Neuza Bertoni Pinto

Fundamentos de matem.

propasa

clipper universitário

Fundamentos de Matemática

I- Conjuntos e Subconjuntos

Noções Fundamentais

1) Noção de Conjuntos

→ "Bourbaki": Um conjunto é formado de elementos suscetíveis que possuem certas propriedades de terem entre si, ou com elementos de outros conjuntos certas propriedades.

→ "Cantor": Chama-se o conjunto, o grupamento em um todo de objetos bem definidos e discerníveis de nossa percepção ou de nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto.

→ Exemplos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ 9\}$

$C = \{$verde, amarelo, azul, branco$\}$

2) Notação ou Representação

conj → letras maiúsculas

elem → letras minúsculas

Diagrama de Venn.

3) Conjuntos Numéricos Fundamentais

$N = \{1, 2, 3 \ldots\}$

$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

→ por compreensão:

$A = \{x \mid x \quad p(x\}$ $\quad$ $P(x) \rightarrow$ propriedade de x.

$B = \{x \mid x \quad p(x) \text{ e } Q(x)\}$

$A = \{x \mid x \text{ é par}\}$

$B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$

$C = \{x \mid x \text{ é primo} < 20\}$

$D = \{x \in N \mid 2 < x < 5\}$

$E = \{x \in N \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ $\quad$ (raizes: 1, 2)

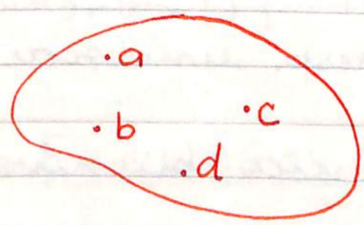
Obs: no conj. dos múltiplos de um nº o zero não faz parte (êle não está incluído no conj. N)

$E = \{x \mid x = 3\}$

$E = \{x \mid x \in N \; 2 < x < 4\}$

6 DIAGRAMA DE VENN

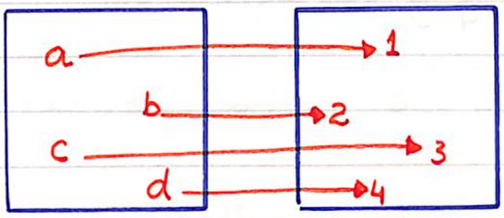
É uma curva plana fechada.



7 CONJUNTO VAZIO

É o conjunto que não possue nenhum elemento.

$\{\ \}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$



correspondência unívoca.

(10) CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

→ FINITO → dado um conjunto n se fizermos corresponder os elementos dêste conjunto aos elementos do outro conjunto.

$A = \{a, b, c, d, \ldots\}$

$B = \{1, 2, 3, 4 \ldots n\}$

$\{x \mid x \in N \text{ e } x < 100\}$ → finito

→ INFINITO → quando não fôr possível estabelecer uma correspondência com um conjunto N dado.

$\{x \mid x \in Q\}$

(11) FAMÍLIA DE CONJUNTOS

$A = \{\{a, b\}, \{3, 4\}\}$ Pode ocorrer $\{a, b\}$ → conj. partes ou elementos.

EXERCÍCIOS

(1) Sendo $B = \{x \mid x \text{ é ímpar}\}$, dizer quais as sentenças seguintes são verdadeiras.

(a) $3 \in B$ V
(b) $6 \notin B$ V
(c) $11 \notin B$
(d) $14 \in B$

④ Dado o conjunto:

$A = \{-11, 1/5, 2{,}7, \sqrt{3}, 8, 100\}$,

descrever, pelo método de extensão, o conjunto:

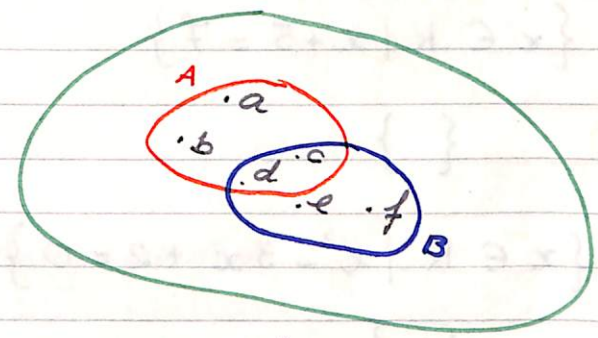
$B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \text{ é primo}\}$

R → $B = \{2, 7\}$

⑤ Construir o diagrama de Venn, relativo aos conjuntos:

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e, f\}$



Obs → alg. significativos → 9 símbolos
alg. arábicos → 10 símbolos (entra o zero)

⑥ Sendo $K = \{1, 4, 9, 10, 11\}$ descrever pelo método da extensão cada um dos seguintes conjuntos:

ⓐ $\{x \in K \mid x^2 \neq 16\}$

$\{1, 9, 10, 11\}$

ⓑ $\{x \in K \mid x + 5 = 9\}$

$\{4\}$

ⓒ $\{x \in K \mid x + 1 \in K\}$

$\{9, 10\}$

$H = \{x \in Z \mid -1 < x < 1\}$ $\{0\}$

25/3/72

II- ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

1. Proposição
   - a→ Definição
   - b→ Representação
   - c→ Princípios

2. Valor Verdade
   - a→ Definição
   - b→ Exemplos

3. Prop. Simples e Composta

4. Conectivos
   - a→ Definição
   - b→ Exemplos
   - c→ Os conectivos

5. Tabela Verdade
   - a→ Conceito
   - b→ Exemplos

6. Negação de uma proposição ($\sim p$)
   - a→ Definição
   - b→ Exemplos

7. Conjunção de 2 prop.

8. Disjunção de 2 prop.

9. Prop. Condicional

10. Prop. Bicondicional

posição que a integre. Ela é única.
Ex: Brasília é a capital do Brasil.

b → Composta
Aquela formada pela combinação de 2 ou mais proposições simples.
Ex: Paulo é estudante e Pedro é rico.
O problema está certo ou errado
e → conectivo ou → conectivo

4. Conectivos

São palavras que servem para formar proposições a partir de outras proposições.

Paulo é alto e José é moreno
Paris é a capital da França ou Roma é a capital da Alemanha.
Ou chove ou faz frio (não é pr. composta)

e → conjunção
ou → disjunção
se... então → condicional
se e sòmente se → bicondicional
não → negação

conjunção → união → conjuga as proposições
disjunção → separação → separa as proposições.

5. Tabela Verdade

O valor verdade de uma proposição composta depende dos valores verdades das proposições componentes que se determina por um dispositivo denominado tabela verdade, na qual figuram todos os possíveis valores verdades da proposição composta correspondente a todas as possíveis combinações dos valores verdades das proposições

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Obs → 2 proposições = 4 possibilidades
2^{n} → nº de p.

A conjunção conjuga os resultados.

Exs → (p) Roma é a capital da Itália e (q) 2+3 = 5 | V | V | V |

(p) Paris é a capital da França e (q) 3+5 = 8 | V | V | V |

$p \wedge q$ Paris é a capital da França e 3+5 = 8 V

(p) Paris é a capital da França e (q) 9-4 = 7 | V | F | F |

$p \wedge q$ Paris é a capital da França e 9-4 = 7

(p) Paris é a capital da Itália e (q) 9-4 = 5 | F | V | F |

$p \wedge q$ Paris é a capital da Itália e 9-4 = 5

(p) Paris é a capital da Itália e (q) 9-4 = 7 | F | F | F |

$p \wedge q$ Paris é a capital da Itália e 9-4 = 7

8. Disjunção de 2 proposições

Chama-se disjunção de 2 proposições p e q, a proposição representada por "p ou q" cujo valor verdade é a verdade quando pelo menos uma das proposições é verdadeira e a falsidade quando as proposições "p e q" são falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2^{n}

p Se Paris é a cap. da Itália q então 9-4=5
$p \to q$ Se Paris é a cap. da Itália então 9-4=5 | F | V | V |

p Se Paris é a cap. da Itália q então 9-4=7
$p \to q$ Se Paris é a cap. da Itália então 9-4=7 | F | F | V |

TABELA:

p	q	se p então q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

10. Proposição Bicondicional

É uma proposição representada por: "p se e sòmente q se" cujo valor verdade é a verdade quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas e é a falsidade nos demais casos.

$$\boxed{p \leftrightarrow q}$$

Exs. p Paris é a cap. da França se e sòmente se
q 3+5=8
$p \leftrightarrow q$ Paris é a capital da França sss 3+5=8 | V | V | V |

p Paris é a cap. da França q sss 9-4=7 | V | F | F |
$p \leftrightarrow q$ Paris é a cap. da França sss 9-4=7

p Paris é a cap. da Itália q sss 9-4=5
$p \leftrightarrow$ Paris é a cap. da Itália sss 9-4=5 | F | V | F |

Paris é a cap. da Itália (q) sss 9-4=7
~q Paris é a cap. da Itália sss 9-4=~~7~~ | F | F | V |

Tabelas Verdades

∧ – "e" → – "se ... então" ~ – "não"
∨ – "ou" ↔ – "se e somente se"

p	q	~p	~p∧q
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

$\sim p \wedge q$

p	q	~q	p∧~q	~p∧~q
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

$\sim (p \wedge \sim q)$

p	q	~q	p→~q	~(p→~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

$\sim (p \rightarrow \sim q)$

$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

p	q	p∧q	~p∧q	q↔p	~p↔q	p∨q
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V

12 – Tautologia

p	q	p∨~q
V	F	V
F	V	V

Dada uma proposição a última coluna da tabela verdade encerra somente V, temos então uma tautologia.

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	p→q	q→r	(p→q)∧(q→r)	p→r	q prop.
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

13 – Contradição

p	~p	p∧~p
V	F	F
F	V	F

$p \wedge \sim p$

Dada uma proposição, se a última coluna da tabela encerra somente F, temos uma contradição.

$$\sim [(p \wedge q) \rightarrow p]$$

p	q	p∧q	(p∧q)→p	~[(p∧q) → p]
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F

contradição

(b) Simétrica

Se $P(q.r.s...) \Leftrightarrow Q(q.r.s.)$ então $Q(q.r.s.) \Leftrightarrow P(q.r.s...)$

(c) Transitiva

$P(p.q.r...) \Leftrightarrow Q(p.q.r...)$ e $Q(p.q.r) \Leftrightarrow R(p.q.r...)$
então
$P(p.q.r...) \Leftrightarrow R(p.q.r...)$

$P \Leftrightarrow Q \wedge Q \Leftrightarrow R \rightarrow P \Leftrightarrow R$

16 – Álgebra das Proposições

(a) Proposição idempotente

$p \wedge q \Leftrightarrow p$

p	p ∧ q
V	V
F	F

(b) Comutativa

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
2. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

1.

p	q	p ∧ q	q ∧ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

2.

p	q	p ∨ q	q ∨ p
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

(c) Associativa.

(f) Lei de Morgan.

a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Representar por as tautologias e por as contradições, provar que:

(a) $p \wedge V \Leftrightarrow F$
(b) $p \vee V \Leftrightarrow V$
(c) $p \wedge F \Leftrightarrow F$
(d) $p \vee F \Leftrightarrow V$
(e) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
(f) $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

Exercícios

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Propriedades

1 - Propriedade Reflexiva

$P(p.q.r\ldots) \Rightarrow P(p.q.r\ldots)$

2 - Anti-Simétrica

Se $P(p.q.r\ldots) \Rightarrow Q(p.q.r\ldots)$ e $Q(p.q.r\ldots) \Rightarrow$ $P(p.q.r\ldots)$ então não é implicação é equivalência.

$P(p.q.r\ldots) \Leftrightarrow Q(p.q.r\ldots)$

3 - Transitiva

Dada uma proposição $P(p.q.r\ldots) \Leftrightarrow Q(p.q.r)$ e $Q(p.q.r\ldots) \Leftrightarrow R(p.q.r)$ então $P(p.q.r\ldots) \Leftrightarrow R(p.q.r\ldots)$

Se uma proporção $P(p.q.r) \Rightarrow Q(p.q.r\ldots)$ elas são tautológicas.

Exercícios

1 - Seja p, a proposição: "Está frio" e q, a proposição: "Está chovendo", enunciar na linguagem corrente:

ⓐ $\sim p$ não está frio. $\sim q$ não está chovendo

ⓑ $p \wedge q$ está frio e está chovendo $(p \wedge \sim q) \rightarrow$ Se está frio e não está chovendo então está frio.

ⓒ $p \vee q$ está frio ou está chovendo

ⓓ $p \leftrightarrow q$ está frio se e somente se está chovendo

ⓑ $p \vee \sim q$ V . V = V

ⓒ $\sim p \wedge q$ F . F = F

ⓓ $\sim p \wedge \sim q$ F . V = F

ⓔ $\sim p \vee \sim q$ F . V = V

ⓕ $\sim (\sim p \wedge \sim q)$ F . V = V

ⓖ $p \wedge (\sim p \wedge q)$ F . F = F . V = F

ⓗ $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ F. F = F.V = V.V = V.

4 _ Construir a tabela verdade das seguintes proposições:

ⓐ $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

ⓑ $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

ⓐ

p	q	p ∨ q	p ∧ q	~(p ∧ q)	(p ∨ q) ∧ ~(p ∧ q)
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

ⓑ

p	q	~q	p ∧ ~q	~p	~p ∨ q	(p ∧ ~q) → (~p ∨ q)
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

5- Verificar pelas tabelas verdades que implica:

ⓐ $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

ⓑ $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q \leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$

② Conjunto Verdade de uma proposição (V_p)

$p(x)$ $\quad x \in N$

V_p (conjunto verdade de p) → Todos os valores de N que tornam a proposição verdadeira, chama-se **conjunto verdade**

$V_p = \{x | x \in A \text{ e } p(x) \text{ é verdadeira}\}$

Exemplos:

a- $x+7 > 15$ $\quad x \in N$ $\quad V_p = \{x | x \in N \text{ e } x+7 > 15\} = \{9, 10, 11 \ldots\}$

b- $x+5 > 3$ $\quad x \in N$ $\quad V_p = \{x | x \in N \text{ e } x+5 > 3\} = \{1, 2, 3 \ldots\} = N$

c- $x+1 = 2$ $\quad x \in N$ $\quad V_p = \{x | x \in N \text{ e } x+1 = 2\} = \{1\}$

d- $x+5 = 3$ $\quad V_p = \{x | x \in N \text{ e } x+5 = 3\} = \emptyset$

③ Quantificador Universal ($\forall$)

$p(x)$ $\quad 3a + 2a = 5a$
$p(x)$ $\quad$ Conj. A

"todos os elementos de A e substituidos na proposição ela continua verdadeira.
$a \in A$ $\quad p(a)$ V

$(\forall x | p(x)$ deixou de ser uma sentença aberta, ela é uma proposição : "para todo x pertencente a A, $p(x)$ é verdadeira."

$(\forall x | p(x) \Leftrightarrow V_p = A$ $\qquad \forall$ = p/a todo

$(\forall x \in A) \; p(x) \Leftrightarrow V_p = A$

não é verdade que todo homem é mortal.

np ou $\sim p$ → negação

$\sim (\forall\, x \in H)\ x$ é mortal)

não é verdade

Existe ao menos um homem que não é mortal (tb. esta é negação da 1ª).

Escreve-se:

$(\exists\, x \in H$ e x não é mortal$)$

$(\exists\, x \in H) \sim p(x)$

Em linguagem simbólica:

$(\forall\, x \in H)\ p(x)$ → é sempre verdadeira

$\sim(\forall\, x \in H)\ p(x)$ → não é verdade que é verdadeira

Conclusão:

Equivalência de Quantificadores

ou

LEIS DA NEGAÇÃO DE MORGAN

$\sim (\forall\, x \in H)\ p(x) \Leftrightarrow (\exists\, x \in H) \sim p(x)$

$\sim (\exists\, x \in H)\ p(x) \Leftrightarrow (\forall\, x \in H) \sim p(x)$

$\forall x \Leftrightarrow V_p = A$

$\exists x \Leftrightarrow V_p = \emptyset$

⑥ Contra Exemplo:

$(\forall x \in R)\ (|x| = 0)$

módulo de x.

"Para resolver o problema, procurar, pelo menos um contra-exemplo (cujo módulo seja diferente de zero) para provar se a sentença é V ou F.

$\sim(\forall x \in H)\ p(x) \Longleftrightarrow (\exists x \in H) \sim p(x)$

$\{\exists x \in N\, p(x)$ é verdadeira$\}$

$V_p = \{2, 3\}$

e) $x^2 - 5x = 0$

$\{\exists x \in N \mid p(x)$ é verdadeira$\}$

$V_p = \{5\}$

f) $x - 5 \in N$

$\{\exists x \in N,\ p(x)$ é verdadeira$\}$

$V_p = \{6, 7 \ldots\}$

---

2) Determinar o conjunto verdade em Z, de cada uma das sentenças abertas:

a) $x^2 = 9$
$\{\exists x \in Z,\ p(x)$ é $V\}$ $V_p = \{3, -3\}$

b) $x^2 \leq 3$

$\{\exists x \in Z,\ p(x)$ é $V\}$ $V_p = \{-1, 0, 1\}$

c) $3x^2 - 12 = 0$

$\{\exists x \in Z,\ p(x)$ é $V\}$ $V_p = \{-2, 2\}$

d) $2x^2 + 5x = 0$

$\{\exists x \in Z,\ p(x)$ é $V\}$ $V_p = \{0\}$

(4) Determinar V_p, sendo R, o conjunto dos nºs reais.

a) $(\forall x \in R)\ (|x| = x)$ F

Falsa porque: $|-3| = 3 \neq -3$

OBS- Nem todos os módulos de x são iguais a x no conjunto dos nºs reais. $|0| = 0$ (só este é igual)

b) $(\exists x \in R)\ (x^2 = x)$ V

$(1^2 = 1)$

c) $(\exists x \in R)\ (|x| = 0)$ V

$|0| = 0$

d) $(\forall x \in R)\ (x + 1 > x)$ V

$0 + 1 > 0$
$1 + 1 > 1$ ...

e) $(\exists x \in R)\ (x + 2 = x)$ F

$-2 + (+2) = 0$

f) $(\forall x \in R)\ (x^2 = x)$ F

$3^2 = 9$
$1^2 = 1$ (só existe um)

Cont. do 3º exercício

f) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$\{\exists x \in A,\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$ $V_p = \{1\}$

g) x é um divisor de 27

$\{\exists x \in A$ e x é d. de $27\}$

$V_p = \{1, 3, 9\}$

h) $3 \leq x < 10$

$V_p = \{3, 4, 7, 9\}$

Continuação do 4º exercício.

Negação

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = x)$ F

$\sim(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = x) \Longleftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(|x| \neq x)$

V + V = F

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ V

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = x) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \neq x)$

F + F = V

c) $(\exists x \in \mathbb{R})|x| = 0)$ V

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})|x| = 0 \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$

F F V

d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x+1 > x)$ V

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})(x+1 > x) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(x+1 \ngtr x)$

F F

e) $(\exists x \in \mathbb{R})(x+2 = x)$ F

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})(x+2 = x) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(x+2 \neq x)$

V V

f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$ F

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = x) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \neq x)$

V V

11/4/72

PARTES de um CONJUNTO

1 Igualdade de Conjuntos:

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) \end{cases}$$

$$A = B \Rightarrow \{(\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)\}$$

Quando não pertence:

$A \neq B \qquad \{3, 5\} \neq \{5, 3\}$

$A = \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$

$A = \{a\} = \{a, a, a\}$

2 Propriedades da Igualdade

a) Reflexiva $A = A$

b) Simétrica $A = B$ e $B = A$

c) Transitiva $A = B$ e $B = C$ logo $A = C$

3 Inclusão

$A \subset B$ e $B \supset A$

$A \subset B = (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$B \subset B = \emptyset \subset B \Rightarrow (\forall x)\,(x \in B)$

$\emptyset \not\subset A\,(\exists x)\,(x \in \emptyset \wedge x \notin A) \wedge [(\forall x)(x \in \emptyset)$

$\Rightarrow (x \in \emptyset) \wedge (x \notin \emptyset)$

$B \subset B$ – parte cheia } partes triviais
$\emptyset \subset B$ – parte vazia

Exemplos:

a) Seja P= conjunto dos nºs pares. P={2,4,6...}
N= conjunto dos nºs naturais N={1,2,3,4,...}

$P \subset N$

b) N= conjunto dos nºs naturais
Z= conjunto dos nºs inteiros
Q= conjunto dos nºs racionais
R= conjunto dos nºs reais

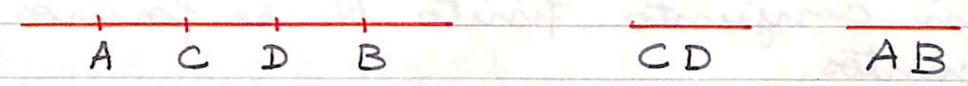
$N \subset Z \subset Q \subset R$

c) A= conj. dos (~~nºs terminados em~~ 5) quadrados
B= conj. dos retângulos
C= conj. dos paralelogramos.

$A \subset B$; $B \subset C$; $A \subset C$

d) A= conj. dos nº terminados em 5
B= conj. dos nº naturais divisíveis por 5.

$A \subset B$

e) 

$\overline{CD} \subset \overline{AB}$

f) A={1, 2, 4, 6}
B={1, 2}
C={2, 3}
D={6, 4, 2, 1}

$B \subset A$ $\quad C \not\subset A$
$B \subset D$ $\quad D = A$
$A \subset D$

g) $A \subset \{a\} \Rightarrow A = \{a\}$ ou $A = \emptyset$

4 Propriedades da Inclusão

a) reflexiva
$A \subset A$
$A \subset A \Rightarrow (\forall x)\,(x \in A$ e $x \in A)$

b) transitiva $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$
$A \subset B \Rightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$
$B \subset C \Rightarrow (\forall x)\,(x \in B \Rightarrow x \in C)$
$(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$

5 Anti-Simétrica

$A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$
$A \subset B \Rightarrow (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$
$B \subset A \Rightarrow (\forall x)\,(x \in B \Rightarrow x \in A)$
$(\forall x)\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

6 Sub-Conjuntos

$A \subset B$ {A é subconjunto de B}
$A \subset B$ e $A \neq B$ – A – subc. própio de B
A={3, 5, 7} e B={3, 7, 5, 9}
conjunto ∅ não tem subconjunto própio
$\emptyset \subset \emptyset$

⑦ Conjunto Finito

Num conjunto finito N se formos tirar conjuntos.

$A = \{1, 2, 3\}$

Dado um conjunto finito N, o mesmo conjunto construir 2^n subconjuntos.

$n = 2^n$

$$C_n^0 = \frac{|n|}{0|n|} = 1$$

$$C_n^1 = C_2^1 = 2 \quad C_n^2 \quad C_n^3 \quad C_n^n$$

Combinações - são agrupamentos que diferem apenas pela natureza.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 \ldots + C_n^n = 2^n$$

$$2^4 = 16$$

Exercícios

① Verificar as igualdades:

v a) $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$

? b) $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 2, 1\}$

v c) $\{5, 6, 5, 7\} = \{7, 5, 7, 6\} = \{5, 6, 7\}$

? d) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{\frac{2}{n} \mid n = 1, -1\} = \{2, -2\}$

② Achar os cinco pares de conjuntos iguais entre os 10 seguintes conjuntos:

$A = \{x \in N \mid x = 2n, n = 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{x \in N \mid 1 < x \leq 9\}$

$C = \{n^2 \mid n \in N, 1 \leq n \leq 5\}$

$D = \{x \in N \mid 1 \leq x ? 9\}$

$E = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2 \ldots, 5\}$

$S = \{1, 2, 3 \ldots 9\}$

$T = \{2, 4, 6, 8\}$

$U = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

$V = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$

$W = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

---

③ Sendo: $M = \{r, s, t\}$, dizer quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

a) $r \in M$ V
b) $r \subset M$ F
c) $\{r\} \in M$ F
d) $\{r\} \subset M$ V

---

④ Sendo: $A = \{0, 4, 7\}$, dizer quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

a) $4 \in A$ V
b) $\varnothing \subset A$ V
e) $0 = \varnothing$ F
f) $4 \subset A$ F
g) $\varnothing \in A$ F
h) $0 \in \varnothing$ F
i) $0 \in A$ V
j) $0 \subset A$ F

⑤ Sendo: $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$ dizer quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

a) $5 \in A$ F
b) $\{5\} \in A$ F
c) $\{5\} \subset A$ F
d) $\{4,5\} \subset A$ F
e) $\{4,5\} \in A$ V
f) $\{\{4,5\}\} \subset A$ V

⑥ nas seguintes sentenças dizer quais são as verdadeiras:

a) $\{1,4,3\} = \{3,4,1\}$ V

b) $\{1,3,1,2,3,2\} \subset \{1,2,3\}$ V

c) $\{4\} \subset \{\{4\}\}$ V

d) $\emptyset \subset \{\{4\}\}$ F

⑦ Dados os conjuntos:

$V = \{d\}$ $W = \{c,d\}$

$Y = \{a,b\}$ $Z = \{a,b,d\}$ $X = \{a,b,c\}$

dizer quais das sentenças são verdadeiras:

$Y \subset X$ V
$W \neq Z$ V
$X = N$ F
$Z \supset V$ V
$W \subset Y$ F
$V \subset X$ F
$W \not\supset V$ F
$Z \not\supset X$ V

15/4/72 - Revisão do ítem ⑥ → Sub-conjuntos

Todo conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos.

$A = \{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n\}$

Binômio de Newton (aplicação)

$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} . a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots$

$\ldots C_n^{n-1} x^{an-1} + C_n^n x^0 a^n .$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$

$A = \{a, b, c\}$

Subconjuntos de $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

$A = \{1,2,3\} \Rightarrow 2^3 = 8$ subconjuntos

$B = \{1,2,2,3,3\} \Rightarrow 2^5 = 32$ subconjuntos (errado)

OBS - Sendo uma combinação, os pares (1.2) não devem ser tomados duas vezes (2.1).
Ambos os conjuntos tem 8 subconjuntos

⑦ a) Conjuntos Comparáveis

A e B sendo $A \subset B$ ou $B \subset A$

$A = \{a,b,c,d,e\}$ $B = \{a,b,e\}$

b) Conjuntos não comparáveis

$A \not\subset B$ $\qquad$ $B \not\subset A$

$A = \{4, 3, 7, 9\}$ $\qquad$ $(\exists x)\ (x \in A$ e $\notin B)$

$B = \{1, 3, 5, 7\}$ $\qquad$ $(\exists x)\ (x \in B)$ e $x \notin A)$

⑧ Conjunto das partes de um conjunto

E = conjunto qualquer

P(E) = conjunto cujos elementos são as partes do conjunto E.

$P(E) = \{x \mid x \subset E\}$

partes triviais $\begin{cases} \text{parte cheia (4 elementos)} \\ \text{parte vazia } \emptyset \end{cases}$

$P(E)$ $\qquad$ $E = \{1, 2, 3\}$

$P(E) = 2^3 = 8$ subconjuntos

$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E$ ou $\{1,2,3\}\}$

$P(0) = \{\emptyset\}$

O conjunto zero tem um único subconjunto que é $\{\emptyset\}$ e é o único conjunto que não tem a parte cheia.

$P(0) = \{\emptyset\}$ idéia

$P\{\emptyset\} = \{\underbrace{\emptyset, \{\emptyset\}}_{\text{conj. elem.}}\}$ $\qquad$ $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

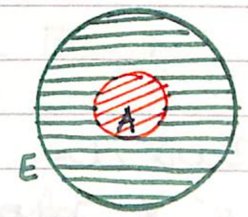
$A = \{0\}$ $\qquad$ $P\{0\} = \{\emptyset, \{0\}\}$?

⑨ Conjunto Complementar

Seja o conjunto A $\qquad$ $A \subset E$

$C_{(E)}^{A} = \{x \mid x \in E$ e $x \notin A\}$

Complementar de A em relação a E é o conjunto dos elementos que pertencem a E e não pertencem a A.

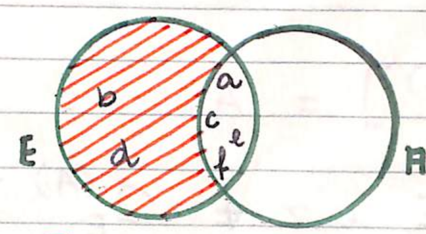


complementar ≡

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A = \{a, c, e, f\}$

$C_{(E)}^{A} = \{b, d\}$



$\bar{A} = \{b, d\}$ é o que falta ao conjunto E p/a completar A.

Exercícios: $\qquad$ Determinar:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$C_{(E)}^{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = B$
$A = \{2, 4, 6, 8\}$	$C_{(E)}^{B} = \{2, 4, 6, 8\} = A$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	$C_{(E)}^{D} = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
$C = \{2, 3, 5, 7\}$	$C_{(E)}^{C} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$
$D = \{1, 3, 5, 7\}$	$C_{(B)}^{B} = \cancel{\emptyset}\ \{9\}$

(10) Propriedades do Conjunto Complementar

I - $C_E^{(\emptyset)} = E$

O conjunto complementar da parte vazia de E é a parte cheia de E

$\{x \mid x \in E \text{ e } x \notin \emptyset\} = E$

II - $C_E^{(E)} = \emptyset$

$\{x \mid x \in E \text{ e } x \notin E\} = \emptyset$

III - $C_E[C_E^{(A)}]$

O conjunto complementar do complementar de A em relação a E é o próprio conjunto A.

$C_E[C_E^{(A)}] = A$

$\{x \mid x \in E \text{ e } x \notin C_E^{(A)}\} =$

$\{x \mid x \in E \text{ e } x \in A\} = A$

(11) Conjunto Universo

$\{x \mid 1 < x < 4\}$ ou $\{x \mid 1 < x < 4\}$

$U = N$ $\{2, 3\}$
$U = R$ $\{n \text{ elementos}\}$

Sendo: $A = N$ $U' = \emptyset$ complementar do conj. un. é $\emptyset$
$U = R$ $\emptyset' = U$ compl. do $\emptyset$ é o universo.

$C_U^{(A)} = \{x \mid x \in R \text{ e } x \notin N\}$

Exercícios

(1) Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{2, 4, 5\}$

Dizer quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

a) $A \subset B$ F
b) $A \subset C$ F
c) $B \subset A$ V
d) $C \subset A$ V
e) $C \subset B$ F
f) $C \subset C$ V
g) $\emptyset \subset B$ V
h) $B = C$ F
i) $B \subset C$ F

(2) Verificar:

$\emptyset \neq \{0\} \neq \{\emptyset\}$ V

$\emptyset$ → conjunto vazio
$\{0\}$ → conjunto unitário cujo elemento é zero
$\{\emptyset\}$ → conjunto unitário cujo elemento é o conj. vazio

(3) Dados os conjuntos:

$A = \{r, s, t, u, v, w\}$

$B = \{u, v, w, x, y, z\}$

$C = \{s, u, y, z\}$

$D = \{u, v\}$

$E = \{s, u\}$

$F = \{s\}$

Determinar quais dos conjuntos A, B, C, D, E ou F pode ser igual a X em cada um dos seguintes casos:

a) $X \subset A$ e $X \subset B$ $\quad X = D$

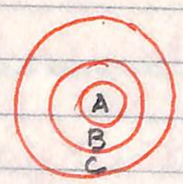
b) $X \not\subset B$ e $X \subset C$ $\quad X = E, \; X = F, \; X = C$

c) $X \not\subset A$ e $X \not\subset C$ $\quad X = B$

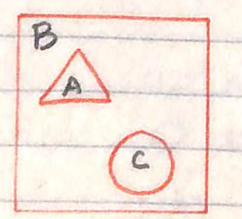
d) $X \subset B$ e $X \not\subset C$ $\quad X = B$ e $X = D$

④ Construir os diagramas de Venn de 3 conjuntos A, B e C tais que:

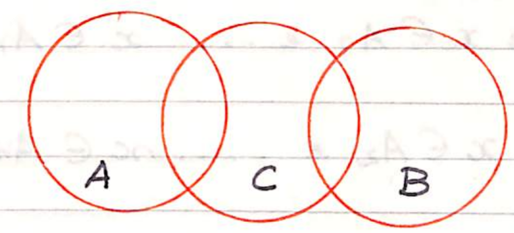
a) $A \subset B$ e $B \subset C$



b) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$ e $C \not\subset A$



c) $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $C \subset A$ e $C \subset B$

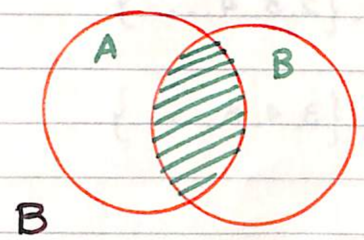


18/4/72

Intersecção de Conjuntos

① A e B $\qquad A \cap B$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



$A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$

Exemplos:

a) As retas coplanares podem ser:

paralelas $\quad r \cap s = \varnothing$

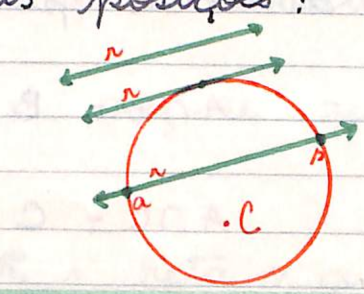
concorrentes $\quad r \cap s = a$

coincidentes $\quad r \cap s = r$ ou s $\quad r = s$

b) Quais são as posições:

C = círculo

r = reta



$S = \pi r^2 \ldots$

② Intersecção de uma família de conjuntos

$\boxed{F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i}$ $\qquad \cap \{A \mid A \in F\}$

$\bigcap^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \rightarrow$ finito

$\bigcap^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \ldots$ → infinito

$\bigcap^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ ; e } x \in A_2 \text{ e } \ldots \; x \in A_n\}$

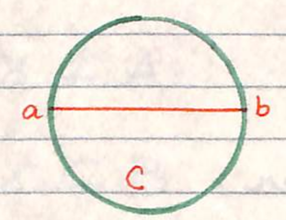
$\bigcap^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \ldots \; x \in A_n \ldots\}$

Exemplos:

$A_1 = \{1.2.3. \ldots\}$ $\quad \bigcap^{n} A_i = \{A_1 \cap A_2 \cap A_3\}$

$A_2 = \{2,3,4, \ldots\}$ $\quad \bigcap^{\infty} A_i = \emptyset$

$A_3 = \{3,4,5, \ldots\}$



$C \cap r = \overline{ab}$

$A = \{x \in N$ e x é divisível por $2\}$

$C = \{x \in N$ e x é divisível por $3\}$

$A \cap C = \{x \in N$ e x é divisível por $6\}$

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad A \cap B = B$

$B = \{2,4,6,8\}$ $\quad A \cap C = C$

$C = \{1,3,5,7,9\}$ $\quad A \cap D = D$

$D = \{2,3,5,7\}$ $\quad B \cap C = \emptyset$

③ Propriedades da Intersecção

a- $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap A = A$

$A \cap U = A$

b- **Comutativa**

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$B \cap A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \in A\}$

$\} \; \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

c- **Associativa**

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cap B) \cap C = \{x / x \in (A \cap B) \text{ e } x \in C\}$

$A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in (B \cap C)\}$

$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$

④ Conjuntos disjuntos

Quando A e B não têm elementos comuns dizemos que são disjuntos. Podemos dizer pois que: $A \cap B = \emptyset$

Quando $A \cap B \neq \emptyset$ diz-se que A e B se cortam ou se cruzam.

$A = \{r \in P$ e R é reta $//$ a $s\}$

P = plano $\quad B = \{s \in P$ e s é reta$\}$

r = reta

// = paralelas $\quad r \cap s = \emptyset$ → disjuntos

⑤ Aplicações

a- Calcular o maior divisor comum de dois ou mais números:

Ex: 8 e 12

A= divisores de 8 — $A = \{1.2.4.8\}$

B= divisores de 12 — $B = \{1.2.3.4,6,12\}$

$A \cap B = \{1.2.4\}$ — M.D.C $= \{4\}$

6. 8. 12

A= divisores de 6 — $A = \{1.2.3.6\}$

B= divisores de 8 — $B = \{1.2.4,8\}$

C= divisores de 12 — $C = \{1.2.3,4.6.12\}$

$A \cap B \cap C = \{1.2\}$ — M.D.C $= \{2\}$

b- Calcular o menor múltiplo comum:

A= múltiplos de 8 — $A = \{8.16.24.32.40..\}$

B= múltiplos de 12 — $B = \{12.24,36,48,\dots\}$

$A \cap B = \{24.48\dots\}$ — M.M.C $= \{24\}$

$x+2=0 \rightarrow A = \{x \in R \text{ e } x+2=0\} = \{-2\}$

$x^2+5x+6=0 \rightarrow B = \{x \in R \text{ e } x^2+5x+6=0\} = \{-3,-2\}$

$A \cap B = \{-2\}$

$$x \in Z \begin{cases} A = x+3>0 \rightarrow A = \{x \mid x \in Z \text{ e } x+3>0\} \\ B = x-2=0 \rightarrow B = \{x \mid x \in Z \text{ e } x-2=0\} \end{cases}$$

$A = \{-2,-1,0,1,2\dots\}$

$B = \{2\}$ — $A \cap B = \{2\}$

Exercícios:

1- Dados os conjuntos

$A = \{1.2.3.4\}$ — $B = \{2.4.6.8\}$ — $C = \{3.4.5.6\}$

Calcular:

$A \cap B = \{2.4\}$ — $A \cap C = \{3.4\}$ — $B \cap B = \{2.4.6.8\} = B$.

$(A \cap B) \cap C = \{2.4\} \cap \{3.4.5.6\} = \{2.4\}$

$A \cap (B \cap C) = \{1.2.3.4\} \cap \{4.6\} = \{4\}$

2- Dados os conjuntos:

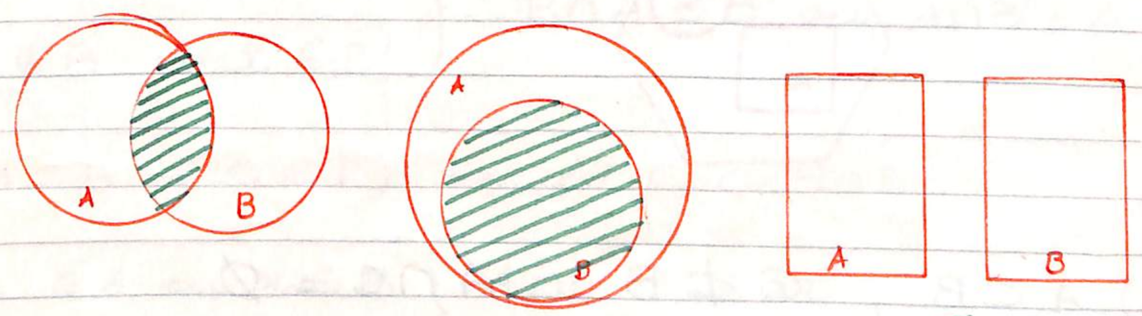
$U = \{1.2.3.4.5\}$ — Calcular:

$A = \{1.2.4\}$ — $A \cap B' = \{1.2.4\} \cap \{1.3\} = \{1\}$

$B = \{2.4.5\}$ — $(A \cap B)' = \{1.3.5\}$

$A' \cap B' = \{3.5\} \cap \{1.3\} = \{3\}$

3- Achuriar a intersecção:



$\emptyset$

4- Achar os pares de conjuntos disjuntos nos conjuntos:

$A = \{1.3.4\}$ — $C = \{4.5.6\}$ — $E = \{2.4.6.8\}$

$B = \{2.0.3.1\}$ — $D = \{5.6.7\}$

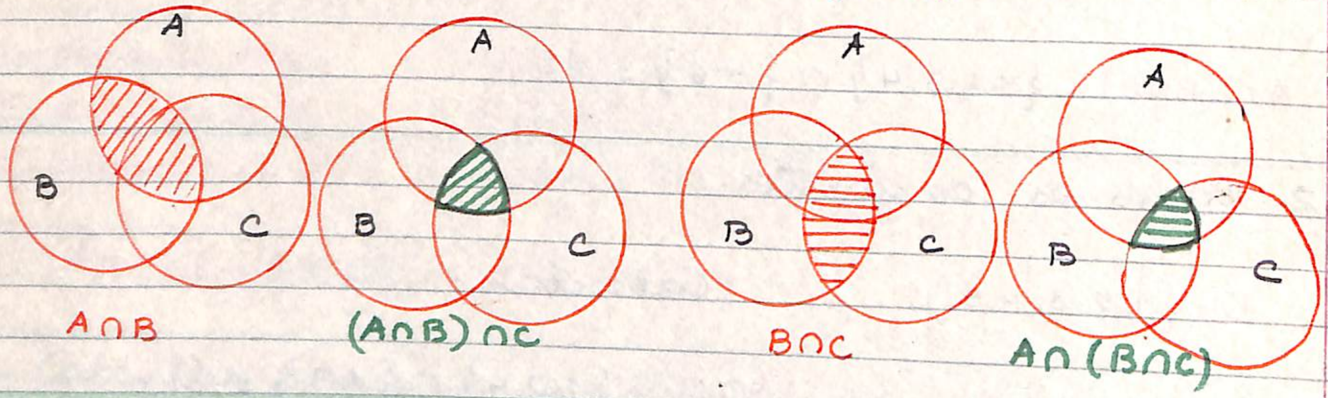
Conjuntos disjuntos: A e D
C e B
B e D

5- Simplificar a expressão:

$A \cap (A' \cap B) = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

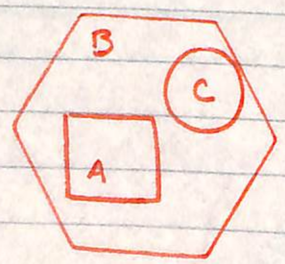
6- Utilizar o diagrama de Venn para mostrar:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

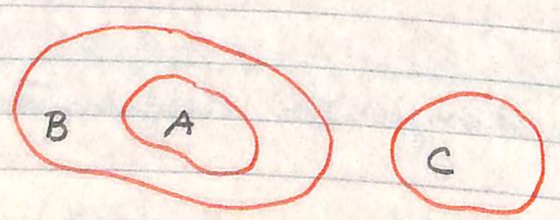


7- Construir o diagrama de Venn de três conjuntos não vazios, A, B, C, tais que:

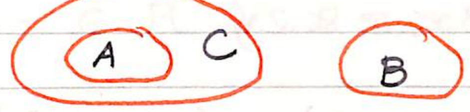
a) $A \subset B$, $C \in B$, $A \cap C = \emptyset$



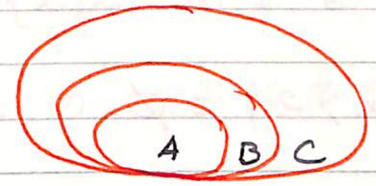
b) $A \subset B$, $C \not\subset B$ $A \cap C = \emptyset$



c) $A \subset C$, $A \neq C$ $B \cap C = \emptyset$



d) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$



8- Indicar quais as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifiquem as igualdades:

Condições:

a) $A \cap B = \emptyset \longrightarrow \{x \mid x \notin A \text{ e } x \notin B\}$
b) $A \cap B = U \longrightarrow \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A\}$
c) $A \cap B = A \longrightarrow \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } B \subset A\}$
d) $A \cap B' = A \longrightarrow \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

9- Demonstrar as implicações:

a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \cap A' = B$

$$\left.\begin{array}{l} x \notin A \Rightarrow x \in A' \\ x \notin B \Rightarrow x \in B' \end{array}\right\} \therefore B \cap A' = B \text{ ou } A \cap B' = A$$

b) $(A \subset B \text{ e } C \subset D) \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in C \text{ ou } x \in D \end{array}\right\} A \cap C \subset B \cap D$$

$A = \{1.2.3\}$ $B = \{1.2.3.4\}$ $C = \{4.5.6.7\}$ $D = \{3.4.5.6.7.8\}$

$A \subset B$ $C \subset D$

$A \cap C = \emptyset \subset B \cap D = \{3.4\}$

10- Calcular:

a) $\{x \mid x \geq -1\} \cap \{x \mid -3 < x < 2\}$

$\{-1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} \cap \{-2, -1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1\}$

$\{x \mid -1 \leq x < 2\}$

b) $\{x \mid -3 < x \leq 1\} \cap \{x \mid x > 2\} = \emptyset$

$\{-2, -1, 0, 1\} \cap \{3, 4, 5 \ldots\} = \emptyset$

$\{$~~x|-3~~

c) $\{x \mid -3 \leq x \leq 0\} \cap \{x \mid -2 < x < 3\}$

$\{-3, -2, -1, 0\} \cap \{-1, 0, 1, 2\} = \{-1, 0\}$

$\{x \mid -2 < x \leq 0\}$

Outros exercícios a partir da página 85.

22/4/72

Reunião de Conjuntos

1. A e B $A \cup B$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{e, t, g, h\}$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, t, g, h\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = \{3, 4, 5, 6\}$
$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$G = \{x \mid x \in R$ e $2 \leq x \leq 6\}$
$H = \{x \mid x \in R$ e $6 \leq x \leq 9\}$
$I = \{x \mid x \in R$ e $2 \leq x \leq 9\}$

$G \cup H = \{x \mid x \in R$ e $2 \leq x \leq 9\}$

$H \cap I = \{x \mid x \in R$ e $6 \leq x \leq 9\}$

$G \cap I = \emptyset$ $\{2 \leq x \leq 6\}$

2. Reunião de mais de 2 conjuntos (Família)

$F: A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$
$U: \{A \mid A \in F\}$

Representação da União de uma família de conj.

$U = \{A \mid A \in F\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$

$U = \{A \mid A \in F\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \ldots$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A$, ou $x \in A_2 \ldots$ ou $x \in A_n\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A$, ou $x \in A_2$ ou $\ldots\}$

Família Finita de Conjuntos

$A_1 = \{1, 2\}$
$A_2 = \{2, 3\}$
$A_3 = \{3, 4\}$
$A_n = \{n, n+1\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, 3, \ldots n, n+1\}$

$A_1 = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$
$A_2 = \{2, 3, 4, 5 \ldots\}$
$A_3 = \{3, 4, 5, 6 \ldots\}$
$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, 3, \ldots n, n+1, \ldots\}$

índice do conjunto (refere-se ao conj. A1)

$\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i = \{2, 3, 4, \dots n, n+1 \dots\}$

↘ índice do conj. A_2.

Com logaritimos:

$A_1 = \{\overset{\log 10^0}{1}, 10, 100 \dots\}$

$A_2 = \{\overset{\log 10^1}{10}, 100, 1000 \dots\}$

$A_n = \{10^{n-1}, 10^n, \dots\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 10, 100 \dots 10^{n-1}, 10^n, \dots\}$

③ Propriedades da reunião de conjuntos

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup U = U$

$A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$\left.\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \\ B \cup A &= \{x \mid x \in B \text{ ou } x \in A\} \end{aligned}\right\} = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$\boxed{A \cup B = B \cup A}$

$(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C\}$

④ Propriedades da União e Intersecção de Conj.

a- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} = \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \text{ ou } x \in C)\} =$

$\{x \mid x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \in C\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{x \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\} =$

$= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \vee x \in A \text{ e } x \in C\}$

b- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \vee x \in (B \cap C)\} =$

$= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} =$

$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$

c- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\} =$

$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$

Generalização.

$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i \dots)$

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m) =$ finito

$A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup A \cap B_3 \cup A \cap B_m$

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots\}$ infinito.

Leis de Morgan

$\boxed{A \subset E \text{ e } B \subset E}$

ⓐ $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

ⓑ $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$