

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

André Felipe Garcia

**Aplicações do Modelo de Nambu–Jona-Lasinio na Física de Altas
Energias**

Orientador: Dr. Marcus E. Benghi Pinto

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) como parte dos requisitos para a obtenção do título de “Doutor em Física”.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcus E. Benghi Pinto
Prof. Dr. Gastão Krein
Prof. Dr. Robson Zacarelli Denke
Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
Prof^a. Dr^a. Débora Peres Menezes
Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior

Florianópolis
2016

André Felipe Garcia

**APLICAÇÕES DO MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO NA
FÍSICA DE ALTAS ENERGIAS**

Tese de Doutorado.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Benghi Pinto
Co-orientador: Dr. Volker Koch

Florianópolis
Agosto de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Garcia, André Felipe

Aplicações do modelo de Nambu-Jona-Lasinio na física de
altas energias / André Felipe Garcia ; orientador, Marcus
Emmanuel Benghi Pinto ; coorientador, Volker Koch. -
Florianópolis, SC, 2016.

183 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Teoria Quântica de Campos. I. Benghi Pinto,
Marcus Emmanuel. II. Koch, Volker. III. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. IV. Título.

Agradecimentos

Ao longo dos últimos quatro anos, dediquei-me quase que exclusivamente ao curso de doutorado em física na UFSC. O caminho foi longo e, as vezes, cansativo mas sem dúvida foi marcado por muitos bons momentos. Sem a ajuda da minha família e de alguns amigos essa realização seria muito mais difícil ou até mesmo impossível. Sou muito grato aos meus pais, Jiani e José, e ao meu irmão, César, por todo o apoio e paciência. Agradeço também ao meu orientador, Dr. Marcus Benghi Pinto, por ser mais que um professor, um verdadeiro mentor. Agradeço ao Programa de Pós Graduação em Física da UFSC e ao Antônio Marcos Machado por todo o auxílio. Sem dúvida eu não teria embarcado nesta jornada se não houvesse o financiamento concedido pela CAPES na forma de uma bolsa de estudos, que cobriu integralmente o período de doutoramento, incluindo o estágio sanduíche no exterior, razão pela qual sou muito grato à instituição e aos brasileiros pagadores de tantos impostos. Agradeço também aos Estados Unidos da América pela receptividade, especialmente ao Lawrence Berkeley National Laboratory e ao Dr. Volker Koch, pela oportunidade e colaboração com o trabalho apresentado nesta tese.

*“Viver é enfrentar um problema atrás do outro. O modo como você o encara é que
faz a diferença”.*
Benjamin Franklin

Resumo

Esta tese utiliza o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) na versão $SU(2)$ para os quarks leves *up* e *down* com a finalidade de estudar a transição quiral na matéria de quarks e suas aplicações no contexto da física de altas energias. Entre as grandezas físicas calculadas estão a tensão superficial na matéria de quarks magnetizada, que é de interesse da física de estrelas compactas, e a correlação entre o número de partículas e antipartículas em temperatura e densidade finitas, que é de interesse da física de colisões de íons pesados. O potencial efetivo, ou energia livre de Landau, é calculado na aproximação de campo médio usando-se o formalismo de integrais de trajetória. No regime de baixas temperaturas o modelo prevê uma transição de primeira ordem da matéria hadrônica para a matéria de quarks, o que tem consequências importantes como, por exemplo, a coexistência das duas fases, hadrônica e de quarks, para determinados valores da pressão, temperatura e potencial químico. A tensão superficial entre estas fases é calculada para a matéria de quarks magnetizada através do método geométrico, onde leva-se em conta as instabilidades associadas à transição de primeira ordem. A formação de estrelas híbridas com fase mista depende de taxa de nucleação de bolhas de quarks em meio a matéria de hádrons, que, por sua vez, depende da tensão superficial. No caso de estrelas com campos magnéticos fortes como as magnetares, o valor da tensão superficial varia em função da intensidade do campo, facilitando (caso a tensão superficial diminua) ou não (caso aumente) a ocorrência de fase mista. Os resultados da tese mostram que, para valores do campo magnético em torno de $4 - 6m_\pi^2/e \approx 10^{19}$ G, a tensão superficial diminui em relação ao seu valor com campo nulo, favorecendo a formação de estrelas híbridas com fase mista. Entretanto, para valores muito altos de B , a tensão superficial cresce continuamente, o que desfavorece a formação destas estrelas. O modelo NJL também prevê a existência de um ponto crítico no seu diagrama de fases. Nos últimos anos tem-se procurado por evidências experimentais da existência de um ponto crítico no diagrama de fases da QCD em experimentos de colisões de íons pesados. Uma forma de se investigar esta questão consiste em analisar as flutuações e correlações nas distribuições de partículas obtidas nas colisões. Recentemente as equipes responsáveis pelo programa *Beam Energy Scan*, da colaboração STAR, publicaram informações a respeito de cumulantes das curvas de distribuição do número de prótons e antiprótons detectados nos experimentos. Os resultados sugerem que a produção de prótons e antiprótons ocorre de modo praticamente independente, isto é, quase não há correlação entre o número de prótons e antiprótons. Entretanto, sabe-se que nas proximidades de uma transição de fase, mais precisamente na vizinhança de um ponto crítico, correlações costumam desempenhar um papel importante. A segunda etapa desta tese concentra-se em calcular a correlação entre o número de partículas e antipartículas ao longo do diagrama de fases do modelo NJL e estudar o seu comportamento nas vizinhanças do ponto crítico. Este cálculo permite uma comparação direta com os resultados publicados pela colaboração STAR, responsável pelo programa *Beam Energy Scan*. Os resultados obtidos mostram que a correlação é levemente diferente de zero perto da temperatura pseudo-crítica de crossover e apresenta um salto abrupto no ponto

crítico. No entanto, este comportamento pode ser atenuado quando um acoplamento vetorial repulsivo está presente.

Palavras-chave: Modelo de Nambu–Jona-Lasinio, Transição Quiral, Campo Magnético, Tensão Superficial, Correlação.

Abstract

This thesis uses the $SU(2)$ Nambu–Jona-Lasinio model for *up* and *down* quarks with the aim of studying the chiral transition in quark matter and its application to high energy physics. Among the physical quantities calculated here are the surface tension in magnetized quark matter, relevant to compact star physics, as well as the particle-antiparticle number correlation in finite temperature and density, relevant to heavy ion collision physics. The effective potential, or Landau’s free energy, is calculated within the mean field approximation by using the path integral formalism. At low temperatures the model predicts a first order phase transition from hadronic matter to quark matter, which has important consequences such as the coexistence of both phases at the same values of temperature, chemical potential and pressure. The surface tension between the two phases in magnetized quark matter is calculated using a geometrical approach that considers the instabilities associated with a first order phase transition. The surface tension has an important role in the context of compact stars, since the formation of hybrid stars with mixed phase depends on the nucleation rate of quark bubbles which, in turn, depends on the surface tension. In the case of stars with strong magnetic fields such as magnetars, the value of the surface tension varies as a function of the field strength, favoring (if the value of the surface tension decreases) or disfavoring (if the value increases) the occurrence of a mixed phase. The results presented here show that, for values of the magnetic field around $4 - 6m_\pi^2/e \approx 10^{19}$ G, the surface tension decreases with respect to its value at $B = 0$, therefore favoring the formation of hybrid stars with mixed phase. However, for very high values of B , the surface tension continuously grows, which disfavors the formation of such stars. The NJL model also predicts the existence of a critical point in the phase diagram. In the last years, heavy ion collision experiments have been looking for evidence of the QCD critical point. One way to approach this problem is to look for fluctuations and correlations in the particle distributions obtained in these experiments. Recently, the teams responsible for the *Beam Energy Scan* program, in the STAR collaboration, published data concerning the cumulants of the proton and antiproton distribution functions obtained in recent experiments. The results suggest that the proton and antiproton production occurs in a practically independent way, with almost no correlation between them. Nevertheless, it is well known that correlations play an important role in the vicinity of a phase transition, specially in the vicinity of a critical point. The second part of this thesis focus in the evaluation of the particle-antiparticle correlation along the phase diagram of the NJL model and in the study of its behavior near the critical point. The results allow for a direct comparison with the data published by the STAR collaboration and show that the correlation is slightly different from zero near the pseudo-critical temperature but presents an abrupt jump at the critical point. However, this behavior may be softened when a repulsive vector coupling is present.

Keywords: Nambu–Jona-Lasinio Model, Chiral Transition, Magnetic Field, Sur-

face Tension, Correlation.

Sumário

1. Introdução	11
1.1. O Modelo Padrão	13
1.2. A Transição Quiral e o Diagrama de Fases da QCD	16
1.3. Aceleradores de Partículas	17
1.4. O Programa <i>Beam Energy Scan</i>	19
1.5. Campos Magnéticos em Colisões de Íons Pesados	23
1.6. Estrelas Compactas	27
1.7. Tensão Superficial	28
2. Matéria de Quarks Magnetizada	33
2.1. Matéria de Quarks Magnetizada	33
2.2. Catálise Magnética	36
2.3. Restauração de Simetria Quiral	37
2.4. O Diagrama de Fases	41
2.5. Termodinâmica da Matéria de Quarks Magnetizada	44
2.6. O Diagrama de Coexistência de Fases	51
3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks	55
3.1. O Método Geométrico	57
3.2. Instabilidades na Matéria de Quarks	60
3.3. Cálculo da Tensão Superficial	61
4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks	69
4.1. Por que Considerar uma Interação Vetorial?	69
4.2. O Modelo NJL com Termo Vetorial	74
4.3. Resultados em Temperatura Finita	79
4.4. O Diagrama de Fases	81
4.5. Termodinâmica	81
5. A Correlação Partícula-Antipartícula	89
5.1. Flutuações e Correlações	89
5.2. Dados da Colaboração STAR	91
5.3. Correlação no Modelo NJL	96
5.4. Resultados para a Correlação Próton-Antipróton	98
5.5. Correlação com Canal Vetorial	103
5.6. Resultados de $R_{p\bar{p}}$ com Acoplamento Vetorial	109

6. Conclusões	115
A. Convenções e Notação	121
B. Tópicos Básicos em Teoria de Campos	123
B.1. Simetria Quiral	123
B.2. O Potencial Efetivo	126
B.3. O Gás de Férmions Livres	129
C. Matéria de Quarks Interagentes	139
C.1. O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	139
C.2. Cálculo da Energia Livre	141
C.3. Quebra da Simetria Quiral	146
C.4. Restauração da Simetria Quiral	148
C.5. O Diagrama de Fases	152
D. Cálculo do Traço do Logaritmo	155
E. Equivalencia entre $\tilde{\mu}$ e ρ	157

Lista de Figuras

1.1.	Tabela de partículas elementares mostrando as três gerações de quarks e léptons e os bósons de calibre.	14
1.2.	Ilustração do diagrama de fases da QCD disponível na web [12].	17
1.3.	Características básicas de alguns dos aceleradores de partículas mais conhecidos.	18
1.4.	Exemplo de colisão de íons pesados mostrando a formação do plasma de quarks e glúons e a hadronização. Retirado da Ref. [12]	19
1.5.	O diagrama de fases da QCD com os escaneamentos realizados pelo programa BES. As linhas amarelas representam a evolução das colisões para diferentes energias. Os marcadores laranjas mais a direita e abaixo da linha de transição de primeira ordem indicam o alcance esperado da segunda fase do programa, a ser realizada ainda.	21
1.6.	Esquema geométrico de uma colisão de íons pesados com parâmetro de impacto não nulo b . O plano de reação é gerado pelos momentos iniciais dos íons.	23
1.7.	Colisão de íons pesados visto do eixo z , com parâmetro de impacto b . O campo magnético resultante aponta na direção y	24
1.8.	Campo magnético na origem $\mathbf{r} = 0$ resultante da colisão de dois íons de ouro. Na figura (a) a energia de colisão é $\sqrt{s_{NN}} = 62$ GeV, enquanto na figura (b) $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Retirado da Ref. [20].	25
1.9.	Campo magnético no vácuo (linha azul), no meio condutor estático com condutividade $\sigma = 5.8$ MeV (linha vermelha) e $\sigma = 16$ MeV (linha marrom). A unidade de eB está em $fm^{-2} \approx 2m_{\pi}^2$. A colisão é de íons de Au ($Z = 79$) para $\gamma = 100$ (RHIC) e $b = 7$ fm. Adaptado da Ref. [20].	27
1.10.	Evolução temporal de uma colisão de íons pesados. O tempo de formação do plasma de quarks e glúons é de pelo menos 1 fm/c, enquanto a hadronização ocorreria em torno de 3 fm/c ou menos. Retirado da Ref. [12].	28
1.11.	Valor médio do módulo de outras componentes dos campos (a) magnético e (b) elétrico criados em uma única colisão em função do parâmetro de impacto b para colisão de íons de ouro com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.	29
1.12.	Esquema da composição de estrelas de nêutrons [29].	30
1.13.	Esquema de uma estrela híbrida com fase mista.	31

2.1. Catálise Magnética - Condensado de quarks normalizado em função do campo magnético B em temperatura e potencial químico zero. As linhas verticais indicam os campos máximos produzidos no RHIC e no LHC.	38
2.2. Energia livre como função de M em $\mu = 0$ para diferentes valores de T (dados em MeV) e de B . A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . À medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo parcialmente restaurada aos poucos (crossover).	39
2.3. Massa dos quarks em função da temperatura para diferentes valores do campo magnético em $\mu = 0$. A linha contínua representa $B = 0$, a tracejada $eB = 6m_\pi^2$ e a ponto-tracejada $eB = 15m_\pi^2$	40
2.4. Temperatura pseudo-crítica de crossover, T_{pc} , em função do campo magnético, B . Vemos que T_{pc} aumenta com B , em contradição com resultados da rede.	41
2.5. Energia livre em função de M , em $T = 0$ e para diferentes valores de μ (dados em MeV) e de B . Para alguns valores do campo magnético, como o caso $eB = 5m_\pi^2$, temos a aparição de mais de um mínimo local, dando origem a diferentes fases metaestáveis.	42
2.6. Massa dos quarks em função do potencial químico para diferentes valores do campo magnético em $T = 0$. A linha contínua representa $B = 0$, a tracejada $eB = 6m_\pi^2$ e a ponto-tracejada $eB = 15m_\pi^2$	43
2.7. Diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ (quadro de cima) e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). A linha cheia representa a transição de primeira ordem, as linhas tracejadas são as linhas espinodais e a linha pontilhada representa o crossover.	44
2.8. Diagrama de fases para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. As linhas cheias representam a transição de primeira ordem e as linhas tracejadas representam o crossover. Note que, em $\mu = 0$, T_{pc} aumenta com B , ao contrário dos resultados da rede, e que, em $T = 0$, μ_{coe} diminui com B , em acordo com a catálise magnética inversa.	45
2.9. Linhas espinodais para $B = 0$ (linha sólida), $eB = 6m_\pi^2$ (linha tracejada) e $eB = 15m_\pi^2$ (linha traço-ponto).	46
2.10. Pressão em função da temperatura para $\mu = 0$ e diferentes valores do campo magnético. A razão P/T^4 cresce rapidamente mas satura em altas temperaturas (limite de Stefan-Boltzmann).	47
2.11. Densidade de entropia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).	48
2.12. Densidade de energia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).	49

2.13. Densidade Bariônica (em termos de ρ_0) em função de μ para diferentes valores de T e campo magnético nulo. Em temperaturas baixas, onde a transição é de primeira ordem, temos uma descontinuidade de ρ_B . Já em temperaturas altas, onde ocorre o crossover, ρ_B é contínuo.	50
2.14. Densidade bariônica (em termos de ρ_0) em função de μ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).	51
2.15. Massa efetiva (representada pelos quadrados, com valores no eixo da direita) no valor mais baixo durante a transição, M^L , e o valor mais alto da densidade bariônica na coexistência de fases (pontos, eixo da esquerda) em função de eB/m_π^2	52
2.16. Diagrama de coexistência de fases para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). Os símbolos no topo de cada curva indicam o ponto crítico. Para a mesma temperatura, duas densidades distintas representando as duas fases da matéria (simetria quiral quebrada e restaurada) coexistem. A densidade bariônica está em unidades de densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$	53
3.1. Tensão superficial da água como função da temperatura (na pressão de saturação). Retirado da Ref. [66].	56
3.2. As soluções da equação do gap representadas diretamente no potencial efetivo. O mínimo global é a solução estável, enquanto o mínimo local é a solução metaestável. O máximo local entre os dois mínimos é a solução instável.	61
3.3. Massa efetiva dos quarks em $T = 0$ como função de μ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis.	62
3.4. Potencial químico como função de ρ_B/ρ_0 em $T = 0$ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis.	63
3.5. Pressão como função de ρ_B/ρ_0 em $T = 0$ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis. A linha pontilhada unindo os dois pontos em destaque representa a construção de Maxwell.	64
3.6. Energia livre $f_0(\rho)$ como função de ρ_B/ρ_0 para $B = 0$. A linha contínua unindo os dois pontos é a construção de Maxwell, enquanto a linha pontilhada representa os valores de $f_0(\rho)$ para as soluções metaestáveis e instáveis.	65

3.7. A variação $\Delta f_0(\rho)$ como função de ρ_B/ρ_0 para os casos $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$	66
3.8. Tensão superficial em temperatura nula, γ_0 , como função de eB (em unidades de m_π^2). A área sombreada delimita a região onde $\gamma_0 < 40 \text{ MeV/fm}^2$	67
3.9. Quadro da esquerda: estrela compacta com fase mista entre as fases de quarks e hádrons. Quadro da direita: estrela compacta sem fase mista.	67
3.10. Tensão superficial, γ_T , como função da temperatura para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$	68
4.1. O <i>plot de Columbia</i> para o diagrama de fases da QCD com três sabores e potencial químico nulo.	70
4.2. Superfície crítica gerada por valores não nulos do potencial químico. Para garantir a existência de um ponto crítico, a região de primeira ordem deve expandir-se com μ . Retirado da Ref. [82].	71
4.3. Encolhimento da superfície crítica obtido por Forcrand e Philipsen [82] em simulações com potencial químico imaginário.	72
4.4. <i>Back-bending</i> da superfície crítica. O acoplamento vetorial repulsivo provoca um encolhimento inicial da região de primeira ordem, mas à medida que o potencial químico cresce, a expansão é retomada. Retirado da Ref. [83].	73
4.5. Massa efetiva contra μ para $G_V = 0.1 G_s$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_s$ (centro) e $G_V = 0.5 G_s$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial. Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b), $T = 30 \text{ MeV}$ e em (c), $T = 60 \text{ MeV}$	84
4.6. Potencial químico efetivo, $\tilde{\mu}$, contra μ para $G_V = 0.1 G_s$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_s$ (centro) e $G_V = 0.5 G_s$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial (ou seja, a reta $\tilde{\mu} = \mu$). Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b) $T = 30 \text{ MeV}$ e em (c) $T = 60 \text{ MeV}$	85
4.7. O diagrama de fases no plano $T - \mu$ para diferentes valores de G_V . As linhas tracejadas identificam o crossover, enquanto as linhas cheias, a transição de primeira ordem. Podemos observar claramente a tendência de enfraquecimento da transição de primeira ordem à medida que o acoplamento vetorial aumenta. Além disso, o potencial químico de coexistência em baixas temperaturas aumenta com G_V	86
4.8. Pressão dividida por T^4 em função de T para $\mu = 0$ e diferentes valores de G_V . Como era de se esperar, não há diferença entre as curvas para $\mu = 0$	86

4.9.	Densidade líquida contra μ para $G_V = 0.1 G_s$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_s$ (centro) e $G_V = 0.5 G_s$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial. Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b) $T = 30$ MeV e em (c) $T = 60$ MeV.	87
4.10.	A medida da interação, Δ , em função da temperatura para diferentes valores de G_V . A linha tracejada representa o caso $G_V = 0$. Na figura da esquerda temos $\mu = 300$ MeV, enquanto na figura da direita, $\mu = 328$ MeV. Abaixo, temos $\mu = 350$ MeV.	88
5.1.	Cumulantes da distribuição de ΔN_p para colisões de íons <i>Au</i> . Retirado de STAR Collaboration [19].	93
5.2.	$S\sigma/Skellam$ e $\kappa\sigma^2$ para ΔN_p em diferentes energias de colisão. Retirado da Ref. [19].	94
5.3.	Tabela dos valores dos cumulantes das distribuições líquida, de prótons e de antiprótons. Dados retirados de STAR Collaboration [19, 102].	95
5.4.	Tabela dos valores de C_1 das distribuições de prótons e de antiprótons. Dados retirados de STAR Collaboration [19, 102].	101
5.5.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons em diferentes energias de colisão.	101
5.6.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons calculada com o modelo de Nambu–Jona-Lasinio como função da temperatura. Na curva preta $\mu = 0$, enquanto nas curvas vermelha e azul $\mu = 200$ MeV e $\mu = 300$ MeV, respectivamente.	102
5.7.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo do diagrama de fases do modelo de NJL.	103
5.8.	Esquerda: Diagrama de fases do modelo de NJL. Direita: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo da linha de transição de fase do diagrama de fases. O pico ocorre na temperatura crítica.	104
5.9.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons como função da temperatura para diferentes valores de G_V . O potencial químico está fixado em zero no quadro da esquerda e em 200 MeV no quadro da direita. A curva para $G_V = 0$, tracejada, foi acrescentada para fins de comparação.	110
5.10.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons como função da temperatura para diferentes valores de G_V . O potencial químico está fixado em 300 MeV no quadro da esquerda e em 350 MeV no quadro da direita. A curva para $G_V = 0$, tracejada, foi acrescentada para fins de comparação.	111
5.11.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons no plano $T - \mu$ para $G_V = 0.3 G_s$	112
5.12.	Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons no plano $T - \mu$ para $G_V = 0.4 G_s$	113

5.13. Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo da linha de transição para diferentes valores de G_V 114

6.1. Fases inomogêneas em torno da transição de primeira ordem. Retirado das Refs. [112, 113]. 119

B.1. Pressão em função da temperatura no gás de férmions livres em $\mu = 0$. Note que a quantidade P/T^4 é adimensional. Vemos que a pressão cresce rapidamente em baixas temperaturas e satura em temperaturas elevadas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann. 135

B.2. Gás livre em $T = 0$: Pressão em função do potencial químico. 137

C.1. Rede de spins representando o ferromagneto de Heisenberg em um estado com simetria de rotação quebrada. 140

C.2. Massa efetiva dos quarks em função do acoplamento G em temperatura e potencial químico zero. A linha contínua mostra o caso em que a massa nua dos quarks é de 6 MeV (limite físico), enquanto a linha tracejada mostra o limite quiral. A simetria quiral é quebrada para $G_c\Lambda^2 \simeq 1.41$ no limite físico e $G_c\Lambda^2 = 1.64$ no limite quiral. 148

C.3. Energia livre em função de M no limite físico, em $\mu = 0$ e para diferentes valores de T em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . À medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo restaurada aos poucos, ou seja, por meio de um crossover. 149

C.4. Esquerda: massa dos quarks em função da temperatura para $\mu = 0$. Linha contínua: limite físico; crossover entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral; transição de segunda ordem entre as fases massiva e não massiva. Direita: magnetização do ferromagneto de Heisenberg, em que também ocorre um crossover se existir um campo magnético de fundo, $B \neq 0$, ou uma transição de segunda ordem se o campo de fundo for nulo. 151

C.5. A Temperatura pseudo-crítica (linha cheia) é a temperatura em que a susceptibilidade térmica é um máximo. A temperatura crítica, em transições de segunda ordem, é a temperatura em que a susceptibilidade térmica diverge (linha tracejada). Em ambas as curvas, $\mu = 0$ 152

C.6. Energia livre em função de M no limite físico em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks corresponde ao valor de M no mínimo global. À medida que μ cresce, surge um mínimo local próximo de $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 380$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1ª ordem. 153

C.7. Massa dos quarks em função do potencial químico para $T = 0$. Linha contínua: limite físico; transição de fase de 1ª ordem entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral; transição de 1ª ordem entre as fases massiva e não-massiva. 154

C.8. O diagrama de fases no caso físico. A linha contínua representa a transição de 1ª ordem que se inicia em $\mu = 380 \text{ MeV}$ e termina no ponto crítico $T = 81 \text{ MeV}$, $\mu = 325 \text{ MeV}$. Em seguida ocorre um crossover representado pela linha tracejada preta. As linhas tracejadas em vermelho são as espinodais, isto é, as linhas que delimitam a região do diagrama em que existem duas fases para o sistema, uma delas sendo metaestável enquanto a outra a fase estável. 154

Lista de Figuras

1. Introdução

A física de altas energias abrange, entre outros tópicos, o estudo de partículas elementares tanto no âmbito teórico, por meio das teorias quânticas de campos que compõem, por exemplo, o modelo padrão de partículas elementares, quanto no âmbito experimental, por meio de experimentos com raios cósmicos e também com os modernos aceleradores de partículas. A curiosidade acerca do quê a matéria é feita não é, todavia, exclusividade das gerações mais recentes de físicos de partículas elementares. A idéia de que a matéria é constituída por átomos, isto é, corpúsculos ou partículas indivisíveis nasceu na Grécia antiga com Leucipo de Mileto (460 – 370 a.C.) e se desenvolveu com Demócrito de Abdera (470 – 380 a.C.) [1]. De lá para cá, os pressupostos teóricos dos atomistas foram alvo de inúmeros debates nas esferas científica e filosófica. Foi somente no século XIX, com as ideias e trabalhos desenvolvidos por John Dalton (1766-1844), que a hipótese atomista ganhou força, tornando-se ferramenta científica para a explicação de diversos fenômenos químicos e físicos. A ideia atomista teve muitos adeptos ao longo dos séculos, mas também conviveu com opositores notáveis até o início do século XX, como os renomados cientistas Wilhelm Ostwald (alemão, 1853-1932) e Ernst Mach (austríaco, 1838-1916).

Há cerca de cem anos, a hipótese atômica deixou de ser questionada para ser consensualmente aceita pela comunidade científica. Desde então, as teorias atômica e molecular, aperfeiçoadas com o desenvolvimento da mecânica quântica, serviram de base para o desenvolvimento de várias tecnologias inovadoras. Ainda no início do século XX, ao contrário do que se supunha e do próprio significado semântico, ficou claro que os átomos não eram partículas indivisíveis. Alguns experimentos, como o espalhamento de Rutherford, mostraram que os átomos são compostos por um núcleo muito pequeno positivamente carregado e orbitado por elétrons.

Na segunda metade do século XX, com os experimentos de espalhamento inelástico profundo (*deep inelastic scattering*), uma extensão em energias mais altas do experimento de Rutherford, descobriu-se que prótons e nêutrons (que compõem os núcleos atômicos) não são partículas elementares, mas compostas por partículas ainda menores chamadas inicialmente de *partons*. Posteriormente veio o desenvolvimento da

1. Introdução

cromodinâmica quântica (QCD) e o modelo de quarks. Até onde se sabe atualmente, os quarks são partículas elementares, no sentido de não serem compostas por outras partículas. Diversas partículas elementares e compostas (menores que o átomo) foram descobertas no século passado, e muitas continuam sendo descobertas atualmente¹. As teorias físicas que descrevem o comportamento das partículas subatômicas e suas interações, juntamente com os experimentos envolvendo raios cósmicos e aceleradores de partículas constituem a área da física conhecida como física de altas energias. As escalas de comprimento normalmente envolvidas nesses fenômenos são da ordem de $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$, a ordem de grandeza de núcleos atômicos, ou até mesmo menores.

Os prótons e nêutrons compõem o núcleo atômico de todos os elementos conhecidos, mas não são, como mencionamos, partículas elementares. Eles são formados por quarks, que interagem por meio da troca de glúons, os bósons de calibre da interação forte. As partículas compostas por quarks por meio da interação forte são chamadas de hádrons, e podem ser divididas em duas categorias básicas: *bárions*, compostos por três quarks, e *mésons*, compostos por um par quark-antiquark. Quando os hádrons são submetidos a condições de temperaturas e/ou densidades extremamente elevadas, os quarks e glúons, que compõem toda a matéria fortemente interagente, passam para uma nova fase da matéria conhecida como plasma de quarks e glúons.

Acredita-se que nos instantes iniciais do universo, quando as condições de temperatura e densidade eram muito elevadas, o plasma de quarks e glúons era predominante. A expansão atual do universo, conforme verificada pela lei de Hubble, nos permite estimar a sua densidade em tempos remotos, próximos ao Big Bang. A relação entre a idade do universo e sua densidade de energia é dada por [2]

$$t = \frac{1}{H(t)} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\epsilon(t)}}, \quad (1.1)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, G é a constante gravitacional e $\epsilon(t)$ a densidade de energia cósmica. Considerando o Big Bang como o instante inicial, podemos calcular o tempo necessário para a densidade de energia cósmica atingir o valor $\epsilon \simeq 0.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$, que é a densidade de energia de um nucleon [2]. Com o valor $G = 6.708 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$, encontramos

¹O bóson de Higgs, cuja descoberta foi confirmada em 2013, é um exemplo notável.

$$t_q \simeq 10^{-5} \text{ s}, \quad (1.2)$$

de modo que nos seus primeiros dez microsegundos, o universo estava num estado em que a existência de hádrons da forma como os conhecemos hoje era inconcebível. O estado primordial do universo era formado por quarks e glúons desconfinados até o instante t_q (período que ficou conhecido como a era dos quarks). Somente então os hádrons foram formados.

A transição do plasma de quarks e glúons para hádrons (e vice-versa) é um assunto bastante atual na física de altas energias. O estudo do diagrama de fases correspondente à transição (o diagrama de fases da QCD) tem sido alvo de numerosos trabalhos, tanto no âmbito teórico quanto no experimental. Com o intuito de entender melhor o significado deste diagrama no atual cenário da física, vamos fazer uma breve descrição do Modelo Padrão das partículas elementares e das principais características da QCD.

1.1. O Modelo Padrão

O Modelo Padrão das partículas elementares engloba teorias de calibre (ou *gauge theories*) que descrevem a interação de três gerações de partículas que compõem a matéria por meio de três forças fundamentais da natureza: eletromagnetismo, força nuclear forte e força nuclear fraca. Completa o Modelo Padrão o chamado “setor de Higgs”, onde uma partícula de spin zero, o bóson de Higgs, interage com as demais partículas atribuindo-lhes massa. A quarta força fundamental da natureza, a gravitação, é também a mais fraca delas mas não é abordada no Modelo Padrão por não ser renormalizável².

A matéria ordinária do nosso cotidiano é composta por átomos. Átomos são compostos por um núcleo de prótons e nêutrons cercado por uma nuvem de elétrons. Prótons e nêutrons, por sua vez, são compostos pelos quarks *up* (u) e *down* (d). Esses quarks, o elétron e o neutrino eletrônico são férmions de spin $1/2$ e juntos formam a primeira geração de partículas constituintes da matéria do Modelo Padrão. Existem ainda os bósons mediadores de força, que são responsáveis pela interação entre

²A constante gravitacional G tem dimensão de $[\text{energia}]^{-2}$.

1. Introdução

as partículas. A figura 1.1 mostra um resumo com as três gerações de partículas e também as partículas mediadoras das forças fundamentais.

Quarks	u up	c charm	t top	γ photon
	d down	s strange	b bottom	g gluon
Leptons	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z Z boson
	e electron	μ muon	τ tau	W W boson
	I	II	III	

Three Families of Matter

Figura 1.1.: Tabela de partículas elementares mostrando as três gerações de quarks e léptons e os bósons de calibre.

Cada quark (*up*, *down* ou qualquer outro sabor) pode existir em três diferentes cores: vermelho, verde e azul. A interação forte que mantém os quarks ligados no interior dos prótons e nêutrons tem origem devido a carga de cor dos quarks (por isso o nome Cromodinâmica Quântica). As partículas mediadoras da força forte são os glúons, que também carregam carga de cor. Isso significa que eles interagem entre si através da própria força forte, o que faz da QCD uma teoria não-abeliana. Este comportamento é totalmente diferente do eletromagnetismo, onde o fóton (partícula mediadora da força eletromagnética) não possui carga elétrica. Portanto, fótons não interagem entre si e a teoria é dita abeliana³.

Três características da QCD merecem destaque:

- **Confinamento:** a força forte que liga os quarks no interior dos hádrons aumenta de intensidade a medida que eles se afastam uns dos outros. Como consequência, não é possível separá-los, o que significa que eles estão confinados. Em outras palavras, a energia necessária para isolar um quark é maior que a energia necessária para criar um novo par quark-antiquark, de modo que sempre que se tenta isolar um quark do

³Um grupo é dito abeliano se os seus elementos comutam mediante a operação do grupo. Caso o contrário, o grupo é dito não-abeliano.

interior de um hádron, acaba-se criando um novo par.

- **Liberdade Assintótica:** em escalas de energia muito altas (equivalente a escalas de distâncias pequenas) a constante de acoplamento da QCD diminui, fazendo com que a interação entre quarks e glúons fique assintoticamente fraca e o livre caminho médio destas partículas aumente consideravelmente. O plasma de quarks e glúons é formado por quarks e glúons assintoticamente livres nestes regimes de altas energias, sendo um dos principais alvos de estudo em experimentos realizados em colisores de íons pesados como o *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) e o *Large Hadron Collider* (LHC) [3, 4].

- **Simetria Quiral:** é uma simetria da QCD no limite em que a massa dos quarks vai para zero. Está diretamente associada ao conceito de quiralidade e a conservação (parcial) da corrente axial.

Estas características, juntamente com o fato dos glúons portarem carga de cor e interagirem entre si, fazem da QCD uma teoria complexa e difícil de se tratar diretamente devido a impossibilidade de se usar teoria de perturbação convencional em seus cálculos (isto se deve porque a constante de acoplamento da QCD é maior que a unidade em regimes de baixas energias, o que impossibilita a expansão perturbativa no acoplamento). Por isso existem inúmeros modelos que descrevem alguns aspectos da interação forte de modo mais simples que a QCD, facilitando a obtenção de resultados teóricos que podem ser usados para entender determinadas características específicas da teoria. Estes modelos efetivos, como o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), o modelo Sigma Linear (LSM) e o modelo de sacola do MIT, por exemplo, têm sido empregados com relativo êxito na descrição fenomenológica da interação forte para baixas energias, levando a resultados que podem ser comparados com cálculos de QCD na rede.

No Modelo Padrão a massa das partículas é uma propriedade dinâmica, e não um atributo intrínseco como na mecânica Newtoniana. Partículas adquirem massa via quebra da simetria de calibre induzida pelo campo de Higgs. Por isso diz-se que o bóson de Higgs é a partícula que gera massa para todas as demais. No entanto, a massa de hádrons compostos por quarks leves como u e d pouco tem a ver com o campo de Higgs e até mesmo com a própria massa de seus quarks constituintes. Por exemplo o próton é composto pelos quarks uud (com massas⁴ aproximadamente de

⁴Nesta tese usamos o sistema de unidades naturais onde $\hbar = c = k_B = 1$

1. Introdução

4 e 6 MeV, respectivamente), mas possui massa muito maior, de 938 MeV. De fato, a maior parte da massa de bárions e mésons emerge de um outro tipo de quebra de simetria: a quebra da simetria quiral. Uma abordagem mais ampla sobre o assunto pode ser encontrada na Ref. [5].

1.2. A Transição Quiral e o Diagrama de Fases da QCD

Tanto o próton quanto o nêutron possuem massa aproximada de 938 MeV, o que significa que no atual estágio do universo a simetria quiral está quebrada. Como bárions são formados por três quarks, cada quark no interior dos prótons e dos nêutrons possui massa efetiva de aproximadamente $1/3$ da massa destas partículas, o que é um valor bem acima da massa de corrente dos quarks *up* e *down*. A questão é: poderia existir alguma situação específica na qual a massa efetiva dos quarks fosse reduzida até que a simetria quiral fosse (parcialmente) restaurada? A resposta é sim, e a condição para que isto ocorra é submeter os hádrons a altas energias (altas temperaturas e/ou densidades). Em termos práticos é isso o que acontece em colisores de íons pesados como o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) no Brookhaven National Laboratory (BNL) e o LHC (Large Hadron Collider) no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN)[3, 4].

A figura 1.2 mostra um esquema do que seria o diagrama de fases da QCD com a fase hadrônica em temperaturas e densidades baixas, a fase de plasma de quarks e glúons em altas energias, e uma fase em baixas temperaturas e altas densidades onde quarks poderiam formar estados ligados aos pares (diquarks coloridos) que poderiam dar origem a uma fase de supercondutividade de cor. A determinação precisa do diagrama de fases da QCD é alvo constante de pesquisas, tanto teórica quanto experimentalmente. No campo teórico, simulações na rede para valor nulo do potencial químico, μ , encontraram que não há de fato uma transição de fase da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons, mas sim um rápido aumento na densidade de energia, o que indica um crossover caracterizado por uma temperatura pseudo-crítica (T_{pc}) de aproximadamente 160 MeV [6]. A situação não é tão clara para o caso de μ diferente de zero porque, até o momento, os cálculos de QCD na rede estão limitados devido⁵ ao “problema do sinal” [7, 8]. Entretanto, modelos efetivos, como o de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [9, 10], apontam para uma transição de primeira ordem entre a fase

⁵O problema do sinal na QCD tem origem no fato do determinante fermiônico ser um número complexo.

hadrônica e o plasma de quarks e glúons em baixas temperaturas, de modo que deve existir um ponto crítico onde termina a linha de transição de primeira ordem e começa o crossover. Além disso, a maioria das extrapolações na rede para μ finito também indicam a possibilidade de existência deste ponto crítico [11].

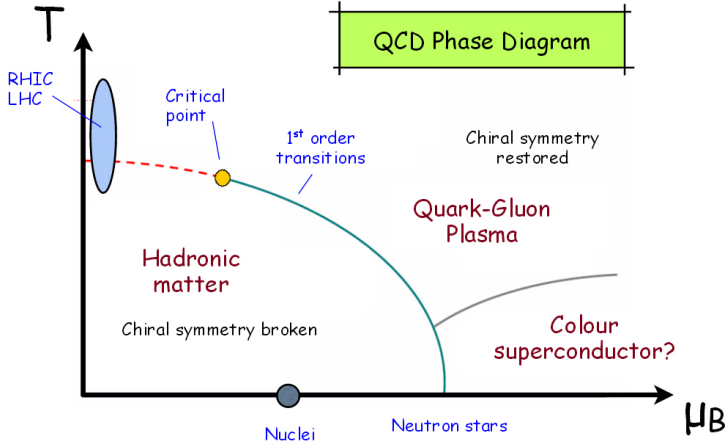


Figura 1.2.: Ilustração do diagrama de fases da QCD disponível na web [12].

A região de altas densidades bariônicas (ou potenciais químicos) e baixas temperaturas é de particular interesse para a astrofísica devido a possibilidade de formação de estrelas de quarks a partir das estrelas de nêutrons. A densidade de uma estrela de nêutrons cresce no sentido da crosta para o núcleo, e as estimativas de densidade do núcleo superam em até cinco vezes a densidade nuclear normal [2]. Esta estimativa, juntamente com a possibilidade da matéria estranha ser estável em altas densidades (conjectura de Bodmer-Witten [13]), levanta a questão de se a estrela é realmente formada por nucleons ou por quarks desconfinados.

1.3. Aceleradores de Partículas

No campo experimental, a física de partículas conta com experimentos naturais envolvendo raios cósmicos mas também dispõe dos modernos aceleradores de partículas construídos em alguns dos melhores laboratórios do mundo. Podemos classificar os diferentes aceleradores em duas categorias: (i) aceleradores onde os feixes de partículas

1. Introdução

colidem um contra o outro; e (ii) aceleradores de alvo fixo, onde apenas um feixe colide com um alvo estacionário. De modo geral, os colisores do tipo (i) possuem a vantagem de atingir energias mais altas no centro de massa (normalmente se utiliza o símbolo \sqrt{s} para designar a energia de colisão no centro de massa), uma vez que os feixes colidem com velocidades opostas.

Somente partículas carregadas e estáveis podem ser aceleradas até altas energias, de modo que os possíveis tipos de aceleradores estão restritos a colisores elétron-pósitron (e^-e^+), colisores de hádrons (pp ou $p\bar{p}$) e colisores elétron-próton (e^-p ou e^+p). Listamos alguns aceleradores e suas principais características na figura 1.3 [14].

Colisor	Laboratório	Tipo	Data	\sqrt{s}/GeV
Bevatron	LBNL	p/alvo fixo	1954-1993	~ 1
PEP-II	SLAC	e^+e^-	1999-2008	10.5
KEKB	KEK	e^+e^-	1999-2010	10.6
LEP	CERN	e^+e^-	1989-2000	90-209
HERA	DESY	e^-p/e^+p	1992-2007	320
Tevatron	Fermilab	$p\bar{p}$	1987-2012	1960
RHIC	BNL	$p\bar{p}/ions$	2000-	200
LHC	CERN	$p\bar{p}/ions$	2009-	14000

Figura 1.3.: Características básicas de alguns dos aceleradores de partículas mais conhecidos.

Uma forma de se explorar o diagrama de fases de QCD experimentalmente e estudar as diferentes fases da matéria fortemente interagente é através de experimentos em colisores de íons pesados, como o RHIC e o LHC[3, 4].

Nesses aceleradores, feixes de partículas colidem com velocidades próximas a da luz e liberam grande quantidade de energia. Devido à contração de Lorentz na direção do movimento, os íons assumem uma forma achatada para observadores no laboratório. Na colisão, eles se superpõem para formar um sistema de muitos quarks contidos num pequeno disco, formando um meio quente, denso e colorido (no sentido de carga de cor). Então este meio se expande, mantendo o seu caráter colorido, até que é formado o plasma de quarks e glúons, onde a simetria quiral é aproximadamente restaurada⁶.

⁶Aproximadamente porque a massa de corrente, m_c , dos quarks *up* e *down* é pequena mas diferente de zero ($m_c \approx 5 \text{ MeV}$).

Finalmente, este plasma resfria, produzindo hádrons que serão detectados no experimento. A figura 1.4 exemplifica de maneira simples esse processo. Diversos vídeos explicando o processo de colisão de íons e a formação do plasma de quarks e glúons podem ser encontrados na Ref. [3].

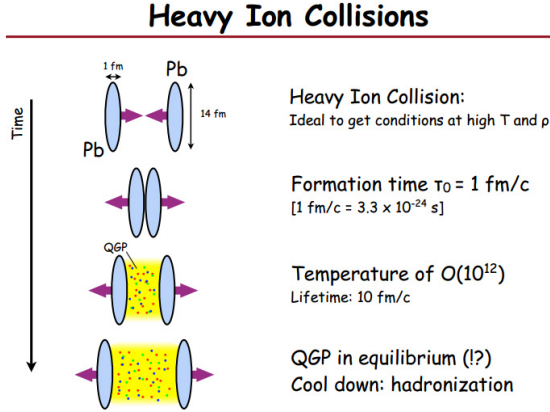


Figura 1.4.: Exemplo de colisão de íons pesados mostrando a formação do plasma de quarks e glúons e a hadronização. Retirado da Ref. [12]

1.4. O Programa *Beam Energy Scan*

O programa *Beam Energy Scan* (BES) é uma proposta para o escaneamento do diagrama de fases da QCD em altas densidades (alto potencial químico bariônico) feito através da colisão de íons pesados no RHIC em diferentes energias de colisão, mais baixas que a energia máxima acessível no colisor.

O RHIC foi projetado e construído para potencialmente vir a descobrir o plasma de quarks e glúons (QGP). As colisões mais energéticas no RHIC, com baixa densidade bariônica, se mostraram capazes de fazer o sistema formado por matéria quente e densa sofrer uma transição de fase para o QGP. De fato, os primeiros resultados do RHIC, divulgados na primeira metade da década passada, já apontavam para a formação de uma fase com graus de liberdade de quarks e glúons [15], ou seja, o QGP.

Apesar da localização do ponto crítico (CP) da QCD e dos contornos da transição permanecerem desconhecidos, informações obtidas através de simulações numéricas

1. Introdução

sugerem que o CP, se realmente existir, provavelmente encontra-se entre⁷ $\mu_B = 150$ e $\mu_B = 500$ MeV [16]. Este intervalo está dentro da faixa de energia passível de investigação através do programa BES, permitindo assim, pela primeira vez, uma busca direta pelo ponto crítico da QCD e pelas características da transição de fase.

Entre os principais objetivos do programa BES podemos destacar [16, 17]:

- Escanear o diagrama de fases em diferentes energias de colisão (o que se traduz em diferentes valores de T e μ_B) para verificar se, e em qual valor de $\sqrt{s_{NN}}$, as assinaturas do QGP deixam de ser observadas. Isto pode ser um indicativo de que o sistema permanece na fase hadrônica durante todo o processo de colisão, nunca chegando a atingir a fase de QGP.

- O segundo objetivo é encontrar flutuações críticas, associadas com um forte aumento das susceptibilidades no entorno do ponto crítico.

- Por último podemos citar a busca por evidências de um “amolecimento” (*softening*) da equação de estado (EoS) a medida que o sistema se aproxima do contorno da transição. De certo modo, isto seria equivalente ao objetivo acima (flutuações no entorno do ponto crítico), uma vez que o encontro de um implica necessariamente a existência do outro. O amolecimento da equação de estado é esperado em um sistema que cruza uma linha de transição de primeira ordem. Assim como no objetivo acima, a identificação desta mudança na equação de estado se daria por observações nas flutuações de carga, estranheza e número bariônico como função da energia do sistema.

Os dados do programa BES foram coletados entre os anos de 2010 e 2014. A figura 1.5 mostra o alcance do programa no diagrama de fases da QCD. As linhas amarelas representam as possíveis trajetórias de reações do sistema em energias no centro de massa dadas por $\sqrt{s_{NN}} = 5, 7.7, 11.5, 14.5, 19.6, 27$ e 39 GeV. Esta fase do programa permitiu à equipe da colaboração STAR expandir a área do diagrama de fases escaneada, com μ_B passando de algumas poucas dezenas de MeV em $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV para $\mu_B \approx 400$ MeV em $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV.

Apesar do sucesso do programa BES, os três pontos delineados acima não puderam ser completamente esclarecidos devido às incertezas estatísticas que impossibilitaram tirar conclusões definitivas sobre as questões levantadas. Segundo a Ref. [16], foram

⁷O potencial químico bariônico, μ_B , e o potencial químico de quarks, μ , se relacionam por $\mu_B = 3\mu$.

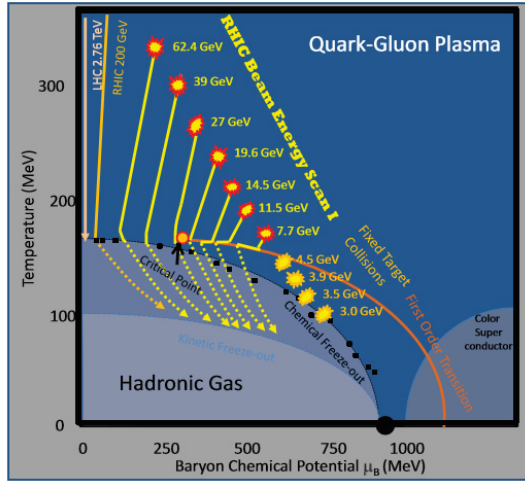


Figura 1.5.: O diagrama de fases da QCD com os escaneamentos realizados pelo programa BES. As linhas amarelas representam a evolução das colisões para diferentes energias. Os marcadores laranjas mais a direita e abaixo da linha de transição de primeira ordem indicam o alcance esperado da segunda fase do programa, a ser realizada ainda.

observados alguns indicativos de “amolecimento” da EoS por volta de 11.5 – 19.6 GeV que poderia indicar uma transição de primeira ordem, assim como alguns sinais de flutuações que poderiam estar associadas com flutuações críticas. Contudo, por causa das incertezas estatísticas, as conclusões definitivas terão que aguardar a segunda fase do programa, BES II, que está previsto para entrar em funcionamento entre os anos de 2018 e 2019.

Na medida em que continuam as buscas por sinais da existência do ponto crítico e da transição de primeira ordem no diagrama de fases da QCD, diversos trabalhos no campo teórico tem surgido nos últimos anos em um esforço para entender e calcular grandezas físicas que possam ser úteis na identificação do ponto crítico. Um exemplo notável é o cálculo de flutuações e correlações presentes em fenômenos críticos e transições de fase de primeira ordem [18]. Enquanto os métodos de QCD na rede (LQCD) continuam com dificuldades de acessar a região de altos potenciais químicos, o cálculo de flutuações e correlações pode ser realizado de forma relativamente simples

1. Introdução

em modelos efetivos para a interação forte. Uma parte do trabalho a ser apresentado nesta tese diz respeito justamente ao cálculo da correlação do número de prótons e antiprótons. Este cálculo pode ser realizado de maneira relativamente simples em modelos efetivos, de modo que os resultados podem ser comparados com os dados obtidos pela colaboração STAR no programa BES.

Um dos resultados divulgados no âmbito do programa BES diz respeito aos cumulantes das distribuições do número líquido de prótons, ΔN_p (isto é, prótons menos antiprótons), em diferentes energias de colisão [19]. As razões entre os diferentes cumulantes obtidos são comparadas com expectativas teóricas construídas considerando-se a produção independente de prótons e antiprótons. Esta aproximação, apesar de reproduzir muito bem os dados, assume que não existe nenhuma correlação entre o número de prótons e antiprótons em cada colisão. Entretanto, os próprios dados da colaboração STAR mostram que pode existir uma pequena contribuição nos cumulantes de ΔN_p que é devida a correlação do número de prótons e antiprótons.

Sabe-se que, normalmente, correlações possuem um papel importante em transições de fase, de modo que poderíamos nos perguntar se a pequena correlação próton-antipróton inferida dos dados da colaboração STAR poderia ter um maior destaque nas proximidades do ponto crítico da QCD. Esta é uma das questões que tentaremos responder ao final desta tese. A motivação para este trabalho teve origem durante o estágio sanduíche, realizado entre os anos de 2014 e 2015 no Lawrence Berkeley National Laboratory (LBNL), Estados Unidos, e se deve em grande parte ao professor Dr. Volker Koch, daquela instituição, que sugeriu que poderíamos usar o modelo de Nambu–Jona-Lasinio para calcular a correlação partícula-antipartícula e comparar com os dados obtidos da colaboração STAR. No capítulo 5 discutiremos os detalhes desta aplicação.

Na primeira etapa do doutorado, antes do estágio sanduíche, estivemos empenhados em estudar os efeitos de um campo magnético forte sobre a matéria de quarks. A motivação para a nossa escolha veio tanto das colisões de íons pesados quanto das aplicações que a matéria de quarks magnetizada pode ter na astrofísica, em particular no estudo de estrelas compactas.

1.5. Campos Magnéticos em Colisões de Íons Pesados

Recentemente começou-se a discutir a possibilidade da presença de campos magnéticos em colisões de íons pesados. A origem destes campos pode ser entendida se considerarmos dois íons de carga elétrica Ze e raio R colidindo de forma não central, isto é, com um parâmetro de impacto b . A geometria da colisão pode ser visualizada na figura 1.6, onde podemos ver o plano de reação, que é o plano gerado pela direção dos momentos iniciais dos íons (geralmente adota-se o eixo z como a direção do feixe de partículas) e pelo parâmetro de impacto. A figura 1.7 mostra um esboço de uma colisão não central de íons, onde as cargas periféricas não afetadas diretamente pela colisão (devido ao parâmetro de impacto) produzem um campo magnético perpendicular ao plano de reação [20].

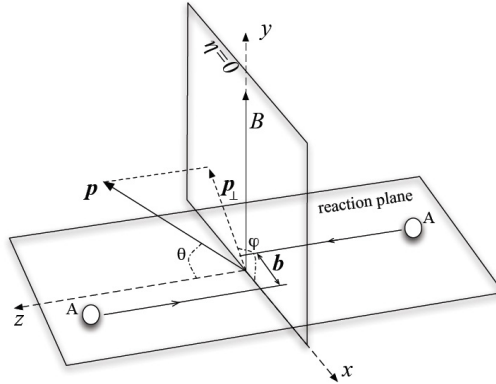


Figura 1.6.: Esquema geométrico de uma colisão de íons pesados com parâmetro de impacto não nulo b . O plano de reação é gerado pelos momentos iniciais dos íons.

Seguindo a Ref. [20], podemos estimar a magnitude do campo gerado pela colisão,

$$B \sim \gamma Z e \frac{b}{R^3} \quad (1.3)$$

onde $\gamma = \sqrt{s_{NN}}/2m_N$ é o fator de Lorentz e $\sqrt{s_{NN}}$ é a energia de colisão por par de nucleons no referencial do centro de massa. No RHIC, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $Z = 79$

1. Introdução

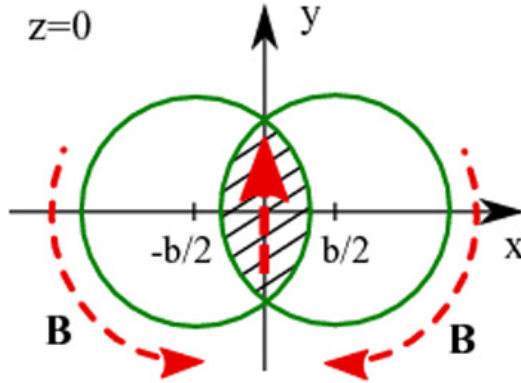


Figura 1.7.: Colisão de íons pesados visto do eixo z , com parâmetro de impacto b . O campo magnético resultante aponta na direção y .

(íons de Au), $R \approx 7$ fm e $\gamma = 100$, de modo que podemos estimar $eB \approx m_\pi^2 \sim 10^{18}$ G, onde $m_\pi \simeq 135$ MeV e $1 \text{ MeV}^2 \simeq 1.44 \times 10^{13}$ G. No LHC os campos produzidos podem atingir uma ordem de magnitude a mais que no RHIC. Apenas para se ter uma ideia da magnitude que esse valor representa, vamos compará-lo com alguns casos especiais: o campo magnético da Terra tem magnitude de 1 G, enquanto o campo mais forte criado na forma de ondas eletromagnéticas de choque é $\sim 10^7$ G [21]. Nas estrelas de nêutrons estima-se campos da ordem de $10^{10} - 10^{13}$ G, podendo chegar a 10^{15} G na superfície de magnetares [22], conforme discutiremos na próxima seção. Além disso, campos magnéticos desta ordem de grandeza também estariam presentes no universo primordial [23].

Uma das maiores dificuldades experimentais envolvendo colisões de íons pesados é a procura por observáveis que sejam sensíveis a estes campos. A maioria dos observáveis estudados são sensíveis tanto à interação forte atuando no plasma de quarks e glúons, quanto à interação eletromagnética, de modo que separar os efeitos produzidos pelas duas interações é um grande problema experimental. Outra questão de interesse prático está relacionada com o tempo de duração do campo magnético durante a colisão. Atualmente estima-se que o plasma de quarks e glúons possa existir por um intervalo de tempo da ordem de $fm/c \sim 10^{-23}$ s, de modo que campos magnéticos elevados como os que vimos acima devem existir no mínimo pelo mesmo intervalo de tempo para que possam causar algum efeito relevante na colisão. Seguindo a Ref.

[20], podemos calcular o campo eletromagnético na posição \mathbf{r} produzido por dois íons pesados movendo-se na direção do eixo z utilizando os potenciais de Liénard-Wiechert,

$$e\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \alpha_{em} \sum_a \frac{(1 - v_a^2)\mathbf{R}_a}{R_a^3 [1 - (\mathbf{R}_a \times \mathbf{v}_a)^2 / R_a^2]^{3/2}}, \quad (1.4)$$

$$e\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \alpha_{em} \sum_a \frac{(1 - v_a^2)(\mathbf{v}_a \times \mathbf{R}_a)}{R_a^3 [1 - (\mathbf{R}_a \times \mathbf{v}_a)^2 / R_a^2]^{3/2}}, \quad (1.5)$$

onde $\mathbf{R}_a = \mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)$, $\alpha_{em} = 1/\sqrt{137}$ é a constante de estrutura fina (em unidades naturais - veja Apêndice A) e a soma é sobre todos os Z prótons em cada núcleo, cada um com posição \mathbf{r}_a e velocidade \mathbf{v}_a . O módulo da velocidade $|\mathbf{v}_a|$ é dado em termos da massa do próton, $m_p \sim 1 \text{ GeV}$, e da energia de colisão, $\sqrt{s_{NN}}$, por meio da relação $|\mathbf{v}_a|^2 = 1 - (2m_p/\sqrt{s_{NN}})^2$.

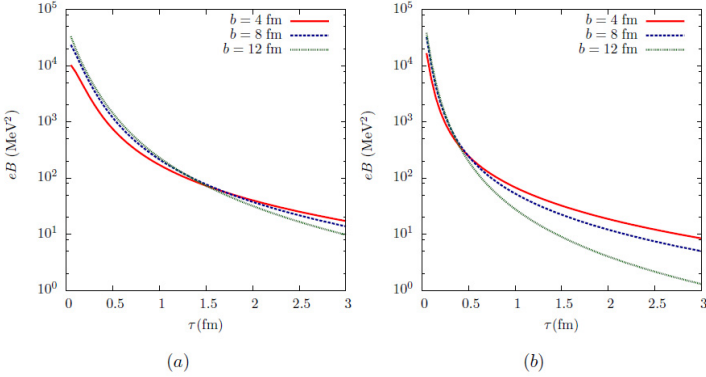


Figura 1.8.: Campo magnético na origem $\mathbf{r} = 0$ resultante da colisão de dois íons de ouro. Na figura (a) a energia de colisão é $\sqrt{s_{NN}} = 62 \text{ GeV}$, enquanto na figura (b) $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$. Retirado da Ref. [20].

A figura 1.8 mostra a solução numérica da equação (1.5) em função do tempo próprio $\tau = (t^2 - z^2)^{1/2}$ para diferentes parâmetros de impacto. Podemos notar que, no vácuo, o campo magnético decresce rapidamente, caindo cerca de três ordens de magnitude em menos de 3 fm. Entretanto, uma estimativa mais realista do plasma de quarks e glúons deve levar em conta efeitos de um meio com condutividade elétrica.

1. Introdução

Esse meio fortemente interagente existente na forma de *Glasma*⁸ é formado durante a colisão [25] e pode retardar o decaimento do campo magnético. Simulações de LQCD mostram que a contribuição dos glúons para a condutividade elétrica do plasma de quarks e glúons estático é [26]

$$\sigma = (5.8 \pm 2.9) \frac{T}{T_c} \text{ MeV}, \quad (1.6)$$

onde T é a temperatura do plasma e T_c a temperatura crítica do mesmo. É importante notar que a eq. (1.6) assume que o meio é estático e que os quarks não contribuem para a condutividade. Mesmo assim, podemos ter uma boa estimativa dos efeitos do meio condutor sobre o campo magnético. Isso fica claro ao analisarmos a figura 1.9, onde o campo magnético no vácuo pode ser comparado com o campo magnético no meio condutor. Vemos que em um meio deste tipo o campo magnético persiste por muito mais tempo, de modo que os efeitos causados por campos eletromagnéticos devem ser considerados no estudo das diferentes fases da matéria existentes durante o processo de colisão. Podemos comparar os tempos envolvidos na figura 1.9 com os tempos de formação do QGP e de hadronização na figura 1.10 para verificar que o campo magnético atua durante tempo suficiente para afetar o plasma de quarks e glúons.

Uma questão natural envolvendo colisões de íons pesados é perguntar por que considerar somente efeitos do campo magnético. Por que não levar em conta o campo elétrico que pode eventualmente existir, uma vez que íons possuem carga elétrica? De fato, ao considerarmos colisão por colisão individualmente (isto é, cada evento separadamente), podemos observar que há não apenas componentes do campo elétrico, como também outras componentes do campo magnético, conforme mostra a figura 1.11 para colisões de íons de ouro a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. A magnitude do campo elétrico produzido é significativa: $E \sim m_\pi^2 = 10^{21}$ V/cm. Isso corresponde a uma intensidade de 10^{39} W/cm², dezesseis ordens de magnitude maior que a intensidade produzida pelos mais potentes lasers atualmente (10^{23} W/cm²) [20]. No entanto, ao levarmos em conta a média sobre eventos, estas componentes do campo eletromagnético se atenuam, de modo que a componente mais relevante é B_y (figura 1.7).

⁸ *Glasma* é uma fase formada puramente por glúons que precede a formação do QGP em colisões de íons pesados. Detalhes desta fase da matéria até a formação do QGP podem ser encontrados na Ref. [24].

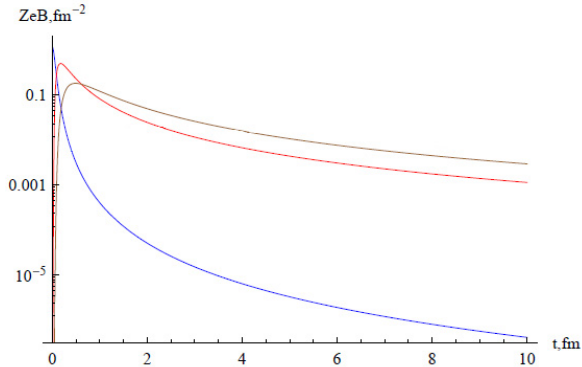


Figura 1.9.: Campo magnético no vácuo (linha azul), no meio condutor estático com condutividade $\sigma = 5.8 \text{ MeV}$ (linha vermelha) e $\sigma = 16 \text{ MeV}$ (linha marrom). A unidade de eB está em $\text{fm}^{-2} \approx 2m_\pi^2$. A colisão é de íons de Au ($Z = 79$) para $\gamma = 100$ (RHIC) e $b = 7 \text{ fm}$. Adaptado da Ref. [20].

1.6. Estrelas Compactas

No outro extremo do diagrama de fases da QCD (figura 1.2), isto é, em temperaturas baixas e densidades altas temos as estrelas de nêutrons como exemplo de objetos compostos por matéria fortemente interagente. Estas estrelas podem ser formadas pelo colapso gravitacional que ocorre em estrelas massivas durante explosões de supernovas. O raio típico de uma estrela de nêutrons é da ordem de 10 km, enquanto a massa pode chegar a valores próximos de duas massas solares [27, 28], de modo que a densidade de uma estrela de nêutrons é extremamente alta, comparável a densidade nuclear. Como consequência, muito se especula sobre a composição destas estrelas. Figurando entre as possibilidades estão as estrelas de quarks, as estrelas híbridas (com um núcleo de quarks cercado por matéria hadrônica) e ainda as estrelas híbridas com fase mista, onde uma fase de quarks desconfiados coexistiria com a fase hadrônica, formando assim uma fase mista. A figura 1.12 mostra um esquema da provável composição das estrelas de nêutrons, enquanto a figura 1.13 mostra um esquema de uma estrela híbrida com fase mista.

Dentre os possíveis tipos de estrelas de nêutrons encontram-se os chamados *magnetars*, estrelas de nêutrons com campos magnéticos da ordem de 10^{15} G na superfície

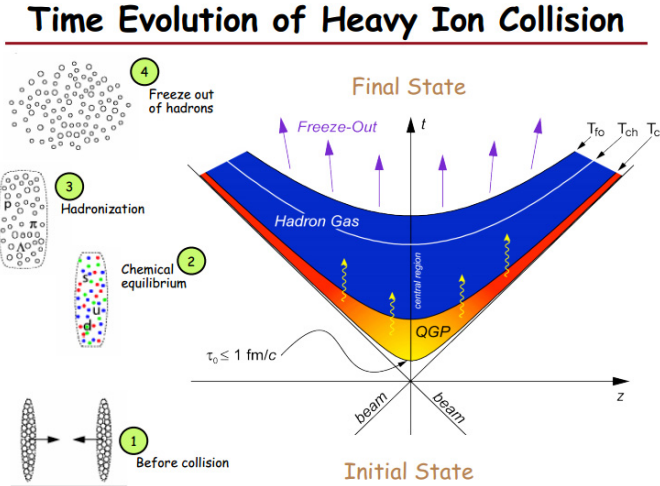


Figura 1.10.: Evolução temporal de uma colisão de íons pesados. O tempo de formação do plasma de quarks e glúons é de pelo menos $1 \text{ fm}/c$, enquanto a hadronização ocorreria em torno de $3 \text{ fm}/c$ ou menos. Retirado da Ref. [12].

mas que podem atingir 10^{19} G ($eB \approx 3 - 10m_\pi^2$) na região central [30]. Campos magnéticos desta ordem de grandeza podem influenciar o comportamento da matéria fortemente interagente no interior destas estrelas, de modo análogo ao que ocorre em colisões de íons pesados, conforme vimos na seção anterior. Deste modo, o estudo de campos magnéticos fortes na matéria hadrônica possui também uma aplicação prática na astrofísica, uma vez que o cálculo da relação massa-raio de uma estrela compacta é obtido através da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), que por sua vez necessita de uma equação de estado para a matéria fortemente interagente que compõe a estrela.

1.7. Tensão Superficial

Uma grandeza importante para a modelagem da matéria fortemente interagente e, conseqüentemente, para a análise estrutural das possíveis estrelas híbridas com fase mista é a tensão superficial, γ , entre as fases de quarks e hadrônica [31]. Um valor baixo da tensão superficial favoreceria a formação de estrelas híbridas com fase mista,

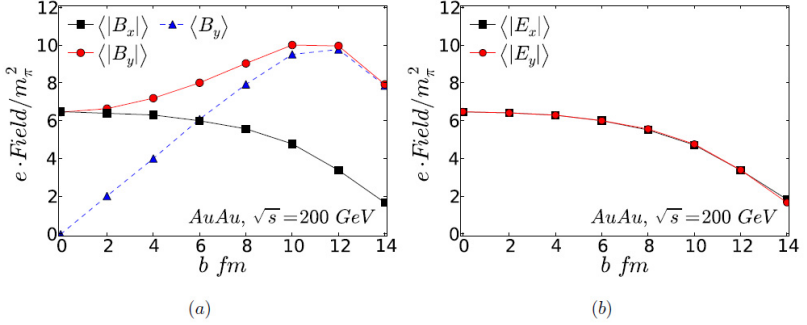


Figura 1.11.: Valor médio do módulo de outras componentes dos campos (a) magnético e (b) elétrico criados em uma única colisão em função do parâmetro de impacto b para colisão de íons de ouro com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

enquanto um valor alto dificultaria. Na Ref. [32] os autores calcularam que, para valores da tensão superficial maiores do que $40 \text{ MeV}/\text{fm}^2$, a fase mista CFL (color-flavor locked) desaparece, de modo que estrelas híbridas com fase mista podem existir se a tensão superficial entre as fases for menor que $40 \text{ MeV}/\text{fm}^2$. Entretanto, estas possibilidades dependem também da dinâmica de conversão de fases e das escalas de tempo envolvidas no processo [33, 34]. Numa transição de primeira ordem, como é esperado na QCD em baixas temperaturas, a conversão de fases é guiada pela nucleação de bolhas ou pela mais “explosiva” decomposição espinodal, dependendo de quão rápido o sistema atinge as instabilidades comparado com a taxa de nucleação [35]. O elemento chave em todas estas possibilidades é a tensão superficial, uma vez que ela representa a energia necessária para formar uma interface entre as fases de quarks e hadrônica.

Apesar de toda a sua importância, pouco se conhece a respeito da tensão superficial na matéria de quarks. Estimativas iniciais em temperatura zero encontraram $\gamma \approx 10\text{--}50 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ [36], enquanto estudos sobre efeitos de nucleação da matéria de quarks em estrelas compactas consideraram o valor $\gamma \approx 30 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ [37]. Na Ref. [38], onde foram consideradas fases mistas estruturadas, os autores estabeleceram um valor mínimo para γ de $20 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ e estimaram um valor entre $20\text{--}35 \text{ MeV}/\text{fm}^2$. Um valor mais alto, $\gamma \approx 300 \text{ MeV}/\text{fm}^2$, foi obtido por argumentos de análise dimensional

1. Introdução

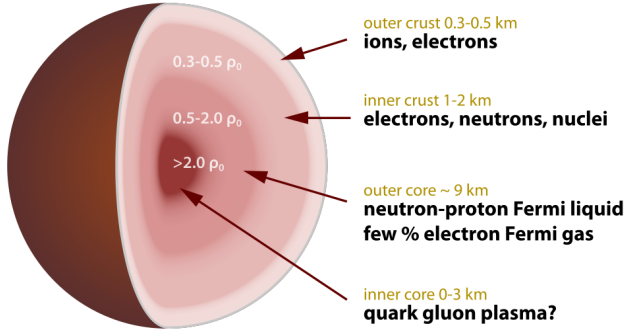


Figura 1.12.: Esquema da composição de estrelas de nêutrons [29].

considerando uma interface entre as fases CFL (color-flavor locked) e a matéria nuclear [32].

Recentemente, a tensão superficial para a matéria de quarks com dois sabores foi calculada na Ref. [39] no modelo quark-méson. Os valores para γ ficaram entre $5 - 15 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ dependendo da inclusão ou não do vácuo e de correções térmicas. O modelo de Nambu-Jona-Lasinio para dois e três sabores de quarks também foi considerado, resultando em $\gamma \approx 7 - 30 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ dependendo dos parâmetros usados no modelo [40] e o modelo quark-méson com três sabores e o loop de Polyakov foi considerado na Ref. [41], onde os autores encontraram valores de γ próximos aos de modelos com dois sabores (entre 10 e $30 \text{ MeV}/\text{fm}^2$).

Os efeitos de um campo magnético forte sobre a tensão superficial foram investigados por Chakrabarty [42] no contexto do modelo de sacolas do MIT com três sabores de quarks. Nesta análise, os autores previram que a tensão superficial de uma bolha de matéria de quarks diverge para campos fortes quando apenas o primeiro nível de Landau é preenchido [43]. Desse modo, os cálculos para γ sob influência de fortes campos magnéticos são ainda menos conhecidos do que os resultados com campo nulo.

Nosso objetivo é investigar a tensão superficial na matéria de quarks sob influência de um campo magnético externo para verificar se é possível a formação de fase mista em magnetares. Teremos sempre em mente que o valor limite da tensão superficial para que ocorra a formação de fase mista em estrelas compactas é de $\sim 40 \text{ MeV}/\text{fm}^2$

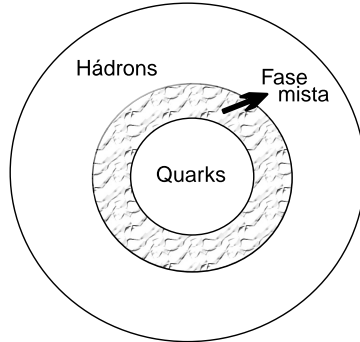


Figura 1.13.: Esquema de uma estrela híbrida com fase mista.

[32]. Nossa abordagem é feita por meio de um modelo efetivo para a interação forte, o modelo de Nambu–Jona-Lasinio na versão $SU(2)$, isto é, para quarks *up* e *down* e na presença de um campo magnético externo. Nessa região do diagrama de fases o modelo prevê uma transição de fase (quiral) de primeira ordem, de modo que as duas fases representando quarks e hádrons coexistem nas mesmas condições de temperatura, potencial químico e pressão.

A tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 estudamos a matéria de quarks magnetizada descrita pelo modelo de Nambu–Jona-Lasinio e suas principais propriedades termodinâmicas. O leitor não familiarizado com o modelo e com os conceitos necessários para estudá-lo pode recorrer aos apêndices B e C⁹. Neste último, fazemos uma revisão detalhada do modelo NJL [44]. Como o leitor deve ter notado, os resultados da tese estão divididos entre as etapas realizadas antes e depois do estágio sanduíche. No capítulo 3, mostramos os resultados obtidos para a tensão superficial na matéria de quarks magnetizada, resultados estes obtidos antes do estágio sanduíche. Os capítulos seguintes dizem respeito as atividades realizadas após o estágio, sendo que no capítulo 4 introduzimos um acoplamento vetorial repulsivo no modelo NJL (sem campo magnético) e analisamos seus efeitos no diagrama de fases e na termodinâmica do modelo. No capítulo 5 mostramos os dados da colaboração STAR que nos motivaram a investigar a correlação próton-antipróton e

⁹Estes apêndices de revisão inicialmente constituíam os capítulos 2 e 3 da tese, mas foram realocados por aconselhamento da banca examinadora.

1. Introdução

usamos o modelo NJL, com e sem acoplamento vetorial, para calcular esta correlação e comparar com os resultados da colaboração STAR. No capítulo 6 apresentamos as nossas conclusões e comentamos sobre possíveis extensões do trabalho.

2. Matéria de Quarks Magnetizada

Neste capítulo vamos estudar os efeitos de um campo magnético externo no modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Veremos como esse campo afeta a massa efetiva dos quarks, influenciando a restauração da simetria quiral, o diagrama de fases e a termodinâmica do modelo. Uma parte do conteúdo deste capítulo pode ser encontrado na Ref. [45].

2.1. Matéria de Quarks Magnetizada

O estudo da matéria de quarks na presença de campos magnéticos extremos encontra diversas aplicações na física de altas energias, como no caso de colisões de íons pesados, onde partículas espectadoras são responsáveis por gerar campos intensos, e também na astrofísica, em modelagem de estrelas compactas. É do nosso interesse estudar a matéria de quarks sob efeito de um campo magnético externo e intenso, simulando assim uma situação de colisão não central de íons pesados ou a matéria no interior de um magnetar. Sabe-se que campos magnéticos extremamente fortes produzem o efeito da catálise magnética, isto é, o aumento do valor do condensado de quarks com o campo magnético [46, 47], o que se traduz em um aumento da massa efetiva. Esse mecanismo pode alterar o diagrama de fases, modificando as linhas de transição e influenciando as instabilidades típicas das transições de primeira ordem, o que pode trazer consequências para o cálculo de tensão superficial na matéria de quarks magnetizada, que faremos no capítulo 3.

Introduzimos o campo magnético na matéria de quarks considerando o campo quadri-vetorial A^μ (cujos quanta são identificados com fótons) e o tensor eletromagnético na lagrangiana do modelo NJL (apresentada no apêndice C),

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_f (i \not{\partial} - q_f \gamma_\mu A^\mu - m) \psi_f + G [(\bar{\psi}_f \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i \gamma_5 \vec{\tau} \psi_f)^2] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde q_f é a carga do quark de espécie f^1 (a soma entre espécies está implícita) e

¹ $q_u = 2e/3$ e $q_d = -e/3$.

2. Matéria de Quarks Magnetizada

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Adotamos um campo magnético estático na direção z , de modo que $A_\mu = \delta_{\mu 2} x_1 B$ [48]. O último termo da lagrangiana (2.1) resulta apenas em uma constante na pressão do gás de quarks (proporcional ao quadrado do campo magnético), de modo que podemos ignorá-lo porque estaremos interessados apenas em derivadas da pressão.

Calculamos o potencial efetivo de forma análoga ao caso sem campo magnético, no qual, após uma aproximação de campo médio, obtemos

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} + \frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln[-p^2 + M^2]. \quad (2.2)$$

Para estudar o efeito do campo magnético na matéria de quarks em temperatura e potencial químico finitos, fazemos as seguintes substituições (assumindo um campo magnético homogêneo na direção z) que vem da relação de dispersão entre quarks [48, 49]

$$p_0 \rightarrow i(\omega_\nu - i\mu),$$

$$p^2 \rightarrow p_z^2 + (2n + 1 - s)qB, \quad \text{com } s = \pm 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{T|q_f|B}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi},$$

onde $\omega_\nu = (2\nu + 1)\pi T$, com $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ representa as frequências de Matsubara para férmions, enquanto n representa os níveis de Landau. Note que a integral acima, que antes era em quatro dimensões, agora é feita apenas em p_z devido à redução dimensional causada pela temperatura e pelo campo magnético. Em síntese, a temperatura de equilíbrio substitui a evolução temporal do sistema, reduzindo a dimensão do espaço para três, como no caso sem campo magnético. Agora, com o campo magnético na direção z , os momentos p_x e p_y são quantizados, reduzindo as dimensões “livres” do espaço para uma. Uma revisão do efeito de redução dimensional pode ser encontrada na Ref. [47]. Inserindo as relações acima na Eq. (2.2) obtemos o potencial efetivo (ou energia livre de Landau)²,

²A rigor, deveríamos incluir o termo constante $B^2/2$ proveniente do tensor eletromagnético mas, conforme mencionamos no texto, vamos descartá-lo.

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ E_{p_z,n,s}(B) + T \ln[1 + e^{-[E_{p_z,n,s}(B)+\mu]/T}] + T \ln[1 + e^{-[E_{p_z,n,s}(B)-\mu]/T}] \right\}. \quad (2.3)$$

Na equação acima $E_{p_z,n,s}(B) = \sqrt{p_z^2 + (2n + 1 - s)|q_f|B + M^2}$, e a soma em s, n e f se referem ao spin, níveis de Landau e sabores de quarks, respectivamente. Note que consideramos o mesmo potencial químico para os quarks up e down. Podemos ainda usar a degenerescência dos níveis de Landau para escrever $E_{p_z,k}(B) = \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2}$, substituindo n por k ($k = 0, 1, 2, \dots$) e somando $s = \pm 1$ na Eq. (2.3). É fácil ver que o nível zero de Landau é não degenerado³, mas todos os demais níveis são duplamente degenerados⁴, de modo que devemos multiplicar a soma na equação (2.3) pelo termo $\alpha_k = 2 - \delta_{k,0}$ que leva em conta este fato. O resultado é

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ E_{p_z,k}(B) + T \ln[1 + e^{-[E_{p_z,k}(B)+\mu]/T}] + T \ln[1 + e^{-[E_{p_z,k}(B)-\mu]/T}] \right\}. \quad (2.4)$$

Seguindo a Ref. [48], separamos a contribuição divergente do vácuo da contribuição finita do campo magnético de modo que o método de regularização seja independente do campo magnético,

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} + \mathcal{F}_{vac} + \mathcal{F}_{mag} + \mathcal{F}_{med}, \quad (2.5)$$

com

$$\mathcal{F}_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p, \quad (2.6)$$

onde $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$. Como a integral acima é divergente, introduzimos um cutoff não covariante, Λ , no limite superior, de forma análoga ao caso sem campo magnético. A contribuição finita do campo magnético pode ser escrita como [48]

³Ou seja, existe um único conjunto (n, s) para o nível $k = 0$, a saber, $n = 0$ e $s = 1$.

⁴Ou seja, existem dois conjuntos (n, s) para cada nível $k \geq 1$.

2. Matéria de Quarks Magnetizada

$$\mathcal{F}_{mag} = - \sum_{f=u}^d \frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'[-1, x_f] - \frac{1}{2}[x_f^2 - x_f] \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} \right\}, \quad (2.7)$$

onde $x_f = M^2/(2|q_f|B)$ e $\zeta'[-1, x_f] = d\zeta(z, x_f)/dz|_{z=-1}$ com $\zeta(z, x_f)$ sendo a função zeta de Riemann-Hurwitz. Separamos assim a contribuição de vácuo regularizada por um cutoff ultra-violeta da contribuição finita do campo magnético. A contribuição finita do meio magnético quente e denso assume a forma

$$\mathcal{F}_{med} = - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ T \ln[1 + e^{-[E_{p_z, k(B)+\mu]/T}] \right. \\ \left. + T \ln[1 + e^{-[E_{p_z, k(B)-\mu]/T}] \right\}. \quad (2.8)$$

Desse modo, a Eq. (2.5) fornece uma expressão para o potencial efetivo do modelo na aproximação de campo médio e na presença de um campo magnético externo. A equação do gap assume a seguinte forma:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = \frac{M - m}{2G} - \frac{N_c N_f M}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right] \right\} \\ - \frac{N_c M}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f|B \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right\} \\ + \frac{N_c M}{4\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |q_f|B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E_{p_z, k(B)}} \times \\ \left\{ \frac{1}{e^{[E_{p_z, k(B)+\mu]/T} + 1}} + \frac{1}{e^{[E_{p_z, k(B)-\mu]/T} + 1}} \right\}. \quad (2.9)$$

2.2. Catálise Magnética

O primeiro efeito notável do campo magnético sobre a massa efetiva dos quarks ocorre em temperatura e potencial químico nulos, de modo que $\mathcal{F}_{med} = 0$. Na aproximação de campo médio que usamos, tanto a massa efetiva dos quarks *up* quanto a dos quarks *down* são iguais, apesar da diferença de cargas entre eles. Desse modo podemos usar a eq. (2.9), excluindo a parte do meio quente e denso, para escrever a massa efetiva, M , na presença de campo magnético como

$$\begin{aligned}
 M &= m + \frac{N_c N_f M G}{\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right] \right\} \\
 &+ \frac{N_c M G}{\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f| B \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Podemos ver na figura 2.1 que a massa efetiva dos quarks aumenta com campos magnéticos extremos, acima de $6m_\pi^2/e \sim 10^{18}G$, efeito este conhecido como catálise magnética [46, 47]. Isto significa que o campo magnético fortalece o condensado de quarks e, conseqüentemente, a massa efetiva dos mesmos, em total contraste com o que ocorre no efeito de supercondutividade. Uma razão para esta diferença é que, no estado fundamental do condensado de quarks, não há efeito Meissner [47]. Isso ocorre porque o condensado de quarks é formado por um par férmion-antiférmion, e não por um par de Cooper eletricamente carregado que origina super correntes. Além disso, no par de Cooper, os elétrons tem spins opostos e, portanto, momentos magnéticos também opostos, de modo que somente um dos momentos magnéticos pode se alinhar com o campo. Entretanto, no par eletricamente neutro do condensado de quarks, os momentos magnéticos da partícula (com carga e spin fixos) e da anti-partícula (com carga e spin opostos) apontam na mesma direção, fortalecendo assim a ligação. A essência da catálise magnética está intimamente relacionada com a redução dimensional, $D \rightarrow D-2$, de férmions eletricamente carregados na presença de campos magnéticos constantes. Uma revisão detalhada deste assunto pode ser encontrada na Ref. [47].

Para obter a figura 2.1 e os demais resultados numéricos deste capítulo usamos os mesmos valores para os parâmetros do caso sem campo: $m = 6 \text{ MeV}$, $\Lambda = 590 \text{ MeV}$ e $G = 2.435/\Lambda^2$, de modo que $m_\pi = 140.2 \text{ MeV}$, $f_\pi = 92.6 \text{ MeV}$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-241.5 \text{ MeV})^3$, conforme a Ref. [50].

2.3. Restauração de Simetria Quiral

No apêndice C mostramos que, em temperatura e potencial químico nulos, a simetria quiral na matéria de quarks é quebrada pelas correções quânticas no potencial efetivo, resultando na equação do gap que, ao ser resolvida, nos fornece uma massa efetiva da ordem de 400 MeV para os quarks. O campo magnético atua no sentido

2. Matéria de Quarks Magnetizada

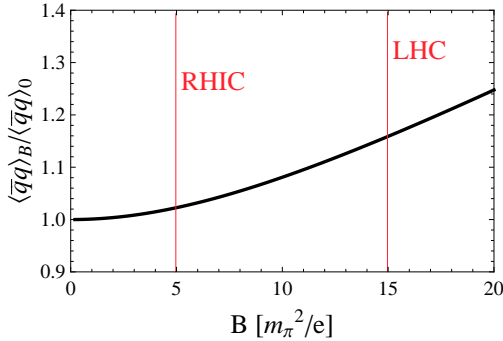


Figura 2.1.: Catálise Magnética - Condensado de quarks normalizado em função do campo magnético B em temperatura e potencial químico zero. As linhas verticais indicam os campos máximos produzidos no RHIC e no LHC.

de fortalecer o emparelhamento quark-antiquark, elevando o valor de M para campos crescentes (catálise magnética). Vamos agora variar os parâmetros temperatura, potencial químico e campo magnético para estudar a restauração da simetria quiral e o tipo de transição que ocorre em cada um dos casos. Como já mencionamos, os resultados da LQCD mostram um crossover em $\mu = 0$ e $T \approx 160$ MeV [6] para as transições quiral e de desconfinamento mas, até o momento, o método não tem acesso à região de baixas temperaturas e altas densidades. O modelo NJL, concorda com a rede a respeito do crossover em altas temperaturas e baixas densidades, mas prevê uma transição de primeira ordem na região de baixas temperaturas e altas densidades.

O campo magnético não altera o caráter de crossover da transição quiral em altas temperaturas e densidades nulas, como podemos observar na figura 2.2, onde mostramos a energia livre em função de M para diferentes valores da temperatura e do campo magnético. Independente do valor de B , temos sempre apenas um mínimo representando o estado fundamental do sistema, que se desloca para valores próximos de zero à medida que a temperatura cresce.

A partir da figura 2.2 podemos analisar o comportamento do “parâmetro de ordem” M em função da temperatura para diferentes valores do campo magnético. A figura 2.3 mostra esse comportamento para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ (RHIC) e $eB = 15m_\pi^2$ (LHC). Podemos ver claramente que a massa efetiva dos quarks decresce de forma contínua e suave (derivada contínua), o que caracteriza um crossover entre as fases de simetria

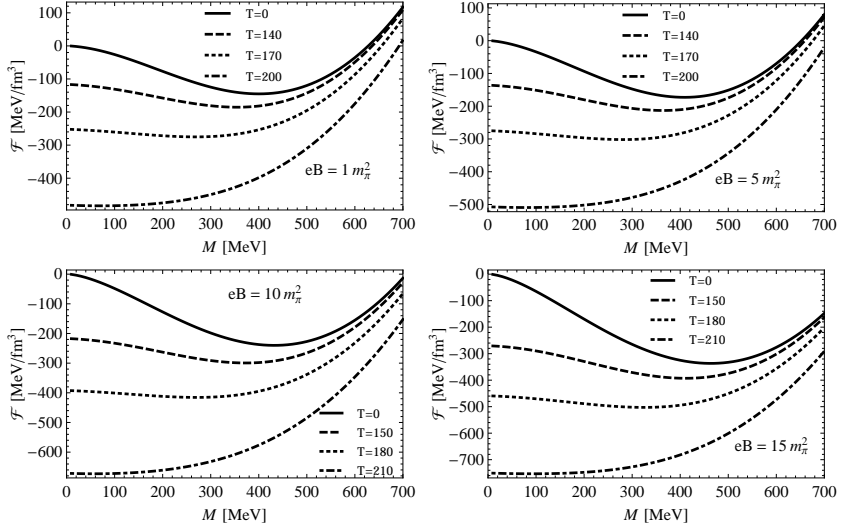


Figura 2.2.: Energia livre como função de M em $\mu = 0$ para diferentes valores de T (dados em MeV) e de B . A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . À medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo parcialmente restaurada aos poucos (crossover).

quebrada e aproximadamente restaurada. A diferença básica entre os casos com e sem campo magnético é que, na presença de B , a massa efetiva dos quarks para uma dada temperatura é maior do que na ausência de B . Como consequência, a temperatura pseudo-crítica aumenta com o campo magnético. Em $\mu = 0$ as temperaturas pseudo-críticas para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$ são de 189 MeV, 192 MeV e 204 MeV, respectivamente. Este comportamento é inerente ao modelo, mas entra em contradição com as previsões da rede, que mostram que T_{pc} diminui com B [51, 52]. A figura 2.4 mostra o comportamento de T_{pc} com B em $\mu = 0$.

O contraste com resultados da rede aparece justamente em altas temperaturas, onde a contribuição dos glúons, ausente no modelo NJL, é importante para o entendimento da interação forte. Na Ref. [53], os autores propuseram uma solução para o problema fazendo a constante de acoplamento do modelo variar com a escala de energia (ou seja, com a temperatura e campo magnético), simulando assim um comportamento

2. Matéria de Quarks Magnetizada

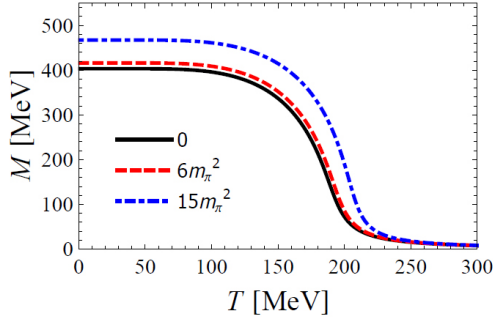


Figura 2.3.: Massa dos quarks em função da temperatura para diferentes valores do campo magnético em $\mu = 0$. A linha contínua representa $B = 0$, a tracejada $eB = 6m_\pi^2$ e a ponto-tracejada $eB = 15m_\pi^2$.

de liberdade assintótica. Mesmo os glúons não possuindo carga elétrica, o campo magnético os afeta indiretamente devido ao efeito de *back-reaction*, onde quarks (que possuem carga elétrica e são afetados diretamente por B) trocam glúons virtuais entre si. Desse modo, os autores da Ref. [53] observaram uma redução da temperatura pseudo-crítica com B no modelo NJL, em acordo com os resultados da rede.

Nos casos em que $T \rightarrow 0$ os efeitos causados pelo campo magnético tornam-se mais interessantes. Isso ocorre basicamente porque, em baixas temperaturas, há menos níveis de Landau para serem preenchidos do que em altas temperaturas, fazendo com que as oscilações geradas pelo preenchimento de níveis, as chamadas oscilações de Haas-van Alphen [54], sejam notáveis.

O comportamento da energia livre em função de M para $T = 0$ e diferentes valores de B está exposto na figura 2.5. Notamos que o campo magnético não altera o tipo de transição envolvida em baixas temperaturas, isto é, continuamos com transições de primeira ordem, de modo análogo ao caso sem campo magnético. Entretanto, podemos ver que, em $eB = 5m_\pi^2$, temos a aparição de mais de um mínimo local, gerando assim mais de uma fase metaestável (consequentemente, mais de uma fase instável, identificada pelos máximos locais). Apesar disso o novo mínimo intermediário, até onde pudemos verificar, nunca chega a tornar-se mínimo global. Contudo, na Ref. [55], os autores, considerando valores específicos de B e de um acoplamento vetorial repulsivo G_V , encontraram uma solução com três mínimos globais degenerados, o que

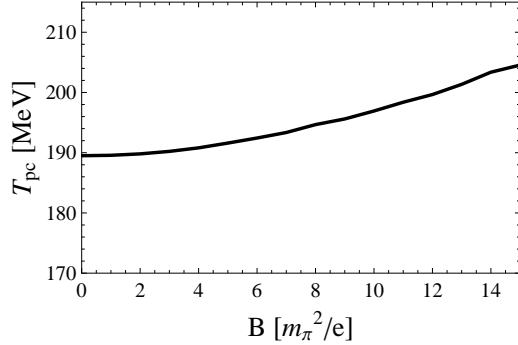


Figura 2.4.: Temperatura pseudo-crítica de crossover, T_{pc} , em função do campo magnético, B . Vemos que T_{pc} aumenta com B , em contradição com resultados da rede.

implica na coexistência mútua de três fases diferentes.

A massa efetiva dos quarks pode ser encontrada da mesma forma que nos casos anteriores, ou seja, localizando o valor de M que minimiza a energia livre. Na figura 2.6 mostramos o comportamento de M em função de μ para os casos $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. Podemos notar claramente a transição de primeira ordem pela descontinuidade do parâmetro de ordem. Além disso, observamos que o valor do potencial químico de coexistência, μ_{coe} , em que ocorre a transição decresce à medida que B cresce. Este efeito ficará mais claro quando olharmos para o diagrama de fases do modelo.

2.4. O Diagrama de Fases

Na seção anterior vimos a restauração da simetria quiral na matéria de quarks em dois casos extremos: i) $T = 0$ e $\mu \neq 0$ e ii) $\mu = 0$ e $T \neq 0$. No eixo da temperatura ($\mu = 0$) encontramos um crossover entre altas e baixas massas enquanto que no eixo do potencial químico ($T = 0$) encontramos uma transição de 1^a ordem, independentemente do valor do campo magnético. Estendendo essa análise para todo o plano $T - \mu$ e fixando um valor para B , obtemos o diagrama de fases do modelo associado ao campo magnético fixado.

O diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$ mantém a mesma estrutura

2. Matéria de Quarks Magnetizada

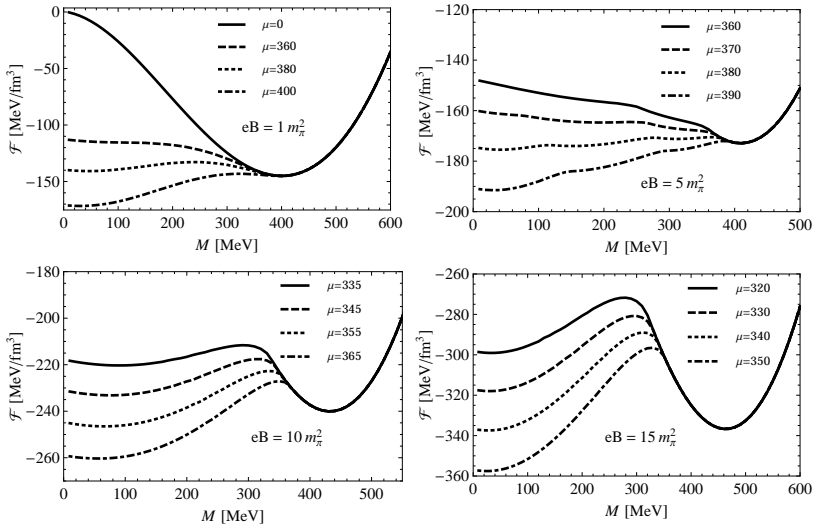


Figura 2.5.: Energia livre em função de M , em $T = 0$ e para diferentes valores de μ (dados em MeV) e de B . Para alguns valores do campo magnético, como o caso $eB = 5m_\pi^2$, temos a aparição de mais de um mínimo local, dando origem a diferentes fases metaestáveis.

do caso $B = 0$, com diferença apenas no valor da temperatura pseudo-crítica, do potencial químico de coexistência (μ_{coe}) e na localização do ponto crítico. A figura 2.7 mostra o diagrama da fases para os casos $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, incluindo também as espinodais. No caso $eB = 6m_\pi^2$ temos que $T_{pc} = 191.6$ MeV, $\mu_{coe} = 370$ MeV e o ponto crítico está localizado em $T_c = 84.9$ MeV e $\mu_c = 314.4$ MeV. Em $eB = 15m_\pi^2$ temos $T_{pc} = 203.7$ MeV, $\mu_{coe} = 339.6$ MeV e o ponto crítico está localizado em $T_c = 115.6$ MeV e $\mu_c = 279.3$ MeV.

Dessa forma, podemos concluir que o campo magnético não altera fundamentalmente o diagrama de fases do modelo, mantendo a estrutura de crossover em altas temperaturas, um ponto crítico em temperaturas intermediárias, e uma transição de primeira ordem em baixas temperaturas e grandes potenciais químicos.

Na figura 2.8 juntamos os diagramas de fase para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$ para fins de comparação. Podemos observar claramente a tendência de aumento da T_{pc} com o aumento de B , principalmente em $\mu = 0$, em acordo com as expectativas

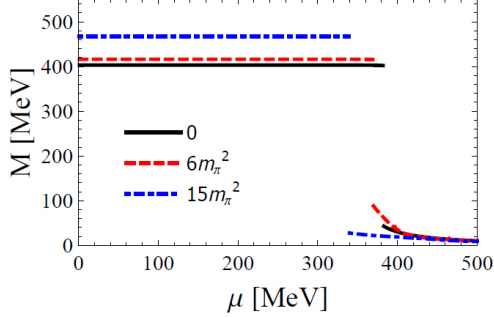


Figura 2.6.: Massa dos quarks em função do potencial químico para diferentes valores do campo magnético em $T = 0$. A linha contínua representa $B = 0$, a tracejada $eB = 6m_\pi^2$ e a ponto-tracejada $eB = 15m_\pi^2$.

do modelo, uma vez que a massa efetiva dos quarks cresce com B , mas em contraste com resultados de rede, conforme explicamos anteriormente.

Ainda no diagrama da figura 2.8 podemos observar que, por volta de $\mu \approx 285$ MeV o valor da T_{pc} em $eB = 6m_\pi^2$ é menor do que em $B = 0$, efeito também observado pelos autores das Refs. [56, 57, 58]. Em outras palavras, as linhas de transição que representam os diferentes valores de B se cruzam em um determinado ponto do diagrama de fases. Além disso, podemos notar que B provoca um aumento na linha de transição de primeira ordem que faz com que o valor da temperatura crítica aumente e o valor do potencial químico crítico diminua. Desse modo, podemos concluir que o campo magnético favorece transições de primeira ordem. Também podemos notar que, em temperaturas baixas, o valor do potencial químico de coexistência diminui com o aumento de B (apesar de voltar a crescer para $eB \gtrsim 16m_\pi^2 \approx \Lambda^2$ [56, 57] mas não consideraremos esses casos neste trabalho), em acordo com o já conhecido efeito da catálise magnética inversa [59, 60]. Este efeito pode ser explicado da seguinte forma: o custo de formação de um par quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ em $T = 0$ e na presença de um campo magnético é proporcional a $B\mu_{coe}^2$, de modo que, quanto maior for o valor de B , menor será o valor de μ_{coe} necessário para formar o par responsável pela quebra da simetria quiral. Isso mais do que compensa o incremento na massa efetiva dos quarks (catálise magnética, que favorece a quebra de simetria), M , e o resultado é que a linha de transição de primeira ordem se desloca para valores menores do

2. Matéria de Quarks Magnetizada

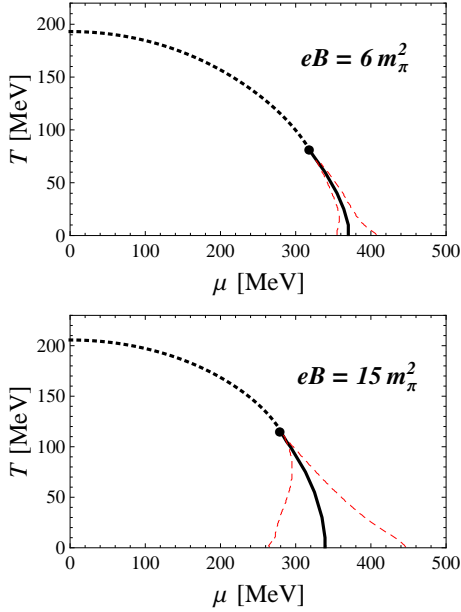


Figura 2.7.: Diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ (quadro de cima) e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). A linha cheia representa a transição de primeira ordem, as linhas tracejadas são as linhas espinodais e a linha pontilhada representa o crossover.

potencial químico (catálise magnética inversa), favorecendo a restauração da simetria quiral.

As linhas espinodais (figura 2.9) apresentam comportamentos distintos para cada valor de B . No caso $eB = 6m_\pi^2$ vemos um estreitamento das linhas em relação ao caso $B = 0$, enquanto que, para $eB = 15m_\pi^2$, temos um considerável alargamento em relação às demais, resultando no aumento da área de metaestabilidade e instabilidade. Este efeito terá consequências importantes no cálculo da tensão superficial na matéria de quarks magnetizada que faremos no capítulo 3.

2.5. Termodinâmica da Matéria de Quarks Magnetizada

Além de permitir o cálculo do diagrama de fases do modelo de Nambu–Jona-Lasinio, a energia livre dada pela Eq. (2.5) pode ser usada para estabelecer uma conexão com

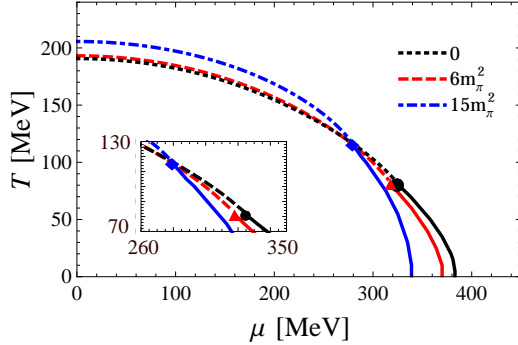


Figura 2.8.: Diagrama de fases para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. As linhas cheias representam a transição de primeira ordem e as linhas tracejadas representam o crossover. Note que, em $\mu = 0$, T_{pc} aumenta com B , ao contrário dos resultados da rede, e que, em $T = 0$, μ_{coe} diminui com B , em acordo com a catálise magnética inversa.

grandezas físicas próprias da termodinâmica de equilíbrio, como pressão, densidade bariônica, densidade de entropia, densidade de energia e susceptibilidades por exemplo (veja a seção do gás livre, no apêndice B, por exemplo). Se considerarmos o gás de quarks interagentes como infinito em extensão (de modo que efeitos de borda possam ser desconsiderados), homogêneo e em equilíbrio térmico, podemos usufruir destas relações para estudar algumas de suas características. O ponto de partida para esta análise é a relação entre a energia livre e a pressão do gás de quarks, dada por

$$P(T, \mu, B) = -\mathcal{F}(T, \mu, B, M) \Big|_{M=\overline{M}}, \quad (2.11)$$

onde \overline{M} minimiza a energia livre, ou seja, é a massa efetiva dos quarks. Desse modo, para calcular a pressão, devemos sempre resolver a equação do gap antes. É conveniente para os nossos propósitos definirmos uma pressão normalizada (ou “subtraída”), que nada mais é do que a diferença entre a pressão em uma dada temperatura, T , e um dado potencial químico, μ , e a pressão de ponto zero (que é apenas uma constante), definida como a pressão em $T = \mu = 0$,

$$P_N(T, \mu, B) = P(T, \mu, B) - P(0, 0, B), \quad (2.12)$$

2. Matéria de Quarks Magnetizada

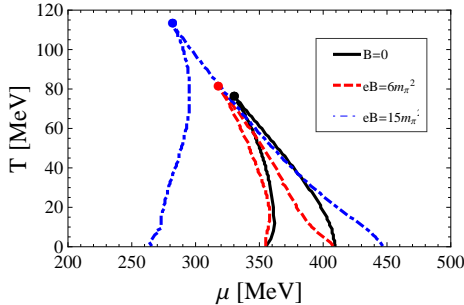


Figura 2.9.: Linhas espinodais para $B = 0$ (linha sólida), $eB = 6m_\pi^2$ (linha tracejada) e $eB = 15m_\pi^2$ (linha traço-ponto).

de modo que $P_N(0,0,B) = 0$. De agora em diante, sempre que nos referirmos à pressão, teremos em mente a pressão normalizada, de modo que omitiremos o subíndice N para não carregar a notação⁵.

A figura 2.10 mostra a pressão (dividida por T^4) como função de T em $\mu = 0$ para os valores de campo magnético estudados anteriormente, $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, para fins de comparação (a legenda da figura indica o valor de eB). Observe que a pressão é zero para baixas temperaturas (devido à normalização), cresce rapidamente em temperaturas intermediárias e satura em altas temperaturas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann⁶. Podemos notar que o campo magnético tem pouca influência nessa grandeza, ou seja, as curvas com $B \neq 0$ apresentam o mesmo comportamento da curva $B = 0$, convergindo para o limite de Stefan-Boltzmann (que é virtualmente o mesmo nos três casos considerados) em altas temperaturas.

Notamos ainda na figura 2.10 que as curvas representando os diferentes valores de B se cruzam em uma determinada temperatura (próxima a 250 MeV). Este tipo de comportamento também foi observado no diagrama de fases do modelo em função do aumento da temperatura pseudo-crítica de crossover com B (em $\mu = 0$), uma característica falha do modelo, conforme discutimos na seção anterior. Podemos especular se o cruzamento das curvas na figura 2.10 deixaria de ocorrer caso a técnica

⁵Note que, de acordo com a nossa escolha de normalização, a pressão de ponto zero depende do campo magnético, ou seja, a cada valor de B temos uma pressão de ponto zero diferente.

⁶O limite de Stefan-Boltzmann é atingido porque a integral térmica da equação (2.8) é calculada de 0 até ∞ , e não somente até Λ .

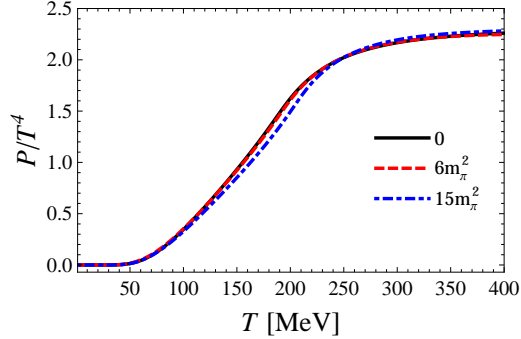


Figura 2.10.: Pressão em função da temperatura para $\mu = 0$ e diferentes valores do campo magnético. A razão P/T^4 cresce rapidamente mas satura em altas temperaturas (limite de Stefan-Boltzmann).

proposta na Ref. [53] para corrigir o crescimento de T_{pc} com B fosse empregada no cálculo da pressão. Entretanto, não chegamos a analisar essa questão neste trabalho.

As demais grandezas termodinâmicas podem ser obtidas diretamente através de derivadas da pressão com relação aos parâmetros externos, ou seja, temperatura, potencial químico e campo magnético. As densidades de entropia, de bárions e de energia são dadas, respectivamente, por

$$s(T, \mu, B) = \left. \frac{\partial P(T, \mu, B)}{\partial T} \right|_{\mu, B}, \quad (2.13)$$

$$\rho_B(T, \mu, B) = \left. \frac{\partial P(T, \mu, B)}{3\partial\mu} \right|_{T, B} = \frac{\rho(T, \mu, B)}{3}, \quad (2.14)$$

e

$$\epsilon(T, \mu, B) = -P(T, \mu, B) + \mu\rho(T, \mu, B) + Ts(T, \mu, B). \quad (2.15)$$

onde $\rho(T, \mu, B)$ é a densidade do número de quarks⁷. É importante notar que a densidade bariônica, ρ_B , está relacionada à diferença entre bárions e antibárions.

⁷Como cada bárion é composto por três quarks, a densidade do número de quarks é três vezes maior que a densidade bariônica.

2. Matéria de Quarks Magnetizada

Na figura 2.11 temos o gráfico da densidade de entropia em função de T em $\mu = 0$. Podemos notar que a entropia é praticamente zero para baixas temperaturas, cresce em temperaturas intermediárias e satura em altas temperaturas. Comparando os diferentes valores de B , vemos uma leve acentuação do valor máximo de s/T^3 para $eB = 15m_\pi^2$ mas, de modo geral, podemos notar que há pouca diferença entre as curvas. Tanto este comportamento quanto o da pressão na figura 2.10 ocorrem porque os efeitos do campo magnético são mais expressivos em baixas temperaturas e altos potenciais químicos, uma vez que, em altas temperaturas, o número de níveis de Landau preenchidos torna-se muito grande, atenuando assim os efeitos provenientes da quantização dos níveis. O mesmo padrão das figuras 2.10 e 2.11 se repete na figura 2.12, onde temos a densidade de energia, ϵ , em função de T .

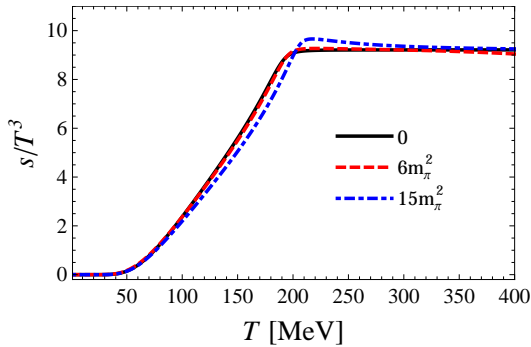


Figura 2.11.: Densidade de entropia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

Densidade Bariônica

Uma das grandezas termodinâmicas mais importantes para este trabalho é a densidade bariônica definida pela Eq. (2.14). Na figura 2.13 mostramos gráficos da densidade bariônica (dividida pela densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$) em função de μ para diferentes valores de T e campo magnético nulo. Podemos ver que, para T pequeno, a densidade é zero até que, em um determinado potencial químico de coexistência (para o qual coexistem as fases simétrica e não-simétrica), μ_{coe} , ela salta para um valor finito, evidenciando o comportamento típico de uma transição

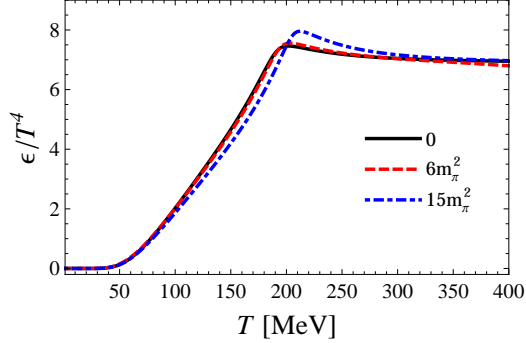


Figura 2.12.: Densidade de energia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

de primeira ordem. Nesta configuração o sistema é formado por duas fases com densidades distintas coexistindo mutuamente, de modo que os pontos em destaque na figura 2.13 indicam os dois valores possíveis para ρ_B em $\mu = \mu_{coe}$: ρ^L , representando o menor valor (fase de simetria quebrada), e ρ^H , representando o maior valor (fase de simetria restaurada). No caso de temperaturas maiores que T_c esse comportamento de transição de primeira ordem dá lugar a um crossover e o sistema não passa mais por uma configuração de coexistência de fases distintas.

Para valores de B diferentes de zero temos um comportamento curioso para a densidade bariônica. A transição continua sendo de primeira ordem em baixas temperaturas, de modo que ainda temos duas fases coexistindo em μ_{coe} . Entretanto, na presença de campo magnético, apesar de ρ^L continuar sendo nulo em $T = 0$, ρ^H apresenta um comportamento oscilatório em torno do seu valor em $B = 0$, como pode ser visto na figura 2.14. Para $eB = 6m_\pi^2$, ρ^H é menor do que em $B = 0$ enquanto que, em $eB = 15m_\pi^2$, ρ^H é maior do que para os outros valores de B .

O decréscimo em ρ_H para $eB = 6m_\pi^2$ em baixas temperaturas pode ser explicado em termos do preenchimento dos níveis de Landau, que ocorre de modo diferente em diferentes valores de B . Para entender melhor esse comportamento, vamos escrever a densidade bariônica no limite em que $T \rightarrow 0$, seguindo a Ref. [48],

$$\rho_B(\mu, B) = \theta(k_F^2) \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k \frac{|q_f| B N_c}{6\pi^2} k_F, \quad (2.16)$$

2. Matéria de Quarks Magnetizada

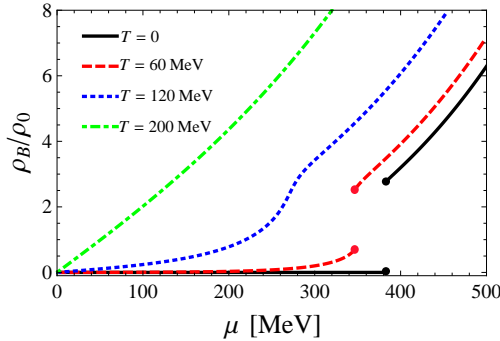


Figura 2.13.: Densidade Bariônica (em termos de ρ_0) em função de μ para diferentes valores de T e campo magnético nulo. Em temperaturas baixas, onde a transição é de primeira ordem, temos uma descontinuidade de ρ_B . Já em temperaturas altas, onde ocorre o crossover, ρ_B é contínuo.

onde $k_F = \sqrt{\mu^2 - 2|q_f|kB - M^2}$, θ é a função degrau de Heaviside e

$$k_{max} = \frac{\mu^2 - M^2}{2|q_f|B} \quad (2.17)$$

é o último nível de Landau a ser preenchido. Como k_{max} deve ser um número inteiro, o lado direito da equação acima é arredondado para o inteiro mais baixo.

Na transição de primeira ordem, a equação (2.16) fornece dois valores para ρ_B , dependendo do valor da massa efetiva, M , usado (lembramos que na transição de primeira ordem existem dois valores possíveis para M : M^L para a fase restaurada e M^H para a fase de simetria quebrada, sendo $M^H > M^L$; veja a figura 2.5). Para $M = M^H$ obtemos $\rho_B = \rho_B^L = 0$. Portanto, para entender as oscilações, vamos nos concentrar em ρ_B^H e M^L , grandezas cujo comportamento é mostrado na figura 2.15, onde é possível ver claramente que ambas possuem um comportamento oscilatório oposto. A origem destas oscilações está no fato de que k_{max} diminui com o aumento do campo magnético. O primeiro e segundo picos de M^L (e os correspondentes vales de ρ_B^H) dizem respeito à troca de $k_{max} = 1$ para $k_{max} = 0$ para os quarks *up* e *down*, respectivamente. Conforme havíamos visto, o valor de μ_{coe} diminui com B em temperaturas próximas de zero (figura 2.7), de modo que, em geral, k_{max} e M precisam variar e, quando k_{max} diminui, M aumenta. Segue da equação (2.16) que

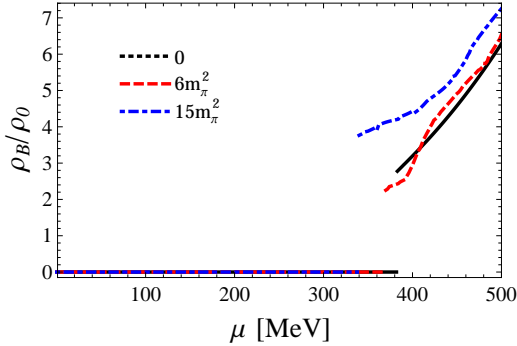


Figura 2.14.: Densidade bariônica (em termos de ρ_0) em função de μ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

ρ_B precisa diminuir. Quando $k_{max} = 0$ para ambos os sabores de quarks, não há mais mudanças no preenchimento dos níveis de Landau e as oscilações desaparecem para $eB \gtrsim 9.5m_\pi^2$. O leitor interessado pode encontrar mais discussões sobre oscilações associadas com este tipo de modelo na Ref. [61].

2.6. O Diagrama de Coexistência de Fases

Com a densidade bariônica dada pela Eq. (2.14) podemos estudar o diagrama de coexistência de fases no plano $T - \rho_B$, que é fisicamente mais intuitivo, para temperaturas abaixo da temperatura crítica. Nesse diagrama, as linhas de transição de primeira ordem do diagrama de fases, figura 2.8, são mapeadas no plano $T - \rho_B$, o que facilita a visualização da região de coexistência de fases para diferentes valores do campo magnético, figura 2.16. Como temos duas fases para cada valor de B , temos também duas densidades distintas coexistindo para o mesmo valor da temperatura, potencial químico e pressão, a saber, ρ^L e ρ^H , conforme vimos na seção anterior. Isso significa que, exatamente sobre as linhas da figura 2.16, as duas fases do sistema são estáveis. O ponto crítico no topo de cada curva na figura 2.16 é o mesmo do diagrama de fases da seção anterior e une as duas curvas de densidades para um mesmo campo magnético. A localização destes pontos no diagrama da figura 2.16 é ($T = 81.8 \text{ MeV}$, $\rho_B = 1.99 \rho_0$) para $B = 0$, ($T = 84.9 \text{ MeV}$, $\rho_B = 2.23 \rho_0$) para

2. Matéria de Quarks Magnetizada

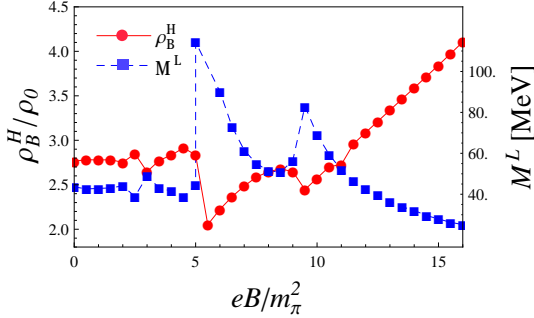


Figura 2.15.: Massa efetiva (representada pelos quadrados, com valores no eixo da direita) no valor mais baixo durante a transição, M^L , e o valor mais alto da densidade bariônica na coexistência de fases (pontos, eixo da esquerda) em função de eB/m_π^2 .

$eB = 6m_\pi^2$ e ($T = 115.8 \text{ MeV}$, $\rho_B = 3.24\rho_0$) para $eB = 15m_\pi^2$. A área interior das curvas representa o caso em que uma das fases é estável e a outra é metaestável ou instável, isto é, as três fases possíveis do sistema existem, mas apenas uma delas é estável. Na região exterior as curvas, o sistema é formado por apenas uma das fases possíveis.

Ao analisarmos a figura 2.16 vemos que o campo magnético causa uma deformação na forma da região de coexistência, principalmente em baixas temperaturas. As oscilações de ρ_B em baixas temperaturas foram explicadas em termos do preenchimento dos níveis de Landau na seção anterior. Um detalhe importante é que, para $B \neq 0$, nossos resultados sugerem que a densidade mais alta é atingida em temperaturas próximas de T_c , ao contrário do que acontece no caso $B = 0$, onde isso ocorre em $T = 0$. Além disso, o ponto crítico desloca-se para densidades mais altas com o aumento de B , ao contrário do que ocorre no diagrama da fases convencional, onde o ponto crítico desloca-se para valores menores do potencial químico (catálise magnética inversa, figura 2.7).

Neste capítulo nos concentramos em calcular a energia livre de Landau na aproximação de campo médio considerando a influência de um campo magnético externo. Estudamos as principais características do modelo, incluindo os efeitos de B sobre o diagrama de fases. Tratamentos além de campo médio podem ser obtidos por meio

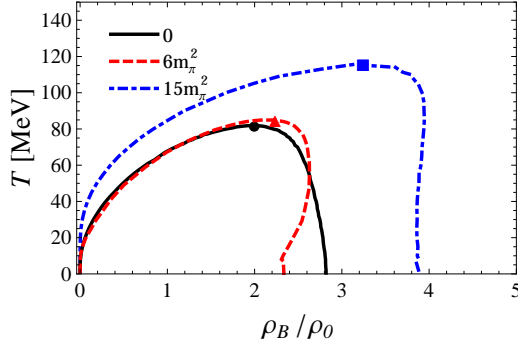


Figura 2.16.: Diagrama de coexistência de fases para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). Os símbolos no topo de cada curva indicam o ponto crítico. Para a mesma temperatura, duas densidades distintas representando as duas fases da matéria (simetria quiral quebrada e restaurada) coexistem. A densidade bariônica está em unidades de densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$.

do método de teoria de perturbação otimizada [62]. A termodinâmica do modelo de Nambu–Jona-Lasinio vai muito além da análise feita neste capítulo e grandezas como a susceptibilidade do número de quarks, curvas isentrópicas, entre outras, podem ser calculadas de modo relativamente fácil uma vez conhecida a pressão [45, 44]. Contudo, as grandezas discutidas neste capítulo constituem uma base para o estudo da termodinâmica do modelo e são suficientes para uma melhor compreensão dos resultados apresentados nos próximos capítulos da tese. Note também que o termo vetorial da interação,

$$-G_V(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2,$$

não foi incluído nos nossos cálculos por enquanto. Se repulsivo, este termo tende, de modo geral, a reduzir a linha de transição de primeira ordem. Uma revisão detalhada pode ser encontrada na Ref. [63] e resultados interessantes envolvendo tanto este termo repulsivo quanto efeitos de campo magnético estão disponíveis na Ref. [64]. Entretanto, para os nossos propósitos, não será necessário trabalharmos com o acoplamento vetorial junto ao campo magnético. Na segunda parte desta tese, onde calcularemos a correlação partícula-antipartícula, este tipo de interação será

2. *Matéria de Quarks Magnetizada*

considerada.

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

A tensão superficial, ou energia de superfície, é uma grandeza física responsável pela explicação de diversos fenômenos físico-químicos. A grosso modo, é um efeito que ocorre na interface entre duas substâncias em contato. Ela faz com que a camada superficial de um líquido venha a se comportar como uma membrana elástica devido às forças de coesão entre moléculas semelhantes, cuja resultante vetorial é diferente na interface [65]. As moléculas situadas no interior de um líquido são atraídas em todas as direções pelas moléculas vizinhas, mas as moléculas situadas na superfície ou na fronteira do líquido sofrem apenas atrações laterais e internas. Este desbalanço entre as forças de atração no líquido faz com que a interface se comporte como uma película elástica [65]. A tensão superficial também é responsável pelo efeito de capilaridade¹, formação de bolhas e gotas, e imiscibilidade de líquidos polares e apolares.

A diferença de pressão entre os dois lados de uma interface separando duas substâncias está relacionada com a tensão superficial por meio da equação de Young-Laplace,

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.1)$$

onde γ é a tensão superficial e R_1 e R_2 são os raios de curvatura da interface. A equação de Young-Laplace possui diversas aplicações em físico-química como, por exemplo, o cálculo da pressão capilar. Uma boa introdução para este assunto pode ser encontrado nas Refs. [66, 67].

A tensão superficial também é uma grandeza dependente da temperatura. Desse modo, sempre que calcularmos γ , devemos explicitar a temperatura em que foi calculado. Usaremos a notação γ_T para a tensão superficial na temperatura T , de modo que γ_0 é a tensão superficial em temperatura nula. De modo geral, a tensão superficial decresce com a temperatura, atingindo o valor zero na temperatura crítica, como no

¹Propriedade que os fluidos possuem de subirem ou descerem tubos extremamente finos, dependendo da coesão do líquido e da adesão com a superfície do tubo.

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

caso da tensão superficial entre as fases líquida e gasosa da água mostrado na figura 3.1.

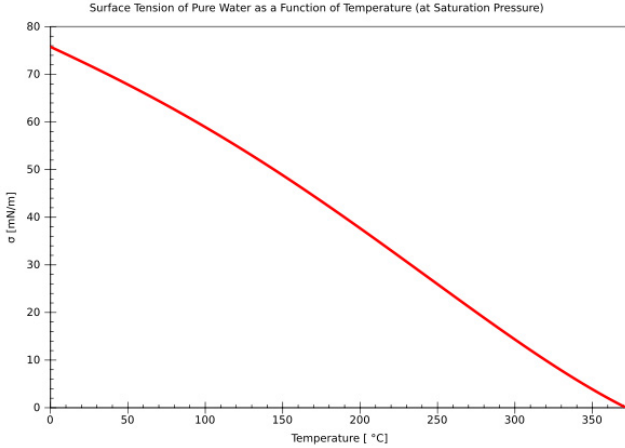


Figura 3.1.: Tensão superficial da água como função da temperatura (na pressão de saturação). Retirado da Ref. [66].

A transição de primeira ordem da matéria hadrônica para a matéria de quarks em baixas temperaturas tem implicações importantes para o entendimento de estrelas compactas, especialmente para a possível existência de estrelas de quarks e estrelas híbridas com fase mista, como vimos na seção 1.7, além de ter um papel relevante para a dinâmica de conversão de fases, bem como nas escalas de tempo envolvidas [33, 34, 68, 69, 70]. A coexistência entre as duas fases abre as portas para o estudo de diversas propriedades, características e comportamentos já conhecidos da físico-química. Um dos objetivos do nosso trabalho é calcular a tensão superficial na matéria de quarks sob influência de um campo magnético para tentar responder a questão sobre a possível existência de fase mista entre quarks e hádrons em magnetares. Lembramos que, conforme mostrado na Ref. [32], um valor da tensão superficial superior a $40 \text{ MeV}/\text{fm}^2$ inibiria a formação de fase mista em estrelas compactas. Para calcular a tensão superficial na matéria de quarks usaremos um método relativamente simples descrito na próxima seção.

3.1. O Método Geométrico

Para calcular a tensão superficial na matéria de quarks sob influência de um campo magnético externo, vamos usar o método geométrico apresentado por Randrup na Ref. [71], mas que tem origem em 1958 com Cahn e Hilliard [72]. O método já foi aplicado no modelo NJL sem campo magnético na Ref. [40]. Vimos no capítulo anterior que, na transição de primeira ordem, duas fases diferentes podem coexistir sob as mesmas condições de temperatura T , potencial químico μ e pressão P . Estas fases diferem em outras quantidades relevantes como densidade de energia, ϵ , densidade líquida de quarks, ρ , e densidade de entropia, s . Sob essas circunstâncias, estas fases, ao entrarem em contato entre si, desenvolvem uma interface mecanicamente estável e uma tensão superficial, γ_T , pode ser associada à interface.

À medida que T cresce de zero até T_c , as fases caracterizadas pelas densidades ρ^L e ρ^H determinam o diagrama de coexistência de fases que vimos no capítulo anterior, figura 2.16. Qualquer ponto (ρ, T) no exterior do contorno do diagrama corresponde a um estado uniforme e termodinamicamente estável da matéria, enquanto pontos no interior representam um estado instável que prefere se separar em duas fases termodinamicamente estáveis separadas por uma interface mecanicamente estável. Esta configuração de duas fases encontra-se em equilíbrio termodinâmico global, isto é, os valores de T , μ e P se mantêm inalterados quando nos movemos de uma das fases para a outra passando pela interface entre elas à medida que ρ varia de ρ^L até ρ^H .

Neste método, é conveniente trabalharmos no formalismo canônico, cujas variáveis controladas são a temperatura e a densidade, de modo que a densidade de energia livre é uma função da densidade de quarks, ρ , para cada valor de T , $f_T(\rho)$. O potencial químico e a densidade de entropia são obtidos através das relações

$$\mu_T(\rho) = \partial_\rho f_T(\rho), \quad (3.2)$$

e

$$s_T(\rho) = -\partial_T f_T(\rho). \quad (3.3)$$

Desse modo, a pressão e a densidade de energia assumem, respectivamente, as formas

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

$$P_T(\rho) = \rho \partial_\rho f_T(\rho) - f_T(\rho), \quad (3.4)$$

e

$$\mathcal{E}_T(\rho) = f_T(\rho) - T \partial_T f_T(\rho). \quad (3.5)$$

Em sistemas com uma única fase $f_T(\rho)$ é uma função convexa, isto é, sua derivada segunda $\partial_\rho^2 f_T(\rho)$ é positiva, enquanto que, em sistemas com coexistência de fases, $f_T(\rho)$ apresenta concavidade. Isso pode ser entendido levando-se em conta que, quando $f_T(\rho)$ apresenta uma anomalia côncava local, existe um par de densidades, ρ^L e ρ^H , que possuem a mesma tangente (mesma derivada), de modo que os potenciais químicos são iguais, $\mu_T(\rho^L) = \partial_\rho f_T(\rho^L) = \partial_\rho f_T(\rho^H) = \mu_T(\rho^H)$. Além disso, as duas pressões também devem ser iguais, $P_T(\rho^L) = \rho^L \partial_\rho f_T(\rho^L) - f_T(\rho^L) = \rho^H \partial_\rho f_T(\rho^H) - f_T(\rho^H) = P_T(\rho^H)$. Desse modo, garantimos que a matéria uniforme com densidade ρ^L tem a mesma temperatura, potencial químico e pressão que a matéria com densidade ρ^H , como já esperávamos das discussões anteriores.

A reta tangente comum entre os dois pontos de coexistência corresponde à construção de Maxwell, $f_T^M(\rho)$. Tanto $f_T(\rho)$ quanto $f_T^M(\rho)$ coincidem nas duas densidades de coexistência, mas diferem para valores intermediários, com $f_T(\rho)$ excedendo $f_T^M(\rho)$. Portanto, temos $\Delta f_T(\rho) \equiv f_T(\rho) - f_T^M(\rho) \geq 0$ para $\rho^L \leq \rho \leq \rho^H$.

Vamos considerar agora uma configuração $T < T_c$ em que as duas fases coexistentes são postas em contato físico através de uma interface plana. A densidade líquida agora pode ser escrita como $\rho_T(z)$ onde z é a direção normal à interface. Na região da interface, a densidade de energia livre local, $f_T(z)$, difere do valor que teria caso o sistema fosse um sistema de Maxwell, isto é, uma mistura das duas fases coexistentes ajustada para fornecer uma densidade média igual a $\rho(z)$ [40]. Essa diferença local é dada por

$$\delta f_T(z) = f_T(z) - f_i - \frac{f_T(\rho^H) - f_T(\rho^L)}{\rho^H - \rho^L} (\rho_T(z) - \rho_i), \quad (3.6)$$

onde ρ_i é uma entre as duas densidades de coexistência. A função $\delta f_T(z)$ é suave e tende rapidamente para zero ao se afastar da interface, onde $\rho_T(z)$ rapidamente se aproxima de ρ_i e $f_T(z)$ rapidamente se aproxima de $f_T(\rho_i)$. A tensão na interface,

ou tensão superficial, γ_T , é o “déficit” total na energia livre por unidade de área na interface,

$$\gamma_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f_T(z) dz . \quad (3.7)$$

Conforme discutido na Ref. [71], a tensão associada à interface entre as duas fases pode ser expressa em termos da equação de estado para a matéria uniforme (embora instável),

$$\gamma_T = a \int_{\rho^L(T)}^{\rho^H(T)} [2\mathcal{E}^g \Delta f_T(\rho)]^{1/2} \frac{d\rho}{\rho^g} , \quad (3.8)$$

onde ρ^g é um valor característico da densidade e \mathcal{E}^g é um valor característico da densidade de energia, enquanto o parâmetro a representa um alcance de interação efetiva relacionado com a intensidade do gradiente $C = a^2 \mathcal{E}^g / (\rho^g)^2$. Tomamos o ponto característico que define os valores característicos como estando no meio da região de coexistência,

$$\rho^g = \rho_c , \quad (3.9)$$

e

$$\mathcal{E}^g = [\mathcal{E}_0(\rho_c) + \mathcal{E}_c]/2 , \quad (3.10)$$

onde $\mathcal{E}_0(\rho_c)$ é a densidade de energia em $(\rho_c, T = 0)$ e \mathcal{E}_c é a densidade de energia no ponto crítico (ρ_c, T_c) .

O comprimento a é um parâmetro ajustável que está relacionado com a largura da interface e com a magnitude da tensão [71]. Na Ref. [40] temos $a \approx 1/m_\sigma \approx 0.33$ fm, que é aproximadamente o valor encontrado na aproximação de Thomas-Fermi para o modelo NJL [73]. Desse modo, vamos adotar o valor $a = 0.33$ fm nos nossos cálculos. Fixamos assim todos os nossos parâmetros em acordo com a Ref. [40], de modo que a tensão superficial pode ser calculada se a densidade de energia livre $f_T(\rho)$ for conhecida nas fases instáveis do sistema, $\rho^L(T) \leq \rho \leq \rho^H(T)$.

3.2. Instabilidades na Matéria de Quarks

Vimos no capítulo 2 que a solução da equação do gap fornece a massa efetiva dos quarks, que pode variar desde um valor alto (onde a simetria quiral está quebrada) até um valor próximo de zero (onde a simetria quiral está aproximadamente restaurada). Na presença de um campo magnético externo esta equação assume a forma

$$\begin{aligned}
 M &= m + \frac{N_c N_f M G}{\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right] \right\} \\
 &+ \frac{N_c M G}{\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f| B \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right\} \\
 &- \frac{N_c M G}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |q_f| B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E_{p,k}(B)} \left\{ \frac{1}{e^{[E_{p,k}(B)+\mu]/T} + 1} + \frac{1}{e^{[E_{p,k}(B)-\mu]/T} + 1} \right\} 1)
 \end{aligned}$$

Encontrar a solução da equação (3.11) equivale a encontrar o mínimo do potencial efetivo, Eq. (2.5). Entretanto, para alguns valores de B , μ e T , a solução não é única, o que significa que o potencial efetivo possui mais de um mínimo e, conseqüentemente, um máximo local. O mínimo global é a solução estável, o estado fundamental da matéria de quarks, enquanto o mínimo local é uma solução metaestável. O máximo local entre os dois mínimos é uma solução instável, mas ainda assim deve ser considerada como um estado possível para o sistema. São as soluções metaestáveis e instáveis da Eq. (3.11) as responsáveis pelas variações da densidade de energia livre local, $f_T(z)$, fazendo com que o sistema não seja um sistema de Maxwell, conforme discutimos na seção anterior. A figura 3.2 mostra um exemplo de um potencial efetivo com uma solução estável, metaestável e instável.

Na figura 3.3 mostramos as soluções da equação do gap, Eq. (3.11), em temperatura zero para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. As soluções da equação do gap são usadas para obter a pressão e as demais quantidades termodinâmicas, conforme vimos no capítulo anterior. A linha cheia representa as soluções estáveis, isto é, o mínimo global do potencial efetivo, e determinam a linha de Maxwell (ou construção de Maxwell) que conecta a massa efetiva alta, M^H , com a massa efetiva baixa, M^L , no potencial químico de coexistência, onde a transição de primeira ordem acontece. Com estas duas soluções estáveis e utilizando a construção de Maxwell podemos obter f_T^M . A linha tracejada representa as soluções metaestáveis e instáveis. Considerando

todas as soluções da equação do gap podemos obter $f_T(\rho)$ e a diferença $\Delta f_T(\rho) = f_T(\rho) - f_T^M(\rho)$ que é o termo principal no cálculo de tensão superficial.

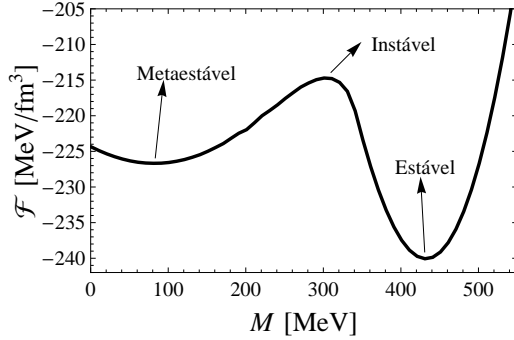


Figura 3.2.: As soluções da equação do gap representadas diretamente no potencial efetivo. O mínimo global é a solução estável, enquanto o mínimo local é a solução metaestável. O máximo local entre os dois mínimos é a solução instável.

Como $f_T(\rho) = \rho\mu(\rho) - P_T(\rho)$, é interessante analisarmos o comportamento tanto do potencial químico quanto da pressão como funções da densidade. A figura 3.4 mostra os resultados para $\mu(\rho)$ em $T = 0$ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do meio), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). Da mesma forma que antes, a linha contínua representa as soluções estáveis, enquanto a linha tracejada, as soluções metaestáveis e instáveis. Os resultados para $P_0(\rho)$ nas mesmas condições descritas acima são mostrados² na figura 3.5. Podemos notar que a pressão é zero em $\rho = 0$, negativa nas soluções instáveis e metaestáveis, novamente zero na densidade onde ocorre a transição de primeira ordem e, finalmente, positiva para valores maiores de ρ . A construção de Maxwell é a reta que une os dois pontos onde a pressão é nula.

3.3. Cálculo da Tensão Superficial

Uma vez obtidos $\mu(\rho)$ e $P_T(\rho)$, calcular a tensão superficial na interface hádron/quark torna-se uma simples questão numérica de resolver a Eq. (3.8). Vamos nos concentrar inicialmente no caso de temperatura zero, onde temos $\Delta f_0(\rho) = f_0(\rho) - f_0^M(\rho)$. Na

²Por uma questão de estética preferimos plotar P em função de ρ_B/ρ_0 , mas lembramos que a relação entre as densidades de quarks e bariônica é $\rho = 3\rho_B$.

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

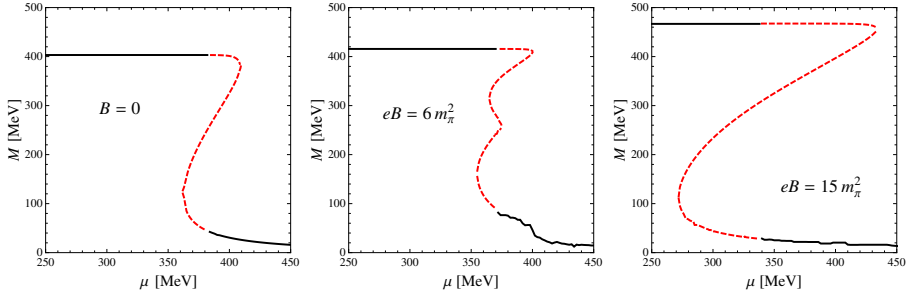


Figura 3.3.: Massa efetiva dos quarks em $T = 0$ como função de μ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis.

figura 3.6 mostramos um gráfico da densidade de energia livre³, $f_0(\rho)$, em função de ρ_B/ρ_0 para $B = 0$, onde podemos observar a linha contínua (em preto) representando a construção de Maxwell, $f_0^M(\rho)$, que une os valores de $f_0(\rho)$ para as duas fases estáveis, enquanto a linha pontilhada (em vermelho) representa os valores de f_0 para as soluções metaestáveis e instáveis. A quantidade $\Delta f_0(\rho)$ é simplesmente a área entre as curvas.

A figura 3.7 mostra $\Delta f_0(\rho)$ para os casos $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, onde podemos observar que a variação é maior para o caso $eB = 15m_\pi^2$ e menor para o caso $eB = 6m_\pi^2$. Este comportamento reflete o alargamento/estreitamento das linhas espinodais, figura 2.9, que também pode ser observado na amplitude das instabilidades nas figuras 3.4 e 3.5. Outro aspecto que observamos é o comportamento oscilatório em torno de $B = 0$, o que já poderíamos esperar pela discussão referente a figura 2.15.

Para calcular a tensão superficial γ_0 para cada valor do campo magnético, precisamos, além de conhecer $\Delta f_0(\rho)$, calcular \mathcal{E}^g e ρ^g , dados pelas equações (3.9) e (3.10). A figura 3.8 mostra o valor de γ_0 em função de eB com variações de $0.5m_\pi^2$. Podemos observar que a tensão superficial oscila em torno do seu valor em $B = 0$ para $0 < eB \lesssim 4m_\pi^2$ antes de diminuir cerca de 30%, para $4m_\pi^2 \lesssim eB \lesssim 8m_\pi^2$, atingindo um mínimo em $eB \approx 5.5m_\pi^2$. Após atingir o mínimo, γ_0 volta a crescer, passando

³Em temperatura zero f_0 é igual a densidade de energia usual ϵ .

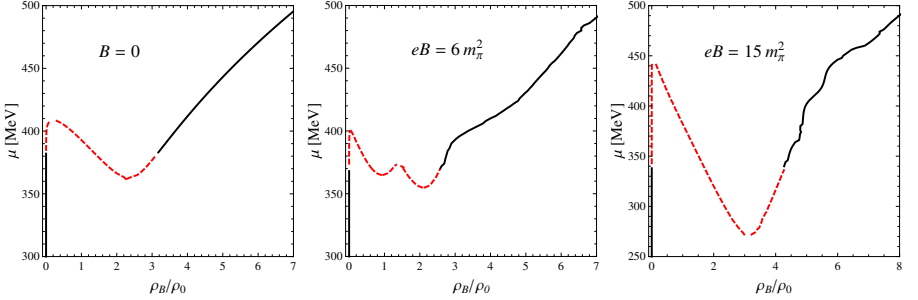


Figura 3.4.: Potencial químico como função de ρ_B/ρ_0 em $T = 0$ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis.

novamente pelo seu valor inicial ($B = 0$) em $eB \approx 9m_\pi^2$. Para valores maiores de eB apenas o nível mais baixo de Landau está preenchido, de modo que não há mais oscilações em função da troca de níveis e γ_0 cresce continuamente com B . Podemos explicar este comportamento lembrando que a tensão superficial, dada pela equação 3.8, é proporcional a área determinada por $\Delta f_0(\rho)$, conforme vimos na figura 3.7. Como esta área depende do limite superior (ρ^H) da integral para γ_T , o padrão observado na figura 3.8 pode ser melhor entendido ao compararmos as figuras 3.8 e 2.15, que mostra o comportamento de ρ^H como função de eB . Tanto γ_0 quanto ρ^H se comportam aproximadamente da mesma forma, embora não exatamente iguais devido à dependência de γ_T com outras variáveis como ρ^g e \mathcal{E}^g . A área sombreada na figura 3.8 delimita a região onde $\gamma_0 < 40 \text{ MeV/fm}^2$ e que, portanto, permitiria a formação de fase mista em estrelas compactas, representado pelo quadro da esquerda na figura 3.9, conforme discutimos no primeiro capítulo [32]. A região não sombreada demarcada com o número “2” na figura 3.8 representa os valores de $\gamma_0 > 40 \text{ MeV/fm}^2$, para os quais não ocorreria a formação da fase mista (lado direito da figura 3.9). Podemos observar que, para $eB \approx 10m_\pi^2 \sim 3 \times 10^{19} \text{ G}$, o valor da tensão superficial favorece a formação de fase mista.

A tabela 3.1 resume todos os nossos resultados para γ_0 em $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, e também lista os valores de algumas grandezas importantes para a obtenção de γ_0 , como \mathcal{E}^g e ρ^g , além da localização do ponto crítico (T_c, μ_c). Mostramos também

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

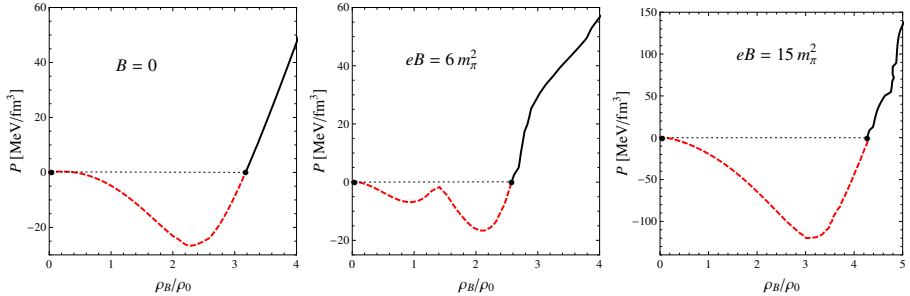


Figura 3.5.: Pressão como função de ρ_B/ρ_0 em $T = 0$ para $B = 0$ (quadro da esquerda), $eB = 6m_\pi^2$ (quadro do centro), e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro da direita). A linha cheia indica as soluções estáveis da equação do gap e a linha tracejada indica as soluções metaestáveis e instáveis. A linha pontilhada unindo os dois pontos em destaque representa a construção de Maxwell.

que os valores da massa efetiva em $T = 0$ e $\mu = 0$ crescem com B , em acordo com o efeito da catálise magnética.

eB	γ_0	M	T_c	μ_c	ρ_B^H/ρ_0	ρ_B^g/ρ_0	\mathcal{E}^g
0	30.38	403	81.1	324.7	2.73	2.03	495
6	18.63	416	84.9	314.4	2.2	2.17	476
15	73.68	467	115.8	279.0	3.8	3.17	705

Tabela 3.1.: Resumo dos inputs e resultados em $T = 0$ para diferentes valores de eB (em unidades de m_π^2). O parâmetro a é dado por $a = 0.33$ fm. A densidade de energia característica \mathcal{E}^g é dada em MeV/fm^3 , e os valores críticos, μ_c e T_c , são dados em MeV. A massa efetiva dos quarks, M (em $\mu = T = 0$), também é dada em MeV, enquanto a tensão superficial em temperatura zero, γ_0 , é dada em MeV/fm^2 . Em todos os casos $\rho_B^L = 0$ e $\rho_0 = 0.17/\text{fm}^3$.

Vamos agora investigar os efeitos de temperatura finita sobre a tensão superficial. Podemos esperar que o valor de γ decresça com o aumento de T , uma vez que tanto as densidades de coexistência quanto as densidades de energia livre se aproximam

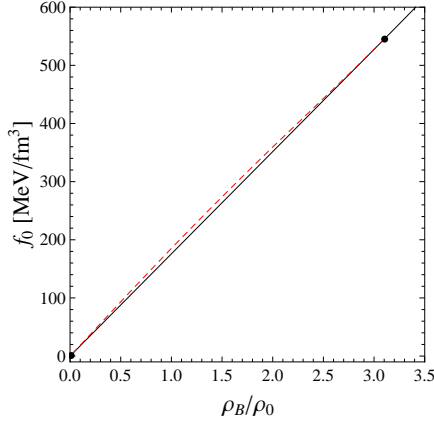


Figura 3.6.: Energia livre $f_0(\rho)$ como função de ρ_B/ρ_0 para $B = 0$. A linha contínua unindo os dois pontos é a construção de Maxwell, enquanto a linha pontilhada representa os valores de $f_0(\rho)$ para as soluções metaestáveis e instáveis.

para temperaturas maiores, até que elas coincidem em $T = T_c$, e a tensão superficial se anula. Este comportamento foi observado nos nossos cálculos e está respresentado no gráfico γ_T por T da figura 3.10. A dependência térmica da tensão superficial pode ser relevante para a possível formação de gotas de quarks na matéria hadrônica fria encontrada em estrelas protoneutron “quentes”, com temperaturas da ordem de 10 – 20 MeV [33, 74, 75, 76]. A dependência térmica da tensão superficial também é importante no contexto de colisões de íons pesados, à medida que a matéria fortemente interagente passa pela fase de coexistência e pelas instabilidades associadas à transição [71].

Os resultados apresentados neste capítulo constituíram a primeira etapa do projeto de doutorado. Concluímos que a tensão superficial na matéria de quarks oscila com o campo magnético, chegando a reduzir significativamente o seu valor em $eB = 5.5m_\pi^2$, mas retornando ao patamar inicial em $eB \approx 10m_\pi^2$. Na prática, isso significa que existe não apenas a possibilidade de ocorrência de fases mistas de quarks e hádrons em estrelas híbridas, mas também que tal fase seria até mesmo favorecida em magnetares se $eB \sim 6m_\pi^2 \sim 1.8 \times 10^{19}$ G. Entretanto, para campos mais altos, a tensão

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

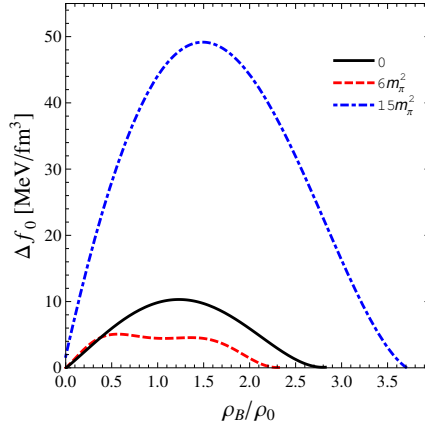


Figura 3.7.: A variação $\Delta f_0(\rho)$ como função de ρ_B/ρ_0 para os casos $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$.

superficial cresce continuamente e a formação da fase mista é desfavorecida. Os resultados apresentados neste capítulo, bem como nossas explicações e conclusões foram publicados na Ref. [77].

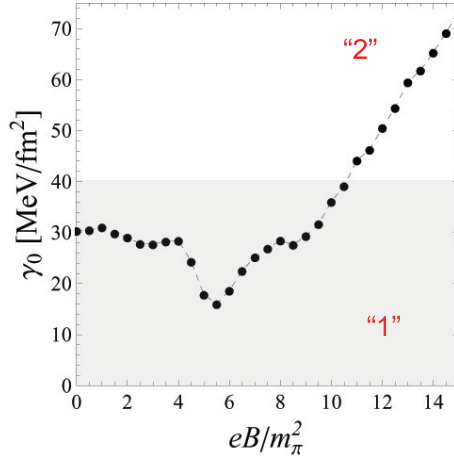


Figura 3.8.: Tensão superficial em temperatura nula, γ_0 , como função de eB (em unidades de m_π^2). A área sombreada delimita a região onde $\gamma_0 < 40 \text{ MeV/fm}^2$.

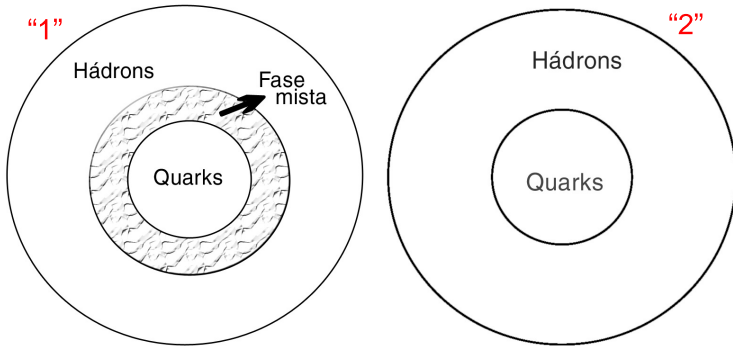


Figura 3.9.: Quadro da esquerda: estrela compacta com fase mista entre as fases de quarks e hádrons. Quadro da direita: estrela compacta sem fase mista.

3. Tensão Superficial na Matéria de Quarks

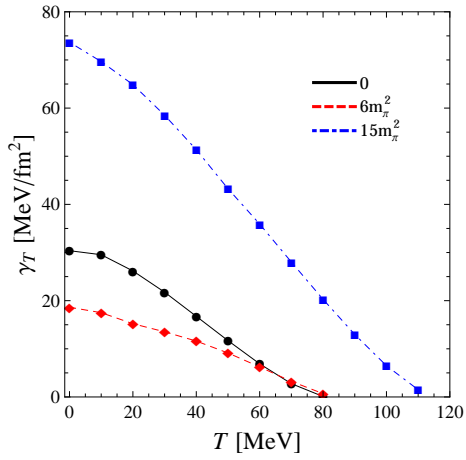


Figura 3.10.: Tensão superficial, γ_T , como função da temperatura para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

Nos capítulos anteriores trabalhamos com o modelo NJL levando em conta apenas a interação escalar (e pseudo-escalar) atrativa entre quarks. No entanto, o modelo permite a adição de mais termos de interação dependendo, das necessidades e dos objetivos teóricos. Neste capítulo, vamos adicionar um termo de interação vetorial repulsivo ao modelo, de forma a contrabalancear a interação escalar atrativa. A interação vetorial repulsiva, embora de intensidade menor que a interação escalar, frequentemente é usada em modelos de física nuclear, como o modelo de Walecka [78, 79], para contrabalancear a interação atrativa, de modo que a matéria nuclear possa atingir um ponto de saturação e tornar-se estável. Nosso propósito ao incluir a interação vetorial nesta tese é estudar os seus efeitos sobre o diagrama de fases do modelo NJL e sobre grandezas físicas que possam ter um papel importante na identificação do possível ponto crítico da QCD, como correlações e flutuações, conforme discutido na introdução.

4.1. Por que Considerar uma Interação Vetorial?

Uma questão que surge naturalmente neste capítulo é: por que escolhemos introduzir uma interação vetorial repulsiva no modelo de Nambu–Jona-Lasinio? Não estamos considerando modelagem de núcleos atômicos e não necessitamos rigorosamente de propriedades inerentes à física nuclear, como a saturação da matéria nuclear. Nossa análise, durante toda a tese, diz respeito à matéria de quarks, à quebra e restauração da simetria quiral, e ao estudo do diagrama de fases e propriedades termodinâmicas. Todos estes tópicos podem ser estudados de forma bastante sólida sem a necessidade de uma interação vetorial, como feito nos capítulos anteriores e em diversas referências citadas. No entanto, como deve ficar claro nos próximos parágrafos, existe uma boa razão para considerarmos uma interação vetorial no modelo NJL mesmo no contexto desta tese. A exposição abaixo segue de perto a excelente abordagem feita na Ref. [80].

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

A QCD é caracterizada por duas importantes simetrias, a saber, a simetria quiral e a simetria central, $Z(3)$, de confinamento [81]. A primeira está relacionada aos graus de liberdade de quarks, enquanto a segunda diz respeito aos campos de glúons. Os parâmetros de ordem geralmente empregados para definir os contornos das transições de fase associadas a estas simetrias são os valores esperados do *condensado quark-antiquark*, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, para a simetria quiral, e do *loop de Polyakov*, $\langle L(\vec{x})\rangle$, para a simetria central.

Os diferentes regimes de simetria da QCD podem ser teoricamente acessados deixando-se que a massa dos quarks varie a partir dos seus valores físicos. No setor de quarks leves (m_u, m_d, m_s) pode-se construir o conhecido *diagrama de Columbia*, que revela importantes características a partir de simulações numéricas e modelos efetivos. A figura 4.1 mostra esse diagrama, que resume o quadro atual relativo ao diagrama de fases da QCD com o potencial químico nulo.

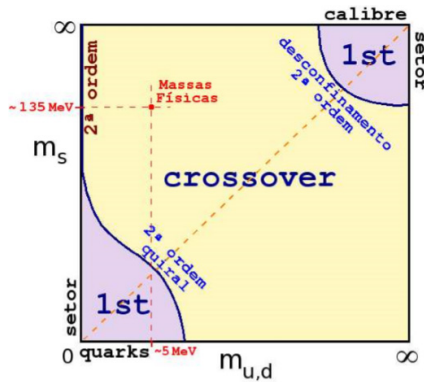


Figura 4.1.: O *plot de Columbia* para o diagrama de fases da QCD com três sabores e potencial químico nulo.

Observamos do *diagrama de Columbia* que, para quarks altamente massivos, o setor glúônico de calibre da QCD possui maior relevância, de modo que o confinamento torna-se o aspecto mais importante. Por outro lado, no limite de massas pequenas para os quarks, a simetria quiral predomina sobre o confinamento. Ambos os extremos são dominados por transições de primeira ordem, separadas por linhas de transição de segunda ordem do restante do diagrama, que é dominado por uma região

de crossover. As massas físicas dos quarks *up*, *down* e *strange* estão localizadas na região de crossover (identificadas pelo ponto vermelho na figura 4.1) mas, conforme as massas dos quarks *up* e *down* são reduzidas de seus valores físicos para o limite quiral, observamos o crossover transformando-se em uma linha de transição de segunda ordem.

Para investigar o que acontece em potencial químico não nulo, precisamos incluir um eixo μ perpendicular ao *diagrama de Columbia*. Ao considerar este novo eixo, verificamos que as duas linhas críticas de segunda ordem originam agora as suas respectivas superfícies críticas. Na figura 4.2 mostramos a curvatura da superfície crítica quiral (ou seja, em baixas massas) conforme obtido por simulações na rede [82].

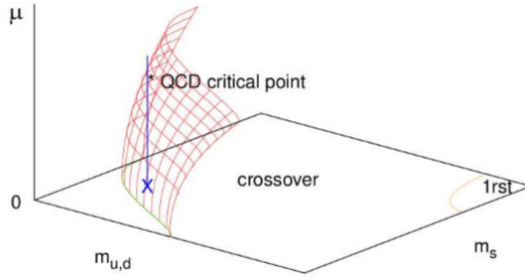


Figura 4.2.: Superfície crítica gerada por valores não nulos do potencial químico. Para garantir a existência de um ponto crítico, a região de primeira ordem deve expandir-se com μ . Retirado da Ref. [82]

Em potencial químico finito e baixas temperaturas, alguns modelos efetivos prevêem que a restauração da simetria quiral ocorra por meio de uma transição de primeira ordem. Isto pode ser visto na figura 4.2, onde a linha vertical que passa pelo ponto físico atravessa a superfície crítica. Desse modo, à medida que μ aumenta, passamos de uma região de crossover para um ponto crítico e então para o domínio de primeira ordem. Para assegurar a existência de um ponto crítico no diagrama de fases, a superfície crítica deve curvar-se de modo a interceptar a linha vertical que passa pelo ponto físico. Conclui-se, portanto, que a região de transição de primeira ordem deve expandir-se ao longo do plano $m_{u,d} - m_s$ com o aumento do potencial químico, de modo a permitir o aparecimento de um ponto crítico.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

As simulações na rede que levam em conta um valor não nulo para o potencial químico permanecem limitadas devido ao “problema do sinal”, dificultando o acesso a resultados exatos que seriam revelados pelos métodos de rede. Para contornar esse problema, é comum o uso de técnicas de aproximação, a mais comum delas sendo uma expansão de Taylor em potências de μ/T para as massas críticas,

$$\frac{m_c(\mu)}{m_c(0)} = 1 + \sum_{k=1} c_k \left(\frac{\mu}{\pi T} \right)^{2k}, \quad (4.1)$$

onde os coeficientes c_k são positivos nas simulações convencionais, mas podem assumir valores negativos em simulações com potencial químico imaginário. Estas simulações com μ no plano imaginário são usadas para evitar o confronto direto com o “problema do sinal”, e seus resultados contradizem a hipótese de expansão da superfície crítica discutida acima. Cálculos realizados por de Forcrand e Philipsen [82] mostraram que a região de primeira ordem não deve expandir mas, ao contrário, encolher com o aumento do potencial químico, assegurando-se que a razão μ/T seja pequena. Este encolhimento da superfície crítica impediria a existência de um ponto crítico e, conseqüentemente, de uma transição de primeira ordem para os valores físicos das massas dos quarks, conforme esboçado na figura 4.3.

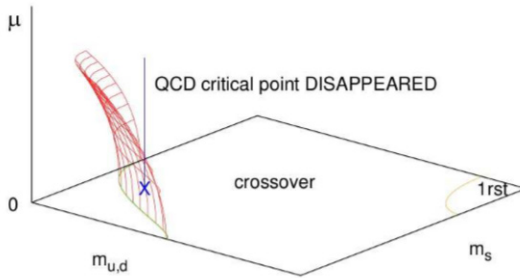


Figura 4.3.: Encolhimento da superfície crítica obtido por Forcrand e Philipsen [82] em simulações com potencial químico imaginário.

O quadro contempla, portanto, dois cenários antagônicos possíveis: expansão ou contração da superfície crítica em potencial químico finito. Fukushima sugeriu que uma atenuação ou até mesmo o desaparecimento do ponto crítico poderia ser explicado

pela introdução de um termo de interação vetorial repulsivo na formulação lagrangiana [83]. Esta contribuição vetorial poderia enfraquecer (ou até mesmo eliminar) a transição de primeira ordem e justificar o resultado obtido por de Forcrand e Philipsen. Usando a versão $SU(3)$ do modelo PNJL, Fukushima apontou que a inclusão de um canal vetorial repulsivo, $G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2$, poderia inicialmente explicar o encolhimento da superfície crítica [83]. Entretanto, caso o efeito repulsivo do acoplamento vetorial não seja demasiadamente intenso e a razão μ/T tornar-se suficientemente grande, a densidade aumentaria de modo a reverter o encolhimento e a favorecer novamente a transição de primeira ordem. Assim sendo, a expansão da região de primeira ordem seria retomada por um desdobramento (*back-bending*, figura 4.4) da superfície crítica e a existência de um ponto crítico seria reconsiderada, validando assim os resultados convencionais da rede.

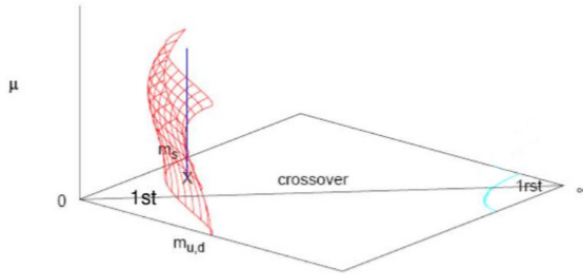


Figura 4.4.: *Back-bending* da superfície crítica. O acoplamento vetorial repulsivo provoca um encolhimento inicial da região de primeira ordem, mas à medida que o potencial químico cresce, a expansão é retomada. Retirado da Ref. [83].

Resultados similares aos de Fukushima foram obtidos por Bowman e Kapusta [84] com o uso do modelo sigma linear na presença de flutuações térmicas nos campos mesônicos. Eles encontraram um resultado um tanto quanto exótico, com dois pontos críticos no diagrama de fases. Em um trabalho com participação dos professores orientadores desta tese [85], a possibilidade de um cenário de *back-bending* também foi considerada empregando-se o método de teoria de perturbação otimizada (OPT), onde múltiplos pontos críticos foram previstos em um regime de acoplamento escalar forte, sem a inclusão de termos vetoriais.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

Enfim, devemos reforçar que o acoplamento vetorial em modelos efetivos possui relevância mesmo quando aplicado fora do escopo da física nuclear tradicional. A existência ou não do ponto crítico da QCD, como vimos na introdução, ainda é uma questão em aberto, de modo que o uso de modelos efetivos, com ou sem interação vetorial (ou quaisquer outros tipos de interações), permanece uma ferramenta válida na procura pelas características do diagrama de fases da QCD. Nas próximas seções estudaremos os efeitos do acoplamento vetorial no diagrama de fases do modelo de Nambu–Jona-Lasinio e, no próximo capítulo, o último da tese, faremos uma aplicação do modelo com acoplamento vetorial no cálculo de flutuações e correlações entre partículas e antipartículas.

4.2. O Modelo NJL com Termo Vetorial

A lagrangiana do modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks *up* e *down* interagindo pelos canais escalar, pseudo-escalar e vetorial é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2, \quad (4.2)$$

onde G_S é a constante de acoplamento dos canais escalar e pseudo-escalar, que anteriormente denominávamos apenas de G , e G_V é a constante de acoplamento do canal vetorial.

Vamos linearizar o termo vetorial, de modo análogo ao que fizemos com os termos escalar e pseudo-escalar. Tomamos a diferença quadrática entre o termo vetorial e seu valor médio como sendo aproximadamente zero,

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle)^2 = (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - 2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle + \langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle^2 \approx 0, \quad (4.3)$$

de modo que

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 = 2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle - \langle\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rangle^2. \quad (4.4)$$

Utilizando o procedimento de bosonização (Apêndice C), introduzimos o campo auxiliar $V^\mu = -2G_V\langle\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\rangle$ na lagrangiana sem modificar as equações de movimento. Em termos de V^μ , a equação acima assume a forma

$$(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)^2 = -\frac{1}{G_V}\bar{\psi}\gamma_{\mu}V^{\mu}\psi - \frac{1}{4G_V^2}V_{\mu}V^{\mu}, \quad (4.5)$$

de modo que a lagrangiana bosonizada (incluindo os canais escalar e pseudo-escalar) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m - \sigma)\psi + \bar{\psi}(\gamma_{\mu}V^{\mu} - i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau})\psi - \frac{1}{4G_S}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{1}{4G_V}V_{\mu}V^{\mu}, \quad (4.6)$$

onde σ e $\vec{\pi}$ são os mesmos campos definidos no apêndice C, equação (C.8). Fazendo $\vec{\pi} = 0$, como usualmente, e lembrando que a massa efetiva dos quarks é dada por $M = m + \sigma$, a lagrangiana reduz-se a

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - M)\psi + \bar{\psi}\gamma_{\mu}V^{\mu}\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{V_{\mu}V^{\mu}}{4G_V}. \quad (4.7)$$

O primeiro e terceiro termos do lado direito da equação acima são provenientes da interação escalar e já estavam presentes nos capítulos anteriores, mas o segundo e quarto termos são provenientes da interação vetorial. Podemos simplificar ainda mais a lagrangiana da seguinte forma: no cálculo do potencial efetivo, ao tomar o traço dos operadores que contém termos da interação vetorial, as componentes espaciais resultam em zero, sobrando apenas a componente temporal, isto é, $V_0 = -2G_V\langle\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle$. Desse modo, podemos suprimir da lagrangiana as componentes espaciais de V_{μ} , deixando apenas a componente temporal. Esta componente está associada com a densidade de quarks, uma vez que

$$\langle\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle = \langle\psi^{\dagger}\psi\rangle = \rho. \quad (4.8)$$

Assim, a lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - M)\psi - 2G_V\rho\psi^{\dagger}\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + G_V\rho^2. \quad (4.9)$$

Para considerar efeitos de densidade finita, incluímos na lagrangiana o termo $\mu\psi^{\dagger}\psi$,

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

$$\mathcal{L} + \mu\psi^\dagger\psi = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \psi^\dagger(\mu - 2G_V\rho)\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + G_V\rho^2, \quad (4.10)$$

de modo que podemos definir um potencial químico efetivo,

$$\tilde{\mu} = \mu - 2G_V\rho = \mu - 2G_V\langle\psi^\dagger\psi\rangle. \quad (4.11)$$

Note que esta expressão para $\tilde{\mu}$ é semelhante a expressão para a massa efetiva, M , dada pela equação (C.17),

$$M = m - 2G_S\langle\bar{\psi}\psi\rangle. \quad (4.12)$$

Assim a nova lagrangiana do modelo na aproximação de campo médio pode ser escrita em termos do potencial químico efetivo,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + \tilde{\mu}\psi^\dagger\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V}, \quad (4.13)$$

o que significa que o sistema é, a menos de termos constantes independentes dos campos, equivalente a um sistema de partículas interagentes com massa M e potencial químico $\tilde{\mu}$. Consequentemente, o potencial termodinâmico é igual ao mostrado no apêndice C, sendo as únicas diferenças a substituição de μ por $\tilde{\mu}$, e a adição do último termo do lado direito da Eq. (4.13). Para incluir a temperatura, usamos o mecanismo de Matsubara e as substituições dadas pela Eq. (C.19), mantendo, desta forma, os mesmos procedimentos usados em capítulos anteriores. Após efetuar a soma sobre as frequências de Matsubara, obtemos o potencial termodinâmico na aproximação de campo médio,

$$\Omega(T, \mu, M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} + \Omega_M(T, M, \tilde{\mu}), \quad (4.14)$$

onde o primeiro termo do lado direito é conhecido dos capítulos anteriores, o segundo termo vem do acoplamento vetorial e

$$\Omega_M(T, M, \tilde{\mu}) = -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + e^{-(E-\tilde{\mu})/T} \right] + T \ln \left[1 + e^{-(E+\tilde{\mu})/T} \right] \right\}, \quad (4.15)$$

é o termo de quasi-partícula devido a correções quânticas, que é o mesmo do modelo sem acoplamento vetorial, mas com $\tilde{\mu}$ substituindo μ . A escolha que fizemos de escrever Ω como função de $\tilde{\mu}$ ao invés de ρ é basicamente uma questão de notação, justificada pela simplicidade com que Ω_M pode ser escrito. Esta forma é usada por alguns autores [63], mas poderíamos muito bem deixar Ω escrito em termos de μ e ρ , observando a equação (4.11), sem que isso modificasse nossos resultados. De fato, no próximo capítulo, quando formos calcular a correlação partícula-antipartícula, veremos que é vantajoso abandonar a notação com $\tilde{\mu}$ e escrever Ω como função de μ e ρ . Todavia, por enquanto, vamos manter a notação com $\tilde{\mu}$.

Para que o sistema seja termodinamicamente consistente, a densidade de quarks, ρ , deve estar relacionada com Ω por meio de

$$\rho = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}. \quad (4.16)$$

Como $\Omega = \Omega(T, \mu, M, \tilde{\mu})$, tomando a derivada com relação a μ e aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{d\Omega}{d\mu} = -\rho + \frac{\partial \Omega}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \mu}, \quad (4.17)$$

de modo que a exigência de consistência termodinâmica ao sistema nos leva as seguintes condições estacionárias:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0. \quad (4.18)$$

A primeira equação é a já conhecida equação do gap, enquanto a segunda representa uma nova condição a ser satisfeita. Calculando explicitamente as derivadas acima, encontramos

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{M - m}{2G_S} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E} [1 - n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})] = 0, \quad (4.19)$$

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

e

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \frac{\mu - \tilde{\mu}}{2G_V} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})] = 0, \quad (4.20)$$

onde

$$n_p(T, \tilde{\mu}) = \frac{1}{1 + e^{(E - \tilde{\mu})/T}} \quad e \quad \bar{n}_p(T, \tilde{\mu}) = \frac{1}{1 + e^{(E + \tilde{\mu})/T}}, \quad (4.21)$$

são os números de ocupação de Fermi para partículas e antipartículas, respectivamente, escritos em função do potencial químico efetivo. É visível a semelhança tanto da equação (4.19) quanto das equações (4.21) com o caso sem interação vetorial: a mera substituição de μ por $\tilde{\mu}$, explicitando ainda mais a vantagem de se usar esta notação.

As equações (4.19) e (4.20) formam um conjunto de equações auto-consistentes acopladas para M e $\tilde{\mu}$. Isso significa que, dados T e μ , podemos resolvê-las numericamente de modo a encontrar as soluções M e $\tilde{\mu}$. Antes disso, porém, precisamos especificar o valor numérico da constante de acoplamento vetorial, G_V . Ao contrário do que pode parecer, esta tarefa não é nada trivial porque o canal vetorial está associado à formação do méson ρ , cuja massa, $m_\rho = 770$ MeV, é superior à escala de energia determinada pelo *cutoff*, Λ . Não podemos simplesmente aumentar o valor de Λ porque a massa efetiva dos quarks se tornaria inconsistente do ponto de vista fenomenológico. Dessa forma, G_V é considerado um parâmetro livre e seu valor é frequentemente empregado entre o intervalo $0.25G_S \leq G_V \leq 0.50G_S$ [86, 87, 88]. Outros autores buscam fixar a constante de acoplamento vetorial através de diferentes técnicas e situam seu valor no intervalo $0.3G_S \leq G_V \leq 3.2G_S$ [89, 90]. Um trabalho mais recente feito por Sugano *et al.* utiliza resultados de QCD na rede para fixar G_V em aproximadamente $0.33G_S$ [91]. Apesar destes avanços, ainda não existe uma certeza acerca do valor de G_V , de modo que, nas próximas seções e no próximo capítulo, vamos expor resultados obtidos majoritariamente com G_V dentro do intervalo $0 \leq G_V \leq 0.60G_S$. Este intervalo condiz com a maioria dos trabalhos que envolvem modelos efetivos com interação vetorial e, como veremos, será suficiente para estudarmos os efeitos do acoplamento vetorial repulsivo no diagrama de fases do modelo e demais grandezas termodinâmicas de interesse.

4.3. Resultados em Temperatura Finita

Como visto na seção anterior, o acoplamento vetorial se manifesta no potencial termodinâmico de duas maneiras: acrescentando o termo $G_V \rho^2$ na parte clássica do potencial e redefinindo o potencial químico para $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V \rho$. Ambos os termos dependem diretamente da densidade, ρ , de modo que, em baixas densidades (o que é equivalente a baixos potenciais químicos), devemos esperar pouca diferença para a massa efetiva dos quarks e para as demais grandezas termodinâmicas em relação aos resultados obtidos nos capítulos anteriores¹. Por outro lado, em densidades altas (equivalente a potenciais químicos altos), regime em que o acoplamento vetorial possui maior influência, devemos observar diferenças em relação aos resultados obtidos anteriormente. Nesta seção mostraremos alguns resultados para a massa efetiva dos quarks e algumas grandezas termodinâmicas. Na próxima seção veremos os efeitos do acoplamento vetorial no diagrama de fases do modelo NJL.

Para obter os resultados numéricos devemos resolver simultaneamente as equações (4.19) e (4.20) para M e $\tilde{\mu}$, respectivamente. Como discutido anteriormente, não existe um conjunto de parâmetros único para o modelo de Nambu–Jona-Lasinio, e diferentes conjuntos são usados na literatura, desde que sejam consistentes fenomenologicamente. Optamos por usar o mesmo conjunto de parâmetros dos capítulos anteriores², o que nos possibilita comparar os resultados do modelo com e sem interação vetorial.

Iniciamos a exposição dos nossos resultados mostrando o comportamento da massa efetiva dos quarks em função do potencial químico em baixa temperatura e para diferentes valores de G_V . Na figura 4.5 fixamos a temperatura nas figuras dispostas na horizontal e mostramos os resultados para $G_V = 0.1, 0.3$ e $0.5G_S$. Em temperatura zero, figura 4.5(a), observamos uma descontinuidade da massa efetiva para os valores de G_V analisados (gráficos da esquerda, centro e direita), o que significa que a transição é de primeira ordem. As linhas pontilhadas em vermelho, iguais nos três gráficos, correspondem ao caso sem interação vetorial e foram adicionadas para fins comparativos apenas. Notamos ainda que, à medida que G_V cresce, o ponto de descontinuidade na massa efetiva ocorre em valores cada vez maiores de μ . Desse modo, vemos claramente que o acoplamento vetorial repulsivo em baixas temperaturas atua no sentido de deslocar a transição de fase para valores maiores do potencial químico.

¹Desconsiderando, naturalmente, as seções com campo magnético.

²Para relembrar: $m = 6$ MeV, $\Lambda = 590$ MeV e $G_S = 2.435/\Lambda^2$.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

Na figura 4.5(b) temos o mesmo esquema, mas com $T = 30$ MeV. Neste caso observamos que os gráficos da esquerda e do centro mostram uma transição de primeira ordem, de forma análoga ao caso $T = 0$, mas o gráfico da direita mostra uma redução contínua (e suave) da massa efetiva, o que caracteriza um crossover. Comparando a linha pontilhada com a linha cheia, vemos que o que antes era uma transição de primeira ordem com $G_V = 0$ tornou-se um crossover com $G_V = 0.5 G_S$. Na figura 4.5(c) temos o mesmo esquema com $T = 60$ MeV. Vemos que, para $G_V = 0.1 G_S$, a transição permanece de primeira ordem, mas, para $G_V = 0.3$ e $0.5 G_S$, temos um crossover onde antes, na ausência de acoplamento vetorial, tínhamos uma transição de primeira ordem. Assim sendo, podemos concluir que o acoplamento vetorial repulsivo atua também no sentido de enfraquecer a transição de primeira ordem.

Quando resolvemos as equações (4.19) e (4.20) encontramos, além das soluções para a massa efetiva, soluções para o potencial químico efetivo, $\tilde{\mu}$. Em baixas temperaturas e na fase de simetria quiral quebrada, a densidade, ρ , é nula, de modo que $\tilde{\mu} = \mu$ pela equação (4.11). Quando a simetria quiral é restaurada em baixas temperaturas, por meio de uma transição de fase de primeira ordem, a densidade salta para um valor diferente de zero e o potencial químico efetivo apresenta uma descontinuidade. Este comportamento pode ser observado na figura 4.6(a) onde temos gráficos de $\tilde{\mu}$ contra μ para diferentes valores de G_V em temperatura zero. Vemos claramente que, até o momento da transição, $\tilde{\mu} = \mu$. Após a transição, $\tilde{\mu}$ assume valores abaixo da reta $\tilde{\mu} = \mu$ (reta esta identificada pela linha tracejada) como consequência da equação (4.11). O comportamento descontínuo de $\tilde{\mu}$ também caracteriza a transição como sendo de primeira ordem. Na figura 4.6(b) temos o mesmo esquema para $T = 30$ MeV, onde os gráficos da esquerda e centro mostram uma descontinuidade de $\tilde{\mu}$, enquanto o gráfico da direita, com o acoplamento vetorial maior, mostra uma curva contínua para $\tilde{\mu}$ sugerindo que a transição já não é mais de primeira ordem. Este comportamento está em acordo com a análise das massas efetivas que fizemos na figura 4.5. A figura 4.6(c) mostra o mesmo esquema para $T = 60$ MeV, onde somente o gráfico da esquerda apresenta descontinuidade.

Como mencionado anteriormente, o acoplamento vetorial repulsivo influi na massa efetiva dos quarks e nas características da transição quiral majoritariamente em baixas temperaturas e altas densidades. Em baixas densidades, ou baixo potencial químico, pouca ou até mesmo nenhuma diferença é observada com relação ao caso sem G_V , razão pela qual não é necessário discutir o comportamento da massa efetiva dos quarks

nesse regime de potencial químico.

4.4. O Diagrama de Fases

Estendendo a análise feita na seção anterior para todo o plano $T - \mu$ obtemos o diagrama de fases do modelo com acoplamento vetorial repulsivo. Para tanto, fixamos G_V nos valores estudados e varremos o plano $T - \mu$ buscando identificar os pontos onde ocorre a transição. Os resultados estão expostos na figura 4.7, onde incluímos também a linha de transição do caso sem interação vetorial (linha preta) para fins de comparação.

Podemos observar que, para $G_V = 0.1 G_S$, em vermelho, a linha de transição de primeira ordem, identificada pela linha cheia, está ligeiramente deslocada para a direita no gráfico, ou seja, para valores maiores de μ , se comparada ao caso $G_V = 0$. Além disso, o ponto crítico, identificado pelo círculo vermelho, está localizado em uma temperatura ligeiramente abaixo da temperatura do ponto crítico do caso sem G_V . Este movimento de redução da linha de transição de primeira ordem torna-se mais visível quando $G_V = 0.3 G_S$ (linha azul), com o ponto crítico situado em $T_c \simeq 52.5 \text{ MeV}$ e $\mu_c \simeq 382 \text{ MeV}$ e mais ainda com $G_V = 0.5 G_S$, onde o ponto crítico encontra-se em $T_c \simeq 29.0 \text{ MeV}$ e $\mu_c \simeq 412 \text{ MeV}$. Além dos valores de G_V analisados anteriormente, incluímos também a linha de transição para $G_V = 0.8 G_S$, em laranja. Nesta intensidade do acoplamento vetorial não há mais transição de primeira ordem (consequentemente também não há ponto crítico), sendo a transição, em todo o plano $T - \mu$, caracterizada por um crossover.

Uma última observação que podemos fazer com relação a figura 4.7 diz respeito ao efeito praticamente insignificante do acoplamento vetorial em baixos potenciais químicos. Vemos que as linhas que identificam o crossover em diferentes valores de G_V convergem para uma mesma linha por volta de $\mu \sim 100 \text{ MeV}$ e assim permanecem até o eixo $\mu = 0$. Este comportamento exemplifica o que havíamos discutido anteriormente sobre o acoplamento vetorial atuar de modo mais significativo em altos potenciais químicos.

4.5. Termodinâmica

Vamos estudar brevemente a termodinâmica do modelo com acoplamento vetorial, como feito anteriormente quando consideramos um campo magnético externo atu-

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

ando no sistema. Nossa intenção não é meramente repetir todos os gráficos das grandezas termodinâmicas, mas focar naquelas que consideramos mais importantes e que apresentam diferenças significativas com relação ao modelo sem interação vetorial. Como já era de se esperar essas diferenças podem ser vistas com mais facilidade em baixas temperaturas e altos potenciais químicos.

A pressão normalizada é definida do mesmo modo como foi definida³ no capítulo 2, equação (2.12). Demais grandezas termodinâmicas como densidade de entropia e densidade bariônica seguem de derivadas da pressão com relação a T e μ , equações (2.13) e (2.14), respectivamente.

Em $\mu = 0$ a pressão como função de T não apresenta qualquer reação ao acoplamento vetorial, independentemente do seu valor, como mostra a figura 4.8, onde todas as curvas com diferentes valores de G_V estão sobrepostas. Isso já era esperado, uma vez que $P = -\Omega$ e quando $\mu \rightarrow 0$, $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$ e o potencial termodinâmico tende ao potencial termodinâmico do modelo sem acoplamento vetorial.

A densidade líquida é uma das grandezas termodinâmicas que apresenta modificações significativas em função do valor de G_V . Como o acoplamento vetorial reduz a temperatura crítica, encurtando a linha de transição de primeira ordem no diagrama de fases, a densidade, que antes apresentava um comportamento descontínuo em baixas temperaturas, agora, com o aumento de G_V , apresenta um comportamento contínuo, refletindo a mudança na ordem da transição. Este comportamento está esquematizado na figura 4.9, onde mostramos ρ em função de μ para diferentes valores de T e G_V . As linhas tracejadas mostram o caso $G_V = 0$ para comparação.

A medida da interação⁴ (anomalia do traço), definida por

$$\Delta = \frac{\epsilon - 3P}{T^4}, \quad (4.22)$$

também apresenta algumas modificações em função do valor de G_V e para $\mu \neq 0$ (para $\mu = 0$, Δ é o mesmo para qualquer valor de G_V). Na figura 4.10 mostramos o comportamento de Δ em função de T para diferentes valores de G_V e comparamos com o caso sem acoplamento vetorial, representado pela linha tracejada. No quadro da esquerda temos o caso $\mu = 300$ MeV, onde é possível notar que, à medida que G_V cresce, o gás fica menos interagente. As maiores diferenças entre os casos com e sem

³Ignorando-se aqui a dependência de P com o campo magnético B .

⁴Para um gás livre, $\Delta = 0$ em qualquer valor de T e μ porque a equação de estado do gás livre é $\epsilon = 3P$. Desse modo, pode-se dizer que Δ mede o quão diferente um sistema é de um gás livre.

G_V ocorrem em temperaturas próximas à temperatura pseudo-crítica de crossover para $\mu = 300$ MeV, que é de aproximadamente 100 MeV. O mesmo comportamento pode ser observado na figura da direita, com $\mu = 328$ MeV, que é ligeiramente maior que o potencial químico crítico do modelo na ausência de acoplamento vetorial. Nesse caso, observamos um pico na curva com $G_V = 0$ que não se repete para as curvas com $G_V > 0$ porque o potencial químico crítico é deslocado para valores maiores. Enquanto a curva tracejada atravessa o ponto crítico no diagrama de fases, as demais curvas atravessam suas respectivas linhas de crossover (veja a figura 4.7), o que explica as suas formas suaves. Na figura de baixo, μ está fixado em 350 MeV, de modo que as curvas com $G_V = 0$ e $G_V = 0.1 G_s$ atravessam as suas respectivas linhas de transição de primeira ordem, o que se reflete nos picos observados nestas duas curvas, enquanto as curvas com $G_V = 0.3 G_s$ e $G_V = 0.5 G_s$ atravessam suas respectivas linhas de crossover no diagrama de fases e, por isso, apresentam um comportamento suave.

Assim como comentado no final do capítulo 3, um estudo aprofundado das características, da termodinâmica e das aplicações do modelo NJL com acoplamento vetorial vai além da simples abordagem feita neste capítulo. A principal motivação que nos levou a incluir o acoplamento vetorial no modelo está exposta no próximo capítulo, onde calculamos os seus efeitos sobre a correlação entre o número de partículas e antipartículas.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

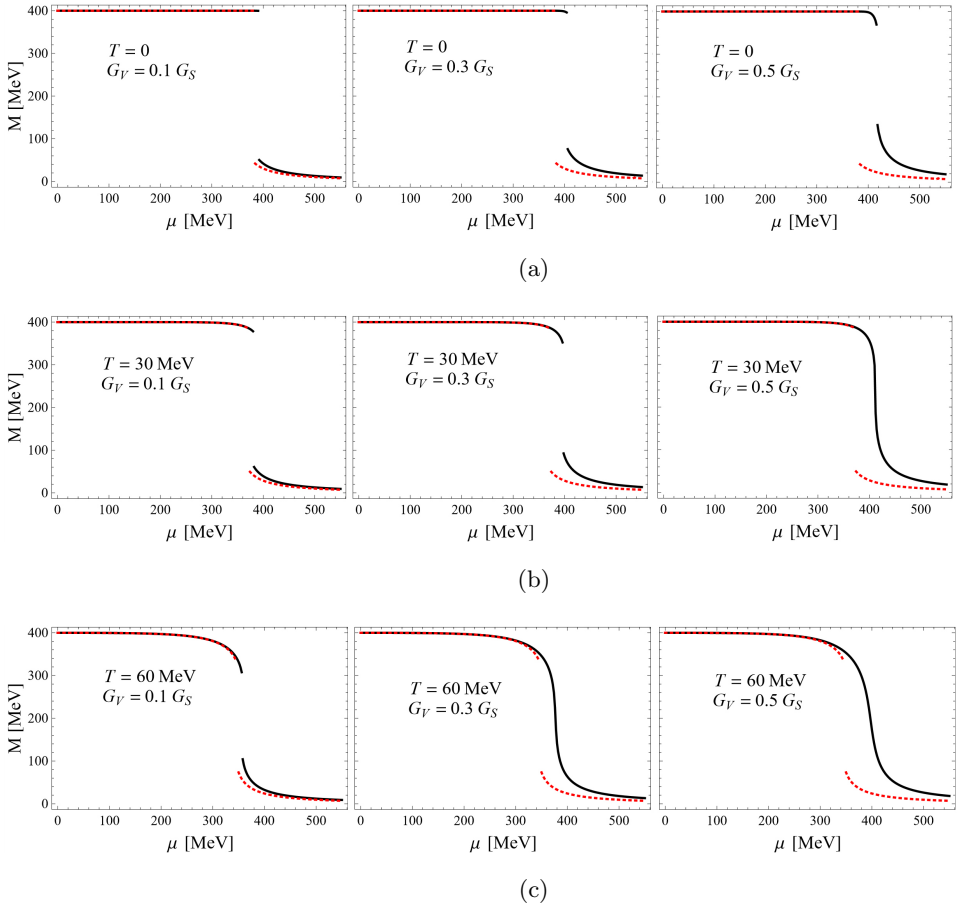


Figura 4.5.: Massa efetiva contra μ para $G_V = 0.1 G_s$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_s$ (centro) e $G_V = 0.5 G_s$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial. Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b), $T = 30 \text{ MeV}$ e em (c), $T = 60 \text{ MeV}$.

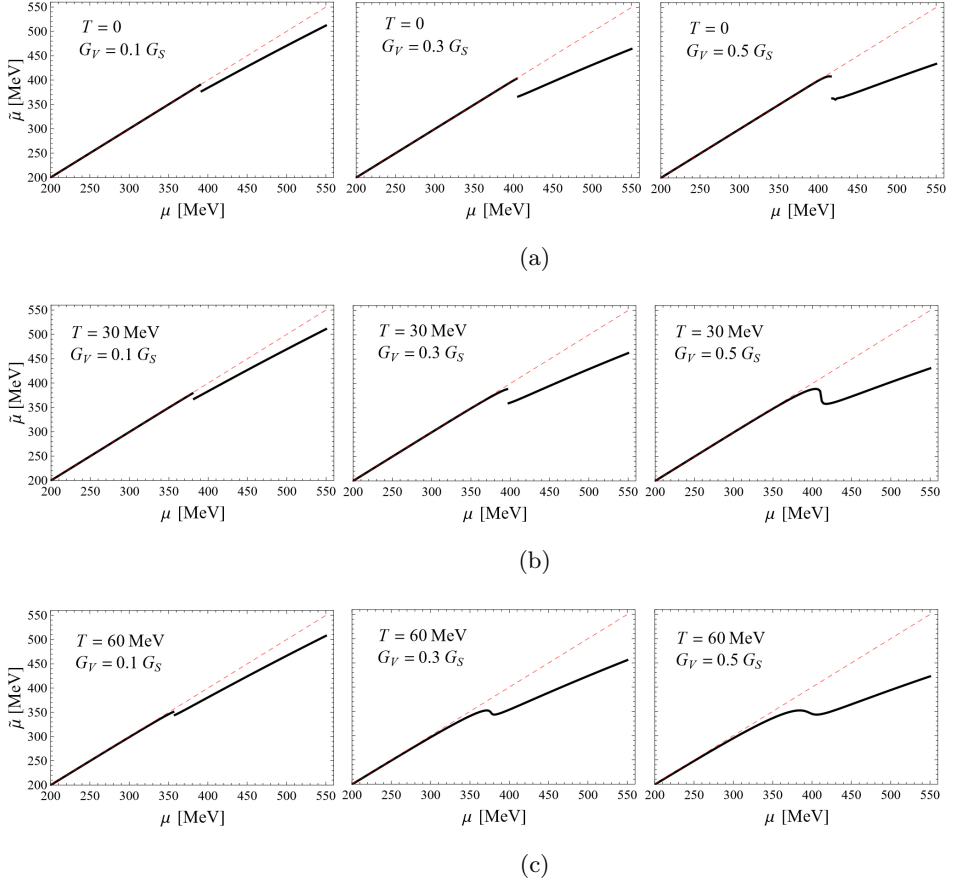


Figura 4.6.: Potencial químico efetivo, $\tilde{\mu}$, contra μ para $G_V = 0.1 G_S$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_S$ (centro) e $G_V = 0.5 G_S$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial (ou seja, a reta $\tilde{\mu} = \mu$). Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b) $T = 30$ MeV e em (c) $T = 60$ MeV.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

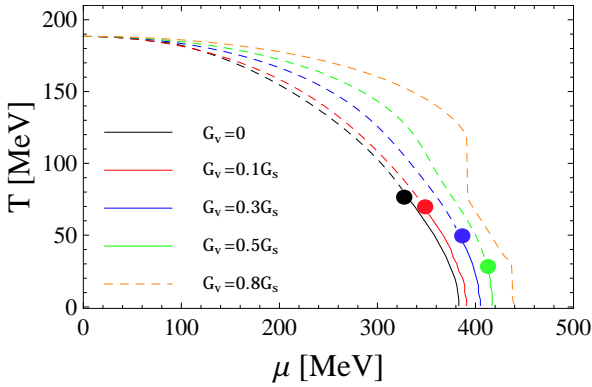


Figura 4.7.: O diagrama de fases no plano $T - \mu$ para diferentes valores de G_V . As linhas tracejadas identificam o crossover, enquanto as linhas cheias, a transição de primeira ordem. Podemos observar claramente a tendência de enfraquecimento da transição de primeira ordem à medida que o acoplamento vetorial aumenta. Além disso, o potencial químico de coexistência em baixas temperaturas aumenta com G_V .

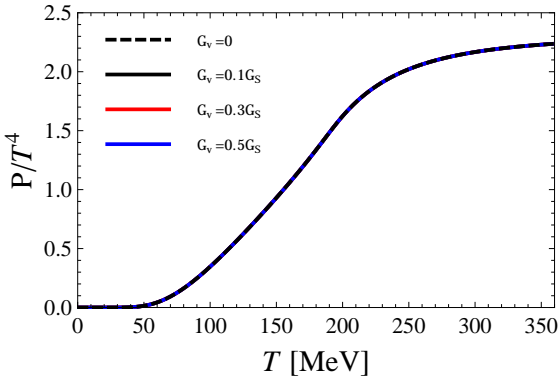


Figura 4.8.: Pressão dividida por T^4 em função de T para $\mu = 0$ e diferentes valores de G_V . Como era de se esperar, não há diferença entre as curvas para $\mu = 0$.

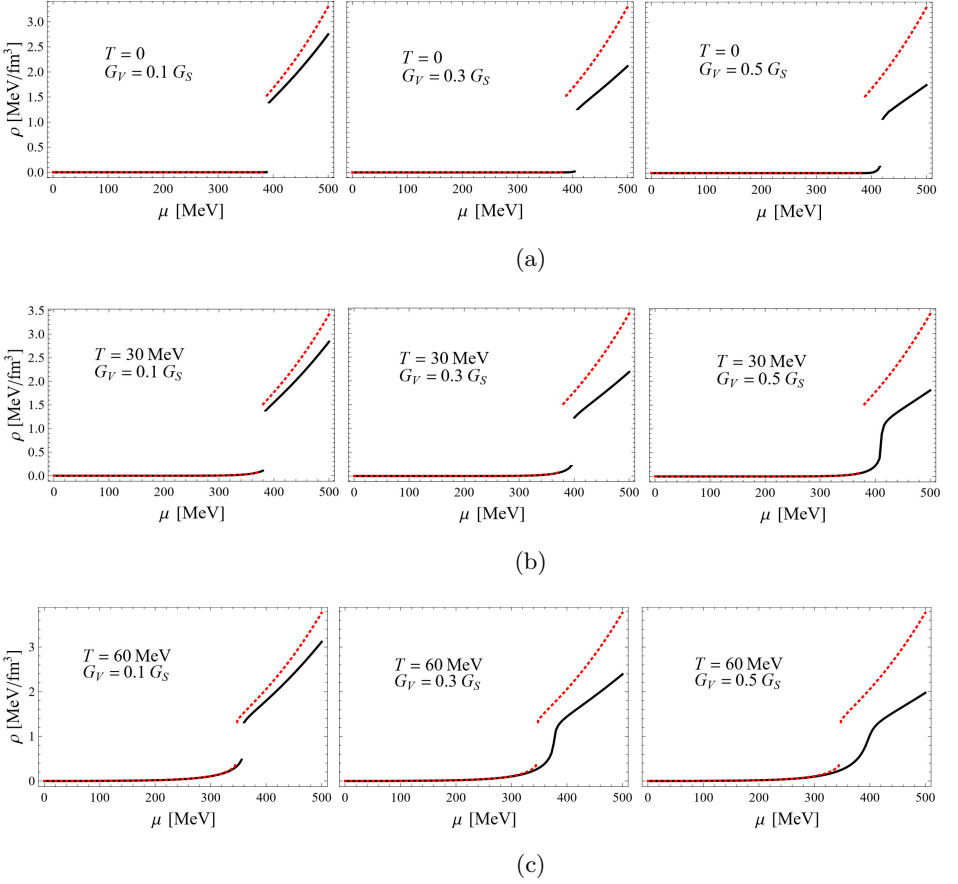


Figura 4.9.: Densidade líquida contra μ para $G_V = 0.1 G_S$ (esquerda), $G_V = 0.3 G_S$ (centro) e $G_V = 0.5 G_S$ (direita). A linha pontilhada é a mesma em todos os gráficos dispostos na horizontal e representa o resultado obtido sem interação vetorial. Em (a) a temperatura está fixa em $T = 0$, em (b) $T = 30$ MeV e em (c) $T = 60$ MeV.

4. Acoplamento Vetorial na Matéria de Quarks

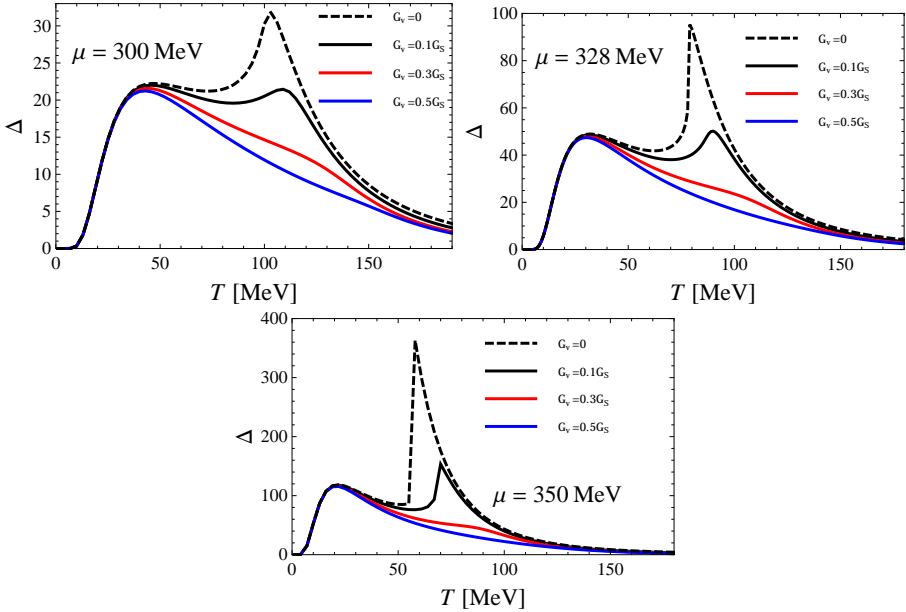


Figura 4.10.: A medida da interação, Δ , em função da temperatura para diferentes valores de G_V . A linha tracejada representa o caso $G_V = 0$. Na figura da esquerda temos $\mu = 300$ MeV, enquanto na figura da direita, $\mu = 328$ MeV. Abaixo, temos $\mu = 350$ MeV.

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

Neste capítulo final vamos estudar uma grandeza termodinâmica associada à flutuação no número de quarks, dada basicamente pela susceptibilidade do número de quarks. Mais precisamente, estaremos interessados na susceptibilidade do número de partículas e antipartículas, que está diretamente relacionada com a correlação partícula-antipartícula (quarks e antiquarks). Vamos estudar estas grandezas ao longo do diagrama de fases do modelo, que é caracterizado por uma transição de fase de primeira ordem, um ponto crítico e crossover, conforme visto em capítulos anteriores. Nosso objetivo é verificar se a correlação partícula-antipartícula calculada com o modelo efetivo considerado na tese pode ser de alguma forma comparada com dados coletados de experimentos de colisões de íons pesados realizados no RHIC pela colaboração STAR. Vamos verificar também se esta correlação pode ter algum papel na identificação do ponto crítico, assim como flutuações e cumulantes das distribuições de partículas possuem. No final do capítulo incluiremos em nossos cálculos o canal de interação vetorial repulsivo estudado no capítulo anterior para analisar as respostas da correlação partícula-antipartícula aos diferentes valores associados à intensidade da interação vetorial, com a finalidade de verificar se os sinais presentes nas vizinhanças do ponto crítico seriam afetados pelo acoplamento vetorial.

Antes de prosseguir devemos enfatizar que a motivação para o trabalho contido neste capítulo se deve em grande parte ao Dr. Volker Koch, do Lawrence Berkeley National Laboratory, o qual co-orientou este trabalho durante o estágio sanduíche realizado naquela instituição entre os anos de 2014 e 2015.

5.1. Flutuações e Correlações

Flutuações e correlações são características importantes de diversos sistemas físicos e estão associadas com susceptibilidades que, por sua vez, determinam a resposta de um sistema físico a forças externas. Estas grandezas frequentemente são usadas para se obter informações a respeito dos graus de liberdade do sistema físico em questão.

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

Estão, geralmente, relacionadas a transições de fase, como, por exemplo, o fenômeno de opalescência, que resulta de flutuações em todas as escalas de comprimento devido a uma transição de fase de segunda ordem. Transições de primeira ordem, por outro lado, resultam na formação de bolhas, que podem ser entendidas como flutuações extremas na densidade do sistema.

As flutuações em um sistema físico podem ter origens diversas. Como exemplo em nível fundamental podemos citar as flutuações quânticas, que se manifestam quando um observável não comuta com a hamiltoniana que descreve o sistema em consideração. Existem também as flutuações e correlações “dinâmicas”, que, como o próprio nome sugere, são reflexos da dinâmica de um sistema, como, por exemplo, flutuações na densidade. Por último, temos as flutuações induzidas pelos próprios processos de medida em função dos diversos erros de medida que podem estar presentes em experimentos físicos. Estas flutuações devem ser devidamente conhecidas e controladas, de modo que seja possível acessar as flutuações de origem dinâmica, que são as que efetivamente possuem informações sobre as propriedades do sistema.

Um exemplo inspirador em que a medida de correlações levou a um resultado importante foi no caso das flutuações na radiação cósmica de fundo [92], reveladas pelos satélites COBE [93] e WMAP [94, 95]. As flutuações observadas na radiação cósmica de fundo são da ordem de 10^{-4} com relação a distribuição térmica. Neste caso, uma correlação de dipolo, devido ao movimento da Terra através do banho térmico da radiação de fundo, teve de ser subtraída dos resultados para que fosse possível observar as flutuações na radiação cósmica de fundo.

No entanto, ao contrário da radiação de fundo, onde observam-se correlações espaciais, nos experimentos de colisões de íons pesados as observações estão restritas aos momentos das partículas, de modo que a conexão com variáveis espaciais não é trivial. Mesmo assim, no caso de colisões de íons pesados, o princípio é o mesmo: observa-se primeiro um espectro termal e em seguida uma correlação de quadrupolo devido ao fluxo elíptico (*elliptic flow*). A questão que ainda tenta-se responder é se haveria algum tipo de correlação causada pela possível transição de fase para o QGP e pelo suposto ponto crítico da QCD, após subtraídos o espectro termal e a correlação do fluxo elíptico. Como vimos na introdução ao discutir o programa Beam Energy Scan, a resposta para esta pergunta ainda é desconhecida.

A maneira como se acessa as flutuações e correlações oriundas de uma colisão de íons pesados é através de medidas de algum observável a cada colisão, isto é, a cada evento

(“*event-by-event*”), e depois calculando-se as flutuações sobre o ensemble de eventos. No contexto da física estatística, que é extremamente útil no estudo das colisões de íons pesados, flutuações e correlações estão associadas com susceptibilidades do sistema. Em um sistema definido pelo potencial termodinâmico, Ω , susceptibilidades de segunda ordem, $\chi_{i,j}$, podem ser calculadas por meio de

$$\chi_{i,j}^{(2)} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_i \partial \mu_j}, \quad (5.1)$$

onde μ_i e μ_j representam potenciais químicos associados a alguma carga conservada (no nosso caso, μ está associado à conservação do número de quarks). Quando $i = j$, as susceptibilidades estão associadas com as flutuações do sistema, enquanto $\chi_{i,j}$ com $i \neq j$ está associado com correlações. Desse modo, o cálculo de susceptibilidades, incluindo também as de ordem mais alta, dadas por derivadas de ordem superior a da equação (5.1), consiste em uma importante ferramenta para compreender o diagrama de fases da QCD. Maiores detalhes sobre o papel de flutuações em colisões de íons pesados podem ser encontradas na Ref. [18].

As susceptibilidades estão diretamente relacionadas com os momentos de uma distribuição, ou seja, com os cumulantes que caracterizam a forma de uma distribuição. Por exemplo, os momentos $S\sigma$ e $\kappa\sigma^2$ da distribuição do número líquido de prótons numa colisão de íons (S é a *skewness*, κ é a *kurtosis* e σ é a variância) estão relacionados, respectivamente, com as razões entre susceptibilidades do número bariônico, $\chi_B^{(3)}/\chi_B^{(2)}$ e $\chi_B^{(4)}/\chi_B^{(2)}$ [96, 97]. Uma das formas de se procurar por sinais do ponto crítico da QCD em programas como o Beam Energy Scan, no RHIC, é obtendo informações dos momentos da distribuição de quantidades conservadas, como número bariônico, carga elétrica e estranheza.

5.2. Dados da Colaboração STAR

O programa Beam Energy Scan (BES) tem como um dos objetivos estudar o diagrama de fases da QCD em detalhes, conforme vimos no capítulo 1. No ano de 2014, a colaboração STAR divulgou uma série de dados obtidos no programa BES-I envolvendo, entre outros, a dependência dos momentos (cumulantes) da distribuição líquida de prótons ($\Delta N_p = N_p - N_{\bar{p}}$) com a energia da colisão, $\sqrt{s_{NN}}$, em colisões de íons $Au-Au$ [19]. Este tipo de experimento é importante na busca por sinais do ponto

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

crítico em uma área considerável do diagrama de fases da QCD. Cálculos teóricos mostraram que as flutuações do número líquido de prótons, ΔN_p , refletem a singularidade esperada no ponto crítico das susceptibilidades de carga elétrica e também do número bariônico [98]. Os cumulantes C_n usados para estudar a forma da distribuição ΔN_p estão associados com o valor médio, $C_1 = \overline{M}$, a variância (flutuação), $C_2 = \sigma^2$, a assimetria (*skewness*), $C_3 = S\sigma^3$ e a curtose (*kurtosis*), $C_4 = \kappa\sigma^4$. A figura 5.1, da colaboração STAR, mostra o comportamento desses quatro cumulantes em função do número de participantes na colisão, $\langle N_{part} \rangle$. Cada quadro dispõe de dados coletados em diferentes energias de colisão, sendo o quadro (a) o de menor energia, 7.7 GeV, o que traduz-se em menor temperatura e maior potencial químico, e o quadro (g) o de maior energia, 200 GeV, correspondente a altas temperaturas e baixo potencial químico. Os erros estatísticos de C_2 , C_3 e C_4 para colisões centrais de íons de Au a 7.7 GeV são 0.3%, 2.5% e 25%, respectivamente, enquanto que, para colisões de 200 GeV, são de 0.04%, 1.2% e 2.0%, respectivamente. Com isso, podemos ver que, em baixas energias de colisão, onde espera-se encontrar o ponto crítico, as incertezas estatísticas são significativamente maiores. Essa é uma das razões que fez a colaboração STAR lançar o programa BES-II, que tem como objetivo reduzir as incertezas nas medidas em baixas energias de colisão. A previsão é que o programa inicie os trabalhos de coleta de dados precisos no ano de 2018.

Durante a colisão, a produção de partículas em qualquer valor da centralidade pode ser considerada como uma superposição de várias fontes independentes e distribuídas identicamente, sendo o número delas proporcional ao número de participantes na colisão, N_{part} [99]. Isto significa que os cumulantes crescem linearmente com $\langle N_{part} \rangle$ à medida que o volume do sistema aumenta. Este comportamento reflete o fato dos cumulantes serem grandezas extensivas, proporcionais ao volume do sistema.

Para cancelar os efeitos de volume em primeira ordem, é conveniente trabalharmos com razões entre cumulantes ou, equivalentemente, razões entre susceptibilidades. Na figura 5.2 reproduzimos outro gráfico da colaboração STAR [19], mostrando as razões $C_3/C_2 = S\sigma$ e $C_4/C_2 = \kappa\sigma^2$ em função de $\langle N_{part} \rangle$ para as diferentes energias de colisão. Estes observáveis estão relacionados com as seguintes razões de susceptibilidades calculadas em modelos (dada uma temperatura T) [96, 97]:

$$S\sigma = \frac{\chi_B^{(3)}/T}{\chi_B^{(2)}/T^2}, \quad \kappa\sigma^2 = \frac{\chi_B^{(4)}}{\chi_B^{(2)}/T^2}. \quad (5.2)$$

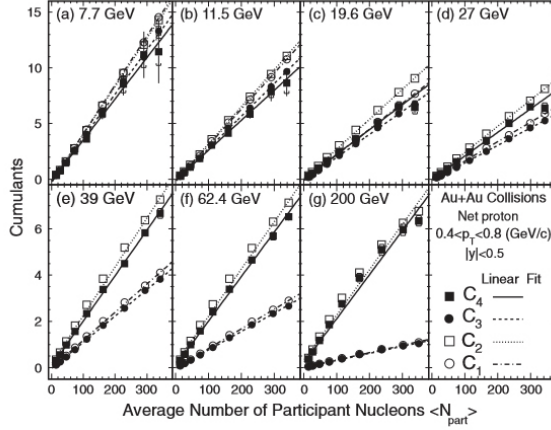


Figura 5.1.: Cumulantes da distribuição de ΔN_p para colisões de íons Au . Retirado de STAR Collaboration [19].

As razões C_3/C_2 e C_4/C_2 mantêm-se próximas da unidade (no modelo conhecido como *hadron resonance gas* [100, 101] são iguais a unidade) para energias de colisão superior a 27 GeV, enquanto que, para $\sqrt{s_{NN}}$ abaixo deste valor, vemos um desvio maior, embora as barras de erros também sejam maiores. Naturalmente, são esperados desvios grandes nestas grandezas caso realmente exista um ponto crítico nesta região do diagrama de fases. Entretanto, conforme discutido na seção 1.4, os dados do programa Beam Energy Scan I não permitem tirar conclusões sobre a existência ou não de um ponto crítico, mas espera-se que esta questão seja resolvida com o programa Beam Energy Scan II. Uma discussão mais detalhada das figuras 5.1 e 5.2 e outras informações sobre a dependencia dos momentos da distribuição ΔN_p com a energia de colisão podem ser encontradas na Ref. [19].

As medidas de $S\sigma$ e $\kappa\sigma^2$ na figura 5.2 são comparadas com expectativas (áreas sombreadas) na qual os cumulantes da distribuição ΔN_p são construídos considerando-se a produção independente de prótons e antiprótons. Neste caso, os cumulantes de diversas ordens do número líquido de prótons são dados por

$$C_n(\Delta N_p) = C_n(N_p) + (-1)^n C_n(N_{\bar{p}}), \quad (5.3)$$

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

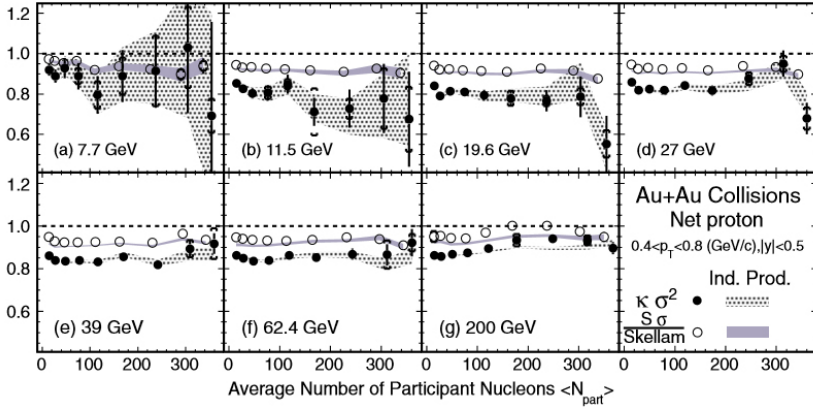


Figura 5.2.: $\kappa\sigma^2/\text{Skellam}$ e $\kappa\sigma^2$ para ΔN_p em diferentes energias de colisão. Retirado da Ref. [19].

onde $C_n(N_p)$ e $C_n(N_{\bar{p}})$ são cumulantes da distribuição do número de prótons, N_p , e de antiprótons, $N_{\bar{p}}$, respectivamente, e $n = 1, 2, 3$, e 4 . Esta aproximação assume que não existe nenhuma correlação entre N_p e $N_{\bar{p}}$ intra-eventos, ou seja, a cada colisão. A área sombreada nos quadros da figura 5.2 está em bom acordo com os dados, mostrando que a opção pelo modelo de produção independente de prótons e antiprótons parece válida. Entretanto, os próprios dados fornecidos pela colaboração STAR podem sugerir que existe uma pequena componente nos cumulantes de ΔN_p além de $C_n(N_p)$ e $C_n(N_{\bar{p}})$. Esta possível componente extra teria origem na correlação entre o número de prótons e antiprótons. Na figura 5.3 mostramos uma tabela com os dados de $C_2(\Delta N_p)$, $C_2(N_p)$ e $C_2(N_{\bar{p}})$ fornecidos pela colaboração STAR [102] para as diferentes energias de colisão analisadas. Na coluna da direita acrescentamos a variação $C_2(N_p) + C_2(N_{\bar{p}}) - C_2(\Delta N_p)$, onde é possível verificar que esta quantidade, embora pequena, é diferente de zero, em contraste com o que seria esperado se a produção de prótons e antiprótons fosse totalmente independente.

Poderíamos nos perguntar se estes números não teriam origem unicamente dos erros estatísticos associados às medidas dos cumulantes. De fato, para $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV e $\sqrt{s_{NN}} = 11.5$ GeV, o erro estatístico mostrado na coluna da direita da figura 5.3 é maior que a própria diferença calculada, de modo que, nesses casos, o real significado dessa diferença poderia ser questionado. Entretanto, para as demais energias de

Energia (GeV)	$C_2(\Delta N_p)$	$C_2(N_p)$	$C_2(N_{\bar{p}})$	$C_2(N_p) + C_2(N_{\bar{p}}) - C_2(\Delta N_p)$
7.7	18.2341	18.0918	0.164964	0.022725 ± 0.153137
11.5	14.7367	14.3354	0.487167	0.085881 ± 0.088555
19.6	11.9110	10.8526	1.13629	0.07789 ± 0.047324
27	10.5705	9.01434	1.62991	0.07375 ± 0.030051
39	10.2311	7.9856	2.34426	0.09876 ± 0.017194
62.4	10.0461	7.05473	3.08132	0.08995 ± 0.023504
200	9.56601	5.58731	4.06512	0.08642 ± 0.010938

Figura 5.3.: Tabela dos valores dos cumulantes das distribuições líquida, de prótons e de antiprótons. Dados retirados de STAR Collaboration [19, 102].

colisão, este não é o caso. Os erros estatísticos tendem a diminuir com o aumento da energia de colisão e, no caso em que $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, o erro é de quase uma ordem de grandeza menor que o valor calculado na tabela. Além disso, o fato de todas as diferenças calculadas na coluna da direita terem o mesmo sinal positivo sugere que dificilmente a origem destas quantidades é unicamente devida a erros estatísticos. Deste modo, acreditamos haver espaço para o estudo da correlação entre o número de prótons e antiprótons, ainda que esta correlação seja pequena.

No restante deste capítulo vamos estudar a correlação entre o número de partículas e antipartículas que, como veremos, pode ser traduzida na correlação entre prótons e antiprótons no contexto do modelo NJL. Vamos verificar se os resultados obtidos com o modelo são de alguma forma compatíveis com os sugeridos pela colaboração STAR. Também vamos verificar o comportamento da correlação próton-antipróton nas proximidades do ponto crítico que, ao contrário da realidade experimental, pode ser facilmente identificado no modelo. Uma questão que surge naturalmente diz respeito ao comportamento da correlação partícula-antipartícula no entorno do ponto crítico (seria importante a ponto de tornar-se relevante na análise dos cumulantes de ΔN_p ?). Por último, vamos estudar os efeitos do acoplamento vetorial, visto no capítulo anterior, na correlação partícula-antipartícula. Como G_V tende a enfraquecer a transição de primeira ordem, deslocando o ponto crítico para temperaturas baixas, entendemos que seria interessante verificar como a correlação no entorno do ponto crítico responde a este deslocamento.

5.3. Correlação no Modelo NJL

Para estudar a correlação entre partículas e anti-partículas no modelo NJL devemos nos lembrar que o potencial termodinâmico possui uma parte referente à partículas e outra parte referente à antipartículas, que identificamos nos capítulos anteriores por meio do sinal do potencial químico μ . Na Eq. (C.22), por exemplo, o termo com a exponencial contendo μ (positivo) refere-se à partículas, enquanto o termo com a exponencial contendo $-\mu$ refere-se à antipartículas. Passamos agora a denotar o potencial químico das partículas como μ_p e o das antipartículas como μ_a com o objetivo de facilitar o entendimento dos cálculos seguintes.

O tipo de correlação entre partícula e antipartícula que nos interessa é aquela relacionada com o segundo momento da distribuição do número líquido de partículas, isto é, com o cumulante C_2 da seção anterior. Esta correlação pode ser obtida calculando-se a susceptibilidade cruzada (fora da diagonal) de segunda ordem, dada pela Eq. (5.1), que é igual, a menos de um sinal, à derivada segunda do potencial termodinâmico com relação ao potencial químico das partículas (μ_p) e das antipartículas (μ_a),

$$\chi_{pa}^{(2)} = -\frac{d^2\Omega}{d\mu_p d\mu_a}, \quad (5.4)$$

onde o subíndice pa em $\chi_{pa}^{(2)}$ refere-se à partícula-antipartícula.

Para facilitar o cálculo de $\chi_{pa}^{(2)}$ vamos reescrever a equação (C.22) em termos de μ_p e μ_a ,

$$\Omega(T, \mu_p, \mu_a, M) = \frac{(M - m)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln[1 + e^{-(E - \mu_p)/T}] \right. \\ \left. + T \ln[1 + e^{-(E - \mu_a)/T}] \right\}, \quad (5.5)$$

onde $\mu_p = \mu$ e $\mu_a = -\mu$. Agora que o nosso potencial termodinâmico é uma função de¹ T , μ_p , μ_a e M , podemos desenvolver a equação (5.4),

$$\chi_{pa}^{(2)} = -\frac{\partial^2\Omega}{\partial M^2} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} \frac{\partial M}{\partial \mu_a} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial M \partial \mu_p} \frac{\partial M}{\partial \mu_a} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial M \partial \mu_a} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial \mu_p \partial \mu_a}. \quad (5.6)$$

¹Ao final, para obtermos os resultados numéricos, devemos sempre fazer $\mu_p \rightarrow \mu$ e $\mu_a \rightarrow -\mu$, como usualmente.

Considerando o potencial termodinâmico dado pela equação (5.5), podemos notar de imediato que o último termo da expressão acima é nulo. Os demais termos podem ser facilmente simplificados, conforme mostraremos a seguir.

Primeiro notamos que

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} = \Omega''_M, \quad (5.7)$$

é a curvatura do potencial termodinâmico (que deve ser avaliada no mínimo). Em seguida podemos simplificar os termos contendo $\partial M/\partial \mu_p$ e $\partial M/\partial \mu_a$ com o auxílio da equação do gap,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0. \quad (5.8)$$

Derivando com relação a μ_p ,

$$\frac{d}{d\mu_p} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_p \partial M} = 0,$$

isolando $\partial M/\partial \mu_p$ e fazendo uso da Eq. (5.7) obtemos

$$\frac{\partial M}{\partial \mu_p} = -\frac{1}{\Omega''_M} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_p}, \quad (5.9)$$

onde o mesmo é válido para $\mu_p \rightarrow \mu_a$. Além disso, tomamos a liberdade de trocar a ordem de derivação com relação a μ_p e M conforme nos seja conveniente, sem qualquer prejuízo. Substituindo a equação (5.9) na expressão para $\chi_{pa}^{(2)}$ encontramos

$$\chi_{pa}^{(2)} = \frac{1}{\Omega''_M} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_a} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_p}. \quad (5.10)$$

A derivada do potencial termodinâmico com relação ao potencial químico é igual a densidade líquida (a menos de um sinal), de modo que podemos simplificar ainda mais a expressão acima escrevendo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_p} = n_p, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_a} = n_a, \quad (5.11)$$

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

onde $-n_p + n_a = \rho$ é a densidade líquida que estudamos em capítulos anteriores. Desse modo, a correlação partícula-antipartícula pode ser escrita como

$$\chi_{pa}^{(2)} = \frac{1}{\Omega_M''} \frac{\partial n_p}{\partial M} \frac{\partial n_a}{\partial M}. \quad (5.12)$$

A equação (5.10) ou, equivalentemente, a equação (5.12), fornecem uma expressão simples para calcularmos $\chi_{pa}^{(2)}$, que está diretamente relacionada com a correlação entre o número de partículas e antipartículas. Mais precisamente, a relação entre $\chi_{pa}^{(2)}$ e a correlação partícula-antipartícula, $C_2(N_{pa})$, é dada simplesmente por [18]

$$C_{(N_{pa})}^{(2)} = \frac{1}{2T^2} \chi_{pa}^{(2)}. \quad (5.13)$$

5.4. Resultados para a Correlação Próton-Antipróton

Podemos usar o potencial termodinâmico do modelo e a Eq. (5.13) para calcular numericamente a correlação entre o número de quarks e antiquarks para diferentes valores de T e μ . Entretanto, os dados da colaboração STAR nos permitem extrair a correlação entre o número de prótons e antiprótons, de modo que, ao compararmos a correlação calculada com o modelo e a calculada a partir dos dados da STAR, devemos levar em conta um fator para corrigir essa diferença. Além disso, devemos buscar resultados que eliminem os efeitos de volume finito, como discutido anteriormente, comparando razões entre cumulantes, ao invés dos cumulantes isoladamente. Nesta seção vamos mostrar os resultados para a correlação próton-antipróton, $R_{p\bar{p}}$, calculados com o modelo NJL,

$$R_{p\bar{p}} = \frac{C_{p\bar{p}}^{(2)}}{\sqrt{C_p^{(1)} C_{\bar{p}}^{(1)}}} = \frac{1}{2} \frac{T \chi_{p\bar{p}}^{(2)}}{\sqrt{\rho_p \rho_{\bar{p}}}}, \quad (5.14)$$

onde $C_{p\bar{p}}^{(2)} = \chi_{p\bar{p}}^{(2)}/2T^2$ foi normalizado pela raiz do produto das densidades de prótons e antiprótons. Estas densidades estão relacionadas aos cumulantes de primeira ordem por meio de

$$C_{p,\bar{p}}^{(1)} = \rho_{p,\bar{p}}/T^3,$$

5.4. Resultados para a Correlação Próton-Antipróton

de modo que a equação (5.14) representa uma razão entre cumulantes, eliminando assim efeitos de volume finito. Note que $R_{p\bar{p}}$ é uma grandeza adimensional.

Na versão do modelo usada nesta tese não temos acesso diretamente à susceptibilidade do número de prótons e antiprótons, $\chi_{p\bar{p}}^{(2)}$, mas apenas à susceptibilidade do número de quarks e antiquarks, $\chi_{q\bar{q}}^{(2)}$, calculada na seção anterior ($\chi_{pa}^{(2)}$). Mesmo assim, podemos estabelecer uma relação entre essas duas grandezas através do seguinte raciocínio. O potencial químico bariônico é o triplo do potencial químico de quarks, isto é, $\mu_B = 3\mu$. Dessa forma, a susceptibilidade do número de bárions e antibárions,

$$\chi_{B\bar{B}}^{(2)} = \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_B \partial \mu_{\bar{B}}}, \quad (5.15)$$

está relacionada com a susceptibilidade do número de quarks e antiquarks,

$$\chi_{q\bar{q}}^{(2)} = \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_q \partial \mu_{\bar{q}}}, \quad (5.16)$$

por um fator de 1/9, isto é,

$$\chi_{B\bar{B}}^{(2)} = \frac{1}{9} \chi_{q\bar{q}}^{(2)}. \quad (5.17)$$

Como temos apenas quarks *up* e *down*, os únicos bárions que podemos formar no modelo são prótons e nêutrons. Dessa forma a susceptibilidade do número de bárions e antibárions pode ser decomposta em quatro componentes,

$$\chi_{B\bar{B}}^{(2)} = \chi_{p\bar{p}}^{(2)} + \chi_{n\bar{n}}^{(2)} + \chi_{n\bar{p}}^{(2)} + \chi_{p\bar{n}}^{(2)}, \quad (5.18)$$

onde os subíndices acima denotam prótons (*p*) ou nêutrons (*n*). Como o modelo possui simetria de isospin (e não considera a interação eletromagnética), prótons e nêutrons são essencialmente iguais, de modo que as susceptibilidades no lado direito da equação acima são todas iguais, o que nos permite escrever

$$\chi_{B\bar{B}}^{(2)} = 4\chi_{p\bar{p}}^{(2)}, \quad (5.19)$$

e, conseqüentemente, usando a equação (5.17),

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

$$\chi_{p\bar{p}}^{(2)} = \frac{1}{36} \chi_{q\bar{q}}^{(2)}. \quad (5.20)$$

A relação entre a densidade bariônica e a densidade do número de quarks é mais simples: $\rho = 3\rho_B$. Novamente, considerando apenas prótons e nêutrons, e levando em conta a simetria de isospin, temos

$$\rho_B = \rho_p + \rho_n = 2\rho_p, \quad (5.21)$$

de modo que,

$$\rho = 6\rho_p. \quad (5.22)$$

Substituindo as equações (5.22) e (5.20) na equação (5.14), obtemos a correlação entre o número de prótons e antiprótons escrita em termos de grandezas envolvendo quarks,

$$R_{p\bar{p}} = \frac{1}{12} \frac{T\chi_{q\bar{q}}^{(2)}}{\sqrt{\rho_q\rho_{\bar{q}}}}. \quad (5.23)$$

A equação (5.23) nos permite calcular a correlação próton-antipróton normalizada usando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks. Os dados disponibilizados pela colaboração STAR para os cumulantes de primeira e segunda ordem permitem que façamos uma comparação entre resultados experimentais e cálculos teóricos. Na figura 5.4 mostramos uma tabela com os valores de C_1 para as distribuições de prótons e antiprótons em cada energia de colisão [102]. Com estes dados podemos calcular a correlação próton-antipróton normalizada dividindo os valores dispostos na coluna da direita da figura 5.3 pela raiz quadrada do produto dos cumulantes C_1 de prótons e antiprótons. Os resultados estão dispostos na tabela da figura 5.5.

Na colisão mais energética, onde $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, o que é equivalente a $\mu \approx 0$, temos $R_{p\bar{p}} = 0.0179$. Não observamos nenhuma tendência clara na variação de $R_{p\bar{p}}$ com $\sqrt{s_{NN}}$ na tabela, mas o maior valor calculado foi $R_{p\bar{p}} = 0.0317$ para uma energia de colisão de 11.5 GeV, o que equivale a $\mu_B \gtrsim 300$ MeV. O menor valor de $R_{p\bar{p}}$ ocorre em $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV mas, como já mencionamos, os dados para este valor da energia

5.4. Resultados para a Correlação Próton-Antipróton

Energia (GeV)	$C_1(N_p)$	$C_1(N_{\bar{p}})$
7.7	18.9176 ± 0.0097	0.165319 ± 0.0009
11.5	15.0053 ± 0.0058	0.489647 ± 0.0011
19.6	11.3752 ± 0.0034	1.15056 ± 0.0011
27	9.39056 ± 0.0022	1.65245 ± 0.0009
39	8.22125 ± 0.0012	2.3786 ± 0.0006
62.4	7.25439 ± 0.0015	3.1352 ± 0.0010
200	5.66406 ± 0.0006	4.11582 ± 0.0006

Figura 5.4.: Tabela dos valores de C_1 das distribuições de prótons e de antiprótons. Dados retirados de STAR Collaboration [19, 102].

Energia (GeV)	$R_{p\bar{p}}$
7.7	0.0128157
11.5	0.0316783
19.6	0.0215302
27	0.018722
39	0.0223332
62.4	0.0188611
200	0.0178987

Figura 5.5.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons em diferentes energias de colisão.

de colisão possuem um erro estatístico grande, da mesma magnitude do próprio valor de $R_{p\bar{p}}$, de modo que deve ser visto com cautela.

Os valores de $R_{p\bar{p}}$ calculados com o modelo NJL, equação (5.23), estão plotados na figura 5.6 como função da temperatura. A curva preta mostra o caso $\mu = 0$, onde o pico de $R_{p\bar{p}}$ possui magnitude 0.0357 e ocorre em uma temperatura ligeiramente abaixo da temperatura pseudo-crítica de crossover, $T_{pc} = 189$ MeV. Os dados da colaboração STAR para $\mu \approx 0$ ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV) apontam $R_{p\bar{p}} = 0.0179$ (figura 5.5), o que é praticamente a metade do valor máximo calculado com o modelo². Levando em conta a simplicidade do modelo e a aproximação de campo médio usada para calcular o potencial termodinâmico, o resultado parece razoável.

A curva vermelha na figura 5.6 mostra a correlação para $\mu = 200$ MeV com pico de

²O valor de $R_{p\bar{p}}$ na curva preta da figura 5.6 atinge o valor 0.0179 em $T = 158$ MeV.

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

magnitude 0.0320 em $T \simeq 151$ MeV, enquanto na curva azul temos $\mu = 300$ MeV e pico em $T = 101$ MeV com magnitude 0.0347. Não podemos dizer exatamente a qual energia de colisão esse intervalo de valores de μ corresponde, mas, comparando com os menores de $\sqrt{s_{NN}}$ na figura 5.5, vemos que o resultado é razoável.

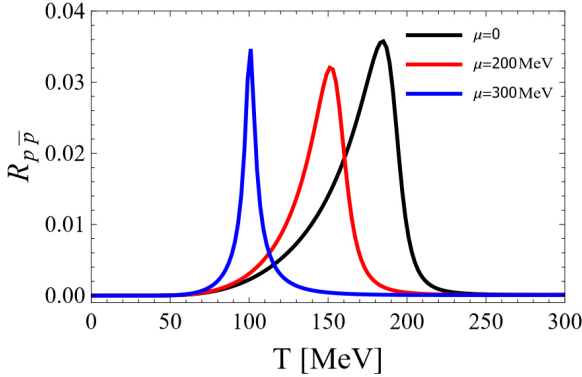


Figura 5.6.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons calculada com o modelo de Nambu–Jona-Lasinio como função da temperatura. Na curva preta $\mu = 0$, enquanto nas curvas vermelha e azul $\mu = 200$ MeV e $\mu = 300$ MeV, respectivamente.

Estendendo a análise acima para todos os valores de μ e T , podemos calcular $R_{p\bar{p}}$ em todo o diagrama de fases. A figura 5.7 mostra o comportamento de $R_{p\bar{p}}$ ao longo de todo o diagrama. Podemos observar que a correlação é zero na maior parte do plano $T - \mu$, mas cresce nas proximidades da temperatura pseudo-crítica de crossover e apresenta um salto exatamente no ponto crítico, atingindo a magnitude de 0.115. Em temperaturas inferiores à temperatura crítica, $R_{p\bar{p}}$ cai rapidamente para zero. Na figura 5.8, quadro da direita, mostramos um gráfico da correlação ao longo da linha de transição de fase (incluimos novamente o diagrama de fases, quadro da esquerda, para uma melhor comparação), incluindo a primeira ordem em baixas temperaturas, o ponto crítico (identificado pelo pico), e a linha de crossover em temperaturas mais elevadas.

A conclusão que podemos tirar destes resultados é que o modelo NJL pode descrever de forma qualitativa a correlação entre o número de prótons e antiprótons no plano $T - \mu$, diferindo, naturalmente, por toda a simplicidade do modelo, quantitativamente

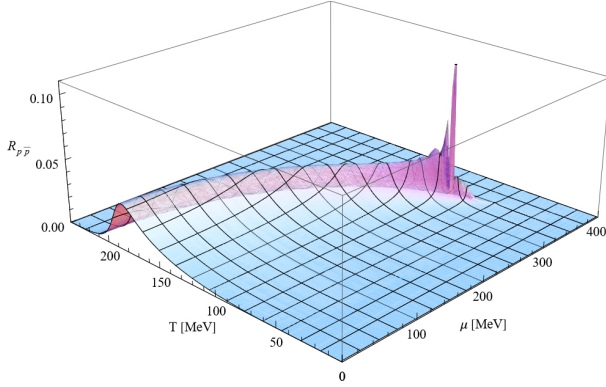


Figura 5.7.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo do diagrama de fases do modelo de NJL.

dos valores calculados com base nos dados da colaboração STAR. O modelo ainda prevê um salto de $R_{p\bar{p}}$ nas vizinhanças do ponto crítico elevando a magnitude da correlação de forma acentuada.

5.5. Correlação com Canal Vetorial

No capítulo anterior vimos que o efeito do termo vetorial no modelo NJL é o de “enfraquecer” a transição de primeira ordem, reduzindo a temperatura crítica e deslocando o ponto crítico no diagrama de fases para potenciais químicos maiores. Neste cenário, podemos nos questionar se as mesmas características observadas na correlação partícula-antipartícula sem o acoplamento vetorial permaneceriam com a inclusão de G_V . Quanto menor for a temperatura em um determinado ponto do diagrama de fases, menor será a importância das antipartículas (todas as grandezas termodinâmicas associadas as antipartículas adquirem um peso menor) neste ponto, de modo que o deslocamento da temperatura crítica para valores mais baixos, causado pelo acoplamento vetorial, pode influenciar a correlação entre o número de partículas e antipartículas. Nesta seção vamos verificar se isto realmente acontece.

Vamos então calcular a correlação, $\chi_{pa}^{(2)}$, com o termo vetorial. O efeito deste termo no potencial termodinâmico é o de acrescentar o termo $-G_V \rho^2$ na parte clássica e o termo $2G_V \rho/T$ nas exponenciais responsáveis pelas contribuições térmicas:

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

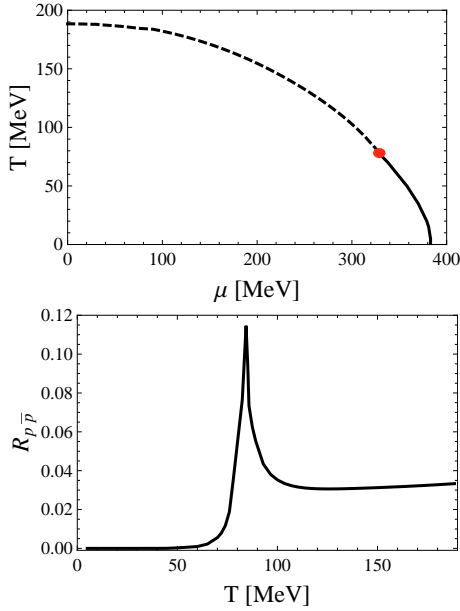


Figura 5.8.: Esquerda: Diagrama de fases do modelo de NJL. Direita: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo da linha de transição de fase do diagrama de fases. O pico ocorre na temperatura crítica.

$$\Omega(T, \mu_p, \mu_a, M, \rho) = \frac{(M - m)^2}{4G} - G_V \rho^2 + \Omega_M(T, \mu_p, \mu_a, M, \rho), \quad (5.24)$$

onde o termo de quasi-partícula é

$$\Omega_M(T, \mu_p, \mu_a, M, \rho) = -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + e^{-(E - \mu_p + 2G_V \rho)/T} \right] \right. \\ \left. + T \ln \left[1 + e^{-(E - \mu_a - 2G_V \rho)/T} \right] \right\}. \quad (5.25)$$

Para o nosso caso de interesse, é conveniente mantermos o potencial termodinâmico como função de ρ , evitando o uso do potencial químico efetivo, $\tilde{\mu}$, introduzido no capítulo anterior. A razão para essa escolha é que $\tilde{\mu}$ depende de μ , que foi separado

em μ_p e μ_a . Dessa forma, se quiséssemos trabalhar com o potencial químico efetivo, teríamos que considerar dois deles, $\tilde{\mu}_p$ e $\tilde{\mu}_a$. O potencial termodinâmico seria uma função de seis variáveis, o que dificultaria o cálculo de derivadas implícitas. Esses problemas podem ser evitados mantendo-se Ω como função de ρ , da forma como aparece na equação (5.25).

A equação do gap permanece a mesma dos capítulos anteriores mas, como Ω agora depende de ρ , precisamos modificar a condição estacionária definida na equação (4.18). No apêndice E mostramos que esta condição estacionária pode ser substituída pela seguinte equação:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0. \quad (5.26)$$

A condição estacionária acima tem origem na relação entre a derivada de Ω com respeito a μ_p (ou μ_a) e a densidade de partículas (ou antipartículas). Mais precisamente,

$$\frac{d\Omega}{d\mu_p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_p} + \frac{\partial \Omega}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} = -\rho_p, \quad (5.27)$$

$$\frac{d\Omega}{d\mu_a} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_a} = -\rho_a, \quad (5.28)$$

e, portanto, devemos ter

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0, \quad (5.29)$$

para satisfazer as condições. As condições dadas pelas equações (5.29) e (4.18) são equivalentes e produzem os mesmo resultados numéricos para a massa efetiva dos quarks e grandezas termodinâmicas.

Para calcular $\chi_{pa}^{(2)}$ vamos proceder da mesma forma que na seção anterior, mas notando que o potencial termodinâmico agora é função também de ρ , i.e. $\Omega = \Omega(T, \mu_p, \mu_a, M, \rho)$. Tomando a derivada com relação a μ_a , levando em conta derivadas implícitas, obtemos

$$\frac{d\Omega}{d\mu_a} = \frac{\partial \Omega}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_a}. \quad (5.30)$$

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

Derivando com relação a μ_p , rearranjando os termos e levando em conta a equação (5.4) chegamos em

$$\begin{aligned} \chi_{pa}^{(2)} = & -\frac{\partial M}{\partial \mu_a} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_p} \right) \\ & -\frac{\partial \rho}{\partial \mu_a} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \rho} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \mu_p} \right) \\ & -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_a \partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_a \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_p \partial \mu_a}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Na equação acima todos os termos que não contém ρ já apareceram na equação (5.6). Isso significa que podemos escrever a correlação como a soma de termos dependentes e independentes de G_V , $\chi_{pa}^{(2)} = \chi_{pa}^{(2)}(G_V = 0) + \chi_{pa}^{(2)}(G_V \neq 0)$. Para deixar isto mais claro, vamos simplificar a maioria dos termos na equação (5.31).

Começamos pelos termos $\partial M / \partial \mu_p$ e $\partial M / \partial \mu_a$. De modo análogo ao caso sem interação vetorial, usamos a equação do gap,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0. \quad (5.32)$$

Tomando a derivada com relação a μ_p ,

$$\frac{d}{d\mu_p} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_p} = 0. \quad (5.33)$$

Fazendo o mesmo com relação a μ_a ,

$$\frac{d}{d\mu_a} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M^2} \frac{\partial M}{\partial \mu_a} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_a} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial \mu_a} = 0. \quad (5.34)$$

Podemos proceder de forma análoga para os termos $\partial \rho / \partial \mu_p$ e $\partial \rho / \partial \mu_a$ usando a condição estacionária,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0, \quad (5.35)$$

e tomando a derivada com relação a μ_p ,

$$\frac{d}{d\mu_p} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \mu_p} = 0, \quad (5.36)$$

e μ_a ,

$$\frac{d}{d\mu_a} \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} \right) = \frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2} \frac{\partial\rho}{\partial\mu_a} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho\partial M} \frac{\partial M}{\partial\mu_a} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho\partial\mu_a} = 0. \quad (5.37)$$

Para as derivadas segundas do potencial termodinâmico usaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial M^2} = \Omega_M'', \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2} = \Omega_\rho'', \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial M\partial\rho} = \Omega_{M\rho}'', \quad (5.38)$$

de modo que a Eq. (5.33) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_p\partial M} + \Omega_M'' \frac{\partial M}{\partial\mu_p} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial\rho}{\partial\mu_p} = 0, \quad (5.39)$$

assim como a Eq. (5.34) torna-se

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_a\partial M} + \Omega_M'' \frac{\partial M}{\partial\mu_a} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial\rho}{\partial\mu_a} = 0. \quad (5.40)$$

As equações (5.36) e (5.37) agora são escritas como

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_p\partial\rho} + \Omega_\rho'' \frac{\partial\rho}{\partial\mu_p} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial M}{\partial\mu_p} = 0, \quad (5.41)$$

e

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_a\partial\rho} + \Omega_\rho'' \frac{\partial\rho}{\partial\mu_a} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial M}{\partial\mu_a} = 0, \quad (5.42)$$

de onde podemos obter uma expressão para $\partial\rho/\partial\mu_p$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mu_p} = -\frac{1}{\Omega_\rho''} \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_p\partial\rho} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial M}{\partial\mu_p} \right], \quad (5.43)$$

sendo o mesmo válido para μ_a (apenas substituindo μ_p por μ_a na equação acima).

Substituindo a Eq. (5.43) na Eq. (5.33), chegamos em

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_p\partial M} + \Omega_M'' \frac{\partial M}{\partial\mu_p} + \Omega_{M\rho}'' \left[-\frac{1}{\Omega_\rho''} \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mu_p\partial\rho} + \Omega_{M\rho}'' \frac{\partial M}{\partial\mu_p} \right) \right] = 0. \quad (5.44)$$

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

Isolando $\partial M/\partial\mu_p$ na expressão acima encontramos

$$\frac{\partial M}{\partial\mu_p} \left[\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right] = \frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_p \partial\rho} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_p \partial M}, \quad (5.45)$$

de modo que

$$\frac{\partial M}{\partial\mu_p} = \left[\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right]^{-1} \left[\frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_p \partial\rho} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_p \partial M} \right]. \quad (5.46)$$

Repetindo este procedimento com μ_a ao invés de μ_p , temos

$$\frac{\partial M}{\partial\mu_a} = \left[\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right]^{-1} \left[\frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_a \partial\rho} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\mu_a \partial M} \right]. \quad (5.47)$$

Substituindo a Eq. (5.46) na (5.36), chegamos em

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mu_p} = -\frac{1}{\Omega''_\rho} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial\rho \partial\mu_p} + \Omega''_{M\rho} \left(\frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\rho \partial\mu_p} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial M \partial\mu_p} \right) \left(\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right)^{-1} \right]. \quad (5.48)$$

Podemos introduzir duas variáveis para simplificar a notação:

$$n_p = \frac{\partial\Omega}{\partial\mu_p} \quad \text{e} \quad n_a = \frac{\partial\Omega}{\partial\mu_a}, \quad (5.49)$$

de modo que a Eq. (5.48) torna-se

$$\rho'_p = \frac{\partial\rho}{\partial\mu_p} = -\frac{1}{\Omega''_\rho} \left[\frac{\partial n_p}{\partial\rho} + \Omega''_{M\rho} \left(\frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial n_p}{\partial\rho} - \frac{\partial n_p}{\partial M} \right) \left(\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right)^{-1} \right], \quad (5.50)$$

enquanto a Eq. (5.46) pode ser escrita como

$$M'_p = \frac{\partial M}{\partial\mu_p} = \left[\Omega''_M - \frac{(\Omega''_{M\rho})^2}{\Omega''_\rho} \right]^{-1} \left[\frac{\Omega''_{M\rho}}{\Omega''_\rho} \frac{\partial n_p}{\partial\rho} - \frac{\partial n_p}{\partial M} \right]. \quad (5.51)$$

Para as antipartículas chegamos no mesmo resultado apenas fazendo a substituição $p \rightarrow a$. Finalmente, a susceptibilidade cruzada do modelo NJL com acoplamento vetorial pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \chi_{pa}^{(2)} = & M'_a \left(\Omega''_M M'_p + \Omega''_{M\rho} \rho'_p + \frac{\partial n_p}{\partial M} \right) + \rho'_a \left(\Omega''_\rho \rho'_p + \Omega''_{M\rho} M'_p + \frac{\partial n_p}{\partial \rho} \right) \\ & + \frac{\partial n_a}{\partial M} M'_p + \frac{\partial n_a}{\partial \rho} \rho'_p + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_p \partial \mu_a}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Com a equação (5.52) podemos calcular a correlação entre o número de prótons e antiprótons, dada pela equação (5.23), e estudar os possíveis efeitos do acoplamento vetorial nesta grandeza.

5.6. Resultados de $R_{p\bar{p}}$ com Acoplamento Vetorial

Em altas temperaturas e baixo potencial químico, o acoplamento vetorial tem pouco efeito sobre o diagrama de fases do modelo NJL, de modo que não devemos esperar que a correlação próton-antipróton apresente grandes diferenças com relação ao caso sem acoplamento vetorial nesta região do diagrama de fases. Entretanto, vale ressaltar que $\chi_{pa}^{(2)}$ é uma derivada segunda do potencial termodinâmico e, portanto, é mais sensível a quaisquer variações que G_V possa ocasionar em Ω do que as grandezas termodinâmicas estudadas no capítulo anterior (veja seção 7.5).

Na figura 5.9 mostramos o comportamento de $R_{p\bar{p}}$ em função de T para $\mu = 0$ (quadro da esquerda) e diferentes valores de G_V indicados na legenda. Incluímos a curva com $G_V = 0$, tracejada, apenas para fins de comparação. Conseguimos ver pequenos incrementos no pico das curvas à medida que G_V cresce. A magnitude dos picos é de 0.0387, 0.0412, 0.0434 e 0.0454 para $G_V = 0.1 G_S$, $G_V = 0.2 G_S$, $G_V = 0.3 G_S$ e $G_V = 0.4 G_S$, respectivamente. Esses valores se afastam cada vez mais do valor de 0.0157 obtido a partir dos dados da colaboração STAR para a colisão de $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV ($\mu \approx 0$). Todos os picos estão localizados na mesma temperatura pseudo-crítica de crossover, independente de G_V , como era de se esperar pelo diagrama de fases apresentado no capítulo anterior, figura 4.7. Após o pico, em altas temperaturas, podemos notar um comportamento curioso. Enquanto a curva tracejada, com $G_V = 0$, retorna para zero, as demais curvas, independentemente do valor de G_V , caem menos e permanecem em patamares mais elevados que a curva

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

tracejada. Quanto maior o valor de G_V , menor é o decaimento após o pico³.

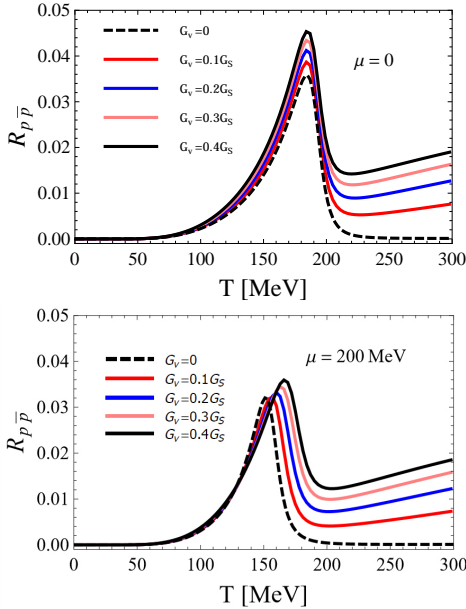


Figura 5.9.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons como função da temperatura para diferentes valores de G_V . O potencial químico está fixado em zero no quadro da esquerda e em 200 MeV no quadro da direita. A curva para $G_V = 0$, tracejada, foi acrescentada para fins de comparação.

À medida que aumentamos μ , podemos notar maiores diferenças entre as curvas de $R_{p\bar{p}}$ em função dos efeitos do acoplamento vetorial. Na figura 5.9, quadro a direita, mostramos o comportamento da correlação em função da temperatura para $\mu = 200$ MeV. Vemos que os picos ocorrem em temperaturas pseudo-críticas diferentes para diferentes valores de G_V , como esperado. Além disso, as magnitudes dos picos nas curvas com $G_V \neq 0$ ainda são maiores que no caso sem G_V , mas podemos notar que estão mais próximas entre si do que no caso $\mu = 0$. As magnitudes nos picos são de 0.0320, 0.0322, 0.0332, 0.0344 e 0.0359 para $G_V = 0$, $G_V = 0.1 G_S$, $G_V = 0.2 G_S$,

³Quando fazemos $G_V \rightarrow 0$, recuperamos os resultados obtidos na seção anterior, sem acoplamento vetorial.

$G_V = 0.3 G_s$ e $G_V = 0.4 G_s$, respectivamente.

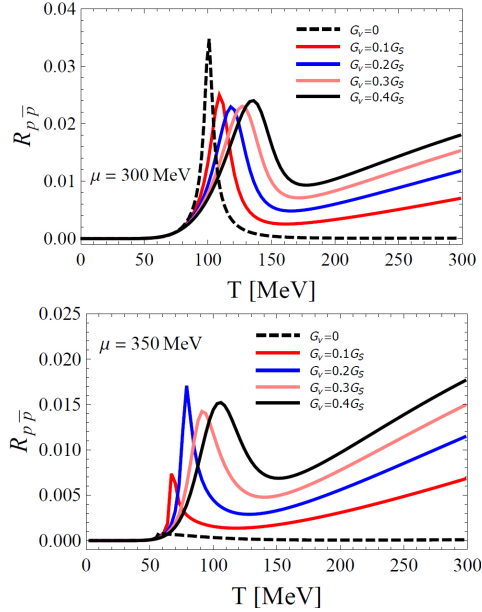


Figura 5.10.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons como função da temperatura para diferentes valores de G_V . O potencial químico está fixado em 300 MeV no quadro da esquerda e em 350 MeV no quadro da direita. A curva para $G_V = 0$, tracejada, foi acrescentada para fins de comparação.

Na figura 5.10 temos o mesmo esquema da figura anterior, mas com $\mu = 300$ MeV (esquerda) e $\mu = 350$ MeV (direita). Na figura da esquerda vemos que a curva tracejada, $G_V = 0$, apresenta um pico mais acentuado em relação as demais curvas com $G_V \neq 0$. Isso ocorre devido a relativa proximidade com o ponto crítico. Como o acoplamento vetorial desloca o ponto crítico para potenciais químicos maiores, as curvas com $G_V \neq 0$ em $\mu = 300$ MeV ainda apresentam uma forma suave nos seus pontos máximos. O mesmo não ocorre na figura da direita, onde $\mu = 350$ MeV. Nesse caso tanto a curva com $G_V = 0.1 G_s$ quanto a curva com $G_V = 0.2 G_s$ apresentam picos acentuados devido à proximidade do ponto crítico. A curva tracejada não apresenta sinal significativo porque o potencial químico crítico em $G_V = 0$ encontra-se abaixo

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

de 350 MeV. As magnitudes de $R_{p\bar{p}}$ são menores, de modo geral, em $\mu = 350$ MeV do que em valores mais baixos do potencial químico. Isso ocorre em parte porque a temperatura pseudo-crítica de crossover diminui com o aumento de μ , reduzindo assim a densidade de antipartículas e, conseqüentemente, a correlação partícula-antipartícula.

Estendendo a análise para todo o plano $T - \mu$, podemos ter uma idéia melhor dos efeitos do acoplamento vetorial em $R_{p\bar{p}}$. Na figura 5.11 mostramos a correlação próton-antipróton no plano $T - \mu$ para $G_V = 0.3 G_s$. Podemos notar a semelhança com a figura 5.7, mas o pico de $R_{p\bar{p}}$ no ponto crítico é bem menor no caso com acoplamento vetorial. O fato do ponto crítico estar localizado em temperaturas menores para $G_V \neq 0$ ajuda a explicar essa queda de magnitude na correlação. No caso de $G_V = 0.4 G_s$, figura 5.12, o ponto crítico está localizado em temperatura ainda menor, de modo que nenhum pico na correlação próton-antipróton foi observado nesse caso.

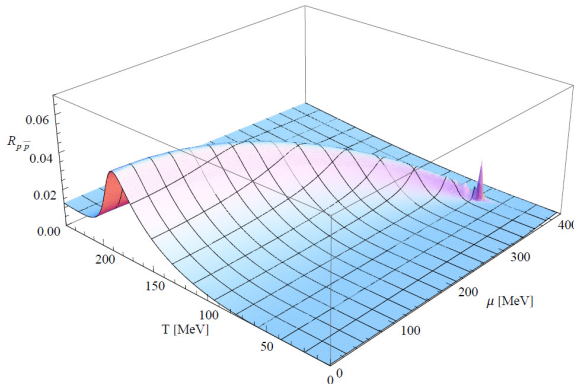


Figura 5.11.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons no plano $T - \mu$ para $G_V = 0.3 G_s$.

Para comparar as magnitudes de $R_{p\bar{p}}$ nos pontos críticos em diferentes valores de G_V , mostramos um gráfico da correlação ao longo da linha de transição de fase, figura 5.13. Nesse gráfico vemos que a magnitude de $R_{p\bar{p}}$ é maior no ponto crítico da curva sem acoplamento vetorial, linha tracejada. À medida que aumentamos G_V (linhas cheias), o pico diminui até que, para $G_V = 0.4 G_s$, desaparece. Os valores de $R_{p\bar{p}}$ nos picos são de 0.114, 0.0771, 0.0514 e 0.0185 para $G_V = 0$, $G_V = 0.1 G_s$, $G_V = 0.2 G_s$

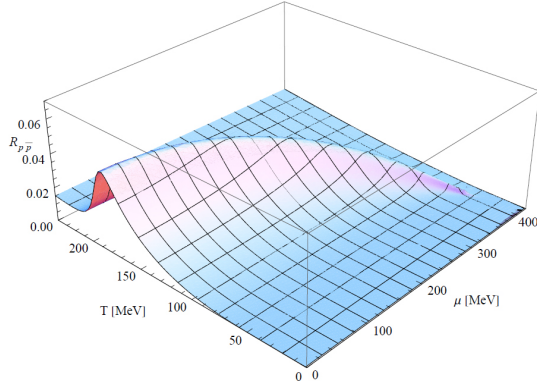


Figura 5.12.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons no plano $T - \mu$ para $G_V = 0.4 G_s$.

e $G_V = 0.3 G_s$, respectivamente.

Basicamente podemos tirar duas conclusões a partir dos cálculos da correlação próton-antipróton com acoplamento vetorial. A primeira é que o acoplamento vetorial contribuiu para aumentar o valor de $R_{p\bar{p}}$ em relação ao valor obtido sem acoplamento mesmo em baixos potenciais químicos, afastando assim os valores calculados com o modelo de Nambu–Jona-Lasinio dos obtidos utilizando-se os dados da colaboração STAR. A segunda é que o pico na correlação próton-antipróton observado no ponto crítico diminui com G_V . As flutuações bruscas de $R_{p\bar{p}}$ em baixas temperaturas e altos potenciais químicos poderiam ser usadas como evidências da existência de um ponto crítico no diagrama de fases. No entanto, esse tipo de sinal pode não ser forte o suficiente ou até mesmo inexistente se a matéria formada nas colisões de íons em baixas energias for melhor descrita por uma interação com acoplamento vetorial repulsivo do tipo estudado nesta tese.

5. A Correlação Partícula-Antipartícula

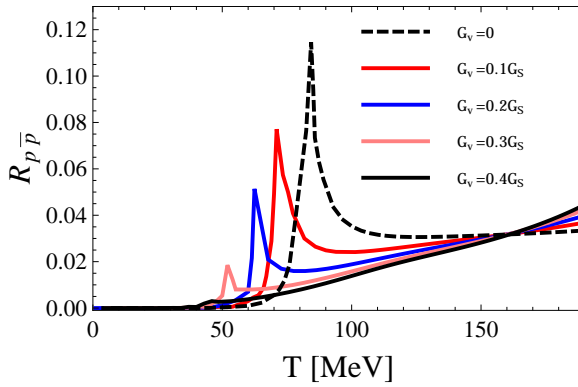


Figura 5.13.: Correlação entre as distribuições do número de prótons e antiprótons ao longo da linha de transição para diferentes valores de G_V .

6. Conclusões

O trabalho apresentado nesta tese foi separado em duas etapas: o cálculo da tensão superficial na matéria de quarks magnetizada e o cálculo da correlação partícula-antipartícula ao longo do plano $T - \mu$. Ambas as etapas foram desenvolvidas no contexto do modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks leves, usado para estudar a transição quiral na matéria de quarks. Calculamos o potencial efetivo na aproximação de campo médio e estudamos o diagrama de fases do modelo, em especial a região de baixas temperaturas e altas densidades, onde a transição é de primeira ordem, com consequências para as estrelas de nêutrons e magnetares, que estão localizadas nessa região do diagrama de fases. O ponto crítico está localizado em temperaturas e densidades intermediárias, enquanto que, em altas temperaturas, a “transição” é do tipo crossover.

Na primeira etapa estudamos a termodinâmica do modelo e os efeitos do campo magnético sobre o diagrama de coexistência de fases, onde foi possível verificar que a densidade na fase de simetria restaurada, ρ^H , oscila com o campo magnético em função do preenchimento dos níveis de Landau. Calculamos a tensão superficial na matéria de quarks para diferentes valores de B e verificamos que, em geral, γ segue o mesmo padrão de oscilação de ρ^H , reduzindo seu valor (em campo zero) em cerca de 30% (em $eB = 5.5m_\pi^2$) e voltando a crescer para campos maiores. Vimos que a formação de estrelas híbridas com fase mista poderia ocorrer se $\gamma < 40 \text{ MeV/fm}^2$ [32], de modo que foi possível concluir que a formação desta fase poderia ocorrer em estrelas com campos magnéticos de até $\sim 10m_\pi^2/e \sim 3 \times 10^{19} \text{ G}$ e que seria até mesmo favorecida em campos da ordem de $\sim 6m_\pi^2/e \sim 1.8 \times 10^{19} \text{ G}$. Para campos mais altos a tensão superficial volta a aumentar, ultrapassando o valor de 40 MeV/fm^2 em $eB \simeq 11m_\pi^2$. Entretanto, como bem apontado por Kroff e Fraga na Ref. [103], outras grandezas, como o raio crítico de bolhas e o potencial químico de coexistência, também são importantes para o processo de nucleação [39]. Estudando o comportamento dessas outras grandezas como função do campo magnético, os autores mostraram que o processo de nucleação pode ser favorecido mesmo que a tensão superficial seja um

6. Conclusões

pouco mais alta [103]. Desse modo, até mesmo o aumento de γ com B não elimina completamente a possibilidade de formação de fase mista.

Nossos resultados para a tensão superficial foram obtidos a partir de um modelo efetivo simples e uma aproximação de campo médio. Portanto, podemos nos perguntar se a inclusão de outras características como estranheza, interação vetorial, correções além de campo médio, confinamento via loop de Polyakov, mudanças de parametrização, entre outras, poderiam influenciar nossos resultados numéricos tanto quantitativamente como qualitativamente. Em se tratando da parametrização do modelo, é importante ressaltar que um acoplamento mais forte tende a aumentar a linha de transição de primeira ordem no plano $T - \mu$, fazendo com que haja também um aumento na região de coexistência de fases no plano $T - \rho$. Consequentemente, um acoplamento mais forte tende a produzir uma tensão superficial maior, enquanto um acoplamento fraco deve reduzir o valor de γ , como demonstrado na Ref. [40] para $B = 0$. Com relação a interação vetorial repulsiva, esta tende a reduzir a linha de transição de primeira ordem, como vimos no capítulo 4, atuando em sentido contrário a um acoplamento escalar forte e aos efeitos produzidos pelo campo magnético. Dessa forma, é de se esperar que a tensão superficial diminua com G_V . Na Ref. [64] os autores contrastam os efeitos de G_V na linha de transição de primeira ordem com os efeitos do campo magnético, que atua no sentido de fortalecer a transição de primeira ordem.

Acreditamos que a aproximação de campo médio adotada ao longo da tese é adequada como um primeiro passo na busca tanto de resultados qualitativos como quantitativos. A utilização de técnicas mais refinadas, como a teoria de perturbação otimizada (OPT), tende a reduzir o valor da tensão superficial de modo análogo ao acoplamento vetorial porque, conforme mostrado nas Refs. [62, 85], os termos de troca (Fock), que não contribuem em campo médio, produzem um efeito similar ao observado em campo médio com $G_V \neq 0$. Isso ocorre porque a pressão calculada com OPT possui um termo $-G_S/(N_c N_f)\rho^2$, onde G_S é o acoplamento escalar usual, de modo que contribuições do tipo vetorial são geradas por correções quânticas mesmo quando $G_V = 0$. A relação entre campo médio com $G_V \neq 0$ e OPT com $G_V = 0$ e suas consequências para a transição de primeira ordem foram analisadas em detalhe na Ref. [104]. Com base nesses resultados podemos concluir que, em princípio, a inclusão de correções além de campo médio tenderiam a reduzir o valor da tensão superficial.

Um fator importante para tratamento de estrelas de nêutrons em astrofísica é a inclusão de estranheza. Na Ref. [13], os autores argumentam que o verdadeiro estado fundamental da matéria é composto por quarks *up*, *down* e *strange*, hipótese esta conhecida como conjectura de Bodmer-Witten. Desse modo o interior das estrelas de nêutrons deve ser composto predominantemente por quarks *u*, *d* e *s*, além de léptons para o caso de neutralidade de carga. Os efeitos da estranheza na tensão superficial foram originalmente abordados nas Refs. [36, 105] no contexto de um modelo de gás de férmions e do modelo de sacolas do MIT, respectivamente. O método geométrico de Randrup foi aplicado ao modelo NJL com três sabores em $B = 0$, resultando em $\gamma_0 = 20.42 \text{ MeV}/\text{fm}^2$, valor dentro das estimativas [40]. Além disso, os autores da Ref. [41], utilizando o Polyakov quark meson model com três sabores, verificaram que a tensão superficial não é drasticamente afetada pela estranheza. Entretanto, a tensão superficial para a matéria de quarks com três sabores na presença de um campo magnético externo ainda não foi calculada, até onde temos conhecimento.

A segunda parte da tese abordou um problema inteiramente diferente. Ainda assim, foi possível aproveitar grande parte do conteúdo desenvolvido acerca do modelo NJL na primeira etapa para a análise dos problemas propostos na segunda etapa. Um dos problemas atuais na física de altas energias diz respeito à busca por evidências experimentais do ponto crítico da QCD. Os primeiros resultados do programa *Beam Energy Scan* não foram conclusivos quanto a existência ou não do ponto crítico, de modo que o problema continua em aberto. Desse modo, o estudo de flutuações e correlações associadas a transições de fase e comportamentos críticos encontra-se em plena atividade e tem contribuído com as tentativas de se resolver o problema.

Calculamos a correlação entre o número de prótons e antiprótons relacionando esta grandeza à susceptibilidade do número de partículas e antipartículas calculada com o modelo NJL. Comparamos os resultados com os calculados a partir dos dados da colaboração STAR [102]. Os dados mais precisos, em $\mu \approx 0$, que equivalem a colisões mais energéticas, mostraram que a correlação próton-antipróton, dada pela Eq. (5.14), é de 0.0179. O valor calculado usando o modelo é praticamente o dobro, o que interpretamos como um resultado razoável dada a simplicidade do mesmo. No ponto crítico observamos um pico na correlação, que elevou seu valor para 0.11.

No capítulo 4 adicionamos o termo vetorial repulsivo $(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2$ ao modelo e analisamos as modificações provocadas na termodinâmica e no diagrama de fases. Vimos que o acoplamento G_V tende a enfraquecer a transição de primeira ordem, diminuindo a

6. Conclusões

temperatura crítica e aumentando o potencial químico crítico. Um dos nossos objetivos ao estudar o acoplamento vetorial era verificar o comportamento da correlação do número de partículas e antipartículas à medida que G_V alterava as características do diagrama de fases. Vimos que, em $\mu = 0$, $R_{p\bar{p}}$ tem um ligeiro aumento em relação ao caso sem acoplamento vetorial, resultado este que se afasta do valor calculado com os dados da colaboração STAR. Este comportamento se manifesta para todo valor de $G_V > 0$, sendo que, quanto maior o valor de G_V , mais o valor máximo de $R_{p\bar{p}}$ se afasta dos dados experimentais. Este cenário se modifica muito pouco quando $\mu \neq 0$. Com relação ao ponto crítico, vimos que $R_{p\bar{p}}$ diminui consideravelmente com o aumento de G_V , chegando a praticamente se anular para $G_V = 0.4G_s$, conforme mostrado na figura 5.12.

Quanto a perspectivas futuras referentes a esta tese, trabalhamos com algumas possibilidades:

- Recentemente, Chen *et al.*, usando o modelo de Nambu–Jona-Lasinio na versão $SU(3)$, calcularam susceptibilidades de segunda e terceira ordem com o objetivo de verificar se algumas características gerais independentes de modelos estão presentes também no modelo NJL [106]. Os autores, no entanto, não incluíram o termo de interação vetorial, que, como vimos, pode modificar de modo significativo a localização do ponto crítico e, conseqüentemente, as susceptibilidades.

- O uso de diferentes parametrizações no modelo NJL pode modificar algumas características que estiveram presentes na maioria dos capítulos da tese, como a massa efetiva dos quarks em $T = \mu = 0$, que na parametrização adotada é de 400 MeV. Outras parametrizações podem baixar esse valor para algo mais próximo a 350 MeV, o que reduziria a temperatura pseudo-crítica de crossover e modificaria a localização do ponto crítico. Nesse contexto seria interessante verificar o comportamento da correlação entre o número de prótons e antiprótons em diferentes parametrizações, principalmente no eixo $\mu = 0$, onde a comparação com os resultados da colaboração STAR tem maior importância devido a maior precisão dos dados. Uma redução em T_{pc} poderia ocasionar uma redução em $R_{p\bar{p}}$, aproximando o valor teórico do experimental.

- Uma outra alternativa seria considerar o uso de outros modelos efetivos para a interação forte, como, por exemplo, o modelo Sigma Linear (LSM). Este modelo possui a vantagem de ser renormalizável em $3 + 1$ dimensões, podendo ser usado junto a um novo método de aproximação que envolve uma combinação do método

OPT com equações provenientes do grupo de renormalização. O resultado é uma nova aproximação conhecida como RGOPT (renormalization group optimized perturbation theory). A ideia básica da RGOPT é aproveitar a simplicidade de cálculos perturbativos para obter contribuições que normalmente estão além das de campo médio. A novidade é que, ao fixar o parâmetro arbitrário com o método variacional da OPT, resolve-se conjuntamente as equações do grupo de renormalização, assegurando-se assim uma invariância de escala. A primeira aplicação da RGOPT foi feita no modelo de Gross-Neveu em temperatura e densidade zero [107]. O método também já foi aplicado no cálculo do condensado de quarks [108] e, mais recentemente, no modelo $\lambda\phi^4$, onde os autores mostraram que a RGOPT é compatível com a introdução de parâmetros de controle como a temperatura [109, 110].

Como comentario final, vale apena ressaltar que durante todo o trabalho assumimos que o parâmetro de ordem para a transição quiral era homogêneo, isto é, uniforme em todo o espaço. Entretanto, um tratamento mais realista deveria levar em consideração a evolução espaço-temporal do parâmetro de ordem [111]. Como consequência teríamos o aparecimento de fases inhomogêneas próximo a região de transição de primeira ordem [112, 113], como mostra a figura 6.1. Esta possibilidade constitui uma extensão provável para o trabalho aqui apresentado.

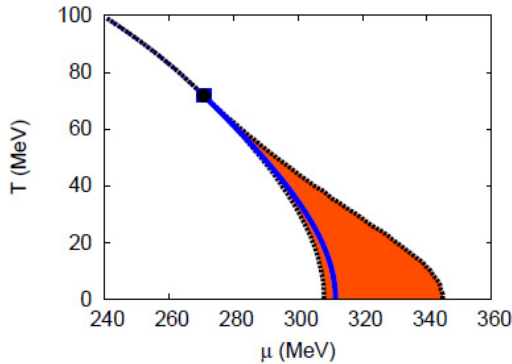


Figura 6.1.: Fases inhomogêneas em torno da transição de primeira ordem. Retirado das Refs. [112, 113].

6. *Conclusões*

A. Convenções e Notação

Faremos aqui algumas definições e convenções que facilitam significativamente os cálculos. A primeira delas diz respeito às unidades naturais,

$$\hbar = c = k_b = 1 ,$$

onde \hbar é a constante de Planck, c é a velocidade de luz no vácuo e k_b é a constante de Boltzmann. Nestas unidades é possível mostrar que massa tem dimensão de energia, assim como o momento, a temperatura e o potencial químico. O campo magnético tem dimensão de energia ao quadrado e a carga elementar é adimensional. A unidade de energia é o mega eletrón-volt, MeV ($1\text{MeV} = 10^6\text{eV}$). As vezes pode ser útil converter MeV para fm^{-1} , e vice-versa (Fermi é a unidade de comprimento definida por $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$):

$$1\text{MeV}^{-1} = 197\text{fm} .$$

A métrica do espaço-tempo é a métrica de Minkowski,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Quadrivetores são representados simplesmente por letras, por exemplo:

$$x = x^\mu = (t, \vec{x}) = (t, x, y, z) ,$$

$$x_\mu = (t, -\vec{x}) = (t, -x, -y, -z) .$$

A. Convenções e Notação

Um quadrivetor ao quadrado é dado por (soma implícita sobre índices repetidos)

$$x^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Usamos a notação "slash", de Feynman, para designar a multiplicação de uma matriz gamma por um quadrivetor: $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$. As matrizes gamma, escritas na base de Dirac, assumem a forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B. Tópicos Básicos em Teoria de Campos

Neste apêndice faremos uma breve descrição do conceito de quiralidade e simetria quiral. Em seguida discutiremos o potencial efetivo em teoria de campos e usaremos o modelo de férmions livres em temperatura e densidade finitas como forma de aplicação destes conceitos.

B.1. Simetria Quiral

A simetria quiral é uma simetria da QCD no limite em que a massa dos quarks vai para zero. Entretanto, sabemos da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner¹ que a massa de corrente dos quarks é pequena comparada com a escala de massa dos hádrons, mas ainda assim diferente de zero. Desse modo, a simetria quiral pode ser considerada uma simetria aproximada da interação forte².

A quiralidade é uma propriedade (caracterizada por um número quântico) de partículas de massa zero. Estas partículas podem ser de mão esquerda ou de mão direita, dependendo se a projeção do spin sobre o momento, a chamada helicidade, for -1 ou $+1$, isto é, se o spin for anti-paralelo ou paralelo ao momento. A quiralidade é então definida como

$$Quiralidade = \begin{cases} +1 & \text{se a partícula for de mão direita e a antipartícula esquerda} \\ -1 & \text{se a partícula for de mão esquerda e a antipartícula direita} \end{cases}$$

Partículas massivas não têm quiralidade bem definida, pois suas helicidades não são bem definidas. Uma partícula massiva pode ter seu momento linear invertido por meio de um boost de Lorentz, o que altera o valor da helicidade. Desse modo a helicidade de uma partícula massiva depende do referencial escolhido, o que a torna

¹Relação entre a massa do pión, $m_\pi \simeq 138$ MeV, a constante de decaimento do pión, $f_\pi \simeq 93$ MeV, o valor esperado do condensado de quarks, $\langle \bar{q}q \rangle \simeq (240 \text{ MeV})^3$, e a massa de corrente dos quarks leves, m_c , dada por $m_\pi^2 f_\pi^2 = m_c \langle \bar{q}q \rangle$.

²Como consequência o pión possui massa não nula, o que faz dele um pseudo-bóson de Goldstone.

B. Tópicos Básicos em Teoria de Campos

uma propriedade pouco interessante. Por outro lado, partículas de massa nula se movem na velocidade da luz e, portanto, não é possível encontrar um referencial que inverta o momento. Como consequência, a helicidade de uma partícula de massa nula é invariante.

Uma teoria que seja invariante sob uma transformação quiral deve contar apenas com partículas de massa zero. Mais do que isso, a invariância quiral é um pré-requisito para teorias com partículas de massa nula. Portanto, quando a simetria quiral é quebrada, o resultado é o surgimento de uma massa efetiva para as partículas envolvidas na teoria. Matematicamente podemos entender esse conceito da seguinte maneira. Considere o campo fermiônico $\Psi = (u, d)$ e os operadores de projeção

$$T_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (\text{B.1})$$

e

$$T_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (\text{B.2})$$

onde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ e as matrizes γ_i (i vai de 0 a 3) são as matrizes de Dirac (Apêndice A). Os subíndices L e R significam “*left*” e “*right*”, respectivamente. Exigimos que T_L e T_R satisfaçam as propriedades

$$T_L^2 = T_L,$$

$$T_R^2 = T_R,$$

$$T_L T_R = \hat{0},$$

e $I = T_L + T_R$ (onde I é a identidade), de modo que

$$\Psi_L = T_L \Psi, \quad (\text{B.3})$$

$$\Psi_R = T_R \Psi, \quad (\text{B.4})$$

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R. \quad (\text{B.5})$$

A lagrangiana de férmions livres, também conhecida como lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi, \quad (\text{B.6})$$

pode ser reescrita em termos dos campos Ψ_L e Ψ_R como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L(i\cancel{\partial})\Psi_L + \bar{\Psi}_R(i\cancel{\partial})\Psi_R - m\bar{\Psi}_L\Psi_R - m\bar{\Psi}_R\Psi_L. \quad (\text{B.7})$$

Podemos ver que, se $m = 0$, os termos representando partículas de mão esquerda, Ψ_L , e direita, Ψ_R , na lagrangiana (B.7) se desacoplam, de modo que ela torna-se invariante frente às transformações

$$\Psi_L \rightarrow L\Psi_L, \quad (\text{B.8})$$

$$\Psi_R \rightarrow R\Psi_R, \quad (\text{B.9})$$

onde L e R são transformações do grupo $SU(2)$. Desse modo podemos fazer uma transformação nos quarks de mão esquerda sem influenciar os de mão direita e vice-versa. Uma transformação completa envolvendo ambos os tipos de quarks deve ser da forma $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Esta propriedade é o que se entende por simetria quiral. Entretanto, se a massa é diferente de zero as transformações acima não são válidas e não existe invariância quiral. Em outras palavras a presença de massa quebra a simetria quiral.

Indícios fenomenológicos da existência da simetria quiral vindos do estudo do decaimento β já eram conhecidos antes mesmo da existência da QCD. No decaimento β as constantes de acoplamento para as correntes hadrônicas vetorial e axial, C_V e C_A , não diferem das correspondentes correntes leptônicas (no caso da corrente axial a diferença existe mas é inferior a 25% [114]). Consequentemente, não há correções quânticas para as “cargas” correspondentes as correntes vetorial e axial vindas da interação forte. Sabemos que o mesmo acontece no caso de cargas elétricas, em que não existem correções radiativas justamente devido à conservação da carga. De modo análogo, espera-se que as correntes vetorial e axial sejam conservadas devido a alguma simetria da interação forte.

No caso da corrente vetorial podemos identificar a simetria envolvida como sendo a simetria de isospin da interação forte, ou seja, a corrente vetorial hadrônica é identificada com a corrente de isospin. No caso da corrente axial, a simetria envolvida é

a simetria quiral. Uma revisão detalhada sobre o tema pode ser encontrada na Ref. [114].

B.2. O Potencial Efetivo

O conhecimento do potencial efetivo em teoria de campos é extremamente útil no estudo de quebras dinâmicas de simetrias, como bem apontou Jona-Lasinio [115]. Isto se deve porque o potencial efetivo leva em consideração correções radiativas que podem quebrar uma simetria mesmo quando a lagrangiana original (clássica) da teoria apresenta tal simetria. Entretanto, exceto em modelos triviais, não é possível calcular exatamente o potencial efetivo, de modo que uma aproximação adequada deve ser usada.

A análise a seguir foi baseada na Ref. [116]. Consideramos uma teoria de campo escalar cuja dinâmica é dada pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Adicionamos à lagrangiana uma fonte externa $j(x)$ acoplada ao campo ϕ ,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + j(x)\phi(x). \quad (\text{B.10})$$

O gerador funcional das funções de Green, $Z[j]$, é dado em termos da amplitude de transição entre o vácuo em um passado remoto e o vácuo em um futuro remoto na presença da fonte $j(x)$:

$$Z[j] = \langle 0|T \exp \left[i \int d^n x \phi(x)j(x) \right] |0 \rangle = \langle 0^+ | 0^- \rangle_j. \quad (\text{B.11})$$

O gerador funcional das funções de Green conectadas é definido [117] como o logaritmo do gerador funcional de todas as funções de Green

$$W[j] = -i \ln Z[j]. \quad (\text{B.12})$$

Podemos expandir $W[j]$ em série de Taylor,

$$W[j] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n G_c^n(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n), \quad (\text{B.13})$$

onde $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$ representa as funções de Green de todos os diagramas de Feynman conectados de n pernas externas.

O campo clássico é definido como sendo o valor esperado do operador $\phi(x)$ no vácuo na presença da fonte $j(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \left[\frac{\langle 0^+ | \phi(x) | 0^- \rangle}{\langle 0^+ | 0^- \rangle} \right]_j. \quad (\text{B.14})$$

O gerador funcional das funções de Green irredutíveis (de uma partícula) é a transformada de Legendre $\Gamma[\phi_c]$ do gerador das funções de Green conectadas [115],

$$\Gamma[\phi_c] = W[j] - \int d^n x j(x) \phi_c(x). \quad (\text{B.15})$$

Diferenciando a equação acima com relação a ϕ_c obtemos

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -j(x). \quad (\text{B.16})$$

Esta equação é extremamente importante no estudo da quebra dinâmica de simetria.

A ação efetiva pode ser expandida de modo análogo ao que fizemos em (B.13)

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n), \quad (\text{B.17})$$

onde Γ^n é a soma de todos os diagramas de Feynman irredutíveis de uma partícula (*one-particle-irreducible*, 1PI) com n pernas externas. Um diagrama de Feynman irredutível de uma partícula é um diagrama conectado que não pode ser desconectado cortando uma única linha. Por convenção, diagramas 1PI são calculados sem propagadores nas pernas externas.

Existe uma maneira alternativa de expandir a ação efetiva em potências do momento (em torno do ponto onde os momentos se anulam) ao invés de potências do campo clássico ϕ_c . No espaço de posições essa expansão assume a forma

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^n x \left[-V_{eff}(\phi_c) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_c)^2 Z(\phi_c) + \dots \right], \quad (\text{B.18})$$

B. Tópicos Básicos em Teoria de Campos

onde $V_{eff}(\phi_c)$ é uma função chamada *potencial efetivo*. Note a semelhança da equação (B.18) com a densidade de energia funcional de Landau de um ferromagneto com magnetização \vec{M} [118],

$$F = \int d^3x \left[\mathcal{F}(\vec{M}) + \frac{1}{2}K_L(\vec{M})(\nabla \cdot \vec{M})^2 + \frac{1}{2}K_T(\vec{M})(\nabla \times \vec{M})^2 + \dots \right], \quad (\text{B.19})$$

onde

$$\mathcal{F}(\vec{M}) = N \left(\frac{T - T_c}{T_c} \vec{M}^2 + \xi(\vec{M}^2)^2 + \dots \right), \quad (\text{B.20})$$

é a densidade de energia livre do modelo. N é um fator de normalização e $\xi > 0$.

Supondo que a lagrangiana tenha uma simetria interna, a quebra dinâmica dessa simetria ocorre se o campo quântico $\phi(x)$ assume um valor esperado no vácuo diferente de zero, mesmo quando a fonte externa $j(x)$ desaparece. Por simplicidade, denotamos $\langle 0^+ | \phi(x) | 0^- \rangle = \langle \phi \rangle_0$. Podemos ver das equações (B.14) e (B.16) que, se $j(x) = 0$, então $\langle \phi \rangle_0$ é solução de

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\langle \phi \rangle_0} = 0. \quad (\text{B.21})$$

Estaremos interessados somente nos casos onde o valor esperado no vácuo é um invariante translacional, de modo que podemos escrever a equação (B.18) como

$$\Gamma[\phi_c] = -\mathcal{V}V_{eff}(\phi_c), \quad (\text{B.22})$$

onde \mathcal{V} é o elemento de volume. Assim, obtemos para a equação (B.21)

$$\left. \frac{dV_{eff}}{d\phi_c} \right|_{\langle \phi \rangle_0} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Desse modo, o potencial efetivo e a equação acima nos permitem determinar o verdadeiro estado fundamental de uma teoria após levarmos em consideração as correções quânticas.

B.3. O Gás de Férmions Livres

Antes de introduzirmos o modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks interagentes, vamos fazer uma aplicação prática do formalismo que vimos na seção anterior e que será usado para estudar as transições de fase em teoria quântica de campos. Nossa abordagem será por meio do cálculo do potencial efetivo, ou energia livre de Landau, que é uma função dos parâmetros externos (como temperatura, potencial químico, campo magnético, etc) e do parâmetro de ordem (variável ou grandeza física usada para identificar uma transição de fase; maiores detalhes e termos técnicos sobre transições de fase podem ser encontrados nas Refs. [119, 120, 121]). Nesta seção faremos o cálculo da energia livre de Landau de um gás relativístico de férmions não interagentes em temperatura e densidade diferentes de zero. Apesar de não haver transição de fase no modelo de gás livre, o formalismo usado será útil mais tarde no cálculo da energia livre no modelo de Nambu–Jona-Lasinio.

Cálculo da Energia Livre

Férmions livres relativísticos são descritos pela densidade lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_a(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi_a(x), \quad (\text{B.24})$$

onde $\psi_a(x)$ é o campo representando férmions da espécie a com massa³ m . A soma sobre todas as espécies está implícita e, a partir de agora, abandonamos o índice a e a dependência espaço-temporal dos campos com o intuito de não sobrecarregar a notação, de modo que $\psi_a(x) = \psi$.

Nossa abordagem será por meio do formalismo de integrais de trajetória. Nesse formalismo, o gerador funcional, Z , contém toda a informação sobre o sistema, de modo que sua identificação com a função de partição em mecânica estatística é imediata. Desse modo é possível considerar sistemas físicos com temperatura e densidade finitas e calcular a energia livre para sistemas homogêneos em equilíbrio de modo relativamente simples. De modo geral, o gerador funcional é escrito como [118, 122, 123]

$$Z = N \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \quad (\text{B.25})$$

³Assumimos que a massa é igual para todas as espécies.

B. Tópicos Básicos em Teoria de Campos

onde N é um fator de normalização, \mathcal{L} é uma densidade lagrangiana, que neste caso é dada pela Eq. (B.24), e $\mathcal{D}\psi$ indica que estamos trabalhando com integrais funcionais (ou integrais de trajetória) sobre os campos ψ e $\bar{\psi}$.

No equilíbrio, a temperatura pode ser introduzida por meio do formalismo de tempo imaginário, ou formalismo de Matsubara [124, 125, 126, 127], no qual a variável $\tau = it = ix_0$ substitui o tempo real na Eq. (B.25). Tomamos ainda os limites de integração em $d\tau$ variando de $\tau' = 0$ até $\tau'' = T^{-1} = \beta$ (T é a temperatura), de modo que

$$Z = N \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right]. \quad (\text{B.26})$$

Levando em conta a troca da variável x_0 e a lagrangiana dada pela Eq. (B.24), podemos escrever o gerador funcional na seguinte forma:

$$Z = N(\beta) \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(x') A(x', \bar{x}) \psi(\bar{x}) \right], \quad (\text{B.27})$$

onde identificamos

$$\bar{x} = (-i\tau, \vec{x}) \quad \text{e} \quad A(\bar{x}', \bar{x}) = (-i\bar{\not{\partial}} + m)\delta(\bar{x}' - \bar{x}),$$

$$\bar{\not{\partial}} = \gamma^\mu \bar{\partial}_\mu = \left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \tau}, \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \delta(\tau' - \tau)\delta(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Agora o campo ψ deve ser entendido como uma função antiperiódica de τ e x no intervalo $0 < \tau < \beta$ (pois ψ representa férmions; no caso de bósons as condições de contorno devem ser periódicas),

$$\psi(\tau = 0, \vec{x}) = -\psi(\tau = \beta, \vec{x}). \quad (\text{B.28})$$

A integral nos campos da eq.(B.27) pode ser resolvida por técnicas de integração funcional encontradas em livros-texto de teoria de campos [118, 122, 123]. O resultado é:

$$Z = N(\beta) \exp(\text{tr} \ln A), \quad (\text{B.29})$$

onde tr denota o traço.

Para avaliarmos o operador $A(\bar{x}', \bar{x})$, primeiro escrevemos a função $\delta(\bar{x}' - \bar{x})$ na sua representação integral,

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p}_n(\bar{x}' - \bar{x})}, \quad (\text{B.30})$$

onde $\bar{p}_n = (i\omega_n + \mu, \vec{p})$ e a integral no tempo $d\tau$ foi substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara, ω_n , devido as condições de contorno impostas anteriormente (tendo isto em mente, abandonamos o subíndice n no quadri-vetor momento, \bar{p}_n , para não sobrecarregar a notação). O potencial químico, μ , é introduzido como um desvio na componente zero do quadri-momento, ou seja, na energia, após adicionarmos o termo $\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi = \mu\psi^\dagger\psi$ (onde $\psi^\dagger\psi$ é o operador número) na lagrangiana. No caso de férmions, as frequências de Matsubara são dadas pela relação [118, 124]

$$\omega_n = \frac{(2n + 1)\pi}{\beta}. \quad (\text{B.31})$$

Desse modo, obtemos para o operador A

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu^{\bar{x}'} + m) e^{-i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})}. \quad (\text{B.32})$$

O sobreíndice em $\bar{\partial}_\mu^{\bar{x}'}$ é útil para lembrar que a derivada deve ser tomada na variável \bar{x}' . Assim,

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-\gamma^\mu \bar{p}_\mu + m) e^{-i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})}, \quad (\text{B.33})$$

de modo que,

$$\text{tr} \ln A = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr} \ln(-\bar{p} + m). \quad (\text{B.34})$$

Usando a relação $\text{tr} \ln(-\bar{p} + m) = 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2)$ (Apêndice D) e lembrando que $\bar{p} = (i\omega_n + \mu, \vec{p})$, obtemos

$$\text{tr} \ln A = 2 \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln[-(i\omega_n + \mu)^2 + E^2], \quad (\text{B.35})$$

onde a dispersão é dada por $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. A soma sobre as frequências de Matsubara pode ser encontrada em [118] e resulta na seguinte equação:

$$\sum_n \ln[-(i\omega_n + \mu)^2 + x^2] = \beta x + \ln[1 - e^{-\beta(x-\mu)}] + \ln[1 - e^{-\beta(x+\mu)}]. \quad (\text{B.36})$$

No lado direito da Eq. (B.36) o sinal do potencial químico (na exponencial em cada logaritmo) representa, se negativo, partículas e, se positivo, anti-partículas. Finalmente, a Eq. (B.34) pode ser escrita como

$$\text{tr} \ln A = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \beta E + \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E - \mu}{T} \right) \right] + \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E + \mu}{T} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.37})$$

No formalismo de integrais de trajetória, o gerador funcional é uma integral sobre todas as possíveis trajetórias da exponencial da ação dos campos em questão. Nesse sentido, ele contém toda a informação sobre o sistema, da mesma forma que em mecânica estatística a função de partição contém toda a informação relevante para a termodinâmica do sistema. De fato, essa analogia pode ser levada adiante e o gerador funcional pode ser visto como uma função de partição, da qual é possível extrair informações termodinâmicas do sistema, como o potencial efetivo, ou a energia livre, que vimos na seção anterior. A mecânica estatística nos diz que a relação entre a função de partição, Z , e a energia livre, F , do sistema é [121, 128]

$$Z = e^{-\beta F}. \quad (\text{B.38})$$

Levando em conta a equação (B.29) podemos escrever essa relação como

$$-\beta F = \text{tr} \ln A. \quad (\text{B.39})$$

Se deixarmos que o sistema de férmions tenha mais graus de liberdade (por exemplo, o número de sabores e cores no caso de quarks), devemos considerá-los ao tomar o traço de A . Como exemplo, mostramos o caso de quarks com N_f sabores e N_c cores. A densidade de energia livre de Landau⁴, neste caso, assume a forma

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E - \mu}{T} \right) \right] + T \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E + \mu}{T} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.40})$$

Esta equação nos permite estudar a termodinâmica do gás de férmions. Como não há interação entre as partículas, não há diferença entre a massa de corrente e a massa efetiva das mesmas e \mathcal{F} não depende dos campos. Além disso, como já mencionamos, não há transições de fase no gás livre.

A conexão com a termodinâmica pode ser feita ao relacionarmos, a menos de um sinal, a energia livre de Landau, Eq. (B.40), com a pressão do gás:

$$P = -\mathcal{F}. \quad (\text{B.41})$$

Assim, as demais grandezas termodinâmicas, como a densidade líquida de quarks e a densidade de entropia, podem ser calculadas imediatamente:

$$\rho(T, \mu) = \langle \psi^\dagger \psi \rangle_0 = \frac{\partial P}{\partial \mu} = 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [f^-(T, \mu) - f^+(T, \mu)], \quad (\text{B.42})$$

$$s(T, \mu) = \frac{\partial P}{\partial T}, \quad (\text{B.43})$$

onde

⁴Densidade de energia livre é o nome mais correto para esta grandeza, uma vez que estamos dividindo a energia livre F pelo volume dado pela integral em d^3x na Eq. (B.37). No entanto, nesta tese, vamos frequentemente chamar a densidade de energia livre apenas de energia livre, por vício de linguagem.

$$f^\pm(T, \mu) = \frac{1}{e^{(E \pm \mu)/T} + 1} \quad (\text{B.44})$$

é a distribuição de Fermi-Dirac. A densidade de energia é

$$\epsilon = -P + \mu\rho + Ts, \quad (\text{B.45})$$

de modo que a equação de estado do gás, $P = P(\epsilon)$ pode ser calculada. Como exemplo de aplicação destas relações, vamos estudar rapidamente dois casos simples, mas de particular interesse para esta tese: os casos i) $\mu = 0$ e ii) $T = 0$, que correspondem aos extremos do diagrama de fases da QCD.

Caso $\mu = 0$ e $T \neq 0$

O conceito de potencial químico em teoria quântica de campos pode ser associado à diferença entre partículas e antipartículas no sistema físico. Portanto, quando consideramos um sistema em que $\mu = 0$, estamos dizendo que o número de partículas nesse sistema é igual ao número de anti-partículas. Consequentemente, a densidade líquida do número de quarks é zero, como mostra a equação (B.42). Fazendo $\mu = 0$ na Eq. (B.40), obtemos para a energia livre

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E + 2T \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{E}{T} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.46})$$

A densidade de energia é simplesmente $\epsilon = -P + Ts$, onde P e s são dados pelas equações (B.41) e (B.43). Os parâmetros usados para gerar os resultados numéricos são os seguintes: $N_c = 3$ (correspondente aos três graus de liberdade de cor dos quarks), $N_f = 2$ (correspondente aos sabores u e d) e $m = 6 \text{ MeV}$ (consideramos a mesma massa para quarks u e d). O primeiro termo no integrando da equação (B.46), chamado termo de vácuo, apresenta uma divergência ultra-violeta, isto é, no limite de altos momentos. Podemos ter uma ideia desta divergência notando que

$$\int E \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi^3)} \int_0^\infty \sqrt{p^2 + m^2} 4\pi p^2 dp \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda p^3 dp \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4. \quad (\text{B.47})$$

Temos, portanto, uma divergência de quarta potência. Esta divergência pode ser regularizada se introduzirmos um *cut off* no limite superior da integral na Eq. (B.46), o que, na prática, significa fazer Λ finito na equação (B.47). O processo de regularização por *cut off* pode ser visto com mais detalhes no apêndice C. Por hora o termo de vácuo representa apenas um desvio no valor da energia livre (energia de ponto zero), de modo que podemos ignorá-lo sem maiores problemas (no caso do gás interagente o termo de vácuo deve ser considerado devido à eventual dependência térmica da massa das quasi partículas). Os demais termos no integrando da equação (B.46) convergem mesmo quando o limite superior da integral é infinito, devido à amortização exponencial causada pela temperatura.

A figura B.1 mostra o comportamento da pressão (dividida pela quarta potência da temperatura, de modo que a grandeza seja adimensional) como função da temperatura. Vemos que, para pequenas temperaturas, a razão P/T^4 cresce rapidamente a partir do zero, mas logo satura, atingindo o valor limite de Stefan-Boltzmann ($P_{SB}/T^4 \simeq 2.3$) à medida que a temperatura aumenta.

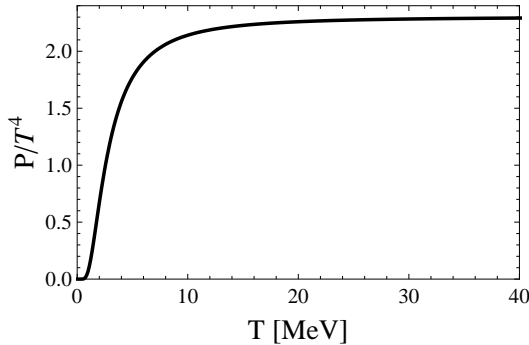


Figura B.1.: Pressão em função da temperatura no gás de férmions livres em $\mu = 0$. Note que a quantidade P/T^4 é adimensional. Vemos que a pressão cresce rapidamente em baixas temperaturas e satura em temperaturas elevadas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann.

Caso $T = 0$ e $\mu \neq 0$

Outro caso de interesse no gás de férmions livres é o limite em que a temperatura vai a zero. Este caso tem relevância no estudo de objetos estelares compactos como

as estrelas de nêutrons, onde o efeito da temperatura pode ser desprezado. Como a estrela é feita majoritariamente de matéria (e não de antimatéria), o potencial químico é diferente de zero, pois o número de partículas é muito maior que o número de antipartículas. Para calcular a energia livre, fazemos $T \rightarrow 0$ na equação (B.40). O termo de vácuo permanece inalterado. O segundo termo no integrando vai a zero, pois

$$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-E - \mu}{T}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow 0} T \ln(1 + 0) = 0.$$

O último termo no integrando da Eq. (B.40) exibe dois comportamentos distintos, dependendo se μ é maior ou menor que E . Se $\mu < E$, temos o mesmo resultado da equação acima, de modo que apenas o termo de vácuo permanece na energia livre. Entretanto, se $\mu > E$ temos

$$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \rightarrow \infty, \quad (\text{B.48})$$

de modo que

$$T \ln \left[1 + \exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \right] \approx T \ln \left[\exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \right] = -E + \mu, \quad (\text{B.49})$$

e a energia livre assume a forma

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \mu \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (\text{B.50})$$

Uma forma compacta de se escrever \mathcal{F} para os dois casos ($\mu < E$ e $\mu > E$) pode ser obtida com a ajuda da função θ de Heaviside:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [E + (\mu - E)\theta(\mu - E)] \\ &= -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\max(E, \mu)], \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

onde $\theta(\mu - E) = 0$ se $\mu < E$ ou $\theta(\mu - E) = \mu - E$ se $\mu > E$.

A conexão com a termodinâmica é feita através das equações (B.41) e (B.42). Como exemplo de aplicação destas relações na energia livre dada pela Eq. (B.51), mostramos o gráfico da pressão em função do potencial químico na figura B.2.

O exemplo do gás de férmions livres, embora bastante simples, envolve muitas características que podem ser úteis para um melhor entendimento do modelo de gás interagente.

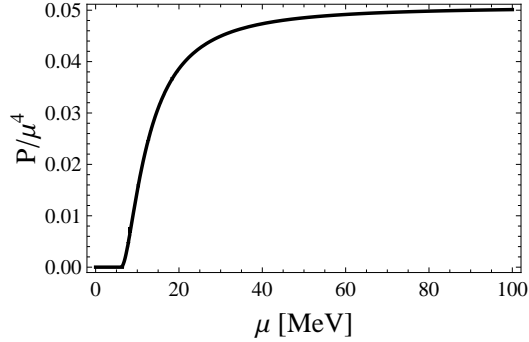


Figura B.2.: Gás livre em $T = 0$: Pressão em função do potencial químico.

C. Matéria de Quarks Interagentes

Neste apêndice faremos uma revisão do formalismo de integrais de trajetória aplicado ao modelo de Nambu–Jona-Lasinio para matéria de quarks com a finalidade de estudar as principais características da transição quiral. Usaremos o formalismo de Matsubara discutido no apêndice anterior para introduzir a temperatura e o potencial químico no sistema e calcular a energia livre na aproximação de campo médio. Veremos como o modelo proporciona um mecanismo de quebra espontânea da simetria quiral e sua posterior restauração em temperatura e potencial químico finitos. Por último analisaremos o diagrama de fases do modelo e os diferentes tipos de transições de fase possíveis.

C.1. O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

O modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) data de 1961 [9, 10], antes mesmo da existência da QCD e da descoberta dos quarks. Na versão original do modelo, os autores Yoichiro Nambu (1921 - 2015) e Giovanni Jona-Lasinio (1932 -) propuseram um mecanismo análogo ao da teoria BCS da supercondutividade para explicar a origem dinâmica da massa do nucleon sem quebrar explicitamente a simetria quiral da lagrangiana do modelo (a conservação parcial da corrente vetorial axial que implicava na simetria quiral já era conhecida naquela época). Desse modo, a lagrangiana do modelo apresenta simetria quiral mas o estado fundamental do sistema não. Esse mecanismo pelo qual a simetria do estado fundamental é quebrada ficou conhecido como *quebra espontânea de simetria* e o seu descobrimento rendeu a Nambu o Prêmio Nobel de Física (junto com Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa) em 2008. Um exemplo comum da quebra espontânea de simetria em um sistema físico é o ferromagneto de Heisenberg, descrito pela hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j} \delta_{i,j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (\text{C.1})$$

C. Matéria de Quarks Interagentes

que é invariante por rotações. Contudo, em baixas temperaturas, o estado fundamental não reflete simetria rotacional, uma vez que todos os spins estão alinhados em alguma direção comum (figura C.1). Como esta direção é arbitrária, o vácuo é infinitamente degenerado [129].

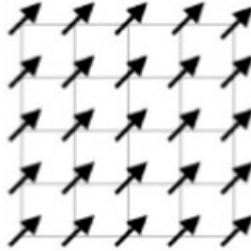


Figura C.1.: Rede de spins representando o ferromagneto de Heisenberg em um estado com simetria de rotação quebrada.

Depois do desenvolvimento da QCD nos anos 70, os campos fermiônicos na lagrangiana do modelo NJL foram reinterpretados como quarks, incorporando assim os graus de liberdade de cor. Desse modo, o modelo como um todo passou a ser interpretado como um modelo efetivo para a interação forte [130, 131, 132], apesar de não possuir glúons e, portanto, ser desprovido de algumas das principais características da QCD, como o confinamento e a liberdade assintótica. Ao invés de ser mediada por glúons, a interação entre quarks ocorre localmente por vértices de quatro pontos, que foram propostos de modo a incorporar a simetria quiral da QCD no modelo. Em muitas situações, nas quais o espectro de massa das partículas é o objeto de estudo, a característica mais relevante da QCD é a simetria quiral, de modo que o confinamento fica em segundo plano. Nessas circunstâncias, o modelo NJL tem obtido relativo sucesso ao ser empregado diretamente aos quarks. Existe a possibilidade de simular o confinamento no modelo NJL por meio da inserção do “loop de Polyakov” nos chamados modelos de Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) [133, 134, 135], mas não faremos uso desta ferramenta neste trabalho. Para os nossos propósitos, a simples análise da transição quiral será suficiente.

C.2. Cálculo da Energia Livre

Vamos calcular o potencial efetivo, ou energia livre de Landau, do modelo NJL na aproximação de campo médio (em termos práticos a aproximação de campo médio fornece os mesmos resultados que as aproximações de Hartree e de N_c grande), o que nos permitirá investigar a quebra de simetria quiral e sua posterior restauração em temperatura e densidade finitas. A lagrangiana do modelo é dada por [10, 63]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_f (i \not{\partial} - m) \psi_f + G [(\bar{\psi}_f \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i \gamma_5 \vec{\tau} \psi_f)^2], \quad (\text{C.2})$$

onde ψ_f representa o campo fermiônico de sabor f (soma implícita entre diferentes sabores e cores), $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial / \partial x^\mu$ sendo γ^μ as matrizes de Dirac, m é a massa de corrente dos quarks (as vezes chamada de massa nua), G é a constante de acoplamento (de efeito atrativo) e $\vec{\tau}$ contém as matrizes de isospin de Pauli. O primeiro termo do lado direito da equação (C.2) representa a parte livre, o segundo termo é o canal escalar da interação, responsável pela existência da partícula (ou ressonância) sigma na teoria, enquanto o terceiro termo é o canal pseudo-escalar, responsável pela existência de píons. Esta versão do modelo consiste, portanto, de uma interação pontual atrativa com intensidade G .

A lagrangiana (C.2) é invariante frente à transformação quiral, $\psi \rightarrow e^{i\alpha \vec{\tau} \gamma_5} \psi$, se $m = 0$, onde α é um parâmetro contínuo e $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. Entretanto, como a massa de corrente dos quarks é baixa, mas não nula, o modelo apresenta apenas simetria quiral aproximada. Dada a lagrangiana (C.2) o gerador funcional pode ser calculado de maneira usual [118, 122, 123].

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_f \mathcal{D}\psi_f \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \quad (\text{C.3})$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização (tendo isto em mente, podemos deixar de escrevê-lo sem nenhum prejuízo) e $\int \mathcal{D}\psi_f$ representa a integral de trajetória do campo ψ_f . O subíndice f nos campos ψ_f está subentendido (veja a seção 2.3), de modo que vamos suprimi-lo para não carregar a notação. Note a semelhança entre o gerador funcional Z dado pela eq. (C.3) e a função de partição em mecânica estatística,

$$Z = \text{tr} \exp[-\mathcal{H}/k_b T], \quad (\text{C.4})$$

C. Matéria de Quarks Interagentes

com a diferença de que, em teoria quântica de campos, o traço é substituído pela integral de trajetória e o hamiltoniano é substituído pela ação.

Para calcular o gerador funcional, Eq. (C.3), vamos bosonizar a teoria introduzindo os campos auxiliares σ e $\vec{\pi}$, adicionando os seguintes termos à lagrangiana (este procedimento também é conhecido como transformada de Hubbard-Stratanovich):

$$\Theta^2 = -\frac{1}{G} \left[\frac{\sigma}{2} + G(\bar{\psi}\psi) \right]^2 \quad \text{e} \quad \Omega^2 = -\frac{1}{G} \left[\frac{\vec{\pi}}{2} + G(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi) \right]^2, \quad (\text{C.5})$$

de modo que a nova lagrangiana assume a forma [136]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - (\sigma\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\psi). \quad (\text{C.6})$$

Os campos σ e $\vec{\pi}$ são campos auxiliares que facilitam o tratamento algébrico do cálculo do potencial efetivo. Se aplicarmos as equações de Euler-Lagrange na sua forma contínua,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (\text{C.7})$$

aos campos σ e $\vec{\pi}$ na equação (C.6), obtemos

$$\sigma = -2G\bar{\psi}\psi \quad \text{e} \quad \vec{\pi} = -2G\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi, \quad (\text{C.8})$$

de modo que $\Theta^2 = 0$ e $\Omega^2 = 0$. Portanto, as lagrangianas dadas pelas equações (C.2) e (C.6) são equivalentes, o que significa que a física envolvida nas duas é a mesma. Dessa forma, o gerador funcional pode ser escrito como

$$Z = \exp \left[-\frac{i}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \mathcal{V} \right] \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m - \sigma - i\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \psi \right], \quad (\text{C.9})$$

onde consideramos uma aproximação de *campo médio* para σ e $\vec{\pi}$, de modo que eles possam sair da integral funcional sobre campos ψ e $\bar{\psi}$. Os campos σ e $\vec{\pi}$ tampouco

possuem dependência espaço-temporal, o que nos permite definir o elemento de volume quadridimensional $\int d^4x = \mathcal{V}$. Vamos separar a equação acima em duas partes,

$$Z_1 = \exp \left[\frac{-i}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \int d^4x \right],$$

e

$$Z_2 = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \psi \right],$$

de modo que $Z = Z_1 Z_2$. Podemos usar técnicas padrão de teoria de campos encontradas em livros-texto [118, 122, 123] para escrever Z_2 como

$$Z_2 = \exp \text{Tr} \ln A, \quad (\text{C.10})$$

com

$$A(x', x) = (i \not{\partial}_{x'} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \delta(x' - x), \quad (\text{C.11})$$

onde $\not{\partial}_{x'}$ significa que a diferenciação é em relação a variável x' . Usando a representação integral da função delta e aplicando o logaritmo natural na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \ln A &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln (i \not{\partial}_{x'} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) e^{-ip(x'-x)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln (\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) e^{-ip(x'-x)}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Tomando o traço¹,

$$\text{Tr} \ln A = N_c N_f \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln (\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}), \quad (\text{C.13})$$

onde $N_c = 3$ e $N_f = 2$ são os graus de liberdade de cor e sabor, respectivamente.

¹No contínuo podemos escrever o traço de um operador H como $\text{Tr} H = \int d^4x \int d^4x' H \delta(x - x')$.

C. Matéria de Quarks Interagentes

Para calcular o traço do logaritmo no lado direito da eq. (C.13) usamos a identidade $\text{tr} \ln = \ln \det$ e o resultado $\det(\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = [-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2]^2$ (Apêndice D), de modo que

$$\ln \det(\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = 2 \ln[-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2], \quad (\text{C.14})$$

o que resulta em

$$Z_2 = \exp \left[2N_c N_f \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2) \right]. \quad (\text{C.15})$$

Temos assim uma expressão para o gerador funcional $Z = Z_1 Z_2$. No formalismo de integral de trajetórias, o gerador funcional Z está relacionado com o potencial efetivo, ou energia livre do sistema, por meio da relação

$$Z = Z_1 Z_2 = \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{F} \right], \quad (\text{C.16})$$

onde i vem do espaço de Minkowski, $\int d^4x$ é um volume quadridimensional e \mathcal{F} é a energia livre de Landau (potencial termodinâmico).

Note que Z (e conseqüentemente a energia livre) é simétrico em relação a $\vec{\pi}$ (temos apenas termos quadráticos envolvendo $\vec{\pi}$) mas não em relação a σ . Isto nos permite negligenciar $\vec{\pi}$ fazendo $\vec{\pi} = 0$. A massa efetiva dos quarks, M , está relacionada com o valor esperado de σ (e, portanto, com o valor esperado do condensado de quarks), por meio da seguinte equação [63]:

$$M = m + \langle \sigma \rangle = m - 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (\text{C.17})$$

Desse modo, ao invés de termos \mathcal{F} como função de $\langle \sigma \rangle$, passamos a trabalhar com a energia livre como função da massa efetiva, M . Isto nos permite olhar somente para o plano $\mathcal{F} - M$ ao analisarmos a curva da energia livre, seguindo uma análise mais intuitiva apresentada na Ref. [63]. Usando a equação (C.17) e comparando as equações (C.9), (C.15) e (C.16) obtemos a energia livre

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4G} [(M - m)^2] + 2iN_c N_f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + M^2). \quad (\text{C.18})$$

Para introduzir a temperatura e o potencial químico como parâmetros externos ao sistema (como variáveis de controle), usaremos o formalismo de Matsubara, apresentado no apêndice B, que nos leva as seguintes substituições²:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (\text{C.19})$$

$$p \rightarrow (i\omega_n + \mu, \vec{p}), \quad (\text{C.20})$$

de modo que $-p^2 = -p_0^2 + \vec{p}_i^2 = (\omega_n - i\mu)^2 + \vec{p}^2$. As quantidades ω_n são as frequências de Matsubara para férmions, $\omega_n = T(2n + 1)\pi$, com T a temperatura e μ o potencial químico. Assim podemos escrever a energia livre em termos de M , T e μ :

$$\mathcal{F}(M, T, \mu) = \frac{1}{4G} [(M - m)^2] - 2N_c N_f T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln [(\omega_n - i\mu)^2 + \vec{p}^2 + M^2]. \quad (\text{C.21})$$

Efetuando o somatório sobre as frequências de Matsubara [118, 124] na equação acima obtemos a “versão final” da energia livre de Landau na aproximação de campo médio:

$$\mathcal{F}(M, T, \mu) = \frac{1}{4G} (M - m)^2 - 2N_c N_f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln[1 + e^{-(E-\mu)/T}] + T \ln[1 + e^{-(E+\mu)/T}] \right\}, \quad (\text{C.22})$$

onde $E^2 = \vec{p}^2 + M^2$. O primeiro termo no lado direito da equação (C.22) é o termo clássico do potencial. Os demais termos surgem devido às correções quânticas, de modo que o primeiro termo dentro da integral é o termo de vácuo, enquanto o segundo e terceiro termos são as correções de temperatura e densidade finitas associados as partículas e antipartículas, respectivamente. Ressaltamos novamente que o potencial químico está relacionado, basicamente, a diferença entre partículas e antipartículas, uma vez que o número total de partículas em teoria de campos não é fixo devido a constante criação e aniquilação de pares, mas a diferença líquida entre partículas e antipartículas é bem definida. Uma grandeza que será importante posteriormente é a

²Essas regras são válidas para condições de equilíbrio, que assumimos ser o caso.

densidade líquida de quarks, $\rho = \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle = \langle \psi^\dagger\psi \rangle$, que está relacionada à derivada da energia livre com relação ao potencial químico avaliada no valor de M que minimiza $\mathcal{F}(M, T, \mu)$ (definição formal no capítulo 2). A densidade escalar é $\rho_S = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que é dada pela derivada da energia livre com relação a massa. Estamos agora em condições de analisar a quebra da simetria quiral no vácuo (isto é, em $T = \mu = 0$) e sua posterior restauração em temperatura e densidade finitas.

C.3. Quebra da Simetria Quiral

A quebra da simetria quiral, identificada por um aumento substancial na massa efetiva dos quarks, ocorre em $T = \mu = 0$, de modo que apenas os termos clássico e de vácuo da Eq. (C.22) contribuem. Entretanto, para obter qualquer resultado numérico, precisamos definir os valores dos parâmetros m e G . Além disso, a integral de vácuo da Eq. (C.22) apresenta divergência ultra-violeta, isto é, no limite $p \rightarrow +\infty$ (de modo análogo ao gás livre),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p^2 + M^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \int_0^{+\infty} \sqrt{p^2 + M^2} \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} dp \rightarrow +\infty. \quad (\text{C.23})$$

Isso constitui um problema, uma vez que o modelo NJL não é renormalizável em 3+1 dimensões. Desse modo precisamos recorrer a um método de regularização: vamos introduzir um parâmetro Λ (*cut off* tri-dimensional) no limite superior da integral de vácuo da Eq. (C.22) de modo a cortar a integração em valores de energia maiores que o de Λ e evitar assim a divergência. O parâmetro Λ não deve ser entendido como um parâmetro original do modelo (como m e G), mas sim como um parâmetro introduzido devido ao nosso método de regularização. As integrais térmicas da Eq. (C.22) convergem no limite de $p \rightarrow +\infty$, de modo que elas podem ser calculadas sem a necessidade do cutoff.

A escolha pela regularização por *cut off* pode ser justificada pela sua simplicidade e também porque o modelo não tem pretensões de descrever a interação forte em todo o espectro de energias, concentrando-se nos fenômenos com escala inferior a 1 GeV.

Temos assim três parâmetros para fixar: a massa de corrente dos quarks, m , a constante de acoplamento, G , e o cut off, Λ . Normalmente esses parâmetros são ajustados de modo a reproduzir aproximadamente alguns dados fenomenológicos, como a massa do pión $m_\pi = 135.0 \text{ MeV}$ [137], a constante de decaimento do pión

$f_\pi = 92.4 \pm 0.2 \text{ MeV}$ [138] e o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que estão relacionados por meio da relação de Gell-Mann–Oakes–Renner [139],

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \mathcal{O}(m^2), \quad (\text{C.24})$$

onde a relação entre a massa efetiva e o condensado de quarks é dada pela equação (C.17).

A quebra da simetria quiral ocorre para algum valor crítico da constante G . Podemos então fixar os parâmetros m e Λ e variar G para identificar o valor crítico da constante de acoplamento para o qual ocorre a quebra de simetria. Em temperatura e potencial químico nulos o potencial efetivo, Eq. (C.22), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M, 0, 0) &= \frac{(M - m)^2}{4G} - 2N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E \\ &= \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} (M^2 + 2\Lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

A equação para a massa dos quarks como função do acoplamento, G , conhecida como *equação do gap*, é obtida extremizando a Eq.(C.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} &= \frac{M - m}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} M(\vec{p}^2 + M^2)^{-1/2} \\ &= \frac{(M - m)}{2G} - \frac{N_c N_f}{2\pi^2} \left[M\Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} - M^3 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Como resultado, obtemos a seguinte equação auto-consistente para M :

$$M = m + \frac{GN_c N_f}{\pi^2} \left[M\Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} - M^3 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right]. \quad (\text{C.27})$$

Resolvendo numericamente a equação (C.27) com $\Lambda = 590 \text{ MeV}$ [50], obtemos as soluções mostradas na figura C.2 para os casos $m = 0$ (limite quiral, onde a simetria é

C. Matéria de Quarks Interagentes

exata) e $m = 6 \text{ MeV}$ (caso físico, onde a simetria é aproximada). A massa efetiva M dos quarks é (aproximadamente) zero no limite quiral (caso físico) para $G\Lambda^2$ pequeno, mas a simetria é quebrada para valores maiores que $G_c\Lambda^2 \simeq 1.64$ ($G_c\Lambda^2 = 1.41$). Podemos assim fixar a constante G de modo que a massa efetiva e, conseqüentemente, o condensado de quarks obedeçam a relação de Gell-Mann–Oakes–Renner, Eq. (C.24). Seguindo a Ref. [50], fixamos $m = 6 \text{ MeV}$, $\Lambda = 590 \text{ MeV}$ e $G = 2.435/\Lambda^2$, de modo que $m_\pi = 140.2 \text{ MeV}$, $f_\pi = 92.6 \text{ MeV}$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-241.5 \text{ MeV})^3$. Outras parametrizações podem ser encontradas na Ref. [63]. É importante ressaltar que o limite quiral, $m = 0$, representa apenas um caso acadêmico, sem realidade física, uma vez que a massa de corrente dos quarks *up* e *down* é da ordem de 6 MeV . Dessa forma, os resultados deste trabalho são apresentados apenas para o caso físico de $m = 6 \text{ MeV}$.

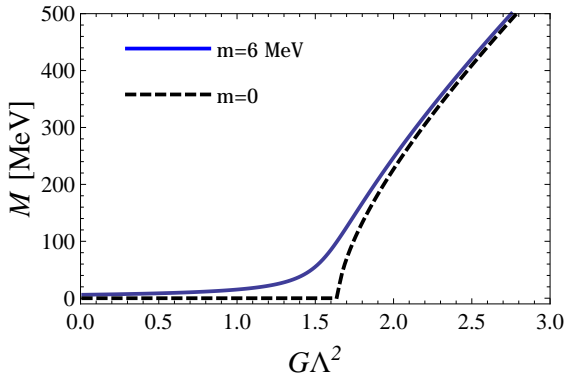


Figura C.2.: Massa efetiva dos quarks em função do acoplamento G em temperatura e potencial químico zero. A linha contínua mostra o caso em que a massa nua dos quarks é de 6 MeV (limite físico), enquanto a linha tracejada mostra o limite quiral. A simetria quiral é quebrada para $G_c\Lambda^2 \simeq 1.41$ no limite físico e $G_c\Lambda^2 = 1.64$ no limite quiral.

C.4. Restauração da Simetria Quiral

Uma vez fixado $G = 2.435/\Lambda^2$ de acordo com a seção acima, podemos utilizar a Eq. (C.22) para analisar a restauração da simetria quiral, ou seja, a redução da massa dos quarks para zero ou muito próximo de zero com o aumento da temperatura e/ou do potencial químico. Vimos na seção anterior que a massa efetiva dos quarks é

dada pelo mínimo da equação (C.22), de modo que, se quisermos obter informação a respeito dela, tudo o que temos que fazer é procurar o valor de M que minimiza a energia livre à medida que variamos a temperatura e o potencial químico. Dessa forma, adotamos M como parâmetro de ordem³ para a análise da transição quiral.

A figura C.3 mostra o comportamento da energia livre, \mathcal{F} , para o caso $m = 6$ MeV em $\mu = 0$ como função de M . As diferentes curvas estão associadas com diferentes valores da temperatura, T , conforme a legenda da figura. Vemos que, à medida que T aumenta, o mínimo da energia livre desloca-se de maneira contínua de valores altos para valores baixos de M , chegando assintoticamente à massa de corrente em altas temperaturas. Em $T = 0$, o valor de M que minimiza a energia livre é $M \simeq 400$ MeV, o que significa que esse é o valor da massa efetiva dos quarks em $T = \mu = 0$. Na curva tracejada, onde $T = 130$ MeV, esse valor é de aproximadamente 385 MeV e, na curva pontilhada ($T = 190$ MeV), $M \simeq 280$ MeV. Na curva com $T = 240$ MeV, temos que $M \rightarrow m$.

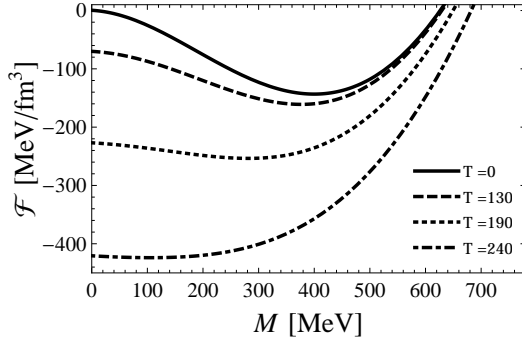


Figura C.3.: Energia livre em função de M no limite físico, em $\mu = 0$ e para diferentes valores de T em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . À medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo restaurada aos poucos, ou seja, por meio de um crossover.

Pela Eq. (C.22) a unidade de energia livre é o MeV^4 , mas as vezes é mais intuitivo

³A massa dos quarks não é um observável físico, portanto é um abuso de linguagem chamá-la de parâmetro de ordem. Entretanto, ela está diretamente relacionada com o verdadeiro parâmetro de ordem, o condensado de quarks, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, por meio da equação (C.17).

C. Matéria de Quarks Interagentes

trabalharmos com MeV/fm^3 , ou seja, energia por volume. Nos gráficos da energia livre usamos sempre as unidades MeV/fm^3 . A relação entre as duas unidades é dada por

$$1 \text{ MeV}^4 = 1,308 \times 10^{-7} \text{ MeV}/\text{fm}^3.$$

Com base na figura C.3 podemos analisar o comportamento do parâmetro de ordem M em função da temperatura. A figura C.4, quadro a esquerda, mostra esse comportamento nos casos físico, $m = 6 \text{ MeV}$, e quiral, $m = 0$. No primeiro deles, representado pela linha cheia, a massa efetiva dos quarks decresce de forma contínua e suave (derivada contínua), o que indica um crossover entre as fases de simetria quebrada e aproximadamente restaurada. O mesmo não acontece no limite quiral, representado pela linha tracejada, onde a massa efetiva até decresce de forma contínua, mas a curva não é suave (derivada descontínua) em $T = 220 \text{ MeV}$. Este é o comportamento típico de uma transição de fase de segunda ordem. Note a semelhança entre o comportamento das massas efetivas nos limites físico e quiral e a magnetização de um ferromagneto de Heisenberg na presença ou não de um campo de fundo B , quadro a direita na figura C.4, onde também temos um crossover, se $B \neq 0$, ou uma transição de segunda ordem, se $B = 0$.

No crossover não existe uma temperatura crítica bem definida para a transição, diferentemente da transição de segunda ordem, onde a temperatura crítica é bem definida. Desse modo, para definir a linha de “transição” de crossover, usamos o conceito de temperatura pseudo-crítica, que é a temperatura para a qual a susceptibilidade térmica do parâmetro de ordem, $-dM/dT$, é um máximo. A figura C.5 exemplifica a diferença entre temperatura crítica, associada a transição de segunda ordem (linha tracejada), e temperatura pseudo-crítica, associada ao crossover (linha cheia). No caso da transição de segunda ordem, o parâmetro de ordem, $M(T)$, apresenta um “bico” na temperatura crítica, o que resulta na descontinuidade da sua derivada. No crossover a derivada é contínua em todos os pontos e a temperatura pseudo-crítica é definida pelo máximo da linha cheia na figura C.5.

Até este ponto estudamos apenas o comportamento da massa térmica em densidades nulas. No outro extremo, em $T = 0$ e $\mu \neq 0$, vemos a aparição de um novo mínimo na energia livre à medida que a assimetria entre o número de partículas e antipartículas aumenta (figura C.6 para o limite físico). À medida que variamos μ ,

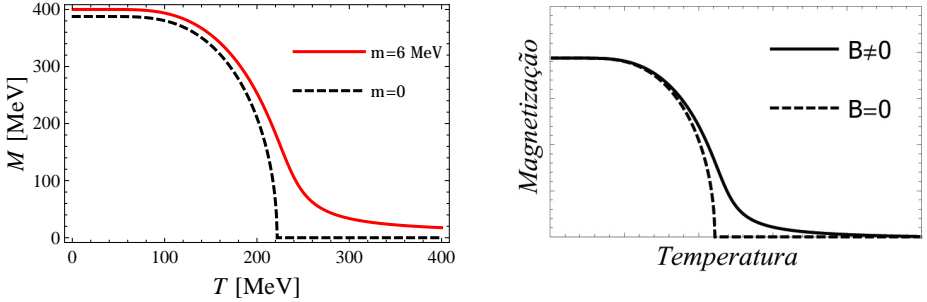


Figura C.4.: Esquerda: massa dos quarks em função da temperatura para $\mu = 0$. Linha contínua: limite físico; crossover entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral; transição de segunda ordem entre as fases massiva e não massiva. Direita: magnetização do ferromagneto de Heisenberg, em que também ocorre um crossover se existir um campo magnético de fundo, $B \neq 0$, ou uma transição de segunda ordem se o campo de fundo for nulo.

o máximo local próximo da origem torna-se um ponto de inflexão e, posteriormente, um mínimo local, criando um novo estado metaestável acessível ao sistema. Isso significa que temos três estados possíveis para o sistema: um representado pelo mínimo global, como nos casos anteriores, outro representado pelo mínimo local e um terceiro (instável) representado pelo máximo local entre os dois mínimos.

O verdadeiro estado de equilíbrio (estado fundamental) corresponde sempre ao mínimo global da energia livre, enquanto o mínimo local é, na verdade, uma fase metaestável. A massa efetiva dos quarks é dada sempre pelo mínimo global da energia livre, isto é, pelo verdadeiro estado de equilíbrio. Desse modo, podemos ver que ela salta de maneira descontínua de um valor alto para um valor próximo de zero (exatamente zero no limite quiral) à medida que μ aumenta (figura C.7). Em outras palavras, quando μ não é grande o suficiente, o mínimo global encontra-se próximo a $M \simeq 400$ MeV enquanto um mínimo local se desenvolve próximo à origem (exatamente na origem no limite quiral). A partir de um certo valor de μ o mínimo próximo à origem se impõe sobre o mínimo mais afastado, tornando-se um mínimo global e, conseqüentemente, o novo estado fundamental do sistema. Como resultado, a massa efetiva dos quarks, M , se comporta de maneira descontínua, conforme mostrado na figura C.7.

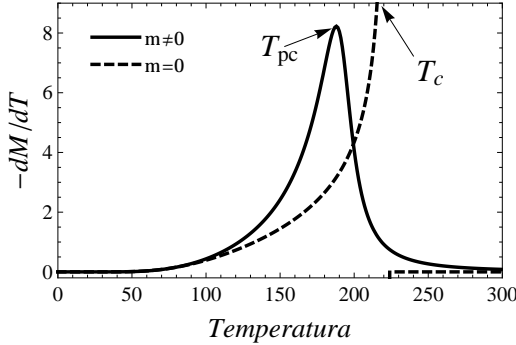


Figura C.5.: A Temperatura pseudo-crítica (linha cheia) é a temperatura em que a susceptibilidade térmica é um máximo. A temperatura crítica, em transições de segunda ordem, é a temperatura em que a susceptibilidade térmica diverge (linha tracejada). Em ambas as curvas, $\mu = 0$.

A descontinuidade no parâmetro de ordem em $T = 0$ mostrada na figura C.7 indica que a transição é de primeira ordem, tanto no caso físico quanto no limite quiral. Este comportamento é distinto do caso $\mu = 0$, onde o parâmetro de ordem é contínuo e a transição é de segunda ordem no limite quiral ou crossover no limite físico.

C.5. O Diagrama de Fases

Na seção anterior estudamos a restauração da simetria quiral na matéria de quarks em dois casos extremos: matéria fria e densa ($T = 0$ e $\mu \neq 0$) e matéria quente e diluída ($T \neq 0$ e $\mu = 0$). No eixo da temperatura ($\mu = 0$) encontramos um crossover entre altas e baixas massas (transição de 2ª ordem no limite quiral) enquanto que, no eixo do potencial químico ($T = 0$), encontramos uma transição de primeira ordem. Se estendermos essa análise para todo o plano $T - \mu$, podemos obter o contorno completo da linha associada à transição quiral.

A figura C.8, mostra uma transição de primeira ordem começando em $T = 0$ e $\mu = 380$ MeV e terminando no ponto crítico⁴ $T = 81$ MeV, $\mu = 325$ MeV (linha contínua). Para temperaturas mais altas e potenciais químicos mais baixos temos um crossover (limite físico), representado pela linha pontilhada preta, definida pela

⁴O ponto crítico é o ponto onde uma linha de transição de primeira ordem termina.

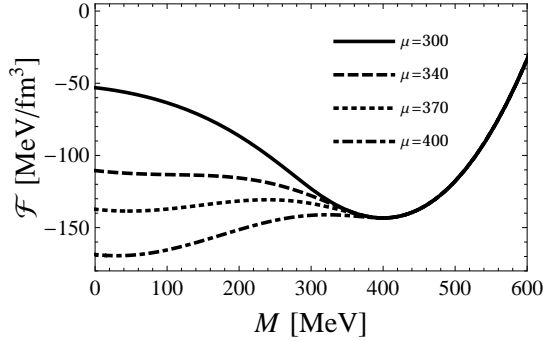


Figura C.6.: Energia livre em função de M no limite físico em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks corresponde ao valor de M no mínimo global. À medida que μ cresce, surge um mínimo local próximo de $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 380$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1^a ordem.

temperatura pseudo-crítica de crossover. Em $\mu = 0$ encontramos $T_{pc} \simeq 189$ MeV. Exatamente no ponto crítico a transição é de segunda ordem.

As linhas tracejadas adjacentes à linha de primeira ordem na figura C.8 são chamadas de *espinodais*, e indicam o aparecimento de fases metaestáveis, ou seja, os mínimos locais da figura C.6. A linha espinodal da esquerda representa o aparecimento da fase metaestável de simetria restaurada (a fase de simetria quebrada é estável e predominante) e a linha espinodal da direita representa o desaparecimento por completo da fase de simetria quebrada, restando apenas a fase de simetria quiral restaurada.

As características e propriedades do modelo de Nambu–Jona-Lasinio apresentadas neste apêndice, como a quebra e restauração da simetria quiral e o diagrama de fases do modelo, são essenciais para a compreensão dos resultados da tese.

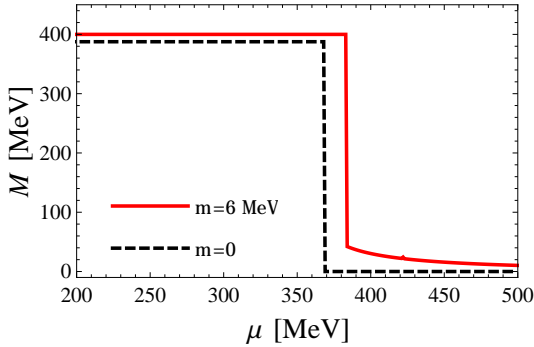


Figura C.7.: Massa dos quarks em função do potencial químico para $T = 0$. Linha contínua: limite físico; transição de fase de 1ª ordem entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral; transição de 1ª ordem entre as fases massiva e não-massiva.

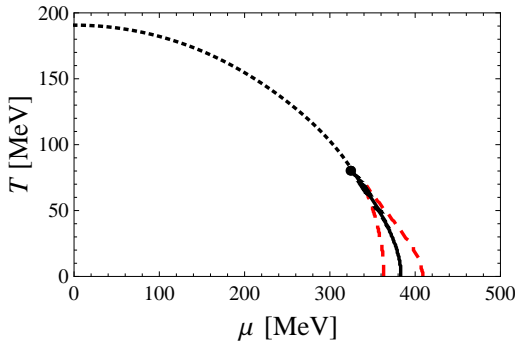


Figura C.8.: O diagrama de fases no caso físico. A linha contínua representa a transição de 1ª ordem que se inicia em $\mu = 380$ MeV e termina no ponto crítico $T = 81$ MeV, $\mu = 325$ MeV. Em seguida ocorre um crossover representado pela linha tracejada preta. As linhas tracejadas em vermelho são as espínodais, isto é, as linhas que delimitam a região do diagrama em que existem duas fases para o sistema, uma delas sendo metaestável enquanto a outra a fase estável.

D. Cálculo do Traço do Logarítmo

Neste apêndice vamos calcular $\text{tr} \ln(\not{p} - m - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})$ que aparece na eq. (C.13) e também na eq. (B.34) sem o termo contendo γ_5 . Primeiramente, usamos a bem conhecida relação

$$\text{tr} \ln = \ln \det, \quad (\text{D.1})$$

de modo que tudo o que precisamos fazer é calcular $\det(\not{p} - m - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})$. Agora,

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \sum_{i=1}^3 \gamma^i p_i, \quad (\text{D.2})$$

onde as matrizes γ estão definidas no Apêndice A. Obtemos assim,

$$\not{p} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Nesta base, a matriz quiral γ^5 é definida como $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, de modo que

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraindo as matrizes $m\mathbb{I}$ e $ia\gamma^5$ da eq. (D.3) (\mathbb{I} é a matriz identidade e $a = \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$), obtemos

$$\not{p} - m\mathbb{I} - ia\gamma^5 = \begin{pmatrix} -m + p_0 & 0 & -ia - p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & -m + p_0 & -p_1 - ip_2 & -ia + p_3 \\ -ia + p_3 & p_1 - ip_2 & -m - p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -ia - p_3 & 0 & -m - p_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

D. Cálculo do Traço do Logarítmo

de modo que só nos resta calcular o determinante da matriz acima. O resultado é

$$\det(\not{p} - m\mathbb{I} - ia\gamma^5) = (-p^2 + m^2 + a^2)^2, \quad (\text{D.5})$$

onde $a^2 = \vec{\pi}^2$, de modo que

$$\ln \det(\not{p} - m\mathbb{I} - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = 2 \ln(-p^2 + m^2 + \vec{\pi}^2). \quad (\text{D.6})$$

E. Equivalencia entre $\tilde{\mu}$ e ρ

Ao considerarmos uma interação vetorial no modelo NJL, o potencial termodinâmico pode ser escrito tanto como função da densidade bariônica, $\Omega = \Omega(T, \mu, M, \rho)$, como do potencial químico efetivo, $\Omega = \Omega(T, \mu, M, \tilde{\mu})$, onde $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V \rho$. As condições estacionárias em cada um dos casos, apesar de serem diferentes, devem ser consistentes entre si. A equação do gap,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0, \quad (\text{E.1})$$

permanece a mesma independentemente da escolha entre $\tilde{\mu}$ e ρ . Mas se escolhermos escrever Ω como função de ρ , a equação estacionária usada no capítulo 4,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0, \quad (\text{E.2})$$

perde o sentido, uma vez que não temos mais a variável $\tilde{\mu}$ no potencial termodinâmico. Devemos então substituir a condição estacionária acima por outra, equivalente, dependente de ρ , e que produza os mesmos resultados já obtidos. A mera escolha de escrever Ω como função de ρ ou de $\tilde{\mu}$ não pode influenciar os resultados extraídos do modelo.

A seguir, obtemos uma nova condição estacionária para o caso em que escrevemos Ω como função de ρ , e não mais de $\tilde{\mu}$. Escrevendo o potencial termodinâmico do modelo de Nambu–Jona-Lasinio com acoplamento vetorial como função de ρ , obtemos

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - G_V \rho^2 - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + e^{-(E - \mu + 2G_V \rho)/T} \right] + T \ln \left[1 + e^{-(E + \mu - 2G_V \rho)/T} \right] \right\}. \quad (\text{E.3})$$

Tomando a derivada parcial com relação a ρ encontramos,

E. Equivalencia entre $\tilde{\mu}$ e ρ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -2G_V \rho + 4G_V N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E - \mu + 2G_V \rho)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E + \mu - 2G_V \rho)/T}} \right]. \quad (\text{E.4})$$

Vamos guardar esta equação por um momento. Enquanto isso, repetimos o mesmo procedimento com Ω dependente de $\tilde{\mu}$,

$$\Omega = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + e^{-(E - \tilde{\mu})/T} \right] \right. \\ \left. + T \ln \left[1 + e^{-(E + \tilde{\mu})/T} \right] \right\}. \quad (\text{E.5})$$

Derivando com relação a $\tilde{\mu}$ encontramos,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \frac{(\mu - \tilde{\mu})}{2G_V} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E - \tilde{\mu})/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E + \tilde{\mu})/T}} \right]. \quad (\text{E.6})$$

Sabemos que $\partial \Omega / \partial \tilde{\mu} = 0$ [63], o que nos leva a concluir que o lado direito da equação (E.6) é igual a zero também,

$$\frac{(\mu - \tilde{\mu})}{2G_V} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E - \tilde{\mu})/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E + \tilde{\mu})/T}} \right] = 0. \quad (\text{E.7})$$

Levando em conta que $\tilde{\mu} = \mu - 2G_V \rho$ e fazendo esta substituição na equação (E.7) encontramos

$$\rho - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E - \mu + 2G_V \rho)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E + \mu - 2G_V \rho)/T}} \right] = 0. \quad (\text{E.8})$$

Voltando para a equação (E.4), podemos reescrevê-la colocando o termo $-2G_V$ em evidência,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -2G_V \left\{ \rho - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + e^{(E - \mu + 2G_V \rho)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(E + \mu - 2G_V \rho)/T}} \right] \right\}. \quad (\text{E.9})$$

O termo entre chaves na equação acima é justamente o lado esquerdo da equação (E.8), que é igual a zero. Portanto, concluímos que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0. \quad (\text{E.10})$$

A equação (E.10) é a condição estacionária que deve ser usada quando escrevemos Ω como função de ρ , e não de $\tilde{\mu}$. É a condição equivalente a $\partial \Omega / \partial \tilde{\mu} = 0$.

Os resultados produzidos utilizando-se Ω como função de $\tilde{\mu}$ e as condições

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = 0 \quad (\text{E.11})$$

são iguais aos produzidos quando utiliza-se Ω em função de ρ com as condições

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0. \quad (\text{E.12})$$

E. Equivalencia entre $\tilde{\mu}$ e ρ

Referências Bibliográficas

- [1] L.O.Q. Peduzzi, *Do átomo grego ao átomo de Bohr*, p.21 (2015). Disponível no endereço <http://evolucaodosconceitos.wix.com/historia-da-ciencia>
- [2] H. Satz, *Int. J. Mod. Phys.* **E21**, 1230006 (2012).
- [3] <http://www.bnl.gov/rhic/>
- [4] <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>
- [5] Kerson Huang, *Fundamental Forces of Nature The Story of Gauge Fields*, First Edition (World Scientific Publishing, 2007).
- [6] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, *Nature* **443**, 675 (2006); Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, *Phys. Lett. B* **643**, 46 (2006).
- [7] P. de Forcrand, *PoS (LAT2009) 010*, 2009 [arXiv:1005.0539].
- [8] M. Cheng *et al.*, *Phys. Rev. D* **77**, 014511 (2008).
- [9] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [10] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961).
- [11] K. Fukushima and T. Hatsuda, *Rept. Prog. Phys.* **74**, 014001 (2011).
- [12] http://www.kip.uni-heidelberg.de/coulon/Lectures/SM/Free_PDFs/Lecture.HC_9.pdf
- [13] A. R. Bodmer, *Phys. Rev. D* **4**, 1601 (1971); E. Witten, *Phys. Rev. D* **30**, 272 (1984).
- [14] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press - First Edition, (2013).

- [15] STAR White Paper, J. Adams et al., [STAR Coll], Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005); J. Adams et al., [STAR Coll], Phys. Rev. Lett. **92**, 052302 (2004); Phys. Rev. Lett. **95**, 122301 (2005).
- [16] G. Odyniec, EPJ Web of Conferences **95**, 03027 (2015).
- [17] BES STAR White Paper, M.M. Aggarwal et al., [STAR Coll.], arXiv:12007.2613.
- [18] V. Koch, arXiv:0810.2520 [hep-ph].
- [19] STAR Collaboration, Phys. Rev. Lett. **112**, 032302 (2014).
- [20] K. Tuchin, Adv. High Energy Phys. 2013, 490495 (2013) [arXiv:1301.0099v2].
- [21] B. A. Boyko *et. al.*, Pulsed Power Conference. Digest of Technical Papers. 12^a IEEE International **2**, 746 (1999).
- [22] C. Kouveliotou, R. C. Duncan and C. Thompson, Sci. Am. **288N2**, 24 (2003).
- [23] T. Vaschapati, Phys. Lett. B **265**, 258 (1991).
- [24] Xu-Guang Huang and Jinfeng Liao, Int. J. Mod. Phys. **E23**, 1430003 (2014).
- [25] T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006).
- [26] H. -T. Ding, A. Francis, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and W. Soeldner, Phys. Rev. D **83**, 034504 (2011).
- [27] P. Demorest et al., Nature **467**, 1081 (2010).
- [28] J. Antoniadis et al., Science **340**, 1233232 (2013).
- [29] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Neutron_star_cross_section.svg
- [30] D. Lai and S. L. Shapiro, Astrophys. J. **383**, 745 (1991); M. Bocquet, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, and J. Novak, Astron. Astrophys. **301**, 757 (1995); S. Chakrabarty, D. Bandyopadhyay, and S. Pal, Phys. Rev. Lett. **78**, 2898 (1997); D. Bandyopadhyay, S. Chakrabarty, and S. Pal, *ibid.* **79**, 2176 (1997); A. E. Broderick, M. Prakash, and J. M. Lattimer, Phys. Lett. B **531**, 167 (2002); F. Weber, M. Meixner, R. P. Negreiros, and M. Malheiro, Int. J. Mod. Phys. E **16**, 1165 (2007);

- [31] V. Dexheimer, R. Negreiros, and S. Schramm, J. Phys. Conf. Ser. **432**, 012005 (2013).
- [32] M. G. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy, and F. Wilczek, Phys. Rev. D **64**, 074017 (2001).
- [33] B.W. Mintz, E.S. Fraga, G. Pagliara, and J. Schaffner-Bielich, J. Phys. G **37**, 094066 (2010); Phys. Rev. D **81**, 123012 (2010).
- [34] I. Bombaci, D. Logoteta, P.K. Panda, C. Providencia, and I. Vidana, Phys. Lett. B **680**, 448 (2009).
- [35] J. D. Gunton, M. San Miguel and P. S. Sahni, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Eds.: C. Domb and J. L. Lebowitz, Academic Press, London, 1983), v. 8.
- [36] M. S. Berger and R. L. Jaffe, Phys. Rev. C **35**, 213 (1987); **44**, 566(E) (1991).
- [37] I. Bombaci, D. Logoteta, C. Providencia, and I. Vidana, Astron. Astrophys. **462**, 1017 (2007).
- [38] D. N. Voskresensky, M. Yasuhira, and T. Tatsumi, Nucl. Phys. A **723**, 291 (2003).
- [39] L. F. Palhares and E. S. Fraga, Phys. Rev. D **82**, 125018 (2010).
- [40] M.B. Pinto, V. Koch and J. Randrup, Phys. Rev. C **86**, 025203 (2012).
- [41] B. W. Mintz, R. Stiele, R. O. Ramos, and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **87**, 036004 (2013).
- [42] S. Chakrabarty, Phys. Rev. D **54**, 1306 (1996).
- [43] T. Ghosh and S. Chakrabarty, Phys. Rev. D **63**, 043006 (2001).
- [44] André Felipe Garcia, "*Transição quiral na matéria de quarks magnetizada*", Dissertação de Mestrado (UFSC, Florianópolis, 2012).
- [45] G.N. Ferrari, A.F. Garcia and M.B. Pinto, Phys. Rev. D **86**, 096005 (2012).
- [46] V. Gusynin, V. Miransky, I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994).

- [47] I. A. Shovkovy, Lect. Notes Phys. **871**, 13 (2013).
- [48] D.P. Menezes, M.B. Pinto, S.S. Avancini, A.P. Martinez, and C.Providência, Phys. Rev. C **79**, 035807 (2009).
- [49] E.S. Fraga, and A.J. Mizher, Phys. Rev. D **78**, 025016 (2008).
- [50] J.K. Boomsma, and D. Boer, Phys. Rev. D **81**, 074005 (2010).
- [51] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrödi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schäfer and K. K. Szabó, JHEP **1202**, 044 (2012).
- [52] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrödi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, and A. Schäfer, Phys. Rev. D **86**, 071502(R) (2012).
- [53] R. L. S. Farias, K. P. Gomes, G. Krein and M. B. Pinto, Phys. Rev. C **90**, 025203 (2014); arXiv:1404.3931 [hep-ph].
- [54] W. J. de Haas and P. M. van Alphen, Proc. Am. Acad. Arts. Sci **33**, 1106 (1936).
- [55] R. Z. Denke and M. B. Pinto, arXiv:1506.05434 [hep-ph].
- [56] S.S. Avancini, D.P. Menezes, M.B. Pinto and C. Providência, Phys. Rev. D **85**, 091901 (2012).
- [57] Sh. Fayazbakhsh, S. Sadeghian and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **86**, 085042 (2012).
- [58] J. O. Andersen and A. Tranberg, JHEP **08** 002 (2012).
- [59] F. Preis, A. Rebhan and A. Schmitt, Lect. Notes Phys. **871**, 51 (2013).
- [60] F. Preis, A. Rebhan and A. Schmitt, JHEP **03** 033 (2011); arxiv:1012.4785 [hep-ph].
- [61] D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko, and A. S. Vshivtsev, Phys. Rev. D **61**, 025005 (1999).
- [62] J.-L. Kneur, M. B. Pinto e R. O. Ramos, Phys. Rev. C **81**, 065205 (2010).
- [63] M. Buballa, Phys. Rept. **407**, 205 (2005).
- [64] R. Z. Denke and M. B. Pinto, Phys. Rev. D **88**, 056008 (2013).

- [65] http://pt.wikipedia.org/wiki/Tensão_superficial
- [66] http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_tension
- [67] http://en.wikipedia.org/wiki/Young-Laplace_equation
- [68] E.S. Fraga, R.D. Pisarski, and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **63**, 121702 (2001); Nucl. Phys. A **702**, 217 (2002).
- [69] J. Schaffner-Bielich, J. Phys. G **31**, S651 (2005) e referências citadas.
- [70] I. Sagert *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 081101 (2009).
- [71] J. Randrup, Phys. Rev. C **79**, 054911 (2009).
- [72] John W. Cahn and John E. Hilliard, J. Chem. Phys. **28**, 258 (1958).
- [73] S.V. Molodstov and G.M. Zinovjev, Phys. Rev. D **84**, 036011 (2011).
- [74] M. L. Olesen and J. Madsen, Phys. Rev. D **49**, 2698 (1994).
- [75] J.E. Horvarth, O.G. Benvenuto and H. Vucetich, Phys. Rev. D **45**, 3865 (1992).
- [76] T. Fischer, S.C. Whitehouse, A. Mezzacappa, F.K. Thielemann, and M. Liebendorfer, Astron. and Astrophys. **499**, 1 (2009).
- [77] André F. Garcia e Marcus B. Pinto, Phys. Rev. C **88**, 025207 (2013).
- [78] J. D. Walecka, Annals of Phys. **83**, 491 (1974).
- [79] J.D. Walecka and B. D. Serot, Adv. Nucl. Phys. **16**, 1 (1986).
- [80] R. Z. Denke, "*Transições de Fase na Matéria de Quarks Magnetizada com Repulsão Vetorial*", Tese de Doutorado (UFSC, Florianópolis, 2015).
- [81] A. Vuorinen and L. G. Yaffe, Phys. Rev. D **74**, 025011 (2006).
- [82] P. Forcrand and O. Philipsen, JHEP **01**, 077 (2007).
- [83] K. Fukushima, Phys. Rev. D **78**, 114019 (2008).
- [84] E. S. Bowman and J. Kapusta, Phys. Rev. C **79**, 015202 (2009).

Referências Bibliográficas

- [85] L. Ferroni, V. Koch and M.B. Pinto, Phys. Rev. C **82**, 055205 (2010).
- [86] S. Carignano, D. Nickel, and M. Buballa, Phys. Rev. D **82**, 054009 (2010).
- [87] R. Rapp, T. Schäfer, E. Shuryak, and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81**, 53 (1998).
- [88] K. Kashiwa, T. Hell and W. Weise, Phys. Rev. D **84**, 056010 (2011).
- [89] O. Lourenço, M. Dutra, T. Frederico, A. Delfino e M. Malheiro, Phys. Rev. D **85**, 097504 (2012).
- [90] N. Bratovic, T. Hatsuda and W. Weise, Phys. Lett. B **719**, 131 (2013).
- [91] J. Sugano, J. Takahashi, M. Ishii, H. Kouno and M. Yahiro, Phys. Rev. D **90**, 037901 (2014).
- [92] G. F. Smoot, Rev. Mod. Phys. **79** 1349-1379 (2007).
- [93] G. F. Smoot *et al.*, Astrophys. J. **396** L1-L5 (1992).
- [94] <http://science.nasa.gov/missions/wmap/>
- [95] D. N. Spergel *et al.*, WMAP Collaboration Astrophys. J. Suppl. **170** 377 (2007).
- [96] S. Ejiri, F. Karsch, K. Redlich, Phys. Lett. B **633**, 275 (2006); M. Cheng *et al.*, Phys. Rev. D **79**, 074505 (2009); B. Stokic *et al.*, Phys. Lett. B **673**, 192 (2009); S. Gupta, X. Luo, B. Mohanty, H. G. Ritter, and N. Xu, Science **332**, 1525 (2011).
- [97] R. V. Gavai and S. Gupta, Phys. Lett. B **696**, 459 (2011).
- [98] Y. Hatta and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **91**, 102003 (2003).
- [99] M. M. Aggarwal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 022302 (2010).
- [100] F. Karsch and K. Redlich, Phys. Lett. B **695**, 136 (2011).
- [101] P. Garg, D.K. Mishra, P. K. Netrakanti, B. Mohanty, A. K. Mohanty, B. K. Singh, and N. Xu, Phys. Lett. B **726**, 691 (2013).
- [102] <https://drupal.star.bnl.gov/STAR/files/starpublications/205/data.html>

- [103] D. Kroff and E. S. Fraga, Phys. Rev. D **91**, 025017 (2015).
- [104] J.-L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos e E. Staudt, Int. J. Mod. Phys. E **21**, 1250017 (2012).
- [105] J. Madsen, Phys. Rev. D **50**, 3328 (1994).
- [106] J.W. Chen et al., Phys. Rev. D **93**, 034037 (2016).
- [107] J. L. Kneur and A. Neveu, Phys. Rev. D **81**, 125012 (2010).
- [108] J. L. Kneur and A. Neveu, Phys. Rev. D **92**, 074027 (2015).
- [109] J. L. Kneur and M. B. Pinto, Phys. Rev. D **92**, 116008 (2015).
- [110] J. L. Kneur and M. B. Pinto, Phys. Rev. Lett. **116**, 031601 (2016).
- [111] W. Broniowski, Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl. 5/3, 631 (2012).
- [112] D. Nickel, Phys. Rev. D **80**, 074025 (2009).
- [113] Jochen Wambach, arxiv:1307.6714 [nucl-th] (2013).
- [114] V. Koch, Int.J.Mod.Phys. E **6**, 203 (1997).
- [115] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34**, 1790 (1964).
- [116] M.E.B. Pinto, "*Non-Perturbative Methods Applied to Chiral Symmetry Breaking*", Ph. D. Thesis (Imperial College, London, 1992).
- [117] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (MacGraw Hill, 1980).
- [118] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory*, Revised Edition (Institute of Physics Pub., 1993).
- [119] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group*, First Edition (Addison-Wesley Publishing Company, 1992).
- [120] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher e M.E.J. Newman, *The theory of critical phenomena*, First Edition (Oxford University Press, 1992).
- [121] H.B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Second Edition (John Wiley & Sons, 1985).

Referências Bibliográficas

- [122] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Edition (Cambridge University Press, 1996).
- [123] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Second Edition (Princeton University Press, 2010).
- [124] J. I. Kapusta, C. Gale, *Finite Temperature Field Theory*, Second Edition (Cambridge University Press, 2006).
- [125] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*, (World Scientific Publishing, 1997).
- [126] M. Quiros, arXiv:hep-ph/9901312v1.
- [127] J. Zinn-Justin, arXiv:hep-ph/0005272v1.
- [128] S. Salinas, *Física Estatística*, Segunda Edição (Editora da USP, São Paulo, 2005).
- [129] Marcelo O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, EdUSP (2002).
- [130] H. Kleinert, On the Hadronization of Quark Theories, Lectures presented at the Erice Summer Institute 1976; in: *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, A. Zichichi (ed.), Plenum Press, New York 1978, p. 289.
- [131] M.K. Volkov, *Ann. Phys. (NY)* **157** 282 (1984).
- [132] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Lett. B* **145** 7 (1984).
- [133] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, *Phys. Rev. D* **73**, 014019 (2006) [arXiv:hep-ph/0506234].
- [134] W. j. Fu, Z. Zhang and Y. x. Liu, *Phys. Rev. D* **77**, 014006 (2008) [arXiv:0711.0154 [hep-ph]].
- [135] M. Ciminale, R. Gatto, N. D. Ippolito, G. Nardulli and M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **77**, 054023 (2008).
- [136] D.J. Gross e A. Neveu, *Phys.Rev. D* **10** 3235 (1974).
- [137] K. Hagiwara et al, *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D* **66** 010001 (2002).

[138] B. Holstein, Phys. Lett. B **244** 83 (1990).

[139] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, and B. Renner, Phys. Rev. **175** 2195 (1968).