ORMA CUNHA OSÓRIO
RIZZA DE ARAÚJO PORTO

Matemática na Escola Primária Moderna

Antonieta

EDUCAÇÃO PRIMÁRIA
GUIAS DE ENSINO

AO LIVRO TÉCNICO S.A.

Anna Franchi

MATEMÁTICA
NA
ESCOLA PRIMÁRIA MODERNA

Antonieta

Fevereiro - 66

EDUCAÇÃO PRIMÁRIA ★ GUIAS DE ENSINO

NORMA CUNHA OSÓRIO

Professôra do magistério oficial do Estado da Guanabara, diplomada pela E. N. Carmela Dutra e pela Faculdade de Filosofia da U.E.G. Especializada no ensino da Matemática na Escola Primária.

RIZZA DE ARAÚJO PORTO

Professôra de Introdução à Educação e Didática Teórica e Prática do Instituto de Educação de B. H. — Minas Gerais. Professôra especializada no ensino da Matemática na Escola Primária, da DAP (ex-PABAEE).

MATEMÁTICA NA ESCOLA PRIMÁRIA MODERNA

AO LIVRO TÉCNICO S. A.

RIO DE JANEIRO

1965

Os autores brasileiros prepararam o presente texto, baseando-se no original CHARTING THE COURSE FOR ARITHMETIC, de Maurice L. Hartung, Henry Van Engen, Lois Knowles e E. Glenadine Gibb.

IMPRESSO NO BRASIL

PRINTED IN BRAZIL

COMPOSTO E IMPRESSO NAS OFICINAS DA
EMPRÊSA GRÁFICA DA "REVISTA DOS TRIBUNAIS" S.A.
Rua Conde de Sarzedas n. 38 — S. Paulo — Brasil — em 1965.

APRESENTAÇÃO

Êste é o livro básico de uma série de livros de Matemática para a Escola Primária, publicada pela Scott, Foresman and Company, dos Estados Unidos, que estamos adaptando para professôres e alunos de nossas escolas, de acôrdo com nossos programas.

Entregamos ao leitor, o primeiro volume de nosso trabalho. Nosso objetivo ao fazer a adaptação do livro de Maurice L. Hartung, Henry Van Engen, Lois Knowles e E. Glenadine Gibb é colocar o professor em contato com as linhas básicas que nortearão a série que se inicia com êste volume.

Nosso trabalho obedece ao seguinte esquema:

1. "Matemática na Escola Primária Moderna" — livro básico que ora publicamos e que é uma síntese dos tópicos que constituem os Programas de Matemática na Escola Primária distribuídos em cinco níveis de dificuldade (Estágios 1 ao 5) *, organizados e distribuídos dentro do espírito do que se chama hoje MATEMÁTICA MODERNA.

Nêle aparecem sugestões para orientar metodològicamente a aprendizagem de cada um dêsses tópicos, de modo a tornar o Programa de Matemática na Escola Primária realmente *básico* a todo trabalho posterior em Matemática, sem que o conjunto da Ciência Matemática perca a organicidade indispensável ao sistema coerente de idéias que realmente é. Inclui, ainda, uma boa fundamentação de conteúdo, apresentando em cada tópico os conceitos básicos a serem adquiridos pelos alunos.

2. "Vamos Aprender Matemática" — (Livros 1, 2, 3, 4 e 5) — série de livros para o aluno, apresentando a matéria distribuída gradativamente pelos cinco volumes, obedecendo a uma seqüência lógica dos assuntos.

Nêles, tanto quanto possível, as "situações-problema" serão ilustradas por desenhos ou séries de desenhos articulados (como nas

---

* Os Estágios correspondem aos Níveis 1-2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente, no Estado da Guanabara, e às Séries 1ª a 5ª, nos demais Estados.

Não cremos na importância de como se faça a designação. Importante, sim, é que o professor tenha em mente, dentro da moderna técnica, que o aluno de um dado Estágio, Nível ou Série deverá usar o livro compatível com o seu grau de adiantamento, e não, obrigatòriamente, o correspondente ao seu Estágio Nível ou Série.

"histórias em quadrinhos"), acompanhados de perguntas objetivas, buscando conduzir a criança ao raciocínio através do pensamento reflexivo.

Os livros oferecerão, ainda, quantidade e qualidade de exercícios e problemas capazes de proporcionar suficiente treino, além de exercícios previstos para manter a aprendizagem à medida que seja alcançada.

Também uma constante avaliação da aprendizagem será mantida através de testes freqüentes, com ênfase na auto-avaliação, consagrada pela Psicologia Moderna como o melhor recurso para levar o aluno a progredir na aprendizagem.

Nos exercícios aparecerão ordens como PENSE! CALCULE! VEJA! OBSERVE! TENTE! FAÇA! etc., solicitando o pensamento do aluno e orientando o seu trabalho no sentido de êle próprio colaborar ativamente em sua aprendizagem.

3. "Vamos Aprender Matemática — Guia para o Professor" (Livros 1, 2, 3, 4 e 5) série de manuais com orientação ao professor sôbre o uso do livro da criança, contendo inclusive sugestões de atividades para o trabalho de enriquecimento.

Nêles o professor encontrará informações sôbre os objetivos, o conteúdo científico e os métodos de ensino relativos a cada lição do livro do aluno; sugestões detalhadas de atividades, material didático, jogos, etc. para desenvolver o ensino do conteúdo da lição e adaptá-lo às diferenças individuais dos alunos (mais hábeis e mais vagarosos) bem como sugestões para melhor conduzir o aluno ao "insight".

Quando a tendência mais moderna no caso da promoção dos alunos é a chamada promoção automática ou sistema de avanços progressivos, não poderíamos lançar uma série apresentando a matéria por anos escolares, sem a necessária flexibilidade. Daí a escolha do têrmo "estágio" para indicar o desenvolvimento da aprendizagem da criança, ao invés de períodos escolares estanques.

Assim um aluno poderá, de acôrdo com suas possibilidades, vencer mais de um estágio durante o ano letivo, enquanto outro não vencerá nem mesmo um.

Acreditamos que êste primeiro livro será de grande utilidade e aplicação nas Escolas Normais, bem como nos cursos de preparação de diretores e supervisores para as Escolas Primárias.

Não é pequena a dimensão de nossa tarefa mas, com o trabalho e a orientação do grupo de professôras — Norma Cunha Osório, Rizza de Araújo Pôrto, Regina Almeida, Olga Barroca, Helena Lopes, Nair Ferreira Tulha e Magdalena Pinho del Valle — encarregado da série, e com a colaboração do leitor, enviando-nos críticas e sugestões sôbre o que fôr sendo publicado, temos certeza de que atingiremos nosso objetivo.

A Editôra

PREFÁCIO

Os programas de Matemática vêm sendo reexaminados em todos os seus níveis com uma objetividade sem precedentes.

Muitos projetos de novos programas, introduzindo mudanças radicais não só nos cursos ginasial, comercial, técnico e científico, como também, no curso primário, estão sendo preparados e experimentados.[45] *

Mas, o que constitui, afinal de contas, um programa moderno de nível elementar?

Ninguém discute a importância ou necessidade de um programa de estudo de Matemática ter de ser feito através de uma seqüência bem organizada na qual cada tópico sirva de base aos seguintes. Daí ser necessário que métodos de ensino, capazes de satisfazer, realmente, a essa exigência lógica de continuidade, sejam empregados de maneira efetiva.

É êsse, justamente, o tema dêste livro. Além de uma moderna organização dos tópicos de Matemática para atender a cinco diferentes estágios de aprendizagem — estágio 1 ao estágio 5 — aparece aqui uma série de sugestões didáticas para seu completo desenvolvimento. Trata-se, em resumo, de um curso básico, indispensável ao trabalho posterior no campo da Matemática.

O *Programa* que sugerimos trata do problema total de ensinar Matemática a crianças, além de proporcionar renovada e mais profunda compreensão da Matemática. Proporciona também adequada prática, depois de obtida a compreensão. Atende satisfatòriamente a *tôdas* as crianças na Escola Primária — não apenas às que aprendem mais depressa ou às que dependem de maior ajuda (casos de recuperação) — ajustando-se ainda com adaptações mínimas, aos mais diversos sistemas escolares.

Além disso, a elaboração dêsse programa de Matemática baseia-se em reconhecidos e consagrados princípios de aprendizagem. Obedece a princípios que estão sendo ressaltados pelos psicólogos modernos como linhas mestras para levar a criança ao "insight" e à compreensão, mas utiliza também, quando oportuno, alguns dos princípios tradicionais das teorias associacionistas da Psicologia como, por exemplo, no desenvolvimento de habilidades através da prática.

O uso definido e seguro das novas teorias da aprendizagem, na organização dêsse Programa, conduz a diferenças marcantes entre sua organização moderna e a de um programa tradicional.

* Os numerais referem-se aos itens da bibliografia à página 143.

O planejamento de um programa de Matemática requer que métodos efetivos de apresentação sejam desenvolvidos e usados com segurança do princípio ao fim. Por exemplo, é importante valorizar o emprêgo do material concreto e do desenho no desenvolvimento da compreensão. Também é importante introduzir, tão cedo quanto possível, o uso de equações como uma ajuda para analisar as situações-problema e como um meio de comunicar o pensamento nelas contido. Segundo a natureza da matéria, que exige seqüência, o uso das equações, desenvolvido sistemàticamente através do trabalho dos primeiros anos escolares, deve ser alargado constante efetivamente.

Um programa moderno de Matemática deve ser bem planejado e tem de basear-se na filosofia geral *do Currículo* para favorecer ao máximo a continuidade no processo de aprendizagem da criança. É através dessa seqüência de desenvolvimento que a criança alarga e aprofunda sistemàticamente sua aprendizagem. O programa terá de atender à integração das aprendizagens de modo que a criança perceba, não só as inter-relações do que vai aprendendo em Matemática, mas também a relação da Matemática com os outros ramos do conhecimento e com a vida fora da Escola.

A observância dêsses conceitos, que consideramos básicos, é responsável pela diferença entre um programa e uma simples série de atividades de aprendizagem. Tais conceitos mostram a necessidade de certos elementos unificadores serem mantidos e desenvolvidos através de todo o programa. Como exemplo de elementos unificadores, convém destacar, pela sua extraordinária importância, o sistema decimal de numeração. Também o desenvolvimento sistemático de conceitos básicos de Medidas e de Geometria tem de ser considerado no caso.

O objetivo dêste livro é oferecer, em síntese, e de maneira prática, uma visão panorâmica de um curso organizado de acôrdo com os princípios e pontos-de-vista que acabamos de discutir. Apresentado por estágios a vencer, permite que o professor leia, apenas, a parte relacionada ao seu interêsse imediato. Essa organização, é bem verdade, dá uma visão um tanto superficial dos assuntos, o que se procurou evitar na medida do possível. A organização da matéria atende a uma seqüência adequada de ensino, mas para simplificar seu uso, os elementos de um mesmo assunto (o sistema de numeração, por exemplo) foram tratados ao mesmo tempo.

Incluem-se ainda, como ajuda ao professor, um quadro com os diferentes tipos de problemas aritméticos, outro sugerindo uma distribuição dos tópicos pelos anos escolares, bibliografia e índice.

NCO
RAP

ÍNDICE

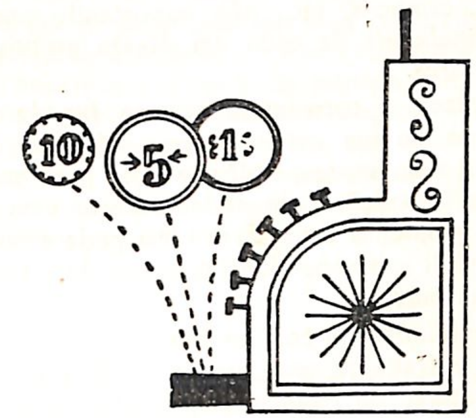
ESTÁGIO 1 (Pré →)

ESTÁGIO 2 (1º →)

ESTÁGIO 3 (2º ano)

ESTÁGIO 4

ESTÁGIO 5



Estágio 1

Visão geral — Aspectos importantes a ressaltar

Algumas idéias simples fornecem as bases sôbre as quais se constrói a Matemática. Essas idéias incluem o conceito de *correspondência um-a-um*, o conceito de *grupos de objetos* e de *número* associado a cada grupo, bem como, o conceito de ordem ou *posição* num arranjo de objetos. Essas idéias são tão elementares que, muitas vêzes, crianças mais velhas e adultos usam a Aritmética sem tomar conhecimento delas. Crianças menores, entretanto, precisam de experiências planejadas que utilizem essas idéias como base sôbre a qual elas construam seu conhecimento matemático.

A idéia de correspondência um-a-um é usada quando elementos de um conjunto de objetos são postos em correspondência com elementos de outro conjunto, ou colocados par a par, com os elementos do outro conjunto, de tal modo que cada elemento de um dos conjuntos tenha como par um elemento do segundo conjunto, e cada elemento do segundo conjunto tenha como par um elemento do primeiro conjunto[39] *.

* Os numerais referem-se aos itens da bibliografia às págs. 143 a 149. Leia-se à página 14 os esclarecimentos relativos aos têrmos *número* e *numeral* empregados neste livro.

Quando conjuntos ou grupos podem ser colocados em correspondência um-a-um, êles têm o mesmo número, independente da diferença que êles apresentem com respeito a outros aspectos. Por exemplo, a mesma designação ou nome do número (três) associa-se com qualquer grupo que possa ser pôsto em correspondência um-a-um com êste grupo: 000. Outros grupos que estejam em correspondência um-a-um com êsse, podem ser constituídos por balas, cavalos, crianças, etc., não importando suas características físicas. A *cardinalidade* de cada um dêsses grupos deve ser expressa pela palavra *três*.

Às vêzes, a correspondência se faz de modo que a cada dois elementos de um grupo corresponde um do outro grupo. Nesse caso, há uma correspondência dois para um (ou um-a-dois). Por exemplo, 2 maçãs para cada criança; uma bola grande para cada 2 bolas pequenas etc. Essa idéia pode estender-se ou generalizar-se para incluir correspondências como dois para três, um para dez, e inúmeras outras.

A familiarização com os números de 1 a 10 é òbviamente básica a todo o trabalho com números. É preciso que o aluno aprenda a reconhecer de relance, sem contar, grupos de 2, 3 e 4 objetos, habilitando-se ainda no reconhecimento de cada um dos outros grupos de 5 a 10. Para isso precisa familiarizar-se com os subgrupos nos quais cada um dêsses grupos pode ser separado.

Os números são usados não apenas para dizer quantos objetos há em um grupo, mas também para indicar ordem ou posição dos elementos em um conjunto. Para isso, o aluno precisa aprender a usar os nomes dos números (um, dois, três etc.) e os numerais (1, 2, 3, 4 etc.).

Tôdas essas idéias serão introduzidas e desenvolvidas no 1º estágio. Nenhum número maior que 10 deveria ser introduzido antes de terem as crianças bom domínio dessas idéias fundamentais. Só então se cuidará de números maiores. Para aprender os números maiores que 10 de maneira significativa, é essencial que o sistema de dar nomes aos números, isto é, que o sistema de numeração decimal, seja desenvolvido cuidadosamente. Essa iniciação pode ser feita no 1º estágio, quando a criança poderá adquirir também algumas idéias simples de medida.

Convém destacar aqui que não se deve apressar o estudo dos fatos básicos. Em lugar disso, criem-se oportunidades para a criança aprender o significado dos 10 primeiros números, através de muitas experiências no reconhecimento de grupos, precedidas de manipulação de objetos. Mais tarde poderia recorrer-se à representação dos objetos pelo desenho.

bom

falta no nosso.

Primeiras noções de comparação

As idéias expressas pelas palavras *muito* e *pouco* são os rudimentos do conceito de número que não dependem necessàriamente da contagem[40].

A criança pode reconhecer que há "muitos" objetos em um grupo antes de ser capaz de contar exatamente o número dêles. Pode também reconhecer que um grupo é pequeno sem conhecer precisamente quantas coisas compõem êsse grupo. Êsses conceitos rudimentares de *muito* e *pouco* constituem o ponto de partida para as idéias mais precisas de número, idéias que respondem à pergunta "Quantos".

As idéias de *muito* e *pouco* são relativas. Um conjunto de objetos considerado "pouco" para um objetivo, pode ser "muito" para outro objetivo. Essas idéias de relação ou comparação são indicadas por frases como "*muitos* brinquedos para um menino" e "*poucos* brinquedos para um menino".

Correspondência um-a-um

O passo seguinte, depois dos conceitos preliminares expressos pelas palavras *muito* e *pouco*, será a idéia da correspondência um-a-um ou, mais simplesmente, "acasalar" os objetos de um conjunto com os objetos de outro conjunto. Êsses objetos podem ser semelhantes ou totalmente diferentes.

Quando cada objeto de um conjunto é posto em correspondência com um objeto de outro conjunto, sem sobrar objetos em qualquer dos conjuntos, diz-se que há "tantos" objetos num conjunto "quantos" no outro. Note-se que essa decisão é feita sem referência ao número de objetos em qualquer dos conjuntos. Há, portanto, "tantas" maçãs "quantas" crianças, se maçãs e crianças podem ser postas em correspondência um-a-um, embora haja uma grande quantidade de maçãs e de crianças. Não é necessário contar o grupo de crianças. A única coisa necessária é tempo para fazer a correspondência.

Se a correspondência entre os elementos dos dois conjuntos não puder ser completada porque um conjunto tenha sido todo usado e, do outro ainda sobrem alguns elementos, a situação será expressa por palavras ou frases como, *menos, mais, demais, pouco, muito pouco,* etc.

Em muitas situações da vida, usam-se também as palavras ou frases *bastante, mais que, menos que,* etc. ... para indicar o resultado de tais comparações. Aqui também pode chegar-se a essas decisões sem contar os objetos nos conjuntos comparados.

Essa idéia é simples, mas merece destaque por ser de grande importância ou significação matemática. O aluno no 1º estágio precisa de experiência em fazer a correspondência um-a-um entre muitos conjuntos de objetos para chegar a decisões como as que acabamos de discutir. Nesta fase inicial não convém que o aluno conte.

Uma simples comparação de conjuntos fazendo corresponder seus elementos para ver se os grupos são iguais em quantidade ou se um grupo tem mais objetos que o outro, é tudo que se deve exigir.

Note-se, entretanto, que embora essa correspondência entre elementos de grupos não requeira um conhecimento dos "nomes dos números", (um, dois, três, quatro, etc.), é uma noção fundamental ao desenvolvimento do conceito de número [38]. Particularmente, é um passo para fazer a contagem com base na compreensão ou seja, contagem que não é apenas mera recitação dos nomes dos números.

Grupos "elementares" de 2, 3 e 4 *

Qualquer curso de ensino de Aritmética deve ser precedido de uma introdução geral a idéias básicas ao uso do número. Assim, a criança vai de início reagir aos grupos como tendo "muitos" objetos ou "poucos" objetos. Fará depois a correspondência entre os elementos de dois conjuntos. O passo seguinte é a completa familiarização com os grupos de 2, 3 e 4, aprendendo a reconhecer, sem contar, grupos de 2, 3 e 4 objetos. A compreensão dêsses pequenos grupos irá capacitar o aluno a subdividir e identificar grupos maiores [12]. Além disso, a experiência e o resultado de pesquisas mostram que a criança compreende melhor a Aritmética e alcança níveis mais altos de aproveitamento, quando aprende a reconhecer e usar grupos [6, 9, 26].

Chama-se aos grupos de 2, 3 e 4 grupos elementares porque a cardinalidade dêsses grupos pode ser reconhecida de imediato, sem contar. Todos os grupos menores que 10 podem ser vistos como combinações variadas dos grupos elementares (por exemplo, o grupo de 6, como um grupo de 4 e um grupo de 2, ou como três grupos de 2).

Nos programas tradicionais de Matemática, a conceituação de número tem se baseado essencialmente na contagem [50]. É verdade que as crianças podem aprender a contar por rotina, mas a contagem de rotina não conduz à contagem plena de significação. A contagem como processo básico para aprender números tem sido tão realçada que quase sempre a criança elabora um esquema para identificar o nome apropriado do número mas não desenvolve ou desenvolve pouco o conceito de número. Modernamente se ensina "número" através de atividades de agrupar, aproveitando idéias simples que surgem com essas atividades, para desenvolver não apenas a habilidade de contar significativamente como também o conceito de número [43]. Algumas crianças são capazes de reconhe-

* Êsses grupos são, às vêzes, chamados "grupos-modêlo".

cer os grupos elementares e de dizer-lhes os nomes, ao entrar no 1º estágio, mas muitas precisam realizar na escola atividades específicas com êsse objetivo [5, 46].

Assim que o aluno seja capaz de reconhecer de imediato a cardinalidade de um grupo (000) e de designá-lo por um nome (três), podemos mostrar-lhe o numeral correspondente (3), que diz quantos objetos há no grupo. Entretanto, é aconselhável deixar a escrita dos numerais para mais tarde, pois ela exige um nível de maturidade física e coordenação motora que alguns alunos não têm até mesmo ao final do 1º estágio. Exigir dêles a escrita de numerais, antes que estejam fisicamente prontos para isso, é aumentar-lhes as dificuldades. Enquanto a criança se prepara para escrever os numerais, o professor pode usá-los escritos ou colados em cartões, ou lançar mão de outros recursos semelhantes, a fim de ajudar a criança a compreender que se empregam os numerais para dizer o número de objetos dos grupos.

falta

Uso dos numerais ordinais

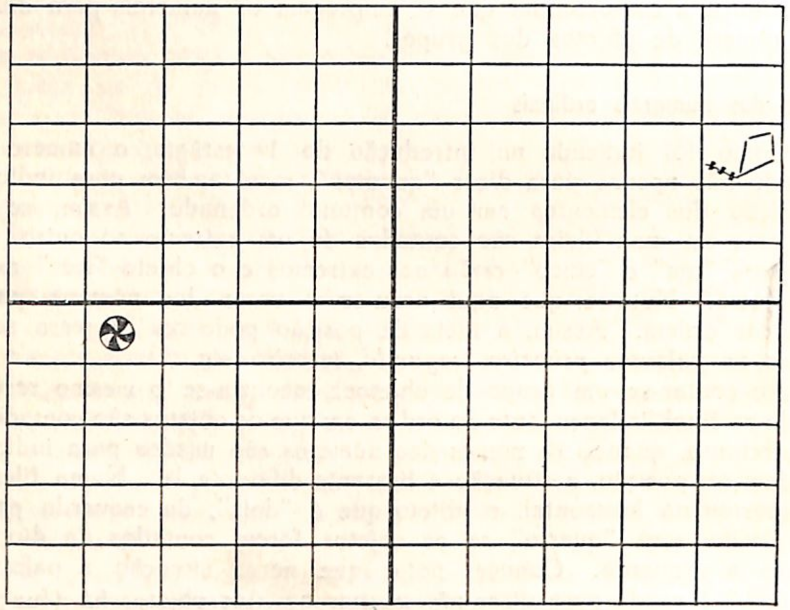
Como foi indicado na introdução do 1º estágio, o número é usado não apenas para dizer "quantos", mas também para indicar posição dos elementos em um conjunto ordenado. Assim, se 5 objetos em uma fileira são contados de um extremo ao outro, os objetos "um" e "cinco" estão nos extremos e o objeto "três" está no meio. Note-se que aqui usou-se o nome dos números para indicar ordem. Assim, a idéia de posição pode ser expressa sem usar as palavras *primeiro, segundo, terceiro* etc.

Ao contar-se um grupo de objetos, encontra-se o mesmo resultado ao final, independente da ordem em que os objetos são contados. Entretanto, quando os nomes dos números são usados para indicar ordem ou posição, a situação é bastante diferente, [16]. Numa fileira dispostos na horizontal, o objeto que é "dois", da esquerda para a direita, será "quatro" se os objetos forem contados da direita para a esquerda. Convém notar que nessa situação a palavra "cinco" é usada para dizer não apenas quantos objetos há (função do número cardinal), mas também que objeto é o último nesse conjunto (função do número ordinal). A criança precisa de orientação cuidadosa e experiência no uso dos nomes dos números para indicar posição, aprendendo que a posição é *relativa* a um ponto inicial e ao sentido segundo o qual a contagem é feita.

No fim do estágio, essas atividades deveriam incluir a seqüência de 6 a 10. O aluno aprenderá então as relações entre os elementos desta série, comparando-as com as relações entre os elementos da seqüência 1 a 5. Assim, *oito* é o número do meio da seqüência 6 a 10, do mesmo modo que *três* é o número do meio da seqüência 1 a 5. As posições *seis* e *dez* na seqüência 6 a 10 correspondem às posições *um* e *cinco* na seqüência 1 a 5.

O aluno do 1º estágio aprenderá também que as mesmas posições e relações existem quando uma seqüência (de 1 a 5 ou de 1 a 10) é contada de trás para frente ou da frente para trás (em ordem decrescente ou crescente). Firmada essa noção, o aluno pode começar a localizar um objeto contando na vertical (para cima ou para baixo) e na horizontal (para a esquerda ou para a direita).

Por exemplo, na ilustração abaixo, se a contagem é feita da esquerda para a direita e de cima para baixo, o aluno pode localizar a pipa dizendo que está na fila 3, coluna 10; a bola, na fila 6, coluna 2. Se a contagem é feita da direita para a esquerda e de baixo para cima, a pipa está na fila 8; coluna 1 e a bola, na fila 5, coluna 9.



Reconhecimento dos grupos até 10

INTRODUÇÃO AOS GRUPOS DE 6, 8 E 10

O passo seguinte no programa do 1º estágio é desenvolver o significado dos números de 5 a 10. Cada um dêsses números pode ser introduzido mostrando-se alguns dos subgrupos mais simples associados a êsses grupos maiores. Cada grupo de 6, 8 e 10 pode também ser representado por dois subgrupos iguais. Um grupo de 8 pode ser partido em dois grupos de quatro ou ser formado pela reunião de quatro grupos de dois. O professor, por con-

Jogos com material ~~usado~~ concreto

veniência, pode pensar nessas operações como achar a *metade* e o *dôbro*, mas essas palavras não precisam ser usadas.

O desenvolvimento da habilidade de ver êsses subgrupos ajuda o aluno a familiarizar-se com os números 6, 8 e 10 e conduz à prontidão para aprender alguns dos fatos básicos de adição e subtração, sem esperar-se, entretanto, que a criança os aprenda de modo formal. Por exemplo, não se exigirá que ela diga "quatro mais dois são seis", ou escreva "4 + 2 = 6". O objetivo dêste trabalho inicial é realizar uma variedade de experiências com grupos de 6 objetos para aprender a associar o nome "seis" a todos êsses grupos. O mesmo se aplica, naturalmente, ao grupo de 8 e ao grupo de 10. Num estágio posterior, a criança aprenderá o significado de adição e subtração, e começará a tarefa de aprender os fatos básicos dessas operações.

SUBGRUPOS COMPONENTES E OS FATOS BÁSICOS

O significado dos números pode ser desenvolvido com mais profundidade, levando-se o aluno a dispor os objetos do grupo cujo número está sendo estudado, de tôdas as maneiras possíveis para formar *pares* de subgrupos.

Os vários pares de grupos que reunidos formam um grupo específico, ou nos quais um específico grupo pode ser separado, serão referidos como "subgrupos componentes".

O grupo de 6 pode ser reagrupado de três maneiras diferentes, usando-se subgrupos componentes dêle (3, 3; 4, 2; 5, 1).

O reagrupamento em pares de subgrupos é um passo para preparar a aprendizagem dos fatos básicos da adição e da subtração.

A lista completa dos subgrupos componentes de 8 é a seguinte: 7, 1; 6, 2; 5, 3; 4, 4. Do mesmo modo, a lista completa para 10 é: 9, 1; 8, 2; 7, 3; 6, 4; 5, 5.

No final do 1º estágio, o programa de Matemática deveria incluir todos os conjuntos de subgrupos componentes dos números até 10, inclusive.

INTRODUÇÃO AOS GRUPOS DE 5, 7 E 9

A principal diferença entre grupos "pares" e grupos "ímpares" é que os últimos não podem ser repartidos em dois grupos do mesmo tamanho — há sempre uma unidade a mais, sobrando. Ao familiarizar-se com 5, por exemplo, a criança deveria ver que qualquer representação de 5 se compõe de dois grupos de 2 e mais 1 unidade do mesmo modo que um grupo de 7 se compõe de três grupos de 2 e mais 1 unidade e um grupo de 9, de quatro grupos de 2 e mais 1 unidade.

Grupos de 4 e 1 são subgrupos componentes de 5. O grupo de 5 apresenta apenas outra maneira de ser reagrupado em subgrupos componentes: 2 e 3. Para ajudar a criança a reconhecer os vários subgrupos de 5, essas duas maneiras de reagrupar 5 podem ser apresentadas como combinação dos subgrupos 2, 2 e 1.

Entretanto, ao familiarizar a criança com os números 7 e 9, serão considerados mais que dois subgrupos componentes, que serão destacados mais tarde, na hora de aprender os fatos básicos de adição. É aconselhável, ao introduzir o 7, usar apenas os subgrupos chamados elementares (2, 2, 2, 1; 3, 3, 1; 3, 2, 2; etc.). Dêsses subgrupos, os que mostram que 7 é um número ímpar ou que "7 é 1 mais que 6", são particularmente importantes. O mesmo acontece com a apresentação do grupo de 9 através de seus subgrupos.

SUBGRUPOS IGUAIS

Alguns grupos podem ser reagrupados em subgrupos "iguais", isto é, subgrupos que têm o mesmo número de objetos. Assim, um grupo de 8 pode ser reagrupado em quatro grupos de 2. Se, em situações dêsse tipo, a criança fôr alertada para a "igualdade" dos subgrupos e o número de subgrupos, formará melhor a base para compreender a multiplicação e a divisão. Para os grupos até 10 aparecem oito situações semelhantes. Um grupo de 4 pode ser visto como dois grupos de dois; um grupo de 6, como três grupos de dois ou dois grupos de três; um grupo de 8, como quatro grupos de dois ou dois grupos de quatro; um grupo de 10, como cinco grupos de dois ou como dois grupos de cinco; um grupo de 9, como três grupos de três. Êsses agrupamentos são essenciais à compreensão dos fatos básicos de multiplicação e de divisão. Não é costume desenvolver êsses fatos básicos no 1º estágio, mas os subgrupos ocorrem naturalmente, quando grupos de objetos são usados para mostrar os princípios do agrupamento.

Entre os números de 1 a 10, 4 e 9 apresentam uma característica especial. Um grupo de 4 pode ser separado em dois grupos de 2, e um grupo de 9 pode ser separado em 3 grupos de 3, isto é, 4 e 9 podem ser desmembrados em subgrupos iguais de tal modo que o número de objetos em cada subgrupo e o número de subgrupos sejam iguais. *Nove* tem a característica especial de ser o único número ímpar menor que 10 que compreende subgrupos iguais. Atividades especiais devem ser previstas para ajudar a criança a ver 9 como três grupos de três.

Fatos básicos

GRUPOS DE 3, 5, 7

O início da aprendizagem dos conceitos fundamentais de adição e subtração envolve apenas os fatos básicos.

Usando a idéia de grupo, ensinam-se juntos, todos os fatos básicos de adição que tenham as mesmas somas. Por exemplo,

$1 + 4 = 5$, $2 + 3 = 5$, $3 + 2 = 5$ e $4 + 1 = 5$ são aprendidos como um conjunto de fatos relacionados. Do mesmo modo, estudam-se juntos os fatos básicos de subtração que surgem quando um mesmo grupo é separado em dois subgrupos. Assim, trabalhando com um grupo de 5, estudam-se ao mesmo tempo os fatos básicos de subtração $5 - 4 = 1$, $5 - 3 = 2$, $5 - 2 = 3$ e $5 - 1 = 4$. Segundo êsse critério, cabe a ambos — professor e aluno — organizar a aprendizagem. Se, ao contrário, a ordem de apresentação dos fatos básicos se apoia numa suposta "aprendizagem difícil" de certos fatos básicos, nenhuma organização dos fatos é evidenciada.

A ordem de apresentação dos grupos também é importante. Ao tratar dos grupos básicos de 4, 6, 8, 9 e 10 objetos, não se pode evitar as idéias fundamentais de multiplicação e divisão que surgem naturalmente com êsse estudo. Por exemplo, 6 pode ser visto como "dois grupos de três". Portanto, é aconselhável deixar o estudo de grupos como êste para depois que os grupos de 3, 5 e 7 tenham sido estudados. Além disso, o estudo do grupo de 3 só deve ser feito, quando a criança tiver experiência com o grupo de 5. Essa ordem é preferível porque para o grupo de 3 há apenas dois fatos básicos de adição ($1 + 2 = 3$ e $2 + 1 = 3$) e dois fatos básicos de subtração ($3 - 2 = 1$ e $3 - 1 = 2$). Quatro fatos não são suficientes, e os grupos nêles envolvidos pequenos demais, para dar uma boa idéia do significado de adição e de subtração. É por isso que o estudo do grupo de 3 deveria vir depois de introduzir-se a idéia geral de adição e subtração partindo do grupo de 5. Êsse raciocínio sugere a seguinte seqüência na apresentação dos fatos básicos de adição e subtração: grupos de 5, 3, 7, 6, 8, 4, 9, 10. O grupo de 2 foi também incluído, eventualmente, e os dois fatos que envolve ($1 + 1 = 2$ e $2 - 1 = 1$) não exigem maior atenção. Essas atividades com grupos amplia o trabalho desenvolvido no início do estágio.

O primeiro contato com o grupo de 5 é muito importante, pois serve para desenvolver a idéia de ação de reunir, que conduz à adição. Essa idéia será, então, simbolizada pelas palavras, numerais e outros símbolos próprios.

Critério semelhante deveria ser adotado para desenvolver a idéia da ação de separar, ou ação subtrativa, que conduz à subtração, e para levar o aluno a simbolizar essa situação. Para isso, pode recorrer-se a problemas bem simples.

As idéias da ação de reunir e da ação de separar, introduzidas através do grupo de 5 e aplicadas a êle, podem ser agora reforçadas, usando-as primeiro com o grupo de 3 e depois com o grupo de 7. A mesma orientação usada antes para o grupo de 5 será seguida agora com êsses grupos. As ações de reunir e separar poderão ser demonstradas novamente desenvolvendo-se seu simbolismo próprio. Há dois fatos de adição e dois de subtração para o grupo de 3, e seis fatos de adição e seis de subtração para o grupo de 7. Depois de introduzidos êsses fatos, podem ser usados problemas simples que envolvam fatos básicos derivados dos grupos de 3, 5 e 7.

Através dêsse trabalho, todos os tipos de ação de reunir e o vocabulário correspondente (por exemplo, "juntar", "2 e 3" etc.) serão generalizados e associados à palavra *mais*. Quando as crianças compreendem a Aritmética, associam o sinal de mais (+), sempre lido "mais", à idéia geral da ação de reunir. Do mesmo modo, expressões como "tirar 2 de 5" são generalizadas e associadas à palavra *menos*. Assim o sinal de menos (—), sempre lido "menos", associa-se à ação de separar ou tirar. É essencial que êsses conceitos e o simbolismo correspondente sejam desenvolvidos através de experiências significativas, único meio de preparar o caminho para abstrações como $3 + 2 = 5$.

O GRUPO DE 6

Os conceitos de adição e subtração desenvolvidos com os grupos de 5, 3 e 7 podem ser revistos ao estudar-se o grupo de 6. A mesma organização e seqüência das experiências de aprendizagem usadas antes serão retomadas, isto é, primeiro as experiências com as ações de reunir, seguindo-se a simbolização das situações através do uso dos fatos básicos relativos ao grupo de 6. A mesma seqüência será então seguida nas situações de separar.

Como dissemos antes, com o grupo de 6 surge nova situação. Êsse grupo pode ser formado pela combinação de três grupos de dois ou pela combinação de dois grupos de três. A atenção deve então ser focalizada em dois aspectos: a igualdade numérica dos grupos a serem combinados e o número dêsses grupos iguais. Quando êsses aspectos são ressaltados nas ações de reunir, um nome especial — isto é, *multiplicação* — é usado para alertar a criança sôbre a natureza da situação.

Para dar ênfase à multiplicação, quando a atenção é dirigida para a igualdade dos grupos, a afirmação "3 mais 3 são 6" torna-se "dois grupos de 3 são 6". Do mesmo modo que no caso da adição e da subtração, a ação aqui também pode ser real ou imaginária.

Nova situação surge com as ações de separar. Um grupo de 6, ao contrário dos grupos de 5, 3 e 7, pode ser separado em subgrupos numèricamente iguais, de duas maneiras diferentes: em dois grupos de 3 ou em três grupos de 2. A atenção é focalizada na igualdade dos grupos nos quais 6 foi separado, e no número dêsses grupos, iguais. Quando êsses aspectos são percebidos nas ações de separar, um nome especial — *divisão* — é usado para ressaltar a natureza da situação. Para dar ênfase à divisão, quando

a atenção é dirigida para a igualdade dos grupos, diz-se "em seis há dois grupos de três", em vez de dizer "6 menos 3 são 3".

É claro que essas situações de multiplicação e divisão ocorrem naturalmente na vida de crianças pequenas. Quando a organização das atividades de aprendizagem dos números se baseia na idéia de grupo, grupos iguais ocorrem naturalmente, relacionados com grupos de 4, 6, 8, 9 e 10. Além disso, podem ser planejadas experiências nas quais a criança parta dos grupos iguais. Não há necessidades de protelar a introdução dos conceitos de multiplicação e divisão até anos escolares mais adiantados. Entretanto, ao introduzir informalmente êsses conceitos, não é preciso, nem aconselhável, empregar as palavras multiplicação e divisão. Além disso, as situações de divisão podem limitar-se ao tipo conhecido por "medida" ou "divisão comparação", no qual a cardinalidade dos grupos iguais é conhecida e se quer encontrar o número dêsse grupos iguais. (Por exemplo: "Mamãe deu 6 biscoitos às crianças. Cada uma ganhou 2 biscoitos. Quantas crianças receberam biscoitos?") Os símbolos especiais usados para indicar multiplicação e divisão (× e:) não precisam ser introduzidos senão depois de um estudo mais completo dêsses conceitos em anos escolares posteriores. Por outro lado, o símbolo de igualdade (=), que se lê "igual", "igual a" ou "é igual a", pode ser introduzido ao estudar-se o grupo de 6 e usado regularmente daí por diante.

OS GRUPOS DE 8 E 4

As características do grupo de 8 são as mesmas do grupo de 6, logo a mesma seqüência das atividades de aprendizagem seguida anteriormente com o grupo de 6 aplica-se agora ao grupo de 8. Primeiro serão considerados os fatos básicos de adição e subtração. Depois, os subgrupos iguais que conduzem à idéia de multiplicação e divisão, sem usar o simbolismo especial indicativo dessas operações.

Apenas dois novos fatos de multiplicação, combinando quatro grupos de dois e dois grupos de quatro, provém do grupo de 8. Naturalmente, haverá também dois fatos novos de divisão, provenientes da separação de 8 em quatro grupos de dois e em dois grupos de quatro. Como parte da preparação para o estudo sistemático da divisão, que continuará nos anos subseqüentes, deve dar-se agora alguma atenção ao tipo de divisão conhecido por divisão-repartição ou distribuição. Nesse tipo de divisão, o número de grupos iguais é conhecido, mas é preciso encontrar a cardinalidade de cada um dêsses grupos iguais. Por exemplo: "Mamãe vai distribuir igualmente 6 biscoitos para 3 crianças. Quantos biscoitos receberá cada criança?"

Agora é o momento apropriado para introduzir o grupo de 4. Nenhuma dificuldade especial apresentará êsse grupo, com exceção talvez da que possa surgir por causa de sua simplicidade, como por exemplo, distinguir a adição expressa por "2 mais 2 são 4" da multiplicação expressa por "duas vêzes dois são 4". O aluno deve ter experiências com o grupo de 4 sem se exigir dêle nêsse estágio de desenvolvimento, essa distinção de maneira formal.

OS GRUPOS DE 9 E 10

O grupo de 9 merece atenção especial porque é o único grupo ímpar menor que 10, que pode ser separado em subgrupos numèricamente iguais — 3 grupos de 3. Daí ter êsse grupo um só fato básico de divisão. Naturalmente, haverá também um só fato básico correspondente de multiplicação, "três vêzes 3 são 9".

A não ser êsses novos aspectos que apresenta e o fato de ser maior, o grupo de 9 não é diferente dos grupos de 3, 5, e 7. Logo, a mesma seqüência de experiências de aprendizagem, sugerida antes para êsses grupos, aplica-se agora ao grupo de 9. A essa altura, as ações de combinar e de separar já devem ser tão familiares que a apresentação do grupo de 9 pode ser um pouco resumida. Há fatos básicos novos a estudar, mas não há idéias novas fundamentais a introduzir.

O grupo de 10 desempenha um papel capital no sistema de numeração de base dez. Entretanto, com relação aos fatos básicos a serem estudados com êsse grupo, pouca diferença existe entre o grupo de 10 e o de 8. A seqüência de experiências de aprendizagem, sugerida para os grupos de 6 e 8, servirá para desenvolver os fatos básicos do grupo de 10.

Parece aconselhável discutir aqui um aspecto importante dos fatos básicos. Serão êles escritos em posição vertical ou horizontal? Realmente, não há uma razão especial para escrevê-los em posição vertical. A disposição vertical dos numerais para efetuar o cálculo é um recurso conveniente porque ajuda a computar, mas em se tratando dos fatos básicos, não há vantagens especiais. Ressaltou-se a importância de dar ênfase ao *significado* da adição e da subtração, através das ações a que elas estão associadas. Essas ações é que conduzem aos conceitos representados pelos sinais especiais (+, —), escritos entre os numerais que representam a cardinalidade dos grupos. Diferentes maneiras de dispor os numerais para efetuar o cálculo são melhor apresentadas na ocasião em que os alunos estão aprendendo a computar. Entretanto, como êles podem ver a disposição vertical dos fatos básicos em testes impressos, livros ou em outros materiais, êles podem aprender a lidar com os fatos na forma vertical. Por isso, a disposição vertical pode ser eventualmente usada. Convém notar que muitos países do mundo adotam a forma horizontal de escrever os fatos básicos.

Sistema monetário*

Em têrmos de utilidade para a vida quotidiana, as idéias de número associadas com dinheiro são de fundamental importância. Essas idéias incluem, no 1º estágio, não apenas o conhecimento das moedas e notas existentes, mas também o conhecimento das relações entre elas. É de igual importância compreender o valor das notas e moedas em têrmos de coisas que elas podem comprar. Assim, se uma bala custa Cr$ 20, poderá ser paga com uma moeda de Cr$ 20, com duas moedas de Cr$ 10, ou com quatro de Cr$ 5, etc.

Outro exemplo: Se Cr$ 100 compram um caderno, com uma moeda de Cr$ 500, que equivale a cinco de Cr$ 100, pode comprar-se 5 cadernos.

A criança que tiver uma moeda de Cr$ 100, precisará saber não apenas que Cr$ 100 equivale a 2 moedas de Cr$ 50; 5 de Cr$ 20 etc., mas ter alguma idéia do que poderá comprar com esta moeda.

As situações reais envolvendo dinheiro serão aproveitadas para iniciar a criança no conhecimento do "trôco" em relações bem simples.

Nas atividades ligadas ao dinheiro é importante usar preços reais e moedas e cédulas reais. O dinheiro de "brinquedo" é um substituto muito pobre, porquanto sempre se apresenta com uma aparência diferente. A familiarização com as notas e moedas depende grandemente do reconhecimento de suas diferenças físicas. O aluno precisa ter muitas oportunidades para poder distingui-las.

Conceitos geométricos

No 1º estágio a criança terá oportunidade de reconhecer algumas formas geométricas, como quadrado, retângulo, triângulo, círculo. Será preciso desenvolver o vocabulário necessário para exprimir êsse reconhecimento.

O trabalho nesse estágio terá como finalidade preparar o aluno para os conceitos a serem desenvolvidos mais tarde.

Leitura e escrita dos numerais maiores que 10

Eventualmente, a criança poderá aprender com compreensão, os números maiores que 10. A compreensão da maneira pela qual os números são denominados e escritos e a compreensão das operações fundamentais com número depende do conhecimento dos princípios do sistema de numeração decimal[33]. A idéia fundamental em que se baseia o *sistema de base dez* é a do agrupamento em dez, implícita nas palavras usadas para exprimir os números. Assim, *quarenta e sete* é uma maneira abreviada de dizer "quatro dez e sete". Para

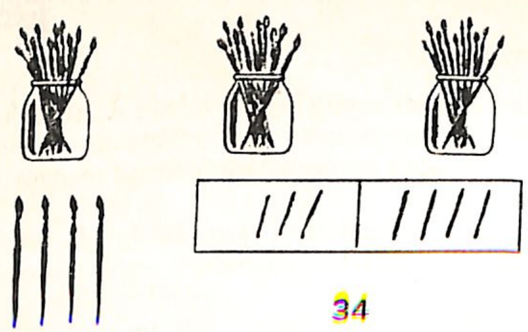
* Ver lei nº 4511 — de 1º de dezembro de 1964.

compreender a escrita dos numerais, é necessário conhecer o princípio do *valor de posição*. Na representação de um número como 47, o numeral 4, escrito à esquerda, indica o número de grupos de 10 e o numeral 7, escrito à direita, quantas unidades há no número, além dos grupos de 10. Portanto "47" significa "4 grupos de 10 e 7 unidades".

Particularmente, a contagem até 100, para ser compreendida, precisa de uma apresentação cuidadosa da idéia de agrupar de 10 em 10 para determinar o número de grupos de 10 e o número de unidades isoladas. Para serem significativas, a leitura e a escrita dos nomes dos números exigem compreensão de como os resultados da contagem são registrados: primeiro, fazendo uma tabulação e, depois, reservando lugares diferentes para o numeral que indica "dezenas" e para o que indica "unidades".

Precisam ser previstas atividades especiais para ajudar a criança a desenvolver essa compreensão. Grupos de 10 objetos ou de desenhos de objetos podem ser usados para ensinar a contar até 100, em grupos de 10.

Números que não constituem dezenas exatas, por exemplo 34, podem ser representados por objetos e desenhos e o resultado da contagem (em dezenas e unidades) registrado por marcas em duas colunas. Finalmente, os símbolos numéricos escritos (numerais) serão introduzidos para substituir as marcações (ver desenho abaixo).



34

Com crianças lentas não é aconselhável trabalhar com o sistema de numeração nesse 1º estágio.

De qualquer modo, o trabalho no próximo estágio deverá incluir um completo reensino para desenvolver êsses conceitos.

A distinção entre "número" e "numeral" deve ser compreendida pelo professor, mas não é necessário enfatizá-la tão cedo com a criança. Números são *conceitos* abstratos. Êles não podem ser vistos, tocados, ouvidos ou melhor, percebidos pelos sentidos. São puramente construções mentais. Numerais, ao contrário, são símbolos concretos para os números e, se escritos ou impressos, podem

ser vistos e tocados. Em forma de palavras (sons), podem ser ouvidos e pronunciados.

Estritamente falando, portanto, a discussão acima refere-se primàriamente ao sistema de numerais que usamos hoje. O sistema romano de numeração é ainda usado, mas cada vez com menor freqüência. O símbolo 5 e o V usado pelos romanos, mostram como numerais completamente diferentes representam o mesmo número.

Às vêzes é difícil usar a linguagem adequada para manter essa distinção. Entretanto, o professor deve lembrar-se que a Matemática lida primàriamente com números, mas para registrar o trabalho matemático (escrever os números ou falar dêles), usam-se os *numerais* que representam simbòlicamente os números.

Frações

Em geral as crianças empregam os têrmos *metade* e *meio* sem uma idéia muito clara do que significam. Mesmo crianças maiores e até adultos, às vêzes exclamam: "quero a metade maior!"

Para as crianças do 1º estágio serão previstas atividades que lhes permitam adquirir um significado mais preciso dêstes têrmos.

Todo o trabalho terá como objetivo o desenvolvimento de duas importantes idéias:

- podemos considerar o inteiro separado em duas partes do mesmo tamanho;
- nossa atenção pode ser focalizada em uma dessas partes iguais.

Por meio da análise de um conjunto de objetos, as crianças poderão perceber também os subconjuntos iguais, adquirindo o conhecimento da metade dos números. Verão, por exemplo, oito objetos como um conjunto inteiro, que pode ser separado em duas partes do mesmo tamanho. Focalizando a atenção em uma das partes vão determinar o número dos elementos nela contidos: quatro.

As crianças devem ter diferentes experiências para adquirir o conceito de fração como um número que descreve certa parte de um inteiro, quando dividido em partes iguais.

Não se fará a introdução do símbolo fracionário no 1º estágio e nenhuma tentativa no sentido de obrigar as crianças a fazerem operações com frações.

Sistema legal de unidades de medir

Já discutimos brevemente os conceitos de comparação expressos por palavras ou frases como muito, pouco, tanto quanto, igual, etc. Tais comparações associam-se a grupos de objetos e são importantes no processo de contagem.

Os conceitos associados às medidas são um tanto diferentes. Idéias expressas por palavras como alto, baixo, comprido, grande, pequeno, largo e estreito aplicam-se, muitas vêzes, sòmente a um objeto. Os conceitos mais simples de comparação, já discutidos, serão desenvolvidos de modo a preparar a criança para responder a perguntas como: "Qual é a altura de Maria?" ou "Qual o comprimento dêste objeto?".

Conceitos como *muito* e *pouco* são relativos. Uma criança considerada alta em comparação com seus colegas, pode ser baixa, se comparada com seus pais. As crianças (e adultos) desenvolvem certos padrões simples de comparação por meio de experiências quotidianas, através das quais se familiarizam com as médias. Por exemplo: depois de ver muitos cachorros serão capazes de dizer se um particular cachorro é "grande" ou "pequeno". Pode usar-se objetos da sala de aula, da escola, gravuras e desenhos de objetos para ajudar a criança a familiarizar-se com êsses conceitos e o vocabulário a êles relacionado. Mais tarde, êsses conceitos se aprofundam, desenvolvendo-se a prontidão para medir comprimentos.

Medir! preparação

A melhor preparação para introduzir a *"unidade padrão"* — o metro — é desenvolver atividades por meio das quais a criança percebe que alguma unidade fixa torna-se necessária à comparação. Nestas atividades preparatórias a unidade de comparação pode ser uma vareta com um comprimento conveniente. O objeto a ser medido será comparado com a unidade escolhida, notando-se se é mais comprido, mais curto ou mais ou menos do mesmo comprimento. Logo a seguir, as crianças terão oportunidade de verificar que se pode medir um comprimento maior usando-se várias varetas iguais em tamanho, colocando-as uma após outra no objeto a ser medido e contando quantas foram necessárias. Logo em seguida, as crianças verão que em vez de usar várias varetas, pode usar-se apenas uma vareta repetidamente, movendo-a e contando quantas vêzes foi usada. Finalmente, as crianças serão preparadas para situações de medir nas quais o ponto extremo do objeto que está sendo medido cai entre um extremo e o outro da unidade usada. Neste caso pode dizer-se, por exemplo, que o comprimento é "um pouco mais que 4 varetas" ou "um pouco menos que 5 varetas". Todos êstes conceitos são fundamentais e serão desenvolvidos antes que se ensine as crianças a expressar as medidas lineares em têrmos de metros ou centímetros.

pensar

Êstes princípios fundamentais discutidos aplicam-se a tôdas as medidas. As medidas de volume ou capacidade também requerem uma "unidade". Entretanto o conceito de volume não é tão simples quanto o de comprimento. As vasilhas de diferentes formas e tamanhos muitas vêzes dificultam a percepção de sua capacidade. Por exemplo, as crianças tendem a basear seu julgamento sôbre o volume de uma quantidade de líquido, sem observar os tamanhos

das vasilhas ou o nível em que se encontram cheias. Pode medir-se o volume ou capacidade usando vários exemplares de uma vasilha tomada como unidade, ou usando-se a mesma vasilha repetidas vêzes. É importante que as crianças tenham tais experiências antes de usar as unidades padronizadas. Observamos freqüentemente que, muitas vêzes, crianças que já manuseiam o litro de leite não compreendem que o têrmo *litro* refere-se a uma vasilha de tamanho padrão e não a qualquer vasilha grande ou pequena.

Quando compreendem essas idéias básicas sôbre medidas, as crianças vão percebendo a necessidade de unidades estandardizadas. Será preciso então, planejar atividades para que se familiarizem com essas unidades padrão. O metro, o litro e o quilo são unidades padronizadas que surgem nas experiências de vida das crianças, dentro e fora da escola. Com estas experiências a criança percebe que as quantidades são medidas diferentemente e se familiariza com os instrumentos usados nas diversas situações de medir [29].

Cabe ao professor planejar atividades por meio das quais as crianças adquiram as idéias básicas sôbre medidas e comecem a adquirir habilidades em medir, usando os instrumentos adequados.

Espera-se que ainda no 1º ano escolar, a criança reconheça as horas certas e meias horas no relógio, e saiba usar o calendário. Estas aprendizagens serão adquiridas usando-se regularmente êsses instrumentos nas atividades normais do dia, da semana, do mês e do ano.

No 1º estágio, incidentalmente, as crianças entram em contato com o meio-metro, meio-litro e meio-quilo, em sua experiência com medidas.

Resolução de problemas

A forma convencional dos problemas verbais encontrados nos livros de Aritmética é um parágrafo resumido, envolvendo dados quantitativos e incluindo uma pergunta a ser respondida.

É conveniente um desenvolvimento gradual, mas definido, antes, de se trabalhar com os problemas verbais.

Pesquisas mostram que a criança pensa em têrmos de ação, isto é, em têrmos do que ela vê acontecer ou realiza com objetos como bolas de gude, chapinhas, brinquedos, animais ou pessoas, [13, 20, 52] comprovando o fato já bastante conhecido de que as crianças aprendem através dos sentidos do tato, visão, audição e olfato. Um programa para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas deve proporcionar, pois, ricas experiências baseadas em ações que envolvam agrupamento e reagrupamento de objetos e que possam ser interpretadas matemàticamente [15]. Em especial, o aluno deve ter experiência com as ações que servem de base aos conceitos que mais tarde serão expressos pelas palavras *mais, menos* e pelos símbolos "+" e "—".

Nos programas modernos de Matemática dá-se ênfase à idéia de grupo[53]. A criança aprende que grupos de objetos podem reunir-se para formar um único grupo. Se os objetos têm movimento próprio, um grupo pode juntar-se ao outro, ou ambos os grupos podem mover-se juntos para um mesmo lugar. Às vêzes, porém, os objetos dos dois grupos são apenas reunidos mentalmente, por imaginação. Por exemplo, um grupo de 6 árvores e outro de 4 árvores reunem-se apenas em pensamento para formar um grupo de 10 árvores. Essas ações de reunir (reais e imaginárias) é que conduzem ao conceito de *adição*. Afirmações como "4 mais 3 são 7" e "3 mais 2 são 5" simbolizam a cardinalidade dos grupos originais, a ação e a cardinalidade dos grupos resultantes.

A criança aprende também que um único grupo pode ser separado para formar dois subgrupos. Parte do grupo original é retirada ou imagina-se que ela tenha sido retirada. Por exemplo, considere-se o problema: "Das 10 árvores de um pomar, 8 são laranjeiras. As outras são goiabeiras. Quantas goiabeiras há no pomar?" A criança pensa na remoção das 8 laranjeiras do grupo total das 10 árvores e, então, determina o tamanho do grupo restante. Essas ações de separar (reais ou imaginárias) é que conduzem ao conceito de *subtração*. Afirmações como "5 menos 2 são 3" simbolizam a cardinalidade do grupo original e do grupo retirado, a ação, e a cardinalidade do grupo restante.

A criança precisa de uma seqüência definida de atividades para adquirir êsses conceitos. Tal seqüência deve basear-se em princípios psicológicos sadios[18, 35, 36].

É preciso estabelecer as idéias fundamentais das ações de reunir e separar, nas quais se baseiam a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. Entretanto, êsses processos também são usados em situações nas quais os objetos não se movem e, por isso, devem ser reunidos e separados mentalmente. Por exemplo, no caso de encontrar o número total de árvores, quando algumas estão em um campo e outras em outro. Do mesmo modo, às vêzes é preciso imaginar parte de um grupo sendo removido. O têrmo "ação imaginada" será usado de agora em diante para designar tais situações.

A ação pode ser imaginada tanto no caso de objetos imóveis como no caso de objetos móveis. Às vêzes, os objetos de uma situação-problema são tão numerosos ou tão dispersos que, realmente, reuni-los fisicamente seria muito lento e trabalhoso. Suponhamos que se quisesse, por exemplo, saber o número total de bois dos estados de Minas e de São Paulo.

Reunir todos êsses bois em um grupo e contá-los, seria tarefa muito difícil. Não obstante, a ação de reuni-los pode ser imaginada, e o resultado numérico encontrado fàcilmente se os números envolvidos na situação forem representados simbòlicamente.

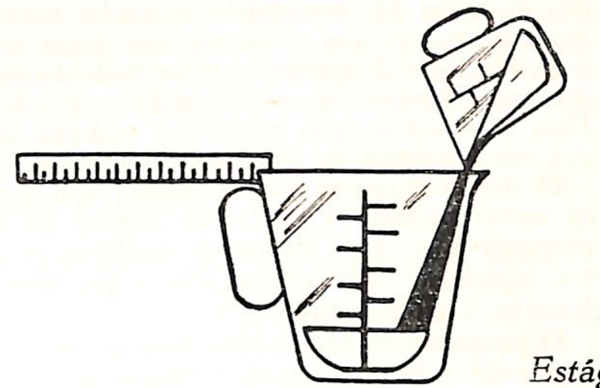
Ao imaginar-se a ação em uma situação aditiva, ou ao considerar-se um fato básico de adição oralmente ou por escrito, um dos numerais virá primeiro. Suponhamos, por exemplo, que 5 môças estão em um grupo e 6 môças vêm juntar-se a elas. Aqui, a ação sugere o numeral a ser considerado primeiro e o que virá depois. A situação será então representada por $5 + 6$ em vez de $6 + 5$.

Quando a situação não sugere uma ação, ela deve ser imaginada, e a resposta à pergunta "Que numeral vem primeiro?" será "Qualquer um". Por exemplo, suponhamos que 5 môças estão em um grupo e 6 em outro. Quer saber-se quantas estão nos dois grupos. Aqui, tanto faz escrever-se a equação $5 + 6 = \square$ como $6 + 5 = \square$, o que mostra que numa situação aditiva os números podem ser adicionados em qualquer ordem.

Embora essa generalização seja importante para o trabalho posterior, não é necessário dar ênfase a ela nesse ponto da aprendizagem da criança.

Quando não está explícita uma ordem natural para os números envolvidos em uma situação, pode sugerir-se, informalmente, à criança: "Você pode escolher o numeral que vai escrever primeiro". Mais tarde pode promover-se uma série de atividades de aprendizagem, focalizando especificamente essa generalização. O ensino do fatos básicos será feito, levando-se a criança a imaginar a ação envolvida nas diferentes situações.

O nôvo conceito pode ser também sistemàticamente introduzido na resolução de problemas. Muitas situações problemáticas quantitativas na vida seriam difíceis ou quase impossíveis de resolver se precisássemos usar os próprios objetos da situação. Representando as quantidades de objetos por símbolos numéricos, a Aritmética torna a resolução de problemas muito mais fácil.



Estágio 2

Visão geral — Aspectos importantes a ressaltar

O objetivo principal de um programa moderno de Matemática é habilitar a criança a resolver problemas que envolvam idéias quantitativas [21, 53] *. Para alcançar êste objetivo é necessário que a criança adquira algumas técnicas e conceitos essenciais. No 1º estágio, o trabalho de reconhecimento de grupos, correspondência, sistema de numeração decimal, medida e dinheiro fornece uma boa base para a aquisição dêsses conceitos e habilidades.

A resolução de problemas, como tal, será pormenorizada mais tarde, seguindo-se aqui breves comentários sôbre o assunto. Bàsicamente, a solução de um problema quantitativo requer uma análise da situação apresentada, a expressão dessa análise em simbolismo matemático e o cálculo necessário para encontrar a resposta [37, 51, 52]. Convém notar que o cálculo surge, quase sempre, de situações de problema. O cálculo é raramente um fim em si mesmo, mas apesar disso, deve ser cuidadosamente ensinado desde o começo. Para ser bem sucedida na resolução de problemas, a criança tem de

* Os numerais, referem-se aos itens da bibliografia às págs. 143 a 149. Leia-se à pág. 14 os esclarecimentos relativos aos têrmos *número* e *numeral* empregados neste livro.

aprender o significado dos processos de adição, subtração, multiplicação, e divisão [47]. De início aprenderá os fatos básicos dêsses processos a começar pelos de adição e subtração.

O ensino dêsses fatos básicos deve apoiar-se no que já foi estabelecido no 1º estágio. Os primeiros trabalhos desenvolveram o significado dos dez primeiros números através de muitas experiências de reconhecimento de grupos. Agora o aluno é preparado para aprender os fatos de adição e subtração, cujas somas e minuendos alcancem 18, começando a estudar também as ações de combinar e separar que conduzem aos fatos básicos de multiplicação e divisão. No 2º estágio, o aluno pode desenvolver a aprendizagem dos fatos básicos de multiplicação e divisão até o grupo de 36. Para desenvolver essa prontidão, realizará experiências centralizadas nos princípios do sistema de numeração de base dez (decimal).

O desenvolvimento dessas idéias, aqui apenas esboçadas, implica muito trabalho e cuidadosa análise do programa. Importante pergunta a ser feita diante de qualquer programa de Matemática é a seguinte: "Que organização e que método êle apresenta para facilitar a aprendizagem"?

O programa de Matemática deve ser orientado de modo a ajudar a criança a distinguir nas experiências heterogêneas, vividas por ela na escola e em casa, as ações básicas à formação dos conceitos matemáticos representados pelas palavras, sinais e símbolos [8]. Essas experiências devem ser organizadas de modo a levar a criança a associar um símbolo particular a um determinado tipo de experiência ou conjunto de ações. Tal orientação é valiosa porque prepara o ensino de problemas, levando a criança a decidir se deve adicionar ou subtrair os grupos envolvidos na situação, pelo que a situação sugere que ela faça, e não baseada em palavras "chaves". A resolução de problemas só se torna significativa para a criança quando os símbolos que ela usa estão relacionados à ação envolvida na situação-problema.

No ensino de Matemática convém usar um recurso simbólico simples para mostrar à criança que um determinado número está sendo procurado. Assim, costumava usar-se expressões como $3 + 4 = ?$ ou $3 + ? = 5$ ou $3 + \_\_ = 5$. Nos programas modernos de Matemática outros símbolos estão sendo usados para "guardar o lugar" dos numerais procurados [49]. Por exemplo, em $3 + 2 = \square$ ou em $4 + \square = 9$, o símbolo $\square$ pode ser lido "que número?" Os E.U.A. e outros países estão adotando o uso de uma letra como "guardador de lugar" (por exemplo, $3 + 2 = n$), desde o 2º estágio. Embora haja diferentes opiniões quanto ao símbolo particular a usar, todos concordam que êle deve ser usado desde cedo e que deve ser um símbolo fácil de ser feito e interpretado. Convém reconhecer que o simbolismo usado para expressar uma situação-problema é uma ferramenta indispensável para mostrar como o aluno percebeu a situação. Note-se que, embora o trabalho no

2º estágio deva dar maior atenção às experiências essenciais à aprendizagem dos fatos básicos da adição e subtração até 18, baseada na compreensão, há outros objetivos que precisam ser alcançados. O conhecimento do sistema de numeração de base dez vai estender-se até 999. As idéias de medição podem ser enriquecidas e aprofundadas. O conhecimento do nosso sistema monetário será ampliado. Aconselha-se também proporcionar experiências para desenvolver idéias básicas ao ensino dos fatos básicos de multiplicação e divisão até 36 e das frações mais simples. Além dêsses aspectos inclui-se ainda, nesse estágio, idéias básicas ao desenvolvimento do conceito de razão que será enriquecido e estendido nos estágios posteriores. Maiores detalhes a respeito dêsses objetivos e de como êles podem ser alcançados encontram-se nas seções seguintes.

Fatos básicos de adição e subtração

REVISÃO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE ADIÇÃO

Situações *aditivas* são aquelas situações nas quais um grupo de objetos é reunido a outro grupo. Uma situação dêsse tipo pode aparecer de maneiras diferentes. Um grupo pode vir reunir-se a outro, como acontece quando pessoas já à mesa convidam outras para sentarem-se com elas. Em outras situações, ambos os grupos podem ser postos juntos pela ação de reunir, como acontece quando dois grupos de amigos, em diferentes casas, concordam por telefone em caminhar em direção um ao outro, na mesma rua, até se encontrarem. Ainda, em outros casos, os grupos podem ser imóveis, como no caso de um fazendeiro que quer saber o número total de árvores frutíferas de suas terras. Embora as árvores de um e as do outro pomar formem grupos distintos fisicamente, pode considerar-se êsses grupos como um só. Em situações como essa, os grupos não são postos juntos no sentido físico, mas combinados apenas mentalmente. Convém descrever tôdas essas situações de reunir dizendo: "A ação é aditiva".

Pode representar-se por símbolos numéricos o número de objetos de dois grupos que foram reunidos. Por exemplo, o número de crianças em um grupo pode ser representado pelo numeral 3 e o número de crianças de outro grupo pode ser representado pelo numeral 4. Se o segundo grupo é reunido ao primeiro, a ação aditiva pode ser expressa pela palavra *mais* e representada pelo símbolo $+$ (lido "mais"). A situação acima descrita é representada por $3 + 4$. Os grupos combinados fizeram um grupo de 7, e isso é mostrado escrevendo-se $3 + 4 = 7$.

A adição é usada em casos como o citado acima, quando dois números, cada um dos quais representando um grupo de tamanho conhecido, são substituídos pelo número que representa a soma ou seja, os grupos reunidos. Essas idéias parecem ser tão evidentes que não há necessidade de mencioná-las aqui. Mais tarde, entretanto, vão surgir situações-problema nas quais um grupo de tamanho conhecido é reunido a outro cujo tamanho se ignora. Essas situações também são aditivas, mas, é claro, complexas demais para serem usadas no ensino dos fatos básicos de adição na escola primária.

O têrmo *adição-aditiva* é usado para descrever uma situação-problema na qual a ação é aditiva e os números devem ser adicionados. O oposto dessa expressão será *subtração-aditiva*, a qual descreve uma situação-problema onde a ação é aditiva, mas os números devem ser subtraídos.

No início do 2º estágio, as situações aditivas favorecem a revisão do conceito básico de adição, trabalhando-se com todos os fatos básicos que têm origem nos grupos de até 10 elementos (um conjunto que inclui 45 fatos ao todo). Nenhum dos chamados "fatos com zero" será estudado agora, pois tais fatos não podem ser representados por objetos ou figuras. Mais tarde, êsses fatos serão estudados como exemplos particulares de uma generalização acêrca do zero na adição (veja página 49).

Para aprender os fatos básicos de adição dentro dos grupos de 4, 6, 8, 9 e 10, o reconhecimento de subgrupos iguais é inevitável. Entretanto, para evitar confusão na mente da criança, quanto à diferença entre adição e multiplicação, os fatos básicos de multiplicação, podem ser introduzidos mais tarde.

REVISÃO DOS CONCEITOS BÁSICOS DE SUBTRAÇÃO

Quando um subgrupo de objetos é separado de um grupo, a situação é chamado *subtrativa*. Por exemplo, suponhamos que 7 crianças estejam brincando. Se 4 crianças dêsse grupo sairem, a situação é subtrativa e pode ser representada pelos símbolos 7 — 4. Uma vez que 3 crianças permanecem, 7 — 4 = 3 simboliza, não apenas a situação inicial e a ação, mas também o resultado. O processo através do qual os símbolos 7 — 4 são substituídos pelo símbolo 3 chama-se *subtração*.

Situações subtrativas podem aparecer de maneira variada. No exemplo acima, havia, originalmente, um grupo de tamanho conhecido (7). Depois um subgrupo, também de tamanho conhecido (4), foi retirado dêle. Consideremos agora outra situação. Suponhamos que um grupo de crianças estava brincando, mas que não se sabia quantas eram. 4 dessas crianças se foram e apenas 3 ficaram. Essa situação também é subtrativa e pode ser simbolizada de várias maneiras. Por exemplo, □ — 4 = 3 ou ___ — 4 = 3 ou ? — 4 = 3. Nessa situação, um grupo cujo tamanho era conhecido foi retirado de um grupo de tamanho ignorado. Embora situações como essas ocorram em problemas práticos, é evidente que elas não são apropriadas para a fase inicial em que a criança começa a aprender o processo de subtração e os fatos básicos.

Nos programas modernos de Matemática, o significado da subtração é dado apenas através de *ações subtrativas*. A pergunta "Qual é o número que somado com 3 dá 7?" pode ser simbolizada assim: □ + 3 = 7 ou ? + 3 = 7. A resposta é encontrada subtraindo 3 de 7, mas a situação é aditiva. Portanto, não é adequada para levar a compreender a subtração. Eventualmente, é claro, a criança tem de aprender que, embora a idéia da subtração venha das situações subtrativas, o processo é usado em outras situações nas quais a ação não é subtrativa. Mais tarde, exemplos de tais situações serão apresentados e explicados. Por ora, convém ressaltar apenas que o têrmo *subtração-subtrativa* descreve ambos os tipos de situações empregados para introduzir a idéia e o processo na forma simbólica. Entretanto, êsse têrmo *subtração-subtrativa* não precisa ser mencionado à criança.

No início do 2º estágio, as situações subtrativas são necessárias à revisão dos conceitos básicos de subtração. Poderão ser revistos os fatos básicos dos grupos de até 10 elementos, mas não será ensinado ao mesmo tempo nenhum fato com zero. (Êsses serão tratados mais tarde como exemplos particulares de generalizações: quando um número é subtraído dêle próprio, o resultado é zero; quando zero é subtraído de um número, o resultado é o próprio número.) Haverá, assim, 45 fatos básicos a serem estudados. É aconselhável, nessa etapa, deixar os conceitos de divisão para depois, a fim de evitar confusão entre o conceito de subtração e o de divisão. Os fatos de divisão para os grupos de 4, 6, 8, 9 e 10 podem ficar mais tarde.

Reagrupando os grupos de 11 a 18

FATOS BÁSICOS

Até aqui a criança veio aprendendo os fatos básicos oriundos dos grupos até 10. Aprenderá agora, os fatos básicos mais elevados que surgem em conexão com os grupos maiores. Assim, aprenderá que 8 mais 7 são 15 e que 17—9=8. Mais cedo ou mais tarde, os fatos básicos de adição com somas até 18 e os fatos básicos correspondentes de subtração precisam ser aprendidos e memorizados para assegurar o êxito do trabalho em Matemática. Para preparar êsse trabalho, atenção especial deve ser dada no 2º estágio aos grupos de 11 a 18.

Antigamente, a criança memorizava êsses fatos básicos além de 10 com pouca ou nenhuma experiência que os relacionasse aos objetos. Ainda quando objetos ou figuras eram usadas, a experiência se resumia na contagem. Por exemplo, para reunir os grupos de 8 e 5 a criança era levada a começar pelo grupo de 8 e a continuar contando os elementos do grupo de 5, dizendo, "nove, dez, onze, doze, treze". Nenhum aproveitamento direto da idéia de reorganizar os grupos, ou dos princípios do sistema de numeração era feito. Para proporcionar maior continuidade e seqüência na organização das experiências de aprendizagem, essas idéias e princípios precisam ser explicitamente usados.

Na reunião de um grupo de 8 e um de 5, o grupo total precisa ser reorganizado em um grupo de 10 e um grupo de 3. Para o adulto, que sabe que $8 + 5 = 13$, essa afirmação pode parecer óbvia e trivial, mas para a criança que está aprendendo o fato pela primeira vez, isso não é assim tão simples. Ela será ajudada a ver e a compreender a retirada de 2 objetos do grupo de 5 para serem reunidos ao grupo de 8 e, então, formar um grupo de 10. O grupo de 10 e o grupo de 3, assim formados, são vistos então como 13, segundo os princípios do sistema de numeração. Um aluno deverá ter muita experiência em reagrupamento dêsse tipo, antes de se esperar que êle aprenda e memorize os fatos básicos além de 10.

Tais atividades em reagrupar e o uso dos princípios do sistema de numeração asseguram maior continuação e melhor seqüência na organização das experiências de aprendizagem e, conseqüentemente, melhor compreensão da Matemática.

Os fatos básicos de adição e subtração relativos aos grupos maiores que 10 têm sido geralmente considerados como os fatos difíceis. A experiência tem mostrado que a criança é levada freqüentemente ao êrro, quando aprende êsses fatos por métodos de rotina (decorando). Os métodos que sugerimos aqui diferem muito dos de rotina, pois dão ênfase ao uso de objetos, aos recursos visuais e aos princípios gerais coerentes com as teorias modernas da aprendizagem. Êsses novos métodos conduzem à compreensão e à retenção em vez de mera memorização e rápido esquecimento.

Para ser significativa, a aprendizagem dos fatos básicos de adição e subtração com somas e subtraendos de 11 a 18 requer suficiente experiência em reagrupamento. Muitos alunos no 2º estágio escolar não terão tido essa experiência. Precisarão, agora, de muita ajuda para adquirir a habilidade de reconhecer o grupo de 10 dentro de grupos maiores, como grupos contendo 18 objetos. Êles adquirem essa experiência, se levados a destacar o grupo de 10 para determinar o número de elementos que ficaram isolados, então, obter o nome do número que representa o grupo total.

Mais tarde, essa mesma habilidade poderá ser usada para determinar, sem contar, o tamanho do grupo minuendo em situações de aprendizagem dos fatos básicos de subtração.

Assim, em subtrações como $13 - 5 = 8$, usando objetos ou figuras, primeiro serão reagrupados os objetos do grupo inicial [13] para formar o grupo de 10 e um grupo de 3. A seguir, para retirar

o grupo menor (subtraendo), 5, será preciso partir o grupo de 10, restando um grupo que será menor que 10.

O mesmo método pode ser usado para ensinar todos os fatos básicos dos grupos maiores que 10. Note-se, ainda, que completado o trabalho com os grupos de 11 a 18, todos os fatos básicos de adição e subtração terão sido introduzidos.

Há também fatos básicos de multiplicação e divisão relacionados aos grupos de 11 a 18. Ressalte-se que o reconhecimento dos produtos, na multiplicação, e dos dividendos, na divisão, requer conhecimento dos mesmos princípios do reagrupamento discutidos acima.

Não será necessário desenvolver aqui a discussão sôbre método, tendo em vista que as idéias aplicadas aos grupos até 10 aplicam-se igualmente aos grupos de 11 a 18. Embora tenham sido abordados de uma só vez todos os fatos básicos de 11 a 18, convém que na prática êles sejam apresentados parceladamente, partindo-se de problemas.

Fatos básicos de multiplicação e divisão

CONCEITO DE MULTIPLICAÇÃO

Se vários grupos com o mesmo número de elementos são reunidos, essa situação é chamada *multiplicação* [10] Por exemplo, suponhamos que haja 2 cestas de maçãs com 5 maçãs cada uma. Quer saber-se quantas maçãs há ao todo. A situação pode ser representada simbòlicamente, escrevendo-se 2×5 e o processo pelo qual 2×5 é substituído por 10 chama-se *multiplicação*. Nas situações multiplicativas, a atenção é focalizada no conjunto de grupos iguais que são reunidos. O número de objetos em cada um dêsses grupos e o número de grupos iguais devem ser ressaltados. Quando ambos os números são conhecidos e usados para encontrar o número de elementos do grupo formado dessa reunião, êsse processo é chamado *multiplicação.*

CONCEITO DE DIVISÃO

Por outro lado, suponhamos que um grupo tem de ser separado em subgrupos iguais. Essa situação é chamada *divisão.*

Um dos tipos de situação de divisão é aquêle em que se conhece o tamanho dos subgrupos e quer saber-se quantos dêsses subgrupos podem ser formados. Êsse tipo de ação, chamado de *comparação* (ou de "medida") é aconselhado para ensinar os fatos básicos de divisão. Por exemplo: "10 lápis serão separados em subgrupos de 2 lápis cada um. Quantos grupos serão feitos?" A situação é representada simbòlicamente por 10 : 2 e o processo pelo qual 10 : 2 é substituído por 5 chama-se divisão.

Outro tipo de situação de dividir é aquêle em que se conhece o *número* de subgrupos a ser formado e o *tamanho* de cada um dêsses subgrupos precisa ser encontrado. Êsse tipo de ação é chamado *repartição*. Por exemplo: "10 lápis precisam ser separados em 5 subgrupos iguais. Quantos lápis haverá em cada subgrupo?" Êsse tipo de ação será examinado detalhadamente mais tarde. Apenas as situações de comparação (ou de "medida") devem ser usadas no ensino dos fatos básicos de divisão.

Por quê?

Algumas dificuldades de vocabulário surgem com a multiplicação e a divisão.

A criança deve aprender o significado dêsses processos pela manipulação de objetos dispostos de modo que os subgrupos iguais possam ser identificados. Se a criança adquire essa compreensão, questões como se o certo é dizer "dois grupos de três são 6" ou "2 vêzes 3 são 6" são de menor importância. Nenhuma das expressões verbais é mais "significativa" que a outra. Ambas são meios de afirmar uma situação que pode ter ou não sentido para a criança e constituem afirmações de uso comum que podem ser ensinadas sem maiores preocupações.

Na situação em que se tem "dois grupos de 3" convenciona-se, atualmente, que o numeral que representa o número de grupos iguais é o da esquerda e chama-se *multiplicador*. Assim, em 2×3 o símbolo $\times$ (lido "vêzes") indica multiplicação e a expressão inteira representa duas vêzes três ou 3 multiplicado por 2.

Na divisão 12 : 4, por exemplo, que se lê "12 dividido por 4", não há uma única palavra para exprimir o símbolo :. Nessa expressão (12 : 4) o numeral representando o tamanho dos grupos iguais está à direita. Se 2×3 fôsse lido "2 multiplicado por 3" e o 3 considerado como multiplicador, existiria um perfeito paralelismo entre as expressões verbais da multiplicação e da divisão. A tendência moderna de usar expressões como "dois grupos de 3" e "2 vêzes 3" tem abolido êsse paralelismo e criado uma situação que às vêzes conduz a dificuldades, quando os conceitos básicos não são esclarecidos pela concretização (uso de objetos e figuras). É claro que as distinções verbais são de pouca ou nenhuma ajuda para o aluno, que não precisa tomar conhecimento delas, se as situações em que se baseiam a multiplicação e a divisão forem ensinadas adequadamente. Ao invés de destacar determinada maneira de descrever uma situação de multiplicação, tôdas as maneiras de uso comum poderiam ser ensinadas.

Produtos e dividendos até 36

No 2º estágio, o significado de multiplicação deve ser cuidadosamente desenvolvido, ensinando-se todos os fatos básicos cujos produtos não ultrapassam 36. No 3º estágio, convém fazer uma revisão geral não só do significado da multiplicação como também dos fatos básicos de multiplicação de produtos até 36.

Para facilitar a aprendizagem, êsses fatos básicos poderiam ser organizados em têrmos de produtos. Com produto 12, por exemplo, os fatos básicos de multiplicação são $3 \times 4 = 12$, $4 \times 3 = 12$, $2 \times 6 = 12$ e $6 \times 2 = 12$. Todos êsses fatos deveriam ser ensinados juntos. Mais tarde, se o professor desejar, pode usar uma atividade na qual todos os fatos conhecidos são arrumados em seus lugares próprios nas "tábuas de multiplicação". Entretanto, o aluno precisa saber cada fato sem consultá-la. Além disso, êle deve ser capaz de lembrar um fato imediatamente, sem ter de relacioná-lo a outro que êle conheça bem.

Os professôres deveriam observar que o significado da multiplicação está baseado na ação multiplicativa, que é, como se disse antes, a combinação de grupos iguais. Quatro aspectos podem ser notados antes que uma situação se evidencie como multiplicativa. Primeiro, a ação deve ser de reunir grupos, real ou imaginada. Segundo, deve ser conhecido o número de objetos de cada grupo. Terceiro, os grupos devem ser iguais. Quarto, o número dêsses grupos iguais deve ser conhecido. As situações de multiplicação não são idênticas às situações de adição. Quando a situação, envolvendo vários grupos, é observada do ponto de vista de adição, o número de grupos envolvidos não é de maior importância, e o fato de os grupos serem ou não iguais não merece maior atenção. Êles podem ou não conter o mesmo número de objetos.

Livros para professôres e alunos têm ensinado que "multiplicação é um processo curto de fazer adição quando os adendos são todos iguais". Isso é uma afirmação que diz respeito ao *processo* da multiplicação. Mostra que a situação de multiplicação pode ser resolvida pela adição, mas não esclarece o sentido da multiplicação. De outro lado, essa afirmação focaliza uma alternativa do processo de multiplicar e não o *sentido* da multiplicação. Por isso, contribui muito pouco para a habilidade de resolver problemas. O ponto de vista moderno é que o sentido da multiplicação de números inteiros é melhor desenvolvido dando-se ênfase aos aspectos básicos das situações de multiplicação — o reconhecimento de que grupos iguais devem ser combinados — e que apenas dois números são envolvidos. Um dêsses números especifica o tamanho dos grupos e o outro, o número dêles.

A seqüência do ensino da divisão deve ser paralela à da multiplicação. O significado da divisão e alguns de seus fatos básicos são introduzidos no 1º estágio. Essas experiências ainda informais têm o objetivo de desenvolver a prontidão, e os dividendos não ultrapassam 10.

No 2º estágio é importante desenvolver a compreensão básica para a divisão e introduzir os fatos básicos de dividendo até 36.

O sentido da divisão está baseado na ação de dividir, isto é, a separação de um grupo dado em subgrupos iguais. Essa separação pode ocorrer de duas maneiras. Primeiro, se o tamanho de cada subgrupo é conhecido, o número dêsses subgrupos contidos no grupo dividendo pode ser encontrado. Por exemplo: "Quantos grupos de 4 podem ser feitos com 28 objetos?" A resposta é "7 grupos". Êsse tipo de ação de dividir é chamado "divisão-comparação", ou "medida".

O último têrmo vem da analogia com as situações de medir como a seguinte: "Quantos pedaços de barbante de 4 cm podem ser cortados de um barbante de 28 cm?"

O segundo tipo de ação de dividir ocorre quando se conhece o número de subgrupos a ser obtido, mas o tamanho (cardinalidade) do subgrupo não é conhecido, precisa ser encontrado. Por exemplo: Se um grupo de 28 objetos deve ser separado em 7 grupos iguais, quantos haverá em cada grupo? A resposta é "4 objetos". Êsse tipo de ação de dividir é chamado "divisão-repartição".

Freqüentemente aparece nas situações dêsse tipo, a idéia de distribuir, como no caso de alguém que pretende distribuir 15 biscoitos entre 3 crianças. E a pergunta é: "Qual será a parte de cada criança?"

Uma discussão posterior sôbre divisão-repartição será encontrada à página 70.

É imprescindível que a divisão-comparação ou "medida" seja introduzida antes da divisão-repartição. Todos os fatos básicos de divisão deveriam ser estudados inicialmente em situações que impliquem divisão-comparação. Situações de divisão-repartição podem ficar para mais tarde. Note-se que nessas situações o processo é feito por métodos quotitivos (por quotas).

Na discussão anterior sôbre multiplicação e divisão, chamou-se a atenção para algumas das diferentes maneiras de apresentar a multiplicação. Dissemos também que não há uma única palavra (ou nome) para traduzir o sinal de divisão (:), que se lê "dividido por". Assim 12 : 4 lê-se "doze dividido por quatro". A forma operacional $12 \div 4$, pode ser lida do mesmo modo. No ensino dos fatos básicos, essa forma ou algoritmo precisa ser apresentada porque o aluno pode, ocasionalmente, encontrá-la. Seu único real valor só ocorre quando se trata de divisão que vai além dos fatos básicos. Muitas vêzes, esforços são feitos para dar mais sentido a essa forma, lendo-se o exemplo acima como "quatro em doze". Tais esforços parecem fúteis. O significado da divisão deve ser desenvolvido através de atividades físicas e visuais que envolvam a separação de um grupo em subgrupos iguais — não por formulação verbal.

Os fatos básicos da divisão devem ser organizados para aprendizagem em têrmos dos dividendos. Assim $12 : 2 = 6$, $12 : 6 = 2$, $12 : 3 = 4$, $12 : 4 = 3$ serão estudados juntos. Mais tarde êsses fatos podem ser arrumados com outros, à medida que forem estudados, nas "tábuas" dos fatos de divisão. Entretanto, não convém, inicialmente, apresentar os fatos básicos em forma de "tábuas", pois isso não beneficia a aprendizagem. A organização em têrmos de dividendos corresponde à usada com os fatos básicos de multiplicação. Entretanto, a relação inversa entre multiplicação e divisão não precisa ser ressaltada nessa altura, embora algumas crianças a observem desde o 2º estágio.

O sistema de numeração de base dez até 999

Como foi explicado às páginas 13 e 14, referentes ao estágio 1, a compreensão da Matemática depende do conhecimento dos princípios do sistema de numeração de base dez. Duas idéias, ou seja, agrupamento em 10 e valor de posição são básicas. A criança compreende os princípios do sistema de numeração, quando tem oportunidade de ver como um grupo grande de objetos pode ser disposto em grupos de 10, realizando ela própria tais agrupamentos. Depois dessas atividades, torna-se mais fácil para o aluno aprender como se faz o registro escrito dêsses agrupamentos, aplicando a idéia de valor posicional.

Na organização das atividades de aprendizagem do sistema de numeração, primeiro se dará atenção às idéias gerais do agrupamento e do valor posicional.

A seguir, serão ensinadas as palavras dez, vinte, trinta etc., nessa ordem, e os respectivos numerais (10, 20, 30 etc. ...) Essa organização ajuda a valorizar a estrutura do sistema. A partir daí, estudam-se os números de 11 a 19 e os números relativos às demais dezenas (21, 22, 23 etc.; 31, 32, 33 etc.) para dar ênfase aos princípios de seqüência, segundo os quais os referidos números são ordenados. Mais tarde, êsses princípios serão aprofundados, dando-se especial atenção ao que acontece quando um grupo é aumentado de 1 ou de 10, ou diminuído de 1 ou de 10, reforçando-se a compreensão do sistema.

Note-se que o nome dos números de 11 a 19 não segue a regra geral dos nomes usados para as outras dezenas. Por exemplo, "74" lê-se "setenta e quatro", mas o símbolo 14 é lido "quatorze" e não "dez e quatro", como a regra geral poderia sugerir. Sòmente os números de 11 a 19 constituem uma exceção.

É aconselhável que os alunos façam um cartaz, apresentando os numerais até 99. Na unidade seguinte sôbre o sistema de numeração de base dez, serão estendidos os princípios a que nos referimos para incluir os números até 999.

Ao prosseguir-se no estudo do sistema de numeração de base dez além de 99, a criança aprenderá que qualquer número, não importa seu tamanho, pode ser registrado pelo uso de apenas 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e irá familiarizar-se com os princípios do sistema decimal. Quando se chega pela contagem, a *10 grupos de 10*, uma palavra completamente nova é então usada — *centena*. Usando essa palavra nova (acompanhada das já aprendidas) e os princípios do sistema de numeração de base dez, é fácil dar nome aos números até 999. Assim, o numeral 437, que poderia ser lido "quarenta e três dezenas e sete", lê-se "quatrocentos e trinta e sete". A leitura dos nomes dos números se tornaria longa e complicada, se novos nomes para os números, como centenas, não fôssem introduzidos em pontos chave.

Concluí-se, pois, que a criança precisa aprender a usar as palavras *centena* e cento para lidar com números maiores que 99. Não basta, porém, saber que centena representa o número que vem depois de 99; terá de aprender também que centena é o nome de um grupo especial, o grupo de 10 dezenas e, ainda, como o valor posicional é usado para indicar centenas na escrita dos numerais.

Antes de terminar o estágio 2, a criança poderia conhecer o sistema de numeração até 999. Não se pretende com isso que ela aprenda os nomes de 900 números, mas que compreenda os *princípios do sistema de numeração de base dez*.

As experiências de aprendizagem devem seguir uma organização semelhante à já apresentada para os números até 99. O aluno aprenderá a pensar em 10 grupos de dez como um grupo único de 100. Poderá aprender, ainda, a usar o valor posicional para escrever numerais que tenham a ordem das centenas, a contar por centenas, a escrever as centenas exatas (100, 200, 300 etc.) e a contar por dezenas dentro de cada centena. Os princípios do sistema de numeração de base dez continuarão a ser desenvolvidos e enriquecidos, dando-se especial atenção ao que acontece quando um número é aumentado de 1, depois de 10 e, finalmente, de 100. A mesma atenção será dada ao que acontece quando se diminui um número de 1, de 10 e de 100. Merecem atenção especial certas maneiras de reagrupar que são úteis para compreender a "reserva" em adição. Por exemplo, um grupo total pode ser mostrado num arranjo de dois grupos de 10 objetos cada um e 12 objetos isolados, ou seja, "2 dezenas e 12 unidades". Pode-se, então, reagrupar as 12 unidades em "1 dezena e 2 unidades". A criança verá, assim, que o número de objetos é "3 dezenas e 2 unidades", ou 32. Êsse reagrupamento de "unidades" em "dezenas e unidades" é a mais

simples ilustração do princípio em que se baseia a "reserva" na adição.

Do mesmo modo, o princípio em que está baseado o "recurso" na subtração pode ser mostrado, desfazendo-se um dos grupos de 10 para reunir êsses objetos com os outros que estavam isolados porque não eram suficientes para formar um grupo de 10 (as "unidades simples de um número). Por exemplo, "3 dezenas e 8 unidades" são reagrupadas em "2 dezenas e 18 unidades", desfazendo-se um dos grupos de 10 e colocando essas 10 unidades com as 8 unidades originais. Em suma, uma compreensão da "reserva" e do "recurso" depende fundamentalmente da compreensão do sistema de numeração, quer dizer, da compreensão da maneira pela qual os símbolos numéricos são usados para escrever o nome de um número e da maneira de fazer o reagrupamento dos objetos.

Tanto para rever como para introduzir a compreensão dêsse princípio, os numerais usados não precisam exceder 99, pois para desenvolver a seqüência dos números de 99 a 999, os mesmos princípios serão aplicados. Apenas a palavra *centena* será introduzida como nome do grupo composto de 10 grupos de dez. Assim, o grupo representado pelo númeral 314 compõe-se de 31 grupos de 10 e 4 objetos isolados. Entretanto, lê-se o numeral 314, dizendo "trezentos e quatorze", e o grupo é visto como constituído de 3 centenas, 1 dezena e 4 unidades, isoladas.

A compreensão do reagrupamento em adição e em subtração depende de uma completa compreensão do sistema de numeração. Entretanto, não é aconselhável levar o aluno a aprender os princípios básicos da "reserva" e do "recurso" ao mesmo tempo que começa a aprender os processos de adição e de subtração. Em vez disso, para reduzir as dificuldades, aconselha-se ensinar primeiro, de modo cuidadoso, êsses princípios, como parte do ensino do sistema de numeração e depois, a "reserva" e o "recurso" como aplicações diretas dêsses princípios. Reagrupamentos dos tipos necessários em adição e subtração devem ser feitos primeiro com objetos, para que a criança possa ver e, conseqüentemente, compreender, as alterações correspondentes que se fazem nos numerais para somar ou subtrair.

Os processos de adição e subtração

ADIÇÃO

Não convém exigir da criança nenhuma computação em adição, subtração, multiplicação, ou divisão antes que ela tenha aprendido todos os fatos básicos necessários ao uso do processo, pois do contrário só será possível trabalhar com os fatos básicos conhecidos, o que levará a uma restrição artificial do caráter de generalidade das experiências de aprendizagem. Quando um fato básico é totalmente dominado, evocá-lo é uma questão de memória, o que não é considerado cálculo. Quando todos os fatos básicos de adição tenham sido aprendidos, o ensino do processo de adição pode começar.

Habilidade no processo de adicionar significa que a criança é capaz de fazer a adição com exatidão e velocidade razoável. Naturalmente que habilidade não se adquire de uma só vez, requer tempo e prática. Além disso, o desembaraço não deve ser esperado antes de a criança compreender o processo.

A primeira habilidade em computar é adquirida em adição envolvendo um numeral de um algarismo e um numeral de dois algarismos. Essa habilidade é necessária para adicionar em coluna.

A adição envolvendo um numeral de um algarismo e um de dois, tradicionalmente, era dividida em várias unidades menores, incluindo "adição cuja soma das unidades fica dentro da mesma dezena" e "adição cuja soma das unidades isoladas ultrapassa a dezena", ou seja, a soma alcança a dezena seguinte. Nesse caso, pode dizer-se imediatamente o nome da dezena, para, então, determinar o algarismo "das unidades" da soma, levando em conta as "terminações" dêsses numerais. Quando os métodos de ensino baseiam-se principalmente nas teorias da aprendizagem do estímulo-resposta, prática intensiva ou treino é necessário para desenvolver essa habilidade. O atual programa de Matemática dá ênfase ao *insight* pelo aluno. Em adição, o primeiro passo é levá-lo a compreender o que acontece quando um numeral de um algarismo e um de dois estão envolvidos. A criança precisa aprender um princípio ou um método de ataque, não uma variedade de casos ou situações isoladas. Uma vez adquirida a compreensão de um método de ataque, há inúmeras oportunidades de prática.

Convém ressaltar aqui que a adição de um numeral de um algarismo e um numeral de dois algarismos precisa ser computada porque vai além dos fatos básicos. Entretanto, pode ser feita apenas mentalmente ou "de cabeça".

A primeira necessidade de computar surge, realmente, com a adição em coluna de vários numerais de um algarismo, onde o mais importante é que cada número encontrado (com exceção do último) deve ser retido até que se lhe junte outro número.

A principal dificuldade de cálculo em adição surge quando aparece a "reserva". A importância do trabalho inicial para desenvolver o sistema de numeração de base dez pode agora ser apreciada. Quando os princípios do sistema de numeração são compreendidos, a maior habilidade requerida pelo processo de adicionar pode ser adquirida não apenas com compreensão como também com rapidez. Ensinada a adição com numerais de dois algarismos, com e sem "reserva", passa-se logo aos numerais de três algarismos. Completada essa parte, as idéias essenciais à compreensão do processo de adição estarão introduzidas.

Costuma deixar-se o ensino da adição envolvendo numerais com dois algarismos com "reserva" para semanas e até meses depois que a adição sem "reserva" tenha sido ensinada. Isso impede a criança de compreender a natureza do que está sendo aprendido, como um todo. O aluno não pode entender, por exemplo, porque lhe disseram para começar somando as unidades, se êle pode obter o resultado certo, começando pelas "dezenas". Êle poderia fazer a operação de qualquer dêsses modos e, às vêzes, adquirir hábitos que mais tarde causassem confusão e tivessem de ser mudados. Segundo a orientação apenas esboçada, a maior dificuldade deve ser apresentada no início. Essa orientação defende o princípio segundo o qual um conceito geral é introduzido como um todo e não como partes. Quando o aluno aprende a usar a "reserva", pouca ajuda precisará na prática da adição sem "reserva". Além disso, com essa orientação o professor não precisa estar constantemente atento para evitar exemplos que requeiram "reserva", quando a criança ainda não está preparada para ela. Em última análise, essa organização das experiências de aprendizagem simplifica o trabalho do aluno e do professor.

SUBTRAÇÃO

Subtração é o único outro processo de computar a ser considerado no 2º estágio. Como na adição, recomenda-se a sua introdução só depois que todos os fatos básicos de subtração tenham sido aprendidos.

Há vários e diferentes métodos de subtrair [4], mas até o momento o método de "tirar com recurso" (método *subtrativo* de decomposição) tem sido o mais aconselhado. Os resultados de pesquisas realizadas mostram que se o objetivo do ensino é a compreensão, além da habilidade de computar, a escolha deve recair nesse método [3,58], pois é o que está, mais que os outros (por exemplo, o "método aditivo das adições iguais"), de acôrdo com os princípios preconizados pelo moderno programa de Aritmética.

O processo de subtração requer conhecimento dos fatos básicos e compreensão do "recurso". O têrmo *recurso* é considerado difícil por alguns professôres e seu uso pelos alunos não é aconselhável. Não obstante, êle é usado aqui porque seu significado está bem definido na mente de professôres e da maioria dos pais. Êle pode ser evitado pelo emprêgo de frases como "desmanchar uma dezena" ou "trocar um grupo de uma dezena em dez unidades", mas essas frases não são mais significativas que "recurso". A compreensão, em qualquer caso, repousa nas idéias de reagrupamento e essas idéias é que devem ser transmitidas. O nome particular ou frase a ser usada para definir o reagrupamento é assunto de menor importância.

A prontidão para o "recurso" deve basear-se em atividades de aprendizagem especiais, em conexão com o estudo do sistema de numeração decimal. No início dêste livro, explicou-se como as crianças podem decompor um grupo de 10, no caso de numerais de dois algarismos, e colocar essas unidades junto com as demais "unidades". (Veja páginas 32, 33.) Êsse princípio básico do reagrupamento de três algarismos é a decomposição dos milhares, no caso dos numerais de quatro algarismos. Quando os alunos tiverem aprendido a substituir numerais para corresponder às operações de reagrupamento, a aplicação direta dessas idéias no "recurso" será fácil de ser entendida. Depois dessa preparação, a criança pode lidar imediatamente com a subtração com "recurso", ao invés de ter de fazer estágios intermediários na prática do processo de subtração. É inteligente, portanto, ver o processo como um todo. Entretanto, no 2º estágio, talvez seja aconselhável limitar a subtração a números que envolvam numerais de apenas três algarismos.

Generalizações sôbre os processos

À medida que o trabalho se desenvolve na primeira parte do 2º estágio, situações de adição, subtração, multiplicação e divisão — comparação (tipo no qual se procura o número de grupos iguais) — podem ser apresentados, trabalhando-se com grupos de até 10 objetos. No início não é preciso dar atenção especial à subtração como o "oposto" da adição, ou vice-versa. Convém preservar a individualidade de cada um dêsses tipos de situação (aditiva, subtrativa, multiplicativa e de divisão) sem muita preocupação com a relação entre elas.

Generalizações importantes sôbre os processos podem ser desenvolvidas com o ensino dos fatos básicos além de 10. Uma das principais é a de que a soma não muda se os mesmos números são adicionados em outra ordem. Por exemplo, tanto $5 + 4$ como $4 + 5$ representam 9. A generalização é freqüentemente estabelecida como "A adição é comutativa". O têrmo *comutativa* ainda não precisa ser usado pelos alunos. Uma aplicação comum dessa generalização é a verificação da adição (adiciona-se uma coluna no sentido oposto ao usado antes).

Na multiplicação de dois números, o produto é o mesmo independente da ordem em que êles forem tomados. Por exemplo 5×4 e 4×5 representam 20. A mudança da ordem dos fatôres (de 5×4 para 4×5) é permitida *abstratamente*. Note-se, entretanto, que, em uma situação envolvendo objetos, 5×4 e 4×5 representam maneiras diferentes de agrupar os objetos. Cinco grupos de 4 objetos *não* representam a mesma situação que 4 grupos de 5 objetos.

1º caso relações entre as operações

Outro conjunto de generalizações é a relação "inversa" entre os processos. Adição e subtração, por exemplo, são processos inversos. Se 4 é adicionado a 5, o resultado é 9. Se 4 é subtraído de 9, o resultado é 5. Multiplicação e divisão são também processos inversos ($4 \times 3 = 12$ e $12 : 3 = 4$). O conhecimento dessas relações é útil tanto na análise de problemas como na computação.

Muitas crianças passam a conhecer essas generalizações através de suas experiências com os fatos básicos de adição. Entretanto, tôdas elas deveriam adquirir êsse conhecimento, daí a conveniência do professor chamar a atenção para tais generalizações no 2º estágio.

Fundamentos para comparar usando razões

A idéia de correspondência um-a-um, que é uma idéia aritmética fundamental, pode ser generalizada para abranger correspondências como 2 para 3, 1 para 10, e muitas outras. Suponhamos, por exemplo, que numa coleção de brinquedos, duas de cada três bolas são vermelhas, e uma de cada três é azul. Logo, há duas vermelhas para cada bola azul, e uma correspondência 2 para 1 pode ser feita entre o grupo de bolas vermelhas e o grupo de bolas azuis. Do mesmo modo, supondo que de cada 5 piões, 2 são "grandes" e 3 são "pequenos" pode estabelecer-se uma correspondência 2 para 3 entre o grupo composto de todos os piões "grandes" e o grupo composto de todos os piões "pequenos". Também seria conveniente observar que a correspondência pode ser feita entre objetos bastante diferentes. Assim, suponhamos que haja apenas 8 aviões de brinquedo para um grupo de 12 meninos. Então, subgrupos de meninos e aviões podem ser feitos de modo que correspondam 2 aviões a cada 3 meninos. A vantagem de olhar a situação dessa maneira é ver, prontamente, a relação dos dois grupos (todos os meninos e todos os aviões) em sua forma mais simples (2 para 3, e não 8 para 12).

Essas idéias fundamentais tornam-se mais e mais importantes à medida que a criança avança na experiência com números, sendo aconselhável introduzir, já no 2º estágio, atividades elementares que envolvam tais comparações e relações.

Resolução de problemas

Já salientamos anteriormente, que o sucesso na resolução de problemas é um objetivo importante do ensino de Matemática na escola primária. Para alcançar êsse objetivo, o programa moderno de Matemática tem de indicar um recurso sistemático para resolver problemas, uma vez que os habituais métodos de acaso, usados no passado, não tiverem sucesso.

O professor deve ter em mente que não é aconselhável, no 2º estágio, o uso de problemas verbais convencionais (isto é, informações verbais seguidas de uma pergunta, envolvendo dados quantitativos).

Entretanto, duas etapas importantes para prontidão na resolução de problemas podem ser alcançadas nesse estágio: 1º) ajudar o aluno a compreender que o problema verbal descreve alguma coisa que foi feita ou que poderia ter sido feita, o que se consegue por meio de figuras e sentenças descritivas acompanhadas de gravuras; 2º) habituar o aluno a *visualizar* a situação-problema, levando-o a ver ou imaginar a ação nela envolvida, tornando-o capaz de discriminar as ações de reunir e separar.

É bom lembrar que qualquer problema — ainda que uma simples situação sugerida por gravuras, como as usadas no 2º estágio — tem uma estrutura. É por isso que sempre pode escrever-se uma equação que mostre essa estrutura. No segundo estágio, quando a criança responde a uma gravura, dizendo "2 mais 4 são 6", ela demonstra que observou ou imaginou uma ação na situação, viu a estrutura do problema, deu a equação e encontrou a resposta desejada.

Naturalmente, nem todos os problemas são tão simples em sua estrutura como o mencionado acima. Entretanto, em sua maioria, os problemas da vida diária se ajustam a determinados tipos de estruturas ou esquemas. Alguns envolvem ação aditiva e são resolvidos pela adição; outros, ação subtrativa e são resolvidos pela subtração. Êsses tipos são bastante simples e, em geral, resolvidos com facilidade.

Realmente difíceis para a criança são os problemas nos quais a ação *não* sugere o processo que conduz à solução. Por exemplo, há vários tipos de problema nos quais a ação é aditiva, mas a solução requer subtração. Convém dar especial atenção a êsse tipo de problema e mostrar aos alunos porque um processo, diferente do indicado pela ação, é necessário para encontrar a solução. Essa compreensão pode ser alcançada através de concretizações com objetos e gravuras. Cada um dêsses tipos será tratado oportunamente ao estudar-se o programa relativo ao estágio no qual êle é introduzido.

Raciocínio aditivo e subtrativo no 2º estágio

Entretanto, dois tipos especiais precisam ser considerados no 2º estágio. O primeiro dêles aparece em situações nas quais se quer saber "quantos mais" ou "quantos menos". O segundo tipo é usualmente conhecido como "quantos mais são necessários". Dada a necessidade de promover-se uma introdução adequada à resolução de problemas, êsses dois tipos são, a seguir, considerados separadamente.

PROBLEMAS ENVOLVENDO COMPARAÇÃO POR SUBTRAÇÃO

Um dos tipos mais comuns de situações de problema ocorre quando um grupo deve ser comparado com outro grupo. Por exemplo: "Marcos tem 5 cachorrinhos e 3 gatos. Quantos cachorrinhos êle tem mais que gatos? O número de cachorrinhos deve ser *comparado* com o número de gatos.

Até hoje o que se tem feito em problemas como êsse é, simplesmente dizer à criança que subtraia para encontrar a resposta. Se ela se lembrar de subtrair poderá obter resultados corretos, embora não saiba o que está fazendo. Raramente a criança tem ajuda real para compreender *porque* a subtração leva ao resultado correto.

A questão para o professor é a seguinte: "Que método de manipular objetos conduzirá não apenas à solução do problema, mas levará também a criança a relacionar o processo usado com suas experiências anteriores de situações subtrativas?".

A situação de comparação não é do mesmo tipo da situação subtrativa estudada antes. Nas situações anteriores, de um grupo dado, era retirado um subgrupo para encontrar-se o resto. No problema acima, porém, o grupo de 3 gatos não é um subgrupo do grupo de 5 cachorrinhos, e nada na situação sugere o processo de subtração. Alguma coisa deve ser feita para mostrar à criança porque ela pode resolver o problema pela subtração. É preciso tornar claro que 3 gatos não são subtraídos de 5 cachorrinhos. Além disso, os fatos lógico e psicológico envolvidos aqui não podem ser negados, pois ambos, gatos e cachorrinhos, são animais, daí dizer-se, "Subtrair 3 animais de 5 animais".

Há certas ações, naturais nessas situações de comparação, que mostram à criança porque ela pode usar o processo de subtração. Elementos dos dois grupos podem ser colocados lado a lado até que todos os elementos de um dos grupos tenham sido usados. Os elementos correspondentes, no grupo maior, podem ser, então, *separados* ou *retirados*, determinando-se o número de elementos do resto. O resultado diz "quantos a mais" há no grupo maior. Assim, 3 dos cachorrinhos podem ser emparelhados com os 3 gatos; e, então, se êsses 3 cachorrinhos são retirados do grupo de 5 cachorrinhos, sobram 2 cachorrinhos. A ação de fazer a correspondência um-a-um serve para determinar quantos elementos do grupo maior devem ser subtraídos porque tiveram elementos correspondentes no grupo menor.

A análise da comparação por subtração, feita acima, deve ser a base para a seqüência das atividades iniciais de aprendizagem. Muitas atividades de emparelhar objetos e figuras devem anteceder a fase da simbolização. A aprendizagem será mantida pela prática regular da resolução de problemas simples.

PROBLEMAS ENVOLVENDO SUBTRAÇÃO-ADITIVA

porque a ação é a de reunir.

Em muitas situações de problema a pergunta a ser respondida é a seguinte: "Quantos mais são necessários?" Por exemplo, há 8 crianças na festa e apenas 5 cadeiras em volta da mesa. Quantas cadeiras mais são necessárias para que tôdas as crianças se sentem? A freqüência com que aparece êsse tipo geral de situação-problema

$5+\square=8$

e as dificuldades encontradas pela criança em aprender como resolvê-lo, exigem que se dê a essas situações-problema especial atenção. Analisando tais situações, vê-se, em primeiro lugar, a necessidade de encontrar certa quantidade. (No problema acima, são necessárias cadeiras para 8 crianças.) Em segundo, que já se dispõe de alguns dos objetos de que se vai precisar (5 cadeiras já estão à mesa); e em terceiro, que a solução do problema requer que sejam trazidos mais objetos do mesmo tipo para serem reunidos aos já existentes.

Nunca é demais insistir que *a ação envolvida na resolução dêsse tipo de problema é a de reunir ou a do tipo aditivo.* A dificuldade surge, entretanto, porque o número a ser encontrado ou adicionado é desconhecido. A situação-problema, quando representada por símbolos, não pode ser resolvida diretamente pela adição, como é o caso em que o número do grupo que se tem à mão e o do grupo que está sendo adicionado são ambos conhecidos. Quando os números envolvidos no problema são pequenos, como no exemplo usado, a resposta é tão evidente que, para a maioria dos adultos, a dificuldade básica da situação nem é percebida.

Habitualmente, diante de problemas dêsse tipo, o que se faz é dizer à criança para "subtrair o número menor do maior". Através de treino constante em problemas do mesmo tipo, algumas crianças aprendem a resolver tais problemas. O processo usado é a subtração, embora, é certo, a ação envolvida no problema seja claramente a de reunir ou adicionar. Entretanto, poucas crianças têm sido ajudadas a compreender porque se usa a subtração para resolver essa situação aditiva.

A chave da solução dêsse problema é reconhecer que, por uma ação de adicionar, chega-se à quantidade necessária.

Quando o problema é resolvido com objetos, pode determinar-se o número de objetos procurados, acrescentando objetos um-a-um, até obter-se a quantidade necessária.

O objetivo do programa de Matemática é capacitar o aluno a resolver problemas usando símbolos. Aqui, para alcançar essa habilidade, o aluno terá de aprender a visualizar a quantidade total necessária, incluindo as que já se tem, e imaginar a retirada dêsse grupo da quantidade total imaginada. Separando do grupo total o grupo de objetos disponíveis, o aluno verá porque êle subtrai para encontrar a resposta. Sòmente então terá elementos para compreender porque a subtração resolve o problema.

Nos anos posteriores, êsse tipo de situação pode ser generalizado como situações em que se procura "Quantos foram adicionados" sem se limitar às situações sociais que trazem a idéia de "necessidade", embora, de início, a situação de necessidade seja mais fácil de ser compreendida pelos alunos.

Sistema legal de unidades de medir

As medidas constituem uma das maneiras pela qual a Matemática se relaciona com a vida de cada pessoa.

A criança encontra muitas situações em sala de aula ou em casa nas quais precisa medir. Essas situações precisam ser bem exploradas para que o aluno adquira a habilidade desejável.

Na parte relativa ao 1º estágio discutimos as idéias fundamentais que formam a base para o ensino das medidas. O professor recorrerá a essas idéias sempre que considerar necessário.

A criança precisa, desde cedo, aprender que, para medir, devemos primeiro escolher uma unidade apropriada e, depois, saber quantas vêzes a unidade escolhida está contida naquilo que se está medindo. Dessas idéias mais simples partirá para experiências por meio das quais possa reconhecer a necessidade do emprêgo de unidades padronizadas, para com elas familiarizar-se em atividades reais. Nessas atividades é importante que a criança saiba identificar a unidade de medir conveniente a cada situação e de acôrdo com a coisa a ser medida.

Precisa entrar em contato direto com os instrumentos de medir para aprender como usá-los. Deve concluir, por exemplo, que há vários tipos de balanças que variam em relação à coisa a ser pesada.

Noções como por exemplo "100 centímetros fazem um metro" e "dois meios litros fazem 1 litro" podem ser desenvolvidas à proporção que as unidades padronizadas a que se referem sejam introduzidas. Algumas crianças terão experiências com outras unidades, como o quilômetro, mas o ensino sistemático dessas medidas deve ficar para mais tarde.

Em experiências informais a criança começa a compreender a relação entre meio-metro e 50 centímetros, meio-quilo e 500 gramas etc.

O calendário e o relógio são de grande aplicação prática. A criança deve aprender a consultá-los, de acôrdo com as necessidades de sua vida diária em casa e na escola. Pode, assim, adquirir a noção de que a hora tem 60 minutos e meia-hora, 30 minutos.

O termômetro é familiar a muitas das nossas crianças. É preciso que aprendam que a temperatura também pode ser medida, desenvolvendo a sensibilidade para a diferença entre dia "quente", "frio", etc.

Os fatos citados surgem naturalmente em decorrência da vida da sala de aula e das atividades em outras áreas do programa. Não há necessidade de treino sistemático em reduções, transformações ou conceitos mais difíceis.

Sistema monetário

Quando as crianças iniciam o 2º estágio trazem um bom cabedal de experiências com o dinheiro, dada sua aplicação social. Reconhecem as cédulas mais comuns e a habilidade na contagem do dinheiro será grandemente facilitada se usarem os conhecimentos dos princípios do sistema de numeração.

Uma coleção de cédulas ou moedas pode ser fàcilmente contada usando-se o nome das dezenas (dez, vinte, cinqüenta, etc.) ou das centenas (cem, duzentos, etc.).

Embora no estágio 2, o sistema decimal de numeração alcance apenas 999, não será difícil para a criança, que já viu e conhece a nota de cinco mil cruzeiros, transferir a noção já adquirida dos princípios de formação do sistema decimal, e contar de 1000 em 1000 para ver a relação entre uma nota de cinco mil cruzeiros e cinco de mil.

Há um problema importante que deve ser focalizado neste estágio: a aquisição da habilidade em fazer trôco ou verificar se o trôco recebido está correto.

Esta habilidade envolve o pensamento aditivo e é um processo de contagem que parte da quantia gasta à quantia dada para pagamento. É verdade que o trôco certo pode ser calculado pelo processo de subtração, mas não é esta a maneira comum de verificar ou encontrar um trôco na prática. É desejável que as crianças adquiram a habilidade de "fazer trôco" como êle é feito na vida diária.

Geometria

O reconhecimento de algumas formas geométricas e o desenvolvimento do vocabulário para expressá-lo formará a base de preparação da criança para novos conhecimentos.

Depois de reconhecer o quadrado, o retângulo e o losango, a criança pode observar que em tôdas essas figuras há 4 lados, razão pela qual são chamadas *quadriláteros* — Pode observar também que o quadrado é um retângulo (um retângulo com todos os quatro lados do mesmo comprimento). Deve comparar essas figuras com o triângulo para estabelecer as diferenças. Em relação ao triângulo, a criança pode perceber que é uma figura de três lados, iguais ou não.

No 2º estágio pode iniciar-se o estudo das linhas quanto à posição. Reconhecendo a linha reta, a criança aprenderá que ela pode estar em posição horizontal, vertical ou inclinada.

Frações (metades e quartos)

No 2º estágio o professor pode planejar atividades com frações, incluindo o trabalho com quartos. Repetimos aqui o que já dissemos na parte relativa ao 1º estágio, com relação às duas idéias que consideramos fundamentais no ensino de frações:

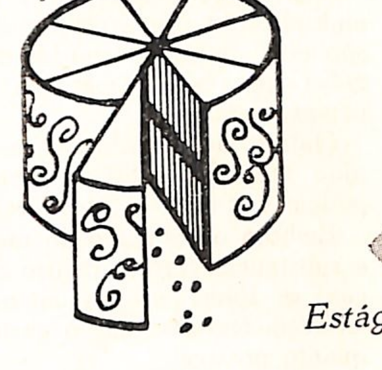
— um inteiro pode ser separado em duas ou em quatro partes iguais;

— nossa atenção pode focalizar uma ou mais dessas partes iguais.

Não se deve esperar que a criança adquira a idéia de uma fração e o símbolo que a representa de uma só vez. As experiências no 1º e 2º estágios serão vividas no plano concreto, podendo a criança manipular material, pois essa é a preparação desejável, num programa que dá importância à compreensão.

Trabalhando com meios e quartos, a criança deverá identificá-los, contá-los, compará-los, agrupá-los, etc.

Nesse estágio, em suas atividades de análise de grupos, a criança tem oportunidade de perceber que alguns grupos podem ser separados em subgrupos iguais, com o mesmo número de objetos. O professor deve levar a criança a perceber que se há dois subgrupos iguais, cada um é a metade do grupo total; se há quatro subgrupos iguais, cada um é um quarto do grupo total.



Estágio 3

Visão geral — Aspectos importantes a ressaltar

Embora os programas modernos proporcionem, no 1º e 2º estágios, ensino sistemático de Matemática, existe ainda em alguns países uma tendência em admitir que programa pròpriamente dito, só deve começar quando a criança atinge o seu 3º ano escolar. O trabalho no 3º estágio, que corresponde mais ou menos ao 3º ano escolar, inclui invariàvelmente o reensino dos conceitos introduzidos nos dois estágios precedentes, de modo mais intensivo, além de uma grande parte de trabalho nôvo. Os parágrafos seguintes resumem os aspectos que devem ser ressaltados nesse estágio.

Primeiro, e mais importante que tudo, o aluno tem de fazer grande esfôrço para usar métodos sistemáticos na resolução de problemas. Isso requer prévio reconhecimento e análise da natureza da situação-problema para exprimir a relação numérica na forma simbólica (por exemplo, escrevendo uma equação), e, finalmente, a descoberta de como a solução pode ser encontrada através da computação. No passado, quase sempre o método para resolver problema era superficial e assistemático, dando-se ênfase aos processos de computar. [21] Atualmente é reconhecida a necessidade de melhor equilíbrio entre o desenvolvimento das habilidades de resolver problemas e o uso das técnicas de computar. Logo, será preciso assegurar um cuidadoso estudo dos métodos fundamentais de ataque aos problemas matemáticos.

Segundo, o aluno deve dominar, satisfatòriamente, todos os fatos de adição e subtração de modo que cada fato seja respondido sem hesitação.

Terceiro, a criança pode continuar a aprender os fatos básicos de multiplicação e de divisão, estudando os de produtos e dividendos até 81, inclusive.

Quarto, os processos de adição e subtração serão revistos. A multiplicação com multiplicadores de um e dois algarismos e a divisão com divisores também de um e dois algarismos serão introduzidas através de métodos apropriados, capazes de conduzir à compreensão.

Quinto, o limite do sistema de numeração de base dez será estendido até *9999*. Idéias sôbre medida, dinheiro e frações também podem expandir-se nesse estágio.

Embora o conteúdo do programa para êsse 3º estágio seja amplo e substancial, estará dentro das possibilidades da maioria das crianças, se forem usados métodos de ensino e material moderno.[36] Convém ressaltar que o ensino precisa ser sempre, tão significativo quanto possível.

Sistema de numeração de base dez até 9999

Como se observou nos estágios 1 e 2, o programa moderno de Matemática ajuda a criança a aprender os princípios básicos do sistema de numeração decimal. Pouca compreensão em Matemática se consegue sem êsse conhecimento. Duas idéias — o *agrupamento em 10* e o *valor posicional* — são básicas.[33] O numeral 3 e a palavra *três* representam ambos o mesmo número. No símbolo 33, o numeral 3, à esquerda, indica três grupos de 10 e o 3, à direita, indica três objetos isolados. Usando os princípios de agrupar em 10 e o valor posicional, o número chamado *trinta e três* é representado por dois 3. Qualquer número, não importando a sua grandeza, pode ser representado por escrito, usando-se os dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A criança aprende os princípios do sistema de numeração decimal vendo primeiro como um grupo grande de objetos pode ser organizado, fazendo-se grupos de dez. Segundo, aprende como registros escritos de tais grupos podem ser feitos usando-se, de início, traços e, depois, numerais e a idéia de valor posicional.

Crianças que foram iniciadas em Matemática utilizando os processos já sugeridos para os estágios 1 e 2 deverão estar seguras dos princípios básicos do sistema de numeração. Para as crianças que não aprenderam êsses princípios e para as que não os compreenderam completamente, será necessário fazer-se uma nova

apresentação dessas idéias básicas no 3º estágio. É de suma importância que todos os alunos compreendam o agrupamento em 10 e o emprêgo do valor posicional.

Deve atentar-se primeiro para os conjuntos de objetos grupados em dezenas e unidades e, depois, para a maneira pela qual o valor posicional é usada na escrita do numeral que representa o número total de objetos. Depois disso, convém que se dê atenção às dezenas exatas, seus nomes (dez, vinte, trinta etc.) e seus símbolos matemáticos (10, 20, 30, etc.). A seguir, os números de 10 a 20 podem ser estudados. Para favorecer a compreensão dessas idéias, convém dar ênfase aos princípios de seqüência, através dos quais as dezenas e os números entre as dezenas são expressos. (Veja o que foi dito para o estágio 2).

Alguns alunos, por terem tido orientação diferente da que sugerimos ou, mesmo, por não terem tido suficiente prática, possìvelmente, ainda apresentarão dificuldades com relação à "reserva" na adição e ao "recurso" na subtração. Portanto, se necessário, convém dar atenção outra vez ao processo de reagrupar que facilita essa compreensão. Os alunos precisam compreender, por exemplo, como 2 grupos de 100 e 14 grupos de 10 objetos podem ser reagrupados em 3 grupos de 100 e 4 grupos de 10, de onde se conclui que o número de objetos é 340. Do mesmo modo, o princípio de reagrupamento em que se baseia o "recurso" na subtração pode ser outra vez demonstrado. Para isso, pode dissociar-se um grupo de 100 objetos, reagrupando-o em 10 grupos de 10. Assim, 425 objetos podem ser reagrupados em 3 centenas, 12 dezenas e 5 unidades isoladas. Êsse reagrupamento, feito mentalmente ou "de cabeça", é necessário para subtrair de 425 um número que tenha mais que 2 dezenas — como no caso de 425 — 32. A revisão dêsses princípios necessários à compreensão da "reserva" e do "recurso" será de grande proveito para as crianças.

Nenhum princípio nôvo é usado na extensão da seqüência numérica de 999 a 9999. Apenas duas novas palavras são introduzidas — milhar e mil. Milhar é o nome do grupo composto de 10 grupos de uma centena. O número representado pelo numeral 1000 pode também ser visto como composto de 100 grupos de dez. A palavra mil, usa-se nos nomes dos números de 1000 a 9999, que são combinações da palavra *mil* com os nomes dos números menores que mil. De fato, mais nenhuma palavra nova será necessária para dar nome aos números acima de 9999, até chegar a um milhão.

No 3º estágio, as crianças podem aprender a ler e a escrever numerais até 9999 no mínimo, mas conforme dissemos no parágrafo acima, não há nova dificuldade para prosseguir na seqüência numérica até um milhão. O objetivo não é apenas ajudá-las a aprender a ler e a escrever numerais de quatro algarismos, mas, também, ajudá-las a ver e a compreender as relações do sistema de numeração como um todo.

Como observamos antes, a chave para a compreensão do reagrupamento na adição e na subtração (reserva e recurso) é uma completa compreensão do sistema de numeração. Entretanto, não é aconselhável ensinar a criança os princípios em que se baseiam a "reserva" e o "recurso", ao mesmo tempo que se ensina o processo de adição e subtração. As dificuldades serão reduzidas se êsses princípios forem ensinados antes, como um aspecto do sistema de numeração. Assim, a "reserva" e o "recurso" passam a constituir uma aplicação direta dêsses princípios. Reagrupamentos do tipo necessário à adição com reserva e a subtração com recurso serão feitos de início com objetos, de modo que a criança possa ver e conseqüentemente compreender o que será feito depois com numerais.

Fatos básicos de divisão e multiplicação — Grupos de 40 a 81

A organização dos fatos básicos de multiplicação e divisão através dos diferentes estágios obedeceu à seqüência resumida a seguir.

Produtos e dividendos até 10 foram introduzidos informalmente no 1º estágio. No 2º estágio, tais produtos e dividendos foram reensinados, introduzindo-se, então, novos fatos básicos — os de produtos e dividendos até 36. No 3º estágio, êsses fatos serão reensinados, estudando-se os fatos restantes de multiplicação (40 a 81) e os fatos correspondentes de divisão.

O estudo dos grupos de 40 a 81 apresenta certas dificuldades porque a concretização da cardinalidade dêsses grupos requer um número grande de objetos. Quando os fatos básicos de multiplicação são aprendidos pela observação de situações concretas, o aluno deve perceber, primeiro, que grupos iguais serão reunidos. O número de objetos em cada grupo e o número de grupos iguais devem também ser ressaltados. Finalmente, resta encontrar quantos objetos estão no grupo então formado (o produto). Se êsse grupo chegar a ter 40 ou mais objetos, contar êsses objetos, um a um, será trabalhoso e levará ao êrro fàcilmente. Assim, o melhor será contar, reorganizando os objetos em grupos de dez e de unidades isoladas, de acôrdo com os princípios do sistema de numeração decimal. Com isso se evidencia a cardinalidade do produto. Os métodos usados devem, pois, facilitar o agrupamento de objetos de diferentes maneiras e lançar mão dos conhecimentos da criança sôbre o sistema de numeração.

Por exemplo, 40 objetos podem ser arrumados em 5 fileiras de 8 ou 8 fileiras de 5. Os mesmos 40 objetos podem ser vistos ainda como 4 grupos de 10, de onde se conclui que o produto é 40.

Com relação aos fatos básicos de divisão, com dividendos de 40 a 81, a situação é inversa. Agora, primeiro será preciso reconhecer o número de objetos do grupo original (dividendo) e, mais uma vez, o agrupamento em dezenas e unidades simplifica o trabalho. O problema será, então, descobrir quantos subgrupos de determinado tamanho podem ser feitos do grupo que representa o dividendo. Quando as crianças aprendem os fatos básicos, dividindo ou vendo dividir grupos em subgrupos para contar êsses subgrupos, elas compreendem a natureza da divisão. Estabelece-se, assim, motivação para aprender os fatos básicos, e reduz-se a exigência puramente da memória. Cada fato básico de multiplicação e divisão deveria ser introduzido por métodos como os apresentados acima.

Essa é uma boa oportunidade para esclarecer que a maioria dos fatos básicos ($27 \div 3 = 9$, por exemplo) são realmente afirmações baseadas em reagrupamentos dentro do sistema decimal de numeração. Na adição e na multiplicação, o reagrupamento dá origem a grupos de dez e mais um grupo com menos de 10 unidades. Na subtração e na divisão, começamos com dezenas e unidades, que são reagrupadas em têrmos de grupos menores. Quando reunimos um grupo de 5 e um grupo de 9, o simbolismo $5 + 9$ pode ser pensado como *nome de um número*. Quando se leva o aluno a aprender o fato básico $5 + 9 = 14$, estamos pedindo a êle para associar "$5 + 9$" com o que se poderia chamar "nome padrão" do número — isto é, "14". Em têrmos de objetos concretos o que se está pedindo a êle é que reagrupe os 5 objetos e os 9 objetos em um grupo de 10 e um grupo de 4. Note-se que a adição e a multiplicação são análogas a êsse respeito — começamos com determinados grupos. Depois de reunidos os objetos dêsses grupos êles são arrumados de acôrdo com os princípios do sitema de numeração decimal, obtendo-se a "resposta" expressa pelo "nome padrão" do número. Na subtração e divisão, começamos com um número cuja cardinalidade já está expressa pelo "nome padrão". Depois do reagrupamento, a "resposta" é expressa por um numeral de um algarismo.

Generalizações a respeito de zero e um

Um programa moderno deve refletir, tanto quanto possível, as teorias modernas de Matemática. Nessas teorias, o sistema dos *números naturais* (1, 2, 3, ...) desempenha papel importante. Note-se que tal sistema não inclui zero. Entretanto, um programa deve cuidar tanto da resolução de problemas como da teoria. Para isso é preciso desenvolver a habilidade de escrever com facilidade o nome de qualquer número e de calcular com desembaraço. O uso do sistema decimal de *numeração* satisfaz a essas exigências práticas, mas exige também a conceituação de zero e o conhecimento de seu símbolo respectivo, ou seja "0". Conseqüentemente, o sistema numérico na escola primária inclui os números naturais e o zero. Êsse sistema é, às vêzes, chamado "sistema dos números inteiros aritméticos" e, outras vêzes, de "números cardinais finitos". Nos últimos anos elementares, o sistema numérico amplia-se para incluir as frações, que, na realidade, são números racionais aritméticos.

Quando objetos concretos são agrupados segundo os princípios do sistema decimal de numeração, freqüentemente ocorrem situações nas quais uma das ordens do numeral está vazia. Por exemplo, pode haver 2 centenas e 3 unidades, mas nenhuma dezena. O número de objetos na ordem das dezenas é zero, e ao escrever o nome do grupo total como "203", o numeral "0" é que mostra que ao agrupar êsse conjunto de objetos nenhuma dezena ficou isolada, pois tôdas constituiram centenas. Cada um dos numerais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 é usado como "guardador de lugar". Cada um dêsses numerais constitui, também, o nome de um número.

Quando zero é envolvido em trabalho de cálculo, há duas maneiras de proceder. Uma delas dá ênfase ao significado do zero. Na adição em coluna, por exemplo, costuma-se, simplesmente, "pular" o zero, justificando-se tal procedimento, pela interpretação: "Não há nada para ser adicionado". Essa interpretação torna possível a aprendizagem das operações aritméticas sem usar explìcitamente os chamados "fatos básicos com zero". Conseqüentemente, $3 + 0 = 3$ não precisa ser aprendido como o aluno aprendeu os demais fatos básicos.

A outra maneira de proceder no cálculo com zero é usar explicitamente os "fatos básicos com zero". Por exemplo, o "nome padrão" da adição $3 + 2 + 0 + 6$ é encontrado, somando-se $3 + 2 = 5$, $5 + 0 = 5$, $5 + 6 = 11$. Mas é desnecessário e inconveniente fazer o aluno memorizar cada fato básico com zero. Ao contrário, êle deveria aprender certas *generalizações* básicas, que podem ser expressas como se segue. (Para *n*, leia-se "qualquer número").

$n + 0 = n$	
$0 + n = n$	$0 \times n = 0$
$n - n = 0$	$n \times 0 = 0$
$n - 0 = n$	$0 \div n = 0$ *

As generalizações relativas à adição e à subtração podem ser apresentadas no 2º estágio e as relativas à multiplicação e divisão, no 3º. Se parecer conveniente, tôdas essas sete generalizações podem ser tratadas no 3º estágio, quando as crianças já estejam com uma atitude mais madura com relação a tais abstrações. É impossível objetivar 0×6, 6×0 e $0 \div 8$, usando objetos em situações concretas, e no entanto, sentenças como essas aparecem em Matemática pois, sem elas, a criança teria uma noção parcial do sistema numérico. Generalizações como "O produto de qualquer número por zero é zero" devem ser aceitas "por definição",

* Nessa expressão, *n* não pode ser substituído por "O".

porque se enquadram nos fatos matemáticos (manutenção do aspecto formal da operação; princípio da extensão em Matemática), e não porque possam ser demonstrados por exemplos concretos. É preciso prever atividades que ajudem o aluno a aprender as generalizações envolvendo zero. Entretanto, no cálculo, o aluno deveria ser encorajado a usar o procedimento que se baseia na significação do zero.

O número 1 também tem certas propriedades muito especiais em multiplicação e divisão. Por exemplo, $1 \times 5 = 5$, $1 \times 8 = 8$, e, em geral, o resultado da multiplicação de qualquer número por 1 é o próprio número. É muito aconselhável levar o aluno a conhecer e a usar a generalização do que levá-lo a aprender cada fato isoladamente. Essas generalizações a respeito de 1, representadas simbòlicamente, são as seguintes: $1 \times n = n$, $n \times 1 = n$, $n \div 1 = n$, $n \div n = 1$ (Na última equação, *n não* pode ser substituído por "0").

Naturalmente, no 3º estágio, as crianças não necessitam conhecer os fundamentos matemáticos em que se apoiam essas recomendações. Entretanto, podem aceitá-la e usá-las com compreensão, se forem adequadamente apresentadas.

As operações fundamentais

ADIÇÃO

Acredita-se que, no 3º estágio, o aluno compreenda o significado da adição e domine também os seus fatos básicos. Entretanto, os professôres não podem confiar em tal conhecimento.[18, 1, 2] É importante fazer uma sondagem da compreensão da criança em adição, verificando sua habilidade na memorização dos fatos básicos. Se êles não estiverem completamente memorizados, atividades suplementares especiais precisam ser previstas.

Na revisão do processo de adição ou no seu reensino, recomenda-se que os primeiros exemplos envolvendo numerais de dois algarismos exijam "reserva". Do mesmo modo, os primeiros exemplos de adição com numerais de três algarismos devem também exigir "reserva". Essa orientação está de acôrdo com o princípio geral: O primeiro exemplo de um processo deve ser tão representativo do processo completo quanto possível, princípio êsse que deveria ser seguido em todo o trabalho de Matemática.

Uma dificuldade considerada básica a determinada aprendizagem deve ser encarada logo de início e não evitada ou deixada para depois. Quando o aluno entende como lidar com os casos *representativos* de um processo, estará apto a usar êsse conhecimento nos casos especiais que surjam posteriormente. Em suma, a aprendizagem deve ser organizada de modo a desenvolver *insight*, que ajude a criança em aprendizagens subseqüentes.

Quando o aluno tem oportunidade de ver a situação como um todo, desde o comêço, êle não tem de fazer depois maiores reajustamentos em seu pensamento. No processo de adição, por exemplo, se se começa pela "reserva", a criança compreende porque é importante começar adicionando pela direita, somando primeiro as "unidades". Os hábitos normais de leitura conduzem a trabalhar da esquerda para a direita, mas em Matemática, muitas vêzes é preciso alterar êsses hábitos para trabalhar da direita para a esquerda. Essa mudança deixa de ter sentido para a criança quando se começa pela adição sem "reserva", onde não há inconveniente em somar da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Será difícil levar a criança a compreender a regra "somam-se, primeiro, as unidades" sem que ela tenha lidado com uma situação que exija "reserva" e compreendido como proceder em tais casos.

Para maiores detalhes de como o sistema de numeração decimal pode ser desenvolvido para levar ao *insight* no verdadeiro sentido de "reserva", veja página 47 nesta seção e página 32 na seção referente ao 2º estágio.

Sabendo trabalhar com a "reserva", os casos especiais (como a adição sem "reserva") serão relativamente fáceis para a criança e não requerem tratamento especial. Assim, simplifica-se o programa e reduz-se o número de casos diferentes ou dificuldades a serem dominados. Além disso, com essa organização, o professor despreocupa-se da atenção a detalhes ao selecionar os exemplos que deve usar para promover prática nessas operações, pois não importará que os exemplos usados envolvam ou não "reserva".

Depois de revisto ou reensinado o processo de adição no 3º estágio, muitas crianças serão capazes de trabalhar com exemplos bastante complexos, se lhes fôr dado suficiente tempo para a compreensão. Podem trabalhar com quatro parcelas envolvendo numerais de três e quatro algarismos. Ensinado e compreendido o processo de adicionar, o que resta fazer é proporcionar prática para adquirir desembaraço e estender gradualmente o processo a números maiores.

SUBTRAÇÃO

O processo de subtração não será nôvo para as crianças no 3º estágio, mas muitos alunos serão beneficiados por uma revisão do assunto. As lições de revisão ou reensino devem seguir a mesma orientação dada para o 2º estágio.

De acôrdo com o princípio geral de que os exemplos mais representativos devem ser apresentados primeiro, os primeiros exemplos de subtração envolvendo numerais de dois algarismos devem iniciar o aluno na noção de "recurso". Tal orientação conduz ao *insight* do processo como um todo. [3] Também como no caso da adição, o aluno deve ser preparado antes para lidar com o "recurso", durante o estudo dos princípios básicos do sistema decimal de numeração.

Deve aprender a reorganizar um número de objetos separando um grupo de dez para "desfazê-lo" em 10 unidades; a separar um grupo de cem para desfazê-lo em 10 dezenas, e assim por diante. Assim, o que se fará agora é aplicar um princípio básico aprendido em numeração, e o processo de reagrupar não será algo nôvo a ser aprendido concomitantemente com a habilidade de subtrair com "recurso".

Completada a revisão ou o reensino, o aluno deverá ter adquirido todos os conhecimentos e habilidades necessários para subtrair um número inteiro de outro. Os numerais usados nos exemplos podem restringir-se a três algarismos, passando-se depois a numerais de quatro algarismos.

Nos casos em que o minuendo apresenta zeros intercalados, como 6003, convém ensinar à criança um processo abreviado de operar. Para isso, é necessário reconhecer que em 6003, o "600" representa 600 dezenas. Decompondo uma das dezenas em unidades, resultam 599 dezenas e 13 unidades, e a subtração pode ser feita sem reagrupamentos posteriores.

Geralmente, as chamadas "dificuldades com zero" não requerem tratamento especial quando a criança entende o sistema decimal de numeração e aprende por métodos baseados na compreensão.

MULTIPLICAÇÃO

Quando o aluno tiver aprendido todos os fatos básicos de multiplicação, será iniciado o ensino do processo de multiplicar (com exemplos envolvendo "reserva", como 28×5), que será continuado, sem interrupção, até a compreensão do processo como um todo. Uma completa compreensão do sistema de numeral decimal é essencial a essa aprendizagem. Quando os alunos realmente compreendem o sistema de numeração, o processo de multiplicação não passa de uma simples operação de reagrupamento, mais ou menos elaborado, onde merecem destaque as dezenas, centenas, milhares etc... Múltiplos de números básicos (por exemplo, 20, 30, 200, 4000) também adquirem papel de destaque.

O estudo da multiplicação como processo pode começar evidenciando o que acontece quando se multiplica 10 e múltiplos de 10 por um número expresso por um algarismo. Intimamente associada a essa situação está a multiplicação de um número expresso por um algarismo, por 10 e múltiplos de 10. Essas duas situações envolvem agrupamentos bastante diferentes, que podem ser fàcilmente demonstrados com objetos e figuras. No entanto, o produto de 30×2 é o mesmo que o produto de 2×30. O último exemplo sugere 2 grupos de 3 dezenas cada, que fazem 6 grupos de dez ou 60. O produto de 30×2, ou 30 grupos de 2, são também 60. O uso de exemplos dêsse tipo levará à generalização: "o produto de um número expresso por um algarismo por qualquer outro numeral que termine em zero, também terminará em zero". Generalizações semelhantes têm lugar se o numeral que representa o número maior terminar em dois ou mais zeros.

O processo de multiplicar envolve uma variação no processo de "reserva" que requer ensino cuidadoso. Costuma-se começar multiplicando as unidades. Às vêzes, êsse produto parcial é 10 ou um número maior que 10. Nesse caso, as dezenas assim obtidas devem ser guardadas até que o número de dezenas seja multiplicado, para então adicioná-las a êsse produto parcial. A "reserva" na multiplicação pode ser demonstrada com um ou mais grupos de 10 objetos, deixando-se a criança ver como os grupos de 10 podem ser postos de lado até encontrar-se o próximo produto parcial.

Do mesmo modo, na multiplicação de números expressos por três algarismos, as centenas obtidas da multiplicação e reagrupamento das dezenas são guardadas até que as centenas do número original tenham sido multiplicadas. Também nesse caso, o processo é passível de demonstração.

Multiplicar por um número expresso por dois algarismos envolve multiplicar por 10 ou por um múltiplo de 10 (por exemplo, 20, 30, 80). Assim, multiplicar 32 por 26 requer que 32 seja multiplicado primeiro por 6 e depois por 20. Para demonstrar êsse segundo passo com objetos, é preciso que 20 grupos de 32 objetos cada um sejam reunidos. É claro que demonstrações dêsse tipo tornam-se logo impraticáveis por causa do grande número de objetos que exigem. Conseqüentemente, os métodos de nesino devem fazer uso imediato dos símbolos numéricos, e, daí em diante, apoiar-se cada vez mais, na compreensão dos princípios básicos do sistema decimal de numeração. É preciso cuidado, entretanto, para evitar que as explicações tornem-se meras manipulações verbais e não sejam realmente compreendidas.

Multiplicação quando usada em problemas envolvendo quantias deverá ser cuidadosamente apresentada. Não há dificuldades especiais a vencer, mas a escrita e colocação certas do sinal de cruzeiro, do cifrão e do ponto precisam ser ressaltados.

DIVISÃO

Como já foi dito, a aprendizagem dos fatos fundamentais de divisão deve basear-se no tipo de divisão que envolve a idéia de "medir", também chamada "divisão-comparação". Por exemplo, nessa situação, o fato básico $40 \div 8 = 5$ é interpretado como um grupo de 40 que foi separado em grupos de 8, encontrando-se 5 grupos. Generalizando, ensina-se a divisão como o processo de achar quantos grupos iguais, de tamanho determinado, podem ser encontrados num grupo dado. A mesma idéia básica é usada para introduzir o processo de dividir, isto é, o aluno deve ser solicitado a procurar quantos grupos de determinado tamanho podem ser formados de um grupo dado.

Costuma considerar-se a divisão como um dos processos fundamentais aritméticos mais difíceis. Uma das razões para isso é o fato de não ser a divisão um processo direto como a adição ou a multiplicação, e de envolver estimativa e correção do quociente ainda que nos casos mais simples. Cada quociente parcial deve ser estimado e, se em alguma etapa a estimativa não fôr "correta", será preciso corrigi-la, ou mesmo, fazer nova estimativa antes que o processo possa ser continuado.

Outra razão é o fato de a divisão com divisor de um algarismo e a divisão com divisor de dois algarismos serem ensinadas por muitos anos como se fôssem dois processos bastante diferentes, sem nehuma relação, apresentando apenas de comum, as palavras — *dividendo, divisor* e *quociente*. Essa dificuldade tem sido corrigida em parte, com a adoção do processo "longo" para introduzir o processo de divisão.

Uma terceira razão é o processo comumente usado na divisão que obriga a criança a um desperdício de trabalho, ao experimentar e abandonar algarismos como quocientes parciais.

Finalmente, não tem havido nenhuma preocupação em ajudar a criança a compreender o processo de divisão, mostrando que êle é na realidade, um processo de subtrações repetidas.

O processo de computar em divisão repousa em subtrações sucessivas do mesmo número até que as unidades do número original (ou dividendo) tenham tôdas sido usadas. O processo longo evidencia a divisão como um processo de subtrações sucessivas. De início, nenhum esfôrço precisa ser feito para subtrair o maior número possível de grupos iguais. No caso de $52 \div 4$, por exemplo, costuma subtrair-se primeiro 10 grupos de quatro, ou 40, e depois subtrair 3 grupos de quatro, ou 12, para obter o quociente completo — $10 + 3$, ou 13. Entretanto, pode subtrair-se, de início, qualquer número de grupos de "quatro" que se deseje (menos que 13 grupos de 4, é claro).

Assim, por exemplo, ainda no caso de $52 \div 4$, é possível subtrair 5 grupos de quatro, ou 20, e depois 8 grupos de quatro, ou 32, e ainda obter o quociente 13, somando 5 e 8.

Essa compreensão geral — de que a divisão pode realizar-se por subtrações repetidas — deve ser desenvolvida com cuidado.[57] Nenhuma compreensão nova é exigida para a introdução dos *divisores com dois algarismos*. A transferência para divisores de três ou mais algarismos é imediata, mas geralmente não se faz no 3º estágio.

A maior parte das dificuldades em divisão vem da insistência em exigir-se que o aluno obtenha o quociente parcial máximo em cada passo.[55, 10, 42] Mesmo pessoas amadurecidas, que já calculam com habilidade e desembaraço, nem sempre encontram o algarismo correto do quociente parcial na primeira tentativa. Apesar disso, corrigem o trabalho e prosseguem. Uma das maneiras de corrigir o trabalho é apagar o que foi feito usando o algarismo errado e começar tudo outra vez. Outro processo mais simples é continuar o trabalho e ajustar o cálculo com a continuação.

Para introduzir o processo de dividir, parece mais recomendável adotar-se essa última sugestão. À medida que as crianças se tornam mais maturas e desembaraçadas no processo de dividir, irão gradualmente progredindo em suas estimativas. No início, fazer as melhores estimativas do quociente parcial é menos importante que compreender o processo.

Maneira fácil de dispor o trabalho do processo longo é escrever os quocientes parciais um abaixo do outro, à direita do dividendo, abaixo do divisor. O quociente completo é obtido pela adição dos quocientes parciais e escrito ao lado do resto final.

Três exemplos do processo que estamos tentando expor são dados abaixo. O primeiro exemplo mostra o uso do processo ainda de forma imatura; o segundo, um desenvolvimento na habilidade de estimar o quociente parcial; o terceiro é exemplo do processo usado de maneira mais eficiente, correspondendo a acentuado progresso na habilidade de estimar.

416	6
60	10
356	
120	20
236	
180	30
56	
54	9
2	69

416	6
180	30
236	
180	30
56	
54	9
2	69

416	6
360	60
56	
54	9
2	69

Certos detalhes que aparecem com a prática do processo merecem atenção especial. Assim, por exemplo, a tendência da criança é usar quocientes parciais menores que o quociente desejável. O processo sugerido acima possibilita a criança a usar qualquer quociente parcial, ainda que pequeno.

Entretanto, caminhos racionais de estimar poderiam ser ensinados para evitar um quociente parcial grande demais, que ocasionalmente ocorra. Para maiores detalhes sôbre os processos de fazer estimativas, veja página 81 na parte relativa ao 4º estágio. A aplicação da divisão a quantias também merece atenção especial. Algumas das chamadas "dificuldades", como a colocação dos numerais "abaixados" do dividendo e os casos típicos de "dificuldade com zero" são em grande parte evitadas quando o aluno realmente compreende o pro-

cesso de divisão. Essas dificuldades surgem quando a divisão é ensinada através de um conjunto de regras memorizadas sem nenhuma compreensão (divide, multiplica, subtrai, "abaixa o número seguinte", etc.).

A prática da divisão longa que acabamos de expor, desenvolve a compreensão, bem como a habilidade em usar o processo.

Os três primeiros exemplos abaixo, ilustram, usando agora divisores com dois algarismos, três maneiras que o aluno pode usar para dividir 2585 por 55. Os exemplos mostram uma ordem crescente no desenvolvimento da habilidade de estimar, representando o terceiro exemplo o mais eficiente uso do nôvo algoritmo. O quarto exemplo mostra a mesma divisão, usando o algoritmo da divisão longa convencional.

2585	55
550	10
2035	
1100	20
935	
550	10
385	
275	5
110	
110	2
0	47

2585	55
1650	30
935	
550	10
385	
330	6
55	
55	1
0	47

2585	55
2200	40
385	
385	7
0	47

2585	55
220	47
385	
385	
0	

Cálculo mental

Não tem sido costume desenvolver um ensino sistemático de "cálculo mental" na escola elementar. No entanto, quando se consideram as inúmeras oportunidades encontradas na vida para calcular "de cabeça", conclui-se da importância em desenvolver-se essa aptidão aritmética.[41]

Entretanto, é preciso lembrar que as pessoas usam processos diferentes para calcular "de cabeça". Cada pessoa desenvolve seus próprios métodos que acha convenientes e cômodos. Conseqüentemente, o aluno aproveitará muito mais se aprender certos princípios gerais (os dos sistema de numeração decimal e os envolvidos no reagrupamento, por exemplo) para então, aplicar êsses princípios no desenvolvimento de suas próprias técnicas e "caminhos abreviados" para calcular "de cabeça".

O professor pode criar situações que encoragem cada aluno a fazer o máximo que lhe fôr possível, em cálculo mental. Isso não significa que o aluno seja levado a adicionar, subtrair, multiplicar e dividir totalmente "de cabeça". De início, muitos alunos precisarão de ajuda, registrando o que vão pensando e fazendo.

Muitos precisarão continuar a fazer êsses registros, e não devem ser recriminados por isso. O importante é que cada criança seja encorajada a usar métodos próprios e maneiras próprias de registrá-los e que se sinta à vontade no trabalho, despendendo o menor esfôrço possível. A essa altura, ainda não deve haver preocupação com a velocidade. Para algumas crianças, a velocidade virá com o tempo e a prática. Outras, nunca desenvolverão maneiras rápidas de calcular "de cabeça".

As crianças gostam de uma oportunidade para mostrar sua engenhosidade e invenção. Deveriam ser sempre encorajadas a descobrir maneiras simplificadas de calcular. Nenhuma técnica para o "cálculo de cabeça" deve ser desprezada pelo professor, desde que o aluno seja capaz de justificar e explicar porque escolheu aquela particular maneira de calcular. Os professôres freqüentemente se surpreendem com a variedade de maneiras que as crianças encontram para encurtar os mais tediosos cálculos.

Possìvelmente, nenhum livro poderá mostrar tôdas as maneiras viáveis, capazes de reduzir a quantidade de trabalho e simplificar o cálculo. Entretanto, apresentamos, abaixo, algumas maneiras simplificadas de somar, subtrair e multiplicar, ràpidamente explanadas, apenas para dar uma idéia do que pode ser feito.

Convém lembrar que essas maneiras simplificadas não devem ser ensinadas como se fôssem as únicas:

1. Adicionar 36 com 58	$30+50=80$; $6+8=14$; $80+14=94$
2. Subtrair 38 de 53	$58-38=20$; subtrair 5 que foi adicionado a 53; $20-5=15$
3. Multiplicar 38 por 6	$38=30+8$; $6\times30=180$; $6\times8=48$; $180+48=180+40+8=220+8=228$.

Frações

As crianças no 3º estágio devem ter oportunidade de trabalhar com meios e quartos, conforme o programa sugerido para o 2º estágio. Depois, serão guiadas a perceber que o inteiro pode ser dividido em outros números de partes iguais. Não há necessidade, neste estágio, de trabalhar com frações além de décimos.

Durante o ensino, as crianças devem perceber que o conceito de fração envolve, simultâneamente, duas idéias básicas:

— um inteiro é dividido em partes iguais;
— selecionamos uma ou mais partes para consideração especial.

A aquisição dessas idéias é fundamental para a compreensão do símbolo. Ao apresentar a fração simbòlicamente, o professor deve observar se as crianças compreendem que, por exemplo, em 3/4, o denominador (4) representa o número de partes em que o inteiro foi dividido e o numerador (3) representa as partes consideradas.

Pensamos em ambos os numerais juntos, como um símbolo, o numeral fracionário 3/4.

Essas idéias constituem o sentido básico das situações que envolvem frações. O aluno as compreende melhor se lhe fôr dada oportunidade de repartir objetos, usar diagramas e depois usar o símbolo para representar o que fêz.

No 3º estágio, as crianças serão encaminhadas a comparar frações com denominadores iguais e numeradores diferentes (1/4; 3/4; 2/4), bem como frações com numeradores iguais e denominadores diferentes (1/5; 1/4; 1/3; 1/2). É importante que percebam que, quanto maior o número de partes iguais em que o inteiro é dividido, menores serão essas partes. Comparando frações, a criança chega ao conceito fundamental de equivalência. Muitas e variadas serão as experiências para que ela compreenda como encontrar as equivalentes e porque determinadas frações se equivalem.

A compreensão do sistema de números se amplia com a introdução de números comumente expressos pela fração imprópria e os números mistos.

O conceito de fração será aplicado às situações de medidas que envolvem fração do metro, do quilo, da hora.

As experiências para o ensino de frações devem ajudar a criança a se desprender das características físicas do material usado, evitando certos conceitos errados que surgem quando a criança vê frações representadas apenas em situações muito limitadas (por exemplo, sòmente como partes de círculos, sempre do mesmo tamanho).

Representação decimal de uma fração

Fração decimal é tôda fração cujo denominador é uma potência inteira de 10 como 7/10, 15/100 etc.

Há, entretanto, outra maneira de representar a fração decimal com base no sistema de numeração, usando-se a vírgula para localizar o numeral das unidades. Assim, 7/10 pode ser escrito como 0,7. O numeral que representa décimas partes do inteiro, será escrito imediatamente após a vírgula. No caso de 7/10, como o 7 representa 7 décimas partes da unidade, escrevemos: 0,7. Tôda fração decimal pode ter, assim, essa nova representação.

O sistema de notação decimal para frações deve ser introduzido por processos semelhantes aos usados nos estágios anteriores para o ensino do sistema de numeração de base dez (decimal) para números inteiros.

Aqui, novamente a idéia central é a base dez no agrupamento e o emprêgo do princípio do valor posicional. Porém, agora, apenas vamos considerar as partes fracionárias que sejam décimos e décimos de décimos (ou centésimos). Os alunos serão assim levados a reconhecer que os mesmos princípios básicos do sistema de numeração se aplicam às frações decimais.

Depois de ter aprendido que uma fração pode ser representada por diferentes numerais fracionários, pouca dificuldade terá o aluno em ver que podemos adotar para frações equivalentes nomes como: 1/5, 2/10, 20/100 ou 0,2 e 0,20.

A grande vantagem da forma decimal na representação das frações só pode ser apreciada quando êsses numerais são estudados como membros de um sistema de numeração. Convém lembrar que o sistema de numeração comumente usado é um sistema decimal, mesmo quando se consideram apenas os números inteiros, e que os numerais que representam as frações decimais constituem, simplesmente, uma extensão dêsse sistema.

A falsa concepção, muito comum, de que os numerais fracionários decimais constituem um sistema de numeração diferente, como se fôsse um sistema específico de nomear os números, deve ser abandonada.

O conhecimento das decimais com base no sistema de numeração facilita a comparação de frações decimais e a equivalência entre décimos e centésimos, entre décimos e inteiros etc.

Aconselha-se introduzir a representação decimal de uma fração no 3º estágio por causa de sua constante aplicação na vida diária, (no registro de situações com medidas, por exemplo). Entretanto, o cálculo envolvendo decimais só será desenvolvido no 4º estágio.

Sistema legal de unidades de medir

Na parte referente aos 1º e 2º estágios (páginas 15 e 41) já foram sistematizadas as idéias fundamentais sôbre as quais se apóia o conceito de medir, mas é tão grande a importância dessa aplicação da Matemática que convém abordá-la em cada nôvo estágio de aprendizagem.

A criança encontra muitas situações de medir em suas atividades infantis e no trabalho escolar. Convém aprender, desde cedo, que medir requer primeiro a escolha de uma unidade apropriada para,

depois, achar quantas vêzes essa unidade está contida no que se estiver medindo.

Experiências por meio das quais a criança tenha que medir usando uma unidade conveniente qualquer, como varinhas, lápis, tiras de papel, etc., para medir comprimentos; ou pedaços de chumbo e de madeira, para medir massa, levam-na a compreender a necessidade de se escolher uma unidade apropriada, padronizada, para facilitar as transações comerciais.

Quando essas idéias básicas de medição forem compreendidas, a criança pode chegar ao conhecimento das unidades padronizadas e familiarizar-se com elas. O metro, o litro, o quilo e a hora devem ser conhecidos pela maioria das crianças no 3º estágio, ainda que como resultado de experiências informais na escola e em casa, ou como resultado de um ensino mais sistemático de medidas no 2º estágio. Essas medidas padronizadas deveriam ser ensinadas outra vez no 3º estágio. O quilômetro e o centímetro como unidade padronizadas de comprimento, o grama e a tonelada como unidades padronizadas de massa, o meio-litro e o quarto-de-litro como unidades-padrão de capacidade e o minuto como unidade padronizada de tempo podem ser introduzidas no 3º estágio, estudando-se as possíveis relações entre essas unidades. Algumas crianças já lidam com essas unidades através de experiências informais. Apesar de terem notícias do metro quadrado e possìvelmente do metro cúbico, o ensino sistemático dessas unidades e de outras além das acima mencionadas pode ser deixado para estágios posteriores.

A criança poderia aprender que 100 centímetros é o mesmo comprimento que 1 metro e que o comprimento do quilômetro é igual a 1000 metros; um quilograma e mil gramas têm a mesma massa e que, para têrmos uma tonelada precisamos de 1000 quilogramas; dois meios-litros completam um litro, que também pode ser completado com quatro quartos de litro; sessenta minutos é o tempo correspondente a uma hora; e outras relações daí decorrentes. Essas relações deveriam aparecer naturalmente com a introdução das unidades padronizadas. Não há necessidade, nesse estágio, de treino sistemático de "tabelas de medidas".

Sistema monetário*

São ricas as oportunidades de vida diária dentro da escola para o trabalho com o dinheiro. O estudo da vida da comunidade e do Estado oferece ricas sugestões. Nesse estudo vão as crianças percebendo os processos pelos quais circula o dinheiro, as fontes de renda e consumo, as transações bancárias, os princípios elementares de economia, etc.

---

* Ver Lei nº 4 511 — de 1º de dezembro de 1964.

Ao alcançar o 3º estágio, as crianças devem estar aptas a reconhecer e usar as cédulas e as moedas, a contar o dinheiro, bem como a fazer trôco. Provàvelmente nesse estágio, já viram e manusearam tôdas as moedas e cédulas em circulação. É conveniente, entretanto, planejar atividades com as cédulas de valor maior, como as de 5 000 cruzeiros (ou, se já estiverem circulando, as de 10 000 cruzeiros) para enriquecer-lhes as experiências.

Embora nosso sistema monetário se baseie no sistema decimal de numeração, há aspectos que são específicos do dinheiro. Particularmente, o trabalho com dinheiro envolve o grupamento de *5 em 5* e de *10 em 10*. Uma nota de 10 cruzeiros (possìvelmente já substituída por moeda) corresponde a *10* notas de 1 cruzeiro ou a *5* de 2 cruzeiros; uma nota de 1000 cruzeiros a *10* notas (ou moedas) de 100 cruzeiros ou a 5 de 200 cruzeiros etc. Essas relações são usadas para contar quantias e fazer trôco. A idéia de agrupar deve, pois, merecer atenção especial.

Assim, em uma coleção de notas (ou moedas) de um, dois e cinco cruzeiros, as notas (ou moedas) podem ser organizadas em grupos de 10 cruzeiros cada um. O valor da coleção será então fàcilmente conhecido, usando-se o nome das dezenas (dez, vinte, trinta etc.) e acrescentando-se o valor das notas (ou moedas) avulsas, contadas de 1 em 1, 2 em 2 e 5 em 5. Do mesmo modo, notas (ou moedas) de 10, 20 e 50 cruzeiros seriam organizadas em grupos de 100 cruzeiros cada um. A coleção seria então avaliada, usando-se o nome das centenas (cem, duzentos, trezentos etc.) e acrescentando-se o valor das notas (ou moedas) avulsas, contadas de 10 em 10, 20 em 20 e 50 em 50. Coleções de notas (ou moedas) de 100, 200 e 500 podem ser contadas em grupos de 1 000, usando-se o nome dos milhares (mil, dois mil, três mil etc.), e acrescentando-se o valor das notas (ou moedas) avulsas, contadas de 100 em 100, 200 em 200 e 500 em 500. E, assim, sucessivamente.

O problema importante de fazer trôco corretamente, ou verificar se o recebeu certo é semelhante ao da contagem do dinheiro. Envolve pensamento aditivo e é um processo de contar, partindo da quantia gasta para a quantia dada para efetuar o pagamento. É verdade que se pode calcular o trôco pela subtração, mas êsse não é o processo comum usado na vida de todos os dias. A prática do trôco deveria ser feita na escola da mesma maneira pela qual é feita nas situações reais.

Geometria

O programa do estágio anterior forneceu base para um estudo mais sistemático da geometria no 3º estágio.

As crianças agora poderão reconhecer o segmento da reta em diferentes posições: vertical, horizontal e inclinada. Poderão também reconhecer a linha curva, devendo ser encorajadas a relacionar os conhecimentos geométricos discutidos em classe com seu ambiente diário.

Experiências para o reconhecimento dos ângulos devem ser previstas, levando a classe a perceber que duas semi-retas partindo do mesmo ponto formam ângulos. Por meio do desenho e da observação de ângulos no seu meio-ambiente, vai a criança percebendo que os ângulos variam pela sua grandeza. Tomando como ponto de referência o ângulo reto, percebe a criança que há ângulos maiores e menores que o reto: obtuso e agudo.

Todo o trabalho inicial se resume a superfícies planas. Mais tarde, o professor apresentará à classe os prismas mais comuns (o paralelepípedo e seu caso particular — o cubo). As primeiras experiências com os sólidos terão como finalidade levar a criança a perceber a terceira dimensão. Por isso mesmo insistimos que sejam usados os próprios sólidos construídos em papelão ou outro material. Não convém usar o desenho dos sólidos, incapazes de reproduzir a realidade.

Nessas primeiras experiências as crianças começam a perceber a diferença entre os planos e os sólidos.

O que se pretende da criança nesse estágio é que ela aprenda a reconhecer as figuras, a descrevê-las em têrmos de suas propriedades elementares e a usar seus nomes corretamente.

Resolução de problemas

USO DA EQUAÇÃO

Supõe-se que, a essa altura, a criança já conheça os quatro tipos de situação-problema (aditiva, subtrativa, multiplicativa e de divisão-repartição) e já tenha sido alertada para a ação que caracteriza cada tipo, observando como se representa a situação por meio de símbolos. Assim, se um grupo de 3 meninos se junta a um grupo de 2 meninos, a situação é simbolizada por $2 + 3 = n$.

O leitor verá que neste livro, apenas por conveniência, sempre que uma equação é ilustrada, *n* é usado como "guardador de lugar" do nome do número que deve ser encontrado. As crianças aprenderão que qualquer símbolo pode ser usado nas equações como "guardador de lugar". Talvez seja bom começar selecionando êsse símbolo arbitràriamente ($\square$, por exemplo) e mais tarde, ampliar a idéia de modo a incluir diferentes letras e outros símbolos, como um traço (—) ou um ponto de interrogação (?).

Para habilitar-se a resolver problemas — o objetivo fundamental do ensino da Matemática — a criança precisa aprender a *descrever a situação usando uma simbolização matemática.*

Cuidadosa introdução deve preceder essa importante fase da resolução de problemas.[52] O aluno precisa ver, passo por passo, como formar as equações que descrevem situações aditivas e situações subtrativas. Do mesmo modo, tem de observar a diferença entre as equações nas situações de multiplicação e divisão.

Convém ressaltar que equações dêsse tipo simples têm sido usadas há anos no ensino da Matemática, nesse estágio ou mesmo antes. É comum encontrar formas como $3 + 2 = \ldots\ldots$ ou $7 - 4 = ?$ ou $7 + \ldots = 9$ ou $3 \times 5 = ?$, e outras, em exercícios de livros e cadernos. Entretanto, é preciso admitir que os programas elementares de Matemática não têm feito uso dessas equações para mostrar a estrutura de problemas. Costumam usá-las apenas como meios de promover exercícios de cálculo.

A equação descreve com vantagem a situação-problema.[48] Lida normalmente, da esquerda para a direita, a equação mostra como pensar no que "acontece" no problema, na ordem em que êsses acontecimentos ocorreram. Além disso, separando os numerais pelo sinal de operação ($+$, $-$, x, $\div$), utiliza os sinais para exprimir as partes essenciais do pensamento.

A forma vertical, ao contrário, é maneira de dispor os numerais para computar. Por isso, só se justifica depois de se ter decidido que operação realizar. A necessidade da equação para mostrar o pensamento e da disposição vertical dos numerais para ajudar a computar torna-se cada vez mais evidente, à medida que os problemas tornam-se mais difíceis e o cálculo mais complexo.

SUBTRAÇÃO COMPARATIVA (QUANTO MAIS OU QUANTO MENOS)

Na parte referente ao 2º estágio, foi dito que os números costumam ser usados com freqüência na comparação de um grupo com outro grupo. O exemplo sugerido foi: "Marcos tem 5 cachorros e 3 gatos. Quantos cachorros êle tem mais que gatos?" O número de cachorros deve ser comparado com o número de gatos. Em situações como essa é costume dizer-se aos alunos para subtrair, mas raramente se dá a êles qualquer ajuda real no sentido de compreender por que a subtração conduz ao resultado certo. No 3º estágio, pode estudar-se, completamente, êsse tipo de situação. Dêsse modo, as situações de comparação são discutidas mais detalhadamente aqui.

Como já vimos, a questão é: "Que método de manipulação de objetos resolverá o problema, ligando, ao mesmo tempo, o processo usado com as experiências anteriores da criança em subtração?" A situação-comparação não é uma situação subtrativa do tipo anteriormente estudado, quando um único grupo era dado, e dêle retirava-se um subgrupo para encontrar o resto. No problema acima,

o grupo de 3 gatos não é um subgrupo do grupo de 5 cachorros e nada na situação sugere o processo de subtração. Alguma coisa deve ser feita para mostrar à criança por que ela pode usar o processo de subtração em tais situações. O recurso usado deve tornar claro que não se subtrai 3 gatos de 5 cachorros. Além disso, os fatos lógico e psicológico envolvidos aqui, não podem ser disfarçados pelo pensamento: uma vez que gatos e cachorros são animais, pode dizer-se "Subtrair 3 animais de 5 animais".

Bàsicamente, na situação de comparação há dois grupos, cujos tamanhos são conhecidos. O conceito fundamental envolvido é a correspondência um-a-um dos objetos nos dois grupos. Quando todos os membros de um conjunto de objetos têm correspondentes no outro conjunto, ou seja, os objetos de um conjunto podem ser postos em correspondência um-a-um com todos os elementos do outro conjunto, os dois grupos são numèricamente iguais.

Portanto, sempre que uma comparação é feita, a correspondência um-a-um pode ser estabelecida e continuada até que todos os objetos de um grupo tenham sido usados. Se algum objeto resta no outro grupo, êsse excesso deve ser observado, levando à conclusão que "Marcos tem mais cachorros do que gatos". Ao mesmo tempo, pode focalizar-se a atenção no fato de que um dos grupos não tem objetos suficientes para serem postos lado a lado com todos os objetos do outro. Se essa insuficiência ou falta é notada, diz-se que "Marcos tem menos gatos que cachorros". Ambas as afirmações descrevem a mesma situação, mas de pontos de vista diferentes. No primeiro caso, o grupo de gatos é usado como grupo básico ou padrão; no outro caso, o grupo de cachorros é que é o grupo básico.

Às vêzes, as comparações precisam ser mais precisas. Poderia perguntar-se, por exemplo: "Quantos cachorros Marcos tem mais que gatos?" Nesse caso, o grupo de gatos será tomado como grupo básico. Se se pensa no grupo de cachorros que podem ser postos em correspondência um-a-um com os gatos, o número de cachorros dirá quantos pares podem ser feitos. Para demonstrar como se encontra a resposta numérica, cobrem-se os objetos postos aos pares ou imagina-se que êles foram retirados. O número de objetos restantes é a "resposta". Assim, no problema em discussão, se se imagina que o grupo de 3 cachorros, pôsto em correspondência um-a-um com o de 3 gatos, foi retirado, pode pensar-se "5 cachorros menos 3 cachorros". A resposta, como é comumente estabelecida, seria: "Marcos tem mais 2 cachorros que gatos".

Do mesmo modo, pode focalizar-se a atenção no grupo menor — os gatos — e tomar o grupo de cachorros como padrão. Nesse caso, dir-se-ia "Marcos tem menos 2 gatos que cachorros". A parte numérica da resposta é a mesma, mas como o interêsse primário é a falta, a resposta é dada usando-se a palavra *menos*.

Na exemplificação sugerida acima, o fato de cobrir-se o subgrupo dos objetos postos aos pares sugere o processo de subtração. Quando os grupos e a ação são simbolizados (5 — 3), é o processo de subtração que se usa para encontrar a resposta. No ensino tradicional nenhuma explicação parecida foi tentada. Pelo contrário, apenas se dizia aos alunos que, em situação como estas, o número menor devia ser subtraído do número maior.

Professôres que empregam a dramatização e técnicas visuais para desenvolver compreensão da situação de "quantos mais" ou "quanto menos", podem levar os alunos a pensar de acôrdo com a orientação que acabamos de sugerir.

Essa análise da Subtração comparativa é básica para introduzir êsse nôvo tipo de situação-problema. Nessa introdução só devem ser usados os fatos básicos de subtração que a criança já aprendeu.

SITUAÇÕES ADITIVAS RESOLVIDAS POR SUBTRAÇÃO

Na parte referente ao 2º estágio, falou-se no tipo de situação-problema geralmente chamado "saber quantos mais são necessários" [15]. No 3º estágio, o aluno precisa rever situações dêsse tipo e compreendê-las muito melhor, daí a razão de seu estudo reaparecer aqui.

Nesse importante tipo de situação-problema, freqüentemente pergunta-se "quantos foram ganhos?". Por exemplo: Marcelo tinha 7 livros. Um amigo deu-lhe alguns livros usados. Agora êle tem 13 livros. Quantos livros ganhou do amigo?"

Outros problemas, com a mesma estrutura, perguntam: "Quantos mais são necessários?" Por exemplo: "13 pais visitarão uma sala de aula, onde só há 7 cadeiras para êles. Quantas cadeiras mais serão necessárias?"

A análise de situações dêsse tipo mostra, primeiro, que há sempre um grupo de tamanho conhecido para servir de ponto de partida; segundo, o grupo conhecido deve ser aumentado pela reunião com um grupo de tamanho desconhecido. O tamanho dos grupos reunidos é também conhecido.

Convém observar que a pergunta "quantos mais são necessários?" surge de um tipo especial de situação social e não descreve adequadamente a geralidade das situações que apresentam êsse tipo de estrutura. Em algumas situações, a quantidade desconhecida pode não ser "necessária". Por exemplo: "Ontem 5 crianças faltaram porque estavam doentes. Hoje, pela mesma razão, faltaram as mesmas crianças e mais algumas. Ao todo, 9 crianças estão ausentes por doença. Quantas crianças mais foram acrescentadas à "lista dos doentes"? Êsse tipo mais geral de situação-problema não tem aparecido nos livros de Matemática, inclusive nos de uso das crianças. A ênfase tem sido dada a uma particular aplicação social

dêsse tipo de problema — existência da necessidade. Além disso, êle só é explorado em discussões sôbre subtração. Não convém ressaltar que a ação envolvida nesse tipo de problema é a de reunir, ou aditiva. Surgiria dificuldade, pois não se conhece o número a ser adicionado. Quando essa situação-problema é representada simbòlicamente ($7 + n = 13$), é fácil ver que a resposta não pode ser encontrada diretamente pela adição, como no caso de dois grupos de tamanhos conhecidos que são reunidos para encontrar-se o grupo total. Quando os números envolvidos no problema são pequenos, a resposta vem à mente da maioria dos adultos, tão fàcilmente, que a dificuldade da situação passa despercebida.

Diante de problemas como êsses, o que vem ocorrendo freqüentemente é dizer-se a criança para subtrair o número menor do número maior. Através de repetição constante de problemas do mesmo tipo, algumas crianças conseguem resolvê-los. Apesar da ação pedir claramente a reunião ou adição, realmente o processo usado para resolver problemas com essa estrutura é a subtração.

A chave para compreender êsse tipo de problema é reconhecer que a ação aditiva conduz à quantidade desconhecida. Quando a solução é demonstrada concretamente, o número de objetos a adicionar pode ser determinado "contando-se para a frente", um a um, os objetos que vão sendo reunidos ao grupo inicial, até encontrar o número total. Assim, no caso do problema dos livros de Marcelo, partindo de 7, pode dizer-se "oito, nove, dez" e assim por diante até "treze". O número adicionado será encontrado por uma nova contagem dos objetos adicionados, dessa vez começando por "um" e terminando em "seis".

Tal método de contagem é trabalhoso e toma muito tempo. O objetivo do ensino é preparar o aluno para resolver o problema *através de símbolos e sem contagem*. Primeiro a criança deve visualizar a quantidade total e, depois, imaginar que o grupo inicial foi removido, ficando apenas o grupo que foi adicionado. Sòmente então ela pode compreender porque se subtrai para encontrar a solução. Convém ressaltar que muitas experiências com objetos serão necessárias antes que o aluno possa perceber a situação dessa maneira.

Outro tipo de situação aparece no problema seguinte: "Toninho tinha alguns discos. Seus amigos deram-lhe mais 6. Agora êle tem 13. Quantos discos tinha antes de receber os 6 discos dos amigos?" Nesse problema precisamos encontrar o número de elementos que se tinha inicialmente, conhecendo-se o número de elementos adicionados e o número de elementos resultantes. Uma vez que a situação é bàsicamente aditiva, a equação que a descreve é $n + 6 = 13$. O aluno precisa compreender porque se obtém a solução subtraindo 6 de 13. Primeiro, tem de perceber que não se pode adicionar porque ainda não se conhece um dos números.

Pode, entretanto, imaginar que 6 discos (os discos dados pelos amigos de Toninho) são tirados dos discos que Toninho tem agora. Isso restabelece a situação inicial e leva o aluno a compreender porque se subtrai 6 de 13 para achar a resposta. Êsse tipo de problema pode ser introduzido no 3º estágio, embora não seja estudado no comêço do ano.

Resumindo, no 3º estágio, poderiam ser estudados os seguintes tipos básicos de situações-problema: 1) aditiva, subtrativa, multiplicativa e de divisão no caso de encontrar o número de grupos; 2) situações de comparação (quanto mais ou quanto menos); 3) quantos foram ganhos ou quantos mais são necessários; 4) divisão (encontrar o tamanho do grupo); e 5) encontrar quantos havia inicialmente, conhecendo-se o número adicionado e o resultado total. 37,54.

O quadro de tipos de problemas (páginas 154 a 156) relaciona todos os tipos a serem desenvolvidos nos cinco primeiros estágios da aprendizagem da Matemática.

Certos problemas que envolvem multiplicação e divisão baseiam-se na *idéia de relação*. Não convém que essa idéia seja pròpriamente ensinada e simbolizada antes do 4º estágio.

Apresentaremos, a seguir, o pensamento que serve de base a essas situações.

PROBLEMAS DO TIPO RELAÇÃO

Nos programas tradicionais de Matemática a criança resolvia muitos problemas pela simples aplicação de regras. Assim acontecia com os problemas do tipo relação. A maioria das crianças não compreendem a estrutura básica dessas situações mesmo depois de longas e repetidas experiências e, muitas vêzes, os princípios ou idéias sôbre os quais repousam tais situações, não são ensinados.

Vejamos o problema: "Se maçãs são compradas a 200 cruzeiros cada, quantas maçãs Danilo pode comprar com 1000 cruzeiros?" A maneira simples, habitual, usada antigamente, era dizer ao aluno que dividisse 1000 por 200.

Nesse problema, entretanto, dois conjuntos de espécies diferentes estão envolvidos — maçãs e cruzeiros. O fato de que as maçãs custam 200 cruzeiros cada, estabelece uma correspondência entre uma maçã e um grupo de 200 cruzeiros. Assim, o problema pode ser resolvido encontrando-se quantos grupos de 200 cruzeiros podem ser feitos com 1000 cruzeiros. Na concretização da solução dêsse problema, os 1000 cruzeiros podem ser arrumados em grupos de 200 cruzeiros, e uma maçã, colocada junto de cada grupo. Em lugar de objetos, tracinhos podem ser usados para representar maçãs e cruzeiros. Em outras palavras, o número de maçãs que se pode comprar é o número de grupos de 200 cruzeiros que se conseguir formar.

Em problemas dêsse tipo, os números dados (1000 e 200) referem-se a uma qualidade de objetos (no caso, cruzeiros), mas a resposta do problema, à outra (no caso, maçãs, um tipo diferente de objeto). Situações dêsse tipo são melhor compreendidas quando se pensa nelas em têrmos de relações, simbolizadas por pares de numerais, chamados *razões*, e por proporções, simbolizadas por um par de razões iguais. Tradicionalmente êsses assuntos não eram introduzidos no curso primário e se um ou outro programa os incluía nos últimos anos, não apresentava uma visão moderna do assunto. É inacreditável que ainda hoje se exija que os alunos resolvam desde cedo êsses problemas, sem que lhes seja dado êsse conhecimento básico.

Na situação focalizada, a relação pode ser expressa como "200 por uma maçã" e, mantendo a mesma relação, Danilo deve gastar 1000 cruzeiros, ou seja, "1000 cruzeiros para n maçãs". Portanto, para solucionar o problema teremos de resolver a proporção:

$$200/1 = 1000/n.$$

Apesar da utilidade dêsse recurso, não convém desenvolvê-lo no 3º estágio.

No moderno programa de Matemática as idéias de relação e de comparação são introduzidas e simbolizadas no 4º estágio, de maneira bem explícita. Até chegar a êsse nível, o professor pode fazer três escolhas: a) introduzir êsse tipo de situação só depois que ela possa ser compreendida pela criança, o que envolve o risco de se deixar as crianças sem preparo para resolver êsses problemas nos testes que não são organizados pelo professor da turma ou em atividades fora da escola; b) concordar em dar nesse 3º estágio um tratamento explícito ou formal à noção de relação e à maneira de simbolizá-la, orientação considerada não aconselhável por muitos professôres; c) usar um recurso informal para desenvolver a idéia de relação, sem se preocupar com o simbolismo. Essa última hipótese parece ser a aconselhável.

A solução do problema da compra das maçãs exigiu a divisão. O exemplo seguinte é um exemplo de uma situação de relação resolvida pela multiplicação: "Há 4 vasos e em cada vaso devem ficar 3 flôres. Quantas flôres serão necessárias ao todo?" Aqui, a relação pode ser expressa como "3 flôres para 1 vaso". Essa situação pode ser demonstrada fazendo-se corresponder cada grupo de 3 flôres a um vaso, reunindo-se finalmente os 4 grupos de 3 flôres para formar um grupo de 12 flôres. Essa objetivação permite mostrar que o problema não envolve a noção confusa de "vaso vêzes flôres". Geralmente, nessas situações, na determinação do número de grupos iguais, associam-se grupos de objetos ou idéias diferentes, como número de flôres a ser usado em determinado número de vasos ou número de coisas a ser comprada por determinado preço.

1 — 3
4 —

Aplicações das idéias discutidas acima são também requeridas em algumas situações de medir. Nessas situações, as quantidades são expressas em têrmos de uma unidade de medida. Em alguns problemas será necessário exprimir em outra unidade a quantidade medida. Essa unidade pode ser maior ou menor que a unidade usada inicialmente.

Por exemplo, consideremos o problema: "4 litros correspondem a quantos meios-litros?" Ao trocar a unidade de medida, de litros para meios-litros, estabelece-se a relação "2 meios-litros para 1 litro". A relação pode também ser expressa por "n meios-litros para 4 litros". Portanto, a proporção que traduz o problema é a seguinte:

$$2/1 = n/4.$$

O aluno precisa verificar, através da concretização, que, realmente, cada litro é substituído por 2 meio-litros. Assim, o problema de trocar 4 litros por meios-litros é visto como a multiplicação na qual o número de grupos iguais de 2 meios-litros é igual ao número de litros (4). Entretanto, se a quantidade medida em meios litros vai ser expressa em litros, cada grupo de 2 meios litros corresponde a um litro. Êsse problema, então, pode ser visto como divisão-repartição.

No 3º estágio, para chegar à idéia de relação, o aluno pode verificar, de maneira informal, como fazer corresponder os objetos de um conjunto com os objetos de outro conjunto. É preciso que êle veja como os grupamentos são feitos e que seja ajudado a decidir quando multiplicar e quando dividir.

ENCONTRANDO O TAMANHO DE GRUPOS IGUAIS (DIVISÃO-REPARTIÇÃO)

Os dois tipos de situação de divisão mais importantes já foram discutidos à página 30. O tipo de comparação ou "medida" pode ser usado para ensinar os fatos básicos de divisão, partindo-se depois para uma cuidadosa introdução aos problemas que envolvem divisão-repartição. Nesse tipo de divisão, tanto se conhece o número de objetos no grupo total, como o número de subgrupos iguais a serem formados. O que se deseja é encontrar o número de objetos em cada subgrupo então formado.

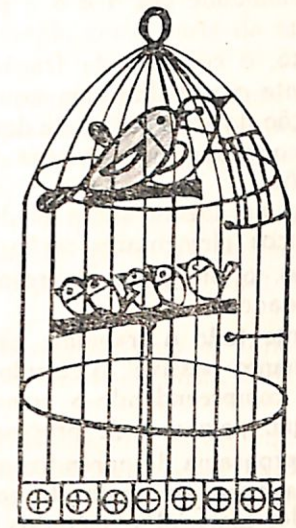
Na divisão-comparação ou "medida", os grupos iguais podem ser formados *grupo por grupo*. Suponhamos, por exemplo, que um grupo de 15 balas deva ser dividido em grupos de 3 balas cada um. Quantos grupos teremos? Concretizando a situação, formam-se grupos de 3 balas e, então, conta-se o número de grupos obtidos. Essa situação pode ser simbolizada pela equação $15 \div 3 = n$.

Numa situação de divisão-repartição, ignora-se o número de objetos em cada subgrupo, mas conhece-se o número de grupos iguais a serem formados. Por exemplo, suponhamos que 15 balas vão ser divididas igualmente por 3 crianças. Quantas balas ganhará cada criança? Nessa situação, os subgrupos não podem ser formados imediatamente porque o número de objetos a ser pôsto em cada grupo não é conhecido. Será preciso usar um método indireto de operação. Essa situação pode ser simbolizada pela equação $15 \div n = 3$.[32] Aqui, o símbolo do número desconhecido aparece como *divisor*, indicando que um método indireto de solução deve ser encontrado.

Concretamente, a maneira mais simples de solucionar o problema é tomar as balas e colocá-las uma a uma nos três grupos. O número de cada grupo pode ser encontrado, quando tôdas as balas tiverem sido distribuídas.

Cuidadosa observação dessa atividade de repartir mostra que 3 balas são usadas de cada vez. Em outras palavras, em vez de tomar as balas uma a uma, elas poderão ser tomadas em grupos de 3. Vista dessa maneira, a situação modifica-se e difere da examinada primeiro. A pergunta recai no caso "quantos grupos de 3 podem ser formados?" Assim, o cálculo usado para resolver $15 \div n = 3$ será $15 \div 3 = n$.

A criança não pode desenvolver a compreensão de problemas que envolvem divisão-repartição apenas ouvindo dizer que conta deve ser feita. É preciso que tenha oportunidade de ver como a situação se desenrola com objetos e como o cálculo com símbolos numéricos também pode conduzir à mesma resposta.



Estágio 4

Visão geral — Aspectos importantes a ressaltar

Para sintetizar o trabalho do 4º estágio serão levados em conta os tópicos mais importantes, sem que se considere particularmente a sua seqüência.

Primeiro, no 4º estágio a criança já deve ter aprendido todos os fatos de adição, subtração, multiplicação e divisão, a ponto de evocá-los imediatamente. Êsses fatos básicos foram ensinados nos anos anteriores, mas para alguns alunos talvez seja necessária uma revisão, acompanhada de mais prática.

Segundo, a compreensão do sistema decimal de numeração, com o qual a criança deverá estar familiarizada, se estenderá aos números além do milhão.

Terceiro, os processos de adição, subtração, multiplicação e divisão serão revistos e praticados, envolvendo progressivamente numerais maiores.

Através de descobertas e generalizações, algumas propriedades de grande aplicação em Matemática serão estudadas com relação a essas operações.

Quarto, as primeiras noções de múltiplos e divisores e da divisibilidade constituirão um dos tópicos incluídos nesse 4º estágio, levando a criança a aplicar os princípios do sistema decimal de numeração para reconhecer números divisíveis por 2, 5, 10, seguindo-se o estudo da divisibilidade por 4 e 8 e por 3 e 9, se o professor julgar conveniente.

Quinto, o conceito de fração será enriquecido e ampliado, principalmente o trabalho com equivalência, iniciado no 3º estágio. A introdução da idéia básica de denominador comum preparará a criança para a comparação de frações, bem como para a adição e subtração de frações.

Sexto, as idéias sôbre medição e dinheiro e alguns conceitos geométricos elementares serão revistos e enriquecidos.

Sétimo, o programa de resolução de problemas será mantido e aprofundado.

Durante todo o trabalho, as crianças serão encorajadas a usar, tanto quanto possível, o cálculo "de cabeça". Farão isso desejando fazê-lo, compreendendo-o como um meio de reduzir seu trabalho de cálculo pelo uso de processos abreviados.

Êsse programa de aprendizagem torna-se, portanto, bastante substancial e para ser realizado com sucesso, requer tempo de ensino adequado, material e métodos modernos.

Geometria: Formas, perímetro, conceito de área

No início do 4º estágio não é bom levar a criança a rever as operações estudadas nos estágios anteriores. Haverá bastante tempo para essa revisão, depois que a classe tenha um bom comêço. Melhor será iniciar o ano com o estudo de um conteúdo nôvo, como por exemplo, algumas noções de Geometria.

Há mais de 60 anos, uma comissão de grande influência (*The Committee of Ten*, 1893) recomendou que se intensificasse o ensino da Geometria. Entretanto, esta recomendação não se tornou, realmente, uma fôrça motivadora, pois muito pouco se tem feito nessa área, no sentido de tornar a recomendação uma realidade. É urgente um progresso nessa direção, pois a criança precisa de conhecimentos de Geometria em suas atividades dentro e fora da escola.

Nos estágios anteriores a criança aprendeu a reconhecer o quadrado, o retângulo, o triângulo e o círculo. Êsses conhecimentos serão aprofundados no 4º estágio.

Com as experiências já adquiridas, poderá começar a perceber a diferença entre figuras planas e sólidas, reconhecendo-lhes as dimensões. Poderá compreender o significado de têrmos como: comprimento, largura, altura, base, diâmetro, etc., e a adquirir, também, os conceitos de área e volume.

Inicialmente, precisará de atividades por meio das quais possa contar o número de unidades de área que podem cobrir uma determinada superfície. Mais tarde, meios computacionais de calcular a área do quadrado e do retângulo podem ser ensinados, desde que a compreensão esteja garantida.

Neste livro, o cálculo da área é discutido como parte da resolução de problemas.

Outro conceito a desenvolver no 4º estágio é o de "medida à volta" de triângulos, retângulos (incluindo quadrados) e outros polígonos. O têrmo técnico para "medida à volta" de um polígono é *perímetro* e pode ser introduzido nesse estágio.

Uma boa maneira de tornar claro o sentido do têrmo *perímetro* é mostrar que o contôrno de um polígono pode ser pensado como uma "linha reta". Assim, o perímetro passa a ser o total do comprimento dos lados.

No 4º estágio a criança deve familiarizar-se com os sólidos mais comuns, notadamente com o cubo de um decímetro, dada a sua relação com o litro.

Não será difícil desenvolver as primeiras noções de volume, se a criança aplicar diretamente no sólido a medir uma unidade de volume escolhida e contar o número de vêzes que tal aplicação foi possível.

Sistema de numeração decimal

Ao traçar as diretrizes gerais para o trabalho do 1º ao 3º estágio, dissemos que para compreender a Matemática era preciso que os alunos compreendessem o sistema de numeração decimal.

Duas idéias — o *grupamento em 10* (10 unidades, 10 dezenas, 10 centenas, 10 milhares) e o *valor posicional* — são básicas.[33] * Para começar a aprender os princípios do sistema de numeração de base dez, é preciso ver como um grupo grande de objetos pode ser reorganizado em grupos de 10. Segundo, é preciso aprender como fazer os registros de tais agrupamentos com marcas ou traços, para depois aprender a usar a idéia de valor posicional e os numerais. Experiências concretas poderiam acompanhar o desenvolvimento dessas noções.

Para alunos que não tiveram experiências como as discutidas até aqui, e, como revisão para os que ainda precisam suplementar essas experiências, o trabalho no 4º estágio pode incluir nova apresentação dos princípios básicos do sistema de numeração de base dez, cuja compreensão se estenderá aos números além do milhão. Uma vez

* Os numerais referem-se aos itens da bibliografia às págs. 143 a 149.

compreendidos os princípios do sistema e sabendo aplicá-los, o aluno poderá trabalhar com qualquer número.

Tendo em vista que os mesmos princípios do reagrupamento da "reserva" e do "recurso" em adição e subtração de números inteiros serão novamente básicos às operações com decimais, será interessante sondar a compreensão das crianças nesse assunto, voltando se necessário, à demonstração dêsses princípios (ver páginas 32 e 33 do 2º estágio e 47 do 3º).

Com os conhecimentos sugeridos acima e na parte de sistema de numeração dos estágios anteriores, a criança não encontrará dificuldade na leitura e na escrita de numerais que representam números grandes. Essa habilidade é importante, tendo em vista que tais numerais são encontrados em jornais, revistas e livros que a criança lê.

O aluno que aprendeu a reagrupar de 10 em 10, que compreendeu o valor posicional e que sabe os nomes dêsses grupos até mil, precisa aprender apenas um nôvo nome para poder ler e escrever numerais menores de um bilhão. Êsse nome nôvo é *milhão*. Para ler os numerais de mil a 1 milhão, repetem-se os nomes dos números menores que mil, usando agora a palavra *mil*. Assim, para ler 481 217, diz-se "quatrocentos e oitenta e um *mil*, duzentos e dezessete". O grupo de três algarismos da esquerda foi lido como se 481 estivesse sòzinho, acrescentando-se a palavra *mil*.

De maneira semelhante, na leitura de qualquer numeral entre 1 milhão e 1 bilhão, usam-se os grupamentos em centenas, dezenas e unidades e a palavra auxiliar *milhão*. Assim, para ler 325 481 217 diz-se "trezentos e vinte e cinco *milhões*, quatrocentos e oitenta e um *mil*, duzentos e dezessete".

Um programa moderno usa recursos visuais variados para ajudar a desenvolver a habilidade de ler e escrever os numerais.

As operações fundamentais

PRÁTICAS DE REVISÃO E REENSINO

No 4º estágio permanece a tarefa de reensino sistemático da multiplicação e divisão com produtos e dividendos de 40 a 81. Como antes, os métodos a usar serão o agrupamento de objetos de várias maneiras e a aplicação dos conhecimentos do aluno com relação ao sistema de numeração decimal. Por exemplo, 40 objetos podem ser organizados em 5 filas de 8 ou 8 colunas de 5. Os mesmos 40 objetos podem também ser vistos como 4 grupos de 10 objetos e o total como 40. Assim o aluno verá que $5 \times 8 = 40$ e $8 \times 5 = 40$. Métodos semelhantes serão usados para o reensino dos fatos fundamentais da divisão.

Quando práticas suplementares são necessárias para correção de erros, o ideal seria que o aluno fizesse sua revisão ou reaprendizagem,

usando o livro destinado ao ano em que o conceito começou a ser desenvolvido. As crianças lucrarão muito mais do estudo de lições originais de que da revisão condensada típica que geralmente aparece no livro para o ano ou estágio posterior. Não é possível incluir no livro preparado para um estágio, material adequado para reensinar tudo que deveria ter sido aprendido em anos anteriores. Conseqüentemente, um aluno que tem sérias deficiências não pode reparar tais deficiências pelo estudo de lições condensadas destinadas a alunos que tenham aproveitamento normal.

Muitos alunos, entretanto, podem precisar apenas de uma revisão com o objetivo de recordar assuntos já compreendidos e nos quais já demonstrem certa habilidade. Essa revisão, portanto, vai cobrir uma área já familiar à criança, embora alguns detalhes tenham sido esquecidos. Convém admitir que, no 4º estágio, o processo de adição, envolvendo numerais de um, dois, três e quatro algarismos precisa ser reensinado. A maneira de proceder pode ser a mesma aconselhada nos estágios anteriores.

Em geral, é aconselhável promover uma completa revisão de um processo no ano escolar que segue imediatamente aquêle no qual o processo ou o nôvo aspecto do processo foi introduzido, pois muitas são as razões pelas quais as crianças podem não ter adquirido a necessária habilidade ou compreensão. Para crianças que não aprenderam satisfatòriamente um conceito dois anos depois de se ter iniciado o desenvolvimento de tal conceito, um tratamento comum não será suficiente, e, muito menos, uma revisão condensada. Alunos que estejam dois ou mais anos retardados em Aritmética, precisam, é claro, de maior número e de maior variedade de experiências de aprendizagem do que o que se possa incluir em qualquer programa comum de estudo para o nível no qual, muitas vêzes, o aluno foi classificado apenas do ponto-de-vista administrativo. Há o perigo de confundir e desencorajar êsses alunos, usando na revisão procedimentos apropriados à média dos alunos. Por outro lado, alunos médios ou mesmo acima da média podem ser beneficiados com uma revisão bem planejada, feita na base de reconhecimento de que tais alunos já têm alguns conhecimentos e habilidades. Para êles, a revisão e a prática devem visar a aumentar a confiança e o nível de aproveitamento.

Na revisão ou no reensino, recomenda-se a apresentação dos exercícios de cálculo na forma horizontal (uso da equação). Há duas razões para isso. Primeiro, porque ao analisar um problema, o aluno precisa reconhecer as ações básicas, reais ou imaginárias, que ocorrem no problema. Por exemplo, em uma situação aditiva um grupo de 5 meninos é reunido a outro grupo de 8 meninos e pergunta-se o número de meninos do grupo total. Essa situação é descrita simbòlicamente, escrevendo-se a equação $8 + 5 = n$. A forma horizontal mostra claramente como se processa o pensamento