

Rafael Maestrelli

**Análise de Estabilidade e Síntese de
Controladores para Sistemas de Controle via
Rede**

Florianópolis(SC) - Brasil

2016

Rafael Maestrelli

**Análise de Estabilidade e Síntese de Controladores para
Sistemas de Controle via Rede**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação de Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Emanuel de Souza

Florianópolis(SC) - Brasil

2016

Maestrelli, Rafael

Análise de Estabilidade e Síntese de Controladores para Sistemas de Controle via Rede / Rafael Maestrelli ; orientador, Daniel Ferreira Coutinho ; coorientador, Carlos Emanuel de Souza. - Florianópolis, SC, 2016.

171 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. controle via redes. 3. quantização. 4. perda de pacotes. 5. sistemas não lineares. I. Coutinho, Daniel Ferreira. II. de Souza, Carlos Emanuel. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Rafael Maestrelli

Análise de Estabilidade e Síntese de Controladores para Sistemas de Controle via Rede

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Automação de Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis(SC) - Brasil, 13 de julho de 2016.

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

Orientador - DAS/UFSC

Prof. Carlos Emanuel de Souza, Dr.

Co-orientador - LNCC/MCTIC

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.
Presidente da Banca - DAS/UFSC

Prof. Valter Junior de Souza Leite, Dr.
Membro da Banca – CEFET/MG

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.
Membro da Banca - DAS/UFSC

Prof. Eugenio de Bona Castelan Neto, Dr.
Membro da Banca - DAS/UFSC

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.
Membro da Banca - DAS/UFSC

Prof. Antonio Pedro Aguiar, Dr.
Membro da Banca - DEEC/FEUP

Resumo

Nos sistemas de controle via rede a troca de informação entre os elementos de controle (controlador, atuador, planta e sensor) é realizada utilizando uma rede de comunicação com múltiplos propósitos e compartilhada com outros dispositivos. As trocas de informação pela rede induzem uma maior complexidade à análise do sistema de controle devido a limitação na largura de banda da rede, a quantização do sinal, possíveis atrasos de transmissão induzidos pela rede e perda de informação devido a congestionamento. Este trabalho aborda o problema de análise de estabilidade de sistemas de controle via rede sob os efeitos da quantização e da perda de informação. Primeiramente, para tratar o problema de análise de estabilidade de sistemas sob quantização considera-se que o quantizador é estático, logarítmico e com número de níveis finito, e que está presente nos canais sensor-controle e controle-atuador. As condições de estabilidade são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares o que facilita a extensão do método para analisar a estabilidade de sistema não lineares. Abordando o problema de perda de informação é considerado que a modelagem do comportamento da perda de informação pode ser realizada por um modelo estocástico conhecido por processo de Bernoulli binário. Utilizando a noção de estabilidade no sentido da média quadrática em conjunto com a teoria de Lyapunov obtém-se um conjunto de condições necessárias que garantem a estabilidade de um sistema de controle não linear sujeito a perda de informação, em termos de desigualdades matriciais lineares, supondo um único canal com apagamento (controle-atuador), ou seja, o controle é tido como sendo parte integrante do elemento sensor, sendo assim, não é necessário enviar tal sinal pela rede. Considerando um sistema linear sujeito a quantização logarítmica finita e estática apresenta-se os resultados iniciais da análise de uma metodologia para o escalonamento da rede de um sistema de controle distribuído. Nessa proposta para o escalonamento da rede por quantização, é proposto modificar a largura de banda da rede utilizada por cada aplicação

de maneira que as diferentes quantizações de cada malha de controle possibilitem a liberação de certa largura de banda para outras aplicações na rede que, em um dado momento, necessitem de uma largura de banda extra, sem comprometer a estabilidade da malha de controle. Finalmente, exemplos numéricos ilustram a aplicação das metodologias propostas.

Palavras-chaves: controle via redes, quantização, perda de pacotes, sistemas não lineares, sistemas quadráticos, sistemas de controle distribuídos, escalonamento de redes, adaptação por quantização.

Abstract

In networked control systems, the exchange of information between control elements (controller, actuator, sensor and the system) is performed by using a shared multiple purpose communication network. The presence of a network in the control loop leads to a more complex control system analysis due to network bandwidth limitation, signal quantization, network induced transmission delays and information loss because of network congestion. This thesis addresses the stability analysis problem of networked control systems under quantized information and package dropouts. First, to handle the stability analysis problem of quantized systems, it is considered that the quantizer is static, logarithmic and has a finite size, and is present in the sensor-to-control and control-to-actuator channels. Stability conditions are formulated in terms of linear matrix inequality constraints which facilitates the method extension to deal with nonlinear systems. By modeling the information loss behavior in a fading network using a Bernoulli binary stochastic process, it is applied the mean square stability notion to deal with the information loss problem. The Lyapunov theory is then applied to obtain sufficient conditions to ensure the control system stability subject to information loss, in terms of linear matrix inequalities, assuming the presence of a single channel with erasure (control-to-actuator). Considering a linear system subject to a finite and static logarithmic quantization, preliminary results of a network scheduling methodology for distributed control systems is also presented. In this proposal, the network bandwidth used by each control loop changes dynamically in order to release a certain bandwidth for other network applications needing an extra bandwidth, at any given time, without compromising the control loop stability. Finally, numerical examples illustrate the potentials of the proposed methodologies.

Key-words: networked control systems, logarithmic quantization, packaged loss, nonlinear systems, quadratic systems, distributed control systems, network scheduling, quantized adaptation.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 13 |
| 1.1 | Sistemas de Controle via Rede | 15 |
| 1.2 | Objetivos da Tese | 18 |
| 1.3 | Quantização em Sistemas de Controle | 19 |
| 1.3.1 | Quantizador Estático e Logarítmico | 23 |
| 1.3.2 | Condição de Setor para um Quantizador Logarítmico | 25 |
| 1.4 | A Perda de Informação em Sistemas de Controle | 27 |
| 1.4.1 | Modelo de um Canal de Comunicação com Apagamento | 32 |
| 1.5 | Alocação de Recursos da Rede para Controle de Sistemas Distribuídos | 34 |
| 2 | Sistemas Lineares Quantizados | 39 |
| 2.1 | Estabilidade com Quantizadores Logarítmicos Ideais | 41 |
| 2.2 | Estabilidade para um Único Quantizador Logarítmico Finito | 45 |
| 2.3 | Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Finitos | 53 |
| 2.4 | Projeto de Quantizadores Logarítmicos Práticos | 61 |
| 2.5 | Exemplos Numéricos | 63 |
| 3 | Sistemas Não Lineares Quantizados | 69 |
| 3.1 | Estabilização via Controle Linear com Um Quantizador Logarítmico Ideal | 70 |
| 3.1.1 | Realimentação de Estados | 72 |
| 3.1.2 | Realimentação de Saída | 76 |
| 3.2 | Estabilização para Um Quantizador Logarítmico Finito | 80 |
| 3.2.1 | Projeto de Um Quantizador Logarítmico Prático | 86 |
| 3.3 | Extensão para o Caso com Dois Quantizadores | 88 |
| 3.3.1 | Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Ideais | 88 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3.2 | Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Finitos | 91 |
| 3.4 | Exemplos Numéricos | 102 |
| 3.4.1 | Exemplo de Projeto do Controlador para um Quantizador Ideal | 102 |
| 3.4.2 | Exemplos com Realimentação de Estados e Quantizador Finito | 104 |
| 3.4.3 | Exemplo com Realimentação de Saída e Quantizador Finito | 109 |
| 4 | Sistemas Não Lineares com Perda de Informação | 113 |
| 4.1 | Estabilidade com Perda de Informação | 115 |
| 4.1.1 | Solução Baseada em Desigualdades Matriciais Lineares | 120 |
| 4.1.1.1 | Caso Linear | 124 |
| 4.2 | Projeto do Controlador | 125 |
| 4.3 | Exemplos Numéricos | 128 |
| 4.3.1 | Exemplo 1 | 128 |
| 4.3.2 | Exemplo 2 | 131 |
| 5 | Alocação de Recursos por Quantização | 135 |
| 5.1 | Gerenciamento da Largura de Banda e a Quantização | 135 |
| 5.2 | Praticidade da Abordagem | 138 |
| 5.3 | Realimentação de Estados sob Quantização e Perda de Pacotes | 141 |
| 5.4 | Realimentação de Saída sob Quantização | 144 |
| 5.5 | Problemas Práticos | 148 |
| 6 | Considerações Finais | 151 |
| | Referências | 157 |

1 Introdução

Em muitas aplicações industriais os componentes de um sistema de controle, como sensores, atuadores e controladores estão distribuídos espacialmente pelo ambiente como, por exemplo, em uma refinaria de petróleo. Normalmente, os componentes do sistema de controle são conectados diretamente através de cabos de comunicação dedicados. No entanto, a tecnologia atual possibilita que a informação enviada e recebida pelos componentes do sistema seja processada digitalmente e desta forma transmitida via redes de comunicação com ou sem fio.

A rede de comunicação pode ter múltiplos propósitos e ser compartilhada por outros dispositivos, ou seja, ela pode ser utilizada por componentes que não fazem parte diretamente da malha de controle, além de apresentar capacidade de transmissão limitada. Essa mudança é motivada pelo alto custo financeiro que é gerado ao utilizar-se uma rede de comunicação dedicada para o sistema de controle. Também, existe uma maior dificuldade para introduzir novos componentes a uma malha de controle já existente, problema que pode ser facilmente revolido com o uso de redes de comunicação comum a todos os componentes da malha. Além disso, a evolução da tecnologia de sensoriamento e comunicação tem favorecido o uso da teoria de controle de sistemas em aplicações onde outrora era inviável (SCHENATO *et al.*, 2007; ZAMPIERI, 2008; NAIR *et al.*, 2007).

A utilização de redes de sensores/atuadores sem fio é ampla, compreendendo, por exemplo, sistemas de predição e alarme em tempo real para catástrofes naturais. Em sistemas de aquecimento, ventilação e condicionamento de ar em construções, o uso de redes sem fio pode diminuir sensivelmente o custo de instalação e operação, além de um aumento considerável na eficiência energética do edifício (KINTNER-MEYER, 2005; WARNEKE *et al.*, 2001). Os sistemas de controle su-

pervisório e aquisição de dados - SCADA¹ - fazem o uso, há um bom tempo, de redes de sensores, atuadores e controladores para supervisionar os diversos subsistemas que compõem a rede supervisória. Por exemplo, um sistema de distribuição de energia elétrica, onde os diversos componentes são espacialmente distribuídos. Outros exemplos que também utilizam sistemas supervisórios são as redes de distribuição de gás e água, de coleta de esgoto, da malha rodoferroviária entre outros sistemas de infraestrutura urbana.

Em razão do aumento do uso das redes de dispositivos micro-processados, como sensores e atuadores inteligentes junto com a troca de informações através do compartilhamento do mesmo meio de comunicação entre diversas malhas de controle, nota-se que pesquisadores das áreas de sistemas de controle e sistemas de comunicação têm direcionado esforços na união de conhecimentos dessas duas áreas de pesquisa que até então eram estudadas de forma distinta. Nota-se que na teoria de controle estuda-se a conexão de sistemas dinâmicos através de canais de comunicação ditos perfeitos, ou seja, supõem-se que não existem erros e/ou limitações nos meios de transmissão. Sendo que na teoria de comunicação estuda-se a transmissão de informação através de canais de comunicação reais, ou seja, canais ditos imperfeitos.

A comunicação sobre canais perfeitos considerada na teoria de controle é válida, geralmente, para aplicações em sistemas onde o canal é dedicado somente a uma malha de controle. Portanto, o uso de redes compartilhadas pode comprometer a teoria de análise de sistemas de controle via redes com a teoria existente. Desta forma, deve haver uma quebra de paradigma na teoria de controle existente, uma vez que essas abordagens metodológicas quando utilizadas para a análise da estabilidade de sistemas e para o projeto de controladores com a presença de comunicação via redes podem ser insatisfatórias. Assim, faz-se necessário considerar de forma explícita as implicações que as interconexões feitas por meio de redes de comunicação compartilhadas tem sobre a malha de controle. Uma vez que já é conhecido que as imperfeições na

¹ Do termo em inglês *Supervisory Control And Data Acquisition*.

comunicação afetam significativamente o comportamento dinâmico do sistema de controle, pode-se categorizar esse novo paradigma em três grande linhas de pesquisa (ZAMPIERI, 2008):

1. **Controle via rede** – tem como foco o projeto e a análise de sistemas de controle realimentado via canais de comunicação reais, ou seja, canais de comunicação sujeitos a erros e limitações.
2. **Controle da rede** – tem como objetivo providenciar um certo nível de desempenho para a rede quando um dado fluxo de informação transita pela rede, enquanto garante que o uso dos recursos da rede seja feita de forma justa e eficiente.
3. **Sistemas multiagentes** – aborda o estudo das interações entre os diversos componentes da rede e como eles influenciam o comportamento global do sistema, ou seja, como as leis de controle individuais dos subsistemas influenciam os objetivos de controle.

1.1 Sistemas de Controle via Rede

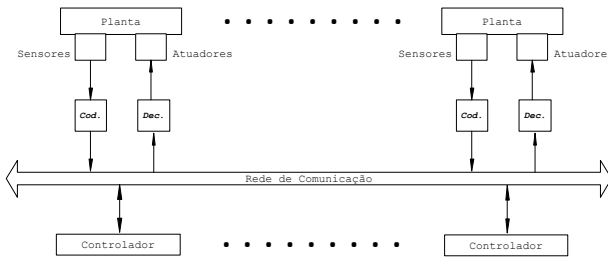
A principal motivação para o estudo de sistemas de controle via redes é o fato de que esta é uma das direções possíveis para a implementação prática de sistemas de controle de grande porte e complexidade (MURRAY et al., 2002). Essa afirmação se baseia nos seguintes fatos:

- O controle via rede apresenta diversas vantagens frente ao controle realimentado clássico, i.e. baixo custo; flexibilidade; redução de peso, do tamanho e da demanda de energia de sensores e atuadores; instalação e manutenção simplificada; confiabilidade; relativa facilidade de aplicação em sistemas de larga escala.
- Possibilidade de aplicação em várias áreas tais como sistemas que usam redes de sensoriamento móvel, automação de rodoferrrovias, veículos não tripulados e na própria Internet.

- O controle via rede exige um novo formalismo para garantir estabilidade, critérios de desempenho e robustez, uma vez que não é realístico ignorar as limitações existentes nas redes de comunicação e nos sistemas computacionais que compõem a malha de controle.

Segundo [Hespanha, Naghshtabrizi e Xu \(2007\)](#) o controle via rede, ou também referenciado pela sigla em inglês NCS (*Networked Control System*), compreende sistemas de controle espacialmente distribuídos onde a comunicação entre sensores, atuadores e controladores ocorre através de uma rede de múltiplo propósito e compartilhada. Normalmente, uma rede compartilhada possui limitações de velocidade de transmissão, do volume de informação enviada em cada transmissão e a possibilidade da informação não ser entregue ao destino em tempo hábil, entre outros efeitos. A arquitetura básica de um sistema de controle via rede é ilustrado na Fig. 1, onde Cod. e Dec. representam respectivamente Codificador e Decodificador.

Figura 1 – Arquitetura geral de controle via redes.



Fonte: ([HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007](#))

Como salientado anteriormente, os sistemas de controle via rede estão sujeitos a limitações devido a presença da rede de comunicação compartilhada e que normalmente não podem ser ignorados. Logo, faz-se necessário conhecer quais são essas limitações e quais são os seus efeitos sobre o comportamento do sistema de controle. A seguir,

listam-se os três efeitos comumente encontrados um sistema de controle via rede (HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007):

Capacidade de transmissão limitada e o efeito de quantização:

o meio físico utilizado para transmissão da informação tem a capacidade de transportar uma quantidade finita de informação por unidade de tempo, conhecida como largura de banda. O tamanho dessa quantidade de informação é denominado *pacote*, sendo que esse pacote de informações tem um tamanho finito, i.e., número finito de bits. Esse fenômeno é conhecido na área de NCS como quantização (GRAY; NEUHOFF, 1998). O efeito da quantização pode ser induzido pelo tamanho da palavra considerado em sensores, controladores e atuadores digitais, mas o meio de comunicação digital é o mais impactante na limitação do tamanho da informação a ser transmitida (número de bits).

Amostragem e Atraso: a transmissão de um sinal contínuo sobre uma rede digital compreende a amostragem do sinal, a codificação para forma digital, a transmissão através da rede e a decodificação no local receptor. Todo esse processamento de informação pode apresentar um retardo variável no tempo de propagação da informação, essa variação do tempo de entrega da informação depende de diversos fatores associados com as condições da rede no momento da transmissão. A presença desse atraso de transporte pode degradar significativamente o desempenho do sistema de controle e até mesmo levar a instabilidade do sistema de controle.

Perda da informação: quando uma informação é transmitida através de redes de comunicação compartilhadas pode ocorrer uma perda de pacote. Esta perda de informação pode ser devida a erros no meio físico da rede e congestionamento da rede. Além disso, pacotes de informação que são entregues com grande atraso são em geral descartados no destino, visto que as informações antigas não são de grande interesse ao sistema de controle.

1.2 Objetivos da Tese

A necessidade de um formalismo para análise e projeto de sistemas de controle via rede é o principal motivador deste trabalho. Inicialmente, foca-se na análise da estabilidade de sistemas de controle linear utilizando uma quantização estática logarítmica com um número finito de níveis de quantização afetando tanto o sinal de entrada como o de sinal de saída de um sistema de controle por realimentação dinâmica de saída. Em um segundo momento, estuda-se a extensão dessa mesma abordagem para uma classe de sistemas não lineares denominada sistemas não lineares quadráticos.

O segundo tópico de interesse é a análise da estabilidade e estabilização de sistemas de controle sujeitos a perda de informação, modelando o canal de comunicação com apagamento através de um processo de Bernoulli. Obtém-se resultados tanto para o caso de sistema lineares como também para o caso de sistemas não lineares quadráticos.

Por fim, estuda-se a aplicabilidade das metodologias propostas utilizando modelos de redes de comunicação mais próximos a realidade. Além disso, busca-se avaliar a aplicação de tais metodologias visando a obter uma estratégia de escalonamento de rede para um sistema de controle distribuído. Para tanto utilizam-se diferentes quantizadores que são pré-projetados para cada malha sendo assim possível alterar a largura de banda utilizada por cada malha de acordo com necessidade de cada aplicação para atender todas as aplicações da rede de forma satisfatória. Supõe-se, nessa abordagem que existe uma memória temporária na entrada dos elementos de controle para contornar possíveis atrasos induzidos pela rede e que sejam menores do que um período de amostragem. A informação transmitida com um atraso superior a um período de amostragem será descartada (isto é, perda de dados).

Na sequência deste capítulo será apresentado um breve resumo do estado da arte sobre os assuntos abordados nessa tese. Primeiramente, trata-se do problema da estabilidade de sistemas sob quantização. Posteriormente, aborda-se o estado da arte na estabilidade de

sistemas com perda de informação na rede. Continuando, o problema de gerenciamento da rede e/ou escalonamento da rede para aplicações de controle distribuídos é estudado, visando a aplicação prática dos resultados obtidos e apresentados nessa tese para sistemas de controle via rede.

1.3 Quantização em Sistemas de Controle

Na comunidade de controle, a quantização era inicialmente estudada no sentido de minimizar os erros de quantização em implementações digitais (CURRY, 1970; KALMAN, 1956; SLAUGHTER, 1964). Entretanto, atualmente, a quantização esta ligada à limitação da capacidade de transmissão de informação em sistema de controle via redes (NCS). Em aplicações práticas, torna-se necessário limitar de alguma forma a quantidade de informação pois o canal tem banda de transmissão limitada. Então, a seguinte questão pode ser formulada (NAIR et al., 2007): *Qual é a taxa de transferência mínima para qual um sistema dinâmico pode ser estabilizado?*

A taxa de transferência mínima que garanta a estabilização de um NCS é definida com base na teoria de Shannon (KULLBACK, 1968), que determina a taxa de transferência mínima na qual um dado processo tem uma comunicação confiável. No caso específico de sistemas NCS sujeitos a quantização, i.e., limitação da quantidade de informação, demonstrou-se que o número mínimo de níveis de quantização é explicitamente relacionado aos polos instáveis do sistema supondo que o canal de comunicação é livre de ruídos (NAIR; EVANS, 2003; TATIKONDA; MITTER, 2004).

Um dos primeiros trabalhos a tratar o problema de quantização em um paradigma similar a sistemas de controle linear via rede foi Delchamps (1990), onde demonstra-se que os estados de um sistema linear invariante no tempo estabilizado por um controle via realimentação de estados não convergem assintoticamente para à origem do sistema quando a informação dos estados é sujeita a um quantizador estático

e uniforme com níveis finitos. No entanto, dentro de certas condições, pode-se projetar uma lei de controle que leva a trajetória do sistema arbitrariamente próxima a origem do sistema. Nos últimos dez ou mais anos diversos autores abordaram o problema de estabilização de sistemas sujeitos a quantização no contexto de NCS como, por exemplo, as referências (WONG; BROCKETT, 1999), (NAIR; EVANS, 2000), (BAILLIEUL, 2002), (PICASSO; GOUAISBAUT; BICCHI, 2002) e (TATIKONDA; MITTER, 2004).

A estabilidade assintótica de um NCS só pode ser garantida com a utilização dos chamados quantizadores dinâmicos (com memória) através da estratégia conhecida na literatura como *zooming-in/zooming-out*. Veja, por exemplo, (BROCKETT; LIBERZON, 2000), (LIBERZON, 2003), (PETERSEN; SAVKIN, 2001) e (SHARON; LIBERZON, 2012). Essa estratégia ajusta dinamicamente a precisão do quantizador de acordo com a amplitude do sinal a ser quantizado. Em outras palavras, na fase *zooming-in*, a precisão é aumentada quando os estados do sistemas se aproximam do objetivo (i.e., um quantizador estático com ajuste fino), e na fase *zooming-out*, a precisão é diminuída quando os estados se distanciam do objetivo (i.e., quantizador estático de ajuste grosseiro). Portanto, o quantizador dinâmico é uma alternativa atrativa quando se deseja obter uma bom desempenho do sistema de controle mas utilizando um número reduzido de bits transmitidos (MONTESTRUQUE; ANTSAKLIS, 2005; LING; LEMMON, 2005; NAIR; EVANS, 2000). No entanto, a presença do quantizador dinâmico exige um mecanismo de codificação e decodificação na rede de comunicação, pois torna-se necessário calcular novas regiões de quantização e supervisionar constantemente a posição dos estados do sistema para saber qual o fator de *zooming* a ser utilizado.

Em contra-partida, a quantização estática, apesar de não garantir estabilidade assintótica, não necessita de um mecanismo especial a ser incorporado à rede de comunicação visto que o quantizador estático requer uma quantidade reduzida de processamento, em geral, apenas uma tabela é necessário. Entretanto, deve-se utilizar uma

quantidade maior de bits para se obter um desempenho satisfatório do NCS. Na busca de uma solução que contemple desempenho satisfatório, baixa complexidade e reduzido número de bits, algumas referências propuseram a utilização de um quantizador estático em conjunto com um método de ajuste dinâmico da densidade de quantização (BROCKETT; LIBERZON, 2000; FU; XIE, 2009; TATIKONDA; MITTER, 2004). Mas, nesse caso, deve-se implementar um modo de transmitir o fator de *zooming* do quantizador junto com a informação além de exigir uma certa inteligência dos elementos do sistema de controle.

Sabendo que um quantizador dinâmico é capaz de obter um desempenho satisfatório do NCS com um número reduzido de bits através da utilização de um ajuste mais fino próximo do equilíbrio e mais grosseiro distante do mesmo e buscando uma opção mais simples que o quantizador dinâmico para a relação desempenho/n. de bits, Elia e Mitter (2001), propuseram a utilização de um quantizador estático (sem memória) mas com quantização seguindo uma lei logarítmica (i.e., o número de níveis de quantização é linear na escala logarítmica). Utilizando um quantizador ideal, ou seja, com número de níveis ilimitado, mostra-se que o quantizador logarítmico é a solução ótima em termos da minimização da densidade de quantização quando se considera o conceito de estabilidade quadrática para um sistema SISO (*Single-Input/Single-Output*). Quando comparado a um quantizador uniforme com um determinado número de bits, um quantizador logarítmico é capaz de representar uma faixa de valores superior considerando o mesmo número de bits que um quantizador uniforme (RASOOL; HUANG; NGUANG, 2012).

Com a proposição da abordagem por setor no trabalho de Fu e Xie (2005), mostra-se que o quantizador logarítmico ideal pode ser modelado por uma condição de setor sem acrescentar nenhum conservadorismo quando considerando a noção de estabilidade quadrática. Utilizando a abordagem por setor, tornou-se possível analisar diversos problemas como, por exemplo, o problema de robustez para sistemas quantizados (FU; XIE, 2010), estimação de estados com medições

quantizadas (FU; DE SOUZA, 2009), análise de estabilidade local de sistemas de controle com quantizador estático com um número finito de níveis (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010), análise de estabilidade de sistemas não lineares quantizados (LIU; JIANG; HILL, 2012a).

A maioria das abordagens para análise de estabilidade de sistemas sujeitos a quantização pressupõe a presença de somente um quantizador na malha de realimentação (no canal de entrada ou no canal de saída da planta). Todavia, a informação (tanto do sinal de controle quanto de medição) em NCS é geralmente enviado pelo canal de comunicação com limitação de largura de banda e, portanto, torna-se natural considerar que os sinais de controle e de saída são quantizados. No entanto, até o presente momento, poucos trabalhos abordaram o problema de quantização nos canais de entrada e saída de sistemas NCS como, por exemplo, os trabalhos (ZHAI et al., 2005), (PICASSO; BICCHI, 2007), (COUTINHO; FU; DE SOUZA, 2010), (LIU et al., 2011), (RASOOL; HUANG; NGUANG, 2012) e (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2012).

Resumindo o cenário acima, pode-se categorizar os trabalhos disponíveis na literatura especializada em termos do tipo de quantizador utilizado: (i) estático ou dinâmico, e (ii) uniforme ou logarítmico. O quantizador estático é uma função não linear sem memória, enquanto o quantizador dinâmico é dito ter memória pois varia com o tempo. O quantizador dinâmico possui uma melhor relação desempenho/número de bits contudo é mais complexo que o estático e necessita de uma certa inteligência (codificador e decodificador) dos dispositivos do sistema de controle. O quantizador uniforme agrupa a mesma quantidade de valores reais em todos os seus níveis de quantização, enquanto o não uniforme possibilita o agrupamento uma quantidade diferente de valores reais em cada um dos seus níveis de quantização. Mais precisamente, um quantizador uniforme estático é associado com a representação de um número de ponto fixo, tendo um erro máximo praticamente constante independente de quão próximo do ponto de equilíbrio o valor real está. Por outro lado, o quantizador logarítmico estático (quantização

não uniforme) é associado com uma representação em ponto flutuante, o que permite que o erro máximo diminua de forma proporcional à aproximação ao ponto de equilíbrio.

Neste trabalho, considerar-se-á apenas quantizadores estáticos e logarítmicos. Assim, além da questão da complexidade de implementação desses quantizadores, deve-se tomar cuidado com questões mais práticas como desempenho transitório do sistema de controle e a presença de ruído de medição visto que grande parte dos resultados teóricos podem não ser aplicáveis na prática (FU; XIE, 2005; SAHAI, 2004).

A seguir, apresentam-se alguns conceitos e definições relacionados a quantizadores estáticos logarítmicos e a abordagem por setor que são importantes no contexto deste trabalho.

1.3.1 Quantizador Estático e Logarítmico

Seja $Q(\cdot)$ uma função que descreve um quantizador estático e que mapeia um conjunto de valores $\nu \in \mathbb{R}$ em um conjunto de níveis de quantização u_i , sendo que cada nível de quantização pertence ao seguinte conjunto:

$$\mathcal{U} = \{\pm u_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\},$$

Denotando N como o número de níveis de quantização no intervalo $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$, a densidade do quantizador é definida como:

$$\eta_Q = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N}{-\ln \varepsilon}. \quad (1.1)$$

Nota-se que a densidade de quantização cresce em escala logarítmica ao se aumentar o intervalo $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$, com ε uma constante arbitrária qualquer definindo o tamanho do intervalo. Portanto, uma densidade de quantização pequena corresponde a um quantizador de ajuste mais grosseiro. Além disso, um quantizador com um número finito de níveis tem $\eta_Q \rightarrow 0$ e um quantizador ideal tem $\eta_Q \rightarrow \infty$ (FU; XIE, 2005).

Um quantizador estático é dito ser logarítmico quando os níveis u_i seguem uma lei de construção logarítmica. Neste caso, o conjunto de níveis de quantização pode ser descrito na seguinte forma:

$$\mathcal{U} = \{\pm u_i : u_i = \rho^i u_0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad u_0 > 0.$$

Associado ao conjunto acima, pode-se definir a função de quantização $Q(\cdot)$ como segue:

$$Q(\nu) = \begin{cases} u_i & \frac{u_i}{1+\delta} < \nu \leq \frac{u_i}{1-\delta}, \\ & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{se } \nu = 0 \\ -Q(-\nu) & \nu < 0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

com

$$\delta = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \quad (1.3)$$

Nota-se que o quantizador é simétrico pois $Q(-\nu) = -Q(\nu)$ para um dado $\nu \in \mathbb{R}$.

A partir das relações nas Eq. (1.1) e Eq. (1.2), a densidade de um quantizador logarítmico é dada por (ELIA; MITTER, 2001):

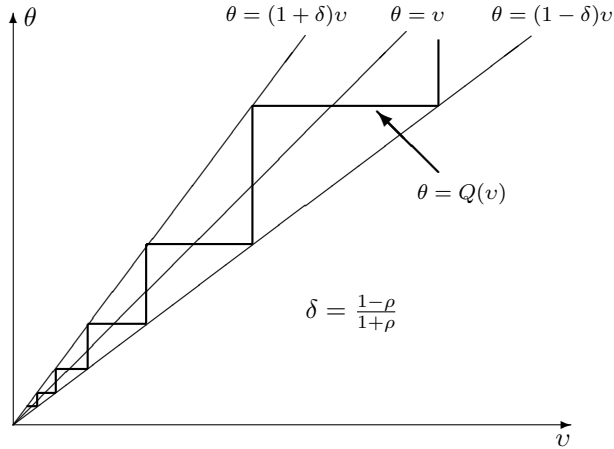
$$\eta_Q = \frac{2}{\ln(1/\rho)}. \quad (1.4)$$

Nota-se que η_Q é proporcional a ρ , pois $\rho \in (0, 1)$. Por essa razão, neste trabalho, ρ será denominado como a densidade de quantização de $Q(\cdot)$ ao invés de η_Q .

A relação entrada-saída de um quantizador logarítmico como definido na Eq. (1.2) é ilustrada na Fig. 2. Este quantizador possui um número infinito de níveis e, por esta razão, ele será frequentemente referido como quantizador logarítmico ideal.

Um resultado importante acerca de quantizadores logarítmicos foi proposto por Elia e Mitter (2001) para sistemas lineares, onde mostra-se que os polos instáveis do sistema com a densidade mínima do quantizador que garante a estabilidade quadrática do sistema de controle. Mais precisamente, para um sistema linear na forma $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, uma lei de controle $u(k) = Q(Kx(k))$ e uma função de

Figura 2 – Quantizador logarítmico com infinitos níveis de quantização.



Fonte: (FU; XIE, 2005)

Lyapunov quadrática $V(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$, a densidade de quantização mínima ρ_{inf} tal que

$$\Delta V(x) = V(Ax + BQ(Kx)) - V(x) < 0, \forall x \neq 0,$$

é dada por:

$$\rho_{\text{inf}} = \frac{\prod_i |\lambda_i^u| - 1}{\prod_i |\lambda_i^u| + 1}, \quad (1.5)$$

em que λ_i^u são os polos instáveis da matriz A do sistema.

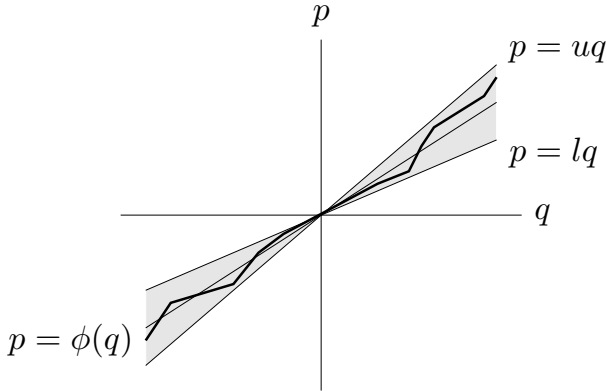
1.3.2 Condição de Setor para um Quantizador Logarítmico

A técnica de modelagem de uma não linearidade estática e ímpar através de uma condição de setor é muito utilizada no contexto de estabilidade absoluta e também para tratar localmente a saturação de atuadores (KHALIL, 2002), como também é utilizada para representar incertezas em sistemas dinâmicos (TARBOURIECH et al., 2011).

A seguir, apresenta-se de forma simplificada como utilizar uma condição de setor para representar uma função do tipo ímpar $\phi(\cdot)$. Seja

uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\phi(-q) = -\phi(q)$, pertencente ao setor $[l, u]$, isto é, $lq \leq \phi(q) \leq uq$, $\forall q \in \mathbb{R}$, como ilustrado na Fig. 3.

Figura 3 – Exemplo de uma função limitada por uma condição de setor.



Fonte: Elaborada pelo autor

A condição de setor ilustrada na Fig. 3 pode ser expressa matematicamente através de uma desigualdade quadrática na seguinte forma:

$$(p - uq)(p - lq) \leq 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}, \quad p = \phi(q).$$

Comparando a Fig. 2 com a Fig. 3, observa-se que o quantizador estático e logarítmico pode ser modelado matematicamente de forma precisa através de uma condição de setor, como foi provado por Fu e Xie (2005). Em particular, considerando a Eq. (1.2) e a Eq. (1.3), pode-se obter uma condição de setor em termos do parâmetro δ como apresentado a seguir:

$$[Q(\nu) - (1 - \delta)\nu][Q(\nu) - (1 + \delta)\nu] \leq 0.$$

Como demonstrado por Fu e Xie (2005) a condição de setor acima, em termos da noção de estabilidade quadrática, é uma condição de estabilidade necessária e suficiente para tratar sistemas de controle lineares sujeitos a um quantizador logarítmico ideal.

No Capítulo 2, apresentam-se os resultados obtidos sobre estabilidade e estabilização de sistemas de controle lineares via redes sob quantização logarítmica finita, sendo que a lei de controle é dada por uma realimentação dinâmica de saída. No entanto, ressalta-se que o caso de realimentação de estados pode ser visto com um caso particular do primeiro. No Capítulo 3, propõe-se extensão dos resultados apresentados no Capítulo 2 para sistemas não lineares quadráticos. Na sequência apresentam-se os resultados mais relevantes que motivaram e basearam a proposta para o tratamento da perda de informação.

1.4 A Perda de Informação em Sistemas de Controle

A perda da informação é um comportamento intrínseco a redes de comunicação, principalmente em redes sem fio. Uma momentânea perda de informação pode provocar, por exemplo, uma perda momentânea seja do sinal de controle para o atuador ou do sinal medido para a entrada do controlador afetando o desempenho do sistema de controle em malha fechada podendo em casos extremos levar a instabilidade do sistema de controle.

Um fato interessante salientado nas referências (SCHENATO et al., 2007) e (IMER; YÜKSEL; BAŞAR, 2006) é que o princípio da separação pode ser aplicado somente em redes que tenham o serviço de reconhecimento do recebimento de pacotes como, por exemplo, as redes que utilizam o protocolo de comunicação TCP. No caso de redes que não possuem esse serviço (redes do tipo UDP) o princípio da separação não pode ser aplicado. Caso não seja possível aplicar o princípio da separação, o projeto de controladores com o uso da teoria clássica pode torná-se bastante complexo. Sendo assim, uma solução viável para esse caso é modelar a perda de pacotes através de processos estocásticos que por sua vez podem ser reformulados como problemas de projeto de controle no contexto de sistemas sujeitos a ruídos multiplicativos, tornando possível obter uma solução através de um problema de otimização convexa (ELIA; EISENBEIS, 2004).

Uma das formas mais utilizadas e simples para modelar a perda de pacotes através de processos estocásticos é considerar que a perda de informação é representada por um processo binário de Bernoulli (SINOPOLI et al., 2004), (SCHENATO, 2006), (ELIA, 2005), (HU; YAN, 2007), (WANG et al., 2007) e (ELIA; EISENBEIS, 2011). Nessa abordagem, supõe-se que as perdas de pacotes consecutivas não tem correlação temporal entre elas, denominando-se de canais sem memória. Alguns autores utilizam o termo canal com apagamento² para caracterizar esse tipo de comportamento do canal de comunicação.

Um processo binário de Bernoulli consiste de uma variável independente e identicamente distribuída (ou i.i.d.³) podendo assumir somente dois valores: 0 ou 1. Assume-se que o sinal é perfeitamente transmitido ao receptor com uma dada probabilidade ou que a informação é completamente perdida. Os trabalhos que utilizam um processo de Bernoulli, em sua maioria, têm seu foco especificamente em canais digitais com apagamento simples⁴. Por exemplo, Tatikonda e Mitter (2004) demonstram que para um canal com apagamento, a taxa máxima de insucesso que mantém o sistema estável no sentido da média quadrática está diretamente relacionada aos polos instáveis da planta através da seguinte relação:

$$\beta^* < \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u(A)|^2}.$$

na qual β^* é a máxima taxa de perda de informação e $\lambda_i^u(A)$ são autovalores instáveis da matriz dinâmica A do modelo de estados do sistema.

Representar a perda de pacotes como um processo de Bernoulli é uma idealização para facilitar a análise matemática do problema. O roteamento e congestionamento da rede podem afetar a probabilidade de recebimento, sendo interessante estimar essa real probabilidade de perda de pacotes para que o projeto dos controladores seja menos conservador. No entanto, em alguns casos, considerar que a esperança matemática da taxa de perda seja conhecida é algo pouco prático como

² Do termo em inglês *Erasure Channel*

³ Do termo em inglês *independent and identically distributed*

⁴ Do termo em Inglês *Simple Digital Erasure Channel*

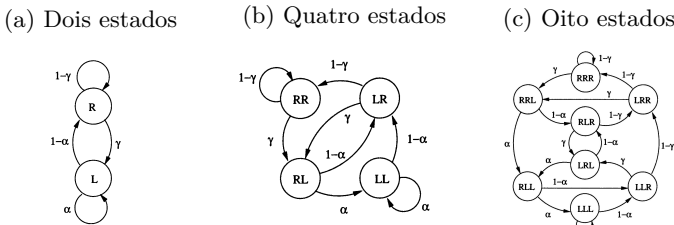
ênfatisado por [Hu e Yan \(2007\)](#). Em geral, a esperança matemática da perda de pacotes em um NCS é variante devido a complexidade da rede, i.e., congestionamento pode causar uma variação da taxa de perda. Desta forma, se o projeto do sistema de controle for baseado em uma dada esperança matemática da taxa de perda de informação, pode ocorrer que o sistema se torne instável ou que não se garanta um certo critério de desempenho com um valor de esperança diferente do utilizado no projeto. Entretanto, pode-se precisar qual é a máxima esperança matemática da perda de pacotes tal que seja garantida a estabilidade do sistema no sentido da média quadrática. Logo, pode-se utilizar de maneira conservadora esse limitante da taxa de perda para fazer o projeto do controlador.

Uma maneira mais geral de representar a perda de pacotes em uma rede é considerando uma cadeia de Markov, que pode ser mais adequada para representar a perda de pacotes do que a distribuição binária de Bernoulli pois é possível representar a correlação temporal entre perdas consecutivas ([SMITH; SEILER, 2003](#)). Portanto, quando se conhece a correlação temporal entre perdas de pacotes consecutivas, pode-se utilizar as cadeias de Markov (com dois ou mais estados) como proposto nas referências ([SMITH; SEILER, 2003](#)), ([HUANG; DEY, 2007](#)), ([HUANG; DEY, 2006](#)) e ([ZHANG; BOUKAS, 2009](#)). Uma vez que o sistema é invariante no tempo e a perda de pacotes é modelada por uma cadeia de Markov, pode-se utilizar as ferramentas de análise desenvolvidas para sistemas lineares com saltos Markovianos ([SEILER; SENGUPTA, 2001](#)). Por exemplo, no caso de estimação de estados, pode-se utilizar um estimador linear com saltos ao invés de considerar um filtro de Kalman variante no tempo que possui um custo computacional relativamente maior ([SMITH; SEILER, 2003](#)). Para mais detalhes sobre as propriedades dessa classe de sistemas o leitor pode se referir aos trabalhos ([MARITON, 1990](#)) e ([COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005](#)).

A modelagem por cadeia de Markov geralmente utiliza um cadeia com dois estados, como ilustrado Fig. 4a, no qual o estado \mathbf{R} repre-

senta o recebimento e **L** a perda da informação. Observa-se na Fig. 4a que a probabilidade de perda de pacote após uma recepção é dada por γ e a probabilidade de uma perda seguida de outra perda é dada por α , com $\alpha, \gamma \in [0, 1]$. Note que o efeito de um grande congestionamento na rede pode ser modelado com $\alpha > \gamma$. Redes que apresentam esse comportamento são denominadas de canais com atenuação ⁵ (FLETCHER; RANGAN; GOYAL, 2004). Para representar uma relação mais complexa entre as perdas, pode-se considerar cadeias de Markov com mais estados como, por exemplo, cadeias de Markov com quatro e oito estados. Veja, por exemplo, os diagramas de estado representados nas Fig. 4b e Fig. 4c.

Figura 4 – Cadeia de Markov para comunicação com perda de pacotes



Fonte: (SMITH; SEILER, 2003)

O processo de Bernoulli binário pode ser visto como um caso especial de uma sequência binária de Markov com $\alpha = \gamma$. Tanto na modelagem por uma distribuição de Bernoulli quanto em uma por cadeia de Markov, sabe-se que o número de perdas consecutivas pode ser elevado o que resulta em uma perda de desempenho e até mesmo a instabilidade do sistema. Uma possível solução para o problema de perda de pacotes pode ser obtida utilizando técnicas de detecção e tolerância a falhas (ZHANG et al., 2004; CHEN; XIAO; XU, 2006). Neste contexto, Xiong e Lam (2007) e Wu e Chen (2007) analisaram o problema de perda de pacotes limitada, considerando uma cadeia de Markov com o número de perdas consecutivas limitado.

Em contraste com modelos de perda de pacotes estocásticos, vários pesquisadores utilizam uma abordagem determinística conside-

⁵ Do termo em inglês *Fading Channels*

rando sistemas chaveados para representar uma perda de pacote como, por exemplo, a referência (YU et al., 2004) que emprega subsistemas com seqüência de chaveamento arbitrária e finita. Diversos pesquisadores têm utilizado a mesma ideia que, em sua maioria, derivam condições para se obter o número máximo para a taxa da perda de pacotes consecutivas que o sistema suporta sem apresentar instabilidade; veja, por exemplo, (SAVKIN; PETERSEN, 1997), (YUE; HAN; PENG, 2004), (NAGHSHTABRIZI; HESPANHA, 2005) e (DONKERS et al., 2011). Para maiores detalhes sobre as propriedades e resultados em estabilidade e estabilização de NCS com perda de pacotes utilizando modelos lineares chaveados, sugerem-se as referências (SUN; GE, 2005) e (LIN; ANTSAKLIS, 2009).

Uma variação da abordagem determinística por sistemas chaveados para tratar a perda de pacotes, considera um modelo híbrido sendo que o sistema com perda é representado por um sistema dinâmico assíncrono com restrições na taxa de mudança nos eventos (HASSIBI; BOYD; HOW, 1999). No modelo híbrido a dinâmica contínua é descrita por equações diferenciais (ou por equações a diferenças no caso de um sistema dinâmico em tempo discreto), enquanto que a dinâmica discreta é descrita por um autômato de tamanho finito, governado assincronamente por eventos discretos externos com variações pré definidas. Diversas outras referências seguem essa mesma linha de trabalho como, por exemplo, (ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001), (RABELLO; BHAYA, 2003), (ZHANG; YU, 2007), (XU; HESPANHA, 2005) e (SUN; QIN, 2011).

Podem-se citar diversas outras referências que abordam o problema de perda de pacotes e que não podem ser propriamente incluídos nas linhas de trabalho acima detalhadas. Por exemplo, Seuret et al. (2006) propõem modelar a perda através de atrasos na entrega da informação. Uma visão mais abrangente sobre estabilidade e estabilização de sistemas sujeitos a perda de pacotes pode ser encontrada nos trabalhos tutoriais de Schenato et al. (2007) e Zampieri (2008).

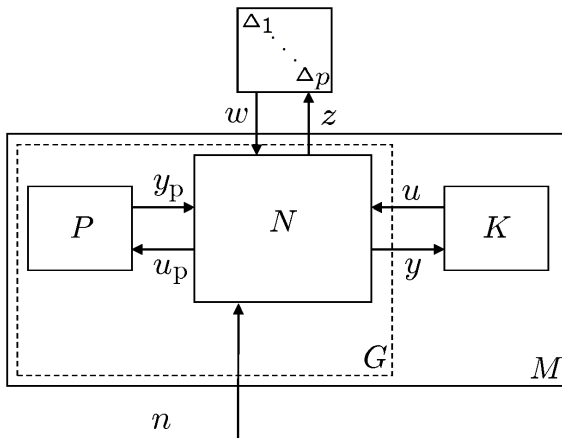
A seguir, apresenta-se o modelo mais geral de canal de comunicação com atenuação como proposto em (ELIA, 2005) que será instrumental na apresentação dos resultados de estabilidade de sistemas de controle via rede com apagamento.

1.4.1 Modelo de um Canal de Comunicação com Apagamento

O conceito de uma rede com canal de comunicação com apagamento foi introduzida por Elia e Eisenbeis (2004). Essa configuração possibilita o tratamento unificado de vários problemas em NCS que aparentam ser diferentes. A ideia básica é descrever o controle via rede como um sistema realimentado entre uma variável estocástica e um sistema LTI determinístico (denominado na referência por *LTI Mean Network*), assim possibilitando o uso de técnicas padrões para sistemas LTI.

A Fig. 5 ilustra a estrutura geral de uma rede com canal sujeito a atenuação que consiste na interconexão entre um bloco determinístico M (planta P , controlador K e rede N) e as variáveis estocásticas n e Δ .

Figura 5 – Estrutura geral de uma rede com atenuação.



Fonte: (ELIA, 2005)

Definição 1.1 (Elia e Eisenbeis (2011)). *Uma rede com atenuação é composta de duas partes: (i) uma rede média N , e (ii) uma perturbação estocástica Δ .*

Um rede média N é um sistema LTI em tempo discreto com dimensão finita que mapeia

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ y_p \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z \\ u_p \\ y \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} w \\ u \\ y_p \\ n \end{bmatrix},$$

em que y_p é saída da planta, u_p é a entradas da planta, y é a entrada do controlador, u é a saída do controlador e n é um ruído branco externo independente de Δ . Os sinais $w \in \mathbb{R}^p$ e $z \in \mathbb{R}^p$ são variáveis de entrada e saída internas que fazem a conexão de N com Δ , i.e., mapeando $z \rightarrow w$.

A variável estocástica Δ , age como um operador multiplicativo em z para resultar em w , i.e., $w_i(k) = \Delta_i(k)z(k)$ para $i = 1, \dots, p$ e $\forall k \geq 0$, com os elementos $\Delta_i(k)$ independentes (não necessariamente igualmente distribuídos) em i para um k fixo e distribuído independentemente e igualitariamente em k para qualquer $i = 1, \dots, p$, com média nula e variância menor que σ^2 , i.e.:

$$\mathbb{E}\{\Delta_i(k)\} = 0, \quad \text{e} \quad \mathbb{E}\{\Delta_i(k)^2\} \leq \sigma^2 \quad \forall k \geq 0,$$

na qual $\mathbb{E}\{\cdot\}$ representa o operador esperança matemática.

No Capítulo 4, apresentam-se os resultados obtidos sobre análise de estabilidade e estabilização de um sistema de controle não linear quadrático via rede sujeito a perdas de informação conforme a Definição 1.1. O canal de comunicação considerado é conhecido por canal com apagamento, sendo tal canal modelado por uma distribuição binária de Bernoulli. Também demonstra-se que esse resultado particularizado para sistemas lineares é equivalente ao dual de um resultado bem conhecido na literatura. Nesse capítulo, considera-se apenas uma lei de controle por um realimentação de estados. Na seção a seguir

apresentam-se conceitos que motivaram o estudo da alocação de recursos da rede via variação do número de níveis utilizados na quantização.

1.5 Alocação de Recursos da Rede para Controle de Sistemas Distribuídos

Sistemas embarcados tem evoluído no sentido, geralmente, de uma maior distribuição dos dispositivos que compõem o sistema, motivando avanços na escalabilidade, facilidade de manutenção, modularidade e requisitos de custo, além de outros fatores (ÅRZÉN; CERVIN; HENRIKSSON, 2005). Como resultado, um crescente montante de informação é trocada entre os nós do sistema de comunicação, assim aumentando a pressão sobre o planejamento/escalonamento da rede que garanta interações dos dispositivos em tempo hábil. Isto é particularmente relevante para aplicações de controle distribuído, uma vez que atrasos de rede são indesejados e podem causar a instabilidade. Assim, a abordagem de projeto mais clássica para esses sistemas considera os requisitos do pior caso em termos de quantidade de informação e frequência de comunicação para um determinado subsistema ou nó da rede, i.e., as tarefas de controle acontecem entre períodos constantes de tempo e sempre produzindo a mesma quantidade de informação. Infelizmente, essa abordagem não promove um uso eficiente dos recursos do sistema, particularmente o uso da largura de banda disponível, levando a projetos ineficientes.

A eficiência no uso da largura de banda em controle de sistemas distribuídos tem sido aperfeiçoada usando abordagens flexíveis que consideram requisitos médios e tomando medidas adequadas quando ocasionalmente sobrecargas ocorrem durante o tempo de execução. Um exemplo dessa técnica de adaptação dinâmica da taxa para a troca de informação, i.e., período de amostragem do sistema de controle, é apresentada em (ANTUNES et al., 2006) onde a taxa de comunicação entre laços de controle distribuídos se adapta de acordo com a largura de banda e de processamento disponíveis na rede. Isso opõe-se às condi-

ções de sobrecarga da rede através da redução a taxa de transmissão nos laços de controle ao custo de uma possível degradação no desempenho do controle.

O ajuste da taxa de amostragem sobre condições de sobrecarga da rede tem sido estudados há um bom tempo. Considerando o uso de um único processador, os trabalhos (EKER; HAGANDER; ÁRZÉN, 2000; CERVIN, 2003; HENRIKSSON; CERVIN, 2005) fazem o escalonamento dos laços de realimentação utilizando controladores LQ para garantir a performance de controle enquanto mantem a escalonabilidade pré definida. No mesmo âmbito, Colom (2003) e Buttazzo et al. (2004) especificam diferentes conjuntos de intervalos de amostragem e tempos de atraso para as malhas de controle, e com isso projetam um controlador PID para cada caso. Durante a sua execução, o escalonador de tarefas determina a sintonia de um controlador PID de maneira a garantir a escalonabilidade do conjunto de tarefas a serem executadas mantendo certo nível de desempenho para cada malha de controle.

Em (MARTÍ et al., 2004) apresenta-se um sistema de controle via rede seguindo uma abordagem similar à apresentada em (COLOM, 2003) que utiliza uma técnica de comutação de controladores que são escolhidos de acordo com o atraso presente entre o tempo de amostragem e o instante de atuação em um dado instante de tempo. Em (VELASCO et al., 2004), utiliza-se uma representação no espaço de estados aumentado para descrever a dinâmica do sistema de controle e da rede. A adaptação das taxas utilizadas nas malhas de controle é feita localmente evitando condições de sobrecarga. Similarmente, o trabalho de (ANTUNES; PEDREIRAS; MOTA, 2005) trata de condições de sobrecarga em sistemas de controle distribuídos onde as malhas de controle adaptam seus períodos de amostragem de acordo com as condições da rede em cada instante. O chamado gerenciamento centralizado é proposto em (ANTUNES et al., 2006) visando uma adaptação dos períodos de amostragem das mensagens de controle de forma centralizada.

Observa-se nas técnicas de escalonamento acima que a taxa de amostragem é variante no tempo. Uma outra forma de abordar o problema gerenciamento da rede de comunicação em tempo de execução para controlar é utilizar a largura de banda através da mudança no tamanho da mensagem enviada, ou seja, alterando a quantização utilizada nos laços de controle. No entanto, essa abordagem não tem sido explorada no contexto de gerenciamento dinâmico da utilização da largura de banda em sistemas de controle distribuídos, com exceção de (LIU; XU, 2010) que propõe a minimização dos bits de informação a serem enviados a cada ciclo de controle satisfazendo os requisitos de desempenho do sistema de controle. Entretanto, não é discutido como essa quantização deve ser feita. Em (HU; YUE, 2012) trata-se da minimização do uso dos recursos de comunicação através de um projeto de controle acionado por eventos para um sistema sob quantização, onde essa quantização é definida como sendo logarítmica. Utilizando o conceito de estabilidade entrada-estado (Input to State Stability – ISS) o trabalho de (NESIC; LIBERZON, 2009) combina a quantização dinâmica e escalonamento temporal para as mensagens enviadas.

Os sistemas de controle modernos são integrados por múltiplas malhas de realimentação independentes que necessitam de garantias de largura de banda em um dado instante de operação. Entretanto, planejar o sistema de controle distribuído considerando os requisitos no pior caso leva, muitas vezes, a um projeto ineficiente e caro. Isso motivou o desenvolvimento da chamada adaptação dinâmica da taxa de transmissão, como uma técnica para melhora da interação entre tais sistemas provendo um uso eficiente da largura banda disponível na rede.

A grande maioria dos trabalhos sobre este tópico utiliza a adaptação da taxa de amostragem para gerenciar a largura de banda, desprezando que uma adaptação semelhante poderia potencialmente ser conseguida através do uso de quantizadores finitos o que também alteraria o tamanho das variáveis de amostragem e de controle a serem transmitidas. Por outro lado, a maior parte dos estudos sobre quantização não considera a qualidade do serviço de rede ou a adaptação

da largura de banda mas somente o impacto gerado na estabilidade do sistema pelo erro de quantização. Isso motiva o início do estudo sobre alocação de recursos da rede utilizando quantização.

No Capítulo 5, descreve-se uma metodologia para a possível aplicação dos resultados obtidos na estabilização de sistemas sob quantização no escalonamento de redes de controle distribuídas. Estuda-se a vantagem de utilizar quantizadores com alocação dinâmica do número de bits de maneira a disponibilizar largura de banda adicional para outras aplicações quando necessário. Em outras palavras, uma malha de controle que necessita enviar uma mensagem que demanda um grande número bits pode, momentaneamente, utilizar um quantizador com um número reduzido de bits, assim liberando banda para outras aplicações.

2 Sistemas Lineares Quantizados

A abordagem apresentada neste capítulo para tratar o problema de análise de estabilidade de sistemas de controle lineares sujeitos a quantização finita nos canais de entrada e saída se baseia em dois resultados anteriores propostos por Coutinho, Fu e de Souza (2010) e de Souza, Coutinho e Fu (2010). Por este motivo, apresenta-se inicialmente uma revisão desses trabalhos para uma melhor compreensão por parte do leitor.

No trabalho de Coutinho, Fu e de Souza (2010), a abordagem por setor para sistemas quantizados é estendida para tratar o problema de quantização dos canais de entrada e saída para sistemas lineares SISO em tempo discreto. Basicamente, nesse trabalho, utiliza-se uma representação na forma LFT (*Linear Fractional Transformation*) e uma condição de setor multivariável. Em particular, aborda-se o problema de estabilidade e projeto de controle por realimentação de saída considerando quantizadores logarítmicos ideais. Por fim, demonstra-se nesse trabalho que, através da modelagem por condição setor dos quantizadores logarítmicos ideais, o problema de sistema de controle sob quantização logarítmica pode ser tratado como um problema de controle robusto na qual as incertezas pertencem a uma condição de setor multivariável. Nesse trabalho, demonstra-se que o resultado não é conservador em termos da noção de estabilidade quadrática, pois o resultado obtido se baseia em uma condição necessária e suficiente.

Apesar das propriedades de um quantizador ideal facilitarem a análise de estabilidade de sistema quantizados, os resultados obtidos pela abordagem por setor não podem ser aplicados na prática pois seria necessário um número infinito de níveis de quantização. Na prática, onde os canais de comunicação tem uma largura de banda finita, pode-se limitar a amplitude máxima (maior nível de quantização) do

quantizador e truncar os níveis de quantização próximos à origem (valores próximos a zero são considerados zero). Desta forma o quantizador passará a ter um número finito de níveis. Visando a manutenção da baixa complexidade de quantizadores logarítmicos, [de Souza, Coutinho e Fu \(2010\)](#) propuseram a utilização de quantizadores estáticos com um número finito de níveis de quantização. No entanto, nesse caso, o NCS não será assintoticamente estável por causa do o truncamento feito nas proximidades da da origem. Nesse cenário, os valores próximos a origem são zero e o sistema de controle opera em malha aberta, assim não é possível garantir a convergência assintótica para a origem. Contudo, pode-se garantir que a trajetória do sistema convergirá para uma região próxima à origem (ponto de equilíbrio do sistema), sendo que o tamanho do atrator dependerá do número de níveis do quantizador.

Mais precisamente, em [\(DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010\)](#), considerou-se a existência de um único quantizador na malha de controle (sinal de atuação ou medição) tanto nos casos de realimentação de estados quanto de saída. Supondo que o controlador e o quantizador sejam *a priori* conhecidos, estima-se, utilizando condições na forma de desigualdades matriciais lineares ou LMIs do inglês *Linear Matrix Inequalities*, um conjunto de condições iniciais admissíveis e um conjunto atrator na vizinhança da origem tal que todas as trajetórias dos estados iniciando no primeiro conjunto irão convergir, em um tempo finito, para o atrator e ali permanecerão. Tal conceito de estabilidade é conhecido como estabilidade prática. Quando, o controlador e os conjuntos de condições iniciais e atrator são conhecidos, um problema de otimização é proposto para projetar um quantizador que assegure a estabilidade do sistema dentro do conceito da estabilidade prática. Nesse trabalho, através de um problema de otimização convexo também são propostas condições de projeto do quantizador que minimiza o número de níveis (ou de forma equivalente o número de bits).

Todavia, os componentes de um NCS podem trocar informações (sinal de controle e medição) através da utilização do mesmo canal de comunicação. Do trabalho de [Coutinho, Fu e de Souza \(2010\)](#)

conclui-se que quando a condição de estabilidade torna-se multivariável há um aumento na complexidade da análise da estabilidade prática de sistemas com quantização logarítmica finita nos canais de entrada e saída. Pode-se dizer que a primeira contribuição deste trabalho, em (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2012) e (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2015), foi na direção de propor uma solução para o problema de análise de estabilidade de sistemas de controle sujeitos a quantização finita nos canais de entrada e saída. Como mencionado anteriormente, a presença de dois quantizadores torna o problema de análise de estabilidade mais complexo comparado aos resultados propostos em (ELIA; MITTER, 2001) e (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010).

Na sequência é feita uma revisão sobre os trabalhos acima referenciados, além da proposição do resultado de análise de estabilidade para sistemas lineares SISO em tempo discreto sujeitos a quantização finita nos canais de entrada e saída.

2.1 Estabilidade com Quantizadores Logarítmicos Ideais

Considere o sistema realimentado sob quantização ilustrado na Fig. 6, representado pelo seguinte modelo em espaço de estados:

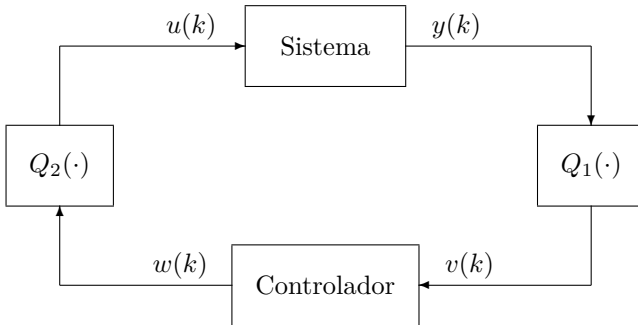
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}, \quad (2.1)$$

no qual $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema, e A , B , e C são matrizes dadas com dimensões apropriadas. Associado ao sistema acima, considere o seguinte controlador dinâmico:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = A_c \xi(k) + B_c v(k) \\ w(k) = C_c \xi(k) \end{cases}, \quad (2.2)$$

no qual $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ é o estado do controlador, $v \in \mathbb{R}$ é a entrada do controlador, $w \in \mathbb{R}$ é a saída do controlador, e A_c , B_c e C_c são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Figura 6 – Sistema de controle realimentado com quantização de entrada e saída.



Fonte: Elaborada pelo autor

O sistema e o controlador são conectados através de quantizadores como ilustrado na Fig. 6, sendo que os quantizadores, neste momento, são supostos ideais de acordo com a seguinte lei construtiva:

$$Q_i(v) = \begin{cases} \rho_i^j \mu_i, & \text{se } \frac{\rho_i^j \mu_i}{(1+\delta_i)} < v \leq \frac{\rho_i^j \mu_i}{(1-\delta_i)}, \\ & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{se } v = 0 \\ -Q_i(-v), & \text{se } v < 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

em que $0 < \rho_i < 1$ é a densidade de quantização do quantizador $Q_i(\cdot)$, μ_i é um parâmetro de escalonamento e $\delta_i = (1 - \rho_i)/(1 + \rho_i)$.

Fu e Xie (2005) ao aplicar uma condição de setor como apresentado na Seção 1.3.2, propuseram as seguintes formas de acoplamento sistema-controlador:

Configuração I O sinal de saída do sistema sofre quantização, i.e., $v(k) = Q_1(y(k))$, mas o sinal de controle não é quantizado, i.e., $u(k) = w(k)$.

Configuração II O sinal de saída do sistema não é quantizado, i.e., $v(k) = y(k)$, mas o sinal de saída do controlador sofre quantização, i.e., $u(k) = Q_2(w(k))$.

A seguir, apresenta-se o resultado de estabilidade no contexto acima.

Teorema 2.1 ((FU; XIE, 2005)). *Considere o sistema definido em Eq. (2.1) com um quantizador seja na Configuração I ou II. Para uma dada densidade de quantização ρ , o sistema em malha fechada é quadraticamente estabilizável pelo controlador Eq. (2.2), se e somente se o seguinte sistema auxiliar*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \\ v(k) = (1 + \Delta)Cx(k) \end{cases},$$

para a Configuração I, ou

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B(1 + \Delta)w(k) \\ v(k) = Cx(k) \end{cases},$$

para a Configuração II, for quadraticamente estabilizável pelo controlador definido pela Eq. (2.2) para todo Δ satisfazendo $|\Delta| \leq \delta$, com $\delta = (1 - \rho)/(1 + \rho)$. Em ambas as configurações o maior setor admissível δ_{sup} (ou de forma equivalente a menor densidade de quantização admissível ρ_{inf}), é dado por

$$\delta_{\text{sup}} = \frac{1}{\inf_{\mathcal{K}} \|\bar{G}(z)\|_{\infty}},$$

com $\mathcal{K} = (A_c, B_c, D_c)$ e

$$\bar{G}(z) = \frac{G(z)H(z)}{1 - G(z)H(z)},$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B, \quad H(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c. \quad \square$$

O resultado acima estabelece que a abordagem por setor não é conservadora para tratar o problema de estabilização de sistemas lineares sujeitos a um único quantizador logarítmico ideal, além de possibilitar uma forma alternativa para caracterizar a densidade de quantização mínima que garante a estabilidade quadrática do sistema de controle que é mais apropriada para ser tratada numericamente do que a condição na Eq. (1.5) proposta por [Elia e Mitter \(2001\)](#).

A seguir, apresenta-se o resultado proposto por Coutinho, Fu e de Souza (2010) para tratar o caso no qual os canais de entrada e saída são quantizados, considerando dois quantizadores logarítmicos ideais distintos $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$. Em outras palavras, o sistema da Eq. (2.1) e o controlador na Eq. (2.2) são conectados pelas seguintes relações:

$$v(k) = Q_1(y(k)), \quad u(k) = Q_2(w(k)). \quad (2.4)$$

Teorema 2.2 ((COUTINHO; FU; DE SOUZA, 2010)). *O sistema realimentado Eq. (2.1)-Eq. (2.4), no qual $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ são quantizadores logarítmicos ideais com densidades de quantização ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, é quadraticamente estável se e somente existir uma matriz $P > 0$ tal que:*

$$\bar{A}(\Delta_1, \Delta_2)' P \bar{A}(\Delta_1, \Delta_2) - P < 0, \quad \forall \Delta_1, \Delta_2 : |\Delta_1| \leq \delta_1, |\Delta_2| \leq \delta_2,$$

com $\delta_i = (1 - \rho_i)/(1 + \rho_i)$, $i = 1, 2$, e

$$\bar{A}(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{bmatrix} A & B(1 + \Delta_2)C_c \\ B_c(1 + \Delta_1)C & A_c \end{bmatrix}. \quad \square$$

O Teorema 2.2 estabelece que o problema de estabilização quadrática para sistemas realimentados com quantização logarítmica ideal na entrada e na saída pode ser transformado, sem conservadorismo, em um problema de controle robusto. Especificamente, o sistema da Eq. (2.1) é quadraticamente estabilizável através de um controlador de realimentação de saída Eq. (2.2) satisfazendo a relação de interconexão da Eq. (2.4) se e somente se o seguinte sistema com incertezas:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B(1 + \Delta_2)w(k) \\ v(k) = (1 + \Delta_1)Cx(k) \end{cases},$$

no qual Δ_1 e Δ_2 são parâmetros incertos tais que $|\Delta_i| \leq \delta_i$, $i = 1, 2$, for quadraticamente estabilizável através do controlador da Eq. (2.2). Note que as densidades de quantização dos quantizadores ideais devem ser conhecidas *a priori*.

Em outras palavras, o resultado do Teorema 2.2 na análise da estabilidade quadrática de um sistema incerto tal qual $\bar{x}(k+1) =$

$\bar{A}(\Delta_1, \Delta_2)\bar{x}(k)$ com os parâmetros de incerteza Δ_1 e Δ_2 satisfazendo $|\Delta_i| \leq \delta_i$, $i = 1, 2$ não é conservador. Ou seja, a condição de setor

$$[Q_i(v) - (1 - \delta_i)v][Q_i(v) - (1 + \delta_i)v] \leq 0, \quad i = 1, 2,$$

representa com precisão a função não linear $Q_i(v)$ considerando a noção de estabilidade quadrática.

2.2 Estabilidade para um Único Quantizador Logarítmico Finito

de Souza, Coutinho e Fu (2010) propuseram condições baseadas em LMIs para analisar a estabilidade de um sistema sujeito a quantização considerando que apenas um dos canais da realimentação é quantizado supondo um quantizador estático e logarítmico com número finitos de níveis de quantização. Nesse trabalho, condições em termos de LMIs foram propostas garantindo que a trajetória dos estados do sistema convirja, em um tempo finito, para uma pequena vizinhança da origem do sistema. Essas condições foram obtidas utilizando uma condição de setor e a noção de estabilidade a ser definida a seguir, considerando a conexão sistema-controlador da Configuração I, i.e. $v(k) = Q_1(y(k))$ e $u(k) = w(k)$, ou da Configuração II, i.e. $v(k) = y(k)$ e $u(k) = Q_2(w(k))$.

Os níveis de quantização de Q_1 e Q_2 são definidos pelo seguinte conjunto finito:

$$Q_i = \{\pm m_{i,j} : m_{i,j} = \rho_i^j \mu_i, j = 0, 1, 2, \dots, N_i - 1\} \cup \{0\},$$

$$\rho_i \in (0, 1), \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

sendo N_i o número de níveis não negativos de quantização, μ_i o maior nível admissível de quantização (i.e., o valor de saturação do quantizador), e ρ_i a densidade de quantização.

Um quantizador logarítmico que implementa o alfabeto finito acima é ilustrado na Fig. 7, sendo a lei de construção definida da se-

guinte forma:

$$Q_i(v) = \begin{cases} \mu_i, & \text{se } v > \frac{\mu_i}{(1-\delta_i)}, \\ \rho_i^j \mu_i, & \text{se } \frac{\rho_i^j \mu_i}{(1+\delta_i)} < v \leq \frac{\rho_i^{j+1} \mu_i}{(1-\delta_i)}, \\ & j = 0, 1, \dots, N_i - 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq v \leq \epsilon_i \\ -Q_i(-v), & \text{se } v < 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

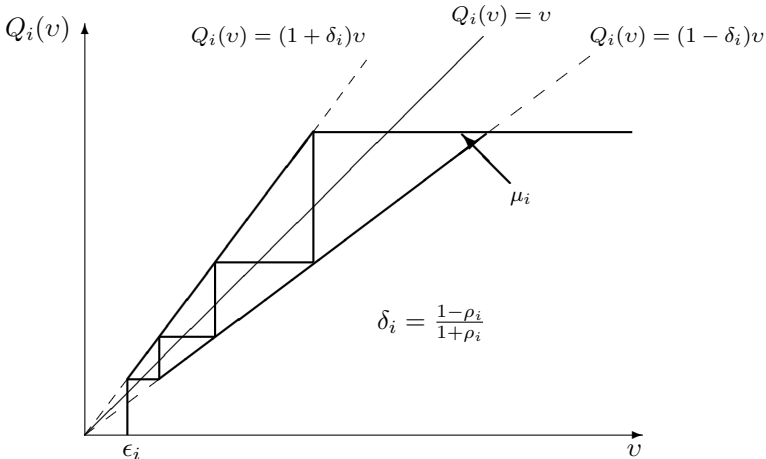
com

$$\delta_i = \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i}, \quad \epsilon_i = \frac{\rho_i^{N_i-1} \mu_i}{(1 + \delta_i)}, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Tendo em vista a definição acima, o número total de níveis do quantizador $Q_i(\cdot)$ é dado por $2N_i + 1$, com

$$N_i = 1 + \log_{\rho_i}(\epsilon_i(1 + \delta_i)/\mu_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Figura 7 – Quantizador logarítmico com finitos níveis de quantização.



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora considere o seguinte o modelo de estados aumentado que representa o sistema da Eq. (2.1) com o controlador da Eq. (2.2) e somente com a presença de um único quantizador $Q_i(\cdot)$ para $i = 1$ ou $i = 2$:

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_i \zeta(k) + B_i Q_i(r(k)) \\ r(k) = C_i \zeta(k) \end{cases}, \quad (2.9)$$

sendo $\zeta \in \mathbb{R}^{n_c}$ o estado do sistema auxiliar, $Q_i(\cdot)$ a função de quantização definida em Eq. (2.6) e o índice i é determinado de acordo com a configuração de realimentação utilizada. Mais especificamente, $i = 1$ se refere à Configuração I e $i = 2$ se refere à Configuração II. Com algumas manipulações algébricas, chega-se a seguinte representação:

$$\zeta = [x' \ \xi']', \quad n_i = n + n_c, \quad i = 1, 2,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_c \end{bmatrix}.$$

Para caracterizar a estabilidade do sistema em malha fechada da Eq. (2.9) com o quantizador logarítmico da Eq. (2.6), considere os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{B} =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_i} : |C_i \zeta| \leq \mu(1 - \delta)^{-1}\}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{C} =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_i} : |C_i \zeta| \leq \epsilon\}, \quad (2.11)$$

para $i = 1, 2$ dependendo da configuração de realimentação considerada, sendo δ , ϵ e μ parâmetros do quantizador na Eq. (2.6).

Os conjuntos \mathcal{B} e \mathcal{C} definem respectivamente o maior e menor níveis de quantização. Esses conjuntos não são limitados ao longo das direções dos vetores de uma base ortogonal ao espaço nulo de C_i , contudo são limitados por dois hiperplanos ortogonais a C'_i e simétricos em relação à origem (ver Fig. 8). A distância entre esses hiperplanos é de $2\mu_i/(1 - \delta_i)\sqrt{C_i C'_i}$ para o conjunto \mathcal{B} e de $2\epsilon_i/\sqrt{C_i C'_i}$ para o conjunto \mathcal{C} . Se o estado do sistema da Eq. (2.9) pertencer ao conjunto \mathcal{C} , então $Q_i(C_i \zeta) = 0$ e portanto o sinal de entrada no próximo instante de tempo será zero. Assim, geralmente, a trajetória dos estados ζ não irá convergir para

a origem, logo a estabilidade quadrática não é assegurada.
(DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010)

Para contornar essa situação e motivado pela noção de estabilidade prática usada por Elia e Mitter (2001), de Souza, Coutinho e Fu (2010) propuseram uma condição de estabilidade quadrática no sentido amplo (do termo original *wide quadratic stability*), para caracterizar que a trajetória do sistema converge para uma região na vizinhança da origem. As condições que definem a estabilidade quadrática no sentido amplo são dadas por duas funções quadráticas como definidas a seguir:

$$V(\zeta) = \zeta' P \zeta, \quad V_a(\zeta) = \zeta' P_a \zeta, \quad P_a > P > 0, \quad (2.12)$$

com ζ sendo definido na Eq. (2.10).

A partir das funções acima são definidos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{D} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : V(\zeta) \leq 1\}, \quad (2.13)$$

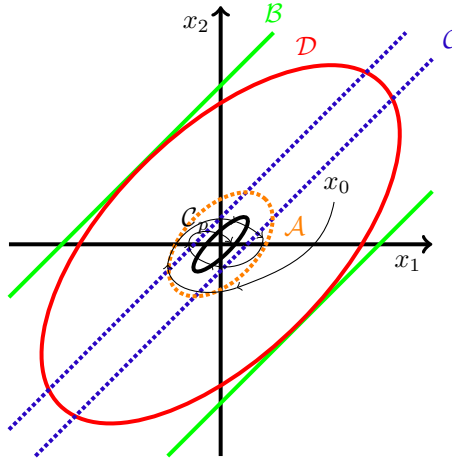
$$\mathcal{A} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : V_a(\zeta) \leq 1\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{C}_p = \{\zeta \in \mathcal{C} : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \quad (2.15)$$

com a notação $Dg(\zeta(k))$ significando a variação em tempo discreto para uma função real $g(\cdot)$, i.e., $Dg(\zeta(k)) := g(\zeta(k+1)) - g(\zeta(k))$. Como será demonstrado a seguir, \mathcal{D} define um conjunto de condições iniciais para os quais a trajetória dos estados convergirá para o conjunto \mathcal{A} , denominando de conjunto atrator. \mathcal{C}_p representa o conjunto que engloba as trajetórias do sistema operando em malha aberta (i.e., $Q_i(\cdot) = 0$, $i = 1, 2$). Em particular, se a planta for instável em malha aberta, então a trajetória dos estados diverge da origem para $\zeta(k) \in \mathcal{C}_p$, como ilustrado na Fig. 8, mas permanece confinada à região \mathcal{A} .

Antes de apresentar a noção de estabilidade quadrática no sentido amplo como proposta em (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010), considere para dois conjunto \mathcal{F} e \mathcal{G} , com $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, a notação $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ que significa \mathcal{F} excluindo \mathcal{G} .

Definição 2.1. *Considere o sistema em malha fechada da Eq. (2.9) com uma realimentação de saída na Configuração I ou II. Este sis-*

Figura 8 – Representação dos conjuntos \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{A} e \mathcal{C}_p .

Fonte: Elaborada pelo autor

tema é quadraticamente estável no sentido amplo, se existirem funções quadráticas $V(\zeta)$ e $V_a(\zeta)$, como em Eq. (2.12), tais que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}, \quad (2.16)$$

$$DV(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}, \quad (2.17)$$

$$DV_a(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}_p, \quad (2.18)$$

$$\zeta(k+1) \in \mathcal{A} \text{ sempre que } \zeta(k) \in \mathcal{C}_p. \quad (2.19)$$

A Definição 2.1 implica que para qualquer condição inicial pertencente a \mathcal{D} , a trajetória do sistema Eq. (2.9) entrará, em um tempo finito, em \mathcal{A} e permanecerá dentro desse conjunto. Então, \mathcal{A} é dito atrator de \mathcal{D} , que por sua vez é o conjunto de condições iniciais admissíveis para os estados do sistema da Eq. (2.9). Apesar da noção de estabilidade quadrática no sentido amplo ser inspirada e similar à noção de estabilidade prática, essa última utiliza dois elipsoides de mesmo formato para os conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} , enquanto a noção de estabilidade quadrática no sentido amplo possibilita o uso de elipsoides de formatos diferentes para \mathcal{D} e \mathcal{A} , o que é desejado devido ao formato do conjunto

\mathcal{B} (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010).

A seguir, apresenta-se de forma resumida o desenvolvimento de condições em termos de LMIs que garantem a estabilidade quadrática no sentido amplo. Para tal, considere o sistema em malha fechada da Eq. (2.9). Portanto, considerando Eq. (2.17) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ Q_i(r) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P A_i - P & A_i' P B_i \\ B_i' P A_i & B_i' P B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ Q_i(r) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.20)$$

para todo $\zeta \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, $Q_i(r)$ satisfazendo a seguinte condição de setor (FU; XIE, 2005):

$$[Q_i(r) - (1 - \delta_i)r]' [Q_i(r) - (1 + \delta_i)r] \leq 0. \quad (2.21)$$

Assim, a condição da Eq. (2.17) é satisfeita se e somente se a desigualdade da Eq. (2.20) é satisfeita sujeita à Eq. (2.21). Logo, aplicando o Procedimento-S (BOYD et al., 1994), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ Q_i(r) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_i' P A_i - P - \tau_1(1 - \delta_i^2)C_i' C_i & A_i' P B_i + \tau_1 C_i' \\ B_i' P A_i + \tau_1 C_i & B_i' P B_i - \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ Q_i(r) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.22)$$

em que $\tau_1 > 0$ é um multiplicador a ser determinado introduzido pelo Procedimento-S. Observa-se que substituindo P e τ_1 na desigualdade da Eq. (2.22) por P_a e τ_2 garante-se a satisfação da condição $DV_a(\zeta) < 0$, $\forall \zeta \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}_p$. Esta última em conjunto com as condições da Eq. (2.16) e levando em consideração a definição do conjunto \mathcal{C}_p garantem a factibilidade da Eq. (2.18). Além disso, as condições das Eq. (2.18) e Eq. (2.19) garantem que o conjunto \mathcal{C}_p é limitado e está contido em \mathcal{A} , caso contrário a trajetória de $\zeta(k)$ eventualmente poderia sair do atrator \mathcal{A} .

A seguir, apresentam-se as condições na forma de LMIs que garantem a a estabilidade quadrática no sentido amplo.

Teorema 2.3 ((DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010)). *Seja $Q(\cdot)$ um quantizador finito como definido na Eq. (2.6), sendo μ , ρ e N dados. Considere o sistema Eq. (2.1) e uma lei de controle por realimentação de saída como definida pela Eq. (2.2), na Configuração I ou II. O*

sistema em malha fechada da Eq. (2.9) é quadraticamente estável no sentido amplo se existirem matrizes P e P_a e escalares τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4 satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais:

$$P_a - P > 0, P > 0, \tau_3 - \tau_4 \geq 0, \tau_j > 0, j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.23)$$

$$P - (1 - \delta_i)^2 \mu_i^{-2} C_i' C_i > 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} A_i' P A_i - P - \tau_1 (1 - \delta^2) C_i' C_i & A_i' P B_i + \tau_1 C_i' \\ B_i' P A_i + \tau_1 C_i & B_i' P B_i - \tau_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} A_i' P_a A_i - P_a - \tau_2 (1 - \delta^2) C_i' C_i & A_i' P_a B_i + \tau_2 C_i' \\ B_i' P_a A_i + \tau_2 C_i & B_i' P_a B_i - \tau_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.26)$$

$$P_a + \tau_4 \epsilon_i^{-2} C_i' C_i - (1 + \tau_3) A_i' P_a A_i \geq 0, \quad (2.27)$$

para $i = 1, 2$ dependendo da configuração de realimentação a ser usada, sendo a relação δ com ρ e a definição de ϵ dados pela Eq. (2.7). \square

Note que o conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} dado pela Eq. (2.13) é relacionado com a matriz P e o conjunto atrator \mathcal{A} definido na Eq. (2.14) relacionado com a matriz P_a .

Observação 2.1. No Teorema 2.3 o controlador e o quantizador $Q_i(\cdot)$ são considerados conhecidos a priori. Uma possibilidade para determinar o controlador é através do Teorema 2.2. Neste caso, escolhe-se a densidade de quantização ρ para o quantizador finito tal que, $\rho \geq \rho_{\inf}$, em que ρ_{\inf} é a menor densidade de quantização obtida com a aplicação do Teorema 2.3 (ou a maior condição de setor δ_{\sup} obtido com a aplicação do Teorema 2.1). O nível superior de quantização μ e o nível de quantização zero ϵ são selecionados pelo projetista. De acordo com (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010) para um dado μ o Teorema 2.3 pode ser utilizado para determinar o valor máximo para o nível de quantização zero (ϵ) que conseqüentemente leva ao menor número de níveis (N) possível. Ou seja, a busca pelo o maior valor de $\epsilon > 0$ tal que as desigualdades do Teorema 2.3 sejam factíveis leva ao menor número de níveis N que mantém o sistema quadraticamente estável no sentido amplo quando o maior nível de quantização μ é fixado. Também

é importante notar que a desigualdade da Eq. (2.27) não é conjuntamente convexa em τ_3 e P_a . Todavia, é possível tornar as condições das Eq. (2.23)-Eq. (2.27) em LMIs conjuntamente convexas ao se definir um valor para o parâmetros escalar τ_3 . Ao se realizar uma busca linear em τ_3 pode-se otimizá-lo de forma iterativa. \square

Em geral, deseja-se obter uma estimativa de maior volume possível para o conjunto \mathcal{D} , ou, de maneira similar, uma estimativa de menor volume possível para o conjunto \mathcal{A} . Como \mathcal{D} é um elipsoide, uma abordagem para maximizar aproximadamente o seu volume é minimizando o traço da matriz P (i.e., $\text{tr}(P)$). A motivação para tal vem do fato que $\text{tr}(P^{-1})$ é o somatório do quadrado dos comprimentos dos semi-eixos do elipsoide \mathcal{D} (BOYD et al., 1994). Portanto, o volume do conjunto \mathcal{D} é aproximadamente maximizado através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\gamma_1, P, P_a, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4} \gamma_1, \quad \text{sujeito à Eq. (2.23)-Eq. (2.27) e} \\ \gamma_1 - \text{tr}(P) \geq 0. \quad (2.28)$$

Analogamente, para minimizar aproximadamente o volume de \mathcal{A} é necessário maximizar $\text{tr}(P_a)$, ou seja, resolver o seguinte problema de otimização:

$$\max_{\gamma_2, P, P_a, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4} \gamma_2, \quad \text{sujeito à Eq. (2.23)-Eq. (2.27) e} \\ \text{tr}(P_a) - \gamma_2 \geq 0. \quad (2.29)$$

Pode-se, também, otimizar conjuntamente os volumes dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} minimizando $\gamma := \gamma_1/\gamma_2$. Tal problema de otimização pode ser formulado como apresentado a seguir.

Primeiro, considere as seguintes definições:

$$\kappa = \gamma^{-1}, \quad X = \kappa P, \quad X_a = \kappa P_a, \quad \alpha_j = \kappa \tau_j, \quad j = 1, 2, 4, \quad \alpha_3 = \tau_3,$$

nas quais $P, P_a, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ são como definidos pelas Eq. (2.23)-Eq. (2.27). Multiplicando as Eq. (2.23)-Eq. (2.27), Eq. (2.28) e Eq. (2.29) por κ ,

obtém-se:

$$\gamma - \text{tr}(X) \geq 0, \quad \text{tr}(X_a) - 1 \geq 0, \quad (2.30)$$

$$X_a - X > 0, \quad X > 0, \quad \alpha_3\kappa - \alpha_4 \geq 0, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.31)$$

$$X - \kappa(1 - \delta_i)^2 \mu^{-2} C'_i C_i > 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} A'_i X A_i - X - \alpha_1(1 - \delta_i^2) C'_i C_i & A'_i X B_i + \alpha_1 C'_i \\ B'_i X A_i + \alpha_1 C_i & B'_i X B_i - \alpha_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} A'_i X_a A_i - X_a - \alpha_2(1 - \delta_i^2) C'_i C_i & A'_i X_a B_i + \alpha_2 C'_i \\ B'_i X_a A_i + \alpha_2 C_i & B'_i X_a B_i - \alpha_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.34)$$

$$X_a + \alpha_4 \epsilon_i^{-2} C'_i C_i - (1 + \alpha_3) A'_i X_a A_i \geq 0. \quad (2.35)$$

Então, o problema de otimização para minimizar γ é formulado na seguinte maneira:

$$\min_{\gamma, \kappa, X, X_a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} \gamma, \quad \text{sujeito à Eq. (2.31)-Eq. (2.35) e } \kappa > 0. \quad (2.36)$$

As considerações feitas na Observação 2.1 também se aplicam aos problemas de otimização apresentados anteriormente. Note que os resultados acima apresentados também são válidos para o caso da lei de controle ser realizada via realimentação de estados e a quantização ocorrer no sinal de controle ($u(k) = Q_2(Kx(k))$). Neste caso, no Teorema 2.3, consideram-se as seguintes definições para as matrizes $A_i = A$, $B_i = B$ e $C_i = K$ do sistema auxiliar Eq. (2.9), onde K é o ganho do controle por realimentação de estados.

2.3 Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Finitos

A primeira contribuição desta tese foi apresentada nas referências (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2012) e (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2015). Nesses trabalhos, abordou-se o problema de estabilidade de sistemas sujeitos a quantização nos canais de entrada e saída considerando quantizadores logarítmicos com

níveis finitos de quantização. A existência de dois quantizadores na malha de realimentação torna o problema mais complexo, pois a condição de setor é multivariável e existem diversas regiões no espaço de estado associadas às regiões de saturação e nível zero dos dois quantizadores.

Em particular, considera-se que o sistema da Eq. (2.1) e o controlador da Eq. (2.2) sejam interligados de acordo com a relação da Eq. (2.4). Na sequência, derivam-se as condições que asseguram a estabilidade quadrática no sentido amplo para o sistema em malha fechada com dois quantizadores logarítmicos com níveis finitos.

Considere o sistema de controle ilustrado na Fig. 6. Os conjuntos que definem os quantizadores $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ são dados pela Eq. (2.5), e seguem a lei de construção dada pela Eq. (2.6). Assume-se que os quantizadores $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ são independentes e possivelmente diferentes, i.e., os parâmetros ρ_i , μ_i e N_i , $i = 1, 2$ podem ser diferentes. Neste caso, considere o seguinte modelo de estados aumentado que representa o sistema realimentado composto pelas Eq. (2.1) e Eq. (2.2) com interligação definida na Eq. (2.4):

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_a\zeta(k) + B_ap(k) \\ q(k) = C_a\zeta(k) \\ p(k) = Q_a(q(k)) \end{cases}, \quad (2.37)$$

com

$$\begin{aligned} \zeta &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}, \\ A_a &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B_c & 0 \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_c \end{bmatrix}, \\ Q_a(q) &= \begin{bmatrix} Q_1(y) & 0 \\ 0 & Q_2(w) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Seguindo os passos da demonstração das condições que garantem a estabilidade quadrática no sentido amplo proposto em (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010) e associado ao sistema da Eq. (2.37),

definem-se os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{B}_i =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : |C_{a_i} \zeta| \leq \mu_i / (1 - \delta_i)\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{C}_i =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : |C_{a_i} \zeta| \leq \epsilon_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.40)$$

nos quais $n_\zeta = n + n_c$ e C_{a_i} denota a i -ésima linha da matriz C_a , a saber

$$C_{a_1} = [C \quad 0], \quad C_{a_2} = [0 \quad C_c].$$

De forma análoga aos conjuntos \mathcal{B} e \mathcal{C} definidos respectivamente nas Eq. (2.10) e Eq. (2.11), os conjuntos \mathcal{B}_i e \mathcal{C}_i são relacionados respectivamente ao maior e menor níveis de quantização dos quantizadores Q_i , $i = 1, 2$. Estes conjuntos são simétricos com relação à origem, e ilimitados na direção dos vetores de uma base ortogonal ao espaço nulo de C_{a_i} , e são limitados por dois hiper-planos ortonormais a C'_{a_i} .

Sabe-se que se a trajetória $\zeta(k)$ do sistema auxiliar pertencer a $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ o valor da saída do quantizador é igual a zero, i.e., $Q_i(q(k)) = 0$ para $i = 1, 2$. Logo, o sinal de entrada $p(k)$ do sistema auxiliar da Eq. (2.37) também é zero. Conseqüentemente, a trajetória de $\zeta(k)$ não irá necessariamente convergir para à origem e assim a estabilidade quadrática não pode ser garantida.

Para caracterizar uma definição para a estabilidade do sistema Eq. (2.37) com dois quantizadores finitos, sejam as funções quadráticas $V(\zeta)$ e $V_a(\zeta)$ definidas na Eq. (2.12), o conjunto de condições iniciais \mathcal{D} definido pela Eq. (2.13), o conjunto atrator \mathcal{A} definido pela Eq. (2.14) e o conjunto \mathcal{C}_p como redefinido a seguir:

$$\mathcal{C}_p = \{\zeta \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0\}. \quad (2.41)$$

Abaixo, apresenta-se a definição de estabilidade quadrática no sentido amplo dentro do contexto de dois quantizadores finitos.

Definição 2.2. *O sistema em malha fechada com quantização em ambos os canais como apresentado pela Eq. (2.37) é dito ser quadraticamente estável no sentido amplo, se existirem funções quadráticas $V(\zeta)$ e*

$V_a(\zeta)$ como definidas na Eq. (2.12) satisfazendo as seguintes condições:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.42)$$

$$DV(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{B} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2), \quad (2.43)$$

$$DV_a(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}_p, \quad (2.44)$$

$$\zeta(k+1) \in \mathcal{A} \quad \text{sempre que} \quad \zeta(k) \in \mathcal{C}_p. \quad (2.45)$$

No intuito de obter uma caracterização numericamente tratável para a estabilidade quadrática no sentido amplo para o sistema da Eq. (2.37), primeiro observa-se que a condição $DV(\zeta) < 0$ pode ser reescrita como descrito abaixo:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_a P A_a - P & A'_a P B_a \\ B'_a P A_a & B'_a P B_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} < 0. \quad (2.46)$$

Além disso, note que para $\zeta \in \mathcal{B} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$, o vetor de entrada $p(k)$ do sistema da Eq. (2.37) satisfaz a seguinte condição de setor multivariável (TARBOURIECH et al., 2011):

$$[p - \tilde{\Delta}q]' T [p - \hat{\Delta}q] \leq 0, \quad (2.47)$$

na qual $T > 0$ é uma matriz diagonal a ser determinada e

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} (1 - \delta_1) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_2) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} (1 + \delta_1) & 0 \\ 0 & (1 + \delta_2) \end{bmatrix}.$$

Agora, suponha que a condição $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_i$ é satisfeita para $i = 1, 2$. Então, a condição da Eq. (2.43) estará satisfeita se a desigualdade da Eq. (2.46) for também satisfeita sujeita a condição de setor multivariável definida na Eq. (2.47), o que é garantido pela seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2' \\ \Upsilon_2 & \Upsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} < 0, \quad (2.48)$$

na qual

$$\begin{cases} \Upsilon_1 = A'_a P A_a - P - C'_a (\tilde{\Delta} T \hat{\Delta} + \hat{\Delta} T \tilde{\Delta}) C_a, \\ \Upsilon_2 = B'_a P A_a + T (\hat{\Delta} + \tilde{\Delta}) C_a, \quad \Upsilon_3 = B'_a P B_a - 2T. \end{cases}$$

De forma semelhante, para assegurar a condição da Eq. (2.43) a seguinte desigualdade deve ser considerada:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Upsilon_{a_1} & \Upsilon'_{a_2} \\ \Upsilon_{a_2} & \Upsilon_{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} < 0, \quad (2.49)$$

com

$$\begin{cases} \Upsilon_{a_1} = A'_a P_a A_a - P_a - C'_a (\tilde{\Delta} T_a \hat{\Delta} + \hat{\Delta} T_a \tilde{\Delta}) C_a, \\ \Upsilon_{a_2} = B'_a P_a A_a + T_a (\hat{\Delta} + \tilde{\Delta}) C_a, \quad \Upsilon_{a_3} = B'_a P_a B_a - 2T_a. \end{cases}$$

As desigualdades das Eq. (2.48) e Eq. (2.49), juntamente com a Eq. (2.42) e a definição do conjunto \mathcal{C}_p da Eq. (2.41) asseguram a factibilidade da condição da Eq. (2.44). Além disso, as condições das Eq. (2.44) e Eq. (2.45) garantem que \mathcal{C}_p é limitado e $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{A}$, caso contrário $\zeta(k)$ eventualmente poderia deixar \mathcal{A} . Tendo em vista essas considerações, obtém-se o seguinte resultado de estabilidade.

Teorema 2.4. *Considere o sistema da Eq. (2.1), com o controlador da Eq. (2.2) conhecido e uma lei de controle definida pela Eq. (2.4), com quantizadores logarítmicos $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ como definidos na Eq. (2.6), sendo que μ_i , ρ_i e N_i dados. O sistema em malha fechada da Eq. (2.37) é quadraticamente estável no sentido amplo se existirem matrizes simétricas P e P_a , matrizes diagonais $T > 0$ e $T_a > 0$, e escalares $\tau, \tau_i, \bar{\tau}_i, \hat{\tau}_i$ e $\tilde{\tau}_i, i=1, 2$ que satisfaçam as seguintes desigualdades:*

$$P > 0, \quad \tau_i > 0, \quad \bar{\tau}_i > 0, \quad \hat{\tau}_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.50)$$

$$P_a - P > 0, \quad P - (1 - \delta_i)^2 \mu_i^{-2} C'_{a_i} C_{a_i} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon'_2 \\ \Upsilon_2 & \Upsilon_3 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Upsilon_{a_1} & \Upsilon'_{a_2} \\ \Upsilon_{a_2} & \Upsilon_{a_3} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.52)$$

$$\tau - (\tau_1 + \tau_2) \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{\tau}_i - \bar{\tau}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.53)$$

$$P_a + \sum_{i=1}^2 \tau_i \epsilon_i^{-2} C'_{a_i} C_{a_i} - (1 + \tau) A'_a P_a A_a \geq 0, \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(i, j) & U_2(i, j)' \\ U_2(i, j) & U_3(i, j) \end{bmatrix} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.55)$$

sendo que δ_i e ρ_i , são dados pela Eq. (2.7) e

$$\begin{cases} U_1(i, j) = P_a + \bar{\tau}_i \epsilon_i^{-2} C'_{a_i} C_{a_i} + \hat{\tau}_j (1 - \delta_j^2) C'_{a_j} C_{a_j} - (1 + \tilde{\tau}_i) A'_a P_a A_a, \\ U_2(i, j) = -\hat{\tau}_j C_{a_j} - (1 + \tilde{\tau}_i) B'_{a_j} P_a A_a, \\ U_3(i, j) = \hat{\tau}_j - (1 + \tilde{\tau}_i) B'_{a_j} P_a B_{a_j}, \\ B_{a_1} = \begin{bmatrix} 0 & B'_c \end{bmatrix}', \quad B_{a_2} = \begin{bmatrix} B' & 0 \end{bmatrix}'. \end{cases} \quad (2.56)$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} e o conjunto atrator \mathcal{A} são dados pelas Eq. (2.13) e Eq. (2.14), respectivamente. \square

Demonstração. Primeiramente, considerando as Eq. (2.39), Eq. (2.13) e Eq. (2.14), a desigualdade da Eq. (2.51) garante que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, respectivamente. Em seguida a primeira desigualdade da Eq. (2.52) garante a factibilidade da Eq. (2.48), implicando na condição da Eq. (2.43). De forma análoga, a segunda desigualdade da Eq. (2.52) assegura que a Eq. (2.49) é satisfeita, que juntamente com a Eq. (2.42) e a definição do conjunto \mathcal{C}_p da Eq. (2.41) implicam que a condição da Eq. (2.44) é satisfeita.

Na sequência, demonstra-se como as Eq. (2.53)-Eq. (2.55) garantem que a condição na Eq. (2.45) seja satisfeita. Para tanto, particiona-se o conjunto \mathcal{C}_p em três subconjuntos complementares como segue:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{p_1} = \{\zeta \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_{p_2} = \{\zeta \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_{p_3} = \{\zeta \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \end{cases} \quad (2.57)$$

e considera-se as duas situações a seguir:

(a) $\zeta(\mathbf{k}) \in \mathcal{C}_{p_3}$: Fazendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta}$ e somando a primeira desigualdade da Eq. (2.53) com a da Eq. (2.54) e pré-multiplicando por ϕ' pós-multiplicando por ϕ , tem-se

$$\begin{aligned} (1 - \phi' A'_a P_a A_a \phi) - \tau^{-1} \phi' (A'_a P_a A_a - P_a) \phi \\ - \tau^{-1} \sum_{i=1}^2 \tau_i (1 - \epsilon_i^{-2} \phi' C'_{a_i} C_{a_i} \phi) \geq 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta}. \end{aligned}$$

Ao aplicar-se o Procedimento- S , a condição acima é reescrita tal que

$$\begin{aligned} \phi' A'_a P_a A_a \phi \leq 1, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}^{n_c} : \phi' (A'_a P_a A_a - P_a) \phi \geq 0, \\ \epsilon_i^{-2} \phi' C'_{a_i} C_{a_i} \phi \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Agora, seja $\phi = \zeta(k)$ como definido na Eq. (2.38). Uma vez que a última condição da Eq. (2.58) é equivalente a $\zeta(k) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, e em tal situação o sinal de entrada $p(k)$ da Eq. (2.37) é zero, note que $A_a \phi = \zeta(k+1)$. Então, a Eq. (2.58) leva a

$$\begin{aligned} \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) \leq 1, \\ \forall \zeta(k) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) - \zeta(k)' P_a \zeta(k) \geq 0. \end{aligned}$$

Isso garante que $\zeta(k+1) \in \mathcal{A}$ sempre que $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_3}$.

(b) $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_i}$, $i = 1, 2$: Seja $\phi \in \mathbb{R}^{n_c}$ e $\psi \in \mathbb{R}$. Adicionando a segunda desigualdade da Eq. (2.53) à Eq. (2.55) e pré-multiplicando o resultado por $\begin{bmatrix} \phi' & \psi \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} \phi' & \psi \end{bmatrix}'$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 1 - (A_a \phi + B_{a_j} \psi)' P_a (A_a \phi + B_{a_j} \psi) + \tilde{\tau}_j^{-1} \tilde{\tau}_i (\epsilon_i^{-2} \phi' C'_{a_i} C_{a_i} \phi - 1) \\ - \tilde{\tau}_i^{-1} \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_a P_a A_a - P_a & A'_a P_a B_{a_j} \\ B'_{a_j} P_a A_a & B'_{a_j} P_a B_{a_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \\ + \tilde{\tau}_i^{-1} \hat{\tau}_j [\psi - (1 - \delta_j) C_{a_j} \phi]' [\psi - (1 + \delta_j) C_{a_j} \phi] \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathbb{R}^{n_c}$ e $\psi \in \mathbb{R}$, com $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Aplicando o Procedimento- S na desigualdade acima tem-se

$$\begin{aligned} (A_a \phi + B_{a_j} \psi)' P_a (A_a \phi + B_{a_j} \psi) \leq 1, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}^{n_c}, \psi \in \mathbb{R} : \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_a P_a A_a - P_a & A'_a P_a B_{a_j} \\ B'_{a_j} P_a A_a & B'_{a_j} P_a B_{a_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} \psi - (1 - \delta_j) C_{a_j} \phi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \psi - (1 + \delta_j) C_{a_j} \phi \end{bmatrix} \leq 0, \\ \epsilon_i^{-2} \phi' C'_{a_i} C_{a_i} \phi \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Note que a desigualdade $\epsilon_i^{-2} \phi' C'_{a_i} C_{a_i} \phi \leq 1$ é equivalente a $\phi \in \mathcal{C}_i$. Seja $\phi = \zeta(k)$ e $\psi = p_j(k)$ como na Eq. (2.38). Uma vez que

$\zeta(k) \in \mathcal{C}_i$, o sinal de entrada $p_i(k)$ do sistema da Eq. (2.37) é zero e $p_j(k)$ satisfaz a condição de setor da Eq. (2.21), considerando o sistema da Eq. (2.37) obtém-se da Eq. (2.59) que

$$\begin{aligned} \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) &\leq 1, \\ \forall \zeta(k) \in \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}_j : \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) - \zeta(k)' P_a \zeta(k) &\geq 0 \end{aligned}$$

o que garante $\zeta(k+1) \in \mathcal{A}$ sempre que $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_i}$, $i=1, 2$.

Tendo em conta o acima exposto, conclui-se que o sistema Eq. (2.37) é quadraticamente estável no sentido amplo. \square

Observação 2.2. *Observe que as desigualdades dadas pelas Eq. (2.54) e Eq. (2.55) não são convexas em $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ e P_a . Entretanto, as condições da Eq. (2.50)-Eq. (2.55) tornam-se LMIs quando os escalares $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ são conhecidos a priori. Assim, ao aplicar-se um procedimento de busca linear nesses parâmetros pode-se obter uma solução factível para as desigualdades das Eq. (2.50)-Eq. (2.55).* \square

A otimização dos volumes dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} pode ser realizada de forma análoga ao problema de otimização da Eq. (2.36) bastando somente modificar as condições do Teorema 2.4. Assim, para maximizar \mathcal{D} e minimizar \mathcal{A} simultaneamente, faz-se necessário minimizar $\gamma := \gamma_1/\gamma_2$, em que γ_1 e γ_2 são os mesmo definidos na Eq. (2.28) e na Eq. (2.29), respectivamente. O problema de otimização é formulado como segue. Primeiro, definem-se:

$$\begin{aligned} \kappa &= \gamma^{-1}, \quad X = \kappa P, \quad X_a = \kappa P_a, \\ W &= \kappa T, \quad W_a = \kappa T_a, \quad \alpha_i = \kappa \tau_i, \quad \bar{\alpha}_i = \kappa \tilde{\tau}_i, \end{aligned} \quad (2.60)$$

e então as Eq. (2.50)-Eq. (2.55) são reescritas como

$$X > 0, \quad X_a - X > 0, \quad \kappa > 0, \quad (2.61)$$

$$\alpha_i > 0, \quad \bar{\alpha}_i > 0, \quad \hat{\alpha}_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.62)$$

$$X - \kappa(1 - \delta_i)^2 \mu_i^{-2} C'_{a_i} C_{a_i} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_1 & \widehat{\Upsilon}'_2 \\ \widehat{\Upsilon}_2 & \widehat{\Upsilon}_3 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_{a_1} & \widehat{\Upsilon}'_{a_2} \\ \widehat{\Upsilon}_{a_2} & \widehat{\Upsilon}_{a_3} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.64)$$

$$\kappa\tau - (\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0, \quad \kappa\tilde{\tau}_i - \bar{\alpha}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.65)$$

$$X_a + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \epsilon_i^{-2} C'_{a_i} C_{a_i} - (1 + \tau) A'_a X_a A_a \geq 0, \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{U}_1(i, j) & \widehat{U}_2(i, j)' \\ \widehat{U}_2(i, j) & \widehat{U}_3(i, j) \end{bmatrix} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.67)$$

em que $\widehat{\Upsilon}_k$, $\widehat{\Upsilon}_{a_k}$ e \widehat{U}_k , $k = 1, 2, 3$, são obtidas diretamente da definição de Υ_k , Υ_{a_k} e U_k , $k = 1, 2, 3$ como no Teorema 2.4 levando em consideração as definições feitas na Eq. (2.60).

Assim a minimização de γ é dada pelo seguinte problema de otimização

$$\min_{\gamma, \kappa, X, X_a, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_2, \tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2} \gamma, \text{ sujeito as } \begin{cases} \text{Eq. (2.61) - Eq. (2.67),} \\ \gamma - \text{tr}(X) \geq 0 \text{ e} \\ \text{tr}(X_a) - 1 \geq 0 \end{cases}. \quad (2.68)$$

2.4 Projeto de Quantizadores Logarítmicos Práticos

Nesta seção, aplica-se o Teorema 2.4 no projeto dos parâmetros μ_i e ϵ_i , $i = 1, 2$ dos quantizadores $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ assumindo-se que existe um controle por realimentação de saída que estabiliza quadraticamente o sistema Eq. (2.1). Para tanto, seja $\mathcal{D}_0 = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : \zeta' P_0 \zeta \leq 1\}$, $P_0 > 0$, um conjunto dado para as condições iniciais admissíveis e ϑ o volume máximo do conjunto atrator \mathcal{A} . O volume de um elipsoide definido pelo conjunto $\mathcal{A} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : \zeta' P_a \zeta \leq 1, \quad P_a > 0\}$ é dado por $c/\sqrt{\det(P_a)}$ sendo que c é uma constante que depende dimensão de $\zeta(k)$. Para o projeto dos quantizadores estáticos e logarítmicos $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ tais que a estabilidade quadrática no sentido amplo do sistema da Eq. (2.37) seja garantida, aplica-se o seguinte procedimento:

Passo 1: Assume-se que os quantizadores logarítmicos tem infinitos níveis de quantização, e determina-se as densidades de quantização ρ_1 e ρ_2 que asseguram a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada. Para tanto, aplica-se a metodologia proposta em (COU-TINHO; FU; DE SOUZA, 2010) sendo que $\delta_i = (1 - \rho_i)/(1 + \rho_i)$, $i = 1, 2$.

Passo 2: Determina-se as matrizes P e P_a e os escalares positivos η_i , σ_i , β_i , $\bar{\beta}_i$, $\tilde{\tau}_i$, $\hat{\tau}_i$, $i = 1, 2$, e τ satisfazendo as desigualdades da Eq. (2.52) e as seguintes condições:

$$P > 0, \quad P_0 - P > 0, \quad P_a - P_0 > 0, \quad (2.69)$$

$$P - (1 - \delta_i)^2 \eta_i C'_{a_i} C_{a_i} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.70)$$

$$P_a + \beta_1 C'_{a_1} C_{a_1} + \beta_2 C'_{a_2} C_{a_2} - (1 + \tau) A'_a P_a A_a \geq 0, \quad (2.71)$$

$$\tau \sigma_2 - (\beta_1 + \beta_2) \geq 0, \quad \sigma_1 - \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_i \tilde{\tau}_i - \bar{\beta}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1(i, j) & \tilde{U}_2(i, j)' \\ \tilde{U}_2(i, j) & \tilde{U}_3(i, j) \end{bmatrix} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (2.73)$$

$$\vartheta^{\frac{2}{n_c}} P_a - c^{\frac{2}{n_c}} I \geq 0, \quad (2.74)$$

com $\tilde{U}_k(i, j)$ sendo similar a $U_k(i, j)$, $k = 1, 2, 3$ como definido na Eq. (2.56) com $\tilde{\tau}_i \epsilon_i^{-2}$ substituído por $\bar{\beta}_i$ e c sendo a constante relacionada com o volume do conjunto \mathcal{A} . Note que as Eq. (2.70)-Eq. (2.72) são as mesmas definidas pelo Teorema 2.4 ao se fazer $\eta_i = \mu_i^{-2}$, $\sigma_i = \epsilon_i^{-2}$ e $\beta_i = \tau_i \epsilon_i^{-2}$, enquanto que a Eq. (2.74) garante que ϑ seja o limite superior para o volume do conjunto atrator \mathcal{A} e por fim as condições da Eq. (2.69) garantem que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$.

Passo 3: Os parâmetros dos quantizadores são dados pelas seguintes relações:

$$\mu_i = \frac{1}{\sqrt{\eta_i}} \quad \text{e} \quad \epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Além disso, o número de níveis de quantização N_1 e N_2 , é o menor valor inteiro que satisfaz a relação da Eq. (2.8)

Ao aplicar-se o procedimento de projeto dos quantizadores, deseja-se minimizar o número de bits $N_b = N_{b_1} + N_{b_2}$ a ser transmitido,

tal que seja garantindo a estabilidade quadrática no sentido amplo. Assumindo que para o quantizador logarítmico finito $Q_i(\cdot)$ com uma faixa de trabalho dada por $[\epsilon_i, 1/\epsilon_i]$, o número de níveis de quantização nessa faixa é aproximadamente dado por:

$$N_i \approx \frac{2 \ln(\epsilon_i^{-1})}{\ln(\rho_i^{-1})},$$

segundo a definição do número de níveis para um quantizador dada pela Eq. (1.1) tem-se:

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{N_i}{\ln(\epsilon_i^{-1})} = \frac{2}{\ln(\rho_i^{-1})}.$$

Então o número total de bits N_b a ser transmitido é dado por

$$N_b = \log_2(2N_1) + \log_2(2N_2). \quad (2.75)$$

Definindo-se $\gamma_p = (\sigma_1 + \sigma_2 - \eta_1 - \eta_2)$ e resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\min_{\gamma_p, P, P_a, \eta_i, \sigma_i, \beta_i, \bar{\beta}_i, \tau, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, i=1,2} \gamma_p, \quad \text{sujeito as} \quad \begin{cases} \text{Eq. (2.69)} - \text{Eq. (2.74)} \\ \text{e Eq. (2.52)} \end{cases}, \quad (2.76)$$

obtém-se uma forma aproximada para minimizar número de bits transmitidos.

Uma vez que minimizando $(\sigma_1 + \sigma_2)$, maximiza-se $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, pois $\sigma_1 = \epsilon_1^{-2}$ e $\sigma_2 = \epsilon_2^{-2}$, e ao minimizar $(-\eta_1 - \eta_2)$ minimiza-se $(\mu_1 + \mu_2)$ pois $\eta_1 = \mu_1^{-2}$ e $\eta_2 = \mu_2^{-2}$, ao maximizar ϵ_i e minimizar μ_i , minimiza-se os números de níveis N_i (ver a Eq. (2.8)) e pela relação da Eq. (2.75) o número de bits N_b também é minimizado.

2.5 Exemplos Numéricos

Na sequência, no exemplo 1, apresenta-se a aplicação do Teorema 2.4 para analisar a estabilidade quadrática no sentido amplo de um sistema LTI sujeito a quantização nos canais de entrada e saída. Posteriormente, no exemplo 2, realiza-se o projeto dos quantizadores para uma lei de controle conhecida de maneira a assegurar a estabilidade quadrática no sentido amplo do sistema em malha fechada.

Exemplo 1

Considere o sistema em tempo discreto do Exemplo 3.1 apresentado em (FU; XIE, 2005), com a função de transferência

$$G(z) = \frac{z - 3}{z(z - 2)}.$$

Observa-se que o sistema é de fase não mínima e instável em malha aberta. Esse sistema pode ser representado através da seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_2(k) + u(k) \\ y(k) = -3x_1(k) + x_2(k) \end{cases}, \quad (2.77)$$

Em primeiro lugar, seguindo a metodologia proposta por Coutinho, Fu e de Souza (2010), projeta-se uma lei de controle que garanta a estabilidade quadrática para o sistema da Eq. (2.77), considerando dois quantizadores ideais, levando ao seguinte controlador

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1.667 \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k) \\ w(k) = \begin{bmatrix} 0 & 6.667 \end{bmatrix} \xi(k) \end{cases}. \quad (2.78)$$

O controlador acima foi projetado buscando maximizar δ_1 e δ_2 . Resultando que $\delta_{1_{\max}} = \delta_{2_{\max}} \leq 0.06$. A partir desses valores, os seguintes parâmetros dos quantizadores Q_1 e Q_2 foram obtidos a partir da escolha $\delta_1 = \delta_2 = 10^{-2} < \delta_{1_{\max}}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 3 \times 10^{-3}, & \mu_1 &= 15, \\ \epsilon_2 &= 6 \times 10^{-3}, & \mu_2 &= 8. \end{aligned}$$

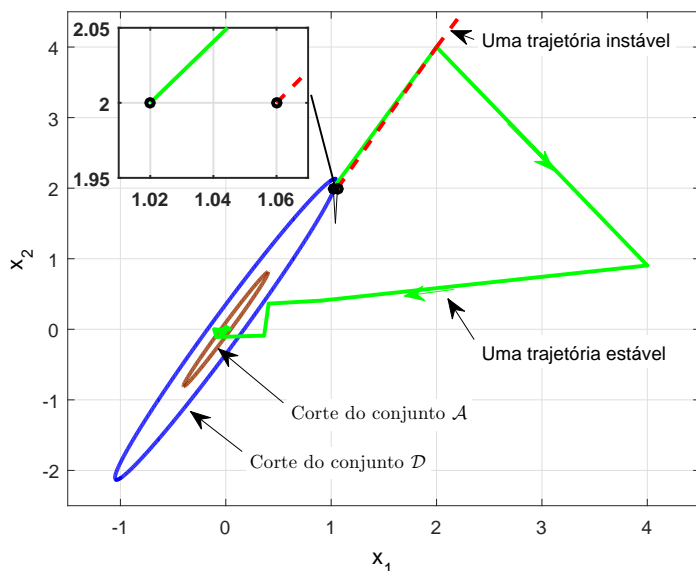
Ao aplicar-se o procedimento de otimização dado pela Eq. (2.68) para, de forma aproximada, otimizar o conjunto condições iniciais admissíveis \mathcal{D} e o conjunto atrator \mathcal{A} , obtêm-se os seguintes resultados:

$$P = \begin{bmatrix} 33.06 & -16.08 & 110.21 & 1.48 \\ -16.08 & 8.04 & -53.60 & 0.00 \\ 110.21 & -53.60 & 367.81 & 4.95 \\ 1.48 & 0.00 & 4.95 & 3.23 \end{bmatrix},$$

$$P_a = \begin{bmatrix} 0.43 & -0.21 & 1.44 & 0.01 \\ -0.21 & 0.10 & -0.71 & 0.00 \\ 1.45 & -0.71 & 4.83 & 0.03 \\ 0.01 & 0.00 & 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}.$$

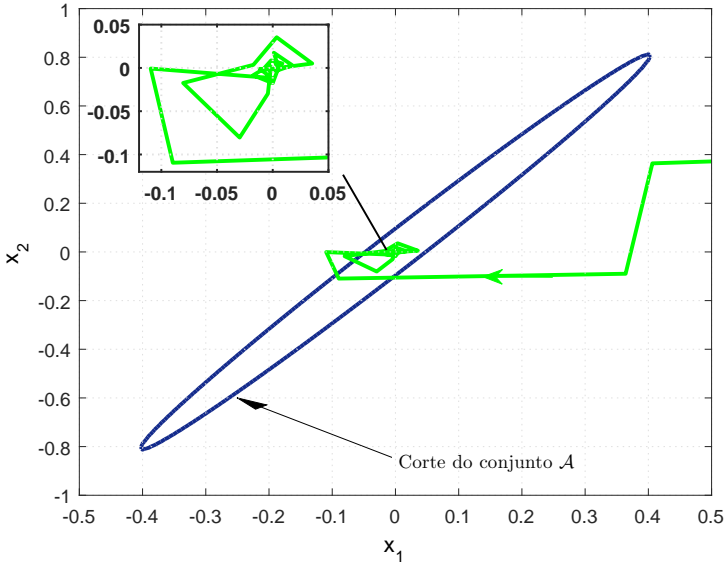
Na Fig. 9, apresentam-se cortes no plano $x_1 \times x_2$ dos elipsoides definindo os conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} , com $\xi = 0$. Também, nessa mesma figura, apresenta-se a projeção de duas trajetórias particulares, uma estável e outra instável, no plano $\zeta = [x_1 \ x_2 \ 0 \ 0]'$. Para determinar o conservadorismo do resultado proposto, na Fig. 9, ilustra-se uma visão mais detalhada da região dos pontos iniciais das duas trajetórias e do corte da região \mathcal{D} . Observa-se na Fig. 10 detalhadamente o corte no elipsoide da região atratora \mathcal{A} .

Figura 9 – Corte dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} (com $\xi = 0$), e as trajetórias estável e instável dos estados.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 – Corte do conjunto \mathcal{A} (com $\xi=0$) e a trajetória estável dos estados.



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2

Neste exemplo ilustra-se o método de projeto dos quantizadores apresentado na Seção 2.4. Portanto, considere o seguinte sistema linear em tempo discreto que representa aproximadamente o sistema de um pêndulo invertido com fator de amortecimento nulo.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.036 \\ 0.036 & 1.000 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.036 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = x_2. \quad (2.79)$$

Para o sistema acima, projeta-se uma realimentação dinâmica de saída que estabiliza quadraticamente o sistema da Eq. (2.79) levando ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2090 & -0.8758 \\ 0.3825 & -0.6904 \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} 87.5314 \\ 146.4775 \end{bmatrix} v(k), \\ w(k) = -\begin{bmatrix} 0.0040 & 0.0947 \end{bmatrix} \xi(k), \end{cases}$$

que é obtido utilizando o método apresentado em (COUTINHO; FU; DE SOUZA, 2010), considerando que os quantizadores são ideias com $\delta_1 = \delta_2 = \delta_{\max} = 0.99$.

Para o projeto dos quantizadores com níveis finitos, considere-se o seguinte conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 :

$$\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathbb{R}^4 : x' P_0 x \leq 1\}, \quad P_0 = \text{diag}\{1.5, 3, 0.1, 0.1\}.$$

Considerando que o volume de um hiper elipsoide é dado por $\vartheta = c/\sqrt{\det(P_0)}$ e sabendo que para uma elipse de dimensão quatro (sistema aumentado sob análise é de dimensão quatro) a constante c é $\pi^2/2$ (SÝKORA, 2005) o volume de \mathcal{D}_0 é $\vartheta_0 = 23.63$ unidades de volume. Assume-se que o valor máximo para o volume do atrator \mathcal{A} é de 10% do volume de \mathcal{D}_0 , i.e., $\vartheta_{\mathcal{A}} = 2.363$. As densidades de quantização são escolhida como sendo $\rho_1 = \rho_2 = 0.7 > \rho_{\text{inf}}$.

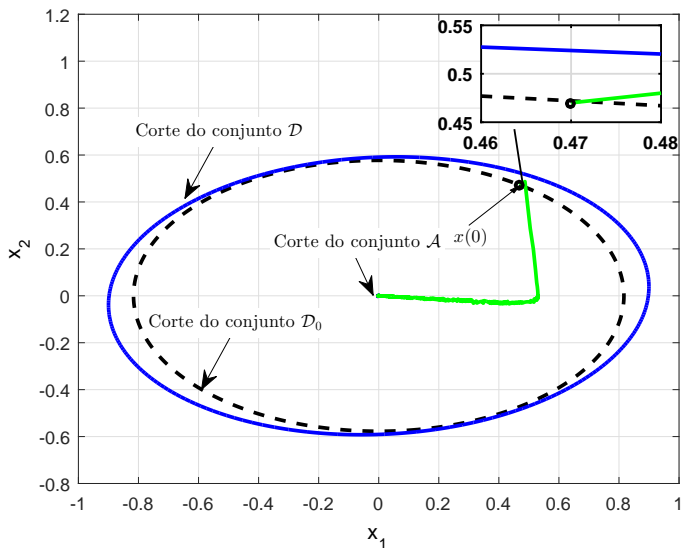
Aplicando o procedimento de projeto dos quantizadores finitos proposto na Seção 2.4 e considerando o problema de otimização da Eq. (2.76) em conjunto com uma busca linear nos parâmetros $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ e τ , obtém-se os seguintes parâmetros para os quantizadores:

$$\begin{aligned} \mu_1 = 0.74, \quad \mu_2 = 18.5, \quad \epsilon_1 = 4.4 \times 10^{-4}, \quad \epsilon_2 = 4.4 \times 10^{-4}, \\ N_1 = 22, \quad N_2 = 31, \end{aligned}$$

para $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = \tau = 0.0068$.

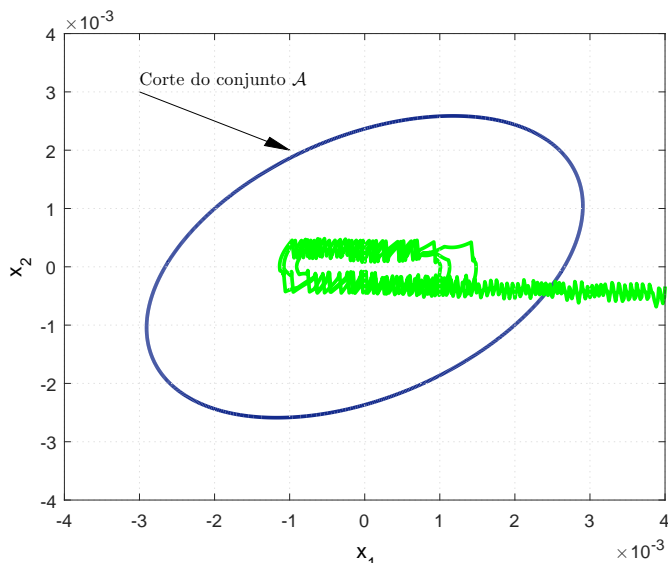
Na Fig. 11 observam-se cortes dos conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{D}_0 e \mathcal{A} para $\xi = 0$ bem como a projeção de uma trajetória estável no plano $\zeta = [x_1 \ x_2 \ 0 \ 0]'$. Uma visão aproximada da condição inicial e dos cortes de \mathcal{D} e \mathcal{D}_0 pode ser visualizada na Fig. 11. Na Fig. 12, ilustra-se em detalhe o corte do conjunto atrator \mathcal{A} e a projeção da trajetória estável dos estados.

Figura 11 – Cortes dos conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{D}_0 e \mathcal{A} (com $\xi=0$) e a trajetória estável dos estados.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 12 – O corte do conjunto \mathcal{A} (com $\xi=0$) e a trajetória estável dos estados.



Fonte: Elaborada pelo autor

3 Sistemas Não Lineares Quantizados

Na literatura, observa-se que a maioria dos trabalhos que abordam o problema de quantização assume que a planta e o controlador são precisamente descritos por modelos lineares. Nota-se também que, até o momento, poucos trabalhos abordam a estabilidade de sistema não lineares, com exceção, por exemplo, dos trabalhos (LIU; ELIA, 2004), (DE PERSIS, 2005), (LIBERZON; HESPANHA, 2005), (LIU; JIANG; HILL, 2012a) e (LIU; JIANG; HILL, 2012b) que tratam de sistema não lineares em tempo contínuo.

Uma solução clássica para tratar a complexidade matemática associada a análise de sistemas não lineares é considerar uma aproximação linear nas proximidades do ponto de operação (usando uma expansão de Taylor), e então aplicar as conhecidas ferramentas de controle linear. Quando a aproximação linear é inadequada para representar a dinâmica não linear, pode-se considerar uma expansão de Taylor com termos de maior grau, tal qual, modelos bilineares (PARDALOS; YATSENKO, 2008). Uma extensão natural dos modelos bilineares é obtida considerando os termos quadráticos da expansão de Taylor o que dá origem à classe conhecida por sistemas não lineares quadráticos. Os sistemas quadráticos podem representar uma grande variedade de processos como, por exemplo, máquinas de indução e conversores DC-DC (FIGALLI; CAVA; TOMASI, 1984), colunas de destilação (ESPANA; LANDAU, 1978), e bio-processos (KULKARNI et al., 2010). Com isso, o projeto de sistemas de controle para sistemas não lineares quadráticos (incluindo os modelos bilineares) tem atraído o interesse dos pesquisadores da área como, por exemplo, os trabalhos (AMATO; CONSENTINO; MEROLA, 2007), (COUTINHO; DE SOUZA, 2012), (VALMORBIDA et al., 2013), (JIANG; LIU, 2015), (DE SOUZA;

COUTINHO; SILVA, 2015) e suas referências.

Levando em consideração os poucos resultados existentes sobre quantização de sistemas não lineares, neste capítulo, abordam-se os problemas de análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas não lineares quadráticos em tempo discreto sujeitos a quantização logarítmica. A seguir, propõe-se uma solução para o problema de síntese de controle considerando um único quantizador ideal. Posteriormente, aborda-se o problema de análise de estabilidade considerando leis de controle não lineares quadráticos com um ou dois quantizadores logarítmicos.

3.1 Estabilização via Controle Linear com Um Quantizador Logarítmico Ideal

A seguir, apresenta-se um método de síntese de uma lei de controle linear, tanto para uma realimentação estática de estados como para uma realimentação dinâmica de saída. Neste caso, considera-se que o quantizador logarítmico é ideal. Para tanto, seja o sistema não linear quadrático representado pelo seguinte modelo no espaço de estados

$$\begin{cases} x(k+1) = A(x)x(k) + B(x)u(k) \\ y(k) = C(x)x(k) \end{cases}, \quad (3.1)$$

sendo $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ o estado do sistema, $u \in \mathbb{R}$ a entrada de controle do sistema, $y \in \mathbb{R}$ a saída do sistema, e \mathcal{X} um politopo no estado de espaço que contém a origem $x = 0$ (a ser especificado a seguir). As matrizes $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(x) \in \mathbb{R}^n$ e $C(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ são funções afins em x , isto é:

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i, \quad B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i, \quad C(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n x_i C_i, \quad (3.2)$$

com x_i denotando a i -ésima componente de x , e A_i , B_i e C_i , $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes reais conhecidas. Assume-se que o par (A_0, B_0) é estabilizável e que o par (A_0, C_0) é observável. Por fim, admite-se que o sistema na Eq. (3.1) possa ser localmente instável.

Na sequência, considere as seguintes leis de controle linear:

$$v(k) = Kx(k), \quad (3.3)$$

e

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}y(k) \\ v(k) = \hat{C}\hat{x}(k) \end{cases}, \quad (3.4)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ o ganho de realimentação de estados, e $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ são matrizes do controlador de realimentação dinâmica de saída com $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ representando os estados do controlador.

Tanto o controlador dado pela Eq. (3.3) quanto o dado pela Eq. (3.4) tem a realimentação de seu sinal de saída ao sistema da Eq. (3.1) por meio de um canal sujeito a quantização. Isto é:

$$u(k) = Q(v(k)), \quad (3.5)$$

com $Q(\cdot)$ representando um quantizador logarítmico, simétrico e definido pela Eq. (1.2).

A seguir, determina-se uma lei de controle estabilizante, considerando a Eq. (3.3) ou Eq. (3.4), tal que a origem do sistema em malha fechada formado pela Eq. (3.1) e Eq. (3.5) é localmente exponencialmente estável para uma dada densidade de quantização. Além de assegurar a estabilidade local, também, busca-se determinar uma estimativa \mathcal{R} do domínio de atração do sistema de controle de tal forma que toda a trajetória de estados iniciada em \mathcal{R} permanece em \mathcal{R} , $\forall k \geq 0$, e converge para zero ao $k \rightarrow \infty$.

A solução do problema acima será baseada na teoria de Lyapunov sendo a estabilidade do sistema numericamente determinada em termos de restrições do tipo LMIs. Para esse fim, assume-se que o conjunto no espaço de estados \mathcal{X} é um politopo simétrico com relação à origem do espaço de estados e definido tanto em termos de suas faces:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c'_i x| \leq 1, i = 1, \dots, r\}, \quad (3.6)$$

com $c_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, r$, definindo as faces de \mathcal{X} , ou equivalentemente, o casca convexa de seus κ vértices, i.e.

$$\mathcal{X} = \text{Co}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa\}, \quad (3.7)$$

com ν_1, \dots, ν_κ representando os vértices de \mathcal{X} .

Na sequência, apresentam-se dois resultados que são instrumentais para derivar o método de projeto proposto nessa Seção.

Lema 3.1 ((VIDYASAGAR, 2002)). *Considere um sistema não linear quadrático em tempo discreto $s(k+1) = f(s(k))$, com $s \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_s}$ sendo o estado e $f(s)$ uma função contínua e limitada para todo $s \in \mathcal{S}$ com $f(0) = 0$. Se existir uma função contínua $V : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ e escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 satisfazendo as seguintes desigualdades:*

$$\epsilon_1 s' s \leq V(s) \leq \epsilon_2 s' s, \quad DV(s) + \epsilon_3 s' s \leq 0, \quad \forall s \in \mathcal{S},$$

então o equilíbrio $s = 0$ é localmente exponencialmente estável. Além disso, para todo $s(0) \in \mathcal{R}(c)$, com $\mathcal{R}(c) := \{s \in \mathbb{R}^{n_s} : V(s) \leq c\}$ e c sendo um escalar positivo tal que $\mathcal{R}(c) \subset \mathcal{S}$, então $s(k) \in \mathcal{R}(c), \forall k > 0$, e $\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = 0$. \square

Lema 3.2 ((DE OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002)). *Seja P e G matrizes reais e quadradas com $P > 0$ e G não singular. Então, a seguinte relação é satisfeita:*

$$G' P^{-1} G \geq G + G' - P. \quad \square$$

3.1.1 Realimentação de Estados

Considere o sistema em malha fechada formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.3) e Eq. (3.5), isto é:

$$x(k+1) = A(x)x(k) + B(x)Q(Kx(k)). \quad (3.8)$$

Sabendo que o quantizador logarítmico ideal definido pela equação Eq. (1.2) é precisamente limitado por um setor como ilustrado na Fig. 2, verifica-se que o quantizador $Q(v)$ pode ser definido de forma alternativa como segue:

$$Q(v) = v + q(v), \quad q(v) : |q(v)| \leq \delta v. \quad (3.9)$$

Então, o sistema em malha fechada dado pela Eq. (3.8) pode ser descrito como segue:

$$x(k+1) = \bar{A}(x)x(k) + B(x)q(v(k)),$$

com $\bar{A}(x) = A(x) + B(x)K$. Note que $q(v(k))$ satisfaz a seguinte condição de setor:

$$\delta^2 v'v - q(v)'q(v) \geq 0.$$

Seja $V(x) = x'Px$, $P > 0$, uma função de Lyapunov candidata. Então, para um dado escalar $\epsilon_3 > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = & DV(x) + \epsilon_3 x'x = x'(\bar{A}(x)'P\bar{A}(x) - P + \epsilon_3 I)x \\ & + 2q(v)'B(x)'P\bar{A}(x)x + q(v)'B(x)'PB(x)q(v). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seja $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular a ser determinada e as seguintes variáveis auxiliares:

$$\xi = G^{-1}x, \quad H = KG.$$

Então a Eq. (3.10) pode ser reescrita como

$$\Gamma(x) = \xi' M_1(x)\xi + \frac{2q(v)'}{\tau} M_2(x)\xi + \frac{q(v)'}{\tau} M_3(x) \frac{q(v)}{\tau} \quad (3.11)$$

com τ sendo uma variável de folga introduzida pela Procedimento- S e

$$\begin{aligned} M_1(x) &= (A(x)G + B(x)H)'P(A(x)G + B(x)H) - G'PG + \epsilon_3 I, \\ M_2(x) &= \tau B(x)'P(A(x)G + B(x)H), \\ M_3(x) &= \tau^2 B(x)'PB(x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando o exposto no Lema 3.1, o controlador deve projetado de forma que

$$\Gamma(x) < 0, \quad \forall q(v) : \delta^2 v'v - q(v)'q(v) \geq 0, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (3.13)$$

O resultado a seguir propõe uma condição suficiente em termos de um conjunto finito de restrições LMIs para que a condição dada pela Eq. (3.13) seja garantida.

Teorema 3.1. *Considere o sistema de controle em malha fechada dado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.3) e Eq. (3.5). Seja \mathcal{X} um dado politopo como definido pela Eq. (3.6) ou pela Eq. (3.7), e $\rho \in (0, 1]$ uma dada densidade de quantização. Suponha que existam matrizes Q , G e H , e um escalar positivo τ satisfazendo as seguintes LMIs:*

$$1 - c_j' Q c_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.14)$$

$$\Phi(x, Q, G, H, \tau, \delta) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\mathcal{X}), \quad (3.15)$$

com $\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$, $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ representando o conjunto dos vértices de \mathcal{X} e

$$\Phi(\cdot) = \begin{bmatrix} Q - G - G' & * & * & * \\ 0 & -\tau & * & * \\ A(x)G + B(x)H & \tau B(x) & -Q & * \\ \delta H & 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema em malha fechada formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.3) e Eq. (3.5) com $K = HG^{-1}$ é localmente exponencialmente estável. Além disso, para qualquer $x(0) \in \mathcal{R} := \{x \in \mathbb{R}^n : x'Q^{-1}x \leq 1\}$, a trajetória $x(k) \in \mathcal{R}$ para todo $k > 0$ e $x(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. \square

Demonstração. Primeiro, note que a condição da Eq. (3.14) é equivalente a $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ (ver, e.g., (BOYD et al., 1994)). Ademais, note-se que a condição da Eq. (3.15) implica que $Q > 0$ e G é não singular. Seja $P = Q^{-1}$ e considere a função $V(x) = x'Px$.

Tem-se então, por argumentos de convexidade, que a LMI da Eq. (3.15) é também satisfeita para todo $x \in \mathcal{X}$. Na sequência, aplicando o complemento de Schur's em $\Phi(\cdot) < 0$ leva a :

$$\begin{bmatrix} (P^{-1} - G - G') & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta H' \\ 0 \end{bmatrix} \tau^{-1} \begin{bmatrix} \delta H' \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} (A(x)G + B(x)H)' \\ \tau B(x)' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} (A(x)G + B(x)H)' \\ \tau B(x)' \end{bmatrix}' < 0,$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Do Lema 3.2, tem-se que $P^{-1} - G - G' \geq G'PG$. Portanto, a desigualdade acima implica que

$$\check{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \widehat{M}_1(x) & M_2(x)' \\ M_2(x) & \widehat{M}_3(x) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3.16)$$

com $M_2(x)$ definido pela Eq. (3.1.1) e

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1(x) &= (A(x)G + B(x)H)' P (A(x)G + B(x)H) - G'PG + \tau^{-1} \delta^2 H' H, \\ \widehat{M}_3(x) &= \tau^2 B(x)' P B(x) - \tau. \end{aligned}$$

Seja $N = \begin{bmatrix} G & 0_{n \times 1} \end{bmatrix}$. Visto que a desigualdade da Eq. (3.16) é restrita, então existe um $\epsilon_3 > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$\check{\Phi}(x) + \epsilon_3 N' N < 0, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Então, pré-multiplicando a desigualdade acima por $\begin{bmatrix} (G^{-1}x)' & q(v)/\tau \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} (G^{-1}x) & q(v)/\tau \end{bmatrix}'$ obtém-se o seguinte resultado:

$$DV(x) + \epsilon_3 x' x + \tau^{-1}(\delta^2 v' v - q(v)' q(v)) < 0, \forall x \in \mathcal{X}, \quad (3.17)$$

considerando a Eq. (3.11) e que $(G^{-1}x)' H' H (G^{-1}x) = v' v$. Ao aplicar o Procedimento-S (BOYD et al., 1994) na Eq. (3.17) obtém-se a Eq. (3.13) e assim o resultado desse teorema segue do Lema 3.1. \square

O Teorema 3.1 é instrumental para resolver o problema de estabilização de um sistema não linear quadrático sujeito a quantização logarítmica ideal via uma lei de realimentação de estados linear. Por exemplo, o ganho de realimentação de estados K que estabiliza o sistema e que maximiza a estimativa da região de estabilidade \mathcal{R} para uma dada densidade de quantização ρ pode ser obtido por meio do seguinte problema de otimização convexa:

$$\max_{Q, G, H, \tau} \log \det(Q) \text{ sujeito a Eq. (3.14) e a Eq. (3.15)}. \quad (3.18)$$

Note que o problema da Eq. (3.18) maximiza o volume de \mathcal{R} . Por outro lado, é interessante determinar o ganho K que estabiliza o sistema enquanto minimizando a densidade de quantização ρ para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{R}_0 . Com essa finalidade, o conjunto \mathcal{R}_0 é definido por

$$\mathcal{R}_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x' P_0 x \leq 1\},$$

com $P_0 > 0$ tal que $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$, i.e., $P_0 - Q^{-1} \geq 0$.

Neste cenário, o seguinte problema de otimização é proposto:

$$\max_{Q, G, H, \tau, \delta} \delta \text{ sujeito a } \begin{cases} \text{Eq. (3.14), Eq. (3.15), } 0 \leq \delta < 1, \\ \text{e } \begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

O problema de otimização acima não é conjuntamente convexo em δ e H . Mesmo assim, a maximização de δ pode ser alcançada via um procedimento de bisseção onde a cada iteração um problema de factibilidade de LMI é resolvido.

3.1.2 Realimentação de Saída

Considerando a condição da Eq. (3.9), o sistema em malha fechada formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.4) e Eq. (3.5) pode ser representado pelo seguinte modelo no espaço de estados:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(x)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(x)q(v(k)) \\ v(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) \end{cases}, \quad (3.20)$$

no qual $\tilde{x}(k) := [x(k)' \hat{x}(k)']' \in \mathbb{R}^{2n}$ é o estado aumentado,

$$\tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x)\hat{C} \\ \hat{B}C(x) & \hat{A} \end{bmatrix}, \tilde{B}(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}' \end{bmatrix}', \quad (3.21)$$

e $q(v(k))$ é tal que

$$\delta^2 \tilde{x}' \tilde{C}' \tilde{C} \tilde{x} - q(v)' q(v) \geq 0. \quad (3.22)$$

Seja a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}' \tilde{P} \tilde{x}, \quad \tilde{P} > 0. \quad (3.23)$$

Então, para um escalar $\tilde{\epsilon}_3 > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(x) &= DV(\tilde{x}) + \tilde{\epsilon}_3 \tilde{x}' \tilde{x} = \tilde{x}' (\tilde{A}(x)' \tilde{P} \tilde{A}(x) - \tilde{P} + \tilde{\epsilon}_3 I) \tilde{x} \\ &\quad + 2q(v)' \tilde{B}(x)' \tilde{P} \tilde{A}(x) \tilde{x} + q(v)' \tilde{B}(x)' \tilde{P} \tilde{B}(x) q(v). \end{aligned}$$

Tendo em vista a Eq. (3.22), obtém-se através do Procedimento-S que $\tilde{\Gamma}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{X}$, e δ satisfazendo a Eq. (3.22), se para algum escalar $\tilde{\tau} > 0$ a condição abaixo é satisfeita:

$$\begin{aligned} \tilde{x}' (\tilde{A}(x)' \tilde{P} \tilde{A}(x) - \tilde{P} + \tilde{\epsilon}_3 I + \tilde{\tau} \delta^2 \tilde{C}' \tilde{C}) \tilde{x} \\ + 2q(v)' \tilde{B}(x)' \tilde{P} \tilde{A}(x) \tilde{x} + q(v)' (\tilde{B}(x)' \tilde{P} \tilde{B}(x) - \tilde{\tau}) q(v) < 0. \end{aligned}$$

Sendo $\tilde{G} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ uma matriz não singular a ser determinada e denotando $\tilde{G}^{-T} := (\tilde{G}^{-1})'$, a última desigualdade pode ser rescrita como

$$[\tilde{x}' \quad q(v)'] R(x) [\tilde{x}' \quad q(v)']' < 0, \quad (3.24)$$

com

$$R(x) = \begin{bmatrix} R_1(x) & R_2(x)' \\ R_2(x) & R_3(x) \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} R_1(x) = (\tilde{G}\tilde{A}(x))' (\tilde{G}^{-T}\tilde{P}\tilde{G}^{-1}) (\tilde{G}\tilde{A}(x)) - \tilde{P} + \tilde{\epsilon}_3 I + \tilde{\tau}\delta^2\tilde{C}'\tilde{C}, \\ R_2(x) = (\tilde{G}\tilde{B}(x))' (\tilde{G}^{-T}\tilde{P}\tilde{G}^{-1}) (\tilde{G}\tilde{A}(x)), \\ R_3(x) = (\tilde{G}\tilde{B}(x))' (\tilde{G}^{-T}\tilde{P}\tilde{G}^{-1}) (\tilde{G}\tilde{B}(x)) - \tilde{\tau}. \end{cases}$$

Assim, $\tilde{\Gamma}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{X}$, se $R(x) < 0, \forall x \in \mathcal{X}$.

Aplicando-se o complemento de Schur na Eq. (3.24) chega-se a seguinte condição equivalente a $R(x) < 0$:

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P} + \tilde{\epsilon}_3 I & * & * & * \\ 0 & -\tilde{\tau} & * & * \\ \tilde{G}\tilde{A}(x) & \tilde{G}\tilde{B}(x) & -\tilde{G}\tilde{P}^{-1}\tilde{G}' & * \\ \delta\tilde{\tau}\tilde{C} & 0 & 0 & -\tilde{\tau} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3.25)$$

Note que pela estrutura de $\tilde{A}(x)$ na Eq. (3.20) a condição dada pela Eq. (3.25) não é conjuntamente convexa em \tilde{G} , \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

Para a derivação de uma solução convexa, primeiro, assume-se que o controlador dado pela Eq. (3.4) tem uma estrutura baseada em um observador de estados, como segue:

$$\begin{cases} v(k) = K\hat{x}(k) \\ \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}y(k) \end{cases}, \quad (3.26)$$

com K representando o ganho de realimentação de estados que estabiliza localmente o sistema definido pela Eq. (3.8) (projetado, por exemplo, por meio do Teorema 3.1), e \hat{A} e \hat{B} são matrizes a determinar. Adicionalmente, o multiplicador \tilde{G} é definido na seguinte forma:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} G_1 & \sigma G_3 \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

sendo $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresenta-se um resultado que estabelece uma condição em termos de um conjunto finito de LMIs para o problema de estabilização via realimentação de saída.

Teorema 3.2. *Considere o sistema formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.5) e Eq. (3.26). Seja \mathcal{X} um dado polítopo definido pela Eq. (3.6) ou de forma equivalente pela Eq. (3.7), $\rho \in (0, 1]$ um escalar definindo a densidade de quantização e $\sigma \in \mathbb{R}$ um parâmetro de escalonamento. Seja $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ um ganho de realimentação de estados que estabiliza localmente o sistema formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.3) e Eq. (3.5) para todo $x \in \mathcal{X}$. Suponha que existam matrizes $P_1 = P'_1$, P_2 , $P_3 = P'_3$, G_1 , G_2 , G_3 , A_d e B_d , e um escalar $\tilde{\tau} > 0$ satisfazendo as seguintes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} 1 & c'_j & 0 \\ c_j & P_1 & P'_2 \\ 0 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.28)$$

$$\Psi(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}(\mathcal{X}), \quad (3.29)$$

com δ como definido na Eq. (1.3) e

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} -P_1 & * & * & * & * & * \\ -P_2 & -P_3 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\tilde{\tau} & * & * & * \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} & * & * \\ \Psi_{51} & \Psi_{52} & \Psi_{53} & \Psi_{54} & \Psi_{55} & * \\ 0 & \delta\tilde{\tau}K & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\tau} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{cases} \Psi_{41} = G_1 A(x) + \sigma B_d C(x), & \Psi_{42} = G_1 B(x)K + \sigma A_d, \\ \Psi_{43} = G_1 B(x), & \Psi_{44} = P_1 - G_1 - G'_1, \\ \Psi_{51} = G_2 A(x) + B_d C(x), & \Psi_{52} = G_2 B(x)K + A_d, \\ \Psi_{53} = G_2 B(x), & \Psi_{54} = P_2 - G_2 - \sigma G'_3, \\ \Psi_{55} = P_3 - G_3 - G'_3. \end{cases}$$

Então, o sistema em malha fechada formado pelas Eq. (3.1), Eq. (3.5) e Eq. (3.26) com

$$\hat{A} = G_3^{-1} A_d, \quad \hat{B} = G_3^{-1} B_d, \quad \hat{C} = K,$$

é localmente exponencialmente estável. Ademais, para qualquer $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{R}} := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n} : \tilde{x}' \tilde{P} \tilde{x} \leq 1\}$, a trajetória do estado $\tilde{x}(k) \in \tilde{\mathcal{R}}$ para todo $k > 0$ e $\tilde{x}(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, com

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2' \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

□

Demonstração. Primeiro, note que a condição da Eq. (3.28) implica que $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n$ (veja, e.g., (BOYD et al., 1994)). Na sequência, por argumentos de convexidade, tem-se que as LMIs da Eq. (3.29) também são satisfeitas para todo $x \in \mathcal{X}$. Adicionalmente, existe um escalar $\tilde{\epsilon}_3 > 0$ tal que

$$\Psi(x) + \text{diag}\{\tilde{\epsilon}_3 I_{2n}, 0_{2n+2}\} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3.31)$$

Sendo \tilde{G} e \tilde{P} como na Eq. (3.27) e na Eq. (3.30), respectivamente, e considerando as definições de $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$ e \tilde{C} na Eq. (3.21) e que $A_d = G_3 \hat{A}$, $B_d = G_3 \hat{B}$ e $K = \hat{C}$, pode ser prontamente verificado que a Eq. (3.31) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P} + \tilde{\epsilon}_3 I & * & * & * \\ 0 & -\tilde{\tau} & * & * \\ \tilde{G}\tilde{A}(x) & \tilde{G}\tilde{B}(x) & \tilde{P} - \tilde{G} - \tilde{G}' & * \\ \delta\tilde{\tau}\tilde{C} & 0 & 0 & -\tilde{\tau} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (3.32)$$

Note que a Eq. (3.32) implica que $\tilde{P} > 0$ e \tilde{G} é uma matriz não singular, e tendo em vista a definição da Eq. (3.27), assegura-se a não singularidade de G_3 . Além do mais, pelo Lema 3.2, nota-se que $\tilde{P} - \tilde{G} - \tilde{G}' \geq \tilde{G}\tilde{P}^{-1}\tilde{G}'$. Logo, pela Eq. (3.32) assegura-se que a Eq. (3.25) é satisfeita. Então, o resto da prova segue diretamente do Lema 3.1. □

Similarmente ao Teorema 3.1 referente ao caso de realimentação de estados, o Teorema 3.2 pode ser aplicado tanto para maximizar $\tilde{\mathcal{R}}$ ou minimizar ρ . Por exemplo, o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\substack{\sigma, \tilde{\tau}, P_1, P_2, P_3, \\ G_1, G_2, G_3, A_d, B_d}} \text{tr}(P_1) \text{ sujeito a Eq. (3.28) e Eq. (3.29)}, \quad (3.33)$$

maximiza o volume de $\tilde{\mathcal{R}}$ na direção definida por $[I_n \ 0_n] \tilde{x}$. Note que a desigualdade matricial da Eq. (3.29) não é conjuntamente convexa em σ, G_2, A_d e B_d . Entretanto, para um dado σ , a desigualdade matricial da Eq. (3.29) torna-se uma LMI. Assim, ao realizar-se uma busca linear em $\sigma \in \mathbb{R}$, pode-se resolver o problema de otimização em Eq. (3.33) iterativamente em termos de restrições LMI.

3.2 Estabilização para Um Quantizador Logarítmico Finito

Nesta seção trata-se do problema de estabilização de um sistema não linear quadrático sujeito a uma quantização logarítmica com número finito de níveis presente no canal do sinal de entrada do controle no sistema. Considera-se que o controle pode ser realizado tanto por uma lei de realimentação de estados quanto por uma lei de realimentação dinâmica de saída. As condições de estabilidade levam em conta que ambas as leis de controle podem ser não lineares tratando desta forma o caso mais geral. Por fim, demonstra-se que é possível realizar o projeto de um quantizador prático de maneira similar ao que foi apresentado na Seção 2.4.

Para tanto, considere o esquema de um sistema realimentado quantizado apresentando na Fig. 6 com $Q_2(\cdot) = Q(\cdot)$ e $Q_1(\cdot) = 1$. Suponha que o sistema dado pela Eq. (3.1) possa ser localmente estabilizável através de uma das seguintes leis de controle:

$$w(k) = K(x)x(k), \quad (3.34)$$

em que

$$K(x) = K_0 + \sum_{i=1}^n x_i K_i, \quad (3.35)$$

com $K_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes reais e constantes conhecidas, ou

$$\begin{cases} \xi(k+1) = A_c(\xi)\xi(k) + B_c(\xi)v(k) \\ w(k) = C_c(\xi)\xi(k) \end{cases}, \quad (3.36)$$

sendo $\xi \in \mathcal{X}_c \subset \mathbb{R}^{n_c}$ o estado do controlador, $v \in \mathbb{R}$ a entrada do controlador, $w \in \mathbb{R}$ a saída do controlador e \mathcal{X}_c é um politopo no espaço de estados que contém a origem $\xi = 0$ (a ser especificado a seguir). $A_c(\xi) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c(\xi) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_v}$ e $C_c(\xi) \in \mathbb{R}^{1 \times n_c}$ são matrizes afins em ξ , isto é:

$$A_c(\xi) = A_{c_0} + \sum_{i=1}^{n_c} \xi_i A_{c_i}, \quad B(\xi) = B_{c_0} + \sum_{i=1}^{n_c} \xi_i B_{c_i}, \quad C(\xi) = C_{c_0} + \sum_{i=1}^{n_c} \xi_i C_{c_i}, \quad (3.37)$$

com ξ_i denotando a i -ésima componente de ξ , e A_{c_i} , B_{c_i} e C_{c_i} , $i = 0, 1, \dots, n$, são matrizes reais conhecidas.

Assume-se que \mathcal{X}_c é um politopo simétrico (com respeito à origem do espaço de estados ξ), sendo a sua representação em termo de suas faces definida por:

$$\mathcal{X}_c = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_c} : |c'_{c_j} \xi| \leq 1, j = 1, \dots, r_c \right\}, \quad (3.38)$$

com $c_{c_j} \in \mathbb{R}^{n_c}$, $j = 1, \dots, r_c$, definindo as faces do politopo \mathcal{X}_c . Alternativamente, \mathcal{X}_c pode ser representado em termos da casca convexa de seus q_c vértices, i.e.,

$$\mathcal{X}_c = \text{Co}\{v_{c_1}, v_{c_2}, \dots, v_{c_{q_c}}\}. \quad (3.39)$$

Tanto o controlador dado pela Eq. (3.34) quanto pela Eq. (3.4) realimenta seu sinal de saída ao sistema da Eq. (3.1) por meio de um canal sujeito a quantização, isto é:

$$u(k) = Q(w(k)), \quad (3.40)$$

com $Q(\cdot)$ um quantizador logarítmico, simétrico e ideal. No caso específico da realimentação de saída, supõe-se que o sinal $v(k) = y(k)$, uma vez que não é considerado a quantização no canal de saída.

Considere o seguinte sistema aumentado (que engloba os dois casos possíveis para a lei de controle considerando um único quantizador):

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_i(\zeta)\zeta(k) + B_i(\zeta)Q(w(k)) \\ w(k) = C_i(\zeta)\zeta(k) \end{cases}, \quad (3.41)$$

no qual $Q(\cdot)$ é a função de quantização definida em Eq. (2.6) e o índice i é determinado de acordo com a configuração de realimentação utilizada. Mais especificamente, $i = 1$ se refere a configuração com realimentação de estados e $i = 2$ se refere a configuração com realimentação de saída. Através de manipulações algébricas, obtém-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A_1(\zeta) &= A(x), B_1(\zeta) = B(x), C_1(\zeta) = K(x), n_1 = n, n_2 = n + n_c, \\ A_2(\zeta) &= \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ B_c(\xi)C(x) & A_c(\xi) \end{bmatrix}, B_2(\zeta) = \begin{bmatrix} B(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_2(\zeta) &= \begin{bmatrix} 0 & C_c(\xi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

No caso da realimentação de estados tem-se que $\zeta = [x']'$, e assume-se que $\zeta \in \mathcal{X}_1 \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$. De maneira similar, no caso de realimentação de saída tem-se que $\zeta = [x' \ \xi']'$, e supõe-se que $\zeta \in \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^{n+n_c}$ com $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \times \mathcal{X}_c$ sendo tal que

$$\mathcal{X}_2 = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{\zeta} : |c'_{2_j} \zeta| \leq 1, j = 1, \dots, r \right\},$$

com $c_{2_j} \in \mathbb{R}^{\zeta}$, $j = 1, \dots, r$ definindo as faces de \mathcal{X}_2 . Alternativamente, pode-se representar o politopo \mathcal{X}_2 como a casca convexa de seus q vértices, isto é:

$$\mathcal{X}_2 = \text{Co}\{v_{2_1}, v_{2_2}, \dots, v_{2_q}\}.$$

O desenvolvimento de condições para a análise de estabilidade para um uma malha de controle com um sistema não linear quadrático, sendo que o canal de comunicação é submetido a um quantizador com número finito de níveis segue passos similares ao caso para sistemas lineares como apresentado na Seção 2.2. Também, o caso de um quantizador finito pode ser visto como uma particularização do caso de dois quantizadores finitos a ser apresentado na próxima Seção. Desse modo, o desenvolvimento mais detalhado será deixado para o caso mais geral

e a seguir será apresentado de forma sucinta o resultado para o caso de um quantizador finito.

Considere que associado com o sistema da Eq. (3.41) e com o quantizador finito da Eq. (2.6), definem-se os conjuntos \mathcal{B} e \mathcal{C} que estão relacionados, respectivamente, com o maior e menor níveis de quantização.

$$\mathcal{B} =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_i} : |C_i(\zeta)\zeta| \leq \mu/(1-\delta)\}, \quad i=1, 2, \quad (3.42)$$

$$\mathcal{C} =: \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_i} : |C_i(\zeta)\zeta| \leq \epsilon\}, \quad \epsilon = \rho^{N-1}\mu/(1+\delta), \quad i=1, 2, \quad (3.43)$$

sendo que $C_i(\zeta)$ denota a configuração de realimentação utilizada.

Seguindo a definição do conceito de estabilidade quadrática no sentido amplo para sistema lineares com um quantizador, apresentado na Seção 2.2, considere o conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} dado pela Eq. (2.13), o conjunto atrator \mathcal{A} definido na Eq. (2.14) e o conjunto \mathcal{C}_p definido pela Eq. (2.15).

Definição 3.1. *O sistema em malha fechada quantizado da Eq. (3.1) é dito quadraticamente estável no sentido amplo se existirem funções quadráticas $V(\zeta) = \zeta'P\zeta$, $P > 0$ e $V_a(\zeta) = \zeta'P_a\zeta$, $P_a > 0$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{X}_i, \quad (3.44)$$

$$DV(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{C}, \quad (3.45)$$

$$DV_a(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{C}_p, \quad (3.46)$$

$$\zeta(k+1) \in \mathcal{A} \quad \text{sempre que} \quad \zeta(k) \in \mathcal{C}_p, \quad (3.47)$$

com $i = 1$ para realimentação de estados e $i = 2$ para realimentação de saída.

Note que a noção de estabilidade quadrática no sentido amplo assegura que para qualquer $\zeta(0) \in \mathcal{D}$, a trajetória $\zeta(k)$ irá convergir para o conjunto atrator \mathcal{A} em um tempo finito.

Para obter uma formulação LMI para as leis de controle não lineares definidas nas Eq. (3.34) e Eq. (3.36), considere as seguintes

decomposições das matrizes $C_1(\zeta)$ e $C_2(\zeta)$:

$$C_1(x) = \mathbb{C}_1 \Psi_1(\zeta) = \mathbb{K} \Psi(x), \quad (3.48)$$

$$C_2(\zeta) = \mathbb{C}_2 \Psi_2(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_c(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

em que

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \begin{bmatrix} I_n & \Pi(x)' \end{bmatrix}', \quad \Pi(x) = x \otimes I_n, \\ \Psi_c(\xi) &= \begin{bmatrix} I_{n_c} & \Pi_c(\xi)' \end{bmatrix}', \quad \Pi_c(\xi) = \xi \otimes I_{n_c}, \end{aligned}$$

com o símbolo \otimes representando o produto de Kronecker, e

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \cdots & K_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_c = \begin{bmatrix} C_{c_0} & C_{c_1} & \cdots & C_{c_{n_c}} \end{bmatrix},$$

em que K_i , $i = 1, \dots, n$, e C_{c_j} , $j = 1, \dots, n_c$, são matrizes constantes definidas na Eq. (3.35) e na Eq. (3.37), respectivamente.

Considere, também, a matriz \mathbb{N}_i , tal que $\mathbb{N}_i \Psi_i(\zeta) = I_{n_\zeta}$, i.e.,

$$\mathbb{N}_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_c = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times n_c^2} \end{bmatrix}.$$

Definindo a matriz $\Omega_i(\zeta)$ como uma função afim em ζ tal que $\Omega_i(\zeta) \Psi_i(\zeta) = 0$ e tendo a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &= \begin{bmatrix} \Pi(x) & -I_{n \times n^2} \\ \mathcal{N}(x) & 0_{n \times m} \end{bmatrix}, \quad \Omega_2(\zeta) = \begin{bmatrix} \Omega_1(x) & 0 \\ 0 & \Omega_c(\xi) \end{bmatrix}, \\ \Omega_c(\xi) &= \begin{bmatrix} \Pi_c(\xi) & -I_{n_c \times n_c^2} \\ \mathcal{N}'_c(\xi) & 0_{n_c \times m_c} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, considera-se que o operador $\mathcal{N}(x) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n^2}$ é chamado de matriz aniquiladora linear de $\Pi(x)$ (TROFINO, 2000; DE SOUZA; COUTINHO, 2011) sendo definida tal que:

$$\mathcal{N}(x) = \begin{bmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0_n & \cdots & 0_n & 0_n \\ 0_n & x_3 I_n & -x_2 I_n & \cdots & 0_n & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \cdots & x_n I_n & -x_{n-1} I_n \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

De forma análoga, $\mathcal{N}_c(\xi) \in \mathbb{R}^{(n_c-1) \times n_c^2}$ é definido como a matriz aniquiladora linear de $\Pi_c(\xi)$, i.e.:

$$\mathcal{N}_c(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 I_{n_c} & -\xi_1 I_{n_c} & 0_{n_c} & \cdots & 0_{n_c} & 0_{n_c} \\ 0_{n_c} & \xi_3 I_{n_c} & -\xi_2 I_{n_c} & \cdots & 0_{n_c} & 0_{n_c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n_c} & 0_{n_c} & 0_{n_c} & \cdots & \xi_{n_c} I_{n_c} & -\xi_{n_c-1} I_{n_c} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

A seguir apresenta-se uma formulação LMI para a análise da estabilidade de sistemas não lineares quadráticos quantizados.

Teorema 3.3. *Seja $Q(\cdot)$ um quantizador finito como dado na Eq. (2.6), com μ , ρ e N conhecidos. Considere o sistema Eq. (3.1) e uma lei de controle por realimentação de estados definida pela Eq. (3.34) ou por realimentação de saída dada pela Eq. (3.36), com a conexão de malha fechada dada pela Eq. (3.40). O sistema em malha fechada da Eq. (3.41) é localmente quadraticamente estável no sentido amplo se existirem matrizes P , P_a , L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 e L_6 , e escalares τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4 satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais:*

$$P_a - P > 0, \quad \tau_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \tau_3 - \tau_4 \geq 0, \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ c_j & P \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.53)$$

$$N'_i P N_i - (1-\delta)^2 \mu^{-2} \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i + \text{He}(L_1 \Omega_i(\zeta)) > 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{21}(\zeta) & \Upsilon_{22} & * \\ \Upsilon_{31}(\zeta) & \Upsilon_{32}(\zeta) & \Upsilon_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{a11}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{a21}(\zeta) & \Upsilon_{a22} & * \\ \Upsilon_{a31}(\zeta) & \Upsilon_{a32}(\zeta) & \Upsilon_{a33} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(\zeta) & * \\ U_2(\zeta) & U_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.57)$$

para $i = 1, 2$ dependendo da configuração de realimentação a ser considerada. A notação $\mathcal{V}(\mathcal{X}_a)$ representa o conjunto de todos os vértices de \mathcal{X}_a , e

$$\begin{cases} \Upsilon_{11}(\zeta) = -\mathbb{N}'_i P \mathbb{N}_i - \tau_1(1 - \delta^2) \mathbb{C}'_i \mathbb{C}_i + \text{He}(L_2 \Omega_i(\zeta)), \\ \Upsilon_{21}(\zeta) = \tau_1 \mathbb{C}_i + L_3 \Omega_i(x), \quad \Upsilon_{22} = -\tau_1, \\ \Upsilon_{31}(\zeta) = P A_i(\zeta) \mathbb{N}_i, \quad \Upsilon_{32}(\zeta) = P B_i(\zeta), \quad \Upsilon_{33} = -P. \\ \Upsilon_{a11}(\zeta) = -\mathbb{N}'_i P_a \mathbb{N}_i - \tau_2(1 - \delta^2) \mathbb{C}'_i \mathbb{C}_i + \text{He}(L_4 \Omega_i(x)), \\ \Upsilon_{a21}(x\zeta) = \tau_2 \mathbb{C}_i + L_5 \Omega_i(x), \quad \Upsilon_{a22} = -\tau_2, \\ \Upsilon_{a31}(\zeta) = P_a A_i(\zeta) \mathbb{N}_i, \quad \Upsilon_{a32}(\zeta) = P_a B_i(\zeta), \quad \Upsilon_{a33} = -P_a. \\ U_1(\zeta) = \mathbb{N}'_i P_a \mathbb{N}_i + \tau_4 \epsilon^{-2} \mathbb{C}'_i \mathbb{C}_i + \text{He}(L_6 \Omega_i(\zeta)), \\ U_2(\zeta) = (1 + \tau_3) P_a A_i(\zeta) \mathbb{N}_i, \quad U_3 = (1 + \tau_3) P_a. \end{cases}$$

□

A prova do Teorema 3.3 segue as mesmas linhas da prova do Teorema 3.5 (a ser apresentado na sequência deste capítulo na seção 3.3) e por este motivo não será apresentada.

3.2.1 Projeto de Um Quantizador Logarítmico Prático

É possível aplicar a ideia apresentada no Teorema 3.3 para o projeto dos parâmetros do quantizador quando utilizando sistema não lineares quadráticos. Assumindo que existe um controle (linear ou não linear) que estabiliza quadraticamente o sistema Eq. (3.1) e seja $\mathcal{D}_0 = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : \zeta' P_0 \zeta \leq 1\}$, $P_0 > 0$, um conjunto dado para as condições iniciais admissíveis e ϑ o volume máximo do conjunto atrator \mathcal{A} .

Sabendo que o volume de um elipsoide definido pelo conjunto $\mathcal{A} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : \zeta' P_a \zeta \leq 1, P_a > 0\}$ é dado por $c/\sqrt{\det(P_a)}$ sendo que c é uma constante que depende da quantidade de estados do sistema e do controlador adicionadas. O procedimento para o projeto do quantizador $Q(\cdot)$, estático e logarítmico com um número finitos níveis, tal que, a

estabilidade local quadrática no sentido amplo do sistema da Eq. (3.41) seja garantida, segue os seguintes passos:

Passo 1: Considera-se o quantizador logarítmico é ideal e assim determina-se um controlador que assegure a estabilidade local do sistema em malha fechada com uma dada densidade de quantização ρ relacionada a esse controlador. Para tanto, aplica-se, por exemplo, a metodologia proposta na Seção 3.1, i.e. o Teorema 3.1 para o caso de realimentação de estados e o Teorema 3.2 para o caso de realimentação de saída ou qualquer outro método disponível para projeto de controladores lineares bem como não lineares.

Passo 2: Determina-se as matrizes P e P_a e escalares positivos η , σ , $\bar{\tau}_4$, τ_1, τ_2 e τ_3 satisfazendo as desigualdades das Eq. (3.55) e Eq. (3.56), e as seguintes condições:

$$P_a - P_0 > 0, \quad P_0 - P > 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ c_j & P \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.58)$$

$$\tau_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \tau_3 \sigma - \bar{\tau}_4 \geq 0, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{N}'_i P \mathbf{N}_i - (1 - \delta)^2 \eta \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i + \text{He}(L_1 \Omega_i(\zeta)) > 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a) \quad (3.60)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(\zeta) & * \\ U_2(\zeta) & U_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.61)$$

$$\vartheta^{\frac{2}{n\zeta}} P_a - c^{\frac{2}{n\zeta}} I \geq 0, \quad (3.62)$$

com

$$\begin{cases} U_1(\zeta) = \mathbf{N}'_i P_a \mathbf{N}_i + \bar{\tau}_4 \mathbf{C}'_i \mathbf{C}_i + \text{He}(L_6 \Omega(\zeta)), \\ U_2(\zeta) = (1 + \tau_3) P_a A_i(\zeta) \mathbf{N}_i, \quad U_3 = (1 + \tau_3) P_a, \end{cases}$$

e $i = 1$ ou $i = 2$ dependendo da realimentação utilizada.

Note que as Eq. (3.59)-Eq. (3.61) são provenientes do Teorema 3.3 quando $\eta = \mu^{-2}$, $\sigma = \epsilon^{-2}$ e $\bar{\tau}_4 = \tau_4 \epsilon^{-2}$, enquanto que a Eq. (3.62) garante que ϑ seja o limite superior para o volume do conjunto atrator \mathcal{A} e por fim as condições da Eq. (3.58) garantem que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{X}_i \cap \mathcal{B}$, para $i = 1, 2$.

Passo 3: Os parâmetros do quantizador são dados por

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}.$$

Além disso, o número de níveis de quantização N é o menor valor inteiro que satisfaz

$$N \geq 1 + \log_{\rho}(\epsilon(1 + \delta)/\mu).$$

Ao projetar o quantizador é desejável que o número de bits N_b a ser transmitido seja minimizado enquanto é garantindo a estabilidade quadrática no sentido amplo. Seja, para o quantizador logarítmico finito $Q(\cdot)$, o número total de bits N_b a ser transmitido dado por

$$N_b = \log_2(2N).$$

Definindo $\gamma_p = (\sigma - \eta)$, uma maneira para minimizar-se o número de bits transmitidos é resolver o seguinte problema de otimização

$$\min_{\gamma_p, P, P_a, \eta, \sigma, \bar{\tau}_4, \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3} \gamma_p, \quad \text{sujeito as} \quad \begin{cases} \text{Eq. (3.55) – Eq. (3.56)} \\ \text{e as Eq. (3.58) – Eq. (3.62)} \end{cases}.$$

3.3 Extensão para o Caso com Dois Quantizadores

3.3.1 Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Ideais

A seguir é apresentado o resultado de estabilidade de sistema não lineares quadráticos com um controle por realimentação de saída e com a presença de quantização dos sinais de controle e de saída. Considere o esquema de um sistema realimentado quantizado apresentando na Fig. 6 e suponha que o sistema dado pela Eq. (3.1) possa ser localmente estabilizável através de uma lei de realimentação de saída não linear na forma dada pela equação Eq. (3.36). Considere também os politopos \mathcal{X} e \mathcal{X}_c definidos pelas suas faces nas Eq. (3.6) e Eq. (3.38) ou pelos vértices segundo as Eq. (3.7) e Eq. (3.39). Além disso, a interconexão do sistema da Eq. (3.1) e do controlador dinâmico de saída

da Eq. (3.36) é dado pela seguinte relação:

$$v(k) = Q_1(y(k)), \quad u(k) = Q_2(w(k)), \quad (3.63)$$

sendo que $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ são quantizadores logarítmicos com um número finito de níveis definidos pela Eq. (2.6).

A obtenção de condições para a análise de estabilidade para sistemas quantizados não lineares quadráticos segue passos similares ao caso de sistema lineares apresentado no Capítulo anterior. Primeiramente é necessário apresentar dois resultados que servem de base para provar o conceito de estabilidade de sistema não lineares quadráticos quantizados. Desta forma, apresenta-se uma reformulação do Teorema 2.2 considerando que o sistema é do tipo não linear quadrático.

Teorema 3.4. *A origem do sistema em malha fechada formado pelo sistema da Eq. (3.1) e pela lei de controle da Eq. (3.36) conectados segundo a lei de realimentação da Eq. (3.63), sendo $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ quantizadores estáticos, logarítmicos e com infinitos níveis de quantização é localmente quadraticamente estável se existir um matriz $P > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \bar{A}(\zeta, \Delta_1, \Delta_2)' P \bar{A}(\zeta, \Delta_1, \Delta_2) - P < 0, \\ \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R} : |\Delta_1| \leq \delta_1, |\Delta_2| \leq \delta_2, \forall \zeta \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}_c. \end{aligned}$$

com

$$\bar{A}(\zeta, \Delta_1, \Delta_2) = \begin{bmatrix} A(x) & (1 + \Delta_2)B(x)C_c(\xi) \\ (1 + \Delta_1)B_c(\xi)C(x) & A_c(\xi) \end{bmatrix}, \zeta = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}. \quad \square$$

Demonstração. Primeiro, considere uma função quadrática na forma $V(\zeta) = \zeta' P \zeta$, com $P = P' > 0$. Seja o sistema em malha fechada dado pelas Eq. (3.1)-Eq. (3.36), e

$$\Phi(x, \xi, \delta_1, \delta_2, \varepsilon) = f(x, \xi, \delta_1, \delta_2)' P f(x, \xi, \delta_1, \delta_2) - (1 - \varepsilon) \zeta' P \zeta,$$

em que

$$f(x, \xi, \delta_1, \delta_2) = \begin{bmatrix} A(x)x + (1 + \Delta_2)B(x)C_c(\xi)\xi \\ A_c(\xi)\xi + (1 + \Delta_1)B_c(\xi)C(x)x \end{bmatrix}.$$

Então, ao longo da trajetória do sistema em malha fechada tem-se que:

$$V(\zeta(k+1)) - V(\zeta(k)) < \Phi(x, \xi, \delta_1, \delta_2, \varepsilon),$$

Portanto, a origem do sistema em malha fechada é localmente quadraticamente estável se existir uma matriz $P = P' > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Phi(x, \xi, \delta_1, \delta_2, \varepsilon) \leq 0, \forall x, \xi \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}_c.$$

Para a prova demonstrar-se a suficiência do Teorema 3.4, considere o seguinte Lema:

Lema 3.3. *Dado um quantizador logarítmico ideal $Q(\cdot)$ como descrito na Eq. (2.3) com uma densidade de quantização ρ e seja $\delta = (1 - \rho)/(1 + \rho)$, e definindo que*

$$\Delta(v) = \frac{Q(v)}{v-1}, \quad v \neq 0.$$

Então, as seguintes propriedades mantêm-se:

1. $|\Delta(v)| \leq \delta$ para todo $v \neq 0$.
2. Para qualquer $\Delta_0 \in [-\delta, \delta]$, existe uma solução única $v_0 > 0$ tal que $\Delta(v) = \Delta_0$ quando $v \in [1/(1+\delta), 1/(1-\delta)]$. Além disso, todas as soluções de $v \in (0, \infty)$ são dadas por $\pm \rho^j v_0$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Essas propriedades são facilmente verificadas, assim a prova é omitida. Para a demonstração do Teorema 3.4, primeiro, supõem-se que $\bar{A}(\zeta, \Delta_1, \Delta_2) < 0$ para todo $|\Delta_i| \leq \delta_i, i = 1, 2$. Por continuidade existe um valor suficientemente pequeno $\varepsilon > 0$, tal que $\bar{A}(\zeta, \Delta_1, \Delta_2) + \varepsilon P \leq 0$ para todo $|\Delta_i| \leq \delta_i, i = 1, 2$. Uma consequência direta do Lema 3.3 é dada por: $Q_i(v) = (1 + \Delta_i(v))v$ com $|\Delta_i(v)| \leq \delta_i$ para todo v e $i = 1, 2$. Então

$$\Phi(x, \xi, \delta_1, \delta_2, \varepsilon) = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}' (\bar{A}(\zeta, \Delta_1(v_1), \Delta_2(v_2)) + \varepsilon P) \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix},$$

com $|\Delta_i| \leq \delta_i, i = 1, 2$, com $v_1 = Cx$ e $v_2 = C_c \xi$. Ademais, para todo x e todo ξ , e para um dado $\varepsilon > 0$ obtém-se $\Phi(x, \xi, \delta_1, \delta_2, \varepsilon) \leq 0$. \square

O Teorema 3.4 apresenta uma condição suficiente para a análise de estabilidade local de um sistema não linear quadrático com um lei de realimentação dinâmica de saída sob quantização, sendo o quantizador logarítmico e ideal. Como no caso de sistemas lineares, o problema de estabilização sob quantização pode ser convertido em um problema de estabilização quadrática robusta para um sistema com parâmetros incertos. Assim é possível projetar uma lei de controle não linear que maximiza os parâmetros δ_i , $i = 1, 2$, dos quantizadores ideais.

3.3.2 Estabilidade Considerando Dois Quantizadores Logarítmicos Finitos

O resultado apresentado no Teorema 3.4 serve como base para a obtenção de condições para avaliar a estabilidade quadrática no sentido amplo de sistema não lineares quadráticos realimentados com quantizadores logarítmicos com um número finito de níveis. Ademais, deve-se resgatar o conceito de estabilidade quadrática no sentido amplo aplicado à sistemas lineares, como proposto no Capítulo 2, e reformular o conceito considerando sistemas não lineares quadráticos.

Primeiramente, seja o sistema de controle em malha fechada formado pela planta dada pela Eq. (3.1) e pelo controlador da Eq. (3.63) representado pelo seguinte sistema aumentado no espaço de estados:

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_a(\zeta)\zeta(k) + B_a(\zeta)p(k) \\ q(k) = C_a(\zeta)\zeta(k) \\ p(k) = Q_a(q(k)) \end{cases}, \quad (3.64)$$

com

$$\begin{aligned} \zeta &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}, \\ A_a(\zeta) &= \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & A_c(\xi) \end{bmatrix}, \quad B_a(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & B(x) \\ B_c(\xi) & 0 \end{bmatrix}, \\ C_a(\zeta) &= \begin{bmatrix} C(x) & 0 \\ 0 & C_c(\xi) \end{bmatrix}, \quad Q_a(q) = \begin{bmatrix} Q_1(y) & 0 \\ 0 & Q_2(w) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

com $\zeta \in \mathcal{X}_a \subset \mathbb{R}^{n+n_c} : \mathcal{X}_a = \mathcal{X} \times \mathcal{X}_c$, tal que

$$\mathcal{X}_i = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}_\zeta^n : |c'_{a_j} \zeta| \leq 1, j = 1, \dots, r \right\},$$

sendo que $c_{a_j} \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, r$ definem as faces de \mathcal{X}_a . Alternativamente, por conveniência, o polítopo \mathcal{X}_a pode ser representado como o casco convexo de seus q vértices, i.e.:

$$\mathcal{X}_a = \text{Co}\{v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_q}\}.$$

Associado com o sistema da Eq. (3.64) e com o quantizador da Eq. (2.6), pode-se definir os conjuntos \mathcal{B}_i e \mathcal{C}_i que estão relacionados, respectivamente, com o maior e menor níveis de quantização.

$$\mathcal{B}_i =: \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{n_c} : |C_{a_i}(\zeta)\zeta| \leq \frac{\mu_i}{(1-\delta_i)} \right\}, \quad i=1, 2, \quad (3.66)$$

$$\mathcal{C}_i =: \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{n_c} : |C_{a_i}(\zeta)\zeta| \leq \epsilon_i \right\}, \quad \epsilon_i = \frac{\rho_i^{N_i-1} \mu_i}{(1+\delta_i)}, \quad i=1, 2, \quad (3.67)$$

em que $n_\zeta = n + n_c$ e $C_{a_i}(\zeta)$ denota a i -ésima linha da matriz $C_a(\zeta)$, sendo

$$C_{a_1}(\zeta) = \begin{bmatrix} C(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{a_2}(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & C_c(\xi) \end{bmatrix}.$$

Note que toda vez que o estado ζ do sistema da Eq. (3.64) está em $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, tem-se que $Q_i(v(k)) = 0, i = 1, 2$, e assim o sinal de entrada do sistema e/ou o sinal de entrada do controlador no sistema da Eq. (3.64) podem ter valor zero. Consequentemente, em geral, a trajetória de ζ não irá convergir assintoticamente para à origem, logo a estabilidade quadrática não pode ser garantida.

Para a caracterização de a definição do conceito de estabilidade quadrática no sentido amplo para sistemas não lineares quadráticos, deve-se considerar o conjunto de condições iniciais admissíveis dado pela Eq. (2.13), do conjunto atrator definido na Eq. (2.14) e do conjunto em que o sistema opera em malha aberta, i.e, região em que tem-se $Q_i(\cdot) = 0, i = 1, 2$. Tal conjunto é definido como segue

$$\mathcal{C}_p = \left\{ \zeta \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0 \right\}, \quad (3.68)$$

e considere a definição dos seguintes funcionais de Lyapunov:

$$V(\zeta) = \zeta' P \zeta, \quad V_a(\zeta) = \zeta' P_a \zeta, \quad P_a > P > 0, \quad (3.69)$$

Definição 3.2. *O sistema em malha fechada quantizado da Eq. (3.64) é dito quadraticamente estável no sentido amplo se existirem as funções $V(\zeta)$ e $V_a(\zeta)$ tais como definidos pela Eq. (3.69) que satisfaçam as seguintes condições:*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{X}_a, \quad i = 1, 2, \quad (3.70)$$

$$DV(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_a \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2), \quad (3.71)$$

$$DV_a(\zeta) < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_a \setminus \mathcal{C}_p, \quad (3.72)$$

$$\zeta(k+1) \in \mathcal{A} \quad \text{sempre que} \quad \zeta(k) \in \mathcal{C}_p, \quad (3.73)$$

e com $\zeta \in \mathcal{X}_a$. □

Lembrando que a noção estabilidade quadrática no sentido amplo assegura que para qualquer $\zeta(0) \in \mathcal{D}$, a trajetória $\zeta(k)$ irá convergir para o conjunto atrator \mathcal{A} em um tempo finito.

Visando obter condições LMIs que assegurem a estabilidade quadrática no sentido amplo para a malha fechada da Eq. (3.64), observa-se que a condição $DV(\zeta) < 0$ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a(\zeta)' P A_a(\zeta) - P & * \\ B_a(\zeta)' P A_a(\zeta) & B_a(\zeta)' P B_a(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} < 0. \quad (3.74)$$

Note que para todo $\zeta \in (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$, o vetor de entrada $p(k)$ do sistema da Eq. (3.64) satisfaz a condição de setor multivariável da Eq. (3.75).

Na sequência, considerando que a segunda condição dada pela Eq. (3.70) é satisfeita. Tem-se que a condição da Eq. (3.71) será satisfeita se a Eq. (3.74) estiver sujeita a uma condição de setor multivariável, como segue

$$[p - \tilde{\Delta}q]' T [p - \hat{\Delta}q] \leq 0. \quad (3.75)$$

Portanto, aplicando-se o Procedimento- \mathcal{S} nessa duas últimas obtém-se à seguinte desigualdade que satisfaz a condição da Eq. (3.71):

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_1(\zeta) & * \\ \tilde{\Upsilon}_2(\zeta) & \tilde{\Upsilon}_3(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ p \end{bmatrix} < 0, \quad (3.76)$$

com

$$\begin{cases} \tilde{\Upsilon}_1(\zeta) = A_a(\zeta)'PA_a(\zeta) - P - C_a(\zeta)'(\tilde{\Delta}T\hat{\Delta} + \hat{\Delta}T\tilde{\Delta})C_a(\zeta), \\ \tilde{\Upsilon}_2(\zeta) = B_a(\zeta)'PA_a(\zeta) + T(\hat{\Delta} + \tilde{\Delta})C_a(\zeta), \\ \tilde{\Upsilon}_3(\zeta) = B_a(\zeta)'PB_a(\zeta) - 2T, \end{cases} \quad (3.77)$$

sendo que $T > 0$ é uma matriz diagonal a ser determinada e

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} (1 - \delta_1) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_2) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} (1 + \delta_1) & 0 \\ 0 & (1 + \delta_2) \end{bmatrix}.$$

Considerando a decomposição da matriz $C(\zeta)$,

$$C_a(\zeta) = \mathbb{C}_a \Psi_a(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(x) & 0 \\ 0 & \Psi_c(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

com

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \begin{bmatrix} I_n & \Pi(x)' \end{bmatrix}', \quad \Pi(x) = x \otimes I_n, \\ \Psi_c(\xi) &= \begin{bmatrix} I_{n_c} & \Pi_c(\xi)' \end{bmatrix}', \quad \Pi_c(\xi) = \xi \otimes I_{n_c}, \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_c = \begin{bmatrix} C_{c_0} & C_{c_1} & \cdots & C_{c_{n_c}} \end{bmatrix},$$

em que C_i e C_{c_i} , $i = 0, 1, \dots, n$, são matrizes constantes definidas na Eq. (3.2) e na Eq. (3.37), respectivamente.

Sabe-se que $\Psi(x)$ é afim em x , então pode-se afirmar que existe uma função afim $\Omega(x)$ (a ser especificada mais adiante) tal que $\Omega(x)\Psi(x) = 0$. Similarmente para $\Psi_c(\xi)$ existe uma função afim $\Omega_c(\xi)$ tal que $\Omega_c(\xi)\Psi_c(\xi) = 0$. Substituindo a decomposição da matriz $C(\zeta)$ segundo a Eq. (3.78) na desigualdade da Eq. (3.76) e em seguida aplicando a versão do lema de Finsler's como proposta por Coutinho et al. (2008), obtém-se uma condição suficiente que satisfaz a desigualdade dada pela Eq. (3.76) como segue:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}_1(\zeta) & * \\ \hat{\Upsilon}_2(\zeta) & \hat{\Upsilon}_3(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(L_2\Omega_a(\zeta)) & * \\ L_3\Omega_a(\zeta) & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_a, \quad (3.79)$$

com $He(M) = M + M'$, L_2 e L_3 são matrizes livres a serem determinadas, e

$$\begin{cases} \hat{\Upsilon}_1(\zeta) = \mathbb{N}'_a(A_a(\zeta)'PA_a(\zeta) - P)\mathbb{N}_a - \mathbb{C}'_a(\tilde{\Delta}T\hat{\Delta} + \hat{\Delta}T\tilde{\Delta})\mathbb{C}_a, \\ \hat{\Upsilon}_2(\zeta) = B_a(\zeta)'PA_a(\zeta)\mathbb{N}_a + T(\hat{\Delta} + \tilde{\Delta})\mathbb{C}_a, \\ \hat{\Upsilon}_3(\zeta) = B_a(\zeta)'PB_a(\zeta) - 2T, \end{cases}$$

com $\mathbb{N}_a\Psi_a(\zeta) = I_{n_\zeta}$. Em outras palavras:

$$\mathbb{N}_a = \begin{bmatrix} \mathbb{N} & 0 \\ 0 & \mathbb{N}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_c = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0_{n_c \times n_c^2} \end{bmatrix}.$$

A matriz $\Omega_a(\zeta)$ é uma função afim em ζ tal que $\Omega_a(\zeta)\Psi_a(\zeta) = 0$ e tem a forma

$$\Omega_a(\zeta) = \begin{bmatrix} \Omega(x) & 0 \\ 0 & \Omega_c(\xi) \end{bmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{bmatrix} \Pi(x) & -I_{n \times n^2} \\ \mathcal{N}(x) & 0_{n \times m} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_c(\xi) = \begin{bmatrix} \Pi_c(\xi) & -I_{n_c \times n_c^2} \\ \mathcal{N}_c(\xi) & 0_{n_c \times m_c} \end{bmatrix}.$$

Sendo $\mathcal{N}(x) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n^2}$ a matriz aniquiladora linear de $\Pi(x)$ definida como descrito na Eq. (3.50). Analogamente, $\mathcal{N}_c(\xi) \in \mathbb{R}^{(n_c-1) \times n_c^2}$ é a matriz aniquiladora de $\Pi_c(\xi)$ e é definida na equação Eq. (3.51).

Ao aplicar-se o complemento de Schur na Eq. (3.79) obtém-se uma condição suficiente para garantir a factibilidade da condição dada pela Eq. (3.71), tal que:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{21}(\zeta) & \Upsilon_{22} & * \\ \Upsilon_{31}(\zeta) & \Upsilon_{32}(\zeta) & \Upsilon_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_a, \quad (3.80)$$

com

$$\begin{cases} \Upsilon_{11}(\zeta) = -\mathbb{N}'_aP\mathbb{N}_a - \mathbb{C}'_a(\tilde{\Delta}T\hat{\Delta} + \hat{\Delta}T\tilde{\Delta})\mathbb{C}_a + He(L_2\Omega_a(\zeta)), \\ \Upsilon_{21}(\zeta) = T(\hat{\Delta} + \tilde{\Delta})\mathbb{C}_a + L_3\Omega_a(\zeta), \quad \Upsilon_{22} = -2T, \\ \Upsilon_{31}(\zeta) = PA_a(\zeta)\mathbb{N}_a, \quad \Upsilon_{32}(\zeta) = PB_a(\zeta), \quad \Upsilon_{33} = -P. \end{cases}$$

sendo $T > 0$ uma matriz diagonal, $L_2 \in \mathbb{R}^{(n_\zeta+n_\zeta^2) \times (n_\zeta-1+n_\zeta^2)}$ e $L_3 \in \mathbb{R}^{(n_\zeta-1) \times n_\zeta^2}$ matrizes escalares a serem determinadas.

Para garantir que a condição da Eq. (3.72) seja satisfeita, obtém-se, com um procedimento análogo ao apresentado acima, a seguinte condição suficiente:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{a_{11}}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{a_{21}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{22}} & * \\ \Upsilon_{a_{31}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{32}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{33}} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{X}_a, \quad (3.81)$$

com

$$\begin{cases} \Upsilon_{a_{11}}(\zeta) = -\mathbf{N}'_a P_a \mathbf{N}_a - \mathbf{C}'_a (\tilde{\Delta} T_a \hat{\Delta} + \hat{\Delta} T_a \tilde{\Delta}) \mathbf{C}_a + H e(L_4 \Omega_a(\zeta)), \\ \Upsilon_{a_{21}}(\zeta) = T_a (\hat{\Delta} + \tilde{\Delta}) \mathbf{C}_a + L_5 \Omega_a(\zeta), \quad \Upsilon_{a_{22}} = -2T_a, \\ \Upsilon_{a_{31}}(\zeta) = P_a A_a(\zeta) \mathbf{N}_a, \quad \Upsilon_{a_{32}}(\zeta) = P_a B_a(\zeta), \quad \Upsilon_{a_{33}} = -P_a. \end{cases}$$

sendo $T_a > 0$, $L_4 \in \mathbb{R}^{(n_\zeta + n_\zeta^2) \times (n_\zeta - 1 + n_\zeta^2)}$ e $L_5 \in \mathbb{R}^{(n_\zeta - 1) \times n_\zeta^2}$ matrizes a serem determinadas com T_a representando uma matriz diagonal.

Considerando a definição do conjunto \mathcal{C}_p , as desigualdades da Eq. (3.80) e da Eq. (3.81) em conjunto com as condições da Eq. (3.70) tem-se a garantia de factibilidade da condição dada pela Eq. (3.72). Além disso, as condições da Eq. (3.72) e da Eq. (3.73) garantem que o conjunto \mathcal{C}_p é limitado e $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{A}$, caso contrário a trajetória de $\zeta(k)$ poderia eventualmente deixar o conjunto atrator \mathcal{A} .

A seguir, apresentam-se as condições suficientes para analisar a estabilidade quadrática no sentido amplo de sistemas não lineares quadráticos com quantização finita na entrada e na saída do sistema através do seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Considere o sistema em malha fechada formado pela Eq. (3.1), o controlador dado na Eq. (3.36) que são interligados pela lei de realimentação definida na Eq. (3.63) com os quantizadores $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ como definidos na Eq. (2.6), sendo que μ_i , ρ_i e N_i são dados. Então o sistema em malha fechada da Eq. (3.64) é quadraticamente estável no sentido amplo se existem matrizes simétricas P e P_a , matrizes diagonais T e T_a , matrizes livres $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_{7i}, L_{8i}$ e escalares positivos τ , $\tau_i, \bar{\tau}_i, \hat{\tau}_i$ e $\tilde{\tau}_i, i = 1, 2$ satisfazendo as seguintes*

desigualdades:

$$P > 0, \quad P_a - P > 0, \quad \tau > 0, \quad \tau_i > 0, \quad \bar{\tau}_i > 0, \quad \hat{\tau}_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.82)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ c_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{N}'_a P \mathbb{N}_a - (1 - \delta_i)^2 \mu_i^{-2} \mathbb{C}'_{a_i} \mathbb{C}_{a_i} + He(L_{1_i} \Omega_a(\zeta)) > 0, \\ i = 1, 2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{21}(\zeta) & \Upsilon_{22} & * \\ \Upsilon_{31}(\zeta) & \Upsilon_{32}(\zeta) & \Upsilon_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{a_{11}}(\zeta) & * & * \\ \Upsilon_{a_{21}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{22}} & * \\ \Upsilon_{a_{31}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{32}}(\zeta) & \Upsilon_{a_{33}} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.86)$$

$$\tau - (\tau_1 + \tau_2) \geq 0, \quad \bar{\tau}_i - \bar{\tau}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(\zeta) & * \\ U_2(\zeta) & U_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.88)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11}(\zeta, i, j) & * & * \\ \Xi_{21}(\zeta, i, j) & \Xi_{22}(i, j) & * \\ \Xi_{31}(\zeta, i, j) & \Xi_{32}(\zeta, i, j) & \Xi_{33} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.89)$$

$$i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a),$$

com $\mathcal{V}(\mathcal{X}_a)$ representando o conjunto de todos os vértices de \mathcal{X}_a , e

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \mathbb{N}'_a P_a \mathbb{N}_a + \sum_{i=1}^2 \tau_i \epsilon_i^{-2} \mathbb{C}'_{a_i} \mathbb{C}_{a_i} + He(L_6 \Omega_a(\zeta)), \\ U_2 = (1 + \tau) P_a A_a(\zeta), \quad U_3 = (1 + \tau) P_a, \\ \Xi_{11}(\zeta, i, j) = \mathbb{N}'_a P_a \mathbb{N}_a + \bar{\tau}_i \epsilon_i^{-2} \mathbb{C}'_{a_i} \mathbb{C}_{a_i} + \hat{\tau}_j (1 - \delta_j^2) \mathbb{C}'_{a_j} \mathbb{C}_{a_j} \\ \quad + He(L_{7_i} \Omega_a(\zeta)), \\ \Xi_{21}(\zeta, i, j) = -\hat{\tau}_j \mathbb{C}_{a_j} + L_{8_i} \Omega_a(\zeta), \quad \Xi_{22}(i, j) = \hat{\tau}_j, \\ \Xi_{31}(\zeta, i, j) = (1 + \bar{\tau}_i) P_a A_a(\zeta), \\ \Xi_{32}(\zeta, i, j) = (1 + \bar{\tau}_i) P_a B_{a_j}(\zeta), \quad \Xi_{33} = P_a, \\ B_{a_1}(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & B_c(\xi)' \end{bmatrix}', \quad B_{a_2}(\zeta) = \begin{bmatrix} B(x)' & 0 \end{bmatrix}' \end{array} \right.$$

Além disso, o conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} e o seu conjunto atrator \mathcal{A} são dados pelas Eq. (2.13) e Eq. (2.14), respectivamente. \square

Demonstração. Primeiro, considere que as desigualdades das Eq. (3.5), Eq. (3.85), Eq. (3.86), Eq. (3.88) e Eq. (3.5) são satisfeitas, logo essas desigualdades são também satisfeitas para todo $\zeta \in \mathcal{X}_a$. Então, o restante dessa demonstração segue o raciocínio usado na prova do Teorema 2.4.

Agora, realizando a pré- e pós- multiplicação da Eq. (3.5) por $\zeta' \Psi_a(\zeta)'$ e $\Psi_a(\zeta)\zeta$, respectivamente, e levando em conta a primeira e a segunda desigualdades da Eq. (3.82), tem-se a garantia de que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_i$, $i=1, 2$. Já a desigualdade da Eq. (3.83) assegura que $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_a$.

Continuando, a desigualdade da Eq. (3.85) assegura a factibilidade da Eq. (3.71). De forma análoga, a desigualdade da Eq. (3.86) garante que condição da Eq. (3.81) é satisfeita. Ainda, considerando a soma da condição dada pela Eq. (3.70) com a desigualdade da Eq. (3.86) em conjunto com a definição de \mathcal{C}_p (Eq. (3.68)) assegura-se a factibilidade da Eq. (3.72).

Finalmente, as desigualdades da Eq. (3.87) até a Eq. (3.5) garantem que a premissa da Eq. (3.73) seja satisfeita. Para tanto, seja o conjunto \mathcal{C}_p dividido em três subconjuntos complementares como segue:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{p_1} = \{\zeta \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_{p_2} = \{\zeta \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_{p_3} = \{\zeta \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : DV_a(\zeta) \geq 0\}, \end{cases}$$

e considera-se as duas situações a seguir:

(a) $\zeta(\mathbf{k}) \in \mathcal{C}_{p_3}$: Sendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta}$, e somando a primeira desigualdade da Eq. (3.87) com a da Eq. (3.88) e, em seguida, pré-multiplicando por $\phi' \Psi_a(\zeta)'$ e pós-multiplicando por $\Psi_a(\zeta)\phi$ e finalizando com a aplicação

do Procedimento- S , tem-se que a seguinte condição é verdadeira:

$$\begin{aligned} \phi' A_a(\zeta)' P_a A_a(\zeta) \phi \leq 1, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta} : \phi' (A_a(\zeta)' P_a A_a(\zeta) - P_a) \phi \geq 0, \\ \epsilon_i^{-2} \phi' C_{a_i}(\zeta)' C_{a_i}(\zeta) \phi \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Seja $\phi = \zeta(k)$ como definida na Eq. (3.65), a última condição da Eq. (3.90) é equivalente a $\zeta(k) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, implicando que nesse caso o sinal $p(k)$ do sistema da Eq. (3.64) é zero. Note que $A_a \phi = \zeta(k+1)$, então, a desigualdade da Eq. (3.90) recai em:

$$\begin{aligned} \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) \leq 1, \\ \forall \zeta(k) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 : \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) - \zeta(k)' P_a \zeta(k) \geq 0. \end{aligned}$$

Isso garante que $\zeta(k+1) \in \mathcal{A}$ sempre que $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_3}$.

(b) $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_i}$, $i = 1, 2$: Seja $\phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta}$ e $\psi \in \mathbb{R}$. Somando a segunda desigualdade da Eq. (3.87) com a condição da Eq. (3.5) e, realizando a pre- e pós- multiplicação por $[\phi' \Psi_a(\zeta)' \quad \psi']'$ e por $[\Psi_a(\zeta) \phi \quad \psi]'$, respectivamente. Finalmente, aplicando-se o Procedimento- S tem-se que, para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$:

$$(A_a(\zeta) \phi + B_{a_j}(\zeta) \psi)' P_a (A_a(\zeta) \phi + B_{a_j}(\zeta) \psi) \leq 1, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}^{n_\zeta}, \psi \in \mathbb{R} : \quad (3.91)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_a(\zeta)' P_a A_a(\zeta) - P_a & * \\ B_{a_j}(\zeta)' P_a A_a(\zeta) & B_{a_j}(\zeta)' P_a B_{a_j}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \geq 0, \\ [\psi - (1 - \delta_j) C_{a_j}(\zeta) \phi]' [\psi - (1 + \delta_j) C_{a_j}(\zeta) \phi] \leq 0, \\ \epsilon_i^{-2} \phi' C_{a_i}(\zeta)' C_{a_i}(\zeta) \phi \leq 1. \end{cases}$$

Note que a última desigualdade da Eq. (3.91) equivale a $\phi \in \mathcal{C}_i$ e seja $\phi = \zeta(k)$ e $\psi = p_j(k)$ como definida pela Eq. (3.65). Então, uma vez que $\zeta(k) \in \mathcal{C}_i$, o sinal $p(k)$ no sistema da Eq. (3.64) tem-se que $p_i(k)$ é zero e $p_j(k)$ não, com $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$. Isso, satisfaz a desigualdade do tipo condição de setor definido na Eq. (3.75). Considerando a afirmação acima e a Eq. (3.64) obtêm-se, a partir de Eq. (3.91), que

$$\begin{aligned} \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) \leq 1, \\ \forall \zeta(k) \in \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}_j : \zeta(k+1)' P_a \zeta(k+1) - \zeta(k)' P_a \zeta(k) \geq 0, \end{aligned}$$

o que assegura $\zeta(k+1) \in \mathcal{A}$ sempre que $\zeta(k) \in \mathcal{C}_{p_i}$, $i=1, 2$.

À luz do acima exposto, é possível concluir que o sistema na Eq. (3.64) é localmente quadraticamente estável no sentido amplo em \mathcal{X}_a . \square

Observação 3.1. *Note que as desigualdades das Eq. (3.88) e Eq. (3.5) não são conjuntamente convexas em $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ e P_a . Mesmo assim, quando os escalares $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ são conhecidos a priori as condições da Eq. (3.82) até a Eq. (3.5) transformam-se em LMIs. Assim, ao aplicar um procedimento de busca por grade nos escalares $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ e resolver um problema de factibilidade para as desigualdades da Eq. (3.82) até a Eq. (3.5) a cada passo do procedimento pode-se otimizar tais escalares.* \square

É desejável obter o maior volume para o conjunto de condições iniciais \mathcal{D} e o menor volume para o atrator \mathcal{A} . De fato, é possível otimizar o tamanho dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} conjuntamente, de forma análoga ao problema de otimização da Eq. (2.68). Para tanto considere as transformações dadas pela Eq. (2.60), assim as condições das Eq. (3.82) até a Eq. (3.5) podem ser escritas como:

$$X > 0, \quad X_a - X > 0, \quad \kappa > 0, \alpha_i > 0, \quad \bar{\alpha}_i > 0, \quad \hat{\alpha}_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.92)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa & * \\ \kappa c_i & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{N}'_a X \mathbf{N}_a - \kappa(1-\delta_i)^2 \mu_i^{-2} \mathbf{C}'_{a_i} \mathbf{C}_{a_i} + H e(L_{1_i} \Omega_a(\zeta)) > 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.94)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{11}(\zeta) & * & * \\ \bar{\Upsilon}_{21}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{22} & * \\ \bar{\Upsilon}_{31}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{32}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.95)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_{a_{11}}(\zeta) & * & * \\ \bar{\Upsilon}_{a_{21}}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{a_{22}} & * \\ \bar{\Upsilon}_{a_{31}}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{a_{32}}(\zeta) & \bar{\Upsilon}_{a_{33}} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.96)$$

$$\kappa \tau - (\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0, \quad \kappa \tilde{\tau}_i - \bar{\alpha}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.97)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1(\zeta) & * \\ \bar{U}_2(\zeta) & \bar{U}_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a), \quad (3.98)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11}(\zeta, i, j) & * & * \\ \bar{\Xi}_{21}(\zeta, i, j) & \bar{\Xi}_{22}(i, j) & * \\ \bar{\Xi}_{31}(\zeta, i, j) & \bar{\Xi}_{32}(\zeta, i, j) & \bar{\Xi}_{33} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.99)$$

$$i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \forall \zeta \in \mathcal{V}(\mathcal{X}_a),$$

sendo que $\bar{\Upsilon}_{kl}, \bar{\Upsilon}_{a_{kl}}, \bar{U}_k$ e $\bar{\Xi}_{kl}(i, j)$, $k, l = 1, 2, 3$, são obtidas usando respectivamente $\Upsilon_{kl}, \Upsilon_{a_{kl}}, U_k$ e $\Xi_{kl}(i, j)$, $k, l = 1, 2, 3$ como descritas no Teorema 3.5 levando em consideração as definições dadas na Eq. (2.60).

Finalmente, o problema de otimização para, conjuntamente, maximizar \mathcal{D} e para minimizar \mathcal{A} é dado por:

$$\min_{\gamma, \kappa, X, X_a, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_2, \tau, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2} \gamma, \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \text{Eq. (3.92)} - \text{Eq. (3.99)}, \\ \gamma - \text{tr}(X) \geq 0, \\ \text{tr}(X_a) - 1 \geq 0. \end{cases} \quad (3.100)$$

As considerações feitas na Observação 3.1 também se aplicam ao problema de otimização apresentado acima.

Observação 3.2. *Note que os resultados do Teorema 3.5 podem ser aplicados para realizar o projeto de quantizadores práticos. Os passos serão omitidos uma vez que o procedimento para o projeto de dois quantizadores práticos para um sistema não linear quadrático segue os mesmos passos apresentados na Seção 3.2.1, havendo a necessidade de considerar as condições dadas pelo Teorema 3.5 ao invés das condições do Teorema 3.3. \square*

3.4 Exemplos Numéricos

3.4.1 Exemplo de Projeto do Controlador para um Quantizador Ideal

Considere o seguinte sistema não linear quadrático obtido em (DE SOUZA; COUTINHO, 2011):

$$x(k+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^2 x_i A_i \right) x(k) + \left(B_0 + \sum_{i=1}^2 x_i B_i \right) u(k), \quad (3.101)$$

com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}', \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.3 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.3 \end{bmatrix}'.$$

Adicionalmente, assume-se que a saída do sistema é definida por:

$$y(k) = (1 + 0.1x_1(k))x_1(k) + x_2(k).$$

Neste exemplo, propõe-se o projeto de um controlador por realimentação de saída dado pela Eq. (3.26) com a interconexão dada pela Eq. (3.5) que maximiza a região de condições iniciais admissíveis. Dois cenários para a densidade de quantização são considerados, nomeadamente $\rho = 0.7$ e $\rho = 0.6$. Para ambos os casos, considera-se a seguinte região polipédica no espaço de estados:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq 0.5, i = 1, 2\}.$$

Primeiro, projeta-se um controlador por realimentação de estados que estabiliza localmente o sistema utilizando o problema de otimização dado pela Eq. (3.18). E, no caso de $\rho = 0.7$, obtém-se:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K = - \begin{bmatrix} 0.3205 & 0.5449 \end{bmatrix}.$$

Ao aplica-se o problema de otimização da Eq. (3.33) realizando uma busca linear em $\sigma \in (-10, 10)$, implicando na seguinte lei de con-

trole por realimentação de saída para $\rho=0.7$:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.1998 & -0.3398 \\ -0.5808 & -0.9877 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.4798 \\ 0.7086 \end{bmatrix} y(k), \\ v(k) = -\begin{bmatrix} 0.3205 & 0.5449 \end{bmatrix} \hat{x}(k), \end{cases} \quad (3.102)$$

e a matriz da função de Lyapunov

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 5.8712 & 1.6589 & -2.4025 & -4.0854 \\ 1.6589 & 8.6404 & -3.9486 & -6.7145 \\ -2.4025 & -3.9486 & 3.5459 & 6.0297 \\ -4.0854 & -6.7145 & 6.0297 & 10.2534 \end{bmatrix},$$

para um σ ótimo igual a -0.685 .

Na Fig. 13, apresentam-se cortes no plano $(x_1, x_2, 0, 0)$ das regiões de estabilidade correspondentes ao controlador por realimentação de saída (RS) projetado para $\rho = 0.7$ e $\rho = 0.6$. Para uma análise comparativa, a região de estabilidade obtida pelo controlador por realimentação de estados (RE) também é apresentado na figura em questão.

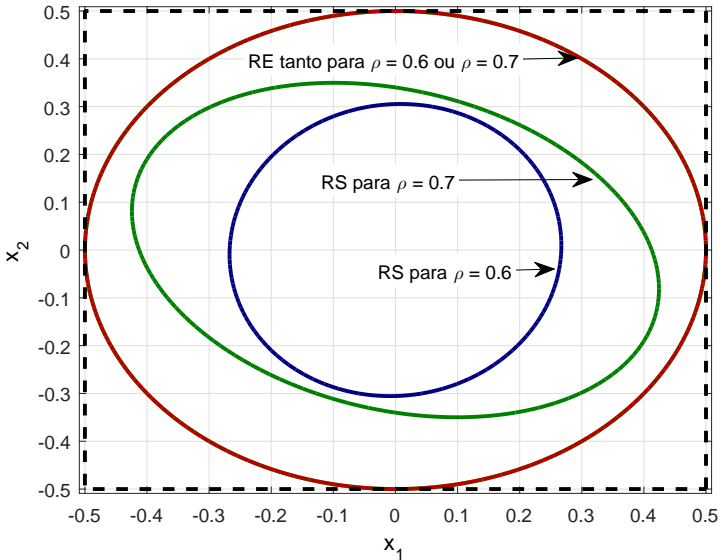
Na Fig. 14, apresenta-se a resposta temporal para $\rho = 0.7$ com o controlador dado pela Eq. (3.102) considerando a condição inicial dada por:

$$\tilde{x}(0) = [0.20 \ 0.25 \ 0 \ 0]'$$

e a seguinte versão, com níveis finitos, do quantizador dado pela Eq. (1.2) como proposto em (DE SOUZA; COUTINHO; FU, 2010):

$$Q(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v > \frac{1}{(1-\delta)}, \\ \rho^j, & \text{se } \frac{\rho^j}{(1+\delta)} < v \leq \frac{\rho^j}{(1-\delta)}, \\ & j = 0, 1, \dots, 31, \\ 0, & \text{se } 0 \leq v \leq 1.35 \times 10^{-5}, \\ -Q(-v), & \text{se } v < 0, \end{cases} \quad (3.103)$$

que representa um quantizador com 63 níveis (i.e., 6 bits). O quantizador acima é uma aproximação finita do quantizador ideal dado pela

Figura 13 – Região de estabilidade para RE e RS com $\rho = 0.6$ e $\rho = 0.7$.

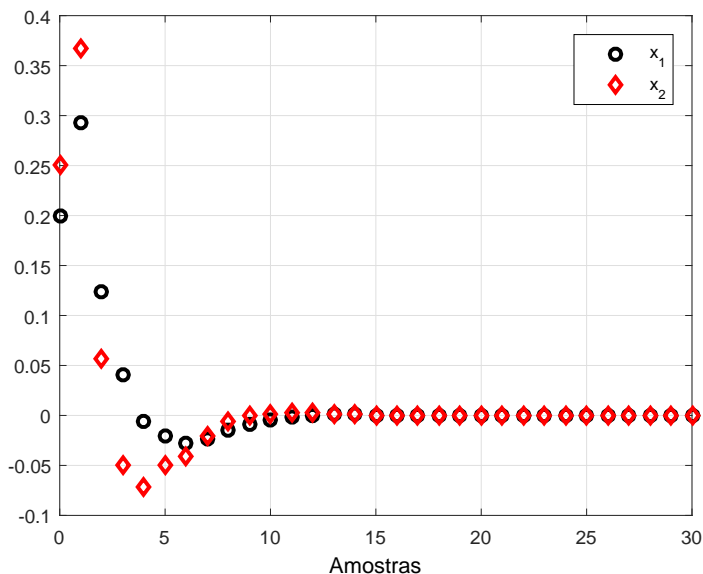
Fonte: Elaborada pelo autor

Eq. (1.2) utilizado para fins de simulação. Note que a zona morta do quantizador da Eq. (3.103) é dado por $|v| \leq 1.35 \times 10^{-5}$, enquanto que o número de níveis de quantização foi escolhido suficientemente grande para evitar saturação.

3.4.2 Exemplos com Realimentação de Estados e Quantizador Finito

A seguir são apresentados dois exemplos de aplicação do Teorema 3.5 para caso de uma lei de controle por realimentação de estados com um canal quantizado. O primeiro considera o sistema em tempo discreto do Exemplo da Seção anterior com uma realimentação de estados linear com a simples finalidade de demonstração da aplicabilidade do método proposto. O segundo exemplo ainda considera o mesmo sistema, entretanto utiliza-se uma lei de realimentação de estados não linear como proposto por [de Souza e Coutinho \(2011\)](#).

Figura 14 – Resposta dos estados do sistema em malha fechada das Eq. (3.101)-Eq. (3.103) para $\rho = 0.7$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 1

Seja a seguinte realização no espaço de estados dada pela Eq. (3.101). Assume-se que a lei de controle por realimentação de estados que estabiliza localmente o sistema é obtida via o problema de otimização dado pela Eq. (3.18), tem-se o seguinte ganho de realimentação de estados:

$$w = Kx, \quad K = -[0.3259 \quad 0.5498],$$

e a menor densidade de quantização que se obtém é $\rho_{\text{inf}} = 0.8$.

Segundo de Souza, Coutinho e Fu (2010), para um que sistema tenha a estabilidade quadrática no sentido amplo garantida, a lei de controle quantizada deve ter um número mínimo de níveis tal que seja o suficiente para estabilizar o sistema em malha fechada. Isso implica que deve-se garantir que $\rho > \rho_{\text{inf}}$ seja satisfeita. Então, um quantizador

finito e adequado pode ser projetado como segue:

$$\delta = 0.1, N_{bits} = 4, \mu = 0.4, \epsilon = 0.0893$$

para $\rho = 0.8182$.

Como este capítulo trata de sistemas não lineares quadráticos e para que seja possível determinar a sua estabilidade local considere a seguinte região politópica no espaço de estados:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq 2, i = 1, 2\}, \quad (3.104)$$

Aplicando o problema de otimização da Eq. (3.100) com o objetivo de maximizar o conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} e ao mesmo tempo minimizar o conjunto atrator \mathcal{A} obtém-se as seguintes matrizes que definem \mathcal{D} e \mathcal{A} :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2604 & 0.0721 \\ 0.0721 & 0.4996 \end{bmatrix}, \quad P_a = \begin{bmatrix} 1.4526 & 0.4464 \\ 0.4464 & 2.7841 \end{bmatrix},$$

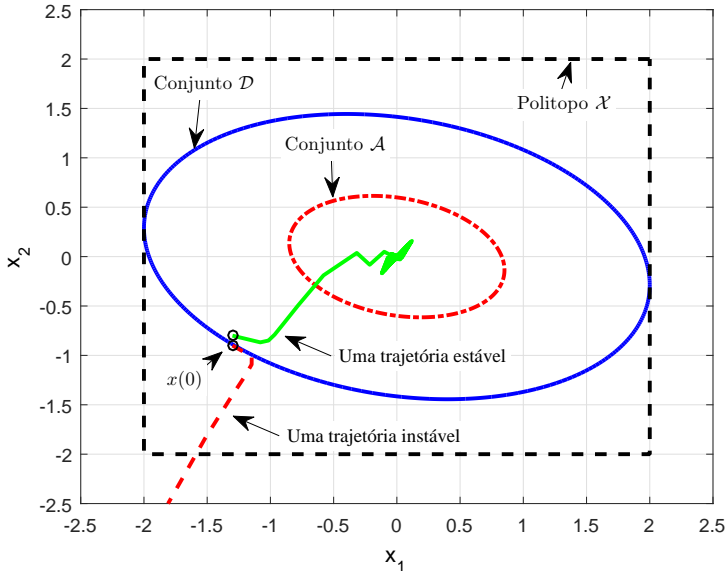
com $\tau_3 = 0.27$.

Na Fig. 15, observa-se os conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} , bem como o polítopo \mathcal{X} . Para avaliar a conservadorismo do método apresenta-se duas trajetórias das variáveis do estado na Fig. 15 (uma estável e uma instável) iniciando nos limites do conjunto \mathcal{D} . A primeira trajetória estável tem início no ponto $x(0) = [-1.3 \quad -0.8]'$, ponto que está dentro de \mathcal{D} . A trajetória instável tem início no ponto $x(0) = [-1.3 \quad -0.9]'$ o qual não pertence a \mathcal{D} .

Exemplo 2

Considere o sistema não linear quadrático em tempo discreto dado pela Eq. (3.101). De acordo com o Teorema 3.4, uma maneira de obter-se uma lei de controle não linear por realimentação de estados que estabilize o sistema quantizado é: realizar o projeto de um controlador que estabilize o sistema da Eq. (3.101) considerando o que mesmo possui um incerteza do tipo condição de setor. Então, ao aplicar-se a metodologia de projeto de controle para sistema não lineares quadráticos apresentada por [de Souza e Coutinho \(2011\)](#) e, com $\delta = 0.1$ para

Figura 15 – Os conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{A} , o politopo \mathcal{X} e as trajetórias dos estados (para K linear).



Fonte: Elaborada pelo autor

a mesma região politópica no espaço de estados do exemplo anterior (Eq. (3.104)), tem-se à seguinte lei de controle não linear:

$$w(k) = (K_0 + K_1 x_1(k) + K_2 x_2(k))x(k),$$

com

$$K_0 = [-0.2664 \quad -0.4957], \quad K_1 = [-0.0023 \quad 0.0647] \text{ e } K_2 = [-0.0257 \quad 0.0400].$$

Agora, projeta-se o quantizador com os seguintes parâmetros:

$$\delta = 0.1, \quad N_{bits} = 4, \quad \mu = 0.4, \quad \epsilon = 0.0893.$$

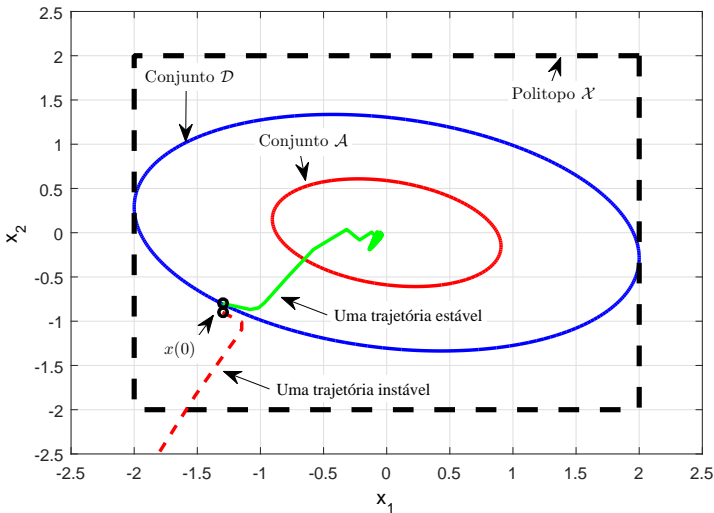
Para avaliar a estabilidade local do sistema na Eq. (3.101) dentro da região politópica definida pela Eq. (3.104) quando o sinal de controle sofre quantização, i.e., $u = Q(K(x)x)$, utiliza-se o problema de otimização dado pela Eq. (3.100) devidamente adaptado para sistema com realimentação de estados. Aplicando o problema de otimização

Eq. (3.100) com uma busca linear no parâmetro τ_3 e, resolvendo um problema de factibilidade de LMIs a cada passo, obtém-se o seguinte resultado para $\tau_3 = 0.28$:

$$P = \begin{bmatrix} 0.2620 & 0.0841 \\ 0.0841 & 0.5869 \end{bmatrix}, \quad P_a = \begin{bmatrix} 1.2994 & 0.4828 \\ 0.4828 & 2.8793 \end{bmatrix}.$$

Apresenta-se, na Fig. 16, os conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{A} e o polítopo \mathcal{X} . Note que o conjunto de condições admissíveis é o maior possível dentro do polítopo dado os parâmetros utilizados para quantizador, de maneira análoga o conjunto atrator é o menor possível para os parâmetros do quantizador utilizados. Uma trajetória estável iniciando no ponto $x(0) = [-1.3 \quad -0.8]'$, e uma instável iniciando no ponto $x(0) = [-1.3 \quad -0.9]'$ demonstram o conservadorismo do método proposto.

Figura 16 – Os conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{A} e do polítopo \mathcal{X} e as trajetórias dos estados (para K quadrático).



Fonte: Elaborada pelo autor

Com o propósito de comparação realizou-se um segundo projeto do quantizador sendo alterado somente o número de níveis utiliza-

dos, o que tem consequência direta no valor de ϵ . Então, considere os seguintes parâmetros para um segundo projeto de quantizador:

$$\delta = 0.1, N_{bits} = 6, \mu = 0.4, \epsilon = 7.22 \times 10^{-4}.$$

A região politópica definida pela Eq. (3.104) é a mesma utilizado para esta caso. Utiliza-se o problema de otimização dado pela Eq. (3.100) realizando a busca em linha no parâmetro τ_3 , para obter o seguinte matrizes que definem os conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2646 & 0.0882 \\ 0.0882 & 0.6052 \end{bmatrix}, P_a = 10^4 \begin{bmatrix} 1.5800 & 0.5938 \\ 0.5938 & 4.0170 \end{bmatrix},$$

e $\tau_3 = 0.18$.

Na Fig. 17, apresenta-se os conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{A} e o politopo \mathcal{X} . Note que o conjunto de condições admissíveis \mathcal{D} é muito semelhante ao caso anterior, o que era esperado visto que μ e δ são os mesmo nos dois casos. Entretanto, observa-se no detalhamento apresentado no canto superior esquerdo da Fig. 17 que o conjunto atrator \mathcal{A} é significativamente menor do que primeiro caso. Isso deve-se a influência direta do valor do parâmetro ϵ que foi alterado ao se aumentar o número de níveis utilizado mantendo os parâmetros μ e δ fixos. A trajetória estável e a instável iniciam nos mesmo pontos do primeiro caso.

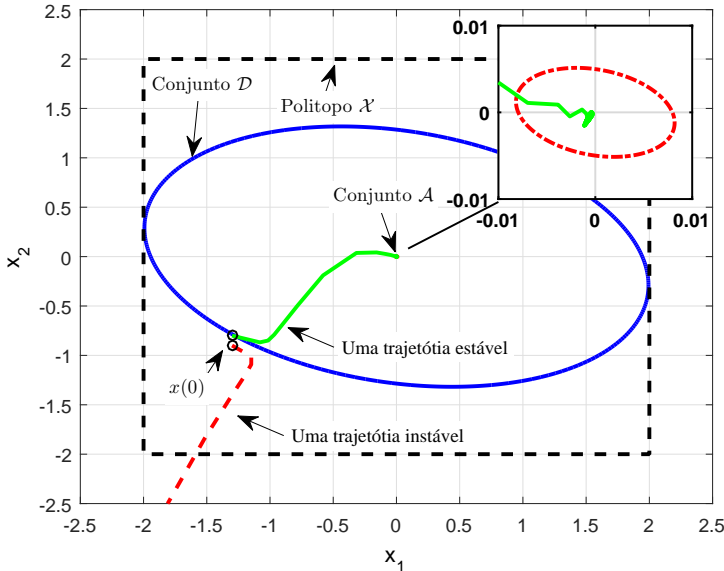
3.4.3 Exemplo com Realimentação de Saída e Quantizador Finito

Para demonstrar a aplicação do método descrito pelo Teorema 3.5 para sistema não lineares quadráticos com realimentação dinâmica de saída considere o seguinte sistema no espaço de estados:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.01x_1^2 + x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_2(x) + 0.01x_2^2 + u(k) \\ y(k) = -3x_1(k) + x_2(k) \end{cases}, \quad (3.105)$$

A lei de controle de realimentação dinâmica de saída é tida como linear. Tal lei de controle foi projetada de modo a determinar o valor mínimo para a densidade de quantização necessária para que a

Figura 17 – Os conjuntos \mathcal{D} , \mathcal{A} e do politopo \mathcal{X} e as trajetórias dos estados (para K quadrático) (II).



Fonte: Elaborada pelo autor

estabilidade quadrática do sistema garantida considerando um quantizador ideal. Então, utilizando-se do método de projeto para um controlador dinâmico de saída descrito na Seção 3.1, obtém-se a seguinte realização no espaço de estados para o controlador:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} -6.8023 & 3.2859 \\ -13.7093 & 5.2394 \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} -1.5572 \\ -3.1384 \end{bmatrix} v(k) \\ w(k) = [0 \ 2] \xi(k) \end{cases},$$

com $\rho = 0.95$ o que implica que $\delta_{\text{sup}} = 0.0256$. Sabendo que $\delta_{\text{sup}} > \delta_i, i = 1, 2$ para que o sistema seja estável, assume-se que os quantizadores com um número finitos de níveis, $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$, possuem os seguintes parâmetros:

$$\delta_i = 0.01, \quad N_{\text{bits}_i} = 10, \quad \mu_i = 2, \quad \epsilon_i = 7.2123 \times 10^{-5}, \quad i = 1, 2.$$

Para avaliar a estabilidade do sistema dado pela Eq. (3.105)

define-se a seguinte região politópica:

$$\mathcal{X}_a = Co([0.22 \ 0.39 \ 0 \ 0], [0.13 \ 0.3 \ 0 \ 0], \\ [-0.22 \ -0.39 \ 0 \ 0], [-0.13 \ -0.3 \ 0 \ 0]),$$

e utiliza-se o problema de otimização dado pela Eq. (3.100). Realiza-se um processo de busca em linha nos parâmetros τ_3 , $\tilde{\tau}_1$ e $\tilde{\tau}_2$ para obter o seguinte resultado:

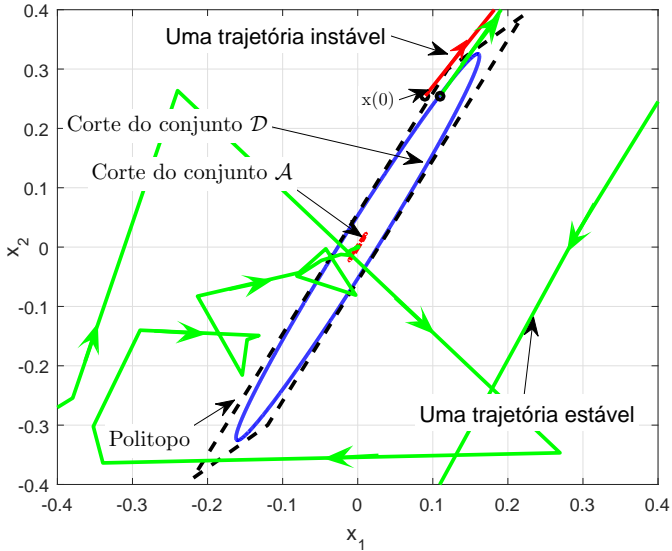
$$P = 10^3 \begin{bmatrix} 1.4348 & -0.7050 & -2.0895 & 1.0247 \\ -0.7050 & 0.3559 & 1.0263 & -0.5131 \\ -2.0895 & 1.0263 & 3.0484 & -1.4951 \\ 1.0247 & -0.5131 & -1.4951 & 0.7468 \end{bmatrix},$$

$$P_a = 10^6 \begin{bmatrix} 0.5214 & -0.2569 & -0.7597 & 0.3730 \\ -0.2569 & 0.1283 & 0.3742 & -0.1855 \\ -0.7597 & 0.3742 & 1.1078 & -0.5439 \\ 0.3730 & -0.1855 & -0.5439 & 0.2695 \end{bmatrix},$$

com $\tau_3 = \tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = 0.001$.

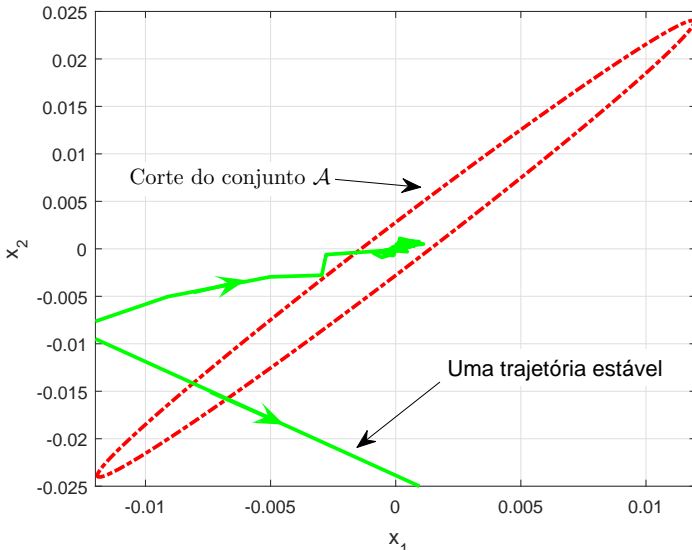
Para avaliar conservadorismo do resultado proposto, apresenta-se na Fig. 18 o corte, no plano $\zeta = [x_1 \ x_2 \ 0 \ 0]'$, dos conjunto de condições iniciais \mathcal{D} , do conjunto atrator \mathcal{A} e do politopo \mathcal{X} . Uma trajetória estável iniciando no ponto $x(0) = [0.11 \ 0.255]'$ e uma trajetória instável iniciando no ponto $x(0) = [0.09 \ 0.255]'$ também são ilustradas na figura. Por fim, na Fig. 19, observa-se em detalhe o corte no plano $x = [x_1 \ x_2 \ 0 \ 0]'$ do conjunto atrator \mathcal{A} .

Figura 18 – Corte com $\xi = 0$ do conjunto \mathcal{D} e \mathcal{A} e do politopo \mathcal{X} com duas trajetórias.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 – Corte (com $\xi = 0$) do conjunto atrator \mathcal{A} e a parte final da trajetória estável em detalhe.



Fonte: Elaborada pelo autor

4 Sistemas Não Lineares com Perda de Informação

Sistemas de controle via redes de comunicações compartilhadas estão sujeitos ao fenômeno de perda de informação, que pode ocorrer de forma aleatória devido a diversos fatores inerentes a esse tipo de redes de comunicação. A perda de informação, que também é chamada de perda de pacotes, pode levar à degradação da performance de controle e a até mesmo à instabilidade do sistema de controle. Na literatura especializada existem diversas propostas para lidar com canais de comunicação sujeitos a perdas, bem como de que maneira um canal sujeito a perda pode ser modelado satisfatoriamente. Uma abordagem comum é utilizar modelos estocásticos para descrever o comportamento da perda de pacote. Esses modelos estocásticos podem tanto ser uma distribuição de Bernoulli como, por exemplo, em (LU et al., 2012; YOU; XIE, 2010; TSUMURA; ISHII; HOSHINA, 2009; ISHIDO; TAKABA; QUEVEDO, 2011) ou ser uma cadeia de Markov (XIONG; LAM, 2007) e (WANG; WANG; WANG, 2013). Ainda, Zhang e Yu (2007) e Sun e Qin (2011) apresetam como modelar as redes com perda de informação através de um sistema determinístico chaveado no qual a análise de estabilidade se dá em termos de restrições na forma de LMIs.

Entretanto, a grande maioria dos resultados sobre a análise de estabilidade e síntese de controladores que abordam a perda de informação consideram somente sistema dinâmicos lineares, com poucas exceções. Por exemplo, Zhang e Fang (2011) propõem condições baseadas em LMIs para a análise de estabilidade local de Lipschitz para um sistema não linear sujeito a uma perda de pacote aleatória e atraso de tempo induzido pela rede (para mais detalhes sobre a estabilidade Lipschitz ver (DANNAN; ELAYDI, 1986) e (DANNAN; ELAYDI, 1989)). No contexto de estimação de estados, foi abordado por Yang, Liu e Shi

(2012) o problema de filtragem H_∞ para uma classe de sistema com não linearidades do tipo Lipschitz sujeito a um canal de comunicação com perdas de pacotes, modelando essa perda através de uma distribuição de Bernoulli, e em (JIANG; FANG, 2013) por meio de uma cadeia de Markov. Na análise de estabilidade e/ou a síntese de controladores para NCSs não lineares sujeitos a perda de pacotes o uso de modelos representando uma classe de sistemas não lineares mais geral pode levar a condições de estabilidade bastante complexas. Uma possível solução é limitar a classe de sistemas não lineares a ser considerada visando obter uma solução mais facilmente tratável.

Assim, neste capítulo, abordam-se os problemas de análise de estabilidade local e de síntese de controladores considerando um sistema não linear quadrático, em que os sinais de realimentação são transmitidos em um canal sujeito a perda de informação. Mais especificamente, no problema de análise, assume-se que uma lei de controle por realimentação de estados na forma polinomial é dada, tal que o sistema em malha fechada sem a existência de perdas é localmente estável. Então, obtém-se um conjunto de condições em termos de LMIs de maneira a garantir que o sistema em malha fechada permaneça estável dado um limite máximo para probabilidade de perda de pacotes ao mesmo tempo que obtém-se uma estimativa do conjunto de condições iniciais admissíveis. Esse resultado de estabilidade é então aplicado para determinar uma lei de controle não linear, por realimentação de estados, que garanta a estabilidade local no sentido da média quadrática em malha fechada para uma dada probabilidade de perdas enquanto maximiza-se o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis. Além do mais, quando aplicado a sistemas lineares, demonstra-se que o resultado de estabilidade proposto nesse capítulo é equivalente à condição necessária e suficiente para estabilidade de um sistema linear SISO submetidos a comunicação em canais com apagamento apresentada por (ELIA, 2005).

4.1 Estabilidade com Perda de Informação

Considere o sistema em malha fechada no qual a comunicação entre a saída do controlador e a entrada de controle do sistema é realizada através de um canal com apagamento como ilustrado na Fig. 20, no qual o sistema dinâmico é representado pelo seguinte modelo no espaço de estados:

$$x(k+1) = A(x)x(k) + B(x)u(k), x(0) = x_0, \quad (4.1)$$

sendo $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ o estado, $u \in \mathbb{R}$ a entrada de controle e \mathcal{X} uma região politópica no espaço de estados contendo a origem $x = 0$ (a ser especificado depois). $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(x) \in \mathbb{R}^n$ são funções afins em x , isto é

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i, \quad B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i,$$

com x_i denotando o i -ésimo componente de x , e A_i e B_i , $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes constantes, reais e conhecidas. Assume-se que o par (A_0, B_0) é estabilizável e a resposta não forçada do sistema da Eq. (4.1) possa ser instável.

O sistema acima é localmente estabilizado pelo seguinte controle não linear por realimentação de estados:

$$w(k) = K(x)x(k), \quad (4.2)$$

com $K(x)$ a ser especificado posteriormente. O sinal $w \in \mathbb{R}$ representa o sinal de controle que é enviado para o sistema da Eq. (4.1) através de um link de comunicação sujeito a perda de pacote, levando ao seguinte sinal de entrada $u(k)$:

$$u(k) = \varphi(k)w(k), \quad (4.3)$$

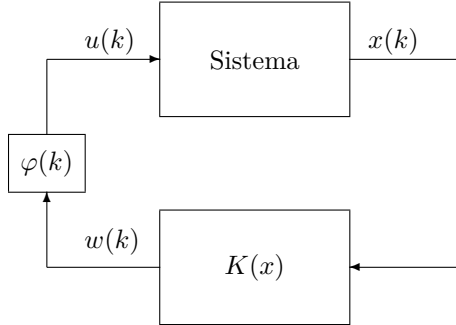
sendo $\varphi(k)$ uma sequência estocástica representando a possibilidade de falhas na transmissão. Assume-se que $\varphi(k)$ é uma sequência de Bernoulli i.i.d. a qual deve ser independente de x_0 e com a seguinte propriedade:

$$\text{Prob}(\varphi(k) = j) = \begin{cases} \beta, & j = 0 \\ 1 - \beta, & j = 1 \end{cases}, \beta \in [0, 1),$$

com β sendo a probabilidade de perda de pacotes. Note que

$$\mu := \mathbb{E}\{\varphi(k)\} = 1 - \beta, \quad \sigma^2 := \text{var}\{\varphi(k)\} = \beta(1 - \beta). \quad (4.4)$$

Figura 20 – Estrutura NCS com perda de pacotes.



Fonte: Elaborada pelo autor

A malha fechada formada pelo sistema dado pela Eq. (4.1), pelo controlador da Eq. (4.2) e a pela lei de realimentação definida pela Eq. (4.3) é definida como segue:

$$x(k+1) = (A(x) + \varphi(k)B(x)K(x))x(k), \quad x(0) = x_0. \quad (4.5)$$

Note que os estados do sistema representado na Eq. (4.5) podem ser vistos como as variáveis de estados de um sistema com ruído multiplicativo. A noção de estabilidade adotada neste capítulo é no sentido da média quadrada. Na sequência, introduz-se o conceito de estabilidade local assintótica no sentido da média quadrática.

Definição 4.1. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema da Eq. (4.5) é dito localmente estável na média quadrática se para qualquer $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que se $\|x_0\| \leq \delta$, então $\mathbb{E}\{\|x(k)\|^2\} < \epsilon, \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Ademais, se existe um δ_0 tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{\|x(k)\|^2\} = 0, \forall \|x_0\| < \delta_0$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente assintoticamente estável no sentido da média quadrática; neste caso, abusando da terminologia, diz-se que o sistema dado pela Eq. (4.5) é localmente assintoticamente estável na média quadrática.*

Neste Capítulo, tem-se como objetivo apresentar soluções numericamente tratáveis para os seguintes problemas:

- P1** Para um dado ganho de realimentação de estados $K(x)$, verificar a estabilidade local assintótica na média quadrática do sistema em malha fechada e determinar tanto: (i) a máxima probabilidade de perda β admissível para um conjunto de condições iniciais conhecido; ou (ii) dada a probabilidade de perda β , determinar a máxima região de estabilidade para o sistema em malha fechada, ou seja, determinar o conjunto de condições iniciais \mathcal{D} , com o maior volume possível, tal que para todo $x_0 \in \mathcal{D}$ então $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{\|x(k)\|^2\} = 0$.
- P2** Determinar um ganho $K(x)$ da realimentação de estados que garanta a estabilidade local assintótica na média quadrática que: (i) maximize o valor da probabilidade de perda quando um conjunto de condições iniciais admissíveis é dado; ou (ii) maximize o conjunto de condições iniciais admissíveis dada uma probabilidade de perda de pacotes qualquer.

Na sequência, apresenta-se um lema que caracteriza a estabilidade local assintótica na média quadrática em termos de uma função de Lyapunov. Para mais detalhes ver as referências (SHAIKHET, 2011; KOLMANOVSKII; SHAIKHET, 2002).

Lema 4.1. *Considere o sistema da Eq. (4.5) com $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ sendo um politopo no espaço de estados contendo a origem. Seja $V : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo a seguinte condição para os escalares positivos ϵ_1 e ϵ_2 :*

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \mathbb{E}\{\|x\|^2\} &\leq \mathbb{E}\{V(x)\} \leq \epsilon_2 \mathbb{E}\{\|x\|^2\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \\ \mathbb{E}\{V(f(x)) - V(x)\} &< 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $f(x) = (A(x) + \varphi(k)B(x)K(x))x$. Então, a origem do sistema dado pela Eq. (4.5) é localmente assintoticamente estável na média quadrática. \square

Os resultados apresentados neste capítulo consideram uma representação alternativa (e equivalente) do sistema em malha fechada com um ruído de média nula. Para esse fim, seja a sequência branca mutuamente independente $\bar{\varphi}(k) = \varphi(k) - \mu$. Note que a variância de $\bar{\varphi}(k)$ é σ^2 e também que $\bar{\varphi}(k)$ é independente de $x(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. Então o sistema em malha fechada da Eq. (4.5) pode ser escrito como:

$$x(k+1) = (\bar{A}(x) + \bar{\varphi}(k)\bar{B}(x))x(k), \quad x(0) = x_0, \quad (4.7)$$

na qual

$$\bar{A}(x) = A(x) + \mu\bar{B}(x), \quad \bar{B}(x) = B(x)K(x).$$

Em vista do Lema 4.1 e considerando o sistema em malha fechada representado pela Eq. (4.7) em conjunto com uma função de Lyapunov na forma $V(x) = x'Px$, $P = P' > 0$, tem-se o seguinte resultado que será instrumental para a derivação de condições numericamente tratáveis que solucionam os problemas **P1** e **P2** como definidos anteriormente.

Lema 4.2. *Considere o sistema em malha fechada da Eq. (4.5) com um dado polítopo \mathcal{X} no espaço de estados contendo a origem e seja $K(x)$ um dado ganho de realimentação de estados. Suponha que exista uma matriz simétrica e positiva definida P satisfazendo a seguinte restrição:*

$$\begin{bmatrix} -P & * & * \\ PA(x) + \mu PB(x)K(x) & -P & * \\ \mu PB(x)K(x) & 0 & -\frac{P}{\beta(1-\beta)} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (4.8)$$

Então, o sistema em malha fechada na Eq. (4.5) é localmente assintoticamente estável na média quadrática.

Demonstração. Com $V(x) = x'Px$, $P > 0$ e considerando a Eq. (4.7) e o fato de que $\bar{\varphi}(k)$ tem média zero e é independente de $x(k)$, pode ser facilmente verificado que o lado esquerdo da desigualdade dada pela Eq. (4.6), denotado por $DV(x)$, torna-se:

$$DV(x) = \mathbb{E}\{x'[\bar{A}(x)'P\bar{A}(x) - P + \sigma^2\bar{B}(x)'P\bar{B}(x)]x\} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

A partir da desigualdade acima, tem-se a seguinte condição:

$$\bar{A}(x)'P\bar{A}(x) - P + \sigma^2\bar{B}(x)'P\bar{B}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

garante a suficiência da condição da Eq. (4.6). Então, aplicando o complemento de Schur na ultima desigualdade tem-se a equivalência com a condição dada pela Eq. (4.8). O resto da demonstração segue a do Lema 4.1. \square

O Lema 4.2 propõe uma condição para a estabilidade na média quadrática para o sistema dado pela Eq. (4.7) considerando uma dada probabilidade de perda de pacotes β . A seguir, demonstra-se que a condição da Eq. (4.8) também é satisfeita para qualquer valor menor do que β .

Lema 4.3. *Para um dado $\beta = \bar{\beta} \in [0, 1)$, um politopo \mathcal{X} no espaço de estados e $K(x) = \bar{K}(x)$, suponha que exista uma matriz $P = \bar{P}$ tal que a Eq. (4.8) seja factível. Então, a Eq. (4.8) também é satisfeita para qualquer $\beta = \bar{\beta}/\delta$, $\delta > 1$, com $P = \bar{P}$ e $K(x) = \alpha\bar{K}(x)$, sendo que*

$$\alpha = \frac{1 - \bar{\beta}}{1 - \bar{\beta}/\delta} \in (0, 1). \quad \square$$

Demonstração. Assuma que a condição da Eq. (4.8) é satisfeita com $\beta = \bar{\beta}$, $\mu = \bar{\mu} = 1 - \bar{\beta}$, $P = \bar{P}$ e $K(x) = \bar{K}(x)$. Aplicando o complemento de Schur na Eq. (4.8) implica:

$$\begin{aligned} & [A(x) + \bar{\mu}B(x)\bar{K}(x)]'\bar{P}[A(x) + \bar{\mu}B(x)\bar{K}(x)] - \bar{P} \\ & + \eta(\bar{\beta})\bar{\mu}^2\bar{K}(x)'B(x)'\bar{P}B(x)\bar{K}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que

$$\eta(v) = v/(1 - v).$$

Note que para qualquer $\beta = \bar{\beta}/\delta$, $\delta > 1$, tem-se:

$$\beta < \bar{\beta}, \quad \eta(\beta) < \eta(\bar{\beta}), \quad \mu = 1 - \beta = \bar{\mu}/\alpha. \quad (4.10)$$

Seja Λ o lado esquerdo da condição dada pela Eq. (4.8) com β como definido acima, $P = \bar{P}$ e $K(x) = \alpha\bar{K}(x)$, e considerando a

Eq. (4.10), obtém-se:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\bar{P} & * & * \\ \bar{P}A(x) + \bar{\mu}B(x)\bar{K}(x) & -\bar{P} & * \\ \alpha\bar{P}B(x)\bar{K}(x) & 0 & -\bar{P}/\sigma^2 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \beta(1 - \beta).$$

Pelo complemento de Schur tem-se $\Lambda < 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ se e somente se:

$$[A(x) + \bar{\mu}B(x)\bar{K}(x)]'\bar{P}[A(x) + \bar{\mu}B(x)\bar{K}(x)] - \bar{P} + \nu\bar{\mu}^2\bar{K}(x)'B(x)'\bar{P}B(x)\bar{K}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

com

$$\nu = \frac{\alpha^2\sigma^2}{\bar{\mu}^2} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \eta(\beta).$$

Como $\eta(\beta) < \eta(\bar{\beta})$, então a condição da Eq. (4.9) assegura que $\Lambda < 0$, $\forall x \in \mathcal{X}$. \square

Observação 4.1. *O Lema 4.3 implica que se um ganho de realimentação de estados satisfaz a condição da Eq. (4.8) para um dado $\beta = \bar{\beta}$ e um politopo \mathcal{X} , então para qualquer $\beta < \bar{\beta}$ existe um ganho de realimentação de estados assegurando a estabilidade local assintótica na média quadrática do sistema em malha fechada e satisfazendo a condição da Eq. (4.8) para o mesmo politopo \mathcal{X} .*

4.1.1 Solução Baseada em Desigualdades Matriciais Lineares

Geralmente, a condição de estabilidade do Lema 4.2 é difícil de ser verificada numericamente, visto que a mesma deve ser satisfeita para todo $x \in \mathcal{X}$. Na sequência, deriva-se uma solução baseada em LMIs para averiguar a estabilidade local assintótica na média quadrática do sistema dado pela Eq. (4.5) ao mesmo tempo que obtém-se uma estimativa para o conjunto de estabilidade da malha fechada. Para esse fim, primeiramente, restringe-se o ganho de realimentação de estados $K(x)$ a ser uma função quadrática em relação a x a qual, sem perda de generalidade, pode ser escrita como segue:

$$K(x) = \Psi_u(x)'\mathbb{K}\Psi(x), \quad (4.11)$$

sendo que $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+n^2)}$ é uma matriz constante e

$$\Psi_u(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} I_n \\ \Pi(x) \end{bmatrix}, \quad \Pi(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_n \\ \vdots \\ x_n I_n \end{bmatrix}.$$

Segundo, assume-se que \mathcal{X} é um politopo simétrico contendo a origem o qual pode ser representado tanto em termos de suas faces, i.e.:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c'_j x| \leq 1, j = 1, \dots, r\}, \quad (4.12)$$

com $c_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, r$ definindo as faces de \mathcal{X} , ou alternativamente em termos do casco convexo formado por seus vértices $v_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, q$, i.e.

$$\mathcal{X} = \text{Co}\{v_1, v_2, \dots, v_q\}. \quad (4.13)$$

Terceiro, para a estimação do conjunto de atração do sistema em malha fechada, considera-se o conjunto de Lyapunov normalizado \mathcal{D} , como segue:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : x' P x \leq 1\}, \quad (4.14)$$

com P satisfazendo a condição da Eq. (4.8).

O teorema a seguir apresenta um resultado baseado em desigualdades matriciais lineares para avaliar a estabilidade local assintótica na média quadrática do sistema em malha fechada dado pela Eq. (4.7).

Teorema 4.1. *Considere o sistema em malha fechada da Eq. (4.7) com um dado ganho de realimentação de estados $K(x)$ como definido pela Eq. (4.11). Seja β uma dada probabilidade de perda de pacotes e \mathcal{X} um dado politopo no espaço de estados contendo $x = 0$ como definido tanto pela Eq. (4.12) como pela Eq. (4.13). Suponha que existe uma matriz P simétrica e definida positiva e uma matriz L com dimensões apropriadas, tais que*

$$\Phi(v_i) + He(L\Omega_d(v_i)) < 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c'_j \\ c_j & P \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (4.16)$$

com

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -\mathbb{N}'P\mathbb{N} & * & * \\ \mathbb{N}'PA(x)\mathbb{N} + \mu\mathbb{P}\mathbb{B}\Psi_u(x)'\mathbb{K} & -\mathbb{N}'P\mathbb{N} & * \\ \mu\mathbb{P}\mathbb{B}\Psi_u(x)'\mathbb{K} & 0 & -\frac{\mathbb{N}'P\mathbb{N}}{\sigma^2} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_d(x) = \text{diag} \{ \mathcal{N}_a(x), \mathcal{N}_a(x), \mathcal{N}_a(x) \},$$

$$\mathbb{P} = \text{diag} \{ P, \dots, P \}, \quad \mathbb{N} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B'_0 & B'_1 & \dots & B'_n \end{bmatrix}',$$

$$\mathcal{N}_a(x) = \begin{bmatrix} \Omega(x) \\ [0_{(n^2-n) \times n} \quad \mathcal{N}(x)] \end{bmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{bmatrix} \Pi(x) & -I_{n^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(x) = \begin{bmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_3 I_n & -x_2 I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n I_n & -x_{n-1} I_n \end{bmatrix},$$

e μ e σ^2 são como definidos na Eq. (4.4). Então, o sistema da Eq. (4.5) é localmente assintoticamente estável na média quadrática. \square

Demonstração. Note que se a condição da Eq. (4.15) é válida para todos os vértices de \mathcal{X} então, por argumentos de convexidade, também é satisfeita para todo $x \in \mathcal{X}$.

Em vista das definições apresentadas no enunciado deste teorema, tem-se que $B(x) = \Psi(x)'\mathbb{B}$ e $P\Psi(x)' = \Psi(x)'\mathbb{P}$. Isto em conjunto com a Eq. (4.11) implica em:

$$PB(x)K(x) = \Psi(x)'\mathbb{P}\mathbb{B}\Psi_u(x)'\mathbb{K}\Psi(x).$$

Observando que $\mathbb{N}\Psi(x) = I_n$, pode ser facilmente verificado que a desigualdade dada pela Eq. (4.8) do Lema 4.2 pode ser escrita como

$$\begin{cases} \Psi_d(x)'\Phi(x)\Psi_d(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \\ \Psi_d(x) = \text{diag} \{ \Psi(x), \Psi(x), \Psi(x) \}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Uma vez que a matriz $\Psi_d(x)$ é tal que $\Omega_d(x)\Psi_d(x) = 0$, $\forall x$, então, pelo lema de Finsler (BOYD et al., 1994), a desigualdade da

Eq. (4.15) assegura que condição dada pela Eq. (4.17), ou equivalentemente a condição da Eq. (4.8), seja satisfeita.

Por sua vez, a condição dada pela Eq. (4.16) é necessária e suficiente para garantir que $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ (BOYD et al., 1994). Então, considerando o Lema 4.2 conclui-se que este teorema a prova deste teorema. \square

O Teorema 4.1 fornece um método para solucionar o problema **P1**. Então, seja a probabilidade de perda de pacotes máxima admissível que garante a estabilidade local assintótica na média quadrática para o sistema da Eq. (4.5) definida por β^* e, admitindo que um conjunto de condições iniciais admissíveis é dado por $\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x'P_0x \leq 1\}$. Então, o problema **P1**–(i) pode ser resolvido por meio do seguinte problema de otimização

$$\beta^* = \max_{\beta, P, L} \beta, \text{ sujeito a Eq. (4.15), Eq. (4.16) e } P_0 - P \geq 0, \quad (4.18)$$

com $P_0 = P'_0 > 0$ sendo uma matriz dada que define o tamanho de \mathcal{D}_0 e tal que $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$

Note que a restrição da Eq. (4.15) não é convexa com relação a β e P . Entretanto, uma vez que a Eq. (4.15) torna-se uma LMI para um β fixo, a solução ótima β^* pode ser obtida solucionando iterativamente o problema de otimização dado pela Eq. (4.18) via um procedimento de busca em β sobre $[0, 1)$. Alternativamente, tendo em vista o Lema 4.3, pode-se aplicar um algoritmo de bisseção padrão para determinar um limite máximo para β^* , tão próximo quanto desejado, através da solução de um problema de factibilidade de LMIs a cada passo do algoritmo de bisseção, o qual demanda menos tempo computacional comparado com técnicas de busca em grade.

Por outro lado, se o interesse é maximizar a região de estabilidade \mathcal{D} para uma dada probabilidade de perda de pacotes β (i.e., problema **P1**–(ii)), então o seguinte problema de otimização que maximiza o volume de \mathcal{D} é proposto:

$$\min_{P, L} \text{tr}(P), \text{ sujeito a Eq. (4.15) e a Eq. (4.16)}. \quad (4.19)$$

4.1.1.1 Caso Linear

Note que para o caso de sistemas lineares e um ganho de realimentação constante, i.e. $A(x) = A$, $B(x) = B$ e $K(x) = K$, pode-se mostrar que o Teorema 4.1 é equivalente ao Lema 4.2. Ademais, demonstra-se na sequência que a versão linear do Lema 4.2 é equivalente a condição necessária e suficiente proposta por (ELIA, 2005, Teorema 6.4) considerando que a transmissão do sinal de entrada de controle é realizada por um canal com apagamento. Para esse fim, considere o seguinte sistema de controle linear sujeito a um canal com apagamento:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) &= \varphi(k)w(k) \\ w(k) &= Kx(k) \end{cases}, \quad (4.20)$$

Nessas condições, o sistema em malha fechada da Eq. (4.7) torna-se:

$$x(k+1) = (\bar{A} + \mu\bar{\varphi}(k)BK)x(k), \quad (4.21)$$

com $\bar{A} = A + \mu BK$, μ e $\bar{\varphi}(k)$ sendo como definido anteriormente. Neste caso, pelo complemento de Shur, a desigualdade da Eq. (4.8) é equivalente a

$$P > 0, \quad \bar{A}'P\bar{A} - P + \sigma^2 K'B'PBK < 0. \quad (4.22)$$

O resultado acima é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica na média quadrática do sistema em malha fechada da Eq. (4.21); veja, e.g., (BOYD et al., 1994). Além disso, sabe-se que a Eq. (4.22) é equivalente a (BOYD et al., 1994):

$$Q > 0, \quad \bar{A}Q\bar{A}' - Q + \sigma^2 BKQK'B' < 0.$$

O resultado acima é a mesma condição de estabilidade na média quadrática proposta no Teorema 6.4 em (ELIA, 2005) para o caso particular de um sistema de controle linear com um canal com apagamento como definido pela Eq. (4.20).

4.2 Projeto do Controlador

Nesta seção, trata-se do projeto do ganho $K(x)$ da realimentação de estados que assegura a estabilidade na média quadrática. O projeto se baseia no Lema 4.2 em conjunto com a parametrização $K(x) = F(x)P$, com P satisfazendo a condição da Eq. (4.8) e $F(x)$ sendo uma função matricial quadrática em x a ser determinada. O resultado obtido para o problema do projeto de controle é apresentado a seguir:

Teorema 4.2. *Considere o sistema em malha fechada da Eq. (4.7). Seja \mathcal{X} uma região politópica no espaço de estados conhecida, contendo $x = 0$ e definida tanto pela Eq. (4.12) como pela Eq. (4.13). Seja β uma dada probabilidade de perda de pacotes. Suponha que existam matrizes Q , \hat{L} e \mathbb{F} tais que*

$$\hat{\Phi}(v_i) + He(\hat{L}\Omega_d(v_i)) < 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (4.23)$$

$$1 - c'_j Q c_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (4.24)$$

com

$$\hat{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}'\mathbf{Q}\mathbf{N} & * & * \\ \mathbf{N}'A(x)\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mu\mathbb{B}\Psi_u(x)'\mathbb{F} & -\mathbf{N}'\mathbf{Q}\mathbf{N} & * \\ \mu\mathbb{B}\Psi_u(x)'\mathbb{F} & 0 & -\frac{\mathbf{N}'\mathbf{Q}\mathbf{N}}{\sigma^2} \end{bmatrix},$$

μ e σ^2 são definidos na Eq. (4.4), e as matrizes $\Omega_d(x)$, $\Phi_u(x)$, \mathbb{B} e \mathbf{N} são definidas da mesma forma como dadas no Teorema 4.1. Então, o sistema dado pela Eq. (4.5) com $K(x) = \Psi_u(x)'\mathbb{F}\Psi(x)Q^{-1}$ é localmente assintoticamente estável na média quadrática e $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{\|x(k)\|^2\} = 0$ para todo $x(0) \in \mathcal{D}\{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\}$, com $P = Q^{-1}$. \square

Demonstração. Essa prova segue a linha da demonstração do Teorema 4.1 mas usa-se uma forma equivalente da desigualdade dada pela Eq. (4.8) no Lema 4.2 como apresentada a seguir. Então, pré e pós multiplicação a desigualdade da Eq. (4.8) por $Q_d = \text{diag}\{Q, Q, Q\}$,

com $Q = P^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ A(x)Q + \mu B(x)K(x)Q & -Q & * \\ B(x)K(x)Q & 0 & -\frac{Q}{\sigma^2} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (4.25)$$

Considerando que $K(x) = \Psi_u(x)' \mathbb{F} \Psi(x) Q^{-1}$, com Q e \mathbb{F} satisfazendo as condições do teorema e como $B(x) = \Psi(x)' \mathbb{B}$, obtém-se:

$$B(x)K(x)Q = \Psi(x)' \mathbb{B} \Psi_u(x)' \mathbb{F} \Psi(x).$$

Tendo em vista a relação acima e $\mathbb{N}\Psi(x) = I_n$, verifica-se que a condição da Eq. (4.25) é equivalente a

$$\Psi_d(x)' \widehat{\Phi}(x) \Psi_d(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (4.26)$$

na qual $\Psi_d(x)$ é definido pela Eq. (4.17). Como a matriz $\Psi_d(x)$ satisfaz $\Omega_d(x) \Psi_d(x) = 0, \forall x$, então por argumentos de convexidade e aplicando o lema de Finsler (BOYD et al., 1994) tem-se que a condição da Eq. (4.23) garante que a Eq. (4.26), ou equivalentemente a Eq. (4.8) seja satisfeita.

Além disso, note que a Eq. (4.24) é uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ (ver, e.g., (BOYD et al., 1994)). Finalmente, o resto da prova segue a linha da demonstração do Teorema 4.1. \square

O Teorema 4.2 permite resolver o problema de controle **P2**. Em particular, para uma dada probabilidade de perda de pacotes β , um controlador por realimentação de estados que estabiliza localmente assintoticamente o sistema da malha fechada enquanto maximiza a estimativa da região de estabilidade \mathcal{D} pode ser obtido por meio do seguinte problema de otimização convexo:

$$\max_{\mathbb{F}, Q, \widehat{L}} \log \det(Q), \quad \text{sujeito a Eq. (4.23) e a Eq. (4.24)}, \quad (4.27)$$

Note que o problema de otimização da Eq. (4.27) maximiza o volume da região de estabilidade \mathcal{D} .

De maneira similar, é desejável determinar um ganho $K(x)$ tal que o maximizado o limite para probabilidade de perda de pacotes

que garante a estabilidade para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis definido por $\mathcal{D}_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x'P_0x \leq 1\}$, com $P_0 > 0$ sendo uma matriz conhecida tal que $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$, i.e., $P_0 - Q^{-1} \geq 0$. Neste caso, propõem-se o seguinte problema de otimização:

$$\beta^* = \max_{\mathbb{F}, \beta, Q, \hat{L}} \beta \text{ sujeito a } \begin{cases} \text{Eq. (4.23), Eq. (4.24),} \\ 0 \leq \beta < 1 \text{ e } \begin{bmatrix} P_0 & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Observe que como no problema da Eq. (4.18), a otimização da Eq. (4.28) não é conjuntamente convexa com relação a β e Q . Entretanto, analogamente ao problema da Eq. (4.18), a maximização de β pode ser determinada pelo procedimento de bisseção onde, a cada iteração, resolve-se um problema de factibilidade de LMIs.

Observação 4.2. *Deve-se notar que as condições das Eq. (4.15) e Eq. (4.23) dos Teoremas 4.1 e 4.2, respectivamente, são afins nas matrizes do sistema A_i e B_i , $i = 0, 1, \dots, n$, estes teoremas podem ser estendidos para o caso onde essas matrizes apresentam incertezas do tipo politópica. Especificamente, considere o sistema dado pela Eq. (4.1) onde as matrizes A_i e B_i , $i=0, 1, \dots, n$, são incertas e pertencem a uma determinada matriz politópica \mathbb{M} definida por*

$$\mathbb{M} := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\kappa} \delta_j \begin{bmatrix} \mathbb{A}_j & \mathbb{B}_j \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^{\kappa} \delta_j = 1, \delta_j \geq 0 \right\},$$

com

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A'_0 & A'_1 & \dots & A'_n \end{bmatrix}', \quad \mathbb{A}_j = \begin{bmatrix} (A_0^{(j)})' & (A_1^{(j)})' & \dots & (A_n^{(j)})' \end{bmatrix}', \\ \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B'_0 & B'_1 & \dots & B'_n \end{bmatrix}', \quad \mathbb{B}_j = \begin{bmatrix} (B_0^{(j)})' & (B_1^{(j)})' & \dots & (B_n^{(j)})' \end{bmatrix}',$$

com \mathbb{A}_i e \mathbb{B}_i , $i = 1, \dots, \kappa$ sendo matrizes conhecidas que definem os vértices de \mathbb{M} . Aplicando-se argumentos de convexidade verifica-se facilmente que os Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser adaptados para as igualdades acima apresentadas através da substituição das matrizes A_j e B_j por $A_j^{(s)}$ e $B_j^{(s)}$, respectivamente. Note que s condições dadas pela Eq. (4.15) e pela Eq. (4.23) deverão ser satisfeitas para $j = 1, \dots, q$ e $s = 1, \dots, \kappa$.

4.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção, dois exemplos numéricos são considerados para ilustrar as condições de estabilização propostas neste Capítulo. Especificamente, o primeiro exemplo é baseado no modelo discretizado do pendubot como apresentado por (ELIA, 2005), e o segundo é retirado de (DE SOUZA; COUTINHO, 2011) considerando a existência de uma realimentação através de um canal com apagamento.

4.3.1 Exemplo 1

Considere o modelo discretizado do pendubot (ZHANG; TARN, 2002), com um período de amostragem de 5 ms, assumindo que os estados do sistema estão à disposição para a realimentação e que o ponto de equilíbrio é a posição na qual as duas hastes estão no eixo vertical (ELIA, 2005). O sistema é instável em malha aberta e representado pelo seguinte modelo:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (4.29)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1.0008 & -0.0003 & 0.0050 & -0.0000 \\ -0.0009 & 1.0013 & -0.0000 & 0.0050 \\ 0.3350 & -0.1244 & 1.0008 & -0.0003 \\ -0.3437 & 0.5274 & -0.0009 & 1.0013 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0011 & 0.2245 & -0.4257 \end{bmatrix}'.$$

Note que a versão do problema de otimização da Eq. (4.28) especializado em sistema lineares quando aplicado para determinar a máxima probabilidade de perda de pacotes admissíveis β^* leva exatamente ao mesmo resultado obtido em (ELIA, 2005, Theorem 7.3), i.e., $\beta^* = 0.8364$.

Agora, considera-se o seguinte modelo não linear quadrático baseado do sistema dado pela Eq. (4.29):

$$x(k+1) = A(x)x(k) + Bu(k), \quad (4.30)$$

com $x \in \mathbb{R}^4$, $A(x) = A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$, com $A_0 = A$

$$A_1 = \text{diag}\{0.01, 0, 0, 0\}, \quad A_2 = \text{diag}\{0, 0.01, 0, 0\},$$

$$A_3 = \text{diag}\{0, 0, 0.01, 0\}, \quad A_4 = \text{diag}\{0, 0, 0, 0.01\}.$$

Considere que o domínio politópico no espaço de estado \mathcal{X} é definido em termos de um hiper cubo parametrizado como segue:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_i| \leq \alpha, \quad i = 1, \dots, 4\},$$

com α sendo um escalar positivo que define o tamanho do conjunto \mathcal{X} . Considera-se diversos cenários para a escolha do parâmetro α e então, são projetados controladores não lineares quadráticos por realimentação de estados que estabilizam no sentido da média quadrada o sistema da Eq. (4.30) quando sujeitos a uma canal de realimentação com apagamento para cada cenário. Especificamente, aplica-se o problema de otimização da Eq. (4.28) para estimar a máxima probabilidade de perda de pacotes β^* para diferentes valores de α assumindo que o conjunto de condições iniciais admissíveis é a própria região de estabilidade \mathcal{D} como definido no Teorema 4.2, levando aos resultados apresentados na Tab. 1. Note que uma maior probabilidade de perda de pacotes implica em regiões de estabilidade menores.

Tabela 1 – Máxima probabilidade de perda de pacotes para diferentes valores de α .

| | | | | |
|-----------|------|------|------|------|
| β^* | 0.22 | 0.49 | 0.78 | 0.82 |
| α | 0.35 | 0.3 | 0.1 | 0.01 |

Fonte: Elaborada pelo autor

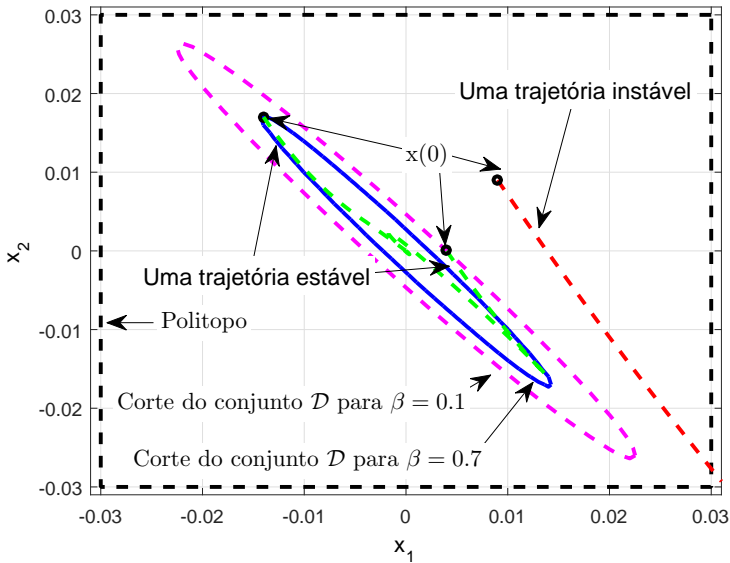
Em uma segunda análise considera-se que o politopo \mathcal{X} é definido por um hiper retângulo tal que:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x_1| \leq 0.03, |x_2| \leq 0.03, |x_3| \leq 0.2, |x_4| \leq 0.25\},$$

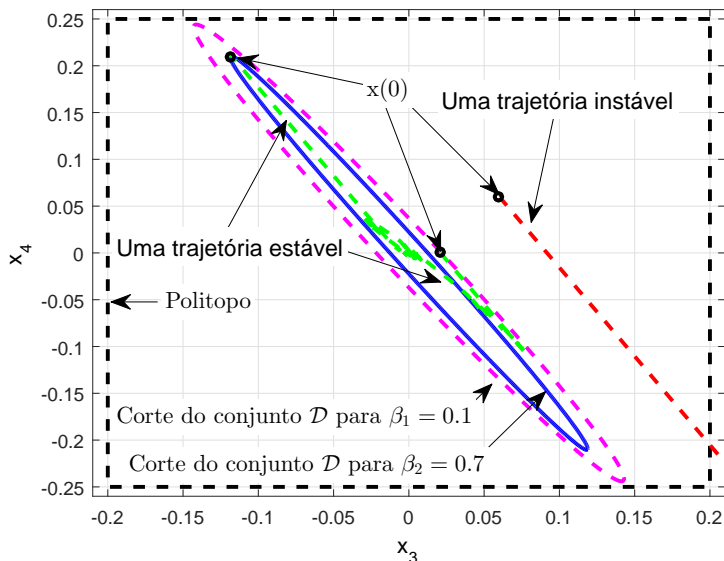
a probabilidade de perda de pacote é escolhida como sendo $\beta_1 = 0.1$ ou $\beta_2 = 0.7$. O problema de otimização da Eq. (4.27) é então aplicado para obter uma estimativa maximizada do conjunto de condições iniciais

admissíveis, o que leva aos resultados apresentados nas Fig. 21 e Fig. 22 na qual apresenta-se o corte do conjunto \mathcal{D} para $\beta_1 = 0.1$ e $\beta_2 = 0.7$ nos planos $x_1 \times x_2$ e $x_3 \times x_4$, respectivamente. Com propósitos ilustrativos, as trajetórias dos estados iniciando dentro e fora dos dois conjuntos estimados também são desenhados nas figuras acima citadas. Ao avaliar as duas figuras nota-se que o volume do domínio condições iniciais estimado no plano $x_1 \times x_2$ torna-se significativamente menor quando o probabilidade de perda de pacotes aumenta. Por outro lado, no plano $x_3 \times x_4$, as estimativas para \mathcal{D} são similares em tamanho indicando que os estados x_1 e x_2 são mais sensíveis a taxa de perdas maiores.

Figura 21 – Corte do conjunto \mathcal{D} sobre o plano $x_1 \times x_2$ para β_1 e β_2 .



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 22 – Corte do conjunto \mathcal{D} sobre o plano $x_3 \times x_4$ para β_1 e β_2 .

Fonte: Elaborada pelo autor

4.3.2 Exemplo 2

Considere o seguinte sistema não linear analisado na referência (DE SOUZA; COUTINHO, 2011):

$$x(k+1) = A(x)x(k) + B(x)u(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.31)$$

com

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad B(x) = B_0 + x_1 B_1 + x_2 B_2,$$

em que

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \text{diag}\{0.2, 0\}, \quad A_2 = \text{diag}\{0, -0.2\},$$

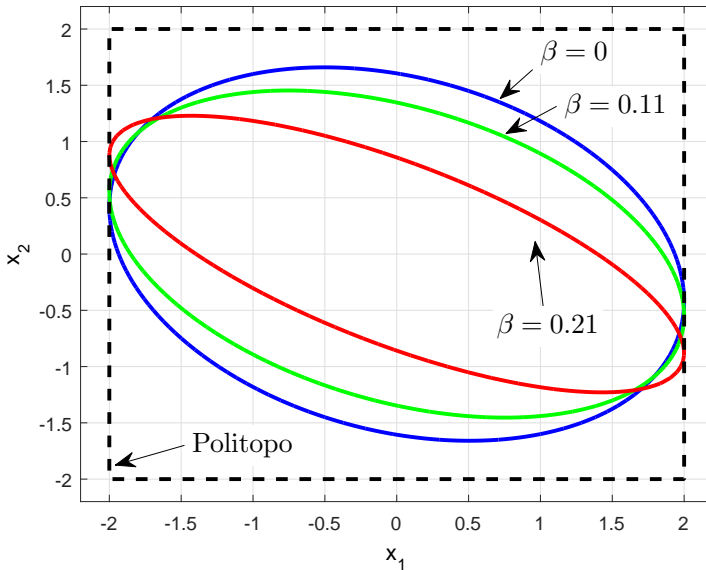
$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}', \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.3 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.3 \end{bmatrix}'.$$

Assume-se que o domínio politópico no estágio de estados \mathcal{X} é o seguinte quadrado:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq 2, \quad i = 1, 2\},$$

projeta-se um ganho de realimentação de estados $K(x)$, para estabilizar no sentido da média quadrada o sistema dado pela Eq. (4.31) sujeito a um canal com apagamento com uma dada probabilidade para perda de pacotes β . Considera-se três cenários para a probabilidade de perda de pacotes, nomeadamente $\beta=0$, $\beta=0.11$ e $\beta=0.21$, que é o máximo valor para β em que a solução é factível. Então, o problema de otimização dado pela Eq. (4.27) é aplicado para cada valor de β com o objetivo de maximizar a região de estabilidade no sentido da média quadrática \mathcal{D} do sistema em malha fechada, o que leva aos resultados apresentados na Fig. 23. Note que é possível reproduzir o resultado apresentado em (DE SOUZA; COUTINHO, 2011), bastando considerar $\beta=0$. Observa-se que na presença de perda de informação a área da região de estabilidade torna-se menor quanto maior é a probabilidade de perda.

Figura 23 – Região de estabilidade \mathcal{D} para $\beta=0$, $\beta=0.11$ e $\beta=0.21$.



Fonte: Elaborada pelo autor

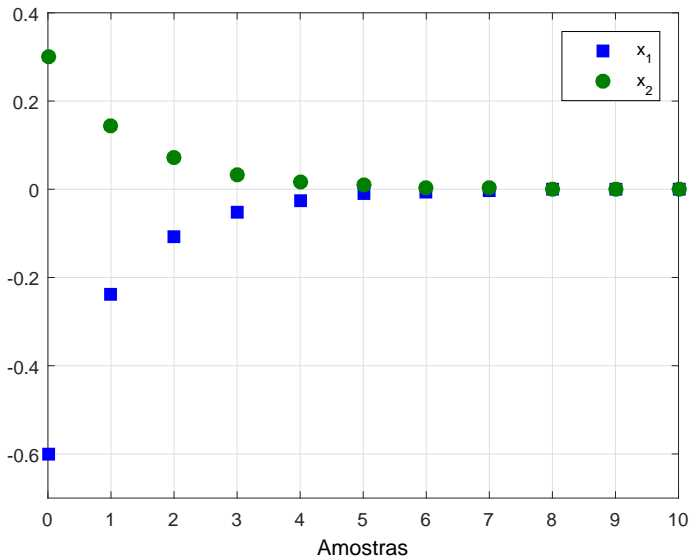
Em um segundo momento, aplica-se o problema de otimização dado pela Eq. (4.28) para determinar um ganho para realimentação de estados $K(x)$, quadrático em x , que estabiliza a malha fechada com a

máxima probabilidade de perda de pacotes β^* para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis, a saber $\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x'P_0x \leq 1\}$ com

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4.2725 & 4.9742 \\ 4.9742 & 11.3033 \end{bmatrix}.$$

Agora, considera-se que $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq 0.8, i = 1, 2\}$ levando a $\beta^* = 0.36$. Na Fig. 24 apresenta-se a resposta no tempo das variáveis de estado da malha fechada $x(0) = [-0.6 \ 0.3]' \in \mathcal{D}_0$ e uma realização do processo estocástico da perda de pacotes com $\beta = 0.36$.

Figura 24 – Resposta dos estados em malha fechada para $x(0) = [-0.6 \ 0.3]'$ e $\beta = 0.36$.



Fonte: Elaborada pelo autor

5 Alocação de Recursos por Quantização

Neste capítulo apresenta-se uma proposta de gerenciamento da largura de banda da rede através da variação do número de bits usados para representar as variáveis transmitidas, i.e., sinais de leitura (sensores) e de atuação (controle), enquanto mantém-se a taxa de transmissão de cada laço constante. Apresenta-se o conceito base bem como uma discussão qualitativa dos pontos positivos e negativos dessa proposta. Salienta-se que essa proposta é um projeto em aberto e, portanto, não existe uma formalização da técnica de gerenciamento da rede. Os testes realizados somente comprovam a viabilidade da ideia dentro do cenário apresentado e quais as vantagens e desvantagens do ponto de vista de controle.

5.1 Gerenciamento da Largura de Banda e a Quantização

A relação entre a largura de banda e a quantização torna-se evidente levando em conta que quantizadores com parâmetros diversos possuem níveis de quantização diferentes implicando diretamente no número de bits para representar uma palavra. Em particular, sendo N o número de níveis não negativos de quantização (lembrando que o quantizador definido pela Eq. (2.6) é simétrico) o valor de $2 * N - 1$ representa o número total de níveis. Assim tem-se que o número de bits N_b necessário para fazer essa representação é dado por:

$$N_b \geq \log_2(2N).$$

Entretanto existem outros pontos a serem considerados. Primeiro, diversos níveis de quantização levam a diferentes graus de performance do controlador. Assim, menos (mais) níveis de quantização levam a menos (mais) bits, portanto pior (melhor) será a performance do

controlador. Segundo, a mudança dinâmica dos quantizadores deve ser feita de maneira que não implique em sobrecarga/processamento extra quando o sinal for reconstruído, pois visa-se utilizar sensores/atuadores simples sem grande capacidade de processamento de sinais.

De acordo com a definição de quantizadores logaritmos com finitos níveis dada pela Eq. (2.6), esses dois requisitos podem ser encontrados fixando-se o valor para o maior nível máximo de quantização μ e a densidade de quantização ρ (consequentemente δ também é fixado). Então, apenas o número de níveis N necessita ser modificado, implicando na alteração do menor nível de quantização ϵ uma vez que

$$N \geq 1 + \log_{\rho} \frac{\epsilon(1 + \delta)}{\mu}.$$

Note que $\rho < 1$ e assim, quando ϵ cresce, N é reduzido, a Fig. 25a ilustra esse efeito considerando dois valores de ϵ diferentes. Nesse caso, o conjunto de condições iniciais \mathcal{D} permanece o mesmo, enquanto o conjunto atrator \mathcal{A} é alterado com suas dimensões variando consistentemente com N e inversamente a ϵ , como pode ser observado na Fig. 25b. Agora, note que as dimensões do conjunto atrator podem ser usadas como métrica do desempenho de controle uma vez que quanto menor o atrator menor será o erro de quantização levando provavelmente a uma trajetória dos estados mais suave. Esse resultado vem direto da noção de estabilidade adotada neste trabalho pois quando menor o atrator menor a região na qual o sistema em malha fechada opera em malha aberta e tende a se afastar da origem.

Portanto, em um sistema que compreende várias malhas de controle independentes e distribuídas, se houver disponibilidade de largura de banda suficiente essas malhas podem usar quantizadores mais densos, refletindo em variáveis com mais bits por sua vez gerando mensagens mais longas que tornam o atrator menor e suavizam a trajetória dos estados. Se em um certo momento uma sobrecarga da rede acontecer seu efeito pode ser mitigado fazendo uma parte da malha de controle usar uma quantização mais grosseira, assim uma mensagem menor é enviada, entretanto, mantém-se o sistema estável com um

certa degradação na performance do controle.

Finalmente, a adaptação específica dos quantizadores proposta neste capítulo consiste em uma representação de ponto fixo, correspondente a eliminar o bits menos significativos das variáveis que são transmitidas através da rede. Isso permite uma reconstrução muito simples dos valores no controlador e no atuador, apenas é necessário detectar o número de bits recebidos e preencher a direita com os zeros necessários para recuperar o formato certo.

5.2 Praticidade da Abordagem

Para que o método a ser proposto tenha uma aplicação prática, as variações do tamanho das mensagens devem ser significativas para obter um impacto igualmente significativo na largura de banda utilizada. Por outro lado, o tamanho típico das variáveis envolvidas é pequeno, por exemplo, em formato de ponto fixo, o tamanho comum será de até 4 bytes. Consequentemente, o método a ser proposto será efetivo apenas em redes que utilizam pacotes de tamanhos pequenos como, por exemplo, CAN ou FlexRay (STEMMER, 2010; ALBUQUERQUE; ALEXANDRIA, 2009). No caso específico da rede tipo CAN, tem-se que as mensagens como os tamanhos de 1, 2 e 4 bytes implicam que o tamanho total dos pacotes, no pior caso, incluindo todos os cabeçalhos será de 73, 81 e 97 bits, respectivamente. Isso corresponde a uma redução de 21% ou 32% na duração da mensagem quanto passa-se de 4 para 2 ou 1 byte(s), respectivamente. Enquanto a mudança de 2 para 1 byte(s) implica em uma redução de 13% na duração da transmissão da mensagem (TINDELL; HANSSON; WELLINGS, 1994; TINDELL; BURNS; WELLINGS, 1995).

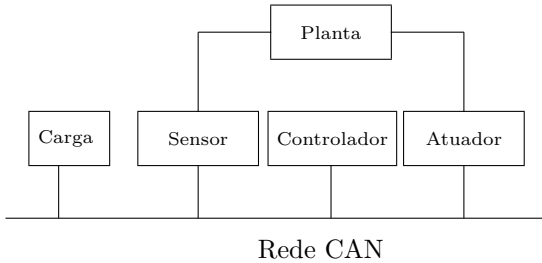
Do ponto de vista dos programas que controlam os sistemas, a adaptação para quantizadores variáveis é direta uma vez que os receptores sabem quantos bytes são recebidos e assim o formato dos valores recebidos pode ser facilmente ajustado, ou seja, conhecendo quantos bytes foram recebidos sabe-se qual os parâmetros de quantização utili-

zados pelo nó que enviou a mensagem. Lembrando que os parâmetros para cada quantizador utilizado devem ser previamente definidos em ambos os nós. Quando comparando a adaptação no tamanho das palavras com a adaptação da taxa de transmissão, um aspecto particularmente relevante e com potencial para benefícios significativos é o de fato dos períodos de amostragem das malhas de controle permanecem constantes com o uso da adaptação da quantização. Do ponto de vista da rede, isto pode favorecer melhorias significativas no comportamento temporal do tráfego, uma vez que a taxa de transmissão é constante contribuindo para a redução significativa da latência na rede, conhecido comumente como jitter. Além disso, do ponto de vista do controle, usar períodos constantes simplifica o projeto dos controladores e evita a troca dos mesmos (fato comum com a adaptação da taxa de transmissão) com todos seus potenciais problemas e dificuldade associadas. Mesmo assim, essa técnica não é livre de preocupações visto que a estabilidade do modelo pode não ser garantida para algumas plantas que requerem latências de rede muito baixas. Neste caso, pode não ser possível utilizar poucos níveis de quantização para o laço em questão eliminando os potenciais benefícios dessa técnica. Além disso, a adaptação por quantização parece ser restringida significativamente pelo fato que as redes atuais usam campos de dados delimitados por bytes, limitando assim o impacto que a adaptação por quantizadores pode ter sobre a largura de banda da rede e possivelmente sendo mais inadequada que a adaptação por taxa de transmissão.

A configuração de rede concebida para as simulações e avaliações preliminares do método proposto é apresentado na Fig. 26. Usa-se a rede CAN com escalonamento por prazo de entrega monotônico (deadline-monotonic scheduling). O nó Carga é responsável por sobrecarregar a rede simulando o uso por outros processos, e tem a maior prioridade na rede. O nó Atuador é acionado por um temporizador que efetua a atuação apenas se houver uma nova mensagem vinda do controlador caso contrário aplica um sinal de atuação zero. O nó Sensor realiza a amostragem de forma periódica e tenta enviar a informação, se a

mensagem não é enviada até o próximo instante de amostragem a amostra antiga é descartada e uma nova tentativa de envio da mensagem é feita com o valor de amostra atualizado. O sistema é simulado usando o software TrueTime, um simulador baseado em MATLAB/Simulink para simulação do comportamento da rede de comunicação.

Figura 26 – Diagrama de blocos do sistema distribuído.



Fonte: Elaborada pelo autor

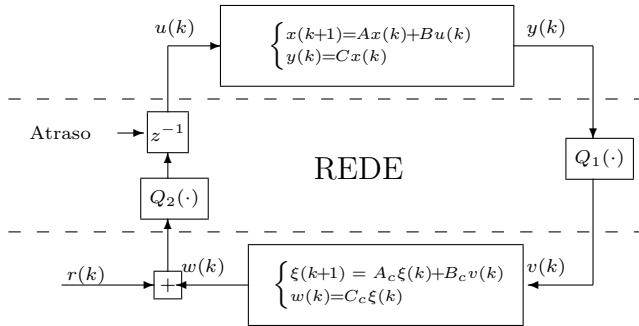
As políticas de escalonamento tendem a focar no objetivo de otimizar a utilização da rede e não levam em conta os efeitos que as decisões de escalonamento acarretam sobre o desempenho das malhas de controle em si. Portanto, para implementar com sucesso um sistema embarcado distribuído no qual varias malhas de controle coexistem com outros sistemas, compartilhando uma única meio de comunicação, é necessário aplicar políticas de controle capazes de lidar com as mudanças temporais impostas pelo escalonador da rede.

Devido a configuração de rede escolhida para os testes existe a introdução de um atraso na malha de controle. Para tratar o problema do atraso, impõe-se um atraso de um período de amostragem na entrega da mensagem do sinal de controle para o atuador como ilustrado na Fig. 27. Com isso, considera-se para o projeto do controlador uma dinâmica aumentada para o modelo da planta (incluindo um estado á representação para levar em conta o atraso unitário). Para atrasos maiores que um período de amostragem, a informação será considerada como perdida.

Para tanto, propõem-se um projeto de controle que induz um

atraso na entrega da mensagem do sinal de controle ao atuador, i.e., existe um atraso de uma unidade de tempo entre a saída do controlador e a entrada do sistema, conforme é ilustrado no diagrama da Fig. 27.

Figura 27 – Sistema de controle realimentado com atraso na entrada e com quantização na entrada e na saída.



Fonte: Elaborada pelo autor

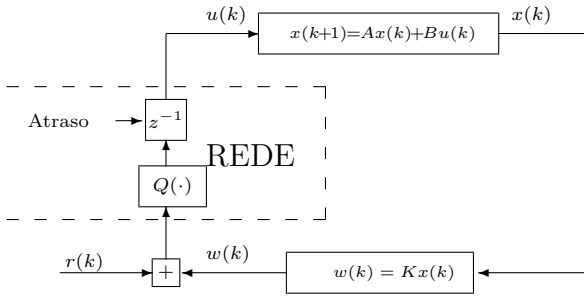
5.3 Realimentação de Estados sob Quantização e Perda de Pacotes

A seguir, apresentam-se testes realizados quando se considera que a malha de realimentação está sujeita a quantização e perda de pacotes. No Capítulo 4, o problema de análise de estabilidade considera somente sistemas sujeitos a perda no canal de realimentação do sinal de controle, conforme a configuração apresentada na Fig. 28. Observa-se, nesse caso, que o controlador é colocado juntamente com o sensor, i.e., o sinal de sensoriamento não é transmitido via rede. Os testes foram realizados utilizando o simulador TrueTime/MatLab no qual a rede tem o arranjo de acordo como apresentado na Fig. 29.

Primeiro, a título de simplicidade, considera-se um sistema linear invariante em tempo contínuo dado pela seguinte função de transferência:

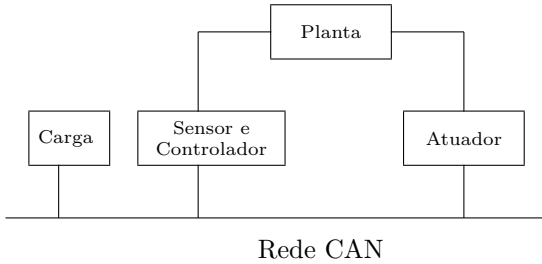
$$G(s) = \frac{1000}{s^2 + s}, \quad (5.1)$$

Figura 28 – Sistema de controle realimentado por dois estados com atraso na entrada com quantização na entrada.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 29 – Diagrama de blocos do sistema distribuído caso realimentação de estados.



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, para aplicar-se a metodologia apresentada na Seção 2.3 faz-se necessário a discretizar o sistema da Eq. (5.1). Então, usando um período de amostragem de 50 ms, obtém-se que a seguinte representação no espaço de estados discreto:

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.95 & -0.95 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(k). \quad (5.2)$$

Como explicado na seção anterior, considera-se atraso unitário (i.e., um período de amostragem) na entrada do sistema. Portanto, deve-se incorporá-lo ao sistema dado pela Eq. (5.4) para a síntese do controlador. Assim tem-se um sistema no espaço de estados aumentado como

segue (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998):

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad (5.3)$$

com $u_d(k) = u(k-1)$, ou seja, é o sinal de entrada atrasado de uma amostra.

Usando a metodologia proposta por Coutinho, Fu e de Souza (2010), projeta-se uma lei de controle por realimentação de estados que estabiliza quadraticamente o sistema dado pela Eq. (5.3) visando maximizar o parâmetro que define a densidade de quantização. Assim, obtém-se o seguinte ganho para a realimentação de estados:

$$K = \begin{bmatrix} -0.7669 & 0.7463 & -0.7846 \end{bmatrix},$$

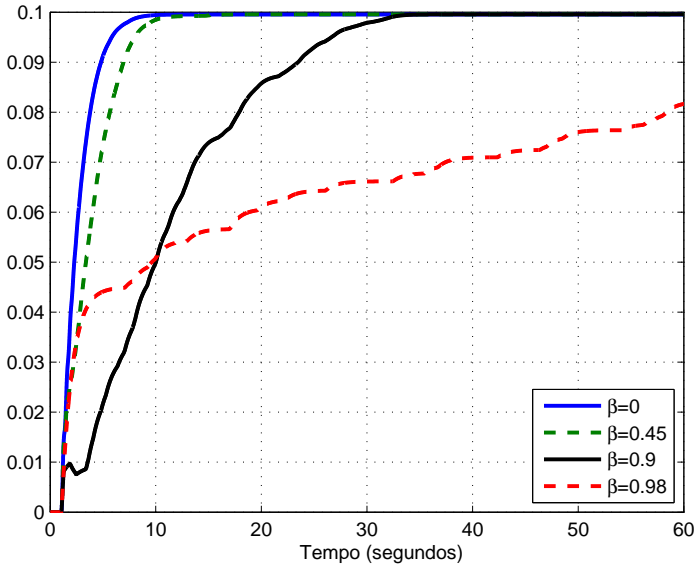
com $\rho_{\min} = 0.99$. Assim, propõe-se à seguinte configuração para o quantizador finito:

$$\delta = 6 \times 10^{-5}, \quad \mu = 0.9, \quad N_b = 16, \quad \rightarrow N = 32768, \quad \epsilon = 2.4742 \times 0.0176.$$

Em conjunto com o efeito da quantização foi considerado o efeito da perda de pacotes, no qual a probabilidade de perda β assume os seguintes valores 0%, 45%, 90% e 98%. Na Fig. 30 apresenta-se o resultado dos testes nas configurações acima.

Quando há a perda de informação e por consequência não houver sinal de controle o sistema não a ficar instável por se tratar de uma realimentação que é estável em malha aberta e em malha fechada. Isto deve-se ao dato da configuração de realimentação utilizada na simulação enviar o sinal controle igual a zero em caso de perda de pacotes. Portanto ao aplicar-se a análise de estabilidade do Lema 4.2 no sistema deste exemplo verifica-se que só há a instabilidade com a probabilidade de perda acima de 99%. Entretanto nota-se que há uma grande degradação da qualidade do controle bem como do tempo de subida da malha de forma proporcional com o aumento da probabilidade de perda da rede.

Figura 30 – Resposta temporal para sistema sob efeito de quantização e perda de pacotes.



Fonte: Elaborada pelo autor

5.4 Realimentação de Saída sob Quantização

Nesta seção, estuda-se o comportamento do sistema de controle em malha fechada considerando quantização e uma realimentação dinâmica de saída. Na sequência, apresentam-se simulações realizadas sob o sistemas definido pela Eq. (5.2) de acordo com a configuração ilustrada na Fig. 27 com quantização nos canais de entrada e saída. Sendo que sua representação no espaço de estados discreto é dada por:

$$\begin{cases} x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.95 & -0.95 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(k) \\ y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.23 & 1.21 \end{bmatrix}}_C x(k) \end{cases}, \quad (5.4)$$

para um período de amostragem de 50 *ms*.

De maneira similar a seção anterior, impõe-se um atraso na en-

trada do sistema para realizar o projeto do controlador. Isto é, incorpora-se o atraso ao sistema dado pela Eq. (5.4) levando ao seguinte sistema no espaço de estados aumentado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u_d(k) \end{bmatrix} \end{cases},$$

Usando a metodologia proposta por [Coutinho, Fu e de Souza \(2010\)](#), realiza-se o projeto da lei de controle por realimentação de saída que estabiliza quadraticamente o sistema e que é projetado para maximizar os parâmetros δ_1 e δ_2 ou equivalentemente minimizar as densidades de quantização assumindo que os quantizadores são ideais, logo tem-se que o controlador é dado por:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \times 10^{-4} & -26.54 & -24.25 \\ 0.99 & 7.33 & 5.02 \\ -0.36 & -10.89 & -9.43 \end{bmatrix}}_{A_c} \xi(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.17 \\ -0.05 \\ 0.07 \end{bmatrix}}_{B_c} v(k) \\ w(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 66.15 & -67.27 & -236.51 \end{bmatrix}}_{C_c} \xi(k) \end{cases}, \quad (5.5)$$

tem-se que $\delta_{\text{sup}} = 0.03$, que se relaciona com a densidade de quantização mínima ρ_{min} através da Eq. (2.7).

Na sequência, usa-se o valor para δ_{sup} como base e assim pode-se escolher os demais parâmetros para os quantizadores. Assumindo que os quantizadores de níveis finitos $Q_1(\cdot)$ e $Q_2(\cdot)$ são iguais (por simplicidade) define-se duas configurações distintas para a realização dos testes, como segue

Quantizador Um: Configuração com no máximo 2 bytes.

$$\begin{aligned} \rho_i &= 0.99, \quad \mu_i = 0.9, \quad N_{b_i} = 16, \quad \rightarrow N_i = 32768, \\ \epsilon_i &= 0.0176, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

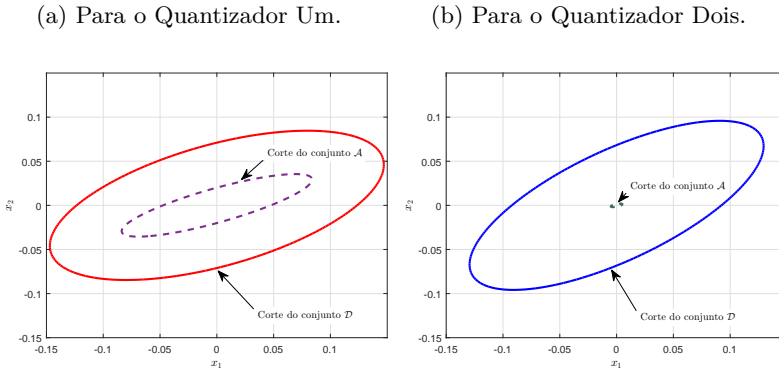
Quantizador Dois: Configuração com no máximo 3 bytes.

$$\rho_i = 0.99, \quad \mu_i = 5, \quad N_{b_i} = 22, \quad \rightarrow N_i = 2097152,$$

$$\epsilon_i = 6.8622 \times 10^{-73}, \quad i = 1, 2.$$

Agora, aplica-se o Teorema 2.4 para verificar o conjunto de condições iniciais admissíveis \mathcal{D} e seu respectivo conjunto atrator \mathcal{A} que garante a estabilidade assintótica no sentido amplo para o sistema da Eq. (5.4) em malha fechada com o controlador dado pela Eq. (5.5), e considerando ambas as configurações de quantizadores apresentadas acima. Assim, apresenta-se na Fig. 31a e na Fig. 31b o corte dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} para o Quantizador Um e para o Quantizador Dois, respectivamente.

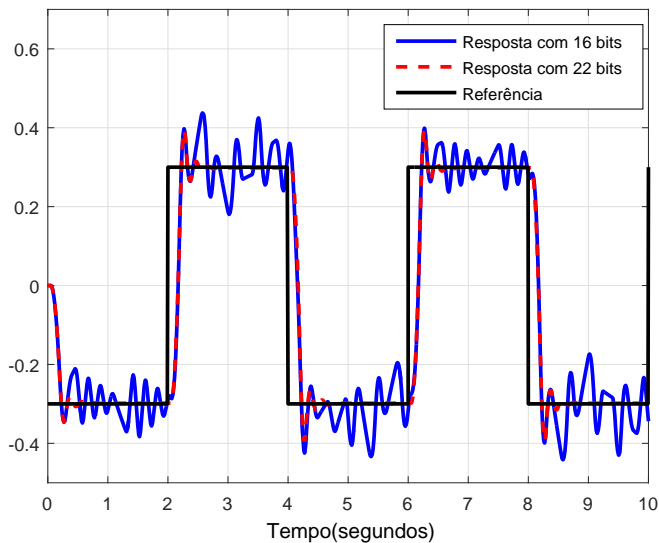
Figura 31 – Corte dos conjuntos \mathcal{D} e \mathcal{A} .



Fonte: Elaborada pelo autor

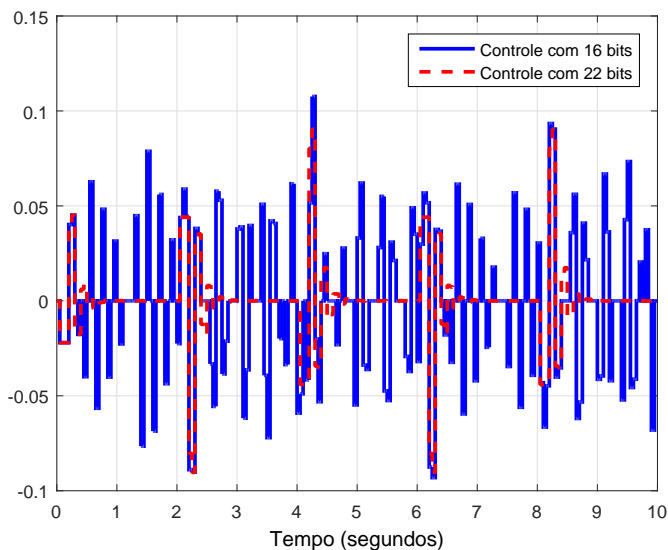
Para inferir a diferença no desempenho do sistema utilizando as duas configurações de quantizadores, realiza-se uma comparação da resposta temporal como demonstrado na Fig. 32, para tal utiliza-se uma onda quadrada com amplitude 0.03 e 2 segundos de período como sinal de referência. Apresenta-se na Fig. 33 o sinal de controle, ficando evidente a troca entre as duas configurações de quantização. Observe que quando a Configuração Um está em uso a amplitude do sinal de controle é menor pois o ϵ_i é menor levando a uma quantização mais fina próximo à origem, i.e., o número de níveis próximo a origem é maior.

Figura 32 – Comparação da resposta temporal do sistema obtida como as duas configurações de quantizadores.



Fonte: Elaborada pelo autor

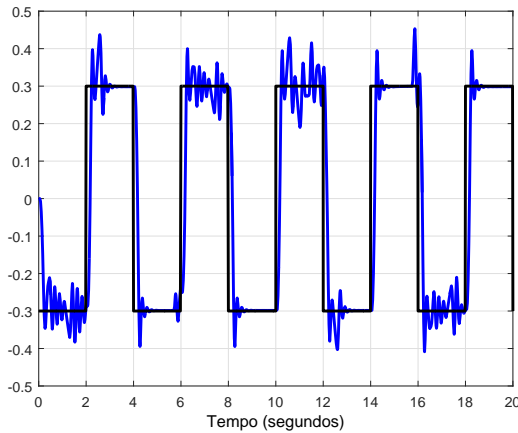
Figura 33 – Sinal de controle para as duas configurações de quantizadores.



Fonte: Elaborada pelo autor

Já na Configuração Dois o ϵ_i é maior, ou seja, há uma quantização mais grosseira levando a uma região de atração maior. Por fim, na Fig. 34, mostra-se que o sistema se mantém estável com a troca de configuração do quantizador, simulação inicia com a malha de controle utilizando o quantizador com a Configuração Um e alterando entre as duas configurações a cada 3 segundos.

Figura 34 – Resposta temporal do sistema obtida como a alternância duas configurações de quantizadores.



Fonte: Elaborada pelo autor

5.5 Problemas Práticos

As simulações apresentadas anteriormente demonstram que a abordagem tem um grande potencial de aplicação apesar de algumas limitações, como, por exemplo, em relação ao tipo de rede na qual é vantajoso utilizá-la. Nota-se que é necessário fazer uma escolha cuidadosa para a carga extra a ser inserida na rede pois a mesma, se muito elevada, pode provocar a perda do prazo de envio na mensagem do sensor para o controlador e conseqüente falha no envio dentro do mesmo período de tempo em que foi amostrado. Essa perda de informação mostrou-se crítica, uma vez que se a mensagem não é enviada ao controlador. Neste caso, adotou-se a estratégia de colocar o valor zero como entrada.

Portanto, o sistema opera em malha aberta até que uma efetiva nova mensagem de controle seja recebida. Nas configurações utilizadas acima verificou-se que a perda de pacotes pode levar a instabilidade do sistema dependendo de quão grosseiro é o quantizador utilizado, isso se deve ao controlador não ser robusto o suficiente para manter a estabilidade na presença de perdas e de uma pequena densidade de quantização. Então, faz-se necessário que a análise da estabilidade do sistema quando sujeito a perda de informação seja realizada de forma conjunta a análise quando sujeito a quantização. Problema esse que não foi investigado por completo nesta tese de doutorado. Outro problema não investigado nesta tese é como será implementado o controle da rede, ou seja, como será e qual(is) agente(s) da rede será(ão) responsável(is) por fazer a troca dos quantizadores utilizados por cada malha.

6 Considerações Finais

Nesta tese abordou-se o problema da estabilidade de sistema de controle retroalimentado via redes de comunicação. O estudo concentrou-se especialmente em dois problemas: malhas de controle nas quais utiliza-se a quantização logarítmica com um número finito de níveis e malhas de controle sujeitas a perda de informação a qual é modelada por um processo estocástico de Bernoulli.

No Capítulo 2 apresentou-se os resultados obtidos na investigação sobre a análise da estabilidade e estabilização de um sistema de controle via rede na qual a transmissão é quantizada em ambos os canais (sensor e atuador), tais resultados foram publicados em (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2012) com ênfase na análise de estabilidade e em (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2015) com o foco no projeto de quantizadores. Considerou-se que o sistema pode tanto ser controlado via uma lei de realimentação de estados como por uma lei de realimentação dinâmica de saída. E, sabendo que devido as características particulares da construção de um quantizador logarítmico com número finitos de níveis não é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema, propôs-se o uso da chamada estabilidade quadrática no sentido amplo. Com este conceito de estabilidade obteve-se um conjunto de desigualdades matriciais (LMIs) as quais determinam uma região de condições iniciais onde é garantida que os estados do sistema de controle irão convergir para uma região atratora na vizinhança da origem do plano no espaço de estados. Além do mais, uma vez que os estados adentrem o conjunto atrator é garantido que não o deixem. Os resultados obtidos foram satisfatórios, dando impulso a sua utilização como base para a proposta de uma metodologia de controle dos recursos de uma rede, em específico o controle da largura de banda.

Assim, no trabalho desenvolvido como parte do estágio san-

duíche realizado na Universidade do Porto - Portugal, sob a supervisão do Professor Luis Almeida, estudou-se a proposta de uma metodologia para estabilização de sistemas lineares sob quantização em uma aplicação mais próxima da prática industrial. Como apresentado no Capítulo 5 e publicado como trabalho em progresso em (MAESTRELLI et al., 2014) fez-se a análise inicial de um método de controle dos recursos da rede, em específico o controle do uso da banda disponível, através da variação do tamanho das mensagens enviadas pela malha de controle que implica diretamente nos parâmetros dos quantizadores utilizados, i.e., número de bits. As simulações realizadas somente levaram em conta o problema do ponto de vista do projeto de controle. Durante a fase de testes, notou-se que o processamento da informação e a presença da rede induzem um certo atraso no envio da informação que acabará sendo apenas aplicado na próxima amostragem. Para levar esse efeito em consideração, optou-se em forçar um atraso de um período de amostragem. Desta forma, houve uma modificação do método de análise de estabilidade original, pois o mesmo não levava em conta atrasos na malha de controle. A metodologia de controle de largura de banda via a quantização usada por cada malha mostrou-se promissora apesar da limitação do tipo de rede que pode gerar benefícios significativos. O modo como o gerenciamento da largura se dará do ponto de vista do controle de rede não foi abordado neste trabalho.

Tratando em específico do problema da perda de informação apresentado no Capítulo 4, utilizou-se um processo de Bernoulli para descrever o comportamento estocástico da perda de pacotes. O resultado quando considerado um sistema linear demonstrou que a proposta era a solução dual de um resultado já conhecido na literatura. Entretanto a abordagem desta tese tem a vantagem de ser aplicável para a classe de sistema não lineares quadráticos e prontamente estendido para o caso no qual as matrizes dos sistema apresentam incertezas do tipo politópica. Esse capítulo tem um trabalho submetido ao IEEE Transactions on Automatic Control em 2016.

Voltando ao problema da análise de estabilidade de sistemas

quantizados, no Capítulo 3 o método proposto inicialmente foi estendido para tratar da análise de estabilidade quando considera-se que o sistema é dado por um modelo não linear quadrático. O problema de estabilização para sistemas não lineares quadráticos com realimentação de estados também não linear apresentado na Seção 3.1, foi submetido ao Conference on Decision and Control 2016, lembrando que neste caso só considera-se a presença de um quantizador na realimentação. Já problema de estabilização para sistemas quadráticos com realimentação dinâmica de saída sob quantização ainda não foi completamente solucionado na literatura, ou seja, um método de projeto de controle dinâmico de saída que estabilize um sistema sob quantização ideal nos dois canais ainda não foi devidamente endereçado a literatura. Por esse motivo que nos exemplos apresentou-se um caso usando um lei de realimentação de estados afim nos estados e um caso de realimentação dinâmica de saída linear. Na publicação (MAESTRELLI; COUTINHO; DE SOUZA, 2014) apresenta-se os resultados do Capítulo 3 para o caso especial da lei de controle por realimentação de estados e somente a presença de um quantizador. A versão de um artigo sobre o caso de dois quantizadores e realimentação de saída está em andamento.

Em resumo a proposta de controle de banda via quantização demonstrou potencial salvaguardado algumas considerações tais como: a rede deve considerar o envio de mensagens pequenas, i.e., o tamanho mínimo do pacote que a rede envia não pode ser demasiadamente grande. Apesar da análise de estabilidade de sistemas sujeitos a quantização logarítmica com número finito de níveis ter sido devidamente tratada nesta tese, o problema de análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas sujeitos a perdas de informação considerando uma lei de realimentação dinâmica de saída ainda não foi devidamente solucionado, inviabilizando uma análise mais profunda do tema. Assim, a definição de como realização a implementação do método e controle dos recursos via a quantização está em aberto.

Os resultados acima enfatizados foram em grande parte publicados ou apresentados em congressos como mostrado a seguir:

- *Stability analysis of input and output finite level quantized discrete-time linear control systems*. Publicado no 51^o edição do congresso: *IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, em 2012.
- *Stability Analysis of Finite-Level Quantized Nonlinear Quadratic Discrete-Time Control Systems*. Publicado na 20^o edição do Congresso Brasileiro de Automática em 2014.
- *Dynamic bandwidth management in networked control systems using quantization*. Publicado como Tópico Especial na 6^o edição da oficina: *Workshop on Adaptive and Reconfigurable Embedded Systems*, em 2014.
- *Input and Output Finite-Level Quantized Linear Control Systems: Stability Analysis and Quantizer Design* Publicado na Revista: *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, em 2015.
- *Mean Square Stability and Stabilization of Nonlinear Quadratic Systems Over Erasure Feedback Channels*. Submetido a Revista: *IEEE Transactions on Automatic Control*, em 2016.
- *Quantized Control of Nonlinear Quadratic Discrete-Time Systems*. Submetido a 55^o edição do congresso: *Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, em 2016

Propostas de Trabalhos Futuros

Com base nas considerações feitas anteriormente pode-se listar os seguintes tópicos para pesquisas futuras:

- i) Aprimorar a análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas com perda pacotes, resultado apresentado do Capítulo 4 considerando a lei de controle dada por uma realimentação dinâmica de saída.

- ii) Desenvolver uma condição de estabilidade considerando o modelo por cadeias de Markov para tratar o problema de perda de pacotes consecutivas e considerando uma lei de realimentação de saída.
 - iii) Desenvolver um método de estimação de estados para sistemas submetidos aos efeitos de quantização e perda de pacotes.
 - iv) Consolidar a abordagem proposta para gerenciamento dinâmico da largura de banca baseada na adaptação dos níveis de quantização.
-

Referências

- ALBUQUERQUE, P. U. B.; ALEXANDRIA, A. R. *Redes Industriais*. Brasil: Editora Ensino Profissional, 2009. 138
- AMATO, F.; CONSENTINO, C.; MEROLA, A. On the region of attraction of nonlinear quadratic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 12, p. 2119–2123, 2007. 69
- ANTUNES, A.; PEDREIRAS, P.; ALMEIDA, L.; MOTA, A. Dynamic rate adaptation in distributed computer control systems. *Proc. of the Int. Con. on Method. for Emerging Tech in Automation (ANIPLA)*, 2006. 34, 35
- ANTUNES, A.; PEDREIRAS, P.; MOTA, A. M. Adapting the sampling period of a real-time adaptive distributed controller to the bus load. In: IEEE. *Proc. of the 10th Conf. on Emerging Tech. and Factory Automat.* [S.l.], 2005. v. 1, p. 4–pp. 35
- ÅRZÉN, K. E.; CERVIN, A.; HENRIKSSON, D. Implementation-aware embedded control systems. In: HRISTU-VARSAKELIS, D.; LEVINE, W. S. (Ed.). *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 377–394. 34
- BAILLIEUL, J. Feedback coding for information-based control: Operating near the data-rate limit. In: IEEE. *Proc. of the 41st Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2002. v. 3, p. 3229–3236. 20
- BOYD, S. P.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia - E.U.A.: Society for Industrial Mathematics, 1994. v. 15. 50, 52, 74, 75, 79, 122, 123, 124, 126
- BROCKETT, R. W.; LIBERZON, D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 45, n. 7, p. 1279–1289, 2000. 20, 21
- BUTTAZZO, G.; VELASCO, M.; MARTI, P.; FOHLER, G. Managing quality-of-control performance under overload conditions. In: IEEE. *Proc. of the 16th Euromicro Conf. on Real-Time Systems*. [S.l.], 2004. p. 53–60. 35

- CERVIN, A. *Integrated Control and Real-Time Scheduling*. Tese (Doutorado) — Lund University, 2003. 35
- CHEN, Y.; XIAO, B.; XU, Z. Fault detection filter design for networked control system with communication delays. In: IEEE. *Proc. of the 6th Int. Conf. on Intel. Systems Design and Appl.* [S.l.], 2006. v. 1, p. 867–872. 30
- COLOM, P. M. *Analysis and Design of Real-Time Control Systems with Varying Control Timing Constraints*. [S.l.]: Universitat Politècnica de Catalunya, 2003. 35
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Brasil: Springer-Verlag, 2005. 29
- COUTINHO, D.; DE SOUZA, C. E. Nonlinear state feedback design with a guaranteed stability domain for locally stabilizable unstable quadratic systems. *IEEE T. Circuits Syst. I Regul. Pap.*, IEEE, v. 59, n. 2, p. 360–370, 2012. 69
- COUTINHO, D. F.; FU, M.; DE SOUZA, C. E. Input and output quantized feedback linear systems. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 55, n. 3, p. 761–766, Mar 2010. 22, 39, 40, 44, 62, 64, 67, 143, 145
- COUTINHO, D. F.; FU, M.; TROFINO, A.; DANÈS, P. L_2 -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 88–110, 2008. 94
- CURRY, R. E. *Estimation and Control with Quantized Measurements*. Cambridge - E.U.A.: MIT Press, 1970. v. 60. 19
- DANNAN, F. M.; ELAYDI, S. Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 113, p. 562–577, 1986. 113
- DANNAN, F. M.; ELAYDI, S. Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations ii. liapunov functions. *J Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 143, p. 517–529, 1989. 113
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, F. Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *Int. J. Control*, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002. 72

- DE PERSIS, C. N-bit stabilization of n-dimensional nonlinear systems in feedforward form. *IEEE T. Automat. Control*, v. 50, n. 3, p. 299–311, March 2005. [69](#)
- DE SOUZA, C. E.; COUTINHO, D. Nonlinear control design for open-loop unstable quadratic discrete-time systems. In: *IEEE. Proc. of the 9th Int. Conf. Control and Automation*. Santiago, Chile, 2011. p. 710–715. [84](#), [102](#), [104](#), [106](#), [128](#), [131](#), [132](#)
- DE SOUZA, C. E.; COUTINHO, D.; SILVA, J. M. Gomes da. Local input-to-state stabilization and \uparrow_{∞} -induced norm control of discrete-time quadratic systems. *Int. J. Robust and Nonlin.*, Wiley Online Library, v. 25, n. 14, p. 2420–2442, 2015. [70](#)
- DE SOUZA, C. E.; COUTINHO, D. F.; FU, M. Stability analysis of finite-level quantized discrete-time linear control systems. *Eur. J. Contr.*, v. 16, n. 3, p. 258–274, 2010. [22](#), [39](#), [40](#), [41](#), [45](#), [48](#), [50](#), [51](#), [54](#), [103](#), [105](#)
- DELCHAMPS, D. F. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 35, n. 8, p. 916–924, 1990. [19](#)
- DONKERS, M. C. F.; HEEMELS, W. P. M. H.; DE WOUW, N. van; HETEL, L. Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 56, n. 9, p. 2101–2115, Sep 2011. [31](#)
- EKER, J.; HAGANDER, P.; ÅRZÉN, K. E. A feedback scheduler for real-time controller tasks. *Control Eng. Pract.*, Elsevier, v. 8, n. 12, p. 1369–1378, 2000. [35](#)
- ELIA, N. Remote stabilization over fading channels. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 54, n. 3, p. 237–249, 2005. [28](#), [32](#), [114](#), [124](#), [128](#)
- ELIA, N.; EISENBEIS, J. N. Limitations of linear remote control over packet drop networks. In: *IEEE. Proc. of the 43rd Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2004. v. 5, p. 5152–5157. [27](#), [32](#)
- ELIA, N.; EISENBEIS, J. N. Limitations of linear control over packet drop networks. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 56, n. 4, p. 826–841, 2011. [28](#), [33](#)

- ELIA, N.; MITTER, S. K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, 2001. [21](#), [24](#), [41](#), [43](#), [48](#)
- ESPANA, M.; LANDAU, I. D. Reduced order bilinear models for distillation columns. *Automatica*, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 345–355, 1978. [69](#)
- FIGALLI, G.; CAVA, M. L.; TOMASI, L. An optimal feedback control for a bilinear model of induction motor drives. *Int. J. Control*, Taylor & Francis, v. 39, n. 5, p. 1007–1016, 1984. [69](#)
- FLETCHER, A. K.; RANGAN, S.; GOYAL, V. K. Estimation from lossy sensor data: Jump linear modeling and kalman filtering. In: *ACM. Proc. of the 3rd Int. Symp. on Information Processing in Sensor Networks*. [S.l.], 2004. p. 251–258. [30](#)
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3. ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1998. [143](#)
- FU, M.; DE SOUZA, C. E. State estimation for linear discrete-time systems using quantized measurements. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 12, p. 2937–2945, Dec 2009. [22](#)
- FU, M.; XIE, L. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 50, n. 11, p. 1698–1711, Nov 2005. [21](#), [23](#), [25](#), [26](#), [42](#), [43](#), [50](#), [64](#)
- FU, M.; XIE, L. Finite-level quantized feedback control for linear systems. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 54, n. 5, p. 1165–1170, 2009. [21](#)
- FU, M.; XIE, L. Quantized feedback control for linear uncertain systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 20, n. 8, p. 843–857, 2010. [21](#)
- GRAY, R. M.; NEUHOFF, D. L. Quantization. *IEEE T. Inf. Theory*, IEEE, v. 44, n. 6, p. 2325–2383, 1998. [17](#)
- HASSIBI, A.; BOYD, S. P.; HOW, J. P. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events. In: *IEEE. Proc. of the 38th Conf on Decision and Control*. [S.l.], 1999. v. 2, p. 1345–1351. [31](#)

- HENRIKSSON, D.; CERVIN, A. Optimal on-line sampling period assignment for real-time control tasks based on plant state information. In: IEEE. *Proc. of the 44th Conf. on Decision and Control and 2005 Eur. Control Conf.* Espanha, 2005. p. 4469–4474. [35](#)
- HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. *Proc. IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, v. 95, n. 1, p. 138–162, Jan 2007. [16](#), [17](#)
- HU, S.; YAN, W. Y. Stability robustness of networked control systems with respect to packet loss. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 7, p. 1243–1248, 2007. [28](#), [29](#)
- HU, S.; YUE, D. Event-triggered control design of linear networked systems with quantizations. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 51, n. 1, p. 153–162, 2012. [36](#)
- HUANG, M.; DEY, S. Kalman filtering with markovian packet losses and stability criteria. In: IEEE. *Proc. of the 45th Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2006. p. 5621–5626. [29](#)
- HUANG, M.; DEY, S. Stability of kalman filtering with markovian packet losses. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 4, p. 598–607, 2007. [29](#)
- IMER, O. C.; YÜKSEL, S.; BAŞAR, T. Optimal control of LTI systems over unreliable communication links. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 9, p. 1429–1439, 2006. [27](#)
- ISHIDO, Y.; TAKABA, K.; QUEVEDO, D. E. Stability analysis of networked control systems subject to packet-dropouts and finite-level quantization. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 60, n. 5, p. 325–332, 2011. [113](#)
- JIANG, S.; FANG, H. H_∞ static output feedback control for nonlinear networked control systems with time delays and packet dropouts. *ISA Transactions*, Elsevier, v. 52, n. 2, p. 215–222, 2013. [114](#)
- JIANG, Z. P.; LIU, T. F. A survey of recent results in quantized and event-based nonlinear control. *Int. J. Autom. and Comput.*, Springer, v. 12, n. 5, p. 455–466, 2015. [69](#)
- KALMAN, R. E. Nonlinear aspects of sampled-data control systems. In: *Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis VI*. [S.l.: s.n.], 1956. p. 273–313. [19](#)

- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. E.U.A.: Pearson, 2002. 25
- KINTNER-MEYER, M. Opportunities of wireless sensors and controls for building operation. *Energy Engineering*, Fairmont Press, v. 102, n. 5, p. 27–48, 2005. 13
- KOLMANOVSKII, V.; SHAIKHET, L. Some peculiarities of the general method of lyapunov functionals construction. *Appl. Math. Lett.*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 355–360, 2002. 117
- KULKARNI, V. V.; KAREENHALLI, V.; MALAKAR, P.; PAO, L. Y.; SAFONOV, M. G.; VISWANATHAN, G. A. Stability analysis of the GAL regulatory network in *saccharomyces cerevisiae* and *kluveromyces lactis*. *BMC Bioinformatics*, BioMed Central Ltd, v. 11, n. Suppl 1, p. S43, 2010. 69
- KULLBACK, S. *Information Theory and Statistics*. E.U.A.: Courier Dover Publications, 1968. 19
- LIBERZON, D. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 48, n. 2, p. 304–307, Feb 2003. 20
- LIBERZON, D.; HESPANHA, J. P. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE T. Automat. Control*, v. 50, n. 6, p. 910–915, June 2005. 69
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009. 31
- LING, Q.; LEMMON, M. D. Stability of quantized control systems under dynamic bit assignment. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 50, n. 5, p. 734–740, 2005. 20
- LIU, G.; XU, B. A real-time scheduling scheme of quantized control systems under bandwidth constraints. In: IEEE. *Proc. of the 8th World Con. on Intel. Control and Automation*. [S.l.], 2010. p. 2334–2338. 36
- LIU, J.; ELIA, N. Quantized feedback stabilization of non-linear affine systems. *Int. J. Control*, Taylor & Francis, v. 77, n. 3, p. 239–249, 2004. 69
- LIU, J.; XIE, L.; ZHANG, M.; WU, Z. Stabilization and stability connection of networked control systems with two quantizers. In: IEEE. *Proc. of the 2011 Amer. Control Conf.* [S.l.], 2011. p. 2825–2830. 22

- LIU, T.; JIANG, Z. P.; HILL, D. J. A sector bound approach to feedback control of nonlinear systems with state quantization. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 1, p. 145–152, Jan 2012. [22](#), [69](#)
- LIU, T.; JIANG, Z. P.; HILL, D. J. Small-gain based output-feedback controller design for a class of nonlinear systems with actuator dynamic quantization. *IEEE T. Automat. Control*, v. 57, n. 5, p. 1326–1332, May 2012. [69](#)
- LU, Q.; ZHANG, L.; BASIN, M.; TIAN, H. Analysis and synthesis for networked control systems with uncertain rate of packet losses. *J. Franklin Inst.*, Elsevier, v. 349, n. 7, p. 2500–2514, 2012. [113](#)
- MAESTRELLI, R.; ALMEIDA, L.; COUTINHO, D. F.; MORENO, U. Dynamic bandwidth management in networked control systems using quantization. *ACM SIGBED Review*, ACM, v. 11, n. 3, p. 58–61, 2014. [152](#)
- MAESTRELLI, R.; COUTINHO, D.; DE SOUZA, C. E. Stability analysis of input and output finite level quantized discrete-time linear control systems. In: IEEE. *Proc. of the 51st Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2012. p. 6096–6101. [22](#), [41](#), [53](#), [151](#)
- MAESTRELLI, R.; COUTINHO, D.; DE SOUZA, C. E. Stability analysis of finite-level quantized nonlinear quadratic discrete-time control systems. In: *Proc. XX Con. Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2014. [153](#)
- MAESTRELLI, R.; COUTINHO, D. F.; DE SOUZA, C. E. Input and output finite-level quantized linear control systems: Stability analysis and quantizer design. *J. of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, v. 26, n. 2, p. 105–114, 2015. [41](#), [53](#), [151](#)
- MARITON, M. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. Nova Iorque - E.U.A.: Marcel Dekker Incorporated, 1990. [29](#)
- MARTÍ, P.; YÉPEZ, J.; VELASCO, M.; VILLÀ, R.; FUERTES, J. M. Managing quality-of-control in network-based control systems by controller and message scheduling co-design. *IEEE T. on Industrial Electronics*, IEEE, v. 51, n. 6, p. 1159–1167, 2004. [35](#)
- MONTESTRUQUE, L. A.; ANTSAKLIS, P. J. Quantization in model based networked control systems. In: *Proc. of the 16th IFAC World Congress*. [S.l.: s.n.], 2005. [20](#)

- MURRAY, R. M.; ASTROM, K.; BOYD, S.; BROCKETT, R.; STEIN, G. *Control in an Information Rich World*. [S.l.], 2002. 15
- NAGHSHTABRIZI, P.; HESPANHA, J. P. Designing an observer-based controller for a network control system. In: *IEEE. Proc. of the 44th Conf. on Decision and Control and 2005 Eur. Control Conf. Espanha*, 2005. p. 848–853. 31
- NAIR, B. G. N.; FAGNANI, F.; ZAMPIERI, S.; EVANS, R. J. Feedback control under data rate constraints: An overview. *Proc. IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, v. 95, n. 1, p. 108–137, Jan 2007. 13, 19
- NAIR, G. N.; EVANS, R. J. Stabilization with data-rate-limited feedback: Tightest attainable bounds. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 41, n. 1, p. 49–56, 2000. 20
- NAIR, G. N.; EVANS, R. J. Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates. *Automatica*, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 585–593, Apr 2003. 19
- NESIC, D.; LIBERZON, D. A unified framework for design and analysis of networked and quantized control systems. *IEEE T. Automat. Control*, v. 54, n. 4, p. 732–747, 2009. 36
- PARDALOS, P. M.; YATSENKO, V. A. *Optimization and Control of Bilinear Systems: Theory, Algorithms, and Applications*. Berlin - Alemanha: Springer, 2008. 69
- PETERSEN, I. R.; SAVKIN, A. V. Multi-rate stabilization of multivariable discrete-time linear systems via a limited capacity communication channel. In: *IEEE. Proc. of the 40th Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2001. v. 1, p. 304–309. 20
- PICASSO, B.; BICCHI, A. On the stabilization of linear systems under assigned I/O quantization. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 52, n. 10, p. 1994–2000, Oct 2007. 22
- PICASSO, B.; GOUAISBAUT, F.; BICCHI, A. Construction of invariant and attractive sets for quantized-input linear systems. In: *IEEE. Proc. of the 41st Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2002. v. 1, p. 824–829. 20

- RABELLO, A.; BHAYA, A. Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications. In: IET. *IEE Proc. Control Theory and Applications*. [S.l.], 2003. v. 150, n. 5, p. 546–50. [31](#)
- RASOOL, F.; HUANG, D.; NGUANG, S. K. Robust H_∞ output feedback control of networked control systems with multiple quantizers. *J. Franklin Inst.*, Elsevier, v. 349, n. 3, p. 1153–1173, 2012. [21](#), [22](#)
- SAHAI, A. The necessity and sufficiency of anytime capacity for control over a noisy communication link. In: IEEE. *Proc. of the 43rd Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2004. v. 2, p. 1896–1901. [23](#)
- SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Robust filtering with missing data and a deterministic description of noise and uncertainty. *Int. J. Systems Science*, Taylor & Francis, v. 28, n. 4, p. 373–378, 1997. [31](#)
- SCHENATO, L. Kalman filtering for networked control systems with random delay and packet loss. In: *17th Int. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. [28](#)
- SCHENATO, L.; SINOPOLI, B.; FRANCESCHETTI, M.; POOLLA, K.; SASTRY, S. S. Foundations of control and estimation over lossy networks. *Proc. IEEE*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 95, n. 1, p. 163–187, Jan 2007. [13](#), [27](#), [31](#)
- SEILER, P.; SENGUPTA, R. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In: IEEE. *Proc. of the 2001 Amer. Control Conf.* [S.l.], 2001. v. 2, p. 1491–1496. [29](#)
- SEURET, A.; MICHAUT, F.; RICHARD, J. P.; DIVOUX, T. Networked control using GPS synchronization. In: IEEE. *Proc. of the 2006 Amer. Control Conf.* [S.l.], 2006. p. 6–pp. [31](#)
- SHAIKHET, L. *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations*. Londres - Inglaterra: Springer, 2011. [117](#)
- SHARON, Y.; LIBERZON, D. Input to state stabilizing controller for systems with coarse quantization. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 57, n. 4, p. 830–844, Apr 2012. [20](#)
- SINOPOLI, B.; SCHENATO, L.; FRANCESCHETTI, M.; POOLLA, K.; JORDAN, M. I.; SASTRY, S. S. Kalman filtering with intermittent

- observations. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 49, n. 9, p. 1453–1464, 2004. **28**
- SLAUGHTER, J. Quantization errors in digital control systems. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 9, n. 1, p. 70–74, 1964. **19**
- SMITH, S. C.; SEILER, P. Estimation with lossy measurements: Jump estimators for jump systems. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 48, n. 12, p. 2163–2171, 2003. **29, 30**
- STEMMER, M. R. *Redes Locais Industriais: A Integração Da Produção Através Das Redes De Comunicação*. 1. ed. Florianópolis - Brasil: Editora UFSC, 2010. **138**
- SUN, Y.; QIN, S. Stability of networked control systems with packet dropout: An average dwell time approach. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 5, n. 1, p. 47–53, 2011. **31, 113**
- SUN, Z.; GE, S. S. *Switched Linear Systems: Control and Design*. [S.l.]: Springer, 2005. **31**
- SÝKORA, S. Volume integrals over n-dimensional ellipsoids. *Stan's Library*, v. 1, Abril 2005. Disponível em: <<http://www.ebyte.it/library/docs/math05a/nDimEllipsoidVolumes05.html>>. **67**
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; DA SILVA JR., J. M. G.; QUEINNEC, I. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Londres - Inglaterra: Springer, 2011. **25, 56**
- TATIKONDA, S.; MITTER, S. Control under communication constraints. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 49, n. 7, p. 1056–1068, Jul 2004. **19, 20, 21, 28**
- TINDELL, K.; BURNS, A.; WELLINGS, A. J. Calculating controller area network (CAN) message response times. *Control Eng. Pract.*, Elsevier, v. 3, n. 8, p. 1163–1169, 1995. **138**
- TINDELL, K. W.; HANSSON, H.; WELLINGS, A. J. Analysing real-time communications: Controller area network (CAN). In: *IEEE. Proc. of the Real-Time Systems Symp.* [S.l.], 1994. p. 259–263. **138**
- TROFINO, A. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In: *Proc. of the 2000 Amer. Control Conf.* Chicago, IL: [s.n.], 2000. v. 5, p. 3707–3711. **84**

- TSUMURA, K.; ISHII, H.; HOSHINA, H. Tradeoffs between quantization and packet loss in networked control of linear systems. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 12, p. 2963–2970, 2009. 113
- VALMORBIDA, G.; TARBOURIECH, S.; TURNER, M.; GARCIA, G. Anti-windup design for saturating quadratic systems. *Systems & Control Letters*, IEEE, v. 62, n. 5, p. 367–376, 2013. 69
- VELASCO, M.; FUERTES, J. M.; LIN, C.; MARTI, P.; BRANDT, S. A control approach to bandwidth management in networked control systems. In: IEEE. *Proc. of the 30th Conf. of Industrial Electronics Society*. [S.l.], 2004. v. 3, p. 2343–2348. 35
- VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. 2. ed. India: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. v. 42. (Classics in Applied Mathematics, v. 42). 72
- WANG, D.; WANG, J.; WANG, W. Output feedback control of networked control systems with packet dropouts in both channels. *Inform. Sciences*, Elsevier, v. 221, p. 544–554, 2013. 113
- WANG, Z.; YANG, F.; HO, D. W. C.; LIU, X. Robust H_∞ control for networked systems with random packet losses. *IEEE T. on Syst., Man and Cyb., Part B : Cybernetics*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 37, n. 4, p. 916–924, Aug 2007. 28
- WARNEKE, B.; LAST, M.; LIEBOWITZ, B.; PISTER, K. S. J. Smart dust: Communicating with a cubic-millimeter computer. *Computer*, IEEE, v. 34, n. 1, p. 44–51, 2001. 13
- WONG, W. S.; BROCKETT, R. W. Systems with finite communication bandwidth constraints. II. stabilization with limited information feedback. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 44, n. 5, p. 1049–1053, 1999. 20
- WU, J.; CHEN, T. Design of networked control systems with packet dropouts. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 52, n. 7, p. 1314–1319, 2007. 30
- XIONG, J.; LAM, J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 80–87, 2007. 30, 113
- XU, Y.; HESPANHA, J. P. Estimation under uncontrolled and controlled communications in networked control systems. In: IEEE.

- Proc. of the 44th Conf. on Decision and Control and 2005 Eur. Control Conf.* Espanha, 2005. p. 842–847. [31](#)
- YANG, W.; LIU, M.; SHI, P. H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems with sensor saturation, quantization and random packet losses. *Signal Processing*, Elsevier, v. 92, n. 6, p. 1387–1396, 2012. [114](#)
- YOU, K.; XIE, L. Minimum data rate for mean square stabilization of discrete LTI systems over lossy channels. *IEEE T. Automat. Control*, IEEE, v. 55, n. 10, p. 2373–2378, 2010. [113](#)
- YU, M.; WANG, L.; CHU, T.; XIE, G. Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach. In: IEEE. *Proc. of the 43rd Conf. on Decision and Control*. [S.l.], 2004. v. 4, p. 3539–3544. [31](#)
- YUE, D.; HAN, Q. L.; PENG, C. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE T. Circuits Syst. II Express Briefs*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 51, n. 11, p. 640–644, Nov 2004. [31](#)
- ZAMPIERI, S. Trends in networked control systems. In: *Proc. of the 17th IFAC World Congress*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 6–11. [13](#), [15](#), [31](#)
- ZHAI, G.; MATSUMOTO, Y.; CHEN, X.; IMAE, J.; KOBAYASHI, T. Hybrid stabilization of discrete-time LTI systems with two quantized signals. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, University of Zielona Gora Press, v. 15, n. 4, p. 509, 2005. [22](#)
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K. Stability and stabilization of markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 463–468, 2009. [29](#)
- ZHANG, M.; TARN, T. J. Hybrid control of the pendubot. *IEEE/ASME T. on Mechatronics*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 79–86, 2002. [128](#)
- ZHANG, P.; DING, S. X.; FRANK, P. M.; SADER, M. Fault detection of networked control systems with missing measurements. In: IEEE. *Proc. of the 5th Asian Control Conf.* [S.l.], 2004. v. 2, p. 1258–1263. [30](#)
- ZHANG, W.; BRANICKY, M. S.; PHILLIPS, S. M. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems*, IEEE, v. 21, n. 1, p. 84–99, 2001. [31](#)

ZHANG, W. A.; YU, L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts. *IEEE T. Automat. Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 52, n. 9, p. 1705–1710, Sep 2007. [31](#), [113](#)

ZHANG, Y.; FANG, H. Stabilization of nonlinear networked systems with sensor random packet dropout and time-varying delay. *Appl. Math. Model.*, Elsevier, v. 35, n. 5, p. 2253–2264, 2011. [113](#)