

Adm. J. L.

RELATÓRIO SOBRE A REFORMA DO ENSINO
SECUNDÁRIO DE MATEMÁTICA, REDIGIDA
A PEDIDO DA ACADEMIA DE CIÊNCIAS

Jean Leray (21/7/72)

Relatório sobre a reforma do ensino
secundário de matemática, redigida
a pedido da Academia de Ciências. (*)

Jean Leray (21/7/72)

Esta reforma foi iniciada há quatro anos. Mas, apenas, com a publicação tardia do comentário dos programas de "quatrième et troisième", que entraram em vigor, respectivamente, em setembro de 1971 e 1972, revelou-se o seu verdadeiro caráter (cf. Bulletin Officiel de l' Education Nationale, 29 de julho de 1971, p. 1872-1878, - para os programas e 2 de dezembro de 1971, p. 2867-2917, para os comentários). O espírito deste comentário explica as **aberrações dos manuais** que provocam a confusão de alunos e professores, confusão essa que nenhuma **reciclagem** poderá remediar.

Preliminares: A necessidade de uma reforma - A importância crescente das linguagens lógica e conjuntista, da análise combinatória (isto é, das aplicações de conjuntos finitos em conjuntos finitos), da estatística, do cálculo de probabilidades, do cálculo diferencial e integral e dos espaços vetoriais exige que o ensino seja modernizado e diversificado.

Por outro lado, a apresentação da geometria pela maneira euclidiana é **inaceitável**: ela começa por raciocínios falaciosos; é inútil corrigi-los explicando todos os axiomas necessários, pois isto não prepara para a definição de geometrias que não sejam as euclidianas a 1, 2 ou 3 dimensões. Ora, é importante conhecer "outras" geometrias; elas são construídas a partir de um corpo que, no ensino secundário, será sempre o corpo \mathbb{R} dos números reais. É esta construção que se deve apresentar de modo compreensível.

Mesmo que as diversas geometrias sejam construídas a partir da álgebra, a intuição geométrica inspira algebristas e analistas, que muitas vezes utilizam a linguagem geométrica. Também em lógica matemática é difícil compreender que se tenha a possibilidade de escolher entre várias teorias de conjuntos quando se ignora a diversidade das geometrias (euclidiana, esférica, de Lobatchewsky, de Riemann, etc...)

O ensino secundário deve, portanto, simplificar o ensino da geometria mas sem minimizar o seu papel; ao contrário; ampliá-lo para diversificar o ensino da matemática. Todos os países conhecem tal necessidade; nos países de educação não centralizada tenta-se simultaneamente várias possibilidades que esquematizaremos em três opções.

1 - A opção pragmática . Esta opção consiste em postular - as propriedades dos conceitos que se manipulam, sem medo de enunciar um sistema superabundante de postulados; não se definindo tais conceitos nem demonstrando suas propriedades fundamentais a partir dos axiomas que estão atualmente na base da matemática (aqueles da teoria de conjuntos). Mas não se deve negligenciar de dar tais definições e demonstração ou de dizer sumariamente como se deve proceder, desde que se tenha os meios necessários.

É assim que se procede o desenvolvimento da matemática, ao preço de erros que provocam contradições, as quais os professores devem saber evitar e analisar quando os alunos as cometem.

Um tal ensino coloca rapidamente o aluno em posse de estruturas ricas e de técnicas úteis, ele o faz compreender progressivamente a utilidade das estruturas gerais que sintetizam as definições dos conceitos adquiridos e as demonstrações de suas propriedades.

O ensino superior recorre frequentemente a êsse pragmatismo: em geral, nêle são postuladas tôdas as propriedades dos conjuntos (por exemplo, referindo-se não a teoria de conjuntos de Bourbaki, mas apenas ao seu fascículo de resultados).

Os novos programas adotam êste pragmatismo em "sixième" e "cinquième"; mas os comentários oficial e oficioso o desaconselham categoricamente a partir do início do "quatrième".

2 - A opção algébrica - Esta opção que ninguém recomenda atualmente é, todavia, importante do ponto de vista lógico e histórico. Ela não se contenta em dar a perceber, no fim dos estudos, a construção de tudo o que foi ensinado a partir dos axiomas que definem os números naturais: ela realmente efetua tal construção.

Ela supõe conhecida a teoria dos conjuntos finitos, empregando a linguagem conjuntista, no sentido da linguagem corrente, mas sob o contrôle do bom senso. Contudo, ela sabe que no ensino secundário não se pode falar, senão empiricamente, de conjuntos finitos.

Eis como se define nesta opção, o espaço euclidiano E^n , estando definidas \mathbb{R} e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$: define-se sobre \mathbb{R}^n , o grupo dos deslocamentos euclidianos e depois E^n , como o espaço homogêneo sobre o qual este grupo opera.

E^n é único, como o corpo \mathbb{R} , suas variedades planas são aquelas de seus subconjuntos sobre os quais ele induz uma estrutura euclidiana.

E^3 é exatamente o espaço que a física e a técnica utilizam. Todavia o interêsse científico desta definição está atualmente esgotado.

Os novos programas a excluem, uma vez que determinam que

a noção de sub-grupo está fora do programa de "quatrière".

3 - A opção conjuntista

3.1 Na matemática contemporânea, denomina-se espaço, toda estrutura munida de um certo tipo de estrutura. Logo, tal definição apoia-se sobre a teoria de conjuntos.

Por exemplo, a teoria clássica dos espaços de Banach emprega o axioma da escolha; portanto ela supõe que este espaço é um conjunto no sentido de uma teoria de conjuntos onde seja válido o axioma da escolha (cf. o tratado de Bourbaki, cujo livro I é sobre a Teoria de Conjuntos).

3.2 - A opção conjuntista, no ensino secundário, consiste em definir um espaço euclidiano por este mesmo processo: denomina-se reta, todo conjunto munido de uma estrutura definida por meio de uma família de bijeções convenientemente escolhidas. Ora, esta definição não tem sentido para um adolescente, pois ela supõe conhecida a noção de conjunto infinito (enumerável ou não). Mas um adolescente adquire tal noção, progressivamente, no curso de seus estudos e não no início.

3.3 - Vejamos o que se pede de um aluno que acaba de estudar a definição do corpo \mathbb{R} , dos números reais.

Deseja-se munir o conjunto dos elementos de \mathbb{R} de uma nova estrutura; a estrutura de reta; para tanto exige-se que o adolescente de 13 anos seja capaz de imaginar este conjunto sem tal estrutura, isto é, que imagine espontaneamente a noção geral de conjunto infinito (não numerável).

Quando criança, o aluno jogou suficientemente com conjuntos finitos e suas bijeções; depois, em aritmética, com alguns conjuntos enumeráveis; assim, ele não hesitará em falar, sem precauções, de conjuntos finitos e suas bijeções, mas ele só conhece bijeções afins $x \mapsto ax + b$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} ; ele ignora mesmo que $x \mapsto x^3$ é uma bijeção de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

Assim, sobrecarrega-se "com um fardo a mais a memória do aluno", "as noções introduzidas permanecem suspensas num domínio metafísico; é impossível ao aluno apropriar-se delas e utilizá-las". Acabamos de citar C. Chevalley, ao qual a matemática e o Tratado de Bourbaki muito devem; Mas não é o ensino secundário da geometria que ele critica nêstes termos: é o ensino secundário da álgebra (1).

Os alunos, tão imprudentemente iniciados no difícil manejo do infinito, estarão bastante mal preparados para evitar os absurdos que a linguagem conjuntista permite enunciar tão facilmente (tal como o conjunto de todos os conjuntos). Já se começa por violar a regra segundo a qual o ensino secundário deve se impor para evitar to-

da contradição: não falar senão de conjuntos que sejam partes de outro conjunto explicitamente definido (o universo referencial).

Em lugar de colocar um problema (o de definir a reta a partir de \mathbb{R}) e, se possível, analisá-lo e resolvê-lo, faz-se um discurso de uma generalidade utópica.

Em resumo, o erro científico assinalado em 3.2 traz graves consequências pedagógicas. Tais erros estupidificam o adolescente por meio de raciocínios que ele se sente incapaz de imaginar; eles lhe dão a convicção humilhante e falsa de que para dominar a matemática é necessário uma capacidade que lhe falta.

3.4 - A definição conjuntista chama de reta, D , todo conjunto, E , munido de uma estrutura de reta. Assim, todo conjunto E com a potência do contínuo é suporte para tais retas D : o plano, o espaço, as curvas, as superfícies, todas suas partes infinitas não numeráveis, o conjunto totalmente descontínuo de cantor são, neste sentido, suportes de retas. O adolescente deverá distinguir tais retas daquelas do plano e do espaço (que são subconjuntos cuja estrutura induzida é a de reta). Ele manipula, então, em matemática uma língua isotérica em desacordo com a linguagem das outras disciplinas científicas e técnicas e mesmo com a linguagem comum.

3.5 - Para encontrar lugar para esta definição conjuntista e suas repetições, foi necessário retirar do programa muitas propriedades que despertam o espírito dos alunos e que nem sempre são sem aplicações. As estruturas fracas que constituem o novo ensino da matemática e das quais o aluno não vê o emprego, não têm interesse geral, pois elas permitem edificar numerosas estruturas ricas, mas todas muito especiais. Tais riquezas não devem ser privilégio apenas do ensino superior. É necessário que os professores secundários tenham os meios e a liberdade de revelar algumas, escolhidas a vontade no controle ótimo, na teoria dos jogos, na aritmética, na álgebra ou na geometria. Sua missão não deve ser reduzida à definição de todos os conceitos que os outros irão utilizar. Sua missão é despertar o espírito do aluno exercitando-o em descobrir e manejar as noções fundamentais da matemática.

Conclusão: - O perigo da reforma em curso - No ensino secundário, a opção conjuntista da definição de geometria é, assim, uma perigosa utopia. Os programas atualmente promulgados não a impõem. Mas o comentário oficial dos programas de "quatrième e "troisième" a recomendam (2). a reforma continua sendo orientada para esta opção. Os termos científicos que fomos obrigados a usar para analisá-la mostram o quanto esta reforma desconhece as aptidões e necessidades intelectuais dos adolescentes que são alunos dos C.E.G, C.E.S e (***) dos liceus

A reforma em curso põe em grave perigo o futuro econômico, técnico e científico da nação.

Esta opinião foi transmitida ao senhor Ministro da Educação em 6 de março de 1972.

NOTAS

(*) achamos melhor manter na tradução os termos franceses que designam os vários anos do curso secundário; note-se que na França eles são contados de modo decrescente a partir de 10; assim sendo, "quatrième" designa o sétimo ano do curso secundário, por exemplo.

(**) C.E.G. e C.E.S. são respectivamente:

"certificat d'études générales" e "certificat d'études supérieures".

(1) Prefácio de C. Chevalley, Professor em Paris VIII, ao tratado de A. Warusfel, professor de matemática superior no Liceu Louis le Grand: Estruturas Algébricas Finitas (Hachette, 1971). Citemos exatamente o início deste prefácio: "O favor que goza atualmente a noção de matemática moderna não dissimula a sua ambiguidade e muitas vezes chega infelizmente a fazer dela um fardo a mais para a memória de alunos e estudantes, quando deveria libertá-los dos "estribilhos" da matemática clássica. No domínio da álgebra, por exemplo, repetir ano após ano a definição de grupo, de corpo e de anel não é de natureza a despertar os espíritos.

"O fato de que este ensino é frequentemente estranho aos nossos estudantes deve-se provavelmente à convicção do aluno de que as noções introduzidas permanecem suspensas num domínio metafísico sendo-lhes impossível apropriar-se delas e utilizá-las.

"A obra de A. Warusfel, que mostra, num caso simples, como fazer realmente funcionar os objetos algébricos vem, assim, preencher uma lacuna indiscutível.

(2) Em termos científicos errôneos, após este comentário, a distância euclidiana seria um número e não o produto de uma unidade de comprimentos por um número ! etc.

I - Extrato do Bulletin de l'A.P.M.E.P., nº 286, Dezembro de 1972 - Diretor de publicação M. Glaymann - Impressora Vandrey - Lyon.