Helena Carolina Rengel Koch

Teorema de Hahn-Banach e Corolários

Florianópolis

2016

Helena Carolina Rengel Koch

Teorema de Hahn-Banach e Corolários

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Licenciada em Matemática

Orientador:
Alda Dayana Mattos Mortari

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

2016

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 23/2016/CCM.

Prof.ª Dra. Silvia Martini de Holanda Janesch
Coordenadora de Curso

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
Orientadora

Prof. Dr. Eliezer Batista

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Dedico este trabalho a minha avó, Solmy Sardá.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família em primeiro lugar. A minha mamãe Mirela, por ser um exemplo de professora, matemática e mulher. Ao meu papai Hary, por todo o estímulo dado durante o curso e pelas ligações só para dizer que estava preocupado. A minha irmã, Natália, pelas conversas de madrugada, pelas risadas e até pelas brigas. Agradeço à minha vovó Solmy pelas frutinhas, pelas marmitas e pelos cafés.

Ao Carlos, por ter se importado tanto comigo nesse último ano e por me deixar muito mais ansiosa com o futuro.

Agradeço também aos meus amigos, que fiz em Jaraguá, em Floripa ou em Brest. A graduação não seria a mesma sem os cafés, as pizzas, os filmes, os bares e os trucos!

Agradeço especialmente à minha amiga Priscilla, por todo o carinho que recebi, pelas jantas, pelos vinhos, pelas risadas que compartilhamos e pela relação de apoio que temos.

Agradeço a oportunidade de ter participado de um intercâmbio acadêmico, pelo enriquecimento da minha formação.

Gostaria de agradecer aos professores Licio e Pinho pelas oportunidades de bolsas durante a graduação. Agradeço também ao grupo PET por tudo de bom que presenciei no ambiente e pelas amizades que fiz.

Por fim, agradeço à minha orientadora Alda por todas as explicações, pela compreensão, pela organização e por ser mais um exemplo de professora. Agradeço também aos professores Eliezer e Gilles por fazerem parte deste trabalho.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho acadêmico é apresentar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach, bem como alguns de seus corolários para espaços vetorias normados. Para isso, exploramos definições e exemplos de operadores lineares, funcionais lineares, funcionais sublineares, normas e seminormas. O Teorema de Hahn-Banach é um resultado importante na área da Matemática conhecida como Análise Funcional.

Para a sua demonstração, é utilizado outro resultado muito significativo na Matemática, que é o Lema de Zorn. Todos os conceitos envolvidos na formulação do Lema de Zorn são explorados neste trabalho.

O trabalho é uma combinação de conteúdos de Álgebra Linear, Cálculo, Análise e Teoria de Conjuntos.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, Análise Funcional, Lema de Zorn.

Abstract

The main goal of this academic work is to present and to prove the Hahn-Banach Theorem, as well as some of its corollaries for normed vector spaces. For that, we explore definitions and examples of linear operators, linear functionals, sublinear functionals, norms and seminorms. The Hahn-Banach Theorem is an important result in the area of Mathematics known as Functional Analysis.

To prove the theorem, another very significant result in Mathematics is used, called Zorn's Lemma. All of the concepts involved in the formulation of Zorn's Lemma are explored in this work.

This work is a combination of topics in Linear Algebra, Calculus, Analysis and Set Theory.

Keywords: Hahn-Banach Theorem, Functional Analysis, Zorn's Lema.

Sumário

Introdução

O conteúdo deste trabalho acadêmico gira em torno de um teorema conhecido como Teorema de Hahn-Banach, que é um resultado muito utilizado em Análise Funcional. Ele pode ser formulado como um teorema de extensão ou como um teorema de separação. Quando visto como um teorema de separação, observa-se a sua interpretação geométrica, que trata de subespaços vetoriais, variedades lineares e hiperplanos.

Uma primeira versão do Teorema foi formulada por Eduard Helly, no início da década de 1920, e tratava de espaços vetoriais definidos sobre o corpo dos números reais ou dos números complexos. O resultado foi de fato provado no final da década, pelos matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach, mas os dois matemáticos consideraram apenas espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais. Aparentemente, Banach desconhecia o trabalho feito por Hahn, mas publicou uma generalização deste trabalho.

O resultado foi denominado Teorema de Hahn-Banach pela primeira vez em um trabalho de Bohnenblust e Sobczyk, em 1938. Nele, o resultado foi generalizado para espaços vetoriais sobre o corpo dos números complexos. Essa generalização também foi obtida por Soukhomlinov no mesmo ano.

A demonstração do Teorema de Hahn-Banach depende do Lema de Zorn. Apesar de ser citado como um lema, ele é utilizado como um axioma. O Lema de Zorn é equivalente ao que é conhecido como Axioma da Escolha, que juntamente com os Axiomas de Zermelo-Fraenkel, forma o conjunto de axiomas utilizados na Teoria de Conjuntos usual. É conveniente destacar que o Axioma da Escolha é independente dos outros Axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Com o objetivo de estudar o Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais normados, sobre o corpo dos números reais, é apresentado este trabalho acadêmico. Nele, são explorados alguns conteúdos presentes no curso de graduação em Matemática, mas também são apresentados conceitos que não são abordados durante o curso.

O trabalho está divido em três capítulos. O primeiro capítulo trata das definições presentes na formulação do Teorema de Hahn-Banach e de seus corolários. São mostrados alguns exemplos de tais definições e são feitos resultados preliminares, com o objetivo de facilitar o estudo do Teorema em si. A principal referência utilizada neste capítulo é [6].

O segundo capítulo é dedicado ao Lema de Zorn. São apresentados todos os conceitos mencionados na formulação do Lema. Este capítulo é repleto de exemplos das definições apresentadas, e inclusive mostra dois exemplos de aplicações do Lema de Zorn. Os livros estudados que tratam do Teorema de Hahn-Banach também tratam do Lema de Zorn. As referências mais utilizadas neste capítulo foram [5] e [6].

Por fim, o terceiro capítulo traz o enunciado e a demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Na sequência, o Teorema é adaptado para a forma que será utilizada na demonstração dos corolários. Eles são resultados significativos no estudo de espaços vetoriais normados. Novamente, a referência [6] foi muito utilizada, juntamente com [1].

A total compreensão do trabalho requer algum conhecimento nas áreas de Álgebra Linear, Análise, Cálculo e Teoria de Conjuntos.

1 *Definições e resultados preliminares*

Neste primeiro capítulo do trabalho, serão apresentadas definições e resultados que são necessários para o entendimento do Teorema de Hahn-Banach e de seus corolários. A maioria dos resultados foram escritos com base na referência [6]. Para a total compreensão do capítulo, é necessária uma base de Álgebra Linear, de alguns resultados de Cálculo e de Teoria dos Conjuntos.

1.1 Operadores

Definição 1.1. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Uma função $f : U \to V$ é dita ser um *operador* U em V.

Definição 1.2. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Dizemos que uma função $f : U \to V$ é um *operador linear* se para quaisquer u_1 e u_2 em U e α no corpo dos escalares, f satisfaz:

(i) $f(\alpha u_1) = \alpha f(u_1)$ e

(ii) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.

Na sequência, serão apresentados alguns exemplos clássicos de operadores lineares.

Exemplo 1.3. *Seja U um espaço vetorial sobre um corpo qualquer.*

A função

$$\begin{array}{rccc} I_U\colon & U & \to & U \\ & u & \longmapsto & u \end{array}$$

é um operador linear, chamado de operador identidade *do espaço vetorial U, conforme será mostrado a seguir.*

Para provar que a função f é um operador linear, serão analisadas as condições da definição.

- *Condição* (i)*: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U$ quaisquer.*

  Sabemos que $I_U(\alpha u) = \alpha u$. Como $u = I_U(u)$, temos $I_U(\alpha u) = \alpha I_U(u)$.

- *Condição* (ii)*: Considere u_1 e u_2 quaisquer em U.*

  Sabemos que $I_U(u_1 + u_2) = u_1 + u_2$. Como $u_1 = I_U(u_1)$ e $u_2 = I_U(u_2)$, temos $I_U(u_1 + u_2) = I_U(u_1) + I_U(u_2)$.

Portanto, o operador identidade de qualquer espaço vetorial é um operador linear.

Exemplo 1.4. *Dados dois espaços vetoriais U e V sobre o mesmo corpo de escalares, definimos uma função θ da seguinte forma*

$$\begin{array}{cccc} \theta\colon & U & \to & V \\ & u & \longmapsto & 0_V \end{array}$$

em que 0_V é o vetor nulo do espaço vetorial V.

A função θ é chamada de operador nulo *e é um operador linear, conforme será mostrado a seguir.*

- *Condição* (i)*: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in U$ quaisquer.*

  Temos $\theta(\alpha u) = 0_V = \alpha 0_V = \alpha\theta(u)$.

- *Condição* (ii)*: Considere u_1 e u_2 quaisquer em U.*

  Temos $\theta(u_1 + u_2) = 0_V = 0_V + 0_V = \theta(u_1) + \theta(u_2)$.

Concluímos que θ é um operador linear.

Exemplo 1.5. *Seja P o conjunto de todos os polinômios de uma variável, com coeficientes reais. A cada polinômio $p \in P$, associamos uma função polinomial p definida em $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos de F o espaço dessas funções. Temos que P e F são espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Definimos uma função de F em F da forma

$$\begin{array}{cccc} f\colon & F & \to & F \\ & p & \longmapsto & p' \end{array}$$

em que p' é a derivada da função polinomial p.

Vamos mostrar que f é um operador linear.

- *Condição* (i)*: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in F$ quaisquer. Seja n o grau do polinômio p.*

  Tomamos $x \in [a, b]$ qualquer e escrevemos $p(x)$ como

  $$p(x) = p_n \cdot x^n + p_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + p_1 \cdot x + p_0$$

  para $p_n, p_{n-1}, ..., p_1$ e p_0 coeficientes reais.

  Sabemos que $p'(x) = n \cdot p_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot p_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + p_1$.

  Por outro lado, temos $\alpha p(x) = \alpha p_n \cdot x^n + \alpha p_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + \alpha p_1 \cdot x + \alpha p_0$ e assim $(\alpha p)'(x) = n \cdot \alpha p_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot \alpha p_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + \alpha \cdot p_1$.

  Logo, temos $(f(\alpha p))(x) = (\alpha p)'(x) = \alpha p'(x) = \alpha(f(p))(x) = (\alpha f(p))(x)$.

  Como o x era arbitrário, concluímos que $f(\alpha p) = \alpha p' = \alpha f(p)$.

- *Condição* (ii)*: Considere p e q quaisquer em F. Considere novamente n o grau do polinômio p.*

  Conforme vamos argumentar na sequência, quando tomamos $x \in [a, b]$ qualquer, podemos escrever $p(x)$ e $q(x)$ da forma

  $$p(x) = p_n \cdot x^n + p_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + p_1 \cdot x + p_0 \text{ e}$$
  $$q(x) = q_n \cdot x^n + q_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + q_1 \cdot x + q_0,$$

  para $p_n, p_{n-1}, ..., p_1, p_0, q_n, q_{n-1}, ..., q_1$ e q_0 coeficientes reais.

  Se os dois polinômios p e q tiverem o mesmo grau, com n sendo o grau dos polinômios, então é fácil ver que podemos escrever $p(x)$ e $q(x)$ da maneira apresentada.

  No caso em que eles têm graus diferentes, vamos supor, sem perda de generalidade, que o polinômio que tem o maior grau entre os dois é o polinômio p. Então naturalmente escrevemos $p(x)$ conforme apresentado, com n o grau de p. Para o polinômio q, que tem o menor grau, digamos que esse grau seja r. Então, para que $q(x)$ seja escrito da forma apresentada, os coeficientes com índices de $r+1$ até n devem ser todos iguais a 0.

  Ainda assim, temos

  $$p'(x) = n \cdot p_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot p_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + p_1;$$

$$q'(x) = n \cdot q_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot q_{n-1} \cdot x^{n-2} + ... + q_1.$$

Além disso,

$$(p+q)(x) = (p_n + q_n) \cdot x^n + (p_{n-1} + q_{n-1}) \cdot x^{n-1} + ... + (p_1 + q_1) \cdot x + p_0 + q_0.$$

Logo

$$(p+q)'(x) = n \cdot (p_n + q_n) \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot (p_{n-1} + q_{n-1}) \cdot x^{n-2} + ... + p_1 + q_1.$$

Dessa forma, temos

$$(f(p+q))(x) = (p+q)'(x) = p'(x)+q'(x) = (f(p))(x)+(f(q))(x) = (f(p)+f(q))(x).$$

Como x era arbitrário, concluímos que $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Concluímos que f é, de fato, um operador linear.

Exemplo 1.6. *Considere $C[a,b]$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em um intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$. Esse conjunto pode ser visto como um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Definimos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccc} T: & C[a,b] & \to & C[a,b] \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

em que para todo $x \in [a,b]$, temos $(T(f))(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Note que o Teorema Fundamental do Cálculo, conforme pode ser observado na referência [4] na página 19, nos garante que $T(f)$ é uma função em $C[a,b]$.

Vamos provar que T é um operador linear.

- *Condição* (i)*: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$ e $x \in [a,b]$ quaisquer.*
  Observe que $(T(f))(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ e que $(T(\alpha f))(x) = \displaystyle\int_a^x \alpha f(t)dt$.
  A igualdade $\displaystyle\int_a^x \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^x f(t)dt$ é imediata das propriedades das integrais.
  Com isso, temos

  $$(T(\alpha f))(x) = \int_a^x \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^x f(t)dt = \alpha(T(f))(x) = (\alpha T(f))(x).$$

Como x era arbitrário, concluímos que $T(\alpha f) = \alpha T(f)$.

- *Condição* (ii)*: Considere f e g em $C[a,b]$ e $x \in [a,b]$ quaisquer.*
  Observe que $(T(f))(x) = \int_a^x f(t)dt$ e que $(T(g))(x) = \int_a^x g(t)dt$.
  Utilizando novamente as propriedades das integrais, temos

$$\int_a^x (f+g)(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt.$$

  E daí podemos concluir que

$$\begin{aligned}(T(f+g))(x) &= \int_a^x (f+g)(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt \\ &= (T(f))(x) + (T(g))(x) \\ &= (T(f)+T(g))(x).\end{aligned}$$

  Como x era arbitrário, concluímos que $T(f+g) = T(f) + T(g)$.

Assim, o operador T é um operador linear.

1.2 Funcionais

Definição 1.7. Seja U um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Chamamos de *funcional* uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$, ou seja, uma função cujo domínio é U e cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$.

Observação 1.8. *Os funcionais definidos em um espaço vetorial U podem ser vistos como operadores de U em $\mathbb{R}$. Isso acontece porque o corpo dos escalares pode ser visto como um espaço vetorial sobre ele mesmo.*

Exemplo 1.9. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ qualquer. A função*

$$\begin{array}{rccc} f_c\colon & U & \to & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & c \end{array}$$

é um exemplo de funcional.

Definição 1.10. Seja U um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um funcional f definido em U é dito ser um *funcional linear* se para quaisquer u_1 e u_2 em U e α em $\mathbb{R}$, f satisfaz:

(i) $f(\alpha u_1) = \alpha f(u_1)$ e

(ii) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.

Exemplo 1.11. *Considere $\mathbb{R}^2$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. O funcional*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a \end{array}$$

é um exemplo de funcional linear, conforme mostraremos a seguir, analisando as condições da definição.

- *Condição* (i)*: Tome $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar e $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ quaisquer.*

  Note que $f((a,b)) = a$ e que $f(\lambda(a,b)) = f((\lambda a, \lambda b)) = \lambda a$.

  Logo, temos $f(\lambda(a,b)) = \lambda f((a,b))$.

- *Condição* (ii)*: Tome agora (a,b) e (c,d) quaisquer em $\mathbb{R}^2$.*

  Note que $f((a,b)) = a$ e que $f((c,d)) = c$.

  Por outro lado, $f((a,b) + (c,d)) = f((a+c, b+d)) = a + c$.

  Concluímos então que $f((a,b) + (c,d)) = a + c = f((a,b)) + f((c,d))$.

Logo, o funcional f, conforme definido acima, é um funcional linear.

Exemplo 1.12. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Considere o funcional

$$\begin{array}{rccc} f_0\colon & U & \to & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & 0 \end{array}.$$

O funcional f_0 é chamado de funcional nulo*. Vamos analisar as condições da definição para descobrir se f_0 é um funcional linear.*

- *Condição* (i)*: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $u \in U$ quaisquer.*

  Temos $f_0(\alpha u) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha f_0(u)$.

- *Condição* (ii)*: Sejam u_1 e u_2 quaisquer em U.*

  Temos $f_0(u_1 + u_2) = 0 = 0 + 0 = f_0(u_1) + f_0(u_2)$.

Obtemos que funcional nulo é um funcional linear. Este funcional é um caso particular do exemplo 1.4.

Observação 1.13. *O funcional nulo é um caso particular do exemplo 1.9, em que temos* $c = 0$. *Quando* $c \neq 0$, *o funcional* f_c *não é um funcional linear. Para verificar isso, basta observar que para quaisquer* u_1 *e* u_2 *em* U, *temos* $f_c(u_1 + u_2) = c$, *enquanto* $f_c(u_1) + f_c(u_2) = c + c = 2c$. *Como* $c \neq 0$, *temos* $c \neq 2c$, *e com isso concluímos que* $f_c(u_1 + u_2) \neq f_c(u_1) + f_c(u_2)$.

Definição 1.14. Seja U um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um funcional f definido em U é dito ser um *funcional sublinear* se para quaisquer u_1 e u_2 em U e $\alpha \geq 0$ em $\mathbb{R}$, f satisfaz:

(i) $f(\alpha u_1) = \alpha f(u_1)$ e

(ii) $f(u_1 + u_2) \leq f(u_1) + f(u_2)$.

Observe aqui que todo funcional linear é em particular um funcional sublinear. Entretanto, nem todo funcional sublinear é linear.

Exemplo 1.15. *Considere* $\mathbb{R}$ *como um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. O funcional* f *definido da forma*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \begin{cases} 0, & se\ \ u < 0 \\ u, & se\ \ u \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

é um funcional sublinear que não é um funcional linear, conforme será mostrado.

Para provar que o funcional f *é, de fato, sublinear, observaremos que ele satisfaz as condições da definição, atentando a todas as situações possíveis.*

- *Condição* (i)*: Considere* $\alpha \in \mathbb{R}$ *com* $\alpha \geq 0$ *e* $u \in U$ *quaisquer.*

  Se $u < 0$, *então* $\alpha u < 0$. *Nesse caso, temos* $f(u) = 0$ *e* $f(\alpha u) = 0$.

  Assim, temos $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

  Se $u \geq 0$, *então* $\alpha u \geq 0$. *Nesse caso, temos* $f(u) = u$ *e* $f(\alpha u) = \alpha u$.

  Assim, temos $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

- *Condição* (ii)*: Considere u_1 e u_2 quaisquer em U.*

  Se $u_1 < 0$ e $u_2 < 0$, então $u_1 + u_2 < 0$. Nesse caso, temos $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$ e $f(u_1 + u_2) = 0$. Concluímos que $f(u_1 + u_2) \leq f(u_1) + f(u_2)$.

  Se $u_1 \geq 0$ e $u_2 \geq 0$, então $u_1 + u_2 \geq 0$. Nesse caso, temos $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ e $f(u_1 + u_2) = u_1 + u_2$. Logo, também temos $f(u_1 + u_2) \leq f(u_1) + f(u_2)$.

  Se $u_1 < 0$ e $u_2 \geq 0$, então podemos ter $u_1 + u_2 < 0$ ou $u_1 + u_2 \geq 0$.

  No caso $u_1 + u_2 < 0$, temos $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_2$ e $f(u_1 + u_2) = 0$.

  Assim, temos $f(u_1 + u_2) = 0 \leq u_2 = 0 + u_2 = f(u_1) + f(u_2)$.

  Já no caso $u_1 + u_2 \geq 0$, temos $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_2$ e $f(u_1 + u_2) = u_1 + u_2$.

  Assim, temos $f(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 \leq u_2 = 0 + u_2 = f(u_1) + f(u_2)$.

  O caso em que temos $u_1 \geq 0$ e $u_2 < 0$ é análogo ao caso em que $u_1 < 0$ e $u_2 \geq 0$. O raciocínio pode ser repetido substituindo u_1 por u_2 e u_2 por u_1.

  De qualquer forma, sempre ocorre $f(u_1 + u_2) \leq f(u_1) + f(u_2)$.

Concluímos que o funcional f é um funcional sublinear.

Entretanto, não é um funcional linear. Observe que para $u_1 = -1$ e $u_2 = 1$, temos $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 1$ e $f(u_1 + u_2) = f(0) = 0$. Portanto, $f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$.

1.3 Normas

Definição 1.16. Seja U um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Chamamos de *norma* um funcional

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|: & U & \to & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$$

tal que, para quaisquer u_1 e u_2 em U e α em $\mathbb{R}$, sejam satisfeitas as condições:

(i) $\|u_1\| \geq 0$;

(ii) $\|u_1\| = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0_U$;

(iii) $\|\alpha \cdot u_1\| = |\alpha| \cdot \|u_1\|$ e

(iv) $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$.

A condição *(iv)* da definição de norma, que corresponde à condição *(ii)* da definição de funcionais sublineares, é conhecida como *desigualdade triangular.*

Observação 1.17. *Qualquer norma definida sobre um espaço vetorial U não nulo é um funcional que é sublinear, mas não é linear. Para verificar que não é linear, considere um escalar $\alpha < 0$ e um vetor não nulo $u \in U$ qualquer. Nesse caso, não temos $\|\alpha \cdot u\| = \alpha\|u\|$, pois temos $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\| = -\alpha\|u\|$.*

Exemplo 1.18. *Considere $n \in \mathbb{N}^*$. No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com as operações de adição e multiplicação por escalar de $\mathbb{R}$ usuais, escrevendo $x \in \mathbb{R}^n$ como $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, podemos definir uma função em $\mathbb{R}^n$ da forma*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}.$$

Nesse caso, note que $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$

Mostraremos que essa função é uma norma. Ela é chamada de norma euclidiana *de $\mathbb{R}^n$.*

Para provar que essa função satisfaz as condições da definição de norma, em particular a condição (iv)*, utilizaremos a afirmação a seguir. A afirmação não será demonstrada aqui. Trata-se uma aplicação de um resultado conhecido como* desigualdade de Cauchy-Schwarz *ou somente* desigualdade de Schwarz*, que não será explorado neste trabalho, mas que pode ser encontrado na referência [2], na página 179.*

Afirmação 1.19. $\left|\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1\right| \leq \|x\|\|y\|.$

Seguimos então com a análise da condições da definição de norma.

- *Condição* (i)*: Tome $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ qualquer.*
  O número $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, por ser a raiz quadrada de um número real, sempre satisfaz $\|x\| \geq 0$.
- *Condição* (ii)*: Tome agora o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$, que denotaremos $0_{\mathbb{R}^n}$. Quando escrevemos $0_{\mathbb{R}^n} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, temos $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.*
  Assim, $\|0_{\mathbb{R}^n}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + ... + 0^2} = \sqrt{0} = 0$.

Concluímos que se $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ *então* $\|x\| = 0$.

Por outro lado, seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *um vetor que satisfaça* $\|x\| = 0$.

Nesse caso, temos $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = 0$ *e isso significa que* $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0$.

Agora note que $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ *é uma soma de parcelas não negativas, pois para todo* $i \in \{1, ..., n\}$, *temos* $x_i^2 \geq 0$.

Assim, temos uma soma de termos não negativos resultando em 0. *Isso só é possível se todos as parcelas da soma forem iguais a* 0, *ou seja, se ocorrer* ${x_i}^2 = 0$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$. *Para que isso aconteça, dado* $i \in \{1, ..., n\}$ *qualquer, devemos ter* $x_i = 0$.

Por fim, se $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, *então* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

E assim temos que se $\|x\| = 0$, *então* $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

- *Condição* (iii)*: Considere* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *quaisquer.*

  Vamos calcular o valor de $\|\alpha x\|$, *obtendo*

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \|\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)\| \\ &= \|(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)\| \\ &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + ... + (\alpha x_n)^2}. \end{aligned}$$

  Agora note que

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + ... + (\alpha x_n)^2} &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + ... + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)} \\ &= |\alpha| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}. \end{aligned}$$

  Como $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \|x\|$, *obtemos que* $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

- *Condição* (iv)*: Considere* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *quaisquer em* $\mathbb{R}^n$

  Note que $x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

  Além disso, temos que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *e* $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

  Vamos analisar o valor de $\|x + y\|^2$.

  Temos que $\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2$.

  Como $(x_i + y_i)^2 = x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2$, *temos que* $\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right|$, *obtemos* $\displaystyle\|x+y\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Pela afirmação 1.19, concluímos que $\displaystyle\|x+y\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\|x\|\|y\| + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ *e assim* $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$.

De $\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$, *obtemos que* $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Com isso, provamos que a função $\|\cdot\|$, *conforme definida anteriormente, é uma norma em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.20. *No espaço* $C[a,b]$, *já explorado no exemplo 1.6, podemos definir a seguinte função*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & C[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{array}.$$

O Teorema de Weierstrass é o que garante a existência do número $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *para qualquer função em* $C[a,b]$.

Esse resultado de Cálculo pode ser encontrado na referência [3], na página 122.

Vamos provar que essa função $\|\cdot\|$ *satisfaz todas as condições da definição de norma.*

- *Condição* (i)*: Dada qualquer função* $f \in C[a,b]$, *temos que* $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \geq 0$ *e assim* $\|f\| \geq 0$.

- *Condição* (ii)*: Considere* f *como a função nula definida em* $[a,b]$.

  Nesse caso, temos $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |0| = 0$.

  Por outro lado, considere $f \in C[a,b]$ *tal que* $\|f\| = 0$.

  Nesse caso $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$. *Isso significa que para todo* $x \in [a,b]$, *temos* $|f(x)| = 0$.

  Assim, para todo $x \in [a,b]$, *o valor de* $f(x)$ *é* 0. *Isso só ocorre quando* f *é a função nula definida em* $[a,b]$.

Concluímos que $\|f\| = 0$*, se e somente se,* f *é a função nula definida em* $[a, b]$*.*

- *Condição* (iii)*: Tome* $f \in C[a, b]$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *quaisquer.*

  Temos que $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *e que* $\|\alpha f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |\alpha f(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} (|\alpha||f(x)|)$*.*

  Como $\max\limits_{x\in[a,b]} (|\alpha||f(x)|) = |\alpha| \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$*, concluímos que* $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$*.*

- *Condição* (iv)*: Tome agora* f *e* g *quaisquer em* $C[a, b]$*.*

  Temos que $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *e* $\|g\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$*.*

  Além disso $\|f + g\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |(f + g)(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)|$*.*

  Note que para todo $x \in [a, b]$*, temos* $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$*.*

  Disso, segue que $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$*.*

  Assim, concluímos que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$*.*

Logo, a função $\|\cdot\|$ *é uma norma em* $C[a, b]$*.*

Exemplo 1.21. *Considere o conjunto* ℓ^∞ *como o conjunto das sequências de números reais que são limitadas, ou seja, sequências da forma* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *tais que existe um número* $c \in \mathbb{R}$ *que satisfaz, para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $|x_n| \leq c$*.*

Podemos definir uma função em ℓ^∞ *da forma*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \ell^\infty & \to & \mathbb{R} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \longmapsto & \sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i| \end{array}.$$

Note inicialmente que podemos definir essa função devido ao fato das sequências em ℓ^∞ *serem limitadas. É isso, mais a completude de* $\mathbb{R}$*, que garante a existência do número* $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i|$ *para qualquer sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$*.*

Vamos provar agora que essa função satisfaz todas as condições da definição de norma.

- *Condição* (i)*: Para qualquer sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *em* ℓ^∞*, temos que* $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i| \geq 0$ *pois para todo* $i \in \mathbb{N}^*$*, temos* $|x_i| \geq 0$*.*

- *Condição* (ii)*: Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *for a sequência nula em* ℓ^∞*, formada apenas por entradas iguais a* 0*, então teremos* $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i| = 0$ *e* $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = 0$*.*

  Por outro lado, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ *uma sequência tal que* $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = 0$*.*

Isso significa que $\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|= 0$*, mas isso só ocorre se* $|x_i|= 0$ *para todo* $i \in \mathbb{N}^*$*, ou seja, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *for a sequência nula em* ℓ^∞*.*

- *Condição* (iii)*: Considere* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *quaisquer.*

  Temos que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|$.
  Além disso, $\|(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|\alpha x_i|= |\alpha|\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|$.
  Logo, temos $\|\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = |\alpha|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|$.

- *Condição* (iv)*: Considere* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *quaisquer em* ℓ^∞*.*

  Temos que $\|(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i + y_i|$.
  Como $|x_i + y_i|\leq |x_i|+|y_1|$ *para todo* $i \in \mathbb{N}^*$*, temos que*

  $$\sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i + y_i|\leq \sup_{i\in\mathbb{N}^*}(|x_i|+|y_i|) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|x_i|+ \sup_{i\in\mathbb{N}^*}|y_i|.$$

  Assim, temos $\|(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| \leq\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|+\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|$.

Concluímos então que $\|\cdot\|$ *é uma norma de* ℓ^∞*.*

Exemplo 1.22. *Considere* $p \in \mathbb{R}$ *tal que* $p \geq 1$*. Definimos o conjunto* ℓ^p *como o conjunto das sequências* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de números reais tais que a série* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ *converge.*

Para analisar esse conjunto, vamos utilizar a afirmação a seguir. Ela é conhecida como desigualdade de Minkowski*. Uma demonstração dessa desigualdade pode ser encontrada em [6], a partir da página 11, e não será reproduzida neste trabalho.*

Afirmação 1.23. *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sequências em* ℓ^p*. Então é satisfeita a desigualdade:*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A desigualdade de Minkowski é usada para mostrar que o conjunto ℓ^p *é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Assim, definimos uma função em ℓ^p *da forma*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \ell^p & \to & \mathbb{R} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}.$$

Vamos analisar agora se a função $\|\cdot\|$ definida aqui satisfaz as condições da definição de norma.

- *Condição* (i)*: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p$ uma sequência qualquer.*

  Sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p \geq 0$*. Logo, temos que* $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$.

  Assim, concluímos que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| \geq 0$.

- *Condição* (ii)*: Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é a sequência nula em ℓ^p, formada apenas por entradas iguais a* 0*.*

  Nesse caso, temos $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p = 0$*, pois para todo $i \in \mathbb{N}^*$, temos $|x_i| = 0$.*

  Assim, $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}} = 0$.

  Por outro lado, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p$ uma sequência tal que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = 0$.

  Isso significa que $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$*, que só ocorre quando* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p = 0$.

  Nesse caso, devemos ter $|x_i| = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Isso, por sua vez, só ocorre quando a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ for a sequência nula em ℓ^p.

  Foi provado então que dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p$, temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é a sequência nula se e somente se $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = 0$.

- *Condição* (iii)*: Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer.*

  Temos que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

  Observe que $\|(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha|^p|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

  Logo, temos $\|(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = |\alpha|\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|$.

- *Condição* (iv)*: Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quaisquer em ℓ^p.*

  Note que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *e* $\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

  Além disso, temos $\|(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Portanto, para que a condição (iv) *seja satisfeita, devemos ter*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assumindo que a desigualdade de Minkowski é verdadeira, temos

$$\|(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| + \|(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|.$$

Concluímos então que $\|\cdot\|$ *é uma norma de* ℓ^p*.*

Definição 1.24. Sejam U um espaço vetorial qualquer e $\|\cdot\|$ uma norma definida em U. Nesse caso, dizemos que o par ordenado $(U, \|\cdot\|)$ constitui um *espaço vetorial normado.*

Exemplo 1.25. *Sejam* $(U, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado e* V *um subespaço vetorial de* U*. Se a norma* $\|\cdot\|$ *de* U *for restrita ao subespaço* V*, note que ela ainda satisfaz todas as condições da definição de norma. Denotaremos* $\|\cdot\|_V$ *a norma restrita ao subespaço* V*. Assim, o par* $(V, \|\cdot\|_V)$ *também é um espaço normado.*

Definição 1.26. Seja U um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Chamamos de *seminorma* ou *pseudonorma* um funcional p: $U \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer u_1 e u_2 em U e α em $\mathbb{R}$, sejam satisfeitas as condições:

(i) $p(u_1) \geq 0$;

(ii) $p(\alpha \cdot u_1) = |\alpha| p(u_1)$ e

(iii) $p(u_1 + u_2) \leq p(u_1) + p(u_2)$.

Pode-se destacar que toda norma é também uma seminorma. Além disso, as seminormas também são exemplos de funcionais sublineares que não são lineares.

Exemplo 1.27. *O funcional nulo, apresentado no exemplo 1.12 pode ser visto como uma pseudonorma sobre o espaço* U*, chamada de* pseudonorma trivial*. Entretanto, não será uma norma, pois dado* $u \in U$ *qualquer,* $f_0(u) = 0$ *não implica* $u = 0$*.*

Observação 1.28. *O funcional do exemplo 1.15 é um exemplo de funcional sublinear que não é uma seminorma.*

1.4 Operadores limitados

Definição 1.29. Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços vetoriais normados e $T : U \to V$ um operador linear. Dizemos que T é *limitado* se existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in U$, temos $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|_U$.

Em seguida, vamos analisar alguns operadores que já foram apresentados, para verificar se eles são limitados ou não.

Exemplo 1.30. *Seja* $(U, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado. Vamos analisar o operador identidade* I_U*.*

Para qualquer $u \in U$*, temos* $\|I_U(u)\| = \|u\|$*.*

Logo, para $c = 1$*, temos* $\|I_U(u)\| \leq c\|u\|$*.*

Assim, o operador identidade é um operador linear limitado.

Exemplo 1.31. *Sejam* $(U, \|\cdot\|_U)$ *e* $(V, \|\cdot\|_V)$ *dois espaços vetoriais normados. Vamos analisar agora o operador nulo* θ*.*

Para qualquer $u \in U$*, temos* $\|\theta(u)\|_V = \|0_V\|_V = 0$*.*

Assim, se tomarmos $c = 0$*, temos* $\|\theta(u)\|_V \leq c\|u\|_U$*.*

Concluímos que o operador nulo também é um operador linear limitado.

Exemplo 1.32. *Considere* X *como o conjunto de todos os polinômios de uma variável, com coeficientes reais. Como fizemos no exemplo 1.5, associamos a cada polinômio* $p \in X$ *uma função polinomial* p *definida no intervalo* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$*. Chamaremos de* Y *o conjunto dessas funções. Nesse caso,* Y *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Munimos o conjunto Y *da norma*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & Y & \to & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & \max\limits_{x \in [0,1]} |p(x)| \end{array}.$$

Essa norma já foi explorada no exemplo 1.20.

Definimos um operador de Y *em* Y *da forma*

$$\begin{array}{rccc} T: & Y & \to & Y \\ & p & \longmapsto & p' \end{array}$$

em que p' *é a derivada do da função polinomial* p*.*

Já vimos que este operador é linear no exemplo 1.5. Vamos analisar agora se esse operador é limitado.

Tome $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$ quaisquer. Considere $p_n \in Y$ a função que associa, a cada $x \in [0,1]$, o número x^n.

Nesse caso, temos $\|p_n\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |p_n(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$.

Sabemos que $p_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Assim, $\|p_n'\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |p_n'(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |n \cdot x^{n-1}| = n$.

Dessa forma, se o operador T fosse limitado, então existiria um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|p_n'\| \leq c\|p_n\|$.

Nesse caso, teríamos $c \geq \dfrac{\|p_n'\|}{\|p_n\|} = n$.

Como n era um número natural qualquer e o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, então não existe nenhum valor $c \in \mathbb{R}$ tal que a desigualdade $\|p_n'\| \leq c\|p_n\|$ seja válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, o operador T não é limitado.

Exemplo 1.33. *Considere $C[0,1]$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em $[0,1]$ cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$. Nesse caso, $C[0,1]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Munimos o conjunto $C[0,1]$ da norma

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & X & \to & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \end{array}.$$

Definimos um operador de $C[0,1]$ em $C[0,1]$ da forma

$$\begin{array}{rccc} T: & C[0,1] & \to & C[0,1] \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

em que para todo $x \in [0,1]$, temos $(T(f))(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ e $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Na teoria de espaços métricos, observa-se que o conjunto $[0,1]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. Uma consequência do Teorema de Weierstrass para funções definidas em $\mathbb{R}^2$ garante que a função k é limitada, pois é uma função contínua definida em um conjunto fechado e limitado. Como a função k é limitada, existe um número $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, temos $|k(x,y)| \leq k_0$. Esse resultado pode ser observado na referência [7], na página 44.

Vamos calcular o valor de $\|T(f)\|$.

Temos $\|T(f)\| = \max\limits_{x\in[0,1]}|T(f(x))| = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 k(x,y)f(y)dy\right|$.

Agora note que

$$\left|\int_0^1 k(x,y)f(y)dy\right| \leq \int_0^1 |k(x,y)||f(y)|dy \leq \int_0^1 k_0 \cdot \left(\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\right) dy.$$

Assim,

$$\|T(f)\| \leq \int_0^1 k_0 \cdot \left(\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\right) dy = k_0 \cdot \left(\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\right) = k_0\|f\|.$$

Concluímos que $\|T(f)\| \leq k_0\|f\|$ *para toda função* $f \in C[0,1]$.

Logo, o operador T *é um operador limitado.*

Observação 1.34. *Sabemos que* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *é um espaço vetorial normado sobre o corpo* $\mathbb{R}$. *Vendo um funcional definido em* U *como um operador de* U *em* V, *com* $V = \mathbb{R}$, *obtemos a definição de funcional linear limitado, conforme apresentada a seguir.*

Definição 1.35. Seja $(U, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um funcional linear f definido em U é dito ser *limitado* se existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in U$, temos $|f(u)| \leq c\|u\|$.

1.5 Conjuntos $L(U, V)$ e $B(U, V)$

Nesta seção do trabalho, vamos apresentar e explorar os conjuntos $L(U, V)$ e $B(U, V)$.

Dados dois espaços vetoriais U e V, denotamos por $L(U, V)$ o conjunto dos operadores lineares de U em V.

Podemos definir as seguintes operações:

(i) adição de elementos:

$$\begin{array}{rcccccc} + : & L(U,V)\times L(U,V) & \to & L(U,V) & & & ; \\ & (T_1,T_2) & \longmapsto & T_1+T_2: & U & \to & \mathbb{R} \\ & & & & u & \longmapsto & T_1(u)+T_2(u) \end{array}$$

(ii) multiplicação de um escalar de $\mathbb{R}$ por um elemento de $L(U, V)$:

$$\begin{array}{rcccccl} \cdot: & \mathbb{R} \times L(U,V) & \to & L(U,V) & & & . \\ & (\alpha, T) & \longmapsto & \alpha \cdot T\colon & U & \to & \mathbb{R} \\ & & & & u & \longmapsto & \alpha \cdot T(u) \end{array}$$

É possível mostrar que o conjunto $L(U,V)$ é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas aqui. O corpo dos escalares em questão é o corpo $\mathbb{R}$. Esse fato é apresentado na referência [2], na página 101. O elemento neutro de $L(U,V)$ será o operador nulo de U em V.

Dados dois espaços vetoriais normados $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$, denotamos por $B(U,V)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de U em V. É evidente que temos $B(U,V) \subseteq L(U,V)$. Além disso, é possível mostrar que o conjunto $B(U,V)$ é fechado com relação às operações já apresentadas. O operador nulo de U em V, conforme já foi visto, pertence a $B(U,V)$, pois é um operador limitado. Assim, o conjunto $B(U,V)$ também pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, já que é um subespaço vetorial de $L(U,V)$.

Considere $T \in B(U,V)$. Sabemos que existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in U$ vale a desigualdade $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|_U$. Tome agora um número $c' \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq c'$. Nesse caso, para todo $u \in U$, temos $c\|u\|_U \leq c'\|u\|_U$, o que implica $\|T(u)\|_V \leq c'\|u\|_U$.

Podemos concluir então que dado um operador limitado, não existe apenas um valor de c tal que, para todo $u \in U$, a desigualdade $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|_U$ seja satisfeita. Por exemplo, no exemplo 1.31, c poderia assumir qualquer valor a partir de 0. Podemos nos questionar, então, se é possível encontrar um valor mínimo para c.

Podemos fazer a análise desconsiderando o vetor 0_U, já que para qualquer operador linear $T : U \to V$, temos $T(0_U) = 0_V$ e isso implica $\|T(0_U)\|_V = \|0_V\|_V = 0$. Assim, para qualquer número $c \in \mathbb{R}$, a igualdade $\|T(0_U)\|_V \leq c\|0_U\|_U$ é satisfeita.

Pois bem, se existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in U$ com $u \neq 0_U$, temos $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|_U$, então podemos afirmar que, para todo $u \in U$ com $u \neq 0_U$, ocorre

$$\frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} \leq c.$$

Nesse caso, c é uma cota superior para o conjunto

$$\left\{ \frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} \ ; \ u \in U, u \neq 0_U \right\}.$$

Assim, o conjunto apresentado é limitado superiormente. Por isso, admite um supremo.

Para que c seja a menor cota superior possível, devemos ter $c = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U}$.

Vamos denotar este valor de c como $\|T\|$, obtendo a desigualdade

$$\|T(u)\|_V \leq \|T\| \|u\|_U \tag{1.1}$$

válida para qualquer vetor $u \in U$. Conforme já foi comentado, essa desigualdade é sempre válida para o vetor nulo de U.

Provaremos a seguir que essa definição do número c, para cada operador linear limitado, define uma norma no espaço $B(U, V)$.

No caso dos funcionais lineares limitados, como $V = \mathbb{R}$, a equação 1.1 pode ser vista da forma

$$|f(u)| \leq \|f\| \|u\|_U. \tag{1.2}$$

No espaço $B(U, V)$, definimos a seguinte função

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|: & B(U,V) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & T & \longmapsto & \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} \end{array}.$$

Proposição 1.36. *A função definida acima é uma norma em $B(U, V)$.*

Demonstração. Para provar a proposição, vamos provar que a função em questão satisfaz todas as condições da definição de norma.

- Condição *(i)*: Considere $T \in B(U, V)$ qualquer. Sabemos que, para qualquer $u \in U$ com $u \neq 0_U$, ocorre $\|u\|_U > 0$ e $\|T(u)\|_V \geq 0$.
  Portanto, temos $\|T\| = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} \geq 0$.
- Condição *(ii)*: Seja T o operador nulo de U em V. Sabemos que para todo $u \in U$, vale $\|T(u)\|_V = 0$.
  Assim, $\|T\| = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} = 0$.
  Por outro lado, considere $T \in B(U, V)$ tal que $\|T\| = 0$.
  Nesse caso, temos
  $$\sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} = 0.$$

Isso significa que $\dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} = 0$ para todo $u \in U$ com $u \neq 0_U$.

Assim, temos que $\|T(u)\|_V = 0$ para todo $u \in U$, com $u \neq 0_U$. Já sabemos que $\|T(0_U)\| = 0$. Logo, temos $T(u) = 0_V$ para todo $u \in U$, o que só ocorre quando T é o operador nulo de U em V.

- Condição *(iii)*: Sejam $T \in B(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer.

  Temos que $\|\alpha T\| = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|\alpha T(u)\|_V}{\|u\|_U} = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{|\alpha|\|T(u)\|_V}{\|u\|_U}$.

  Logo, temos
$$\|\alpha T\| = |\alpha| \left(\sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} \right) = |\alpha|\|T\|.$$

- Condição *(iv)*: Sejam T_1 e T_2 quaisquer em $B(U, V)$. Temos que
$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|(T_1 + T_2)(u)\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T_1(u) + T_2(u)\|_V}{\|u\|_U}.$$

  Como $\|T_1(u) + T_2(u)\|_V \leq \|T_1(u)\|_V + \|T_2(u)\|_V$, obtemos
$$\sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T_1(u) + T_2(u)\|_V}{\|u\|_U} \leq \sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T_1(u)\|_V}{\|u\|_U} + \sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T_2(u)\|_V}{\|u\|_U}.$$

  Agora note que $\|T_1\| = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T_1(u)\|_V}{\|u\|_U}$ e $\|T_2\| = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T_2(u)\|_V}{\|u\|_U}$.

  Concluímos que $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Assim, a função é uma norma em $B(U, V)$.

$\blacksquare$

A proposição a seguir apresenta outra maneira de escrever o número $\sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U}$.

Proposição 1.37. *Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços vetoriais normados e $T : U \to V$ um operador linear. Então temos*
$$\sup_{u \in U, u \neq 0_U} \frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{x \in U, \|x\|_U = 1} \|T(x)\|_V.$$

Demonstração. Dado qualquer vetor $u \in U$ com $u \neq 0_U$, podemos escrever u como $\dfrac{u \cdot \|u\|_U}{\|u\|_U}$.

Assim, temos $\sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U} = \sup\limits_{u \in U, u \neq 0_U} \dfrac{\|T(\frac{u \cdot \|u\|_U}{\|u\|_U})\|_V}{\|u\|_U}$.

Como T é um operador linear, sabemos que $T\left(\frac{u\cdot\|u\|_U}{\|u\|_U}\right)=\|u\|_U\cdot T\left(\frac{u}{\|u\|_U}\right)$.

Com isso, obtemos

$$\sup_{u\in U, u\neq 0_U}\frac{\|T(\frac{u\cdot\|u\|_U}{\|u\|_U})\|_V}{\|u\|_U}=\sup_{u\in U, u\neq 0_U}\frac{\|u\|_U\|T(\frac{u}{\|u\|_U})\|_V}{\|u\|_U}=\sup_{u\in U, u\neq 0_U}\left\|T\left(\frac{u}{\|u\|_U}\right)\right\|_V.$$

Agora note que $\left\|\frac{u}{\|u\|_U}\right\|_U=\frac{\|u\|_U}{\|u\|_U}=1$.

Com isso, concluímos que $\left\{\frac{u}{\|u\|_U}\ ;\ u\in U, u\neq 0_U\right\}=\{x\ ;\ x\in U, \|x\|_U=1\}$.

Assim, o número $\sup\limits_{u\in U, u\neq 0_U}\left\|T\left(\frac{u}{\|u\|_U}\right)\right\|_V$ é o supremo do conjunto

$$\{\|T(x)\|_V\ ;\ x\in U, \|x\|_U=1\}.$$

Dessa forma, temos que

$$\sup_{u\in U, u\neq 0_U}\left\|T\left(\frac{u}{\|u\|_U}\right)\right\|_V=\sup_{x\in U, \|x\|_U=1}\|T(x)\|_V.$$

E disso podemos concluir

$$\sup_{u\in U, u\neq 0_U}\frac{\|T(u)\|_V}{\|u\|_U}=\sup_{x\in U, \|x\|_U=1}\|T(x)\|_V.$$

■

O próximo resultado relaciona a dimensão de um espaço vetorial normado com os operadores lineares limitados definidos neste espaço. Para prová-lo, utilizamos o lema apresentado a seguir. O lema não será demonstrado aqui, mas uma demonstração dele pode ser encontrada em [6], na página 72.

Lema 1.38. *Seja $(U,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de dimensão qualquer e $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de U. Então existe um número $c\in\mathbb{R}$ com $c>0$ tal que para qualquer escolha de escalares $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, vale*

$$\|\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n\|\geq c(|\alpha_1|+|\alpha_2|+...+|\alpha_n|).$$

Teorema 1.39. *Seja $(U,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então todo operador linear definido em U é limitado.*

Demonstração. Sejam n a dimensão de U e $\{e_1,...,e_n\}$ uma base de U.

Para provar que todo operador linear definido em U é limitado, tome T um operador linear definido em U qualquer. Seja $(V, \|\cdot\|_V)$ o espaço vetorial normado onde encontra-se a imagem de T.

Dado $u \in U$ qualquer, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Dessa forma, temos $\|T(u)\|_V = \|T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\|_V$.

Pela desigualdade triangular aplicada em $\|\cdot\|_V$, temos

$$\|T(u)\|_V = \|T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\|_V \leq \|T(\alpha_1 e_1)\|_V + ... + \|T(\alpha_n e_n)\|_V. \tag{1.3}$$

Como T é linear, então para cada $i \in \mathbb{N}$, com i entre 1 e n, vale $T(\alpha_i e_i) = \alpha_i T(e_i)$ e disso segue que $\|T(\alpha_i e_i)\|_V = \|\alpha_i T(e_i)\|_V = |\alpha_i| \|T(e_i)\|_V$.

Podemos então reescrever a equação 1.3 da forma

$$\|T(u)\|_V \leq |\alpha_1| \|T(e_1)\|_V + ... + |\alpha_n| \|T(e_n)\|_V = \sum_{j=1}^{n} \left(|\alpha_j| \|T(e_j)\|_V\right). \tag{1.4}$$

Agora note que para todo $i \in \mathbb{N}$, com i entre 1 e n, temos $\|T(e_i)\|_V \leq \max\limits_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|_V$.

Utilizando agora a equação 1.4 temos

$$\|T(u)\|_V \leq \sum_{j=1}^{n} (|\alpha_j| \|T(e_j)\|_V) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|_V \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\right). \tag{1.5}$$

Pelo lema 1.38, existe um número $a > 0$ tal que

$$a \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\right) \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\|.$$

Daí segue que

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \leq \frac{1}{a} \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right\| = \frac{1}{a} \|u\|. \tag{1.6}$$

Por fim, das equações 1.5 e 1.6 obtemos

$$\|T(u)\|_V \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|_V \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|_V \left(\frac{1}{a} \|u\|\right).$$

Assim, para $c = \frac{1}{a}\left(\max_{1\leq k\leq n} \|T(e_k)\|_V\right)$, temos $\|T(u)\|_V \leq c\|u\|$, o que significa que T é limitado.

■

1.6 Extensões de funcionais

O Teorema de Hahn-Banach trata de extensões de funcionais. As definições e o teorema apresentados a seguir servem para auxiliar o entendimento do Teorema de Hahn-Banach e de seus corolários, que serão apresentados no capítulo 3.

Definição 1.40. Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, V e W dois subespaços vetoriais de U e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que uma função $g : W \to \mathbb{R}$ é uma *extensão de* f quando g é um funcional tal que $V \subseteq W$ e $g|_V = f$. Quando g for um funcional linear, diremos que g é uma *extensão linear de* f.

Exemplo 1.41. *Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $f : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Nota-se que f é uma extensão de f, já que temos $U \subseteq U$ e $f|_U = f$.*

Definição 1.42. Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que uma função $g : W \to \mathbb{R}$ é uma *extensão própria de* f quando g é uma extensão de f e $g \neq f$.

Teorema 1.43. *Sejam $(U, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, V e W dois subespaços vetoriais de U tais que $V \subseteq W$, $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional e $g : W \to \mathbb{R}$ uma extensão de f. Então $\|f\|_{V'} \leq \|g\|_{W'}$.*

Na demonstração do teorema, para facilitar a escrita, utilizaremos a notação $\|\cdot\|$ para a norma de U restrita a V e a W.

Demonstração. Como $g|_V = f$, sabemos que

$$\|f\|_{V'} = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |f(v)| = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |g(v)|.$$

Como $V \subseteq W$, temos

$$\sup_{v\in V, \|v\|=1} |g(v)| \leq \sup_{w\in W, \|w\|=1} |g(w)| = \|g\|_{W'}.$$

Dessa forma, temos $\|f\|_{V'} \leq \|g\|_{W'}$.

■

1.7 Operadores contínuos

Definição 1.44. Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços vetoriais normados, $T : U \to V$ um operador linear e $u_0 \in U$ qualquer. Dizemos que T é um operador *contínuo em* u_0 se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$, existe um $\delta \in \mathbb{R}$ com $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in U$ com $\|u - u_0\|_U \leq \delta$, ocorre $\|T(u) - T(u_0)\|_V \leq \varepsilon$.

Definição 1.45. Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços vetoriais normados e $T : U \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador *contínuo* ou *contínuo em* U se T é contínuo em todo $u \in U$.

Exemplo 1.46. *O operador identidade, do exemplo 1.3, é um exemplo de operador contínuo em* U*.*

Para mostrar isso, considere $u_0 \in U$ *qualquer.*

Tome $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *com* $\varepsilon > 0$ *qualquer. Considerando* $\delta = \varepsilon$*, note que para todo* $u \in U$ *com* $\|u - u_0\|_U \leq \delta = \varepsilon$*, ocorre* $\|T(u) - T(u_0)\|_U = \|u - u_0\|_U \leq \delta = \varepsilon$*.*

Concluímos que o operador identidade é um operador contínuo.

Exemplo 1.47. *Considere o operador nulo, do exemplo 1.4. Note que para quaisquer dois elementos* u *e* u_0 *em* U*, temos* $\|\theta(u) - \theta(u_0)\|_V = \|0_V - 0_V\|_V = \|0_V\|_V = 0$*.*

Assim, para quaisquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *com* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta \in \mathbb{R}$ *com* $\delta > 0$*, quando* $\|u - u_0\|_U \leq \delta$*, ocorre* $\|T(u) - T(u_0)\|_V = 0 \leq \varepsilon$*.*

Concluímos que o operador nulo é contínuo em U*.*

O teorema a seguir mostra a relação entre operadores contínuos e limitados.

Teorema 1.48. *Sejam* $(U, \|\cdot\|_U)$ *e* $(V, \|\cdot\|_V)$ *dois espaços vetoriais normados e* $T : U \to V$ *um operador linear. Então* T *é um operador contínuo se, e somente se,* T *é um operador limitado.*

Demonstração. Observe inicialmente que o teorema pode ser provado desconsiderando o operador nulo, pois já foi visto que este operador é limitado e contínuo. Suponha então que T não é o operador nulo.

Na primeira parte da demonstração, vamos supor que T é um operador contínuo e concluir que T é limitado.

Tome um vetor $u_0 \in U$ e um número $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$ quaisquer. Se T é um operador contínuo, então sabemos que existe um $\delta \in \mathbb{R}$ com $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in U$ com $\|u - u_0\|_U \leq \delta$, ocorre $\|T(u) - T(u_0)\|_V \leq \varepsilon$.

Tome $x \in U$ qualquer, com $x \neq 0_U$, e defina u como $u = u_0 + \dfrac{\delta x}{\|x\|_U}$.

Agora note que $\|u - u_0\|_U = \left\| \dfrac{\delta x}{\|x\|_U} \right\|_U = \delta$.

Pela continuidade de T em u_0, temos

$$\|T(u) - T(u_0)\|_V \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Por outro lado, temos $\|T(u) - T(u_0)\|_V = \|T(u - u_0)\|_V$, pois T é linear.

Assim,

$$\|T(u) - T(u_0)\|_V = \|T(u - u_0)\|_V = \left\| T\left(\frac{\delta x}{\|x\|_U}\right) \right\|_V = \frac{\delta}{\|x\|_U} \|T(x)\|_V . \tag{1.8}$$

Das equações 1.7 e 1.8, concluímos que $\dfrac{\delta}{\|x\|_U} \|T(x)\|_V \leq \varepsilon$, ou seja, que

$$\|T(x)\|_V \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|_U. \tag{1.9}$$

Como x era um vetor não nulo arbitrário, concluímos que equação 1.9 é válida para qualquer vetor não nulo de U.

Além disso, observe que para $x = 0_U$, a equação 1.9 ainda é válida.

Logo, a equação 1.9 é válida para todo vetor de U, e isso prova que T é um operador limitado.

Vamos supor agora, na segunda parte da demonstração, que o operador T é limitado.

Para chegar à conclusão de que T é contínuo, fixamos um número $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$ qualquer. Como T é limitado e T não é o operador nulo, podemos nos referir ao valor de $\|T\|$, conforme já visto, e sabemos que $\|T\| \neq 0$.

Considere então $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$.

Tome agora $u_0 \in U$ qualquer e $u \in U$ tal que $\|u - u_0\|_U \leq \delta$.

Como T é linear, temos $\|T(u) - T(u_0)\|_V = \|T(u - u_0)\|_V$.

Pela equação 1.1, sabemos que $\|T(u - u_0)\|_V \leq \|T\| \|u - u_0\|_U$.

Como $\|u - u_0\|_U \leq \delta$, concluímos que

$$\|T(u) - T(u_0)\|_V \leq \|T\|\|u - u_0\|_U \leq \|T\|\delta = \|T\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon.$$

Como ε era arbitrário, concluímos que T é um operador contínuo em u_0. Como u_0 também era arbitrário, concluímos que T é um operador limitado em U.

■

Corolário 1.49. *Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ dois espaços vetoriais normados e $T : U \to V$ um operador linear. Se T for contínuo em um elemento qualquer de U, então T é contínuo em U.*

Demonstração. Suponha que T seja contínuo em um elemento qualquer de U.

Na primeira parte da demonstração do teorema 1.48, utilizamos a continuidade de um operador em um ponto qualquer para concluir que esse operador é limitado. Repetindo o raciocínio, concluímos que T é um operador limitado.

Pelo mesmo teorema, sabemos que se T é um operador limitado, então T é contínuo.

Assim, o operador T é contínuo em U.

■

1.8 Dual algébrico e dual topológico

Definição 1.50. Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamamos de *dual algébrico* de U o conjunto de todos os funcionais lineares definidos em U.

Dado um espaço vetorial U sobre $\mathbb{R}$, denotaremos como U^* o seu dual algébrico.

Como todo funcional definido em U pode ser visto como um operador de U em $\mathbb{R}$, podemos escrever o conjunto U^* como $L(U, \mathbb{R})$. Dessa forma, é possível mostrar que o conjunto U^* é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O elemento neutro de U^* será o funcional nulo definido em U.

Alguns resultados deste trabalho vão tratar de funcionais lineares limitados. Denotaremos por U' o conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em um espaço vetorial normado $(U, \|\cdot\|)$. O conjunto U' é chamado de *dual topológico* de U.

Fazendo uma análise similar à que fizemos quanto ao dual algébrico de U, podemos escrever o conjunto U' como $B(U, \mathbb{R})$. Assim, U' é um subespaço de U^*, e também pode ser visto como um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, com as operações já descritas anteriormente.

Dessa forma, podemos nos referir à norma de um funcional linear limitado, de forma análoga ao que foi feito com operadores lineares limitados. Quando temos um funcional $f \in U'$, denotamos a sua norma por $\|f\|_{U'}$.

2 Lema de Zorn

Este capítulo do trabalho é dedicado ao resultado conhecido como Lema de Max Zorn ou simplesmente Lema de Zorn. Todas as definições necessárias para a formulação do Lema são apresentadas aqui. O capítulo também contém exemplos destas definições. Depois deste estudo, o Lema é apresentado e seguido por aplicações do resultado. As definições podem ser verificadas nas referências [5] e [6].

Definição 2.1. Seja X um conjunto qualquer. Chamamos de *relação binária* em X um subconjunto de $X \times X$.

Observação 2.2. *Considere R uma relação binária em um conjunto X. Nesse caso, temos $R \subseteq X \times X$. Para facilitar a notação, dado um par ordenado $(x_1, x_2) \in R$, escreveremos $x_1 \ R \ x_2$.*

Definição 2.3. Sejam X um conjunto qualquer e R uma relação binária em X. Dizemos que R é uma *relação de ordem parcial* se R tem as propriedades listadas abaixo.

(i) Propriedade reflexiva: para todo $x \in X$, temos $x \ R \ x$;

(ii) Propriedade anti-simétrica: para todos x_1 e x_2 em X, temos que se $x_1 \ R \ x_2$ e $x_2 \ R \ x_1$, então $x_1 = x_2$;

(iii) Propriedade transitiva: para todos x_1, x_2 e x_3 em X, temos que se $x_1 \ R \ x_2$ e $x_2 \ R \ x_3$, então $x_1 \ R \ x_3$.

Definição 2.4. Seja X um conjunto qualquer. Se for definida em X uma relação de ordem parcial R, então dizemos que o par ordenado $(X, \ R\ )$ é um *conjunto parcialmente ordenado*.

Em um conjunto parcialmente ordenado $(X, \ R\ )$, é possível que existam elementos x_1 e x_2 que não podem ser comparados, ou seja, que não podemos afirmar que $x_1 \ R \ x_2$ e nem que $x_2 \ R \ x_1$.

Definição 2.5. Seja $(X, \ R \ )$ um conjunto parcialmente ordenado. Se para quaisquer x_1 e x_2 em X for possível afirmar que $x_1 \ R \ x_2$ ou que $x_2 \ R \ x_1$, então dizemos que a relação de ordem R é uma *relação de ordem total* e que o par ordenado $(X, \ R \ )$ é um *conjunto totalmente ordenado.*

A seguir, serão apresentados exemplos de conjuntos e de relações de ordem parciais definidas nestes conjuntos. Em cada exemplo, as condições da definição de relação de ordem parcial serão analisadas. Também será investigado se o conjunto, munido da relação de ordem em questão, é totalmente ordenado.

Vamos considerar $0 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6. *No conjunto dos números naturais, definimos a relação* $\sim$ *da seguinte forma: dados dois números* n_1 *e* n_2 *em* $\mathbb{N}$*, dizemos que* $n_1 \sim n_2$ *se, e somente se,* n_1 *divide* n_2*.*

Vamos provar agora que $(\mathbb{N}, \sim)$ *é um conjunto parcialmente ordenado, mostrando que a relação* $\sim$ *satisfaz as condições da definição de relação de ordem parcial.*

- *Condição* (i)*: Seja* $n \in \mathbb{N}$ *qualquer. Como o número* n *divide ele mesmo, temos que* $n \sim n$*.*

- *Condição* (ii)*: Sejam* n_1 *e* n_2 *em* $\mathbb{N}$ *tais que* $n_1 \sim n_2$ *e* $n_2 \sim n_1$*.*

  Vamos supor inicialmente que um destes números é igual a 0*. Sem perda de generalidade, considere* $n_1 = 0$*.*

  Nesse caso, como $n_1 \sim n_2$*, temos que* n_1 *divide* n_2*, ou seja, que existe um número natural* x *tal que* $n_2 = x \cdot n_1$*. Isso implica* $n_2 = x \cdot 0 = 0$ *e disso temos* $n_1 = n_2$*.*

  Vamos supor agora que os dois números n_1 *e* n_2 *são diferentes de* 0*.*

  De $n_1 \sim n_2$ *temos que* n_1 *divide* n_2*, ou seja, que existe um número natural* x *tal que* $n_2 = x \cdot n_1$*.*

  De $n_2 \sim n_1$ *temos que* n_2 *divide* n_1*, ou seja, que existe um número natural* y *tal que* $n_1 = y \cdot n_2$*.*

  Assim, podemos escrever o número n_2 *como* $n_2 = x \cdot (y \cdot n_2) = (x \cdot y) \cdot n_2$*. Conclui-se então que* $x \cdot y = 1$*, mas como* x *e* y *são números naturais, devemos ter* $x = y = 1$*.*

  Logo, como tínhamos $n_1 = y \cdot n_2$ *e concluímos que* $y = 1$*, temos* $n_1 = n_2$*.*

- *Condição* (iii)*: Sejam* n_1*,* n_2 *e* n_3 *em* $\mathbb{N}$ *tais que* $n_1 \sim n_2$ *e* $n_2 \sim n_3$*.*

De $n_1 \sim n_2$ *temos que* n_1 *divide* n_2*, ou seja, que existe um número natural* x *tal que* $n_2 = x \cdot n_1$.

De $n_2 \sim n_3$ *temos que* n_2 *divide* n_3*, ou seja, que existe um número natural* y *tal que* $n_3 = y \cdot n_2$.

Nesse caso, podemos escrever o número n_3 *da forma* $n_3 = y \cdot (x \cdot n_1) = (y \cdot x) \cdot n_1$. *Como o número* $y \cdot x$ *é natural, concluímos que* n_1 *divide* n_3 *e disso obtemos* $n_1 \sim n_3$.

Concluímos que a relação $\sim$ *conforme definida acima é uma relação de ordem parcial. Entretanto, considere os números naturais* 2 *e* 3. *Temos que* 2 *não divide* 3 *e que* 3 *não divide* 2. *Não podemos afirmar, portanto, que* $2 \sim 3$ *e nem que* $3 \sim 2$.

Logo, $(\mathbb{N}, \sim)$ *é um conjunto parcialmente ordenado que não é totalmente ordenado.*

Exemplo 2.7. *Considere o conjunto* A *com os números naturais a partir do número* 2*, ou seja,* $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = \{2, 3, 4, 5, ...\}$.

Poderíamos definir a relação a seguir para o conjunto $\mathbb{N}$*, da mesma forma. Entretanto, a exclusão dos elementos* 0 *e* 1 *foi feita para produzir um exemplo de conjunto parcialmente ordenado com uma infinidade de elementos maximais, como será visto no exemplo 2.12.*

No conjunto A*, vamos definir a relação* $\prec$ *da forma: dados dois números* a_1 *e* a_2 *em* A*, dizemos que* $a_1 \prec a_2$ *se, e somente se,* a_2 *divide* a_1.

A prova de que $(A, \prec)$ *é um conjunto parcialmente ordenado será feita a seguir. A argumentação é similar a do exemplo* 2.1.

- *Condição* (i)*: Seja* $a \in A$ *qualquer. Como o número* a *divide ele mesmo, temos que* $a \prec a$.

- *Condição* (ii)*: Sejam* a_1 *e* a_2 *em* A *tais que* $a_1 \prec a_2$ *e* $a_2 \prec a_1$.

  De $a_1 \prec a_2$ *temos que* a_2 *divide* a_1*, ou seja, que existe um número natural* x *tal que* $a_1 = x \cdot a_2$.

  De $a_2 \prec a_1$ *temos que* a_1 *divide* a_2*, ou seja, que existe um número natural* y *tal que* $a_2 = y \cdot a_1$.

  Assim, podemos escrever o número a_2 *como* $a_2 = y \cdot (x \cdot a_2) = (y \cdot x) \cdot a_2$. *Conclui-se então que* $y \cdot x = 1$*, mas como* y *e* x *são números naturais, devemos ter* $y = x = 1$.

  Logo, como tínhamos $a_1 = x \cdot a_2$ *e concluímos que* $x = 1$*, temos* $a_1 = a_2$.

- *Condição* (iii)*: Sejam a_1, a_2 e a_3 em A tais que $a_1 \prec a_2$ e $a_2 \prec a_3$.*

  De $a_1 \prec a_2$ temos que a_2 divide a_1, ou seja, que existe um número natural x tal que $a_1 = x \cdot a_2$.

  De $a_2 \prec a_3$ temos que a_3 divide a_2, ou seja, que existe um número natural y tal que $a_2 = y \cdot a_3$.

  Nesse caso, podemos escrever o número a_1 da forma $a_1 = x \cdot (y \cdot a_3) = (x \cdot y) \cdot a_3$. Como o número $x \cdot y$ é natural, concluímos que a_3 divide a_1 e disso obtemos $a_1 \prec a_3$.

Assim, o par $(A, \prec)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Como no exemplo 2.1*, existem elementos em A que não podem ser comparados. Podemos utilizar o mesmo contra-exemplo, atentando para a alteração na relação. Considere os números naturais* 2 *e* 3 *em A. Temos que* 2 *não divide* 3 *e que* 3 *não divide* 2*. Não podemos afirmar, portanto, que $3 \prec 2$ e nem que $2 \prec 3$.*

Logo,$(A, \prec)$ não é um conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 2.8. *No conjunto dos números inteiros, vamos definir a relação $\leq$ da forma: dados dois números z_1 e z_2 em $\mathbb{Z}$, dizemos que $z_1 \leq z_2$ se, e somente se, $z_2 - z_1 \in \mathbb{N}$.*

Vamos mostrar que $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado. Primeiramente, mostramos que a relação $\leq$ é, de fato, uma relação de ordem parcial.

- *Condição* (i)*: Seja $z \in \mathbb{Z}$ qualquer. Como $z - z = 0 \in \mathbb{N}$, temos $z \leq z$.*

- *Condição* (ii)*: Sejam z_1 e z_2 em $\mathbb{Z}$ tais que $z_1 \leq z_2$ e $z_2 \leq z_1$.*

  De $z_1 \leq z_2$ temos que $z_2 - z_1 \in \mathbb{N}$ e de $z_2 \leq z_1$ temos que $z_1 - z_2 \in \mathbb{N}$.

  Nesse caso, temos $z_2 - z_1 \in \mathbb{N}$ e $-(z_2 - z_1) = z_1 - z_2 \in \mathbb{N}$, ou seja, temos que tanto o número $z_2 - z_1$ quanto o seu oposto estão em $\mathbb{N}$. Isso só acontece se $z_2 - z_1$ for igual a 0*.*

  De $z_2 - z_1 = 0$, concluímos que $z_2 = z_1$.

- *Condição* (iii)*: Sejam z_1, z_2 e z_3 em $\mathbb{Z}$ tais que $z_1 \leq z_2$ e $z_2 \leq z_3$.*

  De $z_1 \leq z_2$ temos que $z_2 - z_1 \in \mathbb{N}$ e de $z_2 \leq z_3$ temos que $z_3 - z_2 \in \mathbb{N}$.

  Nosso objetivo é concluir que $z_3 - z_1 \in \mathbb{N}$, para que tenhamos $z_1 \leq z_3$. Para isso, note que $z_3 - z_1 = z_3 + (-z_2 + z_2) - z_1 = (z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)$.

  Como $z_3 - z_2 \in \mathbb{N}$ e $z_2 - z_1 \in \mathbb{N}$, concluímos que $z_3 - z_1$ é a soma de dois números de $\mathbb{N}$ e por isso, também está em $\mathbb{N}$.

Assim, concluímos que $z_1 \leq z_3$*.*

Logo, o par $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. Será provado ainda que ele é um conjunto totalmente ordenado.*

Para isso, considere dois número z_1 *e* z_2 *quaisquer em* $\mathbb{Z}$*. Queremos provar que se não ocorre* $z_1 \leq z_2$ *então ocorre* $z_2 \leq z_1$*.*

Suponha, então, que não ocorre $z_1 \leq z_2$*. Nesse caso, sabemos que* $z_2 - z_1 \notin \mathbb{N}$*. Disso, podemos concluir que* $z_2 - z_1$ *é um número inteiro negativo. Assim, o oposto de* $z_2 - z_1$*, que é* $-(z_2 - z_1) = z_1 - z_2$ *é um número inteiro positivo, ou seja,* $z_1 - z_2$ *está em* $\mathbb{N}$*.*

De $z_1 - z_2 \in \mathbb{N}$ *concluímos que* $z_2 \leq z_1$*.*

Por isso, temos que $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado.*

Exemplo 2.9. *Considere* X *um conjunto qualquer e* $P(X)$ *o conjunto das partes de* X*, ou seja, o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de* X*. Vamos definir a relação* $\subseteq$ *em* $P(X)$ *como a inclusão usual de conjuntos.*

A inclusão de conjuntos, como uma relação em $P(X)$*, satisfaz as condições da definição de relação de ordem parcial, conforme será mostrado a seguir.*

- *Condição* (i)*: Seja* $X_1 \in P(X)$ *qualquer. Automaticamente temos* $X_1 \subseteq X_1$*.*
- *Condição* (ii)*: Sejam* X_1 *e* X_2 *em* $P(X)$ *tais que* $X_1 \subseteq X_2$ *e* $X_2 \subseteq X_1$*. Isso já implica* $X_1 = X_2$*.*
- *Condição* (iii)*: Sejam* X_1*,* X_2 *e* X_3 *em* $P(X)$ *tais que* $X_1 \subseteq X_2$ *e* $X_2 \subseteq X_3$*.*

  Como $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3$*, temos que* $X_1 \subseteq X_3$*.*

Assim, o par $(P(X), \subseteq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado. Contudo, conforme mostraremos a seguir,* $(P(X), \subseteq)$ *não é sempre um conjunto totalmente ordenado.*

Considere $X = \mathbb{Z}$*,* P *o conjuntos dos números pares e* I *o conjunto dos números ímpares. Temos* $P \in P(\mathbb{Z})$ *e* $I \in P(\mathbb{Z})$*, ou seja,* P *e* I *são subconjuntos de* $\mathbb{Z}$*. Entretanto, não é verdade que* $P \subseteq I$ *e nem que* $I \subseteq P$*.*

Portanto, o par $(P(X), \subseteq)$ *não é um conjunto totalmente ordenado.*

Definição 2.10. Seja $(X,\ R\ )$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um elemento $m \in X$ é um *elemento maximal* de $(X,\ R\ )$ se, para todo $x \in X$, $m\ R\ x$ implica $m = x$.

Em cada um dos exemplos de conjuntos parcialmente ordenados apresentados anteriormente, vamos estudar a existência de elementos maximais.

Exemplo 2.11. $(\mathbb{N}, \sim)$

Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \sim)$ *e um número* $n \in \mathbb{N}$ *qualquer com* $n \neq 0$. *Vamos analisar se o número* n *pode ser um elemento maximal de* $(\mathbb{N}, \sim)$.

Note que $2n \in \mathbb{N}$, *que* $2n \neq n$ *e que* n *divide* $2n$. *Assim, temos* $n \sim 2n$ *mas não temos* $n = 2n$.

Isso prova que nenhum número diferente de 0 *pode ser um elemento maximal de* $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, quando consideramos $0 \in \mathbb{N}$, *temos que* 0 *é um elemento maximal de* $(\mathbb{N}, \sim)$ *pois, dado qualquer número* $a \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \sim a$, *temos que* 0 *divide* a, *mas isso implica* $a = 0$.

Assim $(\mathbb{N}, \sim)$ *possui um único elemento maximal, que é o* 0.

Exemplo 2.12. $(A, \prec)$

Considere um número $a \in A$ *qualquer. Queremos analisar a possibilidade do número* a *ser um elemento maximal de* A. *Para isso, considere* $b \in A$ *tal que* $a \prec b$, *ou seja, tal que* b *divide* a.

Temos duas situações possíveis:

- *O número* a *é primo.*

  Nessa situação, o número b *seria um divisor de um número primo. Teríamos então* $b = 1$ *ou* $b = a$. *Como* $1 \notin A$, *temos* $b = a$.

  Logo, todo número primo é um elemento maximal de $(A, \prec)$.

- *O número* a *não é primo.*

  Nesse caso, o número a *tem algum divisor que seja diferente de* 1 *e diferente do próprio* a. *Se* b *for um destes divisores, então teremos* $b \in A$, $a \prec b$ *e* $a \neq b$. *Assim,* a *não seria um elemento maximal de* $(A, \prec)$.

Concluímos então que todos os números primos são elementos maximais de $(A, \prec)$. *Além disso, não existem outros elementos maximais de* $(A, \prec)$.

Exemplo 2.13. $(\mathbb{Z}, \leq)$

Considere agora o conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}, \leq)$ *e um número* $z \in \mathbb{Z}$ *qualquer.*

O número $z+1$ *também está em* $\mathbb{Z}$ *e temos* $z \leq z+1$ *pois* $z+1-z=1$ *e* $1 \in \mathbb{N}$.

Além disso, sabemos que $z+1 \neq z$.

Logo, z *não é um elemento maximal de* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *e como* z *era arbitrário, concluímos que* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *não possui elemento maximal.*

Exemplo 2.14. $(P(X), \subseteq)$

No conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$*, considere um conjunto* $X_1 \in P(X)$ *com* $X_1 \neq X$.

Nesse caso, temos $X_1 \subseteq X$ *e* $X_1 \neq X$*. Isso significa que* X_1 *não é um elemento maximal de* $(P(X), \subseteq)$.

Considere agora $X \in P(X)$ *e algum outro conjunto* $Y \in P(X)$ *com* $X \subseteq Y$.

Temos então, por um lado, $X \subseteq Y$*. Mas também temos* $Y \subseteq X$ *pois* $Y \in P(X)$*. As duas inclusões implicam* $X = Y$.

Assim, X *é o único elemento maximal de* $(P(X), \subseteq)$.

Definição 2.15. Sejam $(X,\ R\ )$ um conjunto parcialmente ordenado, C um subconjunto de X e R_C a relação de ordem parcial R restrita ao conjunto C. Dizemos que C é uma *cadeia* em $(X,\ R\ )$ se $(C,\ R_C)$ for um conjunto totalmente ordenado.

Em outras palavras, dados um conjunto parcialmente ordenado $(X,\ R\ )$, uma cadeia C de $(X,\ R\ )$ e dois elementos c_1 e c_2 em C, é sempre possível afirmar que $c_1\ R\ c_2$ ou que $c_2\ R\ c_1$.

Salientamos, aqui, que quando estamos comparando elementos de uma cadeia C, podemos utilizar tanto a relação de ordem parcial restrita a C, que é R_C, quanto a relação de ordem parcial definida em todo conjunto X. Por isso, não usaremos a notação R_C quando a restrição da relação de ordem parcial não for necessária.

Exemplo 2.16. *Um exemplo de cadeia em* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é o conjunto*

$$2\mathbb{Z} = \{..., -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

De fato, dados quaisquer 2 números a *e* b *em* $2\mathbb{Z}$*, é sempre possível comparar es-*

tes dois números. Isso acontece porque o conjunto $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado.*

O mesmo acontece para qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}$*. Como* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado, qualquer subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *é uma cadeia em* $(\mathbb{Z}, \leq)$*.*

Exemplo 2.17. *No conjunto parcialmente ordenado* $(\mathbb{N}, \sim)$*, tomando um número* $n \in \mathbb{N}$ *qualquer, considere o conjunto*

$$C_1 = \{n, 3n, 9n, 27n, 81n, ...\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Vamos provar que C_1 *é uma cadeia em* $(\mathbb{N}, \sim)$*. Para isso, note que todos os elementos de* C_1 *são da forma* $3^x n$*, em que* $x \in \mathbb{N}$*.*

Tome então dois números a *e* b *em* C_1*. Existem, então, números* x_1 *e* x_2 *em* $\mathbb{N}$ *tais que* $a = 3^{x_1} n$ *e* $b = 3^{x_2} n$*.*

Agora note que x_1 *e* x_2 *estão em* $\mathbb{N}$ *e que* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$*. Como* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado, é possível afirmar que* $x_1 \leq x_2$ *ou que* $x_2 \leq x_1$*.*

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq x_2$*. Nesse caso, temos* $x_2 - x_1 \in \mathbb{N}$*. Dessa forma, temos*

$$3^{x_2 - x_1} n \in C_1 \subseteq \mathbb{N}.$$

Assim, podemos escrever o número $3^{x_2} n$ *como*

$$3^{x_2} n = 3^{x_2 - x_1} n \cdot 3^{x_1} n.$$

Como $3^{x_2 - x_1} n \in \mathbb{N}$*, concluímos que* $3^{x_1} n$ *divide* $3^{x_2} n$*, ou seja, que* a *divide* b*. Assim, temos* $a \sim b$*.*

Exemplo 2.18. *No conjunto parcialmente ordenado* $(A, \prec)$*, considere o conjunto*

$$C_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\}.$$

Queremos provar que C_2 *é uma cadeia em* $(A, \prec)$*. Para isso, perceba que todos os elementos de* C_2 *são da forma* 2^x *para algum* $x \in \mathbb{N}^*$*.*

Consideramos, então, dois números a *e* b *quaisquer em* C_2*. Então existem* x_1 *e* x_2 *em* $\mathbb{N}^*$ *tais que* $a = 2^{x_1}$ *e* $b = 2^{x_2}$*.*

Novamente, note que $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ *e que* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado. Por* *isso, podemos afirmar que* $x_1 \leq x_2$ *ou que* $x_2 \leq x_1$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq x_2$.

Nesse caso, temos que $x_2 - x_1 \in \mathbb{N}$. *Isso significa que* $2^{x_2 - x_1} \in \mathbb{N}$.

Podemos escrever o número 2^{x_2} *como*

$$2^{x_2} = 2^{x_2 - x_1} \cdot 2^{x_1}.$$

Como $2^{x_2 - x_1} \in \mathbb{N}$, *concluímos que* 2^{x_1} *divide* 2^{x_2}, *ou seja, que* a *divide* b.

Logo, temos $b \prec a$.

Exemplo 2.19. *Vamos analisar um exemplo de cadeia em* $(P(X), \subseteq)$ *para* $X = \mathbb{N}$.

Para cada número $i \in \mathbb{N}^*$, *definimos o conjunto*

$$D_i = \{2k \; : \; k \in \mathbb{N}, \; 1 \leq k \leq i\}.$$

Vamos provar que $D = \{D_i \; : \; i \in \mathbb{N}^*\}$ *é uma cadeia em* $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Para isso, considere dois elementos D_{i_1} *e* D_{i_2} *de* D, *em que* i_1 *e* i_2 *estão em* $\mathbb{N}^*$.

Como $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{Z}$ *e* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *é um conjunto totalmente ordenado, podemos afirmar que* $i_1 \leq i_2$ *ou que* $i_2 \leq i_1$.

Suponha que $i_1 \leq i_2$. *Nesse caso, temos*

$$D_{i_1} = \{2k \; : \; k \in \mathbb{N}, \; 1 \leq k \leq i_1\} \subseteq \{2k \; : \; k \in \mathbb{N}, \; 1 \leq k \leq i_2\} = D_{i_2}.$$

Temos então $D_{i_1} \subseteq D_{i_2}$ *e concluímos que* D *é uma cadeia em* $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Definição 2.20. Sejam $(X, \; R \;)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Dizemos que um elemento $c \in X$ é uma *cota superior* do conjunto Y se para todo $y \in Y$ temos $y \; R \; c$.

Exemplo 2.21. $(\mathbb{Z}, \leq)$

Vamos analisar a possibilidade do conjunto $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ *possuir um cota superior em* $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Para isso, tome um número $c \in \mathbb{Z}$ *qualquer.*

Observe que, se c *for um número par, então o número* $c+2$ *está em* $2\mathbb{Z}$. *Além disso, não temos* $c + 2 \leq c$ *pois* $c - (c + 2) = -2 \notin \mathbb{N}$. *Logo, se* c *for um número par, então* c

não é uma cota superior de $2\mathbb{Z}$.

Por outro lado, se c for um número ímpar, então o número $c+1$ *será par e, portanto, estará em* $2\mathbb{Z}$. *Mas como* $c-(c+1)=-1\notin\mathbb{N}$, *não temos* $c+1\leq c$, *ou seja, se c for um número ímpar, então c não é uma cota superior de* $2\mathbb{Z}$.

Isso significa que $2\mathbb{Z}$ *não possui cota superior em* $(\mathbb{Z},\leq)$.

Considere agora o conjunto

$$X=\{...,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6\}\subseteq\mathbb{Z}.$$

Em X, *temos todos os número da forma* $2a$ *em que* $a\in\mathbb{Z}$ *e* $a\leq 3$.

Vamos mostrar que o número 6 *é uma cota superior do conjunto* X.

Para isso, considere um número x *qualquer em* X. *Perceba que existe um número* $a_1\in\mathbb{Z}$ *tal que* $a_1\leq 3$ *e* $x=2a_1$.

De $a_1\leq 3$, *temos que* $2\cdot a_1\leq 2\cdot 3$, *ou seja, que* $x\leq 6$.

Como x *era arbitrário, concluímos que* 6 *é uma cota superior para o conjunto* X *em* $(\mathbb{Z},\leq)$.

Em $(\mathbb{Z},\leq)$, *ainda existem outras cotas superiores para o conjunto* X.

Considere qualquer número $c\in\mathbb{Z}$ *tal que* $6\leq c$.

Para qualquer elemento x *de* X, *temos* $x\leq 6$. *A propriedade transitiva da relação de ordem parcial nos garante que se temos* $x\leq 6$ *e* $6\leq c$, *então* $x\leq c$.

Nesse caso, c também é uma cota superior para o conjunto X *em* $(\mathbb{Z},\leq)$.

Exemplo 2.22. $(P(\mathbb{N}),\subseteq)$

Revisitando o exemplo 2.19, vamos analisar a cadeia $D=\{D_i\ :\ i\in\mathbb{N}^*\}$ *em* $(P(\mathbb{N}),\subseteq)$.

Uma cota superior para D *é o próprio conjunto* $\mathbb{N}$, *visto que para todo* $i\in\mathbb{N}^*$, *temos* $D_i\subseteq\mathbb{N}$.

Outra cota superior para D é $\cup_{j\in\mathbb{N}^*}D_j$, pois para todo $i \in \mathbb{N}^*$, temos

$$D_i \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}^*}D_j.$$

Logo, $\mathbb{N}$ e $\cup_{j\in\mathbb{N}^*}D_j$ são cotas superiores da cadeia D em $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$. Entretanto, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\cup_{j\in\mathbb{N}^*}D_j$ não estão em D.

Exemplo 2.23. $(A, \prec)$

Agora vamos analisar a possibilidade do conjunto $C_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\}$ possuir um cota superior em $(A, \prec)$.

Usaremos novamente o fato de que todos os números de C_2 são da forma 2^x para algum $x \in \mathbb{N}^*$.

Considere, então, um número $a \in C_2$ qualquer. Assim, existe um número $x_1 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = 2^{x_1}$.

Agora note que $2^{x_1} = 2 \cdot 2^{x_1-1}$.

Além disso, como $x_1 \geq 1$, então $x_1 - 1 \geq 0$. Isso significa que $2^{x_1-1} \in \mathbb{N}$.

Conclui-se que 2 divide 2^{x_1}, ou seja, que 2 divide a.

Como a era arbitrário, temos que para todo $a \in C_2$, temos $a \prec 2$.

Assim, 2 é uma cota superior de C_2.

Será apresentado a seguir um resultado sobre subconjuntos finitos de cadeias. Mais adiante, esse resultado será utilizado numa aplicação do Lema de Zorn, que é o objeto de estudo deste capítulo.

Teorema 2.24. *Sejam $(X,\ R\ )$ um conjunto parcialmente ordenado, C uma cadeia não vazia em $(X,\ R\ )$ e D um subconjunto finito não vazio de C. Então existe um elemento de D que é uma cota superior de D.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ o número de elementos de D. A prova será feita por indução sobre n.

Quando temos $n = 1$, o conjunto D possui apenas um elemento, que chamaremos de d_1. Como $d_1\ R\ d_1$, temos que $d_1 \in D$ é uma cota superior de D.

Suponha agora que para todo subconjunto D de C com n elementos, exista um elemento de D que seja uma cota superior de D.

Tome então, se possível, um subconjunto D' de C que tenha $n+1$ elementos. Escolha um elemento $d' \in D'$ qualquer. O conjunto $D' \setminus \{d'\}$ tem n elementos. Portanto, existe um elemento de $D' \setminus \{d'\}$ que é uma cota superior para $D' \setminus \{d'\}$. Chamaremos essa cota superior de d.

Como D' é um subconjunto de uma cadeia e d e d' estão em D', então temos $d\ R\ d'$ ou $d'\ R\ d$.

Se $d'\ R\ d$, então vamos concluir que d é uma cota superior para o conjunto D'. Tome $x \in D'$ qualquer. Se $x \in D' \setminus \{d'\}$, então $x\ R\ d$ pois d é uma cota superior de $D' \setminus \{d'\}$. Se $x = d'$, também temos $x\ R\ d$. Assim, nesse caso, d é uma cota superior para o conjunto D'.

Se $d\ R\ d'$, então vamos concluir que d' é uma cota superior para o conjunto D'. Tome $x \in D'$ qualquer. Se $x \in D' \setminus \{d'\}$, então já temos $x\ R\ d$. Por transitividade, como $d\ R\ d'$, temos $x\ R\ d'$. Se $x = d'$, também temos $x\ R\ d'$. Assim, nesse caso, d' é uma cota superior para o conjunto D'.

De qualquer forma, existe um elemento de D' que é uma cota superior de D'.

Como D' era um subconjunto de C com $n+1$ elementos qualquer, a prova por indução está completa.

■

O próximo resultado a ser apresentado é o Lema de Zorn. O resultado é chamado de lema por razões históricas, mas é possível demonstrar que ele é equivalente ao Axioma da Escolha. Isso significa que, se assumirmos o Axioma da Escolha, junto com os outros axiomas de Zermelo-Fraenkel, podemos demonstrar o Lema de Zorn. Por outro lado, se assumirmos o Lema de Zorn como um axioma, junto com os outros axiomas de Zermelo-Fraenkel, podemos demonstrar o Axioma da Escolha, como se fosse um teorema. Assim, para os resultados que mostraremos, não há diferença entre assumir o Lema de Zorn ou assumir o Axioma da Escolha como veradeiro.

Neste trabalho, não será feita a demonstração da equivalência entre os dois enunciados.

Lema 2.25 (Lema de Zorn)**.** *Seja $X \neq \emptyset$ e $(X,\ R\ )$ um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia C de $(X,\ R\ )$ admitir uma cota superior em X, então o conjunto $(X,\ R\ )$ admite um elemento maximal.*

As referências [1] e [6] levantam alguns questionamentos quanto à necessidade do Lema de Zorn para a demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Na forma aqui apresentada, o Lema de Zorn é realmente necessário, mas existem espaços vetoriais para os quais é possível provar o Teorema de Hahn-Banach sem assumir o Lema de Zorn. Os chamados Espaços de Hilbert são exemplos de espaços vetoriais desse tipo. Por outro lado, o livro [1] argumenta que, assumindo o Teorema de Hahn-Banach como um axioma, não é possível demonstrar o Lema de Zorn.

Exemplo 2.26. *Dados um conjunto X e o conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$, conforme já apresentado, vamos mostrar que toda cadeia em $(P(X), \subseteq)$ possui uma cota superior. Como $P(X) \neq \emptyset$, concluiremos, pelo Lema de Zorn, que $(P(X), \subseteq)$ possui um elemento maximal.*

Considere então um conjunto X e uma cadeia $C \subseteq P(X)$ qualquer. Os elementos de C são subconjuntos de X.

Vamos descrever C da forma $C = \{C_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, em que Λ é um conjunto de índices.

Uma cota superior de C é o conjunto $\cup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, pois para todo $\lambda_1 \in \Lambda$, temos $C_{\lambda_1} \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$.

Também temos que X é uma cota superior de C.

Como a cadeia era arbitrária, concluímos que toda cadeia em $(P(X), \subseteq)$ possui uma cota superior. Assim, pelo Lema de Zorn, $(P(X), \subseteq)$ admite um elemento maximal.

Já vimos anteriormente que o elemento maximal de $(P(X), \subseteq)$ é X.

Outro exemplo de aplicação do Lema de Zorn é o teorema apresentado a seguir. Ele trata de um tipo específico de base de um espaço vetorial, a base de Hamel, que será definida a seguir.

Definição 2.27 (Base de Hamel)**.** Seja U um espaço vetorial e B um subconjunto de U. Dizemos que B é uma *base de Hamel* do espaço U se B for um conjunto de vetores linearmente independentes e se B gerar o espaço U.

A afirmação de que B gera o espaço vetorial U significa que todos os vetores do espaço U podem ser escritos com uma combinação linear finita de vetores de B.

Na demonstração do teorema da base de Hamel, usaremos o lema que será enunciado e demonstrado a seguir. Ele trata de cadeias de conjuntos linearmente independentes em um espaço vetorial.

Lema 2.28. *Seja U um espaço vetorial, $P(U)$ o conjunto das suas partes e C uma cadeia em $(P(U), \subseteq)$. Descrevemos C da forma $C = \{C_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, em que Λ é um conjunto de índices. Se a cadeia C for formada apenas por conjuntos linearmente independentes, então $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é um conjunto linearmente independente.*

Demonstração. Para provar que $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é um conjunto linearmente independente, tomamos primeiramente uma quantidade finita de vetores de $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ essa quantidade e $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ o conjunto de vetores tomados.

Como todos os elementos de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ estão em $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, podemos afirmar que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, existe um conjunto $C_i \in C$ tal que $x_i \in C_i$.

Agora note que $\{C_i \ : \ i \in \mathbb{N}, \ 1 \leq i \leq n\}$ é um subconjunto finito da cadeia C. Pelo teorema 2.24, existe um elemento de $\{C_i \ : \ i \in \mathbb{N}, \ 1 \leq i \leq n\}$ que é uma cota superior de $\{C_i \ : \ i \in \mathbb{N}, \ 1 \leq i \leq n\}$. Chamaremos esse elemento de C_k.

Como C_k é uma cota superior do conjunto $\{C_i \ : \ i \in \mathbb{N}, \ 1 \leq i \leq n\}$, então para cada $i \in \{1, ..., n\}$, temos $x_i \in C_i \subseteq C_k$. Assim, tomando escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, podemos analisar a combinação $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ como uma combinação linear finita de vetores de C_k.

Como $C_k \in C$, então C_k é linearmente independente. Por isso, se temos

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0_U,$$

então ocorre $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Logo, o conjunto $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é um conjunto linearmente independente.

■

Teorema 2.29 (Teorema da base de Hamel)**.** *Seja U um espaço vetorial de dimensão qualquer tal que $U \neq \{0_U\}$, então U admite uma base de Hamel.*

Demonstração. Para provar que U admite uma base de Hamel, precisamos provar que existe um conjunto de vetores linearmente independentes que gera U.

Para isso, considere M o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes de U. Nesse caso, temos $M \subseteq P(U)$ e a relação de ordem parcial $\subseteq$ de $P(U)$ pode ser restrita a M. Em outras palavras, o par ordenado $(M, \subseteq_M)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Como $U \neq \{0_U\}$, sabemos que existe $u \in U$ com $u \neq 0_U$. O conjunto $\{u\}$, formado apenas pelo vetor u, é linearmente independente. Logo, $\{u\} \in M$ e por isso temos $M \neq \emptyset$.

Considere agora C uma cadeia qualquer em $(M, \subseteq_M)$. Pelo lema 2.2, sabemos que a união dos conjuntos que pertencem a C é linearmente independente, pois todos os conjuntos que pertencem a C o são. Nesse caso, a união dos conjuntos que pertencem a C é uma cota superior de C. Assim, como a cadeia C era arbitrária, concluímos que toda cadeia em $(M, \subseteq_M)$ possui uma cota superior em M.

O Lema de Zorn nos garante, portanto, que $(M, \subseteq_M)$ admite um elemento maximal. Seja B um elemento maximal de $(M, \subseteq_M)$.

Concluiremos que B é uma base de Hamel do espaço vetorial U. Já sabemos que os elementos de B são vetores linearmente independentes, pois $B \in M$.

Para provar que B gera U, vamos supor que isso não acontece. Nesse caso, existe um vetor $z \in U$ com $z \neq 0_U$ e tal que z não é gerado pelos vetores de B. Nesse caso, o conjunto $B \cup \{z\}$ é formado por vetores linearmente independentes. Porém isso entra em contradição com a maximalidade de B, pois teríamos $B \subseteq_M B \cup \{z\}$ e não teríamos $B = B \cup \{z\}$.

Assim, B é uma base de Hamel do espaço vetorial U.

Como o espaço U era um espaço vetorial de dimensão qualquer tal que $U \neq \{0_U\}$, a prova está completa.

$\blacksquare$

3 Teorema de Hahn-Banach

Este capítulo do trabalho tem por objetivo apresentar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach, acompanhado de alguns de seus corolários. A demonstração é similar à que pode ser encontrada em [6] ou em [8]. Aqui, será apresentada apenas uma versão do Teorema, referente a espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. As referências [1], [6] e [8] apresentam diferentes versões do Teorema, tratando inclusive de espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$. Em particular, a referência [1] apresenta uma rica discussão sobre o resultado, iniciada com a apresentação da forma geométrica dele.

3.1 O Teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, V um subespaço vetorial de U, $p : U \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear dominado por p, ou seja, tal que para todo $v \in V$ seja satisfeita a desigualdade $f(v) \leq p(v)$. Então, sob tais hipóteses, existe um funcional linear $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tal que:*

(i) para todo $v \in V$, $\widetilde{f}(v) = f(v)$ e

(ii) para todo $u \in U$, $\widetilde{f}(u) \leq p(u)$.

Demonstração. A primeira etapa da demonstração do Teorema consiste em definir um conjunto que, munido de uma relação de ordem parcial, satisfaça as hipóteses do Lema de Zorn. Em seguida, será provado que o elemento maximal desse conjunto, cuja existência é garantida, será a extensão $\widetilde{f}$ de f desejada.

Considere, então, o conjunto E de todas as extensões lineares g de f dominadas pelo funcional sublinear p. Para cada uma dessas funções g, denotaremos por $D(g)$ o seu domínio.

Assim, $E = \{g \text{ extensão linear de } f \ ; \ \forall\, x \in D(g),\ g(x) \leq p(x)\}$.

Como visto no exemplo 1.41, sabemos que f é uma extensão linear de f. Assim, f pertence a E, isso implica $E \neq \emptyset$.

Podemos definir uma relação $\leq$ em E da seguinte forma: dados g_1 e g_2 elementos de E, diremos que $g_1 \leq g_2$ quando g_2 for uma extensão de g_1.

Vamos agora mostrar que essa relação é uma relação de ordem parcial.

- Propriedade reflexiva: Seja g um funcional em E. Novamente pelo exemplo 1.41, podemos dizer que g é uma extensão linear de g.

  Temos então que para qualquer $g \in E$, $g \leq g$.

- Propriedade anti-simétrica: Sejam g_1 e g_2 em E tais que $g_1 \leq g_2$ e $g_2 \leq g_1$.

  Nesse caso, temos $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ e $D(g_2) \subseteq D(g_1)$, o que implica $D(g_1) = D(g_2)$.

  Além disso, temos que $g_2|_{D(g_1)} = g_1$ e $g_1|_{D(g_2)} = g_2$, mas como as duas funções têm o mesmo domínio, isso significa que elas são iguais.

  Assim, se temos g_1 e g_2 em E tais que $g_1 \leq g_2$ e $g_2 \leq g_1$, então $g_1 = g_2$.

- Propriedade transitiva: Sejam g_1, g_2 e g_3 em E tais que $g_1 \leq g_2$ e $g_2 \leq g_3$.

  Nesse caso, temos $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ e $D(g_2) \subseteq D(g_3)$, o que implica $D(g_1) \subseteq D(g_3)$.

  Note que, por isso, podemos avaliar g_3 em um elemento $u_1 \in D(g_1)$ qualquer. Temos $g_3(u_1) = g_2(u_1)$, pois $u_1 \in D(g_2)$ e $g_3|_{D(g_2)} = g_2$. Além disso, $g_2(u_1) = g_1(u_1)$, pois $g_2|_{D(g_1)} = g_1$.

  Logo, para todo $u_1 \in D(g_1)$, temos $g_3(u_1) = g_1(u_1)$ Assim, temos que $g_3|_{D(g_1)} = g_1$. Conclui-se que $g_1 \leq g_3$.

  Dessa forma, se temos g_1, g_2 e g_3 em E tais que $g_1 \leq g_2$ e $g_2 \leq g_3$, então $g_1 \leq g_3$.

Portanto, o conjunto E está munido de uma relação de ordem parcial $\leq$.

Para que o Lema de Zorn possa ser aplicado, vamos mostrar que toda cadeia em E admite uma cota superior em E. Para isso, tomamos uma cadeia C qualquer em $(E, \leq)$.

Vamos definir um funcional linear $\widetilde{g}$ cujo domínio é $\cup_{g \in C} D(g)$.

Dado um elemento $x \in D(\widetilde{g}) = \cup_{g \in C} D(g)$, sabemos que para algum funcional $g_1 \in C$, temos $x \in D(g_1)$. Definimos então $\widetilde{g}(x)$ como $g_1(x)$. Conforme observaremos a seguir, dessa forma, o funcional $\widetilde{g}$ está bem definido.

Note que para quaisquer g_1 e g_2 em C, temos $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$. A primeira opção implicaria $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ e $g_2|_{D(g_1)} = g_1$, enquanto a segunda implicaria $D(g_2) \subseteq D(g_1)$

e $g_1|_{D(g_2)}= g_2$. De qualquer forma, se um elemento $u \in U$ pertence a $D(g_1) \cap D(g_2)$, então acontece $g_1(u) = g_2(u)$. Assim, o funcional $\widetilde{g}$ está bem definido.

Deve-se salientar que o domínio de $\widetilde{g}$ é uma reunião de subespaços vetoriais de U. Como C é uma cadeia, dados dois elementos g_1 e g_2 em C, sempre temos $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$, ou seja, temos $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ ou $D(g_2) \subseteq D(g_1)$. Assim, quando analisamos $D(g_2) \cup D(g_1)$, obtemos $D(g_2) \cup D(g_1) = D(g_1)$ ou $D(g_2) \cup D(g_1) = D(g_2)$. Em ambos os casos, a reunião resulta em um subespaço vetorial de U. Portanto, o domínio de $\widetilde{g}$ é também um subespaço vetorial de U.

Da maneira como foi definido, se ocorrer $\widetilde{g} \in E$, então o funcional $\widetilde{g}$ será uma cota superior de C, visto que para qualquer $g_1 \in C$ temos $D(g_1) \subseteq \cup_{g \in C} D(g) = D(\widetilde{g})$. Também é satisfeita a igualdade $\widetilde{g}|_{D(g_1)}= g_1$. Conclui-se que para qualquer $g_1 \in C$, o funcional $\widetilde{g}$ é uma extensão de g_1. Assim, se $\widetilde{g} \in E$, teremos $g_1 \leq \widetilde{g}$ para qualquer $g_1 \in C$.

Para provar que $\widetilde{g} \in E$, precisamos demonstrar que $\widetilde{g}$ é uma extensão linear de f que é dominada pelo funcional sublinear p. A prova será feita a seguir e está dividida em etapas.

Para provar que $\widetilde{g}$ é uma extensão de f, tome $g_1 \in C$ qualquer. Sabemos que $D(g_1) \subseteq D(\widetilde{g})$ e que $\widetilde{g}|_{D(g_1)}= g_1$. Por outro lado, como $g_1 \in E$, sabemos que g_1 é uma extensão de f, e que portanto temos $D(f) \subseteq D(g_1)$ e $g_1|_{D(f)}= f$. Concluímos então que $D(f) \subseteq D(\widetilde{g})$ e que $\widetilde{g}|_{D(f)}= f$. Logo, $\widetilde{g}$ é uma extensão de f.

Para provar que $\widetilde{g}$ é um funcional linear, considere dois elementos x_1 e x_2 em $D(\widetilde{g})$ e um escalar α quaisquer.

Sabemos que existem g_1 e g_2 em C tais que $x_1 \in D(g_1)$ e $x_2 \in D(g_2)$. Também temos $D(g_1) \subseteq D(g_2)$ ou $D(g_2) \subseteq D(g_1)$. Sem perda de generalidade, vamos supor $D(g_1) \subseteq D(g_2)$.

Nesse caso, temos $x_1 \in D(g_2)$ e isso implica $x_1 + x_2 \in D(g_2)$.

Assim, pela definição de $\widetilde{g}$, temos $\widetilde{g}(x_1 + x_2) = g_2(x_1 + x_2)$.

Como g_2 é linear, pois pertence ao conjunto E, temos $g_2(x_1 + x_2) = g_2(x_1) + g_2(x_2)$.

Ainda pela definição de $\widetilde{g}$, temos $\widetilde{g}(x_1) = g_2(x_1)$ e $\widetilde{g}(x_2) = g_2(x_2)$.

Concluímos então que $\widetilde{g}(x_1 + x_2) = \widetilde{g}(x_1) + \widetilde{g}(x_2)$.

Agora, como $D(g_2)$ é um subespaço de U e $x_2 \in D(g_2)$, temos que αx_2 também pertence a $D(g_2)$

Obtemos então que $\widetilde{g}(\alpha x_2) = g_2(\alpha x_2)$ e que $\widetilde{g}(x_2) = g_2(x_2)$.

Novamente pela linearidade de g_2, temos $g_2(\alpha x_2) = \alpha g_2(x_2)$, de onde concluímos que $\widetilde{g}(\alpha x_2) = \alpha \widetilde{g}(x_2)$.

Já temos que $\widetilde{g}$ é uma extensão linear de f, ainda falta provar que $\widetilde{g}$ é dominada pelo funcional sublinear p.

Para isso, tome um elemento x qualquer em $D(\widetilde{g})$. Sabemos que existe um funcional g_1 em C tal que $x \in D(g_1)$.

Pela definição de $\widetilde{g}$, temos $\widetilde{g}(x) = g_1(x)$.

Como $g_1 \in E$, temos que g_1 é dominada por p, e portanto, temos $g_1(x) \leq p(x)$.

Assim, obtemos $\widetilde{g}(x) \leq p(x)$. Como x era arbitrário, concluímos que o funcional $\widetilde{g}$ é dominado pelo funcional sublinear p.

Com isso, verificamos que o funcional $\widetilde{g}$ pertence ao conjunto E. Como já tínhamos que $\widetilde{g}$ é uma extensão de todo funcional da cadeia C, concluímos que $\widetilde{g}$ é uma cota superior de C.

Como a cadeia era arbitrária, podemos afirmar que toda cadeia em $(E, \leq)$ tem uma cota superior em E. O Lema de Zorn garante, então, que $(E, \leq)$ possui um elemento maximal. Seja então $\widetilde{f}$ um elemento maximal de $(E, \leq)$.

Provaremos agora que $\widetilde{f}$ é uma extensão linear de f que satisfaz as condições desejadas no enunciado do Teorema.

Como $\widetilde{f} \in E$, já temos que $\widetilde{f}$ é uma extensão linear de f e que $\widetilde{f}$ é dominada por p, ou seja, para todo $x \in D(\widetilde{f})$, temos $\widetilde{f}\,(x) \leq p\,(x)$.

Falta provar que $\widetilde{f}$ está definida em todo o espaço U. A prova disso será feita por contradição. A contradição virá da construção de um funcional f_1, diferente de $\widetilde{f}$, que satisfaça $\widetilde{f} \leq f_1$ e $f_1 \in E$. Nesse caso, o funcional $\widetilde{f}$ não seria um elemento maximal de E.

Supomos, então, que $D(\widetilde{f}) \subsetneq U$. Nesse caso, podemos encontrar um elemento $y_1 \in U \setminus D(\widetilde{f})$. Claramente, $y_1 \neq 0_U$ pois $0_U \in D(\widetilde{f})$.

Vamos considerar o subespaço vetorial Y_1 de U gerado por y_1 e por $D(\widetilde{f})$.

Logo, qualquer $x \in Y_1$ pode ser escrito como

$$x = y + \alpha y_1,$$

para algum $y \in D(\widetilde{f})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Conforme mostraremos a seguir, essa representação é única.

De fato, se escrevermos x das duas formas:

$$x = y + \alpha y_1 \qquad\qquad e \qquad\qquad x = \widetilde{y} + \beta y_1$$

com y e $\widetilde{y}$ em $D(\widetilde{f})$ e α e β em $\mathbb{R}$, teremos:

$$y - \widetilde{y} = (\beta - \alpha)y_1.$$

Como $y - \widetilde{y}$ está em $D(\widetilde{f})$ e o único múltiplo de y_1 que está em $D(\widetilde{f})$ é 0_U, devemos ter $y - \widetilde{y} = 0_U$ e $\beta - \alpha = 0$. Assim, temos $y = \widetilde{y}$ e $\alpha = \beta$.

Note que quando $x \in D(\widetilde{f})$, temos que $\alpha = 0$.

Agora, vamos definir um funcional linear f_1 da seguinte forma, em que c é um número real a ser determinado:

$$\begin{array}{rccc} f_1\colon & Y_1 & \to & \mathbb{R} \\ & y + \alpha y_1 & \longmapsto & \widetilde{f}(y) + \alpha c \end{array}.$$

Perceba que $D(\widetilde{f}) \subsetneq D(f_1)$, pois $D(f_1) = Y_1$, que é o subespaço vetorial de U gerado por y_1 e por $D(\widetilde{f})$, sendo que $y_1 \notin D(\widetilde{f})$. Já podemos concluir daí que $\widetilde{f} \neq f_1$.

Além disso, para um elemento $x \in D(\widetilde{f})$ qualquer, temos $\alpha = 0$ e isso implica que $f_1(x) = \widetilde{f}(x)$. Logo, temos que $f_1|_{D(\widetilde{f})} = \widetilde{f}$.

Queremos provar agora que o funcional f_1 é linear. Para isso, considere dois elementos x e x' em $D(f_1) = Y_1$ e um escalar λ quaisquer.

Como x e x' pertencem a $Y1$, sabemos que existem y e y' elementos do $D(\widetilde{f})$ e α e β escalares tais que: $x = y + \alpha y_1$ e $x' = y' + \beta y_1$.

Vamos então calcular $f_1(x + x')$, obtendo

$$\begin{aligned} f_1(x + x') &= f_1(y + \alpha y_1 + y' + \beta y_1) \\ &= f_1(y + y' + (\alpha + \beta)y_1) \\ &= \widetilde{f}(y + y') + (\alpha + \beta)c \\ &= \widetilde{f}(y + y') + \alpha c + \beta c. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{f}$ é linear, temos que $\widetilde{f}(y + y') = \widetilde{f}(y) + \widetilde{f}(y')$.

Temos então

$$\begin{aligned} f_1(x+x') &= \widetilde{f}(y+y') + \alpha c + \beta c \\ &= \widetilde{f}(y) + \widetilde{f}(y') + \alpha c + \beta c \\ &= \widetilde{f}(y) + \alpha c + \widetilde{f}(y') + \beta c \\ &= f_1(x) + f_1(x'). \end{aligned}$$

Por outro lado, quando calculamos $f_1(\lambda x)$, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x) &= f_1(\lambda(y + \alpha y_1)) \\ &= f_1(\lambda y + (\lambda\alpha) y_1) \\ &= \widetilde{f}(\lambda y) + (\lambda\alpha)c. \end{aligned}$$

Novamente pela linearidade de $\widetilde{f}$, temos que $\widetilde{f}(\lambda y) = \lambda \widetilde{f}(y)$.

Segue que

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x) &= \widetilde{f}(\lambda y) + (\lambda\alpha)c \\ &= \lambda \widetilde{f}(y) + \lambda(\alpha c) \\ &= \lambda(\widetilde{f}(y) + \alpha c) \\ &= \lambda f_1(x). \end{aligned}$$

Concluímos então que f_1 é uma extensão linear própria de $\widetilde{f}$.

Se para todo $x \in D(f_1)$ o funcional f_1 satisfizer a desigualdade $f_1(x) \leq p(x)$, então teremos $f_1 \in E$.

Como $\widetilde{f} \leq f_1$ e $f_1 \neq \widetilde{f}$, isso contradiz o fato de que $\widetilde{f}$ é elemento maximal de E.

Assim, a última parte da demonstração consiste em exibir um valor de c tal que a desigualdade $f_1(x) \leq p(x)$ seja, de fato, satisfeita para todo $x \in D(f_1)$.

Para isso, escolhemos dois elementos quaisquer x_1 e x_2 em $D(\widetilde{f})$.

Como $\widetilde{f}$ é linear, temos que

$$\widetilde{f}(x_1) + \widetilde{f}(x_2) = \widetilde{f}(x_1 + x_2). \tag{3.1}$$

Como $\widetilde{f} \in E$, temos que

$$\widetilde{f}(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + x_2). \tag{3.2}$$

Das equações 3.1 e 3.2 concluímos que

$$\widetilde{f}(x_1) + \widetilde{f}(x_2) \leq p(x_1 + x_2). \tag{3.3}$$

Escrevemos agora $p(x_1 + x_2)$ como $p(x_1 - y_1 + y_1 + x_2)$.

Como p é sublinear, temos que

$$p(x_1 - y_1 + y_1 + x_2) \leq p(x_1 - y_1) + p(y_1 + x_2). \tag{3.4}$$

De 3.3 e 3.4, obtemos

$$\widetilde{f}(x_1) + \widetilde{f}(x_2) \leq p(x_1 - y_1) + p(y_1 + x_2) \tag{3.5}$$

Obtemos, de 3.5, a desigualdade:

$$\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \leq p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2). \tag{3.6}$$

Em 3.6, observe que y_1 está fixo. Observe também que o termo $\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1)$ independe de x_2, enquanto $p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2)$ independe de x_1.

É possível, então, encontrar um valor $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x_1 \in D(\widetilde{f})} \{\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1)\} \leq c \leq \inf_{x_2 \in D(\widetilde{f})} \{p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2)\}. \tag{3.7}$$

Tomamos, agora, um elemento $x \in D(f_1) = Y_1$ e o escrevemos, conforme já visto, da forma $x = y + \alpha y_1$, de modo que $y \in D(\widetilde{f})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quando $\alpha = 0$, então $x \in D(\widetilde{f})$. Nesse caso, temos $f_1(x) = \widetilde{f}(x)$ e a desigualdade $f_1(x) \leq p(x)$ é automaticamente satisfeita.

Para o caso $\alpha > 0$, vamos usar o fato que $c \leq \inf\limits_{x_2 \in D(\widetilde{f})} \{p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2)\}$, como foi observado em 3.7.

Como $c \leq \inf\limits_{x_2 \in D(\widetilde{f})} \{p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2)\}$, então para qualquer elemento $x_2 \in D(\widetilde{f})$ temos

$$c \leq p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2).$$

Podemos multiplicar ambos os membros da equação por α, obtendo

$$\alpha c \leq \alpha \left[p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2) \right].$$

Daí, podemos concluir que

$$f_1(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c \leq \widetilde{f}(y) + \alpha \left[p(y_1 + x_2) - \widetilde{f}(x_2) \right].$$

Ou seja,

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \alpha p(y_1 + x_2) - \alpha \widetilde{f}(x_2).$$

Substituindo x_2 por $\dfrac{y}{\alpha} \in D(\widetilde{f})$, obtemos

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \alpha p \left(y_1 + \frac{y}{\alpha} \right) - \alpha \widetilde{f} \left(\frac{y}{\alpha} \right).$$

Como $\widetilde{f}$ é linear, p é sublinear e $\alpha > 0$, temos

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + p \left(\alpha \cdot \left(y_1 + \frac{y}{\alpha} \right) \right) - \widetilde{f} \left(\alpha \cdot \frac{y}{\alpha} \right).$$

De onde concluímos que

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + p(\alpha y_1 + y) - \widetilde{f}(y) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Por fim, no caso $\alpha < 0$, também usaremos 3.7, em particular o fato que

$$\sup_{x_1 \in D(\widetilde{f})} \{ \widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \} \leq c.$$

Como $\sup_{x_1 \in D(\widetilde{f})} \{ \widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \} \leq c$, então para qualquer elemento $x_1 \in D(\widetilde{f})$ temos

$$\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \leq c.$$

Podemos multiplicar ambos os membros da equação por α, obtendo

$$\alpha c \leq \alpha \left[\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \right].$$

O que implica a relação:

$$f_1(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c \leq \widetilde{f}(y) + \alpha \left[\widetilde{f}(x_1) - p(x_1 - y_1) \right].$$

Ou seja,

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \alpha \widetilde{f}(x_1) - \alpha p(x_1 - y_1).$$

Substituindo x_1 por $\dfrac{y}{|\alpha|} \in D(\widetilde{f})$, obtemos

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \alpha \widetilde{f}\left(\frac{y}{|\alpha|}\right) - \alpha p\left(\frac{y}{|\alpha|} - y_1\right).$$

Como $\widetilde{f}$ é linear, p é sublinear e $-\alpha > 0$, temos que

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \widetilde{f}\left(\alpha \cdot \frac{y}{|\alpha|}\right) + p\left(-\alpha \cdot \left(\frac{y}{|\alpha|} - y_1\right)\right).$$

Sabendo que $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} = -1$ e que $\dfrac{-\alpha}{|\alpha|} = 1$, obtemos

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) + \widetilde{f}\left(-y\right) + p\left(y + \alpha y_1\right).$$

Utilizando mais uma vez a linearidade de $\widetilde{f}$, concluímos que

$$f_1(x) \leq \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}\left(y\right) + p\left(y + \alpha y_1\right) = p\left(y + \alpha y_1\right) = p(x).$$

Em todos os casos, essa escolha de c tem a implicação de que para qualquer $x \in D(f_1)$, temos $f_1(x) \leq p(x)$.

Isso contradiz a maximalidade de $\widetilde{f}$ em E pois, nesse caso, teríamos $f_1 \in E$, $f_1 \neq \widetilde{f}$ e $\widetilde{f} \leq f_1$.

Com isso, podemos concluir que $D(\widetilde{f}) = U$, já que a contradição veio da negação disso.

Portanto, o funcional $\widetilde{f}$ é de fato uma extensão linear de f, definida em todo o espaço U, que satisfaz para todo $u \in U$, $\widetilde{f}\left(u\right) \leq p\left(u\right)$.

■

Conforme já foi visto, as seminormas são exemplos de funcionais sublineares. Supondo que o funcional sublinear do enunciado do Teorema de Hahn-Banach é uma seminorma, podemos fazer outra reformulação do Teorema, conforme será apresentada a seguir. Provaremos que o Teorema de Hahn-Banach implica nessa outra versão, que chamamos aqui de *Teorema de Hahn-Banach adaptado*. Essa versão do Teorema será utilizada na demonstração do corolário 3.3 que, por sua vez, é usado na demonstração dos demais corolários.

Teorema 3.2 (Teorema de Hahn-Banach adaptado)**.** *Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, V um subespaço vetorial de U, $p : U \to \mathbb{R}$ uma pseudonorma e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que para todo $v \in V$ seja satisfeita a desigualdade $|f(v)| \leq p(v)$. Então, sob tais hipóteses, existe um funcional linear $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tal que:*

(i) para todo $v \in V$, $\widetilde{f}(v) = f(v)$ e

(ii) para todo $u \in U$, $|\widetilde{f}(u)| \leq p(u)$.

Demonstração. Pelas hipóteses, sabemos que para todo $v \in V$ é satisfeita a desigualdade $|f(v)| \leq p(v)$. Disso, podemos dizer que p é um funcional sublinear que domina f, pois temos $f(v) \leq p(v)$ para todo $v \in V$.

Dessa forma, o Teorema de Hahn-Banach garante a existência de uma extensão linear $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ de f que também é dominada por p, isto é, tal que para todo $u \in U$ temos $\widetilde{f}(u) \leq p(u)$.

Queremos provar que para todo $u \in U$, vale a desigualdade $|\widetilde{f}(u)| \leq p(u)$.

Para isso, tome $u_0 \in U$ qualquer. Já temos que $\widetilde{f}(u_0) \leq p(u_0)$.

Note também que ocorre

$$\widetilde{f}(-u_0) \leq p(-u_0). \tag{3.8}$$

Como $\widetilde{f}$ é linear, sabemos que $\widetilde{f}(-u_0) = -\widetilde{f}(u_0)$.

Além disso, como p é uma seminorma, sabemos que $p(-u_0) = |-1|p(u_0) = p(u_0)$.

Portanto a equação 3.8 implica $-\widetilde{f}(u_0) \leq p(u_0)$.

De $\widetilde{f}(u_0) \leq p(u_0)$ e $-\widetilde{f}(u_0) \leq p(u_0)$, concluímos que $|\widetilde{f}(u_0)| \leq p(u_0)$.

Como u_0 era arbitrário, foi provado que para qualquer $u \in U$, vale a desigualdade $|\widetilde{f}(u)| \leq p(u)$.

■

3.2 Corolários

Corolário 3.3. *Sejam $(U, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, V um subespaço vetorial de U e $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um funcional* *linear limitado* $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ *que satisfaz:*

(i) $\widetilde{f}$ *é uma extensão de* f *e*

(ii) $\|\widetilde{f}\|_{U'} = \|f\|_{V'}$.

Demonstração. A demonstração desse corolário será dividida em dois casos.

Iniciaremos a demonstração lidando com o caso $V = \{0_U\}$.

Nesse caso, o funcional f é o funcional nulo definido em V e assim temos $\|f\|_{V'} = 0$.

Portanto, a extensão $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ de f que procuramos deve satisfazer $\|\widetilde{f}\|_{U'} = 0$, ou seja, deve ser o funcional nulo definido em U. Nessas condições, o funcional nulo definido em U será um funcional linear limitado que é uma extensão de f e que satisfaz $\|\widetilde{f}\|_{U'} = \|f\|_{V'}$.

Para o caso $V \neq \{0_U\}$, será aplicada a segunda versão do Teorema de Hahn-Banach. Para isso, devemos encontrar um uma seminorma $p : U \to \mathbb{R}$ que domine o funcional f, ou seja, queremos que para todo $v \in V$ tenhamos $|f(v)| \leq p(v)$.

Como o funcional f é limitado, podemos definir a sua norma em V' como

$$\|f\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq \overrightarrow{0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|}.$$

Conforme já visto, na equação 1.2, para todo $v \in V$ temos que $|f(v)| \leq \|f\|_{V'} \|v\|$.

Definimos então o funcional

$$\begin{array}{rccc} p\colon & U & \to & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \|f\|_{V'}\|u\|. \end{array}$$

Vamos provar que p é uma seminorma em U mostrando que p satisfaz todas as condições da definição de seminorma.

- Condição *(i)*: Seja $u \in U$ qualquer. Temos $p(u) = \|f\|_{V'}\|u\| \geq 0$.

  Logo, para qualquer $u \in U$, temos $p(u) \geq 0$.

- Condição *(ii)*: Sejam $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer. Então $p(\alpha \cdot u) = \|f\|_{V'}\|\alpha \cdot u\| = \|f\|_{V'}|\alpha|\|u\| = |\alpha|\|f\|_{V'}\|u\| = |\alpha|p(u)$.

  Assim, para quaisquer $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $p(\alpha \cdot u) = |\alpha|p(u)$.

- Condição *(iii)*: Sejam u_1 e u_2 elementos de U quaisquer.

  Temos que $p(u_1 + u_2) = \|f\|_{V'}\|u_1 + u_2\|$.

  Como $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$, temos

$$p(u_1 + u_2) \leq \|f\|_{V'}(\|u_1\| + \|u_2\|).$$

  Isso implica a relação

$$p(u_1 + u_2) \leq \|f\|_{V'}\|u_1\| + \|f\|_{V'}\|u_2\| = p(u_1) + p(u_2).$$

  Ou seja, para quaisquer u_1 e u_2 em U, temos $p(u_1 + u_2) \leq p(u_1) + p(u_2)$.

Dessa forma p é uma seminorma definida em U que domina o funcional f em V, já que para todo $v \in V$ temos $|f(v)| \leq \|f\|_{V'}\|v\| = p(v)$.

Assim, pelo teorema 3.2, existe um funcional linear $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ que é uma extensão de f e que também é dominado por p, no sentido de que para qualquer $u \in U$, temos

$$|\widetilde{f}(u)| \leq p(u) = \|f\|_{V'}\|u\|. \tag{3.9}$$

Então o funcional $\widetilde{f}$ é limitado e podemos definir a sua norma como

$$\|\widetilde{f}\|_{U'} = \sup_{u \in U, u \neq \overrightarrow{0}} \frac{|\widetilde{f}(u)|}{\|u\|}.$$

Como já tínhamos, da equação 3.9, que para qualquer $u \in U$ com $u \neq 0_U$ vale a desigualdade

$$\frac{|\widetilde{f}(u)|}{\|u\|} \leq \|f\|_{V'},$$

concluímos que $\|\widetilde{f}\|_{U'} \leq \|f\|_{V'}$.

Por outro lado, a norma de um funcional definido em um subespaço não pode ser maior do que a norma de uma extensão desse funcional, como foi visto no teorema 1.43. Por isso, temos $\|f\|_{V'} \leq \|\widetilde{f}\|_{U'}$.

Podemos concluir então que $\|f\|_{V'} = \|\widetilde{f}\|_{U'}$.

Assim, temos que $\widetilde{f}$ é de fato um funcional linear limitado, definido em U, que estende f e que satisfaz $\|f\|_{V'} = \|\widetilde{f}\|_{U'}$.

$\blacksquare$

Corolário 3.4. *Sejam* $(U, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *e* $u_0 \neq 0_U$ *um elemento qualquer de* U*. Então existe um funcional linear limitado* $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|\widetilde{f}\|_{U'} = 1$ *e* $\widetilde{f}(u_0) = \|u_0\|$*.*

Demonstração. Na demonstração desse corolário, utilizaremos o anterior.

Para isso, devemos encontrar um subespaço vetorial V de U e um funcional linear limitado $f : V \to \mathbb{R}$. Além disso, o ideal seria que tivéssemos $\|f\|_{V'} = 1$, $u_0 \in V$ e $f(u_0) = \|u_0\|$ pois, nesse caso, o corolário anterior já garante a existência de um funcional $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ que estende f e que satisfaz $\|\widetilde{f}\|_{U'} = \|f\|_{V'} = 1$, que é o desejado.

Considere então V o subespaço vetorial de U gerado pelo elemento u_0. Nesse caso, podemos escrever cada elemento de V de maneira única como αu_0, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Com isso, definimos o funcional linear

$$\begin{array}{rccc} f\colon & V & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha u_0 & \longmapsto & \alpha\|u_0\|. \end{array}$$

Note que $f(u_0) = \|u_0\|$. Além disso, para qualquer $v \neq 0_V$ em V com $v = \alpha u_0$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{|f(v)|}{\|v\|} = \frac{|f(\alpha u_0)|}{\|\alpha u_0\|} = \frac{|\alpha||f(u_0)|}{|\alpha|\|u_0\|} = \frac{|f(u_0)|}{\|u_0\|} = \frac{\|u_0\|}{\|u_0\|} = 1.$$

Isso significa que f é limitado e que $\|f\|_{V'} = \sup\limits_{v \in V, v \neq 0_V} \dfrac{|f(v)|}{\|v\|} = 1.$

Pelo corolário 3.3, existe um funcional linear limitado $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ que é uma extensão de f e que satisfaz $\|\widetilde{f}\|_{U'} = \|f\|_{V'}$.

Logo, $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado tal que $\|\widetilde{f}\|_{U'} = 1$ e $\widetilde{f}(u_0) = \|u_0\|$.

∎

Corolário 3.5. *Seja* $(U, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado sobre* $\mathbb{R}$*. Então para todo* $u \in U$*, temos que*

$$\|u\| = \sup_{f \in U', f \neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|}$$

em que f_0 *é o funcional nulo definido em* U*.*

Demonstração. Vamos considerar inicialmente o caso $u = 0_U$.

Para todo $f \in U'$ com $f \neq f_0$, temos $|f(u)| = 0$ e $\|f\| \neq 0$.

Dessa forma, temos $\|u\| = 0$ e

$$\sup_{f\in U', f\neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|} = 0.$$

O que implica a igualdade

$$\|u\| = \sup_{f\in U', f\neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|}.$$

Considere agora $u \neq 0_U$ um elemento qualquer de U e $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ o funcional linear limitado tal que $\|\widetilde{f}\|_{U'} = 1$ e $\widetilde{f}(u) = \|u\|$, cuja existência é garantida pelo corolário 3.4.

Nesse caso, temos

$$\frac{|\widetilde{f}(u)|}{\|\widetilde{f}\|} = \frac{\|u\|}{1}.$$

Disso, obtemos que

$$\sup_{f\in U', f\neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|} \geq \|u\|.$$

Por outro lado, pela equação 1.2, temos, para qualquer $f \in U'$

$$\|f\| \geq \frac{|f(u)|}{\|u\|}.$$

Isso tem como consequências as desigualdades $\|f\|\cdot\|u\| \geq |f(u)|$ e

$$\|u\| \geq \frac{|f(u)|}{\|f\|}.$$

Logo, temos

$$\|u\| \geq \sup_{f\in U', f\neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|}.$$

Concluímos, então, que para qualquer $u \in U$ ocorre a igualdade

$$\|u\| = \sup_{f\in U', f\neq f_0} \frac{|f(u)|}{\|f\|}.$$

$\blacksquare$

Conclusão

A elaboração de um Trabalho de Conclusão de Curso é um rico processo que inclui momentos de estudos, dúvidas, curiosidades e exercício da escrita matemática.

O Capítulo 1 deste trabalho contém definições que foram abordadas durante o curso de Licenciatura em Matemática. Todavia, o tema geral do trabalho é frequentemente abordado em cursos de mestrado, em disciplinas relacionadas à Análise Funcional. Assim, enquanto alguns conteúdos foram aprendidos especialmente para a elaboração do trabalho, outros assuntos já eram conhecidos previamente. Pode-se afirmar que o curso de graduação em Matemática forneceu uma base suficientemente sólida para o entendimento e a escrita deste trabalho.

Uma continuação natural deste trabalho seria o estudo dos corolários do Teorema de Hahn-Banach em espaços vetoriais mais gerais, como os espaços vetoriais topológicos.

Referências

[1] BECKENSTEIN, E. e NARICI, L. *Topological Vector Spaces.* Chapman & Hall/CRC, 2011.

[2] COELHO, F. U. e LONRENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* EDUSP, 2010.

[3] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Volume 1.* LTC, 2008.

[4] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Volume 2.* LTC, 2010.

[5] HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Editora Ciência Moderna, 2001.

[6] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 2.* IMPA, 1981.

[8] OLIVEIRA, C. R. d. *Introdução à Análise funcional.* IMPA, 2012.