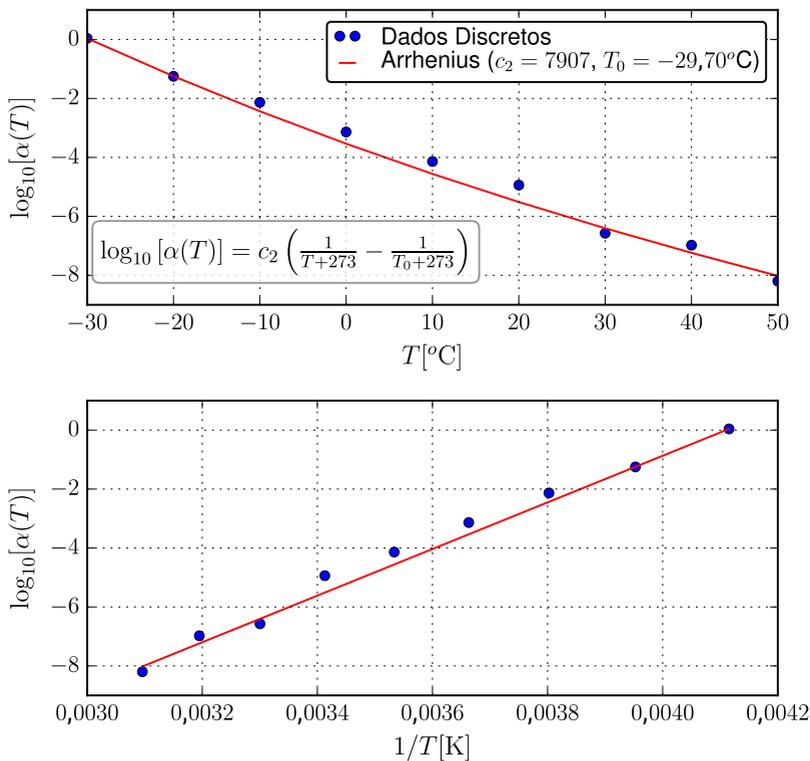
Figura 69 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN08.



Fonte: Elaborado pelo autor.

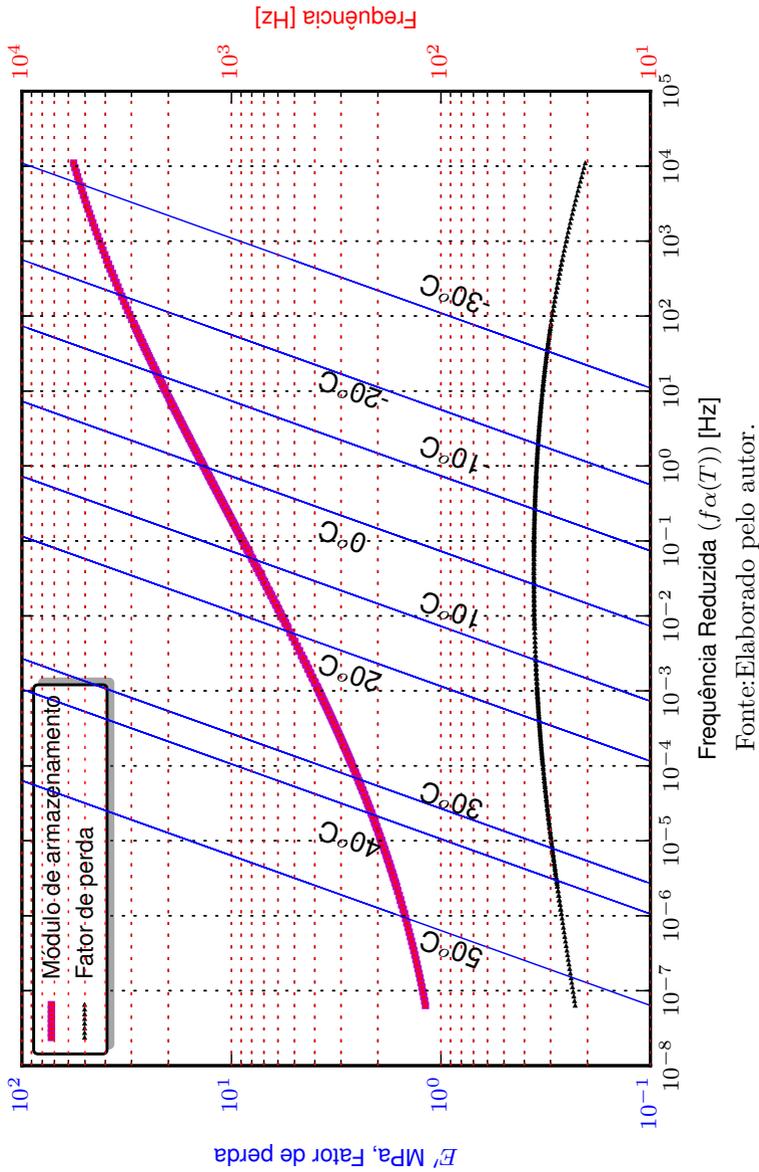
C.2 Material 1229SN09

Figura 70 – Fator de deslocamento para o material 1229SN09.



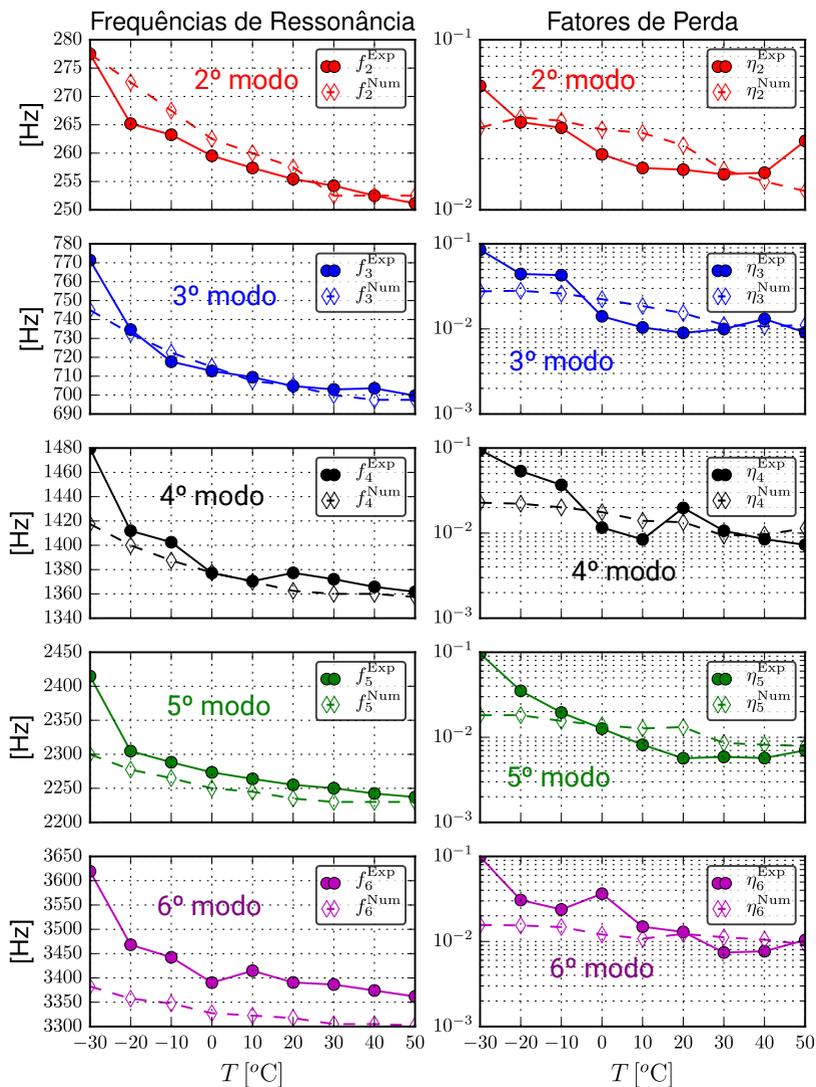
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 71 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material 1229SN09.



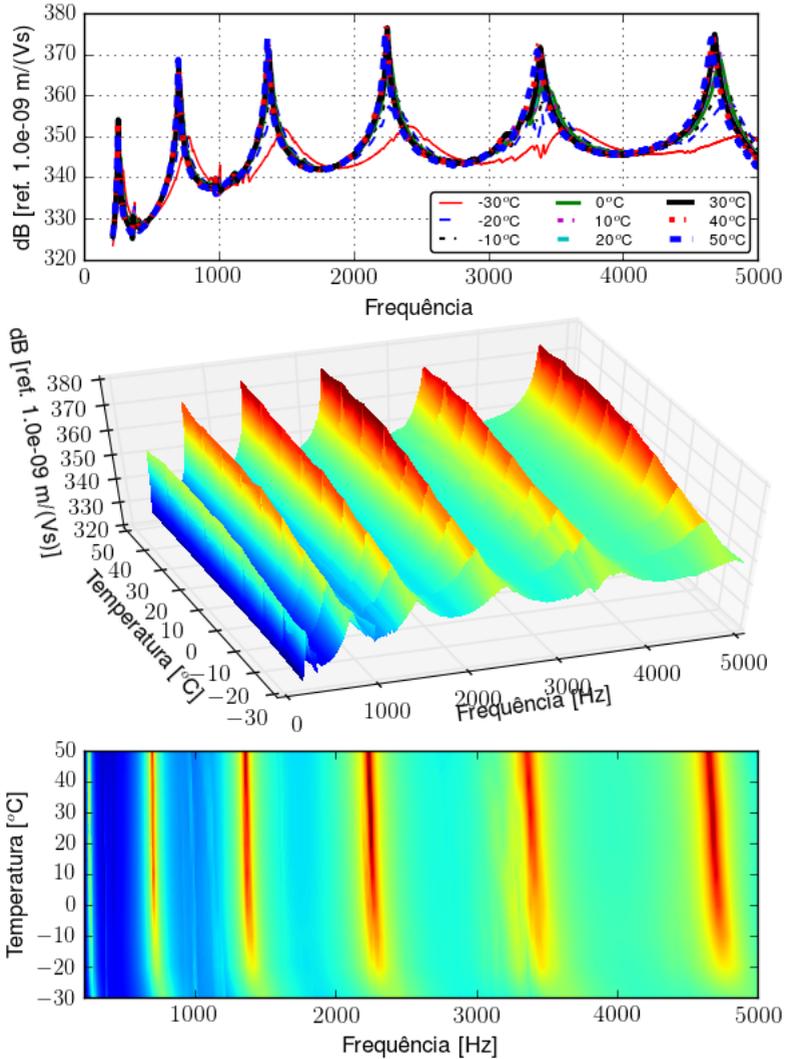
Frequência Reduzida ($f_\alpha(T)$) [Hz]
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 72 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material 1229SN09.



Fonte:Elaborado pelo autor.

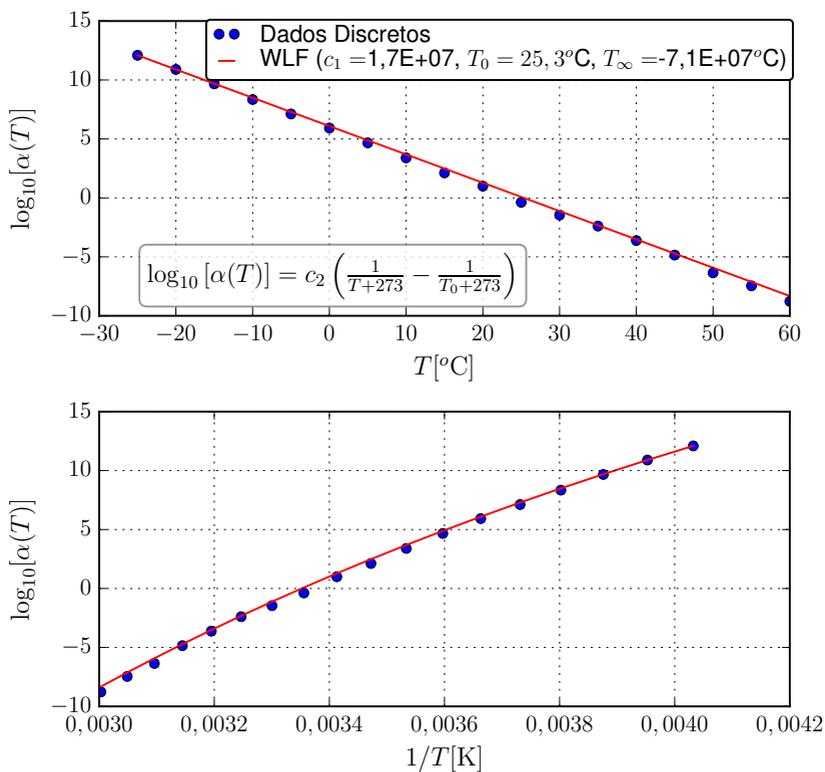
Figura 73 – FRFs experimentais da viga com o material 1229SN09.



Fonte: Elaborado pelo autor.

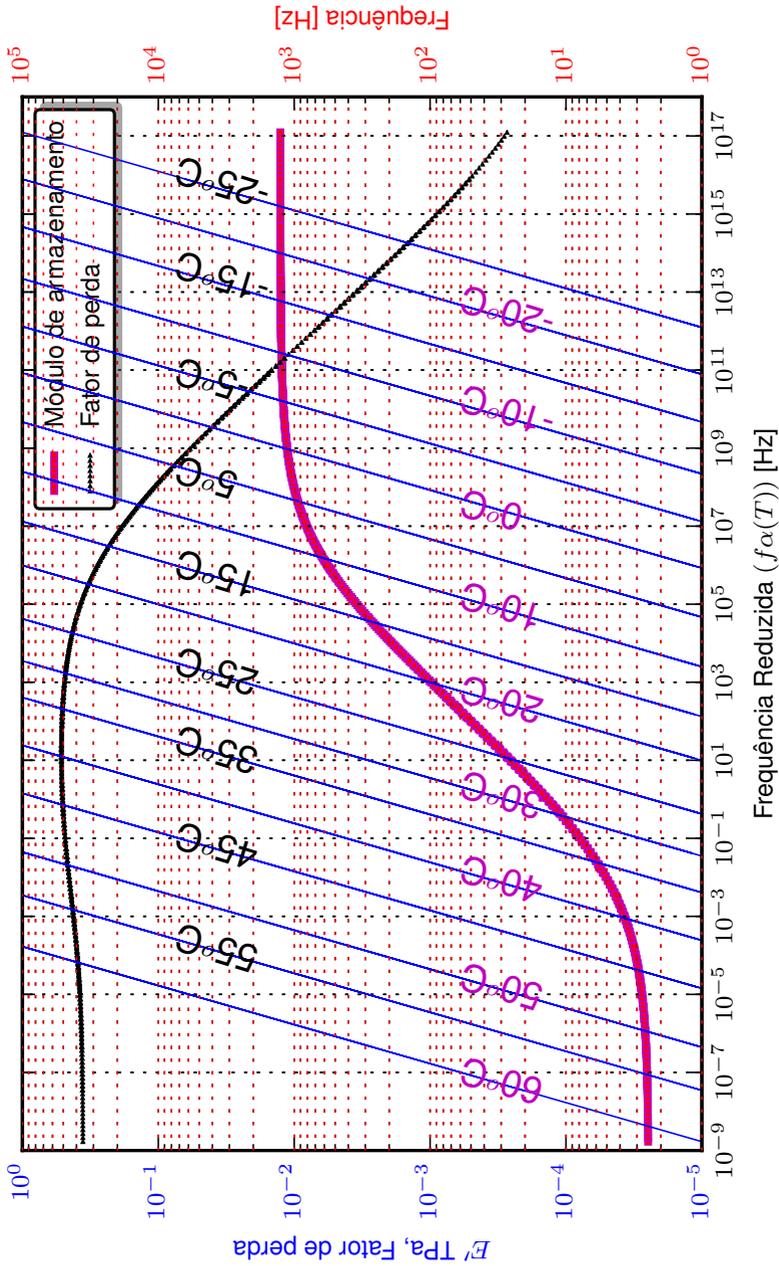
C.3 Material ADC006

Figura 74 – Fator de deslocamento para o material ADC006.



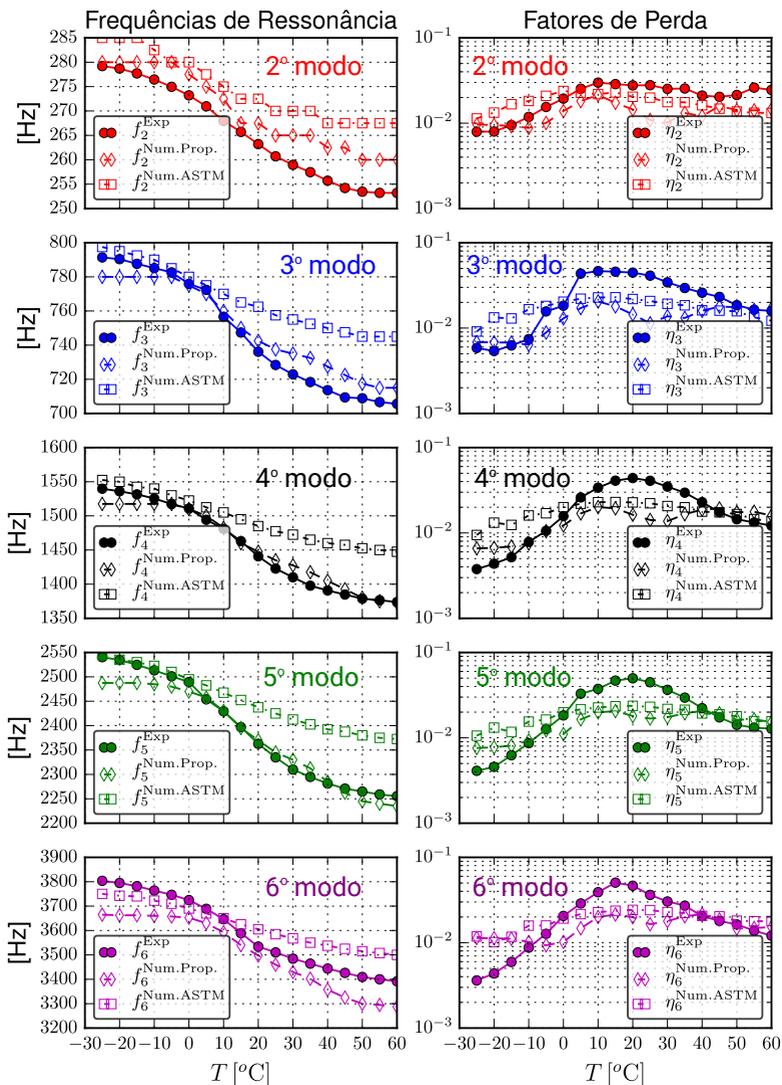
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 75 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material ADC006.



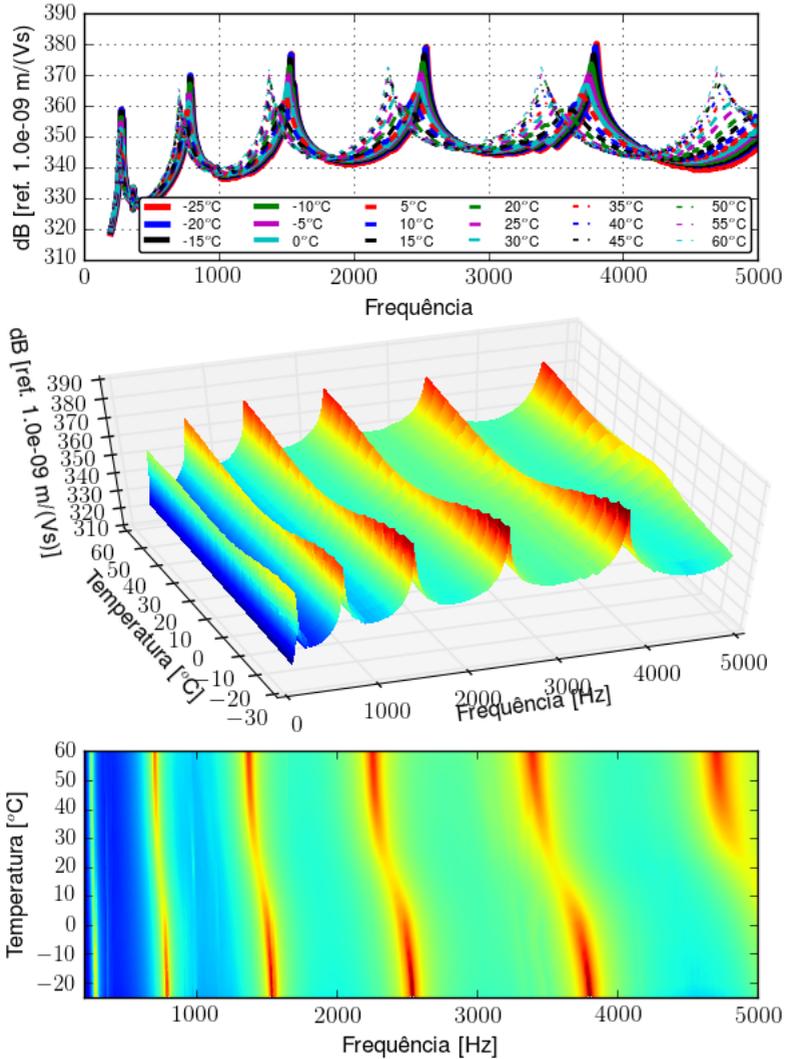
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 76 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material ADC006.



Fonte:Elaborado pelo autor.

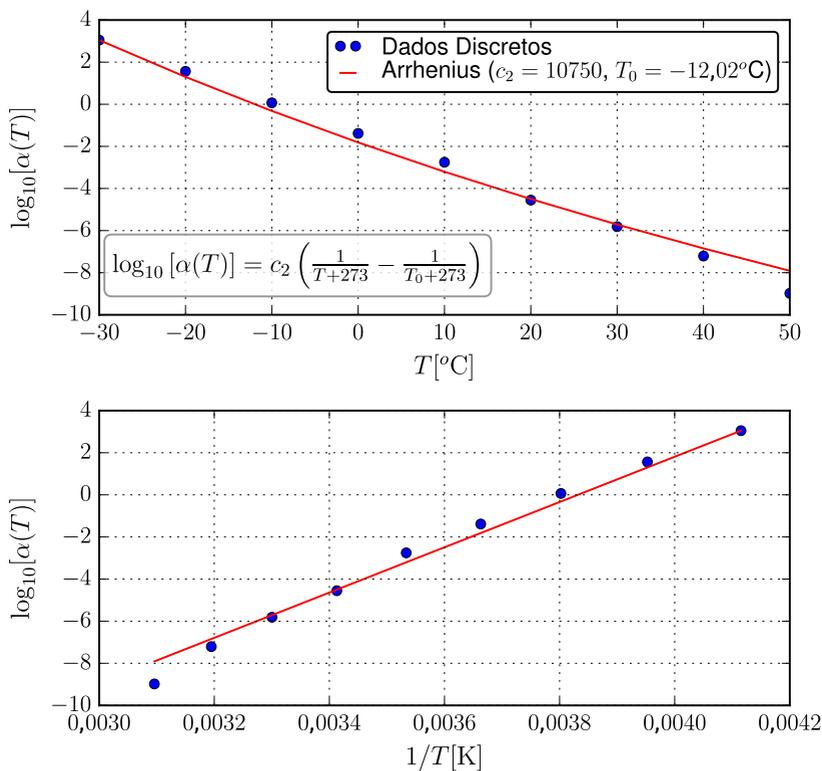
Figura 77 – FRFs experimentais da viga com o material ADC006.



Fonte: Elaborado pelo autor.

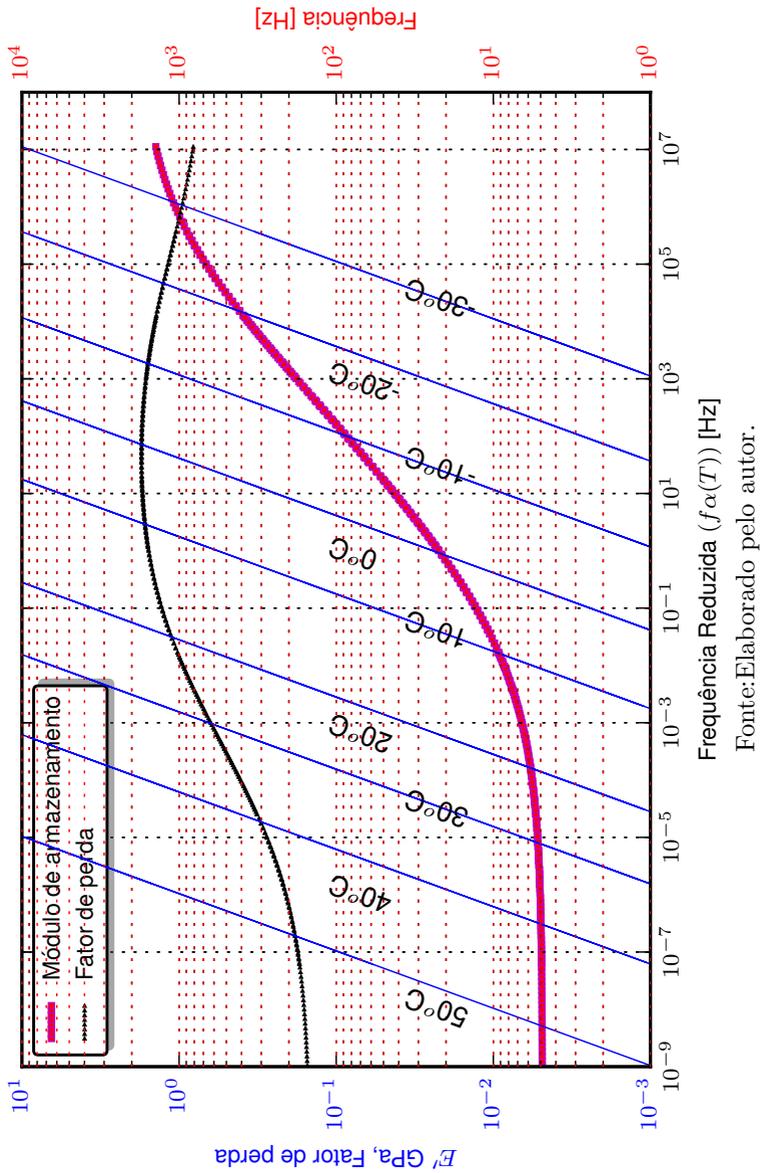
C.4 Material DA350 LIGHT

Figura 78 – Fator de deslocamento para o material DA350 LIGHT.



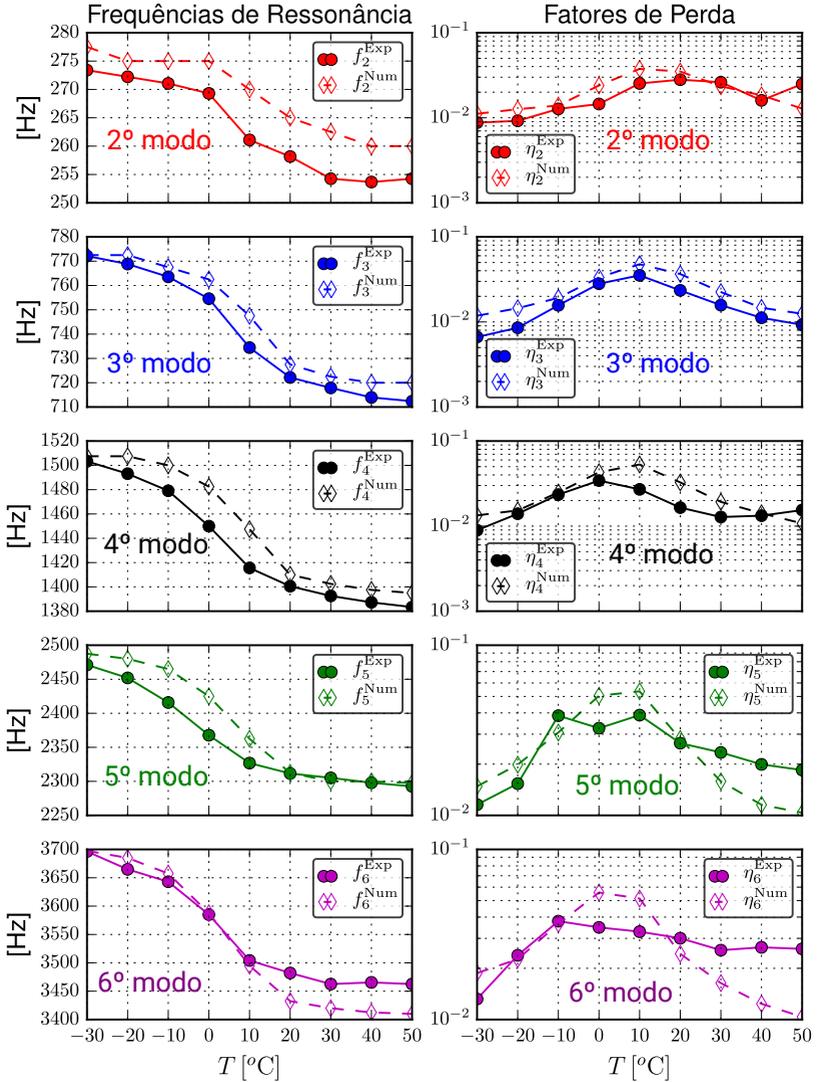
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 79 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material DA350 LIGHT.



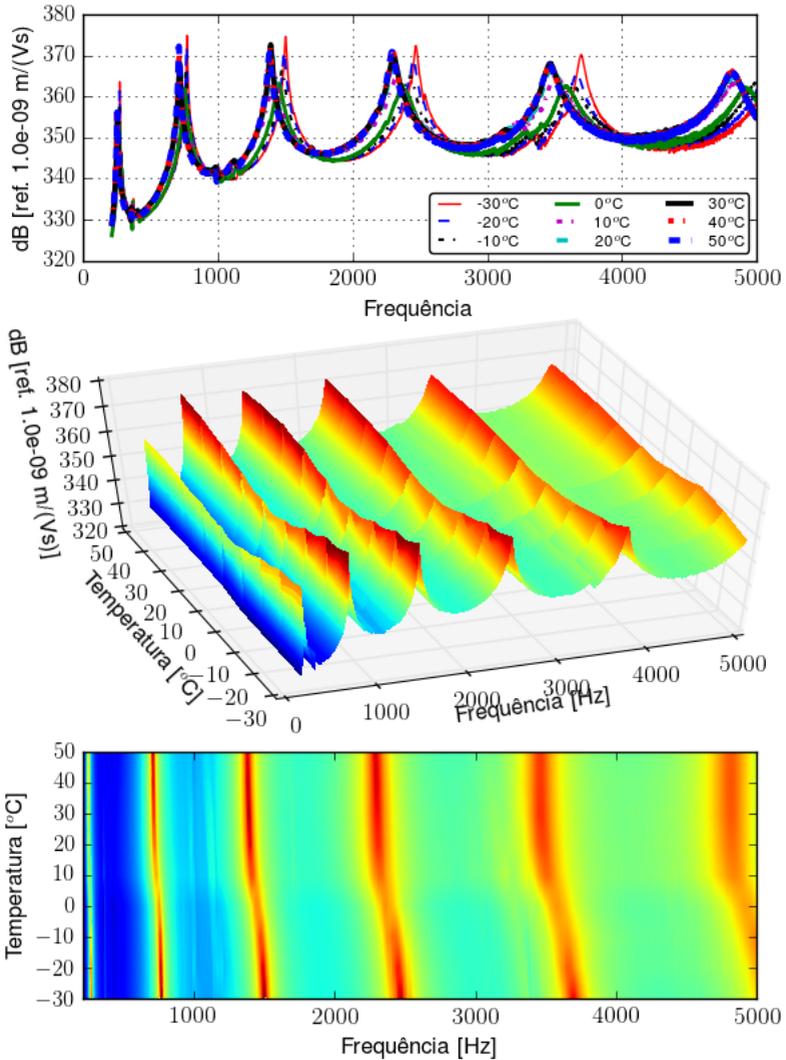
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 80 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o DA350 LIGHT.



Fonte:Elaborado pelo autor.

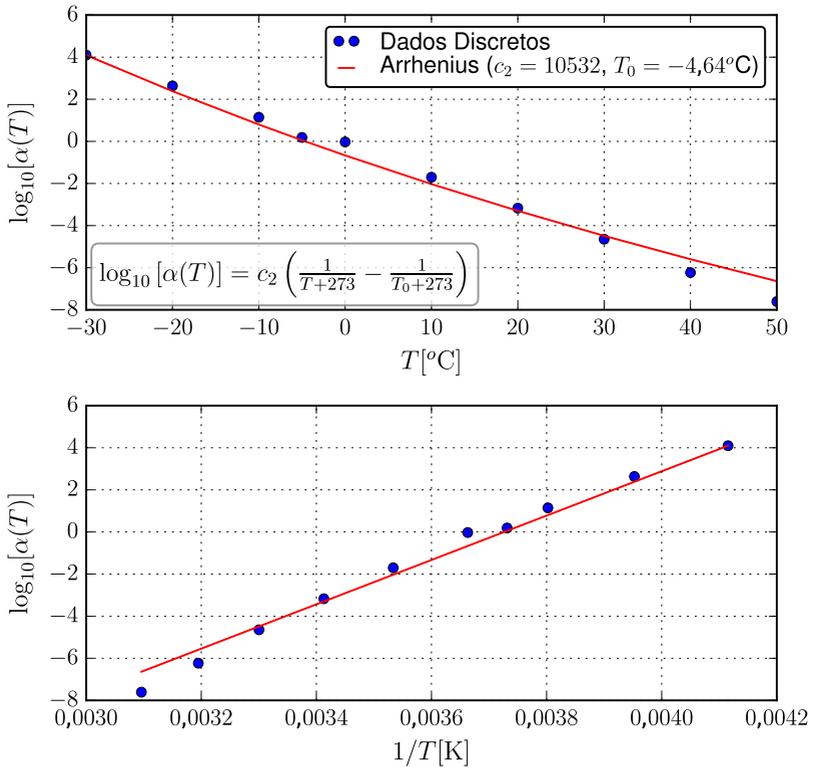
Figura 81 – FRFs experimentais da viga com o material DA350 LIGHT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

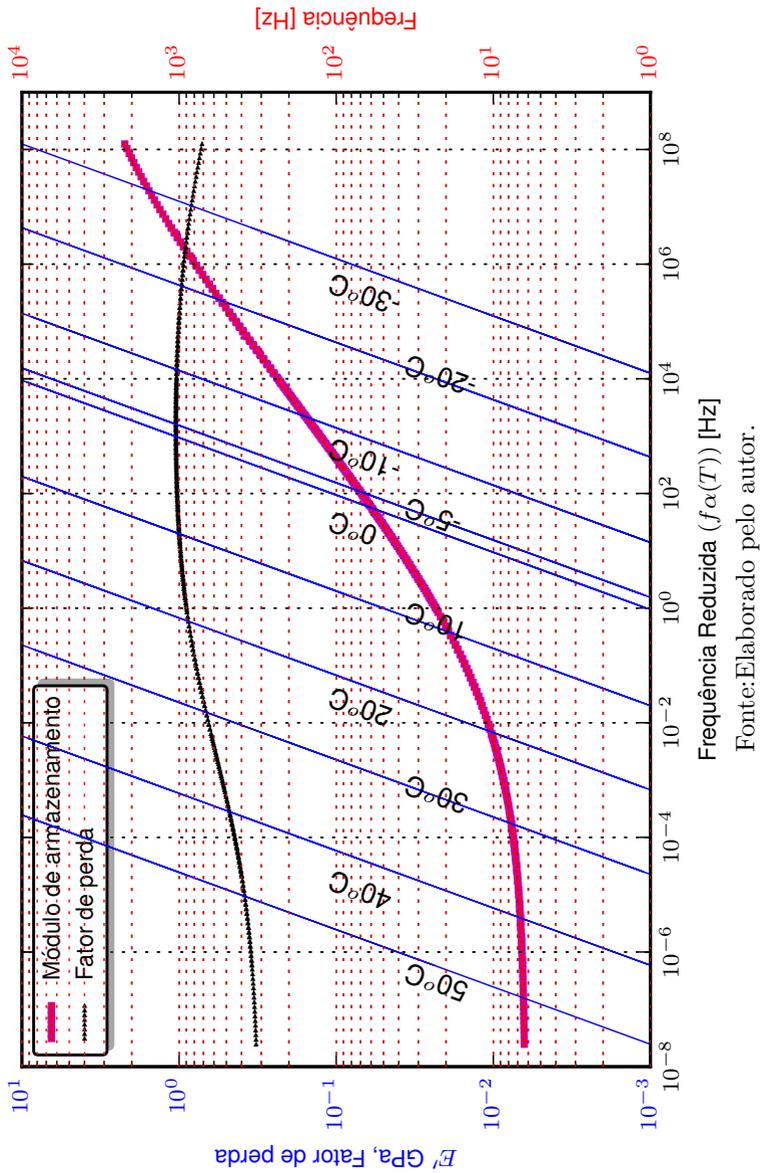
C.5 Material DA350 PERF

Figura 82 – Fator de deslocamento para o material DA350 PERF.



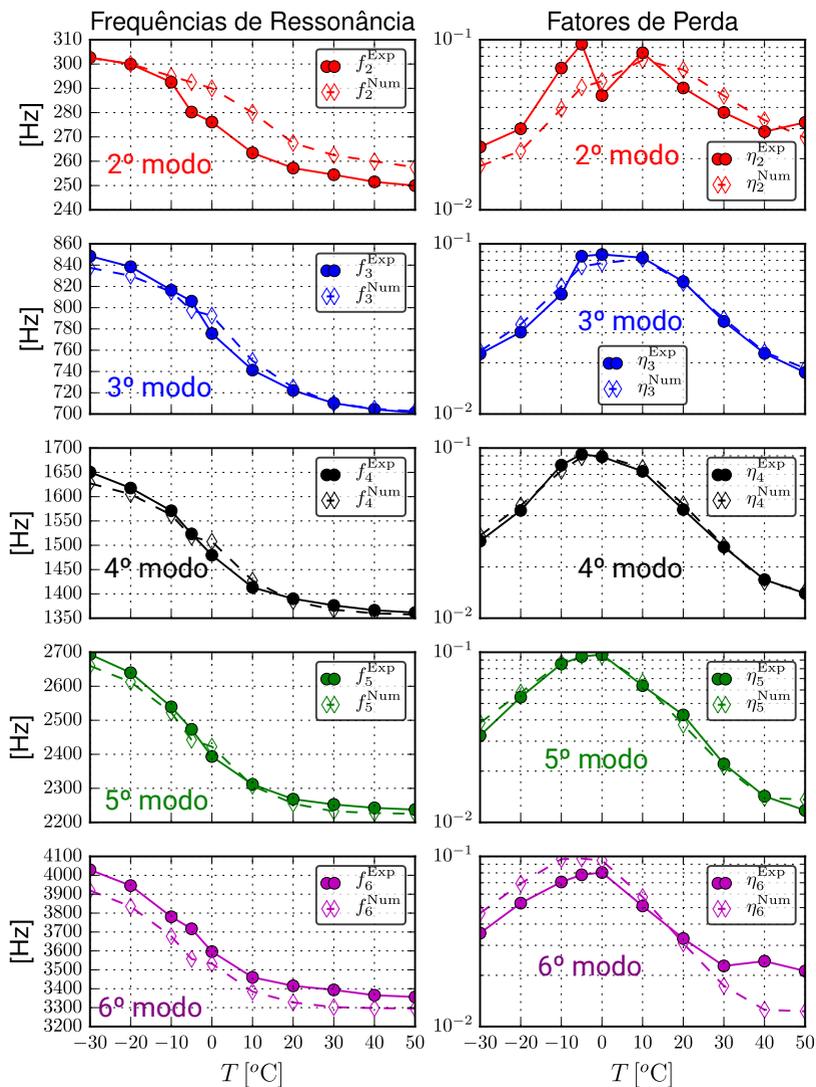
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 83 – Nomograma de frequência reduzida do módulo complexo do material DA350 PERF.



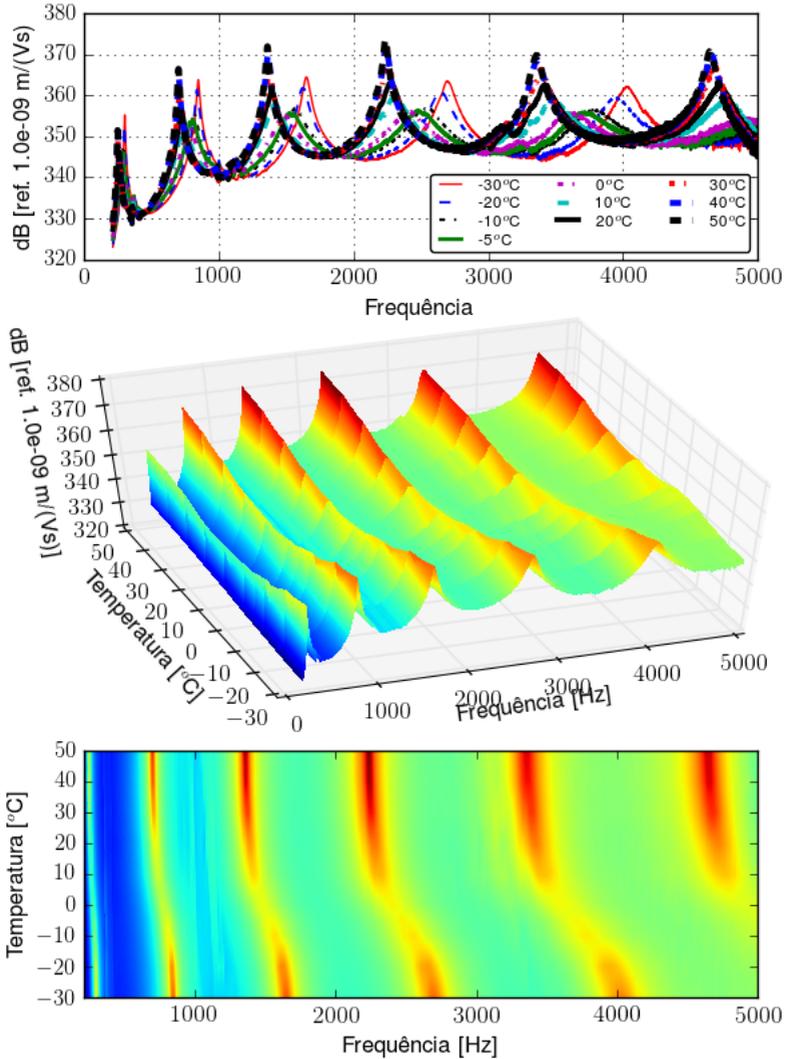
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 84 – Comparação dos parâmetros modais experimentais e numéricos da viga com o material DA350 PERF.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 85 – FRFs experimentais da viga com o material DA350 PERF.



Fonte: Elaborado pelo autor.

