diante de uma situação. Além disso, corresponde à maneira de escrever e ler as sentenças comuns, não aritméticas.

Segundo, porque o aluno deve aprender a dispor o trabalho na forma vertical (ou de cálculo), por êle mesmo, apenas quando tais formas venham facilitar o cálculo. Num problema da vida diária, o aluno não encontra os numerais arrumados para êle. Conseqüentemente, depois das experiências básicas de aprendizagem, já se pode esperar que êle próprio disponha de forma apropriada o cálculo que vai efetuar. Saber dispor seus cálculos e arranjá-los na forma conveniente são coisas que o aluno precisa aprender. Dispor os exemplos para êle sempre na forma vertical, prontos para computar, envolvendo muitas vêzes um cálculo que poderia ser feito "de cabeça", ressalta apenas o mecanismo das operações e nenhuma contribuição pode trazer ao aluno que precisa aprender a decidir por êle próprio o que fazer em situações reais.

MULTIPLICAÇÃO

Muitos alunos no 4º estágio serão beneficiados com um reensino completo do processo de multiplicação iniciado no 3º estágio. A matéria para reensino pode ser organizada em duas etapas. Na 1ª deve mostrar-se aos alunos como multiplicar quando um numeral de dois algarismos é usado. (Para uma discussão sôbre a diferença entre "número e numeral", ver página 14 na seção para o 1º estágio.)

Quando os alunos compreendem o sistema de numeração de base dez, o processo de multiplicação pode ser visto como uma simples operação de reagrupamento mais ou menos elaborada.

Neste processo, grupos de dez, de cem, de mil e assim por diante, desempenham um importante papel. Múltiplos de números básicos como 10, 100, 1 000 etc. (por exemplo, 20, 30, 200, 4 000) são também importantes no processo de multiplicar. Muitos alunos vão precisar de reensino que os ajude a recordar o que acontece quando se multiplica 10 ou múltiplos de 10 por um número representado por um só algarismo. São as idéias implícitas nessas multiplicações que vão ser usadas para ajudar o aluno a compreender como multiplicar um número qualquer por outro expresso por um algarismo.

As multiplicações cujo multiplicador é um numeral de dois ou mais algarismos envolvem uma multiplicação por 10 ou múltiplo de 10. O reagrupamento nesta situação é diferente do que se faz quando se multiplica 10 ou um múltiplo de 10 por um numeral de um algarismo, o que pode fàcilmente ser demonstrado com objetos e gravuras. Apesar disso, o produto 30×2, por exemplo, é o mesmo que o produto 2×30. O último exemplo sugere 2 grupos de 3 dezenas cada, que fazem 6 dezenas ou 60. Portanto, 30×2 ou 30 grupos de 2 são 60. Exemplos dessa natureza

conduzem os alunos à generalização de que o produto de um numeral de um algarismo por um numeral terminado em zero também termina em zero. A multiplicação por um número que termine em dois ou mais zeros envolve generalizações semelhantes. Convém fazer uma revisão e, se necessário, reensinar êstes conhecimentos no 4º estágio, pois ajudarão a criança a compreender as multiplicações por números representados por dois algarismos.

É preciso que o aluno perceba, por exemplo, que para multiplicar por 36, multiplica-se primeiro por 6, depois por 30, e, finalmente, reúnem-se os dois produtos parciais pela adição. A multiplicação envolve uma variação do processo de "reserva". Essa variação requer ensino cuidadoso. Sempre que a multiplicação resulta em 10 ou um número maior que 10, o número de dezenas deve ser guardado, até que a próxima multiplicação seja feita e, então, o número guardado será adicionado ao resultado dessa multiplicação. Essa seqüência é diferente da usada em adição, quando a "reserva" é adicionada imediatamente.

A "reserva" na multiplicação pode ser demonstrada com objetos, deixando-se a criança ver como, em cada etapa, os grupos de 10 são deixados de lado, até que se complete a próxima etapa da multiplicação.

De maneira semelhante, na multiplicação envolvendo números de 3 algarismos, qualquer centena obtida da multiplicação e reagrupamento de dezenas precisa ser guardada, até que se faça a multiplicação das centenas.

É claro que êsse procedimento pode estender-se à multiplicação de números representados por mais de 3 algarismos. À medida que se trabalha com números maiores, as demonstrações com objetos tornam-se mais difíceis. Por isso, é importante ajudar o aluno a compreender a natureza do processo de multiplicação, usando progressivamente, o simbolismo. O grande poder da Matemática está no emprêgo dos símbolos para economizar tempo e energia.

DIVISÃO

É comum hoje em dia ensinar a divisão pelo processo longo (com 1 algarismo no divisor e 2 algarismos no quociente) no 3º estágio. É também possível, nesse estágio, ensinar a divisão com 2 algarismos no divisor e 2 algarismos no quociente. Quer se tenha feito êsse ensino no 3º estágio, quer não, convém que haja, no 4º estágio, o reensino da divisão pelo processo longo com um número de um algarismo no divisor. Isto leva, conseqüentemente ao ensino (ou reensino) da divisão por um número de 2 algarismos no divisor.

A divisão é geralmente considerada como o mais difícil processo básico. Uma das razões é o fato de ela não ser um processo direto, como a adição e a multiplicação, e de exigir habilidades em estimar e ajustar o quociente até nos mais simples exemplos.

Os algarismos do quociente devem ser estimados, etapa por etapa, e se em alguma etapa a estimativa não é conveniente, antes que se possa continuar o processo, é preciso fazer-se uma correção ou mesmo uma nova estimativa.

É bom lembrar que o processo de computar em divisão é baseado na subtração de grupos iguais, que são subtraídos até que se extinga todo o grupo original (que é o dividendo). Convém demonstrar o processo com objetos e desenhos, antes de introduzi-lo simbòlicamente. [57]

De início, nenhum esfôrço deve ser feito para subtrair o maior número possível de grupos iguais. Para efetuar a divisão 864 ÷ 50, costuma-se subtrair primeiro 10 grupos de 50, ou 500, e, depois, subtrair 7 grupos de 50, ou 350, para obter o quociente completo de 10 + 7, ou 17 e o resto de 14. Entretanto, em vez de subtrair 7 grupos de 50 no segundo passo, seria perfeitamente possível subtrair apenas 5 grupos de 50. Depois, numa terceira tentativa, seriam subtraídos mais 2 grupos de 50 para obter-se o quociente 10 + 5 + 2 = 17.

A maior dificuldade em divisão surge do hábito de insistir que se use o quociente "certo" em cada etapa.

Mesmo as pessoas mais amadurecidas e hábeis nem sempre conseguem o quociente "certo" na primeira tentativa. No entanto, corrigem seu trabalho e continuam a dividir. Costuma fazer-se essa correção, apagando o trabalho feito com a estimativa incorreta, para iniciá-lo novamente. Um modo mais simples é continuar o trabalho e ajustar o quociente à medida que a operação continua a ser feita. Recomenda-se essa maneira de proceder na introdução do processo. À proporção que a criança adquire maturidade e habilidade será conduzida gradualmente a melhorar suas estimativas. Não se deve esquecer de que, no início, compreender o processo é mais importante que estimar eficientemente.

Algumas das chamadas "dificuldades" em divisão têm sido consideradas como diferentes etapas a serem vencidas e, por isso, são ensinadas separadamente. Tais "dificuldades" incluem a colocação dos algarismos "abaixados" do dividendo e os casos típicos de "dificuldades com zero". Essas "dificuldades" surgem, quando o ensino da divisão baseia-se em regras aprendidas sem compreensão (divida, multiplique, subtraia, "abaixe o algarismo seguinte" etc.). O ensino da divisão longa pelo método que apresentamos, além de facilitar a compreensão do processo, desenvolve também a habilidade em dividir.

Eventualmente os alunos precisam aprender como operar com exemplos mais complexos de divisão. Precisam também desenvolver outros conhecimentos que os tornem cada vez mais eficientes no uso do processo. Tais conhecimentos devem ser introduzidos gradualmente, sendo um dos mais importantes, saber que o divisor e o dividendo podem ser multiplicados ou divididos pelo mesmo número sem que o quociente se altere. Por exemplo, dividindo 98 por 14 teremos o quociente 7 (98 ÷ 14 = 7). Poderíamos, entretanto, dividir 98 e 14 por 2. Teríamos, então, a divisão 49 ÷ 7, que é um fato fundamental. O quociente 7 foi o mesmo em ambas as divisões. Êste conhecimento facilita a compreensão do "porquê" o divisor e o dividendo são arredondados na estimativa dos quocientes parciais. Além disso, tal conhecimento dá base para compreender a divisão envolvendo "decimais".

Muitos métodos de estimar os algarismos do quociente baseiam-se no arredondamento do dividendo e do divisor. O arredondamento de números é uma idéia importante em si mesma e possui muitos empregos além da estimativa do quociente. Aqui, entretanto, êle será encarado, principalmente, pelo papel que desempenha em divisão. Convém notar que regras formais como as que no passado receberam nomes como "método do quociente aparente" e "método do acréscimo de um" não serão abordados aqui, pois tais regras não são coerentes com a orientação que adotamos.

Inicialmente, o aluno pode aprender a arredondar números para mais ou menos. Por exemplo, quando 285 é arredondado para a centena mais elevada e mais próxima, é substituído por 300. Quando arredondado para a centena inferior mais próxima, é substituído por 200. Com êste conhecimento e o de que se pode substituir 180 ÷ 30 por 18 ÷ 3, o aluno está pronto para compreender o método de estimar os quocientes parciais num caso como 64 895 ÷ 871. Neste exemplo será preciso saber arredondar o divisor para a centena mais próxima e mais elevada. Então, mentalmente, o aluno irá substituir 871 por 900. Em seguida, arredondará o dividendo para menos. Assim, 64 895 será substituído por 63 000 porque êste número é divisível por 900. Então, lembrando que o divisor e o dividendo podem ser divididos pelo mesmo número sem afetar o quociente, o aluno dividirá 900 e 63 000 por 100. Isso reduz o problema à divisão de 630 por 9, cujo quociente é 70. Assim, poderá usar 70 como primeiro quociente parcial. O segundo quociente parcial, seguindo a mesma técnica de estimativa, será 4, como aparece no primeiro exemplo a seguir.

(a)		(b)		(c)	
64 895	871	54 000	72	54 000	72
60 970	70	42 200	600	50 4	750
3 925	4	10 800	100	3 60	
3 484		7 200		3 60	
441	74	3 600	50	00	
		3 600			
			750		

Êsse mesmo método de estimar, aplicado ao segundo exemplo (54 000 ÷ 72), leva a pensar em 48 000 ÷ 80 = 600. Assim, a subtração a ser feita (subtrair de 48 000, 600 grupos de 72) não apareceria na divisão convencional. Entretanto, não há necessidade de usar a borracha e começar de nôvo. O quociente parcial, estimado dessa maneira, pode não ser o verdadeiro, mas será sempre menor que êle. Conseqüentemente não há necessidade de apagar o trabalho iniciado, podendo computar-se sem interrupção. A segunda vantagem dêsse método é encontrar-se o quociente parcial verdadeiro com mais facilidade que arredondando o divisor para menos. Terceiro, evita a necessidade de ensinar certas regras auxiliares, necessárias em casos especiais e que sempre surgem quando outros métodos são usados. Por isso, êsse método de estimar quocientes parciais é chamado método da "regra única".

A segunda divisão, quando resolvida pelo método convencional, como mostra o exemplo (c), ilustra uma das "dificuldades com zero" mencionadas antes. Alunos que aprenderam a dividir pelo método convencional têm, muitas vêzes, dificuldade de encontrar a resposta 750 porque esquecem do "zero" final do quociente. Usando o método que estamos discutindo, tal êrro ocorre em menor escala.

A pesquisa e a experiência mostram que na prática, crianças e adultos desenvolvem uma variedade de métodos para estimar os quocientes parciais, o que deve ser estimulado. Mas, no início, quando o objetivo principal deve ser o desenvolvimento da compreensão, é importante que o mecanismo do processo seja simplificado, tanto quanto possível. A divisão longa, usada atualmente, já é uma forma abreviada do processo que se desenvolveu através de muitos anos. Leva à economia de tempo para os que já são hábeis em computar, mas é muito difícil para ser usado no início do ensino do processo.

Convém considerar, também, a maneira correta de interpretar o resto da divisão. O resto pode ser sempre usado para formar uma fração, mas o número assim obtido nem sempre é significativo. A interpretação do resto precisa ser cuidadosamente ensinada. A criança deve aprender a evitar respostas absurdas, sem sentido. Precisa lidar com situações nas quais se perceba, fàcilmente, que o resto pode permitir o arredondamento do quociente para um número inteiro e, também, com situações nas quais o resto possa ser usado para formar uma fração. Precisam aprender a decidir quando será conveniente proceder desta ou daquela maneira.

A interpretação do resto depende da situação em que a divisão é usada. Se a situação envolve objetos que podem ser fracionados, o resto pode ser usado em forma de fração. Por exemplo, 2 crianças podem repartir entre si 11 barras de chocolate igualmente, se cada uma ficar com 5 1/2 barras. Entretanto, se 3 meninas têm 16 balões, não é razoável reparti-los igualmente; 5 1/3 balões como resposta a êsse problema revela falta de atenção ou falta de compreensão da situação. Instruir o aluno (logo que aprende a usar frações) a aproveitar sempre o resto para formar uma fração, não constitui prática aconselhável. É preciso aprender a interpretar o resto de acôrdo com a situação. O resto é usado, às vêzes, de maneira difícil de ser interpretada. Médias constituem um exemplo. Às vêzes, a imprensa usa frases como: "O número médio de pessoas era 91,3". O "senso comum" leva-nos a concluir que êste dado deveria ser expresso como 91, o que na realidade deturparia a sua significação. Portanto, expressões como essas que constituem exceções ao "senso comum" e que surgem em estatística e em aplicações semelhantes não devem ser discutidas com as crianças nessa etapa da aprendizagem.

Múltiplos e divisores

DIVISIBILIDADE

Paralelamente ao estudo da divisão e multiplicação, convém desenvolver os conceitos de "múltiplo" e "divisor".

Chama-se ao resultado de uma multiplicação de "produto" e aos outros números nela envolvidos de "fatôres".

Assim, em $5 \times 7 = 35$, 5 e 7 são fatôres de 35. Também se poderia dizer que 5 e 7 são "divisores" de 35 e que 35 é múltiplo de 5 e 7, pois 35 pode ser dividido por cada um dêsses números, (5 e 7), sem deixar resto.

5 e 7 são um par de fatôres de 35, porque $5 \times 7 = 35$.

Outro par de fatôres de 35 seria 1 e 35, pois $1 \times 35 = 35$. Assim, 35 tem dois pares de fatôres: 5×7 e 1×35. Portanto, todos os fatôres de 35 são: 1, 5, 7 e 35. Diz-se, então, que 35 é um "número composto" pois admite mais que um par de fatôres.

Os números podem ser expressos em pares de fatôres. Por exemplo, pode escrever-se 72 usando os seguintes pares de fatôres: 1×72, 2×36, 3×24, 4×18, 6×12, 8×9. Logo, todos os fatôres de 72 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 e 72.

Outra maneira de exprimir essa situação seria dizer que: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 e 72 são divisores de 72 e que 72 é múltiplo de todos êsses números ou, ainda, que 72 era divisível por êsses números.

Convém que o aluno adquira a noção de que os números chamados "primos" são os que têm apenas um par de fatôres diferentes, o fator 1 e o próprio número. 9 = 3×3

$$2 = 1 \times 2$$
$$3 = 1 \times 3$$
$$7 = 1 \times 7$$
$$11 = 1 \times 11$$
$$13 = 1 \times 13 \quad \text{etc.}$$

Portanto, os números primos não têm mais que dois divisores.

É interessante levar o aluno a concluir que os números também podem ser expressos por um produto de apenas fatôres primos:

72	72	72
8×9	2×36	4×18
$\overbrace{2 \times 4} \times 3 \times 3$	$2 \times \overbrace{4 \times 9}$	$4 \times \overbrace{2 \times 9}$
$2 \times \overbrace{2 \times 2} \times 3 \times 3$	$2 \times \overbrace{2 \times 2} \times \overbrace{3 \times 3}$	$\overbrace{2 \times 2} \times 2 \times \overbrace{3 \times 3}$

Logo, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

Costuma introduzir-se essa noção de maneira puramente mecânica, levando o aluno a usar o algaritmo convencional para "decompor o número em fatôres primos", antes de obter-se qualquer compreensão. Essa falta de compreensão é evidenciada e responsável pela prática inconveniente de muitos alunos usarem o algoritmo para escrever em fatôres primos números simples como 6 (2×3), 15 (3×5), 8 ($2 \times 2 \times 2$), etc.

Orientando-se o ensino com base na compreensão, consegue-se que o aluno adquira uma boa habilidade em escrever, "de cabeça", um número como um produto de fatôres primos.

MÚLTIPLOS DE 2, 5 E 10

Uma vez compreendidas as noções de múltiplos e divisores, será útil aprender as características dos numerais que representam números divisíveis por 2, 5 e 10. Às vêzes é possível e inteligente, antes de fazer a divisão, dizer-se se o número que se pretende dividir permite ou não uma divisão exata. Daí, a importância do conhecimento de alguns caracteres de divisibilidade dos números, quando fáceis de reconhecer.

O domínio dos princípios que estruturam o sistema decimal de numeração permite que a criança compreenda porque é bastante observar os algarismos das unidades simples para dizer se um número é ou não divisível por 2, 5 ou 10.

Suponhamos que se precise saber se 4 278 permite uma divisão exata por 2, 5 e 10.

Pode reagrupar-se 4 278 da seguinte maneira:

4 000	($4 \times 1\,000$)
200	(2×100)
70	(7×10)
8	(8×1)

Não será difícil levar a criança a compreender, através de demonstrações com objetos concretos e desenhos, que, se 10, 100 e 1 000 são divisíveis por 2, qualquer conjunto de dezenas, centenas ou milhares, também o será. Logo, para se conhecer os números divisíveis por 2 basta examinar o algarismo das unidades simples.

Para alcançar essa compreensão convém usar nas primeiras experiências números menores do que os que usamos como exemplo.

No decorrer dessa aprendizagem, a criança será guiada no sentido de chegar a generalizações como:

- se o número de unidades simples pode ser dividido por 2, o número todo pode ser dividido por 2;
- qualquer número pode ser dividido por 2, se o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8;
- qualquer número par pode ser dividido por 2.

De maneira semelhante, pode demonstrar-se a divisibilidade por 5 e 10, levando a criança a concluir que todos os múltiplos de 10 são representados por numerais terminados em 0, e os múltiplos de 5, por numerais terminados em 0 ou 5.

Embora não tão fáceis de reconhecer, as características dos numerais que representam números divisíveis por 4, 8, 3 e 9 também podem merecer atenção, desde que o professor julgue conveniente. Para isso deverá observar a receptividade dos alunos para uma verdadeira compreensão dos princípios que conduzem às generalizações de onde se concluem as regras práticas.

Cálculo mental

Já se falou da importância que têm na vida prática, os cálculos feitos "de cabeça". Portanto, o uso de processos abreviados capazes de facilitá-los precisam ser estimulados em cada estágio alcançado pelo aluno.

Convém lembrar, entretanto, que a habilidade de computar sem papel e lápis depende, é claro, da capacidade de cada criança e que, os processos usados podem variar grandemente. Cabe ao professor apresentar princípios gerais e deixar que o aluno os utilize de acôrdo com suas possibilidades.

Qualquer processo original utilizado pela criança deve ser valorizado, cabendo ao professor encorajá-la a criar suas próprias técnicas para fazer cálculos "de cabeça".

No 4º estágio, o aluno já deve ter adquirido certo domínio no processo de multiplicar, compreendendo, por exemplo, que para multiplicar por 12, multiplica-se por 2 e depois por 10 ou vice-versa. Com base nesse conhecimento e na compreensão do importante papel que desempenham na multiplicação números básicos como 10 e 100, é interessante desenvolver alguns processos abreviados para multiplicar mais ràpidamente por 11, 9, 5, 15, 25 ou por números múltiplos de 10.

Para multiplicar por 11 e por 9, é preciso compreender, por exemplo, que se 10 vêzes 35 são 350, 11 vêzes 35 (mais uma vez 35) serão 350 mais 35, ou seja, 385. Do mesmo modo, se 10 vêzes 35 são 350, 9 vêzes 35 (menos uma vez 35) serão 350 menos 35, ou seja, 315.

Para multiplicar por 5, pode pensar-se da seguinte maneira: 10 vêzes 24 são 240; 5 vêzes 24 (a metade do número de vêzes) será a metade de 240, ou seja, 120.

Compreensão semelhante envolve o processo abreviado de multiplicar por 15. Para obter-se 15 vêzes um número, é possível reunir primeiro 10 vêzes o número e adicionar a êsse total mais 5 vêzes o número. Consideremos como exemplo a multiplicação 15×12. É fácil saber que 10 vêzes 12 são 120. Para achar 15 vêzes 12, falta somar ainda 5 vêzes 12 (metade de 10 vêzes 12), ou seja, a metade de 120. Logo, 15 vêzes 12 são 10 vêzes 12 mais a metade dêsse produto ($120 + 60 = 180$).

Entre os processos abreviados de que a criança pode lançar mão para o cálculo "de cabeça", ainda merece atenção a multiplicação por 25. Por exemplo, é fácil obter 100 vêzes 32 ($100 \times 32 = 3200$). Para obter 25 vêzes 32 (a quarta parte do número de vêzes) bastará tomar a quarta parte dêsse produto ($3200 \div 4 = 800$).

O trabalho no 4º estágio oferece oportunidade para um contínuo crescimento da habilidade de calcular "de cabeça". Situações envolvendo multiplicações como as apresentadas acima, podem conduzir o aluno às seguintes generalizações:

a) Multiplicar por 11 é multiplicar por 10 e somar o número uma vez.
b) Multiplicar por 9 é multiplicar por 10 e subtrair o número uma vez.
c) Multiplicar por 5 é multiplicar por 10 e achar a metade do produto.
d) Multiplicar por 15 é multiplicar por 10 e somar a metade do produto.
e) Multiplicar por 25 é multiplicar por 100 e achar a quarta parte do produto.

Outros processos abreviados são possíveis quando multiplicações e divisões envolvem múltiplos de 10. Muitas vêzes, êsses processos são apresentados meramente como "regras" e aplicados sem que se tenha conseguido a necessária compreensão. Entretanto, se o aluno compreender os princípios do sistema de numeração decimal não terá dificuldade em compreender generalizações como: — O numeral que exprime o produto terá todos os zeros finais do multiplicador e do multiplicando. Essa generalização permite que o aluno, para multiplicar 400×7000, escreva logo para produto 28 seguido de cinco zeros, ou seja, 2 800 000.

De maneira semelhante, ao dividir um múltiplo de 10 por outro múltiplo de 10, o aluno pode determinar imediatamente o número de zeros do quociente. Assim, se êle vai dividir 2 800 000 por 700 escreverá para quociente 4 seguido de apenas três zeros. Esta habilidade tem grande aplicação na estimativa de quocientes parciais na divisão longa.

Pares de números

CORRESPONDÊNCIA

A idéia de correspondência é de grande significação matemática[30]. Embora seja difícil precisar exatamente êsse conceito na Escola Primária, não é difícil levar o aluno a perceber algumas de suas diversas aplicações em situações-problema.

Se o aluno é capaz de ver, por exemplo, que: "se 6 maçãs custam Cr$ 300, 12 maçãs custarão Cr$ 600, terá vencido uma etapa na compreensão de importante aplicação da idéia de correspondência.

Os problemas quantitativos envolvem correspondência entre números e faz-se necessário um simbolismo convencional capaz de exprimir e comunicar essas idéias. Entre as mais simples correspondências matemáticas estão as que envolvem pares de números, notadamente as que se referem a relações e a comparações. Como acontece com outras idéias matemáticas, o uso dêsse tipo de correspondência na resolução de problemas quantitativos exige o emprêgo de um simbolismo adequado. Usa-se, então, um par de numerais: a *razão*.

Neste livro, em vez da habitual barra horizontal, usou-se uma barra inclinada (como em 12/15) na representação das razões, apenas para que os numerais ficassem impressos na mesma linha. Entretanto, dois pontos entre os numerais (como em 12:15) é outra maneira comum de escrever as razões.

Para representar a situação das maçãs, sugerida acima, podem ser usadas indiferentemente, entre outras, as razões: 6/300, 12/600, ou, ainda, a razão 2/100.

As idéias que acabamos de discutir são básicas na compreensão de determinadas situações da vida diária e aparecem freqüentemente em problemas verbais, que ganham maior sentido pela aplicação do conceito de correspondência. Segue-se daí que simbolizar as correspondências dêsse tipo através de razões constitui excelente recurso para a resolução de tais problemas.

Constantemente as crianças encontram duas importantes idéias matemáticas nas situações-problema: a idéia de *relação* e a idéia de *comparação*. Apesar da freqüência com que são encontradas muito pouco se tem dedicado ao ensino e ao desenvolvimento dessas idéias. Como resultado, o aluno fica sem o instrumento adequado para resolver os problemas que envolvem *relação*.

Quando uma medida é posta em correspondência com outra de espécie diferente, fica estabelecida uma relação. Essa idéia é simples e muito comum em situações da vida diária.[7] Suponhamos, por exemplo, que 12 balas custem Cr$ 60. Essa sentença exprime uma relação e dois numerais são necessários para exprimi-la. O numeral 12 mostra o número de balas; o numeral 60, o número de cruzeiros necessários para comprá-las. Há uma correspondência de 12 balas para Cr$ 60. Em outras palavras, há uma relação entre o número de balas e o seu preço. A mesma relação pode ser estabelecida de outras maneiras: 4 balas por Cr$ 20, ou 8 balas por Cr$ 40.

Quando se estabelece a relação do problema como "12 balas por Cr$ 60, os numerais 12 e 60 são usados para exprimir a relação que, nesse caso, será simbolizada pela razão 12/60, que se lê 12 para 60". A mesma relação pode ser expressa pela razão 4/20 (4 para 20) ou pela razão 8/40 (8 para 40). Cada uma dessas *razões* exprime a mesma *relação*.

Suponhamos, agora, que um trem faça 120 km em 2 horas. A relação "120 km em 2 horas" é a mesma que "60 km em 1 hora" ou, como se costuma exprimir, 60 km por hora. A relação nesse caso é expressa pela razão 120/2 ou 60/1.

Convém lembrar, portanto, que um numeral escrito sôbre o outro nem sempre representa uma fração. Por exemplo, no caso das "balas" e dos "cruzeiros", não se pode dizer que "a bala é uma fração do dinheiro".

Qualquer uma das diferentes razões ou par de numerais que representam uma relação pode ser usada para exprimi-la. O aluno aprenderá que as razões 4/20, 8/40, 12/60 e outras, são tôdas maneiras de exprimir a mesma relação no problema da compra das balas. Conseqüentemente, é correto escrever-se $1/5 = 2/10 = 4/20 = 8/40 = 12/60$. Essa igualdade será compreendida pelo aluno se êle puder ver várias maneiras de agrupar as balas e os cruzeiros, mantendo a mesma relação.

Há métodos computacionais para mostrar que duas diferentes expressões (como 4/20 e 8/40) representam, na realidade, a mesma relação. Entretanto, nessa altura da aprendizagem, em que a atenção deve voltar-se para o desenvolvimento do conceito a ser formado, não convém introduzir êsses métodos, deixando-se para mais tarde detalhes como maneira de computar.

Também as situações de comparação envolvem dois grupos de objetos e, ainda aqui, será preciso usar um par de numerais para exprimir a comparação. Por exemplo, suponhamos que José tenha 10 modelos de avião e que Paulo tenha 15. Se Paulo disser: "José, eu tenho 15 aviões para cada 10 aviões seus", estará enunciando uma comparação que se exprime pela razão 15/10. A mesma correspondência poderia ser expressa por outras razões (por exemplo, 3/2 e 9/6).

Tomando como base de comparação os aviões de José, teríamos uma razão diferente (10/15).

A idéia de comparação surge da correspondência grupo a grupo de elementos da mesma espécie.

Frações

Outra idéia que envolve um "par de números" é a idéia de fração.

A fração, de grande importância em Matemática, tem sido considerada dos assuntos mais difíceis, provàvelmente, pelo fato de sua compreensão exigir muitas idéias.

Antigamente, esperava-se que os alunos operassem com as frações (reduzindo à expressão mais simples, adicionando, subtraindo, multiplicando e dividindo) antes de compreender o significado dos símbolos nelas envolvidos. Faltando compreensão e "insight", professor e aluno tiveram necessidade de lançar mão de um complexo conjunto de regras, aprendido à custa de trabalho penoso — repetição e mais repetição. Em tais circunstâncias, inevitàvelmente, muitos alunos deixavam de alcançar os objetivos desejados.

No programa moderno de Matemática, um trabalho mais sério com frações pode ser iniciado no 4º estágio. Nos estágios anteriores, o objetivo principal deve ser introduzir o conceito de fração sem preocupação em desenvolver ainda os processos de cálculo. No 4º estágio, se cuidará de aprofundar a compreensão já obtida, iniciando-se o ensino da adição e subtração de frações e números mistos. Também os exemplos simples de multiplicação e divisão serão introduzidos nesse estágio.

Pesquisas e teorias modernas da aprendizagem têm mostrado a grande importância de se desenvolver compreensão antes de qualquer esfôrço para aprender as regras que levam à habilidade em computar. [47]

A compreensão de frações depende do reconhecimento da distinção entre numeral fracionário (o símbolo da fração) e a idéia que êste numeral representa (a fração em si). É a mesma distinção que existe entre "número" e "numeral". Compreende-se melhor tal distinção considerando-se um exemplo: Suponhamos que um menino parta uma barra de chocolate em quatro partes iguais e coma uma parte, deixando sòmente três. Êle pode descrever a parte restante da barra de chocolate dizendo "três quartos", ou escrevendo o numeral fracionário $\frac{3}{4}$.

Entretanto, poderá usar outras formas (por exemplo $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{75}{100}$) para descrever a mesma fração (ou parte) da barra. Portanto os numerais fracionários $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ podem ser pensados como duas diferentes maneiras de representar a mesma fração.

A idéia de fração é usada em situações onde apenas parte de alguma coisa é considerada. Um numeral fracionário diz quanto está sendo considerado de uma coisa inteira, tomada como unidade, e, portanto, representada por 1. Suponhamos, por exemplo, que se divida alguma coisa em três partes iguais e se tome duas dessas partes. O aluno deverá aprender que para simbolizar a correspondência entre estas 2 partes e o inteiro original usa-se uma nova espécie de numeral, isto é, o numeral fracionário $\frac{2}{3}$, onde o "3" mostra o número de partes iguais em que se dividiu o inteiro e o "2", o número de partes que se considerou. O numeral todo ($\frac{2}{3}$) mostra quanto está sendo considerado do inteiro. Essa parte considerada, (que se representa por $\frac{2}{3}$) guarda com o inteiro (representado por 1) a mesma correspondência que há de 2 para 3. Essa idéia é fundamental. O conceito de fração envolve ainda outras idéias, mas sua idéia fundamental é a que acabamos de discutir.

Redução de razões e numerais fracionários

A idéia de que diferentes razões podem ser usadas para exprimir a mesma relação ou a mesma comparação já foi discutida (ver páginas 87 e 88). Vimos que, estudando grupos de objetos, o aluno aprende que a relação 12/15 pode ser expressa como 4/5 e 8/10. Recomendamos que, de início, não convém tentar explicar por métodos computacionais porque uma razão pode ser expressa em outros têrmos. Note-se que a variação dos têrmos faz-se em dois sentidos, podendo-se dividir ou multiplicar cada têrmo pelo mesmo número.

Também as frações são expressas em têrmos maiores ou menores. Entretanto, pode considerar-se 4/5 e 8/10 como frações diferentes, pois 4/5 e 8/10 correspondem a diferentes maneiras de partir um objeto físico. Assim consideradas, tais frações representam o mesmo número racional, mas não são iguais. Número racional é um conceito abstrato que se deriva do ato de pensar em todo um conjunto de frações equivalentes como 4/5, 8/10, 16/20, etc., que representam o mesmo número (classe de equivalência). Cada um dêsses numerais é um nome para uma fração diferente, mas representam o mesmo número racional.

O conceito de número racional não precisa ser introduzido antes do 1º ano ginasial, não sendo também necessário fazer nenhum esfôrço na escola primária para distinguir número racional de fração. Entretanto, informalmente, pode desenvolver-se a idéia de número racional, como, por exemplo, trabalhando com a linha numerada (ver página 93).

Segundo a orientação desenvolvida no ensino de razões, o aluno aprenderá agora a substituir um numeral fracionário por outro equivalente. Assim, aprenderá que pode encontrar um par de números equivalentes dividindo (ou multiplicando) ambos os têrmos de um dado par, por um mesmo número. Por exemplo, o par 6/10 pode ser substituído pelo par 3/5, dividindo-se 6 e 10 por 2. De maneira semelhante, o mesmo par (6/10) pode ser substituído por 12/20, multiplicando-se 6 e 10 por 2. Como pares de números equivalentes que exprimem a mesma correspondência, as razões podem ser usadas para formar equações como $6/10 = 3/5$.

Às vêzes é conhecida uma determinada razão e se conhece também um dos têrmos de uma razão a ela equivalente. O problema é encontrar o outro têrmo da equivalente. Também com as frações essa situação ocorre, sendo preciso ensinar ao aluno a encontrar o têrmo desconhecido. Essa habilidade é de grande importância, pois é encontrada fundamentalmente na solução de uma variedade de problemas. Para citar apenas um exemplo, encontramos seu emprêgo na adição e na subtração de frações, quando é preciso substituir frações por outras equivalentes que tenham um denominador comum.

Operações com frações

FRAÇÕES IMPRÓPRIAS E NÚMEROS MISTOS

No sentido primitivo, uma fração representa uma ou mais partes iguais em que se dividiu alguma coisa considerada como unidade. Partindo dêste ponto de vista, parece sem sentido interpretar o par de números 7/5 como "7 das 5 partes iguais de uma coisa"; assim 7/5 não pode representar uma "fração própria", porque não é pròpriamente uma fração. Entretanto, convém lembrar que matemàticamente, as frações diferem dos números naturais (números naturais são os chamados números de contagem — 1, 2, 3, 4 etc., e que são, às vêzes, chamados números inteiros). Uma diferença importante é que a mesma fração pode representar quantidades diferentes e os números naturais, não.

Por exemplo, 2/5 de um queijo pode ser muito menos que 2/5 de um queijo maior.

Em contraste, o número 5 representa sempre a mesma cardinalidade, não importando o tamanho, a forma ou as outras características físicas dos objetos que estão sendo contados. Em situações diferentes, a fração 2/5, por exemplo, só representará a mesma quantidade se a unidade considerada fôr a mesma.

isto também acontece com os queijos inteiros!

2/5 de um queijo será igual a 2/5 de outro queijo sòmente se os dois queijos forem do mesmo tamanho.

Suponhamos que duas ou mais unidades sejam as mesmas ou "iguais". Se cada uma dessas unidades é dividida no mesmo número de partes, essas partes serão iguais. Por exemplo, consideremos 2 discos circulares com o mesmo diâmetro, divididos em 5 partes iguais. Nessa situação o par de números 7/5 seria usado para representar 7 dessas partes iguais. Por extensão do significado fundamental de fração, considera-se 7/5 como um numeral fracionário que representa a chamada fração imprópria.

Observe-se que a quantidade representada por uma fração imprópria pode ser expressa também por uma adição de um número natural e uma fração. Assim, $7/5 = 1 + 2/5$. Geralmente essa expressão é abreviada para 1 2/5. Numerais como êsse recebem o nome de "números mistos".

Essas idéias foram introduzidas informalmente no 3º estágio, através de atividades baseadas na percepção de situações concretas. No 4º estágio a criança aprenderá como substituir o numeral de uma fração imprópria por outro representando um inteiro mais uma fração própria — ou seja, um número misto.

Objetivações com material concreto ajudarão a compreender que embora a quantidade considerada não mude, os símbolos usados para representá-la podem tomar diferentes formas.

DENOMINADORES COMUNS

As frações não seriam úteis como números se não fôsse possível compará-las (dizer se uma fração é maior que outra), ou se não fôsse possível adicionar duas frações ou subtrair uma de outra.

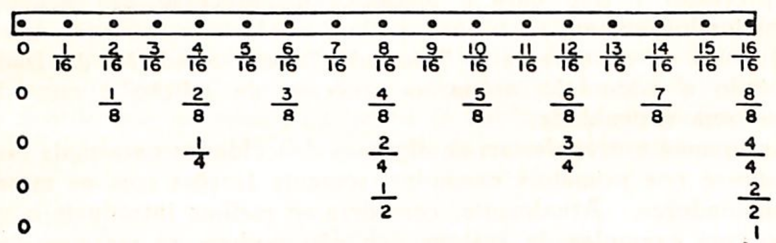
Uma idéia básica torna possível a comparação, a adição e a subtração de frações — o uso do denominador comum.

Duas frações são fàcilmente comparadas se forem representadas por numerais fracionários que tenham o mesmo denominador. Assim, comparam-se os numerais que representam os numeradores; o maior numerador pertence à maior fração.

Da mesma forma, se queremos somar frações, elas são representadas por numerais fracionários que tenham o mesmo denominador. A soma dos numeradores será o numerador do nôvo numeral fracionário, que terá o mesmo denominador das frações somadas. Essa nova fração é a soma das frações em questão.

É claro que a mesma idéia de denominadores comuns se aplica aos casos de subtração.

A criança precisa aprender os princípios que fundamentam as operações com frações. Geralmente, aconselha-se ensinar a idéia de denominador comum antes de o aluno aprender a somar frações, em vez de introduzir essa idéia como um passo do próprio processo de calcular. Se a criança possuir boa compreensão da idéia de denominador comum e tiver suficiente habilidade em trocar numerais fracionários por outros que tenham o mesmo denominador, terá sua aprendizagem de adição e subtração de frações grandemente simplificada. As crianças podem ser iniciadas na idéia de denominadores comuns ao aprenderem a comparar frações. Essa habilidade é importante em si mesma e mais simples que a adição de frações. O desenvolvimento dêsse trabalho seria feito em duas etapas. Primeiro, a atenção seria focalizada na comparação. Um bom caminho para isso é dispor frações em ordem crescente numa "linha numerada", de modo que seja possível dizer, pela observação, se uma fração é maior ou menor que outra. Mais tarde, pode comparar-se as frações apenas pela observação dos números nelas usados (veja desenho abaixo).



A "linha numerada" é um recurso importante que assume papel de relêvo no estudo da Matemática. Pode servir de escala em várias representações gráficas e possibilita uma excelente introdução aos números negativos. Porém, essa introdução só será feita no 5º estágio.

Na segunda etapa do desenvolvimento, pode focalizar-se a atenção na idéia de denominador comum como um meio simples que ajuda a reconhecer se uma fração é maior ou menor que outra. Duas "linhas numeradas" adjacentes podem ser usadas para a introdução dessa idéia, mas métodos puramente numéricos (sem visualizações) devem ser desenvolvidos tão logo seja possível.

O desenvolvimento da idéia de denominador comum, como apresentamos acima, não deve ser olhado meramente como um conjunto de lições preliminares ao estudo da adição e subtração de frações. Êsse estudo é importante em si mesmo, pois é fundamental ao processo de comparar frações e à introdução da linha numerada.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES E NÚMEROS MISTOS

Tradicionalmente, adição e subtração de frações têm sido considerados processos difíceis de se aprender e guardar.

Isso, em parte, se deve ao fato de, até recentemente, os processos de ensino terem sido baseados na teoria conexionista de aprendizagem. Cada processo era analisado dentro de um conjunto extenso de "hábitos específicos" que eram, então, ensinados um por um, através do exercício.

Em contraste, um programa moderno dá ênfase à compreensão de princípios gerais da adição e subtração de frações antes de levar o aluno a desenvolver as habilidades de cálculo por meio de exercícios. Inicialmente, a criança deve aprender o significado da adição e da subtração de frações, por meios visuais e não mecânicamente.

A adição de frações está associada ao ato de combinar partes de objetos concretos, enquanto a subtração associa-se ao ato de tirar parte de um objeto, de uma parte maior ou do objeto inteiro.

Embora a idéia de denominador comum possa ser usada, uma vez que já foi introduzida, neste ponto a atenção deve voltar-se para a compreensão e não para a mecânica do processo de "achar" o denominador comum.

Quando se desenvolve a "prontidão" para a adição de frações seguindo a orientação acima, o processo de adição é aprendido quase sem dificuldade.

Antigamente, transferiam-se algumas dificuldades para mais tarde, usando-se nos primeiros exemplos, sòmente frações com os mesmos denominadores. Atualmente, considera-se melhor introduzir o processo com exemplos de frações que não tenham os mesmos denominadores, porquanto a adição de frações com os mesmos denominadores não oferece dificuldade.

Essa orientação está de acôrdo com o princípio segundo o qual para promover o desenvolvimento de "insight" é preciso introduzir o processo com exemplos tão representativos do processo completo, quanto possível.

Princípios semelhantes devem dirigir o ensino da adição de números mistos. O ensino começará por exemplos nos quais a soma das partes fracionárias dos dois números mistos seja maior que 1, de maneira que haja necessidade de reagrupar e "levar" para os inteiros (reserva). Uma vez entendido êsse aspecto principal do processo, o professor não precisa selecionar apenas exemplos que não envolvam "reserva" e o aluno pode continuar sua aprendizagem sem encontrar posteriormente modificação fundamental no processo.

O ensino da subtração de frações e números mistos será organizado de maneira semelhante à sugerida para o ensino da adição. Embora não se espere que o aluno, nesse estágio, atinja imediatamente um alto nível de acuidade em efetuar cálculos de adição e subtração de frações e números mistos, não há razão para não esperar dêle uma boa compreensão do processo. Uma vez conseguido um nível razoável de compreensão no 4º estágio, nos estágios seguintes pode voltar-se a atenção para o desenvolvimento de rapidez.

Representação decimal de uma fração

A habilidade de trabalhar com as frações com representação decimal é de suma importância, como, aliás, já foi exposto na parte referente ao 3º estágio. O ensino dessa área prosseguirá, levando em consideração os seguintes pontos básicos:

— na representação decimal de uma fração a idéia central é o agrupamento em dez;

— o emprêgo do valor posicional é inerente à maneira de representar essas frações;

— a representação das frações em forma decimal é uma extensão dos conhecimentos do sistema de numeração (que é decimal).

A consulta à parte relativa ao 3º estágio mostrará que êsse ensino é feito por processos semelhantes aos usados no ensino do sistema de numeração para os números inteiros.

Os conhecimentos necessários à compreensão da "reserva" na adição e do "recurso" na subtração de decimais não devem ser adquiridos durante o desenvolvimento dêsses processos. Essa orientação está de acôrdo com os princípios gerais já explanados ao tratarmos do sistema de numeração, restando apenas fazer as necessárias transferências.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE DECIMAIS

É fácil adicionar e subtrair frações decimais quando se tem boa compreensão do sistema decimal de numeração. Os processos desenvolvem-se como se os números fôssem inteiros, e a única característica específica das operações com decimais é de natureza mecânica — os numerais são dispostos de modo que "unidades", "décimos", "centésimos", etc... apareçam na mesma coluna vertical. Assim, unidades ficam debaixo de unidades, décimos debaixo de décimos, centésimos debaixo de centésimos, etc. Daí a preocupação de colocar as vírgulas decimais na mesma coluna vertical.

Na realidade, essa é a característica a que comumente se dá mais ênfase. Note-se, entretanto, que não é a característica fundamental. Quando se está realmente habilitado em operar com decimais, obtém-se a resposta correta, mesmo escrevendo os numerais horizontalmente (por exemplo, $4{,}34 + 3{,}67 = 8{,}01$) e, até mesmo, sem escrevê-los.

Décimos devem ser somados com décimos, centésimos com centésimos, etc. Essa é a condição a ser observada em tais operações. Quando um dos números está expresso em centésimos, por exemplo, todos os outros números envolvidos na adição ou na subtração, automàticamente, serão expressos também em centésimos, apareça ou não o numeral zero à direita da vírgula para representar centésimos. Assim, a soma será expressa em centésimos. Mesmo no caso de $4{,}33 + 3{,}67 = 8{,}00$, tècnicamente a resposta é 8,00 e não 8. Nos problemas práticos como os que envolvem medições, a manutenção dos zeros em 8,00 dá uma informação mais precisa sôbre a medição feita. A resposta 8 é imprecisa, pois não fornece nenhuma informação com relação aos décimos e aos centésimos da unidade usada.

Percentagem

A criança tem oportunidade de encontrar a percentagem na vida diária e nas leituras que faz. Daí justificar-se a introdução dessa noção no 4º estágio.

É comum introduzir a noção de percentagem relacionada com a noção de decimais, levando o aluno a perceber, por exemplo, que 10% significa considerar 10 em 100, ou seja, 0,10 (dez centésimos); 5% significa considerar 5 em 100, ou seja, 0,05 etc.

Apresentamos neste livro uma forma nova de introduzir a percentagem, dentro do esquema geral de relação e comparação. Se o aluno estiver bem orientado nesses conceitos (relação e comparação) e souber usar seu simbolismo (razões), a idéia de percentagem será uma extensão relativamente fácil dêsse conhecimento, pois a percentagem refere-se a uma comparação na qual o segundo têrmo da razão é 100. O que há realmente de nôvo a ser aprendido são os têrmos *percentagem, por cento* e o símbolo *0/0*.

Sistema legal de unidades de medidas

Ao chegar ao 4º estágio, a criança já terá tido considerável experiência com medidas. Já mediu comprimento, massa, capacidade, tempo e temperatura. Já descobriu também as equivalências mais comuns entre as unidades padronizadas com as quais já se familiarizou. Agora será considerada a mudança das medidas para unidades maiores e menores, por meio da análise de situações que requeiram tais mudanças. Suponhamos que uma distância dada em metros (por exemplo, 2500 metros) tenha que ser expressa em quilômetros. Cada quilômetro será formado de grupos de 1000 metros, o que leva à necessidade de dividir 2500 por 1000. Por outro lado, suponhamos que uma quantidade expressa em quilômetros (por exemplo 20 km) tenha que ser expressa em metros.

Cada quilômetro será transformado em grupos de 1000 metros, Isto conduz à multiplicação de 20×1000. Êsse trabalho precisa ser feito cuidadosamente e pode focalizar diferentes unidades de medir.

À proporção que essas experiências se desenvolvem e a aprendizagem se realiza, pode organizar-se com a criança tabelas e quadros fáceis de serem consultados sempre que necessário.

Depois de compreender as principais relações entre as unidades, a criança estará pronta para resolver problemas cuja solução exija tais conhecimentos.

No 4º estágio, a criança demonstra particular interêsse pelas atividades iniciais de área e volume que, por isso, serão focalizadas. (Ver parte relativa à Geometria e à Resolução de problemas.)

Sistema monetário

Agora, pode prosseguir o trabalho com dinheiro, segundo a orientação sugerida para o 3º estágio. Tendo em vista a importância dêsse assunto na vida prática de cada criança, dentro e fora da escola, tôdas as atividades reais de compra e venda, orçamentos, receitas, movimento bancário etc., serão exploradas para que a criança adquira as habilidades desejáveis.

Para resolver problemas a criança precisa aprender a operar com dinheiro. Os conhecimentos adquiridos no trabalho com números inteiros serão básicos à aprendizagem de tais operações.

Resolução de problemas

REVISÃO E REENSINO

O sucesso na resolução de problemas é provàvelmente o melhor critério para avaliar a habilidade da criança em Matemática. Por causa da importância dêste tópico parece-nos indicado fazer um resumo das características, do ponto de vista moderno, relativas à resolução de problema.

Desde cedo, no programa de Matemática, deve ensinar-se aos alunos a formar equações que representem numèricamente as situações-problema. Por exemplo, suponhamos o problema: Nossa turma tinha 24 livros de Matemática e recebeu 8 livros novos. Quantos tem agora? O aluno precisa aprender a escrever uma equação ($24 + 8 = n$) para representar essa situação. Nessa situação, que é de adição, os números em cada grupo (24 e 8) são conhecidos e podem ser somados imediatamente. Às vêzes, a resposta não é obtida imediatamente pelo processo indicado pela equação. Examinemos o seguinte exemplo: "24 alunos já possuem seus livros novos de Matemática. Há 32 alunos na classe. Quantos livros ainda são necessários?" Esta situação sugere a equação: $24 + n = 32$, cuja resposta não é obtida pela adição. Conseqüentemente, é preciso mostrar ao aluno uma forma de pensamento que sugira o uso do processo de subtração.

Outros problemas envolvem uma situação de subtração direta e leva a equações como $8 - 5 = n$, situando-se entre êsses os que envolvem comparações de 2 grupos de tamanhos conhecidos. Entretanto, alguns problemas resolvidos pela subtração não são assim diretos. Suponhamos que seja necessário encontrar quanto havia inicialmente, quando se conhece o número adicionado e o resultado total. Essas situações, que são aditivas, levam a equações como $n + 3 = 12$. No entanto, o processo usado para encontrar a resposta é a subtração. A criança do 2º e 3º estágios pode compreender e resolver problemas dêsse tipo. Tais problemas serão revistos no 4º estágio.

Naturalmente, nem todos os problemas envolvem adição e subtração.

Quando uma situação-problema exige a separação de um grupo em subgrupos iguais, tem-se uma situação de divisão. Em um dos tipos de divisão, o número de objetos do grupo original e o número de objetos de cada um dos grupos são conhecidos.

Vejamos o problema: "D. Lúcia pediu que as filhas plantassem 12 bulbos de flôres em vasos. Elas vão plantar 3 bulbos em cada vaso. De quantos vasos vão precisar?". Nesse problema cada um dos grupos iguais tem 3 bulbos. Os bulbos podem ser separados três de cada vez e postos em vasos para contar-se o número de grupos de 3. Essa situação é expressa pela equação $12 \div 3 = n$.

Tais situações constituem situações de divisão com idéia de "medir". O padrão geral dêsse tipo de divisão é o seguinte:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Número total no}\\ \text{grupo original}\end{matrix}\right\} \div \left\{\begin{matrix}\text{Número em cada um}\\ \text{dos subgrupos iguais}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Número de sub-}\\ \text{grupos iguais.}\end{matrix}\right\}$$

Em outras situações de divisão, o número em cada um dos grupos iguais não é conhecido, constituindo o que se procura. Conhece-se, entretanto, o número de grupos.

Vejamos o problema: "Marta e Cecília vão arear as colheres de chá para a mãe. Há 16 colheres. Se dividirem igualmente o trabalho, quantas colheres vai arear cada uma?" Nessa situação haverá 2 grupos iguais e o problema é encontrar com quantas colheres cada grupo ficará. Pode representar-se essa situação pela equação $16 \div n = 2$. Tais situações são chamadas situações de divisão-repartição (divisão com idéia de repartir).

Para compreender os problemas de divisão com idéia de "repartir" é preciso perceber que nêles se pode tomar de cada vez, do grupo que se quer distribuir, uma quantidade de objetos tal que seja suficiente para se colocar um objeto em cada grupo que se está formando. No problema das colheres, seriam tomadas 2 colheres de cada vez para dar uma a Marta e outra a Cecília, repetindo-se essa operação 8 vêzes.

Assim, no problema em questão, $16 \div 2 = 8$ dá o número de grupos de 2 colheres que podem ser formados de um grupo de 16 colheres.

A divisão-repartição levou ao resultado do problema, tocando um grupo de 8 colheres para cada menina.

Problemas envolvendo situações simples de divisão com idéia de "medir" e "repartir" são introduzidas no 3º estágio, devendo ser cuidadosamente revistas no 4º estágio. Convém fazer também a revisão de situações simples de multiplicação que conduzem a equações como $3 \times 8 = n$.

Dois tipos de problemas introduzidos no 3º estágio precisam ser, também, cuidadosamente reensinados aqui no 4º estágio. Um dêles consiste em encontrar o número que havia inicialmente, quando se conhece o número tirado e o número que restou. Como exemplo, consideremos o problema: "João tinha alguns ratinhos brancos. Vendeu 6 e ainda tem 4. Quantos ratinhos tinha antes de vender os 6?" Essa situação é claramente subtrativa e é expressa simbòlicamente pela equação $n - 6 = 4$. Entretanto, não se pode encontrar a resposta pela subtração porque o número original (o minuendo) não é conhecido. Imagina-se a solução, colocando os 6 ratinhos vendidos juntos com os 4 que sobraram, o que leva a perceber a razão de se usar a adição para encontrar a resposta.

Outro tipo de situação-problema a ser revisto no 4º estágio consiste em encontrar quanto se tirou quando se conhece o número original e o número que restou, como no problema:

Lila fêz 23 flôres. Sábado ela vendeu algumas, mas ainda ficaram 11. Quantas flôres vendeu?

$$23 - n = 11$$

É fácil ver que essa situação envolve ação subtrativa. Entretanto para dramatizá-la com objetos surge uma dificuldade. O número de flôres vendidas, que é o número a ser retirado de 23, não é conhecido. Simbòlicamente, representa-se a situação pela equação $23 - n = 11$. A criança que vê a situação como ela realmente é, seja como resultado de seu próprio pensamento ou como resultado de uma dramatização real, precisa saber porque pode encontrar a resposta subtraindo 11 de 23.

Note-se que nesta situação o número desconhecido está envolvido na ação. Não basta, portanto, reconstituir a situação. É preciso fazer alguma coisa mais que simplesmente imaginar o retôrno das flôres vendidas para reconstituir o grupo original.

Assim, partindo do grupo original, pode pensar-se nas flôres que não foram vendidas como um grupo à parte, retirado do grupo original, o que sugere a subtração do número não vendido (o número que sobrou) do número original. Daí a necessidade da subtração para solucionar o problema.

SITUAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO

Certas situações de multiplicação de processamento difícil podem ser introduzidas no 4º estágio. Suponhamos, por exemplo, o problema: "Maria abriu alguns pacotes de bombons. Havia 8 em cada pacote. Contou os bombons todos e viu que eram 24. Quantos pacotes ela abriu?" Êsse problema é um exemplo de situação do tipo a que chamamos multiplicação-divisão. A ação é multiplicativa, mos o processo usado para resolvê-lo é a divisão.

Tradicionalmente, em tais problemas, dizia-se à criança para achar quantas vêzes 8 estava contido em 24. É verdade que a divisão de 24 por 8 dá a resposta correta, mas muitas crianças não compreenderão porque. A estrutura dessa situação pode ser vista como do tipo multiplicação, onde o número de grupos é desconhecido. Vendo a situação dessa maneira fica difícil ver porque a divisão é o processo indicado para resolver o problema. As crianças precisam aprender a ver tais problemas como pertencentes ao tipo multiplicação-divisão. Nessas situações, aconselha-se levar a criança a equação que mostra como a situação foi vista por ela (no caso, como uma multiplicação), e então, compreender porque a divisão é usada para resolver aquela equação. Vista como multiplicação, a ação do problema acima conduz à equação $n \times 8 = 24$, embora seja impossível multiplicar. Pode-se, entretanto, imaginar os 24 bombons redistribuídos em pacotes, contendo cada um 8 bombons. Isso sugere uma situação de divisão-comparação (ou com idéia de medir), assim simbolizada: $24 \div 8 = n$. O uso de objetos ajudará os alunos a compreender porque a divisão resolve êsse problema.

Problemas dêsse tipo podem ser estudados de um ponto de vista geral. Fundamentalmente, tôdas as situações de multiplicação en-

volvem a idéia de relação. Porém, só mais tarde os alunos aprenderão a resolver êsses problemas usando essa idéia. Considerando-se a idéia de relação como fundamental nessas situações-problema, o processo comumente usado (divisão) passa a ser uma simples forma abreviada do processo geral.

SITUAÇÕES DE COMPARAÇÃO E RELAÇÃO

Além do que já foi dito sôbre o uso da razão para representar simbòlicamente as situações de relação e comparação, parece oportuno, insistir ainda sôbre o assunto, tendo em vista a simplificação que traz à resolução de problemas que envolvem relação ou comparação.

Em Matemática não há provàvelmente tipo de problema mais importante do que os que envolvem relação. Como exemplo, consideremos um problema típico: "O preço de 3 balas é Cr\$ 15. Mauro deseja comprar 6 balas. Quanto pagará?" Nesse problema conhece-se a relação Cr\$ 15 para 3 balas. O que se procura é o preço de 6 balas, partindo da relação conhecida.

O significado dêsse tipo de relação e sua expressão simbólica já devem ter sido introduzidos. O aluno passará, então, a lidar com situações onde, dada uma relação, é preciso expressá-la em outros têrmos.

Problemas como o que acabamos de apresentar ainda hoje são ensinados como problemas de duas etapas — "problemas de multiplicação e divisão". Por êsses processos tradicionais (o método da redução à unidade) o aluno procede da seguinte maneira: "Primeiro, divide 15 por 3 para achar o preço de 1 bala que custará, portanto, 5 cruzeiros. A seguir, multiplica 5 por 6 para encontrar o preço de 6 balas. Logo, 6 balas custarão 6 × Cr\$ 5 = Cr\$ 30.

Outro processo tradicional conduz ao seguinte raciocínio: "As balas são vendidas a 3 por Cr\$ 15. Mauro quer comprar 6 balas. $6 \div 3 = 2$; então, êle quer comprar 2 vêzes mais balas. Logo, o preço de 6 balas é 2 × Cr\$ 15 = Cr\$ 30.

Note-se que o fato de ter o aluno aprendido a resolver êsses problemas usando uma das duas soluções apresentadas, não significa que êle tenha compreendido o princípio básico envolvido em tais situações, ou que seja capaz de reconhecer que sua generalização vai além dos problemas de compras.

A idéia de relação é básica em tais problemas. Uma relação é expressa por um par de numerais sob forma de razão. Quer-se exprimir essa mesma relação usando outro par de numerais dos quais um é conhecido e o outro precisa ser encontrado. Geralmente, êsses problemas são resolvidos pela divisão ou multiplicação.

Tomemos o problema das balas para exemplo. A relação conhecida no problema é 15/3. Essa mesma relação precisa ser expressa por outra razão, na qual 6 é um dos têrmos. Como não se conhece o têrmo que representa o preço procurado, êle será representado, temporàriamente, por n. Assim, a nova razão é $n/6$. Como essas duas razões exprimem a mesma relação, pode escrever-se $15/3 = n/6$.

Um dos processos matemàticamente válido, mas muito complexo para o 4º estágio, consiste em substituir primeiro a razão 15/3 por outra razão equivalente na qual o segundo têrmo seja 1. Para isso, ambos os têrmos (15 e 3) serão divididos por 3, obtendo-se como resultado a razão 5/1. Então, $5/1 = n/6$. A seguir, a razão 5/1 deve ser substituída por uma equivalente cujo segundo têrmo seja 6. Para isso, multiplicam-se ambos os têrmos (5 e 1) por 6 e obtém-se a razão 30/6. Assim, n será substituído por 30. Êsse processo é a base do "método de redução à unidade".

Segundo outro processo, não há necessidade de substituir a razão 15/3 por outra equivalente cujo segundo têrmo seja 1. Se $15/3 = n/6$, basta substituir 15/3 por uma razão equivalente cujo segundo têrmo seja 6. Para isso, ambos os têrmos (15 e 3) devem ser multiplicados (ou divididos) pelo mesmo número. Encontra-se êsse número dividindo 6 por 3. Usando 2 como multiplicador, a razão equivalente será 30/6 e, portanto, $n = 3$. Êsse segundo processo é a base do processo que analisamos entre os processos tradicionais cujo raciocínio usado era "Quer-se comprar 2 vêzes mais balas".

Convém usar o segundo processo até que os alunos adquiram maior compreensão matemática. O aluno precisa de boa explicação e de muitas oportunidades para familiarizar-se com os conceitos usados nessas situações. Regras e processos abreviados não favorecem o desenvolvimento da compreensão matemática e devem ser evitados inicialmente.

Processos semelhantes serão aplicados a tôdas as situações que envolvam comparação. Por exemplo, suponhamos o problema: "João ganha Cr$ 250 por dia e Pedro, Cr$ 150. Quando João ganhar Cr$ 1 250, quanto terá recebido Pedro?" Nesse problema, a razão 250/150 exprime a comparação entre o dinheiro recebido por João e Pedro em um dia. Tal razão precisa ser substituída por outra cujo primeiro têrmo seja 1 250 e o segundo tenha de ser conhecido. Escreve-se, pois, a razão $1\,250/n$. O número pelo qual os dois têrmos da razão $\frac{250}{150}$ serão multiplicados para obter-se a nova razão será encontrado pela divisão de 1 250 por 250, que é 5.

Assim, $5 \times 250 = 1\,250$ e $5 \times 150 = 750$. A nova razão é 1 250/750 e, portanto, $n = 750$.

Conclusão: Pedro receberá Cr$ 750, quando João receber Cr$ 1 250.

A solução consiste em exprimir a mesma comparação com numerais diferentes.

Finalmente, os mesmos processos aplicam-se também a outro tipo de problema muito comum nos programas de Matemática, como por exemplo: "Lúcia apanhou 16 flôres e Teresa, 8. O número de flôres que Lúcia apanhou é quantas vêzes o número de flôres que Teresa apanhou?" Bàsicamente, êsse não é um tipo diferente de problema, mas a maneira de perguntar "quantas vêzes" associa-se a um tipo específico de razão para exprimir a comparação, isto é, a razão cujo segundo têrmo é "1". No problema acima, a razão 16/8 exprime a comparação do número de flôres de Lúcia com o número de flôres de Teresa. O que se pretende é substituir essa razão por outra cujo segundo têrmo seja 1. Temporàriamente, representa-se a nova razão por $n/1$. Se $16/8 = n/1$, resolve-se o problema dividindo 16 e 8 por 8, encontrando a razão equivalente 2/1. Logo, $n = 2$.

A nova razão mostra que Lúcia apanhou 2 flôres para cada flor apanhada por Teresa. Habitualmente, dizemos isso de outra maneira: "Lúcia apanhou duas vêzes mais flôres que Teresa".

No 4º estágio, o aluno precisa de experiências de aprendizagem que o ajudem a compreender e a resolver êsses problemas.

É importante notar que os processos descritos acima servem para unificar o tipo de raciocínio em uma variedade de problemas, ou seja, basear em um único processo fundamental uma variedade de problemas considerados de tipos diferentes e ensinados, portanto, sem nenhuma ligação, por processos específicos, próprios a cada problema.

Apesar de diferentes nos detalhes, as idéias básicas envolvidas nessas situações são as mesmas e indispensáveis ao trabalho posterior com problemas que requerem multiplicação e divisão de frações.

Os métodos que descrevemos não foram escolhidos só porque constituem novidade ou porque são diferentes dos adotados pelo ensino tradicional, mas porque são fundamentais.

A introdução dessas idéias fundamentais assim que elas se façam necessárias, evita transformar a Matemática em mera coleção de processos simplificados aprendidos pela repetição de exemplos sem significação para a criança.

OUTROS PROBLEMAS DE VÁRIAS ETAPAS

Além dos problemas de relação e comparação, que acabamos de discutir, outros tipos de problemas que exijam duas ou mais operações para chegar-se à resposta, podem ser introduzidos no 4º estágio. Por exemplo, consideremos o problema: "Carlos comprou 2 saquinhos de bolas de gude contendo cada um 10 bolas. Artur comprou 3 saquinhos, cada um com 12 bolas. Quantas bolas os meninos compraram juntos?"

Um caminho para resolver êsse problema é multiplicar duas vêzes e depois somar. Daí a expressão "várias etapas", usada aqui para referir-se ao número de operações básicas sucessivas — adição, subtração, multiplicação, divisão — necessárias para resolver o problema.

Há muito tempo, os problemas de várias etapas vêm sendo introduzidos sem que se ofereça ao aluno um recurso que o ajude, a "ver para onde está indo", ou seja, a ver a situação como um todo, do comêço ao fim.

No problema tomado como exemplo, a criança precisa primeiro multiplicar 10 por 2 para saber quantas bolas Carlos comprou. Depois, multiplicar 12 por 3 para saber quantas bolas Artur comprou. É possível que, embora sem compreender, a criança reconheça que êsses dois produtos devem ser reunidos pela adição, mas na verdade, ela sente dificuldade em perceber o problema como um todo.

É claro que, de modo geral, alunos mais capazes adquirem essa compreensão gradualmente, depois de repetidas experiências com problemas semelhantes. Entretanto, muitos são os alunos que resolvem os problemas de várias etapas por tentativas, mais ou menos às cegas.

A resolução dêsses problemas requer uma análise da situação total, antes de começar a fazer as operações. Um meio de ver a situação como um todo é escrever a equação que exprime simbólica e numèricamente a situação. No problema das bolas, podemos simbolizar a situação pela forma equacional □ + ▥ = n. Outro simbolismo pode ser usado para indicar a estrutura da situação, desde que o lugar de quantidades diferentes sejam guardados por símbolos também diferentes ($a + b = c$ ou $\square + \triangle = x$).

Na equação do problema, o primeiro símbolo está representando o número de bolas compradas por Carlos, e o segundo, representa o número de bolas que Artur comprou. A equação mostra, ainda, que uma vez encontrados êsses dois números, êles devem ser somados para obter-se o número total de bolas compradas pelos dois meninos. A equação mostra também que dois números ainda desconhecidos precisam ser encontrados antes de alcançar-se a etapa final — fazer a adição.

Encontrar o número de bolas compradas por Carlos é um problema simples de multiplicação. Encontrar o número de bolas compradas por Artur é problema semelhante. Considerados isoladamente êsses problemas não constituem dificuldade. O que confunde a criança é saber como reunir essas partes para ter a situação como um todo.

Convém observar que problemas de várias etapas podem ser interpretados e resolvidos por mais de um caminho. Tomemos por exemplo o problema: "Antônio pescou durante 35 minutos pela manhã e 45 minutos à tarde. Fêz isso durante 3 dias. Durante quantos minutos, ao todo, Antônio pescou nos 3 dias?" Esta situação pode ser interpretada como uma repetição igual da pescaria nos três dias, ou seja, multiplicando o tempo total da pescaria pela manhã e à tarde por 3. A equação que exprime essa maneira de analisar a situação é $3 \times \square = n$. A interpretação dessa equação leva a pro-

curar o valor do □, adicionando 45 com 35 para, depois, multiplicar essa soma (80) por 3.

Outra maneira de interpretar a situação é concluir que durante 3 manhãs houve um período igual de pescaria, bem como um período igual à tarde. Para encontrar a resposta, pode adicionar-se o tempo total da pescaria pela manhã com o tempo total da pescaria à tarde. A equação que exprime essa maneira de analisar a situação é □ + ▥ = n. Portanto, nesse caso, será preciso multiplicar 35 por 3, 45 por 3 e, finalmente, somar os dois produtos ($105 + 135 = n$). Qualquer dêsses métodos é aceitável.

MÉDIA

Entre os problemas de várias etapas merecem atenção especial os que envolvem uma situação na qual se esteja procurando a média.

A idéia de média encontra uma grande aplicação na vida prática. Crianças que atingiram o 4º estágio já têm maturidade suficiente para compreender o significado de média e as situações que envolvem êsse conceito dentro e fora da escola. Mas, o que se faz quase sempre, é dar às crianças uma regra para achar a média: "Somam-se os números e divide-se a soma pelo número de parcelas que foram adicionadas". A regra apenas não é suficiente para levar à compreensão.

Fundamentalmente, a média é um único número usado para representar um conjunto de números. Por exemplo, vamos pensar no número capaz de substituir 8, 12, 19 e 21 sem alterar o total: $8 + 12 + 19 + 21$. Nesse caso, não se evidencia imediatamente o número 15 como resposta. Se, entretanto, os números originais representassem medidas de comprimento (por exemplo, o comprimento de 4 varetas, em centímetros), o comprimento total seria 60. Se êsse comprimento fôsse dividido igualmente, isto é, dividido em partes iguais para constituir os 4 comprimentos, cada vareta teria 15 cm. O mesmo número de varetas (4), agora com 15 cm cada uma, reconstituirá o comprimento total, tal como acontecia quando elas mediam 8, 12, 19 e 21 cm. Convém notar que o comprimento 8 está 7 unidades abaixo da média, e o comprimento 12, 3 unidades. Juntando êsses dois comprimentos, haverá 10 unidades abaixo da média. O comprimento 19 está 4 unidades acima da média e o comprimento 21, 6 unidades acima. Êsses dois comprimentos juntos estão 10 unidades acima da média. Assim, as 10 unidades que faltam nos comprimentos abaixo da média são compensadas pelas 10 unidades em excesso, nos comprimentos acima da média. Isso só aconteceu porque o número tomado é realmente a média.

Quando o significado da média é compreendido como sugerimos acima, encontrar a média pode ser visto como um problema de duas etapas. Na primeira etapa, tôdas as medidas são reunidas — temos aí uma situação de adição; na segunda etapa a soma é repartida ou separada em tantas partes iguais quantas forem as medidas tomadas originalmente. Às vêzes a soma já é conhecida, bastando apenas fazer a repartição. No 4º estágio o professor pode desenvolver a idéia de média de modo que a criança não só a compreenda, como também adquira a habilidade em encontrá-la.

ÁREA DO RETÂNGULO

Antigamente, o ensino de área apresentava duas grandes falhas:

— dava-se muito pouca atenção ao conceito de área, que era introduzido apressadamente, visando a dar ao aluno uma fórmula para calculá-la, tão logo se iniciava o ensino;

— o cálculo da área dependia quase inteiramente de regras, que "encurtavam o caminho", mas que não traziam nenhuma contribuição à compreensão. As razões pelas quais as regras conduziam à resposta eram raramente mostradas à criança.

Essas falhas podem ser corrigidas promovendo-se uma nova introdução ao ensino de área.

Como dissemos, pode introduzir-se a idéia ou conceito de área no começo do 4º estágio. Nessa ocasião, o aspecto a ressaltar deve ser o significado, a compreensão. Daí ensinar-se área sòmente pela contagem, através de estimativas. Mais tarde, ainda no 4º estágio, quando já existir boa base de compreensão, o cálculo da área será introduzido, como uma aplicação da idéia de relação. (Ver o que foi dito sôbre o uso da razão para resolver problemas envolvendo relação, às páginas 87 a 89.)

Costuma-se introduzir o estudo da área pela área do retângulo (incluindo o quadrado), tendo em vista que a área de outros polígonos pode ser encontrada transformando-os em formas retangulares. Entretanto, o método de achar a área pela aplicação do conceito de relação não é o que se usa comumente. No entanto, essa idéia é básica às situações de área.

A conhecida regra para achar a área do retângulo: "a área é igual ao comprimento vêzes a largura", leva à resposta certa, mas a razão, o "porquê" da regra, não fica claro sem referência à idéia de relação.

Aplicando-se essa idéia ao caso do retângulo, tem-se uma relação baseada no número de unidades de área que podem ser acomodadas em um dos lados do retângulo. Se o comprimento de um dos lados do retângulo é 5 cm, uma fila de 5 quadrados de 1 cm pode acomodar-se neste lado. A relação, então, será 5 quadrados de 1 cm por fila. Simboliza-se essa relação pela razão 5/1. A outra dimensão determina o número de filas de quadrados de 1 cm que podem ser colocadas dentro do retângulo. Se esta dimensão é 3 cm, haverá 3 filas. Como não se conhece o número total de centímetros quadrados, êle pode ser representado, temporàriamente, por n. A relação para as 3 filas será representada então, pela razão $n/3$.

Uma vez que a relação correspondente a uma fila equivale à relação que corresponde às três filas, pode escrever-se $5/1 = n/3$.

A área será achada transformando-se a razão 5/1 em outra equivalente cujo segundo têrmo seja 3. Para isso será preciso multiplicar 5 e 1 por 3, encontrando-se para resultado 15/3. Logo, $n = 15$. A área do retângulo é, pois, 15 centímetros quadrados.

Partindo dessa idéia básica, conclui-se que uma forma de simplificar o caminho para achar a área é multiplicar a relação (que exprime o número dos quadrados por fila) pelo número de filas. Como o número de unidades quadradas por fila é dado pelo número que mede o comprimento do retângulo e, o número de filas, pelo número que mede a largura, conclui-se a regra: "multiplica-se o comprimento pela largura".

Quando se reconhece e usa a idéia de relação, compreende-se com facilidade a explicação acima e fica clara a conveniência de introduzir a noção de relação tão cedo quanto possível. Essa idéia tem muitas aplicações em Matemática, sendo o cálculo da área apenas um exemplo dessas aplicações.

Mesmo que o aluno compreenda ràpidamente que a regra conduz à resposta certa, isso não significa que êle na realidade a tenha compreendido.

Escalas e gráficos

As escalas constituem uma das mais simples e freqüentes aplicações da Matemática. O mais importante com relação às escalas é a habilidade em interpretá-las e não pròpriamente traçá-las.

O programa do 4º estágio deve oferecer ao aluno oportunidade de interpretar escalas simples e mapas.

As subdivisões feitas no traçado de uma escala representam unidades de comprimento. Bàsicamente, uma escala gráfica traduz uma situação de relação. Os comprimentos nela representados estão em correspondência com os comprimentos reais do que se está representando (no caso de um mapa, cada subdivisão da escala usada corresponde a uma superfície ou distância terrestre).

A escala envolve uma razão, mas quando a escala é gráfica, não é necessário saber qual é o par de numerais que representa essa razão. A escala dá, indiretamente, a medida da realidade que se representou gràficamente.

A interpretação de gráficos simples, pictóricos e em barra, tendo em vista a freqüência com que tais recursos são usados na vida prática, pode ser ensinada no 4º estágio. Entretanto, a construção de gráficos e de escalas pode ficar para um estágio mais adiantado.

Os gráficos constituem outro exemplo da aplicação da idéia de relação.

Estágio 5

Visão geral — Aspectos importantes a ressaltar

O programa moderno para o 5º estágio pode ser resumido em cinco tópicos principais. Primeiro, ao terminar o 5º estágio o aluno deve saber somar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros com compreensão e razoável habilidade. Segundo, deve saber somar, subtrair e multiplicar frações escritas em forma ordinária ou decimal, inclusive números mistos. Apesar dêsses dois primeiros objetivos terem sido incluídos bàsicamente nos currículos de Matemática desde muitos anos, infelizmente não têm sido alcançados em tôda a sua plenitude, principalmente no que se refere à compreensão das operações com frações. Terceiro, o aluno deve ser capaz de analisar e resolver problemas que requeiram duas ou mais etapas em sua solução, tão bem quanto os de apenas uma etapa. Particularmente, precisa adquirir razoável habilidade em resolver situações de relação e comparação por meio da razão, bem como situações que envolvam operações com frações. Quarto, seu conhecimento de Geometria incluirá os nomes e propriedades das formas geométricas simples no plano e em três dimensões. Deverá saber ainda calcular perímetros e áreas de paralelogramos, e volumes de prismas de base retangular. Quinto, o aluno deverá estar familiarizado com uma variedade de importantes idéias matemáticas que venham não só aumentar-lhe a compreensão dos tópicos que já conhece, como também torná-lo cada vez mais maturo em Matemática. Entre essas idéias destacam-se as desigualdades, a percentagem, as propriedades distributiva e associativa, a linha numerada e os gráficos.

O trabalho em cálculo mental também será ampliado nesse estágio. A habilidade em calcular "de cabeça" depende do emprêgo de certas propriedades dos números, como a propriedade associativa e distributiva. No 5º estágio, o aluno pode começar a generalizar e a aplicar essas propriedades.

Tais objetivos serão alcançados por métodos e material de ensino apropriados, levando-se em conta também o período de tempo adequado ao ensino. Note-se que a preocupação com a formação dos conceitos e com a compreensão, ao introduzir-se uma noção nova, resulta em economia de tempo, levando a dispensar depois parte do exercício necessário à aprendizagem.

Finalmente, o efeito cumulativo do programa torna possível uma maior extensão de idéias e uma intravisão mais profunda dos conceitos fundamentais, superiores ao que se considerava possível tradicionalmente.

O 5º estágio inclui vários tópicos de importância matemática mostrando como usar métodos e materiais para atingir aos objetivos propostos.

Tendo em vista a necessidade de muitas lições para cobrir cada tópico discutido nesta seção, não se deve considerar a ordem de apresentação dos tópicos aqui usada como, necessàriamente, a melhor seqüência de ensino para o aluno. O primeiro tópico tratado, por exemplo, é a avaliação da habilidade nas operações com números inteiros que foi abordado em primeiro lugar, apenas por conveniência. Na prática, entretanto, convém começar o ano sempre com trabalho e idéias novas. Por exemplo, no 5º estágio o trabalho inicial poderia focalizar o estudo das propriedades de certas formas geométricas, deixando-se para depois o inventário das habilidades de computar e o trabalho de revisão se necessário.

Operações com números inteiros — Inventário

Tratou-se da revisão dos processos de computar no início do 5º estágio, porque não parece conveniente interromper depois a seqüência dos tópicos que serão discutidos a seguir. Entretanto, não se pretende com isso que o trabalho nesse estágio comece por essa revisão.

A habilidade de computar com exatidão e razoável rapidez é considerada fundamental em um programa de Matemática. Entretanto, no passado, tal objetivo monopolizou de tal forma o tempo e a atenção

das aulas de Matemática, que outros objetivos importantes foram negligenciados. Isso não significa, porém, que agora o professor ignore o desenvolvimento das habilidades de computar.

As habilidades de computar precisam ser inventariadas no princípio de cada ano escolar, o que, portanto, será feito também no 5º estágio, devendo os testes-inventários incluir os processos de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros. Nesses testes, algumas questões devem ser apresentadas em forma de equação (por exemplo, $n + 835 = 1\,042$; $7\,462 - n = 5\,320$; $69 \times n = 483$; etc.), envolvendo também o conhecimento das medidas comuns. O professor pode dividir o teste por vários dias.

No 5º estágio, não haverá muita necessidade de reensinar as habilidades de cálculo. Entretanto, os alunos que precisarem dêsse ensino suplementar devem voltar às lições preparadas com êsse objetivo, para desenvolver as habilidades nas quais apresentem deficiência. Tais lições serão encontradas nos livros da presente série, destinados ao segundo, terceiro e quarto estágios.

Neste livro, às páginas 76 a 78, encontram-se recomendações sôbre as práticas de revisão e reensino.

Razões para exprimir correspondências

RELAÇÃO, COMPARAÇÃO

No tópico "Pares de números", no 4º estágio, há uma explanação detalhada a respeito de duas importantes idéias: o uso do símbolo chamado razão para exprimir correspondências nos problemas que envolvem a idéia de relação ou comparação; e a distinção entre o emprêgo da razão e do numeral fracionário, símbolo da fração. Convém o leitor reportar-se ao tópico referido, antes de ler a matéria seguinte, uma vez que a idéia de razão para exprimir correspondências será aplicada a alguns assuntos especiais a serem ainda tratados. A aplicação dessas idéias torna êsses assuntos de grande significação matemática, e passam a ser vistos como básicos no desenvolvimento do estudo da Matemática na escola secundária.

Suponhamos que se queira resolver o seguinte problema: "6 balas são vendidas por Cr$ 15. Quantas balas poderei comprar com Cr$ 25?". Êste problema envolve uma relação representada pela razão 6/15. Supõe-se que na compra de mais de 6 balas a relação continue sendo a mesma. Apenas será necessário exprimi-la em outros têrmos, dos quais um é conhecido (25). Daí poder escrever-se a equação $6/15 = n/25$.[7 *]

Não é tão fácil descobrir o número que substitui n. Alguns adultos serão capazes de ver imediatamente que se é preciso multi-

* Os numerais referem-se aos itens da bibliografia às páginas 143 a 149.

plicar 15 por $1\frac{2}{3}$ para obter-se 25, 6 precisa também ser multiplicado por $1\frac{2}{3}$ para obter-se $n = 10$. Entretanto, o aluno não vê isso com tanta facilidade. O caminho para resolver mais fàcilmente essa equação é observar que a relação envolvida em 6/15 pode ser expressa pela razão 2/5. Então, é possível escrever a equação $2/5 = n/25$.

Nesse caso, 2 e 5 serão multiplicados por 5 para obter-se a nova razão 10/25. Daí conclui-se que o valor de n é 10 (resposta do problema).

Nem todos os números envolvidos nos problemas são tão fáceis de se trabalhar como os dêsse exemplo. Conseqüentemente, é preciso conhecer um método básico que se aplique a tôdas as situações semelhantes.

Êsse método básico consiste em substituir a equação das razões por outra equivalente. No exemplo citado, substitui-se a equação $6/15 = n/25$ pela equação $6 \times 25 = 15 \times n$. Tal substituição é permitida pela definição matemática de razões iguais — duas razões são iguais se (e sòmente se) os "produtos cruzados" são iguais.

No exemplo, $6/15 = n/25$ se (e sòmente se) $6 \times 25 = 15 \times n$. De modo geral, $a/b = c/d$ se (e sòmente se) $ad = bc$.

A definição de razões iguais permite escrever a nova equação $6 \times 25 = 15 \times n$, que é mais fácil de ser trabalhada, podendo ser reescrita na forma: $15n = 150$. Resolvendo essa equação, encontra-se $n = 10$. Assim, com Cr$ 25 serão compradas 10 balas, que é a resposta do problema.

A definição que apresentamos acima — duas razões são iguais se os "produtos cruzados" são iguais — é de grande significação prática e teórica. De acôrdo com essa definição, a que chamaremos "propriedade fundamental das proporções", as expressões "duas razões são iguais" e "dois produtos cruzados são iguais" significam a mesma coisa.

Usando a propriedade fundamental das proporções resolve-se qualquer equação de razões, não importando sua complexidade. Por exemplo, na equação (ou proporção) $5/6 = n/13$, fica difícil encontrar o multiplicador (ou divisor) a ser usado para exprimir a relação 5/6 de modo que o segundo têrmo da razão seja 13. Mas, como foi mostrado acima, pode encontrar-se uma equação equivalente à proporção estabelecida. Assim, substitui-se $5/6 = n/13$ por $6n = 5 \times 13$.

Resolvendo essa equação temos $n = 10\frac{5}{6}$.

Cêrca de metade (e talvez mais da metade) dos problemas resolvidos na escola primária envolve um tipo de correspondência que se pode exprimir pela razão. A maioria dêsses problemas pode ser resolvida através das proporções, isto é, equações de razões. Portanto, se o aluno compreender essa espécie de correspondência, souber como escrever e resolver corretamente a equação, usando a propriedade fundamental das proporções, terá um poderoso instrumento para resolver inteligentemente grande número de problemas.

PERCENTAGEM

A percentagem, ensinada dentro do esquema geral da correspondência, como aplicação da idéia de comparação, leva à resolução dos problemas por equações de razões, que tornam a compreensão do assunto muito mais fácil.[31] Assim encarada, a única idéia nova que a percentagem vai envolver é a do uso do 100 como segundo têrmo de uma das razões, o que dá origem a uma nova expressão — "percentagem" — e seu símbolo respectivo %. Bastará lembrar, portanto, que "percentagem" refere-se a qualquer comparação, na qual o segundo têrmo da razão é 100.

Ao introduzir a percentagem, convém ressaltar a vantagem de seu uso, como revelam as situações de investimentos de capitais e organização de fundos, onde se verificam, pela percentagem, os lucros ou prejuízos dos contribuintes, tendo em vista as quotas com que participaram.

É costume ensinar a percentagem em três situações diferentes:

SITUAÇÃO 1 — (achar a percentagem de um número). Quanto é 20% de Cr$ 150?
Solução: $0,20 \times 150 = 30$.

SITUAÇÃO 2 — (achar que percentagem um número é de outro). Cr$ 30 é quantos por cento de Cr$ 150?
Solução: $30 \div 150 = 0,20$ ou 20%.

SITUAÇÃO 3 — (achar um número quando se conhece que percentagem êle é de outro). Cr$ 30 é 20% de que quantia?
Solução: $30 \div 0,20 = 150$.

O aluno encontra grande dificuldade em fazer distinção entre essas três situações e fica na dependência da memorização pura e simples de várias regras para resolvê-las. Raramente as soluções são compreendidas e o aluno deixa de ver sentido nelas. Tendo em vista a dificuldade que acarretam, costuma ensinar-se as situações 1 e 2 sòmente em estágios superiores.

Considera-se impossível ensinar percentagem antes que os quatro processos fundamentais envolvendo frações decimais estejam aprendidos, pois a multiplicação e a divisão de decimais são essenciais ao seu cálculo. Entretanto, no 5º estágio, já não deve existir tal restrição.

A percentagem será ensinada sem necessidade de fazer distinção entre os diferentes tipos de situações. A resolução de qualquer situação se fará por um princípio geral — estabelecer sempre uma proporção, ou seja, uma equação de razões. Nessa equação os têrmos de uma das razões e um dos têrmos da outra são conhecidos. O segundo têrmo de uma delas é sempre 100. Por êsse processo, realmente, não tem importância a diferença que possa haver nos tipos de situações a que se aplique a percentagem.

As proporções abaixo mostram como dar o mesmo tratamento, segundo o ponto de vista exposto, às três diferentes situações que citamos anteriormente:

SITUAÇÃO 1 — (achar a percentagem de um número). Quanto é 20% de 150?
Solução: $20/100 = n/150$.

SITUAÇÃO 2 — (achar que percentagem um número é de outro). 30 é quantos por cento de 150?
Solução: $30/150 = n/100$.

SITUAÇÃO 3 — (achar um número quando se conhece que percentagem êle é de outro). 30 é 20% de que número?
Solução: $20/100 = 30/n$.

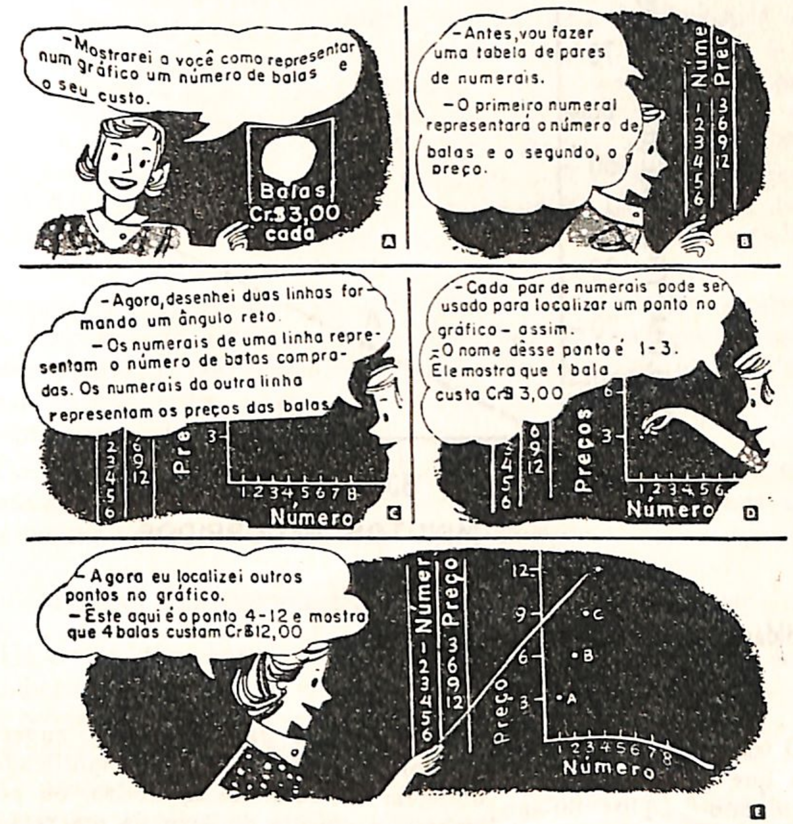
Cada equação pode ser resolvida pela propriedade fundamental das proporções, sem necessidade de regras ou métodos especiais de computar (principalmente multiplicação e divisão de frações decimais).

Estabelecida a equação, não há maiores dificuldades, se o aluno já teve experiências suficientes em resolvê-la.

Note-se que, de início, não é aconselhável usar questões abstratas como "Quanto é 20% de 150?", "30 é quantos por cento de 150?" ou "30 é 20% de que número?" Tais questões devem aparecer em problemas e não isoladamente. Muitas vêzes dificulta-se o trabalho com a percentagem porque se exige que o aluno trabalhe, logo de

início, com fórmulas abreviadas, antes que tenham sido compreendidas as idéias básicas das quais elas se derivam.

O aluno precisa de experiências adequadas para deduzir por êle próprio as fórmulas simplificadas com que trabalha.



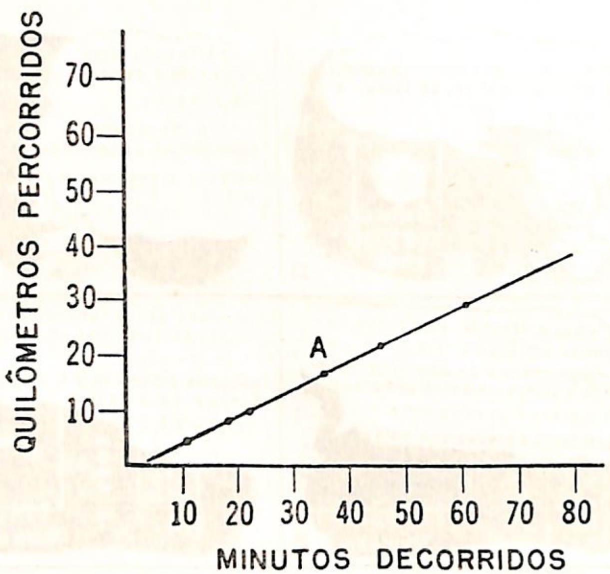
GRÁFICOS

O aluno compreenderá melhor a idéia de relação se tiver alguma experiência com gráficos simples.[30]

De início, convém aprender apenas a interpretar gráficos envolvendo pares de números que representem relações uniformes. As ilustrações desta página sugerem um modo de ensinar a representar uma relação gràficamente.

Na página seguinte reproduzimos uma tabela de pares de números mostrando uma correspondência tempo-distância e o gráfico respectivo.

MINUTOS	10	21	35	b	c	17
QUILÔMETROS	5	$10\frac{1}{2}$	a	$22\frac{1}{2}$	30	d



Medidas e idéias geométricas

ÁREA

O tópico sôbre área já foi discutido no 4º estágio, quando sugerimos que de início se desse maior importância ao seu significado, calculando-a por meio da contagem de unidades aplicadas, ou por estimativa.[19] Discutiu-se, também, o cálculo da área de um retângulo. Entretanto, convém reconsiderar êste tópico no 5º estágio.

Costuma iniciar-se o estudo de área pela área de retângulos (incluindo o quadrado), porque a área dos outros polígonos pode ser encontrada transformando-os em formas retangulares. No 5º estágio, o aluno aprenderá a calcular a área de qualquer paralelogramo. Entretanto, o método que se vai usar, utilizando o conceito de relação, não é o comum.

O conceito de relação é básico nas situações elementares de área. É verdade que a consagrada fórmula da área de um retângulo "Área é igual ao comprimento vêzes a largura" conduz, numèricamente, à resposta certa, mas porque essa fórmula conduz ao resultado, êste não é compreendido, a menos que o aluno tenha a idéia de relação.

Nas páginas 107 e 108 encontra-se uma discussão detalhada dêsse assunto. Na área do retângulo, a relação é baseada no número de unidades de área que pode ser colocado em um dos lados do retângulo. Por exemplo, se um lado mede 5 metros, pode colocar-se dêsse lado uma fila de 5 quadrados de um metro de lado. A relação, então, será 5 metros quadrados para 1 fila, o que se representa pela razão $5/1$. A outra dimensão determina o número de filas de um metro quadrado que se pode colocar dentro do retângulo. Se essa dimensão é 3 metros, haverá 3 filas. Como o número total de metros quadrados não é conhecido, êle será representado, temporàriamente, por n. Assim, a relação para as três filas será expressa pela razão $n/3$. Como essa relação é a mesma que a relação para 1 fila, pode escrever-se $5/1 = n/3$. O emprêgo da "propriedade fundamental das proporções" permite escrever que $1\ n = 3 \times 5$, de onde se conclui que a área é 15 metros quadrados.

Depois de desenvolver essas atividades básicas, fica fácil mostrar que, simplificando o processo, pode multiplicar-se o número de unidades quadradas correspondentes a uma fila pelo número de filas. Estabelece-se, assim, a regra "A área de um retângulo é igual ao comprimento vêzes a largura".

Daí conclui-se a importância de se desenvolver tão cedo quanto possível o conceito de relação. O cálculo da área é apenas um das muitas aplicações matemáticas dêsse conceito.

FORMAS TRIDIMENSIONAIS E CONCEITO DE VOLUME

Há certas idéias básicas de Geometria com as quais a criança deve familiarizar-se ainda na escola elementar. Daí a necessidade de um programa moderno de ensino de Matemática prover atividades de aprendizagem capazes de ajudá-la a adquirir tais conceitos.[44]

O programa sugerido neste livro apresenta, em cada estágio, a introdução de algumas dessas idéias fundamentais. Assim, ao chegar ao 4º estágio, o aluno terá estudado um conteúdo substancial de Geometria.

O estágio anterior focalizou, principalmente, as figuras de duas dimensões, incluindo os conceitos de perímetro e área, e os processos de computá-los.

No 5º estágio, serão ressaltadas as propriedades das formas tridimensionais (por exemplo o cone e a pirâmide) e o conceito de volume. O aluno aprenderá o nome e as propriedades dos sólidos mais comuns. Será aconselhável fazer uma revisão dos conhecimentos de medida linear e de área para, então, desenvolver o conceito de volume.

Será interessante começar o programa do quinto estágio com as idéias que acabamos de mencionar, aproveitando o interêsse e o entusiasmo do aluno por assuntos novos ao iniciar um nôvo ano. Mais tarde, pode voltar-se a trabalhar com elas, quando será então aprendido o cálculo do volume dos prismas de base retangular.

CÁLCULO DO VOLUME DO PRISMA RETANGULAR

No princípio do 5º estágio, a atenção será focalizada inteiramente no significado de volume. Por exemplo, o aluno encontrará o volume de caixas pelo método direto, contando (ou estimando) o número de unidades cúbicas que as "encherão". Na época de desenvolver o cálculo do volume, usando processos mais econômicos, os métodos serão semelhantes aos sugeridos para o ensino do cálculo da área.

Para um adulto, a fórmula do volume de um prisma de base retangular pode parecer muito simples e clara. Basta multiplicar o comprimento pela largura e, depois, êsse produto pela altura. Muitas vêzes, uma completa familiarização com a regra, faz com que se perca a noção do "porquê" de seu uso. Realmente a regra é um caminho indireto de encontrar o volume usando tres medidas e uma operação.

Aconselha-se, entretanto, mostrar primeiro ao aluno que a idéia fundamental no cálculo do volume é o conceito de relação pois, assim como no caso da área, para calcular o volume pode escrever-se uma equação de razões e empregar-se a "propriedade fundamental das proporções" para resolvê-la. Como o conceito de relação é também usado em muitas outras situações êle passa a constituir um conceito básico. A aplicação da idéia de relação ao cálculo do volume traz mais êsse tópico para a esfera de uma mesma idéia fundamental (a idéia de correspondência).

Calcula-se o volume procurando primeiro o número de unidades cúbicas que podem ser colocadas na base. Êste resultado determina uma relação, qual seja, o número de unidades cúbicas em cada "camada". Por exemplo, suponhamos que a base de um prisma retangular tenha 5 m de comprimento por 4 m de largura e que a altura seja 3 m. O número total de unidades cúbicas que se pode dispor na base (camada de baixo), pode ser escrito como aparece à direita.

$$\frac{5 \times 4}{1}$$

Isso significa, naturalmente, 20 m³ por camada. Entretanto, será mais fácil compreender o fundamento da regra (ou fórmula) se, em vez de efetuar a multiplicação 5×4 e escrever a razão como $20/1$, a razão permanecer na forma apresentada acima.

Por outro lado, cada unidade da altura do prisma determina uma camada correspondente de unidades cúbicas. No exemplo acima, a altura de 3 m mostra que o prisma pode conter três camadas. Assim, a relação pode também ser representada pela razão, $w/3$, onde o primeiro têrmo (w) representa o número total de metros cúbicos, e o segundo têrmo (3), o número de camadas. Uma vez que ambas as razões exprimem a mesma relação, pode escrever-se a equação ao lado.

$$\frac{5 \times 4}{1} = \frac{w}{3}$$

Finalmente, resolve-se a equação escrevendo-a na forma: $w = 5 \times 4 \times 3$.

Obtida essa compreensão, a regra pode ser generalizada e aplicada a qualquer prisma retangular, sejam quais forem suas dimensões. Pessoas que nunca viram o desenvolvimento de uma regra (ou fórmula), dificilmente reconhecem que, na realidade, tenham aceitado e usado a regra, não porque tivessem compreendido o raciocínio matemático nela implicado e sim pelo fato de ela ter "funcionado" nos problemas práticos.

Os programas tradicionais de Matemática prescrevem regras de cálculos para depois treiná-las em uso. Um programa moderno reconhece que o desenvolvimento da verdadeira competência matemática requer mais que a aceitação passiva de regras.

Os conceitos de fração e a linha numerada

Não é necessário considerar aqui as idéias básicas de fração, uma vez que já foram discutidas em cada um dos diferentes estágios estabelecidos neste livro. Com os conceitos básicos bem firmados, no 5º estágio, se cuidará de ampliá-los e enriquecê-los. O trabalho com a linha numerada constitui um excelente recurso para estender essas idéias fundamentais e enriquecer a experiência da criança.

A associação intuitiva de números com pontos em uma linha numerada conduz a um importante conhecimento matemático, tendo em vista sua aplicação prática em réguas e escalas de tôdas as espécies, gráficos, mapas, etc. Êsse conhecimento é também de grande importância teórica.

As "linhas numeradas" foram ligeiramente discutidas no 4º estágio, mostrando-se como o mesmo ponto (ou o mesmo número) pode ser escrito de diferentes maneiras, como por exemplo: ....

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \text{ etc..}$$

No 5º estágio, uma nova introdução da linha numerada será feita, quando ela servirá para mostrar geomètricamente (ou gràficamente), a correspondência um-a-um entre os elementos de dois diferentes sistemas de números:

— o conjunto dos números naturais, que é o nome matemático correto para os chamados números "inteiros" (ou de contagem), com os quais os alunos lidam desde cedo;

— o conjunto de números que se estabelece quando os números naturais são usados juntos, aos pares, como os indicados pelos numerais $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ etc., e que são membros do conjunto dos números racionais, comumente chamados na escola elementar de frações.

Costuma escrever-se $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{1} = 3$ etc., sem levar em consideração que os numerais $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ etc., de um lado da igualdade, representam números de um sistema (o dos números racionais) e os numerais 2, 3 etc., do outro lado da igualdade, representam números de outro sistema (o dos números naturais). Entretanto, na escola elementar, as crianças não precisam fazer essa distinção.

Saber que o mesmo número (ou o mesmo ponto numa linha numerada) tem nomes diferentes é de grande importância, pois é mudar um nome de um número por outro equivalente que torna possível, a comparação, a adição e a subtração de frações.

Mais tarde, será considerado ainda outro conjunto de nomes, isto é, os numerais das frações decimais. Os numerais 0, 5, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$ são todos nomes para o mesmo ponto na linha numerada. A vantagem da linha numerada é representar visualmente o mesmo ponto (ou o mesmo número) associado a diferentes numerais *. Possibilitando ainda a representação de números diferentes como $\frac{3}{1}$ e 3, a linha numerada desenvolve e reforça a idéia de "sistema de números".

São muitos os alunos que nesse estágio demonstram interêsse em aumentar seus conhecimentos. Para êsses, será interessante introduzir o sistema de números chamados relativos, que inclui números positivos, números negativos e o zero, estendendo-se a linha numerada para representar a extensão do campo numérico. O aluno verá que, embora pertencendo a um sistema diferente, os números relativos positivos podem ser associados aos mesmos pontos da linha dos números naturais.

* Para uma distinção entre os têrmos *número* e *numeral* usados neste livro, ver página 14.

Cálculo com frações

DENOMINADORES COMUNS

As frações não teriam utilidade como números se não fôsse possível compará-las (dizer se uma fração é maior que outra), adicioná-las ou subtraí-las. A base para a comparação, a adição e a subtração de frações é a noção de denominador comum.

Saber que o mesmo número pode ter muitos nomes é de grande aplicação no desenvolvimento dessa noção. Por exemplo, o aluno aprendeu ao trabalhar com a linha numerada, que $\frac{3}{4}$ pode ser representado por $\frac{6}{8}$ ou $\frac{9}{12}$ e $\frac{5}{6}$ por $\frac{10}{12}$ ou $\frac{15}{18}$. Conseqüentemente, será simples comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ usando "outros nomes" para as duas frações (por exemplo: $\frac{9}{12}$ e $\frac{10}{12}$).

A adição e a subtração de frações também constituem uma aplicação da idéia de "outros nomes". Assim, a adição de $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ é resolvida pela adição de $\frac{9}{12}$ e $\frac{10}{12}$. É indispensável desenvolver uma boa compreensão da noção de equivalência, antes de introduzir qualquer técnica para achar o denominador comum. É importante também desenvolver a noção de denominador comum, bem como da maneira de proceder para encontrá-lo, antes de se pedir ao aluno para somar ou subtrair frações. Depois de uma boa compreensão da noção de denominador comum e de alguma habilidade em encontrar frações equivalentes (com o mesmo denominador) para as frações que se vai somar ou subtrair, a aprendizagem dêsses processos será grandemente simplificada.

A linha numerada servirá agora para desenvolver a habilidade de encontrar frações equivalentes, levando o aluno a organizar, paralelamente, tabelas que relacionem essas frações descobertas na linha numerada. A organização dessas tabelas é particularmente útil porque permite que o aluno veja, ao mesmo tempo, um conjunto maior de frações equivalentes, e não uma ou duas frações de cada vez. Pelo exame da tabela, êle pode encontrar numerais que tenham um denominador comum para duas ou mais frações.

Uma vez compreendida a idéia de denominador comum, o aluno poderá aprender a procurá-lo, usando métodos mais abstratos.

Primeiro aprenderá a examinar as frações (como $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$) para ver se o maior denominador pode ser o denominador comum. Se puder, irá procurar equivalentes a essas frações em têrmos dêsse denominador. Se o maior denominador não convém ao caso, o aluno aprenderá a experimentar múltiplos do maior denominador, até encontrar o denominador comum. Por exemplo, ao procurar um denominador comum para $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{10}$, como 10 (que é o maior denominador) não serve, experimentará 2×10. O produto 20 também não convém ao caso porque 20 não é divisível por 6. Experimentará, então, 3×10. Como 30 é divisível por 6, 30 será o denominador conveniente. Apesar de não ser êste o método mais direto, é simples e permitirá encontrar sempre um denominador comum. A dificuldade maior surge quando os denominadores são primos entre si, como no caso das frações $\frac{5}{13}$ e $\frac{8}{17}$.

Nesse exemplo, o primeiro múltiplo de 17 que convirá é 13×17, ou seja, o produto dos dois denominadores.

O desenvolvimento da idéia de denominador comum como apresentamos, deve merecer maior atenção que um simples conjunto de aulas como preparação para a adição e a subtração de frações. Êsse conhecimento tem grande importância, pois além de fundamentar a comparação de frações, permite desenvolver a noção de *conjunto de números*, e introduzir a palavra conjunto. A idéia de conjunto é das mais fundamentais no domínio da Matemática, e daqui por diante o aluno terá muitas oportunidades de usá-la.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

Os processos de adição e subtração de frações têm sido considerados, tradicionalmente, como difíceis de aprender e fixar. Em parte, tal consideração decorre do fato de se ter usado no ensino dêsses processos, uma orientação baseada na teoria da aprendizagem do estímulo-resposta. De acôrdo com essa teoria, cada processo era subdividido em um complexo conjunto de "habilidades específicas" (etapas a serem vencidas) que eram treinadas mecânicamente, uma a uma. Ao contrário, as novas teorias dão ênfase ao desenvolvimento de princípios gerais, no caso os que se aplicam à adição e à subtração de frações, antes de treinar pràticamente as habilidades

de computar.[17] O aluno tem oportunidade de ver, por processos visuais, e não mecânicos, o significado das operações que realiza.[28]

A adição de frações será associada à ação de reunir partes de objetos concretos.

Uma vez que a noção de denominador comum já foi introduzida, não haverá necessidade de concentrar-se a atenção nas habilidades de computar exigidas pelo processo de achar o denominador comum, o que prejudicaria a compreensão das operações cujo ensino é agora o nosso objetivo.

Apresentado de acôrdo com as idéias discutidas acima, o processo de adicionar e subtrair frações é aprendido sem grandes dificuldades.

Antigamente, aconselhava-se usar de início sòmente adições como $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ (frações homogêneas).

Atualmente, acredita-se que o aluno deva começar com frações como $\frac{3}{5} + \frac{9}{10}$ (frações heterogêneas). Tal orientação está de acôrdo com o princípio que defendemos segundo o qual, para desenvolver "insight", a introdução de um processo se fará por exemplos que sejam, tanto quanto possível, capazes de representar o processo completo.[27]

O mesmo princípio será seguido no ensino da adição de "números mistos", podendo usar-se de início exemplos como $4\frac{3}{4} + 1\frac{7}{8}$. Note-se que, nesse caso, a soma das "partes fracionárias" dos dois números mistos é maior que 1, já exigindo o trabalho com "reserva" (para a coluna dos inteiros). Uma vez compreendido o aspecto básico do processo, não há necessidade de preocupação em selecionar exemplos mais fáceis para apresentar inicialmente ao aluno. Uma vez compreendido o caso geral, o aluno poderá trabalhar com qualquer caso particular, sem necessidade de modificar fundamentalmente o processo aprendido.

O ensino da subtração de frações será organizado e desenvolvido de acôrdo com o plano sugerido para a adição. Os primeiros exemplos incluirão frações como $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$ (frações heterogêneas), em vez de casos simples e particulares como $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$. Em se tratando de números mistos, os primeiros exemplos implicarão em "recurso".

Nem todos os alunos que alcançam o 5º estágio terão conseguido a acuidade e o nível de aproveitamento desejáveis em adição e subtração de frações. Entretanto, pode esperar-se que adquiram boa compreensão dos processos com os quais estejam trabalhando.

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Na escola elementar o conceito básico de multiplicação é desenvolvido por meio de situações que envolvem a combinação de grupos iguais. Nessas situações o número de objetos em cada grupo e o número de grupos são números "inteiros". O produto também é um número "inteiro" e exprime o total de objetos do grupo resultante da combinação dos grupos iguais. Entretanto, êsse significado de multiplicação torna-se inadequado quando se trata de frações. Porém, essa inadequação não é ainda evidente nas situações em que se quer reunir uma quantidade representada por uma fração um número "inteiro" de vêzes. Por exemplo, suponhamos que seja preciso reunir cinco vêzes a quantidade $\frac{3}{4}$. A quantidade total pode ser representada pela equação $n = 5 \times \frac{3}{4}$.

Mesmo que não se saiba multiplicar uma fração por um número inteiro pode encontrar-se o valor de n usando a equação $n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, onde $n = \frac{15}{4}$. Entretanto se $n = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$, a interpretação da multiplicação em têrmos de adição não procede, pois não é possível usar a adição para resolver uma situação como essa. Qualquer esfôrço para interpretar $\frac{5}{6}$ como indicador de quantos $\frac{3}{4}$ devem ser somados deixa de ter sentido e traz confusão. Portanto, o primitivo sentido de multiplicação terá de ser abandonado.

Também é pràticamente impossível interpretar o processo de multiplicação de frações usando objetos concretos ou através das discrepantes situações-problema onde, de algum modo, a palavra "de" adquire o significado de "vêzes", como em $\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{4}$.

Tais métodos servem para fazer com que o aluno *aceite a regra*, mas não se pode julgar essa aceitação como evidência de uma verdadeira compreensão. É claro que a regra "funciona", mas "porque" funciona permanece sem explicação.

A base da regra para multiplicar frações é matemática e não concreta.

Em têrmos matemáticos, o uso das frações exige uma extensão do sistema numérico, sendo preciso aprender a calcular nesse nôvo sistema — o das frações.

As frações gozam da maior parte das propriedades essenciais de um número natural. Por exemplo, pode usar-se o numeral 12/4 (ou a equivalente 3/1) para representar o número 3. Da mesma forma, pode usar-se o numeral 6/3 (ou a equivalente 2/1) para representar o número 2. Como o produto de 3 e 2 é 6, infere-se daí que a regra para a multiplicação das frações $\frac{12}{4}$ e $\frac{6}{3}$ terá de produzir uma nova fração que possa ser usada em lugar de 6. De acôrdo com a regra tem-se:

$$\frac{4}{12} \times \frac{3}{6} = \frac{4 \times 3}{12 \times 6} = \frac{72}{12}.$$

O produto $\frac{72}{12}$ pode ser usado em lugar de 6.

De modo geral pode dizer-se que a regra (ou definição) da multiplicação de frações é formulada de modo a acarretar um resultado coerente com o que se obteria se os números envolvidos na operação fôssem vistos como números naturais. Mas, muitas vêzes, as multiplicações não podem ser vistas dessa maneira. Por exemplo, a fração $\frac{5}{6}$ não tem um número inteiro correspondente. O mesmo acontece com a fração $\frac{3}{4}$. Não obstante, para multiplicar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ pode aplicar-se a mesma regra, resultando:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24} \text{ ou } \frac{5}{8}.$$

Para demonstrar que há um sentido lógico nesse resultado, pode usar-se uma situação de multiplicação que envolva os números $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$.

Naturalmente que a discussão acima não foi feita em linguagem adequada a alunos da escola elementar, mas seu objetivo foi sugerir um meio matemàticamente correto para ensinar a multiplicação de frações. Desde que feita de forma bastante simples, ao nível da compreensão dos alunos, a introdução da multiplicação de frações pode ser guiada pelos princípios discutidos. Além disso, tal orientação provê um fundamento básico para o crescimento contínuo dessa compreensão e, em geral, da compreensão dos números racionais. Alguns livros de ensino de Matemática afirmam que, em multiplicações como $5 \times \frac{3}{4}$, não convém escrever $\frac{5}{1} \times \frac{3}{4}$. A escrita do 5 como $\frac{5}{1}$ é considerada uma "muleta" e aconselha-se ao professor evitá-la. Entretanto, professôres experientes acham que escrever o exemplo desta maneira traz ajuda ao aluno. Realmente, não se justifica a hesitação em ensinar essa possibilidade de escrever-se $\frac{5}{1}$ para representar 5 nas operações com frações. Matemàticamente falando, é até preferível que o cálculo seja feito dentro de um mesmo sistema — o *sistema das frações*, e não dentro de um "sistema misto", no qual um fator é um número inteiro, e o outro fator e o produto são frações.

A introdução da multiplicação, partindo de frações heterogêneas como $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$, deveria ser seguida imediatamente pela multiplicação de números mistos. De acôrdo com o princípio geral que defendemos, ainda aqui, um caso geral deve ser apresentado inicialmente e não uma seqüência de casos especiais isolados (por exemplo, número inteiro multiplicado por uma fração, depois fração multiplicada por um número inteiro, etc.). Portanto, o aluno deve enfrentar desde o início, exemplos como: $3\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2}$, $3 \times \frac{5}{6}$, ou $\frac{1}{5} \times 5\frac{1}{8}$.

O 5º estágio é a época de introduzir a noção de números inversos, uma vez que essa ideia é básica para compreender a divisão por fração. Quando o produto de 2 números é 1, um número é o inverso do outro.

Assim, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$, $\frac{66}{87} \times \frac{87}{66} = 1$, etc.

Essa idéia é realmente muito simples, mas tem sido evitada na escola elementar em benefício de uma regra "mística" que o aluno é obrigado a usar: "inverte-se o divisor e multiplica-se". No programa moderno de Matemática idéias fundamentais como o conceito de números inversos não podem ser negligenciadas. Daqui por diante, ao estudar e usar a Matemática o aluno precisará recorrer constantemente ao conceito de inverso.

DIVISÃO DE FRAÇÕES

O método de ensino da divisão de frações tem merecido muita discussão entre professôres. Também a literatura relativa ao assunto tem apresentado bastante divergência.

Autoridades no assunto, sem esperanças em fazer compreender o processo, perdoam o ensino formal da regra comum "inverter o divisor e multiplicar". Outros têm tentado obter a aceitação da regra (sem, entretanto, atingir a compreensão), partindo de situações-problema. Outros ainda recomendam o método do denominador comum, mas não explicam, satisfatòriamente, porque êsse processo conduz ao resultado.

Essas dificuldades surgem porque os métodos de ensino não têm encarado o aspecto matemático e psicológico do problema. Êstes aspectos precisam ser reconhecidos e encarados diretamente.

É necessário compreender, em primeiro lugar, que a regra "inverter" o divisor e multiplicar descreve um processo abreviado, mas não explica nada. De onde vem essa regra? Por que funciona? Note-se que a palavra "inverter" refere-se sòmente à aparência física ou visual do numeral. Rigorosamente falando, "inverter" o divisor não é uma operação matemática.

O "método do denominador comum" tem alcançado bom nível de popularidade. De acôrdo com êle, tanto o dividendo como o divisor são reescritos com um "denominador comum". Assim, $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ é substituído por $\frac{2}{4} \div \frac{3}{4}$ cujo resultado é $\frac{2}{3}$.

Os defensores dêsse método nada esclarecem sôbre o que acontece aos denominadores comuns nesse caso. Simplesmente os ignoram. Assim, surge a pergunta: — O que se fêz com os denominadores 4?

A resposta é que a divisão de 4 por 4 também é considerada, mas como é igual a 1, conclui-se que o resultado será $\frac{2}{3} \div 1$, imediatamente expresso por $\frac{2}{3}$.

Daí percebe-se que o "método do denominador comum" é um caso especial de um processo geral, ou seja, um caso no qual os denominadores, por serem iguais, não precisam ser considerados.

Suponhamos, por exemplo, que $\frac{9}{14}$ deva ser dividido por $\frac{3}{7}$. Uma vez que $9 \div 3 = 3$ e $14 \div 7 = 2$, pode exprimir-se o quociente por $\frac{3}{2}$.

É difícil formular uma regra geral precisa para aplicar ao processo. "Dividem-se os numeradores para encontrar o nôvo numerador e os denominadores para encontrar o nôvo denominador" é uma regra que, realmente, constitui um modo prático, mas que se aplica apenas a divisões que não envolvem resto, como no exemplo acima. Entretanto, se antes de aplicar a regra fôsse encontrado um denominador comum, o nôvo denominador seria 1. Essa é a base fundamental do "método do denominador comum". Mas, em geral, o procedimento não simplifica a divisão, pois o quociente é expresso de forma tão complexa como a do exemplo original.

Essa discussão ajuda a compreender porque os métodos tradicionais de dividir por uma fração não poder mais ser considerados como a melhor maneira de ensinar. Tais métodos não levam a uma real compreensão, pois são abreviados e não penetram no conteúdo matemático.

Então, como ensinar divisão envolvendo frações?

Inicialmente, é importante compreender que a regra (inverter o divisor e multiplicar) é um princípio básico em Matemática: "Se em uma divisão o dividendo e o divisor forem multiplicados (ou divididos) pelo mesmo número, o quociente não se altera".

Êsse princípio é verdadeiro não sòmente quando o dividendo e divisor são números inteiros mas, também, quando constituem frações. Suponhamos que $\frac{11}{2}$ deva ser dividido por $\frac{3}{4}$. Para tornar a operação mais simples, escreve-se a divisão na forma mostrada à direita. A idéia de inverso será usada, multiplicando-se o divisor $\frac{3}{4}$ pelo seu inverso $\frac{4}{3}$. Com isso, o nôvo divisor $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}$ será 1. Mas, de acôrdo com o princípio matemático enunciado acima, o dividendo $\frac{11}{2}$ também tem de ser multiplicado por $\frac{4}{3}$.

$$\cfrac{\frac{11}{2}}{\frac{3}{4}}$$

Assim:

$$\cfrac{\frac{11}{2}}{\frac{3}{4}} = \cfrac{\frac{11}{2} \times \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} \quad \text{ou} \quad \cfrac{\frac{11}{2} \times \frac{4}{3}}{1}.$$

O nôvo dividendo $(\frac{11}{2} \times \frac{4}{3})$ é o produto do dividendo original pelo inverso do divisor original. O nôvo divisor é 1, porque multiplicando-se um número $(\frac{3}{4})$ pelo seu inverso $(\frac{4}{3})$, obtém-se sempre produto 1. Portanto, substituiu-se a divisão primitiva pela divisão equivalente: $(\frac{11}{2} \times \frac{4}{3}) \div 1$, onde o dividendo é um produto e o resultado será igual ao próprio dividendo $(\frac{11}{2} \times \frac{4}{3})$. Nesse produto resultado, um dos números $(\frac{11}{2})$ é o dividendo original e o outro $(\frac{4}{3})$ o inverso do divisor original.

Assim, explica-se de onde vem a regra simplificada "inverter o divisor e multiplicar".

Já dissemos que "inverter o divisor" não é uma operação matemática. Mas, multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor é um princípio matemático justificável quando o divisor também é multiplicado pelo seu inverso. É preciso notar que, o princípio é geral e aplicável a qualquer exemplo no qual dividendo e divisor sejam frações.

Tal processo tem significação matemática e pode ser ensinado a alunos do 5º estágio, depois que tenham sido desenvolvidos os princípios que acabamos de discutir. O princípio "multiplicar ou dividir dividendo e divisor pelo mesmo número não afeta o quociente" foi ensinado no estágio anterior. A idéia de inverso pode ser ensinada no 5º estágio, tão logo se desenvolva o ensino da multiplicação de frações.

Vários são os recursos que se tem usado para levar o aluno a aceitar a regra da inversão do divisor. Por exemplo, costuma fazer-se a pergunta: — "Quantas metades há em três coisas?" Depois de mostrar ao aluno que há seis metades, o exemplo pode ser resolvido numèricamente escrevendo-se:

$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Apresentam-se, então, outros exemplos semelhantes para serem resolvidos pela mesma regra. Entretanto, êsse raciocínio torna-se difícil quando o dividendo é menor que o divisor, como no caso de $\frac{1}{2} \div \frac{2}{4}$.

É difícil encontrar uma situação na qual surja uma pergunta como: — "Quantos três quartos há em uma metade?" e, mesmo que ela ocorra, a resposta será "nenhum", de acôrdo com o raciocínio acima. No entanto, aplicando a regra teríamos:

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como justificar essa resposta?

O fato de existirem tais exemplos de divisão (onde o divisor excede o dividendo), sugere a possibilidade de situações-problema que exijam uma divisão dessa natureza, e, realmente, elas ocorrem. Para exemplificar temos as situações que envolvem relação ou comparação, nas quais a idéia básica é exprimir uma correspondência através de razão. Na página 87, do 4º estágio, e 111 do 5º, há uma apresentação detalhada dessas correspondências e sua aplicação na resolução de problemas.

Consideremos o problema: "João anda $\frac{1}{2}$ km em cada $\frac{3}{4}$ km andado por Pedro. Quando Pedro andou 1 km, quanto terá andado João?"

A relação aqui envolvida é $\frac{1}{2}$ para $\frac{3}{4}$ e pode ser representada pela razão $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$. Para resolver o problema será preciso exprimir essa relação usando outra razão, na qual um dos têrmos (1) é conhecido, mas o outro não.

Assim, a equação das razões será escrita como aparece à direita.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{n}{1}$$

Aplicando a "propriedade fundamental das proporções" (os "produtos cruzados" são iguais), a equação transforma-se em $\frac{3}{4}\, n = \frac{1}{2} \times 1.$

Para encontrar o valor de n, divide-se $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{4}$ e o resultado é $\frac{2}{3}$.

Assim, enquanto Pedro andou 1 quilômetro, João andou sòmente $\frac{2}{3}$ do quilômetro, resposta que tem sentido lógico em têrmos da situação.

Quando os alunos aprendem a dividir sòmente "pela regra" podem resolver a operação $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$, lembrando-se da regra, mas nunca entenderão porque a divisão é possível. Por outro lado, alunos que tenham lidado com êsse tipo de correspondência compreenderão que o resultado $\frac{2}{3}$ mostra a correspondência de $\frac{1}{2}$ para $\frac{3}{4}$, isto é, que "um meio é dois terços de três quartos".

Representação decimal das frações

EXTENSÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DE BASE DEZ

Na parte relativa ao 4º estágio expusemos nosso pensamento com respeito à representação decimal das frações. No 5º estágio, a criança poderá compreender, com maior profundidade, que, nesta representação, as idéias centrais são o agrupamento em 10 e o uso do princípio do valor do algarismo de acôrdo com a posição que ocupa no numeral. Quando a criança assimila bem essas idéias centrais, encontra pequena dificuldade em compreender o valor de algarismos colocados à direita da ordem das unidades; percebe, então, que as partes fracionárias em consideração são décimos, décimos de décimos (ou centésimos), décimos de centésimos (ou milésimos) etc. É preciso que a criança seja levada a ver que, o sistema de numeração é um sistema decimal e que a representação decimal das frações constitui simplesmente uma extensão dêsse sistema.

No 5º estágio a criança terá oportunidade de adicionar e subtrair decimais em situações que envolvam o uso de medidas.

Quanto à adição e à subtração de decimais, o leitor poderá consultar a orientação já sugerida na parte relativa ao 4º estágio.

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES EXPRESSAS EM DECIMAIS

Quando os fatôres de um produto são frações com notação decimal, a nova característica do processo é o problema da colocação da vírgula decimal no produto. Antigamente isso era resolvido por uma regra. O aluno aprendia a contar o número de "casas decimais" no multiplicador e no multiplicando e, depois, "marcava" o número total dessas casas no resultado. Como a regra funcionava, o aluno guardava a maneira de contar as casas decimais. Entretanto, para compreender a regra, o aluno precisa pensar no significado dos símbolos. Além disso, precisa compreender que a regra está baseada no processo de multiplicar duas frações quaisquer.

Usando a notação decimal, embora os denominadores não estejam representados, êles são todos múltiplos de 10, e, por conseguinte, a situação é idêntica a uma multiplicação (ou divisão) de frações ordinárias. Assim, $1{,}5 \times 0{,}25 = 15/10 \times 25/100$.

Essas idéias devem ser cuidadosamente desenvolvidas no 5º estágio.

Quando queremos somar ou subtrair números escritos em notação decimal é costume organizar os numerais de modo que as vírgulas decimais fiquem na mesma coluna vertical. Isso constitui um meio mecânico e visual de localizar a vírgula na resposta — que será simplesmente colocada debaixo das outras vírgulas. Assim, o aluno aprende a colocar a vírgula sem se preocupar com o significado dos símbolos. Daí, considerar-se o recurso puramente mecânico.

Convém notar que também na multiplicação êsse recurso se aplica, escrevendo-se os numerais dos produtos parciais e do produto total, de modo que as vírgulas decimais fiquem em uma mesma coluna vertical (ver exemplo à direita).

Entretanto, nesse caso, não se trata de um recurso automático, pois é necessário pensar muito para assegurar a colocação correta dos numerais.

$$\begin{array}{r} 3{,}42 \\ 2{,}7 \\ \hline 2{,}394 \\ 6{,}84 \\ \hline 9{,}234 \end{array}$$

No exemplo ao lado, a multiplicação indicada por $0{,}7 \times 3{,}42$ pode ser vista como $7/10 \times 342/100$, cujo produto é $\frac{2394}{1000}$ ou 2,394. O resultado mostra que o primeiro produto parcial, resultado da multiplicação $0{,}7 \times 3{,}42$ é um numeral de três ordens à direita da vírgula para representar os milésimos do resultado. O segundo produto parcial ($2 \times 3{,}42$) envolve sòmente centésimos, havendo pois, duas ordens à direita da vírgula decimal.

Êsse processo exige, porém, um pensamento muito complexo, fazendo com que êle não seja ensinado.

O processo comumente usado tem sido ignorar as vírgulas, multiplicando-se os números inteiros implìcitamente representados na multiplicação (342 centésimos e 27 décimos). Assim, desalinham-se as vírgulas, tornando-se necessário um meio qualquer para localizá-la na resposta.

O conhecimento já adquirido do processo de multiplicar frações permite que o aluno compreenda que $2{,}7 = \frac{27}{10}$, e que $3{,}42 = \frac{342}{100}$; logo, o produto será expresso por 27×342 milésimos. Assim, o aluno colocará a vírgula no resultado, de acôrdo com os princípios do sistema de numeração decimal.

No 5º estágio os alunos devem trabalhar com muitos exemplos como os que descrevemos acima.

Não há inconveniente em que a criança descubra e use uma regra prática para localizar a vírgula no resultado, desde que compreenda o fundamento da regra. Tal orientação difere da tradicional, que apresentava a regra sem nenhum esfôrço no sentido de ajudar o aluno a compreendê-la. O domínio da aprendizagem só era conseguido através de um prolongado período de repetição mecânica. Tais métodos de ensino não são característicos de um programa moderno de Matemática, que constrói o conhecimento com base na compreensão.

DIVISÃO DE FRAÇÕES DECIMAIS

Na divisão envolvendo as frações com notação decimal, a colocação da vírgula torna-se parte importante do processo. Como no caso da multiplicação, muitas vêzes a regra de colocação da vírgula é aprendida sem nenhuma compreensão. No programa moderno, entretanto, o aluno será levado a compreender os princípios em que se baseia o método pelo qual êle vai aprender.

Uma ligeira modificação nos métodos tradicionais de ensinar a dividir decimais, ajudará a compreender o processo. O aluno será levado a determinar, antes de efetuar a divisão, o número de ordens decimais do resultado. Daí em diante, o processo continua sendo, fundamentalmente, o mesmo que se usa para dividir números inteiros.

É costume substituir uma divisão onde o divisor é uma fração (expressa em notação decimal) por outra equivalente na qual o divisor é um número inteiro. Para isso multiplica-se o dividendo e o divisor por um múltiplo de dez. O aluno já aprendeu que, multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo mesmo número o quociente não se altera. Assim, no exemplo $24{,}48 \div 1{,}7$ pode multiplicar-se 24,48 e 1,7 por 10 e obter-se a divisão equivalente $244{,}8 \div 17$. Entretanto, êsse princípio nem sempre é explicado. Observe-se que a nova divisão ($244{,}8 \div 17$) pode ser escrita na forma $\frac{2448}{10} \div \frac{17}{1}$ ou $\frac{2448}{10} \times \frac{1}{17}$, justificando-se a divisão de 2448 por 17. Mas, o resultado (144) ainda terá de ser dividido por 10. A familiarização com o sistema de numeração decimal leva a escrever imediatamente o resultado como 14,4.

No processo comum de dispor a operação, a vírgula decimal é temporàriamente esquecida (como mostra o exemplo ao lado), sendo colocada ao completar-se a divisão por 17. Feita a divisão por 17, alcança-se a etapa final — dividir 144 por 10, como mostra ainda o exemplo ao lado.

$$\begin{array}{r|l} 244{,}8 & 17 \\ \cline{2-2} 170\,0 & 100 \\ \hline 74\,8 & \\ 68\,0 & 40 \\ \hline 68 & \\ 68 & 4 \\ \hline 0 & 14{,}4 \end{array}$$

Da mesma forma, no exemplo $63{,}75 \div 5$, faz-se a divisão de 6375 por 5 e, depois, como 63,75 envolve centésimos, o resultado (1275) será dividido por 100, obtendo-se a resposta 12,75. Apesar de o método ter sido explicado aqui com exemplos particulares, êle é geral.

Segundo alguns métodos de ensino atuais, o lugar da vírgula decimal na resposta é estabelecido por processos mais ou menos mecânicos, antes de se começar a divisão. No método descrito acima a vírgula é colocada, considerando-se o significado dos numerais ao final da divisão.

Entretanto, nem sempre o resto de uma divisão é zero e, muitas vêzes, a divisão pode continuar indefinidamente como no exemplo $2 \div 3$. Por isso, convém decidir quanto à precisão desejada na resposta, antes de começar a dividir. A precisão é indicada pelo número "de casas decimais" explicitamente representadas no dividendo. Por exemplo, na divisão $126{,}3 \div 26$ obtém-se uma resposta precisa até décimos. No caso de se desejar uma aproximação até centésimos, a divisão será escrita como $126{,}30 \div 26$, que conduzirá à desejada precisão. Deve ficar claro, portanto, que é possível colocar a vírgula decimal no quociente, por um processo baseado na compreensão que seja aplicável a qualquer caso de divisão. A maneira de registrar o trabalho é o aspecto menos importante do processo, podendo usar-se maneiras diferentes de fazer êsse registro. Como já foi dito (ver páginas 79 a 83), o ensino do processo de dividir será feito de forma que se obtenha a compreensão dos vários "passos" seguidos.

Uma característica do método de divisão aconselhado nesse livro é o fato de registrar-se os quocientes parciais por inteiro, e não apenas por um algarismo no quociente. No caso de números que envolvem frações expressas em notação decimal essa característica se mantém, decidindo-se de início, quantas "casas decimais" devem aparecer na resposta.

Resolução de problemas

PROBLEMAS DE VÁRIAS ETAPAS

Freqüentemente falamos nesse livro da importância de um recurso efetivo para desenvolver a habilidade de resolver problemas na escola primária. Chamamos a atenção para a descrição das atividades sugeridas para desenvolver essa habilidade nos estágios anteriores. No início do 5º estágio, tratamos do uso das razões para exprimir correspondências e da aplicação dêsse recurso em problemas que envolvem relação e comparação. Convém o leitor reportar-se à página 111.

Nessa altura da aprendizagem, o aluno pode resolver problemas aritméticos mais complexos, e precisa ter adquirido a habilidade de analisá-los, de exprimir-lhes a estrutura em equações apropriadas e de operar para encontrar a resposta pedida. Antes de discutir os problemas de várias etapas, será conveniente chamar a atenção para a extensão ou generalização do uso de símbolos na resolução dos problemas.[56] O aluno precisa aprender que qualquer letra do alfabeto pode ser usada para ocupar o lugar de um numeral em sentenças matemáticas como as equações. Nos problemas de várias etapas serão necessárias várias letras para escrever as equações que traduzem a estrutura da situação.

Não há razão para considerar essas equações muito "difíceis" ou "muito adiantadas" para a criança. A técnica de usar uma letra para substituir temporàriamente um numeral é muito simples e facilita a análise de grande parte dos problemas. A ausência do ensino de recursos como êsses é uma das razões pelas quais tanta dificuldade tem surgido na resolução de problemas. Os problemas que requerem várias operações (várias etapas) para serem resolvidos, ocorrem freqüentemente na vida diária. Encerram uma situação total que engloba vários problemas relacionados. Muitas vêzes êsses problemas são atacados de maneira retalhada, sem que o aluno pare para analisar a situação como um todo. Façamos uma análise típica de um problema de várias etapas: "Dois professôres levaram 34 alunos para uma viagem de ônibus". A passagem para o professor custava Cr\$ 50 e para o aluno Cr\$ 24. Qual foi o preço total das passagens?" Observe-se que o problema envolve três quantidades (o preço total das passagens dos professôres, o preço total das passagens dos alunos e o preço de tôdas as passagens). Lògicamente, a ação básica é a aditiva. Assim, para exprimir a estrutura da situação, pode escrever-se a equação $a + b = x$. Convenciona-se que a, guarda o lugar do numeral que representa o preço total das passagens dos professôres; b, ocupa o lugar do numeral que representa o preço total das passagens dos alunos e x, o preço total de tôdas as passagens. Pode reescrever-se a equação na forma: $(2 \times \text{Cr\$ } 50) + (34 \times \text{Cr\$ } 24) = x$. Fazendo-se as multiplicações indicadas, a equação resultante será $\text{Cr\$ } 100 + \text{Cr\$ } 816 = x$. Agora, é simples achar o numeral que x estava substituindo. O aluno que vê a situação dessa maneira, sabe de antemão, as etapas a vencer antes de começar a operar. Êste processo é muito mais razoável que aquêle em que o aluno começa a fazer contas mais ou menos às cegas, sem uma idéia clara das etapas subseqüentes.

PROBLEMAS ENVOLVENDO NÚMEROS EXPRESSOS EM FORMA DE FRAÇÕES

Ao tratar da percentagem, referimo-nos às chamadas três "situações" de percentagem e mostramos como tornar mais simples os problemas de percentagem levando o aluno a exprimir pelas razões as correspondências envolvidas na solução de tais problemas. O mesmo raciocínio se aplica a certos tipos de problemas nos quais os números envolvidos aparecem em forma de fração (ordinária ou decimal). Os três tipos de problemas são, em geral, apresentados assim:

1º — (achar uma fração de um numero). Quanto é $\frac{3}{4}$ de 24?

Solução tradicional: Multiplicar 24 por $\frac{3}{4}$ - $\frac{3}{4} \times 24 = 18$

2º — (achar que fração um número é de outro). 18 que fração é de 24?

Solução tradicional: Escrever o numeral 18 sôbre o numeral 24. $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

3º — (achar um número quando se conhece uma fração dêle). 18 é $\frac{3}{4}$ de que número?

Solução tradicional: Dividir 18 por $\frac{3}{4}$. $18 \div \frac{3}{4} = 18 \times \frac{4}{3} = 24$.

Note-se que para cada um dos casos usou-se uma forma diferente de solução, o que traz dificuldades para o aluno que não compreende porque aquêle método foi o escolhido. Por exemplo, por que se dividiu 18 por $\frac{3}{4}$ no 3º caso?

Diante de tal diversidade, como pode o aluno guardar com segurança a regra a usar em cada caso específico?

Note-se também que, em problemas dêsse tipo, a característica essencial é a correspondência entre os números. Quando se pergunta "Que número é $\frac{3}{4}$ de 24?", a questão é "Que número tem a mesma relação com 24 que $\frac{3}{4}$ tem com 1?" Portanto, o problema pode ser resumido pela equação,

$$\frac{3}{4}/1 = n/24.$$

Os outros problemas citados como exemplo também podem ser encarados de maneira semelhante, empregando-se equações de razões, o que os torna mais significativos. De acôrdo com êsse ponto de vista, os três tipos citados podem ser assim resolvidos:

1º — (achar uma fração de um número). Quanto é $\frac{3}{4}$ de 24?

Solução: $\frac{3}{4}/1 = d/24$; $\frac{3}{4} \times 24 = 1 \times d$; $d = 18$

2º — (achar que fração um número é de outro). 18 é que fração de 24?

Solução: $t/1 = 18/24$; $24\ t = 18 \times 1$; $t = \frac{3}{4}$.

3º — (achar um número quando se conhece uma fração dêle). 18 é $\frac{3}{4}$ de que número?

Solução: $\frac{3}{4}/1 = 18/n$; $\frac{3}{4}\,n = 1 \times 18$; $n = 18 \div \frac{3}{4} = 24$.

Portanto, os três "tipos" ajustam-se em um esquema geral que não é nôvo, constituindo simplesmente uma aplicação das equações de razões iguais, ou proporções. Assim, é possível utilizar um processo sistemático na resolução dêsses problemas. Uma vez garantida a compreensão e uma boa experiência do processo, os alunos mais competentes poderão adotar e usar regras abreviadas. Entretanto, como em percentagem, convém partir de situações problemáticas sem que se mencione fórmulas até que os alunos compreendam como escrever e resolver as equações.

PROBLEMAS DE COMPARAÇÃO RESOLVIDOS PELA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Há problemas que envolvem dois tipos de situação-comparação: situações "comparativas de subtração" e "comparativas de adição". Como exemplo, pode citar-se os problemas nos quais são comparados dois grupos para saber-se quantos objetos a mais ou a menos há em um dos grupos. Nesse caso, estabelece-se a correspondência um-a-um entre os objetos de um grupo com os do outro. Os objetos do grupo maior que tiverem correspondentes no grupo menor são removidos ou subtraídos do grupo maior, o que torna a situação subtrativa. O número restante diz quantos objetos há mais no grupo maior que no menor e constitui a diferença. Suponhamos que se tenha de resolver o problema seguinte: "Roberto tem uma coleção de 246 figurinhas e outra de 131 selos. Quantas figurinhas tem mais que selos?" A equação que traduz êsse problema é uma equação de subtração $246 - 131 = t$ e o processo que o resolve é a subtração.

Outra situação de comparação é aquela em que o número de objetos no grupo maior e a diferença entre os dois grupos são conhecidos, como no problema: "Roberto tem uma coleção de 246 figurinhas. Êle tem 115 figurinhas mais que selos. Quantos selos êle tem?" Como o número de objetos do grupo maior e a diferença entre os grupos são conhecidos, e não se conhece o número no grupo menor, a equação do problema será $246 - n = 115$. Ainda nesse caso, o processo a usar é a subtração.

Outra situação de comparação aparece no problema: "Roberto tem uma coleção de figurinhas. Tem também uma coleção de 131 selos. Êle tem 115 selos menos que figurinhas. Quantos selos êle tem?" Note-se que, agora, a diferença e o número de objetos do grupo menor são conhecidos. Conseqüentemente pode escrever-se a equação $k - 131 = 115$.

Novamente temos uma equação subtrativa, mas dessa vez, ela se resolverá pela adição.

A primeira situação de comparação (Quantos mais ou quantos menos), tendo em vista sua simplicidade, pode ser introduzida muito cedo. Foi discutida detalhadamente no 2º e 3º estágios. As duas outras situações serão desenvolvidas no 4º estágio. O desenvolvimento dêsses dois tipos de comparação completa a lista de tipos de problemas a serem estudados até o 5º estágio.

Nas páginas 154 a 156 dêste livro, encontra-se uma lista completa dêsses tipos de problemas.

Desigualdades

A relação de igualdade ocupa papel dominante em Matemática. Entretanto, não se pode aprender a completa significação de igualdade sem que se conheça e compreenda a relação de desigualdade. Até hoje, relações como "3 é menor que 5" têm sido consideradas apenas incidentalmente nos programas de Aritmética. Modernamente, aconselha-se apresentar, ainda que nos últimos anos da escola primária, o simbolismo e a linguagem comumente usados para designar relações de desigualdade.

Uma expressão como $6 + w = 10$ constitui o que chamamos uma *sentença aberta*. Nessa sentença, a letra w guarda o lugar de um numeral. Quando se substitui w por um numeral, obtém-se uma equação que constitui uma *sentença fechada*.

Se em $6 + w = 10$, w é substituído por 8, por exemplo, obtém-se a sentença $6 + 8 = 10$ que exprime uma idéia falsa. Se, entretanto, w é substituído por 4, na sentença $6 + w = 10$, ela passa a exprimir uma idéia verdadeira.

Expressões como $9 > k$ (que se lê 9 é maior que k), também constituem *sentenças abertas*. Se k é substituído pelo numeral 5, obtém-se uma afirmação verdadeira. Se k é substituído por 12, obtém-se uma afirmação falsa. Expressões como $9 > 5$ e $9 > 12$ exprimem relações de desigualdade.

O conjunto de números cujos numerais, quando usados em uma *sentença aberta*, são capazes de torná-la verdadeira, constitui o que chamamos de "conjunto de soluções". O conjunto de soluções pode consistir de muitos números, de apenas poucos, de sòmente um, ou de nenhum. Nesse estágio de aprendizagem, o aluno terá resolvido muitas equações, mas o conjunto de soluções para os problemas consistiu sempre de apenas um número. Convém que o aluno aprenda, agora, que o conjunto de soluções para muitos problemas pode consistir de mais de um número.

Aconselha-se a introdução dessas idéias no 5º estágio, ainda que de forma elementar, pois, modernamente, muitas são as aplicações dessas idéias no trabalho posterior de Matemática.

Cálculo mental

O uso do cálculo mental deve ser estimulado em cada estágio. O aluno precisa ter oportunidade de desenvolver seus próprios métodos para calcular "de cabeça". Ao chegar ao 5º estágio, êle já deve possuir considerável habilidade em criá-los. Entretanto, convém lembrar que, a habilidade de calcular sem papel e lápis varia grandemente entre os alunos. É preciso respeitar a capacidade de cada aluno e qualquer esfôrço individual que mostre originalidade deve ser encorajado. O trabalho no 5º estágio oferece oportunidades para um contínuo crescimento da habilidade em "calcular de cabeça". Algumas dessas oportunidades surgem da aplicação das propriedades fundamentais que serão analisadas a seguir.

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DO SISTEMA NUMÉRICO

Às vêzes, o conjunto de soluções para uma sentença matemática pode consistir de todos os números usados na Matemática elementar, como por exemplo, $5 + n = n + 5$ e $5 \times n = n \times 5$, que ilustram a "propriedade comutativa" da adição e da multiplicação (a ordem dos adendos não altera a soma, ou a ordem dos fatôres não altera o produto). Até agora, essas propriedades têm sido usadas nas operações sem que se lhes dê explícita atenção.

Outro aspecto importante do sistema numérico é a "propriedade associativa". Bàsicamente, pela adição somamos um número a outro. Se há mais de dois adendos, é preciso decidir em que ordem êles serão considerados. Por exemplo, no caso de $16 + 29 + 14$, pode associar-se primeiro 16 e 29 e, depois, adicionar essa soma (45) com 14. Obtém-se, assim, o resultado 59. Por outro lado, pode associar-se primeiro 29 e 14 e, a seguir, adicionar a soma (43) com 16. Obtém-se, novamente, o resultado 59. A propriedade associativa da adição assegura-nos que isso não aconteceu acidentalmente, pois, êsse mesmo resultado será obtido seja qual fôr a adição de três adendos e a maneira de agrupar os adendos.

No caso da multiplicação, a propriedade associativa permite agrupar os fatôres do produto de diferentes maneiras. Consideremos o exemplo $13 \times 6 \times 32$. Pode associar-se primeiro 13 e 6 e, então, multiplicar êsse produto (78) por 32, encontrando-se para resultado 2496. Por outro lado, pode associar-se primeiro 6 e 32 e, a seguir, multiplicar êsse produto (192) por 13. O resultado será novamente, 2496.

Convém repetir que isso não é acidental. A propriedade associativa da multiplicação assegura que o mesmo resultado será encontrado, indiferente da maneira pela qual os números sejam agrupados, e que isso ocorre em qualquer multiplicação envolvendo três fatôres. O mesmo princípio aplica-se também aos casos de mais de três fatôres.

Entre as propriedades importantes do sistema numérico está ainda a "propriedade distributiva". Vejamos um exemplo dessa propriedade:

$$13 \times (9 + 30) = (13 \times 9) + (13 \times 30).$$

Nesse exemplo, o mesmo número é designado de duas maneiras diferentes, como mostram os dois grupos de símbolos separados pelo sinal de igualdade. Dois números (9 e 30) serão somados e o total multiplicado por outro número (13). A propriedade distributiva torna possível achar o resultado de $13 \times (9 + 30)$, multiplicando 9 por 13 e, depois, 30 por 13 para, finalmente, adicionar êsses dois produtos.

Essa propriedade tem muitas aplicações na Matemática elementar, destacando-se o seu emprêgo na simplificação do cálculo "de cabeça". Para encontrar o produto de 8×33, por exemplo, pode pensar-se em 33, como $30 + 3$, multiplicar 30 e 3 por 8 e somar êsses produtos (240 e 24) "de cabeça". O produto total será 264.

A compreensão dêsses princípios permite calcular "de cabeça" em situações nas quais não convenha usar o papel e o lápis. Êsse conhecimento das propriedades básicas (comutativa, associativa e distributiva), além do emprêgo imediato no cálculo "de cabeça" é de grande aplicação no trabalho posterior de Matemática.

Sistema legal de unidades de medir

Ao chegar ao 5º estágio, o aluno já deve estar familiarizado com os princípios básicos da mudança de uma unidade de medir para unidades maiores ou menores. É conveniente reensinar neste estágio a mudança de unidade que se relaciona às medidas de superfície e de volume. Convém ainda que o aluno saiba que existe outro sistema de medir além do que nós usamos, uma vez que sua experiência já permite que êle entre em contato com medidas como milha, jarda e polegada, tão comuns nas transações comerciais, no esporte, na mecânica de automóveis etc. Daí a necessidade de desenvolver-se algumas noções do sistema inglês de pesos e medidas, bem como de algumas unidades antigas não decimais ainda em uso no Brasil (alqueire, arrôba, braça etc.).

Investigações nesse sentido constituem interessantes atividades de enriquecimento, através das quais haverá oportunidade de valorizar a contribuição da inteligência humana para o progresso cultural.

Aconselha-se, também, a introdução no 5º estágio de alguns problemas simples envolvendo medidas não decimais (números complexos).

A criança perceberá que no caso dos números complexos, quando há necessidade de reagrupamento, êle não pode ser feito em têrmos do sistema decimal de numeração. Por exemplo, aprenderá que para somar 6h e 30min com 3h e 50min, somam-se, primeiro, 50min com 30min. A seguir, êsse total (80min) é reagrupado em 1h e 20 min e, então, 1 hora será adicionada às 9 horas já encontradas.

Assim:

$$\begin{array}{rr} 6\text{h} & 30\text{min} \\ +3\text{h} & 50\text{min} \\ \hline 9\text{h} & 80\text{min} \end{array} = 10\text{h } 20\text{min}$$

O que se fêz e o que se fará

Procuramos apresentar neste livro as características principais de um Programa Moderno de Matemática. Acentuamos a importância da compreensão, o papel fundamental do sistema de numeração decimal e a vantagem de se ensinar às crianças métodos matemáticos de analisar as situações-problema, usando as equações como instrumento básico para sua solução. Discutimos métodos de ensinar as operações visando não só à compreensão como também às habilidades em computar. Recomendamos certos padrões para organização do programa de ensino desenvolvendo progressivamente o "insight", de modo a torná-lo cada vez mais profundo.

Finalmente, discutimos a importância de desenvolver-se conceitos matemáticos de grande influência em estudos matemáticos e científicos posteriores.

Os esforços que se tem feito atualmente para aperfeiçoar o programa de ensino de Matemática no Ginásio trarão, brevemente, uma mudança profunda em seu currículo.

Os alunos que estudarem Matemática na Escola Primária pelos processos defendidos neste livro, não só estarão preparados para enfrentar os programas modernos que surjam no Ginásio, como também, ansiosos por êles.

Bibliografia

Os itens desta bibliografia estão organizados alfabèticamente e relacionados à matéria dêste livro pelos numerais que aparecem à esquerda. Foi feito um esfôrço para incluir sòmente referências que pudessem ser encontradas pela maior parte dos leitores.

1 Anderson, G. Lester. "Quantitative Thinking as Developed under Connectionist and Field Theories of Learning," *Learning Theory in School Situations*, pp. 40-73. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1949.
Relatório de um estudo experimental de comparação entre dois métodos de ensino. Faz notar que a amplitude dos resultados da aprendizagem depende dos métodos de ensino.

2 Brownell, William A., and Carper, Doris V. *Learning the Multiplication Combinations*. Duke University Research Studies in Education, Nº 7. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1943.
Relata não apenas uma pesquisa no ensino dos fatos fundamentais da multiplicação, como apresenta, também, uma análise crítica e um sumário de investigações anteriores. Apresenta sugestões práticas e teóricas para o ensino dos fatos da multiplicação.

3 Brownell, W. A., and Moser, Harold E. *Meaningful vs. Mechanical Learning: A Study in Grade III Subtraction*. Duke University Research Studies in Education, Nº 8. Durham, North Carolina: Duke University Press, 1949.
Relata uma pesquisa comparando a eficiência dos processos de decomposição e de adições iguais em subtração.

4 Buckingham, Burdette R. *Elementary Arithmetic: Its Meaning and Practice*, pp. 141-44. Boston: Ginn & Co., 1947.
Discute reconhecidos processos de subtrair números inteiros que têm merecido aceitação nos EE.UU. em várias épocas.

5 Buswell, Guy T., and Judd, Charles H. *Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic*, pp. 58-99. Supplementary Educational Monographs, Nº 27. Chicago: University of Chicago Press, 1925.
Relata o desenvolvimento da contagem: contagem começa quando a criança ainda é muito pequena, com movimentos rítmicos; mais tarde, a criança acompanha êsses movimentos com articulação rítmica, muitas vêzes usando o nome dos números; finalmente, aplica o nome dos números a objetos e os toca ou os aponta individualmente, um após outro, à proporção que diz os nomes dos números.

6 Carper, Doris V. "Seeing Numbers as Groups in Primary-Grade Arithmetic," *Elementary School Journal*, XLIII (November, 1942), 166-70.
Chama a atenção para os fatôres de organização da percepção de números (estrutura, forma das unidades, conteúdo pictórico), mas não faz uma distinção entre respostas às estruturas geométricas (pontos e círculos) e respostas a grupos pròpriamente numéricos.

7 Crumley, Richard D. "Teaching Rate and Ratio in the Middle Grades," *School Science and Mathematics*, LX (February, 1960), 143-50.
Sugere materiais e atividades para desenvolver o conceito de razão por meio de situações de relação.

8 Curtis, Herbert J., and Menger, Karl. "On the Formulation of Certain Arithmetical Questions," *Mathematics Teacher*, XLIX (November, 1956, 528-30.
Apresenta uma breve discussão da diferença entre "símbolos básicos" e "expressões", ressaltando as vantagens do último.

9 Dawson, Dan T. "Number Grouping as a Function of Complexity," *Elementary School Journal*, LIV (September, 1953), 35-42.
Relata um estudo feito com crianças de primeira série e conclui que o fator crucial na apreensão do número como grupo é o grau de complexidade do campo de percepção.

10 Dawson, Dan T., and Ruddell, Arden K. "An Experimental Approach to the Division Idea," *Arithmetic Teacher*, II (February, 1955), 6-9.
Relata um estudo experimental comparando "práticas atuais" com um método de ensinar divisão baseado em princípios e generalizações aritméticas. Conclui que o conceito subtrativo é a base sôbre a qual a introdução da divisão de números inteiros deve apoiar-se.

11 Deans, Edwina. "Teaching Multiplication and Division Facts," *Childhood Education*, XXXII (March, 1956), 326-33.
Discute um meio de ensinar os fatos da multiplicação e da divisão com base na compreensão.

12 ———. "The Contribution of Grouping to Number Development," *Childhood Education*, XVII (March, 1941), 307-10.
Preceitua experiências com grupos de modo que cada grupo seja apresentado como único e individual em si mesmo (vistos como um todo) e não como constituído de objetos separados e isolados. Não conclui, explicitamente se êste critério é válido para os grupos em geral ou sòmente para pequenos grupos básicos, vistos como partes de grupos maiores. Faz a diferença entre a contagem e o agrupamento como estágios no desenvolvimento da criança. Sugere que o "agrupamento" como um estágio da aprendizagem do número mereça estudo mais acurado.

13 Gibb, E. Glenadine. "Children's Thinking in the Process of Subtraction," *Journal of Experimental Education*, XXV (September, 1956), 70-80.
Relata as conclusões de uma investigação sôbre como pensam as crianças na resolução de problemas selecionados envolvendo situações aditivas, comparativas e subtrativas. Apresenta os resultados de estudo baseado em dados colhidos em entrevista com trinta e seis crianças da segunda série, antes de receberem ensino formal para resolução de problemas. Partindo daí, são sugeridas condições para a escolha de um método de ensino.

14 ———. "Some Approaches to Mathematics Concepts in the Elementary School," *National Education Association Journal*, XLVIII (November, 1959), 65-66.
Defende um reexame do currículo da escola elementar para que se possa desenvolver a compreensão de idéias matemáticas por meio de experiências selecionadas para crianças, apresentando várias sugestões.

15 ———. "Take-Away Is Not Enough!" *Arithmetic Teacher*, I (April, 1954), 7-10.
Sugere algumas contribuições para o ensino da resolução de problemas, concluídas de um estudo dos meios pelos quais as crianças da segunda série

resolvem determinados tipos de problema. Classifica também as situações-problema nas quais se aplicam os processos de adição e subtração.

16 Gibb, E. Glenadine: Jones, Phillip S.; and Junge, Charlote W. "Number and Operation," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, pp. 7-19. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Descreve a seqüência de idéias no desenvolvimento do conceito de correspondência um-a-um, de número associado ao conjunto de objetos e de ordenação de conjuntos padrões com o objetivo de determinar uma seqüência ordenada dos símbolos numéricos para fixar a posição de um elemento particular num conjunto.

17 ———. *ibid.*, pp. 7-42.
Descreve uma seqüência de idéias no desenvolvimento do conceito de números naturais e frações, um sistema de numeração e das operações com números naturais e frações.

18 ———. *ibid.*, pp. 20-25.
Descreve a seqüência de idéias no desenvolvimento do conceito das operações com números naturais.

19 Gibb, E. Glenadine, and Van Engen, H. *Structuring Kinesthetic Experiences to Facilitate Conceptual Learning*. Educational Service Studies, Issue Nº 3. Cedar Falls, Iowa: Iowa State Teachers College, 1959.
Relata um estudo comparativo de três processos para desenvolver inicialmente o conceito de área. As conclusões baseadas na aplicação de um dos métodos ao ensino individual de alunos de quinta série, trazem contribuições à maneira de proceder das crianças em atividades que levam ao desenvolvimento de conceitos matemáticos.

20 Gunderson, Agnes G. "Thought-Patterns of Young Children in Learning Multiplication and Division," *Elementary School Journal*, LV (April, 1955), 453-61.
Descreve como crianças de 2ª série resolveram problemas simples de divisão e multiplicação com a ajuda de material representativo.

21 Hartung, Maurice L. "Distinguishing Between Basic and Superficial Ideas in Arithmetic Instruction," *Arithmetic Teacher*, VI (March, 1959), 65-70.
Recomenda, com insistência, que o ensino da Aritmética deve focalizar um conjunto limitado de conceitos e princípios básicos que sejam de ampla aplicação, dando exemplos de técnicas e materiais de ensino que desenvolvem tais conceitos e princípios.

22 ———. "Estimating the Quotient in Division," *Arithmetic Teacher*, IV (April, 1957), 100-11.
Analisa, criticamente, pesquisas em processos de estimar o quociente na divisão. Considera as vantagens de se usar os quocientes obtidos por tentativa, quando menores que o quociente verdadeiro.

23 ———. "Fractions and Related Symbolism in Elementary-School Instruction," *Elementary School Journal*, LVIII (April, 1958), 377-84.
Discute várias maneiras de interpretar o significado de fração.

24 Hightower, H. W. "Effect of Instructional Procedures on Achievement in Fundamental Operations in Arithmetic," *Educational Administration and Supervision*, XL (October, 1954), 336-48.
Faz um sumário de relatórios de pesquisas sôbre os diferentes métodos de adição e de subtração. Termina por concluir que não há conclusões defini-

tivas e que o critério de rapidez e acuidade não são suficientes para fazer-se um julgamento dos processos.

25 Jones, Phillip S. "The Growth of Mathematical Ideas," *National Education Association Journal,* XLVIII (December, 1959), 53-54.
Apresenta sugestões a professôres não suficientemente familiarizados com o programa de continuidade dos conceitos matemáticos. As idéias apresentadas neste artigo estão melhor desenvolvidas no "Twenty-Fourth Yearbook", *The growth of Mathematical Ideas, Grades K-12,* "National Council of Teachers of Mathematics."

26 Judd, Charles H. *Psychological Analysis of the Fundamentals of Arithmetic.* Supplementary Educational Monographs, Nº 32. Chicago: University of Chicago Press, 1927.
Defende o ponto de vista de que uma pessoa só reconhece um grupo de objetos como composto de elementos isolados, quando analisa o grupo reagindo sucessivamente a cada elemento do grupo, por uma forma de reação ordenada. Conseqüentemente, o desenvolvimento da simples contagem até o agrupamento é visto como um processo de amadurecimento alcançado pela experiência.

27 Lankford, Francis G., Jr. "Implications of the Psychology of Learning for the Teaching of Mathematics," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12,* pp. 405-30. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Sumariza pontos básicos das teorias de aprendizagem que podem ajudar o professor de Matemática na orientação diária do ensino.

28 Lankford, Francis G., Jr., and Pattishall, Evan G., Jr. *Development of Independence in Adding and Subtracting Fractions.* Charlottesville: University of Virginia Council for Educational Research, 1956.
Relata um estudo experimental sôbre a avaliação de processos de ensino que estimulam independência e flexibilidade de pensamento e trabalho.

29 MacLatchy, Josephine H. "A Test of the Pre-School Child's Familiarity with Measurement," *Educational Research Bulletin,* XXIX (November, 1950), 207-08, 222-23.
Descreve técnicas que podem ser usadas para determinar a familiaridade das crianças em idade pré-escolar, com as medidas.

30 May, Kenneth O., and Van Engen, Henry. "Relations and Functions," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12,* pp. 65-81. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Descreve algumas atividades apropriadas à escola elementar para o desenvolvimento do significado matemático de relação.

31 McMahon, Della. *An Experimental Comparison of Two Methods of Teaching Per Cent.* Unpublished doctoral dissertation. University of Missouri, 1959. Pp. 149.
Relata um estudo experimental feito com o objetivo de comparar dois processos de ensinar percentagem. As conclusões sustentam que, para alunos de sétima série (nos EE.UU.) o ensino de percentagem pelo conceito de razão é superior ao processo tradicional.

32 Moser, Harold E. "Can We Teach Pupils to Distinguish the Measurement and Partition Ideas in Division?" *Mathematics Teacher,* XLV (February, 1952), 94-97+.

Discute os recursos comuns usados para ajudar as crianças a fazer distinção entre situações de "medir" e "repartir" em divisão. Sugere o emprêgo de equações de multiplicação como $N \times 4 = 12$ e $4 \times N = 12$.

33 Mueller, Francis J. *Arithmetic, Its Structure and Concepts,* pp. 1-47. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1956.
Dá especial atenção ao sistema de numeração de base dez e também, uma visão geral dos sistemas de numeração em outras bases.

34 Peters, Ann C. "The Number System and the Teacher," *Arithmetic Teacher,* IV (October, 1957), 155-60.
Descreve processos de ensinar sistemas numéricos e sistemas de numeração por meio da idéia de coleção e da linha numerada.

35 Phillips, Clarence. "Five Point Program in the Teaching of Arithmetic," *American Childhood,* XXXVIII (March, 1953), 12-13.
Discute, de maneira breve, mas excelente, programas e processos modernos. Descreve como proceder no desenvolvimento de um conceito nôvo, as implicações dêsse procedimento no ensino, exemplificando-o com o desenvolvimento do conceito de adição. (O exemplo refere-se à primeira série, mas pode ser adaptado à segunda série.)

36 Purdy, C. Richard, and Kinney, Lucien B. "Directing Learning in Arithmetic," *Elementary School Journal,* LIV (January, 1954), 285-90.
Descreve uma seqüência de experiências para uma aprendizagem efetiva, analisando-as em têrmos de conceitos básicos de Psicologia. Dá ênfase ao processo de aprender e não ao seu produto.

37 Reckzeh, John. "Addition and Subtraction Situations," *Arithmetic Teacher,* III (April, 1956), 94-97.
Define as situações aditivas e subtrativas em têrmos do mecanismo dos processos, ou o que deve ser feito para se obter a resposta, em vez de encarar a maneira pela qual as crianças percebem a situação. Esta posição é discutível tanto do ponto de vista matemático, como psicológico.

38 Renwick, E. M. *The Case Against Arithmetic.* London: Simpkin Marshall, Ltd., 1935.
Discute as dificuldades que encontram crianças de 10 a 12 anos de idade na resolução de problemas aritméticos e explica tais dificuldades como defeitos do ensino nas primeiras séries. Sugere que as experiências com os símbolos não devem ser o objetivo do trabalho inicial com números, que deve partir de experiências para a formação de conceitos. Recomenda exercícios de correspondência um-a-um entre os elementos de duas coleções sem fazer necessàriamente a operação de contagem usando a seqüência numérica.

39 Russell, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy,* pp. 11-19. Originally published in 1903. New York: Macmillan Co., 1938.
Define um determinado número como a característica comum de conjuntos "semelhantes" porque os elementos de um podem ser postos em correspondências um-a-um com os elementos do outro. Descreve o ato da contagem como sendo a correspondência um-a-um entre os elementos do conjun[illegible] objetos contados e os elementos da seqüência numérica.

40 Russell, Ned M. "Arithmetic Concepts of Children," *Journal of* [illegible] *Research,* XXIX (May, 1936), 647-63.
Descreve "muitos" como um dos primeiros conceitos numér[illegible] criança adquire. É um primeiro estudo e limitou-se a um peque[illegible] crianças. A técnica da entrevista, junto com a manipulação [illegible] usada com objetivos específicos.

tivas e que o critério de rapidez e acuidade não são suficientes para fazer-se um julgamento dos processos.

25 Jones, Phillip S. "The Growth of Mathematical Ideas," *National Education Association Journal*, XLVIII (December, 1959), 53-54.
Apresenta sugestões a professôres não suficientemente familiarizados com o programa de continuidade dos conceitos matemáticos. As idéias apresentadas neste artigo estão melhor desenvolvidas no "Twenty-Fourth Yearbook", *The growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, "National Council of Teachers of Mathematics."

26 Judd, Charles H. *Psychological Analysis of the Fundamentals of Arithmetic*. Supplementary Educational Monographs, Nº 32. Chicago: University of Chicago Press, 1927.
Defende o ponto de vista de que uma pessoa só reconhece um grupo de objetos como composto de elementos isolados, quando analisa o grupo reagindo sucessivamente a cada elemento do grupo, por uma forma de reação ordenada. Conseqüentemente, o desenvolvimento da simples contagem até o agrupamento é visto como um processo de amadurecimento alcançado pela experiência.

27 Lankford, Francis G., Jr. "Implications of the Psychology of Learning for the Teaching of Mathematics," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, pp. 405-30. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Sumariza pontos básicos das teorias de aprendizagem que podem ajudar o professor de Matemática na orientação diária do ensino.

28 Lankford, Francis G., Jr., and Pattishall, Evan G., Jr. *Development of Independence in Adding and Subtracting Fractions*. Charlottesville: University of Virginia Council for Educational Research, 1956.
Relata um estudo experimental sôbre a avaliação de processos de ensino que estimulam independência e flexibilidade de pensamento e trabalho.

29 MacLatchy, Josephine H. "A Test of the Pre-School Child's Familiarity with Measurement," *Educational Research Bulletin*, XXIX (November, 1950), 207-08, 222-23.
Descreve técnicas que podem ser usadas para determinar a familiaridade das crianças em idade pré-escolar, com as medidas.

30 May, Kenneth O., and Van Engen, Henry. "Relations and Functions," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, pp. 65-81. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Descreve algumas atividades apropriadas à escola elementar para o desenvolvimento do significado matemático de relação.

31 McMahon, Della. *An Experimental Comparison of Two Methods of Teaching Per Cent*. Unpublished doctoral dissertation. University of Missouri, 1959. Pp. 149.
Relata um estudo experimental feito com o objetivo de comparar dois processos de ensinar percentagem. As conclusões sustentam que, para alunos de sétima série (nos EE.UU.) o ensino de percentagem pelo conceito de razão é superior ao processo tradicional.

32 Moser, Harold E. "Can We Teach Pupils to Distinguish the Measurement and Partition Ideas in Division?" *Mathematics Teacher*, XLV (February, 1952), 94-97+.

Discute os recursos comuns usados para ajudar as crianças a fazer distinção entre situações de "medir" e "repartir" em divisão. Sugere o emprêgo de equações de multiplicação como $N \times 4 = 12$ e $4 \times N = 12$.

33 Mueller, Francis J. *Arithmetic, Its Structure and Concepts*, pp. 1-47. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1956.
Dá especial atenção ao sistema de numeração de base dez e também, uma visão geral dos sistemas de numeração em outras bases.

34 Peters, Ann C. "The Number System and the Teacher," *Arithmetic Teacher*, IV (October, 1957), 155-60.
Descreve processos de ensinar sistemas numéricos e sistemas de numeração por meio da idéia de coleção e da linha numerada.

35 Phillips, Clarence. "Five Point Program in the Teaching of Arithmetic," *American Childhood*, XXXVIII (March, 1953), 12-13.
Discute, de maneira breve, mas excelente, programas e processos modernos. Descreve como proceder no desenvolvimento de um conceito nôvo, as implicações dêsse procedimento no ensino, exemplificando-o com o desenvolvimento do conceito de adição. (O exemplo refere-se à primeira série, mas pode ser adaptado à segunda série.)

36 Purdy, C. Richard, and Kinney, Lucien B. "Directing Learning in Arithmetic," *Elementary School Journal*, LIV (January, 1954), 285-90.
Descreve uma seqüência de experiências para uma aprendizagem efetiva, analisando-as em têrmos de conceitos básicos de Psicologia. Dá ênfase ao processo de aprender e não ao seu produto.

37 Reckzeh, John. "Addition and Subtraction Situations," *Arithmetic Teacher*, III (April, 1956), 94-97.
Define as situações aditivas e subtrativas em têrmos do mecanismo dos processos, ou o que deve ser feito para se obter a resposta, em vez de encarar a maneira pela qual as crianças percebem a situação. Esta posição é discutível tanto do ponto de vista matemático, como psicológico.

38 Renwick, E. M. *The Case Against Arithmetic*. London: Simpkin Marshall, Ltd., 1935.
Discute as dificuldades que encontram crianças de 10 a 12 anos de idade na resolução de problemas aritméticos e explica tais dificuldades como defeitos do ensino nas primeiras séries. Sugere que as experiências com os símbolos não devem ser o objetivo do trabalho inicial com números, que deve partir de experiências para a formação de conceitos. Recomenda exercícios de correspondência um-a-um entre os elementos de duas coleções sem fazer necessàriamente a operação de contagem usando a seqüência numérica.

39 Russell, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*, pp. 11-19. Originally published in 1903. New York: Macmillan Co., 1938.
Define um determinado número como a característica comum de conjuntos "semelhantes" porque os elementos de um podem ser postos em correspondências um-a-um com os elementos do outro. Descreve o ato da contagem como sendo a correspondência um-a-um entre os elementos do conjunto de objetos contados e os elementos da seqüência numérica.

40 Russell, Ned M. "Arithmetic Concepts of Children," *Journal of Educational Research*, XXIX (May, 1936), 647-63.
Descreve "muitos" como um dos primeiros conceitos numéricos que a criança adquire. É um primeiro estudo e limitou-se a um pequeno número de crianças. A técnica da entrevista, junto com a manipulação de blocos, foi usada com objetivos específicos.

tivas e que o critério de rapidez e acuidade não são suficientes para fazer-se um julgamento dos processos.

25 Jones, Phillip S. "The Growth of Mathematical Ideas," *National Education Association Journal*, XLVIII (December, 1959), 53-54.
Apresenta sugestões a professôres não suficientemente familiarizados com o programa de continuidade dos conceitos matemáticos. As idéias apresentadas neste artigo estão melhor desenvolvidas no "Twenty-Fourth Yearbook", *The growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, "National Council of Teachers of Mathematics."

26 Judd, Charles H. *Psychological Analysis of the Fundamentals of Arithmetic*. Supplementary Educational Monographs, Nº 32. Chicago: University of Chicago Press, 1927.
Defende o ponto de vista de que uma pessoa só reconhece um grupo de objetos como composto de elementos isolados, quando analisa o grupo reagindo sucessivamente a cada elemento do grupo, por uma forma de reação ordenada. Conseqüentemente, o desenvolvimento da simples contagem até o agrupamento é visto como um processo de amadurecimento alcançado pela experiência.

27 Lankford, Francis G., Jr. "Implications of the Psychology of Learning for the Teaching of Mathematics," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, pp. 405-30. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Sumariza pontos básicos das teorias de aprendizagem que podem ajudar o professor de Matemática na orientação diária do ensino.

28 Lankford, Francis G., Jr., and Pattishall, Evan G., Jr. *Development of Independence in Adding and Subtracting Fractions*. Charlottesville: University of Virginia Council for Educational Research, 1956.
Relata um estudo experimental sôbre a avaliação de processos de ensino que estimulam independência e flexibilidade de pensamento e trabalho.

29 MacLatchy, Josephine H. "A Test of the Pre-School Child's Familiarity with Measurement," *Educational Research Bulletin*, XXIX (November, 1950), 207-08, 222-23.
Descreve técnicas que podem ser usadas para determinar a familiaridade das crianças em idade pré-escolar, com as medidas.

30 May, Kenneth O., and Van Engen, Henry. "Relations and Functions," *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12*, pp. 65-81. Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1959.
Descreve algumas atividades apropriadas à escola elementar para o desenvolvimento do significado matemático de relação.

31 McMahon, Della. *An Experimental Comparison of Two Methods of Teaching Per Cent*. Unpublished doctoral dissertation. University of Missouri, 1959. Pp. 149.
Relata um estudo experimental feito com o objetivo de comparar dois processos de ensinar percentagem. As conclusões sustentam que, para alunos de sétima série (nos EE.UU.) o ensino de percentagem pelo conceito de razão é superior ao processo tradicional.

32 Moser, Harold E. "Can We Teach Pupils to Distinguish the Measurement and Partition Ideas in Division?" *Mathematics Teacher*, XLV (February, 1952), 94-97+.

Discute os recursos comuns usados para ajudar as crianças a fazer distinção entre situações de "medir" e "repartir" em divisão. Sugere o emprêgo de equações de multiplicação como $N \times 4 = 12$ e $4 \times N = 12$.

33 Mueller, Francis J. *Arithmetic, Its Structure and Concepts*, pp. 1-47. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1956.
Dá especial atenção ao sistema de numeração de base dez e também, uma visão geral dos sistemas de numeração em outras bases.

34 Peters, Ann C. "The Number System and the Teacher," *Arithmetic Teacher*, IV (October, 1957), 155-60.
Descreve processos de ensinar sistemas numéricos e sistemas de numeração por meio da idéia de coleção e da linha numerada.

35 Phillips, Clarence. "Five Point Program in the Teaching of Arithmetic," *American Childhood*, XXXVIII (March, 1953), 12-13.
Discute, de maneira breve, mas excelente, programas e processos modernos. Descreve como proceder no desenvolvimento de um conceito nôvo, as implicações dêsse procedimento no ensino, exemplificando-o com o desenvolvimento do conceito de adição. (O exemplo refere-se à primeira série, mas pode ser adaptado à segunda série.)

36 Purdy, C. Richard, and Kinney, Lucien B. "Directing Learning in Arithmetic," *Elementary School Journal*, LIV (January, 1954), 285-90.
Descreve uma seqüência de experiências para uma aprendizagem efetiva, analisando-as em têrmos de conceitos básicos de Psicologia. Dá ênfase ao processo de aprender e não ao seu produto.

37 Reckzeh, John. "Addition and Subtraction Situations," *Arithmetic Teacher*, III (April, 1956), 94-97.
Define as situações aditivas e subtrativas em têrmos do mecanismo dos processos, ou o que deve ser feito para se obter a resposta, em vez de encarar a maneira pela qual as crianças percebem a situação. Esta posição é discutível tanto do ponto de vista matemático, como psicológico.

38 Renwick, E. M. *The Case Against Arithmetic*. London: Simpkin Marshall, Ltd., 1935.
Discute as dificuldades que encontram crianças de 10 a 12 anos de idade na resolução de problemas aritméticos e explica tais dificuldades como defeitos do ensino nas primeiras séries. Sugere que as experiências com os símbolos não devem ser o objetivo do trabalho inicial com números, que deve partir de experiências para a formação de conceitos. Recomenda exercícios de correspondência um-a-um entre os elementos de duas coleções sem fazer necessàriamente a operação de contagem usando a seqüência numérica.

39 Russell, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*, pp. 11-19. Originally published in 1903. New York: Macmillan Co., 1938.
Define um determinado número como a característica comum de conjuntos "semelhantes" porque os elementos de um podem ser postos em correspondências um-a-um com os elementos do outro. Descreve o ato da contagem como sendo a correspondência um-a-um entre os elementos do conjunto de objetos contados e os elementos da seqüência numérica.

40 Russell, Ned M. "Arithmetic Concepts of Children," *Journal of Educational Research*, XXIX (May, 1936), 647-63.
Descreve "muitos" como um dos primeiros conceitos numéricos que a criança adquire. É um primeiro estudo e limitou-se a um pequeno número de crianças. A técnica da entrevista, junto com a manipulação de blocos, foi usada com objetivos específicos.

41 Sauble, Irene. "Development of Ability to Estimate and to Compute Mentally," *Arithmetic Teacher,* II (April, 1955), 33-39.
Descreve um programa de Aritmética mental (de cabeça) que exige pensamento em têrmos de relações numéricas, em vez de operar mentalmente pelos mesmos processos usados com lápis e papel.

42 Smith, Rolland R. "Meaningful Division," *Mathematics Teacher,* XLIII (January, 1950), 12-18.
Descreve o processo de subtrações sucessivas como o mais significativo para ensinar a divisão.

43 Stern, William. *Psychology of Early Childhood,* pp. 431-36. New York: Henry Holt & Co., 1930.
Cita muitos exemplos dos dois diferentes tipos de reações à cardinalidade dos números que se desenvolvem independentemente na criança pequena e que se tornam, mais tarde, integradas. Faz distinção entre o desenvolvimento da contagem, que é a habilidade de adicionar unidades, sucessivamente, correlacionando-as com a seqüência de números, e o desenvolvimento do poder de perceber a quantidade em grupo, como um total.

44 Stone, Marshall H. "Fundamental Issues in the Teaching of Elementary School Mathematics," *Arithmetic Teacher,* VI (October, 1959), 177-79.
Recomenda a inclusão da Geometria no conteúdo dos cursos de Aritmética.

45 *Studies in Mathematics Education.* Chicago: Scott, Foresman & Co., 1959. Pp. 57.
Apresenta programas experimentais de Matemática desenvolvidos desde 1952. Para identificar cada programa, inclui informação sôbre comissões, processos, objetivos, resultados, recomendações e as contribuições de programa ao ensino da Matemática nas escolas.

46 Swenson, Esther J. "Arithmetic in Pre-School and Primary Grades," *The Teaching of Arithmetic,* pp. 59-64. Fiftieth Yearbook, Part 2, National Society for the Study of Education. Chicago: University of Chicago Press, 1951.
Acentua a importância da organização das atividades de aprendizagem tomando por base seqüência de experiências e idéias e, não, idade ou distribuição por séries. Observa que a acentuada e prematura importância dada a atividades como a leitura e escrita de números, no início, é um dos pontos fracos dos programas de ensino.

47 *The Learning of Mathematics, Its Theory and Practice.* Twenty-First Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1953. Pp. 355.
Discute, em cada capítulo, um aspecto importante da aprendizagem, segundo uma teoria moderna e pesquisas, mostrando as aplicações dessa teoria a situações especificas da sala de aula.

48 Thorpe, Cleata B. "The Equation: Neglected Ally of Arithmetic Processes," *Elementary School Journal,* LX (March, 1960), 320-24.
Discute o emprêgo de equações na resolução de problemas, nos vários estágios, desde o primeiro.

49 University of Illinois Committee on School Mathematics, Project Staff. "Arithmetic with Frames," *Arithmetic Teacher,* IV (April, 1957), 119-24.
Apresenta uma variedade de situações usando "frames" (uma forma geométrica fechada) para enriquecimento de idéias matemáticas básicas.

50 Van Engen, Henry. "One, Two, Button My Shoe, *Arithmetic Teacher,* I (October, 1954), 18-20.
Estimula os professôres a planejar experiências que ajudem a criança a reconhecer pequenos grupos. Mostra a importância dêsse reconhecimento antes das experiências de contagem, correspondendo ao que se faz nas práticas correntes de leitura.

51 ———. "Teaching the Mathematical Skills in the Elementary Schools," *Progressive Education,* XXIX (October, 1951), 17-20.
Observa a inadequação de métodos comumente usados e apresenta uma teoria que dá ênfase ao processo de aprendizagem, mostrando uma aplicação da teoria ao ensino da resolução dos problemas.

52 ———. "The Child's Introduction to Arithmetic Reasoning," *School Science and Mathematics,* LV (May, 1955), 358-63.
Discute a importância de levar a criança ao desenvolvimento de conceitos aritméticos, através de generalizações concluidas de operações com material manipulativo. Mostra a interferência dêsses principios nos processos de ensino de resolução de problemas. Dá mais ênfase ao processo de aprender do que ao seu produto.

53 ———. "Twentieth Century Mathematics for the Elementary School," *Arithmetic Teacher,* VI (March, 1959), 71-76.
Discute as maneiras pelas quais a Aritmética pode fazer parte do curriculo da escola elementar. Os exemplos dados incluem sistemas numéricos, estruturas, resoluções de problemas e pares de números.

54 ———. "Which Way Arithmetic?" *Arithmetic Teacher,* II (December, 1955), 131-40.
Estimula os professôres a deixar os métodos tradicionais baseados na Psicologia do estímulo-resposta, oferecendo aos interessados em processos modernos, ilustrações de como resolver problemas aplicando consagrados princípios de aprendizagem.

55 Van Engen, Henry, and Gibb. E. Glenadine. *General Mental Functions Associated with Division.* Educational Service Studies, Issue Nº 2. Cedar Falls, Iowa: Iowa State Teachers College, 1956. Pp. 181.
Relata um estudo feito com o objetivo de comparar o processo das subtrações sucessivas com processos convencionais de ensinar a divisão. Oferece também uma bibliografia de estudos sôbre divisão.

56 ———. "Structuring Arithmetic," *Instruction in Arithmetic,* pp. 33-61. Twenty-Fifth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1960.
Discute a resolução de problemas do ponto de vista de estruturas. Inclui a simbolização de problemas envolvendo pares de números (relação, frações e percentagem).

57 ———. *Teaching Children to Divide.* Educational Service Publications, Issue Nº 21. Cedar Falls, Iowa: Iowa State Teachers College, 1959 (revised).
Descreve o processo de ensinar divisão por subtrações sucessivas. Tenta responder a algumas questões a respeito do uso dêsse processo.

58 Weaver, J. Fred. "Whither Research on Compound Subtraction?" *Arithmetic Teacher,* III (February, 1956), 17-20.
Chama a atenção para a complexidade dos fatôres a serem considerados na avaliação das vantagens dos métodos de subtração de números de dois ou mais algarismos, segundo resultado de pesquisas.

DISTRIBUIÇÃO DOS TÓPICOS POR ESTÁGIOS

TÓPICOS	ESTÁGIO 1	ESTÁGIO 2	ESTÁGIO 3	ESTÁGIO 4	ESTÁGIO 5
Grupos	Reconhecimento, reunião, separação e reagrupamento até 10.	Reconhecimento, reunião, separação e reagrupamento até 36.	Reconhecimento, reunião, separação e reagrupamento até 81.		
Sistema Decimal de Numeração	Até 99 Valor posicional.	Até 999 Valor posicional. Preparação para a "Reserva" e o "Recurso".	Até 9999 Valor posicional.	Leitura e compreensão de números além do milhar.	Enriquecimento da noção de decimais como extensão do sistema de numeração de base dez.
Fatos Básicos	Somas e minuendos até 10. Informalmente, produtos e dividendos até 10.	Somas e minuendos até 18; produtos e dividendos até 36.	Revisão e reensino dos fatos básicos de adição e subtração. Produtos e dividendos até 81.	Aplicação aos processos.	Aplicação aos processos.
Sistema Monetário	Reconhecimento de notas e relação entre seus valôres.	Extensão dos conhecimentos. Situações de trôco.	Revisão dos conhecimentos adquiridos. Operações com dinheiro.	Extensão dos conhecimentos.	
Sistema Legal de Unidades de Medir	Conceitos básicos de medida. O metro e o litro.	Desenvolvimento da noção de unidade padronizada: o metro, o litro, o quilo e a hora.	Extensão dos conhecimentos adquiridos. Relação entre unidades. O quilômetro e o centímetro; o grama e a tonelada.	O metro quadrado e o metro cúbico; estruturação das unidades estudadas em um sistema de medidas.	Extensão dos conhecimentos; outras medidas.
Adição e Subtração		Introdução da adição com "reserva" e da subtração com "recurso".	Reensino. Extensão dos conhecimentos adquiridos a números maiores.	Revisão dos conhecimentos e habilidades.	Propriedades: Generalização e Sistematização
Multiplicação e Divisão			Multiplicação com multiplicadores de 1 a 2 algarismos; Reserva. Divisão com divisores de 1 e 2 algarismos.	Reensino. Extensão dos conhecimentos adquiridos a números maiores. (Divisibilidade.)	Propriedades: Generalização e Sistematização.
Fração	Identificação de metade.	Reconhecimento de quartos; comparação com metades.	Reconhecimento das frações até décimos; leitura e escrita dos numerais fracionários.	Outras frações. Comparação e equivalência.	Enriquecimento das noções adquiridas.
Adição e Subtração de Frações				Frações próprias e números mistos.	Extensão dos conhecimentos.
Multiplicação e Divisão de Frações				Frações próprias e números mistos. (Casos mais simples.)	Frações próprias e números mistos. (Casos mais complexos.)
Razão (ver percentagem)		Fundamentos para comparar usando razões.	Preparação para o conceito de razão.	Uso das razões para exprimir correspondências: relação e comparação; equivalência.	Aplicações mais complexas da relação e da comparação; proporção.
Gráficos e Escalas				Leitura e interpretação de gráficos simples.	Leitura e construção de gráficos. Plantas fáceis em escalas simples.
Geometria	Identificação de círculos, retângulos (o quadrado), triângulos.	Construção das figuras geométricas estudadas. Reconhecimento dos ângulos e da posição de linhas.	Identificação dos sólidos mais comuns: prismas (cubo e paralelepípedo).	Outros sólidos. Conceito e medida da área e do volume.	Extensão dos conhecimentos.
Decimais			Leitura e escrita das frações decimais como extensão do sistema de numeração.	Operações.	Operações.
Percentagem				Introdução (como razão.)	Extensão dos conhecimentos.
Resolução de Problemas	Representação por desenhos; visualização da situação — problema; idéia de ação.	Tipos: AS-1, AS-2, AS-3, AS-4, C-1.	Tipos: AS-5, AS-6, R-1, R-2, R-3, R-4, R-5, R-6, C-2.	Tipos: R-1, R-2, R-3, R-4, R-5, R-6, C-2, C-3.	Aplicação dos tipos estudados em situações mais complexas — C-4, C-5, C-6.

Tipos de Problema — Situações de adição e subtração

Tipo n.º	Descrição do Problema	Exemplo	Equação	Computação	Situação-processo	Estágio
AS-1	Procurar o resultado total, quando se conhece o número original e o número a ser somado.	João tem 9 maçãs e Antônio lhe deu 3. Quantas maçãs tem agora ao todo?	$9 + 3 = n$	$9 + 3$	aditiva-adição	2
AS-2	Procurar o número que foi somado, ou quantos mais são necessários, quando se conhece o número original e o resultado total.	João tinha 9 maçãs. Depois que Antônio lhe deu algumas maçãs, êle ficou com 12. Quantas maçãs Antônio deu a João?	$9 + n = 12$	$12 - 9$	aditiva-subtração	2
AS-3	Procurar o número original, quando se conhece o número somado e o resultado total.	João tinha algumas maçãs. Antônio lhe deu 3 maçãs e assim êle ficou com 12 maçãs. Quantas maçãs João já possuía?	$n + 3 = 12$	$12 - 3$	aditiva-subtração	2
AS-4	Procurar o resto, quando se conhece o número original e o número que se tirou.	João tinha 12 maçãs e comeu 3. Com quantas ainda ficou?	$12 - 3 = n$	$12 - 3$	subtrativa-subtração	2
AS-5	Procurar o número retirado, quando se conhece o número original e o resto.	João tinha 12 maçãs e comeu algumas, ficando ainda com 9. Quantas maçãs comeu?	$12 - n = 9$	$12 - 9$	subtrativa-subtração	3
AS-6	Procurar o número original, quando se conhece o número retirado e o resto.	João tinha algumas maçãs. Comeu 3 e ainda ficou com 9. Quantas maçãs tinha ao todo?	$n - 3 = 9$	$9 + 3$	subtrativa-adição	3

Tipos de Problema — Situações de Relação

Tipo n.º	Descrição do Problema	Exemplo	Equação	Computação	Situação-processo	Estágio
R-1	Procurar o número total, quando se conhece o número em cada grupo e o número de grupos iguais.	João tinha 4 caixas com 3 maçãs em cada caixa. Quantas maçãs tinha ao todo?	$4 \times 3 = n$ $\frac{3}{1} = \frac{n}{4}$	4×3	multiplicativa--multiplicação relação-multiplicação	3-4 5
R-2	Procurar o número em cada um dos grupos iguais, quando se conhece o resultado total e o número de grupos.	João colocou 4 grupos iguais de maçãs numa caixa, onde ficaram 12 maçãs. Quantas maçãs havia em cada grupo que êle pôs na caixa?	$4 \times n = 12$ $\frac{n}{1} = \frac{12}{4}$	$12 \div 4$	multiplicativa--divisão relação-divisão	3-4 5
R-3	Procurar o número de grupos iguais, quando se conhece o resultado total e o número em cada grupo.	João colocou vários grupos de 3 maçãs numa caixa. Assim ficaram 12 maçãs na caixa. Quantos grupos de 3 maçãs êle pôs na caixa?	$n \times 3 = 12$ $\frac{3}{1} = \frac{12}{n}$	$12 \div 3$	multiplicativa--divisão relação-divisão	3-4 5
R-4	Procurar o número de grupos iguais, quando se conhece o total original e o número em cada um dos grupos iguais.	João tinha 12 maçãs e guardar em várias caixas. Êle colocou um grupo de 3 maçãs em cada caixa. De quantas caixas precisou?	$12 \div 3 = n$ $\frac{3}{1} = \frac{12}{n}$	$12 \div 3$	medida-divisão relação-divisão	3-4 5
R-5	Procurar o número em cada um dos grupos iguais, quando se conhece o total original e o número de grupos iguais.	João tinha 12 maçãs e repartiu-as igualmente por 4 caixas. Quantas maçãs colocou em cada caixa?	$12 \div n = 4$ $\frac{n}{1} = \frac{12}{4}$	$12 \div 4$	partitiva-divisão relação-divisão	3-4 5
R-6	Procurar o número original, quando se conhece o número em cada grupo e o número de grupos iguais.	João possuía algumas maçãs para colocar em 4 caixas; êle pôs em cada caixa 3 maçãs. Quantas maçãs tinha ao todo?	$n \div 3 = 4$ $\frac{3}{1} = \frac{n}{4}$	4×3	divisão-multiplicação relação-multiplicação.	3-4 5

Tipos de Problema — Situações de Comparação

Tipo n.º	Descrição do Problema	Exemplo	Equação	Computação	Situação-processo	Estágio
C-1	Procurar quanto uma quantidade é mais ou menos que outra.	João tem 12 maçãs e 9 laranjas. Quantas maçãs tem mais que laranjas? Quantas laranjas tem menos que maçãs?	$12 - 9 = n$	$12 - 9$	comparativa-subtração	2
C-2	Procurar a quantidade menor quando se conhece a quantidade maior e o seu excesso ou o que falta à menor.	João tem 12 maçãs. Êle tem 3 { maçãs mais que laranjas; laranjas menos que maçãs. Quantas laranjas tem êle?	$12 - n = 3$	$12 - 3$	comparativa-subtração	3-4
C-3	Procurar a quantidade maior, quando se conhece a quantidade menor e o que lhe falta ou o excesso da quantidade maior.	João tem 9 maçãs. Êle tem 3 { laranjas mais que maçãs; maçãs menos que laranjas. Quantas laranjas tem êle?	$n - 9 = 3$	$9 + 3$	comparativa-divisão	4-5
C-4	Procurar a razão entre duas quantidades.	João tem 12 maçãs e 4 laranjas. Quantas vêzes o número de maçãs é do número de laranjas? Que fração o número de laranjas é do número de maçãs?	$\frac{n}{1} = \frac{12}{4}$ $\left(\frac{1}{n} = \frac{12}{4}\right)$	$12 \div 4$ $(4 \div 12)$	comparativa-divisão	5
C-5	Procurar uma quantidade quando se conhece a outra e a razão entre esta e a quantidade desconhecida.	João tem 12 maçãs. O número de maçãs é 3 vêzes o número de laranjas. O número de maçãs é 1/3 do número de laranjas. Quantas laranjas êle tem?	$\frac{3}{1} = \frac{12}{n}$ $\left(\frac{1/3}{1} = \frac{12}{n}\right)$	$12 \div 3$ $(12 \div 1/3)$	comparativa-divisão	5
C-6	Procurar uma quantidade quando se conhece a outra e a razão da quantidade desconhecida para a conhecida.	João tem 12 laranjas. O número de maçãs é 3 vêzes o número de laranjas. O número de maçãs é 1/3 do número de laranjas. Quantas maçãs êle tem?	$\frac{3}{1} = \frac{n}{12}$ $\left(\frac{1/3}{1} = \frac{n}{12}\right)$	3×12 $(1/3 \times 12)$	comparativa-multiplicação	5

ÊSTE LIVRO FOI COMPOSTO E IMPRESSO
NAS OFICINAS DA EMPRÊSA GRÁFICA DA
"REVISTA DOS TRIBUNAIS" S.A., À RUA
CONDE DE SARZEDAS, 38, SÃO PAULO,
PARA
AO LIVRO TÉCNICO S.A.
EM 1965.

★

Subtração : só dá comparação mais tarde.
Divisão : separa 2 casos

Não dá propriedades

Sistematização : problemas, equação
razão (3º → 4º) para solução
de problemas (× e ÷) pág. 69 e 87
relação 88

Divisão, processo longo : pág. 81, 56
Introdução dos processos com exemplos
representativos do processo
completo : adição —
frações (pág 74)

2.205

AO LIVRO TÉCNICO

LT