

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
ENGENHARIA MECÂNICA**

Marx Ribeiro

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
APLICADOS A PLACAS LAMINADAS COM
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Florianópolis

2016

Marx Ribeiro

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
APLICADOS A PLACAS LAMINADAS COM
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra.

Ribeiro, Marx

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
APLICADOS A PLACAS LAMINADAS COM NÃO-LINEARIDADE
GEOMÉTRICA / Marx Ribeiro; orientador, Paulo de Tarso R. Mendonça.
- Florianópolis, SC, 2016. 116 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina,
Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Método de Elementos Finitos Generalizados. 3. Não Linearidade Geométrica. 4. Laminado. I. Mendonça, Paulo de Tarso R. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Marx Ribeiro

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
APLICADOS A PLACAS LAMINADAS COM NÃO
LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 29 de Abril de 2016.

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.
Orientador

Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Diego Amadeu Furtado Torres, Dr.Eng.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dedico este trabalho a meus pais Claudio e Lorilene e a meus irmãos Gustavo, Gabriel, Letícia e Milena.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paulo de Tarso R. Mendonça pela orientação, esclarecimentos e dedicação imprescindíveis para a elaboração deste trabalho.

Aos professores do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio e ensinamentos recebidos. Ao professor Clovis Sperb de Barcellos pelos inúmeros esclarecimentos sobre o tema do trabalho e ao professor Diego Amadeu Torres pelas contribuições e apoio.

A todos os amigos do Grupo de Análise e Projeto Mecânico GRANTE e colegas de classe André, Laércio e Misael pelo auxílio, incentivo e aprendizado todos os dias. A Luís Fernando Nicolini pela amizade e suporte ao longo dessa caminhada.

À toda minha família e amigos sem os quais essa jornada ao longo da vida perde o sentido.

”O que observamos não é a natureza em si mesma, mas sim a natureza exposta ao nosso método de questionamento.”

(Werner Karl Heisenberg)

RESUMO

Neste trabalho, estuda-se a aplicação do Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) a placas laminadas. Para tal, são adotados os modelos de placa de Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin. Para grandes deslocamentos transversais, em ambos os modelos, consideram-se as hipóteses de von Kármán, levando a uma condição de não linearidade geométrica. É realizada uma discretização do problema para aplicação numérica via MEFG e o código computacional é desenvolvido em ambiente MATLAB®. Para o MEFG, funções contínuas e não contínuas são usadas como base para Partição da Unidade (PU), com funções de borda exponenciais, e realiza-se a variação do grau dos polinômios de enriquecimento. A malha é composta por elementos triangulares de três nós e uma regra de integração triangular é utilizada. Por fim, realizam-se simulações em placas quadradas com carregamento distribuído uniforme em materiais lineares no regime elástico e os resultados são comparados com a literatura.

Palavras-chave: funções de aproximação regulares. método generalizado de elementos finitos. grande deformação de von Kármán. placa laminada.

ABSTRACT

This work addresses the application of the Generalized Finite Element Method (GFEM) to laminated plates. To this end, the Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin plate models are adopted. For large transverse displacements, in both models, one considers the hypotheses of von Kármán, leading to a condition of geometric nonlinearity. A discretization of the problem is performed via GFEM and a computational code is developed in MATLAB[®] environment. For GFEM, continuous and non-continuous basis functions are used for partition of unit (PoU), with exponential edge functions, and is performed the variation of the degree of enrichment polynomials. The mesh is composed by three noded triangular elements and a numerical integration rule for triangle. Finally, simulations on square plates are carried out considering uniform distributed load and linear materials inside the elastic range and the results are compared with the literature.

Keywords: continuous approximation functions. generalized finite element method. von Kármán's large deformation. laminated plate.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Exemplo de nuvem convexa e não-convexa em um malha triangular arbitrária	30
Figura 2 Combinação da PU com uma função de enriquecimento. Fonte: (TORRES, 2008)	36
Figura 3 Divisão e cota transversais em um laminado. Fonte: adaptado de (KUBIAK, 2013)	47
Figura 4 Malhas triangulares (a) M1; (b) M4 e (c) M8.	71
Figura 5 Relação entre o deslocamento transversal pela referência (w/w_{REF}), no centro da placa para MEFG- C^0 com refino da malha para vários graus de enriquecimento, $npi = 7$ pontos de integração de triângulo e $\bar{P} = 320$	72
Figura 6 Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^0 com refino da malha para vários graus de enriquecimento, $npi = 25$ e $\bar{P} = 320$	73
Figura 7 Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com várias malhas e enriquecimento $p = 1$ (parte inferior) e $p = 2$ (parte superior) com $\bar{P} = 320$	74
Figura 8 Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com várias malhas e enriquecimento $p = 3$ com $\bar{P} = 320$	75
Figura 9 Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com refino da malha para vários graus de enriquecimento e $\bar{P} = 320$	75
Figura 10 Figuras ilustrativas com escala do campo de tensões σ_x [MPa] na superfície inferior utilizando <i>software</i> Abaqus® (acima) e MEFG- C^k com malha M10, enriquecimento $p = 3$ e $npi = 54$ (abaixo), para $\bar{P} = 320$	77
Figura 11 Figuras ilustrativas com escala do campo de tensões cisalhantes τ_{xy} [MPa] na superfície inferior utilizando <i>software</i> Abaqus® (acima) e MEFG- C^k com malha M10, enriquecimento $p = 3$ e $npi = 54$ (abaixo), para $\bar{P} = 320$	78
Figura 12 Deslocamento transversal, w [mm], vista superior e vista lateral (detalhe) para MEFG- C^k , enriquecimento $p = 2$, $npi = 54$ e $\bar{P} = 320$	79
Figura 13 SS-3 Placa simplesmente apoiada com rotações livres nas bordas.	80
Figura 14 Deslocamento transversal para referencia e MEFG- C^0	

com enriquecimento $p = 2$ e $npi = 25$ utilizando SS-3. 82

Figura 15 Tensão parametrizada $\bar{\sigma}_x$ para MEFG- C^0 com enriquecimento $p = 2$ e $npi = 25$ utilizando SS-3. 83

Figura 16 Diferença relativa entre MEFG e referência da Tabela 2 84

Figura 17 Diferença relativa entre MEFG e referência da Tabela 3 84

Figura 18 Tensão $\bar{\sigma}_x$ em 4 pontos da espessura ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 2$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$ 85

Figura 19 Tensão $\bar{\sigma}_x$ através da espessura em pontos ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 2$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$ 86

Figura 20 Tensão $\bar{\tau}_{xz}(a/2; 0)$ através da espessura com MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$ 87

Figura 21 Plotagem apenas das tensões $\bar{\tau}_{xz}(a/2; 0)$ calculadas de forma não linear da Figura 20. 87

Figura 22 Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 6, 25$ e SS-3. 91

Figura 23 Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 250$ e SS-3. 91

Figura 24 Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 6, 25$ e SS-3. 93

Figura 25 Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 250$ e SS-3. 94

Figura 26 Diferença relativa entre os resultados \bar{w} e $\bar{\sigma}_x$ de Reddy (2014) e MEFG- C^k da Tabela 4. 97

Figura 27 σ_x [MPa] superfície superior para MEFG- C^k , $\bar{P} = 25$ da Tabela 4. 97

Figura 28 σ_x [MPa] superfície inferior para MEFG- C^k , $\bar{P} = 250$ da Tabela 4. 98

Figura 29 σ_x [MPa] superfície superior para MEFG- C^k , $\bar{P} = 250$ da Tabela 4. 98

Figura 30 Deslocamento $\bar{w}(0; 0)$ para centro da placa utilizando SS-3 para Abaqus[®] e MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ com aumento da carga q_0 102

Figura 31 $\bar{\sigma}_x(0; 0)$ para o centro da placa utilizando SS-3 para Abaqus[®] e MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ com aumento da carga q_0 103

Figura 32 $\bar{\sigma}_x$ através de z/h para 2 elementos (e_1, e_2) compartilhando nó central, $q_{max}=1$ MPa, MEFG- C^0 com $p = 3$ e $npi = 25$. 103

Figura 33 Tensão $\bar{\sigma}_x$ em 5 pontos da espessura ao longo do eixo x

para MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$..	104
Figura 34 Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ com um ponto em cada lâmina ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$	105
Figura 35 Tensão $\bar{\tau}_{xz}^i$ ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$	106
Figura 36 Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ e \bar{i}_{xz} para $x/(a/2) = 1,0$ através da espessura com MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3.....	106
Figura 37 τ_{xz} [MPa] superfície superior do laminado para MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 126$, $q_0 = 1$ MPa e SS-3.	107
Figura 38 τ_{xz}^i [MPa] superfície superior do laminado para MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 126$, $q_0 = 1$ MPa e SS-3.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Resultados de deslocamento transversal, w/h e tensão $\bar{\sigma}_x = \sigma_x a^2 / Eh^2$, para $q_0 = 0.0138$ MPa ($\bar{P} = 320$), placa isotrópica e engastada.....	76
Tabela 2	Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão coplanar normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas (\bar{P}) com condições de contorno SS-1.	81
Tabela 3	Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão coplanar normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas (\bar{P}) com condições de contorno SS-3.	82
Tabela 4	Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas normalizadas(\bar{P}) para placa fina isotrópica com condições de contorno SS-3.....	96
Tabela 5	Valores de deslocamento transversal \bar{w} e tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) no centro da placa para várias cargas \bar{P} de uma placa fina ortotrópica com condições de contorno SS-3.....	100
Tabela 6	Valores de tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) no centro do laminado para MEEG- C^k com variação do enriquecimentos e npi	108

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método de Elementos Finitos	27
TCP	Teoria Clássica de Placas	28
MEFG	Método de Elementos Finitos Generalizado.....	28
GRANTE	Grupo de Análise e Projeto Mecânico	28
PU	Partição da Unidade	29
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais	40
FSDT	Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem...	48

LISTA DE SÍMBOLOS

C^k	Espaço de funções com derivadas contínuas até ordem k
p	Grau do polinômio de enriquecimento
φ_α	Função PU em MEFM
\mathbf{x}	Posição no domínio
ϕ	Função arbitrária
\mathfrak{R}^n	Espaço de dimensão n
Nel	Número de Elementos Finitos
\mathcal{K}_e	Elemento Finito
Nno	Número de nós
\mathbf{x}_α	Nó α
\mathfrak{S}_N	Cobertura aberto do domínio
$\overline{\omega}_\alpha$	Fechamento da nuvem ω_α
$\overline{\Omega}$	Fechamento do domínio Ω
C_0^k	Espaço de funções com derivadas de suporte compacto contínuas até ordem k
W_α	Função Peso associada ao nó \mathbf{x}_α
$\xi_j(\mathbf{x})$	Coordenada normal à aresta j
$b_{\alpha,j}$	Ponto de referência da aresta j da nuvem ω_α
$\mathbf{n}_{\alpha,j}$	Vetor unitário normal à aresta j associado ao nó \mathbf{x}_α
$\varepsilon_{\alpha,j}$	Função da aresta j da nuvem ω_α
γ	Constante positiva da função de aresta
c_α	Parâmetro de escalamento da função aresta
$h_{\alpha,j}$	Distância da aresta j até o nó \mathbf{x}_α
β	Taxa de decaimento da função aresta
A	Parâmetro de normalização da função de aresta
B	Parâmetro de escalamento da função de aresta
\mathfrak{S}_N^p	Família de funções
L_S	Conjunto de polinômios
$L_{\alpha i}$	Conjunto de i funções de enriquecimento associadas à nuvem ω_α
h	Espessura do laminado
\mathbf{n}	Vetor unitário normal à superfície média
u_0, v_0	Deslocamentos no plano
w	Deslocamento transversal
\mathbf{E}	Tensor de Deformação Green-Lagrange
ϵ	Campo de deformações
ε	Deformação de membrana no plano
κ	Mudança de curvatura devida à flexão

ε^0	Parcela linear da Deformação de membrana no plano
ε^{NL}	Parcela não linear da Deformação de membrana no plano
\mathbf{N}, \mathbf{M}	Esforços generalizados de membrana e flexão
δW	Variação do trabalho
δW_{int}	Variação do trabalho interno
δW_{ext}	Variação do trabalho externo
σ	Vetor componentes de tensão
\mathbf{u}	Vetor componentes de deslocamento
\mathbf{b}	Vetor de forças de corpo
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor de trações atuando no contorno
q_0	Carga distribuída sobre a superfície da placa
Q_n	Esforços generalizados de cisalhamento
x, y, z	Direções de coordenadas cartesiana
n, r, s	Direções de coordenadas no contorno
n_x	$\cos \theta$
n_y	$\sen \theta$
θ	Ângulo entre direção 1 do laminado e eixo x
V_n	Força cisalhante efetiva
X, Y	Esforços prescritos no contorno
$[\mathbf{Q}]$	Matriz Material
$[\bar{\mathbf{Q}}]$	Matriz Material Transformada
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$	Sub-matrizes constitutivas do laminado
k	Número da lâmina
$Nlam$	Número total de lâminas
Z_k	Cota superior em z da lâmina k
Z_{k-1}	Cota inferior em z da lâmina k
\mathbf{C}	Matriz constitutiva do laminado
u_i	Campo de deslocamento nas direções cartesianas
θ_x, θ_y	Rotações sobre os eixos x e y
γ^{cis}	Vetor de Cisalhamento Transversal
K_s	Constante correção de esforços cortantes
\mathbf{C}^{cis}	Matriz constitutiva Cisalhante do laminado
λ	Fator crítico de flambagem
\mathbf{u}^e	Deslocamento generalizado no elemento
\mathbf{N}^e	Matriz funções de forma do elemento
\mathbf{U}^e	Vetor coeficientes nodais do elemento
$nnoe$	Número de nós no elemento
nfu	Número de funções no elemento
\mathbf{U}	Vetor coeficientes nodais

$nglde$	Número de graus de liberdade do elemento
\mathbf{B}^0	Matriz de aproximação da parcela de deformação linear
\mathbf{A}^z	Matriz auxiliar da parcela de deformação não linear
\mathbf{G}	Matriz derivada auxiliar da parcela de deformação não linear
\mathbf{B}^{NL}	Matriz de aproximação da parcela de deformação não linear
\mathbf{K}^e	Matriz de Rigidez do elemento
\mathbf{K}	Matriz de Rigidez
npi	Número de pontos de integração
J	Jacobiano
\mathbf{F}	Vetor força
ϵ_{ps}	Constante para Método de Babuška
tol_ϵ	Tolerância para Método de Babuška
\mathbf{F}_{ext}	Vetor força externa
\mathbf{R}	Vetor resíduo
\mathbf{K}^{TG}	Matriz de Rigidez Tangente
\mathbf{U}^k	Vetor resposta do coeficientes nodais da iteração $k + 1$
$(\mathbf{K}^G)^e$	Matriz Geométrica do elemento
a, b	Comprimento, largura da placa
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de poisson
\bar{P}	Parâmetro de carga
N_{nav}	Número de autovalores calculados iterativamente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	29
2.1	PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	29
2.1.1	Partição da Unidade com Elementos Finitos Padrão	31
2.1.2	Partição da Unidade de Shepard	32
2.2	FUNÇÕES PESO	32
2.2.1	Funções peso para nuvens não convexas	34
2.3	ENRIQUECIMENTO DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	34
3	PLACAS LAMINADAS	37
3.1	TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS	37
3.1.1	Hipóteses cinemáticas	37
3.1.2	Campos de deslocamentos	38
3.1.3	Hipóteses de von Kármán e campo de deformações	38
3.1.4	Equações de Equilíbrio	40
3.1.5	Forma Fraca	41
3.1.6	Condições de contorno	43
3.1.7	Equações Constitutivas	44
3.2	TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN	48
3.2.1	Campos de deslocamentos	48
3.2.2	Campo de Deformações	49
3.2.3	Forma Fraca	50
3.2.4	Equações Constitutivas	51
3.2.5	Recuperação das tensões por integração	51
3.3	ESTABILIDADE ESTRUTURAL	54
4	DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	55
4.1	MODELO DE KIRCHHOFF-LOVE	55
4.1.1	Discretização dos deslocamentos e deformações ...	55
4.1.2	Variação do Trabalho Interno	59
4.1.3	Matriz de Rigidez	60
4.1.4	Matriz de Rigidez Tangente	61
4.2	MODELO DE REISSNER-MINDLIN	65
4.2.1	Discretização Deslocamentos e Deformações	66
4.2.2	Matriz de Rigidez	67
4.2.3	Matriz de Rigidez Tangente	67

4.3	ESTABILIDADE E MATRIZ GEOMÉTRICA	68
5	RESULTADOS	69
5.1	PLACA DE ALUMÍNIO HOMOGÊNEA E ENGASTADA	69
5.2	PLACA ESPESSA	80
5.3	PLACA FINA	95
5.4	PLACA ORTOTRÓPICA	99
5.5	LAMINADO FINO CRUZADO SIMÉTRICO.....	101
5.6	ESTABILIDADE EM PLACA	109
6	CONCLUSÃO	111
Trabalhos Futuros		112
REFERÊNCIAS		113

1 INTRODUÇÃO

As placas e cascas são elementos estruturais utilizados extensivamente em muitos setores da indústria, como em equipamentos, em dutos ou vasos de pressão, na indústria aeroespacial muitas vezes sob forma de compostos laminados, em navios, pontes e muitos outros. Esta aplicação é justificada pelo fato de que nestas estruturas o carregamento é suportado principalmente por tensões coplanares ao plano ou casca em duas dimensões, resultando em uma geometria muito compacta, mas ao mesmo tempo rígida (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001). Assim, características como baixo peso, alta capacidade de carga e economia são combinadas. Do ponto de vista físico, podem-se criar modelos que são simplificações de partes sólidas em sistemas coordenados de duas dimensões. O processo consiste em aproximar campos de deslocamentos tridimensionais a partir da combinação de campos incógnitos de duas dimensões com hipóteses cinemáticas. Então, reduz-se a complexidade e o número de variáveis do problema a ser resolvido.

Sob a ótica matemática, os modelos de placas e cascas apresentam um desafio interessante por diversos fatores, por exemplo: (1) seja pelo acoplamento das equações diferenciais que surgem com não linearidades geométricas, como quando se assume as hipóteses de von Kármán; (2) pelo surgimento de problemas numéricos, a notar o travamento por cisalhamento (GARCIA et al., 2000); (3) pela exigência de alta regularidade das funções de aproximação (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009) que não são providas naturalmente pelo Método de Elementos Finitos (MEF). Assim fica claro o grande interesse, tanto industrial quanto acadêmico, em estudar, analisar e poder prever o comportamento destas estruturas.

Ao longo dos anos, diversos modelos foram propostos tentando superar deficiências dos resultados de deslocamento ou de tensão (LEE; PLAN, 1978; HUGHES; TAYLOR; KANOKNUKULCHAI, 1977; REDDY, 1984, 1989), conforme o interesse de cada área. Na análise estrutural estática, o campo de tensões é o foco dos cálculos, pois está diretamente ligado ao nível de solicitação que a estrutura suporta e assim relacionado a falhas estáticas por meio de critérios de falha.

Nos diversos modelos de placa existem hipóteses referentes às relações cinemáticas do movimento que levam a importantes consequências matemáticas. Uma destas consequências, comum a vários modelos, é o requisito da existência e continuidade das derivadas de ordem superior. Neste grupo, um modelo usado largamente para placas

delgadas é o modelo de Kirchhoff-Love ou Teoria Clássica de Placas (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001; REDDY, 2006), em que, entre outras características, as funções de aproximação precisam ser de classe C^1 . Ou seja, estas funções precisam ter a primeira derivada contínua. Isso ocorre pois a formulação envolve derivadas de até segunda ordem.

Neste contexto, o Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) se aplica muito bem, pois é possível utilizar funções de aproximação de regularidade arbitrária (DUARTE; KIM; QUARESMA, 2006). Com isso, esta formulação apresenta grande vantagem em relação ao uso de elementos híbridos como realizado por Veiga, Niiranen e Stenberg (2007). Ela não requer a aproximação dos campos derivados usando funções de forma como em Reddy (2006), pois o próprio campo tem diferenciabilidade suficiente, o que irá produzir campos de tensão contínuos nas interfaces entre elementos. É uma característica natural do método proporcionar refino adaptativo, evitando a necessidade de remalhamento. De fato, alguns trabalhos já existem neste sentido (GARCIA et al., 2000; BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009; MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2011), usando a metodologia de MEFG na implementação de modelos de placa.

Um avanço recente na utilização da metodologia de MEFG propõe combinar funções de aproximação lagrangianas de continuidade C^0 com funções de continuidade arbitrária C^k apenas para os campos incógnitos que requerem derivadas de alta ordem (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2013). Desta forma, há uma redução do número de graus de liberdade no elemento, mas mantendo a formulação que permite enriquecer as funções lagrangianas e mantendo as vantagens do método MEFG já citadas.

O objetivo deste trabalho é implementar os modelos de placa de Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin em laminados, usando o MEFG com funções de aproximação de classes C^0 e C^k , incluindo as hipóteses de não-linearidade de deformação de von Kármán, de modo a capturar com maior precisão grandes rotações e deslocamentos transversais, mas ainda com pequenas deformações. Finalmente, visa-se usar a implementação para investigar os campos de deslocamentos, a continuidade dos campos de tensão e a sensibilidade da solução a malhas grosseiras. Para tal, foi utilizado o ambiente MATLAB[®], que é uma plataforma com diversas ferramentas de programação e bibliotecas numéricas para cálculo de matrizes. Muitas das rotinas utilizadas já estavam disponíveis no Grupo de Análise e Projeto Mecânico, dedicado ao desenvolvimento e utilização de ferramentas de simulação numérica.

2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método de Elementos Finitos Generalizados é uma combinação de conceitos e técnicas de métodos sem malha e o tradicional Método de Elementos Finitos, onde uma malha é utilizada para definir Partições da Unidade (PU) e um domínio para a integração numérica. A PU tem função de garantir a continuidade entre elementos e pode ser combinada com funções para melhorar a qualidade da aproximação na região de suporte da função PU. Isso é feito incluindo graus de liberdade à formulação do MEF. Assim, amplia-se o espaço de procura na discretização pelo Método de Galerkin.

Torres (2008) faz uma revisão muito clara de como vários conceitos se fundiram e deram origem a implementação a ser usada neste trabalho, desde os trabalhos pioneiros de Babuska e Melenk (1995) e Duarte e Oden (1996), passando pelo uso de funções lagrangianas e mais recentemente funções de regularidade arbitrária C^k (BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2007; DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).

O Método de Elementos Finitos Generalizados utilizado neste trabalho baseia-se em uma malha triangular linear que é utilizada para definir uma PU e o domínio para a integração numérica, sobre o qual será realizado um enriquecimento sobre as funções PU. O desenvolvimento matemático do MEFG pode ser resumido em duas etapas:

1. Criação numérica das Funções PU: a PU em cada nó é construída numericamente com base nas coordenadas do nó, tamanho do elemento e principalmente influência dos nós no mesmo elemento. Esta influência, por sua vez, depende da nuvem, ω , que é um subdomínio formado pela união dos elementos que contém aquele nó.
2. Enriquecimento: cada grau de liberdade é enriquecido pela multiplicação da PU por um conjunto de funções previamente escolhido. De forma prática, criam-se novos graus de liberdade atrelados àqueles da formulação tradicional de MEF.

2.1 PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

A Partição da Unidade se caracteriza por ser um conjunto de funções cuja soma dos valores é igual à unidade em qualquer ponto

de seu suporte. As funções de aproximação $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ associadas aos nós $\alpha = 1, 2, \dots, N$ nos, se caracterizam por serem não nulas apenas dentro de uma região de suporte compacta.

A propriedade da função PU explorada em MEFG é que qualquer função $\phi(\mathbf{x})$ pode ser localmente reproduzida, dentro do suporte da PU, com ou sem perda da continuidade, dependendo da mínima continuidade entre PU e $\phi(\mathbf{x})$. Neste caso, a PU com funções polinomiais de enriquecimento formam o subespaço de aproximação (BELYTSCHKO; GRACIE; VENTURA, 2009).

Para construir as funções de aproximação de MEFG, pode-se considerar a superfície média de uma placa como um domínio aberto, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a qual possui uma malha de elementos triangulares de arestas retas com N_{el} elementos \mathcal{K}_e , $\{\mathcal{K}_e\}_{j=1}^{N_{el}}$, N nós com coordenadas $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$. Cada um destes nós é associado a uma nuvem, ω_α , para $\alpha = 1, \dots, N$, a qual é formada pela união dos elementos triangulares adjacentes a este nó α (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009).

Na implementação deste trabalho, \mathfrak{S}_N representa a cobertura aberta deste domínio. Na Figura 1, é possível ver duas nuvens, ω_1 e ω_2 , sendo ω_1 um exemplo de nuvem convexa, formada pela união dos elementos $\{a, b, c, d, e\}$ e ω_2 um exemplo de nuvem não-convexa, formada pela união dos elementos $\{c, d, g, h, k, l, m\}$.

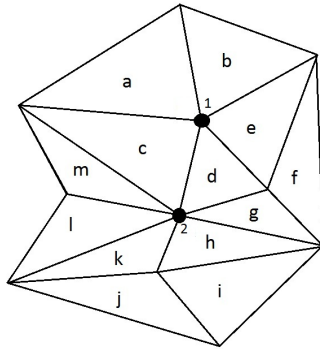


Figura 1 – Exemplo de nuvem convexa e não-convexa em um malha triangular arbitrária

A criação das nuvens deve ser tal que o domínio Ω esteja todo contido na união dos fechamentos destas nuvens ($\bar{\omega}_\alpha$)

$$\mathfrak{S}_N = \{\omega\}_{\alpha=1}^N, \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \bar{\omega}_\alpha. \quad (2.1)$$

Considerando o conjunto de funções $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ tendo como suporte compacto a correspondente nuvem ω_α , Babuška, Banerjee e Osborn (2004) definem PU como um conjunto de funções formadas de tal forma que:

1. A soma de seus valores é igual à unidade em qualquer ponto de suporte.

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall (\mathbf{x}) \in \Omega \quad (2.2)$$

2. Todo subconjunto compacto de Ω intersecciona apenas um número finito de suportes.
3. A função φ_α é diferente de zero apenas sobre sua respectiva nuvem, ω_α , e possui diferenciabilidade requerida dentro da nuvem de pelo menos k derivadas contínuas.

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^k(\omega_\alpha), \quad k \geq 0 \quad (2.3)$$

Assim, o conjunto de funções $\{\varphi_\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^N$ pode ser considerado como uma PU subordinada à cobertura \mathfrak{S}_N .

O Método de Elementos Finitos Generalizados com funções contínuas (MEFG- C^k) baseia-se no emprego de uma Partição da Unidade suaves que forneçam k derivadas contínuas sobre Ω . As funções de forma são construídas pelo produto da partição da unidade de Shepard com funções de enriquecimento. Já o MEFG- C^0 baseia-se no emprego de funções PU que são as próprias funções de forma C^0 do MEF tradicional.

2.1.1 Partição da Unidade com Elementos Finitos Padrão

Como as funções de forma do MEF tradicional são consideradas uma PU, pode-se adotar o caso em que a nuvem ω_α é a união dos elementos que compartilham o mesmo nó \mathbf{x}_α como vértice de elementos de uma malha triangular linear, onde a função φ_α é a própria função de forma global do MEF. Estas funções tem um custo computacional baixo e são facilmente integráveis por quadratura numérica, porém sua continuidade é limitada a C^0 . (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2011)

2.1.2 Partição da Unidade de Shepard

Para problemas que exigem derivadas contínuas dos deslocamentos, como o caso da TCP, a PU utilizando as funções de forma do MEF é inadequada, sendo difícil atingir a continuidade desejada. Desta forma, parte-se para a solução proposta por Shepard (1968) e empregada por Barcellos, Mendonça e Duarte (2009), Mendonça, Barcellos e Torres (2011).

Seja uma função $\mathcal{W}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com um suporte compacto, ω_α , pertencente ao espaço $C_0^k(\omega_\alpha)$, a função peso em cada nuvem, ω_α , da cobertura aberta \mathfrak{S}_N do domínio Ω . Então, a PU de Shepard subordinada à cobertura \mathfrak{S}_N é definida como:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha}{\sum_{\beta(\mathbf{x})} \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})} \quad \beta(\mathbf{x}) \in \{\gamma \mid \mathcal{W}_\gamma(\mathbf{x}) \neq 0\}, \quad (2.4)$$

onde a regularidade $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ depende apenas da regularidade das funções peso. Logo, resta definir as funções peso (ou ponderação) com a regularidade necessária.

2.2 FUNÇÕES PESO

Algumas considerações devem ser levadas em conta na escolha das funções peso. Elas precisam ter, no mínimo, a continuidade desejada e serem, juntamente com suas derivadas, razoavelmente integráveis (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009). Para construção da partição da unidade de Shepard são necessárias funções pesos, em que para o caso de nuvens convexas utilizam-se as funções peso propostas por Edwards e descritas em Duarte, Kim e Quaresma (2006). Neste método, define-se uma coordenada normal à aresta do contorno da nuvem

$$\xi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{\alpha,j} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_{\alpha,j}), \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{b}_{\alpha,j}$ é um ponto na fronteira que é selecionado para ser o ponto central da aresta j , e $\mathbf{n}_{\alpha,j}$ é o vetor normal à aresta apontando para o interior da nuvem.

A função de aresta da nuvem é escolhida como uma função que possui valor positivo dentro da nuvem e valor zero fora do suporte da nuvem. Foram escolhidas as funções com continuidade C^∞ seguindo

Barcellos, Mendonça e Duarte (2009):

$$\varepsilon_{\alpha,j}[\xi_j(\mathbf{x})] = \hat{\varepsilon}_{\alpha,j} := \begin{cases} e^{-\xi_j^{-\gamma}} & , \text{ se } 0 < \xi_j \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.6)$$

onde γ é uma constante real positiva.

As funções peso irão determinar qual a influência de cada nó dentro de um mesmo elemento e são definidas por:

$$\mathcal{W}_\alpha(\mathbf{x}) = e^{c_\alpha} \prod_{j=1}^{M_\alpha} \varepsilon_{\alpha,j}(\xi_j), \quad (2.7)$$

sendo c_α um parâmetro de escala que garanta $\mathcal{W}_\alpha = 1$ no nó \mathbf{x}_α .

As funções de partição da unidade de Shepard são definidas por:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{W}_\alpha}{\sum_{\beta(\mathbf{x})} \mathcal{W}_\beta(\mathbf{x})} \quad \beta(\mathbf{x}) \in \{\gamma \mid \mathcal{W}_\gamma(\mathbf{x}) \neq 0\}. \quad (2.8)$$

Estas funções (cada nó da malha tem a sua), como observado por Duarte, Kim e Quaresma (2006), tem diferenciabilidade C^∞ para nuvens convexas. Por isso, diz-se que a regularidade é arbitrária. Adicionalmente, a implementação pode usar qualquer ordem de derivada que a formulação requisitar. E além disso, é possível utilizar regularidades diferentes para cada campo incógnita por meio do uso combinado de funções C^0 e C^k (MENDONÇA; BARCELLOS; TORRES, 2013).

Para evitar grandes variações de nuvem para nuvem, é preciso que a função tenha valor máximo unitário (2.2). Para isso, são definidos $h_{\alpha,j}$ que representa um comprimento característico da nuvem

$$h_{\alpha,j} = \varepsilon_j(x) = \mathbf{n}_{\alpha,j}(\mathbf{x} - \mathbf{b}_{\alpha,j}) \quad (2.9)$$

e β um parâmetro para controlar a taxa de decaimento das funções de aresta das nuvens

$$\beta = \frac{\varepsilon_{\alpha,j}\left(\frac{h_{\alpha,j}}{2}\right)}{\varepsilon_{\alpha,j}(h_{\alpha,j})}. \quad (2.10)$$

Devido às restrições citadas acima, são acrescentados dois novos parâmetros, A e B , à função de aresta, que é então redefinida como

$$\varepsilon_{\alpha,j}[\xi_j(\mathbf{x})] = \hat{\varepsilon}_{\alpha,j} := \begin{cases} Ae^{-\frac{\xi_j}{B}^{-\gamma}} & , \text{ se } 0 < \xi_j \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.11)$$

onde,

$$A = e^{\frac{1-2^\gamma}{\log_e \beta} 1/\gamma} \quad B = h_{\alpha,j} \frac{\log_e \beta^{1/\gamma}}{1-2^\gamma}.$$

Os valores dos parâmetros são escolhidos como $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3$ conforme Barcellos, Mendonça e Duarte (2009).

2.2.1 Funções peso para nuvens não convexas

Considerando a Figura 1, é possível notar que na nuvem ω_2 as funções de borda ($\varepsilon_{\alpha,j}$) formadas nos elementos l e m , precisariam ter coordenadas negativas para algumas partes de ω_2 , definindo assim uma nuvem não-convexa.

Então as funções \mathcal{W}_α de Eduards não podem ser usadas para casos não convexas. Duarte, Kim e Quaresma (2006) propõem o uso de funções-R ou funções com dois argumentos, f_1 e f_2 , denotados como $(f_1 \vee_0^k f_2)$.

$$(f_1 \vee_0^k f_2) = (f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2})(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{k}{2}}, \quad (2.12)$$

onde o número integral positivo k é o grau de suavidade desejado.

Considerando os lados m e l como lados não convexas na nuvem ω_α , uma função combinando $\varepsilon_{\alpha,m}$ e $\varepsilon_{\alpha,l}$ é definida como:

$$\varepsilon_{\alpha,ml}^{nc}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_{\alpha,m}(\mathbf{x}) \vee_0^k \varepsilon_{\alpha,l}(\mathbf{x})}{\varepsilon_{\alpha,m}(\mathbf{x}_\alpha) \vee_0^k \varepsilon_{\alpha,l}(\mathbf{x}_\alpha)}. \quad (2.13)$$

Essa função de borda combinada é usada para formar uma função peso C^k para ser usada em lugar da equação (2.6).

Neste trabalho, a utilização da malha é sempre de nuvens convexas.

2.3 ENRIQUECIMENTO DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

O enriquecimento tem por objetivo aumentar a qualidade dos resultados numéricos, por meio da expansão do espaço de aproximação, feito na prática pelo aumento do número de graus de liberdade em cada direção. Isso pode ser feito multiplicando as funções PU por funções polinomiais, harmônicas ou parte da solução (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009). Por exemplo, no caso da mecânica da fratura, pode-se

utilizar como enriquecimento uma função que possui uma singularidade ou outra característica da solução previamente conhecida.

Para funções PU, φ_α , o procedimento de enriquecimento utilizando polinômios irá gerar uma família de funções \mathfrak{S}_N^p , mostrado esquematicamente em (2.14).

$$\mathfrak{S}_N^p = \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_1 L_{01} & \varphi_2 L_{02} & \cdots & \varphi_N L_{0N} \\ \varphi_1 L_{11} & \varphi_2 L_{12} & \cdots & \varphi_N L_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1 L_{p1} & \varphi_2 L_{p2} & \cdots & \varphi_N L_{pN} \end{array} \right\}, \quad (2.14)$$

onde N é o número de nuvens e p é a ordem do maior polinômio da família \mathfrak{S}_N^p . L_{ij} são funções de enriquecimento para $(i = 0, 1, \dots, p)$ e $(j = 1, 2, \dots, N)$.

Se L_S é um conjunto de polinômios do tipo:

$$L_S = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_p\}, \quad (2.15)$$

e o conjunto \mathfrak{S}_N^p é o espaço de procura do Método de Galerkin, formalmente definido como:

$$\mathfrak{S}_N^p = \{\{\varphi_\alpha(x)\} \cup \{\varphi_\alpha(x)L_{\alpha i}(x) \mid 0 \leq \alpha \leq N, 0 \leq i \leq p, p \geq k\}\}. \quad (2.16)$$

Para os elementos da PU e do enriquecimento pertencerem ao conjunto \mathfrak{S}_N^p , estes elementos necessitam idealmente ser linearmente independentes entre si. (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009). Por este motivo, deve-se tomar cuidado na escolha das funções de enriquecimento quando ambas - funções PU e de enriquecimento - forem polinômios, pois o sistema de equações gerado se torna positivo semi-definido. (FREITAS et al., 2015)

Por exemplo, são mostrados conjuntos de funções de enriquecimento representando polinômios de graus 1, 2 e 3, respectivamente:

$$L_S = \{1, \bar{x}, \bar{y}\} \quad (2.17)$$

$$L_S = \{1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2\} \quad (2.18)$$

$$L_S = \{1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}\bar{y}^2, \bar{y}^3\}, \quad (2.19)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha}, \quad (2.20)$$

em que (x_α, y_α) são as coordenadas do nó \mathbf{x}_α e h_α é um raio represen-

tativo da nuvem ω_α .

Prova-se que a base formada pela PU C^k enriquecida pelos monômios (2.17)(2.18)(2.19) é linearmente independente (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009).

Torres (2008) apresenta um imagem (Figura 2) onde a PU é multiplicada por uma função de enriquecimento linear, formando função de aproximação.

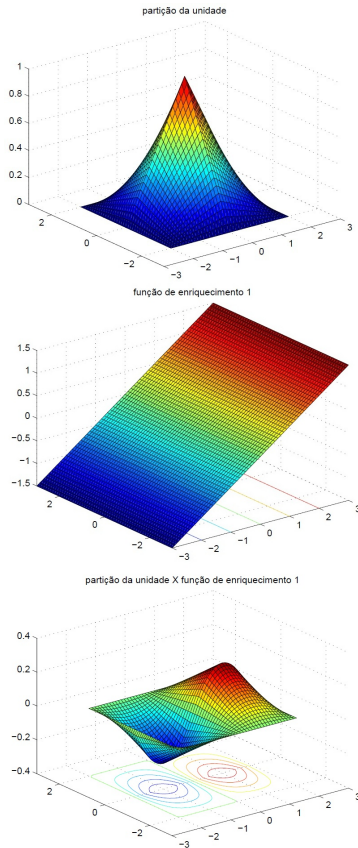


Figura 2 – Combinação da PU com uma função de enriquecimento.
Fonte: (TORRES, 2008)

3 PLACAS LAMINADAS

Uma placa é um sólido tridimensional com uma geometria característica que pode ser descrita como dois planos paralelos, chamados faces, separados por uma espessura h . Paralela às faces, é considerado uma superfície de referência Ω , geralmente localizada na metade da espessura. A placa possui uma única normal \mathbf{n} e, pelo fato de ser plana, esta é constante em todo ponto da placa. Devido à sua pequena espessura em relação às outras dimensões (comprimento e largura), frequentemente não é necessário utilizar Equações de Elasticidade 3D, podendo ser gerada uma formulação simplificado 2D. Quando laminada, a placa possui subdivisões através da espessura chamadas de lâminas, que podem possuir características mecânicas diferentes entre si.

3.1 TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

A Teoria Clássica de Placas (TCP) é uma extensão do Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli para placas, também conhecida como modelo de placa de Kirchhoff-Love, por fazer uso das hipóteses propóstas por Kirchhoff em 1850, com base no trabalho de Sophie Germain, em que obteve-se uma equação governante para o deslocamento transversal e duas condições de contorno independentes em placas homogêneas, isotrópicas, elásticas e submetidas a esforços perpendiculares ao plano médio. Este capítulo sobre placas tem como base teórica os livros de Mendonça (2005), Reddy (2006), Ventsel e Krauthammer (2001).

3.1.1 Hipóteses cinemáticas

As hipóteses propostas por Kirchhoff são:

1. Há apenas cargas na direção z e/ou momentos nas direções x e y ;
2. Os deslocamentos são pequenos ($w < h/2$);
3. Estado Plano de Tensões, tensão na direção z desprezível se comparada com outras direções ($\sigma_z \cong 0$);
4. As fibras normais à Ω permanecem normais após a deformação;
5. As fibras normais à Ω permanecem retas após a deformação;

6. As fibras normais à Ω não mudam de comprimento ($\varepsilon_z = 0$).

3.1.2 Campos de deslocamentos

Devido às hipóteses assumidas, os campos de deslocamentos do modelo de flexão de Kirchhoff para placas delgadas são definidos por:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde u_0 e v_0 são as componentes de deslocamentos na direção x e y , w é o deslocamento transversal na direção do eixo z , além de que $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ são as rotações em relação aos eixos y e x , respectivamente. Adicionalmente, as funções u_0 , v_0 e w são em relação à superfície média $z = 0$.

3.1.3 Hipóteses de von Kármán e campo de deformações

O campo de deformação parte da simplificação do Tensor de Deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}), em que as componentes na forma cartesianas, em notação indicial, assumem o seguinte formato:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (3.2)$$

Utilizando hipóteses de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, por meio da consideração de que as deformações no plano (u_0 e v_0) são pequenas, os termos quadráticos tornam-se desprezáveis. Por outro lado, quando as hipóteses não lineares de deformação de von Kármán são utilizadas para pequenas deformações e moderadas rotações (entre 10° e 15°), os termos não lineares relativos às rotações são pequenos porém não desprezáveis, o que exige a permanência dos mesmos

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Estes termos são os responsáveis pela chamada não linearidade geométrica. Devido à manutenção destes termos quadráticos, a 2ª hipótese do Seção 3.1.1 pode ser desconsiderada. Isso ocorre pelo fato de que os deslocamentos transversais são considerados como grandes, $w/h \geq 0.2$ (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001), porém não arbitrariamente grandes a ponto de serem comparáveis às outras dimensões (largura e comprimento) da placa.

Aplicando o campo de deslocamentos referentes ao modelo de Kirchhoff-Love (3.1) ao Tensor de Deformação de Green-Lagrange (3.2) juntamente com as hipóteses de von Kármán, obtêm-se o seguinte campo de deformações no plano:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

e transversais

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \left(-\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ \epsilon_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Nota-se que as deformações transversais são nulas para o modelo de Kirchhoff e, portanto:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \epsilon_{zz} = 0.$$

Em notação matricial, as equações (3.3) são habitualmente escritas como

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) + z\boldsymbol{\kappa}(x, y)\quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}\quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a deformação de membrana e $\boldsymbol{\kappa}$ é a mudança de curvatura devido à flexão. A deformação de membrana $\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ainda ser decomposta em duas parcelas, uma linear $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ e outra não linear $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \quad (3.8)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.9)$$

3.1.4 Equações de Equilíbrio

A derivação das equações de equilíbrio (ou equações do movimento) pode ser feita de várias formas. Mendonça (2005) parte do equilíbrio de forma fraca. Enquanto que Reddy (2006) aplica diretamente as hipóteses do modelo de placas no Princípio dos Trabalhos Virtuais. Em todas as formas, as equações são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \\ + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde q é um carregamento transversal distribuído, \mathbf{N} e \mathbf{M} são forças e momentos por unidade de comprimento, que serão definidos na próxima Seção.

Assim, tem-se um conjunto de três equações diferenciais parciais, não-lineares, acopladas e com coeficientes constantes. Estas três equações surgem das deformações no plano u_0 e v_0 , e do deslocamento transversal w que é acoplado aos demais devido às rotações não serem

pequenas. Além disso, o modelo não captura cisalhamento transversal, apenas cisalhamento no plano.

3.1.5 Forma Fraca

Pode-se obter a forma fraca aplicando resíduos ponderados às equações do equilíbrio, ou substituir as hipóteses diretamente no Princípio dos Trabalhos Virtuais, onde define-se que a soma da variação da energia de deformação interna com o trabalho virtual externo é nula. Na forma de equação, isso fica:

$$0 = \delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext}. \quad (3.11)$$

Considerando-se a placa com um carregamento distribuído aplicado na direção z na superfície inferior $z = -h/2$. O domínio é definido pela união do interior com o contorno $\bar{\Omega} = \{\Omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]\} \cup \Gamma$ onde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é a parte do domínio no plano xy .

De forma compacta genérica, tem-se (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; TAYLOR, 2000)

$$\int_{\Omega} \int_z \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dz \, d\Omega + \left(- \int_{\Omega} \int_z \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dz \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \right) = 0, \quad (3.12)$$

onde o primeiro termo representa a variação do trabalho interno (δW_{int}), os termos entre parênteses a variação do trabalho externo (δW_{ext}), $\delta \mathbf{u} = \{\delta u_0, \delta v_0, \delta w\}^T$ são funções peso, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$ são as componentes de tensão, \mathbf{b} é o vetor de forças de corpo e $\bar{\mathbf{t}}$ são trações atuando no contorno.

Lembrando que o modelo de placa busca simplificar sólidos 3D para estruturas esbeltas em 2D, pode-se definir os esforços generalizados. As forças por unidade de comprimento são escritas como:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.13)$$

e os momentos por unidade de comprimento por

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz. \quad (3.14)$$

Ambas as equações resultam da integração analítica das tensões no eixo z . Nota-se que a equação (3.14) possui termos multiplicando z . As tensões cisalhantes transversais (τ_{xz}, τ_{yz}) são desconsideradas, porque na teoria de Kirchhoff estas componentes são nulas, equação (3.4).

Substituindo os esforços no PTV (3.12) e realizando as integrações por partes, tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \left\{ \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\}^t \left\{ \begin{matrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{matrix} \right\} \right\} d\Omega; \quad (3.15)$$

$$\delta W_{ext} = - \int_{\Omega} \{q_0 \delta w\} d\Omega - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_{nn} \delta u_n + \sigma_{ns} \delta u_s + \sigma_{nz} \delta w \} dz d\Gamma. \quad (3.16)$$

Pode-se definir ainda esforços generalizados, que agora atuam no contorno

$$\left\{ \begin{matrix} N_{nn} \\ N_{ns} \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{matrix} \right\} dz \quad (3.17)$$

$$\left\{ \begin{matrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{matrix} \right\} z dz \quad (3.18)$$

e o esforço transversal no contorno

$$Q_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{nz} dz, \quad (3.19)$$

onde n e s são, respectivamente, coordenadas na direção normal e tangente num ponto da condição de contorno.

Substituindo as definições (3.17), (3.18) e (3.19) em (3.16) tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & - \int_{\Omega} q_0 \delta w d\Omega - \int_{\Gamma} \{ N_{nn} \delta u_n + N_{ns} \delta u_s \\ & - M_{nn} \frac{\partial \delta w}{\partial u_n} - M_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial u_s} + Q_{nn} \delta w \} ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Com as equações (3.15) e (3.20) substituídas na equação (3.11)

chega-se a formulação fraca para um dado elemento de placa.

$$0 = W_{int}^e + W_{ext}^e \quad (3.21)$$

$$0 = \int_{\Omega} \{N_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + M_{xx}\delta\kappa_{xx} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + M_{yy}\delta\kappa_{yy} + N_{xy}\delta\gamma_{xy} \\ + M_{xy}\delta\kappa_{xy} - q\delta w\}d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \{N_{nn}\delta u_n + N_{ns}\delta u_s - M_{nn}\frac{\partial\delta w}{\partial u_n} - M_{ns}\frac{\partial\delta w}{\partial u_s} + Q_n\delta w\}ds. \quad (3.22)$$

3.1.6 Condições de contorno

As relações entre as direções no contorno e direções coordenadas, sendo uma delas a relação entre coordenadas x,y,z e n,r,s ,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ r \\ s \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ r \\ s \end{Bmatrix}, \quad (3.23)$$

onde o ângulo θ é medido no sentido horário a partir da parte positiva do eixo x . Para os deslocamentos, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 \\ n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_s \\ w \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

a relação entre as derivadas

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

e a relação para carregamentos no contorno e os esforços internos vem de:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (3.26)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

No caso do modelo de Kirchhoff, as equações de equilíbrio (3.10) envolvem derivadas de deslocamentos até 4ª ordem, em que para um placa retangular, necessita-se que duas condições de contorno sejam satisfeitas para cada borda. Porém, no último termo da forma fraca (3.22), tem-se cinco termos. É preciso então encontrar uma solução para esta inconsistência. Uma discussão completa pode ser encontrada nos trabalhos de Mendonça (2005) ou Ventsel e Krauthammer (2001). O que se faz é considerar o momento torsor que pode estar atuando no contorno como uma força cisalhante extra a ser adicionada à própria força cisalhante, na seguinte forma:

$$V_n \equiv Q_n + \frac{\partial M_{xy}}{\partial s} \quad (3.29)$$

sendo então chamada de *força cisalhante efetiva ou condição livre de Kirchhoff*, quando arestas adjacentes são fixas ou livres $\frac{\partial M_{xy}}{\partial s} = 0$. Caso contrário, há o surgimento de uma força na extremidade com valor igual a M_{xy} . Agora, pode-se resumir as condições de contorno como:

$$\begin{aligned} \text{Impor deslocamentos generalizados} & : u_0, v_0, w, \frac{\partial w}{\partial n} \\ \text{ou impor forças generalizadas} & : X, Y, V_n, M_n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nota-se que, no caso de placa retangular, o alinhamento dos eixos de coordenadas com a direção normal da placa facilita a aplicação das condições de contorno.

3.1.7 Equações Constitutivas

No presente caso, considerados materiais ortotrópicos homogêneos e no regime elástico, pode-se relacionar suas tensões e deformações nas

direções principais do material por meio da Lei de Hooke.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Para esse caso de TCP em que as deformações transversais são nulas (Eq. (3.4)), utiliza-se apenas a relação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Para casos em que as direções principais do material não coincidem com as direções dos eixos coordenados, é feita uma operação na matriz material $[\mathbf{Q}]$, transformando-se em $[\bar{\mathbf{Q}}]$. Para esta finalidade define-se uma matriz transformação $[\mathbf{T}]$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & -2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Através de transformações demonstradas mais detalhadamente em Mendonça (2005), chega-se a seguinte matriz material rotacionada

$$[\bar{\mathbf{Q}}] = [\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{Q}][\mathbf{T}]^{-T}, \quad (3.34)$$

obtendo assim a relação entre tensões e deformações no plano nas direções dos eixos coordenados xyz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Decompondo o campo de deformações, na parcela de deformação de membrana e flexão (ver (3.5)), obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.36)$$

Aplicando-se (3.36) às definições dos esforços generalizados (3.13) e (3.14), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (3.37)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (3.38)$$

a partir das quais pode-se definir matrizes **A**, **B**, **D** como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz. \quad (3.39)$$

Aplicando a equação (3.39) para laminado com várias camadas, realiza-se a soma de integrais individuais na espessura de cada camada. Assim, cada camada poderá possuir um material diferente e/ou com diferentes orientações em relação aos eixos de coordenadas, o que causa o surgimento de k matrizes materiais $[\mathbf{Q}]$, sendo necessário dividir a integral no intervalo $[-h/2, h/2]$ em um somatória de k partes, ficando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{N}\} &= \sum_{k=1}^{Nlam} \left(\int_{Z_{k-1}}^{Z_k} [\mathbf{Q}]^k \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dz + \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} [\mathbf{Q}]^k z \{\boldsymbol{\kappa}\} dz \right) \\ \{\mathbf{N}\} &= [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\kappa}\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

O mesmo se aplica aos momentos generalizados

$$\begin{aligned} \{\mathbf{M}\} &= \sum_{k=1}^{Nlam} \left(\int_{Z_{k-1}}^{Z_k} [\mathbf{Q}]^k z \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dz + \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} [\mathbf{Q}]^k z^2 \{\boldsymbol{\kappa}\} dz \right) \\ \{\mathbf{M}\} &= [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\kappa}\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $Nlam$ é o número de lâminas, Z_k é a cota em z superior da lâmina k e Z_{k-1} a cota inferior desta mesma lâmina, como mostrado na Figura 3.

Ao substituir as equações (3.40) e (3.41) nas definições de Esforços Generalizados, tem-se a relação entre esforços e deformações, normalmente apresentadas na seguinte forma matricial

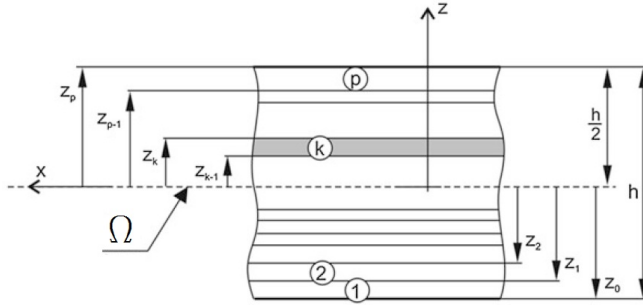


Figura 3 – Divisão e cota transversais em um laminado. Fonte: adaptado de (KUBIAK, 2013)

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde a matriz \mathbf{A} é conhecida como matriz *rigidez extensional*, a matriz \mathbf{D} como matriz *rigidez flexional* e a matriz \mathbf{B} representa o acoplamento entre deformação de membrana e de flexão.

Habitualmente, para facilitar a representação, a Matriz constitutiva do laminado é representada como:

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

3.2 TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN

A Teoria de Reissner-Mindlin é também conhecida por Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (do inglês *First Order Shear Deformation Theory*)(FSDT). Essa teoria necessita apenas funções de aproximação de classe C^0 , o que facilita a implementação computacional, que junto com a possibilidade de analisar placas mais espessa que a TCP, a torna uma ferramenta bastante usada para aplicações acadêmicas e em *softwares* comerciais (ABAQUS, 2013). Porém, as implementações numéricas do MEF podem apresentar patologias numéricas como o travamento em cisalhamento para placas delgadas (GARCIA et al., 2000).

3.2.1 Campos de deslocamentos

O campo de deslocamentos suposto é análogo ao da teoria clássica de placas, com hipóteses semelhantes, exceto pela 4^a hipótese da Seção 3.1.1, a qual exige que as fibras normais ao plano médio permaneçam normais: aqui permite-se rotações arbitrárias. Na prática a não exigência da normalidade permite utilizar o modelo para placas mais espessas permitindo incluir algum efeito das tensões cisalhantes transversais.

Tem-se o campo de deslocamentos dados por

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para relações grandes de comprimento por espessura, $(a/h) > 50$, os valores das rotações θ se aproximam às derivadas do deslocamento transversal, em seus respectivos eixos x ou y . De forma prática, para obter novamente a TCP basta trocar os termos de curvatura θ_x, θ_y na equação (3.44) por

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.45)$$

3.2.2 Campo de Deformações

Aplicando as hipóteses de von Kármán nas equações (3.44), obtêm-se as seguintes equações que descrevem o campo de deformações planas

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \epsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
 \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

e transversais

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xz} &= \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \epsilon_{zz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Assim como na teoria de Kirchhoff, o campo de deformações para o modelo de Reissner-Mindlin pode também ser expresso na forma matricial. Porém, devido ao cisalhamento transversal não ser nulo, surge um novo vetor, representado neste trabalho por $\gamma^{cis} = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$. Assim, as deformações não nulas são

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Para fins de implementação numérica, o campo de deformações

é dividido nos seguintes termos

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{array} \right\}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}; \quad (3.50)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\}; \quad \boldsymbol{\gamma}^{cis} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{array} \right\}. \quad (3.51)$$

Vale ressaltar que os termos de membrana $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ são os mesmos da TCP (3.9) e nota-se que, na equação (3.49) as deformações de cisalhamento transversal são constantes ao longo da espessura do laminado, o que geralmente leva à necessidade de um fator de correção para os esforços cortantes (REDDY, 2004b; MENDONÇA, 2005).

3.2.3 Forma Fraca

Com uma dedução análoga à da Seção 3.1.5, obtêm-se a formulação fraca para placas de Reissner-Mindlin

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega} \{ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + M_{xx} \delta \kappa_{xx} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + M_{yy} \delta \kappa_{yy} + \\ & + N_{xy} \delta \gamma_{xy} + M_{xy} \delta \kappa_{xy} + Q_x \delta \kappa_{xz} + Q_y \delta \kappa_{yz} - q \delta w \} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \{ N_{nn} \delta u_n + N_{ns} \delta u_s + M_{nn} \delta \theta_n + M_{ns} \delta \theta_s + Q_n \delta w \} ds, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde θ_n e θ_s são rotações ao longo, respectivamente, de direções normais transversais sobre os eixos s e $-n$. Além de N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} , M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} já definidos nas equações (3.13) e (3.14), é de interesse definir forças transversais por unidade de comprimento

$$\left\{ \begin{array}{c} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{c} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} dz. \quad (3.53)$$

Como visto, as deformações transversais (γ_{xz} , γ_{yz}) são consideradas constantes através da espessura do laminado, o que geralmente leva a uma discrepância dos valores reais e de representação das tensões

transversais (τ_{xz}, τ_{yz}) para a Teoria de Reissner-Mindlin. Por esta razão, é utilizado um coeficiente de correção transversal, K_s (REDDY, 2004b). Assim, a equação acima fica:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz. \quad (3.54)$$

3.2.4 Equações Constitutivas

Para um laminado que utiliza o modelo de Reissner-Mindlin, além das relações para os esforços \mathbf{N} e \mathbf{M} já definidas em (3.42) para o modelo de Kirchhoff, é acrescentada uma nova relação entre esforços e deformações, devido a \mathbf{Q} (3.54). Ao utilizar a relação entre as tensões cisalhantes transversais e suas correspondentes deformações da Eq. (3.31) este termo tem a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.55)$$

Ao realizar a integração ao longo da espessura obtêm-se os coeficientes A_{44} e A_{55}

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

ou na forma simbólica:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^{cis} \boldsymbol{\gamma}^{cis}. \quad (3.57)$$

3.2.5 Recuperação das tensões por integração

Como característica a teoria de Reissner-Mindlin considera a deformação cisalhante transversal com valor constante ao longo da espessura da placa. Uma forma mais precisa de estimar as tensões cisalhantes é pela integração das equações diferenciais de equilíbrio local sem componentes de inércia, apresentada por Chaudhuri (1986) e Mendonça (2005), apresentada abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Uma vez que se considera as tensões no plano como conhecidas, após a análise por elementos finitos, as componentes transversais são obtidas integrando (3.58) em z :

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}^i(x, y, z_k) &= - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) dz \\
\tau_{yz}^i(x, y, z_k) &= - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) dz \\
\sigma_z^i(x, y, z_k) &= - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} + b_z \right) dz,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

para $z_{k-1} \leq z \leq z_k$, onde k é a lâmina a qual está sendo realizada a integração e o índice i representa tensões obtidas por integração, enquanto que as outras tensões foram obtidas por relação constitutiva.

É uma integração simples, pois o integrando é linear em z , como pode ser visto na equação (3.32). Essas integrações são realizadas a cada lâmina, resultando em N_{lam} equações, onde N_{lam} é o número de lâminas na placa.

Utilizando τ_{xz} como exemplo, surgem N_{lam} tensões $\tau_{xz}^i(x, y, z_{k-1})$ com valores desconhecidos, que podem ser determinados pelas condições de contorno

$$\tau_{xz}^1(x, y, -\frac{h}{2}) = 0 \tag{3.60}$$

$$\tau_{xz}^{N_{lam}}(x, y, +\frac{h}{2}) = 0 \tag{3.61}$$

e da continuidade interlaminar

$$\tau_{xz}^k(x, y, z_k) = \tau_{xz}^{k+1}(x, y, z_k) \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots, N_{lam} - 1, \tag{3.62}$$

onde h é a espessura total do laminado.

Geralmente, parte-se da lâmina $k = 1$, tendo como condição de contorno (3.60) e incónita $\tau_{xz}^1(x, y, z)$, repetindo o processo para as outras lâminas. Porém, em geral a condição de contorno (3.61) não será satisfeita, por limitações na aproximação da MEF/MEFG. Na Seção 5.2 é apresentado um teorema que identifica condição suficiente para que (3.61) seja satisfeita ao final do processo de integração.

3.3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Estruturas esbeltas como barras, placas e cascas compartilham de um fenômeno indesejável quando estão sob esforços compressivos, conhecido como flambagem.

O método do equilíbrio adjacente, como apresentado em Mendonça (2005) é uma das formas de se formular o problema de estabilidade. Considera-se uma placa sob a ação de forças coplanares \bar{X}_0 e \bar{Y}_0 . Inicialmente não há carregamento transversal. Faz-se então o carregamento crescer proporcionalmente

$$X(x, y) = \lambda \bar{X}_0 \quad (3.63)$$

$$Y(x, y) = \lambda \bar{Y}_0, \quad (3.64)$$

onde $\lambda \geq 1$, constante. Como está no regime elástico, as deformações também crescerão proporcionalmente. O valor de λ levado até o ponto em que a estrutura tenha uma configuração diferente, porém também em equilíbrio, a configuração flambada. Neste ponto, a carga é conhecida como carregamento crítico de flambagem, e o valor de λ é o fator crítico de flambagem. As duas configurações podem ser indentificadas pelo índice o indicando original e f indicando flambada

$$u^f = \lambda u_0^o + u^1 \quad (3.65)$$

$$v^f = \lambda v_0^o + v^1 \quad (3.66)$$

$$w^f = \lambda w^o + w^1, \quad (3.67)$$

então tem-se uma condição conhecida, onde os deslocamentos já foram calculados (índice o), e uma condição a ser determinada (índice 1). Com estas duas condições, determinar o valor de λ e os respectivos deslocamentos torna-se um autoproblema.

4 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo busca-se encontrar uma forma discretizada e matricial do problema para utilização em um algoritmo de Elementos Finitos Generalizados.

4.1 MODELO DE KIRCHHOFF-LOVE

4.1.1 Discretização dos deslocamentos e deformações

Propõe-se aproximar um campo de deslocamentos incógnitos (\mathbf{u}^e) no elemento por:

$$u_i^e(x, y) = \sum_{j=1}^{nnoe} \varphi_{ij}(x, y) \left\{ u_{ij} + \sum_{k=1}^{nfu_i} L_{ijk}(x, y) b_{ijk} \right\} = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e, \quad (4.1)$$

onde, $nnoe$ é o número de nós no elemento, φ_j as funções PU associadas ao nó j , i é a direção de cada grau de liberdade e k o número de monômio enriquecedor. No caso da TCP, $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, w\}^T$. E nfu_i é o número de funções enriquecedoras associadas ao nó j , L_{jk} são as funções de enriquecimento associadas a esse mesmo nó e b_{jk} o coeficiente de cada função L_k do nó j .

Na formulação tradicional de elementos finitos para TCP, tem-se cinco campos incógnitos, $u_0, v_0, w, \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Esta abordagem era escolhida, pois possibilitava aproximar os campos derivados usando as próprias funções de forma, contornando a exigência da continuidade C^1 quando formulado em termos de u_0, v_0, w somente (BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009; REDDY, 2004a). Porém, na formulação proposta, as funções de forma usadas para aproximar o campo de deslocamento transversal w tem diferenciabilidade suficiente, de forma que os campos incógnitos podem ser apenas u_0, v_0, w . De forma detalhada, (4.1) fica:

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \varphi_{11}L_{01} & 0 & 0 & \varphi_{11}L_{02} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varphi_{21}L_{01} & 0 & 0 & \varphi_{21}L_{02} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \varphi_{31}L_{01} & 0 & 0 & \varphi_{31}L_{02} & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Para o caso onde as funções de enriquecimento, L_k , são os termos de um polinômio, utilizando os conjuntos das equações (2.17) (2.18) (2.19)

e uma notação mais didática para os parâmetros de \mathbf{U}^e , pode ser representado como:

$$(\mathbf{U}^e)^T = \{u_1, v_1, w_1, u_{x1}, v_{x1}, w_{x1}, u_{y1}, \dots\}.$$

Assim a aproximação para o campo de deslocamentos generalizados, no elemento, fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_0^e &= u_1(\varphi_1) + u_{x1}(\bar{x}\varphi_1) + u_{y1}(\bar{y}\varphi_1) + u_{x^2_1}(\bar{x}^2\varphi_1) \dots \\ &+ u_2(\varphi_2) + u_{x2}(\bar{x}\varphi_2) + u_{y2}(\bar{y}\varphi_2) + u_{x^2_2}(\bar{x}^2\varphi_2) \dots \quad (4.3) \\ &+ u_3(\varphi_3) + u_{x3}(\bar{x}\varphi_3) + u_{y3}(\bar{y}\varphi_3) + u_{x^2_3}(\bar{x}^2\varphi_3) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0^e &= v_1(\varphi_1) + v_{x1}(\bar{x}\varphi_1) + v_{y1}(\bar{y}\varphi_1) + v_{x^2_1}(\bar{x}^2\varphi_1) \dots \\ &+ v_2(\varphi_2) + v_{x2}(\bar{x}\varphi_2) + v_{y2}(\bar{y}\varphi_2) + v_{x^2_2}(\bar{x}^2\varphi_2) \dots \quad (4.4) \\ &+ v_3(\varphi_3) + v_{x3}(\bar{x}\varphi_3) + v_{y3}(\bar{y}\varphi_3) + v_{x^2_3}(\bar{x}^2\varphi_3) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^e &= w_1(\varphi_1) + w_{x1}(\bar{x}\varphi_1) + w_{y1}(\bar{y}\varphi_1) + w_{x^2_1}(\bar{x}^2\varphi_1) \dots \\ &+ w_2(\varphi_2) + w_{x2}(\bar{x}\varphi_2) + w_{y2}(\bar{y}\varphi_2) + w_{x^2_2}(\bar{x}^2\varphi_2) \dots \quad (4.5) \\ &+ w_3(\varphi_3) + w_{x3}(\bar{x}\varphi_3) + w_{y3}(\bar{y}\varphi_3) + w_{x^2_3}(\bar{x}^2\varphi_3) \dots \end{aligned}$$

Por conveniência, os parâmetros nodais no elemento u_{ij}, b_{jk} são representados apenas pelos termos U_l^e e as funções $\varphi_{ij}L_{jk}$ representadas por N_{il} , para $l = 1, \dots, ngle$, tal que:

$$u_i^e = \sum_{j=1}^{ngle} N_{ij}(x, y)U_j^e = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_0^e \\ v_0^e \\ w^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{nfu} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{nfu} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{nfu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ \vdots \\ U_{ngle}^e \end{Bmatrix}. \quad (4.7)$$

onde o subíndice $ngle$ representa o número de graus de liberdade do elemento.

É interessante definir vetores das funções de aproximação associadas a cada uma das componentes de deslocamento u_0, v_0 ou w , onde cada vetor representa uma linha da matriz \mathbf{N}^e em (4.7) no elemento:

$$\mathbf{N}^u \equiv [N_1 \ 0 \ 0 \mid N_2 \ 0 \ 0 \mid \cdots \mid N_{nfu} \ 0 \ 0] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{N}^v \equiv [0 \ N_1 \ 0 \mid 0 \ N_2 \ 0 \mid \cdots \mid 0 \ N_{nfu} \ 0] \quad (4.9)$$

$$\mathbf{N}^w \equiv [0 \ 0 \ N_1 \mid 0 \ 0 \ N_2 \mid \cdots \mid 0 \ 0 \ N_{nfu}]. \quad (4.10)$$

Assim, a aproximação para cada componente de deslocamento fica representada por:

$$u_0^e = \mathbf{N}^u \mathbf{U}^e \quad (4.11)$$

$$v_0^e = \mathbf{N}^v \mathbf{U}^e \quad (4.12)$$

$$w^e = \mathbf{N}^w \mathbf{U}^e. \quad (4.13)$$

As variações dos deslocamentos são:

$$\delta u_0^e = \mathbf{N}^u \delta \mathbf{U}^e \quad (4.14)$$

$$\delta v_0^e = \mathbf{N}^v \delta \mathbf{U}^e \quad (4.15)$$

$$\delta w^e = \mathbf{N}^w \delta \mathbf{U}^e. \quad (4.16)$$

Para fins de simplificar discretização e a implementação computacional, as aproximações das deformações são separadas em parcelas linear e não linear, levando em consideração a parcela da mudança de curvatura κ em $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ e a inexistência da mesma parcela em $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xx}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{NL} \\ \varepsilon_{xx}^{NL} \\ \gamma_{xy}^{NL} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde a matriz \mathbf{B}^0 tem o seguinte formato

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{nfu,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \cdots & 0 & N_{mfu,y} & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{nfu,y} & N_{nfu,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{1,xx} & \cdots & 0 & 0 & -N_{nfu,xx} \\ 0 & 0 & -N_{1,yy} & \cdots & 0 & 0 & -N_{nfu,yy} \\ 0 & 0 & -2N_{1,xy} & \cdots & 0 & 0 & -N_{nfu,xy} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A aproximação da parcela linear da deformação de sua variação vem da aproximação dos deslocamentos, o que resulta em

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^0 \mathbf{U} \quad (4.20)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^0 \delta \mathbf{U}. \quad (4.21)$$

Zienkiewicz e Taylor (1991) utilizam matrizes auxiliares para definir a deformação não-linear, que foram adaptadas para a discretização em MEFG

$$\mathbf{A}^z \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Com as matrizes auxiliares \mathbf{A}^z e \mathbf{G} definidas, pode-se montar o vetor $\boldsymbol{\theta}$ referente às rotações das normais à placa e sua variação $\delta \boldsymbol{\theta}$,

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ \vdots \\ U^{Ngl} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{U} \quad (4.24)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} \delta \mathbf{U}. \quad (4.25)$$

Assim, pode-se definir o vetor de deformações não-lineares de

(3.9) em função da matriz \mathbf{A}^z e do vetor $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^z\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^z\mathbf{G}\mathbf{U}. \quad (4.26)$$

Pode-se facilmente mostrar (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991) que a variação da deformação não linear pode ser representada num formato alternativo mais conveniente para programação, isto é:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \delta\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}^z\boldsymbol{\theta}\right) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{A}^z\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^z\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^z\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^z\mathbf{G}\delta\mathbf{U}. \quad (4.27)$$

Definindo $\mathbf{B}^{NL} \equiv \mathbf{A}^z\mathbf{G}$, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \frac{1}{2}\mathbf{B}^{NL}(\mathbf{U})\mathbf{U} \quad (4.28)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{U})\delta\mathbf{U}. \quad (4.29)$$

4.1.2 Variação do Trabalho Interno

Partindo da variação da força interna (3.12) e utilizando a relação da eq. (3.5), tem-se

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ z\boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} dz d\Omega \quad (4.30)$$

em que a dependência em z fica no termo de tensões, sendo possível assim realizar a integração em z separado e usar a relação vista na equação (3.42) mostrada novamente a seguir

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ z\boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}.$$

Aplicando a definição acima na variação do trabalho interno

(4.30), tem-se a seguinte forma matricial:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\} d\Omega \quad (4.31)$$

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\} d\Omega \quad (4.32)$$

Utilizando a construção (4.17)

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \int_{\Omega} \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} \\ & + \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando as equações (4.20), (4.21), (4.28), (4.29) e (3.43) em (4.33), tem-se a seguinte forma matricial para a Variação do Trabalho Interno:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \mathbf{U} \\ & + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Colocando os vetores $\delta \mathbf{U}$ e \mathbf{U} em evidência obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^T \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \right. \\ & \left. + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \right] \mathbf{U} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.1.3 Matriz de Rigidez

É possível particularizar δW_{int} para um elemento. Assim a variação do trabalho interno para este elemento é denotada por δW_{int}^e dada por

$$\delta W_{int}^e = (\delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{F}_{int}^e. \quad (4.36)$$

É possível definir a Matriz de Rigidez do elemento \mathbf{K}^e tal que

$$\mathbf{F}_{int}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e, \quad (4.37)$$

onde (colchetes de (4.35))

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} \right] d\Omega. \quad (4.38)$$

O próximo passo é aplicar uma regra de quadratura para realizar a integração numérica da equação (4.38). No presente trabalho foi usada a regra de integração triangular de Wandzura (WANDZURA; XIAO, 2003), escolhida devido a propriedade de ser simétrica no triângulo.

4.1.4 Matriz de Rigidez Tangente

Genericamente, tem-se um sistema algébrico global de equações que, neste caso, devido às não linearidades geradas pela utilização das hipóteses de von Kármán, a própria matriz de rigidez do sistema depende do vetor solução, o que pode ser explicitado como

$$\mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (4.39)$$

Pela característica não linear do sistema de equações, necessita-se de um método iterativo para resolvê-lo. No presente trabalho é usado o Método de Newton-Raphson completo. De forma simplificada, nomeia-se os vetores \mathbf{F}_{int} e \mathbf{F}_{ext} que representam as forças internas e externas, respectivamente, e define-se um vetor de resíduo \mathbf{R} como

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{R}. \quad (4.40)$$

A partir de uma estimativa inicial, \mathbf{U}^k , calcula-se o resíduo e sua derivada em relação ao vetor solução, a qual é nomeada como Matriz de Rigidez Tangente (\mathbf{K}^{TG}) e escrita como:

$$\mathbf{K}^{TG} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}}. \quad (4.41)$$

No presente trabalho tem-se que \mathbf{F}_{ext} é independente de \mathbf{U} , de forma que $\frac{\partial \mathbf{F}_{ext}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}$. Então,

$$\mathbf{K}^{TG} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{U}}. \quad (4.42)$$

Essa matriz \mathbf{K}^{TG} é utilizada para resolver um sistema linear de equações e assim chegar a um incremento $\Delta\mathbf{U}$ que deve ser adicionado à estimativa inicial, \mathbf{U}^k , de forma que se obtenha uma estimativa corrigida para o vetor solução \mathbf{U}^{k+1} .

Como a Matriz de Rigidez Tangente se torna mal condicionada quando enriquecida por polinômios de alta ordem é necessário um método capaz de solucionar esse sistema linear de equações descrito em (b). Neste trabalho utiliza-se o procedimento de Babuška descrito em (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000; DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) que necessita da definição de uma constante ϵ_{ps} e uma tolerância tol_ϵ .

O processo é o seguinte:

- (a) Definir ϵ_{ps} e tol_ϵ , adotado neste trabalho como $\epsilon_{ps} = 10^{-6}$ e $tol_\epsilon < 10^{-9}$;
- (b) Resolver o sistema $\mathbf{K}^{TG}(\Delta\mathbf{U}) = -\mathbf{R}$ para $\Delta\mathbf{U}$;
- (c) Corrige $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \Delta\mathbf{U}$.

No próximo passo, após encontrar \mathbf{U}^{k+1} , deve-se refazer os cálculos do vetor força $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$ com $\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{k+1}$ e reiniciar os cálculos na equação (4.40) até que as tolerâncias abaixo sejam satisfeitas

$$\frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{F}_{ext}\|} < 10^{-6} \quad e \quad \frac{\|\Delta\mathbf{U}^k\|}{\|\mathbf{U}^{k+1}\|} < 10^{-6}. \quad (4.43)$$

Partindo da equação (4.41), na forma indicial, para encontrar a Matriz de Rigidez Tangente, tem-se

$$K_{ir}^{TG} = \frac{\partial R_i}{\partial U_r} = \frac{\partial [(F_{int})_i - (F_{ext})_i]}{\partial U_r} = \frac{\partial (F_{int})_i}{\partial U_r} - \frac{\partial (F_{ext})_i}{\partial U_r} = \frac{\partial (F_{int})_i}{\partial U_r} - 0. \quad (4.44)$$

Como $F_i^{int} = K_{ij}U_j$ (4.37), então

$$\begin{aligned} K_{ir}^{TG} &= \frac{\partial K_{ij}U_j}{\partial U_r} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial U_r} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ij}\delta_{jr} \\ &= \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r}U_j + K_{ir} \end{aligned} \quad (4.45)$$

e aplicando a equação (4.38) ao primeiro termo da equação (4.45), tem-

se

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r} U_j = \frac{\partial}{\partial U_r} \left[\int_{\Omega} \left(B_{mi} C_{mn} B_{nj} + B_{mi}^{NL} C_{mn} B_{nj} + B_{mi} C_{mn} \frac{B_{nj}^{NL}}{2} + B_{mi}^{NL} C_{mn} \frac{B_{nj}^{NL}}{2} \right) d\Omega \right] U_j. \quad (4.46)$$

Para desenvolver a equação (4.46), é interessante usar a definição da matriz \mathbf{B}^{NL} na forma

$$\mathbf{B}^{NL} = \mathbf{A}^z \mathbf{G}. \quad (4.47)$$

Derivando ambos os lados da equação tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{NL}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z \mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z)}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{G} + \mathbf{A}^z \frac{\partial (\mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}}. \quad (4.48)$$

Como $\frac{\partial (\mathbf{G})}{\partial \mathbf{U}} = 0$, ver (4.23), tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{NL}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\mathbf{A}^z)}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{G}. \quad (4.49)$$

Para resolver a derivada da matriz \mathbf{A}^z em relação a \mathbf{U} , é necessário ainda definir a derivada do deslocamento transversal w em relação a \mathbf{U} .

Para isso, utiliza-se a notação indicial

$$\frac{\partial w}{\partial U_r} = \frac{\partial (N_k^w U_k)}{\partial U_r} = N_k^w \frac{\partial (U_k)}{\partial U_r} = N_k^w \delta_{kr} = N_r^w \quad (4.50)$$

e deve-se resolver usando (4.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_{kl}^z)}{\partial U_r} &= \frac{\partial}{\partial U_r} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial U_r} \begin{bmatrix} N_k^w{}_{,x} U_k & 0 \\ 0 & N_k^w{}_{,y} U_k \\ N_k^w{}_{,y} U_k & N_k^w{}_{,x} U_k \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(N_k^w{}_{,x} U_k)}{\partial U_r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(N_k^w{}_{,y} U_k)}{\partial U_r} \\ \frac{\partial(N_k^w{}_{,y} U_k)}{\partial U_r} & \frac{\partial(N_k^w{}_{,x} U_k)}{\partial U_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r^w{}_{,x} & 0 \\ 0 & N_r^w{}_{,y} \\ N_r^w{}_{,y} & N_r^w{}_{,x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv Ar_{klr}. \quad (4.51) \end{aligned}$$

Para facilitar a representação das equações da Matriz Tangente utiliza-se a notação abaixo

$$\frac{\partial(A_{kl}^z)}{\partial U_r} \equiv Ar_{klr}.$$

Após a definição da derivada da matriz \mathbf{B}^{NL} , pode-se escrever termo a termo da equação (4.46), sendo apresentadas abaixo as deduções dos termos da eq. (4.46)

$$\frac{\partial}{\partial U_r} (B_{mi} C_{mn} B_{nj}) = 0; \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U_r} (B_{mi}^{NL} C_{mn} B_{nj}) &= \frac{\partial B_{mi}^{NL}}{\partial U_r} C_{mn} B_{nj} \\ &= \frac{\partial(A_{mk}^z G_{ki})}{\partial U_r} C_{mn} B_{nj} \\ &= Ar_{mkr} G_{ki} C_{mn} B_{nj}; \quad (4.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial U_r} \left(B_{mi} C_{mn} \frac{B_{nj}^{NL}}{2} \right) &= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial B_{nj}^{NL}}{\partial U_r} \\
&= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nk}^z G_{kj})}{\partial U_r} \\
&= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nk}^z)}{\partial U_r} G_{kj} \\
&= B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nkr} G_{kj}; \quad (4.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial U_r} \left(B_{mi}^{NL} C_{mn} \frac{1}{2} B_{nj}^{NL} \right) &= \frac{\partial B_{mi}^{NL}}{\partial U_r} C_{mn} \frac{1}{2} B_{nj}^{NL} + B_{mi}^{NL} C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial B_{nj}^{NL}}{\partial U_r} \\
&= \frac{\partial (G_{km} A_{ki}^z)}{\partial U_r} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} \frac{\partial (A_{nl}^z G_{lj})}{\partial U_r} \\
&= G_{km} A_{kir} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} A_{nlr} G_{lj}. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

A junção das equações (4.53) a (4.55) ao segundo termo da equação (4.45) forma a Matriz Tangente utilizada pelo Método de Newton-Raphson. A Matriz Tangente na forma indicial é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned}
K_{ir}^{TG} &= K_{ir} + A_{mkr} G_{ki} C_{mn} B_{nj} + B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nkr} G_{kj} \\
&\quad + G_{km} A_{kir} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} A_{nlr} G_{lj}. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

4.2 MODELO DE REISSNER-MINDLIN

A discretização para o modelo de placa de Reissner-Mindlin é análoga ao de Kirchhoff-Love com algumas poucas mudanças para adaptá-lo ao modelo matemático.

4.2.1 Discretização Deslocamentos e Deformações

Devido ao graus de liberdade referentes às rotações θ_x e θ_y , a representação da aproximação dos deslocamentos fica com o seguinte formato:

$$\mathbf{u}_i^e = \sum_{j=1}^{ngle} N_{ij}(x, y) U_j^e = \mathbf{N}^e \mathbf{U}^e \quad (4.57)$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_0^e \\ v_0^e \\ w^e \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ \vdots \\ U_{ngle}^e \end{Bmatrix}, \quad (4.58)$$

Em relação às deformações, a equação (4.6) sofre mudança na parcela relativa à curvatura ($\boldsymbol{\kappa}$) e acrescenta-se o termo relativo ao cisalhamento transversal ($\boldsymbol{\gamma}^{cis}$), as parcelas de deformação ficam como

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^0 \right\} + \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \right\} + \left\{ \boldsymbol{\gamma}^{cis} \right\}, \quad (4.59)$$

a matriz \mathbf{B}^0 assume o formato de

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

e a matriz \mathbf{B}^C referente à deformação transversal fica

$$\mathbf{B}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1,x} & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_{1,y} & 0 & 1 & \cdots \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

tal que

$$\boldsymbol{\gamma}^{cis} = \mathbf{B}^C \mathbf{U} \quad (4.62)$$

enquanto a matriz \mathbf{B}^{NL} é a mesma do Modelo de Placa de Kirchhoff.

4.2.2 Matriz de Rigidez

Para a variação da energia de deformação (variação da força interna), basta acrescentar o termo relativo ao cisalhamento transversal à equação (4.31), como mostrado abaixo

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta \boldsymbol{\gamma}^{cis}\}^T [\mathbf{C}^{cis}] \{\boldsymbol{\gamma}^{cis}\} d\Omega. \quad (4.63)$$

De modo semelhante à discretização para placas finas, chega-se a seguinte equação

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^T \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^C)^T \mathbf{C}^{cis} \mathbf{B}^C \right] \mathbf{U} d\Omega \quad (4.64)$$

e a Matriz Rigidez para o Elemento fica

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^{NL})^T \mathbf{C} \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} + (\mathbf{B}^C)^T \mathbf{C}^{cis} \mathbf{B}^C \right] d\Omega. \quad (4.65)$$

4.2.3 Matriz de Rigidez Tangente

Como os termos nos quais há alteração de valor estão na parcela linear de rigidez, K_{ir} da equação (4.65), a Matriz de Rigidez Tangente para o Modelo de Reissner-Mindlin fica no mesmo formato que a equação (4.56), repetida abaixo.

$$K_{ir}^{TG} = K_{ir} + A r_{mkr} G_{ki} C_{mn} B_{nj} + B_{mi} C_{mn} \frac{1}{2} A r_{nkr} G_{kj} + G_{km} A r_{kir} C_{mn} \frac{1}{2} A_{nl}^z G_{lj} + G_{km} A_{ki}^z C_{mn} \frac{1}{2} A r_{nlr} G_{lj}.$$

4.3 ESTABILIDADE E MATRIZ GEOMÉTRICA

Para a estabilidade inicial de placas laminadas por elementos finitos parte-se da expressão da forma fraca e utilizando os conceitos da Seção 3.3, a equação dada por Mendonça (2005) é

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}^T [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta \boldsymbol{\gamma}^{cis}\}^T [\mathbf{C}^{cis}] \{\boldsymbol{\gamma}_1^{cis}\} d\Omega - \lambda \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{zy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1,x} \\ w_{1,y} \end{Bmatrix} d\Omega = 0. \quad (4.66)$$

Adotando a discretização para os termos não lineares utilizada neste capítulo para o último termo da equação acima, tem-se:

$$\lambda \int_{\Omega^e} \begin{Bmatrix} \delta w_x \\ \delta w_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{zy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{1,x} \\ w_{1,y} \end{Bmatrix} d\Omega = \lambda (\delta \mathbf{U}^e)^T \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{zy} & N_y \end{bmatrix} \mathbf{G}^T d\Omega \delta \mathbf{U}^e \equiv \lambda (\delta \mathbf{U}^e)^T \mathbf{K}^{\mathbf{G}^e} \delta \mathbf{U}^e, \quad (4.67)$$

onde $(\mathbf{K}^{\mathbf{G}})^e$ é chamada Matriz Geométrica do elemento. Considerando a configuração inicial como plana, os termos não lineares da Equação (4.65) podem ser desconsiderados. Desta forma, obtém-se

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \left[(\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^0 + (\mathbf{B}^C)^T \mathbf{C}^{cis} \mathbf{B}^C \right] d\Omega. \quad (4.68)$$

Utilizando as Equações (4.67) e (4.68) na Equação (4.66), tem-se

$$(\delta \mathbf{U}^e)^T [\mathbf{K}^e - \lambda \mathbf{K}^{\mathbf{G}^e}] \mathbf{U}^e = 0. \quad (4.69)$$

Ao sobrepor as matrizes elementares obtêm-se as matrizes globais.

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}^{\mathbf{G}}] \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.70)$$

Ao realizar uma análise com a Equação (4.70) essa análise é chamada de análise de instabilidade inicial, a qual é um problema de autovalores, em que o maior autovalor λ será considerado como carga crítica.

5 RESULTADOS

Este capítulo abrange os resultados referentes às comparações entre o código em linguagem MATLAB[®] utilizado neste trabalho e exemplos numéricos presentes em Reddy (2004a) de mesmo modelo cinemático com distintos métodos MEF, formulação conforme e não conforme. Porém a formulação matemática utilizada em ambos os casos é a mesma. São realizadas também comparações entre teorias de placas de Reissner-Mindlin e Kirchhoff-Love utilizando as hipóteses de von Kármán, assim como entre MEFG com PU lineares (C^0) ou com continuidade arbitrária (C^k).

Para análise da convergência não linear do deslocamento máximo com o modelo de placa de Reissner-Mindlin, utiliza-se um caso estudado por Levy (1942) de uma placa fina de liga de alumínio, submetida a uma pressão e engastada nas bordas. Após, visando verificar e comparar os resultados obtidos no código de teste, foram replicados três exemplos de Reddy (2004a) onde as placas estão simplesmente apoiadas. O primeiro e o segundo casos correspondem, respectivamente, a uma placa espessa e uma placa fina, ambas feitas de material isotrópico, enquanto que no terceiro caso utiliza-se um material ortotrópico. Por final, um laminado é testado e comparado com um modelo no software de elementos finitos Abaqus[®].

5.1 PLACA DE ALUMÍNIO HOMOGÊNEA E ENGASTADA

Neste exemplo, uma solução da literatura (LEVY, 1942) para placa fina, isotrópica e engastada é comparada com o Modelo de Placa de Reissner-Mindlin, que é testado utilizando MEFG- C^0 ou MEFG- C^k e variando os graus de enriquecimento e com uma simulação realizada em Abaqus[®]. Este exemplo numérico também é utilizado para analisar a convergência para um caso não-linear, além dos efeitos do refino da malha e do número de pontos de integração numérica para diversos graus de enriquecimento.

Os valores obtidos para comparação envolvem a deflexão máxima e de tensão de membrana (σ_x) no centro da placa quadrada e no ponto médio de sua borda respectivamente, ambos na superfície inferior. Considera-se uma placa de liga de alumínio com os seguintes parâmetros geométricos e de material:

$a, b = 254$ mm (comprimento e largura);
 $h = 1,27$ mm (espessura);
 $E = 68,947$ GPa (módulo de elasticidade);
 $\nu = 0,316$ (coeficiente de poisson);
 $q_0 = 0,0138$ MPa (carga uniformemente distribuída na superfície superior).

As condições de contorno aplicadas são mostradas abaixo.

Engaste

$$\begin{aligned}
 \text{em } x = a/2 : & \quad u_0 = v_0 = w = \theta_x = \theta_y = 0 \\
 \text{em } y = b/2 : & \quad u_0 = v_0 = w = \theta_x = \theta_y = 0 \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Condição de Simetria

$$\begin{aligned}
 \text{em } x = 0 : & \quad u_0 = \theta_x = 0 \\
 \text{em } y = 0 : & \quad v_0 = \theta_y = 0 \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

No caso que utiliza MEF \tilde{G} , é importante definir como as condições de contorno serão impostas pois, devido ao maior grau polinomial das funções utilizadas não basta impor valor zero apenas nos coeficientes relativos à partição da unidade, assim como ocorre no MEF tradicional. É necessário restringir os coeficientes referentes as funções enriquecidas, para os coeficientes que não se anulam naturalmente na região com condição de contorno. Por exemplo, escrevendo a função para deslocamentos transversais de forma próxima a equação (4.5), pág. 56, porém apenas para um nó α , com grau 3 de enriquecimento, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= w_\alpha(\varphi) + w_x(\bar{x}\varphi) + w_y(\bar{y}\varphi) \\
 &+ w_{x^2}(\bar{x}^2\varphi) + w_{xy}(\bar{x}\bar{y}\varphi) + w_{y^2}(\bar{y}^2\varphi) \\
 &+ w_{x^3}(\bar{x}^3\varphi) + w_{x^2y}(\bar{x}^2\bar{y}\varphi) + w_{xy^2}(\bar{x}\bar{y}^2\varphi) + w_{y^3}(\bar{y}^3\varphi). \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

É importante frisar que para MEF \tilde{G} - C^k com PU exponencial, a base de aproximação possui o mesmo grau p do enriquecimento. Enquanto que para MEF \tilde{G} - C^0 com PU de funções lineares de MEF, a base resultante é de grau $p + 1$.

Seguindo o trabalho de Mendonça, Barcellos e Torres (2011), para nós em linhas de contorno com $x = \text{constante}$, tem-se a coordenada escalada $\bar{x} = 0$. Então, para impor $w = 0$ neste nó basta impor valor zero em coeficientes que não estejam multiplicados por \bar{x} , da seguinte

forma:

$$w_\alpha = w_y = w_{y^2} = w_{y^3} = 0 \quad (5.4)$$

e de forma análoga para nós que estão em regiões da fronteira onde $y = \text{constante}$, basta que:

$$w_\alpha = w_x = w_{x^2} = w_{x^3} = 0. \quad (5.5)$$

Essa forma de impor condição de contorno mostrada em (5.4) e (5.5) é repetida para todos os graus de liberdade $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ dos nós com condição de contorno essencial.

A malha escolhida é composta por elementos no formato de triângulo retângulo, onde o número de elementos compondo uma borda denomina a malha. Por exemplo, a Figura 4 mostra malhas com 1, 4 e 8 divisões em cada borda, denominadas respectivamente, M1, M4 e M8.

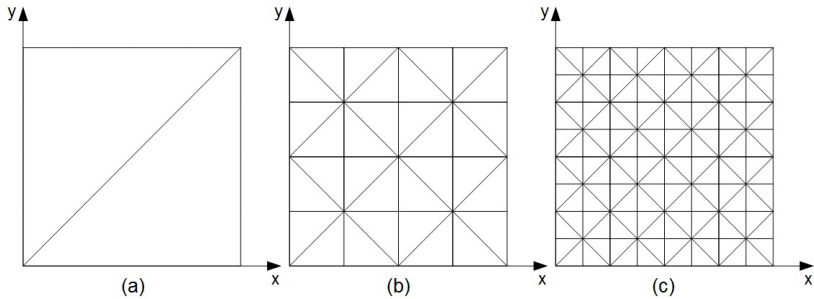


Figura 4 – Malhas triangulares (a) M1; (b) M4 e (c) M8.

No gráfico da Figura 5 observa-se a tendência de convergência do deslocamento transversal, w , localizado no centro da placa para análise não linear, com o valor de referência $w_{REF} = 1,7272$ mm (LEVY, 1942), utilizando MEF $G-C^0$ com 7 pontos de integração numérica para regra de triângulo de Wandzura e Xiao (2003), que integra até polinômio de grau 5, mas na Matriz de Rigidez há produtos de derivadas, que exigem maior atenção quanto ao número de pontos de integração.

A parametrização da carga é feita através da relação $\bar{P} \equiv q_0 a^4 / Eh^4$. Neste caso resulta em $\bar{P} = 320$, essa magnitude de carga resulta em um caso com uma não linearidade forte para os deslocamentos transversais, já que a relação w/h é de aproximadamente 1,7, enquanto que casos lineares são considerados para $w/h < 0,5$.

É interessante notar que enriquecimentos com polinômio de grau

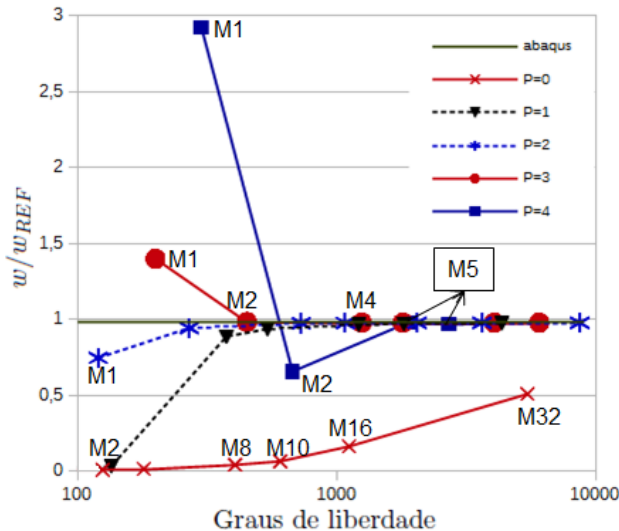


Figura 5 – Relação entre o deslocamento transversal pela referência (w/w_{REF}), no centro da placa para MEF $G-C^0$ com refinamento da malha para vários graus de enriquecimento, $n_{pi} = 7$ pontos de integração de triângulo e $\bar{P} = 320$.

4 possui um desempenho aparentemente inferior aos outros enriquecimentos em relação ao número de graus de liberdade, porém, essa defasagem se deve principalmente a dois fatores. O pequeno número de pontos de integração para o elemento causa uma sub-integração, já que a base gerada representa até um polinômio de grau 5. Adicionalmente apesar do primeiro ponto da curva $p=4$ possuir 300 graus de liberdade, a malha da placa possui apenas 2 elementos (M1), o que representa um efeito negativo na precisão do resultado, principalmente pela predominância dos efeitos das condições de contorno para essa malha. Por outro lado, nota-se o efeito claro do travamento no caso sem enriquecimento ($p=0$) das funções PU.

A Figura 6 mostra os deslocamentos transversais utilizando 25 pontos de integração. Observa-se que para MEF $G-C^0$ com enriquecimento até grau 2, o aumento no número de pontos de integração não tem efeito muito significativo. Para $p > 2$, o efeito do número de pontos é perceptível para malhas com poucos elementos, pois a medida que

aumenta a quantidade de elementos o efeito do número de pontos de integração diminui, mesmo para bases formadas de grau 4 ou 5.

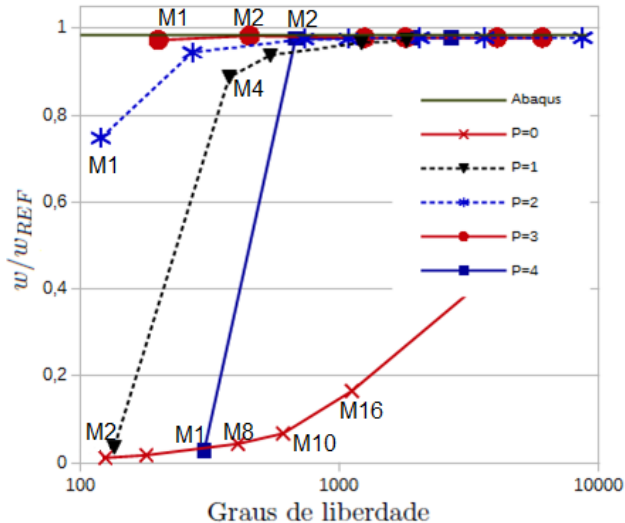


Figura 6 – Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEF $G-C^0$ com refinamento da malha para vários graus de enriquecimento, $n_{pi} = 25$ e $\bar{P} = 320$.

O MEF G com funções PU suaves é mais sensível à variação do número de pontos de integração. A Figura 7 mostra a variação do deslocamento transversal para várias malhas (M4, M8, M10, M16) com 7, 25 e 54 pontos de integração para o caso de MEF $G-C^k$ com enriquecimento $p=1$ e $p=2$. Já a Figura 8 mostra a variação do deslocamento para as malhas (M4, M5, M8, M10) para 7 a 54 pontos de integração, com $p=3$. Para maiores graus de enriquecimento o efeito da sub-integração é ainda maior, chegando a causar a não convergência no Método de Newton-Raphson em muitos casos, por exemplo enriquecimento de grau 4 com 7 pontos de integração. Nota-se claramente neste caso como uma integração numérica adequada é importante ao MEF G com funções contínuas, mesmo para uma base de aproximação de grau 1 ($p = 1$), pois a dificuldade de integração para MEF $G-C^k$ está na derivada da PU suave C^k . Enquanto que para MEF $G-C^0$, 7 pontos de integração são suficientes para representar mesmo uma base de grau 5 ($p = 4$) para uma malha M4 ou superior.

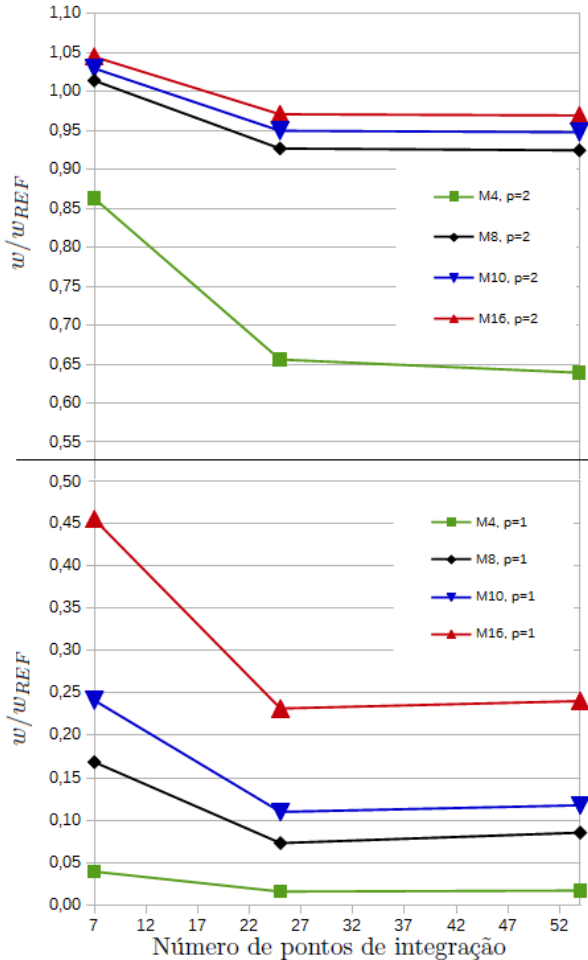


Figura 7 – Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEF $G-C^k$ com várias malhas e enriquecimento $p = 1$ (parte inferior) e $p = 2$ (parte superior) com $\bar{P} = 320$.

O gráfico da Figura 9 mostra a tendência do deslocamento, w/w_{REF} , no centro da placa, para vários graus de enriquecimento com o acréscimo do número de graus de liberdade do modelo. Como já comentado sobre a sensibilidade do MEF $G-C^k$ à sub-integração, para enriquecimentos de grau 1 e 2 foram utilizados 25 pontos de integração, já para enriquecimentos de grau 3 e 4 foram utilizados 54 pontos.

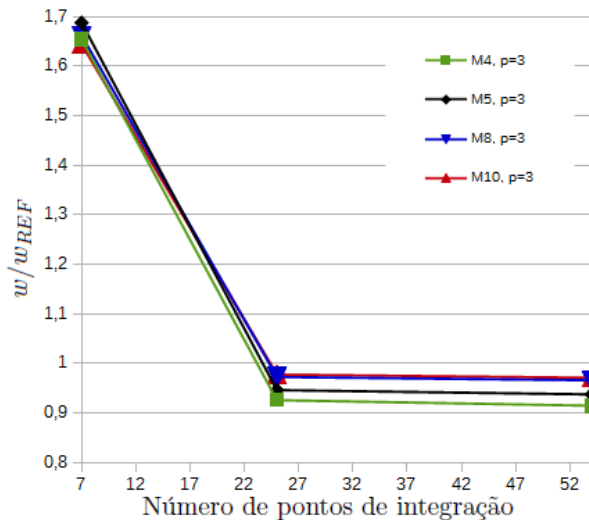


Figura 8 – Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com várias malhas e enriquecimento $p = 3$ com $\bar{P} = 320$.

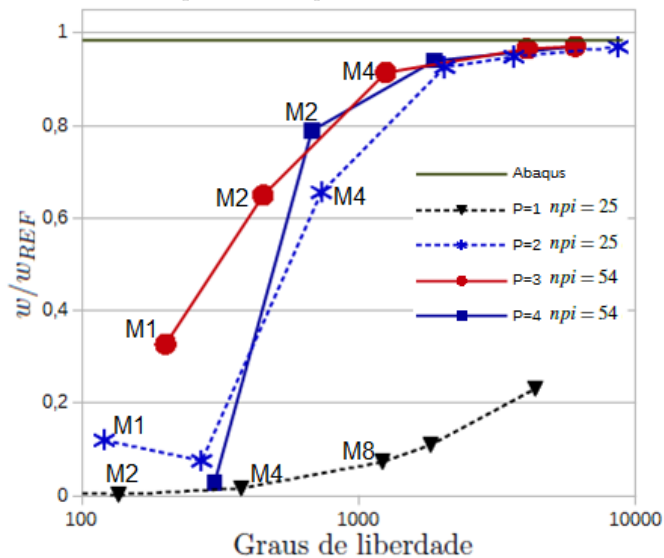


Figura 9 – Relação w/w_{REF} , no centro da placa para MEFG- C^k com refino da malha para vários graus de enriquecimento e $\bar{P} = 320$.

Na Figura 9 é possível perceber que a aproximação feita com base de grau 1 ($p=1$) mostrou sinais de travamento por cisalhamento, assim como MEFG- C^0 de mesma base ($p=0$), conforme indica a Figura 6. Após esse levantamento de dados, analisando principalmente as Figuras 6 e 9, optou-se por utilizar, preferencialmente, uma malha M8 com enriquecimento $p=2$ com 7 pontos de integração para MEFG- C^0 e $p=3$ com 25 pontos de integração para MEFG- C^k , ambos representando uma base de funções de aproximação cúbica.

A Tabela 1 apresenta alguns valores de tensão e deslocamentos obtidos por Levy (1942) e pelo *software* Abaqus[®] comparados com dois casos de MEFG. Um ponto a ser destacado é que a tensão máxima σ_x no centro da placa ocorre na superfície inferior enquanto que, para o ponto médio da borda, $\sigma_x(a/2;0)$, esta ocorre na superfície superior da placa. Ambas as tensões são tratativas.

Tabela 1 – Resultados de deslocamento transversal, w/h e tensão $\bar{\sigma}_x = \sigma_x a^2 / Eh^2$, para $q_0 = 0.0138$ MPa ($\bar{P} = 320$), placa isotrópica e engastada.

Fonte	$w/h(0;0)$	$\bar{\sigma}_x(0;0;-h/2)$	$\bar{\sigma}_x(a/2;0;+h/2)$
Levy (1942)	1,720	22,080	65,300
ABAQUS	1,694	21,840	65,240
MEFG- C^0 M8 $p=2$	1,684	22,268	65,572
MEFG- C^k M8 $p=3$	1,692	19,604*	63,392*

Há um problema para a imposição de condições de simetria ao MEFG- C^k , que será melhor abordado na próxima seção. Por este motivo, na Tabela 1 acima, há valores marcados com asterisco (*), pois as tensões foram obtidas pela simulação da placa completa, utilizando uma malha M10 e enriquecimento $p=3$ com 54 pontos de integração apenas para o cálculo das tensões para MEFG contínuo.

Observou-se que, este erro na imposição de simetria afeta apenas as tensões, enquanto que os deslocamentos apresentam resultados de acordo com a literatura, com a magnitude do erro menor que 5%.

A Figura 10 é uma ilustração do campo de tensões σ_x da superfície inferior da placa, obtidas pelo *software* Abaqus[®] e pelo código MATLAB[®], enquanto que a Figura 11 mostra as tensões τ_{xy} para a mesma região da Figura 10.

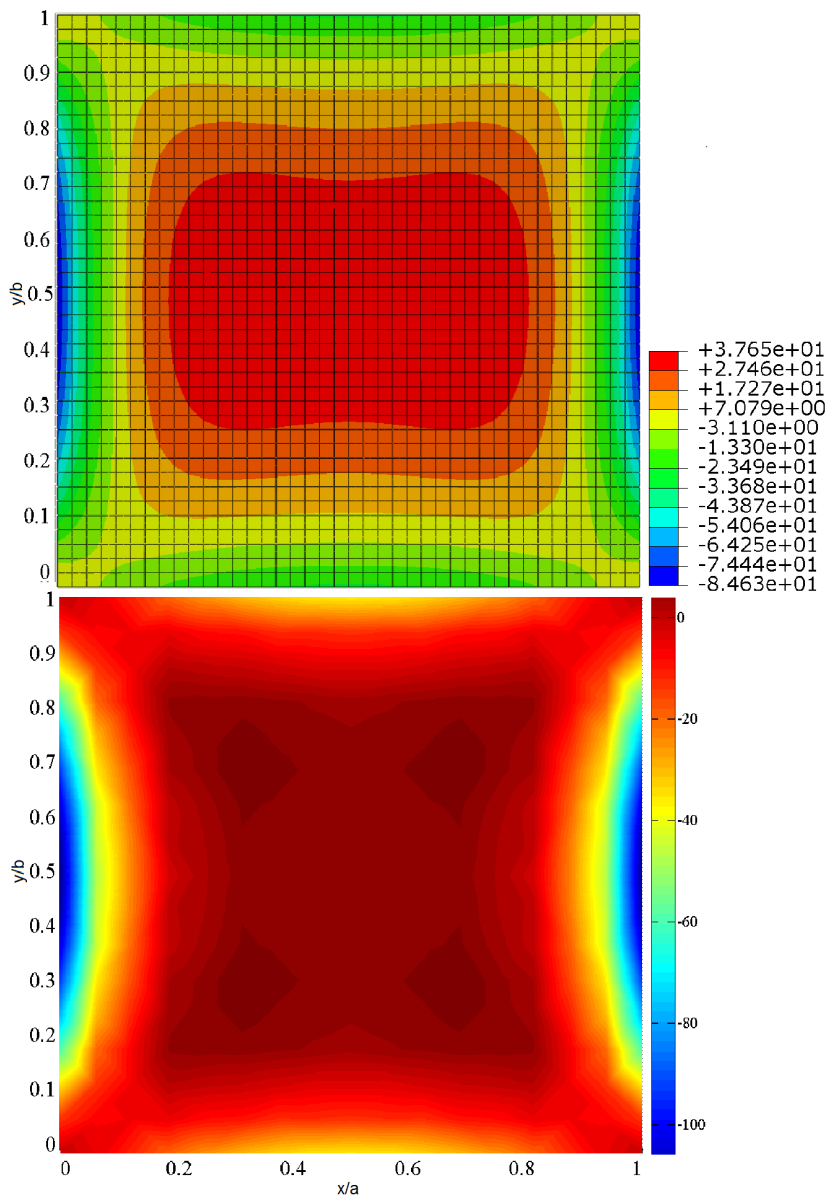


Figura 10 – Figuras ilustrativas com escala do campo de tensões σ_x [MPa] na superfície inferior utilizando *software* Abaqus® (acima) e MEFG- C^k com malha M10, enriquecimento $p = 3$ e $n_{pi} = 54$ (abaixo), para $\bar{P} = 320$.

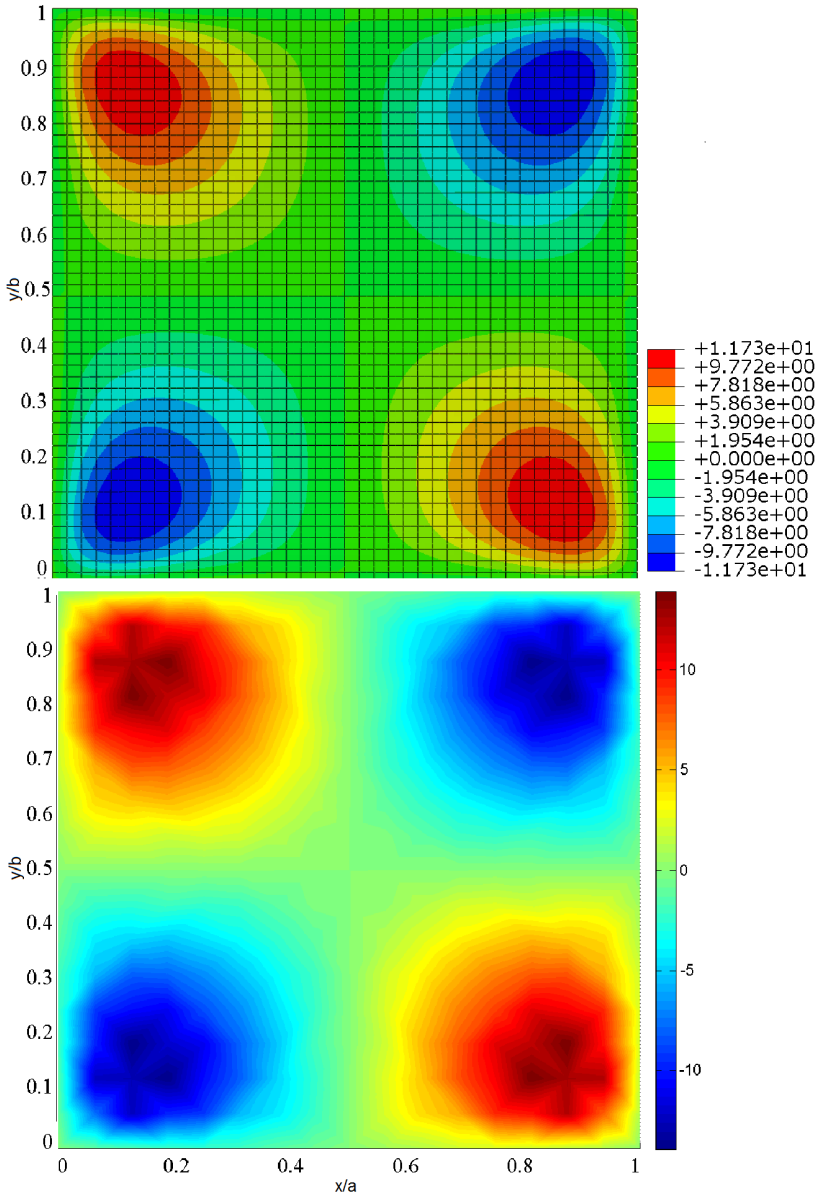


Figura 11 – Figuras ilustrativas com escala do campo de tensões cisalhantes τ_{xy} [MPa] na superfície inferior utilizando *software* Abaqus[®] (acima) e MEF-G- C^k com malha M10, enriquecimento $p = 3$ e $npi = 54$ (abaixo), para $\bar{P} = 320$.

As Figuras 10 e 11 não são uma comparação rigorosa entre os valores obtidos, pois ambos os modelos (Abaqus[®] e MEFG), simulados são diferentes em relação a vários aspectos, como a formulação matemática, já que o *software* comercial utiliza o Tensor de Deformação de Green completo (ABAQUS, 2013), a quantidade e tipo de elementos, além do número de graus de liberdade por nó. Para a simulação em Abaqus[®] utilizou-se o elemento de casca quadrangular com funções de forma quadráticas sob o código S8R, totalizando 1600 elementos e 4961 nós, com carga incremental inicial de 10% e máximo de 20%. Mesmo assim, essas figuras são úteis para observar os comportamentos e padrões globais das tensões, já que os resultados em Levy (1942) se restringem a valores pontuais. Nota-se desta forma que o comportamento global das tensões σ_x e τ_{xy} tem tendências e valores próximo ao *software* Abaqus[®]. Já a Figura 12 mostra a representação dos deslocamentos transversais para MEFG- C^k .

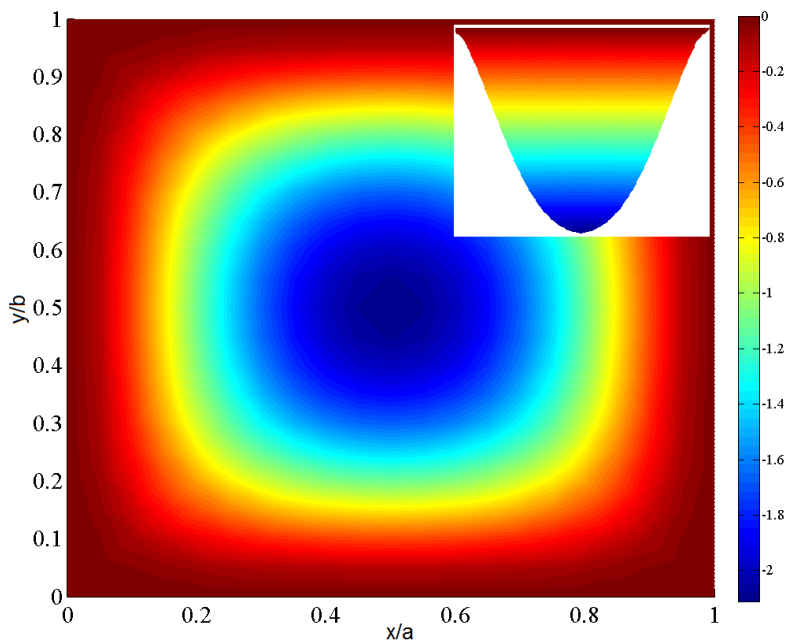


Figura 12 – Deslocamento transversal, w [mm], vista superior e vista lateral (detalhe) para MEFG- C^k , enriquecimento $p = 2$, $n_{pi} = 54$ e $\bar{P} = 320$.

5.2 PLACA ESPESSA

Neste exemplo é reproduzido o caso encontrado em Reddy (2004a), que considera uma placa espessa, quadrada, isotrópica com Modelo de Placas de Reissner-Mindlin e com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} a, b &= 254 \text{ mm}; \\ h &= 25,4 \text{ mm}; \quad a/h = 10; \\ K_s &= 5/6; \\ E &= 53,779 \text{ GPa}; \\ \nu &= 0,3. \end{aligned}$$

Duas condições de contorno de placa simplesmente apoiada são utilizadas, denominadas por Reddy (2004a) como SS-1 e SS-3 (do inglês *simply supported*), como mostrado na Figura 13 para SS-3 fazendo considerações de simetria ao longo dos eixos x e y (ver Eq. (5.2)). As condições de contorno SS-1 e SS-3 são mostradas abaixo.

$$\begin{aligned} &SS - 1 \\ \text{em } x = a/2 : & \quad v_0 = w = \theta_y = 0 \\ \text{em } y = b/2 : & \quad u_0 = w = \theta_x = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &SS - 3 \\ \text{em } x = a/2 : & \quad u_0 = v_0 = w = 0 \\ \text{em } y = b/2 : & \quad u_0 = v_0 = w = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

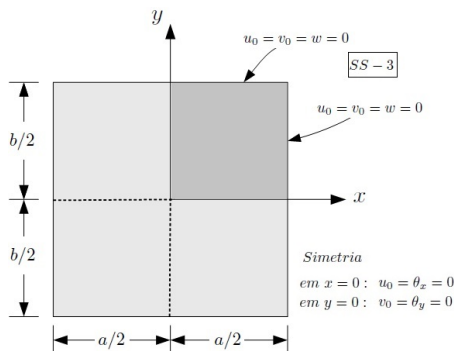


Figura 13 – SS-3 Placa simplesmente apoiada com rotações livres nas bordas.

Os resultados obtidos por Reddy (2004a) são a deflexão no centro da placa $\bar{w} = w/h$ e as tensões normalizadas $\bar{\sigma}_x = \sigma_x(a^2/Eh^2)$ no ponto $(6, 25; 6, 25; -h/2)$ para uma malha uniforme com 16 elementos quadrangulares de nove nós (4x4Q9) e carga uniformemente distribuída, onde o parâmetro de carga é $\bar{P} \equiv q_0a^4/Eh^4$. Para MEFG utilizou-se malha M8, formando uma malha com 128 elementos e 81 nós, como mostrado na Figura 4. Os enriquecimentos das funções PU foram feitos para formar uma base de aproximação de grau 3. Ou seja, para MEFG- C^0 enriquecido com polinômios de grau 2 e MEFG- C^k enriquecido com polinômios de grau 3. Os valores obtidos nas simulações, juntamente com os valores de referência, para as condições de contorno SS-1 e SS-3 são mostrados, respectivamente, nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2 – Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão cooplanar normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas (\bar{P}) com condições de contorno SS-1.

\bar{P}	Reddy(2014)		$MEFG - C^0$		$MEFG - C^k$	
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
6,25	0,2812	1,780	0,2812	1,790	0,2677	1,698
12,5	0,5185	3,398	0,5185	3,421	0,4976	3,313
25	0,8672	5,885	0,8673	5,930	0,8419	5,808
50	1,3147	9,165	1,3150	9,232	1,2888	9,127
75	1,6237	11,465	1,6243	11,542	1,5983	11,452
100	1,8679	13,308	1,8691	13,392	1,8431	13,311
125	2,0746	14,889	2,0758	14,977	2,0498	14,901
150	2,2550	16,290	2,2572	16,386	2,2311	16,313
175	2,4168	17,567	2,4204	17,670	2,3940	17,599
200	2,5645	18,748	2,5697	18,860	2,5429	18,789
225	2,7009	19,854	2,7080	19,974	2,6808	19,903
250	2,8279	20,898	2,8374	21,028	2,8096	20,898

Para ilustrar o comportamento do deslocamento transversal no centro da placa e tensão na direção x, para o ponto $x, y = 15, 875$ mm, com o aumento da carga, são utilizadas as Figuras 14 e 15, as quais representam, respectivamente, as plotagens \bar{w} e $\bar{\sigma}_x$ para MEFG- C^0 e Reddy (2004a).

Tabela 3 – Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão cooplanar normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas (\bar{P}) com condições de contorno SS-3.

\bar{P}	Reddy(2014)		$MEFG - C^0$		$MEFG - C^k$	
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
6,25	0,2790	1,861	0,2790	1,872	0,2668	1,800
12,5	0,4630	3,305	0,4630	3,327	0,4487	3,236
25	0,6911	5,319	0,6910	5,360	0,6771	5,264
50	0,9575	8,001	0,9574	8,067	0,9447	7,962
75	1,1333	9,983	1,1332	10,069	1,1211	9,952
100	1,2688	11,634	1,2687	11,736	1,2568	11,606
125	1,3809	13,085	1,3808	13,201	1,3691	13,058
150	1,4774	14,398	1,4773	14,529	1,4658	14,373
175	1,5628	15,608	1,5627	15,756	1,5512	15,585
200	1,6398	16,743	1,6398	16,903	1,6283	16,718
225	1,7102	17,812	1,7102	17,986	1,6987	17,788
250	1,7752	18,831	1,7752	19,092	1,7637	18,805

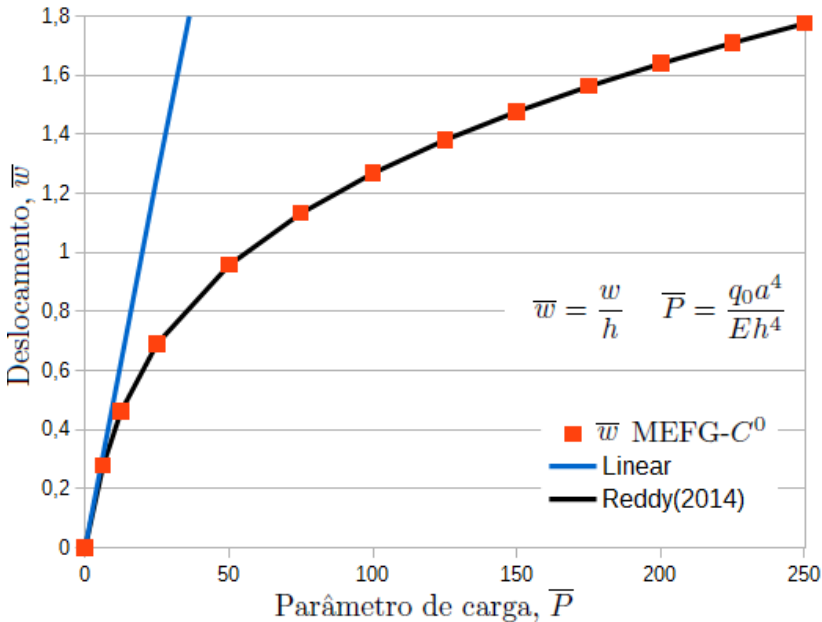


Figura 14 – Deslocamento transversal para referencia e MEFG- C^0 com enriquecimento $p = 2$ e $npi = 25$ utilizando SS-3.

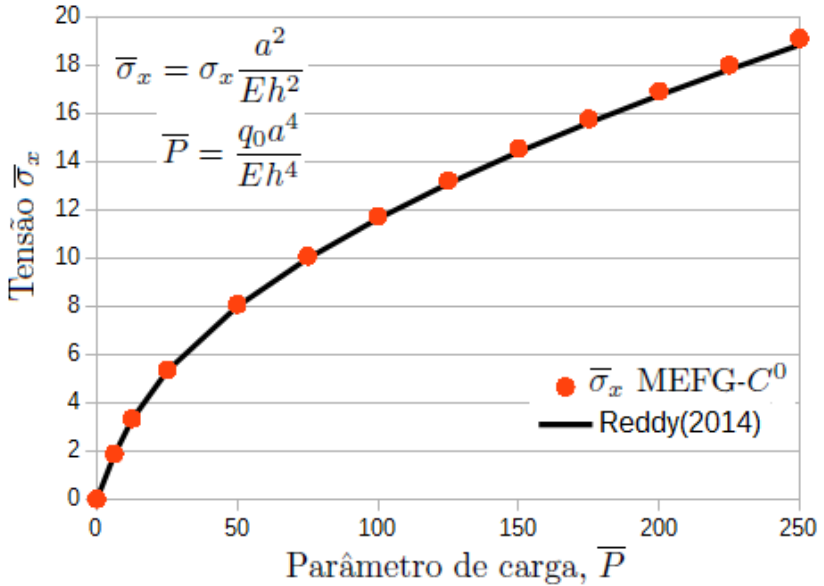


Figura 15 – Tensão parametrizada $\bar{\sigma}_x$ para MEF-G- C^0 com enriquecimento $p = 2$ e $n_{pi} = 25$ utilizando SS-3.

Como observado nas Figuras 14 e 15, os resultados apresentados nas Tabelas 2 e 3 são muito próximos para serem diferenciados nas figuras mencionadas. Por este motivo, apresenta-se nas Figuras 16 e 17 a diferença relativa entre os resultados obtidos apresentados nas tabelas.

$$\text{Diferença Relativa} = \frac{(X_{MEFG} - X_{Reddy})}{X_{Reddy}}. \quad (5.8)$$

Nas Figuras 16 e 17 é possível notar que para MEF-G- C^0 em ambas as condições de contorno, os deslocamentos transversais mostraram-se praticamente os mesmos que os obtidos pela referência, enquanto que as tensões observadas se mantêm dentro da margem de 1%.

Já para MEF-G- C^k , nota-se que os resultados se aproximam à medida que reduz o efeito da parcela linear da Matriz de Rigidez Global sobre o sistema de equações. Tem-se como possível explicação para tal, que os resultados de deslocamento calculados de forma linear para MEF-G- C^k tem comportamento mais rígido em relação a MEF-G- C^0 , a diferença entre MEF-G- C^0 ($\bar{w} = 0,2916$) e MEF-G- C^k ($\bar{w} = 0,2763$) é de 5,54%.

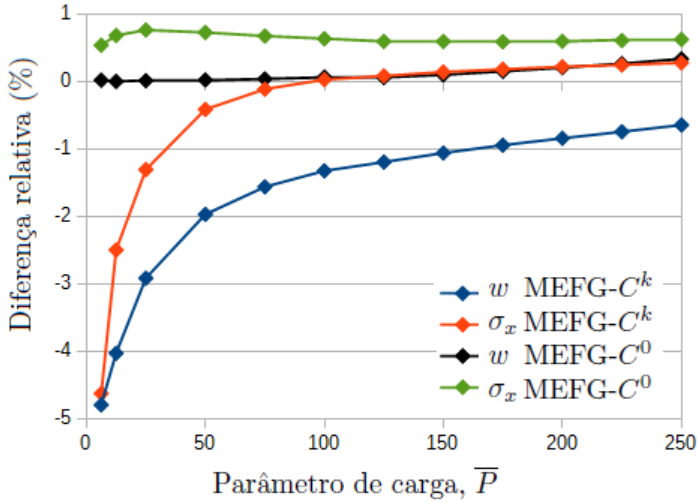


Figura 16 – Diferença relativa entre MEFG e referência da Tabela 2

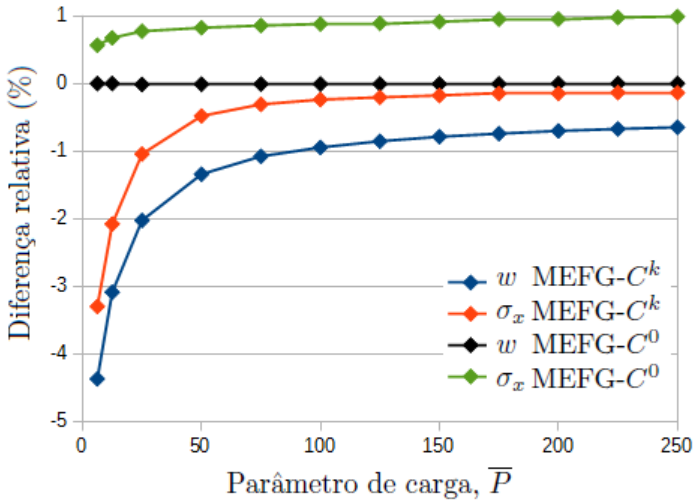


Figura 17 – Diferença relativa entre MEFG e referência da Tabela 3

A Figura 18 mostra a variação da tensão normalizada $\bar{\sigma}_x$ para caso linear e não linear, ambos para a carga de $\bar{P} = 250$. Utiliza-se qua-

tro pontos através da espessura, com $z/h = (-0,5; -0,17; +0,17; +0,5)$ ao longo do eixo x , partindo do ponto central da placa em direção à borda $(a/2, 0)$. Adicionalmente, a Figura 19 mostra a variação de $\bar{\sigma}_x$ através da espessura para alguns pontos sobre o eixo x . Em ambos os casos (Figuras 18 e 19), a condição de contorno SS-3 é utilizada para MEFG- C^0 com enriquecimento de grau 2 e 25 pontos de integração.

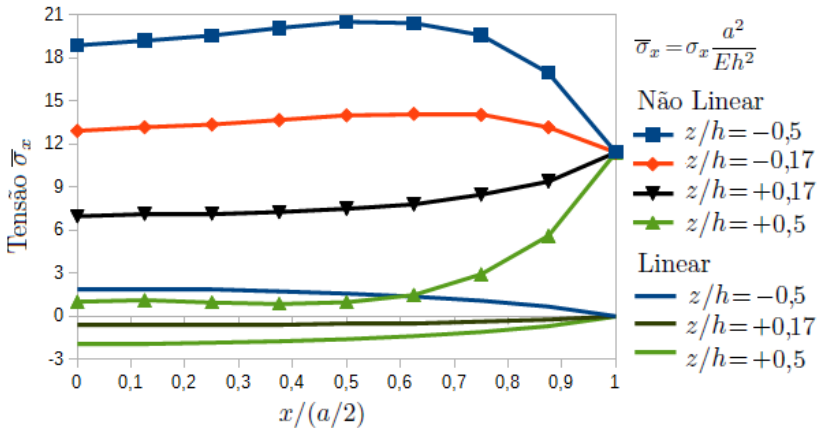


Figura 18 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ em 4 pontos da espessura ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 2$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$.

A Figura 18 apresenta a variação de $\bar{\sigma}_x$ para pontos através da espessura ao longo do eixo x . A linha referente a $z/h = -0,17$ para o caso linear foi omitida por questão estética, para melhor visualização da variação de $\bar{\sigma}_x$ não linear para a superfície superior da placa ($z/h = +0,5$). Os resultados para a linha omitida são semelhantes ao de $z/h = +0,17$, porém com sinal oposto.

Como esperado, as tensões lineares têm a tendência de ser aproximadamente zero na borda, pois é um caso de placa simplesmente apoiada e o momento é nulo na borda.

Observa-se que a partir da região central da placa até aproximadamente $x/(a/2) = 0,6$ as tensões σ_x não lineares se mantêm com pouca variação para cada ponto através da espessura. Na região próxima à borda as tensões tendem a um valor médio até chegar no contorno, onde, para um ponto $x/(a/2) = 1$, a tensão σ_x é constante ao longo de toda a espessura. Assim como ocorre no caso linear, o momento M_x é nulo na borda, mas os esforços de membrana captados pelo uso das hipóteses de von Kármán têm efeito bastante significativo

para esse nível de carga, fazendo com que $\bar{\sigma}_x = 11,4$. Isso pode ser melhor observado na Figura 19.

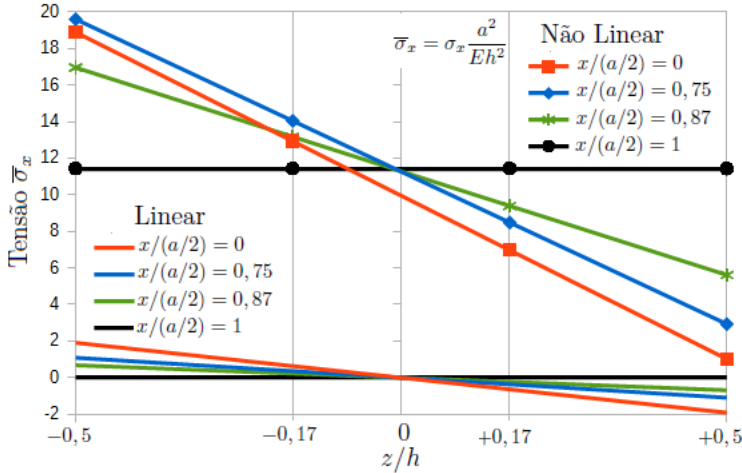


Figura 19 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ através da espessura em pontos ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 2$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$.

Na Figura 19, para os pontos $x/(a/2) = 0$ até $x/(a/2) = 0,75$ mantém-se uma tendência na inclinação do perfil de distribuição da tensão $\bar{\sigma}_x$ através da espessura. Porém, para $x/(a/2) = 0,87$ nota-se uma aproximação entre os valores máximos e mínimos de tensão até chegar na borda da placa em $x/(a/2) = 1$ a um valor constante através da espessura, pelos mesmos motivos citados para a Figura 18. A mesma tendência é observada para a simulação linear deste caso, porém tendendo a zero.

A Figura 20 apresenta os valores da tensão de cisalhamento transversal por integração, $\bar{\tau}_{xz}$ (CHAUDHURI, 1986), no ponto médio da borda $(a/2; 0)$ levando em consideração a condição de simetria utilizada para SS-3, carregamento $\bar{P} = 250$, MEFG- C^0 , $p = 3$ e 25 pontos de integração. Na figura é possível observar resultados para análise linear de τ_{xz} com 10 pontos através da espessura e outros dois não lineares com 4 e 10 pontos.

Como há uma diferença grande na escala dos valores de tensões calculadas de forma linear e não linear com Modelo de von Kármán (Figura 20), gerou-se a Figura 21, na qual são plotadas apenas as tensões calculadas de forma não linear presentes na Figura 20.

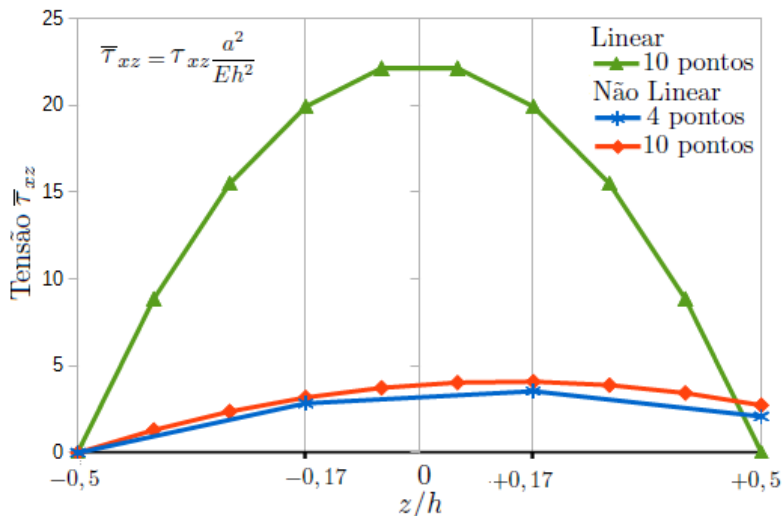


Figura 20 – Tensão $\bar{\tau}_{xz}(a/2;0)$ através da espessura com MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $\bar{P} = 250$.

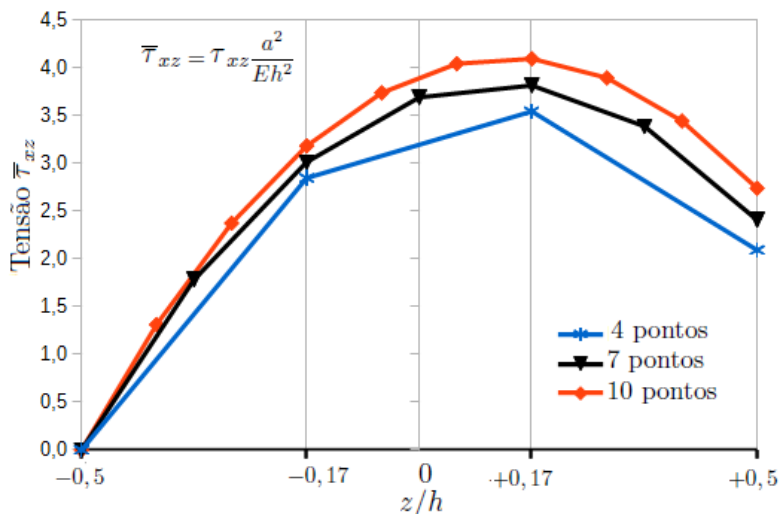


Figura 21 – Plotagem apenas das tensões $\bar{\tau}_{xz}(a/2;0)$ calculadas de forma não linear da Figura 20.

Na Figura 20, é possível notar que a tensão τ_{xz} calculado da forma linear tem formato simétrico através da espessura e que, nas superfícies superior e inferior, as tensões são nulas.

Como não há nenhum carregamento cisalhante no plano, pela Lei de Conservação do Momento Angular em um elemento infinitesimal próximo à superfície, as tensões τ_{xz} deveriam ter valor igual a zero em pontos com $z = +h/2$, o que não ocorre na Figura 21.

Teorema: A condição para que $\tau = 0$ em $z = +h/2$ no processo de integração é que as tensões de membrana devem satisfazer exatamente as Equações de Equilíbrio.

Para entender melhor o motivo disso ocorrer, parte-se da recuperação das tensões transversais pela integração das Equações de Equilíbrio (Eq. (3.58), pág. 52) para $z = -h/2$ até $z = +h/2$ e, utilizando a condição de contorno (3.60), tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) dz \\ \tau_{yz}^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) dz \\ \sigma_z^i(x, y, z) &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial y} + b_z \right) dz\end{aligned}\quad (5.9)$$

e multiplicando as duas primeiras equações de (3.58) por z e integrando

$$\begin{aligned}\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} z dz &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) z dz \\ \int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} z dz &= - \int_{z=-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) z dz\end{aligned}\quad (5.10)$$

Aplicando a definição de forças resultantes (3.13), pág. 41, às Equações (5.9)

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x dz \right) = q_x^+ \\
\tau_{yz}^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y dz \right) = q_y^+ \\
\sigma_z^i(x, y, h/2) &= - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_z dz \right) = q_z \quad (5.11)
\end{aligned}$$

onde q_x^+, q_y^+ e q_z são cargas distribuídas aplicadas na superfície superior, e considera-se a superfície inferior livre de carregamentos. Aplicando, similarmente, a equação de momentos resultantes (3.14) nas Equações (5.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} z dz &= - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x z dz \right) \\
\int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\partial \tau_{yz}^i}{\partial z} z dz &= - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y z dz \right) \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Integrando por partes o lado esquerdo, por exemplo

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial}{\partial z} (z \tau_{xz}^i) - \tau_{xz}^i \right] dz \quad (5.13)$$

$$= z \tau_{xz}^i \Big|_{-h/2}^{h/2} - Q_x \quad (5.14)$$

considerando

$$-\frac{h}{2} \tau_{xz}^i \left(-\frac{h}{2} \right) = 0 \quad \frac{h}{2} \tau_{xz}^i \left(\frac{h}{2} \right) \simeq 0$$

então

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \tau_{xz}^i}{\partial z} dz = -Q_x. \quad (5.15)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} -Q_x &= - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_x z \, dz \right) \\ -Q_y &= - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \int_{z=-h/2}^{h/2} b_y z \, dz \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Observou-se que as Equações (5.11) e (5.16) contêm cinco equações diferenciais de equilíbrio do modelo de primeira ordem, quando incorporados os efeitos de força de corpo. Se a solução aproximada satisfaz perfeitamente o equilíbrio local do modelo de placa, quando se realiza a integração, obtém-se automaticamente τ_{xz} , τ_{yz} e σ_z que satisfazem os carregamentos externos nas face superior da placa. Consequentemente, o campo de tensões admissíveis por integração também satisfaz as condições de forças de contorno nas bordas da placa. Por outro lado, se a solução aproximada vem de uma solução de Elementos Finitos que, geralmente, não satisfaz o equilíbrio local, ao fim da integração, as tensões transversais não satisfarão a distribuição de carregamentos na superfície superior.

Caso tiver solução de MEF, o tensor de tensão integrado não será estaticamente admissível, o que é observado para τ_{xz} não linear na Figura 21. No entanto, há alguns casos onde a solução de Elementos Finitos produz tensões de cisalhamento transversais em equilíbrio nas faces, o que é possível observar nas tensões τ_{xz} calculadas de forma linear na Figura 20. Para um caso de laminado simétrico, ou material isotrópico, sujeito apenas a carregamento transversal, ($b_x = b_y = b_z = q_x^+ = q_y^+ = 0$), deve-se ter como forças resultantes no plano ($N_x = N_y = N_{xy} = 0$). A Equação (5.11) mostra que a tensão transversal deve ser zero na superfície superior, no entanto, $\sigma_z \neq q_z$ nesta superfície.

Para observar melhor o comportamento das funções PU com derivadas contínuas (C^k) e derivadas não-contínuas (C^0), são apresentadas figuras do campo de tensões $\bar{\sigma}_x$ como uma superfície tridimensional. As Figuras 22 e 23 apresentam ilustrações dos campos de tensões $\bar{\sigma}_x$ na superfície inferior da placa para o caso da Tabela 3, utilizando MEFG- C^0 com enriquecimento de grau 3 com 25 pontos de integração, para cargas de $\bar{P} = 6$, 25 e $\bar{P} = 250$, respectivamente.

Deve ser destacado que a Tabela 3 foi gerada utilizando enriquecimento de grau 2, e não 3, como neste caso. Optou-se por aumentar o grau para MEFG- C^0 a fim de comparar apenas o comportamento quando se tem o mesmo número de graus de liberdade e condição de

contorno para ambos os casos.

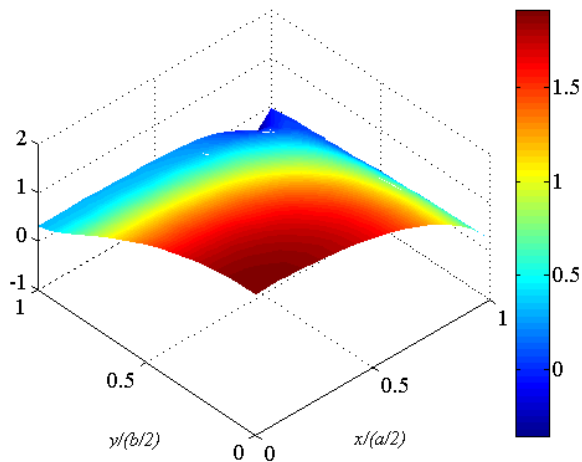


Figura 22 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 6, 25$ e SS-3.

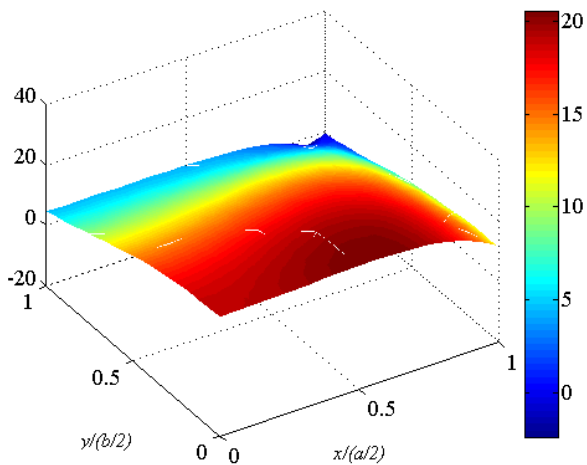


Figura 23 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ para $\bar{P} = 250$ e SS-3.

Nas Figuras 22 e 23, é possível notar as descontinuidades entre os elementos com uma linha branca, porém também é possível perceber que o grau da base associado ao tamanho dos elementos da base são suficientes para este caso, já que as descontinuidades são pequenas. É também observada a tendência da tensão $\bar{\sigma}_x$ de ser pequeno na aresta $x = a/2$, já que para este nível de carga ($\bar{P} = 6, 25$) é bem próximo de uma análise linear, como já comentado para a Figura 18. Outro ponto a ser notado, é que com o aumento da carga, as tensões máximas trativas passam a se localizar não mais no centro da placa. Já as Figuras 24 e 25 apresentam o mesmo caso das Figuras 22 e 23, porém com funções suaves.

Como já comentado na seção anterior, os casos utilizando funções de aproximação suaves apresentam problemas para a utilização de simetria. Este problema foi observado em nós específicos, nos vértices da placa, onde há o encontro de duas condições de contorno distintas. Geralmente ocorre um pico de valor para esse nó, que pode ser melhor observado com uma perspectiva tridimensional das tensões $\bar{\sigma}_x$.

Algumas hipóteses são levantadas para esse comportamento anômalo. O primeiro aspecto considerado foi se havia algum erro na imposição das condições de simetria, porém este erro é o menos provável, pois as condições de contorno foram impostas exatamente nos mesmos graus de liberdade que em MEFG- C^0 , que não apresenta anomalia. Mas essa hipótese não é totalmente descartada, pois é possível que o MEFG com funções PU suaves seja mais sensível a algum erro que o MEFG- C^0 . Um aspecto a ser levado em consideração para o erro é a forma de construção das funções PU suaves, pois são feitas por meio de um somatório e divisão de funções pesos, o que garante os requisitos para ser considerada uma função PU, porém pode gerar comportamentos inesperados.

Vale ressaltar que, apesar desta anomalia para PU suave, ela é restrita a pontos específicos do domínio. Um exemplo dessa restrição são as Tabelas 2 e 3 em que os resultados para MEFG- C^k estão de acordo com Reddy (2004a) e MEFG- C^0 . Isso porque as tensões, para as tabelas citadas, foram computadas para o ponto $x, y = a/8$. Uma coisa interessante é que o nó citado, onde se obtém um resultado coerente, pertence aos mesmos elementos com o nó $(x, y = 0)$ com pico de tensão.

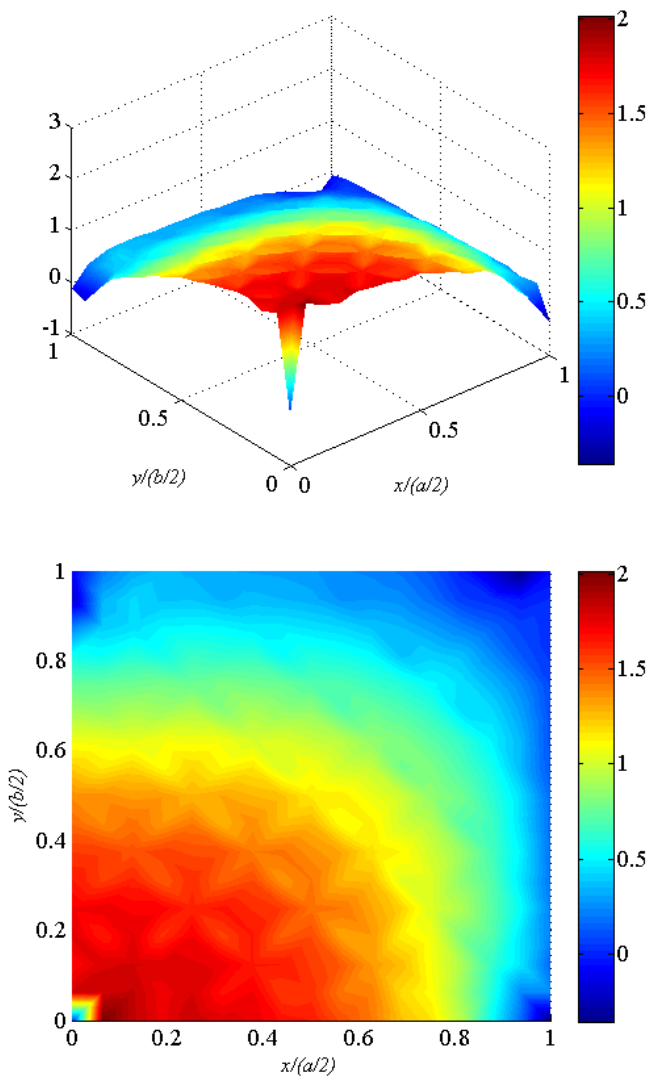


Figura 24 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^k , $p = 3$, $n_{pi} = 25$ para $\bar{P} = 6, 25$ e SS-3.

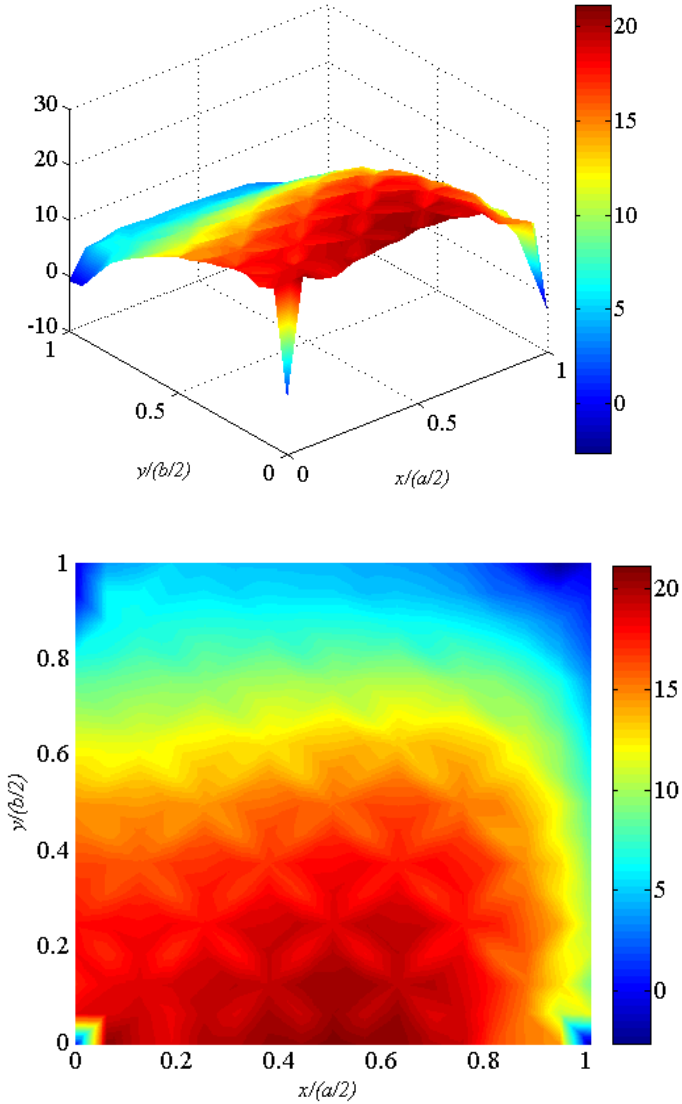


Figura 25 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ superfície inferior da placa utilizando MEFG- C^k , $p = 3$, $n_{pi} = 25$ para $\bar{P} = 250$ e SS-3.

5.3 PLACA FINA

Este caso refere-se a formulação TCP com as considerações de von Kármán utilizando funções PU suaves. Para tal, foi replicado um exemplo feito por Reddy (2004a) que considera uma placa quadrada, isotrópica, simplesmente apoiada denominada como SS-3 (ver eq. (5.7), pág. 80) considerando dupla simetria (para modelagem de apenas um quadrante), submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Os seguintes parâmetros foram adotados:

$$\begin{aligned} a &= b = 254 \text{ mm}; \\ h &= 2,54 \text{ mm}; \quad a/h = 100; \\ E &= 206,842 \text{ GPa}; \\ \nu &= 0,3. \end{aligned}$$

Os resultados de referência consideram dois tipos de elementos: um conforme e outro não conforme. Elementos ditos conformes indicam a existência de continuidade da função deslocamento transversal w e suas derivadas $w_{,x}$ e $w_{,y}$ (ou $w_{,n}$) entre os elementos. Para elementos não conformes, a continuidade de $w_{,n}$ não é satisfeita ao longo de toda a interface. O autor utiliza um elemento retangular não conforme proposto em que as variáveis nodais são $u_0; v_0; w; w_{,x}; w_{,y}$. Também é utilizado um elemento retangular conforme em que as variáveis nodais são $u_0; v_0; w; w_{,x}; w_{,y}; w_{,xy}$. Para os deslocamentos no plano (u_0 e v_0), utilizou-se interpolação bilinear e, para o deslocamento transversal (w), interpolação cúbica de Hermite.

Os resultados obtidos por Reddy (2004a) são a deflexão normalizada no centro da placa com condição de simetria $\bar{w}(0;0) = w/h$ e a tensão normalizada $\bar{\sigma}_x = \sigma_x(a^2/Eh^2)$ no ponto de integração mais próximo ao centro da placa, variando o valor de uma carga uniformemente distribuída a partir de $q_0 = 0,0517$ MPa (equivalente à carga normalizada de $P = 25$). O autor faz variação entre o tamanho da malha e também a utilização de integração completa (4x4) ou reduzida (1x1) da quadratura de Gauss para o cálculo dos termos não lineares da Matriz de Rigidez e Matriz de Rigidez Tangente. Uma vez que as variações têm pouco efeito sobre os resultados, optou-se por utilizar para comparação apenas os resultados referentes a uma malha 8x8 com elementos conformes e integração reduzida.

O modelo para MEFG- C^k com malha M8 (ver Figura 4) foi realizado utilizando a placa completa e sem consideração de simetria (equivale a M4 dos casos com simetria) para evitar a anomalia comen-

tada no seção anterior. Neste caso sem condições de simetria, para não trabalhar com cotas negativas de x e y , a origem do sistema de coordenadas passa a ser o vértice inferior esquerdo da placa, passando o nó central a se localizar em $x = a/2$ e $y = b/2$. O enriquecimento aplicado com polinômios de grau 3, com 54 pontos de integração, gera uma base de aproximação de mesmo grau. As variáveis para comparação são o deslocamento \bar{w} do nó central, e a tensão $\bar{\sigma}_x$ em $z = -h/2$ para o mesmo nó.

A Tabela 4 mostra os valores retirados de (REDDY, 2004a) e os valores obtidos com as rotinas implementadas neste trabalho. A Figura 26 apresenta um gráfico com a diferença relativa entre as duas simulações.

Tabela 4 – Valores de deslocamento transversal (\bar{w}) e tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) para várias cargas normalizadas (\bar{P}) para placa fina isotrópica com condições de contorno SS-3

\bar{P}	Reddy(2014)		MEFG - C^k	
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
25	0,669	5,426	0,670	5,424
50	0,945	8,247	0,945	8,191
75	1,127	10,309	1,125	10,193
100	1,267	12,017	1,264	11,841
125	1,383	13,513	1,378	13,278
150	1,483	14,867	1,477	14,573
175	1,571	16,117	1,563	15,765
200	1,651	17,287	1,641	16,878
225	1,724	18,393	1,713	17,927
250	1,791	19,446	1,778	18,925

A Tabela 4 e a Figura 26 mostram que os resultados da simulação de referência e com MEFG têm a tendência de se afastar com o aumento da carga, principalmente em relação à tensão $\bar{\sigma}_x$. Como já comentado, há várias diferenças entre as simulações de referência e as realizadas neste trabalho. Principalmente pelo fato que para MEFG, o ponto onde é computada a tensão é exatamente o ponto central da placa, enquanto que, para Reddy (2004a), é o ponto de integração mais próximo do centro. Mesmo assim, a diferença máxima para o deslocamento central é de 0,71% e para a tensão é de 2,68%, considerando uma carga $\bar{P} = 250$. A Figura 27 mostra os valores de tensão σ_x na superfície superior

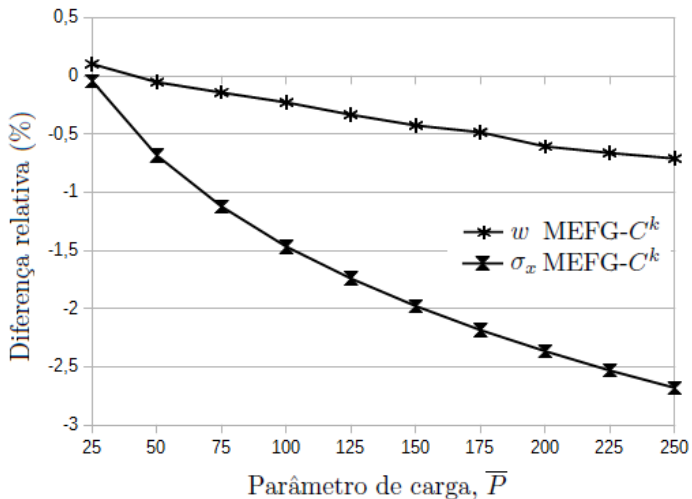


Figura 26 – Diferença relativa entre os resultados \bar{w} e $\bar{\sigma}_x$ de Reddy (2014) e MEFG- C^k da Tabela 4.

para carga de $\bar{P} = 25$.

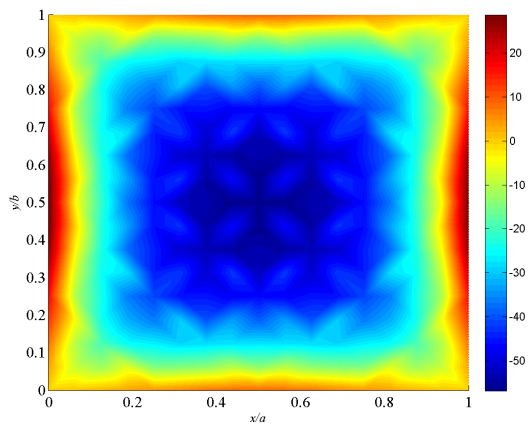


Figura 27 – σ_x [MPa] superfície superior para MEFG- C^k , $\bar{P} = 25$ da Tabela 4.

As Figuras 28 e 29 representam as tensões $\bar{\sigma}_x$ na superfície inferior e superior da placa, respectivamente, para as cargas de $\bar{P} = 250$.

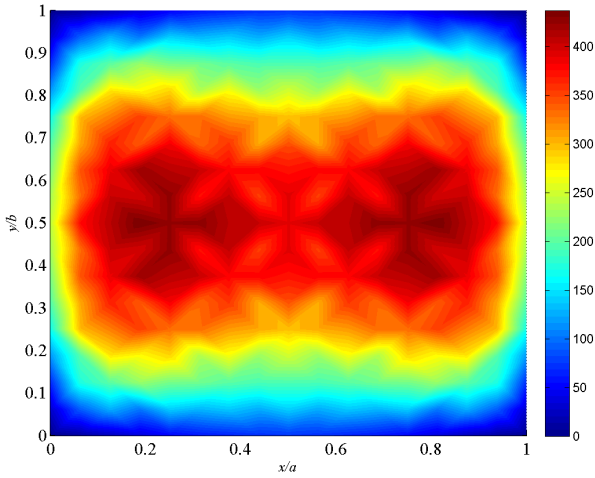


Figura 28 – σ_x [MPa] superfície inferior para MEF $G-C^k$, $\bar{P} = 250$ da Tabela 4.

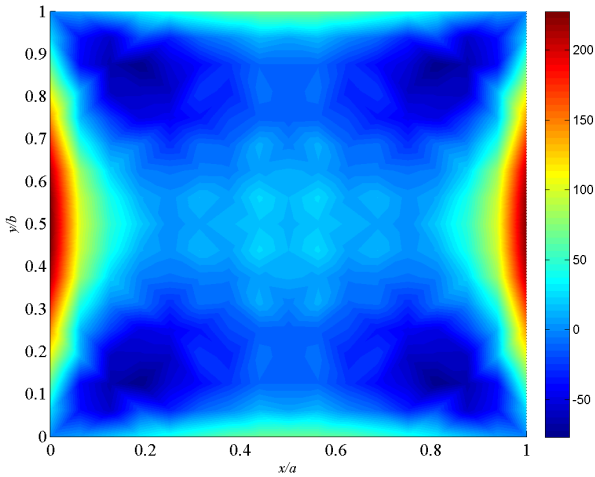


Figura 29 – σ_x [MPa] superfície superior para MEF $G-C^k$, $\bar{P} = 250$ da Tabela 4.

Observa-se a tendência da posição da tensão máxima de se afastar do centro da placa. Essa característica também foi encontrada por Reddy (2004a). O qual obteve uma tensão máxima de $\bar{\sigma}_x = 21,177$ na posição de $(x;y)/(a/2) = (0,5625;0,0625)$ para o quadrante utilizando simetria. Neste trabalho, obteve-se o valor de $\bar{\sigma}_x = 21,146$ (437,4 MPa) e a posição $(x;y)/(a/2) = (0,625;0,0)$, equivalente à referência.

Apesar da tensão máxima σ_x , com o aumento da carga, se dividir em dois pontos simétricos e migrar em direção à borda da placa ao longo do eixo de coordenadas x , a distribuição destas tensões nos outros pontos não sofre muita alteração. Por outro lado, a distribuição de σ_x na superfície superior da placa sofre uma mudança mais drástica, com regiões compressivas tendendo aos vértices da placa.

5.4 PLACA ORTOTRÓPICA

Nesta seção realizou-se uma comparação utilizando um material ortotrópico, entre o código MEFG do presente trabalho e um exemplo feito por Reddy (2004a). Busca-se apenas verificar os resultados da tensão e deslocamento para este tipo de material. Neste caso, utiliza-se os modelos TCP e FSDT, para a condição de contorno de uma placa simplesmente apoiada (SS-3) mostrada nas equações (5.7) e parâmetros geométricos e de material, descritos a seguir:

$$\begin{aligned} a = b &= 304,8 \text{ mm;} \\ h &= 3,505 \text{ mm;} \\ E_1 &= 20,684 \text{ GPa;} \\ E_2 &= 8,825 \text{ GPa;} \\ G_{12} &= G_{13} = G_{23} = 8,825 \text{ GPa;} \\ \nu_{12} &= 0,32. \end{aligned}$$

O autor de referência obtém o deslocamento no centro da placa para as teoria FSDT e TCP, e a tensão σ_x neste mesmo ponto para FSDT. A malha 4x4Q9 com integração reduzida em um quadrante com dupla simetria é utilizada com uma tolerância de 0,01 para o Método de Newton-Raphson. Nas simulações utilizando o MEFG, utilizou-se MEFG- C^0 , $p = 2$, $npi = 25$ e condições de simetria para comparação com FSDT. Já para comparação com TCP utilizou-se MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 54$ sem consideração de simetria. Em ambos os casos a malha utilizada é a M8 e tolerância de 10^{-6} para o Método de Newton.

A Tabela 5 mostra os valores obtidos por Reddy (2004a) e neste

trabalho. Um ponto a se frisar, é que o fator K_s é omitido no exemplo de referência, sendo adotado como $K_s = 1$ neste trabalho. Ressaltando que ao utilizar $K_s = 5/6$ ou $K_s = 2/3$ resulta em uma variação menor que 0,1% no resultado final de tensão em relação a $K_s = 1$.

Tabela 5 – Valores de deslocamento transversal \bar{w} e tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) no centro da placa para várias cargas \bar{P} de uma placa fina ortotrópica com condições de contorno SS-3

Teoria	Reddy(2014)			$MEFG - C^k$		$MEFG - C^0$	
	TCP	FSDT		TCP		FSDT	
\bar{P}	\bar{w}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
2,23	0,0812	0,0819	1,056	0,0812	1,092	0,0814	1,100
4,47	0,1572	0,1580	2,116	0,1574	2,187	0,1577	2,205
8,93	0,2862	0,2877	4,058	0,2867	4,190	0,2870	4,228
17,87	0,4696	0,4710	7,103	0,4699	7,315	0,4701	7,390
26,80	0,5964	5,9710	9,406	0,5967	9,664	0,5968	9,769
35,73	0,6935	0,6949	11,284	0,6942	11,570	0,6941	11,701
44,67	0,7739	0,7746	12,894	0,7740	13,195	0,7738	13,177
53,60	0,8420	0,8420	14,316	0,8420	14,628	0,8417	14,808
62,54	0,9022	0,9014	15,602	0,9015	15,919	0,9012	16,122
71,47	0,9551	0,9551	16,783	0,9547	17,102	0,9543	17,328
80,40	1,0036	1,0029	17,880	1,0029	18,199	1,0025	18,444
89,34	1,0486	1,0471	18,909	1,0471	19,227	1,0466	19,491

Utiliza-se a Tabela 5 para computar a diferença relativa entre os resultados de referência e obtidos por meio de MEFG para ambas as teorias, TCP e FSDT. Para os deslocamentos transversais no centro da placa a diferença máxima é de 0,6%. Apesar de Reddy (2004a) apresentar apenas resultados de tensão para FSDT, neste trabalho foram computados tensão para ambas as teorias. Para a tensão σ_x , em ambas as teoria tem a tendência de diminuir a diferença com a referência com o aumento da carga. Para FSDT a diferença relativa, para todas as cargas, fica entre 4,16% e 3,08%, enquanto que para TCP modelada com MEFG- C^k a diferença relativa fica entre 3,44% e 1,68%.

5.5 LAMINADO FINO CRUZADO SIMÉTRICO

Essa seção tem por objetivo investigar alguns comportamentos para laminados finos. Para tal, foi simulado um laminado cruzado com 3 lâminas, com relação de $a/h = 100 : 1$. Os parâmetros geométricos e de material são:

- $a, b = 200$ mm;
- $h^k = 2/3$ mm (espessura de cada lâmina);
- $h = 2$ mm (espessura total do laminado);
- $E_1 = 175$ GPa;
- $E_2 = 7$ GPa;
- $G_{12}, G_{13} = 3,5$ GPa
- $G_{23} = 1,4$ GPa;
- $\nu_{12} = 0,25$;
- Ângulos do laminado = $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$;
- Carga distribuída q na direção $-z =$ de 0,1 a 1,0 MPa;
- Condição de contorno: SS-3 (ver Eq. 5.7).

Os resultados são obtidos utilizando MEF $G-C^0$ para os Modelos de Reissner-Mindlin utilizando condições de simetria, a fim de obter uma solução com a maior qualidade possível, sem aumentar o número de graus de liberdade. Já para Reissner-Mindlin e de Kirchhoff-Love com funções PU suaves, optou-se por utilizar a placa completa a fim de evitar que a anomalia nas tensões, para MEF $G-C^k$, localizadas em vértices, ocorra em pontos de interesse, que são: o centro da placa e no ponto média da borda. A condição de contorno simplesmente apoiada SS-3 foi escolhida para facilitar a imposição da mesma para MEF G no modelo de Kirchhoff-Love, pois necessita impor restrições apenas em graus de liberdades nodais, evitando atuar nas derivadas das função PU nas regiões de contorno da placa, para restringir rotações.

O comportamento não linear do deslocamento e da tensão no centro da placa são comparados com o *software* Abaqus[®] utilizando o elementos de casca de código S8R com integração reduzida. Apesar de ambos os modelos não apresentarem a mesma formulação matemática, é válido saber se o algoritimo em MATLAB[®] tem resultados razoáveis, devido aos resultados escassos na literatura para laminados com não linearidade geométrica.

A Figura 30 apresenta a variação do deslocamento transversal máximo normalizado, no centro do laminado (ponto $x, y = 0$), com o acréscimo de carga q_0/q_{max} , com $q_{max} = 1$ MPa. As curvas apre-

sentadas utilizam índice A para o *software* Abaqus® e índice M para MEFG- C^0 . Já a Figura 31 apresenta a variação da tensão normalizada σ_x no centro do laminado para ambas as superfícies, inferior (índice I) e superior (índice S), para Abaqus® e MEFG.

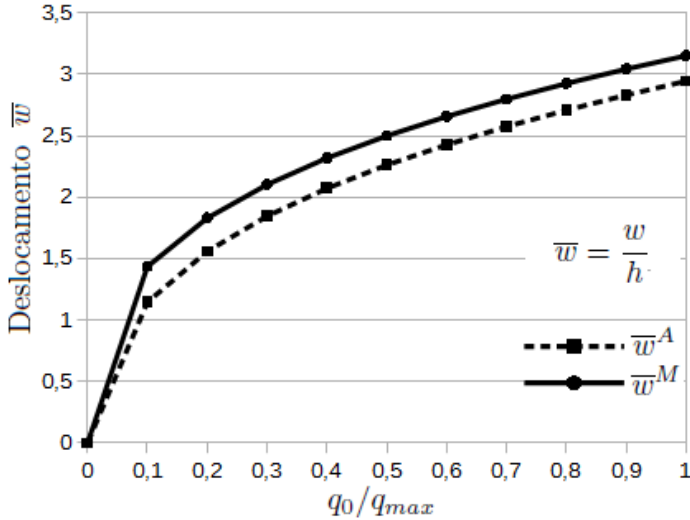


Figura 30 – Deslocamento $\bar{w}(0; 0)$ para centro da placa utilizando SS-3 para Abaqus® e MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ com aumento da carga q_0 .

Observa-se na Figura 30, que os resultados para MEFG são superiores aos do *software* Abaqus®. Isso era esperado, pois o *software* utiliza mais termos não lineares do tensor de deformação de Green-Lagrange (ABAQUS, 2013), que os propostos pelas hipóteses de von Kármán, o que naturalmente torna o laminado com comportamento mais rígido. Já na Figura 31 observa-se para ambos os modelos os valores de $\bar{\sigma}_x$, para a superfícies superior e inferior, possuem valores relativamente próximos.

A Figura 32 mostra a variação de $\bar{\sigma}_x$ através da espessura, no nó localizado no centro da placa, para dois elementos que compartilham este nó, utilizando a carga final, $q_{max}=1$ MPa. Utilizou-se MEFG- C^0 com $p = 3$ e $npi = 25$.

Observa-se a descontinuidade nos valores de tensão no nó, devido a utilização de MEFG- C^0 . Porém, as mesmas não tem uma diferença

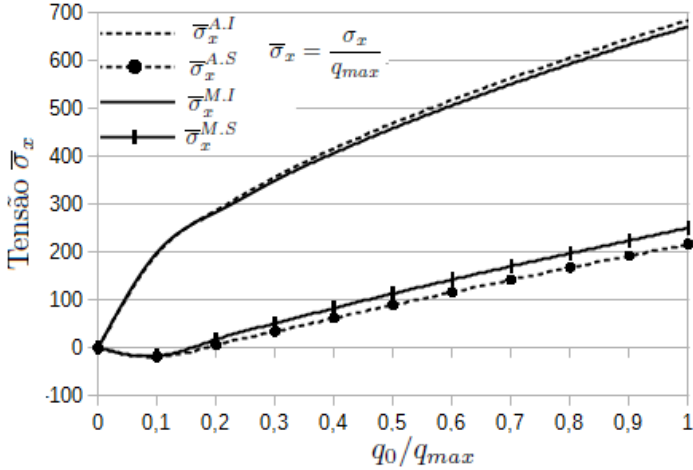


Figura 31 – $\bar{\sigma}_x(0;0)$ para o centro da placa utilizando SS-3 para Abaqus[®] e MEEG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ com aumento da carga q_0 .

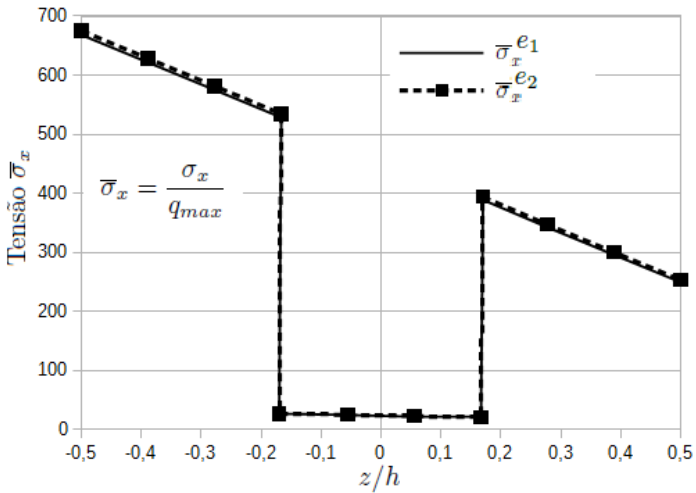


Figura 32 – $\bar{\sigma}_x$ através de z/h para 2 elementos (e_1, e_2) compartilhando nó central, $q_{max}=1$ MPa, MEEG- C^0 com $p = 3$ e $npi = 25$.

muito significativa entre si. É perceptível que a tensão se reduz linearmente a partir da superfície inferior até a superfície superior com uma

diferença significativa para a lâmina central que é cruzada (90°) e não contribui com a rigidez para a flexão em torno de y .

Na Figura 33 é possível observar a variação da tensão normalizada $\bar{\sigma}_x$ ao longo do eixo de coordenadas x , para 5 pontos: um em cada superfície de cada lâmina externa ($z/h = \pm 0,5$ e $\pm 0,17$) e outro ponto na lâmina central ($z/h = 0,06$), que por cada lâmina possuir 4 pontos equidistantes entre si, não há nenhum ponto exatamente no centro do laminado, como é possível notar na Figura 32.

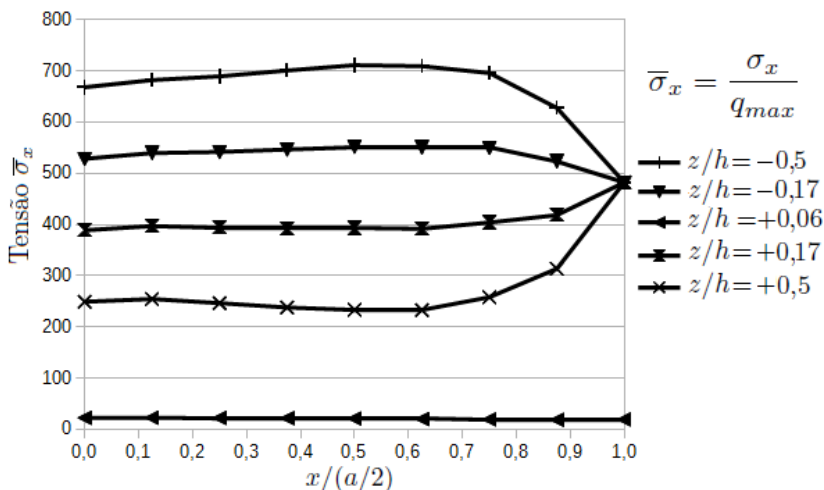


Figura 33 – Tensão $\bar{\sigma}_x$ em 5 pontos da espessura ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 3$, $npi = 25$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$.

Para a Figura 33, observa-se o mesmo comportamento apresentado por uma placa de material isotrópico (Figura 18) para as superfícies do laminado, em que as deformações de membrana tem grande efeito sobre o estado de tensões do laminado, exceto pelas tensões na direção x na lâmina central, as quais são muito pequenas em relação as outras lâminas, como também é possível observar na 32. Outro ponto a salientar é que a tensão máxima σ_x ocorre próximo ao ponto médio entre o centro da placa e a borda ($x/(a/2) \simeq 0,5$) e não mais no centro da placa, como esperado em casos lineares.

A Figura 34 apresenta os valores de $\bar{\tau}_{xz}$ para três pontos, um em cada lâmina, já que o valor é constante ao longo da lâmina por ser encontrado diretamente pelo modelo cinemático de Reissner-Mindlin, para pontos no contorno com condição de simetria $y = 0$ (eixo coordenado x).

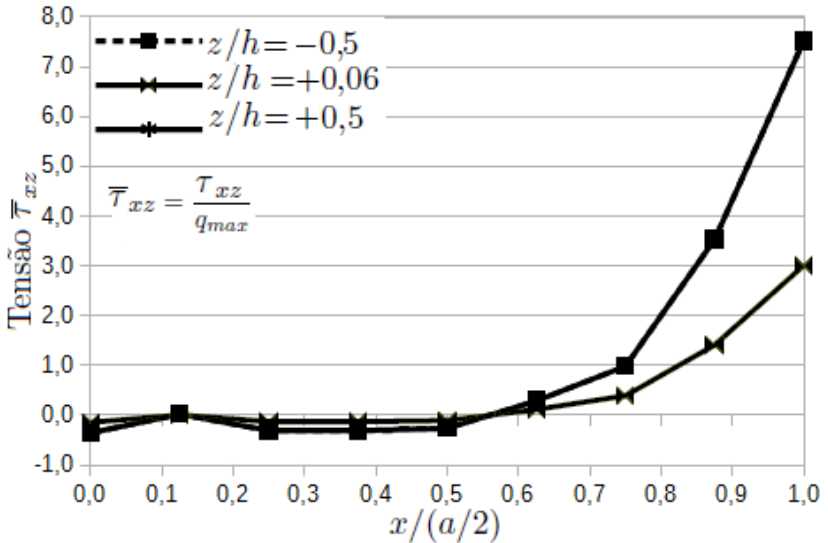


Figura 34 – Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ com um ponto em cada lâmina ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$.

É possível notar na Figura 34 que as lâminas externas possuem o mesmo valor de tensão, sobrepondo-se as curvas para $z/h = \pm 0,5$. Observa-se ainda como os valores de τ_{xz} aumentam ao se aproximar da borda do laminado. O modelo de Reissner-Mindlin supõe que o cisalhamento transversal é constante através da espessura, mas é uma suposição que se afasta da realidade.

Assim como nos exemplos anteriores de placas isotrópicas, busca-se reduzir este erro utilizando o cálculo das tensões transversais pelo método de integração das equações de equilíbrio (CHAUDHURI, 1986). A Figura 35 apresenta a variação de τ_{xz}^i ao longo do eixo coordenado x , para 4 pontos através da espessura: 2 nas faces externas e 2 pontos para as faces superior e inferior da lâmina interna.

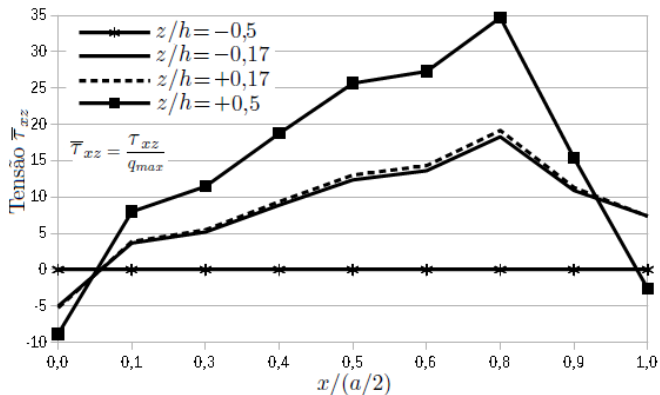


Figura 35 – Tensão $\bar{\tau}_{xz}^i$ ao longo do eixo x para MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3 e $q_{max} = 1\text{MPa}$.

Nota-se na Figura 35 que, assim como ocorre no caso isotrópico, as tensões na superfície superior são não nulas, e se reduzem bastante ao se aproximar da borda. A Figura 36 apresenta a tensão de cisalhamento transversal através da espessura para ambas as formas de se obter τ_{xz} , por integração e o resultado prevista na FSDT, sendo referente ao ponto da borda, em que $x/(a/2) = 1, 0$.

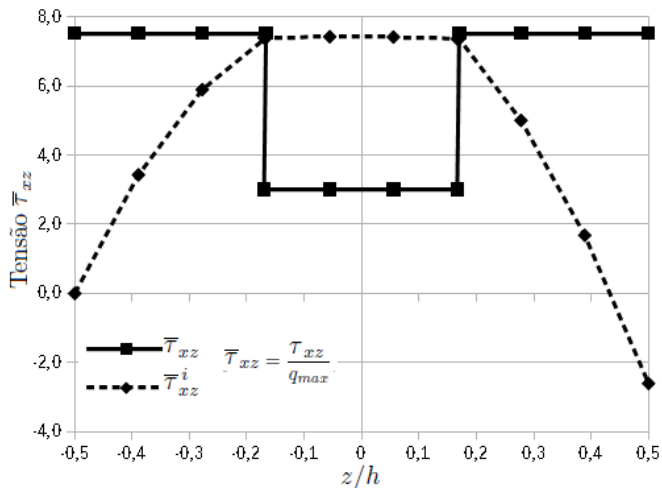


Figura 36 – Tensão $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{xz}^i$ para $x/(a/2) = 1, 0$ através da espessura com MEFG- C^0 , $p = 3$ utilizando SS-3.

Nota-se na Figura 36 que o valor de tensão τ_{xz}^i é não nulo na superfície superior ($z = +h/2$), o que indica que a solução aproximada por MEFG não satisfaz as condições de esforços nessa região, assim como as análises com placa isotrópica. Mesmo assim neste caso, apesar da tensão prevista pela FSDT ter seu valor máximo na borda, a tensão cisalhante transversal por integração apresentou uma tendência a ter aproximadamente zero na superfície superior na borda do laminado.

As Figuras 37 e 38 apresentam, respectivamente, a distribuição das tensões τ_{xz} e τ_{xz}^i na superfície superior do laminado, obtida através da simulação do laminado sem simetria utilizando MEFG- C^k , $p = 3$ e $np_i = 126$. Nestas figuras, por ser simulado o laminado completo, nota-se para as tensões τ_{xz} e τ_{xz}^i o comportamento anti-simétrico em relação ao eixo y e simétrico em relação ao eixo x .

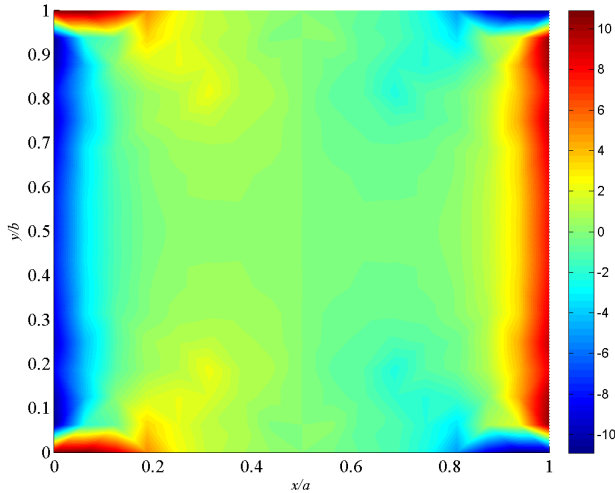


Figura 37 – τ_{xz} [MPa] superfície superior do laminado para MEFG- C^k , $p = 3$, $np_i = 126$, $q_0 = 1$ MPa e SS-3.

Observa-se que nas Figuras 37 e 38 utilizando MEFG- C^k , obtiveram resultados para as tensões próximos aos resultados anteriores com MEFG- C^0 . Apesar da base de aproximação enriquecida ser um grau menor que a utilizada nas figuras anteriores com PU de classe C^0 e com refino h ser metade, pela não utilização das condições de contorno para as Figuras 37 e 38.

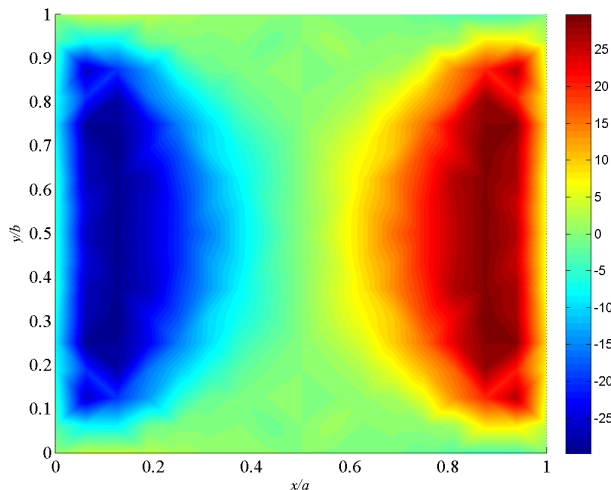


Figura 38 – τ_{xz}^i [MPa] superfície superior do laminado para MEFG- C^k , $p = 3$, $npi = 126$, $q_0 = 1$ MPa e SS-3.

Relembrando que para MEFG- C^k a base de aproximação enriquecida possui o mesmo grau do enriquecimento p , enquanto que para MEFG- C^0 a base de aproximação tem grau $p + 1$.

Outro ponto a notar-se, é que ao utilizar $npi = 126$, reduz-se bastante as "franjas" que surgem em MEFG- C^k , como por exemplo, da Figura 28 em que utilizou-se $npi = 25$.

Por fim realizou-se uma comparação entre os deslocamentos máximos para as três variações de simulação: TCP, FSDT com MEFG- C^k , $p = 3$, $npi \geq 54$, malha M8 sem simetria e; FSDT com MEFG- C^0 , $p = 2$ ou 3 , $npi \geq 25$ malha M8 com simetria. A variação do deslocamento máximo para qualquer umas das simulações foi menor que 0,2%. Já as tensões notou-se um aumento da tensão σ_x , acompanhando o aumento do npi , como mostrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores de tensão normalizada ($\bar{\sigma}_x$) no centro do laminado para MEFG- C^k com variação do enriquecimentos e npi .

Teoria	Enriquecimento	$npi = 54$	$npi = 85$	$npi = 126$
TCP	$p = 3$	650,7	664,6	674,0
TCP	$p = 4$	657,8	668,8	673,2
FSDT	$p = 3$	648,9	664,2	674,0

Por meio deste maior entendimento do efeito das variáveis sobre as simulações, é possível buscar um *set* para o código em MATLAB para assim buscar resultados mais próximos da realidade. Uma forma de obter este ajuste fino pode ser pela simulação de laminados como um sólido tridimensional.

5.6 ESTABILIDADE EM PLACA

Para resolver o sistema de equações para encontrar os autovalores da formulação da Equação (4.70) geralmente utiliza-se um método iterativo, como o Método de Lanczos ou o Método da Iteração Subespacial, para encontrar os primeiros N_{nav} autovalores desejados, principalmente por dois motivos: (1) é que o MEF permite que apenas os primeiros valores tenham representatividade física; (2) o custo computacional é alto (ou mesmo inviável) para calcular todos os autovalores para sistemas de muitos graus de liberdades.

Porém para MEEG a Matriz Rigidez é mal condicionada, com muitos autovalores nulos e outros ainda com valores muito pequenos (em torno de 40 a 50% dos total de autovalores). Mesmo que seja possível utilizar um método matemático para encontrar todos os autovalores, obter o primeiro autovalor com significado físico é computacionalmente tão difícil que inviabiliza a utilização de MEEG, em sua configuração atual, para cálculo de carga crítica de flambagem.

6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi implementar as hipóteses de não linearidade geométrica de von Kármán a dois modelos de placa, Kirchhoff-Love e Reissner-Mindlin, por meio do Método de Elementos Finitos Generalizados com funções Partição da Unidade de Classe C^0 ou C^k . A implementação realizada por meio de algoritmos no *software* MATLAB[®], em que placas, laminadas ou não, com diferentes materiais lineares foram testadas e os resultados comparados com os da literatura (REDDY, 2004a; LEVY, 1942) e/ou com o *software* comercial de Análise por Elementos Finitos Abaqus[®].

Os resultados levam a concluir que:

A formulação discretizada para MEFG, desenvolvida para este caso de não linearidade geométrica, se mostrou capaz de obter os campos de deslocamentos e de tensões, tanto para placas isotrópicas ou anisotrópicas, quanto para laminados de acordo com a literatura, apesar da dificuldade de validar o código, devido a ausência de resultados analíticos.

A utilização de MEFG- C^k mostrou-se uma forma eficaz para formar base com continuidade C1, requerida pelas equações de placa fina, sem a necessidade da utilização de elementos não conformes como em Reddy (2004a).

O MEFG permite enriquecimento polinomial hierárquico, o que facilita a eliminação de patologias numéricas (como *locking*), de forma natural, além de permitir outros tipos especiais de enriquecimento (para problemas de trincas, por exemplo, ou outros com altos gradientes ou singularidades ou descontinuidades). O código também permite a utilização de MEF, bastando usar funções PU C^0 sem enriquecimento.

Os esforços de membrana, devido às hipóteses de von Kármán, afetam a obtenção das tensões transversais pelo método de integração de Chaudhuri (1986), tornando necessário uma outra abordagem para tornar mais precisas essas tensões.

Um ponto a se destacar, foi o surgimento de valores anômalos para tensões nos vértices da placa, quando utilizado funções PU C^k e condições de contorno de simetria. Até o término desta dissertação, este problema permaneceu em aberto.

A análise de estabilidade estrutural torna-se inviável de ser realizada por meio do MEFG, pois surgem um grande número de autovalores nulos ou muito pequenos devidos a grande esparcidade e mal condicionamento da Matriz Rigidez em MEFG.

TRABALHOS FUTUROS

Abaixo segue algumas sugestões a partir do trabalho proposto:

- Implementação de cargas coplanares para posterior análise de flambagem, já que é um problema de não linearidade geométrica;
- Análise dinâmica a partir da inclusão da Matriz Massa e subdivisão temporal do problema;
- Inclusão de outros modelos materiais, como materiais inteligentes, piezoelétricos, etc.;
- Acrescentar fundação elástica à formulação;
- Implementar Método de Elementos Finitos Generalizado Estável (SGFEM) *Stable Generalized Finite Element Method*, para viabilizar a análise de estabilidade estrutural.

REFERÊNCIAS

ABAQUS. **Manual do Abaqus**. 2013. Disponível em: <<http://129.97.46.200:2080/v6.13/index.html>>.

BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods: main ideas, results and perspective. **International Journal of Computational Methods**, World Scientific, v. 1, n. 01, p. 67–103, 2004.

BABUSKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity finite element method. **Technical Report BN-1185**, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1995.

BARCELLOS, C. S. de; MENDONÇA, P. D. T. R.; DUARTE, C. A. A C-k continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. **Computational Mechanics**, v. 44, n. 3, p. 377–393, 2009. ISSN 01787675.

BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S.; DUARTE, C. A. P-Adaptive C k generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. **Computational Mechanics**, v. 41, n. 1, p. 175–187, 2007. ISSN 01787675.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, IOP Publishing, v. 17, n. 4, p. 43001, 2009.

CHAUDHURI, R. A. An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. **Computers & structures**, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 139–146, 1986.

DUARTE, C.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers & Structures**, v. 77, n. 2, p. 215–232, 2000. ISSN 0045-7949.

DUARTE, C. a.; KIM, D. J.; QUARESMA, D. M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 1-3, p. 33–56, 2006. ISSN 00457825.

- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. H-p clouds meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 12, n. 6, p. 673–705, 1996. ISSN 0749-159X.
- FREITAS, A. et al. Comparative Analysis of Ck- and C0-GFEM Applied to Two-dimensional Problems of Confined Plasticity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, scielo, v. 12, n. 5, p. 861–882, 2015. ISSN 1679-7825.
- GARCIA, O. et al. hp-Clouds in Mindlin's thick plate model. **Internarional Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, n. 8, p. 1381–1400, 2000.
- HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L.; KANOKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 11, n. 10, p. 1529–1543, 1977.
- KUBIAK, T. **Static and dynamic buckling of thin-walled plate structures**. [S.l.]: Springer, 2013. 188 p. ISBN 978-3-319-00653-6.
- LEE, S. W.; PLAN, T. H. H. Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)**, v. 16, n. 1, p. 29–34, 1978.
- LEVY, S. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. 1942.
- MENDONÇA, P. d. T. R. **Materiais compostos e estruturas-sanduíche: projeto e análise**. [S.l.]: Manole, 2005.
- MENDONÇA, P. D. T. R.; BARCELLOS, C. S. de; TORRES, D. A. F. Analysis of anisotropic Mindlin plate model by continuous and non-continuous GFEM. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 7, p. 698–717, 2011. ISSN 0168874X.
- MENDONÇA, P. D. T. R.; BARCELLOS, C. S. de; TORRES, D. A. F. Robust Ck/C0 generalized FEM approximations for higher-order conformity requirements: Application to Reddy's HSDT model for anisotropic laminated plates. **Composite Structures**, v. 96, p. 332–345, 2013. ISSN 02638223.
- REDDY, J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 20, n. 9-10, 1984. ISSN 00207683.

REDDY, J. N. On refined computational models of composite laminates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 27, n. 2, p. 361–382, 1989.

REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics**. [S.l.]: OUP Oxford, 2004. 768 p.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S.l.]: CRC press, 2004.

REDDY, J. N. **Theory and analysis of elastic plates and shells**. [S.l.]: CRC press, 2006. 568 p.

SHEPARD, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: **23rd ACM national conference**. [S.l.: s.n.], 1968. p. 517–524. ISBN 1-59593-161-9.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 181, n. 1, p. 43–69, 2000.

TORRES, D. A. F. **Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise de placas laminadas compostas inteligentes**. 206 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2008.

VEIGA, L. B. da; NIRANEN, J.; STENBERG, R. A Family of C_0 Finite Elements For Kirchhoff Plates I: Error Analysis. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 45, n. 5, p. 2047–2071, 2007.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin plates and shells: theory: analysis, and applications**. [S.l.]: CRC press, 2001. 688 p.

WANDZURA, S.; XIAO, H. Symmetric quadrature rules on a triangle. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 45, n. 12, p. 1829–1840, jun 2003. ISSN 08981221.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: The basis**. [S.l.: s.n.], 2000. 689 p. ISBN 0750650494.

ZIENKIEWICZ, R. L.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method** : Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity. 4. ed. [S.l.: s.n.], 1991. 807 p. ISBN 0070841756.