PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 2º GRAU

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO — SÃO PAULO
COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS

GOVERNADOR: ORESTES QUÉRCIA
Secretário: Carlos Estevam Aldo Martins
Coordenadora: Eny Marisa Maia

PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA – 2.º GRAU

2.ª Edição

Elaboração:

José Carlos Fernandes Rodrigues
José Jakubovic (Assessor)
Nilson José Machado (Assessor)
Regina Maria Pavanello
Roberto Barbosa
Suzana Laino Cândido

SÃO PAULO
1991

CENP 329
Publicação amparada pela Lei 5.988, de 14 de dezembro de 1973.

1.ª edição: 1986
2.ª edição: 1989
Reimpressão

Distribuição gratuita

S241p

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática;** 2.º grau. 2. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991. 393p. il.

1. Matemática — Currículo — Ensino do 2.º grau I. Título.

CENP 329

CDU 51:371.214.373.5

Serviço de Documentação e Publicações

Impresso: República Federativa do Brasil
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO — SÃO PAULO
COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS
Rua João Ramalho, 1546
05008 — São Paulo — SP
Telefone 864-5700

Aos Professores

O material ora apresentado é parte de um projeto mais amplo da CENP que implica na divulgação do conhecimento e conseqüentemente no apoio e na atualização da prática docente.

A Constituição atual aponta para três vertentes no processo de repensar o Estado e a sociedade: descentralização, a integração e participação.

A Lei de Diretrizes e Bases em tramitação no Congresso retoma essas questões.

No bojo do processo de descentralização reafirma-se como prioridade a autonomia da escola e ampla participação do Magistério.

É preciso considerar que a autonomia da escola não significa a omissão do Estado ou o afastamento da escola dos centros de produção e divulgação de conhecimento.

Embora o Estado de São Paulo se coloque como um centro cultural efervescente, contraditoriamente há entraves de ordem sócio-econômica que impedem ou dificultam o acesso a ele por parte significativa do magistério. Sujeitos no seu modo de pensar a prática pedagógica às mais diversas influências que decorrem da multiplicidade de canais de informação, enganam-se os que pensam que o Magistério as recebe passivamente.

A reação dos professores se manifesta através da divergência, da discordância ou da adesão.

O papel dos órgãos normativos e de estudos da Secretaria é colocar estas idéias em debate.

São muitas as questões presentes no cotidiano escolar que merecem um amplo debate.

ENY MARISA MAIA
Coordenadora da CENP

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta é a segunda edição da Proposta Curricular de Matemática para o 2º Grau, cuja elaboração é decorrente de um processo de reflexão e discussão sobre as questões referentes à organização curricular da escola do 2º grau da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo.

Esta Proposta consta de um texto introdutório (itens de 1 a 6), bem como um Quadro com sugestões de conteúdos e metodologias (item 7) e Bibliografia (item 8).

1 POR QUE ENSINAR MATEMÁTICA

Existem duas vertentes básicas, amplamente difundidas, a partir das quais justifica-se a inclusão da MATEMÁTICA nos currículos escolares:

. Ela é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, etc.

. Ela desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível.

Não é difícil entrar em acordo quanto a esta dupla função da MATEMÁTICA: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio. Já não é tão simples, no entanto, um acordo sobre o modo como um currículo deve ser organizado para que tais metas sejam atingidas.

Assim, algumas vezes, uma ênfase exagerada em aspectos prático-utilitários, apesar da aparência de adequação, da perspectiva de continuidade na relação escola-vida, tolhe a capacidade de ultrapassar o senso comum, contribuindo até para a manutenção do "statu quo". Outras vezes, pretende-se o desenvolvimento das estruturas lógicas do pensamento através de caminhos tão genéricos, tão formais, e conseqüentemente tão distanciados de qualquer significado imediato que o ensino de MATEMÁTICA passa a parecer apenas um efetivo exercício para o desenvolvimento do raciocínio ... em MATEMÁTICA.

Esses dois aspectos são, de fato, componentes básicos indispensáveis na prefiguração de um currículo, não sendo, no entanto, qualquer um deles suficiente para caracterizar o papel a ser desempenhado pela MATEMÁTICA. São como os átomos de hidrogênio e oxigênio em uma molécula de Água: não é possível compreender as propriedades da Água através da consideração isolada de um ou de outro elemento. A Água apaga o fogo enquanto o Oxigênio alimenta-o e o Hidrogênio arde. A molécula de Água representa a unidade indispensável que se deve considerar para a análise das propriedades da Água, de suas funções. Da mesma forma para a compreensão da real função desempenhada pela MATEMÁTICA no currículo, as aplicações práticas e o desenvolvimento de raciocínio, como foram referidos acima, devem ser considerados elementos inseparáveis.

Conseguir uma situação de equilíbrio nesta permanente tensão entre a pressão das necessidades práticas e a ultrapassagem da experiência concreta, tanto no nível das ferramentas conceituais como no das concepções, é a maior e a mais difícil tarefa do professor de MATEMÁTICA.

Somente um desempenho satisfatório de tal tarefa pode situar adequadamente a MATEMÁTICA nos currículos, servindo tanto ao estabelecimento de uma continuidade entre a escola e a vida quanto à fundamentação das rupturas necessárias com o senso comum, no caminho para a construção de uma autonomia intelectual. Tal autonomia não é meta exclusiva da escola nem tampouco do ensino de Matemática (nessa escola). Mas esta disciplina tem um significado especial em sua construção. Na própria etimologia, encontram-se elos que vinculam a MATEMÁTICA à fundamentação do raciocínio em todas as áreas do conhecimento. Ela seria como uma ciência geral que conteria os primeiros rudimentos da razão humana, fazendo alargar sua ação até fazer brotar verdades em qualquer assunto.

Em grego, MATHEMA quer dizer aprendizagem. Ensinar MATEMÁTICA deveria significar, então, ensinar a aprender.

2 POR QUE UMA NOVA PROPOSTA DE MATEMÁTICA PARA O 2º GRAU

O final de 1983 ficou marcado pela possibilidade conferida às escolas do 2º grau do Estado de reformularem suas grades curriculares. Tal reformulação deveria ser feita a partir de uma proposta educacional da escola, formulada em consonância com as diretrizes para a implantação da Lei 7044/82, a qual retirava deste grau de ensino a obrigatoriedade da profissionalização.

As escolas tiveram autonomia para modificarem seus currículos de acordo com a necessidade e interesse de seus alunos e disponibilidade de seus professores, para adequarem o enfoque dado a este ensino, tendo em vista a sua realidade. Esta autonomia traduziu-se na liberdade de opção pelas disciplinas da parte diversificada e na distribuição de carga horária das diversas disciplinas entre si e ao longo do 2º grau.

Estes fatos inviabilizaram a Proposta de Matemática, até então vigente, não só em relação ao número de aulas destinadas a esta disciplina, em cada série, como também em relação ao direcionamento do ensino a ser ministrado.

Assim, dentre as ações concretizadas pela SE no sentido de reorganizar a escola pública do 2º grau, tendo em vista a melhoria de seu ensino, incluiu-se a elaboração de uma nova Proposta Curricular para as disciplinas que compõem esse grau de ensino e, em particular, a de Matemática.

3 O PROCESSO DE ELABORAÇÃO DA NOVA PROPOSTA

O estabelecimento de diretrizes para o ensino de Matemática no 2º grau foi o primeiro passo dado, visando à concretização da nova Proposta Curricular, num trabalho que teve como característica fundamental a participação do professor de Matemática neste processo.

A elaboração dessas diretrizes resultou das discussões efetuadas nos vários encontros realizados em 84 e dos quais participaram professores representantes das várias regiões do Estado, Equipe Técnica de Matemática da CENP e professores do 3º grau.

O documento Diretrizes para o Ensino de Matemática no 2º grau - versão preliminar foi divulgado para a rede, em abril/1985 e discutido por uma amostra de professores em encontros efetuados em nível de DE, durante esse ano.

Nos encontros realizados em outubro/1985 na CENP, com a participação de um professor III de Matemática por DE, foram avaliados os resultados dessas discussões, examinadas as sugestões feitas, bem como, discutidas questões relativas ao conteúdo e à metodologia.

Como resultado desse trabalho foi elaborado o documento "Questões para orientar a reflexão sobre o planejamento de ensino de Matemática para o 2º grau - 1986", com a finalidade de socializar as questões tratadas nesses encontros e estender sua discussão ao maior número possível de professores de Matemática do 2º grau.

Considerando os relatórios enviados por algumas DEs sobre as discussões do referido documento, a Equipe Técnica de Matemática e seus assessores deram prosseguimento à tarefa de elaborar uma versão preliminar da Proposta Curricular de Matemática, que foi discutida por parte dos professores de Matemática do 2º grau em julho de 1987.

A partir da análise que esses professores efetuaram, além daquela feita por professores do 3º grau (UNICAMP, MACKENZIE, PUC), a Equipe Técnica de Matemática da CENP elaborou esta versão, onde alguns assuntos foram ampliados, outros modificados e outros, ainda, incluídos, como é o caso de Matemática Financeira e Potências e Expoentes.

Este documento deverá, a seguir, passar por um processo contínuo de análise e discussão, para que possa ser implantado em 1990.

4 AS PREOCUPAÇÕES METODOLÓGICAS

A participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais da concepção atual de aprendizagem. Esta participação deve porém ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive.

Para tanto, a função do professor deve ser a de orientador da aprendizagem, isto é, a de instigador de idéias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos. Assim, a proposta de desenvolvimento de um tema, com os alunos, pode ter como ponto de partida a colocação de um problema, a partir do qual se iniciará a discussão das idéias centrais do tema em questão, levando em conta os objetivos que se quer atingir.

Por problema, entenda-se uma situação que desafie o aluno a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-la, a buscar novas aplicações de conceitos e a aprofundar a compreensão dos mesmos, a exercitar a criatividade, a generalizar propriedades, a descobrir outras soluções e a discutí-las, verificando as condições para que elas sejam válidas.

A discussão do problema, o levantamento de hipóteses que conduzam à sua solução e a verificação da validade (ou não) destas são ocasiões muito propícias:

- à verbalização, pelo aluno, das observações feitas;

- ao desenvolvimento de uma lógica de raciocínio para defesa de sua opinião e avaliação do ponto de vista apresentado por um colega;

- a um trabalho construtivo com os erros, encarando-os como parte integrante da elaboração do saber matemático, o qual necessita passar por fases de ensaios e erros, por confrontações e por justificações que levam à reformulação do raciocínio e do processo de resolução feitos;

- à verificação da existência ou não de outras soluções.

É dentro deste contexto que se torna importante a utilização dos contra-exemplos, com a findalidade de melhor compreender "o que é" pela contraposição com aquilo que "não é" e o que "vale" a partir do que "não vale", bem como a de evitar precocemente condicionamentos automatizados na aplicação de conceitos estudados.

Uma outra questão a ser considerada é a importância de se propor ao aluno problemas abertos que, dependendo da interpretação ou da imposição de determinadas condições, poderão apresentar diferentes soluções. Ainda mais, os problemas que não têm solução ou mesmo os que apresentam mais de uma, contribuem para que não se instale no estudante a crença de que todo problema tem uma e uma só solução.

A discussão do porquê desta ou daquela solução, da possibilidade ou não de soluções, leva à reflexão sobre os dados e as condições impostas pelo problema (necessários à escolha dos procedimentos que levem a solucioná-lo), bem como à compreensão da linguagem em que estão expressos e a uma certa desenvoltura na utilização da mesma.

Através da discussão de uma situação-problema, um diálogo é instalado entre professor-aluno e aluno-aluno; é através dele que se concretiza um processo de familiarização com os entes e conceitos matemáticos envolvidos e com suas representações, surgindo a necessidade de uma linguagem que favoreça a comunicação das observações feitas, a discussão dos processos de resolução utilizados e os resultados obtidos.

A linguagem utilizada na introdução dos conceitos deve aproximar-se, o mais possível, da linguagem do aluno. Cada conceito precisa ser interiorizado pelos estudantes antes de qualquer tentativa de formalização. Uma linguagem matemática precisa é o fim de um pro cesso de aprendizagem e não o início. Nesse processo, os próprios estudantes podem e devem elaborar algum "dialeto", numa tentativa de se expressar, cabendo ao professor ampliá-lo e aperfeiçoá-lo, na busca de uma linguagem matemática formal.

É conveniente observar que ação e linguagem apóiam-se mutuamente. É o suporte da ação que impede que se construa, logo de início, uma linguagem artificial e vazia. É no cortar um prisma de sabão, com a faca, em três pirâmides, que a fórmula $V = \frac{1}{3}A \times h$ passa a ter significado para o aluno.

Como no 1º grau, também no 2º, o processo ensino-aprendizagem em Matemática não pode prescindir do concreto, embora "concreto" não deva ser confundido com "manipulável". Há níveis de concreto, bem como níveis de abstração e o limite entre os dois é difuso.

O que é abstrato numa fase pode ser concreto na seguinte: um desenho, um gráfico, que apresentam um grau de abstração ao representarem uma situação real num momento da aprendizagem, podem vir a ser o concreto em outro momento.

Na busca das concretizações, pode-se correr o risco, muitas vezes, de artificializar aplicações concretas, bem como de tentar partir constantemente do concreto manipulável. No entanto, é preferível que alguns conteúdos se justifiquem simplesmente como suporte para outros, do que buscar aplicações artificiais. Enquanto que em Geometria, por exemplo, é fundamental um trabalho inicial com objetos concretos, manipuláveis para, só posteriormente, estabelecer relações métricas e geométricas entre seus elementos, em Trigonometria, a concretização do ciclo trigonométrico, por meio de um objeto manipulável, seria um artificialismo.

Em alguns momentos dos cursos de função, probabilidade, trigonometria, logarítmo e exponencial, por exemplo, o uso de calculadoras se faz necessário. Libertando o aluno dos cálculos (que são elementos secundários em alguns exercícios), ele poderá se preocupar com as propriedades dos conceitos em estudo.

Ao longo do 2º grau, devem-se aproveitar as oportunidades para que seja efetuado um trabalho com expressões algébricas, resolução de equações, sistemas, no sentido de aperfeiçoar o traquejo algébrico do aluno e a habilidade na resolução de problemas. Esta preocupação deve estar sempre presente no espírito do professor, quando do planejamento das atividades a serem propostas para seus alunos.

Em resumo:

- A participação do aluno deve ser garantida na elaboração de seu conhecimento.

- Os programas devem ser entendidos como veículos, instrumentos de trabalho e não fins em si mesmos.

- O programa deve ser significativo para o aluno.

- O tratamento significativo dos conteúdos pressupõe que se devam levar em conta a realidade do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento biológico, psicológico e intelectual.

- Tratar significativamente um conteúdo matemático significa dar ênfase ao processo de construção de um conceito.

- Os problemas propostos devem servir inicialmente para gerar a construção de conceitos, bem como, para posteriormente, sintetizar as idéias já trabalhadas.

- O ensino de Matemática deve buscar as concretizações (sem artificialismos), como também conduzir à passagem do imediatamente sensível para o abstrato.

- Um conteúdo não precisa ser necessariamente exaurido num único período de tempo a ele destinado na programação. Sua retomada deve garantir o aprofundamento, ampliação e aperfeiçoamento das idéias nele contidas.

- A aprendizagem em Matemática deve levar a um processo de construção de uma linguagem, e nunca a apresentá-la, já de início, na sua forma final, acabada, sintética e formalizada.

- O ensino de Matemática não deve processar-se isoladamente dentro do currículo, uma vez que a maior parte dos problemas que os alunos são levados a resolver é de natureza interdisciplinar.

5 A ESCOLHA DOS CONTEÚDOS NESTA PROPOSTA

Um problema enfrentado inicialmente foi a seleção dos conteúdos a serem desenvolvidos ao longo do 2º grau. Esta se tornou uma decisão fundamental, considerando-se a diversidade do número de aulas destinadas à Matemática em cada escola e a necessidade de garantir um programa significativo seja para as escolas com 2 aulas semanais em cada série, seja para aquelas que têm 5 aulas.

Num programa significativo, os conteúdos escolhidos devem ser aqueles que melhor contribuam para a formação geral do adolescente, proporcionando oportunidades para o desenvolvimento da observação, descoberta de propriedades, para o estabelecimento de relações entre tais propriedades, para aquisição de uma linguagem, para fazer generalizações, para projetar. Isto é, tratar significativamente um conteúdo, é dar ênfase ao processo de construção de um conceito, considerando as etapas pelas quais o aluno deverá passar, a fim de reconstruí-lo; com isso, deslocamos o uso dos resultados prontos para o processo de construção deles.

Este trabalho contribui para que o aluno desenvolva sua capacidade de resolver problemas, tanto na própria Matemática quanto em sua vida.

Estamos considerando como conteúdos significativos ao aluno, também aqueles que realimentam a própria Matemática e os que favorecem a interdisciplinaridade. Enquanto a significância destes está vinculada à aquisição de uma desejável visão global dos problemas, a significância dos outros contribui para a continuidade de estudos.

Tendo em vista essas questões, sugerimos que o aluno trabalhe prioritariamente com os seguintes conteúdos: Funções, Geometria, Trigonometria, Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria Analítica, Matemática Financeira e Estatística.

De modo geral, em MATEMÁTICA, o conteúdo a ser ensinado é um veículo para o desenvolvimento de uma série de idéias fundamentais, convenientemente articuladas, tendo em vista as grandes metas que são a instrumentação para a vida e o desenvolvimento do raciocínio. Tanto as idéias fundamentais, como são, por exemplo, as de proporcionalidade, equivalência, semelhança, como o raciocínio combinatório ou mesmo os processos de generalização têm, muitas vezes, como suporte, mais de um assunto das listas de conteúdos. No entanto, tais idéias, raciocínios, ou processos é que são fundamentais e não os assuntos em si.

Por outro lado, um conteúdo não precisa ser necessariamente exaurido num único período de tempo a ele destinado. Parte dele poderá ser desenvolvido num momento para atingir determinados objetivos, podendo-se retomá-lo em outros níveis de abordagem, aprofundando-o ou complementando-o, para atingir outros objetivos. É, por exemplo, o caso de muitos conceitos de Geometria que são retomados quando do desenvolvimento de outros temas em Funções, Trigonometria e Geometria Analítica.

5.1 Quadros I e II

Tendo em vista a diversidade de números de aulas destinadas a Matemática nas grades curriculares das escolas do 2º grau da rede, sugere-se a seguinte distribuição dos conteúdos, considerando as opções para 2 ou 4 aulas semanais.

QUADRO I

Opção de distribuição de conteúdos para escolas com 2 ou 3 aulas semanais ao longo das três séries do 2º grau

1ª série	2ª série	3ª série
- Função - Trigonometria no triângulo - Potências e expoentes	- Análise Combinatória - Probabilidade - Geometria	- Geometria - Geometria Analítica - Matemática Financeira

Tradicionalmente, as propostas das mais variadas programações para o ensino de Matemática no 2º grau têm priorizado alguns conteúdos além desses. No entanto, as escolas que optaram por uma grade curricular com 2 ou 3 aulas semanais nas três séries, tendo em vista a sua clientela, a comunidade na qual está inserida e a disponibilidade de recursos humanos, objetivaram, para seus alunos, uma formação mais voltada para a área de humanas. Nesse caso, o estudo das variações exponenciais é mais útil como ferramenta para Ciências Humanas do que Números Complexos, por exemplo.

Num currículo com tal grade e, portanto, com tal opção, o tema Potências e Expoentes, por exemplo, é fundamental, pois é com essa ferramenta que o professor faz um trabalho de desmitificação da proporcionalidade, quando aborda crescimento populacional, juros compostos, etc.

Assim, o professor de Matemática dessa escola poderá desenvolver idéias fundamentais como proporcionalidade, não-proporcionalidade, equivalência e semelhança, problemas de contagem, como também poderá iniciar processos de generalização sem a preocupação do "detalhe do detalhe" e do aprofundamento axagerado, sem perder de vista o que de essencial é necessário para a formação geral do jovem neste nível.

É preciso que, mesmo com duas aulas de Matemática por semana, fique garantida a construção dessas idéias centrais, pelo aluno, o que efetivamente contribui para sua autonomia intelectual, enfim, para sua formação. Os conteúdos sugeridos nesse primeiro quadro deverão servir de ferramentas para tal construção.

É verdade que a formação desejada para este aluno é tal que ele adquira um certo grau de criticidade, participação, criatividade e iniciativa.

Não é uma lista de conteúdos que garante tais dimensões para esta formação, mas sim, a forma como esses conteúdos, ou outros, serão trabalhados. O que precisamos garantir, contudo, é a viabilização de idéias fundamentais, através de conteúdos adequados.

O que deve ter de especial o tratamento dado à Geometria, de modo que garanta "verdadeiramente" seu aprendizado, a iniciativa, criatividade e autonomia do aluno?

Algumas respostas a essa pergunta já foram discutidas no item anterior, outras, que constam do Quadro III, serão apresentadas em considerações feitas na parte final desta Proposta.

Sugerimos, a seguir, uma distribuição de conteúdo para os cursos com 4 ou 5 aulas/semana, ao longo dos três anos do 2º grau.

QUADRO II

1ª série	2ª série	3ª série
- Função - Trigonometria no triângulo - Potências e expoentes - Sistemas lineares	- Trigonometria da 1ª volta - Análise combinatória - Probabilidade - Geometria	- Geometria Analítica - Matemática Financeira ou Estatística - Geometria - Rudimentos de Cálculo

O aprofundamento dos conteúdos propostos, bem como a introdução de novos conteúdos dependerá sempre da disponibilidade e necessidade da clientela.

5.2 Considerações sobre os conteúdos

Nesta Proposta, alguns aspectos são considerados relevantes no tratamento dos tópicos: Funções, Trigonometria no triângulo retângulo, Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria, Potências e Expoentes e Matemática Financeira.

O enfoque metodológico sugerido procura operacionalizar as Diretrizes, para o ensino de Matemática no 2º grau, já explicitadas neste documento.

Não faz parte desta Proposta a operacionalização dos tópicos Estatística, Trigonometria da 1ª volta, Sistemas Lineares, Rudimentos de Cálculo.

Uma orientação para o desenvolvimento de Sistemas Lineares e Estatística pode ser encontrada na publicação "Subsídios para Implementação da Proposta Curricular de Matemática para o 2º grau" (1980 e 1982) - volumes 1 e 2, respectivamente.

Um trabalho com Seqüências poderá ser feito de acordo com o que está sugerido no volume 1 da publicação citada no parágrafo anterior, caso o número de aulas permita e o interesse da clientela o determine.

Quanto a Sistemas Lineares, seu estudo objetiva fornecer ao aluno uma ferramenta eficaz para a resolução de problemas que, no 2º grau, quase sempre são equacionados através de sistemas lineares que, em geral, são, no máximo, de 3 equações e de 3 incógnitas.

No Quadro II, esse conteúdo é proposto para a 1ª série dos currículos com 4 ou 5 aulas/semana. No entanto, é um tema que deve ser retomado ao longo das séries subseqüentes, localmente, como ferramenta de resolução de problemas propostos para desenvolver outros temas.

Não acreditamos que no 2º grau se deva aprender como resolver ou mesmo como discutir Sistemas Lineares como um assunto fechado em si mesmo. Aprender a resolvê-los deverá decorrer da necessidade de solucionar alguma situação-problema. É construtivo propor, portanto, inicialmente, aos alunos a resolução de sistemas, sem trabalhar previamente qualquer tipo de técnica.

É possível que para sistemas lineares com até 3 equações e 3 incógnitas, utilizando o que conhecem sobre o assunto, apresentem um caminho para sua resolução. O excesso de mão-de-obra que esse trabalho apresenta para o aluno é um bom ponto de partida para a introdução de alguma técnica que sistematize e simplifique seu processo de resolução.

Assim, o que se pretende é que o aluno domine algum processo que lhe permita determinar as soluções de sistemas lineares, levando em conta o conhecimento que ele acumulou sobre o assunto até esse momento.

No 1º grau, o estudante inicia a aprendizagem deste tópico com sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas. As justificativas dos processos de resolução desses sistemas baseiam-se nos Princípios Aditivo e Multiplicativo da igualdade e na simultaneidade das soluções das equações que os constituem.

É levando em conta esses princípios que propomos a resolução de sistemas por meio de escalonamento (processo baseado na combinação linear das equações do sistema).

O que é fazer combinações lineares de equações de um sistema, senão aplicar, da maneira que mais nos convém, os princípios Aditivo e Multiplicativo da igualdade para resolvê-lo?

Não há necessidade, portanto, de que o aluno passe por um curso de Matrizes para posteriormente resolver sistemas lineares. Por que um aluno do 2º grau deveria, então, aprender Matrizes?

Talvez porque ele vá precisar desse conhecimento em algum curso do 3º grau como por exemplo Matemática, Física, Computação, Engenharia. Ora, nesse caso, "matrizes" deveria ser trabalhado como tema específico desses cursos, mesmo porque a parcela de alunos do 2º grau que se dirige a esses cursos é muito pequena em relação ao número de estudantes desse grau de ensino. Além disso, aprender Matrizes no 3º grau, num curso específico, seria mais significativo para o aluno, uma vez que essa aprendizagem decorre da necessidade de resolver alguma situação, além de ser mais rápida.

Um outro tema que vem sendo tradicionalmente ensinado nas escolas do 2º grau é Números Complexos. Os objetivos, que se tem pretendido alcançar com o ensino desse tema, têm variado muito pouco:

- perceber porque aparece um novo conjunto de números;
- operar com números complexos na forma a + bi;
- representar números complexos geométrica e trigonometricamente.

Tal argumentação é muito mais do matemático do que do educador.

Ainda nesse caso temos um estudo fechado em si mesmo. Quando muito, no 2º grau, esses números seriam utilizados na pesquisa de raízes de Equações Algébricas.

Poderíamos até ir um pouco mais além, levantando outros argumentos para a inclusão de Números Complexos nas aulas de Matemática do 2º grau:

- precisamos de números complexos para "resolver" circuitos elétricos de correntes alternadas;
- números complexos são empregados no estudo da curvatura da asa de um avião, etc.

Entendemos que nesses casos os Números Complexos seriam tratados localmente na medida da necessidade.

Então, quais seriam as idéias, os procedimentos ou os processos fundamentais que o professor de Matemática deveria trabalhar no 2º grau e cujos desenvolvimentos são obtidos mais significativamente através do conteúdo Números Complexos? A idéia de proporcionalidade ou a não-proporcionalidade? A contagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório? Processos de generalização? Construção de uma linguagem formal?

Na verdade, há outros conteúdos, que não Números Complexos mais adequados e significativos para o que se pretende com o ensino de Matemática no 2º grau. A Geometria, por exemplo, se presta, muito mais adequadamente, ao desenvolvimento de processos de generalização do que números complexos. Parece que está mais ao alcance do aluno, dessa faixa etária, uma "axiomática geométrica" do que uma "axiomática algébrica". O nível de abstração exigido para a formação de um corpo de postulados e teoremas, mesmo que locais, dentro da Geometria, é menos complexo do que aquele exigido para a caracterização dos Números Complexos.

Em outras palavras, o entendimento dos axiomas que envolvem ponto, reta e plano são mais facilmente assimilados, pois existe uma riqueza de exemplos concretos que podemos associar a eles (axiomas), ao contrário da axiomatização algébrica.

E o que dizer do ensino de Polinômios e Equações Algébricas?

O argumento que considera esses conteúdos como ferramentas para resolver problemas não é válido no ensino do 2º grau, pois, nes se grau, raras são as situações em que precisamos resolver equações de grau maior ou igual a 3.

A sugestão é que não se faça no 2º grau um semestre de estudo sobre polinômios e equações algébricas, mas que eles sejam tratados à medida que haja necessidade e sempre que possível recorrendo à fatoração e a casos já conhecidos.

Do ponto de vista da formação do indivíduo nesse grau de ensino, não há porque trabalhar equações de 4º, 5º, 6º graus, só para determinar suas raízes, se elas não traduzem uma situação-problema que tenha, nesta altura, algum significado para o estudante.

É claro que existe, por parte do aluno, uma certa curiosidade em torno das raízes de uma equação algébrica de grau maior que 2. Afinal de contas, já que existe um "jeitão" de resolver equações do 1º grau, uma fórmula para resolver equações do 2º grau, como fica a resolução de uma equação do 3º ou 4º grau? Há fórmula?

Aí é que um pouco de história resolve o problema. Nada impede que se conte e mostre um pouco das aventuras de "Cardanos" e "Tartaglias" dentro deste tema, no século do descobrimento do Brasil.

Outro tema bastante polêmico é Cálculo no 2º grau. Consideramos que um curso de Cálculo deve decorrer do estudo feito com funções, passar pelas questões que envolvem taxa de variação de grandezas e encaminhar prioritariamente para a resolução de problemas práticos que envolvem máximos e mínimos. Os conceitos de limite e de derivada, porém, serão trabalhados intuitivamente.

Quanto às questões a serem tratadas em Trigonometria, consideramos que, em nível do 2º grau, as idéias que têm maior significado na formação de nosso aluno são aquelas que fundamentam as relações entre medidas de lados e ângulos agudos de um triângulo retângulo, bem como sua "extensão" para a 1ª volta, no ciclo trigonométrico.

Nessa "extensão", na verdade, está embutida uma dificuldade que consta em associar a cada número real um ponto da circunferência do ciclo e, sem seguida, associar a cada ponto da circunferência a medida de um determinado segmento, em função do raio da mesma que é tomado como unidade de medida de comprimento (é como se estivéssemos estabelecendo um sistema de coordenadas sobre uma circunferência). Essa dificuldade fica muito exacerbada quando o ensino de trigonometria da 1ª volta enfatiza a questão da medida dos ângulos e arcos que fatalmente estão associados aos pontos do ciclo. Podemos fazer a Trigonometria da 1ª volta sem sequer falar em graus ou radianos.

Consideramos que o estudo das funções trigonométricas no círculo e suas propriedades deva ser feito no 3º grau, em cursos específicos que delas necessitam, quando os conceitos de função, continuidade, periodicidade estiverem mais amadurecidos em nossos alunos.

O ensino de Seqüências, tradicionalmente, tem sido feito de maneira isolada, fechado em si mesmo, quase como um exercício acadêmico. Por outro lado, nos perguntamos: o que tem levado os professores a ensinar seqüências no 2º grau? O fato de ser um assunto fácil de aprender? É um assunto que pode ser ensinado de forma mecânica com alguma facildiade? O aluno precisa de treino algébrico?

Para desenvolver tudo isso, poderíamos escolher outros conteúdos, que não Seqüências. Caso as condições da clientela e tempo sejam favoráveis, o estudo de Seqüências pode ser proveitoso e motivador, desde que a ele não se dedique um longo tempo e que seja motivado por algum tipo de situação e integrado com outros assuntos, como, por exemplo, funções do 1º grau, exponencial, juros compostos, geometria métrica, trigonometria.

6 OBSERVAÇÕES FINAIS

Evidentemente, esta Proposta não tem a intenção de ser um livro. Ela deve ter o papel de subsidiar o professor, que ainda terá o trabalho de complementá-la, preenchendo as lacunas, a partir de sua própria experiência didático-pedagógica.

Desta Proposta constam sugestões para o tratamento de alguns conteúdos. O que se teve em vista ao operacionalizar tais temas foi a proposição de uma nova abordagem para os mesmos, abordagem esta que deve assegurar as questões anteriormente colocadas, bem como a criação de um ambiente de maior comunicação em sala de aula, a qual permitirá maior participação do aluno na elaboração de seu conhecimento.

7 QUADRO III

7.1 Funções

I - Familiarização com o conceito de função.	A. Primeiras noções de função. B. Gráficos e representações por conjuntos.
II - Uma primeira sistematização do conceito de função.	A. Definição de função. B. Estudo gráfico da variação de uma função.
III - Estudo das funções: constante, do 1º grau e do 2º grau.	A. Classificação: funções constantes, do 1º e 2º graus. B. Estudo das funções constantes. C. Estudo das funções do 1º grau. D. Estudo das funções do 2º grau. E. Convenções utilizadas nas aplicações de função. F. Máximos e mínimos.
IV - Gráficos de outros tipos de funções.	

CONTEÚDO/OBJETIVO	OBSERVAÇÕES/SUGESTÕES

I. FAMILIARIZAÇÃO COM O CONCEITO DE FUNÇÃO

A. Primeiras noções de funções

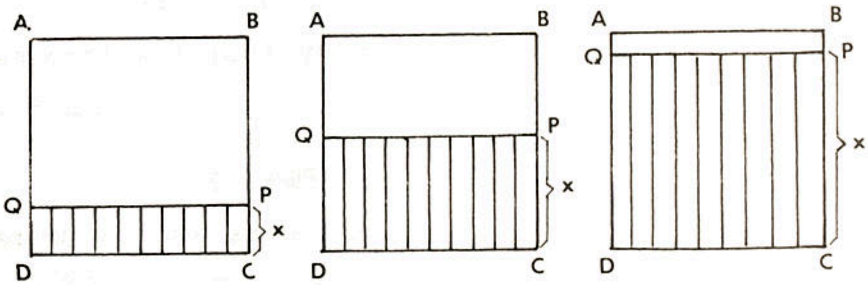
Objetivo: Expressar a dependência de uma variável em relação a outra. Construir tabelas.

As primeiras noções de funções são introduzidas a partir de situações que têm significado para o aluno, significado esse que pode ter sua compreensão facilitada por meios visuais.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1

No quadrado ABCD, com lados de 5 cm, o ponto P se movimenta sobre o lado BC, sem atingir suas extremidades. Considere então um retângulo móvel QPCD. Sua área y (em cm²) depende de x, medida de PC (em cm).



a) Atribuindo a x os valores 1, 2, 3 e 4, quais são os correspondentes valores de y? Faça uma tabela com esses valores de x e y.

b) Qual é a expressão que dá y a partir de x?

Nesse exemplo, o aluno (vendo que para $x = 2$ a área é 5×2, que para $x = 3$ é 5×3, etc.) é solicitado a fazer uma generalização. Para isso, o mesmo tipo de cálculo feito numericamente deve agora ser indicado por variáveis: $y = 5x$.

Daremos a seguir outras situações como a do exemplo 1. Elas são situações dinâmicas e apresentam duas variáveis com significados "palpáveis" para o aluno. Por isso, ele facilmente percebe que existe uma dependência entre as variáveis, sendo solicitado a expressá-la algebricamente. Relacionar duas variáveis é uma ação de grande importância e, além disso, na busca dessa relação, gradativamente vão sendo reunidos os fundamentos que, adiante, darão substância à definição de função.

Exemplo 2

Aqui mencionaremos algumas variações do exemplo 1. Naquela situação as mesmas perguntas podem ser feitas quando:

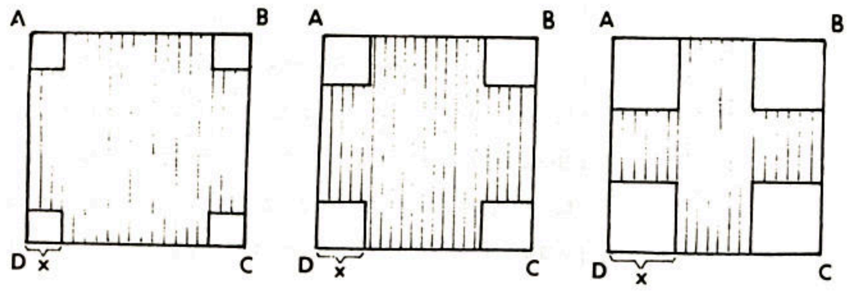
a) y indica o perímetro do retângulo (em vez da área);

b) x indica a medida de BP (em vez da medida de PC);

c) y indica a área do trapézio APCD (em vez da área do retângulo).

Exemplo 3

A figura indica um quadrado ABCD, com lados de 10 cm. Nos quatro cantos há quadrados iguais (que não têm pontos comuns), que têm um tamanho variável; seus lados medem x cm. Sendo y a área (em cm^2) da cruz assinalada na figura, responda às mesmas perguntas do exemplo 1. (Observe que se pode responder primeiro a pergunta b, para utilizar essa resposta na construção da tabela do item a.)



Exemplo 4

As mesmas perguntas do exemplo 1 podem ser feitas na seguinte situação: uma pessoa viaja a 80 km/h, durante x horas, percorrendo y quilômetros.

Exemplo 5

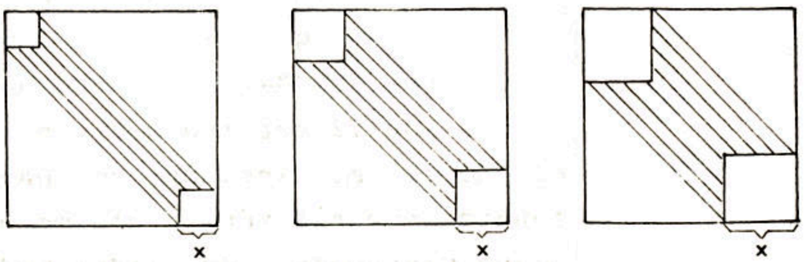
As mesmas perguntas do exemplo 1 podem ser feitas para um quadrado variável que:

a) tem perímetro de x cm e área de y cm²;

b) tem área de x cm² e perímetro de y cm.

Exemplo 6

A figura indica um quadrado com lados de 10 cm. Em dois cantos opostos desenham-se dois quadrados iguais (que não têm pontos comuns) que têm um tamanho variável: seus lados medem x cm. Sendo y a área (em cm²) do polígono assinalado, responda às perguntas do exemplo 1.



A linguagem utilizada pode ser bem simplificada. No entanto, no processo de aprendizagem, é fundamental o aluno ler e interpretar, tanto a teoria quanto o enunciado dos problemas. Assim, muitos dos exemplos que apresentaremos descrevem situações e seus enunciados não são padronizados, nem curtos. Quanto às nomenclaturas específicas de funções, elas podem ser introduzidas gradativamente. No estudo das situações mencionadas nos exemplos anteriores, certamente surgirão momentos adequados para denominarmos de domínio o conjunto de todos os valores de x para os quais a situação descrita é possível (mantendo seu significado); e de conjunto-imagem o dos correspondentes valores de y.

Exemplo 7

Nos exemplos anteriores, encontrar o domínio e o conjunto-imagem relativos a cada situação.

Observe que o domínio, o conjunto-imagem e a lei de associação, que exprime y a partir de x, são obtidos pelo aluno de acordo com a situação mencionada.

B. Gráficos e representações por conjuntos
Objetivo: Entender as diversas representações gráficas de uma função

Estudaremos os seguintes elementos relativos às funções: tabelas, gráficos cartesianos, representações por conjuntos (esquemas de flechas ou sagitais) e leis de associação. Estudaremos ainda as suas inter-relações.

Exemplo 8

Um jogo chamado War pode ter de 3 a 6 participantes. Um deles é sorteado para distribuir 42 cartas (ou 42 territórios). Ele dá uma carta para si próprio e, a seguir, uma para cada jogador, no sentido horário, até a última carta. O número y de jogadores prejudicados (que saem inferiorizados quanto ao número de territórios) é função (depende) do número x de participantes. Faça:

a) a representação por conjuntos (esquema de flechas) dessa função;
b) o gráfico dessa função.

Exemplo 9

Num fliperama cada ficha custa Cz$ 5,40, mas comprando-se 3 fichas de uma só vez, paga-se Cz$ 12,00 por elas. Por isso, quando se compra x fichas de uma só vez, o preço médio y pago por ficha é uma função de x.

Como exemplo, vamos calcular o valor de y quando x = 4. O preço de 4 fichas é 12,00 + 5,40 = = 17,40. O preço médio por ficha é 17,40 : 4 = 4,35. Então, quando x = 4, tem-se y = 4,35.

a) Faça o esquema por flechas da função, supondo que seu domínio seja o conjunto dos números naturais de 1 a 10.
b) Faça o gráfico cartesiano correspondente a esse esquema.
c) Explique em poucas palavras por que o preço médio por ficha sempre é inferior a Cz$ 4,26, quando se compra mais de 10 fichas de uma só vez.

Exemplo 10

Nos exemplos de 1 a 6, a partir dos pontos obtidos na tabela, construir os gráficos de y em função de x.

No exemplo 10, a idéia é construir os gráficos ligando convenientemente os pontos fornecidos pela tabela e, quando necessário, atribuir ainda outros valores a x.

II. UMA PRIMEIRA SISTEMATIZAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Na construção de gráficos é bom alertar o aluno para o respeito à escala escolhida. Marcando os pontos sem atentar para essa escala, é evidente que os gráficos saem distorcidos; o que deveria ser uma reta acaba ganhando uma curvatura; parábolas viram retas; etc.

A. *Definição de função*

Objetivo: Estabelecer o conceito de função

Nos exemplos anteriores, encontramos domínios, conjuntos-imagem e leis de associação. Esses exemplos podem ser generalizados por meio de um novo conceito: a função de A em B.

Esse conceito é, no entanto, mais abstrato que cada um dos exemplos vistos. Um modo de defini-la é como sendo qualquer associação entre os elementos dos conjuntos A e B de modo que a cada elemento de A corresponda um único elemento de B.

Depois da definição, podemos dar mais um passo no aprimoramento da nomenclatura e simbologia utilizadas, passando a usar termos como "a imagem de 3", que é indicada por f(3).

Exemplo 11

Nos exemplos de 1 a 6, seja f a função que a x associa o correspondente valor de y. Obtenha f(2), mencionando qual é seu significado concreto em cada situação (no exemplo 1, f(2) indica a área do retângulo QPCD em cm², quando PC mede 2 cm).

No estudo das funções, muitas dificuldades do aluno devem-se à falta de conhecimentos na decodificação dos símbolos utilizados. Observe que a situação do exemplo 1, bastante simples, é retratada pela função assim denotada:

$$f: \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 5\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 25\} \text{ dada por } f(x) = 5x$$

Insistimos, pois, que as nomenclaturas e simbologias sejam feitas, gradativamente, ao longo do processo, e que o professor esteja atento para as dificuldades do aluno no que se refere a esta questão.

Cabe comentar aqui a questão da revisão de conceitos estudados no 1º grau, como, por exemplo, a resolução de equações do 1º e 2º graus. Essa revisão pode ser integrada ao curso de funções, sem necessidade de interrompê-lo, como nos mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 12

No exemplo 1, responda:

a) Qual é o valor de f(2)?

b) Qual é a área do retângulo quando x = 4?

c) Para que valor de x a área do retângulo é $7{,}5\ cm^2$?

d) Para que valor de x se tem $f(x) = 18$?

Exemplo 13

Nos exemplos de 2 a 6, podem ser feitas perguntas análogas às do exemplo 12.

Exemplo 14

Uma função de domínio R é dada por $f(x) = 3x + 7$.

a) Calcule $f(8)$.

b) Encontre os valores de x tais que $f(x) = 1$.

Exemplo 15

As mesmas solicitações do exemplo anterior podem ser feitas para funções dadas por $f(x) = x^2 - 6x + 6$ ou por $f(x) = \dfrac{5x - 80}{x}$, neste último caso com domínio R^*.

Exemplo 16

Numa escola particular os alunos pagam Cz$ 1200,00 por mês. Quando um pai tem mais de um filho na escola, existe um desconto; cada filho a mais na escola dá um desconto de Cz$ 50,00, tanto na sua mensalidade como na de seus irmãos (sendo 2 filhos, cada um paga Cz$ 1150; sendo 3, cada um paga Cz$ 1100; etc.).

Considere a função f que, ao número x de filhos, associa o valor que o pai gasta com a soma das mensalidades.

a) Calcule $f(5)$.

b) Escreva a lei de associação de f.

c) Para que valores de x se tem $f(x) = 7500$? O que isso significa no contexto do problema?

d) As mensalidades de algum pai podem ser de exatamente Cz$ 6000,00?

B. Estudo gráfico da variação de uma função

Objetivo: Reconhecer graficamente intervalos em que uma função é crescente (decrescente). Reconhecer pontos de máximo (mínimo), relativos e absolutos.

Mesmo num estágio inicial, em que os gráficos são construídos "ponto a ponto", é muito importante a interpretação gráfica (o que significam as subidas do gráfico? as descidas?). Esse estudo pode ser evidenciado em algumas situações concretas: no exemplo 1, pelo próprio movimento da figura, pode-se perceber que a função é crescente; no exemplo 3, que é decrescente.

Quando encontramos uma função que é crescente em certos trechos e decrescente em outros, temos uma oportunidade para rever (ou introduzir) rapidamente a simbologia dos intervalos, bem como seu significado quanto à situação retratada por essa função.

Cada situação reflete-se no seu gráfico, mas a interpretação pode ocorrer no sentido contrário: a análise do gráfico nos traz conhecimentos da situação.

O estudo gráfico também pode ser feito com funções abstratas. Nesse caso, a lei de associação e o domínio da função são dados (inquestionáveis) do exercício.

Exemplo 17

Nos exemplos de 1 a 6, verificar (pela visualização dos movimentos, pelas tabelas ou pelos gráficos) se as funções são crescentes ou decrescentes.

Exemplo 18

Uma função f de domínio R é dada por $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Faça uma tabela e, a partir da mesma, um esboço do gráfico de f.

b) Com o esboço, responda: em que intervalo f é crescente (decrescente)? Existem pontos de máximo (mínimo)?

c) No gráfico, onde se vê a representação de f(1)?

d) Graficamente, como podem ser obtidos os valores de x tais que f(x) = 5?

e) No gráfico, quantos pontos têm a ordenada - 5?

f) Qual é o conjunto-imagem de f?

Exemplo 19

No exemplo 16, o professor pode pedir a cada aluno que calcule o valor de y no caso em que x é o número do próprio aluno e, depois, organizar uma tabela e construir o esboço do gráfico: há um 1º trecho em que f é crescente e outro em que é decrescente.

a) Qual é o conjunto de valores de x que pertencem ao 1º trecho? E ao outro?

b) No contexto do problema, qual é o significado do 1º trecho? E do outro?

c) Dentre os possíveis pagamentos dos pais existe um que é máximo. De quanto é esse pagamento? Quantos filhos tem esse pai na escola?

d) Supondo que o regulamento dos descontos também seja válido para pais com um número fabuloso de filhos, o que significa o trecho do gráfico de f que é posterior ao ponto em que ele intercepta o eixo dos x?

III. ESTUDO DAS FUNÇÕES: CONSTANTES DO 1º e 2º GRAUS

A. Classificação: funções constantes do 1º e 2º graus

Quando a lei de associação é dada no exercício, a classificação em questão é imediata (exemplo: classifique a função dada por y = 3x + 5). Torna-se interessante, no entanto, quando classificamos funções que retratam situações.

Objetivo: Reconhecer, pela lei de associação, se uma função é constante do 1º grau, do 2º grau ou se é de outro tipo.

Exemplo 20

Nos exemplos de 1 a 6, incluindo-se ainda a variante do exemplo 3 em que y indica o perímetro da cruz (em vez da sua área), classificar as funções em: constantes, do 1º grau, do 2º grau ou "de outro tipo".

B. Estudo das funções constantes

Objetivo: Reconhecer uma função constante; construir seu gráfico e utilizá-la como instrumento de análise de situações.

Exemplo 21

No exemplo 3, fazer o gráfico do perímetro da cruz em função de x.

Exemplo 22

Um automóvel foi abandonado, em estado lamentável, no acostamento de uma estrada, no km 20 (e lá vai ficar).

a) Faça o gráfico da posição do automóvel em função do tempo.
b) Faça o gráfico da velocidade do automóvel em função do tempo.

Exemplo 23

Faça o gráfico de $y = 2$, no caso em que o domínio da função é:

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}_+$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

C. Estudo das funções do 1º grau. Gráfico da função do 1º grau.

Objetivo: Entender por que os gráficos de função do 1º grau são retos. Construir gráficos de funções do 1º

A explicação de que "todos os pontos do gráfico de $y = ax + b$ estão alinhados (numa mesma reta)" pode ser dada de modo relativamente simples, sem constituir propriamente uma demonstração, mas sendo útil à compreensão do aluno.

O primeiro passo é considerar diversas tabelas em que os valores de x estão igualmente espaçados (em PA), como por exemplo, 1, 2, 3 e 4. Em algumas dessas tabelas, os valores de y estão igualmente espaçados (como, por exemplo, 5, 7, 9 *grau. Utilizar esses gráficos como instrumento de análise.*

e 11), em outras não (como, por exemplo, 3, 5, 9 e 12). Quando fazemos os gráficos correspondentes a essas tabelas, não é difícil constatar que (estando igualmente espaçados os valores de x), se os valores de y estiverem igualmente espaçados, os pontos estão alinhados; e que se os valores de y não estiverem igualmente espaçados, não ocorre o alinhamento.

<u>Exemplo 24</u>

Quais das tabelas a seguir determinam 4 pontos que estão alinhados? (Tente responder sem marcar os pontos no gráfico.)

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

x	y
1	2
2	5
3	9
4	10

x	y
1	10
2	7
3	4
4	1

<u>Exemplo 25</u>

Ligando em linha reta cada ponto obtido da tabela abaixo com o seguinte, em que trecho do gráfico a declividade é maior? (Tente responder sem marcar os pontos no gráfico.)

x	y
1	1
2	4
3	9
4	10

O segundo passo é considerar uma lei de associação como y = 5x. Atribuindo a x os valores 1, 2, 3 e 4 (que estão igualmente espaçados), é fácil ver que para y são obtidos valores consecutivos "da tabuada do 5", logo igualmente espaçados (de 5 em 5). Esses pontos, portanto, estão alinhados numa reta (que é o gráfico de $y = 5x$, com domínio R).

O terceiro passo é comparar as tabelas de $y = 5x$ e $y = 5x + 2$, por exemplo. Considerando que nessas tabelas os valores atribuídos a x sejam 1, 2, 3 e 4, já sabemos que, na primeira tabela, os valores de y estão espaçados de 5 em 5. Então, acrescentando-se 2 a cada um desses valores de y, na segunda tabela, os valores de y também estarão espaçados de 5 em 5. Os pontos obtidos, portanto, da segunda tabela estão alinhados numa reta (que é o gráfico de $y = 5x + 2$, com domínio R).

O próximo passo é considerar outros exemplos de leis de associação do tipo $Y = ax + b$, como $y = 3x - 1$ ou $y = -7x + 40$, para se perceber que é válida a seguinte generalização: quaisquer que sejam a e b, atribuindo a x os valores 1, 2, 3 e 4 (que estão igualmente espaçados), os correspondentes valores de y (obtidos por $y = ax + b$) estão igualmente espaçados. Esses pontos, portanto, estão alinhados.

Finalmente, nas tabelas consideradas, podem ser feitas extrapolações (atribuindo a x valores como 5, 6, 7, etc.) ou interpolações (3,2; 3,4; 3,6; 3,8) observando-se que, sempre que os valores de x estiverem igualmente espaçados, os correspondentes valores de y ficarão igualmente espaçados, ocorrendo então o alinhamento dos pontos em questão.

Com essa explicação, chega-se a uma conclusão teórica muito importante: gráficos de funções do 1º grau sempre são retas (quando o domínio é R). Conhecido esse resultado, ao construirmos gráficos de funções do 1º grau, não precisamos mais atribuir inúmeros valores a x. Basta atribuir dois valores (distintos, é claro) a x, calcular os valores de y e marcar esses pontos no gráfico: a reta determinada pelos dois pontos é o grá fico em questão.

Cabe mencionar ainda que a explicação anterior destaca o significado gráfico da declividade (inclinação ou coeficiente angular) da reta. Por exemplo, o gráfico de $y = 5x + 2$, enquanto avança 1 unidade para a direita, sobe 5 unidades. Já o gráfico de $y = 3x + 11$, enquanto avança 1 unidade para a direita, sobe apenas 3 unidades. Portanto, a primeira dessas retas tem maior inclinação que a segunda.

Exemplo 26

Nos exemplos 1, 2 e 4, depois de encontrar as leis de associação, faça os gráficos de y em função de x.

Exemplo 27

Uma caixa com capacidade de 1 000 ℓ continha 100 ℓ de água quando foi aberta uma torneira. Ela lança no tanque 50 ℓ de água por minuto.

Faça o gráfico do volume de água contido no tanque, em função do tempo, desde o instante em que a torneira foi aberta até o enchimento do tanque.

Exemplo 28

Um carro vai do km 60 de uma estrada até o km 660, andando constantemente a 30 km/h. Faça o gráfico da:

a) posição do carro em função do tempo;
b) velocidade do carro em função do tempo.

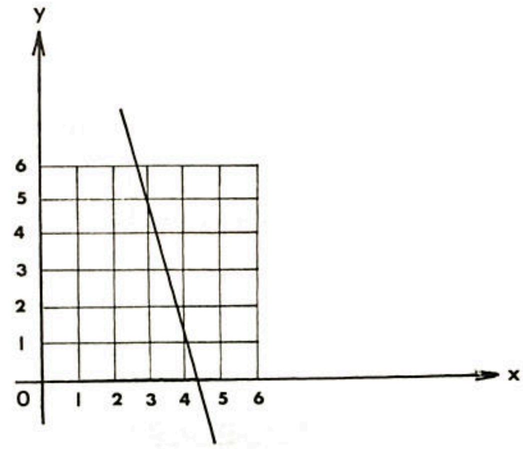
Exemplo 29

Faça o gráfico de $y = 3x + 2$, com domínio R.

Mesmo sem demonstrar que tóda reta não vertical do plano cartesiano é dada por uma lei do tipo y = ax + b, podemos mencionar a validade desta proposição e utilizá-la na resolução de exercícios em que são dadas retas do plano cartesiano, sendo pedidas as leis de associação correspondentes. Um modo de resolver esse tipo de exercício é considerar que a lei é do tipo Y = ax + b e fazer as substituições correspondentes a dois pontos distintos da reta. Recai-se então em um sistema de 2 equações nas incógnitas a e b.

Exemplo 30

Dê a lei de associação da função que tem como gráfico a reta indicada abaixo.



Funções do 1º grau crescentes e decrescentes.
Objetivo: Entender porque uma função dada por y = ax + b é crescente quando a > 0, e decrescente quando a < 0.

Esta explicação também pode ser dada de modo relativamente simples, sem constituir propriamente uma demonstração, mas sendo útil à compreensão do aluno.

Podemos considerar inicialmente a função dada por y = 4 + 7x. Nela é fácil perceber que quanto maior for o valor atribuído a x, maior é o correspondente valor de y. Por isso, essa função é crescente. Pode-se perceber ainda que é válida a seguinte generalização: toda função dada por Y = ax + b, com a > 0, é crescente.

Da mesma forma, na função dada por y = = 30 - 2x, é fácil perceber que, quanto maior for o valor de x, maior é o valor a ser subtraído de 30, e, portanto, menor é o valor de y. Por isso, essa função é decrescente. Pode-se perceber ainda que é válida a seguinte generalização: toda função dada por $y = ax + b$, com $a < 0$ é decrescente.

Cabe observar ainda que qualquer função dada por $y = ax + b$, com $a = 0$, é constante.

Exemplo 31

Nos exemplos 1, 2, 4, 27 e 28, verifique se a função é crescente, decrescente ou constante, a partir:

a) do contexto mencionado;
b) da lei de associação;
c) do gráfico.

Equações e inequações do 1º grau.
Objetivo: Resolver equações e inequações do 1º grau.

Os exemplos 12 a 16 envolvem equações, algumas do 1º grau. Com pequenas modificações poderão envolver inequações do 1º grau.

Exemplo 32

a) Na situação do exemplo 1, para que valores de x a área do retângulo é maior que 7,5 cm²?
b) Fazer perguntas análogas à anterior nos exemplos 2 a 4, particularmente no exemplo 2b, pois, nesse caso, para que a área do retângulo seja maior que 7,5 cm², x deve ser menor que 3,5 (devendo também ser positivo).

Exemplo 33

Resolva as inequações e, depois, teste alguns dos valores obtidos, verificando que eles satisfazem à inequação.

a) $2x - 8 > 0$	e) $-3 - x < 0$
b) $2x + 8 > 0$	f) $-3x < 0$
c) $-2x + 8 > 0$	g) $-3x + 22 < -2x - 8$
d) $-2x - 8 > 0$	h) $-3x + 22 < 2x - 8$

D. Estudo das funções do 2º grau. Gráfico da função do 2º grau.
Objetivo: Construir gráficos de funções do 2º grau, utilizando-os como instrumento de análise de situações.

Podemos partir de alguns exemplos, como $y = x^2$ e $y = -x^2$. Atribuindo a x valores como -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3, fazemos uma tabela.

É bom observar que muitos alunos, ao preencherem essas tabelas, erram nos sinais dos valores de y, podendo-se então fazer uma rápida revisão de algumas convenções utilizadas na potenciação.

Numa primeira leitura das tabelas podemos notar que, embora os valores de x estejam igualmente espaçados, o mesmo não acontece com os valores de y. Portanto esses gráficos não são retas. Construindo esses dois gráficos, podemos mencionar que são parábolas, destacando algumas de suas características, principalmente quanto ao eixo de simetria vertical. Depois, com novos exemplos de funções dadas por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, podemos afirmar (sem demonstrar) que o gráfico de qualquer função desse tipo é uma parábola com eixo de simetria vertical; que a concavidade é voltada para cima quando $a > 0$, e para baixo quando $a < 0$.

<u>Exemplo 34</u>

Nos exemplos 3, 5a, 6 e 16, faça um esboço do gráfico de y em função de x.

<u>Exemplo 35</u>

Faça um esboço do gráfico de $y = x^2 - 2x - 8$, com domínio R.

Equações e inequações do 2º grau.
Objetivo: Interpretar o gráfico de uma função do 2º grau.

Com essa interpretação, o aluno deve, primeiro, reconhecer que as raízes da função do 2º grau obtidas pela fórmula de Baskara são as abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo dos x; segundo, resolver graficamente inequações do 2º grau.

Exemplo 36

No exemplo 6, para que valores de x a área do polígono é:

a) 28 cm²?

b) maior que 28 cm²?

c) menor que 17 cm²?

Exemplo 37

No exemplo 16, um pai gasta mais de Cz$ 6000,00 com as mensalidades. Quantos filhos ele pode ter na escola?

Exemplo 38

Resolva a inequação e, depois, teste alguns dos valores obtidos:

a) $x^2 - 7x + 10 < 0$

b) $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

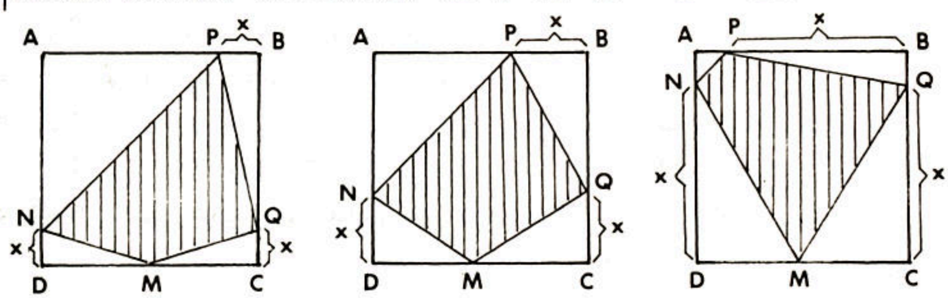
c) $x^2 + 7 > 5x$

d) $3x^2 + 15x + 13 > 4x^2 + 5x + 38$

Exemplo 39

Neste exemplo vamos encontrar funções constantes do 1º grau, do 2º grau e de outros tipos. Por isso, ele pode ser proposto para se fazer uma síntese desses tópicos. Além disso, ele se presta a uma revisão do teorema de Pitágoras e das propriedades da radiciação.

A figura indica um quadrado ABCD com lados de 10 cm. O ponto M está a 5 cm, tanto de C quanto de D, e os segmentos PB, QC e ND têm uma mesma medida variável, de x cm ($0 < x < 10$).



Classifique em função constante do 1º grau, do 2º grau ou de outro tipo:

a) a área (em cm²) do polígono MNPQ em função de x;

b) a medida (em cm) de PN em função de x;

c) a área (em cm²) do triângulo MCQ em função de x;

d) a área (em cm²) do triângulo PBQ em função de x;

e) a medida (em cm) de MQ em função de x.

Exemplo 40

Faça os gráficos das quatro primeiras funções do exemplo anterior.

E. Convenções utilizadas nas aplicações das funções. Objetivo: Reconhecer as principais características de uma função, quando as variáveis envolvidas são indicadas por outras letras.

As funções matemáticas são aplicáveis a inúmeras situações em que as variáveis não costumam ser indicadas por x e y. O aluno deve ter claro que o uso de outras letras no lugar de x e y não altera as características da função.

Exemplo 41

Classifique (em função constante do 1º ou do 2º grau) uma previsão do tipo de gráfico:

a) da área A (em cm²) de um quadrado em função da medida ℓ (em cm) de seus lados, sabendo que $A = \ell^2$;

b) da medida d (em cm) da diagonal de um quadrado em função da medida ℓ (em cm) de seus lados, sabendo que $d = \ell\sqrt{2}$;

c) da área A (em cm²) de um círculo em função da medida R (em cm) do raio, sabendo que $A = \pi R^2$.

Exemplo 42

Este e o próximo exemplo aplicam-se à Física.

Uma partícula se movimenta em linha reta com velocidade constante v (em m/s), tendo passado pela posição s_0 (em m) no instante $t = 0$. Nessas condições sabe-se que sua posição $\underline{s}$ (em m) no instante $\underline{t}$ (em s) é dada por $s = s_0 + vt$.

Faça um esboço do gráfico da:

a) posição $\underline{s}$ em função do tempo;

b) velocidade $\underline{v}$ em função do tempo.

<u>Exemplo 43</u>

Uma partícula se movimenta em linha reta com aceleração constante $\underline{a}$ (em m/s²), tendo passado pela posição s_0 (em m) com velocidade v_0 (em m/s) no instante $t = 0$.

Nessas condições sabe-se que sua posição $\underline{s}$ (em m) no instante $\underline{t}$ (em s) e sua velocidade $\underline{v}$ (em m/s) nesse instante são dadas por $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ e $v = v_0 + at$.

Faça um esboço do gráfico da:

a) posição $\underline{s}$ em função do tempo;

b) velocidade $\underline{v}$ em função do tempo;

c) aceleração $\underline{a}$ em função do tempo.

<u>Exemplo 44</u>

Este exemplo aplica-se à Economia.

Suponha que uma fábrica tenha uma despesa (custo) fixa mensal de 200 mil cruzados (com aluguel, salários, impostos, etc.), além de um custo de 140 cruzados por produto fabricado. Seu custo mensal C é, portanto, função da quantidade q de produtos fabricados naquele mês,

$$C = 200.000 + 140\ q.$$

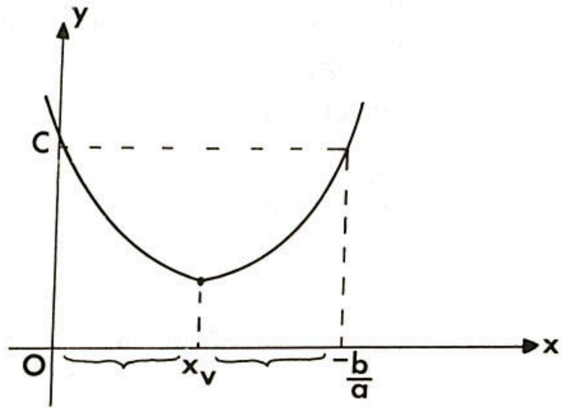
Faça um esboço do gráfico de C em função de $\underline{q}$.

Máximos e mínimos.
Objetivo: Interpretar as coordenadas do vértice da parábola em problemas de máximo ou mínimo.

A dedução de que as coordenadas do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ são $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, pode ser feita a partir da observação de que essa parábola admite um eixo de simetria vertical (passando pelo vértice).

O segundo passo consiste em procurar todos os pontos da parábola $y = ax^2 + bx + c$ que têm ordenada $\underline{c}$. Para isso, vamos substituir $\underline{y}$ por $\underline{c}$ na lei $y = ax^2 + bx + c$: $ax^2 + bx + c \to ax^2 + bx = 0 \to x(ax + b) = 0 \to x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.

Temos, assim, dois pontos da parábola com ordenada $\underline{c}$: um tem abscissa 0 e o outro tem abscissa $-b/a$.



O terceiro passo, levando em conta a simetria da parábola, é observar que a abscissa x_v do vértice da parábola é a média de 0 e $-b/a$, logo $x_v = -b/2a$.

O último passo é substituir x por x_v para obter a ordenada y_v do vértice:

$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \to$$
$$\to y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

<u>Exemplo 45</u>

a) O vértice da parábola $y = 2x^2 - 5x + 3$ é seu ponto de máximo ou de mínimo? Quais são as coordenadas desse ponto?
b) Responda as mesmas perguntas do item $\underline{a}$ para $y = -2x^2 - 12x$.

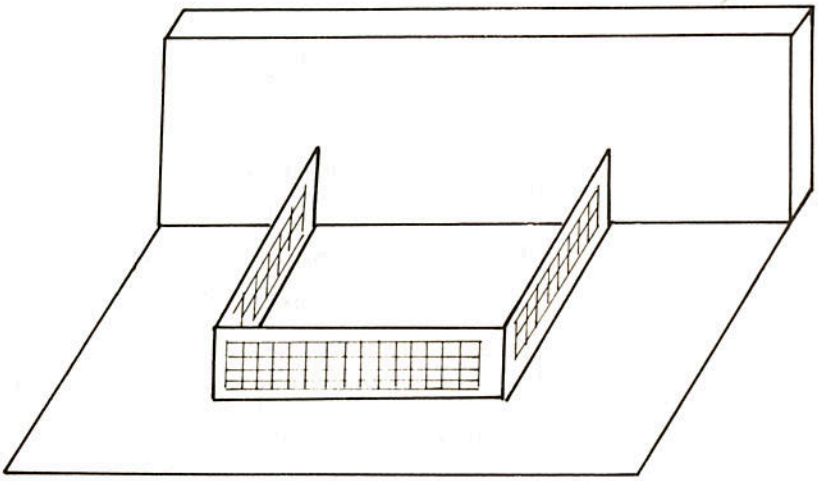
Exemplo 46

a) No exemplo 6, para que valor de x a área do polígono é máxima? Qual é essa área máxima?

b) No exemplo 16, qual é o gasto máximo de um pai com as mensalidades?

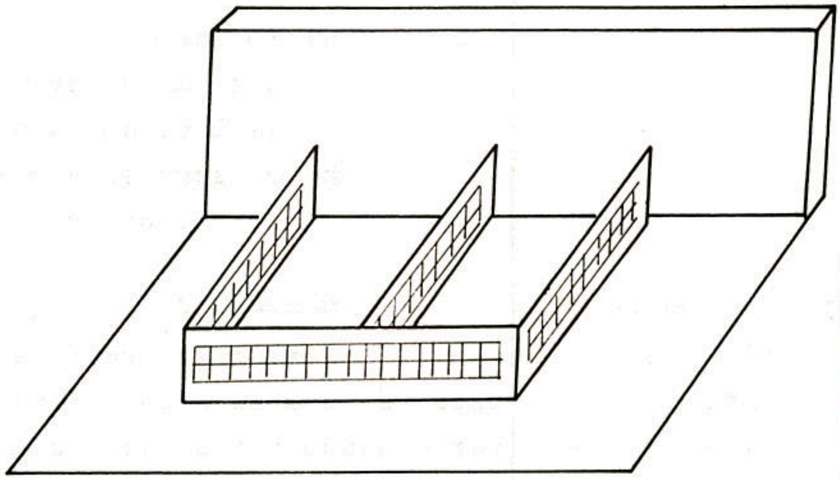
Exemplo 47

Para fazer um galinheiro, uma pessoa vai usar um muro existente no local e 12 m de tela que serão usados conforme a indicação da figura, acompanhando 3 lados de um retângulo. Ela pretende que a área cercada seja a maior possível. Qual é essa área máxima e quais são as dimensões desse galinheiro?



Exemplo 48

Resolva o exemplo anterior supondo que uma parte da tela também será usada, perpendicularmente ao muro, para dividir o galinheiro em duas partes.



Exemplo 49

No exemplo anterior seria preferível usar a tela divisória paralelamente ao muro?

Exemplo 50

Este exemplo aplica-se à Economia. É conveniente compará-lo ao exemplo 44.

Suponha que uma fábrica de certo produto tenha um custo fixo mensal de 200 mil cruzados, além de um custo de 140 cruzados por produto fabricado. Seu custo mensal C é, portanto, função da quantidade q de produtos fabricados naquele mês, sendo dado por:

$$C = 200.000 + 140\ q$$

Por sua vez, a quantidade q de produtos que a fábrica vende mensalmente depende do preço de venda p do produto: quanto maior o preço de venda, menor a quantidade de produtos vendidos. Suponha que essa função seja dada por $q = 6000 - 10p$. Dessa relação obtemos que $p = 600 - \frac{q}{10}$.

Nessas condições, a receita R e o lucro L (mensais) da fábrica são dados por:

$R = q\ .\ p = q(600 - \frac{q}{10})$, logo $R = -\frac{q^2}{10} + 600q$;

$L = R - C = (-\frac{q^2}{10} + 600q) - (200.000 + 140q)$, logo

$L = -\frac{q^2}{10} + 460q - 200.000$.

Quantos produtos devem ser vendidos mensalmente para que:

a) A receita seja máxima? Neste caso, qual será o preço do produto?

b) O lucro seja máximo? Neste caso, qual será o preço do produto?

IV. GRÁFICOS DE OUTROS TIPOS DE FUNÇÕES

Objetivo: Construir e interpretar gráficos de funções do tipo $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, etc.

Uma vez trabalhados os gráficos das funções do 1º e do 2º graus, a construção e interpretação de gráficos de outros tipos de funções levam o aluno a ampliar e a aprofundar as principais idéias envolvidas neste tema.

Exemplo 51

Um retângulo tem área de 12 cm²; seja x a medida (em cm) da largura e y a medida (em cm) do comprimento do retângulo:

a) Quantos retângulos você pode obter nas condições do problema?

b) Atribua cinco valores para x; quais os valores correspondentes de y?

c) Monte uma tabela com esses valores de x e y.

d) Qual é a expressão que dá y em função de x?

e) Esboce o gráfico dessa função.

f) Mostre no gráfico em que momento esse retângulo se torna um quadrado.

Exemplo 52

Faça os gráficos das seguintes funções de domínio R*.

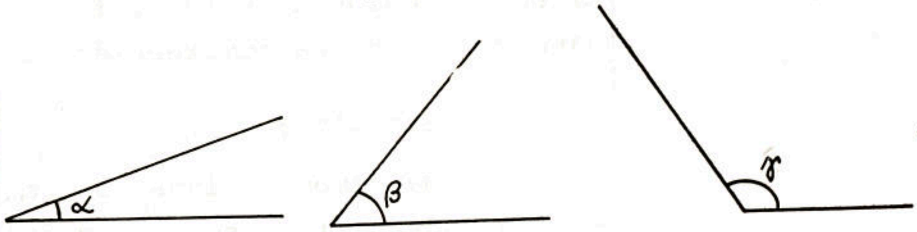
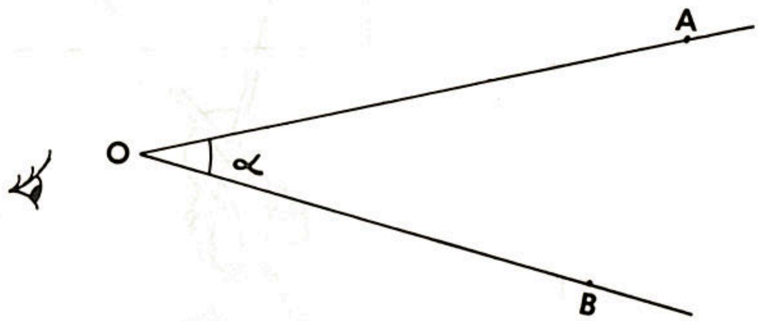
a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = -\frac{1}{x}$

c) $y = \frac{1}{x^2}$

7.2 Trigonometria

I - MEDIDA DE ÂNGULO	Medir ângulos com transferidor e com um teodolito simples construído com canudinhos de refrigerante.
II - TANGENTE	Construir triângulos retângulos para obter a tangente dos seus ângulos. Construir uma tabela de tangentes e utilizá-la na resolução de problemas envolvendo triângulos, algumas vezes inacessíveis.
III - SENO E COSSENO	Construir triângulos retângulos a partir de um ângulo dado, para obter senos e cossenos. Utilizar esses valores na resolução de problemas envolvendo triangulação.
IV - SENO, COSSENO, TANGENTE E ELEMENTOS DE GEOMETRIA	Explicitar relações entre seno, cosseno, tangente nas figuras geométricas planas e não planas, trabalhando com a álgebra de radicais, calculadora e cálculos aproximados.
V - CICLO TRIGONOMÉTRICO	Ampliar o conceito de seno, cosseno e tangente para ângulos de 0° a 360°.
VI - TRIÂNGULOS QUAISQUER	Adaptar os conceitos trigonométricos a triângulos quaisquer, pela decomposição destes em triângulos retângulos.

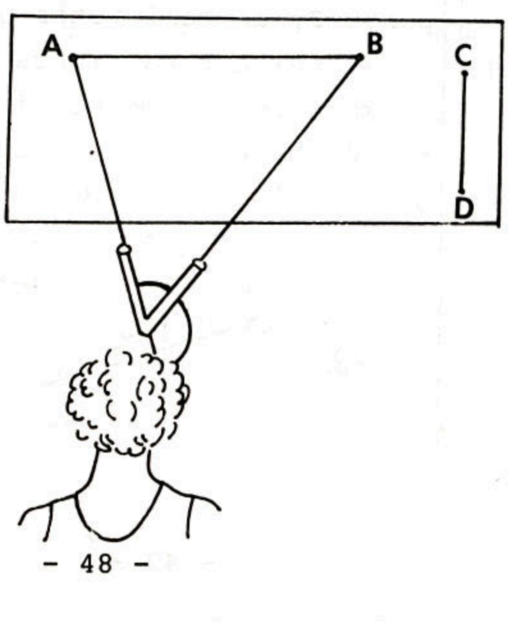
CONTEÚDO/OBJETIVO	OBSERVAÇÕES/SUGESTÕES
I. MEDIDA DE ÂNGULOS *Objetivo: Saber utilizar o transferidor*	Vamos supor conhecidas as noções de ângulo e sua medida em graus. Evidentemente, pode-se fazer uma rápida revisão desses temas ao se iniciar o estudo da Trigonometria. Aqui, queremos destacar que o aluno deve aprender a usar o transferidor. Os exemplos operacionais, nesse caso, são muito simples. <u>Exemplo 1</u> Medir os ângulos α, β e γ.  <u>Exemplo 2</u> Usando seu transferidor, construa (desenhe) um ângulo de: a) 40^{o} b) 65^{o} c) 145^{o}
Ângulos de visada *Objetivo: Reconhecer e medir ângulos (imaginários) usados na vida prática.*	Se uma pessoa tem seu olho no ponto O e mira (visa) inicialmente um ponto A e depois um ponto B, as semi-retas OA e OB determinam o ângulo α indicado na figura a seguir. Esse ângulo é chamado de ângulo de visada ou, mais precisamente, é o ângulo sob o qual o segmento AB é visto de O. 

Com um transferidor de papelão e dois canudinhos de refresco podemos improvisar um aparelho razoável para medir ângulos de visada. O transferidor de papelão pode ser construído pelo aluno copiando a escala de um transferidor usual (de plástico). Um dos canudinhos será fixado, com dois alfinetes, na reta que passa pelo centro do transferidor de papelão e pela sua marca indicativa de 0^o; o outro canudinho será móvel, podendo girar sobre esse transferidor em torno de uma de suas extremidades, presa com um alfinete no centro do transferidor. Com esse instrumento rudimentar mediremos ângulos de visada, fato esse que poderá ajudar o aluno na compreensão da Trigonometria.

<u>Exemplo 3</u>

Marcamos na lousa os pontos A, B, C e D e os alunos dividem-se em pequenos grupos (os alunos de um mesmo grupo não devem sentar-se em carteiras próximas).

Um aluno do grupo, sentado em sua carteira e auxiliado pelos colegas de grupo, deve medir o ângulo sob o qual ele vê o segmento AB (veja a figura a seguir) e o ângulo sob o qual vê o segmento CD. A seguir, um outro aluno do grupo senta-se nessa mesma carteira e mede os ângulos mencionados. Depois essas operações são repetidas nas carteiras dos outros alunos do grupo.

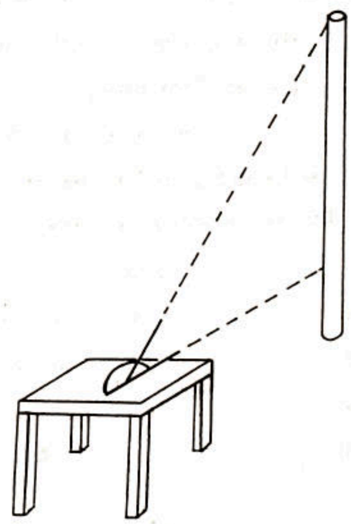


Em vez de marcar pontos na lousa, outra opção é escolher dois pontos estratégicos da classe, como os dois cantos superiores da parede em que está a lousa.

Exemplo 4

Neste exemplo, saímos da classe e procuramos um terreno (rua) horizontal em que haja um poste. Os alunos dividem-se em pequenos grupos.

O primeiro grupo coloca uma pequena mesa a 1 m do poste, o segundo vai colocá-la a 2 m, o terceiro a 3 m, etc. Cada grupo deve medir a altura da mesa e um ângulo de visada. Para medir esse ângulo, o transferidor deve ficar com o canudinho fixo na horizontal (quase que apoiado na mesa), mirando o ponto do poste que está no nível da mesa; o outro canudinho deve mirar a extremidade superior do poste.



É recomendável avisar ao aluno de que, algumas aulas adiante, cada grupo deverá calcular a altura do poste. Para isso deverão manter, em suas anotações, a altura da mesa, a distância da mesa ao poste e a medida do ângulo de visada.

Nesse exemplo, em vez de um poste, podemos considerar a aresta vertical de um edifício.

Nesse caso, o primeiro grupo pode ficar a 10 m da aresta, o segundo a 20 m, etc.

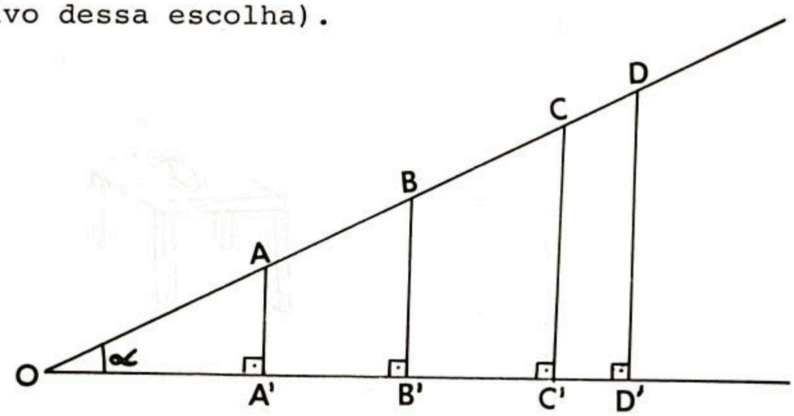
O aluno deve perceber que é possível medir o ângulo sob o qual AB é visto de 0, mesmo quando A e B são pontos muito distantes do observador: o ponto 0 é que deve ser acessível a ele. Assim, podemos solicitar ao aluno que meça um ângulo de visada como esse: 0 é um ponto determinado na janela da classe, e A e B são pontos determinados de dois edifícios (ou de dois morros, etc.).

II. A TANGENTE NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivo: Conhecer o conceito de tangente de um ângulo agudo e aplicá-lo na resolução de problemas práticos.

Vamos iniciar o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo com a tangente devido à sua maior aplicação em problemas onde calculamos distâncias ("inacessíveis") como a altura de um poste, de um edifício ou de um morro. Evidentemente, esse estudo também pode ser iniciado com o seno e/ou cosseno, como usualmente se faz. Além disso, nesse ponto também pode ser feita uma rápida revisão sobre semelhança de triângulos.

Na figura a seguir temos um ângulo α que mede aproximadamente $26,5^{o}$ (logo explicaremos o motivo dessa escolha).



Nessa figura, as medidas em cm dos segmentos OA', OB', OC', OD', A'A, B'B, C'C e D'D são:

OA' = 3; OB' = 5; OC' = 7; OD' = 8; A'A = 1,5; B'B = 2,5; C'C = 3,5 e D'D = 4.

Os triângulos OA'A, OB'B, OC'C e OD'D são triângulos retângulos semelhantes, pois têm ângulos respectivamente congruentes (medindo α, 90° e $90^{\circ} - \alpha$). Por isso, as razões $\frac{A'A}{OA'}$, $\frac{B'B}{OB'}$, $\frac{C'C}{OC'}$ e $\frac{D'D}{OD'}$ são iguais.

A título de comprovação dessa afirmação, observe que:

$$\frac{A'A}{OA'} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{B'B}{OB'} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{C'C}{OC'} = \frac{3{,}5}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{D'D}{OD'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

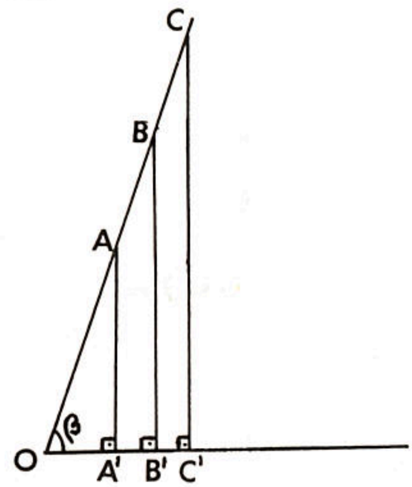
Portanto, nos quatro triângulos retângulos mencionados, os catetos adjacentes a α têm medidas diferentes, o mesmo acontecendo com os catetos opostos a α. No entanto, devido à semelhança desses triângulos, as razões entre medidas dos catetos opostos a α e as dos adjacentes a α são (nos quatro triângulos) iguais.

Na figura abaixo temos agora um ângulo β medindo aproximadamente $71{,}5^{\circ}$. Analogamente ao caso anterior, as razões $\frac{A'A}{OA'}$, $\frac{B'B}{OB'}$ e $\frac{C'C}{OC'}$ são iguais. Neste caso, temos:

$$\frac{A'A}{OA'} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{B'B}{OB'} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3$$

$$\frac{C'C}{OC'} = \frac{6}{2} = 3$$

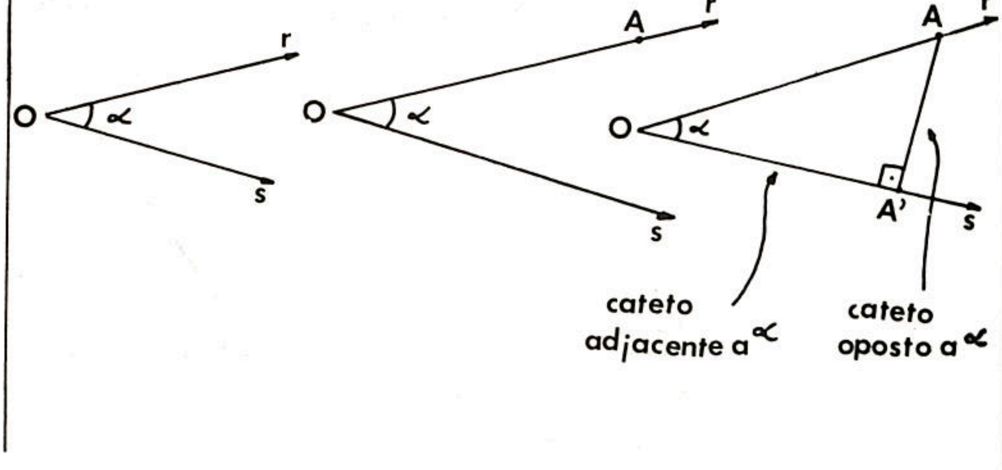


Com esses dois exemplos pode-se perceber que a razão entre as medidas do cateto oposto a um ângulo e do cateto adjacente a ele não depende do fato de se escolher um triângulo retângulo com as medidas dos lados maiores ou menores: depende, isso sim, da medida do ângulo em questão. Essa razão, que depende do ângulo, é chamada de tangente desse ângulo. Assim, num triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos não é uma medida visível no mesmo, é a razão (numa ordem determinada) entre as medidas dos catetos (note que os ângulos α e β anteriores têm respectivamente tangentes 1/2 e 3; suas medidas, de aproximadamente $26,5^{o}$ e $71,5^{o}$ foram escolhidas devido à particularidade dos valores de suas tangentes).

Vejamos a definição de tangente de um ângulo agudo α. Seja α um ângulo agudo ($0^{o} < \alpha < 90^{o}$) de vértice 0 e cujos lados são as semi-retas Or e Os. Considera-se na semi-reta r um ponto A, distinto de 0. Determina-se na semi-reta Os o ponto A', de modo que AA' $\perp$ Os. Por definição, a tangente do ângulo α é a razão entre as medidas de AA' e de OA' (nessa ordem).

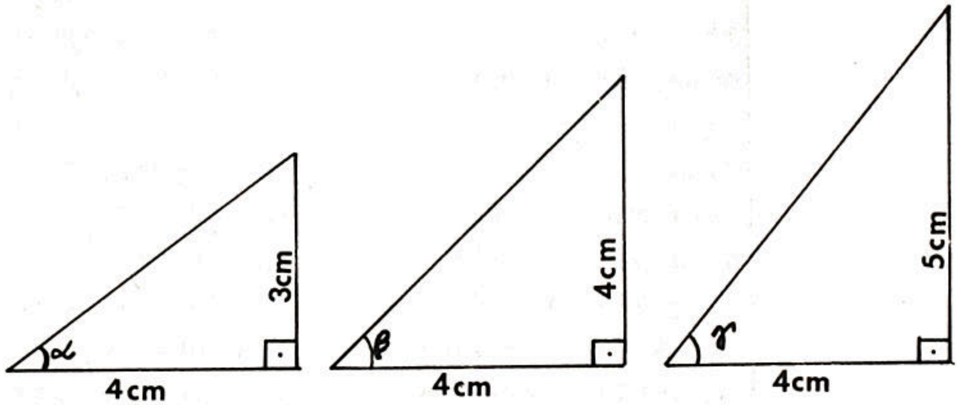
Indicando a tangente de α por tgα, temos:

$$tg\alpha = \frac{A'A}{OA'} \quad \text{ou} \quad tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$



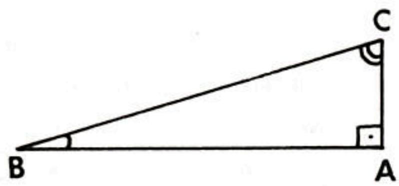
Exemplo 5

Levando em conta as indicações das figuras seguintes, calcule tgα, tgβ e tgγ.



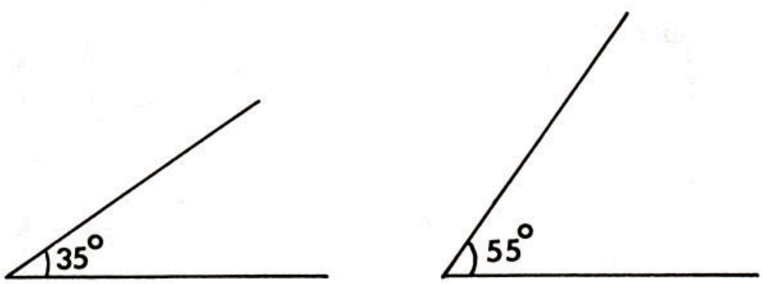
Exemplo 6

No triângulo abaixo, medir os catetos AB e AC e utilizar essas medidas para calcular tg$\hat{B}$ e tg$\hat{C}$.



Exemplo 7

São dados a seguir dois ângulos, um de 35° e outro de 55°. Introduzindo novos segmentos nessas figuras, efetuando medições e cálculos com elas, dê os valores aproximados de tg 35° e tg 55°.



Construção da tabela de tangentes.
Objetivos Construir uma tabela com os valores das tangentes de diversos ângulos.

Esta tabela será construída em aula com a participação dos alunos e posteriormente será utilizada na resolução de problemas. Da tabela podem constar, por exemplo, os ângulos de 5^o, 10^o, 15^o, ... até 85^o. Organize a classe de forma que cada tangente seja obtida por 3 ou 4 alunos diferentes. Utilize a média desses valores.

Cada aluno deve construir com transferidor os ângulos que lhe são devidos, introduzir segmentos convenientes nessas figuras, fazer algumas medições, efetuar cálculos com as medidas obtidas e dar, com aproximação de duas casas decimais (até centésimos, portanto), os valores das tangentes dos ângulos em questão. Feito isso, o professor, dispondo de uma tabela trigonométrica de tangentes ou de uma calculadora que possua a tecla $\boxed{\text{tan}}$, verifica o grau de precisão dos valores obtidos pelos alunos e, quando julgá-los insatisfatórios, pede a eles que refaçam suas tarefas. Normalmente, o professor terá de fazer pequenos ajustes, perfeitamente aceitáveis pelos alunos, para chegar à seguinte tabela:

ângulo	tangente
5^o	0,09
10^o	0,18
15^o	0,27
20^o	0,36
25^o	0,47
30^o	0,58
35^o	0,70
40^o	0,84
45^o	1,00
50^o	1,19
55^o	1,43
60^o	1,73
65^o	2,14
70^o	2,75
75^o	3,73
80^o	5,67
85^o	11,43

Na construção dessa tabela, o professor pode aceitar que as divisões sejam feitas com calculadoras ou pode sugerir ao aluno que escolha o cateto adjacente com uma medida que facilite as divisões, como 4 cm ou 10 cm, por exemplo.

Nos próximos exemplos utilizaremos a tabela de tangentes. Como o valor da tangente relaciona as medidas dos catetos, conhecido um ângulo de um triângulo retângulo (e portanto conhecida a sua tangente) e a medida de um cateto, pode-se calcular a medida do outro cateto. Para não ter de usar sempre valores artificiais e para que os exercícios não se tornem maçantes, recomendamos que, nas suas resoluções, o aluno utilize uma calculadora.

Exemplo 8

a) Num triângulo ABC tem-se AB = 4 cm, $\hat{B} = 40^{\circ}$ e $\hat{A} = 90^{\circ}$. Calcule a medida de AC (usando a tabela trigonométrica).

b) Num triângulo ABC tem-se AC = 4 cm, $\hat{B} = 40^{\circ}$ e $\hat{A} = 90^{\circ}$. Calcule a medida de AB (usando a tabela trigonométrica).

Nesse último exemplo, sendo x e y as medidas (em cm) respectivamente pedidas nos itens a e b, temos:

$$\text{tg } 40^{\circ} = \frac{x}{4} \Longrightarrow 0{,}84 = \frac{x}{4} \Longrightarrow AC \cong 3{,}36 \text{ cm}$$

$$\text{tg } 40^{\circ} = \frac{y}{4} \Longrightarrow 0{,}84 = \frac{4}{y} \Longrightarrow AB = 4{,}76 \text{ cm (aproximadamente)}$$

Como se vê, recaímos em equações simples do 1º grau, e na própria resolução do exercício podemos rever rapidamente esse tema. Além disso, podem ser comentadas propriedades, também simples, tais como: o produto de um número positivo a por um número positivo e menor que 1 é um número menor que a; o quociente de um número positivo a por um número positivo e menor que 1 é maior que a.

O exemplo seguinte propicia uma rápida revisão do teorema de Pitágoras. Além disso, sugerimos que, devido aos cálculos envolvidos, o aluno possa utilizar uma calculadora. Pode-se, inclusive, verificar se o aluno sabe utilizar a memória da mesma, para não ter de anotar resultados parciais.

Exemplo 9

Em cada item do exemplo 8, calcule a medida da hipotenusa BC.

No item a é dado que AB = 4 e, no exemplo 8, já vimos que AC = 3,36. Aplicando então o teorema de Pitágoras, temos:

$$(BC)^2 = 4^2 + 3{,}36^2 \Longrightarrow AC = \sqrt{4^2 + 3{,}36^2} \Longrightarrow AC \cong 5{,}22 \text{ cm}$$

Cabe observar ainda que em radicais como $\sqrt{4^2 + 3{,}36^2}$ é muito comum ocorrerem cancelamentos errados dos expoentes com índices, podendo-se então rever as principais propriedades dos radicais. Vemos aí que no caso de $\sqrt{4^2 \cdot 3{,}36^2}$ é válido o cancelamento no sentido de que $\sqrt{4^2 \cdot 3{,}36^2} = 4 \cdot 3{,}36 = 13{,}44$. A própria calculadora pode ser utilizada para se mostrar que $\sqrt{4^2 + 3{,}36^2} \neq 4 + 3{,}36$, isso sem dispensar outras explicações, como contra-exemplos do tipo $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 7$.

Exemplo 10

O professor pode enunciar livremente inúmeros problemas sobre triângulos retângulos em que são dadas a medida de um cateto e de um dos ângulos agudos (escolhendo uma das medidas que integram a tabela) e solicitando a medida do outro cateto e/ou a da hipotenusa.

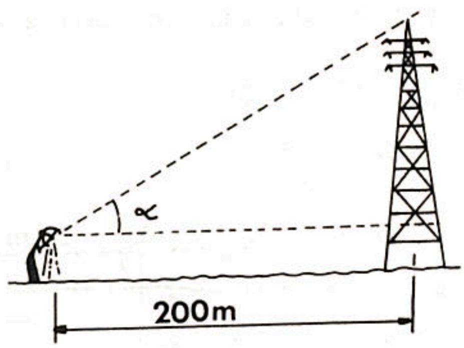
Exemplo 11

Para saber a altura de uma torre, um topógrafo colocou o teodolito a 200 m da torre e mediu o ângulo de visada α indicado na figura, obtendo $\alpha = 25^o$. A luneta do teodolito está a 1,7 m do solo. Calcule a altura (aproximada) da torre (usando a tabela trigonométrica feita em classe).

No exemplo anterior, o topógrafo cria um triângulo retângulo imaginário, indicado na figura. Sendo x a medida (em m) do cateto desse triângulo que é oposto ao ângulo α de 25^o, temos:

$$\text{tg } 25^o = \frac{x}{200} \Longrightarrow 0,47 = \frac{x}{200} \Longrightarrow x = 94$$

A altura da torre é x + 1,7 = 94 + 1,7 = = 95,7 m.



Exemplo 12

Utilizando os dados recolhidos no exemplo 4, solicita-se a altura do poste.

Exemplo 13

Da mesma forma que no exemplo 4, os alunos recolhem no pátio os dados necessários para calcular a altura das janelas das classes do 1º andar (em relação ao solo) e, depois de calcular essa altura, confirmam a validade do resultado obtido medindo diretamente (com uma trena) a altura em questão.

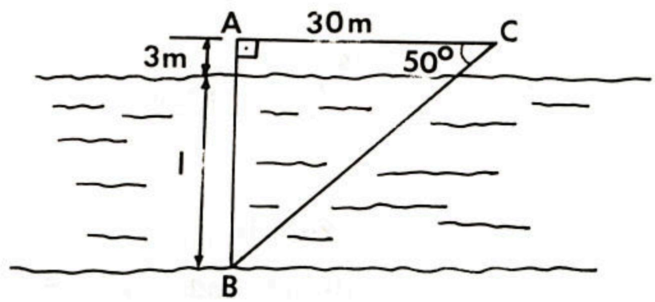
Exemplo 14

Divididos em pequenos grupos, os alunos devem calcular a altura de um determinado edifício, usando a técnica do exemplo 4.

Exemplo 15

Um topógrafo quer calcular a medida da largura de um rio, sem sair da margem em que está. Primeiro ele procura um ponto B de referência na margem oposta (pode ser um toco). Aí, na sua margem, ele escolhe um ponto A de modo que A fique "bem em frente a B", isto é, de modo que AB seja perpendicular às margens do rio. No ponto A ele crava uma estaca e a partir dela puxa uma linha reta perpendicular a AB.

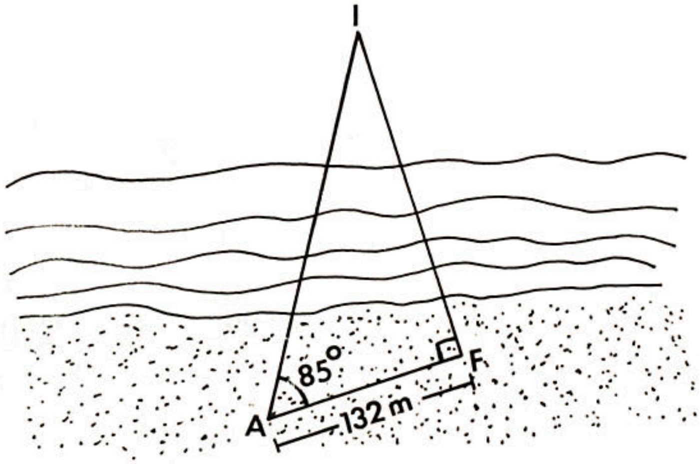
Caminha 30 m nessa direção, chega ao ponto C e daí visa os pontos A e B; o ângulo de visada $A\hat{C}D$ mede 50^o. O ponto A está a 3 m da margem. Calcule a largura aproximada do rio (usando a tabela trigonométrica).



Exemplo 16

Na figura, o ponto I representa uma ilha e o ponto F um farol de navegação, situado à beira-mar. Com trena e teodolito, um topógrafo e seu ajudante desejam calcular a distância do farol à ilha.

Com o teodolito colocado em F, eles obtêm a direção FA, formando 90^o com FI. No ponto A, cravam uma estaca na praia. A distância de F até A é medida com a trena: 132 m. Levando o teodolito para o ponto A, medem o ângulo formado pelas direções AF e AI: 85°. Com esses dados, também você pode calcular a distância entre o farol e a ilha. Qual essa distância?



Exemplo 17

Num triângulo isósceles, a base mede 6 cm e os ângulos da base medem 65°. Calcule a medida da altura do triângulo relativa à sua base (usando a tabela trigonométrica).

Exemplo 18

Num triângulo ABC tem-se $\hat{B} = 75^{\circ}$, $\hat{C} = 40^{\circ}$ e a altura do triângulo relativa a BC mede 5 cm. Calcule a medida de BC (usando a tabela trigonométrica). Nos exemplos 17, 18 e seguintes estamos utilizando noções da geometria plana. À medida que essas noções vão aparecendo, podem ser rapidamente comentadas (por exemplo, a noção das alturas de um triângulo).

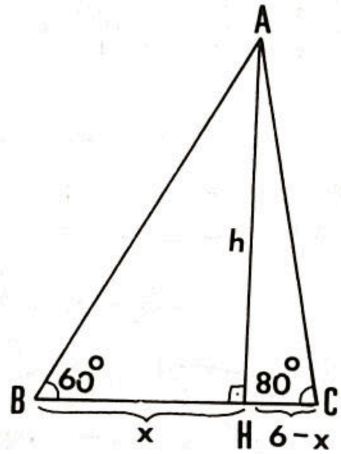
Exemplo 19

Num triângulo ABC tem-se $\hat{B} = 60^{\circ}$, $\hat{C} = 80^{\circ}$ e BC = 6 cm. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado BC (usando a tabela trigonométrica).

Vamos resolver este último exercício. Indicando a medida (em cm) de BH por x, a de HC será 6 - x (pois, BC = 6).

No triângulo retângulo ABH, temos:

$$tg\,60^{\circ} = \frac{h}{x} \Longrightarrow 1,73 = \frac{h}{x}$$



No triângulo retângulo AHC, temos:

$$tg\,80^{\circ} = \frac{h}{6-x} \Longrightarrow 5,67 = \frac{h}{6-x}$$

Recaímos pois num sistema de 2 equações e 2 incógnitas: x e h. Da primeira equação decorre que h = 1,73x e, fazendo esta substituição na segunda equação, temos:

$$5,67 = \frac{1,73x}{6-x} \Longrightarrow x \cong 4,6$$

Como h = 1,73x, temos

$$h = 1,73 \,.\, 4,6 = 7,96$$

Portanto, a altura h relativa ao lado BC mede 7,96 cm, aproximadamente.

Como se vê, esse exercício envolve elementos da geometria e da álgebra, além dos propriamente trigonométricos. Diga-se de passagem que, neste tipo de exercício, o uso de calculadoras não prejudica o raciocínio do aluno (continuando a exigir o conhecimento de propriedades algébricas, etc.), mas, ao contrário, liberta-o dos cálculos (que são elementos de segundo plano do exercício).

Exemplo 20

Na figura dada considere que $\alpha = 35^o$, $\beta = 55^o$ e que BD = 6 cm. Calcule a medida (aproximada) do segmento AC (usando a tabela trigonométrica).

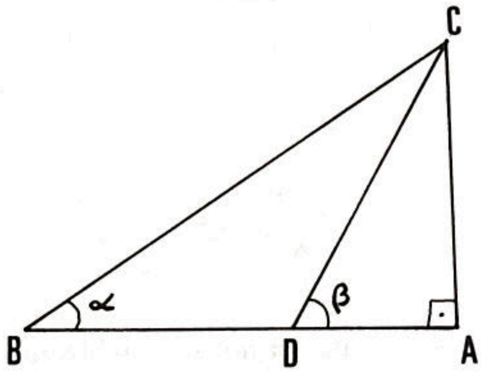
Na resolução desse exercício, sendo $\underline{x}$ a medida (em cm) de AC e $\underline{y}$ a de AD, no triângulo retângulo CAD, temos:

$$\text{tg } \beta = \frac{x}{y} \implies x = 1,43\ y$$

No triângulo retângulo BAC, temos:

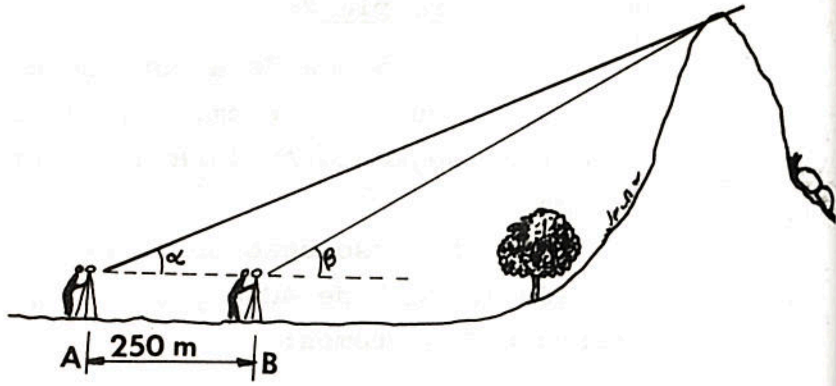
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{BD + y} \implies 0,7 = \frac{x}{6 + y}$$

Recaímos, assim, num sistema de 2 equações a 2 incógnitas (que, aqui, não será resolvido).



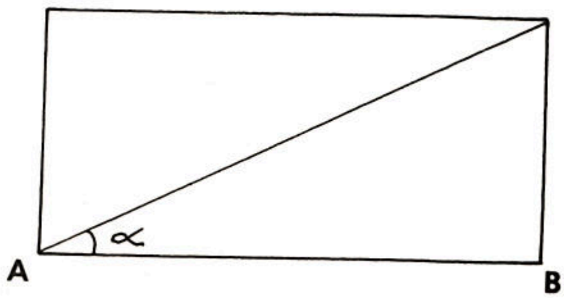
Exemplo 21

Para saber a altura de um morro, um topógrafo colocou o teodolito em A e mediu o ângulo α, obtendo $\alpha = 20^o$. Depois aproximou-se 250 m do morro, colocando o teodolito em B, e mediu o ângulo β, obtendo $\beta = 40^o$. Desprezando a altura do teodolito, calcule a altura aproximada desse morro (usando a tabela trigonométrica).



Exemplo 22

Na figura considere que $\alpha = 35^{\circ}$ e que o retângulo tenha um perímetro de 70 cm. Calcule a medida aproximada do segmento AB (usando a tabela trigonométrica).



III. O SENO E O COSSENO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

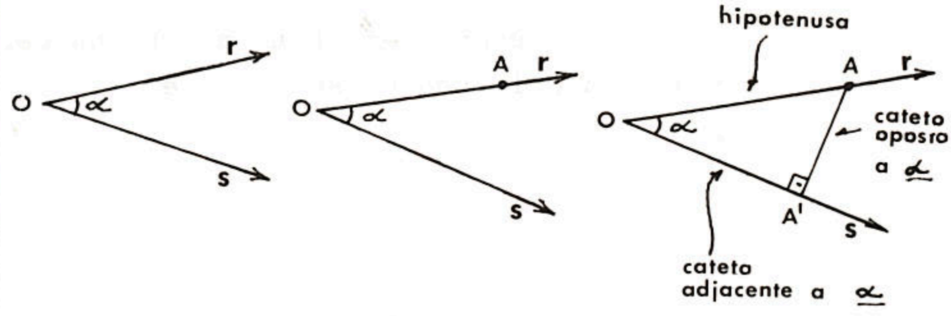
De maneira análoga à tangente, veremos a definição de duas outras razões trigonométricas: o seno e o cosseno.

Seja α um ângulo agudo ($0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$) de vértice 0 e cujos lados são as semi-retas Or e Os. Considera-se na semi-reta r um ponto A, distinto de O. Determina-se na semi-reta Os o ponto A' de modo que $AA' \perp Os$.

Por definição, o seno do ângulo α (que indicaremos por $\text{sen}\,\alpha$) e o cosseno do ângulo α (que indicaremos por $\cos\alpha$) são respectivamente iguais a:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{A'A}{OA} \quad \text{ou} \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

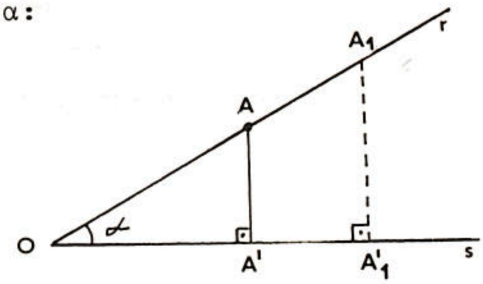
$$\cos\alpha = \frac{OA'}{OA} \quad \text{ou} \quad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$



Observe que se o ponto A for escolhido sobre a reta r, por exemplo, mais distante de 0, as medidas dos catetos e da hipotenusa aumentam numa mesma proporção mantendo-se, portanto, os valores do seno e do cosseno de α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'A}{OA} = \frac{A_1'A_1}{OA_1}$$

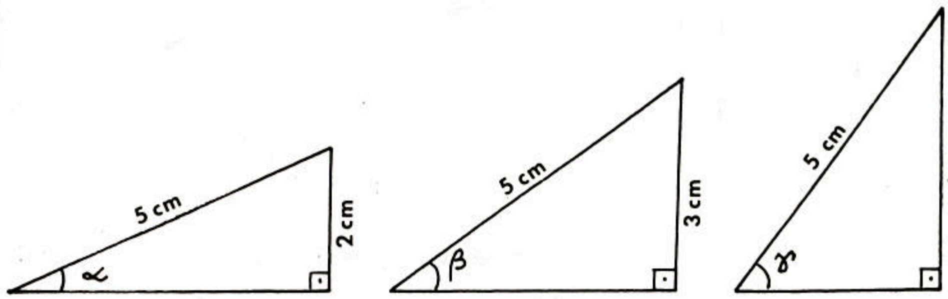
$$\cos\alpha = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA_1'}{OA_1}$$



O seno e o cosseno de α dependem, então, da medida do ângulo α e não das dimensões maiores ou menores do triângulo retângulo formado sobre esse ângulo α. Esse triângulo retângulo pode ser enorme com seus lados sendo, por exemplo, distâncias inter-estelares, como pode ser um pequeno triângulo desenhado no papel: sendo ambos triângulos retângulos com um ângulo agudo congruente a α, as razões entre os catetos opostos a α e as hipotenusas são iguais nos dois triângulos. Aproveitamo--nos desse fato obtendo o seno de um ângulo agudo α em um pequeno triângulo que desenhamos no papel e, depois, utilizaremos esse valor para obter relações entre os lados de qualquer outro triângulo retângulo em que um dos ângulos agudos é α. O mesmo podemos dizer do cosseno de α.

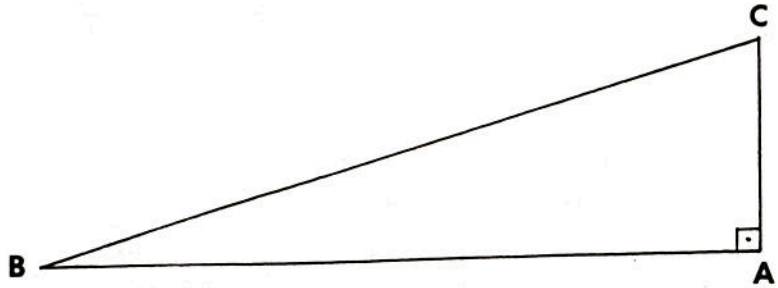
Exemplo 23

Levando em conta as indicações das figuras, calcule sen α, sen β e sen γ.



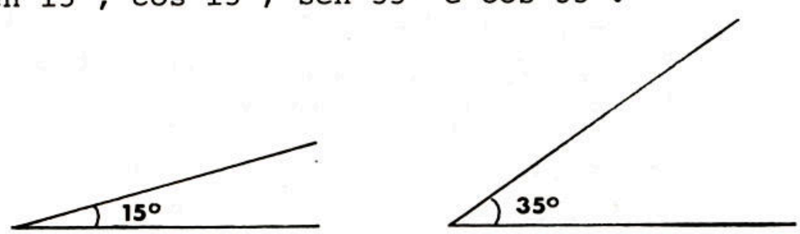
Exemplo 24

No triângulo abaixo, meça os segmentos convenientes e calcule sen $\hat{B}$ e cos $\hat{B}$.



Exemplo 25

São dados a seguir dois ângulos, um de 15^{o} e outro de 35^{o}. Introduzindo novos elementos nessas figuras, medindo-os e fazendo cálculos com as medidas obtidas, dê os valores aproximados de sen 15^{o}, cos 15^{o}; sen 35^{o} e cos 35^{o}.



Construção da tabela de senos e cossenos.
Objetivo: Cosntruir uma tabela com os valores dos senos e dos cossenos de diversos ângulos.

Valem aqui comentários análogos aos que fizemos quando construímos a tabela das tangentes. Ficaremos, assim, com a seguinte tabela:

ângulo	seno	cosseno	tangente
5°	0,09	0,99	0,09
10°	0,17	0,98	0,18
15°	0,26	0,97	0,27
20°	0,34	0,94	0,36
25°	0,42	0,91	0,47
30°	0,50	0,87	0,58
35°	0,57	0,82	0,70
40°	0,64	0,77	0,84
45°	0,71	0,71	1,00
50°	0,77	0,64	1,19
55°	0,82	0,57	1,43
60°	0,87	0,50	1,73
65°	0,91	0,42	2,14
70°	0,94	0,34	2,75
75°	0,97	0,26	3,73
80°	0,98	0,17	5,67
85°	0,99	0,09	11,43

Exemplo 26

Num triângulo ABC tem-se AC = 5 cm, $\hat{B}$ = = 25° e $\hat{A}$ = 90°. Calcule as medidas de AB e de B (usando a tabela trigonométrica).

Exemplo 27

O professor pode enunciar livremente in meros problemas sobre triângulos retângulos em qu são dados a medida de um dos lados e a de um do ângulos agudos (escolhendo uma medida que const da tabela) e solicitando as medidas dos outros l dos do triângulo.

PROPRIEDADES E RELAÇÕES DO SENO, COSSENO E TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO.

Exemplo 28

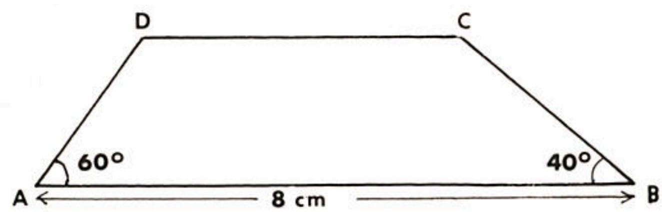
Num triângulo isósceles a base mede 6 cm e os ângulos da base medem 70°. Calcule a medida aproximada dos dois lados do triângulo que são congruentes entre si (usando a tabela trigonométrica).

Exemplo 29

Num triângulo ABC tem-se $\hat{B} = 60^{\circ}$, $\hat{C} = 70^{\circ}$ e BC = 10 cm. Calcule a medida aproximada das alturas do triângulo relativas aos lados BC e AC (usando a tabela trigonométrica).

Exemplo 30

Calcule o perímetro aproximado do trapézio da figura abaixo, considerando que AB = 8 cm, $\hat{A} = 60^{\circ}$, $\hat{B} = 40^{\circ}$ e que sua altura mede 2 cm.



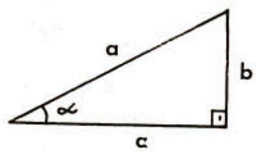
Na tabela trigonométrica de senos, cossenos e tangentes, podemos observar ou constatar diversas propriedades trigonométricas. Na tabela dos senos, podemos ver que os valores são todos positivos e menores que 1. Não é difícil explicar por que se tem $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$ para todo ângulo α, com $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$: o seno é o quociente do cateto oposto pela hipotenusa, logo o seno é um número positivo; além disso, como o cateto é menor que a hipotenusa, o seno é menor que 1.

Para o cosseno de todo ângulo α, com $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ também se tem $0 < \cos\alpha < 1$. Quanto à tangente, pode assumir valores maiores ou iguais a 1. Na verdade, as tangentes dos ângulos agudos podem assumir qualquer valor positivo.

Portanto, para todo $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$, tem-se:

$\boxed{0 < \text{sen}\,\alpha < 1}$ $\boxed{0 < \cos\alpha < 1}$ $\boxed{\text{tag}\,\alpha > 0}$

O seno e o cosseno de qualquer ângulo α, com $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$, estão ligados pela relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$

Exemplo 31

Consultando a tabela e efetuando os cálculos correspondentes, verifique que $\text{sen}^2\,25^{\circ} + \cos^2\,25^{\circ} = 1$. Na verdade, como na tabela os valores são aproximados, substituindo-os na relação fundamental, encontra-se um resultado muito próximo de 1.

Faça o mesmo para outros ângulos que constam da tabela.

Exemplo 32

Sabendo que $\text{sen}\,18^{\circ} = 0{,}31$, obtenha o valor aproximado de $\cos 18^{\circ}$ (utilizando uma calculadora que tenha a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$).

Exemplo 33

São dados $\text{sen}\,33^{\circ} = 0{,}54$ e $\cos 42^{\circ} = 0{,}74$. Obtenha os valores aproximados de $\cos 33^{\circ}$ e $\text{sen}\,42^{\circ}$ (utilizando uma calculadora que tenha a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$).

Os valores do seno, do cosseno e da tangente de qualquer ângulo α, com $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$, tam bém estão relacionados:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Vamos omitir a demonstração dessa relação, pois é facilmente localizada nos livros didáticos.

Exemplo 34

Consultando a tabela trigonométrica e efetuando os cálculos correspondentes, verifique que $\operatorname{tg} 55^{o} = \frac{\operatorname{sen} 55^{o}}{\cos 55^{o}}$. Na verdade, como os valores da tabela são aproximados, substituindo-os nessa relação, obtemos valores aproximadamente iguais.

Faça o mesmo para outros ângulos que constam da tabela.

Exemplo 35

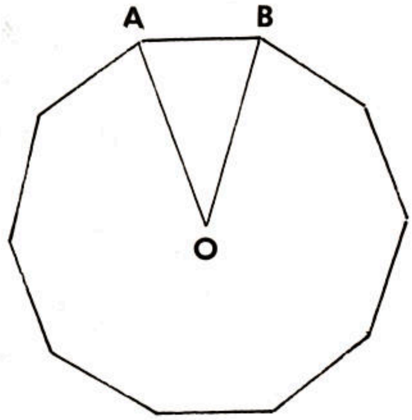
É dado que sen $28^{o} = 0{,}47$. Calcule os valores aproximados de cos 28^{o} e tg 28^{o}.

Polígonos regulares.
Objetivo: Calcular perímetros e áreas de polígonos regulares.

A trigonometria também é utilizada no cálculo de perímetros e áreas de polígonos regulares. Para esses problemas vamos supor que se tenha uma tabela trigonométrica mais completa que a tabela construída na classe (que, por exemplo, nos dê os senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 1^{o}, 2^{o}, 3^{o}, ... até 89^{o}, com precisão de duas casas decimais).

Exemplo 36

Calcular o perímetro aproximado de um decágono regular (10 lados) inscrito numa circunferência com 6 cm de raio.



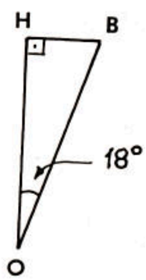
Para resolver este último exercício, notemos inicialmente que o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 36^{o}.

Dividindo ao meio o triângulo OAB, como nos mostra a figura, ficamos com o triângulo OHB, no qual:

$OB = 6$ cm, pois OB é o raio da circunferência;

$H\hat{O}B = 18^{o}$;

$HB = \frac{\ell}{2}$, onde ℓ é o lado do decágono.



Então:

$$\text{sen } 18^{o} = \frac{HB}{OB} = \frac{\frac{\ell}{2}}{6} = \frac{\ell}{12} \rightarrow 0,31 = \frac{\ell}{12} \rightarrow \ell = 3,72 \text{ cm}$$

O perímetro do decágono é $2p = 10\ell =$ $= 10 \, . \, 3,72 = 37,2$ cm.

<u>Exemplo 37</u>

Calcular o perímetro aproximado de um polígono regular de 12 lados inscrito numa circunferência com 10 cm de raio.

Exemplo 38

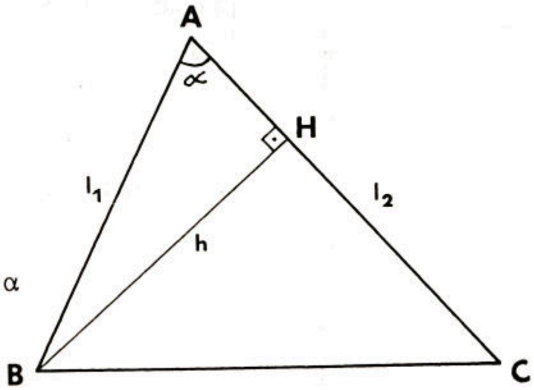
Nos exemplos 36 e 37 calcule o perímetro do polígono supondo que ele seja circunscrito (e não inscrito) nas circunferências dadas.

Antes de iniciar o cálculo das áreas dos polígonos regulares, vamos nos deter um pouco no cálculo da área do triângulo.

Vamos obter a fórmula que dá a área de um triângulo em função de dois de seus lados ℓ_1 e ℓ_2 e do ângulo α compreendido entre eles.

No triângulo ABC a seguir, tomando ℓ_2 como base, temos:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\ell_2 . h}{2}$$



No triângulo ABH, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{\ell_1} \Rightarrow h = \ell_1 . \text{sen}\ \alpha$$

Então:

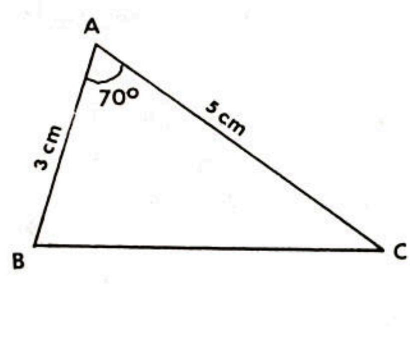
$$A_{\Delta ABC} = \frac{\ell_2 . h}{2} = \frac{\ell_2(\ell_1 . \text{sen}\ \alpha)}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{\ell_1 . \ell_2 . \text{sen}\ \alpha}{2}}$$

Chegamos, pois, à fórmula da área do triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles.

Exemplo 39

Calcule a área do triângulo ABC em que AB = 3 cm, AC = 5 cm e $\hat{A} = 70^o$.

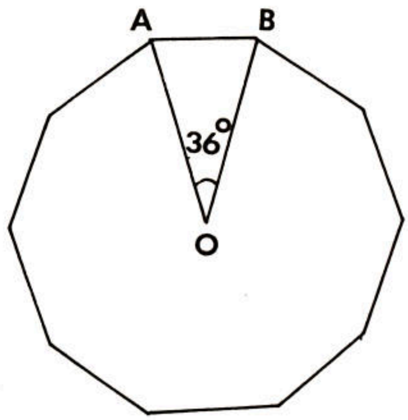


Este exercício pode ser resolvido diretamente pela aplicação da fórmula anterior, com $\ell_1 = 3$ cm, $\ell_2 = 5$ cm e $\alpha = 70^o$:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, \text{sen}\, 70^o}{2} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 0{,}94}{2} = 7{,}05 \text{ cm}^2$$

Exemplo 40

Calcule a área aproximada do decágono regular inscrito numa circunferência com 6 cm de raio.



Para resolver este exercício, notemos que a área do decágono é $10 \,.\, A_{\Delta AOB}$. Por sua vez, nesse triângulo, temos:

AO = 6 cm, pois AO é raio;

OB = 6 cm, pois OB é raio;

$A\hat{O}B = \frac{360^o}{10} = 36^o.$

Então:

$$A_{\Delta AOB} = \frac{\ell_1 \,.\, \ell_2 \,.\, \text{sen}\,\alpha}{2} = \frac{6 \,.\, 6 \,.\, \text{sen}\, 36^o}{2} =$$

$$= \frac{6 \,.\, 6 \,.\, 0{,}59}{2} = 10{,}62 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área do decágono é $10 \,.\, 10{,}62 = 106{,}2 \text{ cm}^2$.

Exemplo 41

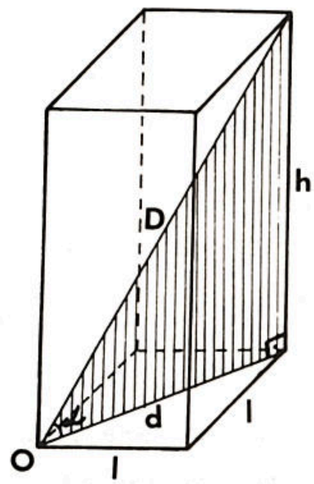
Calcule as áreas aproximadas dos polígonos mencionados nos exemplos 37 e 38.

Figuras espaciais.
Objetivo: Relacionar, por meio de ângulos conhecidos, as medidas de segmentos de realce nas figuras espaciais.

As figuras espaciais mais simples, como, por exemplo, os prismas, podem ser introduzidas (de modo informal) em qualquer momento do curso.

Exemplo 42

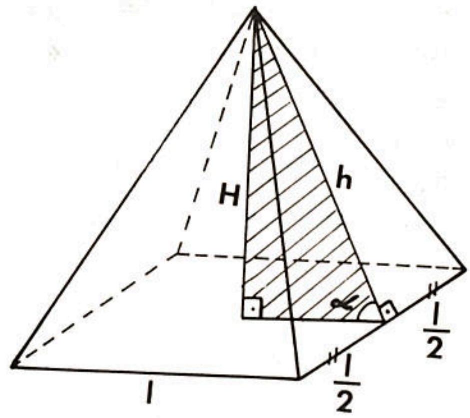
Abaixo temos um prisma reto de bases quadradas; D é uma diagonal do prisma; d é uma diagonal da base do prisma; ℓ são as arestas da base; h é a altura do prisma; α é o ângulo formado pela diagonal D e pela diagonal da base d, ambas com uma de suas extremidades em O.



São dados: D = 10 cm e $\alpha = 65^{o}$. Calcule as medidas aproximadas de h, d, ℓ, da área da base do prisma (que nesse caso, reeptimos, é um quadrado), da área lateral do prisma e da área do triângulo assinalado.

Exemplo 43

A seguir, temos uma pirâmide reta de base quadrada; H é a altura da pirâmide; h é a altura das faces laterais da pirâmide.



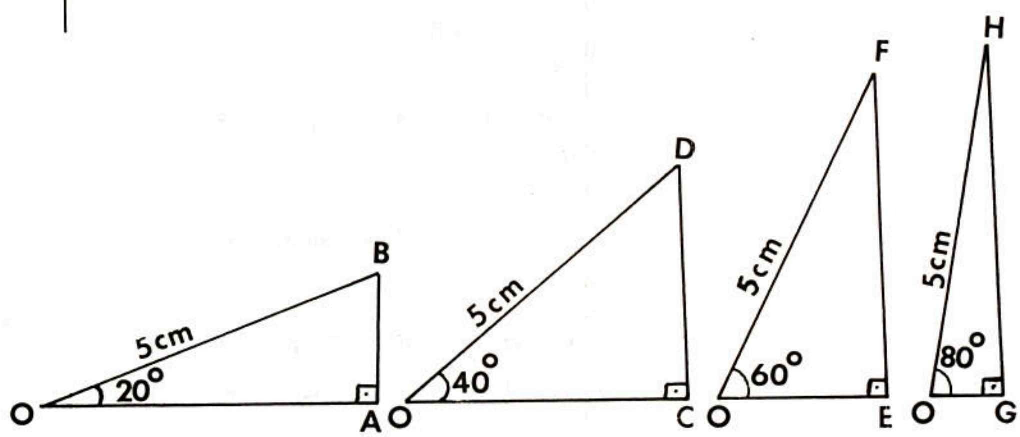
São dados: H = 10 cm e $\alpha = 55^{\circ}$. Calcule as medidas aproximadas de h, ℓ, das arestas laterais, da área da base da pirâmide e das áreas das faces laterais da pirâmide.

V. CICLO TRIGONOMÉTRICO.

Objetivo: Estender os conceitos de seno e cosseno para ângulos de 0° a 360°.

Já definimos seno e cosseno de α, com $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Agora vamos defini-los para qualquer ângulo α, com $0^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ}$.

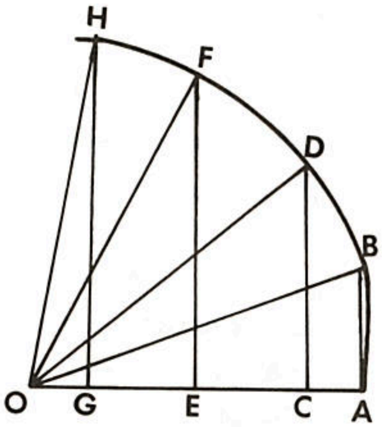
Mais uma vez, vamos construir uma tabela de senos. Para isso, vamos desenhar quatro triângulos retângulos, com ângulos agudos respectivamente de 20°, 40°, 60° e 80°, todos eles com hipotenusas de 5 cm.



Medindo então os segmentos AB, CD, EF e GH, temos:

$\text{sen } 20^\circ = \frac{AB}{5}$; $\text{sen } 40^\circ = \frac{CD}{5}$; $\text{sen } 60^\circ = \frac{EF}{5}$; $\text{sen } 80^\circ = \frac{GH}{5}$.

Faremos agora um desenho com esses quatro triângulos superpostos:



Observe que os pontos B, D, F e H, por estarem todos a 5 cm de O, estão na circunferência de centro O e raio 5 cm; e que os quatro senos procurados são respectivamente as medidas de AB, CD, EF e GH divididas por 5 (que é a medida da hipotenusa).

Invertendo o processo, podemos começar desenhando a circunferência; a seguir marcamos os ângulos (a partir da horizontal) no sentido anti-horário; depois, medimos os catetos verticais e dividimos essas medidas pela medida do raio da circunferência. Finalmente, para não ter de efetuar as divisões, basta considerar uma circunferência de raio unitário. Chegamos assim ao ciclo trigonométrico (que não será aqui detalhado por ser do conhecimento do professor) e com o ciclo, num primeiro momento, podemos chegar aos senos dos ângulos de 0° a 360°.

Da mesma forma, usamos o ciclo trigonométrico, para definir, inicialmente, o cosseno dos ângulos de 0° a 360°.

No ciclo trigonométrico fica evidente que para qualquer ângulo α de 0° a 360°, tem-se:

$$\boxed{-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos \alpha \leq 1}$$

Além disso, pode-se demonstrar que:

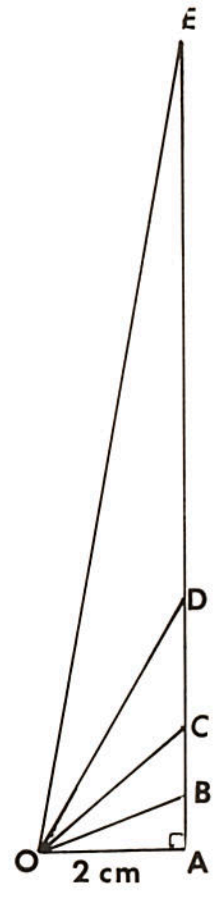
$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

O ciclo trigonométrico é útil ainda na redução de arcos ao 1º quadrante, na resolução de equações e inequações trigonométricas simples, tópicos esses localizáveis nos livros didáticos.

A tangente no ciclo trigonométrico.
Objetivo: Estender o conceito de tangente para ângulos de 0^o a 360^o, com exceção de 90^o e 270^o.

Já definimos a tangente de α, com $0^o < \alpha < 90^o$. Agora vamos defini-la para ângulos de 0^o a 360^o, com exceção de 90^o e 270^o.

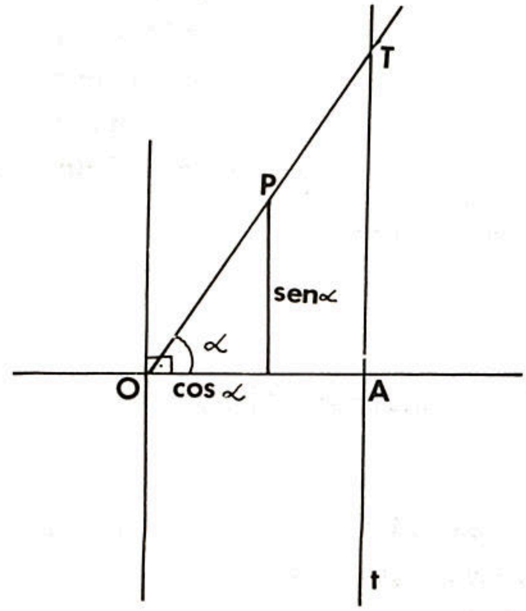
Para organizar mais uma vez uma tabela de tangentes, vamos desenhar quatro triângulos retângulos com ângulos agudos respectivamente de 20^o, 40^o, 60^o e 80^o, todos eles com catetos adjacentes de 2 cm. Nesse caso, já vamos desenhá-los superpostos (veja a figura ao lado).



Medindo então os segmentos AB, AC, AD e AE, temos:

$tg\ 20^o = \frac{AB}{2}$; $tg\ 40^o = \frac{AC}{2}$;
$tg\ 60^o = \frac{AD}{2}$; $tg\ 80^o = \frac{AE}{2}$.

Para não precisarmos efetuar essas divisões por 2, poderíamos ter feito os catetos adjacentes com medida unitária e, aí, já esta remos chegando novamente ao ciclo trigonométrico.



No ciclo trigonométrico fica evidente que a tangente pode assumir qualquer valor real. Evidencia-se também a particularidade dos ângulos de 90^o e 270^o, para os quais não se define a tangente e, além disso, pode-se demonstrar que, para qualquer α, com $0^o \leq \alpha \leq 360^o$ e $90^o \neq \alpha \neq 270^o$, tem-se:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

O ciclo trigonométrico é útil ainda na redução de arcos ao 1º quadrante, na resolução de equações e inequações trigonométricas simples, tópicos esses localizáveis nos livros didáticos.

VI. TRIÂNGULOS QUAISQUER

Objetivo: Relacionar as medidas de lados e ângulos num triângulo qualquer.

Até aqui temos utilizado os conceitos trigonométricos em triângulos retângulos. No entanto, considerando-se um triângulo qualquer, a partir de sua decomposição em triângulos retângulos, podem ser demonstrados dois importantes teoremas: a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Nos livros didáticos encontramos as demonstrações desses teoremas e suas aplicações na resolução de triângulos. Nos livros, as aplicações geralmente utilizam apenas os ângulos particulares (30°, 45° e seus múltiplos), artificializando muito os problemas propostos. No entanto, o professor não terá dificuldade em propor o mesmo tipo de problema com ângulos de outras medidas.

7.3 Análise combinatória

I. FAMILIARIZAÇÃO COM PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CONTAGEM	A - Problemas variados.
II. SISTEMATIZAÇÃO DA CONTAGEM	A - Instrumentos úteis para sistematização da contagem: tabela de dupla entrada, árvore de possibilidades, quadro para descrição dos acontecimentos. B - Princípio Multiplicativo. C - Árvore de Possibilidades.
III. SISTEMATIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE ARRANJOS E COMBINAÇÕES	A - Arranjos com repetição. B - Arranjos simples. C - Fatorial. D - Permutações simples. E - Combinações simples.

CONTEÚDO/OBJETIVO	SUGESTÕES/OBSERVAÇÕES

I. FAMILIARIZAÇÃO COM PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CONTAGEM

Objetivo: Descrever todos os casos possíveis envolvidos nos problemas e contá-los posteriormente.

Nesta etapa, a melhor solução é aquela apresentada pelo aluno. Respostas diferentes, fornecidas por alunos diferentes, levam a uma discussão muito útil pela necessidade de argumentação.

Os primeiros contatos com o raciocínio combinatório deverão ser intuitivos, as discussões livres, proporcionando ao aluno oportunidades de propor caminhos para solucionar os problemas, para que ele seja motivado a desenvolver técnicas sistematizadas para a descrição dos casos possíveis, bem como para a sua contagem.

A. Problemas variados

Problema nº 1

Quantas peças tem um jogo de dominó?

Comentários

Os alunos que conhecem este jogo provavelmente responderão de imediato à pergunta. Devemos pedir-lhes que justifiquem essa resposta, descrevendo as peças. Os outros alunos procurarão dar algum tipo de descrição que atinja as 28 peças do jogo. Se o método de resolução exposto a seguir não for apresentado por nenhum aluno, pois é um pouco mais sofisticado, o professor poderá utilizá-lo para descrever e contar as peças.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6
1		1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2			2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3				3 3	3 4	3 5	3 6
4					4 4	4 5	4 6
5						5 5	5 6
6							6 6

Contando diretamente, encontramos 28 peças. Uma contagem sistematizada poderia ser descrita por:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \quad \text{ou} \quad \underbrace{7 \times 7}_{\text{nº de quadrículas da tabela}} - \underbrace{(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)}_{\text{nº de quadrículas vazias da tabela}}$$

nº de peças de cada linha da tabela

Assim, o aluno estará apto para resolver outro problema em que as peças do dominó são numeradas de 0 a 12, por exemplo.

Problema nº 2

Jogue dois dados simultaneamente. Quais são as somas possíveis? Quantas são?

Resposta

Somas possíveis: 2, 3, 4, ..., 12.

Número de somas: 11.

Problema nº 3

Lançam-se 5 moedas simultaneamente. Quais são os resultados possíveis? Quantos são?

Resposta

Indicando cara com F e coroa com C, temos: F, F, F, F, F; F, F, F, F, C; F, F, F, C, C; F, F, C, C, C; F, C, C, C, C; C, C, C, C, C.

Logo, são 6 possibilidades.

Observações:

. Aqui a contagem foi feita diretamente.

. Na solução apresentada, as moedas foram consideradas idênticas e o fato do lançamento ter sido simultâneo significa que não há diferença, por exemplo, entre FFCCC e CCFFC.

. Outras interpretações e soluções que surgirem entre os alunos deverão ser amplamente discutidas (por exemplo: se as 5 moedas forem considaradas distintas, o número de resultados possíveis será 32).

Chamando de m_1, m_2, ... m_5 moedas de diferentes valores, teremos:

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	
F	F	F	F	F	F F F F F
				C	F F F F C
			C	F	F F F C F
				C	F F F C C
		C	F	F	F F C F F
				C	F F C F C
			C	F	F F C C F
				C	F F C C C
	C	F	F	F	
				C	
			C	F	
				C	
		C	F	F	
				C	
			C	F	
				C	
C	F	F	F	F	
				C	
			C	F	
				C	
		C	F	F	
				C	
			C	F	
				C	
	C	F	F	F	
				C	
			C	F	
				C	
		C	F	F	
				C	
			C	F	
				C	

(32 possibilidades)

Neste caso os resultados:

$$\begin{array}{ccccc}
F & F & F & C & C \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
F & C & F & C & F
\end{array} \quad e$$

são diferentes, pois as moedas m_2 e m_5 são diferentes.

Problema nº 4

Lança-se uma moeda 3 vezes consecutivas. Quantas seqüências de resultados são possíveis?

Resposta

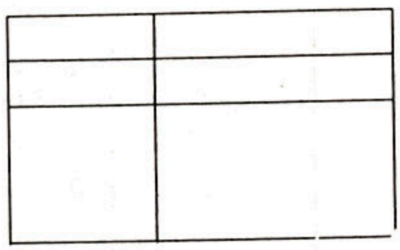
8 (oito).

1º lançamento	cara				coroa			
2º lançamento	cara		coroa		cara		coroa	
3º lançamento	cara	coroa	cara	coroa	cara	coroa	cara	coroa

Um dos resultados possíveis é, por exemplo, CFC. Neste caso, o resultado CFC é diferente de CCF, pois obtivemos resultados diferentes no 2º e no 3º lançamentos.

Problema nº 5

Quantos retângulos há na figura abaixo?

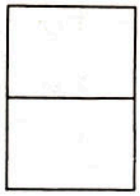


Resposta

18 (dezoito).

Problema nº 6

Nos relógios digitais e nas calculadoras eletrônicas, os algarismos são freqüentemente representados iluminando-se alguns dos sete filamentos dispostos na forma padrão dada. Quantos símbolos diferentes podem ser expressos, estando iluminado pelo menos um dos filamentos?



Resposta

127 (cento e vinte e sete).

Problema nº 7

Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Resposta

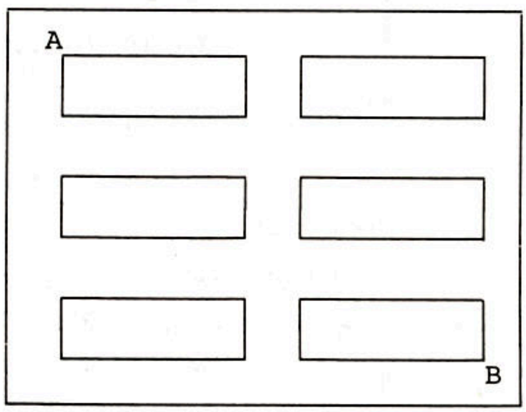
16 subconjuntos.

Observação

Discutir com os alunos que o menor número de elementos de um subconjunto de A é zero, enquanto que o maior número é 4.

Problema nº 8

Um condomínio fechado é constituído por 6 blocos de apartamentos, dispostos como mostra a figura. De quantas maneiras diferentes se pode ir da esquina A até a esquina B, percorrendo as ruas do condomínio e realizando sempre o caminho mais curto possível?



Resposta

10 (dez).

Problema nº 9

Quantos triângulos é possível construir com os vértices de um pentágono regular?

Resposta

10 triângulos.

Problema nº 10

Quantos segmentos são definidos pelos vértices de um hexágono regular?

Resposta

15 segmentos.

II. SISTEMATIZAÇÃO DA CONTAGEM

Objetivos:

- *Perceber que a contagem direta é impraticável na maioria dos casos.*
- *Analisar os processos de formação de agrupamentos.*
- *Desenvolver técnicas de contagem*

Após um trabalho de familiarização com o raciocínio combinatório, por meio de discussão livre sobre as soluções de problemas nos quais não se apliquem as fórmulas tradicionais da Análise Combinatória é conveniente que sejam introduzidas sistemáticas para a formação de agrupamentos, bem como para a sua contagem, sem a necessidade de descrever cada caso.

O problema da construção dos agrupamentos deve preceder o problema da contagem, já que não se deve racionalmente quantificar uma variedade de situações sem o domínio claro de seu processo de criação.

Uma análise adequada dos processos de formação de agrupamentos, pelos alunos, evitará defeitos freqüentes entre os iniciantes, decorrentes da tendência de adivinhar a resposta ou o processo de contagem.

Além disso, essa análise fornecerá indicações para o desenvolvimento de técnicas de contagem, como, por exemplo, o Princípio Multiplicativo, que será, assim, entendido intuitivamente e não memorizado.

A. *Instrumentos úteis para a sistematização da contagem.*

Problema nº 11

Um jovem tem 4 camisas, 3 calças e 2 pares de sapato e não quer usar à noite a mesma calça e a mesma camisa que usou durante o dia. Quantas possibilidades de se vestir existem?

Solução

Apesar de ser um problema de contagem, devemos discutir com os alunos a descrição das possibilidades.

Os elementos envolvidos são:

camisas: m_1, m_2, m_3, m_4
calças: c_1, c_2, c_3
sapatos: s_1, s_2

Durante o dia o jovem tem 4 x 3 x 2 possibilidades de se vestir. A descrição das 24 possibilidades de se vestir durante o dia será feita em 4 blocos com 6 possibilidades cada um, ou seja:

$\{m_1, c_1, s_1\}$ $\{m_2, c_1, s_1\}$ $\{m_3, c_1, s_1\}$ $\{m_4, c_1, s_1\}$
$\{m_1, c_1, s_2\}$ $\{m_2, c_1, s_2\}$ $\{m_3, c_1, s_2\}$ $\{m_4, c_1\ s_2\}$
$\{m_1, c_2, s_1\}$ $\{m_2, c_2, s_1\}$ $\{m_3, c_2, s_1\}$ $\{m_4, c_2\ s_1\}$
$\{m_1, c_2, s_2\}$ $\{m_2, c_2, s_2\}$ $\{m_3, c_2, s_2\}$ $\{m_4, c_2\ s_2\}$
$\{m_1, c_3, s_1\}$ $\{m_2, c_3, s_1\}$ $\{m_3, c_3, s_1\}$ $\{m_4, c_3\ s_1\}$
$\{m_1, c_3, s_2\}$ $\{m_2, c_3, s_2\}$ $\{m_3, c_3, s_2\}$ $\{m_4, c_3\ s_2\}$

Vamos supor, agora, que o jovem usou durante o dia o conjunto $\{m_1, c_1, s_1\}$. Ele não poderá usar à noite os conjuntos $\{m_1, c_1, s_1\}$ ou $\{m_1, c_1, s_2\}$, pois estes contém a mesma calça e a mesma camisa que usou durante o dia. Restam-lhe, portanto, 22 possibilidades de se vestir à noite.

O exemplo acima nos sugere uma primeira abordagem do Princípio Multiplicativo que deverá ser entendido pelos alunos intuitivamente e não memorizado.

Problema nº 12

Quantos números de 3 algarismos é possível formar utilizando os algarismos 1, 3, 5, 7?

Solução

Seja: P_3 a posição da centena; P_2 a posição da dezena e P_1 a posição da unidade.

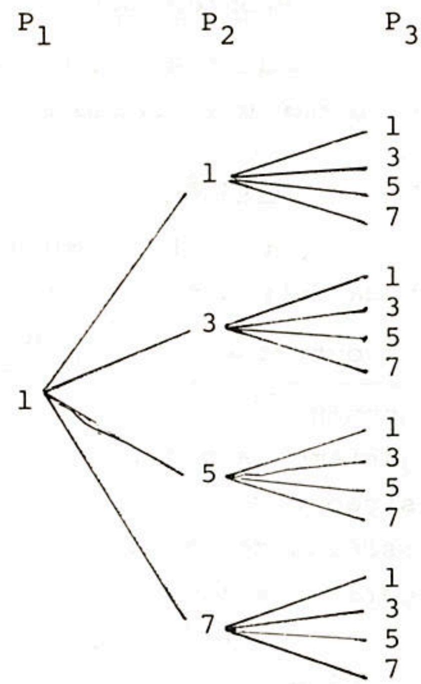
Acontecimentos	Descrição das possibilidades	Número de possibilidades
. Escolha de um algarismo para a posição P_1	1, 3, 5, 7	4
. Escolha de um algarismo para a posição P_2, após a escolha para P_1	1, 3, 5, 7	4
. Escolha de um algarismo para a posição P_3, após as escolhas para P_1 e P_2	1, 3, 5, 7	4

Logo, existem 4 x 4 x 4 possibilidades de formar tais números de 3 algarismos.

Observação

Um instrumento útil para sistematização da contagem dos casos possíveis é a árvore de probabilidades.

O esboço da árvore de possibilidades, por exemplo, para os 16 números em que figura o algarismo 1 na posição da centena, terá o seguinte aspecto:



Descrição das possibilidades

1 1 1
1 1 3
1 1 5
1 1 7
1 3 1
1 3 3
1 3 5
1 3 7
1 5 1
1 5 3
1 5 5
1 5 7
1 7 1
1 7 3
1 7 5
1 7 7

Problema nº 13

Uma igreja tem 6 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair da igreja?

Solução

Existem 6 possibilidades para entrar na igreja e novamente, 6 possibilidades para sair. Portanto, existem 6 x 6 possibilidades de entrar e sair da igreja.

Descrição das possibilidades:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1P_1	P_1P_2	P_1P_3	P_1P_4	P_1P_5	P_1P_6
P_2	P_2P_1	P_2P_2	P_2P_3	P_2P_4	P_2P_5	P_2P_6
P_3	P_3P_1	P_3P_2	P_3P_3	P_3P_4	P_3P_5	P_3P_6
P_4	P_4P_1	P_4P_2	P_4P_3	P_4P_4	P_4P_5	P_4P_6
P_5	P_5P_1	P_5P_2	P_5P_3	P_5P_4	P_5P_5	P_5P_6
P_6	P_6P_1	P_6P_2	P_6P_3	P_6P_4	P_6P_5	P_6P_6

Problema nº 14

Quantos números de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal?

a) podendo repetir algarismos;

b) sem repetir algarismos.

Solução

Seja P_2P_1 a configuração do número que se quer formar.

a) repetindo algarismos:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um algarismo para a posição P_1	10
. Escolha de um algarismo para a posição P_2, após a escolha para P_1	9 (pois o algarismo 0 não pode ocorrer na posição P_2)

Logo, temos 9 x 10 números de dois algarismos.

Observemos que este problema apresenta restrição própria, dada a sua natureza. Se o algarismo zero for colocado na posição da dezena, não obteremos números de dois algarismos.

b) sem repetir algarismos:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um algarismo para a posição P_2	9, pois o algarismo zero não pode ocorrer em P_2.
. Escolha de um algarismo para a posição P_1, após a escolha para P_2	9, pois o algarismo escolhido para a posição P_2 não pode ocorrer em P_1.

Logo, temos 9 x 9 números de dois algarismos distintos.

Problema nº 15

No sistema de numeração de base seis, quantos números naturais de quatro algarismos existem?

Solução

No sistema de numeração posicional de base seis, usam-se seis algarismos para escrever qualquer número: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Seja $P_4P_3P_2P_1$ a configuração dos números que se quer formar:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um algarismo para a posição P_4	5, pois o algarismo zero não pode figurar na posição P_4.
. Escolha de um algarismo para a posição P_3	6
. Escolha de um algarismo para a posição P_2	6
. Escolha de um algarismo para a posição P_1	6

Logo, podemos formar 5 x 6 x 6 x 6 números de quatro algarismos, no sistema de base seis.

O professor deve ser bastante paciente na discussão da solução desses problemas. As **representações das possibilidades** podem ser as mais variadas.

As **argumentações verbalizadas** pelos alunos devem ser incentivadas e corrigidas; as **denominações**, as mais exatas e adequadas possíveis; a **contagem**, uma conseqüência natural e intuitiva do processo de formação e representação das possibilidades.

B. O princípio multiplicativo.

Objetivo:

- *apreender o Princípio Multiplicativo*
- *aplicar o Princípio Multiplicativo, favorecendo a técnica de contagem*
- *generalizar o Princípio Multiplicativo*

Após ter-se familiarizado com problemas que envolvem contagem, com processos de formação de agrupamentos, bem como com variadas representações de possibilidades, acreditamos que o aluno já domina intuitivamente o princípio multiplicativo e um enunciado, mesmo que ingênuo, poderia ser apresentado.

Primeiro, um enunciado que fornece a contagem de pares ordenados obtidos com os elementos escolhidos em dois conjuntos:

"Se um acontecimento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e um acontecimento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então a sucessão A e B, nesta ordem, pode ocorrer de m x n maneiras diferentes."

Analogamente, quando queremos obter o número de pares ordenados formados com os elementos de dois conjuntos A_1 e A_2, temos:

$n(A_1)$ = número de elementos do conjunto A_1,
$n(A_2)$ = número de elementos do conjunto A_2,
$n(A_1 \times A_2) = n(A_1) \times n(A_2)$ = número de elementos do produto cartesiano $A_1 \times A_2$.

Em seguida, podemos estender o Princípio Multiplicativo para n duplas ordenadas. Se os alunos ainda não dominarem a formação de seqüências, outros problemas poderão ser propostos.

Problema nº 16

Um jovem tem 4 camisas, 5 calças, 3 pares de sapatos, 1 paletó e 2 gravatas. De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?

Resposta

$4 \times 5 \times 3 \times 1 \times 2 = 120$ maneiras de se vestir.

Problema nº 17

Quantos anagramas é possível formar com todas as letras da palavra RATO?

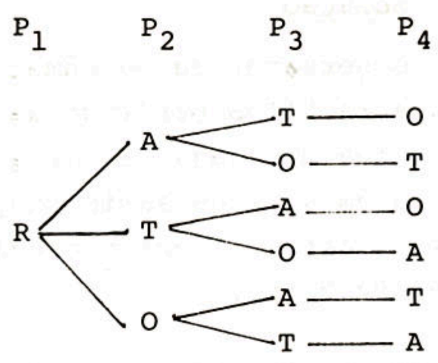
Solução

Consideramos as posições P_1, P_2, P_3, P_4.

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de uma letra para a posição P_1	4, a saber: R, A, T e O
. Escolha de uma letra para a posição P_2, após a escolha para P_1	3, pois a letra escolhida para a posição P_1 não pode ocorrer em P_2
. Escolha de uma letra para a posição P_3, após a escolha para P_1 e P_2	2
. Escolha de uma letra para a posição P_4	1

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades.

Uma representação com árvore de possibilidades, para as seis palavras começadas por R, auxilia o entendimento:



Descrição das possibilidades

R A T O
R A O T
R T A O
R T O A
R O A T
R O T A

Apresentaremos, agora, um enunciado do Princípio Multiplicativo generalizado:

Teorema

Se um acontecimento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes (para $i = 1, 2, \ldots, n$), então a seqüência $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de n acontecimentos sucessivos pode ocorrer de $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ maneiras diferentes.

Sugerimos mais uma série de problemas, que poderia ser ampliada pelo professor, para fixar o Princípio Multiplicativo.

Problema nº 18

Quantos múltiplos de 5 existem, entre 100 e 1000 de modo que o algarismo das centenas seja múltiplo de 3 e o das dezenas um número par?

Resposta

$3 \times 5 \times 2 = 30$.

Problema nº 19

No quadro ao lado, de quantos modos é possível formar a palavra LOTUS, partindo de um L e indo sempre para a direita ou para baixo?

				L
			L	O
		L	O	T
	L	O	T	U
L	O	T	U	S

Solução

Observemos que o número de modos de formar a palavra LOTUS partindo de um L é igual ao número de modos de chegar à letra S. Para chegar à lera S, porém, é necessário chegar à letra U e para chegar a esta é preciso chegar à letra T e assim sucessivamente.

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Modos de chegar à letra S	2, pela esquerda ou por cima.
. Modos de chegar à letra U após ter ocorrido o primeiro acontecimento	2
. idem para chegar à letra T	2
. idem para chegar à letra O	2

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos 16 modos.

Problema nº 20

Quantos números de 3 algarismos, sem repetição, existem no sistema decimal?

Resposta

$9 \times 9 \times 8 = 648$.

Levando em consideração a abordagem que estamos fazendo para analisar os conceitos combinatórios, o Princípio Multiplicativo ocupa uma posição de suma importância. É preciso que o aluno o domine muito bem. Mais tarde, será necessário que o aluno perceba como o Princípio Multiplicativo funciona como base para qualquer técnica de contagem sintética.

O Princípio Multiplicativo está quase sempre associado a situações do tipo: "cada elemento de um conjunto A pode ser combinado com **todos** os elementos de um conjunto B". Trabalhando essa ques tão com os alunos estamos ampliando o conceito de multiplicação, cuja idéia inicial baseava-se na soma reiterada de parcelas iguais.

A apreensão do Princípio Multiplicativo e sua aplicabilidade generalizada é dinamizada através de diversos tipos de representação, principalmente o da árvore de possibilidades. Os problemas de 21 a 38, em geral, envolvem as noções de arranjos e permutações simples ou com repetição. Neste momento, o trabalho proposto deve levar o aluno à sistematização da contagem e, conseqüentemente, do Princípio Multiplicativo. A resolução de tais problemas com as fórmulas que fornecem o número de arranjos e permutações deverá ficar para uma fase posterior, quando da sistematização de tais conceitos.

Nesta altura, seria conveniente trabalhar mais especificamente o conceito de combinação simples, com a aplicação do Princípio Multiplicativo.

Problema nº 21

Numa urna foram colocadas 5 bolas de cores diferentes: vermelha, preta, amarela, cinza e branca. De quantas maneiras distintas poderemos retirar 3 bolas da urna?

Comentário

Ao ser proposto o problema para a classe, é possível que surjam soluções diferentes, pois os alunos podem interpretar diferentemente o enunciado. Façamos um levantamento dessas possíveis soluções e de suas justificativas.

1ª possível solução

Pensando em retirar 3 bolas consecutivamente, porém repondo cada bola na urna antes da retirada da próxima, teríamos:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Retirada da 1ª bola	5
. Retirada da 2ª bola, tendo reposto a 1ª na urna	5
. Retirada da 3ª bola, tendo reposto a 2ª na urna	5

Logo, há 5 x 5 x 5 = 125 maneiras distintas de retirar 3 bolas da urna, consecutivamente, repondo na urna as bolas retiradas.

<u>2ª possível solução</u>

Pensando em tirar consecutivamente 3 bolas da urna sem, no entanto, repô-las, teríamos:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Retirada da 1ª bola	5
. Retirada da 2ª bola, uma vez retirada a 1ª	4
. Retirada da 3ª bola, uma vez retirada a 1ª e a 2ª	3

Logo, há 5 x 4 x 3 = 60 maneiras distintas de retirar 3 bolas da urna, consecutivamente, sem repô-las.

<u>Observação</u>

Nas duas soluções apresentadas ficou estabelecida a ordem em que as bolas foram retiradas. Se representarmos, por exemplo, por C, A e V, respectivamente, as bolas cinza, amarela e vermelha, poderemos dizer que as possibilidades CAV e CVA são distintas, pois a 2ª bola retirada não é a mesma nos dois casos, o mesmo acontecendo com a 3ª.

Tal fato não ocorre, caso as 3 bolas sejam retiradas simultaneamente, quando será impossível distinguir entre as possibilidades CAV, CVA,

VAC, VCA, AVC, ACV.

Isto é verdadeiro para quaisquer 3 bolas consideradas; portanto, teríamos uma

3ª possível solução

Pensando em retirar 3 bolas da urna, simultaneamente, reduziríamos as 60 possibilidades da solução anterior a $\frac{60}{6} = 10$ possibilidades distintas (porque cada 6 possibilidades ficariam reduzidas a uma só), que poderiam ser representadas por:

VPA, VPC, VPB, VAC, VAB, VCB, PAC, PAB, PBC, ABC (P e B representando, respectivamente, as bolas preta e branca).

Problema nº 22

Considerando o conjunto A = {a, b, c, e, i, f, v} quantos subconjuntos distintos com 3 elementos podemos formar?

Solução

Observando que {b, e, i} e {i, b, e} representam o mesmo conjunto, estamos lidando, na realidade, com uma situação semelhante à da 3ª solução do problema 21.

Com os elementos de A, podemos formar $7 \times 6 \times 5 = 210$ agrupamentos com 3 elementos, considerados em todas as posições possíveis. Não temos, porém, 210 subconjuntos distintos de 3 elementos, já que cada um deles está representado $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes. Logo, devemos reduzir os 210 agrupamentos a $\frac{210}{6} = 35$ subconjuntos. Podemos, portanto, dado o conjunto A, formar 35 subconjuntos distintos, com 3 elementos.

Problema nº 23

Quantos subconjuntos podemos formar com os elementos do conjunto A = {a, b, c, e, i, f, v}?

1ª solução

Os subconjuntos de A podem conter 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 elementos.

Vejamos, por exemplo, como se procede para determinar quantos subconjuntos de A têm 5 elementos. Em seguida, estenderemos o mesmo raciocínio para os subconjuntos com 7, 6, 4, 3, 2, 1 e 0 elementos.

Com os 7 elementos de A podemos formar 7, 6, 5, 4, 3 agrupamentos de 5 elementos (em qualquer ordem), isto é:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um primeiro elemento do agrupamento	7
. Escolha do 2º elemento, tendo sido escolhido o 1º	6
. Escolha do 3º elemento, tendo sido escolhido o 1º e o 2º elementos	5
. Escolha do 4º elemento, tendo sido escolhido o 1º, 2º e 3º elementos	4
. Escolha do 5º elemento, tendo sido escolhido o 1º, 2º, 3º e 4º elementos	3

Logo, há 7 x 6 x 5 x 4 x 3 agrupamentos de 5 elementos. Entre esses 7 x 6 x 5 x 4 x 3 agrupamentos existem alguns com os mesmos elementos, como, por exemplo, $\boxed{a, b, v, i, f}$ e $\boxed{v, i, a, f, b}$, que descrevem um mesmo subconjunto de A : {a, b, i, f, v }. Como o total de agrupamentos que descrevem um mesmo subconjunto de A é dado por 5 x 4 x 3 x 2 x 1, então:

$$\text{nº de subconjuntos de A com 5 elementos} = \frac{\text{nº de agrupamentos com 5 elementos (independentemente da ordem desses elementos)}}{\text{nº de agrupamentos que descrevem um mesmo subconjunto de A}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Assim, usando o mesmo raciocínio, teremos:

$$\text{nº de subconjuntos com 7 elementos} = \frac{\text{nº de agrupamentos com 7 elementos (independentemente da ordem desses elementos)}}{\text{nº de agrupamentos que descrevem um mesmo subconjunto de A}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$\text{nº de subconjuntos com 6 elementos} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7$$

$$\text{nº de subconjuntos com 5 elementos} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

$$\text{nº de subconjuntos com 4 elementos} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$\text{nº de subconjuntos com 3 elementos} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$\text{nº de subconjuntos com 2 elementos} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

$$\text{nº de subconjuntos com 1 elementos} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\text{nº de subconjuntos com 0 elementos} = 1 \text{ (o conjunto vazio)}$$

$$\text{nº total de subconjuntos de A} = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$$

2ª solução

Sugerimos, agora, uma estratégia inversa. Em vez de escolhermos os elementos para um determinado subconjunto de A, perguntamos, por exemplo, se o elemento a pertence ou não a esse subconjunto. Repetimos a pergunta para os elementos b, c, e, i, f, v. Nessas condições, cada subconjunto corresponde a uma seqüência de 7 respostas "sim" ou "não". Por exemplo, o subconjunto {a, c, i, f} corresponde à seqüência de respostas: a (sim), b (não), c (sim), e (não), i (sim), f (sim), v (não).

Assim, temos:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha da resposta para a pergunta feita ao elemento a do conjunto	2, sim ou não (isto é, o elemento a pertence ou não ao subconjunto)
. Escolha da resposta para a pergunta feita ao elemento b do conjunto	2, sim ou não.
⋮	⋮
. Escolha da resposta para a pergunta feita ao elemento v do conjunto	2, sim ou não

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos 2^7 seqüências de 7 respostas "sim" ou "não". Portanto, temos 2^7 subconjuntos de A.

Observar que o conjunto vazio corresponde à seqüência de 7 respostas "não".

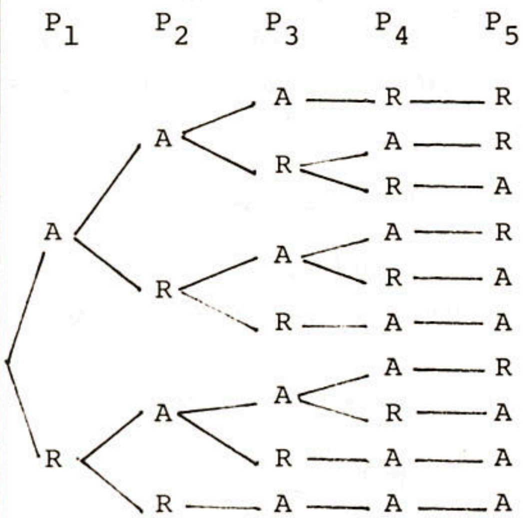
C. Árvore de possibilidades.

Objetivo: Utilizar a árvore de possibilidades em problemas nos quais não é aplicável o Princípio Multiplicativo.

Por ser um instrumento eficaz para auxiliar a resolução de problemas de contagem, a árvore de possibilidades pode ser utilizada tanto nos problemas em que se aplica o Princípio Multiplicativo como em outros, nos quais os princípios multiplicativo e aditivo se articulam.

Problema nº 24

Quantos anagramas é possível formar com as 5 letras da palavra ARARA?



Possibilidades

AAARR
AARAR
AARRA
ARAAR
ARARA
ARRAA
RAAAR
RAARA
RARAA
RRAAA

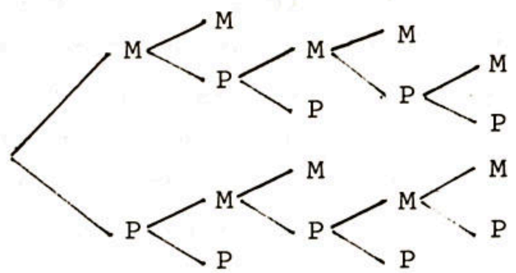
Observe que as cadeias iniciadas por A e R não apresentam a mesma quantidade de anagramas.

Problema nº 25

Marcos e Paulo disputam entre si um torneio de tênis. O primeiro a ganhar 2 partidas seguidas ou 3 alternadas vence o torneio. O diagrama seguinte nos fornece os resultados possíveis no torneio.

Na árvore, cada letra indica o vencedor da partida.

Possibilidades



MM
MPMM
MPMPN
MPMPP
MPP
PMM
PMPMM
PMPMP
PMPP
PP

Examinando cada ramo, podemos perceber qual foi o vencedor do torneio. Notemos, ainda, que os ramos da árvore iniciados por M e P são simétricos.

Problema nº 26

As equipes A e B disputam um torneio de basquete. A primeira a ganhar 2 jogos seguidos ou 4 alternados vence o torneio. De quantas maneiras o torneio pode se desenrolar?

Resposta

14.

Problema nº 27

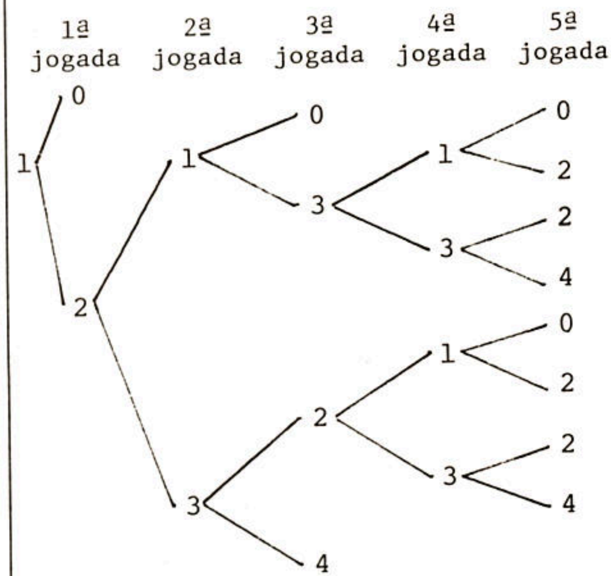
Um homem tem oportunidade de jogar na roleta, no máximo, 5 vezes. Em cada jogada ele ganha ou perde um cruzado novo. Ele começa com um cruzado novo e é obrigado a encerrar a série de jogadas se ocorrer uma destas hipóteses:

a) ele perde todo seu dinheiro;
b) ele ganha 4 cruzados novos.

De quantas maneiras o jogo pode se desenrolar?

Note que os enunciados de problemas de combinatória, onde existam várias restrições, devem possuir uma redação muito clara.

Cada ramo da árvore descreve a maneira pela qual o jogo pode se desenrolar. Cada número, no diagrama, representa a quantidade de cruzados novos que o jogador tem naquele momento. Observe que o jogo pode ocorrer de 11 maneiras diferentes. Note que ele parará antes da 5ª jogada, apenas em 3 desses casos. O resultado do jogo se encontra no final de cada ramo.



Possibilidades

10
1210
121210
121212
121232
121234
123210
123212
123232
123234
1234

Logo, o jogo pode se desenrolar de 11 maneiras.

Observe que o jogador pode ganhar em 7 desses casos e perder em 4.

III. SISTEMATIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE ARRANJOS E COMBINAÇÕES

Até este momento, nomenclatura, definições, fórmulas relativas a Arranjos, Permutações e Combinações não foram abordados. As idéias relativas a esses conceitos foram desenvolvidas intuitivamente pelos alunos durante o trabalho com o Princípio Multiplicativo.

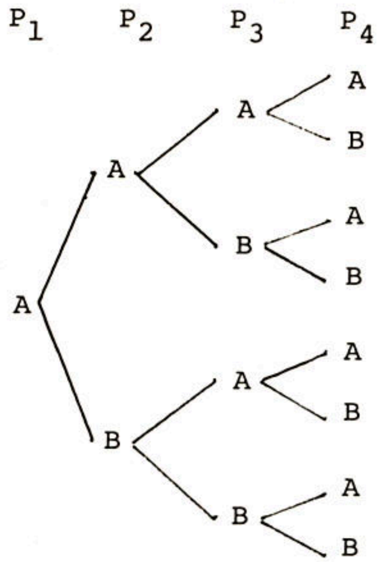
Os problemas 3 (3ª observação), 4, 11, 12, 13, que envolvem a noção de arranjos com repetição, foram sugeridos para várias etapas do curso, desde as mais livres até àquelas em que se pretendeu uma sistematização da contagem.

A. Arranjos com repetição.
Objetivo: Sistematizar o conceito de arranjos com repetição.

Passaremos agora à sistematização do conceito de **arranjo com repetição**. Inicialmente propomos um exemplo, a saber:

Descrever e contar os arranjos com repetição de ordem 4, com os objetos A e B.

Começaremos pelos agrupamentos que se iniciam com o objeto A.



Possibilidades

(A, A, A, A)
(A, A, A, B)
(A, A, B, A)
(A, A, B, B)
(A, B, A, A)
(A, B, A, B)
(A, B, B, A)
(A, B, B, B)

Analogamente, existem mais 8 seqüências de 4 elementos começando por B.

<u>Definição</u>

Chama-se arranjo com repetição (ou completo) de ordem k, de n objetos distintos, toda seqüência de k objetos, selecionados entre os n objetos dados.

Agora, passaremos à obtenção do número de arranjos com repetição que indicaremos por $AR_{n,k}$, através do Princípio Multiplicativo, da seguinte maneira.

Queremos formar seqüências com k objetos. Indicaremos cada posição dentro da seqüência com P_i $(1 < i < k)$. Cada seqüência terá o seguinte aspecto: $(P_1, P_2 \ldots P_k)$.

Cabe observar que duas seqüências $(P, P_2, \ldots P_k)$ e $(P_{1'}, P_{2'}, \ldots P_{k'})$ são iguais, se e somente se $P_1 = P_{1'}$; $P_2 = P_{2'}$; ... $P_k = P_{k'}$.

A sistemática de formação das seqüências será:

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um elemento para a posição P_1	n
. Escolha de um elemento para a posição P_2, após a escolha para P_1	n
⋮	⋮
. Escolha de um elemento para a posição P_k, após a escolha para P_1, P_2, ... P_{k-1}	n

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos n^k seqüências com n elementos.

$$\boxed{AR_{n,k} = n^k}$$

Além de $AR_{n,k}$ podemos optar pelas simbologias $\bar{A}_{n,k}$; $\bar{A}_n^k$ ou $A_{n',k}$.

Problema nº 28

Quantos números de cinco algarismos podemos formar com os algarismos diferentes de zero?

Resposta

9^5.

Problema nº 29

Quantos são os arranjos completos dos elementos a, b, c, ... j, tomados 6 a 6, em que o ele mento a não figure na primeira posição?

Resposta

9×10^5.

Problema nº 30

Quantas chapas de automóveis, nos modelos usados atualmente, poderão ser feitas?

Solução

Sabemos que as chapas são do tipo FA 1055, ou seja, são compostas de duas letras, nas duas primeiras posições e quatro algarismos nas demais posições. As letras são escolhidas no nosso alfabeto, acrescido de K, W, Y (portanto, 26 letras). Os algarismos são os do sistema decimal.

Assim, temos:

- nº de pares de letras que poderão ser usados nas chapas: $AR_{26,2} = 26 \times 26 = 26^2$
- nº de quádruplas de números que poderão ser usados nas chapas: $AR_{10,4} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

Como, para cada par de letras, temos 10^4 quádruplas de números, o total de chapas que poderão ser feitas é:

$$AR_{26,2} \times AR_{10,4} = 26^2 \times 10^4$$

Como, por conveniência, algumas seqüências não são utilizadas (por exemplo, AT 0000), do total encontrado ($26^2 \times 10^4$), deverá ser subtraído 10^4 (nº de chapas com quatro zeros), isto é:

o nº total de chapas que poderão ser feitas para serem utilizadas é: $26^2 \times 10^4 - 10^4 = 10^4(26^2 - 1)$

Se necessitarmos de mais chapas, tendo em vista uma demanda maior, passaremos a construir chapas com 7 posições ou então trocaremos um algarismo por uma letra. Neste último caso teremos $26^3 \times 10^3$ chapas (incluídas as que apresentam três zeros).

B. Arranjos simples.
Objetivo: Sistematizar o conceito de arranjo simples

A exemplo do que foi dito para arranjos com repetição, observamos que o trabalho com as idéias referentes ao conceito de arranjos simples também foi efetuado em etapas anteriores (por exemplo, problema 24 quando da sistematização da contagem).

Tomando como exemplo o conjunto $L = \{a, b, c, d\}$ e as possíveis seqüências (agrupamentos ordenados) de uma, duas, três e quatro letras distintas, que podemos formar com os elementos deste conjunto, abordaremos uma das maneiras de se enfocar o conceito de **arranjo simples**. Para seqüências de uma letra temos 4 possibilidades, a saber: (a), (b), (c), (d).

Para as seqüências de 2 letras, fixada uma letra para a primeira posição, só poderão ocupar a segunda posição as três letras restantes. As seqüências serão:

(a,b)	(b,a)	(c,a)	(d,a)
(a,c)	(b,c)	(c,b)	(d,b)
(a,d)	(b,d)	(c,d)	(d,c)

Para as de três letras temos: fixada também a segunda posição, a terceira posição só poderá ser ocupada pelas duas letras restantes. Resulta:

(a,b,c)	(b,a,c)	(c,a,b)	(d,a,b)
(a,b,d)	(b,a,d)	(c,a,d)	(d,a,c)
(a,c,b)	(b,c,a)	(c,b,a)	(d,b,a)
(a,c,d)	(b,c,d)	(c,b,d)	(d,b,c)
(a,d,b)	(b,d,a)	(c,d,a)	(d,c,a)
(a,d,c)	(b,d,c)	(c,d,b)	(d,c,b)

Para as seqüências de quatro letras: fixadas as três primeiras letras, a quarta posição só poderá ser ocupada pela letra ainda não utilizada. Logo, neste caso, o número de seqüências de três termos coincide com o número de seqüências de quatro termos.

Algumas seqüências de 4 termos são:

(a,b,c,d); (a,b,d,c); (d,c,a,b); etc.

Denominação

As várias seqüências de 2 elementos são chamadas **arranjos binários** do conjunto L. As seqüências de três elementos, **arranjos ternários** e as de quatro elementos são os **arranjos quaternários** em que usamos todos os elementos L. Estes últimos também são chamados **permutações dos elementos de L.**

Contagem

Para cada um dos quatro elementos que podem ocupar a primeira posição, podemos ter três elementos para ocupar a segunda posição; logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos 4 x 3 arranjos binários.

Este número é simbolizado por: $A_{4,2} = 12$.

Analogamente, temos:

$A_{4,1} = 4$; $A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$; $A_{4,4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Definição

Dado um conjunto E de n elementos, chama-se arranjo simples de ordem k ($k \leq n$), toda seqüência de k elementos distintos escolhidos entre os n.

O número de arranjos simples de n objetos, tomados k a k, é simbolizado por $A_{n,k}$ ou A_n^k. Para efetuar o cálculo do número $A_{n,k}$, indicaremos as posições da seqüência de k elementos por P_i, com i = 1, 2, ..., K.

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Escolha de um elemento para a posição P_1	n, qualquer elemento de E
. Escolha de um elemento para a posição P_2, após a escolha para P_1	n - 1, exceto o elemento que foi escolhido para a posição P_1
. Escolha de um elemento para a posição P_3, após as escolhas para P_1 e P_2	n - 2
⋮	⋮
. Escolha de um elemento para a posição P_k, após as escolhas para P_1, P_2, ..., P_{k-1}	n - (k - 1)

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,k} = n.(n-1) . (n-2) \ldots (n-k+1)$$

Num segundo enfoque, as definições de arranjo simples e arranjo com repetição poderiam ser dadas da seguinte maneira:

"Seja E um conjunto com n elementos. Arranjo dos n elementos de E, tomados k a k, é toda seqüência de k elementos de E."

Diz-se "arranjo simples" se os termos das seqüências forem distintos e $k \leq n$. Caso contrário, diz-se "arranjo com repetição".

Num terceiro enfoque, relacionamos o conceito de arranjo simples com as funções injetoras nas quais o domínio possui k elementos e o contradomínio n.

Problema nº 31

a) Quantos anagramas de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra INJETORA?

b) Quantos começam por A?

c) Quantos terminam por TO?

d) Quantos contêm a letra R?

e) Quantos não contêm a letra R?

Resposta

a) $A_{8,4} = 8 . 7 . 6 . 5 = 1680$

b) $A_{7,3} = 210$

c) $A_{6,2} = 30$

d) $4 . A_{7,3} = 840$. Neste caso, retiramos a letra R e formamos os arranjos simples com as sete letras restantes, tomadas 3 a 3. Para cada um deles existem 4 maneiras de colocar o R. Por exemplo: RINT, IRNT, INRT e INTR.

e) $A_{7,4} = 840$. Agora retiramos novamente a letra R do conjunto de possibilidades e formamos os arranjos simples de 7 elementos 4 a 4.

Nota: Como qualquer um dos anagramas formados contém ou não a letra R, devemos ter:
$A_{8,4} = 4 . A_{7,3} + A_{7,4}$.

Esta propriedade é válida para os arranjos simples e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A_{n,k} = k . A_{n-1,k-1} + A_{n-1,k}$$

Será interessante, posteriormente, verificar a validade desta identidade, através do desenvolvimento algébrico usando fatorial.

C. Fatorial

Objetivo: Simplificar os cálculos combinatórios nos quais aparecem produtos de fatores naturais sucessivos

A partir de exemplos numericos, onde aparecem produtos de fatores naturais sucessivos, cria-se a necessidade de simplificar a notação, para outra mais concisa e econômica. Por exemplo: nos problemas anteriores, fazer um levantamento dos produtos do tipo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3.2.1$ com $n \in N^*$ (por exemplo, no problema 32 temos $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades de formar todos os anagramas com as letras da palavra RATO). Uma forma de simplificar essa notação é indicá-la por $n!$ (no problema 32 teríamos $4!$). Após esse trabalho, caberia apresentar uma definição de fatorial:

chama-se fatorial de $n \in N$ e indica-se por $n!$ o número natural definido por:

$$n! = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3.2.1, \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

De imediato, para $n > 0$, vale a seguinte propriedade:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

A convenção $0! = 1$, da definição, deve-se ao interesse de que a propriedade anterior seja válida também para $n = 1$, isto é, quando $n = 1$, então $1! = 0! \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.

D. Permutações simples.

Objetivo: sistematizar o conceito de permutação simples.

Uma **permutação** de n objetos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos. Por exemplo, as permutações das três letras a, b, c são:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Podemos, também, interpretar cada permutação de n elementos como um arranjo simples de n elementos tomados n a n, ou seja, $k = n$.

<u>Definição</u>

Seja E um conjunto de n elementos. Chama-se permutação simples de n elementos, qualquer seqüência de n elementos distintos de E.

Contagem

O número de permutações de n elementos distintos é indicado por P_n. Calculemos P_n, utilizando o Princípio Multiplicativo.

Consideremos os n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e as n posições P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ da seqüência $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

Acontecimentos	Nº de possibilidades
. Preenchimento da 1ª posição	n
. Preenchimento da 2ª posição, após o preenchimento da 1ª	n - 1
⋮	⋮
. Preenchimento da n-ésima posição, após o preenchimento das anteriores	1

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$P_n = n(n-1)\ (n-2)\ .\ \ldots\ .\ 1 = n!$

Por extensão, define-se:

$P_0 = 0! = 1$ e $P_1 = 1! = 1$.

Observação

Como P pode ser entendido como $A_{n,n}$, então, $A_{n,n} = n!$.

A título de fixação do conceito e da fórmula de cálculo do número de permutações simples, alguns problemas existentes em livros do 2º grau devem ser resolvidos. Por exemplo:

Problema nº 32

De quantos modos podem ser arrumadas as letras da palavra VESTIBULAR, de forma que se mantenham juntas, numa ordem qualquer, as letras LAR?

Resposta

$8! \times 3! = 241.920.$

Problema nº 33

Qual é a soma dos números obtidos pelas permutações simples dos algarismos 2, 3, 4 e 5?

Solução

Temos ao todo 4! números. Sabemos que 6 deles terminam por 2, outros 6 por 3, outros 6 por por 4 e os 6 restantes por 5. Logo, a soma dos algarismos das unidades em todos eles é:

$$6 \times (2 + 3 + 4 + 5) = 84$$

O mesmo ocorre com a soma dos algarismos das dezenas, centenas e unidades de milhar. Portanto, a soma será:

$$84 + 10 \times 84 + 100 \times 84 + 1000 \times 84 = 93.324$$

Problema nº 34

Entre as permutações das letras a, b, c, d, e, f, g, ordenadas alfabeticamente, que posição ocupa a seqüência (c, g, a, d, b, e, f,)?

Resposta

A posição 2047º.

E. Combinação simples

Objetivo: Sistematizar o conceito de combinação simples.

Consideremos, como exemplo, os subconjuntos de {a, b, c, d} que possuem 3 elementos.

{a, b, c} {a, b, d} {a, c, d} {b, c, d}

Neste caso, não devemos identificar cada subconjunto com uma seqüência, uma vez que teríamos 6 seqüências diferentes representando o mesmo subconjunto; por exemplo, as seqüências distintas (a, c, d); (a, d, c); (c, a, d); (c, d, a); (d, a, c) (d, c, a) representam o mesmo subconjunto {a, c, d}.

Isso significa que se considerarmos todas as permutações dos elementos de cada um daque les quatro subconjuntos teremos todos os 24 arranjos simples de 4 elementos tomados 3 a 3.

Com isto, concluímos que o número de arranjos sem repetição dos elementos a, b, c, d, tomados 3 a 3, é igual a seis vezes o número de combinações desses mesmos elementos tomados 3 a 3 (cada combinação "gera" $P_3 = 6$ arranjos). Então:

$$A_{4,3} = P_3 \cdot C_{4,3}$$

Definição

Dado um conjunto E, com n elementos, qualquer subconjunto com k elementos de E é uma combinação simples dos elementos de E, tomados k a k.

Contagem

O número de subconjuntos acima será designado por

$$C_{n,k} \quad \text{ou} \quad C_n^k \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k}$$

Lê-se: número de combinações de n elementos tomados k a k ou número binomial n sobre k.

Sabemos que existem $C_{n,k}$ subconjuntos de k elementos escolhidos no conjunto E. Efetuando em cada um desses subconjuntos as k! permutações possíveis, obteremos todos os arranjos simples de n elementos tomados k a k. Logo,

$$A_{n,k} = P_k \cdot C_{n,k}$$

ou seja:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Problema nº 35

Contamos com 5 atletas e precisamos eleger uma equipe de 3 deles para enviar a um campeo nato. De quantas maneiras podemos fazê-lo?

Resposta

$C_{5,3} = 10.$

Problema nº 36

Um total de 28 apertos de mão foram trocados no final de uma reunião. Sabendo-se que cada pessoa cumprimentou todas as outras, pergunta-se o número de pessoas presentes à reunião.

Solução

É um problema inverso em que se conhece o número de combinações de n pessoas tomadas 2 a 2.

$$C_{n,2} = 28 \therefore n = 8$$

Problema nº 37

Quantas retas são determinadas por 7 pontos coplanares, dos quais 3 estão em linha reta?

Solução

Sugerimos fazer uma figura e lembrar que as combinações dos 3 pontos colineares, tomados 2 a 2, determinam uma única reta.

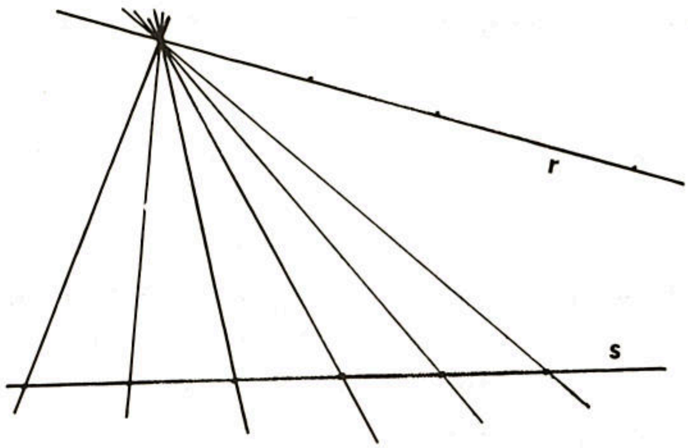
$$C_{7,2} - C_{3,2} + 1 = 19$$

Problema nº 38

Dados 10 pontos coplanares, sendo que 6 deles pertencem a uma reta e 4 deles pertencem a outra, pergunta-se:

a) Quantas retas eles determinam?

b) Quantos triângulos eles determinam?



Solução

a) $4 \cdot C_{6,1} + 2 = 26$ ou $6 \cdot C_{4,1} + 2 = 26$

b) $4 \cdot C_{6,2} + 6 \cdot C_{4,2} = 96$

Problema nº 39

Resolver a equação: $C_{x,x-2} + A_{x,2} = (AR)_{x,2}$

Resposta

$x = 3$

Problema nº 40

Resolver a equação: $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{n-1} = 25$

Resposta

$n = 5$

Problema nº 41

Queremos saber de quantas maneiras diferentes um pai pode viajar com seus 5 filhos. Sabemos que pode viajar com um ou com vários de seus filhos, porém nunca sozinho.

Resposta

$2^5 - 1 = 31$

$(C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5})$

7.4 Probabilidade

I. APRESENTAÇÃO	Diretrizes gerais para o ensino de Probabilidade no 2º grau.
II. INTRODUÇÃO	Aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de Probabilidade.
III. PROBABILIDADE DE UM EVENTO	
- *Experimento aleatório*	Conceito de experimento aleatório, espaço amostral, evento.
- *Regularidade estatística*	Conceito de freqüência relativa, comportamento da freqüência relativa, conceito de eventos mutuamente excludentes.
- *Probabilidade de um evento*	Conceito de probabilidade de um evento, espaços equiprováveis, probabilidade de um evento em espaços equiprováveis, eventos complementares.
- *Produto de probabilidades*	Cálculo de probabilidade de eventos independentes.
- *Probabilidade condicional*	Cálculo de probabilidade de eventos dependentes (cálculo de probabilidade condicional); uso de probabilidade condicional.
- *Soma de probabilidades*	Cálculo da probabilidade de um evento que pode ser "partido" em outros mutuamente excludentes 2 a 2; cálculo da probabilidade de um evento união de outros não mutuamente excludentes.

Probabilidade

I. APRESENTAÇÃO

Assim como na Análise Combinatória, também em Probabilidade, os problemas constituem a parte central do curso. Os problemas comparecem em grande número e estão graduados de acordo com o grau de complexidade das idéias que pretendemos trabalhar com os alunos.

Os problemas propostos poderão desempenhar uma dupla função. Por um lado, servem de estopim para as discussões sobre as primeiras idéias envolvidas nos conceitos a serem apreendidos e, por isso mesmo, os alunos deverão ter condições de discuti-los livremente, de propor resoluções, as mais informais possíveis para, paulatinamente, orientados pelo professor, sistematizarem tais idéias e aperfeiçoarem a linguagem utilizada.

Após esta fase de sistematização, em que o trabalho com o conteúdo se desliga dos problemas, voltamos novamente a eles, com o objetivo de aplicar conceitos já elaborados pelos alunos; é nesse trabalho que novas dificuldades surgem e para solucioná-las novos conceitos devem ser compreendidos, de modo a resolver novos problemas, e assim por diante.

A quantidade de problemas aqui propostos pode parecer excessiva, no entanto, nossa opção foi a de oferecer o maior número possível de exemplos, para que o professor, de acordo com a sua clientela e com os seus objetivos, opte por este ou por aquele problema.

Nesta proposta, a visão intuitiva de probabilidade deve servir de guia nas resoluções dos problemas, como no início do tratamento de um conceito.

Definições e propriedades só aparecem no decorrer do trabalho com os conceitos, após sua compreensão e a partir de situações-problema que sejam concretas para os alunos. As propriedades enunciadas não são demonstradas formalmente. Inicialmente, a linguagem de conjuntos é evitada o máximo possível, tentando garantir, antes de tudo, a compreensão das idéias fundamentais e, só no final do curso, lança-se mão dela, se for necessário e adequado à clientela a que se destina o curso.

Não são pressupostos deste trabalho com Probabilidade os conteúdos desenvolvidos em Análise Combinatória. A intenção desta Proposta é de apresentar, na medida do possível, esses dois temas com tratamentos independentes.

A maioria dos problemas, aqui sugeridos, está relacionada com a sorte nos jogos de dados, baralhos, bolas coloridas, papeizinhos numerados, loto e moedas. O curso de Probabilidade deve estar sempre vinculado ao manuseio deste material. Pacientemente, os alunos devem ser organizados para realizar, às vezes, dezenas de experimentos repetidos com esses materiais, de modo que se possa, de certa forma, validar os resultados dos problemas propostos, ou mesmo sugerir procedimentos de resolução. As apostas entre os alunos devem ser utilizadas como medida da intuição de cada um. A intuição é uma medida que, às vezes, falha, e deve ser contestada à vista dos cálculos, que visam ao estudo da "Probabilidade".

O ponto decisivo é que os alunos saibam distinguir claramente, em cada situação-problema, quando duas (ou mais) probabilidades devem ser multiplicadas e quando é que devem ser somadas.

Para sustentar essa distinção é sugerido um apoio visual que será explicado ao final dos itens "Produto de probabilidades" e "Soma de probabilidades".

Visando a alcançar os objetivos acima mencionados, sugerimos um trabalho inicial com freqüência relativa de eventos, na medida do possível experimental, vinculado às expectativas intuitivas dos alunos.

Também do ponto de vista intuitivo e sustentado pela experimentação, é colocada a questão da Regularidade Estatística, sem nenhuma pretensão de tratá-la formalmente, o que seria impossível nesse nível da aprendizagem de Probabilidade.

A abordagem inicial de probabilidade de um evento, num espaço amostral qualquer, está vinculada às propriedades de sua freqüência relativa. Posteriormente, este estudo toma um caráter independente da experimentação e restringe-se a espaços amostrais finitos e equiprováveis para, no final, se deter nas questões: quando e por que multiplicamos probabilidades, probabilidade condicional e quando e por que somamos probabilidades.

Este artigo consta de três partes:

I. Apresentação;

II. Introdução;

III. Probabilidade de um evento.

Nessa apresentação, nossa intenção é caracterizar o ensino de Probabilidade que estamos sugerindo para o 2º grau, enquanto que na Introdução mencionamos um breve histórico do desenvolvimento de conceitos envolvidos em Probabilidade.

A terceira parte consta de sugestões de conteúdo, com observações de caráter metodológico, bem como sobre o próprio conteúdo.

II. INTRODUÇÃO

Lançando uma moeda, qual face ficará para cima: cara ou coroa? Lançando dois dados, qual será a soma dos pontos das faces superiores: 2, 3, 4, ... ou 12?

Há inúmeras situações como as duas que acabamos de mencionar, situações imprevisíveis, no sentido em que não podemos dizer antecipadamente qual será seu resultado. Nestes casos, em que existem dois ou mais resultados possíveis, surge então a seguinte idéia: estimar as chances de ocorrência de cada um dos resultados por meio de um modelo matemático. É esse tipo de cálculo que estudaremos na Teoria das Probabilidades. Veja um dos problemas que será resolvido neste capítulo: assinalando 5 dezenas num cartão da loto, qual é a probabilidade de acertar a quina?

A Teoria das Probabilidades surgiu no século XVI, da análise dos chamados jogos de azar, como os jogos de cartas e a roleta. O primeiro matemático a conceituar probabilidade e a calculá-la corretamente parece ter sido Cardano (1501-1576). Depois, Galileu Galilei (1564-1642) analisou problemas sobre jogos de dados. Mas o ponto de partida do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades pode ser atribuído a dois matemáticos: Fermat (1601-1665) e Pascal (1623-1662).

Um amigo de Pascal, que freqüentemente apostava em jogos de azar, levou-lhe problemas como este, por exemplo: jogando um par de dados 24 vezes sucessivas, é vantajoso apostar que em nenhuma das 24 vezes sairá 6 nos dois dados ou é preferível apostar que isso não acontecerá, ou seja, que pelo menos uma vez sairá 6 nos dois dados? Pascal interessou-se por problemas desse tipo e escreveu sobre eles a Fermat. A correspondência entre esses dois matemáticos deu então corpo à Teoria das Probabilidades.

Daí em diante, essa teoria foi ampliando cada vez mais seu campo de ação, deixando de limitar-se ao estudo dos jogos. Por exemplo, por volta de 1760, houve grande discussão entre matemáticos a respeito da seguinte questão: as pessoas deveriam receber uma espécie de vacina contra a varíola, então existente, ou os cálculos probabilísticos indicavam que ela não era eficaz?

Continuando esta breve história da Teoria das Probabilidades, passamos a 1850. Por volta desse ano, um estudioso de plantas chamado Mendel, observando o cruzamento de diferentes espécies de plantas de ervilha, verificou que as características hereditárias dos descendentes obedeciam a certos cálculos probabilísticos. Mendel propôs então as leis da herança, que regulamentam a transmissão de caracteres hereditários, hoje conhecidas como leis de Mendel. Essas leis não tiveram aceitação imediata: foram ignoradas durante 35 anos. Isso se deu, provavelmente, porque os cientistas da época não aceitavam o fato de que cálculos matemáticos, probabilísticos, pudessem ser aplicados no estudo da reprodução de seres vivos. Posteriormente, no início do século XX, as leis da herança foram redescobertas por outros cientistas que, só depois de suas descobertas, ficaram sabendo que elas já tinham sido enunciadas por Mendel, há muito tempo. Do conhecimento das leis de Mendel, decorreu a edificação de todo um ramo da Biologia, a Genética, cujos conhecimentos estão sendo aplicados na agricultura e na criação de animais, possibilitando melhoria de condições na vida humana.

Finalmente, passando aos dias de hoje, encontraremos a Teoria das Probabilidades bastante relacionada com a Estatística que, como sabemos, tem aplicações (algumas vezes mal utilizadas) nos mais diversos ramos do conhecimento.

III. PROBABILIDADE DE UM EVENTO

CONTEÚDO	SUGESTÕES/OBSERVAÇÕES
Experimento	A Teoria das Probabilidades estuda os chamados experimentos aleatórios, caracterizados pelas seguintes propriedades:

a) experimentos que podem ser repetidos indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas;

b) em qualquer repetição do experimento, não sabemos, com certeza, qual particular resultado, de todos os possíveis, irá ocorrer, embora se possa precisar quais são esses possíveis resultados;

c) experimentos que, executados um "grande número de vezes", apresentam uma regularidade no valor de sua freqüência relativa. Embora essa afirmação pareça ter um caráter exclusivamente experimental, na verdade, existe um resultado matemático que garante tal regularidade, a Lei dos Grandes Números[1], que não será aqui enunciada, por transcender os objetivos desta Proposta. No entanto, a idéia que está por trás da utilização dessa lei é a seguinte:

Se alguém desejar calcular a probabilidade de ocorrer um certo evento, por meio de muitas repetições de um experimento, ou seja, por meio da freqüência relativa da ocorrência daquele evento, poderá proceder da seguinte maneira:

1º) fixar um "grau de confiabilidade" a respeito da freqüência relativa, digamos 95%;

2º) fixar um "erro tolerável" para a freqüência relativa, digamos 0,01 (o erro é menor de 1 centésimo, ou seja, os dois primeiros algarismos à direita da vírgula são confiáveis);

3º) usar a Lei dos Grandes Números para determinar o menor número de vezes que o experimento deverá ser realizado, a fim de "aceitarmos" a freqüência relativa como sendo a probabilidade de ocorrer o evento, com um "grau de confiança" e um "erro aceitável" pré-estabelecidos.

No 2º grau, não avaliaremos a probabilidade de

---

[1]MEYER, Paul L. Probabilidade. aplicações à estatística. Rio de Janeiro, Ao livro Técnico/EDUSP, 1969.

um evento utilizando a "lei dos Grandes Números".

Devido à propriedade b, vamos considerar que um experimento aleatório apresente pelo menos dois resultados possíveis. Assim, retirar uma bola de uma urna que contenha só bolas pretas, observando sua cor, não é um experimento que ofereça interesse.

Espaço Amostral

Exemplo 1

Lançando um dado, ao acaso, se observarmos o número de pontos da face superior, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Entretanto, ao lançar o dado, poderíamos estar interessados em observar se o resultado é ou não divisor de 6. Nesse caso, os resultados possíveis são "divisor de 6" ou "não divisor de 6".

> Num experimento aleatório, um conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral.

Assim, no exemplo 1, primeiro caso, o espaço amostral é formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, enquanto que, no segundo caso, o espaço amostral possui somente os elementos "divisor de 6" e "não divisor de 6".

Comentário

A nomeação de um espaço amostral deverá decorrer da necessidade de aperfeiçoar a comunicação entre professor e alunos e, sempre que possível, partindo dos alunos, à medida que esse conceito vai sendo apreendido por eles.

Poderíamos, então, representar o espaço amostral $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ por S, E ou A. Se S nomeia um espaço amostral de um experimento, o número de elementos de S poderá ser anotado por $n(S)$, ou $\#(S)$, ou número de elementos de S.

Observamos no exemplo 1, que ao experimento "lançar um dado ao acaso" foram associados dois espaços amostrais distintos: um deles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, quando pretendíamos observar o número de pontos da face superior e outro, {divisor de 6, não divisor de 6}, quando estávamos interessados em observar se o número obtido era ou não divisor de 6. A determinação de um espaço amostral, para um determinado experimento, depende do que se pretende observar em tal experimento.

Na segunda situação do exemplo 1, caso o dado seja perfeito[2], a "chance" de ocorrer um divisor de 6 é maior do que a chance de ocorrer um número não divisor de 6, uma vez que entre 1 e 6 há quatro números que são divisores de 6 e apenas dois que não o são. O mesmo não se pode garantir, caso nada se saiba sobre o dado em questão.

De qualquer maneira, o espaço amostral {divisor de 6, não divisor de 6} está, de certa forma, vinculado ao espaço amostral {1, 2, 3, 4, 5, 6}, que possui maior riqueza de informações.

Observamos ainda que, nos dois casos, cada resultado possível da experiência corresponde a um único elemento do espaço amostral. Assim, no segundo caso, a obtenção do 5 corresponde unicamente ao elemento "não divisor de 6" do segundo espaço amostral.

Por outro lado, cada elemento de um espaço amostral corresponde a pelo menos um resultado da experiência; em {divisor de 6, não divisor de 6}, o elemento "divisor de 6" corresponde a 3, além do 1, 2 e 6.

Essa correspondência, descrita no parágrafo anterior, entre todos os resultados possíveis do experimento e os elementos do espaço amostral é que o caracteriza como tal. Por exemplo {divisor de 6, múltiplo de 6} não pode ser um espaço amostral do experimento do exemplo 1, pois o resultado 5 não é divisor de 6 nem múltiplo de 6.

---

[2]Entendemos por dado perfeito, aquele da forma de um cubo, de densidade homogênea, de modo que suas faces tenham "mesma chance" de ficar para cima, quando lançado ao acaso.

Exemplo 2

Considere o experimento que consiste em retirar uma carta de um baralho com 52 cartas. Observando a carta retirada, explicite mais de um espaço amostral vinculado a esse experimento.

Resolução

Se estamos interessados em identificar a carta retirada, o espaço amostral S será formado por todas as 52 cartas do baralho, isto é, formado por: ás de ouros, ás de copas, ..., reis de paus, rei de espadas. No entanto, se observarmos apenas a cor da carta retirada, o espaço amostral S' será formado por "vermelho" e "preto".

Ainda poderíamos estar interessados em identificar apenas o naipe da carta retirada. Nesse caso vincularíamos ao experimento o espaço amostral S", cujos elementos são: ouros, paus, copas e espadas.

Comentário

Neste exemplo, observamos que a "chance" de retirar uma carta vermelha é exatamente a mesma do retirar uma carta preta, caso o baralho não seja viciado; basta examinar o espaço amostral S, no qual entre os 52 resultados possíveis, 26 deles apresentam carta vermelha e os outros 26, cartas pretas. Isto evidencia a relação existente entre S e S', onde o primeiro é mais rico em informações que o segundo. O mesmo poderia ser dito a respeito de S e S".

Exemplo 3

Descreva um espaço amostral associado ao experimento que consiste em:

a) lançar duas moedas perfeitas[3] e observar a seqüência de caras e coroas;

---

[3]Vide nota 2.

b) lançar duas moedas perfeitas e observar o número de caras.

Resolução

a) O espaço amostral é formado por cara-cara, cara-coroa, coroa-cara, coroa-coroa.
b) Neste caso teremos um espaço amostral constituído por 0, 1 e 2, pois no lançamento das duas moedas podem ocorrer nenhuma cara, uma cara ou duas caras.

Exemplo 4

Suponha que no exemplo 3 estejamos interessados na ocorrência de resultados iguais, quando do lançamento das moedas. Descreva esses resultados possíveis.

Resolução

Quaisquer que sejam os espaços amostrais apresentados no exemplo 3, os resultados esperados podem ser assim descritos: coroa-coroa e cara-cara.

Esses dois resultados relacionados formam um "evento" associado ao experimento descrito no exemplo 4.

Podemos escrever, então, que:

Um evento é um conjunto de resultados possíveis de um experimento.

Comentário

Na terminologia da Teoria dos Conjuntos, evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral S associado a um experimento. Isto significa que o próprio espaço amostral é um evento.

Cada elemento do espaço amostral será denominado de evento elementar, muito embora isso não seja coerente com a definição de evento dada anteriormente.

Em outras palavras, estamos identificando cada resultado possível com o conjunto unitário formado por esse resultado; do ponto de vista do aluno, isto é totalmente irrelevante. É por isso mesmo que registraremos o evento elementar "obter resultados diferentes nas duas moedas indistinguíveis", do exemplo 3, por cara-coroa, aproximando-o muito mais do resultado obtido do que do conjunto unitário {(cara, coroa)}.

Quanto à nomeação de um evento, cabem aqui as mesmas observações feitas anteriormente sobre nomeação de um espaço amostral. Se, por exemplo, E representa um evento, anotaremos por n(E), ou #(E) o número de elementos desse evento.

Exemplo 5

Lança-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência obtida de caras e coroas. Explicite o evento "ocorrer mais caras do que coroas".

Resolução

Chamando de C a ocorrência "cara" e de K a ocorrência "coroa", o evento em questão, que chamaremos de E, é formado pelos elementos CCK, CCKC, CKCC, KCCC, CCCC e E possui 5 elementos.

Podemos anotar esse fato por:

E = {CCCK, CCKC, CKCC, KCCC, CCCC} e n(E) = 5

Para o mesmo experimento explicite os seguintes eventos:

A: ocorrer cara no 2º lançamento.

B: ocorrer tantas coroas quanto caras.

Resposta

A = {CCCC, CCCK, CCKC, KCCC, CCKK, KCCK, KCKC, KCKK}

B = {CCKK, CKCK, KCCK, KCKC, KKCC}

Regularidade Estatística

Trataremos agora, mais particularmente, de uma das propriedades que caracterizam um experimento aleatório, mencionada no início desse capítulo: a regularidade que se alcança ao repetirmos um experimento desse tipo um "grande número de vezes".

Regularidade de que?

O exemplo 6 tem o objetivo de responder à essa pergunta.

Freqüência relativa

Exemplo 6

Jogando 100, 200, 300, ..., 4000 vezes uma moeda, verificar, em cada caso, quantas vezes ocorre coroa.

Comentário

Esta é uma atividade que pode ser realizada em classe. Cada aluno joga uma moeda 100 vezes e registra quantas vezes aparece coroa.

O número de ocorrências de coroa para 200, 300, ..., 4000 jogadas poderá ser obtido acumulativamente. Por exemplo, o número de ocorrências de coroa em 200 jogadas será o número de ocorrências de coroa nas 100 jogadas do aluno nº 1 acrescido do número de ocorrências de coroa nas 100 jogadas do aluno nº 2; para 300 jogadas acrescenta-se o número de ocorrências de coroa das 200 jogadas anteriores às 100 do aluno nº 3 e assim por diante. Podemos colocar os dados obtidos, convenientemente, numa possível tabela:

nº de lançamentos	nº de ocorrências de coroa
100	
200	
300	
400	
⋮	
4000	

O que nos interessa, na verdade, é estabelecer uma relação entre o número de ocorrências de coroa e o número total de jogadas, isto é, uma relação de medida entre essas duas grandezas. Por isso mesmo é conveniente estabelecer o quociente entre seus valores correspondentes. Não teria muito sentido dizer, por exemplo, "obtive 17 coroas" ao lançar uma moeda, uma vez que nessa afirmação poucas informações são fornecidas; não conseguimos decidir se ter obtido 17 coroas é muito ou pouco, uma vez que não sabemos quantos lançamentos foram feitos.

Poderíamos, então, completar a tabela sugerida com a razão entre o número de ocorrências de coroa e o número total de lançamentos da moeda. Tal razão será denominada de <u>freqüência relativa</u> do evento "ocorrer coroa no lançamento de uma moeda", que anotaremos por evento A e sua freqüência relativa por f_A.

nº de lançamentos	nº de ocorrências de coroa	$f_A = \dfrac{\text{nº de ocorrências de coroa}}{\text{nº de lançamentos}}$
100		
200		
300		
400		
⋮		
4000		

Dada a simetria da moeda e acreditando em sua homogeneidade, nossa intuição nos leva a esperar que a chance de obtermos cara num lançamento é igual à de obtermos coroa; e, por isso, esperamos intuitivamente que, após "muitas" jogadas, a quantidade de coroas deve ser muito próxima da quantidade de caras obtidas.

No entanto, ao realizarmos o experimento 5, 10, 100, 200, 500, 1000, ... vezes, observamos que nossa expectativa nem sempre se verifica.

Apresentamos, a seguir, alguns resultados obtidos com a simulação do lançamento de uma moeda em um computador.

Foram simulados 10000 lançamentos de uma moeda, 17 vezes, e registrados, em cada vez, o número de caras obtido, bem como a freqüência relativa desse evento em cada um desses 10000 lançamentos.

Na tabela abaixo, N representa o número total de lançamentos.

N (< = 10000)	Nº de caras	Freqüência Relativa
250	127	.508
500	261	.522
1000	525	.525
1250	649	.5192
1500	764	.509333333
1750	882	.504
2000	997	.4985
2250	1107	.492
2500	1213	.4852
2750	1331	.484
3000	1451	.483666667
3250	1584	.487384615
3500	1700	.485714286
3750	1825	.486933333
4000	1952	.488
4250	2071	.487294118
4500	2204	.489777778
4750	2321	.488631579
5000	2438	.4876
5250	2580	.491428521
5500	2705	.491818182
5750	2818	.490086956
6000	2937	.4895
6250	3063	.49008
6500	3195	.491538462
6750	3322	.492148148
7000	3442	.491714286
7250	3577	.49337931
7500	3693	.4924
7750	3827	.493806452
8000	3955	.494375
8250	4082	.494787879
8500	4210	.495294118
8750	4337	.495657143
9000	4458	.495333333
9250	4590	.496216216
9500	4713	.496105263
9750	4849	.497333333
10000	4980	.498
10000	5019	.5019
10000	4973	.4973

(cont.)

(cont.)

N (< = 10000)	Nº de caras	Freqüência Relativa
10000	4917	.4917
10000	5062	.5062
10000	4999	.4999
10000	4981	.4981
10000	4898	.4898
10000	5079	.5079
10000	4987	.4987
10000	4920	.4920
10000	4944	.4944
10000	5064	.5064
10000	4987	.4987
10000	4933	.4933
10000	4967	.4967
10000	5044	.5044

Observando os dados da tabela, verificamos que, apesar da moeda ter sido lançada 10000 vezes, várias vezes, a freqüência relativa não é 0,5.

Observamos também que, para 10000 lançamentos, existe uma boa chance de que a freqüência relativa seja um número muito próximo de 0,5. No entanto, este fato não nega que poderíamos lançar uma moeda 10000 vezes e obter, por exemplo, 10000 caras; é verdade que a chance de isso acontecer é muitíssimo reduzida, caso a moeda seja perfeita.

Isso tudo significa que, quando dizemos, antes de lançar a moeda, a "probabilidade" de obtermos cara é 0,5 e verificamos que a freqüência relativa é, por exemplo, 0,48 para um certo número n de lançamentos, estamos cometendo um erro absoluto de 0,02.

Ao realizarmos a experiência, observamos que, à medida que aumentamos o número n de lançamentos, exis te a chance cada vez maior de diminuir o erro cometido, quando dizemos que a "probabilidade" de ocorrer cara é igual à freqüência relativa desse evento, para um determinado número de lançamentos.

O uso que temos feito da palavra probabilidade, até agora, tem se baseado em nossa intuição e nas experiências efetuadas. Não nos preocupamos ainda em defini-la formalmente, mas, mesmo intuitivamente, manifestamos um desejo de quantificar a chance de ocorrer um determinado evento.

Até este momento, essa quantificação tem sido feita a partir do que esperamos a respeito do comportamento dos objetos, como também dos experimentos que realizamos com eles. Na verdade, não precisamos jogar um dado 4000 vezes para esperar que, se ele for perfeito, a face com três pontos tenha uma chance em seis de ficar para cima.

Por outro lado, nada podemos esperar de uma máquina, que produz parafusos, quanto à chance de produzir um parafuso defeituoso, sem primeiro executar a experiência de fazê-la produzir parafusos, observar se eles são defeituosos ou não e estabelecer uma relação entre o número de parafusos defeituosos e o número total de parafusos por ela produzidos.

É nesse contexto que nos próximos dois exemplos vamos "estimar a probabilidade" de ocorrer um determinado evento, baseados na experiência e em sua freqüência relativa.

Exemplo 7

Escolha um editorial de um jornal (ou revista) que contenha pelo menos 1000 palavras. Registre o número de vezes que a letra a é usada em 50, 100, 150, ..., 1000 palavras desse texto. Baseado nesses resultados, como você poderia estimar a probabilidade de ocorrência da vogal a em um editorial desse jornal? Experimente repetir a experiência para a letra i.

Exemplo 8

Suponha que uma máquina produz parafusos que podem ser defeituosos (D) ou não ($\bar{D}$). Considere a experiência: examinar cada parafuso e registrar os eventos D e $\bar{D}$. Suponha que a experiência feita com determinada máquina mostrou o seguinte quadro:

Nº de parafusos produzidos e examinados (nº de ensaios)	Nº de parafusos defeituosos (nº de ocorrências de D)	Freqüência Relativa do evento D (f_D)
100	6	
200	19	
300	29	
400	45	
500	57	
600	70	
700	84	
800	98	
900	112	
1000	127	
2000	239	
3000	367	
4000	511	
5000	636	
6000	755	
7000	876	
8000	996	
9000	1121	
10000	1253	

a) Usando uma calculadora, calcule a freqüência relativa da ocorrência de um parafuso defeituoso (D), em cada caso e preencha a 3ª coluna da tabela. Estime a probabilidade de ocorrência do evento D.

b) Monte uma tabela semelhante à anterior para o evento $\bar{D}$ (a máquina produz um parafuso não defeituoso), considerando a mesma máquina. Estime a probabilidade de ocorrência de $\bar{D}$, isto é, a probabilidade de que a máquina produza um parafuso não defeituoso.

c) Compare os resultados correspondentes da 3ª coluna das duas tabelas.

Comentário

Cabem aqui mais algumas observações com relação à freqüência relativa de um evento.

Uma das propriedades que caracteriza a freqüência relativa de um dado evento A de um espaço amostral S, é que ela representa um número racional entre 0 e 1 (inclusive). De fato, na melhor das hipóteses, o evento A pode ocorrer em todas as repetições do experimento; isto significa que o número de ocorrências de A (que chamaremos n_a) é igual ao número de ensaios efetuados (que chamaremos n); como $f = \frac{n_A}{n}$, teríamos, na situação descrita, $f_A = 1$, valor máximo da freqüência relativa do evento A. Por outro lado, pode não ocorrer o evento A nas n repetições do experimento, o que significa $n_A = 0$ e portanto $f_A = 0$, menor valor possível da freqüência relativa do evento A.

Outra propriedade, que caracteriza freqüência relativa de um evento, diz respeito a eventos mutuamente excludentes (ou mutuamente exclusivos).

A seguir, partindo de um exemplo, conceituaremos eventos mutuamente excludentes, bem como suas propriedades.

Eventos mutuamente excludentes

Exemplo 9

Considere a experiência que consiste em jogar dois dados idênticos e observar os pares de resultados obtidos.

a) Descreva um espaço amostral desse experimento.

b) Considere os eventos A e B, tais que:
A é o evento "a soma dos pontos das faces é 5" e
B é o evento "os resultados dos dois dados são iguais"
Explicite os elementos desses eventos.

c) Quais são os resultados possíveis do evento:

"a soma das faces é 5 e os resultados dos dois dados são iguais", isto é, do evento "A e B".

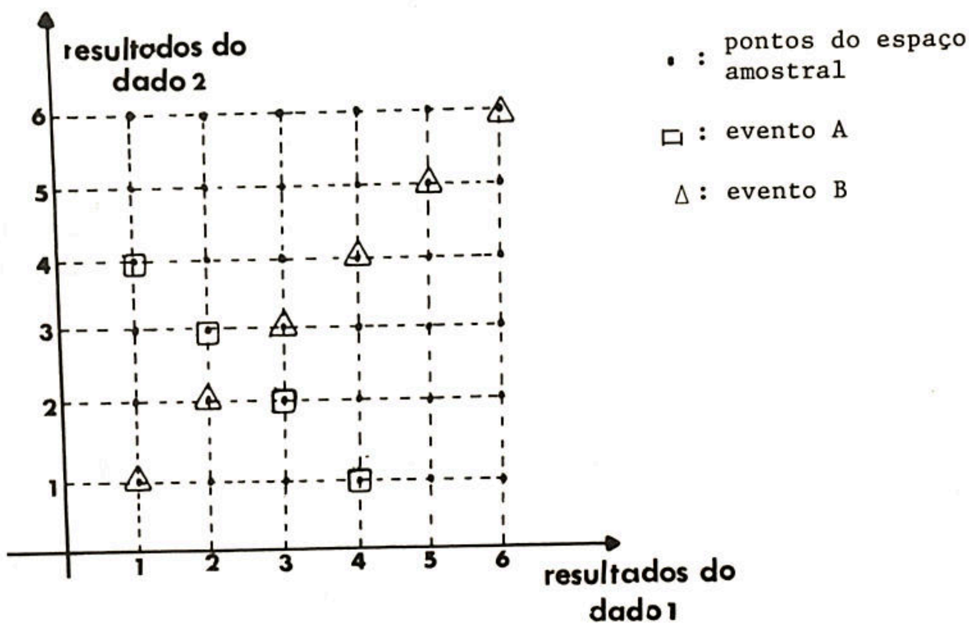
d) Considere o evento "a soma das faces é 5 ou os resultados dos dois dados são iguais", isto é, do evento "A ou B".

Resolução

a) O espaço amostral que consideraremos será constituído por 36 elementos formados por todos os pares de resultados obtidos, quando do lançamento de dois dados: (1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2),... (6,4), (6,5) e (6,6).

b) Os elementos do evento A são: (1,4), (2,3), (3,2) e (4,1). Os elementos do evento B são: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) e (6,6).

Podemos representar tanto o espaço amostral quanto os eventos A e B num plano cartesiano ortogonal:



c) O evento "A e B" não possui elementos. De fato, caso ocorra a soma de pontos 5, fica excluída a possibilidade de ocorrência de resultados iguais nos dois dados e reciprocamente (observa-se no gráfico que não há pontos do tipo △ ou do tipo □).

Nestas circunstâncias, dizemos que os eventos "a soma dos pontos das faces é 5" e "os resultados dos dois dados são iguais" são mutuamente excludentes (ou mutuamente exclusivos), pois o fato de ocorrer A impede a ocorrência de B, em outras palavras, é impossível ocorrer A e B simultaneamente.

d) Os resultados possíveis de "A ou B"[4] são: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) e (6,6).

Comentário

Para complementar o exemplo 9, no que se refere à freqüência relativa de eventos mutuamente excludentes, podemos solicitar aos alunos que cada um lance, 100 vezes, dois dados, registrando os resultados obtidos na seguinte tabela:

---

[4] Usaremos a expressão "A ou B" no sentido "inclusive", isto é, ocorrer A ou B significa, neste texto, ocorrer A ou B, ou ambos. Caso o conectivo ou deva ser considerado no sentido "exclusivo", o texto explicitará tal exigência.

nº de lançamentos	nº de ocorrências do evento A: "A soma dos pontos das faces é 5"	nº de ocorrências do evento B: "os resultados dos dois dados são iguais"	nº de ocorrências do evento A ou B: "a soma dos pontos das faces é 5 ou os resultados dos dois são iguais"	f_A	f_B	$f_{A \text{ ou } B}$
100						
200						
300						
400						
500						
1000						
1500						
2000						
2500						
3000						
3500						
4000						

No caso em que A e B são eventos mutuamente excludentes, a freqüência relativa na ocorrência do evento "A ou B" é a soma das freqüências relativas de A e de B.

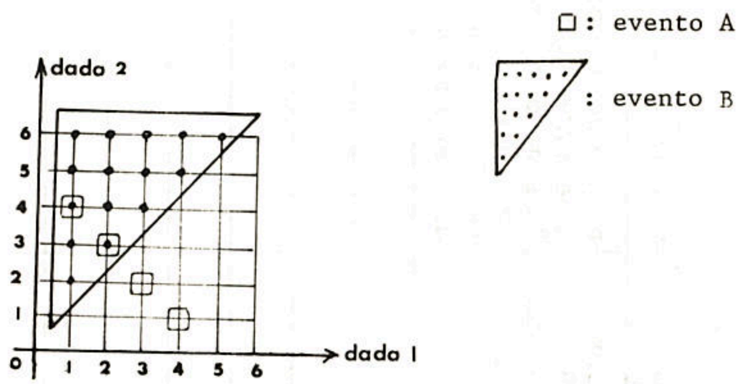
É bastante interessante propor aos alunos uma experiência semelhante a essa, para eventos que não são mutuamente excludentes.

Por exemplo, em relação ao mesmo experimento, considerar os eventos:

A: a soma dos pontos das faces é 5.

B: o número de pontos do primeiro dado é menor que o do segundo.

Num esquema gráfico, teríamos:



Verificar, após 4000 lançamentos, que, nesse caso, é provável que $f_{A\text{ ou }B} \neq f_A + f_B$.

Após terem sido executadas essas duas últimas experiências e discutidos seus resultados, algumas idéias deverão ser asseguradas:

Se A e B forem eventos mutuamente excludentes e $f_{A\text{ ou }B}$ for a freqüência relativa associada ao evento "A ou B", então $f_{A\text{ ou }B} = f_A + f_B$.

Se A e B não forem eventos mutuamente excludentes, eles têm elementos comuns, e se $f_{A \text{ ou } B}$ for a freqüência relativa associada ao evento "A ou B" e $f_{A \text{ e } B}$ for a freqüência relativa associada ao evento "A e B", então

$$f_{A \text{ ou } B} = f_A + f_B - f_{A \text{ e } B}$$

Os eventos elementares de um espaço amostral são mutuamente excludentes dois a dois, pois o fato de ocorrer um evento elementar impede a ocorrência de qualquer outro evento elementar.

Por exemplo, no caso do sorteio da quina da loto, cada evento elementar é formado por 5 "dezenas" entre as 100 "dezenas" de 00 a 99. O sorteio de uma quina, como 25-37-38-84-97, impede que qualquer outra quina seja premiada.

Probabilidade de um evento

Temos considerado, até agora, que o processo, que nos leva a associar a cada evento um número que mede sua possibilidade de ocorrência, está baseado no fato de repetirmos o experimento um grande número de vezes (ver página 120) a ponto de sua freqüência relativa se estabilizar em torno de algum número, que consideramos como a tal medida procurada.

Gostaríamos, apenas, que esse número não dependesse do experimentador ou de sua sorte. Na verdade, o que pretendemos é um meio de encontrar o número que mede a chance de um evento ocorrer independentemente da experimentação, mas baseado nela!

Os experimentos propostos e discutidos até agora sugerem um método de atribuir número às chances de ocorrência de certos eventos. O que pretendemos é definir um número associado a cada evento, de modo que ele tenha as mesmas características da freqüência relativa desse evento e que "descreva" quão verossímil é a ocorrência desse evento.

Desses experimentos emerge um "modelo matemático", que servirá para medir a chance de ocorrência de cada evento, para qualquer número de repetições do experimento.

> Seja S um espaço amostral associado a um dado experimento. A cada evento A associaremos um número real, que indicaremos por p(A). Esse número será a probabilidade de A, se:
>
> 1) $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
> 2) $p(S) = 1$
> 3) se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$

A escolha das propriedades que definem a probabilidade de um evento é sugerida pelas correspondentes características da freqüência relativa.

O que decorre da definição anterior:

a) Se A, B, ..., K são eventos mutuamente excludentes dois a dois, decorre da 3ª propriedade que $p(A \text{ ou } B \text{ ou } \ldots \text{ ou } K) = p(A) + p(B) + \ldots + p(K)$.

b) Se $a_1, a_2, \ldots a_k$ representam todos os k eventos elementares de S, então $p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_k) = 1$.

<u>Observações</u>:

1) $p(a_i)$ estará anotando, de maneira mais simples (e não precisa), o número $p(\{a_i\})$.
2) "Definimos uma distribuição de probabilidade sobre um espaço amostral S", quando associamos a cada evento elementar de S um número racional entre 0 e 1 (inclusive), tal que a soma deles dê 1.

<u>Exemplo 10</u>

Consideremos o experimento que consta em lançar um dado e registrar o resultado observado na face superior. Então, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o espaço amostral associado a esse experimento. Descreva pelo menos duas distribuições de probabilidade no espaço amostral considerado.

Resolução

Para distribuirmos uma probabilidade sobre S, um caminho seria definir a probabilidade de cada um dos 64 eventos decorrentes do experimento considerado, o que seria bastante trabalhoso. No entanto, isso se simplifica quando definimos as probabilidades de todos os eventos elementares de tal experimento, visto que além de serem mutuamente excludentes, eles "compõem" o espaço amostral S (isto é, ocorrer $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o mesmo que ocorrer $\{1\}$ ou $\{2\}$ ou $\{3\}$ ou $\{4\}$ ou $\{5\}$ ou $\{6\}$).

Assim, uma das possibilidades de definir uma probabilidade sobre S é dar aos eventos "obter 1", "obter 2", ..., "obter 6" o valor $\frac{1}{6}$. Neste caso, todas as propriedades da definição de probabilidade de um evento estão satisfeitas.

Uma outra possibilidade seria associar a cada evento elementar números racionais, tais que:

$$p(\text{obter } 1) = \frac{1}{21} \qquad p(\text{obter } 4) = \frac{4}{21}$$

$$p(\text{obter } 2) = \frac{2}{21} \qquad p(\text{obter } 5) = \frac{5}{21}$$

$$p(\text{obter } 3) = \frac{3}{21} \qquad p(\text{obter } 6) = \frac{6}{21}$$

Observamos que todas essas probabilidades são números entre 0 e 1 e $\frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = 1$.

Poderíamos também definir as probabilidades dos eventos elementares assim:

$$p(\text{obter } 1) = p(\text{obter } 2) = p(\text{obter } 3) = \frac{1}{4}$$

$$p(\text{obter } 4) = p(\text{obter } 5) = p(\text{obter } 6) = \frac{1}{12}$$

Essas probabilidades, ainda neste caso, satisfazem as condições da definição: $0 \leq \frac{1}{4} \leq 1$ e $0 \leq \frac{1}{12} \leq 1$ e $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 1$.

Comentário

Se o dado for perfeito, o modelo mais adequado para uma "distribuição de probabilidade" aos eventos elementares é o primeiro, isto é, cada face tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer.

Espaços equiprováveis

Exemplo 11

Considere novamente os experimentos dos exemplos 6 e 8:

1º) lançar uma moeda e observar se a face superior apresenta cara (C) ou coroa (K);

2º) uma máquina produz parafusos; observar se cada um deles é defeituoso (D) ou não ($\bar{D}$).

Explicite os espaços amostrais associados a cada experimento e estime a probabilidade de ocorrência de cada evento elementar em cada experimento.

Compare os dois espaços amostrais.

Resolução

Chamaremos de S_1 e S_2 os espaços amostrais associados ao 1º e 2º experimentos, respectivamente. Assim, $S_1 = \{C,K\}$ e $S_2 = \{D,\bar{D}\}$.

Tendo em vista as discussões e conclusões efetuadas nos exemplos 6 e 8, temos:

$$p(C) = 0{,}5 \qquad p(K) = 0{,}5 \qquad p(D) = 0{,}12 \qquad p(\bar{D}) = 0{,}88$$

Os espaços amostrais S_1 e S_2 têm mesma quantidade de elementos, têm elementos distintos e o que mais nos interessa, os eventos elementares de S_1 têm a mesma probabilidade de ocorrer ($p(C) = p(K) = 0{,}5$), enquanto que em S_2 isso não se verifica ($p(D) \neq p(\bar{D})$).

Dizemos que S_1 é um espaço amostral equiprovável:

Um espaço amostral é equiprovável se todos os seus eventos elementares tiverem a mesma probabilidade de ocorrer.

A seguir, trabalharemos somente com espaços amostrais equiprováveis.

Probabilidade de um evento num espaço amostral equiprovável

A definição de probabilidade de um evento, dada anteriormente, não nos garante quais os números que deveremos associar a cada evento elementar de um espaço amostral, a não ser que se parta para a experiência (e é disso que queremos fugir) para observar o comportamento da freqüência relativa de tal evento.

Assim, no exemplo 10, caso nada se saiba sobre o dado, nada nos garante qual dos 3 modelos apresentados devemos escolher para conferir a cada evento elementar uma probabilidade; pode acontecer que nenhum dos 3 modelos sirva. Isso só poderá ser verificado, jogando o dado e observando o comportamento da freqüência relativa da ocorrência do número de pontos de cada face.

No entanto, quando acrescentamos à definição de probabilidade de um evento, a hipótese de que o espaço amostral é equiprovável, a escolha de um modelo para definir uma probabilidade sobre o espaço amostral simplifica-se bastante.

Exemplo 12

No lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado, qual é a probabilidade de ocorrer cara e um número maior que 4?

Resolução

Supondo que a moeda e o dado são perfeitos, o espaço amostral S que associaremos a esse experimento será considerado equiprovável.

$S = \{\text{cara-1, cara-2, ..., coroa-4, coroa-5, coroa-6}\}$

$n(S) = 12$

Chamemos de E o evento "ocorrer cara e um número maior que 4". Assim,

$E = \{\text{cara-5, cara-6}\}$

$n(E) = 2$

O evento E é formado por dois eventos elementares cara-5 e cara-6 equiprováveis, isto é, p(cara-5) = = p(cara-6).

Como os eventos "ocorrer cara-5" e "ocorrer cara-6" são mutuamente excludentes, então:

$$p(\text{cara-5 ou cara-6}) = p(\text{cara-5}) + p(\text{cara-6}).$$

Mas, "ocorrer E" é o mesmo que ocorrer "cara-5 ou cara-6". Logo,

$$p(\text{cara-5 ou cara-6}) = p(E) = p(\text{cara-5}) + p(\text{cara-6}) \qquad (1)$$

Como S é supostamente equiprovável e n(S) = 12 e p(S) = 1, cada evento elementar de S tem probabilidade de $\frac{1}{12}$ de ocorrer. Assim, p(cara-5) = p(cara-6) = $\frac{1}{12}$.

Logo, de (1) teremos:

$$p(E) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} \begin{array}{l} \rightarrow n(E) \\ \rightarrow n(S) \end{array}$$

isto é,

$$p(E) = \frac{1}{6}$$

<u>Comentários</u>

De maneira geral:

Seja S um espaço amostral equiprovável, associado a um experimento aleatório, formado por <u>k</u> eventos elementares $a_1, a_2, \ldots, a_k$, a probabilidade de ocorrer S é 1, mas também é igual à probabilidade de ocorrer pelo menos um de seus eventos elementares, isto é:

$$p(S) = p(a_1 \text{ ou } a_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } a_k) = 1$$

Como $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são mutuamente excludentes, então:

$$p(S) = \underbrace{p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_k)}_{\text{k parcelas iguais}} = 1 \qquad (I)$$

Chamando de p a probabilidade de cada um dos a_i (i = 1, 2, ... k), a igualdade (I) pode ser escrita:

$$k \cdot p = 1 \quad \text{ou} \quad p = \frac{1}{k}$$

Isso significa que a probabilidade de cada evento elementar, no caso, é $\frac{1}{k}$.

Consideremos um evento E qualquer, do espaço amostral S, formado por n eventos elementares, dentre os k elementos de S; por exemplo $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são mutuamente excludentes e como $p(E) = p(a_1 \text{ ou } a_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } a_n)$, então:

$$p(E) = \underbrace{p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_n)}_{\text{n parcelas iguais a } \frac{1}{k}} = n \cdot \frac{1}{k}$$

isto é:

$$p(E) = \frac{n}{k} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{nº de resultados, igualmente prováveis do evento E} \\ \rightarrow \text{nº de resultados possíveis, igualmente prováveis do experimento} \end{array}$$

> Se um experimento pode proporcionar k resultados diferentes, igualmente prováveis e se exatamente n desses resultados correspondem a um evento E, então esse evento tem probabilidade
>
> $$p(E) = \frac{n}{k}$$

Afirmamos mais uma vez que devemos estar bastante seguros de que todos os resultados elementares possam ser igualmente prováveis, antes de empregar o procedimento definido anteriormente. Além disso, podemos, freqüentemente, por uma escolha conveniente do espaço amostral, reduzir o problema a outro, em que todos os resultados elementares sejam igualmente prováveis. Sempre que possível, isso deve ser feito, porque geralmente torna o cálculo mais simples.

"Muitas vezes, a maneira pela qual o experimento é executado determina se os resultados possíveis são ou não igualmente prováveis. Por exemplo, se retirarmos um parafuso de uma caixa que contenha três parafusos de tamanhos diferentes, simplesmente estendendo a mão dentro da caixa e apanharmos aquele que tocarmos primeiro, é plausível pensar que o parafuso maior terá maior probabilidade de ser escolhido. No entanto, etiquetando cuidadosamente cada parafuso com um número, escrevendo o número em um cartão, e escolhendo um cartão, tentaremos garantir que cada parafuso tenha, de fato, a mesma probabilidade de ser escolhido."

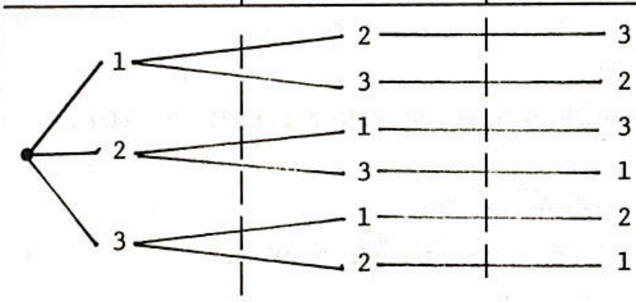
Quando $p(E) = 1$ dizemos que E é um <u>evento certo</u>; isso acontece quando o número de resultados de E é igual ao número de resultados possíveis do experimento, isto é, E sempre ocorre cada vez que o experimento é executado. Caso E nunca ocorra quando o experimento é executado, então $n = 0$ e $p(E) = 0$. Dizemos, nesse caso, que E é um <u>evento impossível</u>.

Vejamos os seguintes exemplos a respeito de evento certo e impossível.

<u>Exemplo 13</u>

Considere os números que são obtidos com as permutações dos algarismos do número 123. Sorteando-se uma dessas permutações, seja E_1 o evento em que o número sorteado é um múltiplo de 3 e seja E_2 o evento em que o número sorteado é um múltiplo de 5.

O espaço amostral S associado ao experimento desse exemplo é constituído por todos os números formados pelos algarismos 1, 2 e 3. Quantos números desse tipo existem? Um diagrama de árvore de possibilidades nos mostra quantos números formam o espaço amostral.

escolha do algarismo das unidades	escolha do algarismo das dezenas	escolha do algarismo das centenas	números possíveis (permutações dos algarismos 1, 2 e 3)
			1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

3 possibilidades x 2 possibilidades x 1 possibilidade = 6 possibilidades de formar todos os números com os algarismos 1, 2 e 3

Observando que os seis números formados são múltiplos de 3, temos:

$$p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

Observando, agora, que entre os seis números formados, não há múltiplos de 5, temos:

$$p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

Portanto, nesse sorteio é <u>certo</u> que ocorre um múltiplo de 3 e é <u>impossível</u> ocorrer um múltiplo de 5.

Probabilidades dadas por porcentagens

Toda probabilidade pode ser apresentada como um número na faixa de 0 a 1, ou como uma porcentagem de 0% a 100%.

<u>Exemplo 14</u>

Num sorteio concorrem todos os números inteiros de 1 a 100. Escolhendo-se um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de que o número sorteado tenha 2 algarismos, supondo que todos tem a mesma probabilidade de ser sorteado?

<u>Resolução</u>

Nesse sorteio escolhemos como espaço amostral:

$S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, logo: $n(S) = 100$.

O evento E, dos números de 2 algarismos, é:

$E = \{10, 11, 12, ..., 99\}$, logo: $n(E) = 90$

Portanto:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{90}{100} = 0,9 \text{ ou } p(E) = 90\%.$$

<u>Observação</u>

$$0,9 = \frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 90\%.$$

No exemplo 14, calcule a probabilidade de que o número sorteado tenha 2 algarismos distintos.

<u>Resposta</u>

0,81 ou 81%.

Comentário

Para não dar resultados aproximados, deixaremos muitas probabilidades expressas como frações.

Exemplo 15

Os jogadores A e B lançam um dado, uma só vez, cada um. Vence o jogo quem tirar o maior número. Se o jogador A obteve o resultado 2, qual é a probabilidade de:

a) A vencer o jogo?
b) Haver empate?
c) B vencer o jogo?

Resposta

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}$

Resolva o exemplo 15 no caso em que o jogador A obtenha o resultado 6.

Resposta

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) 0

Exemplo 16

Num concurso concorrem todos os anagramas[5] da palavra SORTE, sendo que um deles vai ser escolhido ao acaso. Uma pessoa concorre com todos os anagramas em que a 3ª letra é R. Qual é a probabilidade de que essa pessoa ganhe o concurso?

Resolução

Consideremos o evento E em que sorteamos um anagrama da palavra SORTE em que a terceira letra é R.

Quantos são os resultados possíveis de E? Isto é, qual é o número de anagramas da palavra SORTE em que a 3ª letra é R? Um anagrama desse tipo pode ser es

[5] Anagrama de uma palavra é uma palavra formada pela permutação das letras da primeira. Por exemplo, TORSE é um anagrama de SORTE.

quematizado por $\underset{1^a}{\_}\ \underset{2^a}{\_}\ \underset{3^a}{R}\ \underset{4^a}{\_}\ \underset{5^a}{\_}$, cujas posições vazias poderão ser preenchidas pelas letras S, T, E e O de qualquer forma, sem repeti-las.

Para preencher a 1ª posição temos 4 possibilidades (S, E, T e O). Como, para cada letra possível para a 1ª posição, há 3 possibilidades de preencher a 2ª posição, temos 4 x 3 possibilidades de preencher a 1ª e a 2ª posições. Restam, portanto, 2 maneiras para preencher a 4ª posição, uma vez tendo sido escolhidas as 2 letras para ocupar a 1ª e 2ª posições; portanto, são 4 x 3 x 2 modos de preencher a 1ª, 2ª e 4ª posições. Finalmente, sobra 1 letra para ocupar a 5ª posição (tendo sido escolhidas as demais letras para preencher a 1ª, 2ª ou 4ª posições).

O número total de anagramas da palavra SORTE, em que R é a 3ª letra, é 4 x 3 x 2 x 1.

Por outro lado, o total de anagramas da palavra SORTE é 5 x 4 x 3 x 2 x 1.

Logo:

$$p(E) = \frac{\text{nº de anagramas da palavra SORTE em que R é a 3ª letra}}{\text{total de anagramas da palavra SORTE}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$= \frac{1}{5} = 20\%$$

Exemplo 17

Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual é a probabilidade de que ela tenha nascido num domingo?

Resposta

$\frac{1}{7}$

Exemplo 18

Uma pessoa retirou um ás de um baralho de 52 cartas. Depois disso, ela retirou ao acaso uma 2ª carta. Qual é a probabilidade de que a 2ª carta também seja um ás?

Resposta

$\frac{1}{17}$

Exemplo 19

Uma pessoa retirou 2 cartas de ouros de um baralho de 52 cartas. Depois disso, ela retirou ao acaso uma 3ª carta. Qual é a probabilidade de que a 3ª não seja uma carta de ouros?

Resposta

0,78 ou 78%.

Exemplo 20

Treze homens e sete mulheres participam de um jogo de bingo. Se não der empate, qual é a probabilidade de que o vencedor seja um homem?

Resposta

0,65 ou 65%.

Exemplo 21

Numa urna há 20 bolas do mesmo tamanho e material; 16 são pretas e 4 são brancas. Escolhendo uma delas ao acaso, qual a probabilidade de se retirar uma bola preta?

Resposta

0,8 ou 80%.

Eventos complementares

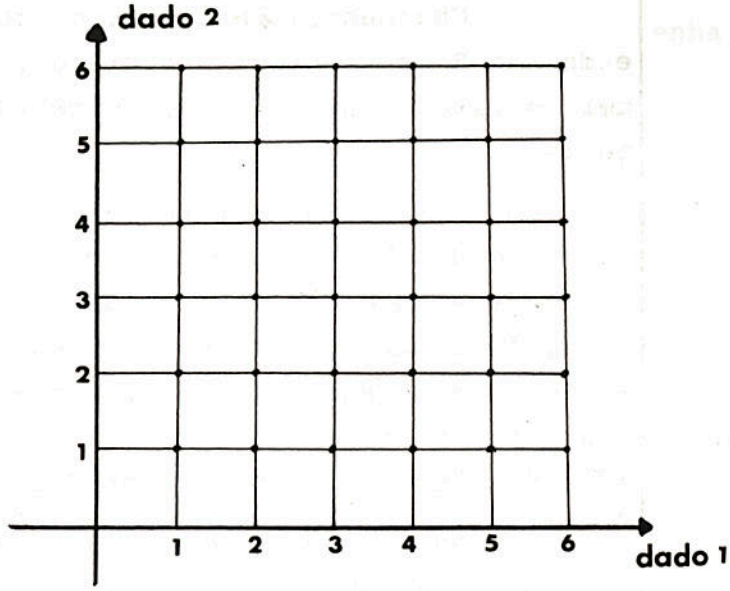
Exemplo 22

Dois dados são lançados ao acaso. Observando os pontos obtidos na face superior de cada um, calcule:

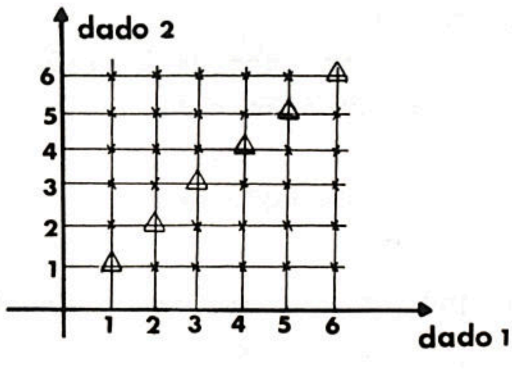
a) a probabilidade de obter resultados iguais nos dois dados;
b) a probabilidade de obter resultados distintos nos dois dados.

Resolução

O espaço amostral associado a esse experimento é formado por (1,1), (1,2), ..., (2,1), (2,2), ..., (6,4), (6,5) e (6,6), num total de 36 pares de resulta dos, indicados por "." no gráfico abaixo.



Entre os 36 pontos do espaço amostral, 6 deles representam resultados iguais nos dois dados, que no gráfico serão representados por Δ, os demais pontos representam resultados distintos e serão representados por x.



Assim, temos:

$$p(\text{obter resultados iguais}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{obter resultados distintos}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Comentário

Chamando de S o espaço amostral do exemplo 22 e de A e B os eventos: "obter resultados iguais" e "obter resultados distintos", respectivamente, observamos que:

- A tem 6 elementos e B tem 30.
- o fato de obtermos resultados iguais nos dois dados impede a obtenção de resultados diferentes e, portanto, A e B são mutuamente excludentes.
- o evento "obter resultados iguais ou obter resultados diferentes nos dois dados" é o mesmo que "obter dois resultados quaisquer nos dois dados".

Na linguagem dos conjuntos, poderíamos escrever as últimas observações assim:

- $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = S$

e nessas circunstâncias, diremos que A e B formam uma partição em S e que A e B são conjuntos complementares e, portanto, os eventos "ocorrer resultados iguais" e "ocorrer resultados diferentes" são ditos eventos complementares.

No caso em questão, como $p(S) = p(A) + p(B)$ e $p(S) = 1$, então $p(A) + p(B) = 1$, ou $p(A) = 1 - p(B)$.

De fato, $\frac{1}{6} = 1 - \frac{5}{6}$.

De modo geral:

> Seja um espaço amostral S, associado a um experimento. Se A e B forem eventos de S tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = S$, então A e B são ditos eventos <u>complementares</u> e
> $p(A) = 1 - p(B)$.

Exemplo 23

De um estudo de mulheres fumantes com idade superior a 40 anos, concluiu-se que é razoável dizer que a probabilidade de que uma mulher dessa população te -

nha câncer é 0,756. Qual é a probabilidade de que uma mulher fumante, com mais de 40 anos, não tenha câncer?

Resposta

0,244 ou 24,4%.

Exemplo 24

Considere o lançamento de dois dados. Calcule a probabilidade de que o máximo entre os dois resultados seja maior ou igual a 3.

Resolução

Chamando de A e $\bar{A}$ os eventos:

A: o máximo entre os dois resultados é maior ou igual a 3;

$\bar{A}$: o máximo entre os dois resultados é menor que 3, observamos que A e $\bar{A}$ são eventos complementares, num espaço amostral com 36 elementos.

Podemos calcular a probabilidade de A por meio da probabilidade de $\bar{A}$, que tem os seguintes elementos (1,1), (1,2), (2,1) e (2,2).

Assim, $p(\bar{A}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Logo, $p(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Produto de probabilidades

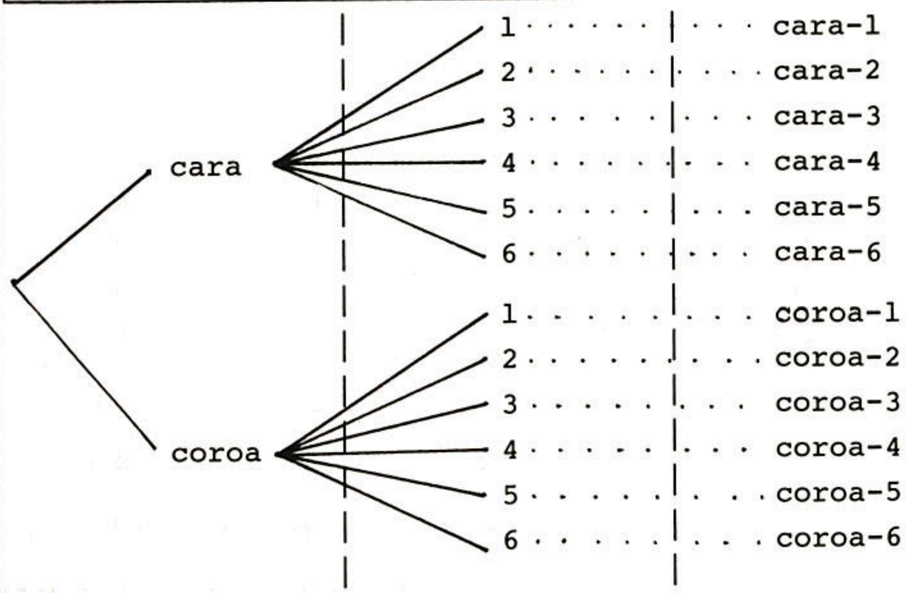
Exemplo 25

Considere o experimento que consta em lançar sucessivamente uma moeda e um dado. Qual a probabilidade de se obter o resultado cara-3?

Resolução

Para dar uma noção de o porquê multiplicarmos probabilidades, vamos utilizar uma árvore de possibilidades.

lançamento da moeda	lançamento do dado	resultados possíveis



Comentários

Chamaremos de $\underline{n}$ o número de resultados finais possíveis.

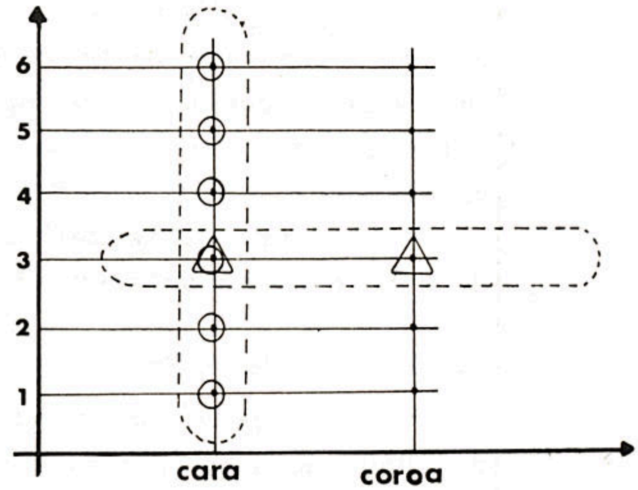
No lançamento da moeda, podemos obter dois resultados distintos: cara ou coroa. Isso quer dizer que dos $\underline{n}$ resultados possíveis, metade apresenta "cara". Dessa metade, apenas a sexta parte apresenta "3".

Temos, portanto, a sexta parte da metade dos $\underline{n}$ resultados possíveis apresentando "cara e 3", isto é, o resultado "cara-3" é $(\frac{1}{2} : 6)^{\underline{a}}$ parte de $\underline{n}$. Portanto,

$$p(\text{cara-3}) = \frac{(\frac{1}{2} : 6) \cdot n}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$$

Logo, a probabilidade de obtermos o resultado "cara-3" é $\frac{1}{12}$.

Podemos visualizar essa situação num gráfico cartesiano:



Comentário

Obviamente este problema poderia ter sido resolvido apenas atentando para o fato de que o espaço amostral que adotamos tem 2 x 6 eventos elementares e, assim, a probabilidade de que cada um deles ocorra é $\frac{1}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 26

Lançando uma moeda 2 vezes ao acaso, qual é a probabilidade de obtermos 2 coroas?

Resolução

Para que este evento ocorra é preciso que duas "exigências sucessivas" sejam atendidas: no 1º lançamento deve sair coroa, no 2º lançamento deve sair coroa.

Em cada um desses lançamentos, a probabilidade de sair coroa é $\frac{1}{2}$ e, multiplicando-as, obtemos a probabilidade de satisfazê-las sucessivamente.

p(saírem 2 coroas) = p(coroa no 1º) x p(coroa no 2º)

p(saírem 2 coroas) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$

p(saírem 2 coroas) = 25%

Outra resolução

Também podemos resolver esse problema usando o espaço amostral S. Observe então, que, como são feitos dois lançamentos, o espaço amostral S tem os seguintes elementos: cara-cara, cara-coroa, coroa-cara e coroa-coroa. Logo, p(saírem 2 coroas) = $\frac{1}{4}$.

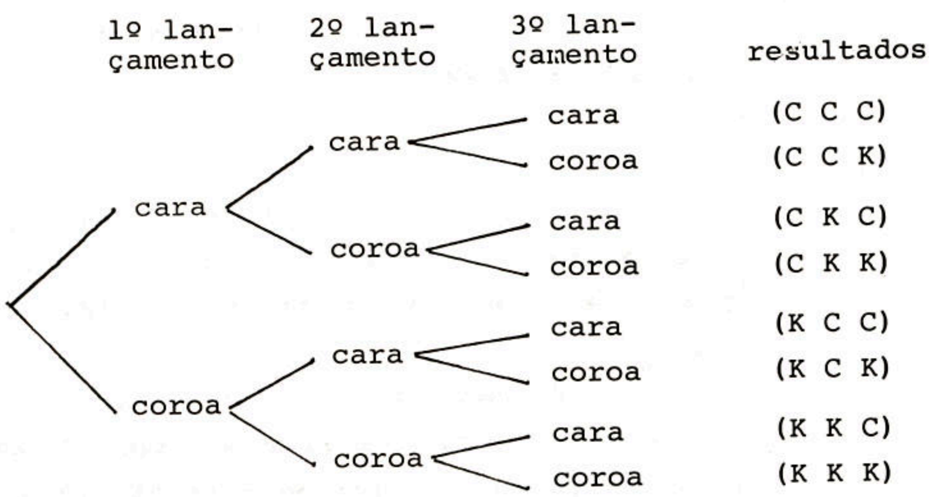
O princípio multiplicativo está presente nas duas resoluções apresentadas.

Exemplo 27

Lançando uma moeda três vezes, qual é a probabilidade de sair alguma cara, não importando se ela sairá em 1, 2 ou 3 lançamentos?

1ª resolução

Representando os resultados dos lançamentos por meio de uma árvore de possibilidades, podemos visualizar o espaço amostral, que é formado por todas as possíveis triplas de resultados, bem como saber quantos desses resultados apresentam pelo menos uma cara. Representaremos obter cara por "C" e o obter coroa por "K").



Entre os 8 resultados possíveis, 7 deles apresentam pelo menos uma cara, portanto,

$$p(\text{sair alguma cara}) = \frac{7}{8}$$

Observação

Uma resolução desse tipo nem sempre é a menos trabalhosa, uma vez que o processo utilizado foi o de esgotar todas as possibilidades de resultados possíveis e favoráveis, para utilizar o conceito de probabilidade de um evento. Esse mesmo processo daria um trabalho enorme, se em vez de lançarmos uma moeda lançássemos um dado três vezes.

Talvez, inverter a procura de casos favoráveis para casos desfavoráveis ao evento "ocorrer alguma cara" seja uma medida que facilite o processo de resolução. O que ocorre é que muito pouco se tem trabalhado no 1º e 2º graus, em Matemática, com a negação; assim, desenvolver e aplicar a idéia de eventos complementares constitui uma boa oportunidade para analisar fatos em função da negação dos mesmos.

2ª resolução

Seja E o evento: "sai alguma cara".

Observe que a única maneira de não ocorrer E, isto é, de não sair alguma cara, é quando nos três lançamentos o resultado é coroa.

Chamemos de $\bar{E}$ "não ocorrer E".

Então,

$$p(\bar{E}) = p\ (3\ \text{coroas}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Portanto:

$$p(E) = p(\text{sair alguma cara}) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Exemplo 28

Um dado é lançado 3 vezes. A pessoa A aposta que o nº 6 sairá pelo menos uma vez. A pessoa B faz a aposta contrária, afirmando que o nº 6 não ocor rerá em nenhum lançamento. Qual dessas pessoas tem maior probabilidade de ganhar a aposta?

Resolução

$$p(B\ \text{vencer}) = p(6\ \text{não ocorre nos 3 lançamentos}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

A só vencerá se B não vencer; por isso, o evento "ocorre 6 pelo menos uma vez" é complementar de "6 não ocorre nos 3 lançamentos". Assim,

$$p(A\ \text{vencer}) = 1 - p(B\ \text{vencer}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Resolva o problema anterior no caso em que o dado é lançado 4 vezes.

Resposta

A probabilidade de B vencer é $\frac{625}{1296}$; a de A vencer é $1 - \frac{671}{1296} = \frac{671}{1296}$. Portanto, A tem maior probabilidade de ganhar essa aposta.

Exemplo 29

Lançando uma moeda 3 vezes ao acaso, qual é a probabilidade de saírem 3 coroas?

Resposta

0,125 ou 12,5%.

Exemplo 30

Lançando um dado duas vezes, qual é a probabilidade de que no 1º lançamento saia um número par e no 2º lançamento saia o nº 6?

Resposta

$\frac{1}{12}$

Exemplo 31

Lançando um dado duas vezes, qual é a probabilidade de saírem números maiores que 4 nos dois lançamentos?

Resposta

$\frac{1}{9}$

Exemplo 32

Lançando um dado duas vezes, calcule a probabilidade de acontecer o seguinte evento: dá o nº 6 no primeiro lançamento, mas não dá o nº 6 no segundo lançamento.

Resposta

$\frac{5}{36}$

Exemplo 33

Lançando uma moeda e um dado, calcule a probabilidade de ocorrência do seguinte evento: na moeda dá cara e no dado dá um número diferente de 1.

Resposta

$\frac{5}{12}$

Exemplo 34

Para ganhar uma certa aposta, uma pessoa deve optar entre um jogo de dados e um com moedas. Se escolher dados, deve lançar um dado 2 vezes e, para ganhar, deve obter o número 6 nos dois lançamentos. Escolhendo moedas, deve lançar uma moeda 5 vezes e, para ganhar, em todas as vezes deve sair cara. Em qual desses 2 jogos a pessoa tem maior probabilidade de vencer?

Resposta

p(dois nºs 6) = $\frac{1}{36}$ e p(5 caras) = $\frac{1}{32}$; portanto, no jogo de moedas a probabilidade de vencer é maior do que no jogo de dados.

Exemplo 35

Numa primeira caixa há 10 bolas: 7 pretas e 3 brancas. Noutra caixa há 7 bolas: 5 pretas e 2 brancas. Sorteando-se uma bola de cada caixa, calcule a probabilidade de que:

a) a bola retirada da 1ª caixa seja preta e a da outra seja branca.
b) a bola retirada da 1ª caixa seja branca e a da outra seja preta.

Resposta

a) 20%; b) $\frac{3}{14}$.

Exemplo 36

Numa caixa há papeizinhos numerados de 1 a 9, noutra, há papeizinhos numerados de 11 a 19. Sorteando um papelzinho de cada caixa, qual é a probabilidade de serem escolhidos:

a) dois papeizinhos com números pares?
b) dois papeizinhos com números ímpares?

Resposta

a) $\frac{16}{81}$; b) $\frac{25}{81}$.

Exemplo 37

Numa caixa há papeizinhos com os números 1, 2 e 3; noutra, com m números inteiros e consecutivos, sendo o primeiro e o último ímpares (um número por papelzinho). Sabe-se que, sorteando um papelzinho de cada caixa, a probabilidade de saírem dois números ímpares é 3 vezes a de saírem dois números pares. Quantos papeizinhos há na 2ª caixa?

1ª resolução

$$\left.\begin{aligned} p(\text{nº par 1ª caixa}) &= \frac{1}{3} \\ p(\text{nº ímpar 1ª caixa}) &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right. \qquad \text{(I)}$$

Na 2ª caixa há m números inteiros consecutivos, sendo o primeiro e o último ímpares.

Supondo que x desses m números sejam pares, x + 1 serão ímpares, de forma que x + x + 1 = m e, portanto:

$x = \frac{m - 1}{2}$ (quantidade de números pares da 2ª caixa)

$x = \frac{m + 1}{2}$ (quantidade de números ímpares da 2ª caixa)

Logo,

$$\left.\begin{array}{l} p(\text{nº par 2ª caixa}) = \dfrac{\frac{m-1}{2}}{m} = \dfrac{m-1}{2m} \\ p(\text{nº ímpar 2ª caixa}) = \dfrac{\frac{m+1}{2}}{m} = \dfrac{m+1}{2m} \end{array}\right. \quad (II)$$

Com as probabilidades (I) e (II) podemos calcular:

$$p(\text{ímpar da 1ª caixa e ímpar da 2ª caixa}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{m+1}{2m} = \frac{m+1}{3m}$$

$$p(\text{par da 1ª caixa e par da 2ª caixa}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{m-1}{2m} = \frac{m-1}{6m}$$

Como é dado que:

p(ímpar 1ª caixa e ímpar 2ª caixa) = 3 . (par 1ª caixa e par 2ª caixa)

teremos:

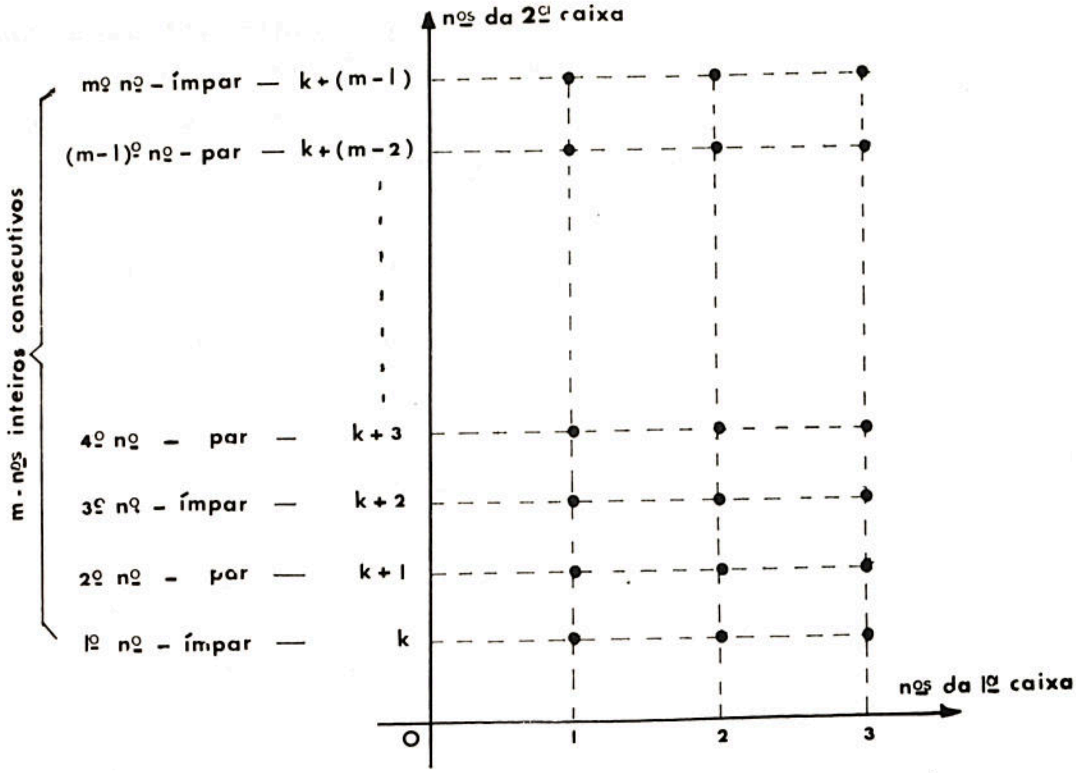
$$\frac{m+1}{3m} = 3 \cdot \frac{m-1}{6m}$$

e, portanto, m= 5

2ª resolução

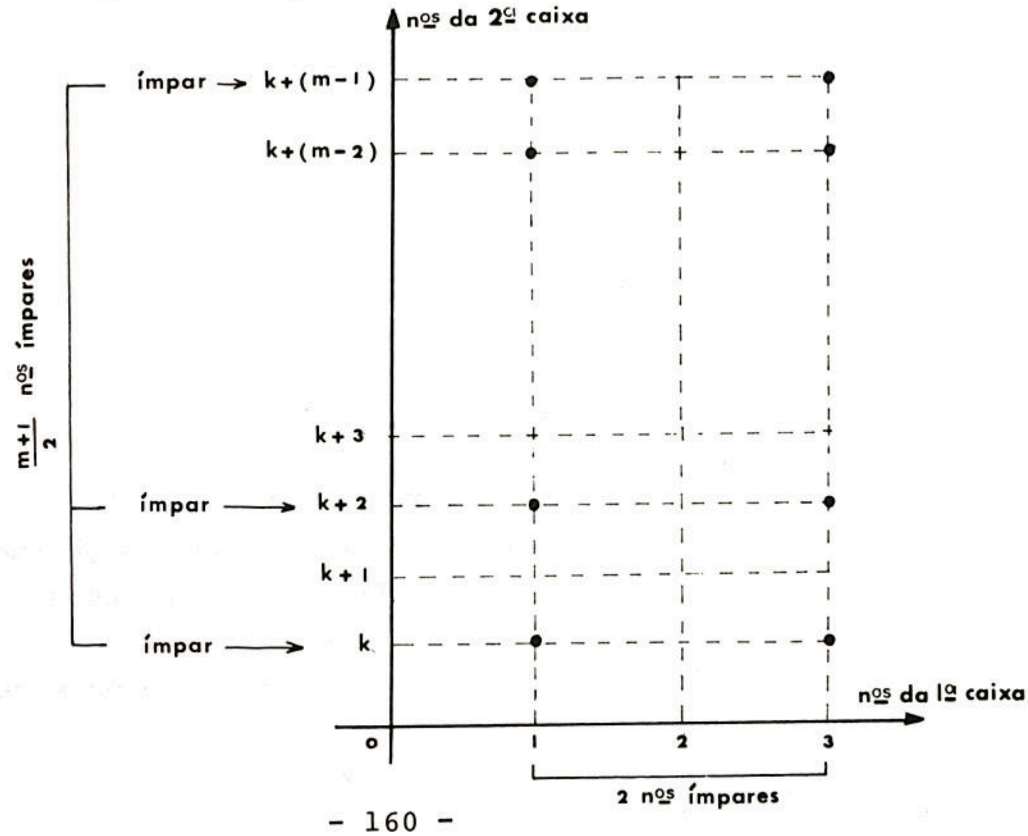
Como na 1ª caixa há 3 números distintos e na 2ª caixa há m números distintos, então podemos retirar 3m pares de números distintos, de modo que cada par é formado por um número de cada caixa.

Podemos representar esses 3m pares de números no plano.

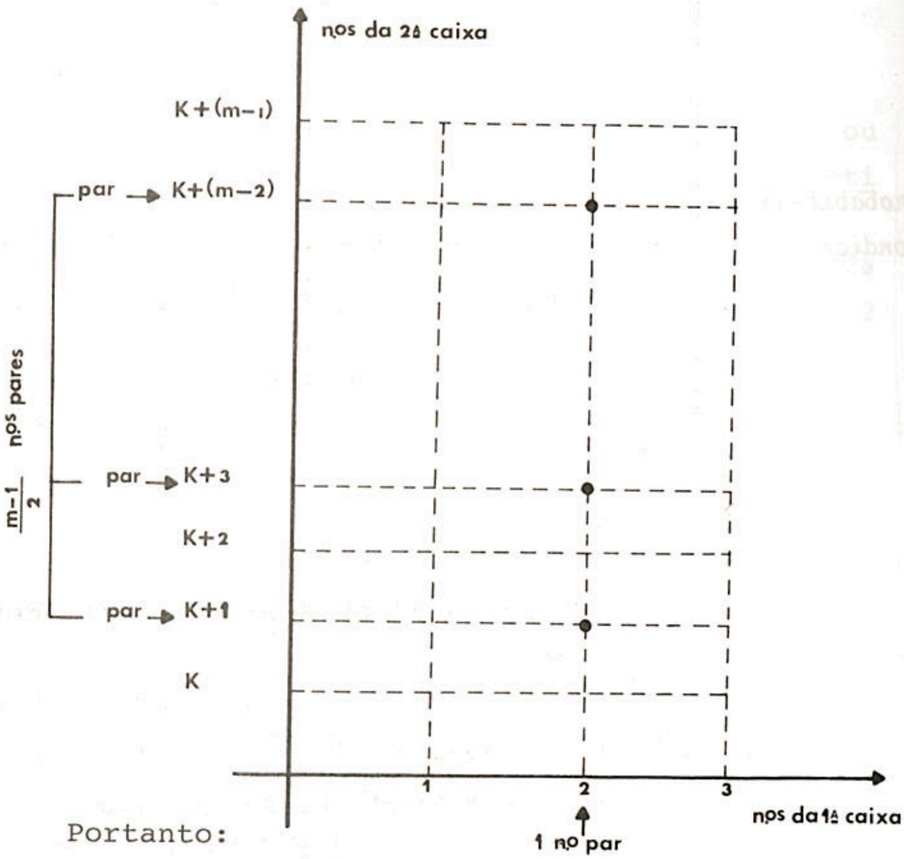


Na 2ª caixa há $\frac{m+1}{2}$ números ímpares e $\frac{m-1}{2}$ números pares.

O número de pares sorteados com o 1º ímpar e o 2º ímpar é igual a $2 \cdot \frac{m+1}{2} = m+1$, e estão marcados no gráfico seguinte.



O número de pares sorteados com o 1º nº par e o 2º nº par é igual a: $1 \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{m-1}{2}$, e estão marcados no gráfico seguinte:



Portanto:

p(ambos os nºs serem ímpares) $= \frac{m+1}{3m}$

p(ambos os nº serem pares) $= \frac{\frac{m-1}{2}}{3m} = \frac{m-1}{6m}$

Como $\frac{m+1}{3m} = 3 \cdot \frac{m-1}{6m}$,

teremos: $m = 5$.

Exemplo 38

Uma pessoa que nada entende de futebol preencheu ao acaso um cartão da loteria esportiva, assinalando 2 palpites triplos e 4 palpites duplos. Indique os cálculos que dão a probabilidade de essa pessoa fazer os 16 pontos.

Resolução

p(acertar os 16 pontos) = p(acertar 2 triplos) . p(acertar 4 duplos) . p(acertar 10 simples)=

$$= (1 \cdot 1) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2^4}{3^{14}}$$

Probabilidade condicional

Nos quatorze últimos exemplos, observamos que os eventos envolvidos são de tal natureza que a ocorrência de um deles em nada influi na ocorrência dos outros.

No problema 36, por exemplo, a obtenção de um número par da 1ª caixa não exerce qualquer influência no resultado obtido ao se retirar um papelzinho da 2ª caixa.

No entanto, essas condições nem sempre são verificadas com eventos de um experimento aleatório. Vejamos um exemplo para esclarecer essa idéia.

Exemplo 39

Retirando-se sucessivamente 2 cartas, de um baralho de 52 cartas, ao acaso e sem reposição da 1ª carta, qual é a probabilidade de serem retirados 2 ases?

Resolução

Para que se retire 2 ases sucessivamente, exige-se que a 1ª carta retirada seja um ás, mas há uma segunda exigência: a 2ª carta retirada deve ser um ás.

Observe que a probabilidade de satisfazer a 2ª exigência depende do que ocorreu na 1ª retirada. Sua 1ª carta foi um ás, então restam 3 ases no baralho, logo a probabilidade de que a 2ª carta seja um ás é de $\frac{3}{51}$ ou $\frac{1}{17}$. Mas, se a 1ª carta retirada não for um ás, então restarão 4 ases no baralho e a probabilidade de que a 2ª carta seja um ás é de $\frac{4}{51}$.

Como, nesse caso, a probabilidade de satisfazer a 2ª exigência depende do que aconteceu antes, na 1ª retirada, diremos, então, que o evento "obter às na 2ª retirada" depende do evento "obter ás na 1ª retirada".

Nessas circunstâncias, a probabilidade de serem retirados 2 ases será $\frac{4}{52} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$.

Comentários

1) Quando repomos a 1ª carta, seja ela ás ou não, o baralho continua contendo 4 ases, antes da retirada da 2ª carta.

Portanto, a probabilidade de obtermos ás na 2ª retirada, nesse caso, será $\frac{4}{52}$ e, portanto, p(retirar 2 ases) $= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$.

Observe que, com reposição, a probabilidade aumenta em relação ao caso em que não repomos a 1ª carta retirada.

2) Outra resolução do exemplo 39.

O número total de maneiras de tirar sucessivamente 2 cartas quaisquer de um baralho de 52 cartas é dado por 52 x 51 (52 opções para retirar a 1ª carta; uma vez retirada a mesma, restam 51 opções de retirar a 2ª carta). Isto significa que o espaço amostral S associado a esse experimento é constituído de todos os 52 x 51 possíveis pares de cartas.

Por outro lado, de quantas maneiras podemos retirar 2 ases de um baralho?

Há 4 opções para retirar o primeiro ás: ás de ouros, ás de espadas, ás de copas, ás de paus. Uma vez retirado o 1º ás, para cada uma dessas opções existem 3 para retirar o 2º ás. Portanto, temos 4 x 3 maneiras de retirar 2 ases de um baralho com 52 cartas.

Logo,

p(retirar 2 ases) $= \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$.

Observação

Essa resolução baseia-se essencialmente na definição de probabilidade.

Exemplo 40

Numa caixa há cinco papeizinhos, numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente dois papeizinhos da caixa, sem reposição do primeiro.

a) Supondo que o primeiro número sorteado tenha sido ímpar, qual é a probabilidade de que o segundo número sorteado seja par? E de que o segundo número seja ímpar?

b) Qual é a probabilidade de que o segundo número sorteado seja ímpar, sabendo que na primeira retirada foi obtido um número par?

Nessas mesmas circunstâncias, qual a probabilidade de que o segundo número sorteado seja também par?

Resolução

a) Como o primeiro número sorteado é ímpar, entre os 4 números que restaram na caixa, continuam existindo 2 números pares; portanto, a probabilidade de que o segundo número sorteado seja par, dado que o primeiro foi ímpar, é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Dado que o primeiro número sorteado é ímpar, restam na caixa 4 números, sendo 2 ímpares; portanto, a probabilidade de que o segundo número sorteado seja ímpar também é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Tendo sido obtido um número par na primeira retirada, restam, na caixa, 4 números, sendo 3 ímpares. Assim, a probabilidade de que o segundo número sorteado seja ímpar, dado que o primeiro foi par, é $\frac{3}{4}$.

A probabilidade de que o segundo número sorteado seja par, sabendo que o primeiro número sorteado foi par, é $\frac{1}{4}$. De fato, entre os 4 números que restam na caixa, após a retirada de um número par, apenas 1 é par.

Comentários

Inicialmente, ao desenvolvermos com os alunos os conceitos de eventos dependentes e probabilidade condicional, é conveniente que a linguagem usada seja a mais próxima possível da linguagem natural, mesmo que os textos se apresentem excessivamente longos, como os da resolução do problema anterior.

Alguns códigos podem ser introduzidos após a compreensão das idéias fundamentais envolvidas nos conceitos que estão sendo trabalhados.

Por exemplo, no problema 40, item a, chamemos de A e B os eventos:

A: sortear primeiramente um número ímpar;
B: o segundo número sorteado é par.

O evento "o segundo nº sorteado é par, sabendo que o primeiro nº sorteado foi ímpar", será representado por $B|A$. Isso significa que o fato de ocorrer no 2º sorteio um número par está condicionado à ocorrência de número ímpar no 1º sorteio.

Assim, $p(B|A)$ significará probabilidade de ocorrer B, sabendo que A ocorreu.

Exemplo 41

Serão retiradas sucessivamente 2 cartas de um baralho de 52 cartas.

Seja A o evento em que a 1ª carta retirada é ás.

Seja B o evento em que a 1ª carta retirada não é ás.

Seja C o evento em que a 2ª carta retirada é ás.

Seja D o evento em que a 2ª carta retirada não é ás.

Então temos:

$p(C/A) = p(\text{ocorrer C quando A já ocorreu}) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$;

$p(C/B) = p(\text{ocorrer C quando B já ocorreu}) = \frac{4}{51}$;

$p(D/A) = p(\text{ocorrer D quando A já ocorreu}) = \frac{48}{51} = \frac{16}{17}$;

$p(D/B) = p(\text{ocorrer D quando B já ocorreu}) = \frac{47}{51}$.

Exemplo 42

Um levantamento feito numa sala de aula foi resumido na seguinte tabela:

	usam óculos	não usam óculos	total
meninos	7	21	28
meninas	4	18	22
total	11	39	50

Consideremos o experimento que consta em sortear uma criança dessa classe.

Qual é a probabilidade de que:

a) a criança sorteada seja menino?

b) a criança sorteada use óculos?

c) a criança sorteada use óculos, sabendo-se que é menino?

Resolução

Sejam A e B os eventos:

A: a criança sorteada é menino;

B: a criança sorteada usa óculos;

Seja $B|A$ ocorrer B, dado que A já ocorreu, isto é, a criança sorteada usa óculos, sabendo-se que é menino.

a) $p(A) = \frac{28}{50} = \frac{56}{100} = 56\%$

b) $p(B) = \frac{11}{50} = 22\%$

c) com a informação de que a criança é um menino, podemos considerar um novo espaço amostral para o evento B, formado apenas pelos 28 meninos, dos quais 7 usam óculos. Assim, a probabilidade de que a criança sorteada use óculos, sabendo-se que é menino, é:

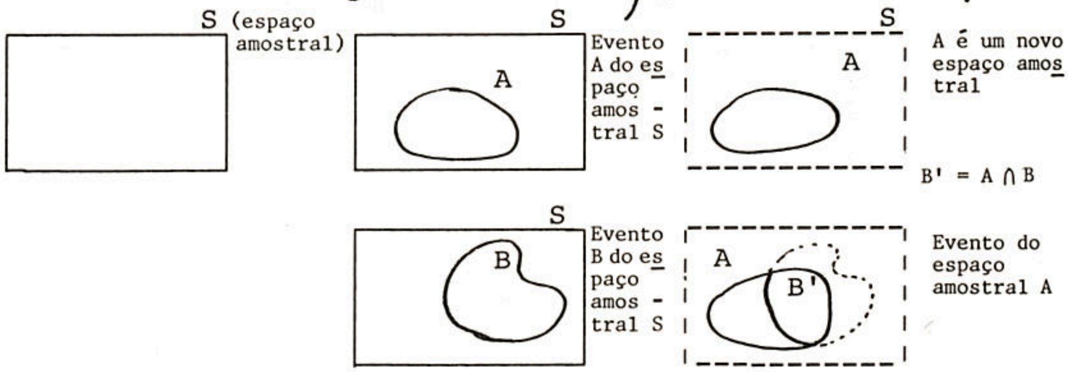
$p(B) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 25\%$

Observamos que a probabilidade de que o aluno sorteado use óculos, no caso c), é maior do que a do caso b).

Comentário

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S.

Quando calculamos p(B|A), tudo se passa como se A fosse um novo espaço amostral "reduzido", dentro do qual queremos calcular a probabilidade de B ocorrer. O esquema abaixo evidencia melhor este fato:



Exemplo 43

Numa caixa há cinco papeizinhos numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente dois papeizinhos da caixa, sem reposição do primeiro. Qual é a probabilidade de que os dois números sorteados sejam ímpares?

Resolução

Sejam os eventos A e B, tais que:

A: ocorrer número ímpar no 1º sorteio;
B: ocorrer número ímpar no 2º sorteio;
B/A significa ocorrer número ímpar no 2º sorteio, sabendo-se que no 1º ocorreu número ímpar.

Então,

p(1º nº sorteado seja ímpar) = p(A) = $\frac{3}{5}$

Por outro lado, a probabilidade de que o 2º número sorteado seja ímpar está condicionada ao fato de que no 1º sorteio tenha saído número ímpar. Logo, a probabilidade de que o 2º número sorteado seja ímpar, supondo-se que o 1º foi ímpar é:

$$p(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de sortear um número ímpar no 1º e 2º sorteios é:

$$p(A \text{ e } B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Exemplo 44

Resolva o problema anterior, supondo-se que o papelzinho retirado no 1º sorteio seja reposto na caixa antes do 2º sorteio.

Resposta

36%.

Comentário

Nos sorteios, quando não mencionarmos se houve ou não reposição, estaremos sempre supondo que não houve reposição. Portanto, só vamos considerar a reposição, quando constar do enunciado.

Exemplo 45

Numa urna há 10 papeizinhos, numerados de 1 a 10. Serão sorteados sucessivamente 3 desses papeizinhos. A probabilidade de que os 3 números sorteados sejam ímpares é maior, menor ou igual a 10%?

Resposta

É $\frac{1}{12}$, logo, é menor que 10%.

Exemplo 46

Resolva o problema anterior supondo que no sorteio haja reposição.

Resposta

É $\frac{1}{8}$, portanto, é maior que 10%.

Exemplo 47

De uma urna com 3 bolas pretas e 2 bolas brancas, serão retiradas ao acaso 2 bolas. Calcule, apresentando as respostas em porcentagens, a probabilidade de que:

a) as bolas retiradas sejam ambas pretas;
b) as bolas retiradas sejam ambas brancas;
c) a 1ª bola seja preta e a 2ª seja branca;
d) a 1ª bola seja branca e a 2ª seja preta.

Resposta

a) 30%; b) 10%; c) 30%; d) 30%.

Exemplo 48

Suponha que um juiz de futebol tenha 3 cartões no bolso: um vermelho, um amarelo e um terceiro com uma face vermelha e a outra face amarela. Num certo instante, o juiz, irritado, retira, ao acaso, um cartão do bolso e o mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de que o juiz veja a face vermelha enquanto o jogador vê a face amarela?

Resposta

$\frac{1}{6}$

Comentário

No item "produto de probabilidades", os problemas propostos apresentam eventos que só ocorrerão se várias exigências (eventos) forem atendidas(os) sucessivamente.

No exemplo 48, temos:

o experimento em questão: retirar um cartão do bolso e observar sua cor

o evento em questão: juiz vê a face vermelha e o jogador vê a face amarela

A primeira exigência é: "o juiz deve tirar do bolso o cartão vermelho-amarelo"; e a 2ª exigência é: "o juiz deve ver a face vermelha e o jogador deve ver a face amarela".

Assim, o problema fica resolvido se ambas as exigências forem satisfeitas.

As duas exigências, na verdade, descrevem dois eventos:

- retirar do bolso o cartão vermelho-amarelo
- juiz vê a face vermelha (uma vez retirado o cartão vermelho-amarelo).

Elas funcionam como se fossem dois obstáculos sucessivos, e, para ultrapassar o 2º, devemos, obrigatoriamente, ter ultrapassado o 1º e, ultrapassá-los significa satisfazer as exigências que esses obstáculos representam.

Podemos representar as duas exigências sucessivas por dois obstáculos seguidos, num mesmo caminho. No esquema seguinte, em cada obstáculo escreveremos a probabilidade de satisfazer a exigência correspondente a esse obstáculo.

Para o exemplo 48, teremos:

tirar o cartão de 2 cores	tirando o cartão adequado, o juiz vê vermelho	juiz vê vermelho e o jogador, amarelo

$$\frac{1}{3} \quad \times \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{6}$$

Esse apoio visual pode ser utilizado, ao trabalharmos com os alunos os problemas propostos anteriormente.

A título de exemplo, apresentamos esse diagrama para alguns dos problemas já resolvidos.

obter cara	obter 3	obter cara-3

Exemplo 25: $\frac{1}{2} \quad \times \quad \frac{1}{6} \quad = \quad \frac{1}{12}$

coroa na 1ª | coroa na 2ª | coroa nos dois lançamentos

Exemplo 26:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

nº par no 1º | nº 6 no 2º | nº par no 1º e nº 6 no 2º lançamento

Exemplo 30:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

obter cara | obter nº ≠ de 1 | obter cara e um nº ≠ de 1

Exemplo 33:

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

obter 6 no 1º lança - mento | obter 6 no 2º lança - mento | obter 6 nos dois lançamentos

Exemplo 34:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

obter cara | obter cara | obter cara | obter cara | obter cara | obter cara e um nº difren te de 1

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

retirar bola preta da 1ª caixa | retirar bola branca da 2ª caixa | retirar bola branca da 1ª e preta da 2ª caixa

Exemplo 35:

a) $\frac{7}{10} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{5}$ ou 20%

retirar bola branca da 1ª caixa	retirar bola preta da 2ª caixa	retirar bola branca da 1ª e preta da 2ª caixa

$$\frac{3}{10} \quad \times \quad \frac{5}{7} \quad = \quad \frac{3}{14}$$

Exemplo 38: a pessoa só fará os 13 pontos se "acertar os 2 triplos e acertar os 4 duplos e acertar os 7 simples".

acertar 1 triplo	acertar 1 triplo	acertar 2 triplos

$$1 \quad \times \quad 1 \quad = \quad 1$$

acertar 1 duplo	acertar 1 duplo	acertar 1 duplo	acertar 1 duplo	acertar 4 duplos

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 1 simples	acertar 7 simples

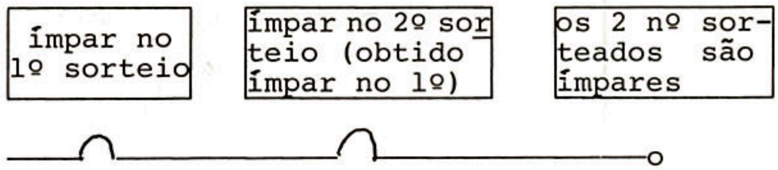
$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

Portanto:

acertar 2 triplos	acertar 4 duplos	acertar 7 simples	acertar os 13 pontos

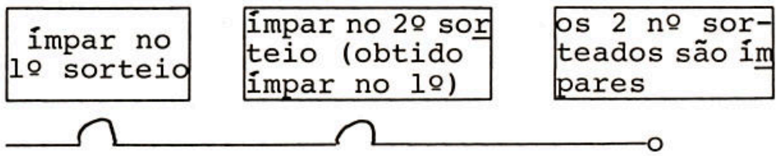
$$1 \quad \times \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \times \quad \left(\frac{1}{3}\right)^7 \quad = \quad \frac{2^4}{3^{11}}$$

Exemplo 43:



$$\frac{3}{5} \quad \times \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{3}{10} = 30\%$$

Exemplo 44:



$$\frac{3}{5} \quad \times \quad \frac{3}{5} \quad = \quad \frac{9}{25} = 36\%$$

Comentário

Inventaremos aqui o jogo da "miniloto", que funciona como a loto. No entanto, para que os cálculos não sejam trabalhosos, faremos 3 alterações nas regras. A primeira delas: serão sorteados, na miniloto, os números 00, 01, 02 ... até 19 (atenção: cada um desses números é chamado de uma dezena). A segunda alteração: em cada concurso, serão sorteados 4 dezenas. A última alteração: em cada cartão, pode-se assinalar um mínimo de 4 e um máximo de 8 dezenas.

Nos problemas de 49 a 51 calcularemos algumas probabilidades relativas a esse jogo.

Exemplo 49

Num concurso da "miniloto", uma pessoa preencheu um cartão assinalando as dezenas 03, 08, 11 e 15. A probabilidade p_1 de que a pessoa tenha assinalado a dezena da 1ª bolinha retirada é: $p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Agora, vamos calcular a probabilidade p_2 de que a pessoa tenha assinalado a dezena da 2ª bolinha retirada, condicionada ao acerto da dezena da 1ª bolinha. Supondo que no 1º sorteio saiu uma bolinha com uma das 4 dezenas assinaladas no cartão, no 2º sorteio há 19 bolinhas no globo, 3 delas com dezenas assinaladas no cartão. Então:

$$p_2 = \frac{3}{19}$$

Da mesma forma temos:

$$p_3 = \frac{2}{18} = \frac{1}{19} \quad \text{e}$$

$$p_4 = \frac{1}{17}$$

acertar o 1º		acertar o 2º		acertar o 3º		acertar o 4º		fazer a quadra
$\frac{4}{20}$	x	$\frac{3}{19}$	x	$\frac{2}{18}$	x	$\frac{1}{17}$	=	p

A probabilidade p da pessoa fazer a quadra é o produto das 4 probabilidades calculadas:

$$p = \frac{4}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{2}{18} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{4845}$$

<u>Comentário</u>

A probabilidade do problema anterior é aproximadamente 0,0002 ou 0,02%. Portanto, a probabilidade de que ela não faça a quadra é:

$$100\% - 0,02\% = 99,98\%$$

<u>Exemplo 50</u>

Num concurso da "miniloto", qual é a probabilidade de que as 4 dezenas sorteadas sejam, todos, números pares?

<u>Resposta</u>

$\frac{14}{23}$, que, aproximadamente, vale 4,3%.

<u>Exemplo 51</u>

Num concurso da "miniloto", uma pessoa preencheu um cartão assinalando 4 dezenas. Qual é a probabilidade de que ela não tenha acertado nenhuma das 4 dezenas?

<u>Resposta</u>

$\frac{364}{969}$, que, aproximadamente, vale 37,6%.

Exemplo 52

Um dado será lançado 2 vezes. Qual é a probabilidade de que o resultado no 2º lançamento seja o dobro do número que saiu no 1º lançamento?

Resolução

Se no 1º lançamento sair um número maior que 3, será impossível ocorrer o dobro dele no 2º lançamento.

No 1º lançamento os números favoráveis são 1, 2 e 3 e a probabilidade p_1 de que um deles ocorra é:

$$p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Supondo que no 1º lançamento tenha ocorrido um dos números 1, 2 ou 3, no 2º lançamento haverá sempre um número que é o dobro do que saiu no 1º lançamento. A probabilidade p_2 de sair esse número é: $p_2 = \frac{1}{6}$.

no 1º sair 1, 2 ou 3	tendo 1, 2 ou 3 no 1º, sair no 2º o dobro do 1º	o resultado é o dobro do 1º
$\frac{1}{2}$ x	$\frac{1}{6}$ =	p

A probabilidade p de obter 1, 2 ou 3 no 1º lançamento e, a seguir, o dobro dele no 2º lançamento é o produto de p_1 por p_2:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 53

Numa caixa há 10 papeizinhos, numerados de 1 a 10. Três deles serão sorteados sucessivamente. Qual é a probabilidade de que o 3º número sorteado seja o sucessor do 2º número sorteado e este, por sua vez, seja o sucessor do 1º número sorteado?

Resposta

$\frac{1}{90}$

Exemplo 54

Um dado será lançado 2 vezes. Qual é a probabilidade de que seja obtido o mesmo número nos 2 lançamentos?

1ª resolução

No 1º lançamento não temos exigência alguma: pode ocorrer qualquer um dos números de 1 a 6. A probabilidade p_1 disso ocorrer é: $p_1 = \frac{6}{6} = 1$.

No 2º lançamento há um número favorável: aquele que saiu no 1º lançamento. A probabilidade de p_2 disso ocorrer é: $p_2 = \frac{1}{6}$.

no 1º qualquer nº	no 2º, o nº que não saiu no 1º	dois nºs iguais

$$1 \quad \times \quad \frac{1}{6} \quad = \quad p$$

A probabilidade p de ser obtido o mesmo número nos 2 lançamentos é o produto de p_1 por p_2:

$$p = p_1 \cdot p_2 = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Comentário

Este problema já foi resolvido no exemplo 22, parte a, onde se levou em conta só o conceito de probabilidade.

Exemplo 55

Um dado será lançado 3 vezes. Qual é a probabilidade de saírem 3 números distintos?

Resposta

$\frac{5}{9}$

Exemplo 56

De um baralho com 52 cartas são retiradas 2 cartas ao acaso. Calcule a probabilidade de que as 2 cartas retiradas sejam:

a) do mesmo naipe;

b) de naipes diferentes.

Resposta

a) $\frac{4}{17}$; b) $\frac{13}{17}$

Exemplo 57

Numa caixa há 8 bolinhas, numeradas de 1 a 8, que serão retiradas ao acaso, de uma em uma, sucessivamente. Considere as três seguintes probabilidades: o nº 1 sai na 1ª retirada; o nº 1 sai na 3ª retirada; o nº 1 sai na última retirada.

Mostre, com cálculos matemáticos, que essas 3 probabilidades são iguais.

Resolução

Na 1ª retirada há 8 bolas na caixa, logo, a probabilidade p_1 de que nessa retirada saia o nº 1 é:

$$p_1 = \frac{1}{8}$$

Para que o nº 1 saia na 3ª retirada, devem ser satisfeitas 3 sucessivas exigências: na 1ª retirada pode sair qualquer número, exceto o nº 1; na 2ª retirada também, exceto o 1 e o primeiro número sorteado; na terceira retirada deve sair o nº 1. A probabilidade p_2 de isso tudo ocorrer é:

$$p_2 = \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6}, \text{ logo } p_2 = \frac{1}{8}.$$

Para que o nº 1 saia na última retirada, devem ser satisfeitas 8 sucessivas exigências: na 1ª retirada pode sair qualquer nº, exceto o nº 1, da 2ª à 7ª retirada também; e na 8ª retirada deve sair o nº 1. A probabilidade p_3 de isso acontecer é:

$$p_3 = \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{8}$$

Vemos assim que $p_1 = p_2 = p_3$.

Comentário

Nos problemas em que a probabilidade de ocorrer um evento B depende de ter ocorrido outro evento A, ito é, nos problemas que envolvem probabilidade condicional, p(B/A), sugerimos inicialmente um tipo de resolução na qual o espaço amostral inicial S seja reduzido para outro S' e nesse novo espaço é que a probabilidade de B (restrito ao novo espaço S') será calculada.

Não há obrigatoriedade de se reduzir o espaço amostral S para S', para calcularmos p(B/A).

Vejamos como isso pode ser feito, por meio de um problema.

Exemplo 58

Lança-se uma moeda 3 vezes. No 1º lançamento ocorre cara. Qual é a probabilidade de ocorrer exatamente mais uma cara nos outros lançamentos?

Resolução

Interpretando os resultados obtidos, quando dos lançamentos da moeda, por meio de uma árvore de possibilidades, teremos:

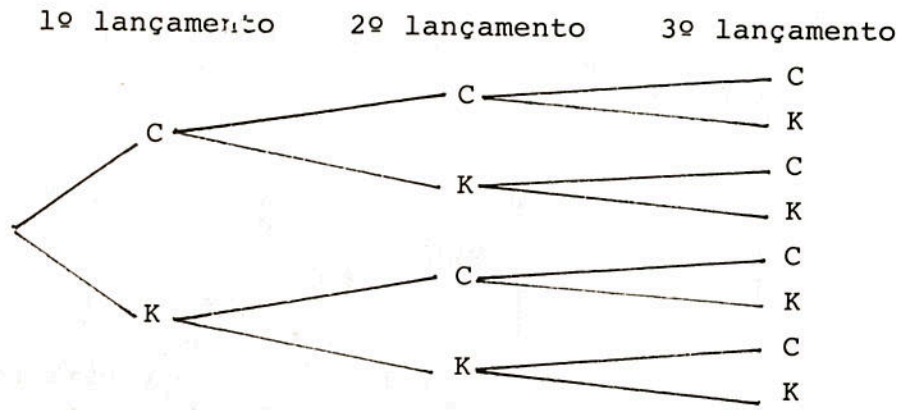


Figura 1

O espaço amostral S é formado por todos os resultados dos 3 lançamentos, do tipo (__ __ __), constituídos pelos elementos C e K.

Até agora, o procedimento adotado tem sido o de reduzir esse espaço S para outro S' formado pelos termos que começam por C, o que corresponde considerar apenas os resultados da metade superior da árvore, que são 4:

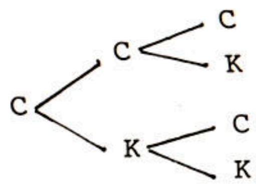


Figura 2

e dentre eles buscar os que têm apenas mais uma cara (C), que são 2

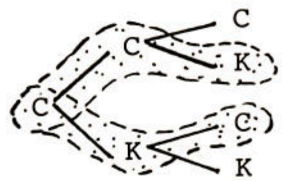
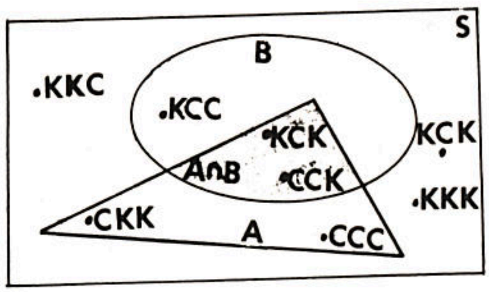


Figura 3

Assim,

$$p\left(\begin{matrix}\text{obter exatamente mais uma cara,}\\ \text{sabendo que no 1º lançamento deu cara}\end{matrix}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Interpretando esse fato por meio de um diagrama, temos:



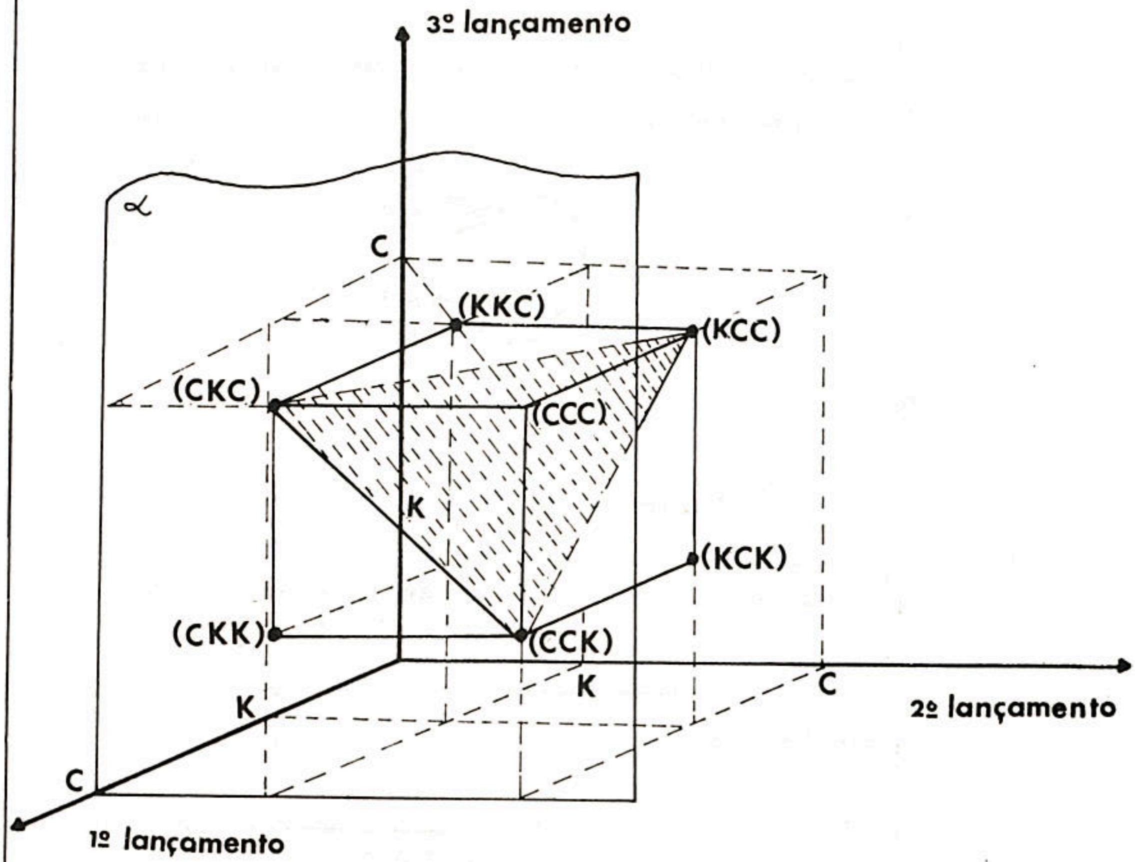
Observemos que:

1) o conjunto A é formado por todos os resultados em que deu cara no 1º lançamento e corresponde à

metade superior da árvore de possibilidades (fig. 2);

2) o conjunto A $\cap$ B (hachurado) é formado por todos os resultados que apresentam exatamente 2 caras, sendo que deu cara no 1º lançamento e corresponde aos 2 resultados hachurados da fig. 3.

Poderíamos, ainda, fazer outra representação gráfica da situação descrita na resolução anterior, por meio de um sistema cartesiano triortogonal.



O plano α contém a face do cubo, cujos vértices representam todos os resultados que apresentam cara no 1º lançamento. O conjunto dos vértices dessa face corresponde ao conjunto A, do diagrama anterior.

Por outro lado, os elementos de B, daquele diagrama, estão representados, nesse gráfico, pelos vértices do triângulo hachurado e correspondem aos resultados que possuem exatamente 2 caras.

Na intersecção do triângulo com o plano α aparecem os 2 resultados que nos interessam: exatamente 2 caras, sendo que no 1º lançamento deu cara.

Segundo o encaminhamento dado à resolução já apresentada, nesse gráfico, o espaço amostral S (constituído pelos vértices do cubo) é restringindo a outro S', formado pelos vértices da face do cubo contida em α. Entre os 4 vértices dessa face, 2 representam os casos favoráveis descritos no parágrafo anterior. Isso vem de encontro à solução já apresentada:

$$p\left(\begin{matrix}\text{obter exatamente mais uma cara sabendo}\\ \text{que no 1º lançamento deu cara}\end{matrix}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Na verdade, queremos mudar esse procedimento, isto é, calcular todas as probabilidades envolvidas no problema em relação ao espaço amostral inicial S (sem restringi-lo a outro S').

Para tanto, chamemos de A o evento "sai cara no 1º lançamento" e de B, o evento "saem exatamente 2 caras nos três lançamentos".

Anotaremos por $B|A$ o fato de sair exatamente 2 caras, sendo que deu cara no 1º lançamento.

Como já foi calculado,

$$p(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{\text{nº de casos favoráveis a B, em } A \cap B}{\text{nº de eventos elementares de A}}$$

Dividindo ambos os termos dessa fração pelo número de eventos elementares de S, temos:

$$p(B|A) = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{\dfrac{\text{nº de casos favoráveis a B, em } A \cap B}{\text{nº de eventos elementares de S}}}{\dfrac{\text{nº de eventos elementares de A}}{\text{nº de eventos elementares de S}}} \qquad \text{(I)}$$

Como $\dfrac{\text{nº de casos favoráveis a B, em } A \cap B}{\text{nº de eventos elementares de S}} = p(A \cap B)$

e $\dfrac{\text{nº de eventos elementares de A}}{\text{nº de eventos elementares de S}} = p(A)$, a igualdade (I) pode ser escrita:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

> Seja S um espaço amostral e A e B eventos de S, em que A não é evento impossível ($p(A) > 0$). A probabilidade condicional de B dado que A ocorreu, é denotada por $p(B/A)$ e definida por $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Exemplo 59

Uma caixa contém 10 bolas, sendo 4 pretas e 6 brancas. Duas bolas são retiradas sucessivamente ao acaso. A 1ª bola retirada é branca. Qual é a probabilidade de que a 2ª bola retirada também seja branca?

Resolução

Sejam: A o evento "a 1ª bola retirada é branca" e B o evento "as duas bolas retiradas são brancas".

Queremos determinar a probabilidade de retirar 2 bolas brancas, sabendo que a 1ª bola retirada é branca, isto é, $p(B|A)$.

Determinemos inicialmente:

$$p(A) = \frac{6}{10}$$

$$p(A \cap B) = p(B) = \frac{5}{10} \times \frac{6}{9}$$ (observar que como B está contido em A, então: $A \cap B = B$)

Como $p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, então:

$$p(B|A) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{6}{10}} = \frac{5}{9}$$

Comentário

Também poderíamos raciocinar assim: como a cor da 1ª bola já é conhecida, o experimento consiste apenas na retirada da 2ª bola, de uma caixa "modificada" pela informação adicional da cor branca da 1ª bola. Isto é, a caixa tem agora 9 bolas, com 5 brancas e 4 pretas. Então, a probabilidade de retirar uma bola branca é $\frac{5}{9}$.

Exemplo 60

Um grupo de pessoas está classificado da seguinte forma:

	professor	médico	advogado	360
homens	92	35	47	174
mulheres	101	33	52	186

Escolhe-se uma pessoa ao acaso.

a) Sabendo que a pessoa escolhida é médico, qual a probabilidade de ser homem?

b) Qual é a probabilidade de selecionar um homem, sabendo que é advogado?

c) Qual é a probabilidade de escolher uma mulher, sabendo que é professora?

d) Qual é a probabilidade de escolher um advogado, sabendo que é médico?

Resposta

a) $\frac{35}{68} \cong 0,514$; b) $\frac{47}{99}$; c) $\frac{101}{193} \cong 52\%$; d) 0.

Exemplo 61

Numa cidade, 60% dos motoristas usam cinto de segurança. Sabe-se que, em tal localidade, a probabilidade de um motorista sofrer acidente grave, usando cinto de segurança, é 0,1. Por outro lado, a probabilidade de um motorista sofrer um acidente grave, se não estiver usando cinto de segurança, é 0,5. Um motorista sofreu um acidente grave. Qual é a probabilidade de que esse motorista estivesse usando cinto de segurança, no momento do acidente?

Observação

Este problema tem um grau de complexidade maior do que os já propostos até aqui. Naturalmente, o professor deverá levar em conta as características de sua clientela para optar trabalhá-lo ou não.

Apresentamos duas resoluções. A primeira delas, em que o cálculo das probabilidades envolvidas são realizados levando em conta o espaço amostral reduzido e o conceito de probabilidade. Conseqüentemente, é uma resolução mais longa e descritiva. A segunda resolução é bastante sucinta. Utilizamos exclusivamente a linguagem dos conjuntos e supomos os conceitos já formalizados. As probabilidades envolvidas são calculadas em relação ao espaço amostral inicial.

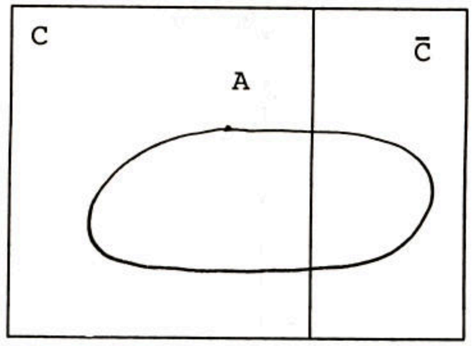
Resolução

Chamemos de

C: conjunto dos motoristas que usam cinto de segurança;

$\bar{C}$: conjunto dos motoristas que não usam cinto de segurança;

A: conjunto dos motoristas que sofrem acidente grave, representados no diagrama ao lado.



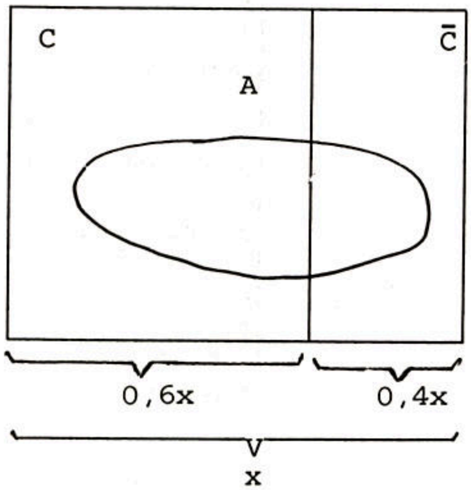
conjunto de motoristas da cidade em questão

1ª resolução

Seja x o número de motoristas dessa cidade:

0,6x é o número de motoristas que usam cinto de segurança;

0,4x é o número de motoristas que não usam cinto de segurança;



A probabilidade de um motorista sofrer acidente grave, se estiver usando cinto de segurança, é:

$p(A|C) = 0{,}1$

A probabilidade de um motorista sofrer acidente grave, se não estiver usando cinto de segurança, é:

$p(A|\bar{C}) = 0{,}5$

Queremos determinar a probabilidade de um motorista estar usando cinto de segurança, sabendo-se que sofreu acidente grave, isto é:

$p(C|A) = ?$

Sabemos que:

$$p(C|A) = \frac{\text{nº de motoristas que sofrem acidente grave e usam cinto de segurança}}{\text{nº de motoristas que usam cinto de segurança}} \qquad \text{(I)}$$

Cálculo do numerador de (I):

seja y = nº de motoristas que sofrem acidente grave e usam cinto de segurança

$$\text{Como } p(A|C) = \frac{\text{nº de motoristas que sofrem acidente grave e usam cinto de segurança}}{\text{nº de motoristas que usam cinto de segurança}}$$

então: $p(A|C) = \dfrac{y}{0{,}6x}$

Logo, $0{,}1 = \dfrac{y}{0{,}6x}$ ou $y = 0{,}06x$, isto é:

o numerador de (I) é $0{,}06x$

Cálculo do denominador de (I):

O número de motoristas que sofrem acidentes graves é $n(A)$.

Como $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, então $n(A) = p(A) \cdot n(S)$, onde $n(S) = x$. Temos que calcular $p(A)$.

Observe, no diagrama, que o evento A é equivalente a "A e C ou A e $\bar{C}$". Isto quer dizer que "um motorista sofre um acidente grave" é o mesmo que "um motorista usa cinto de segurança e sofre acidente grave ou não usa cinto de segurança e sofre acidente grave". Na linguagem dos conjuntos: $A = (A \cap C) \cup (A \cap \bar{C})$. Como "A e C" e "A e $\bar{C}$" são eventos mutuamente excludentes, temos:

$$p(A) = p(A \text{ e } C) + p(A \text{ e } \bar{C})$$

Como

$$p(A \text{ e } C) = \frac{n(A \text{ e } C)}{n(S)} = \frac{0{,}06x}{x} = 0{,}06$$

e $p(A \text{ e } \bar{C}) = 0{,}2$ (cuja demonstração omitimos por ser análoga à de $p(A \text{ e } C)$, temos:

$$p(A) = 0{,}06 + 0{,}2 = 0{,}26$$

Logo, $n(A) = 0{,}26 \cdot x$

O denominador de (I) é, portanto, $0{,}26x$.

Portanto:

$$p(C|A) = \frac{0{,}06x}{0{,}26x} \cong 0{,}2308 = 23{,}08\%$$

Isto significa que a probabilidade de um motorista estar usando cinto de segurança, sabendo-se que sofrem acidente grave é 23,08% e, ainda mais, independe do número de motoristas da cidade.

2ª resolução

Dados:

$p(A|C) = 0{,}1$

$p(A|\bar{C}) = 0{,}5$

$p(C) = 0{,}6$

$p(\bar{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Como $p(A|C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)}$, então $0{,}1 = \dfrac{p(A \cap C)}{0{,}6}$ ou

$p(A \cap C) = 0{,}06$ (1)

Como $p(A|\bar{C}) = \dfrac{p(A \cap \bar{C})}{p(\bar{C})}$ então $0{,}5 = \dfrac{p(A \cap \bar{C})}{0{,}4}$ ou

$p(A \cap \bar{C}) = 0{,}2$ (2)

Como $A = (A \cap C) \cap (A \cap \bar{C})$ e $A \cap C$ e $A \cap \bar{C}$ são mutuamente excludentes, então: $p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap \bar{C})$.

Levando em conta os resultados (1) e (2), temos:

$$p(A) = 0{,}06 + 0{,}2 = 0{,}26$$

Pretendemos calcular $p(C|A)$. Assim,

$$p(C|A) = \frac{p(C \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}06}{0{,}26} \cong 0{,}2308 = 23{,}8\%$$

Soma de probabilidades

<u>Exemplo 62</u>

Numa urna há 5 bolas: 3 pretas e 2 brancas. Retirando-se, ao acaso, 2 bolas dessa urna, qual é a probabilidade de que as bolas retiradas sejam da mesma cor?

<u>Comentário</u>

Interpretar sorteio de 2 bolas como sorteios consecutivos.

<u>Resolução</u>

"Retirar 2 bolas da mesma cor" equivale a "retirar 2 bolas pretas ou retirar 2 bolas brancas".

Assim:

$$p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bolas}\\ \text{da mesma cor}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bolas brancas ou}\\ \text{retirar 2 bolas pretas}\end{array}\right)$$

Os eventos "retirar 2 bolas brancas" e "retirar 2 bolas pretas" são mutuamente excludentes, então:

$$p\left(\begin{array}{c}\text{retirar 2 bolas}\\ \text{da mesma cor}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bo-}\\ \text{las brancas}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bo-}\\ \text{las pretas}\end{array}\right)$$

Mas,

$$p\left(\begin{array}{c}\text{retirar 2 bolas}\\ \text{brancas}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{l}\text{retirar bola bran-}\\ \text{ca no 1º sorteio}\end{array}\right) \times p\left(\begin{array}{l}\text{retirar bola}\\ \text{preta no 2º}\\ \text{sorteio}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bo-}\\ \text{las pretas}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{l}\text{retirar bola pre-}\\ \text{ta no 1º sorteio}\end{array}\right) \times p\left(\begin{array}{l}\text{retirar bola pre-}\\ \text{ta no 2º sorteio}\end{array}\right)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Portanto,

$$p\left(\begin{array}{l}\text{retirar 2 bolas}\\ \text{de mesma cor}\end{array}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$$

Comentário

O raciocínio utilizado na resolução do problema anterior é válido para situações em que o evento, do qual se quer determinar a probabilidade, possa ser expresso pela união de 2 ou mais eventos mutuamente excludentes.

Exemplo 63

Lançando-se um dado 2 vezes, qual é a probabilidade de que num deles o resultado seja o triplo do outro?

1ª resolução

O evento "obter um resultado que seja o triplo do outro" equivale a "obter o 1º resultado triplo do 2º ou obter o 2º resultado triplo do 1º", cujos eventos componentes são excludentes.

Portanto:

$$p\left(\begin{matrix}\text{um dos resultados}\\ \text{é o triplo do outro}\end{matrix}\right) = p\left(\begin{matrix}\text{1º resultado é}\\ \text{o triplo do 2º}\end{matrix}\right) = p\left(\begin{matrix}\text{2º resultado é}\\ \text{o triplo do 1º}\end{matrix}\right)$$

Resta-nos então calcular:

a) $p\left(\begin{matrix}\text{1º resultado é}\\ \text{o triplo do 2º}\end{matrix}\right)$ ou $p\left(\begin{matrix}\text{2º resultado é a}\\ \text{terça parte do 1º}\end{matrix}\right)$

Se no 1º lançamento sair um número menor que 3, será impossível ocorrer a terça parte dele no 2º lançamento.

No 1º lançamento os números favoráveis são 3 e 6 e a probabilidade p_1 de que um deles ocorra é:

$$p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Supondo que no 1º lançamento tenha ocorrido 3 ou 6, no 2º lançamento sempre haverá um número que é a terça parte do que saiu no 1º lançamento.

A probabilidade p_2 de sair esse número é:

$$p_2 = \frac{1}{6}$$

Logo, a probabilidade p' de sair 3 ou 6 no 1º lançamento e, a seguir, a terça parte dele no 2º lançamento é o produto de p_1 por p_2:

$$p' = p_1 \times p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

a) p(2º resultado é o triplo do 1º)

Com o raciocínio análogo ao do item a), calculamos a probabilidade de obter 1 ou 2 no 1º lançamento:

$$p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo, a probabilidade p de sair 1 ou 2 no 1º lançamento e, a seguir, o triplo dele no 2º lançamento é:

$$p = p_1 \times p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

Das conclusões dos itens a) e b), podemos calcular:

$$p\binom{\text{um dos resultados}}{\text{é o triplo do outro}} = p + p' = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

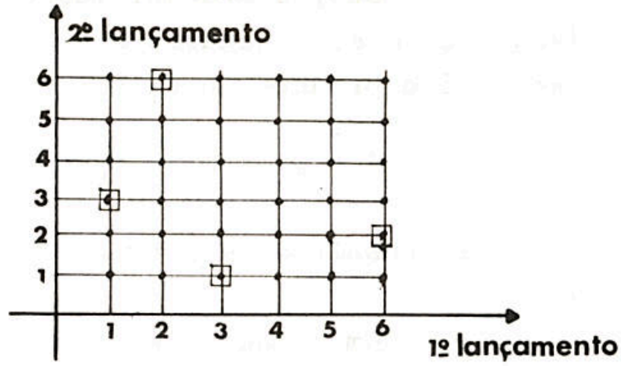
Observação

A 1ª resolução apresentada no exemplo 63 poderia ter sido bastante simplificada se não tivéssemos tido a intenção de aplicar a soma de probabilidades, o que nos fez separar o evento "um dos resultados é o triplo do outro" em dois outros mutuamente excludentes.

Apresentamos, a seguir, uma 2ª resolução do exemplo 63, onde levaremos em conta o conceito de probabilidade, procurando no total de resultados aqueles que são favoráveis.

2ª resolução

Os pontos assinalados no gráfico, representam todos os resultados do espaço amostral S.



Entre esses 36 pontos só nos interessam aqueles em que uma coordenada é o triplo da outra, isto é, só nos interessam (3,1), (6,2), (1,3) e (2,6), que estão assinalados no gráfico por □ e que são 4.

Portanto,

$$p\left(\begin{matrix}\text{um dos resultados é}\\ \text{o triplo do outro}\end{matrix}\right) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Exemplo 64

Lançando um dado 3 vezes ao acaso, calcule a probabilidade de sair um número par e dois números ímpares, em qualquer ordem.

Resolução

Sejam os eventos:

PII: sair par, ímpar, ímpar, nessa ordem.
IPI: sair ímpar, par, ímpar, nessa ordem.
IIP: sair ímpar, ímpar, par, nessa ordem.

Assim, ocorrer um número par e dois ímpares em qualquer ordem é o mesmo que ocorrer "PII ou IPI ou IIP".

Como PII, IPI e IIP são mutuamente excludentes 2 a 2, podemos escrever:

$$p\left(\begin{matrix}\text{sair um par e dois ímpa-}\\ \text{res em qualquer ordem}\end{matrix}\right) = p(PII) + p(IPI) + p(IIP).$$

Mas $p(PII) = p(P) \times p(I) \times p(I)$ e $p(P) = p(I) = p(\frac{1}{2})$.

Logo,

$$p\left(\begin{matrix}\text{sair um par e dois ímpa-}\\\text{res em qualquer ordem}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Exemplo 65

Numa urna há 10 bolas. Três dessas bolas são brancas, três são pretas e as demais são vermelhas. Retirando-se ao acaso 2 bolas da urna, calcule a probabilidade de que as duas bolas tenham cores diferentes.

Resposta

$\frac{11}{15}$

Exemplo 66

Resolva o problema anterior supondo que o sorteio seja feito com reposição.

Resposta

66%.

Exemplo 67

Um jogo de dados tem as seguintes regras. O jogador faz o 1º lançamento do dado. Se sair o número 6, o jogo termina: o jogador venceu. Se não sair o número 6, o jogador deve lançar o dado pela 2ª e última vez. Se sair um número maior que 4 o jogador é vencedor, caso contrário, perderá o jogo.

Qual é a probabilidade de o jogador vencer este jogo?

Resolução

Há duas maneiras de se vencer o jogo. Uma é tirar o nº 6 no 1º lançamento. A probabilidade p_1 de isso acontecer é: $p_1 = \frac{1}{6}$.

A outra maneira de vencer o jogo é a seguinte: tirar um número diferente de 6 no 1º lançamento e um número maior que 4 no 2º lançamento. A probabilidade p_2 de isso acontecer é:

$$p_2 = \frac{5}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$$

O jogador tem a seu favor a probabilidade p_1 de vencer numa única jogada; além dela, ainda tem a probabilidade p_2, de vencer em duas jogadas. Portanto, a probabilidade p de vencer é:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Comentário

O raciocínio explicitado no problema anterior tem um forte apelo à intuição e equivale ao fato de os eventos em jogo serem mutuamente excludentes.

Até o momento, sempre pudemos "desmembrar" o evento dado em dois outros mutuamente excludentes, calculando a seguir a soma de suas probabilidades.

Isso é sempre possível?

Teoricamente sim. No entanto, nem sempre é conveniente partir o evento dado em dois outros mutuamente excludentes, o que poderia artificializar a resolução do problema.

No exemplo a seguir apresentaremos duas resoluções. Na primeira delas, consideraremos dois eventos mutuamente excludentes, embora o "mais natural" seja não fazê-lo; na segunda resolução, propomos o cálculo da probabilidade de um evento que será decomposto em dois outros não mutuamente excludentes.

Exemplo 68

Num sorteio há 100 papeizinhos numerados de 1 a 100. Sorteando um deles, qual é a probabilidade de ser sorteado um número que seja divisível por 2 ou divisível por 5?

Chamemos de E o evento "sortear um número que seja divisível por 2 ou divisível por 5".

1ª resolução

Como no procedimento adotado nos exemplos anteriores, nossa intenção é encontrar dois ou mais eventos mutuamente excludentes que componham o evento E.

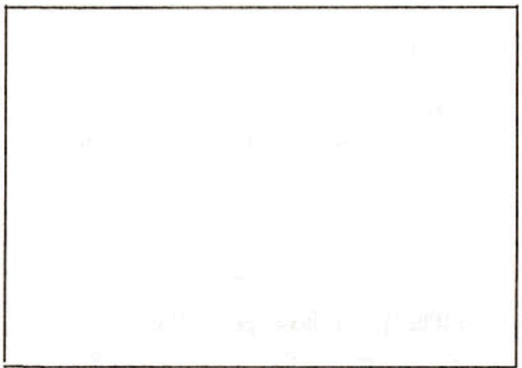
Sejam E_1 e E_2 os eventos:

E_1: o número sorteado é divisível por 2,

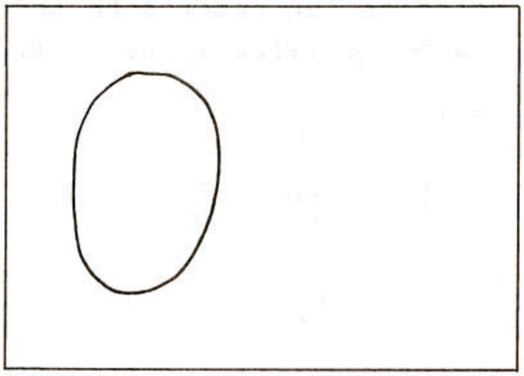
E_2: o número sorteado é divisível por 5 e não é divisível por 2.

E_1 e E_2 são mutuamente excludentes e compõem o evento E, isto é, $E_1 \cup E_2 = e$.

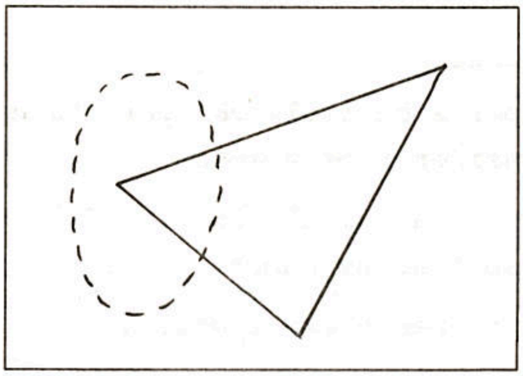
Podemos representar esses eventos por meio de um diagrama, construído da seguinte maneira:



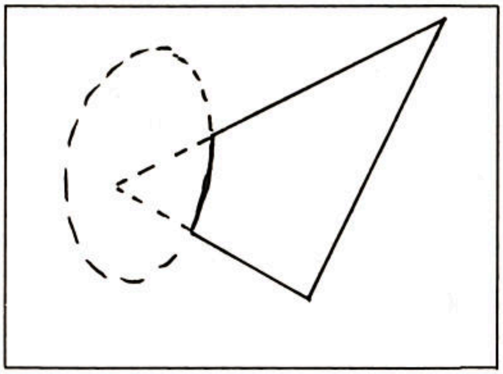
conjunto dos números inteiros de 1 a 100



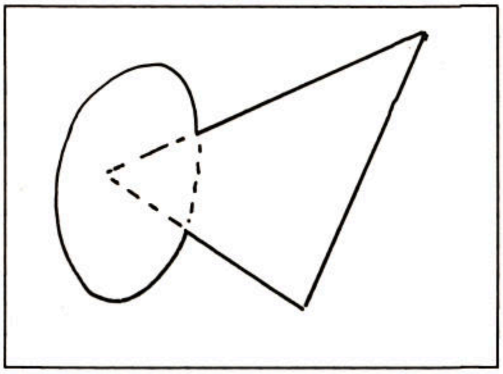
E_1 conjunto dos números de 1 a 100 divisíveis por 2



conjunto dos números de 1 a 100 divisíveis por 5



E_2 conjunto dos números de 1 a 100 divisíveis por 5 e não divisíveis por 2



$E = E_1$ ou E_2: conjunto dos números de 1 a 100 divisíveis por 2 ou por 5

Calculemos $p(E)$:

$p(E) = p(E_1) + p(E_2)$, já que E é equivalente a "E_1 ou E_2", e E_1 e E_2 são mutuamente excludentes.

Como entre os 100 números há 50 que são divisíveis por 2 e há 20 divisíveis por 5, teremos:

$$p(E_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$p(E_2) = \frac{20}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{10}$$

Logo, $p(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$

<u>2ª resolução</u>

Observando o evento "sortear um número que seja divisível por 2 ou divisível por 5", o "mais natural" seria considerar os eventos:

E_1: sortear um número divisível por 2,

E_2: sortear um número divisível por 5,

que não são mutuamente excludentes.

Entre 1 e 100 existem dez números que são divisíveis por 2 e 5, simultaneamente: 10, 20, 30 ... 100 (são os múltiplos de 10). Há, portanto, resultados comuns aos eventos E_1 e E_2.

Se somarmos a probabilidade de ocorrer E_1 com a de ocorrer E_2, estaremos então contando em dobro a probabilidade de ocorrerem os números que são divisíveis por 10.

Sendo E_3 o evento em que o resultado é um número divisível por 10, temos então que

$$p\left(\begin{matrix}\text{divisível por 2 ou}\\ \text{divisível por 5}\end{matrix}\right) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_3).$$

Observando, agora, que de 1 a 100 existem 50 números que são divisíveis por 2, 20 que são divisíveis por 5 e 10 que são divisíveis por 10, temos:

$$p\left(\begin{matrix}\text{divisível por 2 ou}\\ \text{divisível por 5}\end{matrix}\right) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_3) =$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Comentário

Observamos na 2ª resolução que E_1 e E_2 tem elementos comuns, não são, portanto, mutuamente excludentes.

Na linguagem dos conjuntos, o evento em que o resultado é um número divisível por 2 ou divisível por 5 é representado por $E_1 \cup E_2$ ou por E. Por outro lado, o evento em que o resultado é um número divisível por 10 (divisível por 2 e por 5) é $E_1 \cap E_2$.

> Quaisquer que sejam os eventos E_1 e E_2, é válida a relação:
>
> $$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

No caso em que E_1 e E_2 são mutuamente excludentes, essa relação é válida, pois nesse caso temos $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e $p(E_1 \cap E_2) = 0$; conseqüentemente

$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

Exemplo 69

Um jogo tem as seguintes regras. O jogador retira, ao acaso, 2 cartas de um baralho de 52 cartas. Se, entre as cartas que retirar, houver alguma carta de ouros o jogador vence. Se as duas cartas retiradas não forem cartas de ouros, o jogador perde.

Qual é a probabilidade de que o jogador vença o jogo?

1ª resolução

O jogador vencerá se, ao retirar 2 cartas, pelo menos uma for de ouros. Isto acontece:

se a 1ª carta for de ouros e a 2ª não (evento E_1), ou
se a 1ª carta não for de ouros e a 2ª também (evento E_2)
ou
se a 1ª carta for de ouros e a 2ª também (evento E_3)

Como E_1, E_2 e E_3 são mutuamente excludentes dois a dois,

$$p\left(\begin{matrix}\text{retirar pelo menos 1 carta}\\ \text{de ouros entre as 2 retiradas}\end{matrix}\right) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$$

Mas,

$$p(E_1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51}; \quad p(E_2) = \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} \quad \text{e} \quad p(E_3) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$$

Logo,

$$p\left(\begin{matrix}\text{retirar pelo menos 1 carta}\\ \text{de ouros entre as 2 retiradas}\end{matrix}\right) = \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{15}{34}$$

A probabilidade de que o jogador vença é $\frac{15}{34}$ (menor que 50%).

2ª resolução

Calculemos, inicialmente, a probabilidade de que o jogador não vença; isso só acontecerá se ele retirar 2 cartas que não sejam de ouros.

O número de possibilidades de retirar 2 cartas de um baralho com 52 cartas é dado por $C_{52,2}$.

Como num baralho de 52 cartas há 39 que não são de ouros, então o número de possibilidades de retirar 2 cartas não de ouros é $C_{39,2}$.

Portanto,

$$p(\text{retirar 2 cartas não de ouros}) = \frac{C_{39,2}}{C_{52,2}}$$

Como os eventos "retirar 2 cartas não de ouros" e "retirar pelo menos 1 carta de ouros" são complementares, então:

$$p\left(\begin{matrix}\text{retirar pelo menos}\\ \text{1 carta de ouros}\end{matrix}\right) = 1 - \frac{C_{39,2}}{C_{52,2}} = \frac{15}{34}$$

3ª resolução

Consideremos os eventos:

A: a 1ª carta é de ouros

B: a 2ª carta é de ouros

A e B não são mutuamente excludentes, pois apresentam resultados comuns: aqueles em que as 2 cartas são de ouros.

$$p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \quad B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

Assim,

$$p\left(\begin{matrix}\text{retirar pelo menos}\\ \text{1 carta de ouros}\end{matrix}\right) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{17} = \frac{15}{34}$$

Exemplo 70

Numa urna há 5 bolas numeradas de 1 a 5. As bolas 1, 2, 3 e 4 são brancas; a bola 5 é preta. Retirando 2 bolas ao acaso, calcule a probabilidade de que tenham:

a) a mesma cor,

b) cores diferentes.

Resolução

a) A probabilidade de que as duas bolas tenham a mesma cor é a de que as duas bolas sejam brancas (pois só há uma bola preta). Você pode perceber então que esta probabilidade é igual a:

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 60\%$$

b) As duas bolas retiradas ou tem a mesma cor ou são de cores diferentes. Isso significa que a probabilidade de terem a mesma cor somada à de terem cores diferentes resulta em 100% (eventos complementares). No item a) vimos que a primeira dessas probabilidades é 60%. Concluímos então que a probabilidade de que as duas bolas tenham cores diferentes é 40%.

Resolva o problema anterior supondo que a retirada seja feita com reposição.

Resposta

a) 68%; b) 32%.

Exemplo 71

Numa urna há 9 bolas numeradas de 1 a 9. As bolas 1, 2 e 3 são brancas; 4, 5 e 6 pretas; 7, 8 e 9 vermelhas. Retirando-se 3 bolas ao acaso, calcule a probabilidade de que:

a) as 3 bolas sejam da mesma cor;
b) as 3 bolas sejam de 3 cores diferentes;
c) duas bolas sejam da mesma cor e a bola restante seja de outra cor.

Resposta

a) $\frac{1}{28}$; b) $\frac{9}{28}$; c) $\frac{9}{14}$.

Exemplo 72

Numa região contaminada, a probabilidade de que uma pessoa tenha uma determinada doença é 0,4 e, por outro lado, a probabilidade de que uma pessoa venha a falecer no prazo de um ano é alta: 0,15.

Calcule a probabilidade de que uma pessoa, dessa região, escolhida ao acaso:

a) não tenha essa doença;

b) tenha a doença mas não morra no prazo de 1 ano;

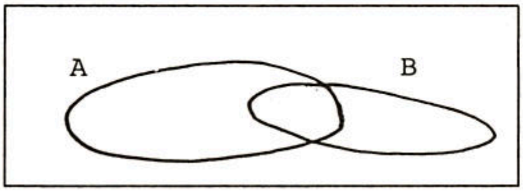
c) morra no prazo de 1 ano e tenha essa doença.

<u>Resolução</u>

Consideremos os eventos:

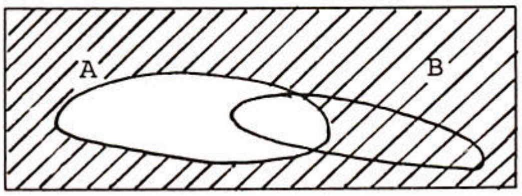
A: uma pessoa da região é doente,

B: uma pessoa da região vai morrer no prazo de 1 ano,
que podem ser representados no diagrama abaixo.



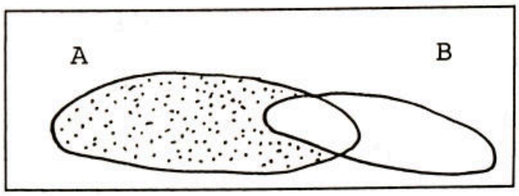
conjunto das pessoas da região contaminada

a) A parte hachurada do diagrama representa o evento complementar de A: uma pessoa da região não tem a doença, que chamaremos $\bar{A}$. Portanto,



$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6 = 60\%$

b) A parte hachurada do diagrama representa o evento: uma pessoa tem a doença, mas não morre no prazo de 1 ano. Esse evento pode ser anotado por "A e $\bar{B}$" (onde $\bar{B}$ é o evento complementar de B).

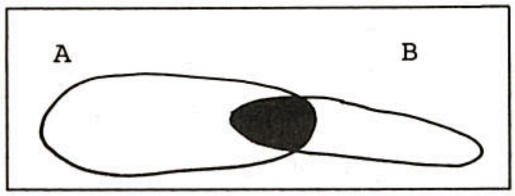


Portanto,

$$p\left(\begin{matrix}\text{pessoa tem a doença mas}\\ \text{não morre no prazo de 1 ano}\end{matrix}\right) = p(A)\ .\ p(\bar{B}) = 0,4\ .$$

$$.\ (1 - 0,15) - 0,34 = 34\%$$

c) A parte sombreada do diagrama representa o evento: uma pessoa morre no prazo de um ano, com essa doen - ça, que equivale a "B e A".



Portanto,

$$p\left(\begin{matrix}\text{uma pessoa morre no prazo}\\ \text{de 1 ano devido à doença}\end{matrix}\right) = p(B) \times p(A) = 0,5 \times 0,4 =$$

$$= 0,06 = 6\%$$

<u>Exemplo 73</u>

Um dado é lançado duas vezes. Calcule a probabilidade de que o produto dos valores ocorridos seja um número: a) par, b) ímpar.

<u>Resposta</u>

a) 75%; b) 25%.

<u>Exemplo 74</u>

Em uma amostra de 12 alunos, 4 foram reprovados e os restantes não. Sorteiam-se 2 alunos. Qual é a probabilidade de que ambos tenham sido aprovados?

<u>Resolução</u>

Sejam:

A: o 1º aluno foi aprovado;
B: o 2º aluno foi aprovado.

Queremos: $p(A \cap B)$.
Observemos que $p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ e que, portanto,
$p(A \cap B) = p(A)\ .\ p(B|A) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{7}{11} = \dfrac{14}{33}$.

Exemplo 75

Considere uma família com duas crianças, sendo que uma delas é menino. Qual é a probabilidade de que ambos sejam meninos? (Supor que é igualmente provável nascer menino ou menina e que o sexo de uma criança não afeta o das próximas).

Resolução

Sejam:

A: ambos são meninos;
B: a família tem um menino.
A|B: ambos são meninos, dado que um deles é menino.

Observe que A B e, portanto, $A \cap B = A$. Queremos $p(A|B)$.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Observação: Consideramos como espaço amostral, no caso,

$S = \{(MM),(MF),(FM),(FF)\}$

Portanto,

$A = \{(MM)\};$

$B = \{(MM),(MF),(FM)\};$

$A \cap B = A = \{MM\}.$

Pense agora na probabilidade de que ambas as crianças serem meninos, dado que a primeira foi um menino.

Resposta

$\frac{1}{2}$

Exemplo 76

As estatísticas indicam que 16,5% da população de um país é constituída de mulheres que fumam. Sabe-se também que 55% da população desse país são mulheres. Qual é a probabilidade de que uma mulher selecionada ao acaso seja fumante?

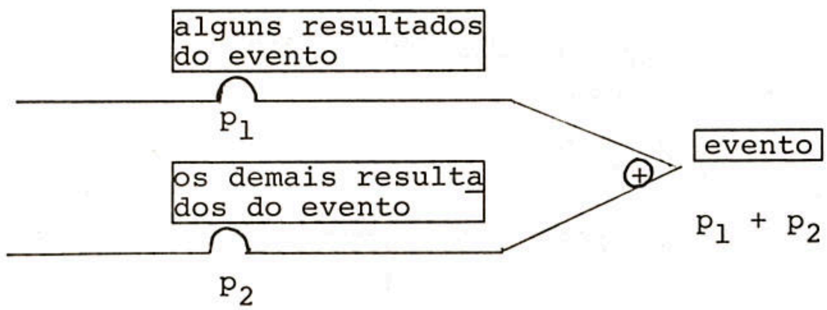
Resposta

0,3 ou 30% das mulheres fumam.

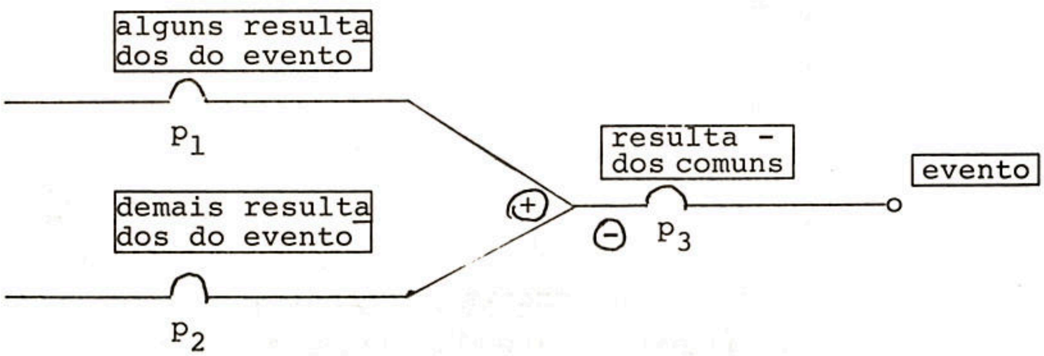
Comentário

O exemplo do que foi feito com produto de probabilidades, quanto ao tratamento alternativo de representar exigências sucessivas por obstáculos num mesmo caminho, podemos abordar adição de probabilidades, utilizando uma estratégia e um apoio visual semelhantes aos anteriores.

Quando um evento puder ser separado em dois outros mutuamente excludentes, representaremos esses dois outros por dois caminhos diferentes, os quais levam à realização do primeiro evento conforme o esquema:

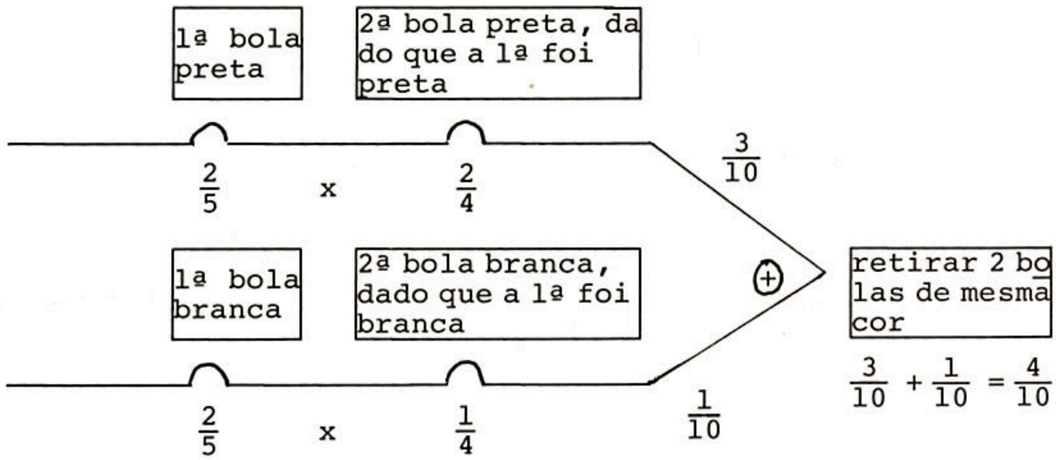


No caso em que separamos um evento em dois outros que não são mutuamente excludentes, representaremos o evento por 2 caminhos diferentes, que têm um trecho comum.

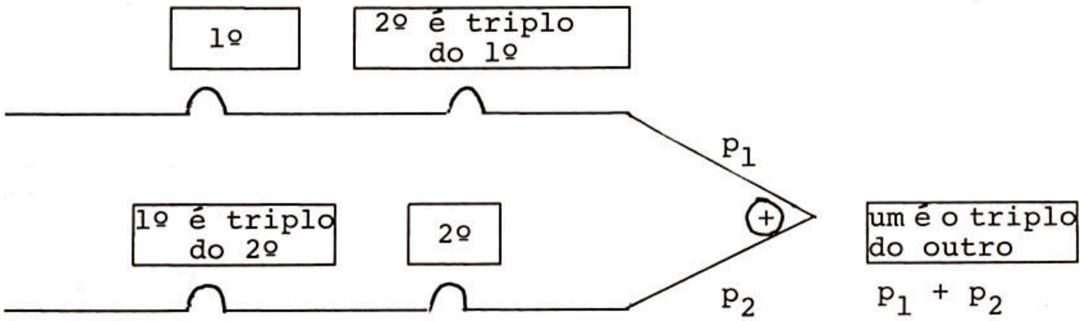


A título de exemplo apresentamos, a seguir, alguns diagramas que representam as resoluções de alguns problemas propostos.

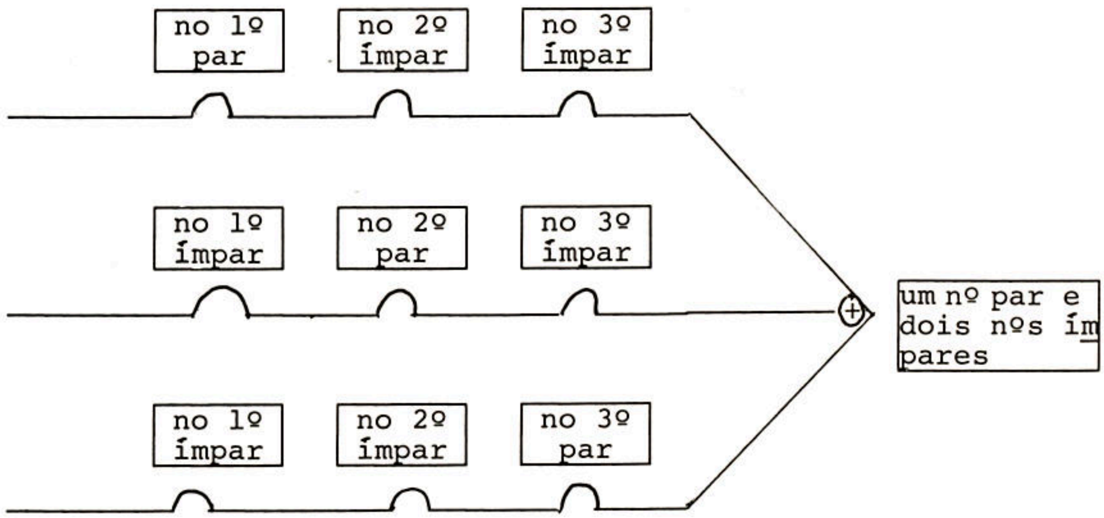
Exemplo 62



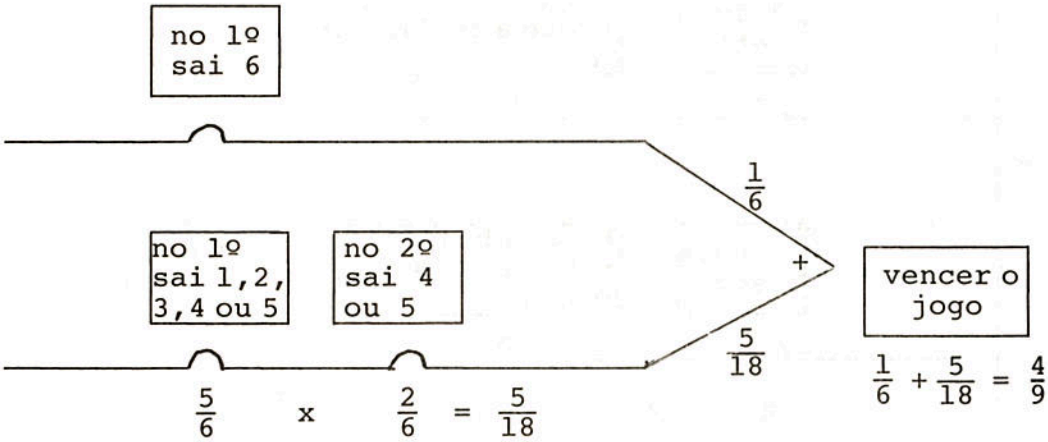
Exemplo 63



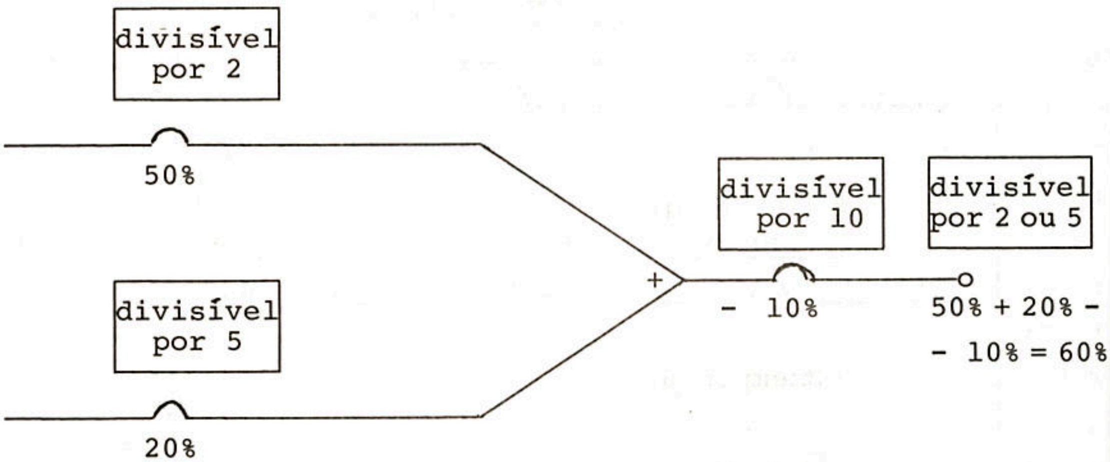
Exemplo 64



Exemplo 67



Exemplo 68



7.5 Potências e Expoentes

Tradicionalmente, o assunto "Função Exponencial", no 2º grau, é tratado sob um ponto de vista de um "conhecimento pronto e acabado". Uma ação docente, sob esse ponto de vista, pode ser assim resumida:

1) definição de função exponencial, com todas as suas propriedades e restrições;

2) exemplos: representações gráficas; resoluções de equações e inequações exponenciais;

3) eventuais aplicações.

A atual Proposta curricular apresenta aos professores um enfoque que difere um pouco da chamada "postura traidiconal", conforme descrito no primeiro parágrafo.

Acreditamos que, por força da conjuntura atual do sistema educacional (que é um subproduto dos sistemas político e social atuais do país) e das dificuldades intrínsecas do assunto em questão, o conceito geral de potências não é dominado por alunos do 2º grau.

Outro fato educacional em que acreditamos é que "pré-requisitos não devem ser admitidos como conhecidos e sim, diagnosticados". Em outras palavras, caso o professor constate a falta de pré-requisitos para um estudo mais amplo de potências, não hesite em construir[6], com os alunos, aqueles assuntos essenciais para uma continuidade em seus estudos.

Se esse é o caso de alguma turma com a qual o professor esteja trabalhando, então seguem-se algumas sugestões, na forma de propostas metodológicas, que assim podem ser resumidas:

1) verificação da construção, por parte dos alunos, do conceito de potência de "base e expoente" inteiros positivos, sob dois pontos de vista:

a) como produto de dois ou mais fatores iguais (problema 7);

---

[6]No contexto "construir" um assunto não significa revê-lo tal qual foi visto no 1º grau, mas sim, iniciar com o aluno um novo processo de aprendizagem efetiva e significativa das idéias fundamentais envolvidas nos conceitos dos assuntos em questão.

b) como resultado geral da aplicação do princípio multiplicativo (combinatório) (problemas 4, 5 e 6);

2) verificação da aquisição do conceito de potência de expoentes inteiros positivos, cuja base não é, necessariamente, um número inteiro e cuja origem é o produto de um número finito de fatores iguais (problema 8);

3) a extensão do conceito de potência para potência de expoentes inteiros negativos, por meio de uma conveniente notação de "inverso multiplicativo de um número não nulo", e do fato que gostaríamos de que todas as propriedades já adquiridas pelos alunos no estudo de potências com expoentes inteiros positivos se conservassem nessa ampliação (problemas 11 e 12);

4) a extensão do conceito de potência para potência de expoentes racionais decididamente é a que traz as maiores dificuldades técnicas, tendo em vista que "essas extensões" do conceito de potência não têm "dificuldades que são linearmente crescentes".

Neste ponto, acreditamos muito num processo construtivo (e exaustivo) dos conceitos de raiz quadrada, raiz cúbica e raiz quarta de números e do trabalho subseqüente da identificação das representações daqueles conceitos com as suas respectivas representações sob forma de potência (problemas 13, 14 e 15).

Talvez um trabalho, calcado nas últimas 4 etapas, possa produzir os tais pré-requisitos necessários à continuidade nos estudos das potências, levando-se em conta uma questão central: "Por que estudar potências?".

Essa questão, do ponto de vista educacional, deverá ser discutida em sala de aula, com alunos,objetivando garantir-lhes conhecimentos que inevitavelmente contribuirão para sua formação pessoal e que os tornarão pessoas de maior poder crítico e de maior autonomia com relação a algumas questões do seu dia-a-dia.

Após um trabalho como o proposto, um curso sobre potências, em geral, pode tomar o rumo do estudo da "interdependência entre grandezas" que obedece uma lei exponencial (particularmente, a maioria dos problemas apresentados) e suas conseqüências "naturais".

a) aplicabilicações;
b) representações gráficas;
c) situações particulares como equações e inequações;

d) o problema inverso (problemas já citados, e seguintes).

Aproveitamos o momento para "exigir" dos professores, que porventura tomarem conhecimento dessa Proposta de trabalho, sugestões, críticas e novas propostas, na tentativa de alcançarmos o objetivo educacional desejado.

CONTEUDO/OBJETIVO	OBSERVAÇÕES/SUGESTÕES
I. CONCEITO DE POTENCIA *Objetivo: Desenvolver o conceito de potência*	Comentários iniciais para o(a) professor(a): Para que o conceito de potências possa ser "desenvolvido" por alunos é de se esperar que já tenham "desenvolvido", anteriormente, o conceito de multiplicação. Este, por sua vez, é trabalhado inicialmente nas primeiras séries do 1º grau para a resolução de dois tipos básicos de problemas: 1º) aqueles que envolvem soma de parcelas iguais; 2º) aqueles que envolvem o <u>chamado</u> "princípio multiplicativo" (conseqüência do "raciocínio combinatório"). Vejamos dois exemplos para tentar explicar o que acabamos de dizer. <u>Problema 1</u> Um restaurante do tipo "sirva-se" (self service) cobra de cada cliente uma taxa única de Cz$ 1.200,00 por pessoa. No final de um dia, o restaurante atende 255 clientes. Qual foi a receita do restaurante? <u>Resolução</u> receita: $1200 \times 255 = \underbrace{1200 + 1200 + \dots 1200}_{255 \text{ parcelas}} =$ Cz$ 306.000,00

Problema 2

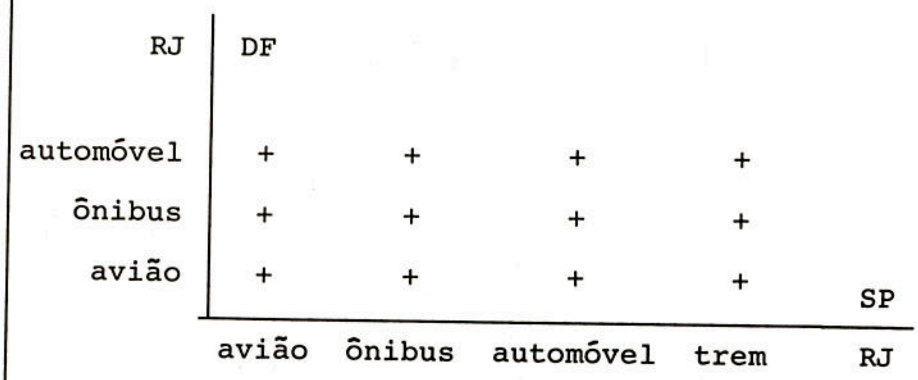
Um vendedor interestadual precisa viajar de São Paulo para o Rio de Janeiro e, em seguida, para Brasília. Ele poderá ir de São Paulo para o Rio de Janeiro de avião, de ônibus, de trem ou de automóvel. Estando no Rio de Janeiro, o vendedor poderá ir para Brasília de avião, de ônibus ou de automóvel. De quantas maneiras distintas o vendedor poderá ir de São Paulo para Brasília, passando pelo Rio de Janeiro?

1ª resolução

O vendedor tem 4 opções para ir de São Paulo ao Rio de Janeiro. Para cada uma das 4 opções, para vencer a 1ª etapa, o vendedor tem 3 opções para a 2ª etapa de sua viagem. Logo, o vendedor tem 4 x 3 = 12 maneiras distintas para ir de São Paulo a Brasília, passando pelo Rio de Janeiro.

2ª resolução

Veja o esquema gráfico seguinte:



Cada símbolo "+" no esquema gráfico representa um par de possibilidades para o vendedor: avião-avião; avião-ônibus; avião-automóvel; ..... trem-automóvel, num total de 12 opções.

As situações-problema, que poderão ser usadas como proposta do desenvolvimento do conceito de potência, poderão conter os dois aspectos da multiplicação mencionados nos problemas 1 e 2.

O que iremos propor na seqüência, é um trabalho para o desenvolvimento do conceito de potência por alunos de 2º grau, pois o fato de já terem trabalhado anteriormente com símbolos que denotam potências, não significa que "possuam", ou já tenham "assimilado", aquele conceito.

Antes, porém, vamos propor um problema, com duas resoluções, para ilustrar o que afirmamos no parágrafo anterior.

Problema 3

Consideremos uma cultura de bactérias cuja população, num certo instante, é de 1.000 indivíduos. Considere, também, que cada indivíduo dessa cultura, por um tipo especial de divisão celular, dá origem a dois novos indivíduos idênticos por hora. Determine o tamanho aproximado da população dessa cultura, 5 horas após aquele instante, supondo que nenhum indivíduo morra nesse intervalo de tempo.

1ª resolução

a) No instante inicial teremos 1.000 indivíduos;

b) 1 hora após o instante inicial, supondo que cada um dos 1.000 indivíduos tenha passado pela divisão celular, teremos, aproximadamente, 1000 x 2 = 2.000 indivíduos;

c) passada mais uma hora, nas condições do problema, a população será de, aproximadamente, 2.000 x 2 = 4.000 indivíduos; d) repetindo o raciocínio anterior por mais 3 vezes (4.000 x 2 = = 8.000; 8.000 x 2 = 16.000) obteremos:

população da cultura = 16.000 x 2 = 32.000 indivíduos

Comentário

Em uma resolução como a que foi apresentada, necessitamos sempre de um resultado anterior para obtermos um resultado seguinte. Isto significa que não utilizamos o conceito de potência e sim, um processo recorrente no qual cada resultado novo é obtido do resultado anterior multiplicando-se este por 2.

2ª resolução

a) Como na primeira resolução, no instante inicial, teremos 1.000 indivíduos.

b) Passada uma hora do instante inicial teremos 2.000 = 1.000 x 2 indivíduos.

c) Passadas duas horas do instante inicial, teremos:

2.000 x 2 = (1.000 x 2) x 2 = 1.000 x 4 = 4.000 indivíduos

(a diferença de enfoque entre a primeira e a segunda resolução está no fato de que o terceiro resultado (4.000) pode ser obtido do resultado inicial (1.000) multiplicando-o por uma potência adequada (4 = 2 x 2, ou dobro do dobro).

d) Tendo em vista que o raciocínio usado no item c) pode ser utilizado em qualquer passo, então, no final de 5 horas, a população em questão será igual a 1.000 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = = 1.000 x 2^5 = 32.000 indivíduos.

A. Potências de expoentes inteiros positivos

Os problemas seguintes poderão servir como atividades para um trabalho junto aos alunos, visando ao desenvolvimento, ou à continuação do conceito de potência.

Problema 4

No esquema seguinte:

AMO
MO
O

podemos "ler" a palavra "AMO" de "várias maneiras". Vamos estabelecer as seguintes regras de leitura:

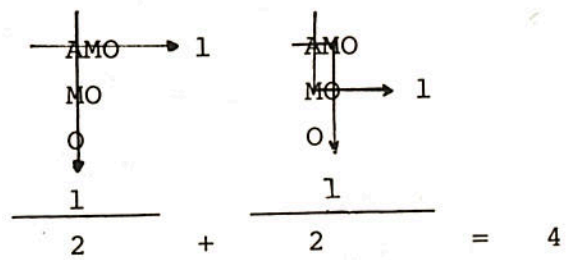
1ª) A leitura começa pela letra A.

2ª) Após termos lido uma letra qualquer da palavra em questão, a próxima letra a ser lida dessa palavra deverá estar imediatamente à direita, ou imediatamente abaixo, daquela letra.

De quantas maneiras distintas podemos ler "AMO" no esquema?

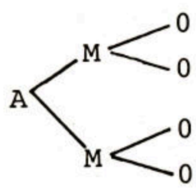
<u>1ª resolução</u>

Uma contagem direta nos fornece a resposta: 4. Por exemplo, algum aluno ao tentar "resolver" o problema contando todas as possibilidades de leitura, poderia ter a seguinte iniciativa:



<u>2ª resolução</u>

Estando na letra "A", existem duas opções, à direita, ou abaixo, para "lermos" a letra "M"; para cada uma das duas possibilidades de lermos "AM", existem duas possibilidades para "lermos" a letra "O"; logo, podemos "ler AMO" de $2 \times 2 = 4$ maneiras distintas. Um recurso gráfico para ilustrar a contagem que acabamos de realizar pode ter o seguinte aspecto:



Comentários

1) Afirmamos que para propor um exercício como o problema 4, o professor não precisa, necessariamente, abrir um assunto como "Contagem" ou "Combinatória"; a experiência tem mostrado que, em situações inéditas, alguns alunos mostram algum tipo de iniciativa, algumas vezes com algum sucesso.

2) A primeira resolução é, com certeza, a mais esperada é provável que a segunda resolução não ocorra: caso se proponha um exercício como o problema 4, acreditamos que a segunda resolução não deva ser apresentada pelo professor até que ocorra um momento adequado para ela, quando as dificuldades inerentes a esse tipo de problema surgirem com mais força.

Problema 5

Idem ao problema 4 para os seguintes esquemas:

a)	b)	c)	d)
AMOR	AMORA	AMORAS	AMOREIRAS
MOR	MORA	MORAS	MOREIRAS
OR	ORA	ORAS	OREIRAS
R	RA	RAS	REIRAS
	A	AS	EIRAS
			IRAS
			RAS
			AS
			S

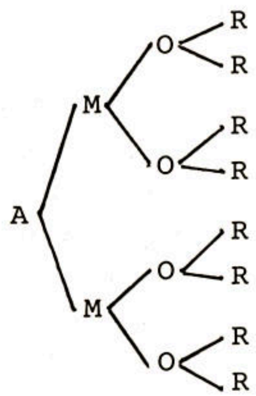
1ª resolução do item a)

Uma contagem direta nos fornece a resposta 8.

2ª resolução do item a)

Esta resolução imita a segunda resolução do problema 4 e não deve ser apresentada aos alunos prematuramente.

Para passar da letra A para a letra M há duas possibilidades; para passar da letra M para a letra O há duas possibilidades; portanto, para passar da letra A para a letra O existem 2 x 2 = 4 possibilidades; para passar da letra O para a letra R há duas possibilidades; portanto, para cada uma das 4 maneiras de se ler "AMO", há 4 x 2 = 8 possibilidades para se ler "AMOR"; veja o esquema gráfico seguinte:



<u>3ª resolução do item a)</u>

Se, no esquema apresentado no item a), retirarmos as 4 letras "R", reduzimos o item a) ao problema 4; logo, para cada uma das 4 maneiras de ter "AMO", há duas maneiras de se ler a letra "R"; assim, há 4 x 2 = 8 maneiras de ler "AMOR".

Algumas resoluções dos itens b) e c) do problema 4 poderão ser análogas às apresentadas no item a), mas poderão surgir outras. Por exemplo, como alunos nessa faixa de idade e escolaridade possuem alguma facilidade (intuitiva) de generalização, poderá ocorrer a alguns deles um primeiro passo para a generalização (ao verificar os dois primeiros resultados 4 e 8) e inferir que o número de maneiras para ler o esquema do item b) é igual a 16, ou seja, o dobro do resultado encontrado no item a), assim como o resultado nesse item era o dobro do resultado encontrado no problema 4 (note que essa "generalização" não é do mesmo tipo das que foram apresentadas nas resoluções do problema 4 e item a) do problema 5). Caso isso ocorra, talvez seja conveniente colocar em "dúvida" uma resposta mais apressada com algo do tipo: "Você tem certeza? Verifique o próximo item".

Do ponto de vista do objetivo maior a ser alcançado com esses problemas, a descoberta de que cada resultado obtido é o dobro do anterior não é o "fim desejado", mas apenas um passo "importante" para alcançar aquele objetivo.

Para o item c) podem ocorrer fatos parecidos com os que ocorreram no item b). Neste item (c) alguns alunos poderão ter "quase" certeza da inferência feita e afirmarem a resposta "32", mesmo sem uma verificação mais detalhada. É o item d) que poderá modificar comportamentos com relação à forma pela qual um aluno tenta resolver o problema.

O "contador de todas as possibilidades" terá sérias dificuldades. Se alguém, por ventura, concluiu que o número de possibilidades de ler a palavra "AMOREIRAS", no esquema, é o dobro do número de possibilidades de ler alguma palavra com uma letra a menos que a palavra em questão, num esquema análogo, precisará retroceder até um caso conhecido (o item c) e retornar passo a passo ao item d), calculando: 32×2, 64×2, ..., $128 \times 2 = 256$.

Como o objetivo dos problemas 4 e 5 é a utilização do conceito de potência (e não só da simbologia), o professor terá papel decisivo ao apontar um caminho naquela direção.

Por exemplo, tomando como ponto de partida a resposta encontrada no problema 4, os itens a), b), c) e d) do problema 5 têm como respostas: 4×2, $(4 \times 2) \times 2 = 4 \times 2^2$; $(4 \times 2^2) = 2 = 4 \times 2^3$; 4×2^6. Melhorando um pouco mais o caminho para uma generalização completa, o próprio ponto de partida (problema 4) poderá ser escrito como $4 = 2^2$, obtendo-se assim 2^3, 2^4, 2^5 e 2^8 para os itens a), b), c) e d) do problema 5. O passo final consiste em estabelecer uma relação entre o número de letras da palavra e o expoente de cada potência, em cada caso.

Problema 6

Considere a palavra genérica "$A_1A_2A_3 \ldots A_n$", que é colocada num esquema do tipo dos problemas 4 e 5:

$A_1A_2A_3 \; \ldots \quad A_n$
$A_2A_3A_4 \; \ldots \; A_n$
"   "
"   "
"   "
"   "
"   "
"   "
"   "
" "
" "
A_n

e que pode ser lida conforme as regras estabelecidas no problema 4.

Conte o número de maneiras para ler essa palavra.

Resposta

2^{n-1}, ou $\frac{2^n}{2}$, ou $\frac{1}{2} \cdot 2^n$, ou $0{,}5 \times 2^n$

Problema 7

Dez pessoas fundam um clube. Um dos regulamentos do regimento interno do clube prevê que cada sócio pode convidar 2 novos sócios ao final de cada ano. Calcule o número máximo de sócios que esse clube poderá ter ao fim de:

a) 1 ano.

b) 2 anos;

c) 3 anos;

d) 10 anos;

e) n anos (n inteiro, $n \geq 0$).

Resoluções

Em cada item estaremos considerando que cada sócio convide 2 novos sócios e que estes aceitem o convite.

a) No final do 1º ano, o número de sócios será: $10 + 2 \times 10 = 10 \times (1 + 2) = 10 \times 3 = 30$.

b) No final do 2º ano, o número de sócios será: $30 + 2 \times 30 = 30 \times (1 + 2) = 30 \times 3 = (10 \times 3) \times 3 = 10 \times 3^2 = 90$.

c) no final do 3º ano, o número de sócios será: $90 + 2 \times 90 = 90 \times (1 + 2) = 90 \times 3 = (10 \times 3^2) \times 3 = 10 \times 3^3 = 270$.

d) No final do 10º ano, o número de sócios será: número de sócios do final do 9º ano + + 2 x (número de sócios do final do 9º ano).

Para calcularmos o que o problema 7 pede, basta calcular sucessivamente: $270 \times 3 = 810$; $810 \times 3 = 2.430$; $2.430 \times 3 = 7.290$; ...; $196.830 \times 3 = 590.490$. Em cada passo da resolução apresentada recorremos a um resultado anterior e não fizemos uso do conceito de potência. Porém, usando as idéias desenvolvidas nas resoluções dos itens a), b) e c), poderemos escrever:

$$\text{nº de sócios ao final de 10 anos} = 10 \times \underbrace{3 \times 3 \times \ldots \times 3}_{\text{10 vezes}} = 10 \times 3^{10}$$

Problema 8

Num problema de Matemática Financeira, como no caso anterior, o professor não precisa abrir um assunto específico chamado Matemática Financeira para propor um exercício como o que segue. As dificuldades podem ser resolvidas juntamente com os alunos.

No primeiro dia útil de 1988 (data que será chamada "data-base"), um pequeno investidor tem o saldo de Cz$ 10.000,00 em caderneta de poupança (estamos supondo que os "rendimentos" do último período que antecedeu a data-base já tenham sido creditados).

Para simplificar o problema, vamos supor que nos próximos meses, a instituição financeira que retém o investimento em questão, pague (e continuará pagando) entre juros e correção monetária, rendimentos a uma taxa de 15% ao mês. Suponha que, a partir da data-base, não foram feitos depósitos nem retiradas. Nessas condições, calcule o saldo dessa conta, com relação à data-base, após:

a) 1 mês;
b) 2 meses;
c) 3 meses;
d) 12 meses;
e) n meses (n inteiro e $n \geqq 0$).

<u>Resolução</u>

a) saldo 1 mês após data-base:

10.000 + 15% de 10.000 = 10.000 + 10.000 x 0,15 =
= 10.000 x 1,15 = Cz$ 11.500,00;

b) saldo 2 meses após data-base:

11.500 + 15% de 11.500 = 11.500 + 11.500 x 0,15 =
= 11.500 x 1,15 = Cz$ 13.225,00;

c) saldo 3 meses após data-base:

13.225 + 15% de 13.225 = 13.225 + 13.225 x 0,15 =
13.225 x 1,15 = Cz$ 15.208,75;

d) para calcularmos cada saldo pedido nos itens a), b) e c), recorremos ao saldo do mês anterior. A idéia central (como a que ocorreu nos problemas anteriores) está em não recorrermos ao passo anterior, mas sim, ao resultado inicial e a uma lei geral de potência.

Nos itens b) e c), poderíamos ter assim procedidos:

b) 11.500 + 15% de 11.500 = 11.500 + 11.500 x 0,15 = 11.500 x 1,15 = (10.000 x 1,15) x x 1,15 = 10.000 x $1,15^2$ = Cz$ 13.225,00.

c) 13.225 + 15% de 13.225 = 13.225 + + 13.225 x 0,15 = 13.225 x 1,15 = (10.000 x $1,15^2$) x 1,15 = 10.000 x $1,15^3$ = Cz$ 15.208,75.

d) saldo 12 meses após data-base: 10.000 x $1,15^{12}$ = Cz$ 53.502,50.

e) saldo n meses após data-base: 10.000 x $1,15^n$.

Comentários

Sobre o cálculo de $1,15^{12}$:

a) usando uma calculadora "simples"[7]:

digite: 1 . 15 $\boxed{\times}$ $\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\ldots\boxed{=}}_{11 \text{ vezes}}$

b) usando uma calculadora "científica"[8]:

digite: 1 . 15 $\boxed{y^x}$ 12 $\boxed{=}$

Problema 9

Calcule a inflação de janeiro de 1988 a janeiro de 1989. Suponha que a taxa de inflação tenha sido em média 15% ao mês.

Suponhamos que em 1º-01-88 dispúnhamos de um capital C e que esse capital deva ser corri

[7] Calculadora "simples" possui as 4 operações fundamentais, uma tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ e teclas de memória $\boxed{M+}$ $\boxed{M-}$, $\boxed{MR}$ e $\boxed{MC}$.

[8] Calculadora "científica" possui todos os recursos de uma calculadora "simples" e teclas para calcular valores de funções trigonométricas (e inversas), potências em geral e logaritmos decimais.

gido com a inflação de 15% ao mês. Assim, em 1º-01-89 ele se tornará $C \cdot 1{,}15^{12}$.

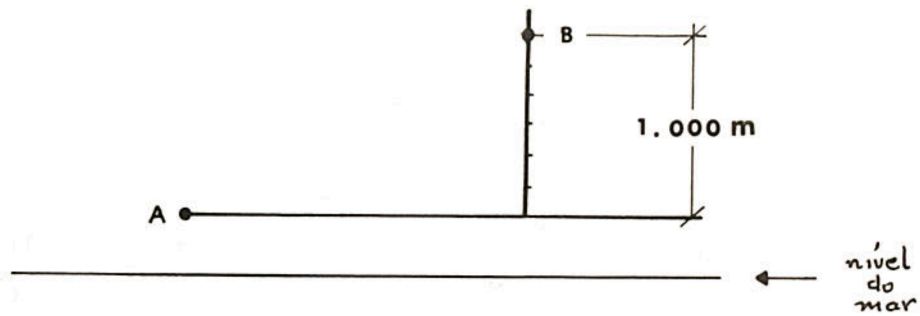
Isso significa que de 1º-01-88 a 1º-01-89 o capital sofreu uma variação de $C \cdot 1{,}15^{12} - C = C(1{,}15^{12} - 1)$, que representa a "inflação em dinheiro".

O valor $1{,}15^{12} - 1$ representa a taxa de inflação no período considerado, isto é, $5{,}3502501 - 1 = 4{,}3502501 = 435{,}02501\%$.

Problema 10

A pressão atmosférica (a pressão que a camada de "ar" exerce sobre os corpos) ao nível do mar é igual a 1 atm (lemos: "uma atmsofera").

Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que altitude de B tenha 1.000 m a mais que a altitude de A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A (veja figura).



Nessas condições, determine a pressão atmosférica (em atm), com relação ao nível do mar, num ponto cuja altitude é:

a) 0 m;
b) 1.000 m;
c) 2.000 m;
d) 3.000 m;
e) 4.000 m;
f) 9.000 m;
g) h metros.

Resposta

a) 1 atm;
b) 0,9 atm;
c) 0,81 atm;
d) 0,739 atm;
e) 0,6561 atm;
f) 0,3874 atm;
g) 0,9 h/1000.

B. Potências de expoentes inteiros negativos

Potências de expoente negativo podem ser vistas como uma conveniente notação de alguns números não inteiros e, em particular, como uma conveniente notação do inverso multiplicativo de um número real diferente de zero.

Para se trabalhar potências com expoentes inteiros negativos talvez seja conveniente trabalhar, inicialmente, o conceito de inverso multiplicativo de um número e dar significado a um símbolo como a^{-1}, onde $a \neq 0$.

Se a é um número real, $a \neq 0$, o inverso multiplicativo de a é um número real b tal que $a \cdot b = 1$.

Notações especiais para b: $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Assim, o inverso de 2, que é o número 0,5 poderá ser denotado por $\frac{1}{2}$, ou 2^{-1} (portanto, 2^{-1} nada mais é, neste contexto, que um código para o número 0,5 inverso multiplicativo de 2. Da mesma maneira, $0,5^{-1}$ é um código para o número 2, inverso multiplicativo de 0,5.

Essa conveniente notação poderá proporcionar um caminho para uma ampliação do conceito de potência, estendendo-o para as potências de expoentes inteiros negativos.

Problema 11

Uma moeda "não viciada" será lançada um certo número de vezes, consecutivamente ("não viciada" será entendida como ideal). A probabilida de ocorrer "cara" (K) e a probabilidade de ocorrer "coroa" (C), em cada lançamento, serão consideradas iguais a 50%. Nessas condições, qual será a probabilidade de ocorrer sempre "cara", em todos os lançamentos, quando o número de lançamentos for igual a:

a) 1;

b) 2;

c) 3;

d) 10;

e) n (n inteiro e $n > 0$).

Resolução

a) Ao se lançar uma vez a moeda, a probabilidade de ocorrer cara nesse lançamento é, segundo informação do problema, igual a 50% = 0,5 = $= \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

b) ao se lançar uma moeda duas vezes, em cada um dos lançamentos, a probabilidade de ocorrer cara é igual a 50%. Logo, em 2 lançamentos consecutivos, teremos as seguintes possibilidades:

K,K   K,C   C,K   C,C

Portanto, em 2 lançamentos consecutivos da moeda, a probabilidade de ocorrer cara em ambos os lançamentos é de 1 para 4, ou seja:

a probabilidade de ocorrer cara em 2 lançamentos $= \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Mas,

$$0{,}25 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 2^{-1} \times 2^{-1} = (2^{-1})^2 = (\tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

O próximo passo, para uma ampliação para potências de expoentes inteiros negativos, consiste na identificação dos símbolos:

$$2^{-2} \text{ e } (2^{-1})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Nessa identificação, $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

c) em 3 lançamentos consecutivos, teremos as possibilidades:

K,K,K K,K,C K,C,K C,K,K K,C,C C,K,C C,C,K
C,C,C

A seqüência K,K,K tem uma possibilidade de ocorrer em 8, ou seja:

$$\text{a probabilidade de ocorrer cara em 3 lançamentos} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$$

Mas,

$$0,125 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 2^{-1} \times 2^{-1} \times 2^{-1} = (2^{-1})^3 =$$
$$= (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2^3}$$

Identificando-se o símbolo 2^{-3} com $(2^{-1})^3 = \frac{1}{2^3}$, obtemos: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

d) Torna-se inviável tentarmos resolver o item d), da mesma maneira que foram resolvidos os itens b) e c), exibindo-se todas as seqüências possíveis de caras e coroas em 10 lançamentos consecutivos.

A determinação do número dessas seqüências terá que ser feita por outra via. Por exemplo, com relação à resolução do item c), o número de seqüências obtidas foi igual a 8. [Se jogarmos a moeda uma quarta vez, obteremos, a partir das 8 seqüências já exibidas, acrescentando-se, em cada uma delas, uma ocorrência "cara", ou uma ocorrência "coroa", 16 seqüências de "caras" e "coroas".]

Da mesma forma, a partir das 16 seqüências possíveis de "caras" e "coroas", ao jogarmos a moeda pela quinta vez consecutiva, acrescentaremos, em cada uma delas, uma ocorrência "cara", ou uma ocorrência "coroa". Obteremos, então, 32 seqüências de "caras" e "coroas".

Uma conclusão plausível, que pode ocorrer, é que, ao aumentarmos o número de lançamentos da moeda em 1, o número de seqüências de "caras" e "coroas" será o dobro do número de seqüências já obtidas (este é um raciocínio recorrente análogo ao já elaborado nos problemas anteriores).

Por outro lado, ao jogarmos uma moeda 3 vezes consecutivas, obtemos $8 = 2^3$ seqüências de "caras" e "coroas". Ao jogarmos a moeda 4 vezes consecutivas, obteremos $16 = 2^4$ seqüências. A inferência indutiva nos leva a concluir que, ao lançarmos a moeda 10 vezes, o número de seqüências de "caras" e "coroas" deverá ser igual a $1024 = 2^{10}$.

Portanto, a probabilidade de ocorrer cara em 10 lançamentos de uma moeda será de 1 em 1024 possibilidades.

$$\text{a probabilidade de ocorrer cara em 10 lançamentos} = \frac{1}{1024} = 0{,}000976562 = 0{,}0976562\%$$

Como

$$0{,}000976562 = \underbrace{0{,}5 \times 0{,}5 \times \ldots \times 0{,}5}_{\text{10 vezes}} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}}_{\text{10 vezes}} =$$

$$= (2^{-1}) \times (2^{-1}) \times \ldots (2^{-1}) = \frac{1}{2^{10}}$$

Da mesma forma como nos itens b) e c), uma ampliação nos permite escrever:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$$

e) No lançamento de uma moeda n vezes consecutivas (n inteiro e $n > 0$), o número de seqüências de "caras" e "coroas" será igual a 2^n. Logo, a seqüência formada por n "caras" tem uma possibilidade de ocorrer em 2^n possibilidades possíveis.

$$\text{probabilidade de ocorrer cara em n lançamentos} = \frac{1}{2^n}$$

Novamente, uma aplicação do conceito de potência de expoente inteiro negativo, nos permitirá identificar o símbolo

$$2^{-n} \text{ com } (2^{-1})^n = \frac{1}{2^n}$$

Portanto:

$$2^{-n} = \frac{1}{2^n}$$

Comentário

A experiência tem mostrado (assim como ocorreu nos problemas 4, 5, 6 e 7) que os alunos possuem formas de "ataques" a problemas, mesmo que estes envolvam assuntos ainda não devidamente tratados. Como antes, não há necessidade de o professor abrir um título como "Probabilidade" para propor um problema como o 11.

Problema 12

Nas condições do problema 8, um pequeno investidor possui, no primeiro dia útil de 1988 (data-base) em sua caderneta de poupança, um saldo de Cz$ 10.000,00.

Suponha que o rendimento que a instituição financeira pagou ao investidor foi de 15% ao mês sobre o saldo atual, entre juros e correção monetária. Suponha, ainda, que essa taxa de rendimento foi sempre a mesma em 1987. Qual era o saldo dessa conta do investidor:

a) 1 mês antes da data-base?
b) 2 meses antes da data base?
c) 3 meses antes da data-base?
d) 6 meses antes da data-base?
e) n meses antes da data-base (n inteiro e n > 0).

Resolução

a) Na data-base, o saldo de Cz$ 10.000,00 foi obtido do saldo do mês anterior, aplicando-se a taxa de 15% em vigor, ou seja:

10.000 = (saldo do mês anterior) x 1,15.

Portanto:

$$\text{saldo do mês anterior à data base} = \frac{10.000}{1,15} = 10.000 \times 1,15^{-1} =$$

$$= \text{Cz\$ } 8.695,65$$

Comentário

Alunos, que tem alguma iniciativa em problemas como este, inferem que o saldo anterior à data-base é 85% do saldo atual, ou seja, alguns alunos realizam um desconto de 15% do saldo atual para determinar o saldo no mês anterior. Se o professor colocar um problema como este para uma turma e se algum aluno realizar um desconto de 15% sobre Cz$ 10.000,00 (obtendo Cz$ 8.500,00), peça a esse aluno que calcule o saldo no primeiro dia útil de 1988 a partir de Cz$ 8.500,00.

Nesse caso, ele irá encontrar:

$$\text{saldo na data-base} = 8.500 \times 1,15 = \text{Cz\$ } 9.775,00 \neq$$

$$\neq \text{Cz\$ } 10.000$$

b)

$$\text{saldo 2 meses antes da data-base} = \frac{\text{saldo 1 mês antes}}{1,15} =$$

$$= \frac{8.695,65}{1,15} = 8.695,65 \times 1,15^{-1} = \text{Cz\$ } 7.561,44$$

Como estamos interessados em uma forma que dependa somente de uma informação inicial (10.000) e de uma lei geral de potência, podemos escrever:

saldo 2 meses antes da data-base $= 8.695,65 \times 1,15^{-1} =$

$= (10.000 \times 1,15^{-1}) \times 1,15^{-1} = 10.000 \times 1,15^{-2}$

c)

$10.000 \times 1,15^{-3} =$ Cz\$ 6.575,16;

d)

$10.000 \times 1,15^{-6} =$ Cz\$ 4.323,28;

e)

$10.000 \times 1,15^{-n}$

C. Potências de expoentes não inteiros

Algumas potências de expoentes não inteiros, assim como ocorreu com as potências de expoentes inteiros negativos, podem ser convenientes notações de alguns números reais.

Neste ponto, pode estar um dos problemas de aprendizagem no primeiro e segundo graus, a saber, uma classificação "mais fina" a respeito de números.

A primeira grande classificação dos números reais consiste na separação em números inteiros e números não inteiros. De um modo geral, essa primeira classificação não traz grandes dificuldades aos alunos.

Uma classificação "mais fina" dos números reais não inteiros em racionais e não racionais costuma trazer maiores dificuldades aos alunos.

Afirmamos que exigir uma classificação, por parte dos alunos, a respeito de números reais, para decidir se um determinado número é racional, ou não, não é fundamental para uma seqüência em seus estudos em Matemática.

Eis uma razão para tal afirmação: no segundo grau não se demonstra a existência de números reais não racionais (irracionais). A existência de números irracionais é postulada!

E, mesmo que uma prova de uma afirmação do tipo "o número x é irracional" seja apresentada a alunos, tal prova não deverá possuir um "caráter construtivo" no seguinte sentido: "qualquer prova 'aparentemente acessível' a alunos do 2º grau sobre a irracionalidade de determinado número não deverá exibir um processo efetivo[9] da construção desse número".

As provas que pudemos encontrar em alguns livros sobre a irracionalidade de determinados números possuem outro carácter: supõe-se em primeiro lugar que o número que se deseja provar ser irracional é, por absurdo, racional. A partir dessa premissa, tomada como "verdadeira", usando-se argumentos válidos, tenta-se chegar a alguma conclusão que, embora "verdadeira" à luz das regras que produzem "fatos verdadeiros" a partir de "fatos verdadeiros", contradiz "alguma verdade" já estabelecida previamente, estabelecendo-se aí o que se costuma chamar "absurdo" ou "contradição".

Não estamos querendo defender a Escola Construtivista e negar o chamado "raciocínio por absurdo". O que afirmamos é que alunos no 2º grau, em sua maioria, estão numa fase "construtivista" e que "raciocínios por absurdo" não estão a seu alcance. Tais "raciocínios por absurdo", que deverão fazer parte da vida de qualquer pessoa, poderão ser conseguidos futuramente, não necessariamente via Matemática.

Por exemplo, o que significa o símbolo $\sqrt{2}$? Será que esse símbolo representa algum número? No caso afirmativo, será que é fundamental classificá-lo em algum tipo especial de número?

Achamos que as questões maiores estão na

[9] Um "processo efetivo" implicaria a existência de um algoritmo que, por um número finito de passos, permitiria a determinação daquele número.

postulação da existência do número real cuja representação simbólica é $\sqrt{2}$, no seu significado e não na sua classificação.

A definição de número irracional é feita por negação de número racional e definir um objeto não implica a sua existência.

Portanto, um trabalho do professor pode seguir um caminho que permita ao aluno fazer a "sua construção" do conceito do número que é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$, via alguma atividade apropriada para esse fim.

Problema 13

Uma atividade clássica consiste em determinar a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1, numa certa unidade de comprimento.

"Obtenha a medida da diagonal de um quadrado cujo lado, numa unidade de comprimento, é igual a 1."

Comentário

Uma informação necessária para resolvermos esse problema é o Teorema de Pitágoras. É possível que alguns alunos não tenham tido contato com esse teorema. Certamente, isto não é um motivo para que o problema não seja proposto, pois o professor sempre poderá fornecer as informações necessárias e, futuramente, preparar alguma atividade no sentido de abordar o assunto em débito.

Resolução

Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$(\text{diagonal do quadrado})^2 = (\text{lado do quadrado})^2 + (\text{lado do quadrado})^2 = 1 + 1 = 2$$

Se anotarmos a diagonal do quadrado por d, a equação a ser resolvida é:

$$d \times d = d^2 = 2$$

Tendo em vsita todos os comentários feitos nos últimos parágrafos, tentaremos "construir" um número d, cuja multiplicação por si mesmo seja exatamente o número 2. Isso será feito por meio de tentativas.

Numa primeira análise, d não pode ser 1, pois $1 \times 1 = 1 < 2$. O número d também não pode ser 2, pois $2 \times 2 = 4 > 2$.

Se uma atividade como essa for proposta a alunos, é quase certo que uma próxima tentativa seja 1,5.

Peça para o aluno calcular 1,5 x 1,5. Ele obterá 2,25 > 2. Logo, d < 1,5.

Os passos seguintes são especulativos e foram realizados sem uma calculadora.

supor d =	cálculo de d x d	conclusão
1,25	1,5625	d > 1,25
1,3	1,69	d > 1,3
1,4	1,96	d > 1,4
1,45	2,0925	d < 1,45
1,41	1,9881	d > 1,41
1,42	2,0164	d < 1,42
1,415	2,002225	d < 1,415
1,413	1,996569	d > 1,413
1,414	1,999396	d > 1,414
1,4145	2,00081025	d < 1,4145
1,4144	2,00052736	d < 1,4144
1,4143	2,00024449	d < 1,4143
1,4142	1,99996164	d > 1,4142

Uma atividade desse tipo fatalmente se torna rapidamente enfadonha e em algum instante o professor deverá intervir para direcionar os trabalhos ao seu objetivo principal.

O "diálogo" seguinte também é especulativo:

Aluno: "Até quando iremos fazer esses cálculos?"
Professor: "Até encontrarmos o número que multiplicado por si mesmo seja igual a 2."

Aluno: "Quantas 'contas' ainda faremos?"
Professor: "Quantas forem necessárias."

Aluno: "Mas, será que conseguiremos encontrar esse momento?"
Professor: "O que você acha? O que vocês acham?"

Caso um diálogo semelhante à esse ocorra numa sala de aula, e caso haja envolvimento suficiente por parte dos alunos, poderá ocorrer divergência com relação à questão.

O aluno poderá questionar:

"Será que existe esse número?"

Neste caso, o professor deverá conduzir o aluno a concluir que não há dúvida quanto a existência do segmento, mas que não conseguiram obter o "valor exato" de sua medida, pois todos os números que tentaram, multiplicados por si mesmos, ou eram menores que 2, ou eram maiores que 2. Além disso, o professor deve reforçar o fato de que, embora não conheçam tal valor, podem melhorar sua aproximação o quanto quiserem. A seguir, um procedimento possível por parte do professor seria:
"Como será impossível determinarmos efetivamente esse número, usaremos um símbolo para representá-lo. O símbolo clássico é: $\sqrt{2}$, que é lido "raiz quadrada de 2."

"Ou então: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, ou ainda: $(\sqrt{2})^2 = 2$."

"Notem que os valores obtidos na tabela confeccionada anteriormente são valores aproximados de $\sqrt{2}$. Por exemplo:

a) quando escrevemos $\sqrt{2} = 1{,}4$, estamos querendo dizer que $1{,}4 \times 1{,}4$ é um número 'próximo' de 2.

b) quando escrevemos $\sqrt{2} = 1,4143$, estamos querendo dizer que $1,4143 \times 1,4143$ é um número 'próximo' de 2."

"Alguém poderia perguntar: qual é a melhor aproximação que se pode fazer para o número representado por $\sqrt{2}$?"

"Não existe 'a melhor' aproximação. Existe uma aproximação conveniente para $\sqrt{2}$, de acordo com a precisão exigida (ou desejada) no problema."

O nosso próximo passo é a introdução da notação do número representado por $\sqrt{2}$ sob forma de potência.

Uma propriedade que vale para as potências de expoentes inteiros (positivos e negativos) é:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (1)$$

quaisquer que sejam os inteiros m e n.

Gostaríamos que essa propriedade se conservasse na ampliação do conceito de potência para expoentes não inteiros.

Particularmente, qual seria o significado de $2^{0,5}$? Será que esse símbolo representa algum número? No caso afirmativo, que número será esse?

Se desejamos que $2^{0,5}$ se comporte como as potências de expoentes inteiros, então $2^{0,5} \times 2^{0,5}$ deverá ser igual a $(2^{0,5})^2$, ou seja:

$$(2^{0,5})^2 = 2$$

o que de fato é verdade pela propriedade (1).

Mas, segundo discussão anterior, o número d tal que $d \times d = 2$ é o número anotado por $\sqrt{2}$.

Portanto, podemos identificar os símbolos $2^{0,5}$ e $\sqrt{2}$, por representarem o mesmo número, cuja existência foi postulada. Então, podemos escrever $2^{0,5} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.

Assim, tudo correrá como desejamos por

uma conveniente notação de $\sqrt{2}$ em forma de potência expoente não inteiro.

De um modo geral, se a representa um número real positivo ($a > 0$), então o símbolo $\sqrt{a}$ representa o número real positivo b, de modo que:

$$b \times b = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

Da mesma forma, o número real positivo anotado por $a^{1/2}$ (ou $a^{0,5}$) tem a seguinte propriedade imposta:

$$a^{0,5} \times a^{0,5} = (a^{0,5})^2 = a$$

e, portanto, identificamos o símbolo $a^{0,5}$ com $\sqrt{a}$, pois representam o mesmo número real positivo.

Segundo essa identificação:

$$\sqrt{a} = a^{1/2} = a^{0,5}$$

Problema 14

Um rapaz deseja construir um aquário de vidro, de forma cúbica, de 2 litros (2 ℓ) de capacidade. Para isso, terá que comprar 5 lâminas de vidro, todas de forma quadrada (o aquário não terá tampa). Qual deverá ser, aproximadamente, a medida do lado de cada lâmina?

Informações

Devem ser fornecidas caso não sejam do conhecimento dos alunos:

1) o volume de um cubo de aresta a é calculado pela fórmula: volume do cubo = aresta do cubo x x aresta do cubo x aresta do cubo ou volume do cubo = (aresta do cubo)^3.

   Simplificação da fórmula por meio de notações convenientes: anotando o volume por V e a aresta do cubo por a, obtemos:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

2) 1 litro (1 ℓ) é o volume de um cubo, cuja aresta mede 1 dm, logo, 1 dm^3 = 1 ℓ.

Resolução

A medida dos lados das lâminas de vidro, que vão formar o aquário, é a medida da aresta do aquário.

Logo, se a representa a medida do lado do vidro, então:

$$a \cdot a \cdot a = 2$$

é a equação do problema. Vamos resolvê-la, da mesma forma que resolvemos a equação d x d = 2 (do problema 13).

Numa primeira avaliação, a não pode ser 1 pois 1 x 1 x 1 = 1 < 2, a não pode ser 2, pois 2 x 2 x 2 = 8 > 2.

As próximas avaliações são especulativas (usamos uma calculadora para os cálculos):

supor a =	cálculo de a . a . a	conclusão
1,2	1,728	a > 1,2
1,3	2,197	a < 1,3
1,25	1,953125	a > 1,25
1,27	2,048383	a < 1,27
1,26	2,000376	a < 1,26
1,255	1,976656375	a > 1,255
1,257	1,986121593	a > 1,257
1,258	1,990865512	a > 1,258
1,259	1,995616979	a > 1,259
1,2595	1,997995545	a > 1,2595
1,2598	1,999423591	a > 1,2598
1,2599	1,999899758	a > 1,2599
1,25995	2,000137869	a < 1,25995
1,25994	2,000090246	a < 1,25994
1,25993	2,000042623	a < 1,25993
1,25992	1,99995	a > 1,25992
1,259925	2,000018811	a < 1,259925

Como antes, se um trabalho como esse for proposto para alunos, rapidamente se tornará enfadonho, fazendo, talvez, com que surjam questões dos tipos que apareceram por ocasião do problema 12.

A existência de um número a, de modo que a . a . a seja 2 pode ficar por conta de um "trato" com os alunos:

Professor: "Será que é possível construir um aquário de capacidade de 2 litros?"
Alunos: "Achamos que sim." (Esta é uma resposta esperada.)

Professor: "Então, afirmo que EXISTE o número a tal que a . a . a = 2.

Uma notação tradicional para esse número é $\sqrt[3]{2}$. Assim, o símbolo $\sqrt[3]{2}$ representa um número não inteiro a tal que: $a \cdot a \cdot a = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$."

Quando escrevemos $\sqrt[3]{2} = 1{,}3$, estamos querendo dizer que $1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3$ é um número próximo de 2. Da mesma forma: $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$ significa que $1{,}25992 \times 1{,}25992 \times 1{,}25992$ está próximo de 2.

Nosso próximo passo é obter uma representação do número $\sqrt[3]{2}$ na forma de potência de expoente não inteiro.

Se desejamos que as potências de expoentes não inteiros se comportem como as potências de expoentes inteiros, então vamos impor a seguinte condição:

$$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{1}{3}})^3 = (2^{0{,}333\ldots})^3 = (2^{0{,}\overline{3}})^3 = 2$$

Mas o número a (cuja existência foi postulada) tal que a . a . a = 2 é anotado por $\sqrt[3]{2}$.

Identificando-se ambos os símbolos, podemos escrever:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{0{,}\overline{3}}$$

De um modo mais geral, o símbolo $\sqrt[3]{a}$, onde $\underline{a}$ é um número real qualquer, representa o número real $\underline{b}$ (cuja existência é, em geral, <u>postulada</u>) de modo que:

$$b \, . \, b \, . \, b = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Da mesma forma, o número real, anotado por $a^{1/3}$ ou $a^{0,\bar{3}}$, tem a seguinte propriedade:

$$a^{\frac{1}{3}} \, . \, a^{\frac{1}{3}} \, . \, a^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{0,\bar{3}})^3 = a$$

Logo, identificamos os símbolos $\sqrt[3]{a}$ e $a^{\frac{1}{3}}$, ou $a^{0,\bar{3}}$, pois representam o mesmo número real (cuja existência é, em geral, postulada).

<u>Problema 15</u>

Uma caderneta de poupança paga aos seus depositantes, rendimentos a uma taxa de 100% ao ano. Suponha que os rendimentos são creditados trimestralmente. Um investidor coloca numa conta desse tipo Cz$ 10.000,00 numa data D (que será chamada data-base). Os rendimentos serão creditados nessa conta 1 trimestre, 2 trimestres, 3 trimestres ... n trimestres após a data-base. Calcule o valor do saldo dessa conta naquelas datas, supondo que nesse período não haverá depósitos nem retiradas.

<u>Comentário</u>

O problema 15 possui resoluções distintas e não equivalentes.

<u>1ª resolução</u>

A taxa de juros 100% é anual. Portanto, para calcularmos os saldos trimestrais, devemos determinar uma taxa trimestral.

Uma primeira forma de pensar no problema nos mostra que uma taxa trimestral será de $\frac{100\%}{4} = 25\%$ ao trimestre.

Assim, de acordo com o problema 8, teremos:

a) saldo 1 trimestre após D = 10.000 + 25% de 10.000 = 10.000 + 10.000 x 0,25 = 10.000 x x 1,25 = Cz\$ 12.500,00;

b) saldo 2 trimestres após D = 12.500 + 25% de 12.500 = 12.500 + 12.500 x 0,25 = 12.500 x x 1,25 = (10.000 x 1,25) x 1,25 = 10.000 x x $1{,}25^2$ = Cz\$ 15.625,00;

c) saldo 3 trimestres após D = 10.000 x $1{,}25^3$ = Cz\$ 19.531,25;

d) saldo n trimestres após D = 10.000 x $1{,}25^n$.

Esta resolução não trouxe qualquer novidade com relação às potências de expoentes não inteiros.

2ª resolução

Como na primeria resolução, o primeiro passo é determinar uma taxa trimestral de juros para o cálculo dos rendimentos.

Antes de continuarmos esta resolução, note que:

$$1{,}25 \times 1{,}25 \times 1{,}25 \times 1{,}25 = 1{,}25^4 = 2{,}44140625$$

Portanto, aplicando-se Cz\$ 1,00 por 4 trimestres (1 ano) à taxa de 25% ao trimestre, teremos o saldo de Cz\$ 2,44 $\neq$ Cz\$ 2,00, o que significa que 25% ao trimestre corresponde à taxa de 144,140625% ao ano e não 100% ao ano conforme o problema informa.

Isto significa que a taxa 25% ao trimestre não é equivalente à taxa 100% ao ano: a taxa 25% ao trimestre aplicada compostamente a uma quantia x fornece, 1 ano depois, 2,44140625x, enquanto que a taxa 100% ao ano, aplicada à mesma quantia x, fornece, 1 ano depois, 2x.

Feito esse comentário, uma segunda forma de pensar no problema é aquela que nos leva a determinar a taxa trimestral que é equivalente à taxa 100% ao ano (que com certeza é menor que 25% ao trimestre).

Anotaremos a taxa trimestral equivalente a 100% ao ano por i.

Portanto, a taxa i aplicada a uma quantia x, compostamente por 4 trimestres proporcionará o saldo de 2x.

A equação que resulta desse fato é:

$$x \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot\cdot (1+i) = x \cdot (1+i)^4 = 2x$$

Como a quantia x é irrelevante para o problema, obtemos a equação:

$$(1+i) \cdot (1+i)\ (1+i) \cdot (1+i) = (1+i)^4 = 2 \qquad (1)$$

O professor que porventura está lendo essa nota pode estar pensando nas dificuldades em resolver a equação (1).

Realmente, as dificuldades existem, porém, não deveriam ser obstáculos para a proposição do problema, mesmo em escolas mais carentes.

Particularmente, o problema 14 proporciona para o estudante uma ferramenta que poderá lhe ser útil em algumas situações reais do seu dia-a-dia.

Vamos atacar a equação (1) tentando transformá-la em uma equação que lhe seja equivalente, porém mais simples. Essa simplificação pode ser combinada com os alunos (caso o problema seja colocado) da seguinte maneira: denote $1+i$ por x. A equação (1) se torna:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 = 2 \qquad (2)$$

Ora, segundo os conceitos envolvidos nos problemas 12 e 13, o número x tal que $x \cdot x \cdot x \cdot x = 2$ terá sua existência postulada e será anotado por $\sqrt[4]{2}$.

Dizer que a solução da equação (2) é $\sqrt[4]{2}$ é uma forma simplista de encarar o problema. Alunos suficientemente "treinados" poderiam resolver a equação (2) dando a solução correta e sem saberem o significado do símbolo $\sqrt[4]{2}$.

A determinação do número que é representado pelo símbolo $\sqrt[4]{2}$ poderá ser feita de várias maneiras. Apresentaremos três, duas das quais por meio de calculadora.

1ª) Imitando-se as resoluções dos problemas 12 e 13. Talvez o professor que esteja lendo estas linhas ache tal tipo de resolução dispensável, porém não temos a mesma opinião. Acreditamos que tal tipo de resolução sirva para enriquecer o conceito envolvido na equação, do ponto de vista "da construção desse conceito".

O número x é maior que 1, pois
$1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1 < 2$ e x é menor que 1,25, pois
$1{,}25 \times 1{,}25 \times 1{,}25 \times 1{,}25 = 2{,}44140625$ (pág.236).

Podemos pedir aos alunos, individualmente ou em grupos, que completem uma tabela como, por exemplo, a que segue, para que, num trabalho em grupo, o trabalho enfadonho fique minimizado.

supor x =	cálculo de x . x . x . x	conclusão
1,10		
1,11		
1,12		
1,13		
⋮		
1,24		

Após essas primeiras tentativas, podemos selecionar os dois valores da tabela que mais se aproximem do valor procurado e continuar avaliando valores entre esses dois.

supor x =	cálculo de x . x . x . x	conclusão
1,181		
1,182		
1,183		
⋮		
1,189		

Apesar de todo trabalho dispendido nesta forma de resolver a equação (2), acreditamos haver uma riqueza nela contida que proporciona aos alunos uma melhor "construção" do conceito, um melhor conhecimento das dificuldades computacionais e uma tomada de consciência da necessidade de um aperfeiçoamento dos processos envolvidos na resolução em questão.

2ª) Vamos dispensar as avaliações e usar ferramentas computacionais "mais poderosas": calculadoras eletrônicas. É claro que as calculadoras poderiam ter sido usadas na primeira maneira de resolver a equação (2), assim como nas resoluções dos problemas 13 e 14. A proposta atual é usar os recursos computacionais mais poderosos que calculadoras.

A tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ dessas máquinas, ao ser pressionada, informa a raiz quadrada do número que se encontrava no visor. Esse recurso só deveria ser usado depois da construção do conceito de raiz quadrada via as resoluções já apresentadas. Assim, no problema 13, ao digitarmos 2 e $\boxed{\sqrt{\ }}$ o visor mostraria 1,414213562.

O problema 14 não poderá ser resolvido utilizando-se a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Para resolvermos a equação (2), usaremos os conceitos já construídos. Assim:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = (x \cdot x)^2 =$$
$$= (x^2)^2 = 2$$

Logo, x^2 é o número que multiplicado por si mesmo reproduz o número 2. Nos termos do problema 13, podemos escrever:

$$x^2 = \sqrt{2}$$

Por outro lado, nos mesmos termos do problema 13, podemos dizer que x é o número que multiplicado por si mesmo reproduz o número representado por $\sqrt{2}$ (e que foi avaliado no problema 13), logo:

$$x = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1,4142135}$$

Como x . x . x . x = 2, então:

$$\sqrt{\sqrt{2}} \;.\; \sqrt{\sqrt{2}} \;.\; \sqrt{\sqrt{2}} \;.\; \sqrt{\sqrt{2}} = (\sqrt{\sqrt{2}})^4 = 2$$

Portanto, será possível a identificação do símbolo $\sqrt{\sqrt{2}}$ com $\sqrt[4]{2}$, pois representam o mesmo número.

Na máquina de calcular, os procedimentos são:

digite: 2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ e obtenha $x = \sqrt[4]{2} = 1,1892071$

Na extensão do conceito de potência, imitando os problemas 13 e 14, o símbolo $2^{1/4}$ (ou $2^{0,25}$) representa um número tal que:

$$(2^{\frac{1}{4}})^4 = (2^{0,25})^4 = 2$$

que é uma imposição.

Logo, podemos fazer a identificação de $2^{\frac{1}{4}}$ (ou $2^{0,25}$) com $\sqrt[4]{2}$.

Finalizando, relembrando que fizemos $x = 1 + i$ e como $x = \sqrt[4]{2} = 1,892071$, então

taxa trimestral i procurada, que é equivalente à taxa de 100% ao ano, é igual a $\sqrt[4]{2} - 1 = 0,1892071$, ou 18,92071%.

a) saldo 1 trimestre após D = 10.000 . $(1 + \sqrt[4]{2} - 1)$ = 10.000 x 1,1892071 = Cz$ 11.892,07;

b) saldo 2 trimestres após D = 10.000 . $(1 + \sqrt[4]{2} - 1)^2$ = 10.000 x $1,1892071^2$ = Cz$ 14.142,14;

c) saldo 3 trimestres após D = 10.000 . $(1 + \sqrt[4]{2} - 1)^3$ = 10.000 x $1,1892071^3$ = Cz$ 16.817,93;

d) saldo n trimestres após D = 10.000 . $(1 + \sqrt[4]{2} - 1)^n$ = 10.000 x $1,1892071^n$.

3ª) Como já foram identificados os símbolos $\sqrt[4]{2}$ e $2^{1/4}$ (ou $2^{0,25}$), a idéia é usar os recursos de calculadoras científicas que possuem uma tecla do tipo $\boxed{y^x}$ e que permitem calcular potências em geral.

No problema em questão, basta digitar:

2 $\boxed{y^x}$. 25 $\boxed{=}$ e obter $2^{\frac{1}{4}} = 2^{0,25} = 1,189207115$

É preciso notar que, com uma calculadora científica, as equações d x d = 2 e a . a . a = = 2 dos problemas 13 e 14 também podem ser resolvidas facilmente. A saber:

Problema 13: 2 $\boxed{y^x}$. 5 $\boxed{=}$ fornece $2^{0,5} = 1,414213562$

Problema 14: 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ fornece $2^{0,\overline{3}} =$
$= 1,25992105$

De um modo mais geral, se a é um número real positivo (a > 0), o símbolo $\sqrt[4]{a}$ representa o número real b (cuja existência é, em geral, postulada) tal que:

$$b . b . b . b = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} = (\sqrt[4]{a})^4 = a$$

Da mesma forma, o símbolo $a^{\frac{1}{4}}$, ou $a^{0,25}$, representa o número real que possui a seguinte propriedade (imposta):

$$a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{4}})^4 = (a^{0,25})^4 = a$$

Logo, identificamos os símbolos $\sqrt[4]{a}$ e $a^{\frac{1}{4}}$ ou $a^{0,25}$, pois representam o mesmo número real (cuja existência é, em geral, postulada).

3ª resolução

Aplicando Cz$ 10.000 a uma taxa de 100% ao ano obtém-se t anos após a data-base D:

saldo t anos após D $= 10.000 \ . \ (1+1)^6 = 10.000^t$ (*)

Uma pergunta que poderá ocorrer é a seguinte: Será que a fórmula (*) "funciona", mesmo que t não seja inteiro?

É preciso notar que essa questão não é a mesma que ocorreu nos problemas 13 e 14, e no próprio problema 15, quando da sua 2ª resolução (pág.235).

Vamos verificar que as respostas obtidas na 2ª resolução do problema 15 podem ser obtidas da fórmula (*) para valores não inteiros de t.

a) saldo 1 trimestre após D $= 10.000 \ . \ (1+i) =$
$= 10.000 \ . \ (1 + \sqrt[4]{2} - 1) = 10.000 \ . \ \sqrt[4]{2} =$
$= 10.000 \ . \ 2^{0,25} = 10.000 \times 2^{1/4}$ = saldo 0,25 ano após D (usando (*)).

Ou seja, se t = 0,25 ano (1 trimestre) em (*), obtemos a resposta esperada;

b) saldo 2 trimestres após D $= 10.000 \ . \ (1+i)^2 =$
$= 10.000 \ . \ (1 + \sqrt[4]{2} - 1)^2 = 10.000 \ . \ (\sqrt[4]{2})^2 =$
$= 10.000 \ . \ (\sqrt{\sqrt{2}})^2 = 10.000 \ . \ \sqrt{2} = 10.000 \ .$
$. \ 2^{0,5} = 10.000 \ . \ 2^{1/2}$ = saldo 0,5 ano após D (por meio de (*))

Logo, (*) funciona se t = 0,5 ano (2 trimestres);

c) saldo 3 trimestres após D $= 10.000 \ . \ (1+i)^3 =$
$= 10.000 \ . \ (1 + \sqrt[4]{2} - 1)^3 = 10.000 \ . \ (\sqrt[4]{2})^3 =$
$= 10.000 \ . \ (2^{1/4})^3.$

Segundo o procedimento anterior, pode-mos escrever a igualdade: $(2^{1/4})^3 = 2^{3/4}$.

Logo, o saldo 3 trimestres após é:

$D = 10.000 \cdot 2^{3/4} = 10.000 \cdot 2^{0,75}$ = saldo 0,75 anos após D (segundo (*));

d) o saldo n trimestres após é:

$$D = 10.000 \cdot (1 + \sqrt[4]{2} - 1)^n = 10.000 \cdot \sqrt[4]{2})^n = \\ = 10.000 \cdot (2^{1/4})^n.$$

Segundo o procedimento anterior, pode-mos escrever a igualdade: $(2^{1/4})^n = 2^{n/4}$.

Logo, o saldo n trimestres após é:

$D = 10.000 \cdot 2^{n/4}$ = saldo $\frac{n}{4}$ anos após D (segundo (*)).

Portanto, a fórmula (*) fornece as mesmas respostas obtidas na 2ª resolução para alguns valores não inteiros de t, a saber, todos os números não inteiros da forma $\frac{n}{4}$, com n inteiro, $n > 0$ (note que para este tipo de problema não tem sentido $n = 0$!)

II. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Objetivos: Dar uma definição de função exponencial, suas características principais, gráficos, aplicações e o problema inverso

A. Introdução

Como introdução, daremos uma lista de problemas com suas respectivas respostas e extensões, visando a motivar uma futura definição de função exponencial, com as restrições que lhe são inerentes.

Problema 6

Considere a palavra genérica "$A_1A_2A_3\ldots A_n$", que é colocada num esquema do tipo dos problemas 4 e 5, e que pode ser lida conforme as regras estabelecidas no problema 4.

$A_1A_2A_3A_4\ldots\ldots A_n$

$A_2A_3A_4\ldots\ldots A_n$

$A_3A_4A_5\ldots A_n$

"   "

"   "

"   "

"   "

"   "

"   "

"   "

"   "

A_n

Conte o número de maneiras para ler essa palavra.

Resposta

O número de maneiras de ler palavra com n letras = $0{,}5 \cdot 2^n$, onde n é inteiro, $n > 0$.

Problema 7

Dez pessoas fundam um clube. Um dos regulamentos do regimento interno do clube prevê que cada sócio poderá convidar 2 novos sócios ao final de cada ano. Calcule o número máximo de sócios que esse clube poderá ter ao fim de n anos (n inteiro, $n \geq 0$).

Resposta

O número de sócios ao fim de n anos = $= 10 \cdot 3^n$, onde n é inteiro e $n \geq 0$.

Problema 8

No primeiro dia útil de 1988 (data que será chamada "data-base"), um pequeno investidor tem o saldo de Cz$ 10.000,00 em caderneta de poupança (estamos supondo que os rendimentos do último período que antecedeu a data-base já tenham sido creditados).

Para simplificar o problema, vamos supor que a instituição financeira que retém o investimento em questão, pagou (e continuará pagando) entre juros e correção monetária, rendimentos a uma taxa de 15% ao mês. Suponhamos também que, a partir da data-base, não foram feitos novos depósitos e nem foram feitas retiradas. Nessas condições, calcule o saldo dessa conta, com relação à data-base, daqui n meses (n inteiro e $n \geq 0$).

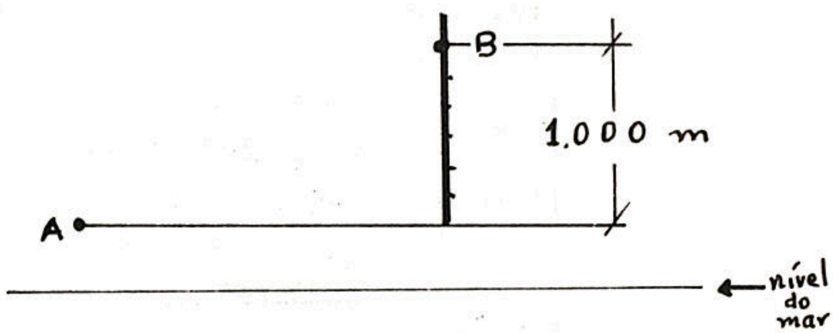
Resposta

Saldo n meses após data-base = $10.000 \cdot 1{,}15^n$, onde n é inteiro e $n \geq 0$.

Problema 10

A pressão atmosférica (a pressão que a camada de "ar" exerce sobre os objetos) ao nível do mar é igual a 1 atm (lemos: "uma atmosfera").

Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que a altitude de B tenha 1.000 m a mais que a altitude de A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A (veja figura).



Nessas condições, determine a pressão atmosférica (em atm), com relação ao nível do mar, num ponto cuja altitude é h metros.

Resposta

Pressão atmosférica a altitude h = $= 0{,}9^{h/1000}$.

Problema 11

Uma moeda "não viciada" será lançada um certo número de vezes, consecutivamente ("não viciada" será entendida como ideal). A probabilidade de ocorrer "cara" (K) e a probabilidade de ocorrer "coroa" (C), em cada lançamento, serão consideradas iguais a 50%. Nessas condições, qual será a probabilidade de ocorrer "cara" em todos os lançamentos, quando o número de lançamentos for igual a n (n inteiro e $n > 0$)?

Resposta

A probabilidade de sair n caras em n lançamentos = $0,5^n$, com n inteiro e $n > 0$.

Problema 15

Uma caderneta de poupança paga aos seus depositantes, rendimentos a uma taxa de 100% ao ano. Suponha que os rendimentos são creditados trimestralmente. Um investidor coloca numa conta desse tipo Cz$ 10.000,00 numa data D (que será chamada data-base). Os rendimentos serão creditados nessa conta 1 trimestre, 2 trimestres, 3 trimestres ... n trimestres após a data-base. Calcule o saldo dessa conta naquelas datas, supondo que em todo esse período não serão feitos depósitos nem retiradas.

Respostas

1ª resolução:

saldo n trimestres após D = $10.000 \cdot 1,25^n$, com n inteiro e $n \geq 0$;

2ª resolução:

saldo n trimestres após D = $10.000 \cdot (\sqrt[4]{2})^n$, com n inteiro e $n \geq 0$;

Observação: As resoluções 1 e 2 do problema 15 são distintas e não equivalentes.

As extensões: os problemas 6 e 7 não proporcionam extensões para as grandezas relacionadas (número de letras e número de maneiras de ler palavra colocada no esquema do problema 4 e, número de anos e número máximo de sócios do clube).

Problema 12

Nas condições do problema 8, um pequeno investidor possui, no primeiro dia útil de 1988 (data-base) em sua caderneta de poupança, o saldo de Cz$ 10.000,00.

Suponha que o rendimento que a instituição financeira paga ao investidor é de 15% ao mês sobre o saldo atual, entre juros e correção monetária. Suponha, ainda, que essa taxa de rendimento era a mesma em 1987. Qual era o saldo dessa conta do investidor n meses antes da data-base (n inteiro e $n > 0$)?

Resposta

O saldo n meses antes da data-base = $= 10.000 \times 1,15^{-n}$, com n inteiro, $n \geq 0$, ou então, o saldo n meses antes da data $= 10.000 \times$ $\times 1,15^{n}$, com n inteiro, $n \leq 0$.

Problema 15

Uma caderneta de poupança paga aos seus depositantes, rendimentos a uma taxa de 100% ao ano. suponha que os rendimentos são creditados trimestralmente. Um investidor coloca numa conta desse tipo Cz$ 10.000,00 numa data D (que será chamada data-base). Os rendimentos serão creditados nessa conta 1 trimestre, 2 trimestres, 3 trimestres ... t trimestres após a data-base. Calcule o valor do saldo dessa conta naquelas datas, supondo que nesse período não serão efetuados depósitos nem retiradas.

Resposta

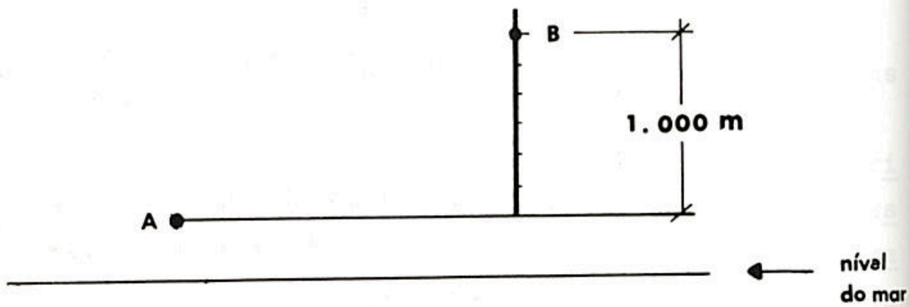
3ª resolução:

saldo t anos, após D = 10.000 . 2^6, onde t é um número racional da forma $\frac{n}{4}$, com n inteiro.

Problema 10

A pressão atmosférica (a pressão que a camada de "ar" exerce sobre os objetos) ao nível do mar é igual a 1 atm (lemos: "uma atmosfera").

Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que a altitude de B tenha 1.000 m a mais que a altitude de A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A (veja figura).



Nessas condições, determine a pressão atmosférica (em atm), com relação ao nível do mar num ponto cuja altitude é h metros.

Dos problemas apresentados, o problema 10 é o que proporciona o "maior grau" de liberdade para as extensões, por causa da lei geral que o enunciado encerra. Assim, poderíamos perguntar, por exemplo, o valor da pressão atmosférica em pontos com as seguintes altitudes:

a) 500 m;
b) 1,5 km;
c) 2,5 km;

d) 5,5 km;

e) 250 m;

f) 1.250 m;

g) 750 m;

h) 2.750 m.

Resoluções

a) pressão atmosférica a 500 m = pressão atmosférica a 0,5 km = $0,9^{0,5} = \sqrt{0,9}$ (segundo identificação feita na página 232).

Logo, pressão atmosférica a 0,5 km = = 0,95 atm.

b) pressão atmosférica a 1,5 km = $0,9^{1,5} = 0,9^{1+0,5}$ (*) $= 0,9 \cdot 0,9^{0,5} = 0,9 \cdot \sqrt{0,9} =$ = 0,85 atm;

c) pressão atmosférica a 2,5 km = $0,9^{2,5} = 0,9^{2+0,5}$ (*) $= 0,9^2 \cdot 0,9^{0,5} = 0,81 \cdot \sqrt{0,9} =$ = 0,77 atm;

d) pressão atmosférica a 5,5 km = $0,9^{5,5} = 0,9^{5+0,5}$ (*) $= 0,9^5 \cdot 0,9^{0,5} = 0,6561 \cdot \sqrt{0,9} = 0,62$ atm;

e) pressão atmosférica a 250 m = pressão atmosférica a 0,25 km = $0,9^{0,25} = \sqrt[4]{0,9}$ (segundo identificação feita na página 240) $= \sqrt{\sqrt{0,9}} =$ $= 0,948683298 = 0,97$ atm;

f) pressão atmosférica a 1.250 m = pressão atmosférica a 1,25 km = $0,9^{1,25} = 0,9^{1+0,25}$ (*) $= 0,9 \cdot 0,9^{0,25} = 0,9 \cdot \sqrt[4]{0,9} = 0,88$ atm;

g) pressão atmosférica a 750 m = pressão atmosférica a 0,75 km = $0,9^{0,75} = 0,9^{3/4} = (\sqrt[4]{0,9})^3$ (segundo identificação feita na página 243) = = 0,92 atm;

h) pressão atmosférica a 2.750 m = pressão atmosférica a 2,75 km = $0,9^{2,75} = 0,9^{2+0,75}$ (*) = $0,9^2 \cdot 0,9^{0,75} = 0,9^2 \cdot (\sqrt[4]{0,9})^3 = 0,75$ atm.

(*) Uma propriedade desejada para potências: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

A última seqüência de cálculos de pressões atmosféricas para diversas altitudes pode levar um aluno a concluir que a variável h, que representa a grandeza altitude, pode assumir qualquer valor (dentro de certos limites para os quais a experiência física tem validade).

A grande questão que surge é: o que significa, para um aluno, a frase "h pode assumir qualquer valor"?

Dependendo de trabalhos anteriores, "qualquer valor", para um aluno, poderá significar apenas um certo conjunto de números racionais de determinado tipo, ou, na melhor das hipóteses, todos os racionais, mesmo que já tenha tido contato com números irracionais. Em outras palavras, alguns alunos não conseguem distinguir números não inteiros racionais de números irracionais. Esta pode ser uma questão delicada, mas que poderá ser deixada de lado diante das características de uma turma, ou diante dos objetivos de um curso proposto para essa turma. Mesmo que o professor opte por não tocar na classificação dos números não inteiros para os alunos, em geral, isto não significa que esse tipo de classificação não possa ser trabalhada com algum aluno em particular, que esteja interessado na fundamentação de algumas questões de Matemática.

Resumindo, a variável h, na equação

$$\begin{array}{l}\text{pressão atmosférica em}\\ \text{ponto de altitude } h\end{array} = 0{,}9^h \text{ atm}$$

poderá ter vários domínios, de acordo com a formação matemática da turma com que se está trabalhando. Para efeito de continuidade dessas notas, admitiremos que h possa assumir (postuladamente) qualquer valor real positivo, mesmo que, por motivos "extra matemáticos", isso não faça sentido para algum aluno. Por exemplo: será que tem sentido a determinação da pressão atmosférica em um ponto cuja altitude é $\sqrt{2}$ km?

B. *Definição de Função Exponencial*

A maioria dos problemas propostos tem por trás de si uma função exponencial. As resoluções apresentadas para aqueles problemas trabalharam o conceito de função em geral e, em particular, o conceito de função exponencial. Assim, no:

a) problema 6, para cada valor de n, n inteiro e n > 0, podemos determinar o número de maneiras de ler uma palavra com n letras, quando é colocada no esquema do problema 4;

b) problema 7, para cada valor de n, n inteiro e n ≧ 0, podemos determinar o número máximo de sócios do clube ao final de n anos;

c) problema 8, para cada valor de n, n inteiro e n ≧ 0, podemos determinar o saldo da conta, n meses após a data-base;

d) problema 10, para cada valor de h, onde h = 0, ou h assume "qualquer valor positivo", podemos determinar, com precisão desejada, a pressão atmosférica de um ponto cuja altitude é h km;

e) problema 15, para cada valor de t, onde t é número racional da forma $\frac{n}{4}$, com n inteiro, podemos determinar o saldo da conta, t anos após D.

As funções exponenciais envolvidas nos problemas apresentados possuem forma característica:

$$\text{valor da função para um certo } x = A \cdot b^{c \cdot x} \quad (1)$$

onde A, b e c são constantes que dependem do problema que se está estudando, x é a variável que representa uma das grandezas do problema em questão e "valor da função" é a outra grandeza deste problema, que depende diretamente da grandeza representada por x.

Como "sempre" será possível escrever $b^{c \cdot x} = (b^c)^x$, podemos simplificar a forma geral de uma exponencial para:

valor da função para um certo $x = A \cdot b^x$ (2)

A variável x poderá estar definida para diversos tipos de domínios, conforme foi exemplificado nos problemas relacionados.

Uma frase do tipo:

$$f(x) = A \cdot b^x \tag{3}$$

deverá ser cuidadosamente trabalhada e construída de modo que o símbolo f(x) possa ter sentido para quem lê ou manipule.

Outras restrições para (2) deverão ser feitas. Algumas dessas restrições dizem respeito ao número b, base da função exponencial. A base b não precisa ser um número inteiro (como ocorreu nos problemas 6 e 7). Além disso, a base das potências pode ser um número menor que 1 (problemas 10 e 11).

A grande restrição para a base b não poderá ser feita com relação aos problemas propostos, a saber, que em geral, se deverá ter $b > 0$. Talvez seja conveniente postular essa restrição.

Para $b = 0$ ou $b = 1$, a função exponencial (2) se torna uma função constante e, portanto, inadequada para representar grandezas que variam exponencialmente (de forma crescente ou decrescente).

As funções exponenciais (2) cuja variável x assume valores inteiros positivos, ou valores inteiros não negativos, são chamadas Progressões Geométricas.

Um caminho para o estudo de progressões geométricas não é, necessariamente, este que foi apresentado nessas notas e, talvez, nem o mais indicado. Se o professor deseja apresentar um estudo sobre progressões geométricas, poderá fazê-lo por meio de problemas do tipo do problema 7, pedindo ou apresentando uma resolução de cada um e destacando as características das seqüências que "surgem" quando a variável que representa uma das grandezas do problema assume valores 1, 2, 3 ..., n, ..., ou 0, 1, 2, 3, ...

C. *Gráfico de Função Exponencial*

Poderá ser conveniente representar, por meio de coordenadas retangulares (cartesianas), os pontos de um plano cujas coordenadas, com relação àquele sistema, são x e $A \cdot b^x$. Com essa representação gráfica, podemos "enxergar", por exemplo, o "crescimento exponencial" de uma determinada grandeza, quando a grandeza representada pela variável x "cresce".

Tais gráficos podem (e devem) ser elaborados para diferentes tipos de domínios da variável x. Valores não inteiros para x, situados em vários intervalos de números, poderão sugerir aos alunos uma curva "suave" para o gráfico de uma função exponencial (gráfico da função do problema 10).

Nas páginas seguintes esboçamos os gráficos das funções exponenciais obtidas nos problemas 6, 7, 8, 10, 11 e 15.

D. *Equações e Inequações com potências*

Os problemas seguintes terão como referência os problemas já propostos.

<u>Problema 16</u>

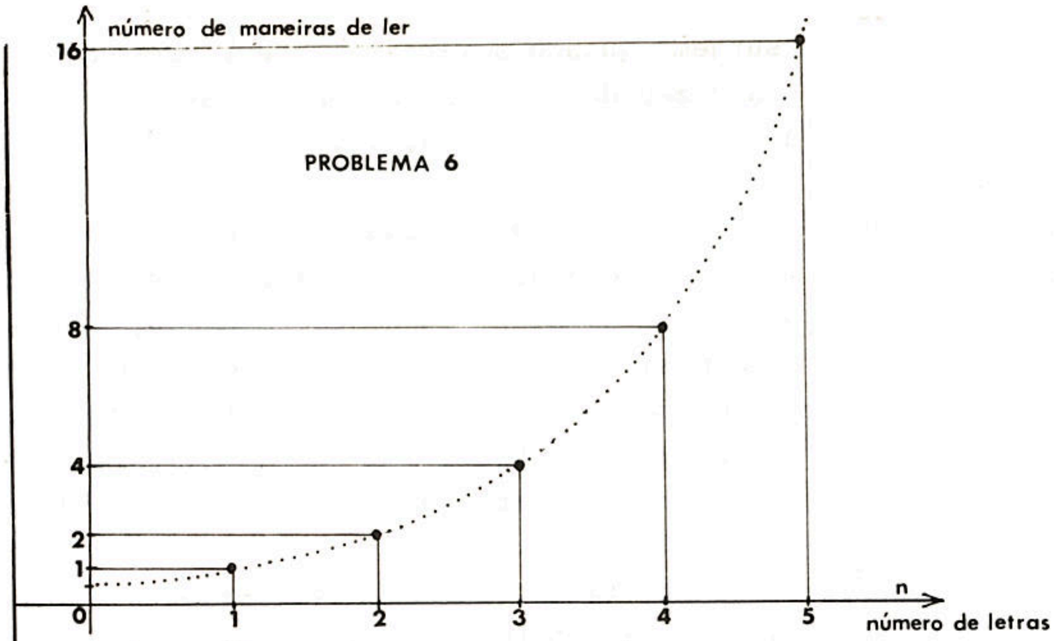
Com relação ao problema 6:

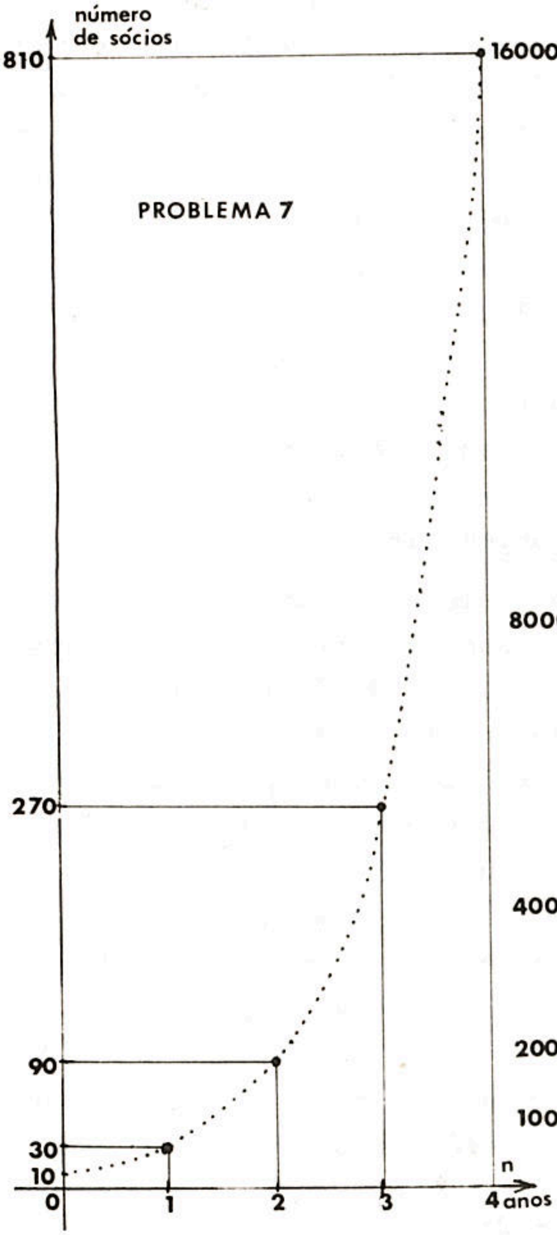
a) Quantas letras possui uma palavra que pode ser lida de 1.024 maneiras, quando colocada no esquema do problema 4?

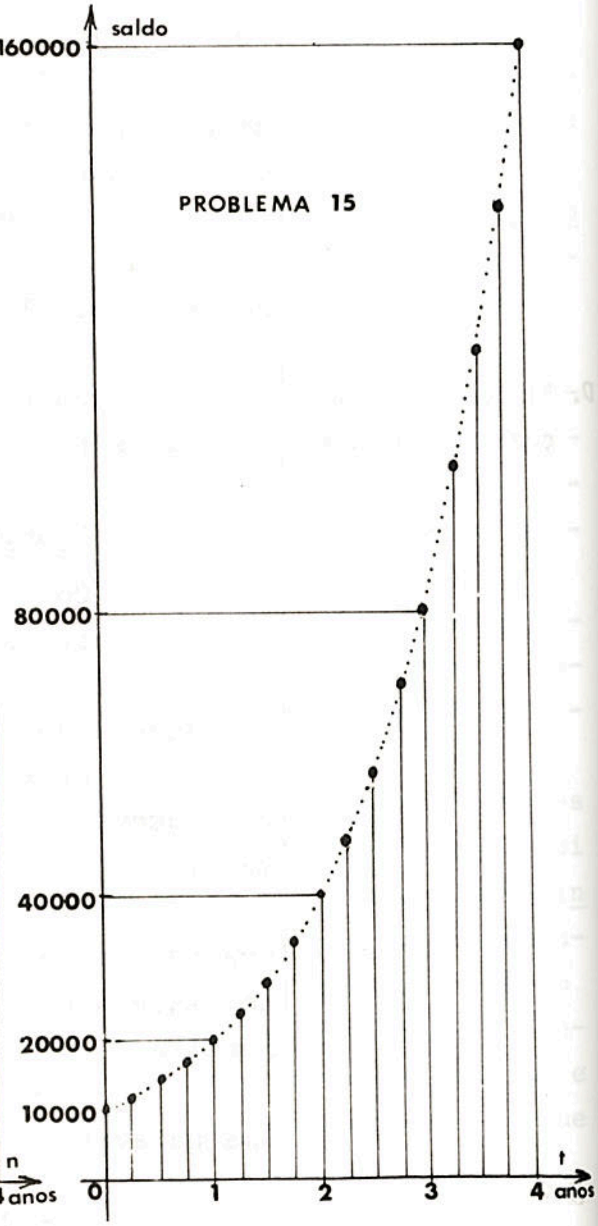
b) Existe alguma palavra que, colocada no esquema do problema 4, pode ser lida de 2.500 maneiras? Por quê?

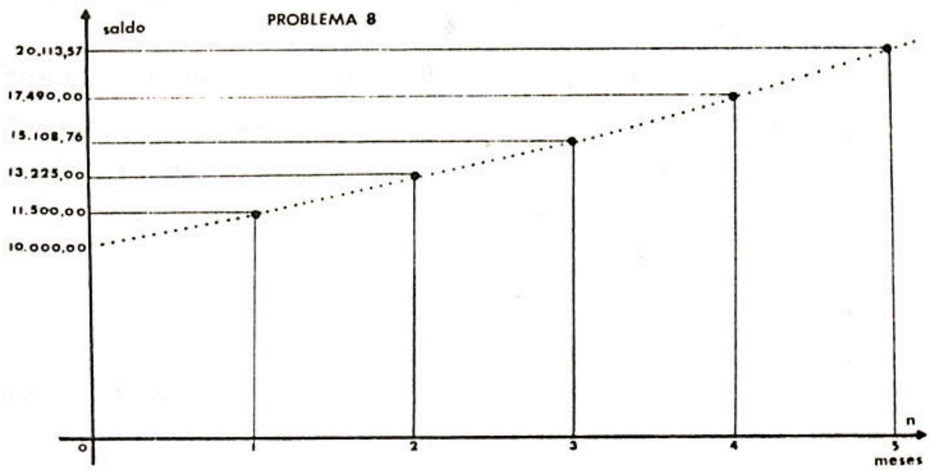
c) Qual é o número mínimo de letras que uma palavra deverá ter para que, ao ser colocada no esquema do problema 4, seja lida de mais de 500 maneiras?

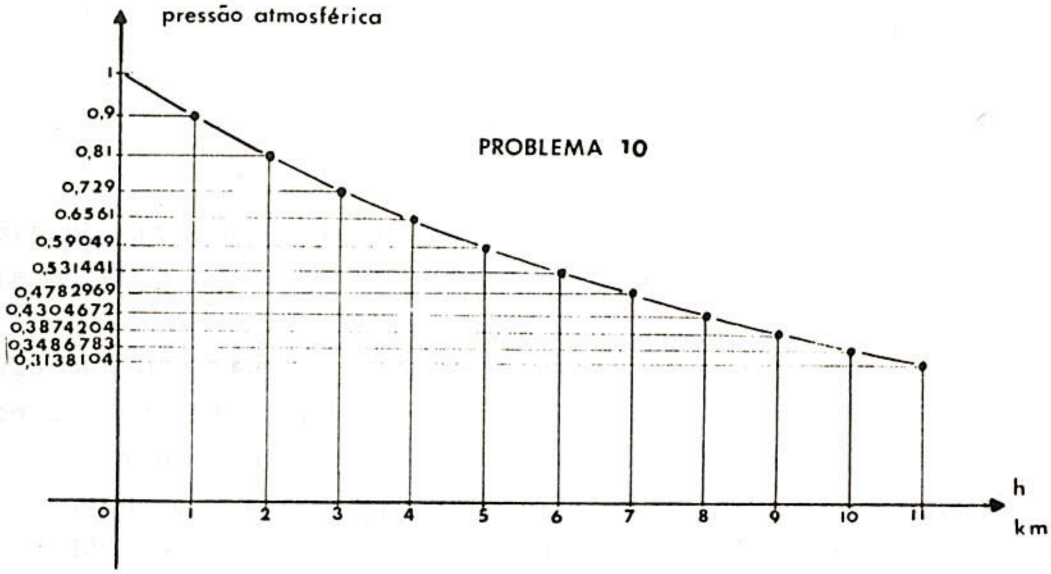
d) Qual é o número máximo de letras que uma palavra deverá ter para que, ao ser colocada

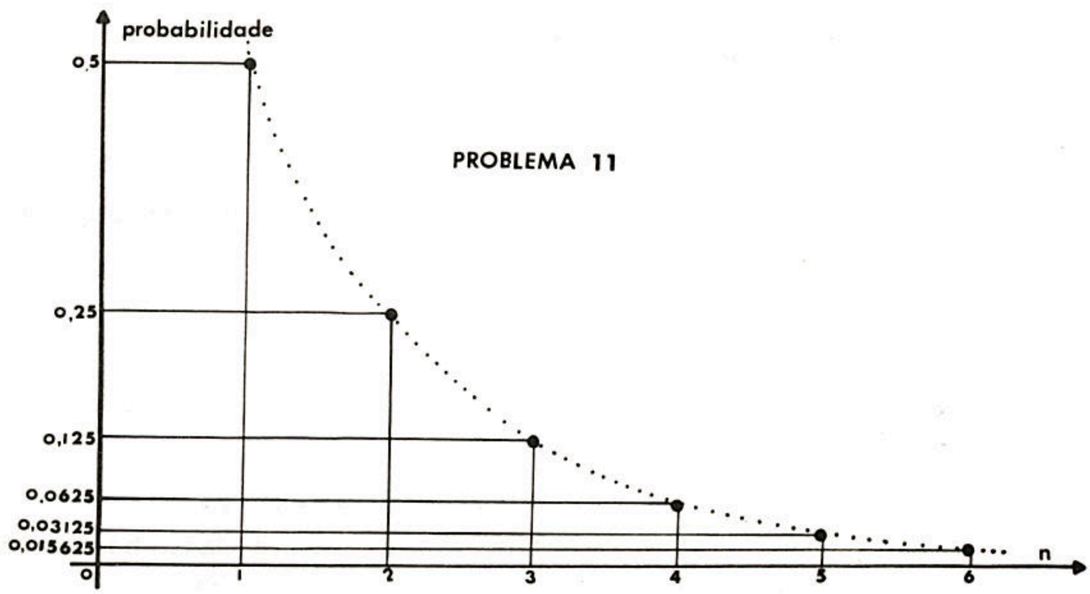

número de maneiras de ler
16
PROBLEMA 6
8
4
2
1
0
1
2
3
4
5
n
número de letras


número de sócios
810
PROBLEMA 7
270
90
30
10
0
1
2
3
4 anos
n


saldo
160000
PROBLEMA 15
80000
40000
20000
10000
0
1
2
3
4 anos
t


PROBLEMA 8
saldo
20.113,57
17.490,00
15.108,76
13.225,00
11.500,00
10.000,00
0
1
2
3
4
5
n
meses


pressão atmosférica
PROBLEMA 10
1
0,9
0,81
0,729
0,6561
0,59049
0,531441
0,4782969
0,4304672
0,3874204
0,3486783
0,3138104
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
h
km


probabilidade
PROBLEMA 11
0,5
0,25
0,125
0,0625
0,03125
0,015625
0
1
2
3
4
5
6
n

no esquema do problema 4, seja lida menos de 200 maneiras?

e) Quantos tipos de palavras, quanto ao número de letras, existem que ao serem colocadas no esquema do problema 4, sejam lidas de mais de 400 maneiras e menos de 3.000 maneiras?

Resposta

a) 11 letras.

b) Não, pois não existe inteiro positivo n tal que $2^n = 5.000$.

c) 10 letras.

d) 8 letras.

e) 9, 10, 11 ou 12 letras.

Problema 17

Com relação ao problema 7:

a) Quantos anos após a fundação do clube o número máximo de sócios do clube será igual a 21.780?

b) O número máximo de sócios desse clube poderá ser 65.000, caso cada sócio traga 2 novos sócios no final de cada ano? Por quê?

c) A partir de que ano o número máximo de sócios desse clube será maior que 200.000?

d) Até que ano o número máximo de sócios desse clube foi menor que 8.000?

Resposta

a) 7 anos.

b) Não, pois não existe inteiro positivo n tal que $3^n = 6.500$.

c) 10 anos.

d) 6 anos.

Problema 18

Com relação ao problema 8:

a) Quantos meses após a data-base o saldo será Cz$ 46.523,91?

b) É possível que o saldo, após um certo número de meses, seja Cz$ 50.000,00? Por quê?

c) A partir de que mês, após a data-base, o saldo será maior que Cz$ 10.000,00?

d) Até que mês, após a data-base, o saldo será menor que Cz$ 80.000,00?

Resposta

a) 11 meses.

b) Não, pois não existe inteiro positivo n tal que $1,15^n = 5$.

c) 17 meses.

d) 14 meses.

Problema 19

Com relação ao problema 11:

a) Quantos lançamentos da moeda serão necessários para que a probabilidade de sair cara em todos eles seja 1,5625%?

b) É possível que a probabilidade de se obter cara em todos os lançamentos seja 2%? Por quê?

c) Quantos lançamentos serão necessários para que a probabilidade de sair cara em todos eles seja menor que 1%?

d) Quantos lançamentos serão necessários para que a probabilidade de se obter cara em todos eles seja maior que 1,5%?

Resposta

a) 6 lançamentos.

b) Não, pois não existe inteiro positivo n tal que $0,5^n = 0,02$.

c) 7, 8, 9, 10, ... lançamentos.

d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, lançamentos.

Problema 20

Com relação ao problema 12:

a) Quantos meses, antes da data-base, o saldo era igual a Cz$ 3.759,37?

b) É possível que o saldo, a um certo número de meses antes da data-base, tivesse sido Cz$ 5.000,00? Por quê?

c) A partir de que mês, após a data-base, o saldo será maior que Cz$ 100.000,00?

Resposta

a) 7 meses.

b) Não, pois não existe inteiro positivo n tal que $1,15^n = 0,5$.

c) 17 meses.

Problema 21

Com relação ao problema 15 (e à 3ª resolução):

a) Quantos anos serão necessários para que o saldo seja:

1) Cz$ 67.217,71?

2) Cz$ 160.000,00?

3) maior que Cz$ 100.000,00?

b) É possível que, após alguns anos, o saldo da conta seja Cz$ 200.000,00? Por quê?

Resposta

a) 1) 2,75 anos ou 11 trimestres.

2) 4 anos ou 16 trimestres.

3) 3,5 anos ou 14 trimestres.

b) Não, pois não existe racional t da forma $\frac{n}{4}$, com n inteiro, tal que $10.000 \times 2^t = 200.000$.

Problema 22

Com relação ao problema 10:

a) Em qual altitude a pressão atmosférica é igual a 0,59049 atm?

b) Existe altitude em que a pressão atmosférica seja a metade da pressão atmosférica ao nível do mar? Por quê?

Resolução

a) Devemos determinar um número h tal que $0,9^h = 0,59049$. Uma opção consiste em multiplicar 0,9 por si mesmo, um certo número de vezes para vermos se conseguimos reproduzir o número 0,59049.

Vamos buscar auxílio em uma calculadora:

digite: $\boxed{.}$ 9 $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ para obter, no visor da máquina, 0,59049.

Logo, a altitude, cuja pressão atmosférica é 0,59049, é de 5.000 m, ou 5 km.

b) Como na parte a), devemos determinar o número h tal que $0,9^h = 0,5$; poderíamos tentar o procedimento utilizado na parte a):

digite: $\boxed{.}$ 9 $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ para obter 0,531441 e digite: $\boxed{.}$ 9 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ para obter 0,4782969.

Isto significa que a altitude (se existir), cuja pressão atmosférica é 0,5, está entre 6.000 m e 7.000 m, ou seja, não é um número inteiro de km.

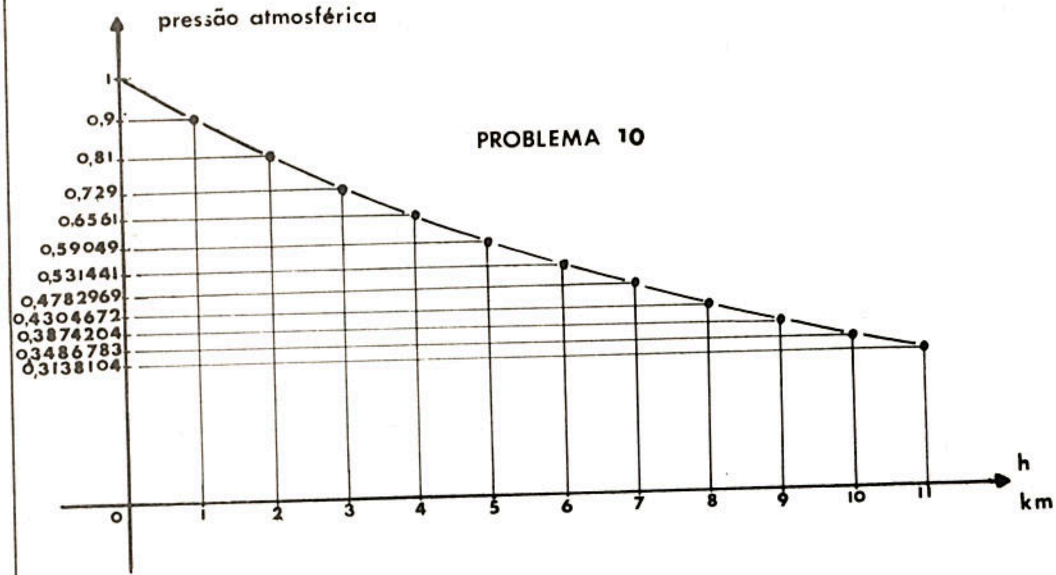
Ocorre, neste ponto, um impasse: será possível determinar número h tal que $0,9^h = 0,5$?

Ocorre, também, uma questão (filosófica) anterior à determinação do número em questão, relacionada com a existência desse número.

Problema Inverso: determinação de expoentes (ou logaritmos)

Vamos considerar, inicialmente, a questão da existência de um número h tal que $0,9^h = 0,5$. Para isso, olhemos novamente o gráfico da função:

pressão atmosférica em ponto de altitude $h = 0,9^h$ (ver pág. 254)



Se o gráfico da função for "contínuo" (num certo sentido que retomaremos), poderemos "acreditar" na "existência" de tal número (assim como pudemos "acreditar" na "existência" de um número x tal que $x . x = x^2 = 2$).

Vamos, pois, postular a existência do número representado por h, tal que $0,9^h = 0,5$, com base na "continuidade gráfica" apresentada.

Há toda uma simbologia para notar o número representado por h, cuja existência acabamos de postular. Acreditamos em que tal simbologia deva ser deixada para um momento mais apropriado.

<u>Afirmação</u>: só sabemos, realmente, resolver uma equação com potências, cuja incógnita é expoente de uma determinada base, se as potências envolvidas na equação tiverem bases iguais.

Em símbolos: se $A . b^x = A . b^y$, será pos sível concluirmos que $x = y$.

O motivo para tal conclusão também deverá ser postulado, pois é inviável, no 2º grau, a demonstração que uma função exponencial:

$$\text{valor da função para um certo } x = A \cdot b^x \qquad (2)$$
$$(A \neq 0;\ b > 0 \text{ e } b \neq 1)$$

seja, em geral, um a um (ou injetora).

Em alguns casos, como por exemplo para x inteiro, é possível mostrar que se $A \cdot b^x = A \cdot b^y$, então $x = y$. A dificuldade (técnica) maior ocorre no caso geral quando x não é inteiro.

Em particular, a equação que "desejamos" resolver ($0,9^h = 0,5$) não possui potências de bases iguais e, portanto, não poderemos usar, em princípio, a conseqüência da afirmação que foi feita. A grande questão, neste ponto, está em mostrar que existe um mecanismo que permite "igualar as bases" de uma equação exponencial.

A descoberta desse mecanismo teve início em 1590 e foi feita por John Napier. Nos 25 anos que se seguiram, Napier se empenhou em construir tabelas que permitiam representar "qualquer" número positivo sob forma de potência de uma determinada base. Esse trabalho atraiu a atenção de muitos estudiosos da época, entre eles, a do matemático inglês Henry Briggs que realizou um trabalho análogo ao de Napier. Briggs construiu tabelas que permitiam representar "qualquer" número positivo sob forma de potência de base 10. Essas tabelas passaram a ser chamadas de "tábuas de logaritmos decimais". Tais tabelas foram construídas por um processo de aproximações sucessivas que demandavam uma "grande quantidade" de cálculos e tempo. Para uma notícia de como Briggs realizou sua tarefa veja página .Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática - 2º Grau - volume 1.

O conceito que estava por trás dessas tabelas era o conceito de logaritmo que, além da "utilidade computacional" expressada pelas tábuas, teve grande importância para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, a partir do século XVII. O desenvolvimento em série de funções proporcionou a confecção de tábuas logarítmicas de maneira muito mais eficiente e rápida. Atualmente, tais desenvolvimentos em séries, juntamente com o desenvolvimento tecnológico em microeletrônica, permitiram a construção de calculadoras eletrônicas que tornaram o cálculo de logaritmos extremamente rápidos.

Utilizando-se uma tábua de logaritmos decimais, ou uma calculadora eletrônica que possui uma tecla do tipo $\boxed{\text{LOG}}$, será possível determinarmos o expoente da base 10 que deverá reproduzir um determinado número.

Para ilustrar o que foi dito, pode se tornar didático e motivador pedir aos alunos que construam o gráfico, em coordenadas retangulares, da função exponencial:

valor da função para número $x = 10^x$ (*)

onde x assume "qualquer valor" (pág. 263).

De posse do gráfico, talvez seja "visível" para um aluno que, por exemplo:

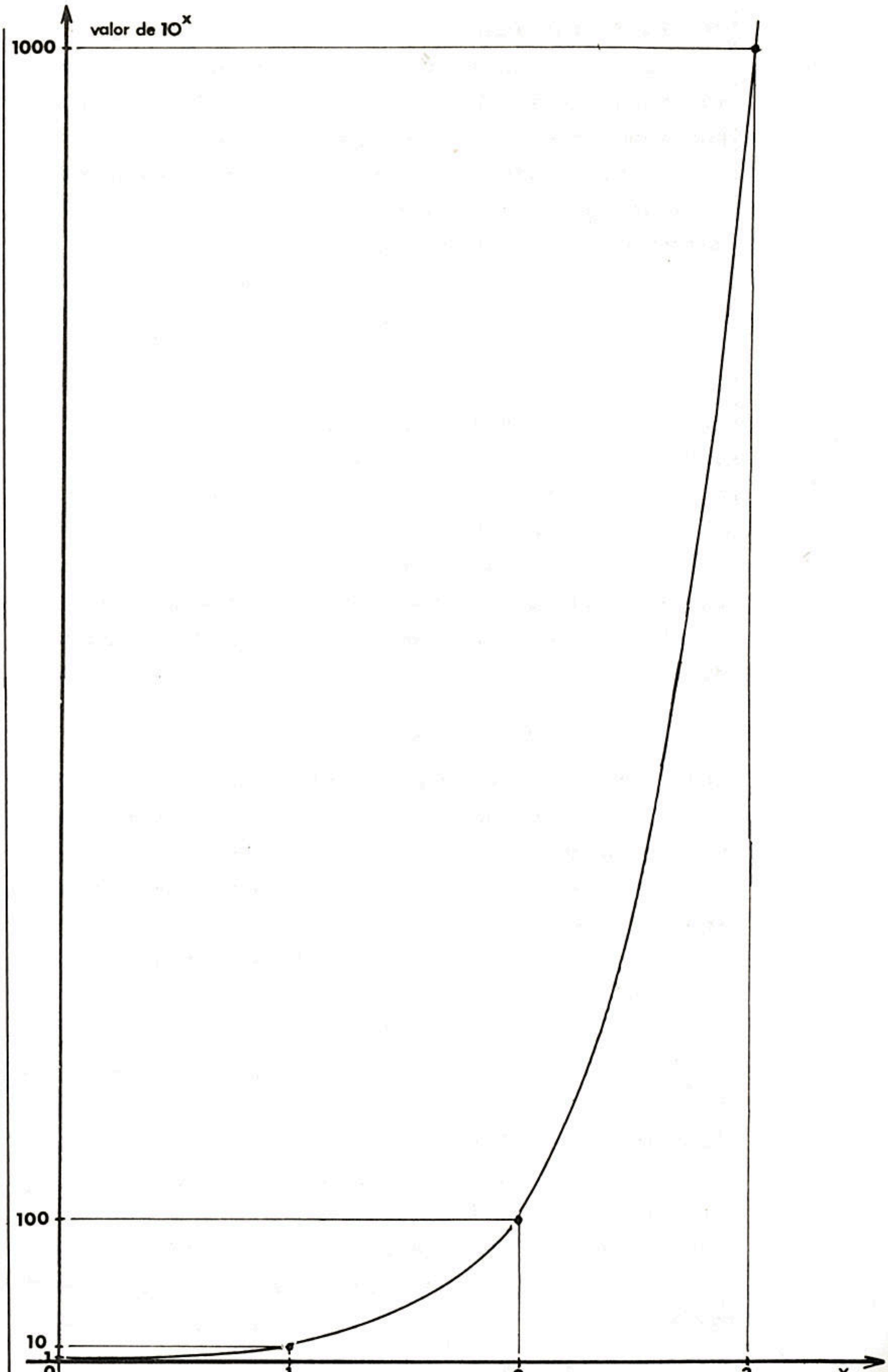
a) "existe" um expoente x_1, para 10, de modo que $10^{x_1} = 0,9$;

b) "existe" um expoente x_2 para 10, de modo que $10^{x_2} = 0,5$.

Nessas condições, de posse de x_1 e x_2 poderíamos "resolver" a equação $0,9^h = 0,5$, pois esta seria transformada em uma equação de potências de mesma base (10).

Deverá ficar claro para os alunos que esses expoentes estão tabelados, ou podem ser obtidos por meio de uma calculadora científica.

Este, talvez, seja o momento "adequado" para se mostrar todo o aparato simbólico que serve para representar o conceito aqui envolvido e que muitas vezes esconde toda a simplicidade do


valor de 10^x
1000
100
10
1
0
1
2
3
X

conceito em questão.

Assim, o número x_1, que deverá ser o expoente da base 10 para reproduzir 0,9, será chamado do logaritmo de 0,9 na base 10.

O número x_2, que deverá ser o expoente da base 10 para reproduzir 0,5, será chamado logaritmo de 0,5 na base 10.

As notações tradicionais são:

x_1 é o logaritmo de 0,9 na base 10, ou

$x_1 = \log_{10} 0,9$;

x_2 é o logaritmo de 0,5 na base 10, ou

$x_2 = \log_{10} 0,5$.

A consulta a tabelas logarítmicas necessita de todo um preparo técnico que dificulta, um pouco, a determinação dos expoentes (logaritmos).

As calculadoras científicas são muito mais práticas e rápidas. Por exemplo, para determinar o expoente da base 10, para reproduzir 0,9, digite: .9 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha - 0,04575749.

Para determinar o expoente da base 10, para reproduzir 0,5, digite: .5 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha - 0,301029995.

O significado de cada um desses números é:

$$10^{-0,04575749} = 0,9 \quad \text{e} \quad 10^{-0,301029995} = 0,5$$

Logo, a equação do problema que estamos resolvendo sofre as seguintes modificações:

$$0,9^h = 0,5 \qquad (1)$$

$$(10^{-0,04575749})^h = 10^{-0,301029995} \qquad (2)$$

$$10^{-0,04575749.h} = 10^{-0,301029995} \qquad (3)$$

Como as bases de (3) são iguais a 10, então pela afirmação feita na página 260, podemos escrever:

$$-0,04575749.h = -0,301029995 \qquad (4)$$

O conceito de logaritmo na base 10 é utilizado para transformar uma equação exponencial em outra equação exponencial, equivalente à primeira, na qual todas as bases envolvidas são iguais a 10 (a tecla $\boxed{\text{LOG}}$ de uma calculadora científica fornece os expoentes respectivos).

A equação (4) é uma equação do 1º grau. Logo:

$$h = \frac{-0,301029995}{-0,04575749} = 6,578813479 \qquad (5)$$

Interpretando o valor encontrado de h, com relação ao problema proposto, podemos afirmar que à altitude aproximada de 6,57881 km, ou 6.578,81 m, a pressão atmosférica é igual a 0,5 atm.

Tendo em vista as notações introduzidas para os expoentes da base 10, de modo que fossem obtidos os valores 0,9 e 0,5, podemos escrever (5) como segue:

$$h = \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 0,9} = \frac{-0,301029995}{.0,04575749} = 6,57881 \text{ km}$$

Numa calculadora científica, os procedimentos são:

digite: .5 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$

Nos problemas 16, 17, 18, 19, 20 e 21, podemos usar o conceito utilizado no problema 22, muito embora, em alguns deles, a utilização dos logaritmos decimais pode se tornar desnecessária (e até mesmo pedante). Por exemplo, no problema 18, item a, a equação a ser resolvida é:

$$10.000 \times 1,15^n = 46.523,91 \qquad (1)$$

ou

$$1,15^n = 4,652391 \qquad (2)$$

Portanto, imitando a resolução do problema 22, para resolver (2), digite: 4.652391 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ 1.15 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$.

De um modo geral, a equação:

$$a^x = b \qquad (1)$$

com a e b positivos e $a \neq 1$, poderá ser "resolvida" utilizando-se os logaritmos decimais que serão instrumentos para "igualar" as bases de (1), na base 10.

Com um pouco mais de detalhe, existe (em geral, postuladamente) um número m tal que $10^m = a$ e existe (em geral, também postuladamente) um número n tal que $10^n = b$. Logo, (1) poderá ser escrita:

$$(10^m)^x = 10^n \qquad (2)$$

$$10^{m.x} = 10^n \qquad (3)$$

e como em (3) as bases são iguais, então:

$$m . x = n \qquad (4)$$

Resolvendo (4) e utilizando as notações já introduzidas, podemos escrever:

$$x = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

Numa calculadora científica, os procedimentos são:

digite: b $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ a $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$

F. Outras propriedades dos logaritmos

Problema 23

Um foguete se encontra, num certo instante, num ponto A, cuja pressão atmosférica é de, aproximadamente, 0,4 atm. Alguns segundos depois, o foguete está num ponto B, cuja pressão atmosférica é 0,3 atm. Qual é a diferença de altitude entre A e B?

1ª resolução

A altitude do foguete em A é o expoente h_1 da base 0,9, tal que $0{,}9^{h_1} = 0{,}4$ e a altitude em B é o expoente h_2 da base 0,9, tal que $0{,}9^{h_2} = 0{,}3$.

De acordo com o problema 22:

$$h_1 = \frac{\log_{10} 0,4}{\log_{10} 0,9} \quad e \quad h_2 = \frac{\log_{10} 0,3}{\log_{10} 0,9}$$

e o que se deseja saber é $h_2 - h_1$.

Usando uma calculadora científica, digite: .3 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{-}$ .4 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$ e obtemos 2,7303 km, aproximadamente.

2ª resolução

Como na 1ª resolução, h_1 é a altitude em A, tal que $0,9^{h_1} = 0,4$ e a altitude em B é o expoente h_2 da base 0,9 tal que $0,9^{h_2} = 0,3$.

Logo:

$$0,9^{h_1} = 0,4 \quad e \quad 0,9^{h_2} = 0,3 \qquad (2)$$

Uma propriedade desejada para as potências, em geral, é:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (*)$$

Como o que se deseja é calcular $h_2 - h_1$ podemos usar (*) em (1) e (2) para obter:

$$\frac{0,3}{0,4} = \frac{0,9^{h_1}}{0,9^{h_2}} = 0,9^{h_1 - h_2} = 0,75 \qquad (3)$$

Uma resolução de (3) é análoga às resoluções de (1) e de (2). Usando uma calculadora científica digite: .75 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$ e obtemos $h_2 - h_1 = 2,7304$ km.

Comentário

Na 1ª resolução, obtivemos as seguintes expressões para h_1 e h_2:

$$h_1 = \frac{\log_{10} 0,4}{\log_{10} 0,9} \quad e \qquad (4)$$

$$h_2 = \frac{\log_{10} 0,3}{\log_{10} 0,9} \qquad (5)$$

E de (3), otivemos:

$$h_2 - h_1 = \frac{\log_{10} 0,75}{\log_{10} 0,9} \qquad (6)$$

Logo:

$$h_2 - h_1 = \frac{\log_{10} 0,3}{\log_{10} 0,9} - \frac{\log_{10} 0,4}{\log_{10} 0,9} =$$

$$= \frac{\log_{10} 0,3 - \log_{10} 0,4}{\log_{10} 0,9} = \frac{\log_{10} 0,75}{\log_{10} 0,9} \qquad (7)$$

De (7), podemos concluir:

$$\log_{10} \frac{0,3}{0,4} = \log_{10} 0,75 = \log_{10} 0,3 - \log_{10} 0,4 \qquad (8)$$

O resultado obtido em (8) é geral, isto é, a partir de equações:

$$a^{x_1} = b \qquad (9)$$

$$a^{x_2} = c \qquad (10)$$

com a, b e c números positivos e $a \neq 1$, poderemos calcular, por exemplo, $x_2 - x_1$, como segue:

a) $$x_2 - x_1 = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} a} - \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \qquad (11)$$

ou

b) de $\frac{c}{b} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$, vem que:

$$x_2 - x_1 = \frac{\log_{10} \frac{c}{b}}{\log_{10} a} \qquad (12)$$

o que nos leva a concluir que:

$$\log_{10} \frac{c}{b} = \log_{10} c - \log_{10} b \qquad (13)$$

<u>Problema 24</u>

As pressões atmosféricas nos pontos A e B são, respectivamente, 0,7 e 0,5. Suponha que o ponto C tenha altitude igual à soma das altitudes A e B.

a) Determine a pressão atmosférica em C.

b) Determine a altitude de C.

Resolução

a) Sejam h_1 e h_2 as altitudes de A e B, respectivamente. Logo, a pressão atmosférica C será:

pressão à altitude $h_1 + h_2 = 0{,}9^{h_1 + h_2} = 0{,}9^{h_1} \times$

$\times\ 0{,}9^{h_2} = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35.$

b) As altitudes h_1 e h_2 podem ser determinadas segundo o problema 22:

$$h_1 = \frac{\log_{10} 0{,}7}{\log_{10} 0{,}9} \qquad (1)$$

e

$$h_2 = \frac{\log_{10} 0{,}5}{\log_{10} 0{,}9} \qquad (2)$$

Como o que se deseja calcular é $h_1 + h_2$, usando uma calculadora científica, digite: .7 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{+}$ .5 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$ e obtemos 9,9641 km, aproximadamente.

De outra forma, das equações:

$$0{,}9^{h_1} = 0{,}7 \qquad (3)$$

e

$$0{,}9^{h_2} = 0{,}5 \qquad (4)$$

obtemos:

$$0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}9^{h_1} \times 0{,}9^{h_2} = 0{,}9^{h_1 + h_2} = 0{,}35 \qquad (5)$$

Portanto, resolvendo (5) da mesma forma que (3) e (4), por meio de uma calculadora científica, digite: .35 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ .9 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$ e obtemos 9,9641 km.

Comentário

Na resolução b), obtivemos as seguintes expressões para h_1 e h_2:

$$h_1 = \frac{\log_{10} 0,7}{\log_{10} 0,9} \qquad (1)$$

e

$$h_2 = \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 0,9} \qquad (2)$$

E, de (5), obtivemos:

$$h_1 + h_2 = \frac{\log_{10} 0,35}{\log_{10} 0,9} \qquad (6)$$

Logo:

$$h_1 + h_2 = \frac{\log_{10} 0,7}{\log_{10} 0,9} + \frac{\log_{10} 0,5}{\log_{10} 0,9} =$$

$$= \frac{\log_{10} 0,7 + \log_{10} 0,5}{\log_{10} 0,9} = \frac{\log_{10} 0,35}{\log_{10} 0,9} \qquad (7)$$

De (7), podemos concluir:

$$\log_{10} (0,7 \times 0,5) = \log_{10} 0,35 = \log_{10} 0,7 + \log_{10} 0,5 \qquad (8)$$

O resultado obtido em (8) é geral, isto é, a partir de equações:

$$a^{x_1} = b \qquad (9)$$

e

$$a^{x_2} = c \qquad (10)$$

com a, b e c números positivos e $a \neq 1$, poderemos calcular, por exemplo, $x_1 + x_2$, como segue:

a) $$x_1 + x_2 = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} \qquad (11)$$

ou

b) de $c \cdot b = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, vem que $x_1 + x_2 = \dfrac{\log_{10}(c \cdot b)}{\log_{10} a}$ (

o que nos leva a concluir que:

$$\log_{10} (c \cdot b) = \log_{10} c + \log_{10} b \qquad (13)$$

7.6 Matemática financeira

O assunto "Matemática Financeira" não possui tradição no ensino de Matemática por não ser ministrado sistematicamente nas escolas do 2º grau. Por causa dessa falta de tradição, talvez haja alguma resistência com relação à sua introdução nos conteúdos atualmente ensinados.

É chegado o momento em que nós, educadores, precisamos ousar modificar situações instaladas e promover ações que mudem posturas, diante da crise do sistema educacional vigente.

Chamamos de "ousar", o "fazer junto com"; junto com colegas, com alunos, com especialistas, com amigos, com educadores.

Acreditamos que a proposta que segue, para um estudo de Matemática Financeira, é uma segunda etapa na tentativa de mudar comportamentos; a primeira foi realizada no "Subsídio para Implementação dos Guias Curriculares - volume 2, 1982", sobre o qual esta Proposta está calcada parcialmente.

É, portanto, um trabalho que possui uma série de falhas que precisam ser sanadas, até chegarmos a um documento que, por consenso, seja adequado às nossas escolas.

A Proposta que segue é, neste momento, uma visão particular do assunto "Matemática Financeira" da Equipe de Matemática do 2º grau da CENP. Caso o professor ouse usar esta Proposta, precisamos urgentemente de críticas, de sugestões e até mesmo de uma nova proposta, como retorno, para que juntos construamos um novo documento sobre o assunto.

É claro que o atual documento, assim como os futuros, esbarra na questão central "Por que estudar Matemática Financeira?"

Como já citamos anteriormente, a questão do "por quê?" precisa ser discutida amplamente na sala de aula. É o problema da "significância", um elemento no mínimo educacional, para que se possa propor um curso de Matemática Financeira para alunos do 2º grau da rede pública estadual. Gostaríamos que o problema da "significância" se tornasse, além de educativo, um elemento motivador do ensino (em geral).

Uma característica do trabalho proposto é que não se pressupõe pré-requisitos. A Proposta tenta impor um caráter de independência com relação a outros conhecimentos matemáticos e que são uti lizados num estudo de Matemática Financeira. Portanto, conhecimentos necessários ao estudo de Matemática Financiera são, sempre que possível, construídos localmente. Um exemplo claro desse procedimento está localizado no problema 31, quando o cocneito de "logaritmo decimal" é "construído" junto com os alunos, usando-se recursos já existentes. Outro exemplo se encontra no problema 32, quando se pede para calcular uma raiz de índice 12.

Sempre que possível e quando conveniente, a introdução de uma nova idéia ou conceito é feita a partir de situações-problema do dia-a-dia, no sentido de motivar o estudante a propor caminhos para resolvê-la, explicitando dificuldades e necessidades de novos conhecimentos. A orientação do professor deve apontar para a compreensão dos novos conceitos envolvidos na discussão do problema, após o que, a aplicação de tais idéias em novas situações deverá levar o aluno a adquirir uma certa habilidade mecânica bem como descobrir novas dificuldades que darão origem a novas idéias e a novos conceitos.

A parte de "Desconto" foi requisitada do "Subsídio para Implementação dos Guias Curriculares - volume 2, 1982". A parte final do trabalho diz respeito ao conceito (difícil) de "valores financeiros equivalentes". Tal conceito tem características que poderão fortalecer a formação de nosso aluno, no sentido de torná-lo mais crítico e autônomo. Por exemplo, o conceito de "Valores Financeiros Equivalentes" é fundamental para criticar sistemas atuais de financiamento em abertura de crediários.

ONTEÚDO/OBJETIVO	SUGESTÕES/OBSERVAÇÕES
. MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA *Objetivos: Introduzir conceitos de capital, montante, juros, taxa de juros, taxa de juros para aplicações em problemas de investimentos, cálculos de dívidas, descontos, crediários.* A. *Noção de Porcentagem*	<u>Problema 1</u> Em um exame vestibular inscreveram-se 25.500 candidatos para concorrerem a 580 vagas. Que porcentagem máxima dos inscritos poderá preencher aquelas vagas, supondo-se que não poderá haver empates? <u>Resolução</u> 58000 | 25500 70000 0,02274509803921568 6... 190000 115000 130000 0250000 205000 100000 235000 055000 040000 145000 175000 220000 160000 07000 " " Portanto: $\frac{580}{25500} = 0,022745098039215686$ Logo, 580 candidatos representam, aproximadamente, (0,0227 x 100)% = 2,27% do total de inscritos. <u>Teste 1</u> Para determinar "quantos por cento" 120 representa de 1500, basta __________ por ___ e ___ o ______ por ____________. <u>Resposta</u> dividir; 120; 1500; multiplicar; quociente; 100.

Problema 2

Um funcionário ganha, mensalmente, Cz$ 750,00. Em cada mês, o salário desse funcionário é descontado em média 10%, a título de previdência social e imposto sobre a renda. Qual é o valor descontado mensalmente?

Resolução

O valor descontado do salário é 10% de Cz$ 750,00.

Segundo o problema 1:

$$\frac{\text{valor descontado do salário}}{\text{valor do salário}} = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

Logo: valor descontado do salário = 0,1 x valor do salário = 0,1 x 750,00 = Cz$ 75,00 = 10% de 750,00.

Teste 2

Para calcular 22% de 130.000, basta _______ _______ por _______.

Resposta

multiplicar; 130.000; 0,22.

Problema 3

Determine o salário líquido do funcionário do problema 2.

Resolução

1ª) salário líquido = salário bruto - valor descontado = 750,00 - 10% de 750,00 = 750,00 - - 0,1 x 750,00 = 750,00 - 75,00 = Cz% 675,00.

2ª) Como o valor descontado é de 10% do salário bruto, então: salário líquido = 90% do salário bruto = 90% de 750,00 = 0,9 x 750,00 = Cz$ 675,00.

Teste 3

Se fizermos um desconto de 30% de 90.000, para calcular o valor líquido restante basta ______ ______ ______ por ____.

Resposta

multiplicar; 90.000; 0,7.

Problema 4

Se o funcionário do problema 2 receber um reajuste salarial de 35% do salário atual:

a) calcule o valor do reajuste salarial;

b) calcule o novo salário;

c) determine o novo valor descontado e o novo salário líquido, sabendo-se que para o salário reajustado a taxa de desconto permanece a mesma (nas mesmas condições do problema 2).

Resolução

a) reajuste salarial = 35% de 750,00 = 0,35 x 750,00 = Cz$ 262,50.

b) novo salário = salário anterior + reajuste salarial = 750,00 + 262,50 = Cz$ 1012,50.

Observação

Na resolução da parte b) usamos o valor encontrado na parte a). Vamos mostrar outra resolução da parte b), supondo que a parte a) não tenha sido feita.

novo salário = salário anterior + reajuste = salário anterior + 35% do salário anterior = salário anterior + 0,35 x salário anterior = salário anterior x (1 + 0,35) = salário anterior x 1,35 = = 750,00 x 1,35 = Cz$ 1012,50.

c) novo valor descontado = 10% de 1012,50 = 0,1 x x 1012,50 = Cz$ 101,25.

Ou:

novo valor descontado = valor descontado antigo + + 35% do valor descontado antigo = valor descontado antigo x 1,35 = 75,00 x 1,35 = Cz$ 101,25

Da mesma forma:

novo salário líquido = 90% do novo salário = 0,9 x x 1012,50 = Cz$ 911,25

Ou então:

novo salário líquido = salário líquido antigo + + 35% do salário líquido antigo = salário líquido antigo x 1,35 = 675,00 x 1,35 = Cz$ 911,25

Teste 4

Suponha que o litro do álcool custa Cz$ 5,00 e que a partir de zero hora de amanhã, custará 33% mais caro. Para calcular o novo preço do litro do álcool, podemos ____________ ______ por ______.

Resposta

multiplicar; 5,00; 1,33

Problema 5

O preço de um livro era Cz$ 16,00 e, a partir de hoje, passou a ser Cz$ 20,00. Qual foi o índice de reajuste?

Resoluções

1ª) o reajuste foi de 20,00 - 16,00 = Cz$ 4,00. Nessas condições, segundo o teste 1, 4 e $(\frac{4}{16} \times 100)\% = 25\%$ de 1,6.

2ª) de acordo com o teste 4, 16 x (1 + índice) = 20. Logo: 1 + índice = $\frac{20}{16}$ = 1,25.

Portanto: índice = 1,25 - 1 = 0,25 = 25%.

B. Conceitos de
Capital
Juros
Taxa de Juros
Unidade de Tempo
Prazo montante

Observemos a seguinte situação: Roberto pediu emprestado à Suzana a quantia de Cz$ 50,00 para ser paga depois de 3 meses. Naquela data, além de pagar a quantidade de Cz$ 50,00, Roberto se comprometeu pagar mais Cz$ 10,00.

Alguns comentários sobre a situação apresentada:

1) Os Cz$ 50,00 que Suzana emprestou ao Roberto formam um capital de sua propriedade.
2) A quantidade de Cz$ 10,00 que Roberto se propôs pagar à Suzana, além do Capital que lhe foi emprestado, é um aluguel (um prêmio) pelo uso dos Cz$ 50,00, no período de 3 meses. Esse aluguel são os juros pagos pelo devedor (Roberto) ao emprestador (Suzana).
3) A razão entre os juros pagos e o capital emprestado, $\frac{10}{50} = 0,2 = 20\%$, com relação ao período do empréstimo é a taxa de juros do empréstimo por 3 meses (ou por trimestre); esse período (trimestre) é a Unidade de Tempo da taxa.
4) A soma total a ser paga por Roberto (Cz$ 50,00 + Cz$ 10,00) é o montante da dívida.

A respeito desses conceitos, podemos ler em (20):

"CAPITAL é um bem que pode ser trocado por outro, ou convertido em dinheiro. Existem, entre outros, os bens imóveis, que são terrenos, casas, apartamentos, etc., e os bens móveis, que são veículos, objetos de valor, títulos de renda, etc."

"JURO é a quantia recebida, ou paga, pela utilização de um capital. Essa utilização, para o dono do capital, chama-se investimento, emprego, aplicação, ou empréstimo de capital. Ele recebe juros por ter emprestado seu dinheiro a alguém, por empregar seu dinheiro em caderneta de poupança, por ter investido dinheiro na compra de imóvel que está alugado, etc. Quem paga juros, em geral, o faz por ter utilizado dinheiro tomado de alguém por empréstimo, por utilizar um imóvel de propriedade de outrem, etc."

"TAXA DE JURO é a razão entre o juro produzido e o capital empregado, na unidade de tempo, expressa por um número real."

"Taxa de juro = $\frac{\text{juro}}{\text{capital}}$, juro esse produzido na unidade de tempo. A taxa pode ser apresentada na forma porcentual, ou na forma unitária."

"UNIDADE DE TEMPO, ou período de capitalização pode ser o dia, o mês, o bimestre, o semestre, o ano, etc. Em geral, a unidade de tempo a ser considerada é a indicada pela taxa de juro: uma taxa de juro de 8% ao mês indica que a unidade de tempo considerada é o mês; uma taxa de 20% ao trimestre indica que a unidade de tempo considerada é o trimestre, etc.

'Unidade de tempo' ou período de capitalização é o intervalo de tempo após o qual se calcula o juro relativo a um certo capital anterior ou inicial, e que será a este adicionado."

"MONTANTE, numa determinada data, é a soma do capital aplicado com os juros obtidos até aquela data."

C. Modalidades de Juros: Juros Simples; Juros Compostos.

Problema 6

Com relação à situação apresentada na página , se, passados os 3 meses, Roberto pedir à Suzana mais 3 meses para pagar a dívida, conservando a mesma taxa de juro de 20% ao trimestre, qual será o montante da dívida a ser paga?

Resolução

1ª) No 1º e 2º períodos, a taxa de juro de 20% ao trimestre rende juros de Cz$ 10.000,00. Logo, o montante da dívida ao fim de 2 períodos = = 50.000 + 10.000 + 10.000 = Cz$ 70.000;

2ª) após o 1º trimestre, a taxa de juro de 20% ao trimestre rende juros de Cz$ 10.000,00 que são incorporados ao capital e irão render juros no próximo período. Portanto, no 2º período os juros serão calculados sobre 50.000 + 10.000 = Cz$ 60.000,00. Assim:

juros do 2º período = 20% de 60.000 = 0,2 x x 60.000) Cz$ 12.000,00

O montante da dívida, ao fim de 2 períodos = Cz$ 72.000,00.

<u>Comentários</u>

1º) As duas resoluções apresentadas mostram soluções distintas e que não são equivalentes;

2º) Na 1ª resolução, os juros produzidos em cada período não são incorporados ao capital inicial, ou seja, em cada período os juros são calculados sempre sobre o capital inicial.

Essa modalidade de cálculo dos juros costuma ser chamada de "Regime de Juros Simples".

3º) Na 2ª resolução, os juros produzidos em cada período são incorporados ao capital daquele período em que rendem juros no período seguinte. Essa modalidade de cálculo dos juros costuma ser chamada de "Regime de Juros Compostos".

4º) É possível que, ao ser apresentado a uma turma de alunos, o problema 6 ocorra a pergunta: "Qual é a correta"?

É possível que Roberto prefira pagar sua dívida sob o regime de juros simples, enquanto que é possível que Suzana queira receber o capital emprestado, sob o regime de juros compostos.

Resta-nos dizer que não podemos afirmar qual é a correta. Foram apresentadas 2 resoluções distintas e não equivalentes porque o problema 6 assim o permitiu.

Para que houvesse solução única, deveria ter havido um "entendimento entre as partes", ou seja, entre Roberto e Suzana, para se decidir, com precisão, como deveria ser paga a dívida.

D. Juros Simples

Voltemos à situação apresentada na página 2. Vamos considerar que Roberto e Suzana tenham feito um trato de modo que os juros sejam pagos sob o regime de juros simples. Se, no final de cada período (trimestre), Roberto pedir para pagar sua dívida no final do próximo trimestre, então o montante da dívida no final de cada período poderá ser visto na seguinte tabela:

Nº períodos	0	1	2	3	...	n
Montante	50,00	60,00	70,00	80,00	...	50,00(1 + 0,2n)

Mantidos constantes o capital inicial (Cz$ 50,00) e a taxa de juros (20% ao trimestre), podemos perceber que o montante da dívida cresce linearmente com o crescimento do número de períodos. O professor poderá colocar essas informações em um sistema de coordenadas retangulares como ilustração.

As conclusões obtidas com a 1ª resolução do problema 6 são gerais. Introduzindo algumas convenções simbólicas tais como:

1) capital: C ou P (P é a 1ª letra da palavra "Principal");
2) taxa de juros: i ou r (r é a 1ª letra da palavra "rate");
3) número de períodos: n ou t;
4) juro: J ou I (I é a 1ª letra da palavra "Intersted");
5) montante: M ou S (S é a 1ª letra da palavra "Sum").

Poderemos escrever, com base no problema 6, e na última tabela, a seguinte expressão para o montante M, dados inicialmente um capital C, uma taxa de juros simples i e o número de períodos n:

$$M = C \cdot (1 + i.n) \qquad (1)$$

A equação (1) pode ser escrita, também, como segue:

$$M = C + C \cdot i \cdot n \qquad (2)$$

De acordo com o que foi reproduzido de (20), na página , podemos escrever que Montante = Capital + Juros = C + J = C + C . i . n.

Portanto, os juros simples produzidos pelo capital C, durante n períodos é dado por:

$$J = C \cdot I \cdot n \qquad (3)$$

Os probelams seguintes (7 ao 21), foram reproduzidos dos Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática - 2º Grau - vol.2.

Problema 7

Maura aplicou Cz$ 36.000,00 à taxa de 90% ao ano. Qual será o juro acumulado ao fim de 70 dias, sob o regime de juros simples?

Resolução

O período a que se refere a taxa de juros é o ano, enquanto que o prazo de aplicação é dado em dias. Nesse caso, devemos fazer uma hipótese adicional e uma observação:

a) a hipótese que deve ser colocada é que a aplicação tem rendimento diário;
b) a observação é que o período da taxa de juros e o prazo de aplicação devem estar na mesma unidade. Há, portanto, duas opções: transformar o prazo em dias para a unidade ano, ou transformar a taxa anual em uma taxa equivalente à taxa dada, porém referente à unidade dia.

Faremos apenas a transformação do número de dias para a unidade ano. Para essa transformação há também duas opções:

a) usar o ano civil de 365 dias (caso não seja bissexto);

b) usar o ano comercial de 360 dias.

Para cada uma das duas opções, teremos uma resolução distinta da outra.

a) o prazo de 70 dias, usando ano civil = $\frac{70}{365}$ ano;

Logo:

juros acumulados = $36.000 \times 0{,}90 \times \frac{70}{365}$ = Cz\$ 6.213,69;

b) o prazo de 70 dias, usando ano comercial = $= \frac{70}{360}$ ano;

Logo:

juros acumulados = $36.000 \times 0{,}90 \times \frac{70}{360}$ = Cz\$ 6.300,00.

Os juros acumulados por 70 dias usando-se o ano civil é chamado Juro Exato, enquanto que os juros acumulados por 70 usando-se o ano comercial é chamado Juro Comercial.

Problema 8

Roberto aplicou Cz\$ 70.000,00 à taxa de 80% ao ano, do dia 7 de abril ao dia 9 de julho. Qual o juro acumulado, sob o regime de juros simples?

Resolução

Cabem aqui a mesma hipótese e a mesma observação feitas quando da resolução do problema 7. É mais conveniente, neste caso, transformar o prazo em anos. Para isso, teremos que contar o número de dias entre as datas do investimento. Novamente, como ocorreu no problema 7, temos duas opções:

a) usando o ano comercial, formado por 12 meses de 30 dias, teremos: 23 dias de abril + 30 dias de maio + 30 dias de junho + 9 dias de julho = 92 dias.

Logo:

$$\text{juros acumulados} = 70.000 \times 0{,}80 \times \frac{92}{360} = \text{Cz\$ } 14.311{,}11;$$

b) usando o ano civil, a contagem de dias deve ser exata. Assim, usando a tabela do quadro 1, o número exato de dias entre 7 de abril e 9 de julho = 190 - 97 = 93 dias.

Logo,

$$\text{juros acumulados} = 70.000 \times 0{,}80 \times \frac{93}{365} = \text{Cz\$ } 14.268{,}49.$$

QUADRO 1

TABELA PARA CONTAGEM DE DIAS

MESES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Janeiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Fevereiro	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59			
Março	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Abril	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	
Maio	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151
Junho	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	
Julho	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
Agosto	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
Setembro	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	
Outubro	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
Novembro	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	
Dezembro	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365

Observação: Para os anos bissextos (1972, 1976, 1980 etc.) aumentar de 1 os números posteriores a 28 de fevereiro.

Problema 9

José aplicou um certo capital a juros simples de 90% ao ano. Qual era esse capital, se sabemos que, após um prazo de 1 ano e 5 meses, ele recebeu Cz\$ 255.000,00 de juros? (supor que a aplicação tem rendimento mensal).

Resposta

Cz$ 200.000,00.

Problema 10

Mauro quer fazer um investimento e receber Cz$ 3.000,00 de juros por trimestre. Ele conseguiu uma aplicação a juros simples à taxa de 80% ao ano. Que capital deverá aplicar? (Suponha que a aplicação tenha rendimento trimestral.)

Resposta

Cz$ 15.000,00

Problema 11

Após quanto tempo um capital qualquer duplica, se está aplicado a juros simples de 8% ao mês? (Suponha que a aplicação tenha rendimento diário.)

Resposta

1 ano e 15 dias.

Problema 12

Susana tem um capital de Cz$ 4.000,00 e quer aplicá-lo para ter uma renda mensal de Cz$ 200,00. A que taxa anual deve aplicá-lo?

Resposta

60%.

Problema 13

O preço à vista, de uma máquina de escrever, é Cz$ 850,00. Quero comprá-la, pagando Cz$ 280,00 de entrada e o restante em 12 prestações mensais, iguais. O dono da loja aceita a proposta, porém cobra juros de 10% ao mês, na parte a ser financiada. Qual o juro cobrado?

Resposta

Cz$ 684,00.

Problema 14

Uma loja vende um aparelho eletrodoméstico por Cz$ 200,00 à vista, ou com Cz$ 80,00 de entrada e 15 prestações mensais de Cz$ 20,00 cada. Qual a taxa mensal de juros que está sendo cobrada na venda a prazo?

Resposta

10%.

Problema 15

Márcia aplicou Cz$ 7.000,00 a juros simples de 8,5% ao mês, durante 5 meses e aí retirou o montante. Quanto retirou?

Resposta

Cz$ 9.975,00.

Problema 16

O preço de uma calculadora à vista é Cz$ 250,00. Se for dada uma entrada de Cz$ 100,00, o restante será financiado em 12 meses, com juros simples de 9% ao mês. Qual o valor de cada prestação?

Resposta

Cz$ 26,00.

Problema 17

Fiz uma compra que paguei em 10 meses, sem entrada, com juros de 11% ao mês, num total de Cz$ 840,00. Qual o juro pago?

Resposta

Cz$ 440,00.

Problema 18

Apliquei um capital de Cz$ 4.500,00 à taxa de 30% ao trimestre. Após certo prazo, retirei o montante de Cz$ 6.300,00. Qual foi o prazo desse investimento? (Suponha que a aplicação tenha rendimento mensal.)

Resposta

4 meses.

Problema 19

Marisa aplicou Cz$ 5.000,00 e, após 1 ano e 10 dias, retirou o montante de Cz$ 9.000,00. Qual a taxa mensal desse investimento? (Suponha que a aplicação tenha rendimento mensal.)

Resposta

6%.

Problema 20

Apliquei um certo capital à taxa de 9% ao mês durante 75 dias e recebi Cz$ 90,00 de juros. Qual o montante desse investimento? (Suponha que a aplicação tenha rendimento mensal.)

Resposta

Cz$ 490,00.

Problema 21

Carlos aplicou um capital durante 8 meses e retirou o montante de Cz$ 1.200,00. Depois aplicou o mesmo capital, à mesma taxa, durante 10 meses e aí retirou o montante de Cz$ 1.300,00. Qual o capital aplicado? Qual a taxa bimestral usada?

Resposta

Cz$ 800,00 e 12,5%.

Problema 22

O Sr. Mário aplicou, em uma instituição financeira, a quantia de Cz$ 2.500,00 numa certa data D. Essa instituição ao receber o capital do Sr. Mário, comprometeu-se a pagar juros de 10% ao mês, sob o regime de juros compostos. Se o Sr. Mário se comprometer a deixar essa aplicação na instituição por 2 anos, sem efetuar qualquer retirada ou depósito, qual será o valor a ser resgatado no final da aplicação?

1ª resolução

Veja a tabela seguinte.

Período	Início	Juros do período	Montante
0	2.500	2.500 x 0,1 = 250	2.500 + 250 = 2.750
1	2.750	2.750 x 0,1 = 275	2.750 + 275 = 3.025
2	3.025	3.025 x 0,1 = 302,50	3.025 + 302,50 = 3.327,50
3	3.327,50	3.327,50 x 0,1 = = 332,75	3.327,50 + 332,75 = = 3.659,75
4	3.659,75	3.659,75 x 0,1 = = 365,98	3.659,75 + 365,98 = = 4.025,73
⋮	⋮	⋮	⋮

Fica claro que essa maneira recorrente de resolver o problema 22 é muito trabalhosa e requer muitos passos para se chegar à uma solução.

Vamos propor uma segunda forma de ver a questão, na qual não precisamos recorrer a um resultado imediatamente anterior para determinar o resgate do Sr. Mário.

2ª resolução

Veja a seguinte tabela:

Período	Início	Montante no final do período
1	2.500	2.500 + 10% de 2.500 = 2.500 + 2.500 x 0,1 = 2.500 + 1,1 = 2.750
2	2.750	2.750 + 10% de 2750 = [2.500 x 1,1] + [2.500 x 1,1] x 0,1 = [2.500 x 1,1] + [1 + 0,1] = 2.500 . $1,1^2$ = 3.025
3	3.025	3.025 + 10% de 3.025 = [2.500 x $1,1^2$] + [2.500 x $1,1^2$] x 0,1 = [2.500 x $1,1^2$] x [1 + 0,1] = 2.500 x $1,1^3$ = 3.3257,50
4	3.327,50	3.327,50 + 10% x 3.327,50 = 2.500 x $1,1^3$ + [2.500 x $1,1^3$] x 0,1 = 2.500 x $1,1^3$ + [1 + 0,1] = 2500 x 1,14
⋮	⋮	⋮

Assim, no final de cada período (mês), o montante da aplicação do Sr. Mário pode ser calculado em função da aplicação inicial (2.500,00), em função da taxa mensal de juros (10% ou 0,1) e em função do número de períodos (meses) de aplicação.

Caso seja proposto em sala de aula um exercício como o problema 22 e caso ele seja resolvido junto com os alunos, é possível que, após o 3º ou o 4º passo, os alunos possam calcular o montante final (resgate) que o Sr. Mário terá depois de 2 anos.

Tendo em vista o que foi feito na última tabela, podemos escrever:

resgate do Sr. Mário = 2.500 x $1,1^{24}$

Veja uma ilustração gráfica da "evolução" da aplicação do Sr. Mário:

0	1	2		24
2.500	2.500 x 1,1	2.500 x $1,1^2$	...	2.500 x $1,1^{24}$

Um próximo passo consiste numa generalização do problema 22. Para isso, vamos utilizar algumas notações introduzidas na página 280. Se:

a) o capital aplicado pelo Sr. Mário é C;

b) a taxa de juro composto por período é i;

c) o número de períodos (de capitalizações) é n;

então:

Período	Início do período	montante
1	C	$M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1+i)$
2	$M_1 = C \cdot (1+i)$	$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 \cdot (1+i) = (C \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$
3	$M_2 = C \cdot (1+i)^2$	$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) = (C \cdot (1+i)^2) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$M_{n-1} = C \cdot (1+i)^{n-1}$	$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1} \cdot (1+i) = (C \cdot (1+i)^{n-1}) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^n$
	$\vdots$	$\vdots$

A tabela sugere:

montante ao fim de n períodos $= C \cdot (1+i)^n$

Problema 23

Com relação ao problema 22, obtenha o valor total dos juros pagos pela instituição ao Sr. Mário.

Resolução

De acordo com o que está na página podemos escrever que o total de juros pagos = montante final - capital inicial aplicado.

Portanto:

juros = 24.600 - 2.500 = 22.100

Usando a generalização do problema 22, teremos:

$$\text{Juros} = J = M - C = C \cdot (1 + i)^n - C = C \cdot ((1 + i)^n - 1)$$

Problema 24

Com relação ao problema 22, qual foi a "taxa efetiva" por 2 anos, envolvida na aplicação que o Sr. Mário fez naquela instituição financeira? (ou seja, "quantos por cento" rendeu uma aplicação?)

Resolução

1ª) Segundo o teste 1 (pág. 273), vamos determinar "quantos por cento" o resgate feito representa da aplicação inicial (Cz$ 2.500,00), calculando:

$$\left(\frac{24.600,00}{2.500,00} \times 100\right)\% = 984,97307\%$$

Logo, a taxa efetiva, por 2 anos de aplicação, é de 884,97303%.

2ª) Vamos calcular o montante, nas mesmas condições do problema 22, que é produzido pela aplicação de Cz$ 1,00, no lugar de Cz$ 2.500,00.

$$1 \qquad 1 \times 1,1 \qquad 1 \times 1,2 \quad \ldots\ldots \quad 1 \times 1,1^{24} = 9,8497303$$

Portanto, a taxa efetiva por 2 anos = 9,9497303 - 1 = 8,8497307, ou, aproximadamente, 884,97%.

Problema 25

Com relação ao problema 22, qual seria o montante da aplicação do Sr. Mário, caso os juros tivessem sido calculados sob o regime de juros simples?

Resposta

Cz$ 8.500,00.

Os problemas seguintes (26 ao 30) foram reproduzidos de (20), página

Problema 26

Marcio aplicou Cz$ 18.000,00 a juros compostos de 7% ao mês. Que quantia terá após 8 meses de aplicação?

Resposta

Cz$ 30.927,60.

Problema 27

Milena aplicou uma certa quantia a juros compostos de 12% ao bimestre. Após 10 meses retirou o montante de Cz$ 96.045,35. Que quantia Milena aplicou?

Resposta

Cz$ 54.500,00

Problema 28

Marta quer aplicar Cz$ 8.000,00 com o intuito de, após 1 ano, ter um montante de Cz$ 20.145,60. A que taxa mensal deve aplicar esse capital?

Resposta

8%.

Problema 29

Andréia aplicou um certo capital a juros compostos de 5% ao mês, durante 1 ano e 5 meses. O montante ao fim desse prazo foi, então, aplicado a juros compostos de 9% ao mês, durante 7 meses, resultando ao fim desse prazo num montante de Cz$ 41.897,76. Qual o capital aplicado?

Resposta

Cz$ 9.999,71.

Problema 30

Cláudia aplicou Cz$ 15.000,00 a juros compostos de 6% ao mês. Após quanto tempo terá o montante de Cz$ 42.815,00?

Resolução

De acordo com o que foi generalizado no problema 22, estamos autorizados a escrever:

montante após o tempo t = $15.000 \times 1,06^6 = 42.815,00$ (1)

De (1) resulta a equação:

$$1,06^t = \frac{42.815}{15.000} = 2,8543 \qquad (2)$$

A equação (2) encerra o seguinte "raciocínio intuitivo": "quantas vezes" deveremos multiplicar 1,06 por si mesmo para obtermos 2,8543?

Tentaremos responder tal questão por meio de tentativas, usando uma calculadora simples.

Digite:

1.06 $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ e obtenha no visor 2.854339153

Logo, Cláudia deverá aplicar seu capital por 18 meses.

Problema 31

Com relação ao problema 30, vamos supor que Cláudia quisesse deixar os seus Cz$ 15.000,00 aplicados até que tivesse como rendimento o triplo do capital aplicado. Por quanto tempo deverá ser aplicado o capital de Cláudia?

Resolução

Para que o rendimento de Cláudia seja o triplo do capital aplicado, passado algum tempo, o montante da aplicação deverá ser 15.000 + 3 x 15.000 = 4 x 15.000. Portanto, asssim como no problema 30, poderemos escrever:

$$\text{montante após o tempo } t = 15.000 \times 1,06^t = 4 \times 15.000 \qquad (1)$$

$$\text{De (1) resulta: } 1,06^t = 4 \qquad (2)$$

A equação (2), assim como ocorreu no problema 28, encerra a mesma questão "intuitiva": "quantas vezes" deveremos multiplicar 1,06 por ele mesmo para obter 4? Apresentaremos 3 resoluções da equação (2).

1ª) Agiremos aqui como na resolução da equação (2) do problema 30, isto é, usando uma calculadora simples, multiplicando 1,06 por si mesmo um certo número de vezes até encontrarmos no visor da máquina o número 4.

Digite:

1.06 $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

22 vezes resulta 3.8197478

23 vezes resulta 4.0489327

Isto significa que após 23 meses Cláudia terá como montante de sua aplicação 15.000 x x 3.8197478 = Cz\$ 57.296,22, menor que 4 vezes sua aplicação inicial.

Após 24 vezes, o montante será 15.000 x x 4,0489327 = Cz\$ 60.733,99, maior que 4 vezes sua aplicação inicial.

A resposta ao problema é: 24 meses, ou 2 anos.

2ª) As novidades desta resolução são: usaremos uma calculadora científica e tentaremos determinar uma solução não inteira para (2) que seja "melhor" que as aproximações inteiras 23 e 24 encontradas na 1ª resolução. Do ponto de vista do problema financeiro nada será acrescentado, a não ser que coloquemos uma hipótese adicional que a instituição em que Cláudia está aplicando seu dinheiro pague juros por frações de mês.

Para tentarmos determinar uma "aproximação não inteira" de uma solução de (2) usaremos uma tecla do tipo $\boxed{y^x}$ de uma calculadora científica e faremos interpolações lineares por meio de médias art méticas. O nosso início é o fim da 1ª resolução. Veja a tabela da página seguinte.

Se estamos satisfeitos com a "aproximação" obtida para 1,06, podemos "aceitar" $t = 23,79140625$ como uma "boa aproximação" para solução de (2).

Conclusão: a resposta do problema 31 é "24 meses", porém, colocada a hipótese adicional (início da 2ª resolução), uma resposta para o problema poderia ser:

$t = 23,79140625 = 23$ meses $+ 0,79140625$ mês $=$
$= 23$ meses e 23 dias.

3ª) Existe um conceito mais adequado para resolver (2). É possível que, ao se propor um curso de Matemática Financeira a alguma turma de alunos não se tenha apresentado, ainda, aquele conceito. Acreditamos que em primeiro lugar, não há necessidade de se abrir algum título do tipo "Progressões Geométricas", ou "Logaritmos" para que se possa propor um curso sobre Matemática Financeira e, em segundo lugar, caso algum desses conceitos seja necessário para o desenvolvimento de algum tópico, o professor terá um momento adequado para fazê-lo, nem que para isso precise interromper temporariamente, o seu desenvolvimento.

Este pode ser um bom momento para se explorar o conceito de logaritmo de um número real.

expoente t	digite na calculadora	valor de $1{,}06^t$	próximo expoente
$t_1 = 24$	1,06 $\boxed{y^x}$ 24 $\boxed{=}$	4,048934641 > 4	$t_2 = 23{,}9$
$t_2 = 23{,}9$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,9 $\boxed{=}$	4,025410544 > 4	$t_3 = 23{,}8$
$t_3 = 23{,}8$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,8 $\boxed{=}$	4,00202312 > 4	$t_4 = 23{,}79$
$t_4 = 23{,}79$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,79 $\boxed{=}$	3,999691864 < 4	$t_5 = \frac{t_3 + t_4}{2}$
$t_5 = 23{,}795$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,795 $\boxed{=}$	4,000857323 > 4	$t_6 = \frac{t_4 + t_5}{2}$
$t_6 = 23{,}7925$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,7925 $\boxed{=}$	4,000274551 > 4	$t_7 = \frac{t_5 + t_6}{2}$
$t_7 = 23{,}79125$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,79125 $\boxed{=}$	3,999983197 < 4	$t_8 = \frac{t_6 + t_7}{2}$
$t_8 = 23{,}791875$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,791875 $\boxed{=}$	4,000128871 > 4	$t_9 = \frac{t_7 + t_8}{2}$
$t_9 = 23{,}7915625$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,7915625 $\boxed{=}$	4,000056034 > 4	$t_{10} = \frac{t_7 + t_9}{2}$
$t_{10} = 23{,}79140625$	1,06 $\boxed{y^x}$ 23,79140625 $\boxed{=}$	4,000019615 > 4	

O matemático John Napier (1550-1617) ao estudar progressões aritméticas e progressões geométricas descobriu que havia relações entre elas. Estava descoberto, assim, o cerne do conceito de logaritmo. Isto ocorreu por volta de 1590.

Nos 25 anos que se seguiram, Napier dedicou seu tempo a confeccionar tabelas logarítmicas. O matemático Henry Briggs, ao tomar conhecimento da invenção dos logaritmos, ficou entusiasmado com a nova ferramenta e, a exemplo de Napier, confeccionou tabelas logarítmicas, na base 10 (logaritmos decimais).

Dentre as possíveis aplicações dos logarítmos, uma delas foi largamente empregada na computação de cálculos muito difíceis para a época (em Astronomia e em Navegação, por exemplo).

Uma tabela logarítmica decimal permite que se possa escrever "qualquer" número positivo sob forma de uma potência de base 10.

Hoje em dia a aplicação computacional dos logaritmos deixou de ter utilidade devido ao avanço tecnológico da microeletrônica que permitiu a construção de máquinas de calcular extremamente rápidas e eficientes.

Isto não significou a "aposentadoria" dos logaritmos. Por exemplo, para resolvermos a equação (2) de maneira mais eficiente, rápida e segura, os logaritmos se tornam ideais. As calculadoras científicas substituem as tábuas logarítmicas decimais no fornecimento dos expoentes adequados.

Vamos resolver (2) usando o conceito de logaritmo, passo a passo, como achamos que deve ser feito em sala de aula:

a) o número 1,06 pode ser escrito na forma de potência de base 10, ou seja, existe(*) um expoente x da base 10 tal que:

(*) Veja páginas 299 e 300, no artigo sobre "Potências e Expoentes".

$$10^x = 1{,}06$$

b) da mesma forma, existe(*) expoente y da base 10 tal que:

$$10^y = 4$$

c) a equação (2) "sofre" as seguintes "metamorfoses":

$$1{,}06^t = 4 \qquad (2)$$

$$(10^x)^t = 10^y \qquad (3)$$

$$10^{x.t} = 10^y \qquad (4)$$

A equação (4) apresenta uma igualdade de 2 potências de mesma base. Admitindo-se(*) que "se duas potências de mesma base são iguais, então os respectivos expoentes são iguais", poderemos es - crever:

$$x.t = y \qquad (5)$$

$$t = \frac{y}{x} \qquad (6)$$

Se tivermos prévio conhecimento dos expo entes x e y, o expoente t estará "bem" determinado. Esses expoentes podem ser determinados por meio de uma tábua de logaritmos decimais, mas uma consulta a esse tipo de tábua requer um considerável esforço e treinamento. Usaremos uma calculadora científica para determinarmos os expoentes x e y que afirmamos existirem.

Para isso, digite:

1.06 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha, no visor, 0,025305865

digite: 4 $\boxed{\text{LOG}}$ e obtenha, no visor, 0,602059991.

O significado de cada um desses números é o seguinte:

$$10^{0{,}025305865} = 1{,}06 \quad \text{e} \quad 10^{0{,}602059991} = 4$$

(*) Veja páginas 299 e 300, no artigo sobre "Po - tências e Expoentes.

Assim:

$$t = \frac{0,602059991}{0,025305865} = 23,79132209$$

Cabem aqui o mesmo comentário quando da apresentação da 2ª resolução de (2), ou seja, a resposta do problema 31 continua sendo 24 meses, porém, colocada a hipótese adicional que a instituição paga os juros para frações de mês, então um valor mais preciso do tempo t é: 23,79132209 meses = 23 meses + 0,79132209 mês = 23 meses e 23 dias.

Os procedimentos 4 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{\div}$ 1.06 $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{=}$ e obterá, no visor, 23,79132209.

F. Tipos de taxas juros

Problema 32

Uma instituição financeira que aceita investimentos, paga aos investidores juros de 120% ao ano, porém, com os juros incorporados compostamente ao investimento no final de cada mês. Nessas condições, qual é a taxa mensal que a instituição uitliza para calcular os juros mensais?

Resoluções

1ª) Uma primeira forma de ver a questão levaria alguém a determinar a taxa mensal por: $\frac{120\%}{12} =$ 10% ao mês.

Imitando a 2ª resolução do problema 24 (pág. 290), aplicando-se Cz$ 1,00 por 12 meses (1 ano) à taxa de 10% ao mês, teremos:

0	1	2		12
0	$1 \times 1,1$	$1 \times 1,2$	......	$1 \times 1,1^{12}$

Logo: montante no fim de 12 meses = $= 1 \times 1,1^{12} = 3,1384281$ aproximadamente Cz$ 3,14.

Na realidade, a taxa efetiva envolvida nessa aplicação é igual a: 3,1384281 - 1 = = 2,1384281 aproximadmaente, 213,84% ao ano.

A taxa de 10% ao mês NÃO É EQUIVALENTE à taxa de 120% ao ano, pois aplicando-se um capital C, por 1 ano, à taxa de 10% ao mês, com os juros capitalizados mensalmente, sob o regime de juros compostos, obteremos, aproximadamente, 3,1384281 . C, ou seja, C + 2,1384281 . C = C + 213,84% de C, enquanto que aplicando-se C, por 1 ano, à taxa de 120% ao ano, obteremos 2,20 . C, ou seja, C + 1,2 . C = C + 120% de C.

Dizemos que a taxa de 10% ao mês é uma taxa mensal proporcional à taxa de 120% ao ano.

A taxa de 120% ao ano é uma taxa nominal e a taxa efetiva da aplicação é de 213,84% ao ano.

2ª) Outra forma de ver a questão está em determinar uma taxa mensal i de tal forma que, aplicando-se Cz$ 1,00 por 12 meses, à taxa mensal i, sob regime de juros compostos, obteremos o mesmo saldo se aplicássemos Cz$ 1,00 por 1 ano, à taxa de 120% ao ano.

Assim:

$$1 \times (1+i)^{12} = 1 + 120\% \text{ de } 1{,}00 = 1 + 1 \times 1{,}2 =$$

$$= 1 \times 1{,}2$$

Obtemos a equação:

$$(1 + i)^{12} = 1{,}2 \qquad (1)$$

Dizemos que a taxa i, solução positiva de (1), é a taxa mensal EQUIVALENTE à taxa de 120% ao ano. Nosso próximo passo é determinar uma solução positiva de (1).

Independentemente da técnica e dos recursos técnicos empregados para resolvermos (1), é altamente conveniente explorar o conceito que a equação (1) encerra.

Pode ser didático modificar a "aparência" assustadora de (1) por meio de uma substituição de variáveis. Uma mudança de variáveis pode ficar por conta de um "acordo" entre professor e alunos.

Vamos anotar a grandeza 1 + i, por exemplo, por x.

A equação (1) toma a forma:

$$x^{12} = 1,2 \qquad (2)$$

O conceito que pode e deve ser explorado com os alunos consiste na determinação de um número, representado pela letra x, tal que multiplicado por si mesmo 12 vezes resulta no número 1,2.

Alunos "suficientemente treinados" podem exibir uma solução para (1) escrevendo:

$$x = \sqrt[12]{1,2} \qquad (3)$$

sem saberem o significado daquele símbolo.

É bem provável que aquele símbolo passe a ter significado, para os alunos, caso façam uma "construção" de um valor numérico que é uma aproximação do número representado pelo símbolo (3).

Vejamos 2 maneiras de avaliarmos x:

1ª) por meio de tentativas, usando uma calculadora simples:

supor x =	cálculo de x^{12}	conclusão
1,1	3,138428377	x deve ser menor que 1,1
1,01	1,12682503	x deve ser maior que 1,01
1,02	1,2682413	x deve ser menor que 1,02
1,015	1,1956176	x deve ser maior que 1,015
1,016	1,2098299	x deve ser menor que 1,016
1,0155	1,2027043	x deve ser menor que 1,0155
1,0154	1,2012838	x deve ser menor que 1,0154
1,0153	1,199865	x deve ser maior que 1,0153
1,01535	1,2005745	x deve ser menor que 1,01535

Se estamos "satisfeitos" com a aproximação obtida, teremos uma solução aproximada de (2), dada por x = 1,01535 e portanto, um valor aproximado de (1), dada por:

i = 0,01535 = 1,535% ao mês.

Observação

Em cada passo da tabela, utilizando uma calculadora simples, os procedimentos foram:

1º passo:

digite $\underbrace{1.1 \boxed{x} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \ldots \boxed{=}}_{10 \text{ vezes}}$ e obtenha 3,138428377;

2º passo:

digite $\underbrace{1,1 \boxed{x} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \ldots \boxed{=}}_{11 \text{ vezes}}$ e obtenha 1,12682503

2ª) Segundo algumas convenções feitas, no item "Potências e Expoentes", o número representado pelo símbolo (3) também pode ser representado pelo símbolo:

$$1,2^{\frac{1}{12}}$$

Essa notação sugere como proceder em uma calculadora científica. Digite:

1,2 $\boxed{y^x}$ 12 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ e obtenha 1,01535

Logo:

i = 0,01535 = 1,535% ao mês

Observação

O número de casas decimais após a vírgula depende da precisão do problema. Por exemplo, no "extrato" de uma caderneta de poupança do mês de setembro de 1988, encontramos a taxa da renda no período, de 0,246297 = 24,6297%.

Comentários a respeito do problema 32 e de suas duas resoluções:

1ª) se somos investidores, iremos preferir que a taxa mensal de juro para as devidas capitalizações seja $\frac{120\%}{12} = 10\%$ ao mês, pois assim a taxa anual efetiva da aplicação será 213,84% ao ano;

2ª) se somos da instituição financeira, iremos preferir que a taxa mensal de juro para as devidas capitalizações seja $i = \sqrt[12]{1,2} - 1 = 1,535\%$ ao mês, pois assim $(1 + i)^{12} = (1 + \sqrt[12]{1,2} - 1)^{12} = (\sqrt[12]{1,2})^{12} = 1,2$;

3ª) pode ser que, ao se depararem com um exercício do tipo do Problema 32 e suas duas resoluções, alguns alunos perguntem qual a forma corrèta.

Poderíamos responder que a "correção" de uma das resoluções depende de um "acordo entre as partes". O que é preciso ter em vista é a conveniência de uma delas em relação à outra.

Por exemplo, queremos financiar uma compra em, digamos, 10 prestações mensais, sendo a taxa de juros de 120% ao ano e gostaríamos que a taxa mensal de juros fosse equivalente à taxa de 120% ao ano (1,535%) e não proporcional à taxa de 120% ao ano (10%).

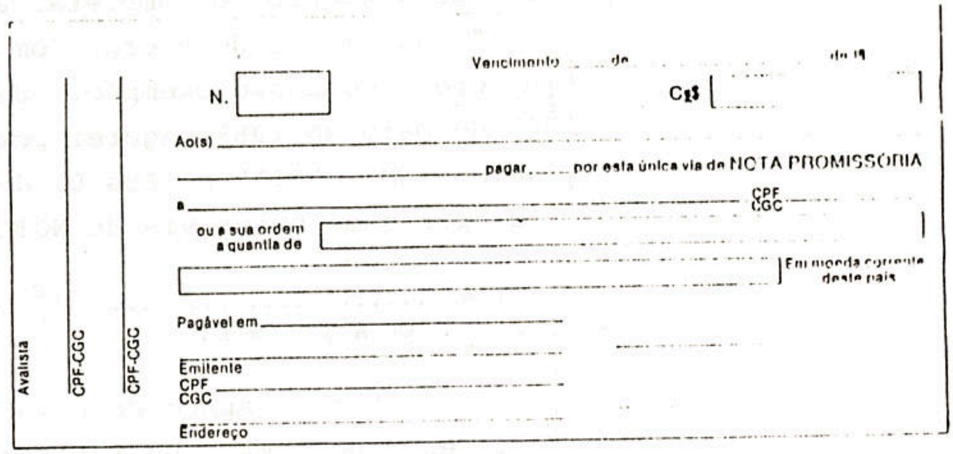
G. Desconto

Exemplo 1

O Sr. João da Silva comprou uma máquina do Sr. Pedro de Lima, em 05-04-88. O Sr. João pagou Cz$ 20.000,00 no ato da compra e comprometeu-se a fazer mais dois pagamentos mensais no valor de Cz$ 10.000,00 cada, a vencer no dia 5 dos meses seguintes.

Como devem proceder o Sr. Pedro e o Sr. João para oficializar essa transação?

Apresentamos a seguir um modelo de nota promissória, que pode ser comprado em papelarias.


Vencimento .... de .... de 19
N.
Cz$
Ao(s) .... pagar .... por esta única via de NOTA PROMISSÓRIA
a .... CPF CGC
ou à sua ordem a quantia de
Em moeda corrente deste país
Pagável em
Emitente
CPF CGC
Endereço
Avalista
CPF-CGC
CPF-CGC

Esse documento deve ser preenchido da seguinte maneira:

1º) N.

Aqui devem ser colocados o número da nota promissória, uma barra e o número total delas. (No nosso exemplo: 1/2 e 2/2). Se fossem, por exemplo, 24 notas promissórias, elas seriam numeradas 1/24, 2/24, ..., 23/24, 24/24.

2º) Vencimento: .... de .... de 19 ...

Nesses espaços, devem ser colocados o dia, o mês e o ano do pagamento da nota. No exemplo, serão colocadas as datas: 05 de maio de 1988 e 05 de junho de 1988.

3º) Cz$

Preenche-se com a quantia a ser paga no dia do vencimento. No nosso caso, o valor é Cz$ 10.000,00.

4º) Ao(s) ....
.... pagar .... por esta única via de NOTA PRO -
MISSÓRIA

Aqui, deve-se colocar a data do vencimento, por extenso, e completar a frase com "pagarei" ou "pagaremos", de acordo com a quantidade de devedores. No nosso exemplo, deve-se colocar: "Aos 05 de maio de 1988 pagarei por esta única via de NOTA PROMISSÓRIA" e "Aos 05 de junho de 1988 pagarei por esta única via de NOTA PROMISSÓRIA".

5º) a .... CPF/CGC ....
OU A SUA ORDEM

Nesse espaço deve ser colocado o nome do Sr. Pedro de Lima, que irá receber a quantia declarada. O Sr. Pedro é chamado credor. Ao lado, deve ser colocado o número do CPF (Cadastro de Pessoa Física). Se o credor fosse um comerciante ou industrial, ali seria colocado o número de inscrição no CGC/Cadastro Geral dos Contribuintes).

6º) a quantia de

em moeda corrente deste país

Deve-se escrever aqui, por extenso, a quantia a ser paga. No nosso exemplo, de mil cruzados.

7º) Pagável em

Colocam-se aqui os nomes do estado e da cidade em que a promissória será paga. Neste caso: São Paulo, Capital.

8º)
EMITENTE

O emitente é a pessoa que faz a declaração na promissória. É, no nosso exemplo, o Sr. João da Silva, também chamado devedor.

9º) CPF
CGC

Preencha este espaço com o número do CPF do Sr. João da Silva.

10º)
ENDEREÇO

Coloca-se neste espaço o endereço do Sr. João da Silva.

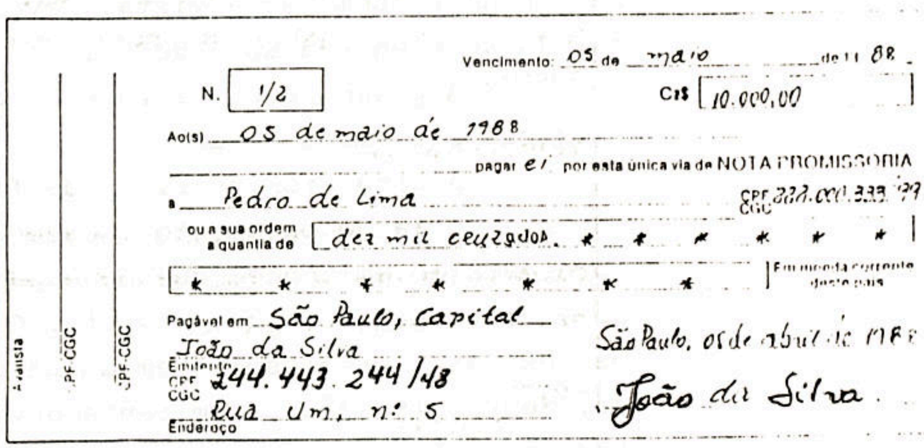
11º) ______________
____

Aqui, o Sr. João da Silva deve datar e assinar.

12º) AVALISTA(s)
CPF-CGC
CPF-CGC

Esse espaço é reservado para a assinatura e CPF ou CGC de duas pessoas que, caso o Sr. Pedro exija, se responsabilizariam pelo pagamento.

Apresentamos, em seguida, uma das notas promissórias do exemplo, já preenchida.



Vencimento: 05 de maio de 19 88

N. 1/2

Cz$ 10.000,00

Ao(s) 05 de maio de 1988

pagar e/ por esta única via de NOTA PROMISSÓRIA

a Pedro de Lima CPF/CGC 333.000.333 /99

ou à sua ordem a quantia de dez mil cruzados. * * * * * *

* * * * * * * Em moeda corrente deste país

Pagável em São Paulo, Capital

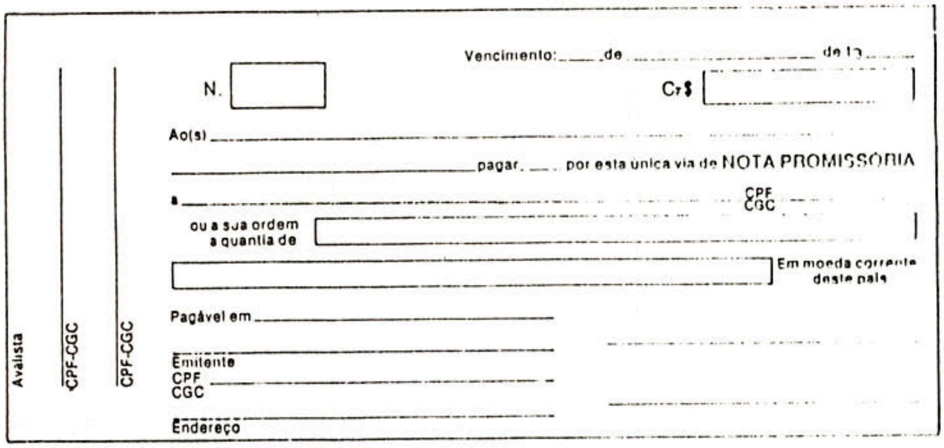
João da Silva
Emitente
CPF/CGC 244.443.244/48
Rua Um, nº 5
Endereço

São Paulo, 05 de abril de 1988

João da Silva

Avalista CPF-CGC CPF-CGC

Tente, agora, preencher a outra.


Vencimento: ____ de ______________ de 19___

N.

Cr$

Ao(s) ______________________________

______________ pagar, ___ por esta única via de NOTA PROMISSÓRIA

a ______________________ CPF CGC ______

ou a sua ordem a quantia de

Em moeda corrente deste país

Pagável em ______________

Emitente

CPF CGC ______________

Endereço

Avalista

CPF-CGC

CPF-CGC

Nota promissória é uma promessa de pagamento por escrito, feita pelo devedor em uma única via. O devedor, também chamado emitente, declara, por meio desse documento, que deve pagar uma determinada quantia a uma certa pessoa, numa data combinada por eles.

A data pode ser expressa pelo dia, mês e ano do vencimento. Pode também ser expressa por um prazo a partir do dia em que ela é feita (emitida). Pode também ser à vista, devendo ser paga quando apresentada ao devedor.

A pessoa que vai receber o valor da promissória é chamada credor.

A nota promissória pode ficar com o credor até o dia do pagamento. Nesse dia, o credor a apresenta ao emitente, que deve pagá-la, recebendo-a de volta, como comprovante. O credor pode também deixar a promissória em um Banco, para cobrança. Nessa situação, o emitente deve ir ao Banco para pagá-la.

Como garantia de pagamento, o credor pode exigir que um avalista ou responsável assine também a nota. O avalista compromete-se, assim, a pagá-la, caso o devedor não o faça. Mesmo assim, se ela não for paga, o credor pode protestá-la, ou seja, levá-la a um Cartório de Protesto, onde será aberto um processo contra o devedor.

A nota promissória pode se originar de um ato de compra e venda como no exemplo, ou de um empréstimo feito por uma pessoa a outra.

Se nessa transação houver cobrança de juros, este não aparece explicitamente na nota; o que deve constar na promissória é o montante a ser pago.

A nota promissória teve origem por volta do século XIII. Naquela época, as leis eclesiásticas condenavam a cobrança de juros e, então, pela facilidade com que a promissória podia ocultar esse fato, ela foi também condenada, deixando de ser usada por um longo período da História.

Atualmente, é um documento de grande utilização.

Exemplo 2

O Sr. José Gonçalves comprou um sofá nas Lojas Só-sofás em 10/07/88 e quis efetuar o pagamento em três parcelas mensais de Cz$ 15.000,00 cada, a vencer no dia 10 dos meses seguintes. A Loja Só-sofás emitiu, então, uma fatura (documento onde são especificados o número da nota fiscal, a mercadoria vendida, seu preço, etc.). Baseada nessa fatura, a Loja Só-sofás emitiu DUPLICATAS, que o Sr. José deverá pagar. Em cada duplicata devem constar:

1º) Valor da fatura: é o preço total da venda. No caso, Cz$ 45.000,00.

2º) Número da fatura: é o número de ordem que ela apresenta, no bloco de faturas que a loja possui. No nosso exemplo, suponhamos que seja 1027.

3º) Valor da duplicata: é o valor de cada parcela: Cz$ 15.000,00.

4º) Número de ordem: é o número da fatura correspondente, seguido do número de ordem da duplicata. No nosso exemplo: 1027/1, 1027/2, 1027/3.

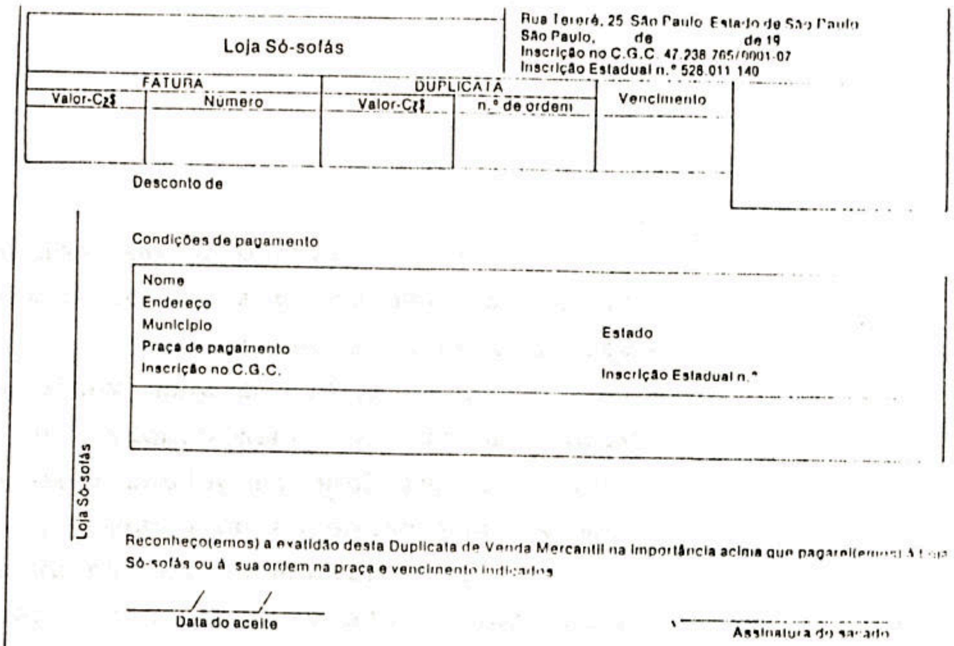
5º) Data da emissão: dia 10/7/88.

6º) Vencimento: é a data do pagamento. No caso, uma tem vencimento em 10/8/88, outra em 10/9/88 e a última em 10/10/88.

7º) Nome e endereço da firma vendedora, nome e endereço do comprador, a assinatura do comprador e do responsável pela firma.

As duplicatas ficam com o Sr. José que, no dia do pagamento, deverá pagá-las em um Banco ou na própria loja.

Apresentamos, abaixo, um modelo da duplicata que a Loja Só-sofás preencheu.


Loja Só-sofás

Rua Tererê, 25 São Paulo Estado de São Paulo
São Paulo, de de 19
Inscrição no C.G.C. 47.238.765/0001-07
Inscrição Estadual n.º 528.011.140

FATURA		DUPLICATA		
Valor-Cz$	Número	Valor-Cz$	n.º de ordem	Vencimento

Desconto de

Condições de pagamento

Nome
Endereço
Município
Estado
Praça de pagamento
Inscrição no C.G.C.
Inscrição Estadual n.º

Loja Só-sofás

Reconheço(emos) a exatidão desta Duplicata de Venda Mercantil na importância acima que pagarei(emos) à Loja Só-sofás ou à sua ordem na praça e vencimento indicados

___/___/___
Data do aceite

Assinatura do sacado

Veja agora uma das três duplicatas, já preenchida.

Veja agora uma das três duplicatas, já preenchida.

Loja Só-sofás

Rua Tererê, 25, São Paulo, Estado de S. Paulo
São Paulo, 10 de julho de 1981
Inscrição no C.G.C. 47 238 765/0001-07
Inscrição Estadual n.º 528 011 140

FATURA		DUPLICATA		Vencimento
Valor — Cr$	Número	Valor — Cr$	n.º de ordem	
45.000,00	1027	15.000,00	1027/01	10/8/82

Desconto de

Condições de pagamento

Nome José Gonçalves
Endereço Rua Cinco, n.º 3
Município São Paulo
Praça de pagamento
Inscrição no C.G.C.

Estado São Paulo

Inscrição Estadual n.º

Loja Só-sofás

Reconheço(cemos) a exatidão desta Duplicata de Venda Mercantil na importância acima que pagarei(emos) à Loja Só-sofás ou à sua ordem na praça e vencimento indicados

15 / 07 / 83
Data do aceite

José Gonsalves
Assinatura do sacado

A duplicata é um documento originado por uma operação de venda a prazo, como no exemplo, ou por prestação de serviço.

É emitida por quem vende (ou presta serviço), aceita por quem compra (ou paga o serviço) e tem a finalidade de garantir ao emitente o recebimento das parcelas do pagamento.

A duplicata só tem valor se baseada na fatura proveniente da venda efetuada ou do serviço prestado.

A nota promissória e a duplicata são chamados títulos de crédito.

Existem outros títulos de crédito, além desses, como por exemplo a letra de câmbio, o cheque, etc.

Existe uma legislação específica para esses títulos que regulamenta sua emissão, registro, modelo, vencimento, protesto, etc.

Esses títulos podem ser negociados, ou se ja, eles podem ser vendidos antes da data do vencimento.

Comentário ao professor

O professor pode encontrar parte da legislação sobre títulos de crédito no Código Comercial Brasileiro.

Julgamos que, dentre todos os títulos de crédito existentes, a nota promissória e a duplicata são aqueles com os quais, provavelmente, os alunos terão contato um dia. Por isso quisemos dar algumas informações sobre elas. Não quisemos perder tempo em comentários com outros títulos que talvez os alunos nunca venham a conhecer. Talvez eles se interessem em saber alguma coisa sobre a letra de câmbio e por isso gostaríamos de dar ao professor alguns detalhes sobre a mesma.

É desconhecida a época de sua criação, mas, sem dúvida, sua difusão ocorreu na Idade Média. Se um negociante de uma cidade A precisasse efetuar um pagamento a um negociante, numa cidade B, deveria fazê-lo pessoalmente, empreendendo uma viagem perigosa através de estradas inseguras, correndo o risco de assaltos, etc. A letra de câmbio permitiu que ele enviasse a quantia ao outro por meio de um intermediário (um banqueiro). O comerciante na cidade A, entregava a quantia ao banqueiro e este escrevia uma carta, ordenando a uma pessoa em B que pagasse a quantia mencionada ao negociante de B, quando este o procurasse. Essa carta deu origem à letra de câmbio.

De início, só a pessoa mencionada na carta poderia receber o pagamento; posteriormente, no século XV, a letra tornou-se negociável através do endosso. O endosso é a assinatura do beneficiado, no verso da letra, transferindo, assim, a outra pessoa, o direito de receber o pagamento. A letra, antes um simples meio de trocar dinheiro, adquiriu a partir do endosso a característica de título negociável, circulante.

Aos poucos, foram surgindo leis que estabeleceram as normas cambiais como, por exemplo, em Bolonha (1569), na Itália (1607), na França (1673), na Alemanha (1848). No Brasil, o Código Comercial de 1850 já disciplinava as letras de câmbio. Posteriormente foi criada outra lei brasileira que define a letra de câmbio e regulamenta as operações cambiais: é a Lei nº 2044, de 31 de dezembro de 1908, em vigor até hoje. Nessa lei, a letra de câmbio é definida como uma ordem de pagamento, emitida por qualquer pessoa.

Desde o século XVIII, pensava-se num direito comercial comum a todas as nações e muitas conferências foram feitas nesse sentido. O Brasil aderiu, em 26 de agosto de 1942, à Lei Uniforme de Genebra.

No início da era industrial, os bancos só operavam com empréstimos a curto prazo. Sentiu-se falta de um sistema financeiro que se adequasse à necessidade de empréstimos a médio e longo prazos. Houve, então, o aparecimento de outros papéis no mercado. Muitas leis foram sendo criadas deste então. Por meio delas, criaram-se as Sociedades de Crédito, Financiamento e Investimento, suas atividades foram regulamentadas, as empresas receberam autorização para criar seções de financiamentos e crédito, criou-se o Conselho Monetário Nacional, disciplinou-se o mercado de capitais. O Banco Central, com novas resoluções, modifica, quando necessário, a legislação já existente.

Atualmente, a letra de câmbio é um título de crédito que corresponde a uma ordem de pagamento, à vista ou a prazo, e é emitido por financeiras. Um exemplo: o Sr. A deve pagar a B uma certa quantia e B pode provar, através de um nota promissória, por exemplo, que vai receber aquela quantia na data fixada. Usando essa nota promissória como garantia, B vai a uma financeira C e pede um empréstimo. C empresta-lhe o dinheiro, cobrando juros, e lança no mercado letras de câmbio no valor do empréstimo, oferecendo juros menores do que cobrou de B. Vende essas letras e recebe de volta a quantia emprestada, que será usada em novos empréstimos.

Exemplo 3

Mauro tem em mãos uma nota promissória, no valor de Cz$ 25.000,00, com vencimento em 30/6/88. Ele está precisando, agora, de dinheiro e só poderá receber essa quantia na data do vencimento do título. Resolve, então, vender essa nota promissória. Em 30/4/88, Mauro transfere a propriedade desse título a um amigo, recebendo em pagamento uma quantia combinada por eles: Cz$ 20.000,00.

Chamamos, neste exemplo, de

Operação de desconto:	operação de compra ou venda de um título de crédito, transferindo sua propriedade ao comprador;
Valor nominal:	é a importância indicada no título e que representa a quantia que seria recebida por Mauro no dia do vencimento;
Valor líquido recebido:	é a importância líquida recebida por Mauro em 30/4/88: Cz$ 20.000,00.
Desconto:	é a diferença entre o valor nominal e o valor líquido recebido: Cz$ 25.000,00 - Cz$ 20.000,00 = Cz$ 5.000,00.
Tempo que falta para o vencimento:	é a diferença entre a data do vencimento e a data da transferência feita, ou seja, o intervalo de tempo entre 30/4/88 e 30/6/88; 2 meses.

Do ponto de vista de Mauro, ele precisava de dinheiro e o título que tinha em mãos lhe garantia o recebimento de Cz$ 25.000,00, mas só em 30/6/88. É lógico que, ao vender o título antes dessa data, o faça por um valor menor e essa diferença é o que ele perderá por não poder esperar o dia do vencimento.

Do ponto de vista do amigo de Mauro, ele está empregando um capital em 30/4/88 e vai ter que esperar dois meses para receber os Cz$ 25.000,00. É lógico que, ao comprar o título, o faça por um valor menor que os Cz$ 25.000,00 e essa diferença de Cz$ 5.000,00 corresponde a juros pelo capital que adiantou a Mauro e que só terá de volta em 30/6/88.

<u>Exemplo 4</u>

Mauro tem em mãos uma nota promissória, no valor de Cz$ 25.000,00, com vencimento em 30/6/88. Ele está precisando de dinheiro, agora, e só poderá receber essa quantia na data do vencimento do título a um Banco. O Banco, além do desconto, cobra taxas e comissões, para cobrir despesas e o risco da operação. Mauro recebe, então, a quantia de Cz$ 19.500,00.

Nesse exemplo, chamamos de valor líquido recebido a quantia de Cz$ 19.500,00.

O abatimento total, no valor de Cz$ 5.500,00, obtido pela diferença Cz$ 25.000,00 - - Cz$ 19.500,00, corresponde ao juro do capital que o Banco empregou, acrescido de taxas e comissões.

Do ponto de vista do Banco, ele empregou um capital de Cz$ 19.500,00 e terá que esperar dois meses para receber os Cz$ 25.000,00.

Vimos, então, que a propriedade dos títulos pode ser transferida, ou seja, os títulos podem ser vendidos antes da data do seu vencimento.

Isso significa que, se o proprietário de um título precisar de dinheiro antes da data do vencimento, poderá dirigir-se a uma pessoa qualquer ou a um Banco, transferindo-lhe a posse e recebendo o valor do título, com certo abatimento. Diz-se que o título foi descontado e a operação feita é a operação de desconto.

Então,

VALOR NOMINAL é a importância indicada no título. Lembremos que esse título é um documento que expressa uma dívida feita em alguma data anterior, ou seja, alguém devia uma certa quantia a Mauro e lhe deu a nota promissória como garantia. Os Cz$ 25.000,00 correspondem ao valor da dívida mais os juros que Mauro deve ter cobrado, a uma taxa de juros combinada entre eles.

DESCONTO é o valor abatido. Pode corresponder simplesmente aos juros que o comprador abate, porque vai ter que esperar o vencimento do título ou pode, além dos juros, envolver taxas e comissões.

VALOR LÍQUIDO RECEBIDO é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

TAXA DE DESCONTO é a taxa pela qual é calculado o desconto, através de uma capitalização simples ou composta. Nem sempre a taxa de desconto é igual à taxa cobrada no empréstimo que dá origem ao título, pois as taxas usadas se modificam com o passar do tempo. Usa-se a taxa vigente na época de operação de desconto.

DESCONTO SIMPLES COMERCIAL

O desconto simples comercial corresponde ao juro simples comercial do valor nominal, à taxa de desconto combinada, durante o tempo que decorre da data da aplicação de desconto até a data do vencimento.

Chamando de:

D_c: desconto simples comercial
N : valor nominal do título
i : taxa de desconto, na forma unitária
t : número de períodos entre a data da operação de desconto e a data do vencimento, na mesma unidade tempo expressa pela taxa.

Temos, então, que

$$\boxed{D_c = Nit}$$

Voltando ao exemplo 3 suponhamos que a taxa de desconto tenha sido de 10% ao mês. O desconto de Cz$ 5.000,00 corresponde ao juro do capital de Cz$ 25.000,00, à taxa de 10% ao mês, durante 2 meses, ou seja, Cz$ 25.000,00 x 0,10 x 2 = Cz$ 5.000,00.

Veja o esquema abaixo, onde indicamos as datas consideradas.

2 meses

data da venda do título — data do vencimento do título

Chamando de V_c o valor líquido recebido, temos que:

$$\boxed{V_c = N - D_c}$$

No exemplo 3, o valor líquido recebido será de Cz$ 25.000,00 - Cz$ 5.000,00 = Cz$ 20.000,00

<u>Comentário ao professor</u>

O valor líquido recebido pode ser calculado pela fórmula

$$V_c = N - D_c = N - Nit = N \, . \, (1 - it)$$

$$\therefore \quad \boxed{V = N \cdot (1 - it)}$$

Esta é uma fórmula mais condensada para o cálculo de V_c. No entanto, acreditamos que, didaticamente, é preferível que o aluno calcule V_c usando os conceitos de desconto e valor líquido recebido em lugar de se preocupar em memorizar um grande número de fórmulas.

Problema 33

Uma letra de valor nominal Cz$ 9,000,00 foi descontada 20 dias antes do vencimento, à taxa de 8% ao mês. Determine o desconto simples comercial. Determine o valor líquido recebido.

Resposta

Cz$ 480,00 e Cz$ 8.520,00.

Problema 34

Uma nota de valor nominal Cz$ 50.000,00 foi descontada 6 meses antes do vencimento, fornecendo um valor líquido de Cz$ 29.000,00. Determine a taxa mensal de desconto adotada.

Resposta

7% ao mês.

Problema 35

Uma nota foi descontada 50 dias antes do vencimento, à taxa de 12% ao mês, fornecendo um desconto de Cz$ 4.700,00. Determine o valor nominal desse título.

Resposta

Cz$ 235.000,00.

Problema 36

Uma nota promissória de valor nominal Cz\$ 38.000,00 foi descontada à taxa de 9% ao mês, dando um valor líquido de Cz\$ 30.000,00. Determine quanto tempo faltava para o vencimento.

Resposta

Aproximadamente 70 dias.

Problema 37

Juliano tomou emprestado Cz\$ 60.000,00 para pagar após 8 meses, com juros de 80% ao ano. Três meses antes do vencimento, resolveu pagar o título, se fosse efetuado um desconto simples comercial. A taxa do mercado, nessa época, era de 90% ao ano. Qual o valor líquido que Juliano deveria pagar?

Resposta

Cz\$ 71.300,00.

DESCONTO BANCÁRIO

O desconto bancário corresponde ao desconto simples comercial acrescido de despesas e comissões, geralmente expressas em porcentagem sobre o valor nominal.

Chamando de

D_b: desconto bancário
N : valor nominal do título
t : número de períodos que faltam para o vencimento, na mesma unidade de tempo que a taxa
i : taxa de desconto, na forma unitária
i': taxa de despesas e comissões, na forma unitária,

temos então que: $\boxed{D_b = Nit + Ni'}$

Voltando ao exemplo 4, suponhamos que a taxa de desconto estipulada seja 10% ao mês e a *taxa de despesas seja de 2% sobre o valor nominal.* O desconto bancário é a soma do juro de 10% ao mês por 2 meses, sobre os Cz$ 25.000,00 com as despesas, que são de 2% sobre os Cz$ 25.000,00, ou seja, Cz$ 25.000,00 x 0,10 x 2 + Cz$ 25.000,00 x x 0,02 = Cz$ 5.000,00 + Cz$ 500,00 = Cz$ 5.500,00.

O valor líquido recebido, chamado de Vb, é dado por

$$\boxed{V_b = N - D_b}$$

No exemplo 4, o valor líquido recebido corresponde a Cz$ 25.000,00 - Cz$ 5.500,00 = Cz$ 19.500,00.

Comentário ao professor

O valor líquido recebido pode ser calculado pela fórmula $V_b = N \cdot (1 - it - i')$, cabendo as mesmas observações feitas no caso anterior.

Problema 38

Um título de valor nominal Cz$ 28.000,00 sofreu um desconto bancário, à taxa de 8,5% ao mês, 60 dias antes do seu vencimento, tendo sido cobrada uma comissão de 1% sobre o valor nominal. Determine o desconto bancário.

Resposta

Cz$ 5.040,00.

Problema 39

Marcos tem um título que expressa um empréstimo que fez a Carlos, de Cz$ 100.000,00 com juros simples de 6% ao mês, datado de 5/7/88. O vencimento é em 5/12/88. Marcos pretende descontar o título num Banco que cobra 1,5% do valor nominal como comissão e cuja taxa de desconto é de 8% ao mês. Marcos quer receber o líquido de Cz$ 120.000,00. Quantos dias antes do vencimento deve descontar o título?

Resposta

Aproximadamente 22 dias.

Problema 40

Agnaldo tem um título de valor nominal Cz$ 40.000,00, vencível daqui a 70 dias. Recebeu por ele duas ofertas:

1ª) vendê-lo por Cz$ 30.000,00, proposta de um amigo;

2ª) descontá-lo em um Banco cuja taxa de desconto é de 9% ao mês e que cobra comissão de 1% sobre o valor nominal.

Qual oferta deve aceitar? Por quê?

Resposta

O desconto no Banco, pois oferece maior valor líquido.

Problema 41

Um título de valor nominal Cz$ 120.000,00 foi descontado 100 dias antes do vencimento. O valor líquido recebido foi de Cz$ 69.600,00 e a comissão cobrada pelo Banco foi de 2% sobre o valor nominal. Determine a taxa mensal de desconto utilizada.

Resposta

12%.

Problema 42

Um título de valor nominal Cz$ 57.000,00 foi descontado num Banco 3 meses antes do vencimento e o valor líquido recebido foi de Cz$ 43.320,00. Se a taxa de desconto usada foi de 7% ao mês, qual a taxa cobrada para despesas?

Resposta

3% do valor nominal.

Problema 43

Em 3/1/88, Luís pediu emprestada uma certa quantia a João e combinou pagar essa dívida, com juros, em 3/8/88. Nessa data, Luís deveria pagar a João o montante de Cz$ 60.000,00. Ao chegar o dia 3/6/88, Luís quis saldar a dívida. Logicamente, ao antecipar o pagamento, deve-se abater o juro relativo ao prazo de 3/6/88 a 3/8/88. Nessa época, a taxa vigente era de 10% ao mês. Quanto Luís deve ter pago a João nessa data?

Resolução

Luís pagou a João uma quantia A de modo que se João aplicasse a juros essa quantia A, durante dois meses (de 3/6 a 3/8), à taxa de 10% ao mês, receberia o montante de Cz$ 60.000,00. Dessa forma, nem Luís nem João saíram prejudicados.

Essa quantia A pode ser determinada através de uma capitalização a juros simples ou a juros compostos.

Se a capitalização for a juros simples, temos que

$$\underbrace{\text{Cz\$ } 60.000,00}_{\text{montante inicial}} = \underbrace{(}_{\text{capital}}1 + \underbrace{2}_{\text{nº de períodos}} \times \underbrace{0,10}_{\text{taxa}}) \quad \therefore \quad A = \text{Cz\$ } 50.000,00$$

Se a capitalização for a juros compostos temos que:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{montante}}}{Cz\$\ 60.000,00} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{capital} \\ \text{inicial}}}{A}\ (1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{taxa}}}{0,10})^{2} \rightarrow \text{nº de períodos}$$

$$\therefore\ A = Cz\$\ 49.586,78$$

Já sabemos que a quantia de Cz$ 60.000,00 é chamada valor nominal. A quantia A é chamada valor atual. Então,

VALOR ATUAL de um compromisso é o seu valor numa data anterior à do seu vencimento, data essa chamada "data atual". Para cada "data atual" há um valor atual correspondente. O valor atual é o capital que, aplicado durante o tempo que falta para o vencimento, à taxa vigente no mercado, fornece como montante o valor nominal.

Chamando de

A: valor atual do compromisso, numa determinada "data atual"

N: valor nominal do compromisso

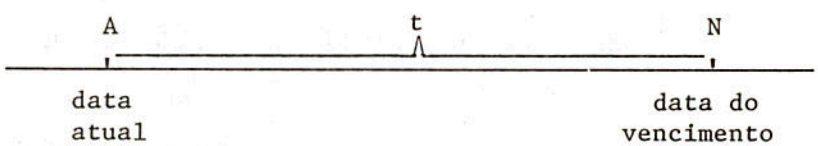
i: taxa vigente, na forma unitária

t: número de períodos entre a data atual e a data de vencimento,

temos: $\boxed{A = \dfrac{N}{1 + it}}$, se a capitalização for a juros simples e

$\boxed{A = \dfrac{N}{(1 + i)^{t}}}$, se a capitalização for a juros compostos.

Veja o esquema seguinte



Comentário ao professor

O conceito de valor atual está sendo fornecido, agora, pois será usado no item seguinte, que é sobre o desconto racional. Na verdade, esse conceito poderia ter sido dado nos primeiros capítulos, logo em seguida aos conceitos de montante a juros simples e compostos. O valor atual é de grande importância na análise de investimentos e na equivalência de capitais e será usado nos capítulos seguintes.

DESCONTO SIMPLES RACIONAL

Voltando ao problema 43, vemos que a quantia abatida, no caso da capitalização a juro simples, foi de Cz\$ 60.000,00 - Cz\$ 50.000,00 = Cz\$ 10.000,00.

Essa quantia recebe o nome de desconto simles racional e corresponde ao juro simples sobre os Cz\$ 50.000,00 à taxa de 10% ao mês, durante 2 meses, ou seja:

Cz\$ 50.000,00 x 0,10 x 2 = Cz\$ 10.000,00. Então,

DESCONTO SIMPLES RACIONAL é o juro simples no valor atual, durante o tempo que falta para o vencimento, à taxa vigente.

Chamando de

D_R: desconto simples racional
N : valor nominal
A : valor atual, numa determinada "data atual"
i : taxa vigente, na forma unitária
t : número de períodos entre a "data atual" e a "data do vencimento",

temos então que $\boxed{D_R = Ait}$

Temos também que $\boxed{D_R = N - A}$

Observe que o valor atual é o valor líquido recebido, pois o valor líquido recebido é a diferença entre N e D_R e vimos acima que $N - D_R = A$

Se a "data atual" for a data do vencimento, o valor atual coincide com o valor nominal.

Levando em conta as duas fórmulas para o cálculo de D_R, temos que

$$N - A = Ait \therefore N = A + Ait \therefore N = A \cdot (1 + it) \therefore$$

$$\boxed{A = \frac{N}{1 + it}}$$

o que comprova que o valor líquido recebido é o valor atual e é o capital que, aplicado à taxa i durante t períodos, fornece o montante N.

Veja que pelas fórmulas acima, necessitamos do valor de A para podermos calcular D_R. É então conveniente deduzirmos outra fórmula para o cálculo de D_R.

$$D_R = Ait = \frac{N}{1 + it} \cdot it \therefore D_R = \frac{Nit}{1 + it}$$

Problema 44

Um título de valor nominal Cz$ 12.000,00 foi descontado 40 dias antes do vencimento, à taxa de 7% ao mês. Determine o desconto simples racional e o valor líquido recebido.

Resposta

Cz$ 1.024,39 e Cz$ 10.975,61.

Problema 45

Um título de valor nominal de Cz$ 40.000,00 foi descontado 3 meses antes do vencimento, fornecendo um valor líquido de Cz$ 28.000,00. Determine a taxa mensal de desconto simples racional adotada.

Resposta

14,29%.

Problema 46

Um título foi descontado 50 dias antes do vencimento à taxa de 10% ao mês, fornecendo um desconto simples racional de Cz$ 5.000,00. Determine o valor nominal do título.

Resposta

Cz$ 35.000,00.

Problema 47

Um título de valor nominal Cz$ 58.000,00 foi descontado à taxa de 8% ao mês, dando um valor líquido de Cz$ 55.000,00. Determine quanto tempo faltava para o vencimento.

Resposta

Aproximadamente 20 dias.

DESCONTO COMPOSTO RACIONAL

Voltando ao problema 43, vemos que a quantia abatida, no caso da capitalização a juros compostos, foi de

Cz$ 60.000,00 - Cz$ 49.586,78 = Cz$ 10.413,22.

Essa quantia recebe o nome de desconto composto racional e corresponde ao juro composto sobre Cz$ 50.000,00 à taxa de 10% ao mês, durante 2 meses. Então,

DESCONTO COMPOSTO RACIONAL é o juro composto do valor atual, durante o tempo que falta para o vencimento, à taxa vigente.

Chamando de

D_{cp}: desconto composto
N : valor nominal
A : valor atual, numa determinada "data atual"
i : taxa vigente, na forma unitária
t : número de períodos entre a "data atual" e a data do vencimento,

temos, então, que $\boxed{D_{cp} = N - A}$

e também que $D_{cp} = N - \dfrac{N}{(1 + i)^t} = N \cdot (1 - \dfrac{1}{(1+i)^t})$

$$\boxed{D_{cp} = N \cdot (1 - \frac{1}{(1 + i)^t})}$$

Problema 48

Um título nominal Cz$ 37.000,00 sofreu um desconto composto, à taxa de 9% ao mês, 60 dias antes do seu vencimento. Determine o desconto recebido.

Resposta

Cz$ 5.857,84.

Problema 49

Um título de valor nominal Cz$ 45.000,00 sofreu um desconto composto à taxa de 10% ao mês, 30 dias antes do seu vencimento. Determine o valor recebido.

Resposta

Cz$ 40.909,00.

Valores Financeiros Equivalentes

Problema 50

O Sr. Ruy depositou em uma caderneta de poupança, em 17 de setembro, a quantia de Cz$ 150,00. No dia 10 de outubro do mesmo ano, o Sr. Ruy recebeu um comunicado da instituição financeira avisando que, caso não haja saque até o dia 17 de outubro próximo, serão creditados na sua conta 24% do útlimo saldo, a título de correção do dinheiro aplicado, "mais" 0,5% de juros. Qual será o saldo do Sr. Ruy em 17 de outubro?

Resolução

24% de correção "mais" 0,5% de juro não significa 24% + 0,5% e sim, uma taxa ((1,24 x x 1,005 - 1) x 100)%. Logo:

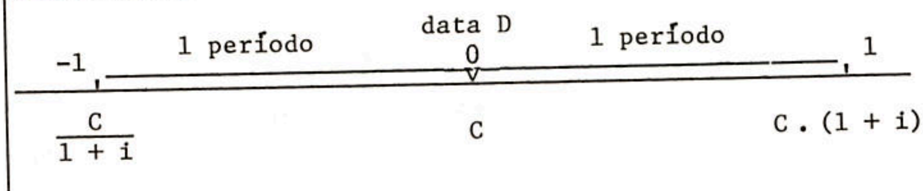
saldo em 17 de outubro = 150,00 x 1,2462 = Cz$ 186,93.

Num esquema gráfico:

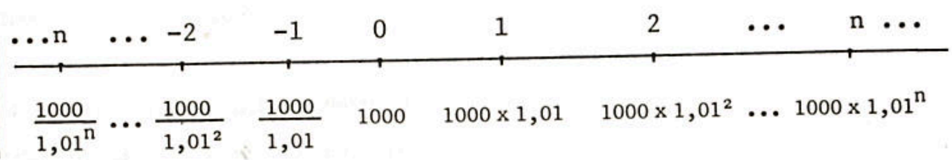
Embora os valores em 17/9 e em 17/10 sejam diferentes, podemos dizer que tais valores são "equivalentes" em relação à taxa de juro mais correção do dinheiro (24,62% ao mês).

De um modo geral, se o custo do dinheiro é determinado por uma taxa i, então os valores C (numa data D) e C . (1 + i) (um período após D) são valores financeiros equivalentes em relação à taxa i. Da mesma forma, os valores C (em D) e $\frac{C}{1 + i}$ (um período anterior a D) são também "equivalentes" em relação à taxa i.

Num esquema gráfico podemos "ver" as equivalências:



Eis uma seqüência de valores equivalentes a Cz$ 1.000,00, em relação à taxa de 1% ao mês.



Problema 51

Uma dívida foi contraída numa data D e ficou acertado que ela seria paga em 3 parcelas: a primeira, 1 mês depois da data D, de Cz$ 1.000,00; a segunda de Cz$ 2.000,00, 2 meses após a data D; a terceira, 3 meses após D, de Cz$ 3.000,00. Ficou acertado também, que a taxa de juros compostos da transação era de 12% ao mês. Qual era o valor da dívida?

Comentário

Do ponto de vista da Matemática Financeira, a pergunta formulada no problema 51 não tem sentido. O valor financeiro do dinheiro é uma função do tempo. Portanto, ao se perguntar "Qual era o valor da dívida?" deveríamos acrescentar à pergunta "... na data X?"

A "data X" é qualquer data conveniente da transação.

Poderemos apresentar várias "resoluções" do problema 51.

Resoluções

1ª) Inicialmente, veja a seguinte ilustração:

Poderíamos ficar tentados a afirmar que a dívida é de Cz$ 6.000,00. O valor Cz$ 6.000,00 pode ser tomado como uma referência da dívida, mas do ponto de vista financeiro não podemos considerá-lo como sendo a dívida. Para calcularmos o valor da dívida, deveremos estabelecer uma data-base como referência. A ilustração gráfica sugere a data no instante 0 como sendo a data-base. Segundo o problema 50, vamos determinar os valores equivalentes a Cz$ 1.000,00, a Cz$ 2.000,00 e a Cz$ 3.000,00, segundo a taxa de 12% ao mês. Assim,

valor equivalente a Cz\$ 1.000,00 em D = $\frac{1000}{1,12}$ =
= Cz\$ 892,85;

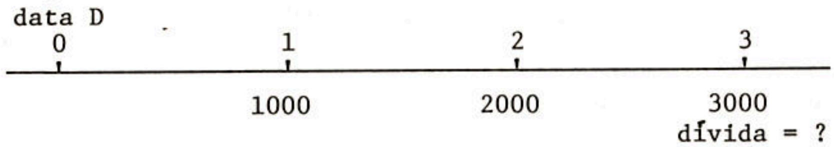
valor equivalente a Cz\$ 2.000,00 em D = $\frac{2000}{1,12^2}$ =
= Cz\$ 1.594,38;

valor equivalente a Cz\$ 3.000,00 em D = $\frac{3000}{1,12^3}$ =
= Cz\$ 2.135,34

Portanto:

$$\text{dívida em D} = \frac{1000}{1,12} + \frac{2000}{1,12^2} + \frac{3000}{1,12^3} = \text{Cz\$ } 4.622,57$$

2ª) Veja a ilustração:



A ilustração sugere que calculemos o valor da dívida no instante 3 (3 meses após D). Repetindo os procedimentos da 1ª resolução, vamos determinar os valores equivalentes às quantias Cz\$ 1.000,00, Cz\$ 2.000,00 e Cz\$ 3.000,00, com relação à taxa de 2% ao mês. Portanto:

valor equivalente a Cz\$ 1.000,00 em 3 = 1.000 x
x $1,12^2$ = Cz\$ 1.254,40;

valor equivalente a Cz\$ 2.000,00 em 3 = 2.000 x
x $1,12^1$ = Cz\$ 2.240,00;

valor equivalente a Cz\$ 3.000,00 em 3 = 3.000 x
x $1,12^0$ = Cz\$ 3.000,00.

Logo:

dívida 3 meses após D = 1.000 x $1,12^2$ + 2.000 x
x 1,12 + 3.000 = Cz\$ 6.494,40

<u>Observações</u>

1ª) Podemos notar que os valores encontrados para a dívida nos instantes 0 e 3 são equivalentes segundo a taxa de 12% ao mês. De fato:

Cz\$ 5.729,70 x $1{,}02^3$ = Cz\$ 6.080,40.

2ª) Foram usadas duas datas para respondermos à questão proposta. Poderíamos ter usado qualquer outra data, como, por exemplo, os instantes 1 ou 2, para o cálculo da dívida.

3ª) O conceito de valores financeiros equivalentes poderá trazer dificuldades, tanto no ensino quanto na aprendizagem; os professores poderiam argumentar que tal conceito é inviável de ser ministrado no 2º grau, porém tal conceito poderá ser fundamental para um entendimento melhor, por exemplo, do que ocorre com financiamentos e aberturas de crediários.

Equações de Equivalência. Anuidades

Problema 52

A Sr. Célia comprou uma "lavadora de louças" por Cz\$ 120,00 numa certa data D. O vendedor propôs um financiamento daquela quantia para que a dívida pudesse ser paga em duas parcelas iguais: a primeira, 1 mês após D e, a segunda, 2 meses após D. A taxa de juros compostos combinada foi de 15% ao mês. Qual foi o valor de cada parcela paga pela Sra. Célia?

Resoluções

Apresentaremos 4 resoluções:

1ª) veja a representação gráfica seguinte:

0	1	2
120,00	P	P

O valor de cada prestação = 120,00 : 2 = = Cz\$ 60,00;

2ª) como existia uma taxa de juro de 15% ao mês, 2 meses após a data D, o valor da dívida era igual a 120,00 x $1{,}15^2$ = Cz\$ 158,70.

O valor de cada prestação = 158,70 : 2 = Cz\$ 79,35;

3ª) assim como na 2ª resolução, levando em conta que existia uma taxa de juro de 15% ao mês, vamos determinar os valores equivalentes a cada uma das prestações, tomando como data-base o momento da formação da dívida (data D, ou instante 0).

$$\begin{array}{l}\text{valor equivalente à} \\ \text{1ª parcela P, em D}\end{array} = \frac{P}{1,15}$$

$$\begin{array}{l}\text{valor equivalente à} \\ \text{2ª parcela P, em D}\end{array} = \frac{P}{1,15^2}$$

Assim como as prestações que foram pagas 1 mês e 2 meses após D saldaram a dívida, os valores equivalentes às mesmas prestações na Data D saldariam a dívida na data D. Isto é:

$$\frac{P}{1,15} + \frac{P}{1,15^2} = 120,00 \qquad (1)$$

Resolvendo (1), obtemos: P = Cz$ 73,81.

Observação

A equação (1) é denominada equação de equivalência do financiamento, com relação à data D.

4ª) Vamos imitar a 3ª resolução, porém trabalhando com os valores equivalentes aos valores dados, na data 2 meses após D.

$$\begin{array}{l}\text{valor equivalente à} \\ \text{1ª parcela P, em 2}\end{array} = 1,15 \,.\, P;$$

$$\begin{array}{l}\text{valor equivalente à} \\ \text{2ª parcela P, em 2}\end{array} = P;$$

$$\begin{array}{l}\text{valor equivalente à} \\ \text{dívida em 2}\end{array} = 120,00 \times 1,15^2$$

Da mesma forma que na 3ª resolução, os valores equivalentes às prestações no instante 2 saldariam o valor equivalente à dívida no mesmo instante. Obtemos a equação de equivalência:

$$1,15 \,.\, P + P = 120,00 \times 1,15^2 \qquad (2)$$

Resolvendo (2), obtemos: P = Cz$ 73,81.

Comentários sobre as resoluções apresentadas.

1º) A 1ª resolução é a melhor do ponto de vista do comprador, porém, tal resolução foge aos métodos propostos e aceitos na Matemática Financeira. Isto não significa que a transação comercial descrita no problema 52 não possa ser efetivada entre as duas partes. Por exemplo, se houver um certo tipo de vínculo (entendimento) entre o vendedor e o comprador, tendo em vista que o preço Cz$ 120,00 devia conter uma margem de lucro, seria possível que o vendedor se dispusesse a vender o "lava-louças" em duas vezes, sem acréscimo.

2º) A 2ª resolução apresenta a pior opção para o comprador, pois leva em conta a "valorização" da dívida, em relação à taxa de 15% ao mês e não tem o mesmo procedimento na(s) prestação(ões).

3º) Na 3ª e 4ª resoluções, todos os valores envolvidos na transação foram "transportados" para uma mesma data, segundo os valores equivalentes correspondentes, em relação à mesma taxa. Em cada uma delas levou-se em conta o seguinte raciocínio: em qualquer data, a soma dos valores equivalentes às parcelas do financiamento salda o valor equivalente à dívida.

Obtivemos duas equações de equivalência:

$$\frac{P}{1,15} + \frac{P}{1,15^2} = 120,00 \qquad (1)$$

$$1,15 \cdot P + P = 120,00 \times 1,15^2 \qquad (2)$$

O fato de ambas terem dado o mesmo valor para P não é coincidência, pois é possível obter, por exemplo, a equação (2) da equação (1), multiplicando-se ambos os membros de (1) por $1,15^2$.

A equação de equivalência da transação no instante 1 é:

$$P + \frac{P}{1,15} = 120,00 \times 1,15 \qquad (3)$$

e possui a mesma solução que (1) e (2).

4º) Como um vendedor, ou um funcionário de uma financiadora, calcula o valor da prestação P: é quase certo que cada um de nós já teve algum tipo de experiência com crediário em alguma loja e, é quase certo também, que cada um de nós já deve ter percebido que o vendedor, ou funcionário da financiadora, não calcula o valor de cada prestação da maneira como apresentamos nas resoluções 3 e 4 do problema 52.

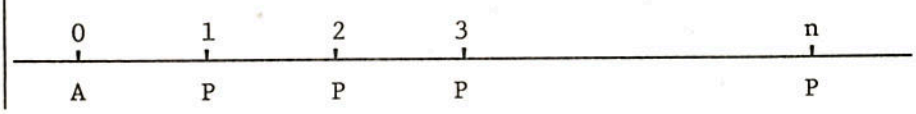
Na realidade, o que o vendedor ou funcionário da financiadora faz é multiplicar o valor a ser financiado (no nosso caso Cz$ 120,00) por um coeficiente conveniente (no nosso caso 0,615116279), consultado em uma tabela.

O que iremos fazer em seguida é mostrar como uma tabela desse tipo é construída, deixando bem claro que tais comentários serão feitos exclusivamente para o professor. O conteúdo matemático para a compreensão do que será feito se resume ao conhecimento a respeito de Progressões Geométricas.

A situação geral pode ser assim resumida:

1ª) valor a ser financiado: A
2ª) taxa de juro (composto) por período: i
3ª) número de parcelas: n
4ª) valor de cada parcela do financiamento: P
5ª) a 1ª parcela será paga 1 período após a data da formação da dívida.

Veja a ilustração seguinte.



Raciocinando da mesma maneira que na 4ª resolução do problema 52, vamos transportar todos os valores envolvidos no problema para o instante n, por meio dos valores equivalentes correspondentes, segundo a taxa i. Teremos, então:

1º) valor equivalente à 1ª parcela P, em n $= P \cdot (1+i)^{n-1}$

2º) valor equivalente à 2ª parcela P, em n $= P \cdot (1+i)^{n-2}$

3º) valor equivalente à 3ª parcela P, em n $= P \cdot (1+i)^{n-3}$

$\vdots$

$n-1$: valor equivalente à $(n-1)$. parcela P, em $n = P \cdot (1+i)^1$

n : valor equivalente à enésima parcela P, em $n = P \cdot (1+i)^0 = P$

$n+1$: valor equivalente à quantia A, em $n = A \cdot (1+i)^n$

Desejamos que:

$$P + P \cdot (1+i) + P \cdot (1+i)^2 + \ldots + P \cdot (1+i)^{n-1}) = \\ = A \cdot (1+i)^n \qquad (1)$$

Vamos resolver a equação (1) tentando mostrar todos os passos:

$$P \cdot (1 + (1+i) + (1+i)^2 \ldots + (1+i)^{n-1}) = \\ = A \cdot (1+i)^n \qquad (2)$$

Anotando conveniente a grandeza $1 + i$ por x, a equação (2) se transforma em:

$$P \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) = A \cdot x^n \qquad (3)$$

Supondo que não há qualquer pré-requisito para o que estamos fazendo, vamos "calcular" a expressão entre parênteses da seguinte maneira:

seja:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} \qquad (4)$$

$$x \cdot S = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n \qquad (5)$$

$$x \cdot S = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}}_{S} + x^n - 1 \qquad (6)$$

$$x \cdot S = S + x^n - 1 \qquad (7)$$

$$x \cdot S - S = x^n - 1 \qquad (8)$$

$$S \cdot (x-1) = x^n - 1 \qquad (9)$$

Se a taxa i é um número positivo, então $x - 1 > 0$ e, portanto:

$$S = \frac{x^{n-1}}{x-1} \qquad (10)$$

Nessas condições (3) se transforma em:

$$P \, \frac{x^{n-1}}{x-1} = A \cdot x^n \qquad (11)$$

Portanto, o valor procurado de P é dado por:

$$P = A \, \frac{x^n \cdot (x-1)}{x^{n-1}} \qquad (12)$$

Voltando com o valor de x em (12), teremos:

$$P = \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad (14)$$

São os valores de $\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, para diversos valores de n e i, é que se encontram tabelados e são consultados em lojas e financiadoras. O quadro seguinte mostra uma parte de uma dessas tabelas.

n \ i	1%	2%	3%	.....	15%	...
1	1,01	1,02	1,03	.....	1,15	...
2	0,50751244	0,51504951	0,52261084	.....	0,61511628	...
3	0,34002211	0,34615467	0,35353036	.....	0,43797696	...
4	0,25628109	0,26262375	0,26902705	.....	0,35026535	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0,10558208	0,11132653	0,11723051	.....	0,19925206	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Problema 53

Calcule o valor de cada prestação se a Sra. Célia financiasse o "lava-louças" em 10 pagamentos mensais e iguais.

Resolução

P = 120,00 x 0,19925206 = Cz$ 23,91

7.7 Geometria

I - FORMAS GEOMÉTRICAS	A. Cubos e paralelepípedos
	B. Prismas e pirâmides
	C. Cilindros e cones
	D. Esferas
	E. Poliedros regulares
II - RELAÇÕES GEOMÉTRICAS	F. Volumes
	G. Semelhança
	H. Inscrição e circunscrição
III - SISTEMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA	I. Linguagem geométrica
	J. Noções de formalização

CONTEÚDO/OBJETIVOS	OBSERVAÇÕES/SUGESTÕES
I. *FORMAS GEOMÉTRICAS* *Reconhecimento, nomenclatura, construção, representação, relações métricas simples.* A. *Cubos e Paralelepípedos.* *Caracterização, nomenclatura, Construção, Utilização da Relação de Pitágoras, Revisão do Cálculo de Áreas.*	1) Na caracterização das FORMAS GEOMÉTRICAS, não se pretende partir de definições, mas sim de objetos concretos, encontrados no dia-a-dia. Pode ser difícil, inicialmente, definir uma pirâmide, embora, se possa reconhecer uma com facilidade. Uma definição caracterizadora representa um ponto de chegada, após um processo de depuração, e não um ponto de partida. A preocupação básica nos contatos iniciais deve ser o reconhecimento das formas mais freqüentes, a familiarização com uma nomenclatura sumária (faces, vértices, arestas, diagonais), a aprendizagem da representação (fazer figuras), da construção e de relações simples envolvendo os elementos componentes. Na seqüência, apresentaremos sugestões de atividades que permitem, aos alunos, contatos com uma série de objetivos defendidos por esta Proposta, os quais acreditamos serem adequados para o ensino de Geometria no 2º grau. Exemplo: com o objetivo de trabalhar detalhadamente o paralelepípedo retângulo, pedir aos alunos trazerem para a sala de aula caixas usadas em embalagens e que acondicionam produtos no comércio. É conveniente que o professor leve várias embalagens das mais variadas formas ou sólidos pré-moldados para este fim (prismas, cones, bancos de pirâmides, pirâmides, cubos, etc.). Inicialmente, os alunos poderão classificar todos esses sólidos geométricos, explicitando os critérios utilizados na composição das classes. Para continuar a atividade, precisaremos da classe dos prismas retos de base retangular (paralelepípedos retângulos ou blocos retangulares). O professor deverá encaminhar as discussões no sentido de evidenciar a classe de sólidos necessários para esta atividade. Deverá, também, fazer comentários mais gerais sobre as demais classes de

sólidos trazidos para a sala de aula, evidenciando seus aspectos geométricos e deixando para outro momento o estudo detalhado, por exemplo, das pirâmides, dos cones, etc.

Manuseando as várias caixas na forma de bloco retangular, os alunos poderão discutir, em pequenos grupos, questões propostas pelo professor, que lhes permitam identificar elementos do paralelepípedo retângulo como: arestas, faces, vértices, ângulos, diedros, polígonos; algumas propriedades métricas como: comprimento de arestas, diagonais, áreas, volume e propriedades geométricas como: paralelismos, perpendicularismos, ortogonalidade, congruências e semelhanças. Nesta fase, o professor poderá estar completando a identificação, com os alunos, das propriedades anteriormente citadas, após os grupos terem se pronunciado sobre elas.

Num diálogo informal para a identificação das características do paralelepípedo, poderão surgir nomes como "lado da caixa" ou "parede da caixa" ou simplesmente "lado" para designar uma face do prisma. Da mesma forma, poderão surgir nomes como "canto" ou "bico" para designar vértices do prisma. A partir desse diálogo, o professor terá oportunidade de informar aos alunos os termos corretos utilizados na geometria.

Após o trabalho informal de identificação dos elementos do paralelepípedo, o professor poderá propor um roteiro de atividades para os alunos. Na sugestão de roteiro, que apresentamos a seguir, procuramos fazer questões que não sejam muito genéricas, o que dificultaria as ações dos alunos, nem muito dirigidas, o que empobreceria a criatividade e intuição deles.

Nessa interação entre o professor e o aluno, por meio de atividades, é conveniente que: as respostas dos alunos sejam regsitradas na lousa, os grupos apresentem cartazes, ou relatórios para servirem de documentos úteis, num painel, com a classe toda, coordenado pelo professor.

Sugestões de roteiro:

1) Quantas e quais são as faces do paralelepípedo retângulo?
2) Quantas arestas possuem esta caixa?
3) Quantos vértices possuem esta caixa?
4) Contar o número de arestas e o número de faces que compõem cada vértice.
5) Tentar determinar relações entre o número de vértices, faces e arestas do paralelepípedo retângulo.
6) Que nomes vocês dariam aos segmentos que ligam dois vértices quaisquer desse prisma?
7) Identificar um triângulo formado por diagonais de faces desse paralelepípedo.
8) Identificar nesse prisma um triângulo formado pela sua diagonal, uma diagonal de face e uma de suas arestas. Esse triângulo é de que tipo?
9) Identifique neste prisma duas arestas paralelas, duas arestas perpendiculares, duas arestas reversas e duas arestas ortogonais.
10) Desenhe uma planificação deste paralelepípedo. se necessário, desmonte a caixa para esse exercício. É possível fazermos planificações distintas? Quais?

No final, o professor poderá coordenar um painel, para que os vários grupos comparem suas respostas e "as arestas sejam aparadas".

Em seguida, retome as outras embalagens em forma de cone, cilindro, prismas de bases não retangulares, pirâmides, troncos de pirâmides, etc., e proponha a identificação, a princípio informalmente, de algumas características métricas e geométricas desses sólidos geométricos. Um trabalho específico com cada um desses sólidos poderá ser desenvolvido ao longo do 2º grau, sempre utilizando um roteiro de atividade que facilite o trabalho do aluno na busca da compreensão das características desses sólidos. Peça aos alunos que identifiquem vértices, arestas e faces no cilindro, no cone, tronco de cone e esfera. Poderiam ser identificados, ainda, elementos como altura da pirâmide, de cone, de raios, etc. Neste momento, estamos mais preocupados com as propriedades geométricas desses sólidos. O destaque para as propriedades métricas, bem como as suas algebrizações ficarão para um momento posterior.

2) É muito importante construir sólidos geométricos. Inicialmente, a construção pode ser feita a partir de especificações simples: construir um cubo qualquer ou então construir um cubo de aresta 5 cm. Verificar que quantidade de cubos de aresta 5 cm cabe dentro de um cubo de aresta 10 cm. Aos poucos, à medida que os conhecimentos sobre relações métricas vão avançando, a construção pode ter uma complexidade maior: construir um cubo de área 720 cm^2, ou de volume 2 ℓ, ou de diagonal 10 cm.

Caso o professor proponha a construção de sólidos geométricos, é conveniente trabalhar a construção, com régua e compasso, dos principais polígonos. A seguir, daremos algumas sugestões de polígonos úteis na composição dos sólidos geométricos, que deverão ser construídos com régua e compasso:

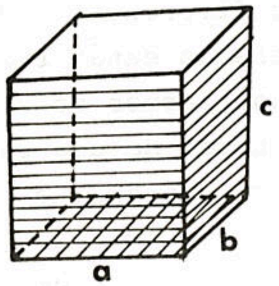
a) triângulo eqüilátero; quadrado; retângulo que não seja quadrado; hexágono regular; pentágono regular. O professor poderá preestabelecer as medidas desses polígonos.
b) o quadrado de área 100 cm^2; o quadrado de perímetro 30 cm; um retângulo de área 120 cm^2; um paralelogramo não-retângulo de lados 8 cm e 15 cm; um paralelogramo não-retângulo de base 10 cm e altura 6 cm; um paralelogramo não-retângulo de base 10 cm, altura 6 cm e um dos ângulos

medindo 60^{o}; um quadrado cuja diagonal mede 20 cm; um retângulo não-quadrado cujas diagonais medem 20 cm; um retângulo cuja diagonal mede 15 cm e um dos seus lados 12 cm; um paralelogramo cujas diagonais medem 10 cm e 14 cm; um paralelogramo cujas diagonais medem 10 cm e 14 cm e um dos seus ângulos mede 60^{o}; um paralelogramo de diagonais 10 cm e 14 cm, e um ângulo entre elas medindo 120^{o}; um losango cujos lados medem 8 cm; um losango de lados 8 cm e um desses ângulos medindo 45^{o}; um losango de área 120 cm^2; um losango de diagonais 20 cm e 12 cm; um hexágono regular de lados 5 cm; um octógono regular.

c) utilize as figuras construídas para determinar, por meio de instrumentos ou através de cálculos, as alturas, os ângulos, as diagonais e as áreas delas. O que dizer de alturas de losango, retângulo, quadrado e hexágono?

Assim, o aluno pode trabalhar com propriedades geométricas e métricas de figuras planas que compõem os sólidos geométricos. Em seguida, poderemos retomar o estudo desses sólidos.

A partir das medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo podemos calcular o seu volume (medida da sua capacidade) e sua área total (medida da quantidade de materiai necessário para a sua construção). O conceito de volume poderá ser caracterizado como uma pilha de retângulos idênticos de área conhecida . Assim, o valor deste volume será a área desse retângulo multiplicada pela altura do paralelepípedo.



Volume = área retângulo x altura

Área do retângulo = a . b

Altura = c

Volume = a . b . c

Já a área total do paralelepípedo é o somatório das áreas das suas faces que são retângulos, ou seja: Área = 2(ab + bc + ac).

Depois de medir ou calcular a área total e o volume de várias "caixas paralelepípedas", podemos propor também a utilização dessas mesmas relações no sentido inverso. A proposta consta em encontrar paralelepípedos de volume conhecido, por exemplo 400 cm^3. Da mesma forma, poderemos procurar paralelepípedos de área total conhecida, por exemplo 600 cm^2. Nestas soluções poderemos ainda preestabelecer algumas das medidas desse prisma reto-retângulo ou não. Assim poderemos ter solução única para este problema ou não.

O professor poderá fazer uma tabela na lousa. Aqui vai um exemplo (medidas em centímetros).

a	b	c	Área	Volume
10	8	5		400
20	4	5		400
2	20	10		400
10	10	4		400
10	15	6	600	
10	8	90/11	600	
8	12	10,2	600	
6	14	10,8	600	
10	10	10	600	

Com esses cálculos, o professor poderá concluir com os alunos, que prismas de mesmo volume tem áreas totais diferentes e vice-versa.

Esses problemas estão relacionados com a necessidade de economizarmos material. Por exemplo, propor a construção de uma caixa em forma de paralelepípedo, de volume dado e com o mínimo de material possível, e reciprocamente, fixado o material a ser utilizado, obter uma caixa com a for ma de bloco retangular, de volume máximo.

Esses problemas terão várias soluções, do ponto de vista prático. Do ponto de vista teórico, teremos muita dificuldade em otimizar as soluções desses problemas com as ferramentas matemáticas até então disponíveis aos alunos do 2º grau. As soluções maximizadas ou minimizadas, nestes casos, dependem do conhecimento de derivadas de primeira e de segunda ordem. Assim, a solução ótima deverá estar apoiada na observação intuitiva e na comparação das várias soluções encontradas pelos próprios alunos.

Como estratégia, os resultados obtidos poderão ser colocados numa tabela, onde aparecem as dimensões do bloco retangular, o volume e a área do material a ser empregado na sua construção, como a seguinte:

Largura x	Comprimento y	Altura z	Área A	Volume V

Num trabalho mais genérico com as três dimensões e o equacionamento do cálculo de áreas e volumes dos prismas, poderemos explicitar para os alunos as funções de várias variáveis que medem área $A = 2(xy + yx + xz)$ e o volume $V = xyz$, do paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

Por exemplo: construir um paralelepípedo retângulo de 30 cm^3 de volume, com o mínimo possível de cartolina.

Suponha que os alunos tenham experimentado algumas medidas para altura, comprimento e lar gura do prisma, de tal forma que o produto delas seje 30 (ou "muito próximo" de 30), formando a tabela seguinte:

Comprimento	Largura	Altura	V (cm^3)	A (cm^2)
2	3	5	30	62
1	1	30	30	122
1	2	15	30	94
2	2	7,5	30	68
3,5	5	$\cong$ 1,7142	30	64,13
2,5	2,5	4,8	30	60,50
$\sqrt[3]{30} \cong 3{,}1072$	3,1072	3,1072	30	57,93
3	3	3,33...	30	58

Da observação desses dados, pode-se concluir que precisamos de um pouco menos de 60 cm^2 de cartolina.

Em cada turma de alunos poderão ocorrer tabelas diferentes. Assim, a classe assumirá como solução ótima a menor área encontrada, mesmo que acidentalmente ou pesquisará novas soluções a partir dos dados da sua tabela, ou ainda, o professor poderá encaminhar os alunos para a melhor solução (o cubo de aresta $\sqrt[3]{30}$ cm).

Esse encaminhamento para obter a "melhor solução" poderá ser feito da mesma forma que apresentamos nos itens "Potências e Expoentes" e "Matemática Financeira", nesta Proposta Curricular.

Vamos supor, então, que a forma cúbica não tenha surgido nas investigações dos alunos.

Um diálogo especulativo, do tipo seguinte, poderá ser proposto.

Professor: "Percebo que todos os blocos que vocês investigaram têm dimensões distintas. Será que há algum bloco retangular que satisfaça as condições do problema e ainda por cima tenha todas as dimensões iguais?"

Aluno: "Se existir, ele deverá satisfazer a seguinte condição: o produto das três dimensões é igual a 30."

Professor: "Como fica a equação dessas condições?"

Aluno: "Comprimento x largura x altura = = 30, com comprimento = largura = altura."

Professor: "Muito bem! Agora nosso problema se transfere para outro campo do conhecimento em Matemática. Deveremos investigar a possibilidade de encontrarmos um número que irá representar a medida das três dimensões iguais do bloco que procuramos, cujo produto, dele por ele mesmo, três vezes, dá como resultado o número 30.

Note que saímos do âmbito da Geometria e recaímos no âmbito da Aritmética."

Aluno: "Como poderemos determinar esse número?"

Professor: "Investiguemos! Para isso, poderemos confeccionar uma tabela de números que multiplicados por si mesmos dêem como resultados números próximos de 30 e continua mos, sempre que possível, 'melhorando' nossas investigações. Vamos começar com algum 'chute'."

Aluno: "Eu proponho 2."

Professor: "Muito bem, mas é pouco, pois 2 x 2 x 2 = 8, que é menor que 30."

Aluno: "O número 3!"

Professor: "Também é pouco, pois 3 x 3 x 3 = 27, menos que 30."

Aluno: "O número 4."

Professor: "4 x 4 x 4 = 64, maior que 30. O número 4 é 'grande' e o número 3 é 'pequeno'. A tabela seguinte procura obter o número desejado.

Pesquisa de uma discussão	Dimensão x Dimensão x Dimensão	Conclusão
3,5	3,5 x 3,5 x 3,5 = 42,875	dimensão < 3,5
3,1	3,1 x 3,1 x 3,1 = 29,791	dimensão > 3,1
3,2	3,2 x 3,2 x 3,2 = 32,768	dimensão < 3,2
3,15	3,15 x 3,15 x 3,15 = 31,255875	dimensão < 3,15
3,13	3,13 x 3,13 x 3,13 = 30,664297	dimensão < 3,13
3,12	3,12 x 3,12 x 3,12 = 30,371328	dimensão < 3,12
3,11	3,11 x 3,11 x 3,11 = 30,080231	dimensão < 3,11
3,105	3,105 x 3,105 x 3,105 = 29,93538262	dimensão > 3,105
3,107	3,107 x 3,107 x 3,107 = 29,99326604	dimensão > 3,107
3,109	3,109 x 3,109 x 3,109 = 30,05122403	dimensão < 3,109
3,108	3,108 x 3,108 x 3,108 = 30,02223571	dimensão < 3,108
3,1075	3,1075 x 3,1075 x 3,1075 = 30,00774855	dimensão < 3,1075
3,1073	3,1073 x 3,1073 x 3,1073 = 30,00195499	dimensão < 3,1073
3,1071	3,1071 x 3,1071 x 3,1071 = 29,99616217	dimensão > 3,1071
3,1072	3,1072 x 3,1072 x 3,1072 = 29,99905849	dimensão > 3,1072
3,10725	3,10725 x 3,10725 x 3,10725 = 30,00050671	dimensão < 3,10725
3,10723	3,10723 x 3,10723 x 3,10723 = 29,99992742	dimensão > 3,10723

Os cálculos que constam na tabela foram obtidos por meio de uma calculadora.

Professor: "O que podemos concluir dessa tabela que estamos construindo e ainda não terminamos?"

Aluno: "???"

Professor: "Será que existe um número que vou representar pela letra x, tal que $x \cdot x \cdot x = 30$? Ou será que existe número x tal que $x^3 = 30$?"

Aluno: "???"

Professor: "Vocês acreditam que existe uma caixa em forma de bloco retangular, com todas as dimensões iguais (cubo), que pode conter, por exemplo, 30 cm^3 de farinha de trigo?"

Aluno: "Nisso é até possível acreditar. O que parece ser difícil de acreditar é na existência de um número x tal que $x \cdot x \cdot x = 30$."

Professor: "Então, acreditando na existência dessa caixa cúbica, poderíamos acreditar na existência daquele número, pois aquele número, se existir, deverá ser a medida das 3 dimensões da caixa. Vou pedir a vocês que acreditem no seguinte fato: existe um número que multiplicado por si mesmo, 3 vezes, reproduz o número 30. Não vou e ninguém vai conseguir exibir para vocês esse número. O que podemos fazer é determinar um valor para a dimensão da caixa cúbica de tal forma que ao calcularmos o seu volume, o valor que encontrarmos seja "muito próximo" de 30. Por exemplo, poderíamos usar, para construir a caixa, a medida 3,1 cm, o que nos daria volume da caixa igual a 29,791 cm^3. Como gostaríamos que a caixa contivesse pelo menos 30 cm^3, poderíamos usar como dimensão da caixa a medida 3,15 cm. Nessas condições, o volume seria 31,26 cm^3, aproximadamente, que é uma solução mais adequada do que 3,1 cm.

No processo histórico do desenvolvimento matemático, tais números surgiram e pessoas sentiram necessidade de usar um símbolo para representá-los. Tal símbolo é o seguinte: $\sqrt[3]{30}$.

Esse símbolo é lido: "raíz cúbica de 30". Vocês precisam saber que o símbolo $\sqrt[3]{30}$ não é o número que estávamos procurando, mas apenas uma representação daquele número, em cuja existência pedimos para vocês acreditarem. Se vocês entenderam o que foi colocado, qual será o resultado da seguinte operação:

$$\sqrt[3]{30} \times \sqrt[3]{30} \times \sqrt[3]{30} \quad ?"$$

Alunos: "30."

Professor: "Por quê?"

Aluno: "Porque o símbolo $\sqrt[3]{30}$ está representando um número que multiplicado por si mesmo, 3 vezes, dá como resultado o número 30."

Professor: "Certo! O que significa a frase: $\sqrt[3]{30} = 3{,}10723$?"

Alunos: "???"

Professor: "O que encontramos na tabela, quando calculamos 3,10723 x 3,10723 x 3,10723?"

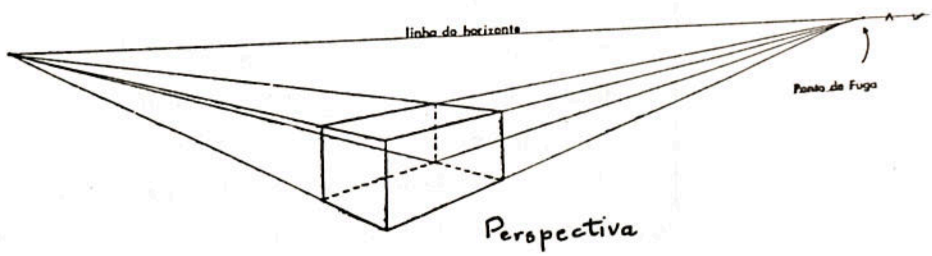
Aluno: "29,99992742"

Professor: "Logo ...?"

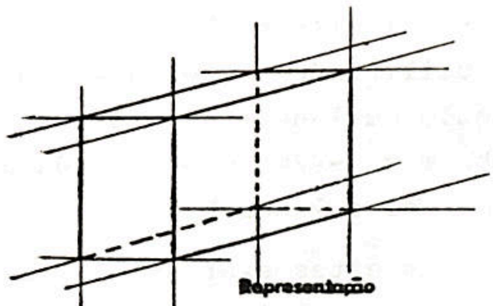
Professor: "Logo, $\sqrt[3]{30} = 3{,}10723$ significa uma 'aproximação' para o número representado pelo símbolo $\sqrt[3]{30}$."

3) À medida que se constrói um objeto, aprende-se a distinguir nele os elementos fundamentais que caracterizam sua forma, ao mesmo tempo em que podem ficar explicitadas relações entre seus elementos, os quais contribuem para a aprendizagem de sua representação no plano, de seu desenho. O processo de aprendizagem de GEOMETRIA deve incluir não somente o reconhecimento das formas, como também, idéias sobre como representá-las, a fim de que se possa viabilizar a construção de acordo com um projeto.

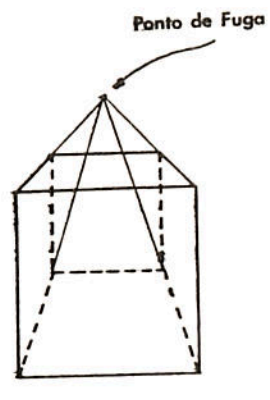
Sugerimos que sejam reproduzidos para os alunos, na lousa ou em folhas mimeografadas, alguns exemplos de representações planas de paralelepípedos, utilizando paralelismos ou perspectiva. As representações em perspectiva, utilizando a "linha do horizonte" e os "pontos de fuga" previamente determinados, por aproximação (o ideal seria obtê-los utilizando um teodolíto), darão às representações dos prismas o "toque real" da fotografia desses sólidos, apesar de que as representações, por paralelismos, são excelentes recursos didáticos no estudo dos sólidos geométricos. Esses exercícios de representação de sólidos são fundamentais no estudo da geometria, compondo a fase intermediária entre o mundo real dos objetos e o estudo formal das propriedades geométricas e métricas desses sólidos.



Perspectiva



Representação
por Paralelismos



Representações Planas de
Paralelepípedo retângulo

4) Lidar com cubos e paralelepípedos favorece aplicações significativas da relação de Pitágoras.

Retomando a manipulação de um paralelepípedo retângulo (embalagens comerciais), os alunos em grupo poderiam discutir as seguintes questões:

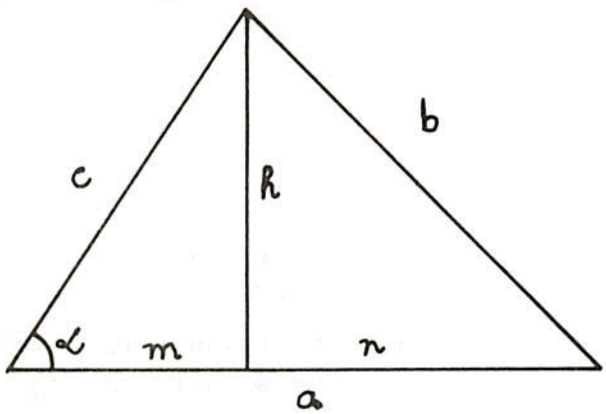
1. Medir as dimensões deste paralelepípedo.
2. Medir as 3 diagonais das faces deste prisma.
3. Calcular as mesmas diagonais anteriores, utilizando as medidas do prisma e o teorema de Pitágoras. Compare estes cálculos com as medidas das diagonais efetuadas no item anterior.
4. Medir e calcular a diagonal do paralelepípedo (a medida pode ser feita utilizando-se um fio de barbante, por exemplo, que atravesse o prisma ou um paquímetro).
5. Construir, com régua, esquadro e compasso, um triângulo definido pela diagonal desse prisma, uma diagonal de face e uma aresta. Essa construção deverá ter medidas proporcionais às medidas obtidas nas questões anteriores.
6. Medir, com transferidor, e calcular os ângulos do triângulo anterior, utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo.
7. Construir um triângulo semelhante ao triângulo definido pelas diagonais das faces deste prisma.
8. Medir e calcular os ângulos do triângulo anterior, utilizando a "lei dos cossenos" para um triângulo qualquer, de lados a, b, c, na forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, onde α é o ângulo definidos pelos lados b e c.

Após estes exercícios fica a curiosidade de se justificar minimamente como surgiu a Lei dos Cossenos para todos os triângulos. Nesta fase do ensino de Matemática no 2º grau, propomos que seja encaminhada uma demonstração algébrica dessa relação. Antes disso encaminharemos a pesquisa dos ângulos de um triângulo, conhecendo seus lados, a partir de situações particularizadas envolvendo triângulos acutângulos.

<u>1ª situação</u>

Calculando: obtenha o ângulo definido pelos lados 8 cm e 6 cm de um triângulo, cujo lado oposto a esse ângulo vale 7 cm.

Considerando uma das alturas opostas ao ângulo desejado, por exemplo a altura relativa ao lado 8 cm e as relações trigonométricas no triângulo retângulo, podemos equacionar o problema proposto da seguinte forma:



$a = 8$ cm
$b = 7$ cm
$c = 6$ cm

$$\begin{array}{ll} a = m + n \\ c^2 = m^2 + h^2 \\ b^2 = n^2 + h^2 \\ m = c \cdot \cos\alpha \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lr} 8 = m + n & (1) \\ 36 = m^2 + h^2 & (2) \\ 49 = n^2 + h^2 & (3) \\ m = 6 \cdot \cos\alpha & (4) \end{array}$$

Fazendo (3) menos (2) teremos uma quinta relação: $13 = n^2 - m^2$. Comparando essa relação com a primeira teremos o valor de m. Assim,

$$13 = (18 - m)^2 - m^2 \Longrightarrow m = \frac{51}{16}$$

Retomando a quarta relação temos,

$$\frac{51}{16} = 6 \cdot \cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha \cong 0{,}53125$$

onde $\alpha \cong 57{,}91^{\circ}$ (com auxílio de calculadora).

Meça o ângulo α com o transferidor num triângulo semelhante ao triângulo dado e compare essa medida com aquela obtida no cálculo anterior.

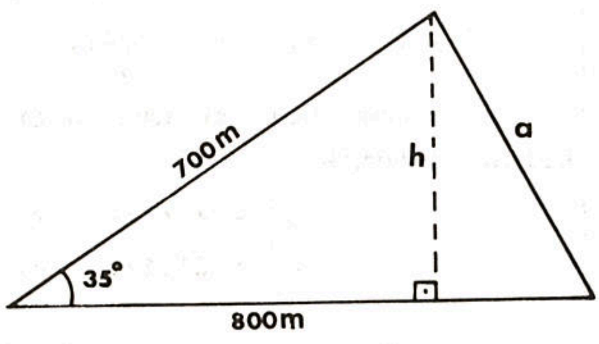
2ª situação

Duas pessoas caminham juntas por uma cidade. A partir de um determinado instante, na Praça Cristal, essas duas pessoas passam a caminhar em duas ruas retas que formam um ângulo de 35^o. Após algum tempo, uma das pessoas estava a 800 m da Praça e a outra pessoa estava a 700 m da mesma praça. Gostaríamos de saber a distância entre essas pessoas neste instante.

Uma resposta seria 1500 m, e o problema estará resolvido. Mas, gostaríamos de saber a distância entre elas se pudessem caminhar sobre a linha reta definida pelas suas posições neste instante.

Uma primeira solução com uma boa aproximação, poderia ser obtida com a construção de um triângulo proporcional ao triângulo do problema, cujos lados valem 700 m e 800 m, e o ângulo de 35^o entre esses lados. Nessa mesma proporção, podemos medir o terceiro lado desse triângulo e encontraremos uma distância de aproximadamente 450 m.

$a \cong 450$ m



Utilizando as relações métricas nos triângulos retângulos definidos pela altura h relativa ao lado 800 m, obtemos o seguinte sistema de equações não lineares:

$$m + n = 800 \qquad (1)$$
$$m^2 + h^2 = 700^2 \qquad (2)$$
$$n^2 + h^2 = a^2 \qquad (3)$$
$$\cos 35^\circ = \frac{m}{700} \qquad (4)$$

Poderíamos, ainda, equacionar o mesmo pro blema a partir da altura relativa ao lado 700 m. Se ria útil também equacionar este problema a partir da altura relativa ao lado a desconhecido?

Para encontrar o valor do lado desconheci do temos que resolver o sistema anterior de 4 equa ções e 4 incógnitas. Vamos tentar resolvê-lo para "substituições convenientes" entre variáveis.

Assim, subtraindo a equação (3) da equa - ção (2), teremos:

$$(m^2 + h^2) - (n^2 + h^2) = 700^2 - a^2$$

$$m^2 - n^2 = 700^2 - a^2 \qquad (5)$$

A relação (4) poderá ser transformada em:

$$m = 700 \ . \cos 35^\circ$$
$$m \cong 573,41 \qquad (4)$$

Substituindo convenientemente (1) e (4) em (5), teremos:

$$m^2 - (800 - m)^2 = 700^2 - a^2$$
$$573,41^2 - (800 - 577,41)^2 = 700^2 - a$$

Com apoio de uma calculadora simples de bolso, obtemos:

$$a^2 = 490000 + 51343 - 328799$$
$$a^2 = 212544 \Longrightarrow \boxed{a = 461 \text{ m}}$$

Esta resposta obtida algebricamente é "mui to próxima" da resposta 450 m obtida inicialmente através da medida no triângulo semelhante construí do com régua e compasso.

Faz parte da metodologia defendida nesta Proposta, a comparação de resultados obtidos por medições e construções geométricas "precisas" (dentro da precisão possível numa sala de aula da escola pública) com resultados obtidos algebricamente. Cabe ao professor incentivar tais alunos na busca dessas várias soluções, mesmo que para isso seja necessária a utilização de maior tempo na abordagem dos problemas e a desconfortável utilização de material de desenho geométrico. O lucro surge com a vinculação das "abstrações e equacionamentos algébricos" às "representações geométricas" do mundo físico. Isso facilita ao aluno a leitura geométrica da realidade e amplia suas estratégias de nela interferir, aumentando as possibilidades de concretizações das abstrações geométricas, facilitando a aprendizagem para a maioria dos alunos que não serão certamente geômetras, mas, como cidadãos, poderão se utilizar dela.

Em busca da demonstração algébrica da Lei dos Cossenos, podemos resolver este mesmo sistema não linear de equações (utilizando fatorações e substituições de variáveis convenientes), dando ao aluno, pistas do formato que se deva imprimir a essas relações. Assim procederemos:

$$m + n = 800 \Longrightarrow m^2 + n^2 + 2mm = 800^2 \quad (1)$$
$$m^2 + h^2 = 700^2 \quad (2)$$

Adicionando (1) com (2) temos a relação (5): $2m^2 + m^2 + 2mn + h^2 = 800^2 + 700^2$

$$n^2 + h^2 = a^2 \quad (3)$$

Agora substituindo (3) em (5):

$$2m^2 + 2mm + a^2 = 800^2 + 700^2$$

de onde

$$a^2 = 800^2 + 700^2 - 2mn - 2m^2$$

$$a^2 = 800^2 + 700^2 - 2m\ (m + n)$$

$$a^2 = 800^2 + 700^2 - 2mb$$

Mas, da relação (4) do sistema m = 700 . . cos 35° e b = 800, assim

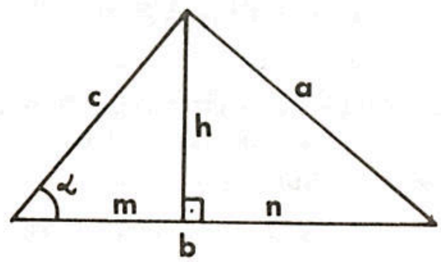
$$a^2 = 800^2 + 700^2 - 2 \cdot 700 \cdot \cos 35^{o} \cdot 800$$

$$a^2 = 800^2 + 700^2 - 2 \cdot 800 \cdot 700 \cdot \cos 35^{o}$$

Esta relação tem a forma da Lei dos Cossenos que genericamente é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Esta relação genérica, válida para qualquer triângulo, poderá, agora, ser obtida pelas transformações convenientes aplicadas sobre o sistema a seguir, que estão associado a um triângulo acutângulo qualquer. Com adequações, poderemos estender essa demonstração aos triângulos obtusângulos.

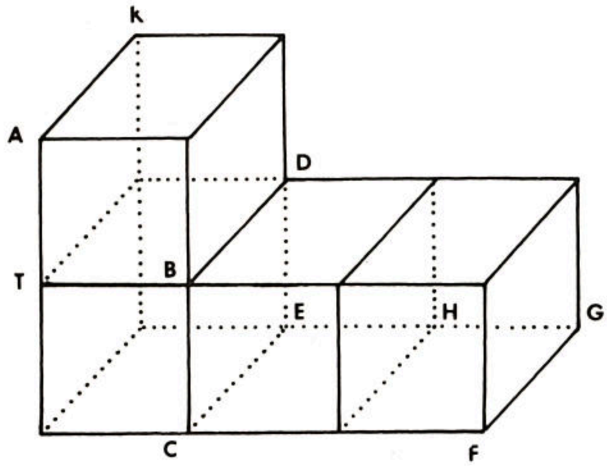


$$m + n = b$$
$$h^2 + n^2 = a^2$$
$$h^2 + m^2 = c^2$$
$$= m \cdot \cos \alpha$$

O professor poderá coordenar as ações dos alunos no sentido de que eles possam, de novo, percorrer o caminho da demonstração formal da Lei dos Cossenos.

As substituições convenientes poderá estabelecer uma relação entre os lados do triângulo e um ângulo compreendido entre dois desses lados. O desafio consiste em escrever o lado oposto ao ângulo preestabelecido em função dos outros dois la dos e o cosseno deste ângulo. Para tal é necessário eliminar das relações dadas as variáveis m, n e h.

Continuando a trabalhar com representações planas de sólidos geométricos, e com o objetivo de aplicar o teorema de Pitágoras no espaço passaremos ao cálculo de diagonais e de distâncias entre pares de vértices de diversos cubos iguais empilhados.

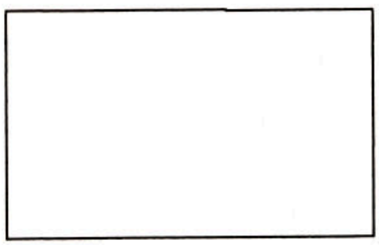


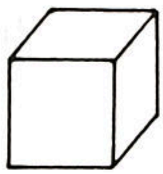
Calcule as distâncias entre: A e B; F e H; A e C; C e G; A e D; B e H; A e E; B e G; A e H; etc.

Podemos, ainda, obter os ângulos de vértices T nos triângulos KTB, KTC e KTF, utilizando a Lei dos Cossenos.

Um outro exemplo com certo conteúdo de provocação é o seguinte:

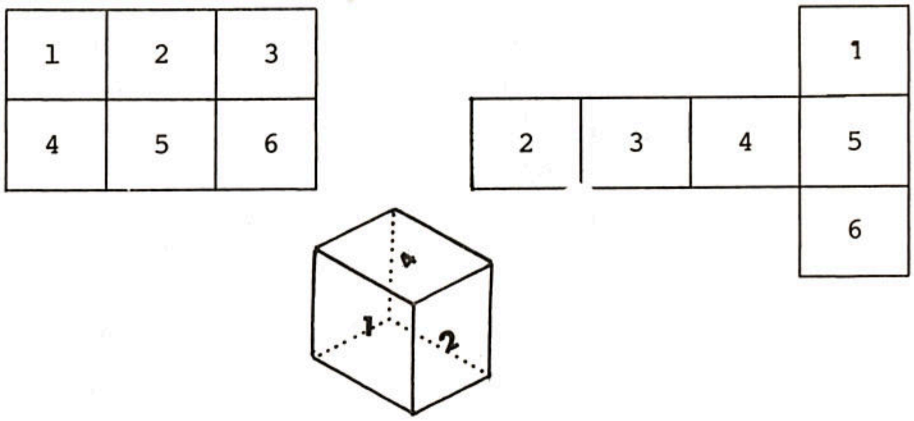
"É possível construir um cubo de volume 1ℓ com uma folha comum de papel sulfite?"





1ℓ ($1\ dm^3$)

Como as dimensões normais de uma folha de papel sulfite são 21,5 cm por 31,5, sua área é maior que 600 cm^2 e, conseqüentemente, é possível construir o cubo.



Ainda, com o objetivo de estudarmos relações da geometria plana e espacial, conjuntamente, vamos propor uma situação.

Estão num canto do teto de uma sala em forma de "bloco retangular" de dimensões 6 m (largura), 10 m (comprimento), 4 m (altura), uma abelha e uma formiga. No canto oposto desta sala no chão, está um doce-de-leite. Supondo que essa abelha e essa formiga adoram doce-de-leite, achar o menor caminho que a abelha e a formiga procurarão fazer para atingirem o doce-de-leite.

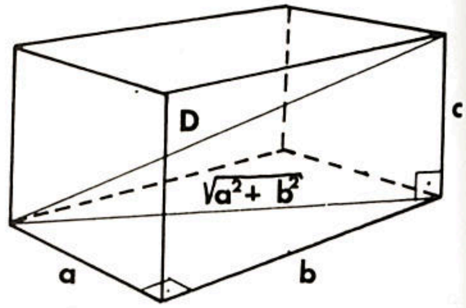
A discussão do problema poderá se apoiar em "modelos" como as próprias salas de aula, que em geral têm a forma de paralelepípedo retângulo, ou mesmo em um sólido geométrico desta forma, com dimensões proporcionais à sala em que estão a abelha e a formiga. Serão úteis também as representações planas de paralelepípedos retângulos e as planificações destes sólidos geométricos como suporte concreto na discussão dessas questões.

A solução para a abelha surge rapidamente, com o cálculo da diagonal do prisma, pois a abelha pode voar. Cabe aqui uma discussão sobre a utilização do Teorema de Pitágoras duas vezes na obtenção da diagonal desta sala. Neste caso, uma diagonal de face, que foi obtida por esse teorema, passa a ser o cateto no cálculo da diagonal da sala. Assim o caminho da abelha pode ser calculado por $\sqrt{6^2 + 10^2 + 4^2} \cong 12,33$ m.

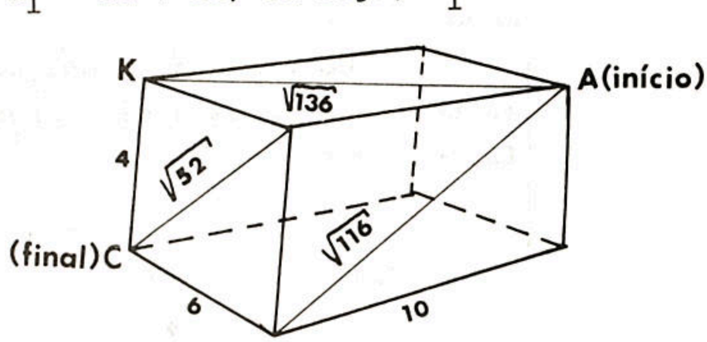
Genericamente, o cálculo da diagonal de qualquer prisma desta forma será:

$$D^2 = c^2 + (\sqrt{a^2 + b^2})^2$$

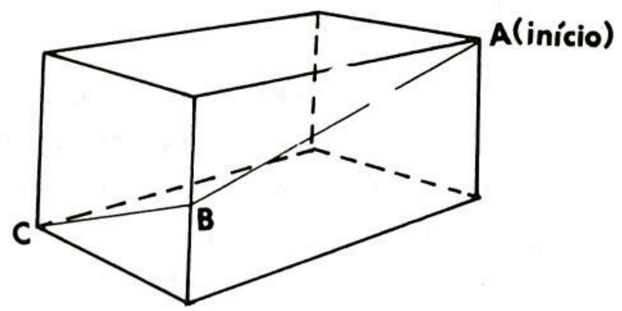
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



A obtenção do caminho da formiga passa pela única possibilidade que este inseto tem de caminhar pelas paredes da sala, faces do prisma, ou pelas arestas deste. Peça aos alunos que pensem em soluções para o caminho da formiga. É possível que de início eles proponham caminhos equivalentes, utilizando apenas as arestas do prisma. Faça o cálculo desses caminhos. Em seguida, os alunos costumam sugerir que o menor caminho é uma combinação de uma diagonal de face (inclusive o teto) e uma aresta. Nesta combinação de diagonal e aresta existem três possibilidades distintas. É interessante calculá-las para se determinar a menor delas. Esses caminhos valem aproximadamente $d_1 = 15,66$ m; $d_2 = 16,77$ m e $d_3 = 17,21$ m, pois, por exemplo, o caminho $d_1 = AK + KC$, ou seja, $d_1 = \sqrt{136} + 4 \cong 15,66$ m.



Porém esses não são os caminhos menores para a formiga. Incentive os alunos a procurar caminhos que passam somente pelas faces, sem usar as arestas. Assim poderá surgir um caminho utilizando duas faces, como no esquema seguinte:

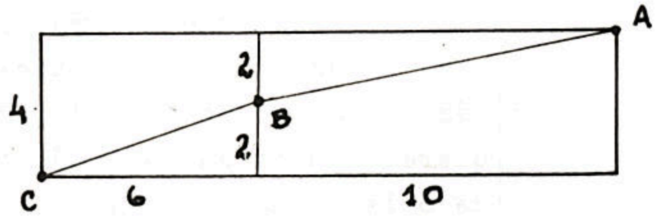


Escolhendo, por exemplo, o ponto B da trajetória da formiga, como ponto médio de uma aresta de medida 4 m, temos o caminho $d_4 = AB + BC$. Apoiando-se sobre a planificação das duas faces, suporte deste caminho, temos:

$$AB = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$AB = \sqrt{4 + 100} \cong 10{,}20 \text{ m}$$

$$BC = \sqrt{4 + 36} \cong 6{,}32 \text{ m}$$

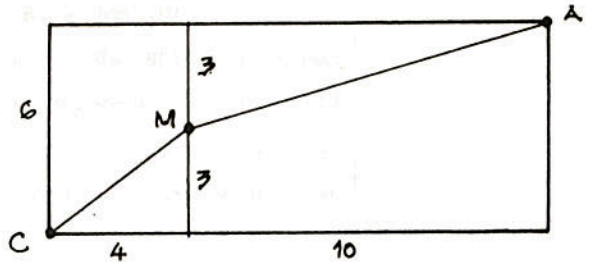


Assim, o caminho $d_4 = AB + BC \cong 16{,}52$ m, ainda maior que o caminho d_1. Será o caminho d_1 o menor deles?

Continuando a pesquisa de caminhos, somente pelas faces e não arestas. Em outras duas faces temos:

$AM \cong 10,44$ m

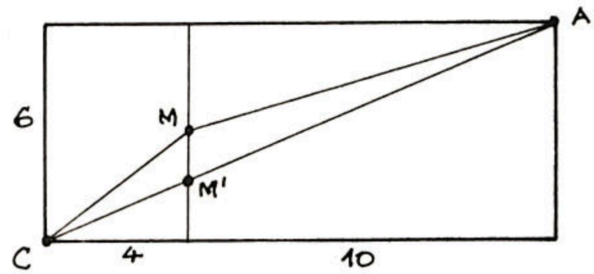
$MC = 5$



Assim, o caminho $d_5 = AM + MC \cong 15,44$ m é o menor de todos até agora pesquisado. Será que se os pontos AMC fossem alinhados não teríamos um caminho d_6 menor que d_5? De fato, calculemos o caminho AM'C sobre as faces $6 \cdot y$ e $6 \cdot 10$.

$d_6 = AM' + M'C = AC$

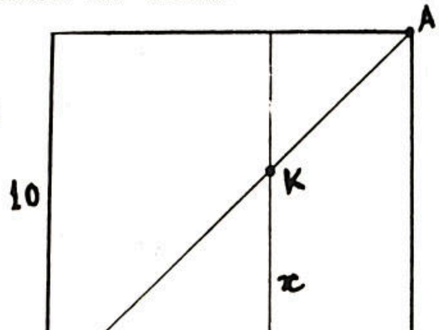
$d_6 = \sqrt{14^2 + 6^2} \cong 15,23$ m



Será que a composição das duas outras faces, ainda não consideradas, não daria uma solução melhor? Pois é, é a matemática do dia-a-dia querendo otimizar soluções! E, parece que aqui no caso isso não tem fim. Parece até mágico tirando coelho e mais coelhos da cartola! Continuemos. Agora utilizando outras duas faces da sala.

$d_7 = AK + KC = AC$

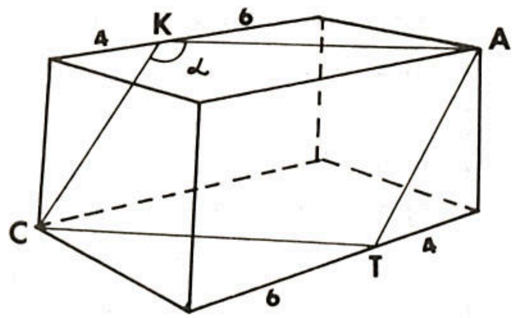
$d_7 = \sqrt{10^2 + 10^2} \cong 14,14$ m



Parece que a melhor solução se dará quando a formiga caminhar em linha reta pelas faces 10 x 6 e 10 x 4. Poderá surgir aqui o interesse em determinar a posição do ponto K. Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{x}{10} = \frac{6}{10} \Longrightarrow \quad x = 6 \text{ m}$$

Neste ponto K a formiga irá cruzar uma das arestas que mede 10 m desta sala.



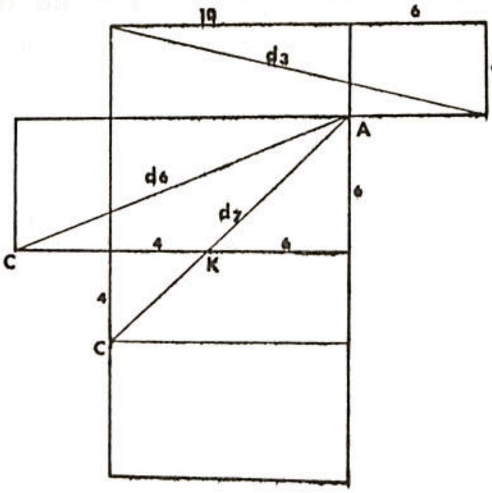
Os caminhos AKC e ATC são equivalentes de medida $d_7 \cong 14,14$ m.

Ainda, na busca de novas situações relacionadas com esse problema, cujas resoluções proporcionam a aprendizagem de conceitos geométricos, proponha aos alunos que determinem os ângulos do triângulo AKC, ou ainda a área desse triângulo.

Por ora, porém, vamos discutir, ainda, com os alunos, uma forma mais breve e genérica para obter o menor caminho da formiga, sem termos que passar toda vez por este extenso, porém rico, processo de discussão envolvendo geometria e álgebra integradamente.

Para apoiarmos a discussão do melhor caminho da formiga, vamos utilizar genericamente planificações do paralelepípedo retângulo, pois a formiga só utiliza planos para se locomover.

$d_6 \cong 15{,}23$ m
$d_7 \cong 14{,}14$ m
$d_8 \cong 16{,}49$ m



Uma ação de professores, pesquisadores e cientistas que se utilizam de matemática no seu dia-a-dia, pode refletir uma característica dos seres humanos, que têm por objetivo buscar soluções ótimas para as questões que lhes são apresentadas.

Assim, passaremos a generalizar este problema a partir de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c. Os menores caminhos da formiga são obtidos pela utilização do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos de catetos a e (b + c), b e (a + c) e c e (a + b). Assim sendo, as três soluções são x, y e z, a saber:

$$x = \sqrt{a^2 + (b + c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$$

$$y = \sqrt{b^2 + (a + c)^2} = \sqrt{b^2 + a^2 + c^2 + 2ac}$$

$$z = \sqrt{c^2 + (a + b)^2} = \sqrt{c^2 + a^2 + b^2 + 2ab}$$

Todas essas soluções contêm uma parcela igual, dada por $a^2 + b^2 + c^2$ e diferem pelos produtos ab, bc ou ac. Tendo em vista a forma genérica de obtenção destas distâncias, podemos afirmar que a menor delas será definida pelo menor produto entre as dimensões do bloco retangular, quando efetuado duas a duas (o menor produto entre ab, ac e bc).

Por exemplo, para uma sala de dimensões 3 m, 4 m e 5 m, como se determina o melhor caminho para a formiga?

Como o menor produto entre duas dimensões desta sala é 3 x 4 = 12, então o "caminho mínimo" será percorrido pelas faces 3 x 5 e 4 x 5.

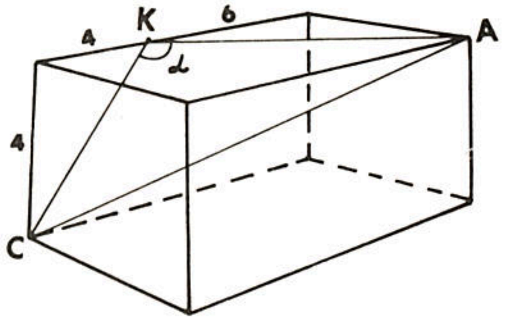
Uma vez determinado rapidamente o caminho da formiga ficou o problema dos ângulos do triângulo AKC (o menor caminho para a sala de 6 m x x 8 m x 10 m), bem como a área desse triângulo.

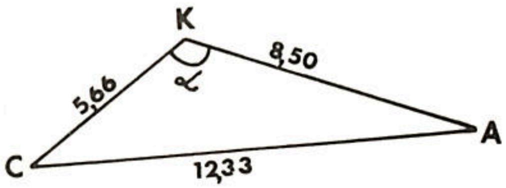
É útil determinar pelo menos o ângulo de vértice K, do triângulo AKC. Pode parecer para alguns alunos que esse triângulo é retângulo em K, pelo fato de a formiga passar de uma face à outra, perpendiculares entre si.

$AK = \sqrt{72}$

$CK = \sqrt{32}$

$AC = \sqrt{152}$





Construindo o triângulo AKC com medidas proporcionais aos seus lados, podemos obter a medida do ângulo α, com auxílio de um transferidor, em torno de 120^{o}.

Com auxílio de uma calculadora científica (ou tabelas trigonométricas), Lei dos Cossenos e de rudimentos de trigonometria, poderemos obter o valor do ângulo .

$$12,33^2 = 5,66^2 + 8,50^2 - 2 \cdot 5,66 \cdot 8,50 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha \cong -0,4962$$

$$\alpha = 119,75^{o}$$

De forma similar podemos achar os demais ângulos do triângulo AKC e concluir que ele é obtu sângulo justamente no vértice K, por onde a formiga poderá passar de uma parede para a outra.

Das questões propostas nesta atividade, resta-nos somente discutir o valor da área do triângulo AKC.

Desse triângulo nós não conhecemos nenhuma das suas alturas. Utilizando, porém, a relação discutida nesta Proposta, no artigo de trigonometria, que fornece a área de um triângulo, conhecendo-se dois de seus lados e o valor do ângulo determinado por esses lados, temos:

$$\text{Área} = \frac{5{,}66 \times 8{,}50 \times \operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha)}{2}$$

$$\text{Área} \cong 20{,}88 \text{ m}^2$$

Por outro lado, utilizando a "fórmula de Heron", podemos calcular a área do triângulo AKC, conhecendo-se os seus três lados.

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e p o seu semiperímetro. Assim,

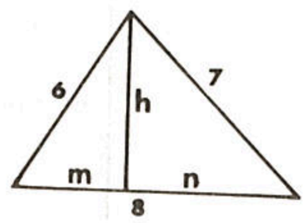
$$S = \sqrt{13{,}24(13{,}24 - 12{,}33)(13{,}24 - 8{,}50)(13\text{-}24 - 5{,}66)}$$

$$S = \sqrt{13{,}24 \;.\; 0{,}91 \;.\; 4{,}74 \;.\; 7{,}58}$$

$$S \cong 20{,}80 \text{ m}^2$$

A demonstração desta fórmula "milagrosa" poderia ser inicialmente discutida a partir de um problema numérico. Seja, por exemplo, o triângulo de lados 6, 7 e 8 cm:

$$\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2}$$



Já temos a "base" 8 cm, definida pela altura $\underline{h}$, por nós escolhida. Vamos obter essa altura em função das medidas dos três lados do triângulo inicial. Para isso vamos considerar $\underline{m}$ e $\underline{n}$ as projeções ortogonais dos lados 6 e 7 cm sobre o lado 8 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, nesses triângulos retângulos, podemos equacionar o problema.

$$h^2 + m^2 = 6^2 \qquad (1)$$
$$h^2 + n^2 = 7^2 \qquad (2)$$
$$m + n = 8 \qquad (3)$$

Fazendo (2) - (1) temos:

$$(h^2 + n^2) - (h^2 + m^2) = 7^2 - 6^2 \Longrightarrow n^2 - m^2 = 49-36$$
$$\Longrightarrow n^2 - m^2 = 13 \Longrightarrow (n - m)(n + m) = 13$$

Mas, m + n = 8, assim:

$$(n - m) \cdot 8 = 13 \Longrightarrow n - m = \frac{13}{8} \qquad (4)$$

Comparando (3) e (4) temos:

$$n - m = \frac{13}{8} \qquad (4)$$
$$\underline{m + n = 8} \qquad (3)$$
$$2n = \frac{77}{8}$$

$$\boxed{n = \frac{77}{16}}$$

Voltando à relação (2), temos:

$$h^2 + n^2 = 7^2 \Longrightarrow h^2 + \left(\frac{77}{16}\right)^2 = 49$$

de onde: $\boxed{h \cong 5{,}08 \text{ cm}}$

Assim, a área do triângulo será:

$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 5{,}08}{2} \cong 20{,}33 \text{ cm}^2$$

Utilizando a fórmula de Heron, temos:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ; \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

No problema em questão, $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$ e $p = \dfrac{8+7+6}{2} = 10{,}5$.

Assim, a área será:

$$A = \sqrt{10{,}5(10{,}5-8)(10{,}5-7)(10{,}5-6)}$$

$$A \cong 20{,}33 \text{ cm}^2$$

Passaremos, agora, a efetuar fatorações e substituições convenientes, nesse mesmo sistema não linear, o que facilitará a compreensão da dedução formal da fórmula de Heron.

$$h^2 + m^2 = 6^2 \qquad (1)$$
$$h^2 + n^2 = 7^2 \qquad (2)$$
$$m + n = 8 \qquad (3)$$

Fazendo (1) - (2), temos: $m^2 - n^2 = 6^2 - 7^2$

Da relação (3), temos: $n = 8 - m$

Comparando essas últimas relações, temos:

$$m^2 - (8-m)^2 = 6^2 - 7^2$$
$$m^2 - 8^2 + 2 \cdot 8\, m - m^2 = 6^2 - 7^2$$
$$m = \frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1), temos:

$$h^2 + \frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8} = 6^2$$

$$h^2 = 6^2 - \left(\frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8}\right)^2$$

$$h^2 = \left[6 + \left(\frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8}\right)\right] \cdot \left[6 - \left(\frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8}\right)\right]$$

$$h^2 = \left[\frac{2 \cdot 8 \cdot 6 + 8^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 8}\right] \cdot \left[\frac{2 \cdot 8 \cdot 6 - 8^2 - 6^2 + 7^2}{2 \cdot 8}\right]$$

$$h^2 = \left[\frac{(8+6)^2 - 7^2}{2 \cdot 8}\right] \cdot \left[\frac{7^2 - (8-6)^2}{2 \cdot 8}\right]$$

$$a^2 = \frac{[(8+6)+7][(8+6)-7][7-(8-6)][7+(8-6)]}{2^2 \cdot 8^2}$$

$$a^2 = \frac{[8+6+7][8+6-7][7-8+6][7+8-6]}{2^2 \cdot 8^2}$$

Fazendo $\frac{8+6+7}{2} = p$, resultado que:

$$8+6+7 = 2p \Longrightarrow 8+6+7-2.7 = 2p-2.7$$

$$\Longrightarrow 8+6+7 = 2(p-7)$$

Da mesma forma, $7-8+6 = 2(p-8)$ e $7+8-6 = 2(p-6)$. Assim:

$$h^2 = \frac{2p \cdot 2(p-7) \cdot 2(p-8) \cdot 2(p-6)}{2^2 \cdot 8^2}$$

$$h^2 = \frac{4p(p-7)(p-8)(p-6)}{8^2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-7)(p-8)(p-6)}}{8}$$

Então a área do triângulo dado vale:

$$\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{8 \cdot \frac{2}{8} \cdot \sqrt{p(p-7)(p-8)(p-6)}}{2}$$

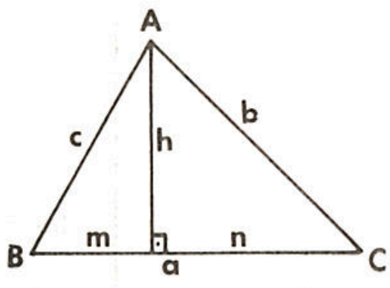
$$\text{Área} = \sqrt{p(p-7)(p-8)(p-6)}$$

que é a fórmula de Heron aplicada a esse proble - ma.

Genericamente, o mesmo processo poderia ser aplicado a um triângulo qualquer de lados a, b e c, para obter a área desse triângulo, e assim estaríamos formalizando a demonstração da fórmula de Heron.

Mostrar que a área desse triângulo pode ser calculada por

$$A = \sqrt{p(p-o)(p-b)(p-c)}$$



Através de substituições e fatorações convenientes sobre o sistema de relações não lineares, associado a esse triângulo, temos:

$$m^2 + h^2 = c^2 \qquad (1)$$

$$n^2 + h^2 = b^2 \qquad (2)$$

$$m + n = a \qquad (3)$$

Fazendo (1) menos (2), temos:

$$m^2 - n^2 = c^2 - b^2 \qquad (4)$$

Substituindo (3) em (4), temos:

$$(a - n)^2 - n^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 - 2an + n^2 - n^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 - c^2 + b^2 = 2an$$

$$n = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a} \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (2), temos:

$$\left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)^2 + h^2 = b^2$$

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 - c^2 + b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \left[b - \frac{(a^2 - c^2 + b^2)}{2a}\right] . \left[b + \frac{(a^2 - c^2 + b^2)}{2a}\right.$$

$$h^2 = \left[\frac{2ab - a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right] . \left[\frac{2ab + a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right]$$

$$h^2 = \left[\frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}\right] . \left[\frac{(a + b)^2 - c^2}{2a}\right]$$

$$h^2 = \frac{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)}{4a^2} \qquad (6)$$

Fazendo $p = \frac{a + b + c}{2}$ (semiperímetro), e $(a + b + c) = 2p$, temos:

$$a + b + c - 2b = 2p - 2b \Longrightarrow a + c - b = 2(p - b)$$

ainda, analogamente, temos:

$$a + b - c = 2(p - c) \quad e \quad b + c - a = 2(p - a)$$

Assim, voltando na relação (6), temos:

$$h^2 = \frac{2(p - a) \;.\; 2(p - b) \;.\; 2(p - c) \;.\; 2p}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}$$

$$h^2 = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

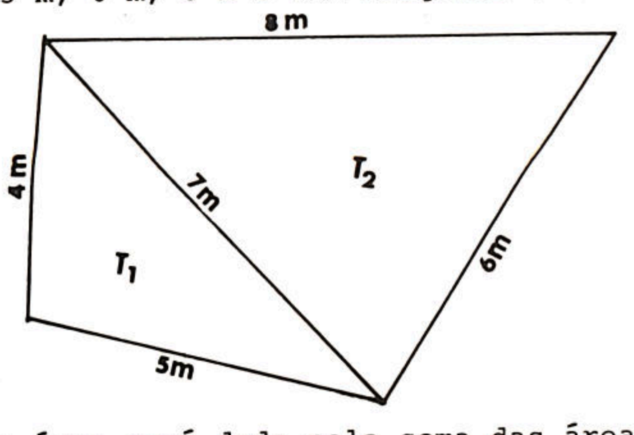
Então, a área do triângulo será:

$$Área = \frac{\text{base x altura}}{2}$$

$$Área = \frac{a \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$$

$$\boxed{Área = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

A fórmula de Heron tem a vantagem de nos fornecer a área de qualquer triângulo em função de seus lados, sem precisarmos conhecer uma de suas alturas e o lado relativo a essa altura. Esta fórmula nos permite obter rapidamente a área de um "terreno" de forma quadrangular, quando se conhece os seus lados e uma de suas diagonais. Outros terrenos, em forma de polígono qualquer, poderão sempre ser divididos em triângulos. Por exemplo, achar a área do seguinte terreno quadrangular de lados 4 m, 5 m, 6 m, 8 m e uma diagonal 7 m.



Sua área será dada pela soma das áreas dos dois triângulos que compõem o quadrilátero

T_1 = triângulo de lados 4, 5 e 7 m
T_2 = triângulo de lados 6, 7 e 8 m

$$\text{Área } T_1 = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} \cong 9{,}79 \text{ m}^2$$

$$\text{Área } T_2 = \sqrt{10{,}5(10{,}5-6)(10{,}5-7)(10{,}5-8)} \cong 20{,}33 \text{ m}^2$$

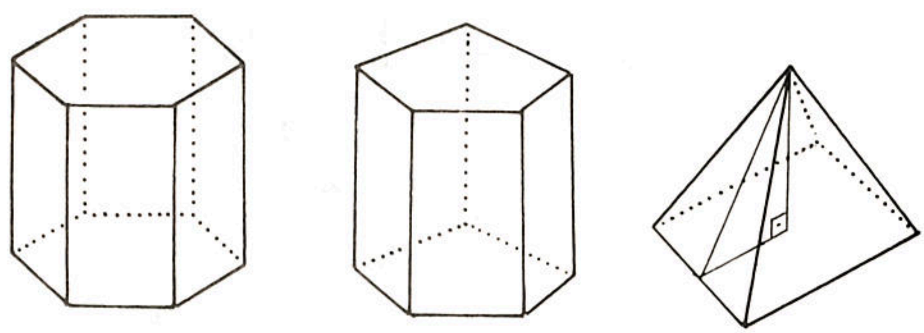
$$\text{Área do terreno} = A_{T_1} + A_{T_2}$$

$$\text{Área do terreno} \cong 30{,}12 \text{ m}^2$$

B. Prismas e Pirâmides
Caracterização, Nomenclatura, Construção, Resumo sobre Polígonos, Polígonos Regulares, ângulos, áreas e relação de Pitágoras

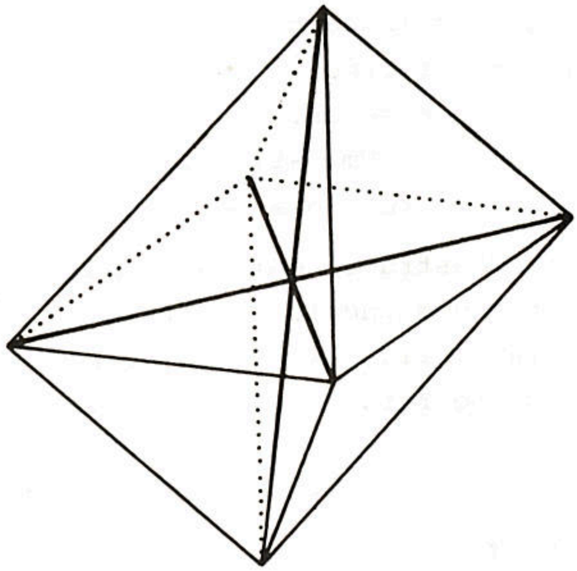
5) Pedir aos alunos que recortem em cartolina polígonos regulares de 5 cm de lado para bases de prismas e pirâmides ortogonais. As faces laterais serão quadrados de lado 5 cm, triângulos equiláteros de lado 5 cm, retângulos de 5 cm por 10 cm e triângulos isósceles de 5 cm de base por 10 cm de altura relativa a essa base. Com auxílio de uma fita gomada, montar vários prismas e pirâmides ortogonais, identificando neles elementos geométricos como arestas, faces, ângulos, vértices, alturas das faces, altura dos sólidos, diagonais de faces, diagonais dos prismas, apótemas; além de verificar nesses sólidos geométricos a validade da Relação de Euler V + F = A + 2.

A caracterização de prismas e pirâmides pode ser um bom momento para uma revisão sobre polígonos, polígonos regulares e medidas de ângulos, além de permanecerem em cena as revisões sobre as áreas e os cálculos que envolvem a relação de Pitágoras, como o da altura de uma PIRÂMIDE.

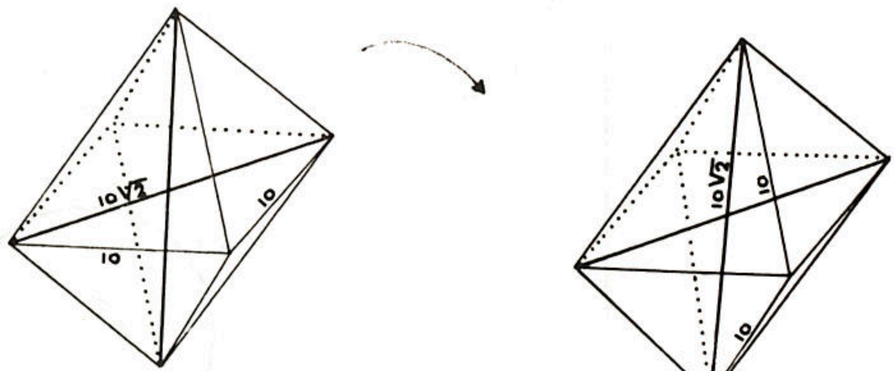


A partir da construção de uma pirâmide de base quadrada, com todas as arestas de mesmo comprimento (por exemplo, 10 cm), uma atividade sugestiva pode ser a seguinte:

. Reunir duas pirâmides idênticas com a base comum, formando um "balão", um OCTAEDRO.



Embora se possa calcular a diagonal calculando a altura da pirâmide e multiplicando por 2, certamente o caminho mais simples decorre da percepção, através da manipulação, de que o OCTAEDRO tem três diagonais do mesmo comprimento, que é igual ao da diagonal de um quadrado de lado 10 cm, ou seja, $10\sqrt{2}$ cm.

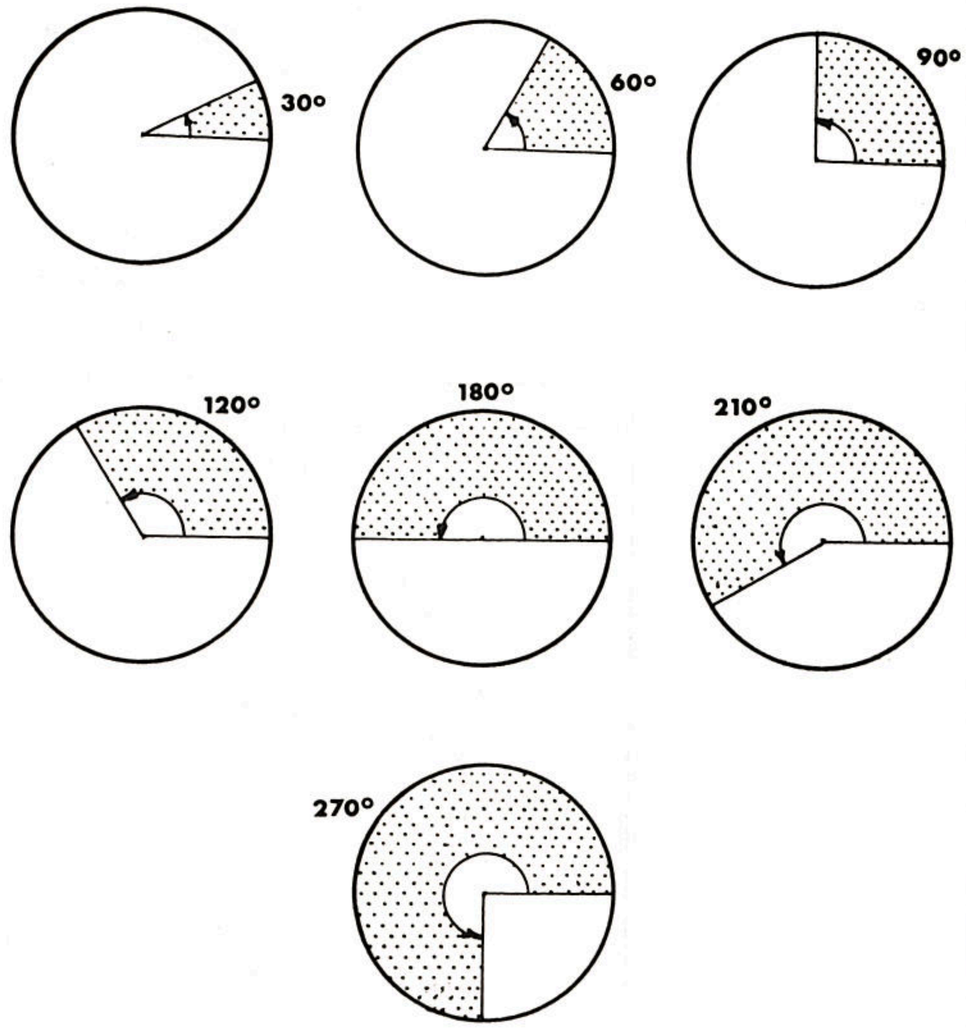


C. Cilindro e Cones. Caracterização, Nomenclatura, Construção, Resumo sobre circunferência e círculo, área do círculo e de suas partes.

6) No contato com CILINDROS e CONES, a ocasião é propícia para uma retomada dos fatos básicos sobre a circunferência e o círculo, incluindo o cálculo de áreas de setores circulares, que constituirão as superfícies laterais dos cones circulares retos.

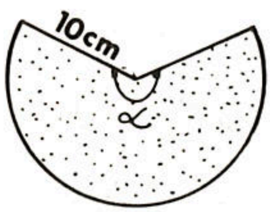
Uma atividade que pode ser explorada em muitos sentidos é a seguinte:

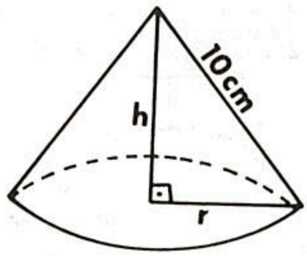
. Construir, com papel sulfite, setores circulares com ângulos centrais de 30^{o}, 60^{o}, 90^{o}, 120^{o}, 180^{o}, 210^{o}, 270^{o} (ou outros valores), todos com o mesmo raio, digamos, 10 cm.



. Construir "chapéus de palhaço" com a forma de um cone circular reto, utilizando os setores obtidos.

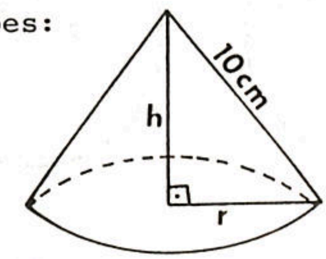
. Notar que quando o ângulo do setor aumenta, aumenta o raio da base do cone e diminui sua altura. Fazer medidas aproximadas dos valores do raio r do cone e da altura h, preenchendo a tabela a seguir.





α	r	h
30°		
60°		
90°		
120°		
180°		
210°		
270°		

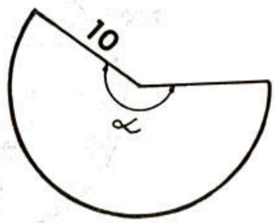
. Buscar uma maneira de calcular r e h matematicamente e comparar com os resultados obtidos a partir das medidas. Isso pode ser feito a partir das relações:



$$\boxed{r^2 + h^2 = 10^2} \qquad (1)$$

e

$$\frac{2\pi 10}{2\pi r} = \frac{2\pi}{\alpha}$$



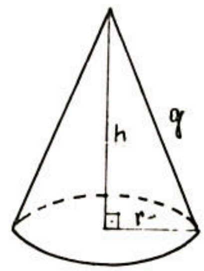
assim,

$$\boxed{\frac{2\pi r}{10} = \alpha \ \text{(em radianos)}} \qquad (2)$$

. Chamar atenção para o caso do ângulo $\alpha = 180^{\circ}$, quando o cone é chamado EQUILÁTERO.

Com o objetivo de "problematizar" um pouco mais as questões relativas às relações métricas e geométricas do cone, para um momento seguinte generalizá-las, desenvolveremos a seguinte atividade.

Vamos chamar g o raio do setor circular de ângulo α que gerou o cone de raio r e altura h. Este raio g define a geratriz deste cone. Usando as relações $r^2 + h^2 = g^2$ e $\alpha = \frac{2\pi r}{g}$, anteriormente verificadas, podemos propor problemas de construção de cones em papel sulfite, com as seguintes características:



A - Construir um cone de raio 6 cm e altura 8 cm.

B - Construir um cone de raio 8 cm e altura 6 cm.

C - Construir um cone de raio 4 cm e geratriz 8 cm.

D - Construir um cone de raio 9 cm e geratriz 10 cm.

E - Construir um cone de raio 3 cm, a partir de um setor circular de ângulo central 120°.

F - Construir um cone de altura 10 cm, a partir de um setor circular de ângulo central 150°.

G - Construir um cone de altura 12 cm.

Vamos discutir a solução do cone proposto no item F.

$$\begin{array}{l} r^2 + 10^2 = g^2 \\ 150^\circ = \dfrac{2 \cdot 180^\circ \cdot r}{g} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lr} g^2 - r^2 = 100 & (1) \\ g = \dfrac{12r}{5} & (2) \end{array}$$

Substituindo a relação (2) em (1), temos:

$$\left(\frac{12r}{5}\right)^2 - r^2 = 100 \Longrightarrow \frac{144r^2}{25} - r^2 = 100 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 144r^2 - 25r^2 = 2500 \Longrightarrow r^2 = 21{,}01 \Longrightarrow$$

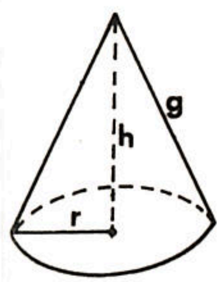
$$\Longrightarrow r \cong 4{,}58 \text{ cm}$$

Assim, $g = \frac{12r}{5} \Longrightarrow g \cong 11$ cm

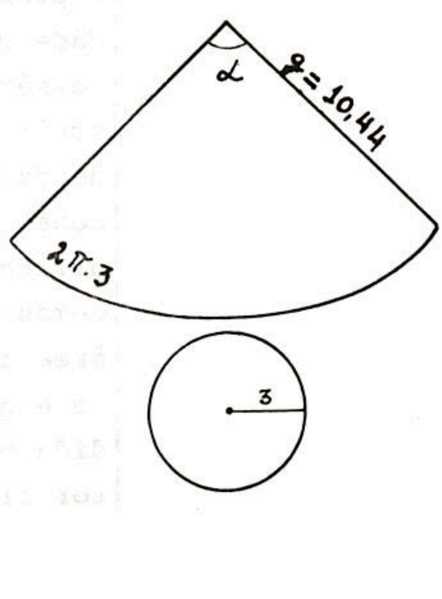
Acreditaremos ser muito útil, na construção desses conceitos, que o aluno construa todos esses cones propostos em papel sulfite ou similar, inclusive montando-os com auxílio de fita adesiva e não se limitando apenas aos seus respectivos cálculos algébricos. A situação G proposta admite muitas soluções. Estamos diante de um problema "possível e indeterminado" e não diante de um problema mal formulado ou de um problema onde "faltam dados", ou ainda de um problema impossível. Pedir para os alunos que comparem seus cones construídos, principalmente, na situação G.

Vamos começar a discutir a formalização do cálculo da área total do cone circular reto de altura h e raio r, a partir de um cone de altura 10 cm e raio da base 3 cm.

Podemos começar este cálculo obtendo a geratriz g do cone. Como $g^2 = h^2 + r^2$ e, no problema, $h = 10$ cm e $r = 3$ cm, então $g \cong 10{,}44$ cm.



Planificando esse cone, verificamos que a sua área total é composta pela área do círculo de raio 3 cm, ou seja, $\pi 3^2$, e pela área do setor circular de raio $g \cong 10{,}44$ cm e de arco de circunferência medindo $2\pi 3$ cm (é o próprio perímetro do círculo base do cone).



Esse setor circular α é uma parte do círculo de raio $g \cong 10,44$ cm.

Tal círculo tem área valendo $\pi . 10,44^2$ e perímetro valendo $2 . \pi . 10,44$.

Podemos considerar o círculo como um setor circular de ângulo 360^o. Como a área de um setor circular é diretamente proporcional ao perímetro do arco que o define, podemos escrever

$$\frac{\text{área do setor}}{\text{perímetro do arco do setor}} = \frac{\text{área do círculo}}{\text{perímetro do círculo}}$$

$$\frac{A_{setor}}{2.\pi.3} = \frac{\pi . 10,44^2}{2 . \pi . 10,44}$$

Considerando $\pi \cong 3,14$, temos:

$$A_{setor} \cong 98,34 \text{ cm}^2$$

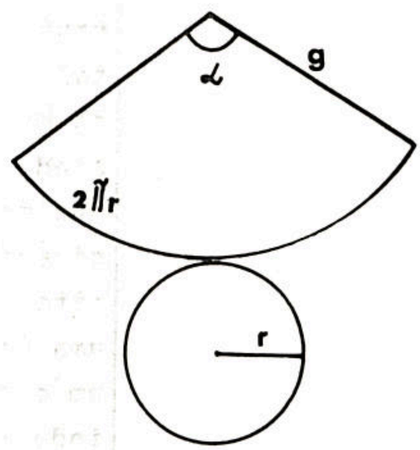
Finalizando, obtemos a área total do cone, isto é:

$$A_{total} = A_{setor} + A_{base}$$

$$A_{total} = 98,44 + \pi 3^2 \cong 126,70 \text{ cm}^2$$

Passaremos, agora, para o cálculo formal da área total de um cone reto.

Na prática, o problema da quantidade de material necessário para construir um cone depende da área total do cone. Assim, pela planificação do cone podemos concluir que a área total do cone reto é obtida pela medida da área de um setor circular, equiva



lente à área lateral desse cone, acrescida da área do círculo, base do cone. Assim: $A_t = A_L + A_{base}$, onde A_t (área total), A_L (área lateral do cone), A_{base} (área da base).

O cálculo da área lateral (A_L) dos cones é equivalente à área do setor circular de ângulo central α do círculo de raio g. Vamos verificar que o cálculo dessa área lateral AC pode ser efetuado, dependendo somente de r e g. Este setor circular — geometricamente a mesma superfície da lateral do cone planificada — é parte do círculo de área αg^2 e perímetro $2\pi g$, definido pelo ângulo central α. Considerando que a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento $2\pi r$ do arco que compõe este setor ($2\pi r$ é também o perímetro do círculo base do cone), temos:

$$\frac{2\pi g}{g^2} = \frac{2\pi r}{A_L} \Longrightarrow A_L = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} \Longrightarrow A_L = \pi r g$$

Assim, a área total do cone circular reto de altura h e raio r vale:

$$A_t = A_L + A_{base} = \pi r g + \pi r^2$$
$$A_t = \pi r(g + r)$$

De posse desta fórmula o aluno poderá utilizá-la, até mecanicamente, para obter as áreas dos cones construídos nessa atividade ou mesmo construir cones conhecendo previamente a sua área total ou a sua área lateral. Por exemplo, construir cones de área 300 cm². Vamos obter muitas soluções! Ainda, construir o "maior cone possível" com uma folha de papel sulfite! Serão dois problemas se o considerarmos com a base da mesma folha de papel sulfite ou não. Aqui o importante é maximizar o uso de uma área retangular (papel sulfite) para construir um cone. É possível que costureiras e engenheiros industriais tenham problemas dessa espécie no seu dia-a-dia. A questão do "maior cone possível" será respondida pelo cone mais alto ou pelo cone de maior volume. Neste último caso, teremos que resolvê-lo medindo o volume dos cones obtidos ou informamos ao aluno a fórmula que calcula o volume do cone.

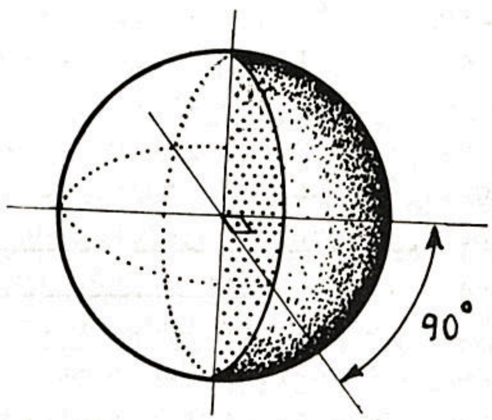
Agora, deixamos o problema com resolução suspensa, e após o cálculo do volume da pirâmide obteremos o cálculo do volume do cone. Depois voltamos para discutir melhor este problema de maximização de volumes. Até aqui, a importância estava em sistematizar somente o cálculo da área total do cone e não o seu volume.

D. Esferas

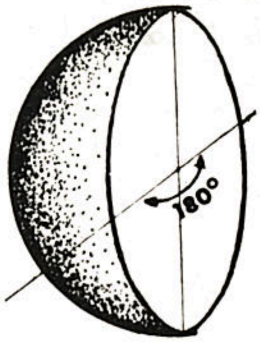
Caracterização, Nomenclatura associada ao globo terrestre (círculo máximo, meridianos, paralelos, fusos, latitude, longitude), partes da esfera.

7) No caso da ESFERA, as dificuldades práticas da construção são amplamente compensadas pela motivação decorrente da associação ao globo terrestre, no que se refere a latitudes, longitudes, fusos horários, etc. A utilização de laranjas, limões, globos terrestres, esferas de isopor pode ser muito útil. Também é conveniente cortar bolas de plástico ou de borracha para perceber fatos relativos à impossibilidade de planificar a superfície esférica.

Mesmo sem fórmulas para o cálculo de áreas ou de volumes, pode-se dividir a esfera em partes com a forma de uma CUNHA e avaliar o volume das cunhas comparando-o com o das esferas inteiras:

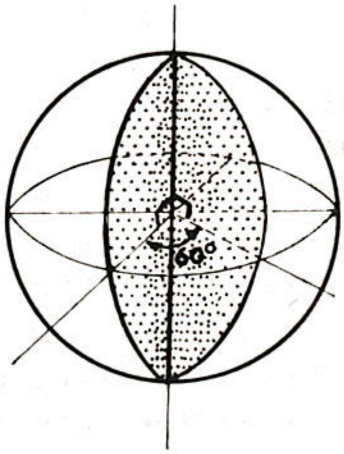


$\frac{1}{4}$ do volume da esfera



$\frac{1}{2}$ do volume da es
fera

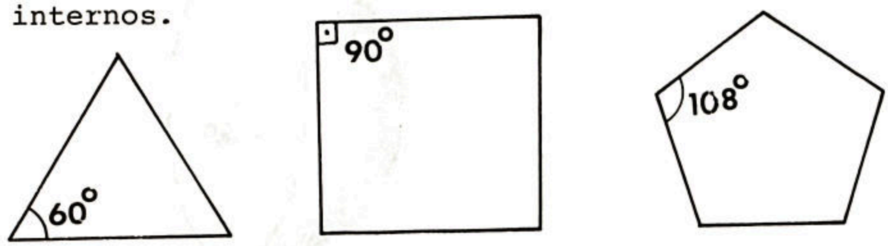
$\frac{1}{6}$ do volume da es
fera



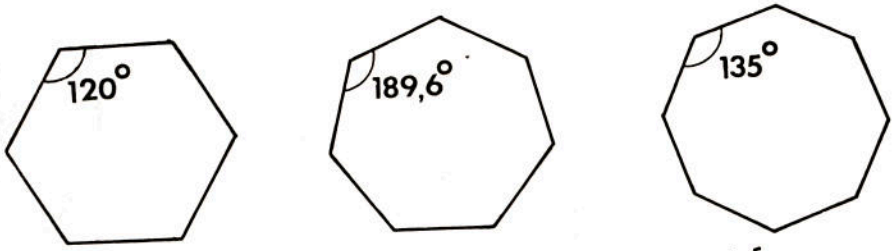
E. Poliedros Regulares
Caracterização dos cincos tipos de Poliedros Regulares, razão de só existirem cinco tipos, construção.

8) Os POLIEDROS REGULARES podem ser estudados de modo introdutório, constituindo pretexto para a discussão de fatos geométricos de grande importância. Por exemplo: a partir do fato de que existem polígonos regulares, com um número qualquer de lados, a partir de 3, os alunos podem esperar que existam muitos tipos de poliedros. A compreensão efetiva, a partir da construção de que só existem 5 tipos de poliedros regulares é razoavelmente simples e pode ser muito significativa. Caracterizando os poliedros regulares como aqueles que têm todas as faces congruentes, constituídas por polígonos regulares de um só tipo e que, além disso, têm todos os vértices de um mesmo formato (quer dizer, em todos eles concorre o mesmo número de faces), podemos tentar construir todos os possíveis poliedros regulares. A atividade pode desenvolver-se através das seguintes etapas:

. Construção, em cartolina, de polígonos regulares de vários tipos e determinação de seus ângulos internos.



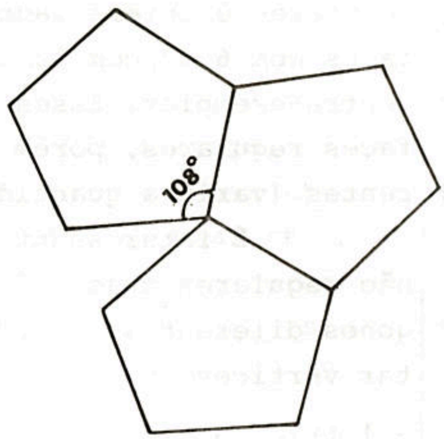
triângulo quadrado pentágono



hexágono heptágono octógono

Pedir para um grupo, de 5 ou 6 alunos, providenciar em cartolina de várias cores, 50 triângulos equiláteros, 20 quadrados, 50 pentágonos, 40 hexágonos, 6 octógonos todos regulares com 5 cm de lado, e fita adesiva.

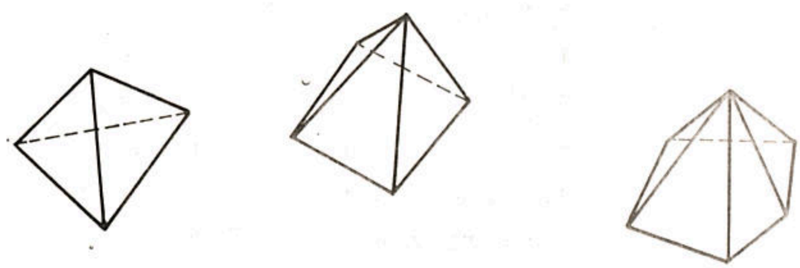
. Constatação de que para formar um "bico", isto é, um vértice de um poliedro, é necessário reunir pelo menos 3 polígonos, sendo que a soma dos ângulos das 3 faces concorrentes deve ser inferior a 360°. Utilizando apenas polígonos regulares idênticos, decorre, imediatamente, que não podemos utilizar hexágonos, nem polígonos com mais de seis lados; restam os triângulos, os quadrados e os pentágonos.



. Com pentágonos, reunidos 3 por vértice, utili - zando fita adesiva, obtém-se um poliedro regular de 12 fases — o DODECAEDRO. Não é possível reunir mais do que 3 pentágonos por vértice.

. Com quadrados, também não é possível reunir mais do que 3 por vértice; construindo vértice a vértice, obtemos o CUBO ou HEXAEDRO.

. Com triângulos, é possível reunir 3 por vértice, 4 por vértice ou mesmo 5 por vértice; prosseguindo vértice a vértice, em cada caso, construímos o TETAEDRO, o OCTAEDRO e o ICOSAEDRO, respectivamente.



. Não é possível construir outros poliedros utilizando apenas polígonos regulares idênticos e com todos os "bicos" do mesmo formato. Todas as possibilidades foram examinadas na seqüência acima descrita.

Na discussão da conceituaçao de poliedros regulares é interessante montar poliedros não regulares com 6 ou com 10 triângulos equiláteros, como contra-exemplos. Esses poliedros possuem as mesmas faces regulares, porém vértices de formatos diferentes (varia a quantidade de arestas por vértice).

É interessante, ainda, formar poliedros não regulares cujos vértices são compostos de polígonos diferentes. Sugira aos alunos que tentem montar vértices ou "bicos" com:

- 1 triângulo e 2 hexágonos;
- 1 triângulo e 2 pentágonos;
- 1 triângulo e 2 quadrados;
- 1 triângulo e 1 hexágono e 1 quadrado;
- 2 triângulos e 1 hexágono;
- 2 triângulos e 1 quadrado e 1 pentágono;
- 3 triângulos e 1 quadrado;
- 1 quadrado e 2 pentágonos;
- 1 pentágono e 2 quadrados;
- 1 pentágono e 2 hexágonos;
- 2 pentágonos e 1 hexágono.

Os alunos perceberão que, além dessas possibilidades, existem outras combinações possíveis utilizando esses polígonos regulares. Há possibilidade de combinar heptágonos e octágonos com triângulos, todos regulares?

Alguns desses poliedros "fecham" usando repetidamente vários desses bicos. "Fechar poliedros" significa que, na repetição desses bicos ou vértices, vamos poder delimitar uma região convexa do espaço, ou seja, neste caso, estamos formando poliedros.

Alguns desses sólidos são muito interessantes. Tente fazer poliedros com:

- 20 hexágonos e 12 pentágonos, sabendo que em torno de cada pentágono estão 5 hexágonos;
- 2 quadrados e 8 pentágonos, sabendo que em torno de cada quadrado estão 4 pentágonos.

II. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Aprofundamento em algumas propriedades ou relações envolvendo formas e medidas.

F. *Volumes*

Sistematização do cálculo indireto de volumes dos sólidos mais freqüentes, classificados em três grupos:

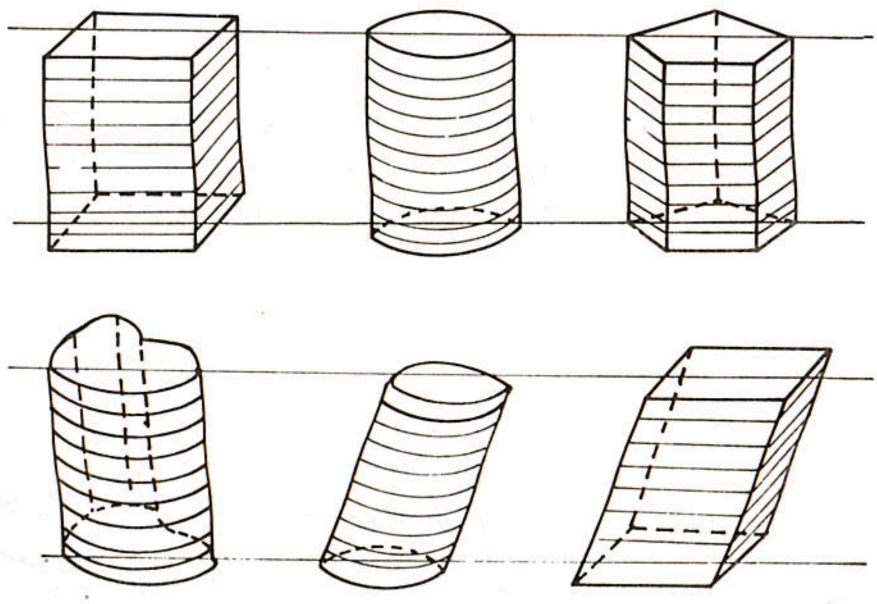
- *Prismas/Cilindros*
- *Pirâmides/Cones*
- *Esferas*

Há outras combinações de vértices, formados por polígonos regulares que "não fecham" uma região do espaço.

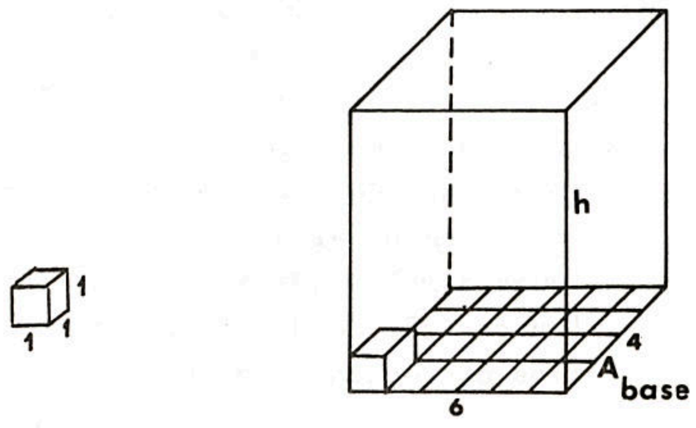
9) Nesta etapa, as atenções são deslocadas das formas com suas propriedades características, inclusive algumas relações métricas, para as relações que envolvem formas de diferentes tipos. O cálculo de volumes, o estudo da semelhança de objetos em geral e a observação de algumas situações simples que envolvem a inscrição ou a circunscrição de um sólido em outro podem ser veículos convenientes para isso.

10) No cálculo de volumes é fundamental evitar sua redução a um amontoado de fórmulas. Basicamente, as situações elementares envolvendo cálculo de volumes resumem-se em três:

. Volumes de sólidos como PRISMAS e CILINDROS, caracterizados comc pilhas de placas idênticas.



. Lembrando que para calcular o volume deve-se determinar quantos cubinhos, de aresta 1 unidade de comprimento, cabem no sólido. É possível concluir que várias etapas são necessárias para o cálculo:

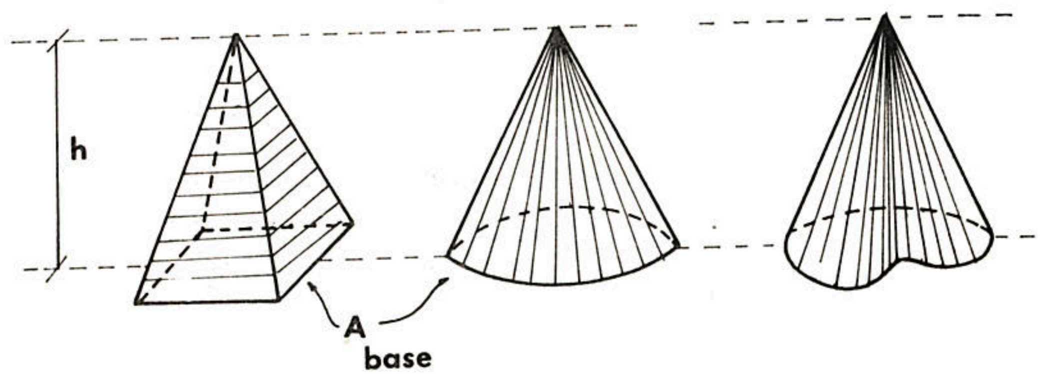


- determinação da área da base, A_{base}, o que corresponde a verificar quantos cubinhos cabem apoiados na base;
- determinação da altura h, o que corresponde a verificar quantas camadas idênticas de cubinhos são necessárias para preencher completamente o sólido.

A partir de A_{base} e h, resulta o volume V:

$$V = A_{base} \cdot h$$

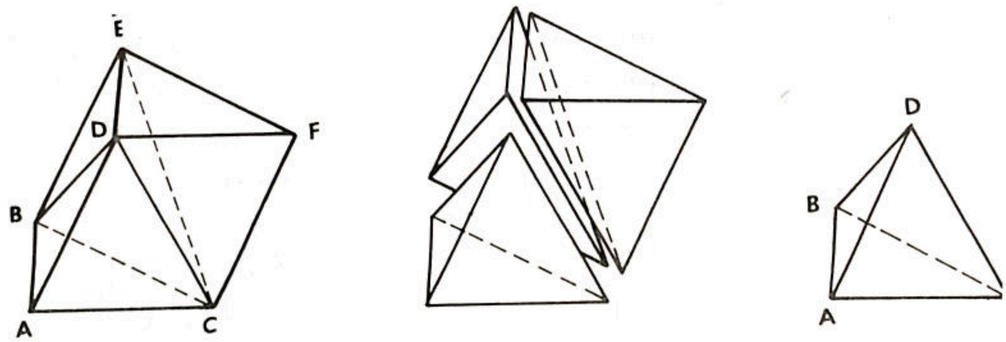
. Volumes de sólidos como PIRÂMIDES e CONES caracterizados como pilhas de placas semelhantes que vão "afunilando" da base até o vértice.



Nesses casos, é importante destacar, de início, que o volume a ser calculado é <u>menor</u> que o produto $A_{base} \cdot h$: $V < A_{base} \cdot h$.

A partir daí busca-se justificar o fator $\frac{1}{3}$ que é característico dos sólidos com afunilamentos como o das pirâmides ou cones. O caminho para isso pode ser o seguinte:

- Partindo de um prisma reto de base triangular, mostrar que sempre é possível decompô-lo em 3 pirâmides equivalentes; cada uma delas tem volume igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base e mesma altura que o prisma.



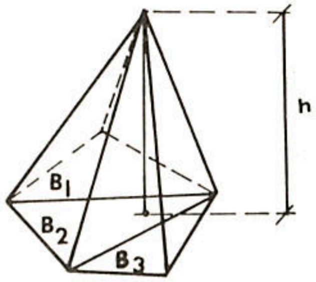
Mostrar isso efetuando cortes em um pedaço de sabão pode ser uma experiência bastante sugestiva.

- Uma pirâmide cuja base não é triangular pode ser decomposta em pirâmides de bases triangulares justapostas; a partir daí, mostra-se que para qualquer pirâmide,

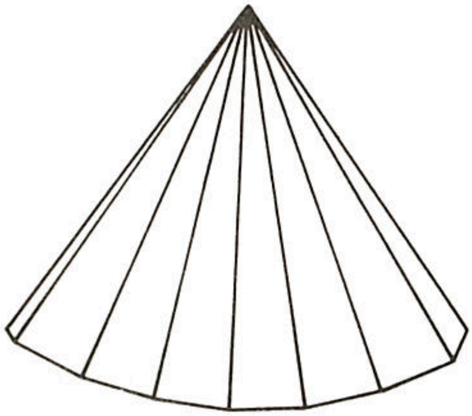
$$\boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h}$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} B_1 h + \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{3} B_3 h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$



- Para um cone, podemos aproximar seu volume ao de pirâmides nele inscritas. Imaginando estas pirâmides constituídas de um número cada vez maior de lados, pode-se sugerir que o volume deste cone seja também: $\frac{1}{3} A_{base} \cdot h$.



. Volume da ESFERA, a partir de comparação entre os volumes de um hemisfério de raio R, de um cilindro e de um cone de raio de base R e altura R. Da observação direta, resulta a desigualdade:

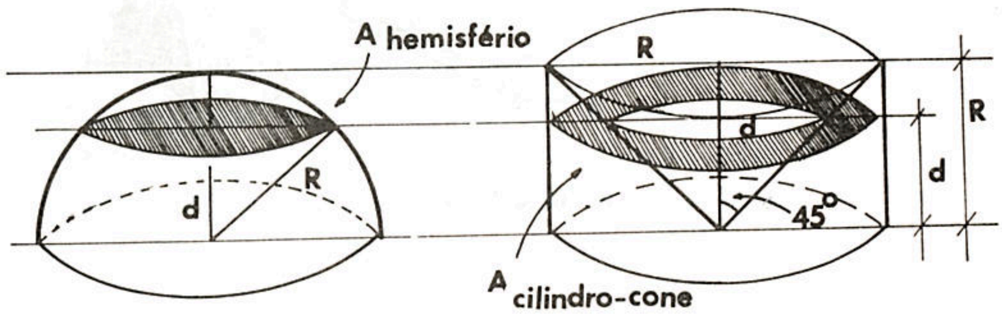
$$V_{cone} < V_{hemisfério} < V_{cilindro}$$

GRÁFICO 12.

ou seja,

$$\frac{1}{3}\,\pi R^3 < V_{hemisfério} < \pi R^3$$

Para mostrar que $V_{hemisfério} = \frac{2}{3}\,\pi R^3$, pode-se verificar que as secções paralelas à base do hemisfério e do sólido formado pelo cilindro acima representado, com uma cavidade formada pela retirada de um cone invertido, têm exatamente a mesma área nos dois casos, para cada altura considerada.



$$A_{hemisfério} = A_{cilindro\text{-}cone}$$

Assim, é como se o hemisfério fosse uma pilha de círculos de raios decrescentes e o sólido CILINDRO-CONE, uma pilha de coroas circulares cada vez mais "finas", de modo que a área de cada círculo da 1ª pilha seja igual à área da coroa correspondente na outra. Os volumes das duas pilhas devem resultar iguais e tem-se:

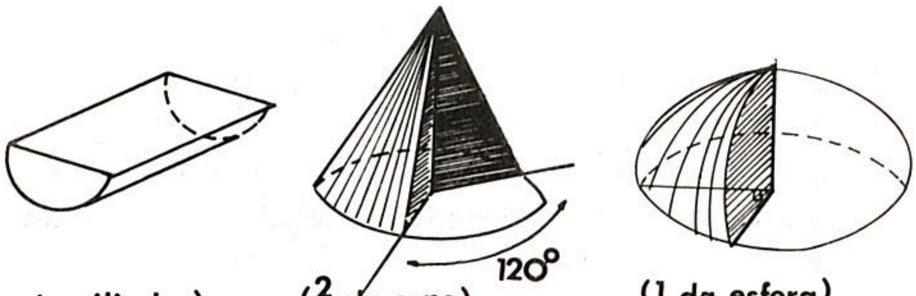
$$V_{hemisfério} = V_{cilindro} - V_{cone}$$

de onde resulta:

$V_{hemisfério} = \frac{2}{3}\,\pi R^3$ e, em conseqüência,

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\,\pi R^3$

11) Após aprender a calcular o volume de sólidos já citados, pode-se complementar examinando o caso de partes de cilindros, de pirâmides, de cones ou de esferas sem necessidade de novas fórmulas, recorrendo-se apenas à noção de proporcionalidade e à iniciativa pessoal. São exemplos os casos a seguir:



(meio cilindro) ($\frac{2}{3}$ do cone) ($\frac{1}{8}$ da esfera)

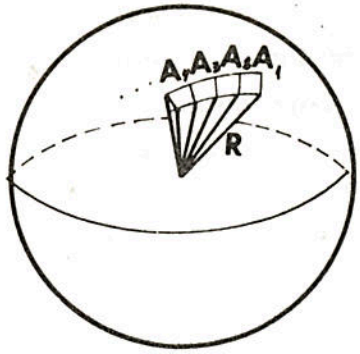
12) Dispondo da expressão para o volume da esfera, pode-se calcular a área da sua superfície imaginando-a decomposta em muitas pequenas regiões, aproximadamente planas; cada uma delas, juntamente com o centro da esfera, determinada como que uma pequena pirâmide. A reunião de todas essas pequenas pirâmides constitui a esfera. Sendo A_1, A_2, A_3, etc. as áreas dessas pequenas regiões, tem-se

$$\frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \frac{1}{3}A_3R + \dots = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{1}{\cancel{3}}(A_1 + A_2 + A_3 + \dots)\cancel{R} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi R^{\cancel{3}\,2}$$ e segue:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots = 4\pi R^2$$

ou seja, a área da superfície esférica é 4 vezes a área do círculo máximo da esfera.



G. Semelhança

Caracterização, relações entre comprimentos, áreas e volumes correspondentes em objetos semelhantes.

13) No estudo da semelhança entre objetos em geral, o ponto de partida mais natural pode ser a idéia de ampliação ou redução, mantidas as proporções nos comprimentos de todos os pares de segmentos correspondentes. É necessário explorar exemplos concretos onde se possa perceber que a manutenção dessas proporções é que determina a equivalência das formas. Medidas efetuadas em fotografias ou mesmo modelos de objetos, ampliados ou reduzidos, podem contribuir para isso. Um contra-exemplo interessante pode ser a comparação de uma garrafa de refrigerante de 1 litro e outra de 300 ml; elas não são semelhantes; por mais parecidas que sejam, uma vez que as dimensões das tampinhas são iguais, enquanto as alturas, por exemplo, não são. Comparar áreas e volumes de regiões correspondentes em objetos semelhantes é uma etapa importante a ser considerada, conduzindo, a partir de exemplos, à conclusão:

. Sendo a razão entre dois comprimentos correspondentes igual a K, a razão entre duas áreas de regiões correspondentes é K^2 e a razão entre dois volumes nas mesmas circunstâncias é K^3.

O caso de desenhos em escala, de maquetes, ou mesmo de mapas geográficos, pode ser explorado, destacando-se neste último caso que os mapas <u>não são</u> semelhantes à região representada, assim, como um plano não pode ser semelhante à uma superfície esférica.

O estudo da semelhança de triângulos deve surgir nesse contexto maior, sendo suas particularidades estudadas para maior esclarecimento das idéias gerais sobre semelhança.

H. Inscrição e Circunscrição. Análise de alguns casos simples de inscrição dos sólidos, já estudados, para reforçar a percepção, de certas relações básicas, entre os elementos envolvidos e desenvolver a capacidade de representar as formas correspondentes.

14) Nas situações envolvendo Inscrição e Circunscrição de alguns sólidos, não se pode pretender a consideração exaustiva de muitos casos, mas apenas o exame de alguns exemplos simples que destaquem certas relações entre os elementos envolvidos e possibilitem comparações significativas. Tais relações e comparações podem contribuir, inclusive, para facilitar a própria representação dos sólidos envolvidos. São situações interessantes as que envolvem os pares CUBO/ESFERA, CILINDRO/ESFERA, CONE/ESFERA, OCTAEDRO/CUBO, entre outras. Insistimos em que alguns poucos exemplos podem ser suficientes para chamar a atenção para as relações. Por exemplo: o CUBO tem 6 faces, o OCTAEDRO tem 6 vértices. É possível construir um octaedro tendo como vértices os centros das 6 faces de um CUBO, é fácil mostrar que se trata de um OCTAEDRO REGULAR.

III. SISTEMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA Sistematização possível da linguagem geométrica e do encadeamento lógico das proposições geométricas, no caminho de uma organização formal da Geometria Euclidiana.

15) Após etapas anteriores, envolvendo manipulação, caracterização, construção, percepção de relações, é fundamental uma assepsia na linguagem utilizada, de modo que se torne possível representar com precisão uma forma geométrica, descrita exclusivamente através de palavras. Condições necessárias, suficientes, necessárias e suficientes devem ser enunciadas com rigor lógico. "Ao mesmo tempo, os 'bicos' tornam-se ângulos poliédricos". A precisão na linguagem possibilitará uma organização no conhecimento geométrico acumulado, abrindo caminho para a sistematização formal.

I. *LINGUAGEM GEOMÉTRICA*

Estudo dos fatos básicos a respeito de retas e planos no espaço, posições relativas, paralelismo, perpendicularismo. Estudo de Diedros, Triedros, ângulos poliédricos e poliedros: relação de Euler.

16) É importante a compreensão clara do que significa demonstrar uma proposição da forma básica "se p, então q" das proposições matemáticas, da inevitabilidade dos Postulados na construção de um sistema formal. A percepção da historicidade de um sistema formal como o Euclidiano, sua utilização como modelo de organização do conhecimento por cerca de 2000 anos, suas limitações, sua ultrapassagem, podem dar um sentido maior ao convite aos alunos para que enveredem pelo território, ás vezes árido, das demonstrações formais. A escolha de alguns poucos teoremas significativos, para ilustrar o funcionamento do sistema, pode ser deixada a critério do professor. Por exemplo, a análise de proposições que envolvem condições necessárias e suficientes para o estudo do paralelismo e perpendicularismo entre retas, planos, e retas e planos.

I. *NOÇÕES SOBRE FORMALIZAÇÃO*

Justificativa lógica de algumas proposições a partir de outras mais básicas: encadeamento de proposições, dedução. Apresentação do sistema formal da geometria euclidiana; um pouco de história e referências às geometrias não-euclidianas. Compreensão da demonstração de alguns poucos teoremas especialmente significativos.

17) Numa situação concreta onde a limitação de tempo é um fator determinante, certamente essa etapa de organização do conhecimento geométrico é que pode ser sacrificada. Não porque não seja importante, mas somente porque não é possível organizar o conhecimento, se ele não tiver sido adquirido nas etapas anteriores. Em certos casos, pode ocorrer que uma parte considerável dos conteúdos e das atividades propostas nas duas etapas anteriores já tenham sido tratados ao longo do 1º grau, ou então, que o número de aulas disponível para Geometria seja maior que a média. Nesses casos, pode se utilizar o tempo disponível no 2º grau, essencialmente, para esta etapa final de organização, com um maior aprofundamento nas noções de lógica e nas demonstrações dos resultados estudados.

8 BIBLIOGRAFIA

BARBER, Stephen F. Filosofia da matemática. Rio de Janeiro, Zahar, 1969.

BOYER, Carl B. História da matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blücher/UNESP, 1974.

BRUNER, Jerome S. O Processo da educação. Trad. Lobo L. de Oliveira. 4ª ed. São Paulo, Nacional, 1974.

CARAÇA, B. de Jesus. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa, Brás Monteiro, 1975.

CARVALHO, Moema Sá et alii. Fundação da matemática elementar. Rio de Janeiro, Campus, 1984.

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la matemática moderna. Trad. Felipe Robledo Vázques, México, s.ed., 1973.

CASTRUCCI, Benedito. Lições de geometria plana. São Paulo, Nobel, 1963.

DANTZIG, Tobias. Número: a linguagem da ciência. Trad. sérgio Goes de Paulo. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

DIENES, Z. P. Aprendizado moderno da matemática. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

FELLER, William. Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações. São Paulo, Edgard Blücher, 1976.

KARLSON, Paul. A magia dos números. Rio de Janeiro, Globo, 1961.

MACHADO, Nilson J. Matemática e realidade. São Paulo, PUC, 1984. Dissertação de Mestrado.

MEYER, Paul L. Probabilidade - aplicações à estatística. Trad. Ruy C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico/EDUSP, 1969.

MIALARET, G. A aprendizagem matemática. Trad. Marcelino Paiva, Coimbra, Almedina, 1975.

MOISE & DOWNS. Gemetria moderna. Trad. Renate Watanabe. São Paulo, Edgard Blücher, 1971.

PIAGET, J. et alii. La enseñanza de las matemáticas. Madrid, Aguillar, 1968.

POPPER, Sir Karl R. Conhecimento Objetivo. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, Editora Itatiaia Limitada, 1975.

RIBEIRO, Maria Luiza Santos. A Formação Política do Professor de 1º e 2º graus. São Paulo, Cortez Editora - Autores Associados, 1984.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Subsídios para a implementação da proposta curricular de Matemática para o 2º grau - volume 1. São Paulo, SE/CENP, 1980.

________. Subsídios para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau - volume 2. São Paulo, SE/CENP, 1982.

________. Proposta curricular de Matemática para o 2º grau. São Paulo, SE/CENP, 1978.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. Matemática; curso colegial.Trad. Lafayette de Moraes. São Paulo, EDART, 1973.

SOLOMON, Charles. Matemática. São Paulo, Edições Melhoramentos, Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

UNESCO. Educación Matemática em las Américas - V. Montevideo, Oficina Regional de Ciência e Tecnologia de la UNESCO para América Latina e Caribe, 1979.

FOTOLITOS E IMPRESSÃO
IMPRENSA OFICIAL
DO ESTADO S.A. IMESP
Rua da Mooca, 1921 — Fone: 291-3344
Vendas, ramais: 257 e 325
Telex: 011-34557 — DOSP
Caixa Postal: 8231 — São Paulo
C.G.C. (M.F.) N.º 48.066.047/0001-84

NOVO TEMPO
TRABALHO E DESENVOLVIMENTO

IMPRENSA OFICIAL
DO ESTADO S.A. IMESP
SÃO PAULO – BRASIL
1991
NOVO TEMPO
TRABALHO E DESENVOLVIMENTO